

## COMPENDIO DE RESULTADOS

ABSTRACT.

### 1. PRELIMINARES

En la categoría  $\mathbf{Frm}$  los objetos son retículas completas que cumplen la ley distributiva de marcos (LDM) y los morfismos entre ellos son funciones monótonas que preservan la estructura de la retícula. Si  $A \in \mathbf{Frm}$ , entonces podemos asignarle un espacio topológico a través de  $S = \text{pt } A$ , donde  $p \in \text{pt } A$  si  $p$  es  $\wedge$ -irreducible.

Denotemos por  $QS$  a la familia de todos los subconjuntos compactos saturados de  $S$ . Por el Teorema de Hoffman-Mislove (Teorema H-M), existe una correspondencia biyectiva entre  $QS$  y el premarco de los filtros abiertos de  $A$  (denotado por  $A^\wedge$ ). A su vez, si  $F \in A^\wedge$ , estos están en correspondencia biyectiva con lo que se conoce como núcleos ajustados y con ello obtenemos una versión extendida del teorema antes mencionado. En este caso,  $v_F$  es el correspondiente núcleo ajustado asociado a  $F$ .

Si  $j \in NA$ , entonces  $A_j = \{x \in A \mid j(x) = x\}$  es un marco y este es el marco cociente. El cociente  $A_j$  es compacto si y solo si  $\nabla(j) \in A^\wedge$ , donde

$$\nabla(j) = \{x \in A \mid j(x) = 1\}.$$

En particular,  $A_{v_F}$  es un cociente compacto.

Si  $f^*: A \rightarrow B$  es un morfismo de marcos y  $F \subseteq A$ ,  $G \subseteq B$  son filtros en  $A$ ,  $B$ , respectivamente, podemos producir nuevos filtros de la siguiente manera:

$$(1) \quad b \in f^*F \Leftrightarrow f_*(b) \in F \quad \text{y} \quad a \in f_*G \Leftrightarrow f^*(a) \in G$$

donde  $a \in A$ ,  $b \in B$  y  $f_*$  es el adjunto derecho de  $f^*$ . Aquí  $f^*F \subseteq B$  y  $f_*G \subseteq A$  son filtros en  $B$  y  $A$ , respectivamente.

**Proposición 1.1.** *Para  $f = f^*: A \rightarrow B$  un morfismo de marcos y  $G \in B^\wedge$ , entonces  $f_*G \in A^\wedge$ .*

*Demostración.* Por (1),  $f_*G$  es un filtro en  $A$ . Necesitamos que  $f_*G$  satisfaga la condición de filtro abierto. Sea  $X \subseteq A$  tal que  $\bigvee X \in f_*G$ , con  $X$  dirigido. Entonces

$$Y = \{f(x) \mid x \in X\}$$

es dirigido y  $f(\bigvee X) = \bigvee f[X] = \bigvee Y \in G$ . Como  $G$  es un filtro abierto, existe  $y = f(x) \in Y$  tal que  $y \in G$ . Así  $x \in f_*G$  de modo que  $f_*G \in A^\wedge$ .  $\square$

En [Sim04, Lema 8.9 y Corolario 8.10] muestran que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f^\infty} & A \\ U_A \downarrow & & \downarrow U_A \\ \mathcal{O}S & \xrightarrow{F^\infty} & \mathcal{O}S \end{array}$$

conmuta laxamente, es decir,  $U_A \circ f^\infty \leq F^\infty \circ U_A$ . En este diagrama  $U_A$  es el morfismo reflexión espacial,  $f^\infty$  y  $F^\infty$  representan los núcleos asociados a los filtros  $F \in A^\wedge$  y  $\nabla \in \mathcal{O}S^\wedge$ . También  $f^\infty$  y  $F^\infty$  son las cerraduras idempotentes asociadas a los prenúcleos  $f$  y  $F$  respectivamente.

Aquí probamos algo más general, ya que consideremos el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\hat{f}^\infty} & A \\ j \downarrow & & \downarrow j \\ A_j & \xrightarrow{f^\infty} & A_j \end{array}$$

donde  $\hat{f}^\infty$  es el núcleo asociado al filtro  $j_*F \in A^\wedge$  y  $j \in NA$ .

**Lema 1.2.** Para  $j$ ,  $f$  y  $\hat{f}$  como antes se cumple que  $j \circ \hat{f} \leq f \circ j$ .

*Demostración.* Por (1)

$$\hat{f} = \dot{\bigvee} \{v_y \mid y \in j_*F\} \quad \text{y} \quad f = \dot{\bigvee} \{v_{j(y)} \mid j(y) \in F\}.$$

entonces para  $a \in A$  se cumple

$$v_y(a) = (y \succ a) \leq \hat{f}(a) \leq j(\hat{f}(a)).$$

También, para todo  $a, y \in A$ ,  $(y \succ a) \wedge y = y \wedge a$  y

$$\begin{aligned} j((y \succ a) \wedge y) \leq j(a) &\Leftrightarrow j(y \succ a) \wedge j(y) \leq j(a) \\ &\Leftrightarrow j(y \succ a) \leq (j(y) \succ j(a)). \end{aligned}$$

Así

$$v_y(a) \leq j(\hat{f}(a)) \leq (j(y) \succ j(a)) = v_{j(y)}(j(a)) \leq f(j(a)).$$

Por lo tanto  $j \circ \hat{f} \leq f \circ j$ . □

Ahora probaremos lo anterior, pero para cualquier ordinal.

**Corolario 1.3.** Para  $j$ ,  $f$  y  $\hat{f}$  como antes, se cumple que  $j \circ \hat{f}^\alpha \leq f^\alpha \circ j$

*Demostración.* Para  $\alpha \in \text{Ord}$  verificaremos que  $j \circ \hat{f}^\alpha \leq f^\alpha \circ j$ . Lo haremos con inducción transfinita.

Si  $\alpha = 0$ , es trivial.

Para el paso de inducción, supongamos que para  $\alpha$  se cumple. Luego

$$j \circ \hat{f}^{\alpha+1} = j \circ \hat{f} \circ \hat{f}^\alpha \leq f \circ j \circ \hat{f}^\alpha \leq f \circ f^\alpha \circ j = f^{\alpha+1} \circ j,$$

donde la primera desigualdad es el Lema 1.2 y la segunda es la hipótesis de inducción.

Si  $\lambda$  es un ordinal límite, entonces

$$\hat{f}^\lambda = \bigvee \{\hat{f}^\alpha \mid \alpha < \lambda\}, \quad f^\lambda = \bigvee \{f^\alpha \mid \alpha < \lambda\}$$

y

$$j \circ \hat{f}^\lambda = j \circ \bigvee_{\alpha < \lambda} \hat{f}^\alpha \leq \bigvee_{\alpha < \lambda} j \circ \hat{f}^\alpha.$$

Por la hipótesis de inducción tenemos que

$$j \circ \hat{f}^\alpha \leq f^\alpha \circ j \Rightarrow \bigvee_{\alpha < \lambda} j \circ \hat{f}^\alpha \leq \bigvee_{\alpha < \lambda} f^\alpha \circ j.$$

Por lo tanto  $j \circ \hat{f}^\lambda \leq f^\lambda \circ j$ . □

**Observación 1.4.** El Lema 1.2 y el Corolario 1.3 también se cumplen si  $j$  solo es monótono y preserva ínfimos finitos.

Por el Corolario 1.3,  $j \circ \hat{f}^\infty \leq f^\infty \circ j$  se cumple. Además, por el Teorema H-M,  $f^\infty = v_F$  y  $\hat{f}^\infty = v_{j_*F}$ . Con esto en mente, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightleftharpoons[(v_{j_*F})_*]{(v_{j_*F})^*} & A_{j_*F} \\ \downarrow j & \searrow H & \\ A_j & \xrightleftharpoons[(v_F)^*]{(v_F)_*} & A_F \end{array}$$

donde  $A_F$  y  $A_{j_*F}$  son los cocientes compactos producidos por  $v_F$  y  $v_{j_*F}$ , respectivamente. El morfismo  $H: A \rightarrow A_F$  está definido por  $H = v_F \circ j$ . Además,  $(v_F)_*$  y  $(v_{j_*F})_*$  son inclusiones.

Sea  $h: A_{j_*F} \rightarrow A_j$  tal que, para  $x \in A_{j_*F}$ ,  $h(x) = H(x)$ . Así si  $h = H|_{A_{j_*F}}$ , el diagrama anterior conmuta.

Primero necesitamos que  $h$  sea un morfismo de marcos. Por la definición de  $h$ , este es un  $\wedge$ -morfismo y restaría verificar que es un  $\vee$ -morfismo.

Los supremos en  $A_{j_*F}$  y  $A_F$  son calculados de manera diferente. De esta manera, sea  $\hat{\vee}$  el supremo en  $A_{j_*F}$  y  $\tilde{\vee}$  el supremo en  $A_F$ . Por lo tanto

$$\hat{\vee} = v_{j_*F} \circ \bigvee \quad \text{and} \quad \tilde{\vee} = v_F \circ \bigvee,$$

es decir, para  $X \subseteq A$ ,  $Y \subseteq A_j$ ,

$$\hat{\bigvee} X = v_{j_*F}(\bigvee X) \quad \text{and} \quad \tilde{\bigvee} Y = v_F(\bigvee Y).$$

Como  $H$  es un morfismo de marcos,  $H \circ \bigvee = \tilde{\bigvee} \circ H$ . Necesitamos algo similar para el morfismo  $h$ .

**Lema 1.5.**  $h \circ \hat{\bigvee} = \tilde{\bigvee} \circ h$ .

*Demostración.* Basta con verificar la desigualdad  $h \circ \hat{\bigvee} \leq \tilde{\bigvee} \circ h$ . Notemos que

$$h \circ \hat{\bigvee} = H \circ v_{j_*F} \circ \bigvee = v_F \circ j \circ v_{j_*F} \circ \bigvee \leq v_F \circ v_F \circ j \circ \bigvee$$

donde la desigualdad es el Corolario 1.3. Además,  $v_F \circ v_F = v_F$  y

$$h \circ \hat{\bigvee} \leq v_F \circ j \circ \bigvee = H \circ \bigvee = \tilde{\bigvee} \circ H = \tilde{\bigvee} \circ h.$$

Por lo tanto  $h \circ \hat{\bigvee} = \tilde{\bigvee} \circ h$ . □

De esta manera podemos enunciar el siguiente resultado.

**Proposición 1.6.** *El diagrama*

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{v_{j_*F}} & A_{j_*F} \\ j \downarrow & & \downarrow h \\ A_j & \xrightarrow{v_F} & A_F \end{array}$$

*es conmutativo.*

*Demostración.* HAY QUE PONER LA PRUEBA □

Con el diagrama anterior podríamos analizar algunos cocientes compactos, por ejemplo, los cocientes compactos cerrados.

## 2. MARCOS EFICIENTES Y MARCOS $KC$

En [SS06] Sexton dice que  $A \in \mathbf{Frm}$  es *eficiente* si para todo  $F \in A^\wedge$

$$x \in F \Rightarrow u_d(x) = d \vee x = 1$$

donde  $d = d(\alpha) = f^\alpha(0)$ ,  $f = \dot{\bigvee}\{v_y \mid y \in F\}$  y  $v_y$  es un  $v$ -núcleo. Queremos trasladar esta misma noción, pero para  $A_j$  cuando  $j \in NA$ , es decir, para todo  $F \in A_j^\wedge$ , si  $x \in F$  entonces  $d \vee x = 1$ , con  $d$  similar al antes, pero en este caso tomamos  $v_y \in NA_j$  y  $0_{A_j} = j(0)$ .

**2.1. Algunas propiedades de los marcos eficientes.** Los marcos eficientes fueron introducidos como una especie de propiedad de separación dada en el lenguaje libre de puntos, pero que se relaciona con propiedades sensibles a puntos. Un ejemplo de lo anterior es el siguiente.

**Corolario 2.1.** *Para  $A$  un marco espacial,  $\mathcal{OS}$  es un marco Hausdorff si y solo si  $A$  es 1-arreglado.*

*Demostración.* Se sigue del hecho de que la propiedad Hausdorff es conservativa y por el Teorema 8.4.4 de [SS06]  $\square$

La eficiencia es una propiedad más fuerte que ser  $T_1$ . La pregunta natural que surge es ¿resulta ser más fuerte que  $T_2$  (o las propiedades tipo Hausdorff en Frm)?

**Teorema 2.2.** *Todo marco fuertemente Hausdorff es arreglado.*

*Demostración.* Consideremos  $A \in \text{Frm}$  fuertemente Hausdorff. Si  $A$  cumple (fH), entonces todo sublocal compacto es cerrado. Por teoría de marcos, para  $j \in NA$  arbitrario,  $A_j$  es compacto si y solo si  $\nabla(j) \in A^\wedge$ . De aquí que, al ser compacto y por (fH)  $A_j = A_{u_d}$ , para algún  $d \in A$ , es decir,  $j = u_d$  y  $\nabla(j) = \nabla(u_d)$  para algún  $d \in A$ , en particular, por H-M, para todo  $F \in A^\wedge$ ,  $v_F \in NA$ . Así  $\nabla(v_F) = \nabla(u_d)$ , es decir, para  $x \in F$  se cumple que  $u_d(x) = 1 = d \vee x$ . Por lo tanto  $A$  es arreglado.  $\square$

Es momento de verificar si la eficiencia es una propiedad que se preserva bajo cocientes.

**Proposición 2.3.** *Si  $A$  es un marco eficiente, entonces  $A_j$  es un marco eficiente.*

*Demostración.* Es fácil verificar que  $F \subseteq j_*F$ . Como  $A$  es eficiente y  $F \in A^\wedge$ , se cumple que

$$x \in F \Rightarrow \hat{d} \vee x = 1,$$

donde  $\hat{d} = d(\alpha) = f^\alpha(0)$ .

Si  $\hat{d} \leq d$ , entonces  $d \vee x = 1$ , para  $d = d(\alpha) = f^\alpha(j(0))$ .

Así, por el Corolario 1.3

$$\hat{d} = \hat{d}(\alpha) \leq j(\hat{d}(\alpha)) = j(\hat{f}^\alpha(0)) \leq f^\alpha(j(0)) = d(\alpha) = d.$$

Por lo tanto, si  $x \in F$ , entonces  $d \vee x = 1$  y  $A_j$  es eficiente.  $\square$

**Definición 2.4.** Sea  $A \in \text{Frm}$  decimos que  $A$  es:

- (1) *KC* si cada cociente compacto es cerrado.
- (2) *Hausdorff cerrado compacto* (o *KCH* de manera abreviada) si cada cociente compacto de  $A$  es cerrado y Hausdorff.

En otras palabras, la Definición 2.4 nos dice que si  $j \in NA$ , entonces  $\nabla(j) \in A^\wedge$  y  $j = u_a$  para algún  $a \in A$ . De manera adicional, para 2) pedimos que  $A_j$  cumpla la propiedad (H).

## 2.2. Propiedades de los marcos $KC$ .

**Proposición 2.5.** Si  $A \in \text{Frm comple } KC$ , entonces  $A_j$  cumple  $KC$  para cada  $j \in N(A)$ .

*Demostración.* Consideremos  $k \in NA_j$  tal que  $(A_j)_k$  es compacto. Como cualquier filtro abierto es admisible, tenemos que  $\nabla(k) \in A_j^\wedge$  y por la Proposición 1.1  $j_*\nabla(K) \in A^\wedge$ .

Sea  $l = j_* \circ k \circ j^* \in NA$ , entonces  $A_l$  es un cociente compacto de  $A$  y existe  $a \in A$  tal que  $l = u_a$ . Así

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & l & & \\ & & & & \curvearrowright & & \\ A & \xrightarrow{j^*} & A_j & \xrightarrow{k} & (A_j)_k & \xrightarrow{j_*} & A_j \subseteq A \end{array}$$

y  $a \vee x = k(j(x))$ . Por lo tanto, si  $x = a$ ,  $k(j(x)) = a$ .

Necesitamos que  $k = u_b$  para algún  $b \in A_j$ . Para  $x \in A_j$  y  $b = j(a)$

$$\begin{aligned} u_b(x) &= b \vee x = b \vee j(x) = j(j(a) \vee j(x)) \\ &= j(k(j(a)) \vee x) \\ &= j(u_a(x)) \\ &= j(k(x)) \\ &= k(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto  $u_b = k$ . □

**Proposición 2.6.** Si  $A$  es un marco  $KC$ , entonces  $A$  es un marco  $T_1$ .

*Demostración.* Sean  $p \in \text{pt } A$  y  $a \in A$  tales que  $p \leq a \leq 1$ . Consideremos

$$w_p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \not\leq p \\ p & \text{si } x \leq p \end{cases}$$

para  $x \in A$ .  $P = \nabla(w_p) = \{x \in A \mid x \not\leq p\}$  es un filtro completamente primo (en particular,  $P \in A^\wedge$ ). Como  $A$  es  $KC$ , entonces  $A_{w_p}$  es un cociente compacto cerrado. Así  $u_p = w_p$  y

$$u_p(a) = a \quad \text{and} \quad w_p(a) = 1.$$

es decir,  $a = 1$ . Por lo tanto  $p$  es máximo. □

**Proposición 2.7.** Si  $A_1, A_2 \in \text{Frm}$  son marcos eficientes, entonces  $A_1 \oplus A_2$  es un marco eficiente.

*Demostración.* Consideremos  $A_1, A_2 \in \text{Frm}$   $\alpha$ -eficientes. Por la construcción de  $A_1 \oplus A_2$  tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \xrightarrow{\quad \iota_i \quad} & & & \\
 & \nearrow & & & \searrow & & \\
 A_i & \xrightarrow{\alpha_i} & A_1 \times A_2 & \xrightarrow{\downarrow(-)} & \mathcal{L}(A_1 \times A_2) & \xrightarrow{\sim} & A_1 \oplus A_2 \\
 & \nwarrow & & & \nearrow & & \\
 & & & \xleftarrow{\quad (\iota_i)_* \quad} & & & 
 \end{array}$$

donde  $\alpha_1(a) = (a, 1)$  y  $\alpha_2(b) = (1, b)$  para  $a \in A_1$  y  $b \in A_2$ . Además, como  $\iota_i \in \text{Frm}$ ,  $(\iota_i)_*$  es su adjunto derecho.

Consideremos  $F \in (A_1 \oplus A_2)^\wedge$  y, por la Proposición 1.1,  $(\iota_i)_*[F] \in A_i^\wedge$ . Como  $A_i$  es eficiente, para  $x_i \in (\iota_i)_*F$  se cumple que  $d_i \vee x_i = 1$ , donde

$$d_i = d_i(\alpha) = f_i^\alpha(0), \text{ con } f_i = \bigvee \{v_y \mid y \in (\iota_i)_*F\}$$

Por (1) se tiene que si  $x_i \in (\iota_i)_*F$ , entonces  $\iota_i(x_i) \in F$ , es decir.

$$x_1 \oplus 1, 1 \oplus x_2 \in F$$

y al ser  $F$  un filtro, se cumple que  $x_1 \oplus 1 \wedge 1 \oplus x_2 = x_1 \oplus x_2 \in F$ .

Además, para cada  $i = 1, 2$  tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 A_i & \xrightarrow{f_i} & A_i \\
 \downarrow \iota_i & & \downarrow \iota_i \\
 A_1 \oplus A_2 & \xrightarrow{f_F} & A_1 \oplus A_2
 \end{array}$$

donde  $f_F = \bigvee \{v_{\iota_i(y)} \mid \iota_i(y) \in F\}$ . Veamos que  $\iota_i \circ f_i \leq f_F \circ \iota_i$ .

Consideremos  $a \in A_i$ , entonces  $v_y(a) \leq f_i(a)$  y  $\iota_i(v_y(a)) \leq \iota_i(f_i(a))$ . Además,

$$\begin{aligned}
 \iota_i((y \succ a) \wedge y) &= \iota_i(y \wedge a) \leq \iota_i(a) \Leftrightarrow \iota_i(y \succ a) \wedge \iota_i(y) \leq \iota_i(a) \\
 &\Leftrightarrow \iota_i(y \succ a) \leq (\iota_i(y) \succ \iota_i(a)).
 \end{aligned}$$

Luego

$$\iota_i(f_i(a)) \leq (\iota_i(y) \succ \iota_i(a)) = v_{\iota_i(y)}(\iota_i(a)) \leq f_F(\iota_i(a)).$$

Por lo tanto  $\iota_i \circ f_i \leq f_F \circ \iota_i$ . Verifiquemos que  $\iota_i \circ f_i^\alpha \leq f_F^\alpha \circ \iota_i$  también es cierto.

Por inducción transfinita

- Si  $\alpha = 0$ , es trivial.
- Para el paso de inducción, supongamos que para  $\alpha$  se cumple. Luego

$$\iota_i \circ f_i^{\alpha+1} = \iota_i \circ f_i \circ f_i^\alpha \leq f_F \circ \iota_i \circ f_i^\alpha \leq f_F \circ f_F^\alpha \circ \iota_i = f_F^{\alpha+1} \circ \iota_i,$$

donde la primera desigualdad es lo demostrado antes y la segunda es la hipótesis de inducción.

- Si  $\lambda$  es un ordinal límite, entonces

$$f_i^\lambda = \bigvee \{f_i^\alpha \mid \alpha < \lambda\}, \quad f_F^\lambda = \bigvee \{f_F^\alpha \mid \alpha < \lambda\}$$

y

$$\iota_i \circ f_i^\lambda = \iota_i \circ \bigvee_{\alpha < \lambda} f_i^\alpha \leq \bigvee_{\alpha < \lambda} \iota_i \circ f_i^\alpha.$$

Por la hipótesis de inducción tenemos que

$$\iota_i \circ f_i^\alpha \leq f_F^\alpha \circ \iota_i \Rightarrow \bigvee_{\alpha < \lambda} \iota_i \circ f_i^\alpha \leq \bigvee_{\alpha < \lambda} f_F^\alpha \circ \iota_i.$$

Así, evaluando en  $0 \in A_i$  se cumple que

$$(\iota_i \circ f_i^\alpha)(0) \leq (f_F^\alpha \circ \iota_i)(0) \Rightarrow \iota_1(d_1) \leq f_F^\alpha(0 \oplus 1) \text{ y } \iota_2(d_2) \leq f_F^\alpha(1 \oplus 0).$$

Luego

$$d_1 \oplus d_2 = d_1 \oplus 1 \wedge 1 \oplus d_2 \leq f_F^\alpha(0 \oplus 1) \wedge f_F^\alpha(1 \oplus 0) = f_F^\alpha(0 \oplus 0).$$

De aquí que, para  $d = d(\alpha) = f_F^\alpha(0 \oplus 0)$ , se cumple que

$$(x_1 \oplus x_2) \vee d_1 \oplus d_2 \leq (x_1 \oplus x_2) \vee d,$$

pero  $x_1 \oplus x_2 \vee d_1 \oplus d_2 = (x_1 \vee d_1) \oplus (x_2 \vee d_2) = 1 \oplus 1$ . Por lo tanto

$$x_1 \oplus x_2 \vee d = 1 \oplus 1,$$

es decir,  $A_1 \oplus A_2$  es eficiente.  $\square$

**Corolario 2.8.** Si  $A_1, A_2 \in \text{Frm}$  son marcos  $\alpha$ -eficiente y  $\beta$ -eficiente, respectivamente, entonces  $A_1 \oplus A_2$  es eficiente.

*Demostración.* Sin pérdida de generalidad, consideremos  $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$ . Entonces  $A_1$  y  $A_2$  son  $\gamma$ -eficientes y por la Proposición 2.7,  $A_1 \oplus A_2$  es eficiente.  $\square$

**Proposición 2.9.** La clase de marcos eficientes es cerrada bajo coproductos.

*Demostración.* Sean  $\{A_i\}_{i \in I}$  una familia de marcos eficientes y  $\{\alpha_i\}_{i \in I} \subseteq \text{Ord}$  los grados de eficiencia de cada  $A_i$ . Sabemos que

$$\bigoplus_{i \in I} A_i \in \text{Frm} \quad \text{y} \quad (\iota_i : A_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} A_i) \in \text{Frm},$$

entonces  $(\iota_i)_*$  es el adjunto derecho de  $\iota_i$ . Además, para  $F \in (\bigoplus_{i \in I} A_i)^\wedge$ , por la Proposición 1.1,  $(\iota_i)_* F \in A_i^\wedge$  y por (1),

$$x_i \in (\iota_i)_* F \Leftrightarrow \iota_i(x_i) \in F.$$

Sin pérdida de generalidad, consideremos  $\alpha = \sup\{\alpha_i \mid i \in I\}$ , entonces cada  $A_i$  es  $\alpha$ -eficiente. Por hipótesis, para  $x_i \in (\iota_i)_* F$  se cumple que  $x_i \vee d_i = 1$ , donde

$$d_i = d_i(\alpha) = f_i^\alpha(0), \text{ con } f_i = \bigvee \{v_y \mid y \in (\iota_i)_* F\}.$$

**Afirmación:** Para cada  $x_i \in (\iota_i)_* F$  se cumple que  $\langle x_i \rangle = \bigoplus \iota_i(x_i) \in F$ .



Sabemos que  $\bigoplus \iota_i(x_i) = \bigvee \iota_i(x_i)$ . Luego,  $\iota_i(x_i) \leq \bigvee \iota_j(x_j)$  para todo  $i \in I$  y  $j \in I$ . Por lo tanto, al ser  $F$  filtro, se cumple que  $\bigvee \iota_i(x_i) \in F$ .

Notemos que para cada  $A_i$  tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{f_i} & A_i \\ \iota_i \downarrow & & \downarrow \iota_i \\ \bigoplus_{i \in I} A_i & \xrightarrow{f_F} & \bigoplus_{i \in I} A_i \end{array}$$

donde  $f_F = \bigvee \{v_{\iota_i(y)} \mid \iota_i(y) \in F\}$ .

Si tomamos  $a \in A_i$ , de manera similar que en la prueba de la Proposición 2.7, se puede verificar que  $\iota_i \circ f_i \leq f_F \circ \iota_i$  y por inducción transfinita,  $\iota_i \circ f_i^\alpha \leq f_F^\alpha \circ \iota_i$ . Evaluando en  $0 \in A_i$  se cumple que

$$(\iota_i \circ f_i^\alpha)(0) \leq (f_F^\alpha \circ \iota_i)(0) \Leftrightarrow \iota_i(d_i) \leq f_F^\alpha(\langle 0 \rangle) = d(\alpha) = d.$$

y  $\langle d_i \rangle = \bigoplus \iota_i(d_i) \leq d$ .

Luego,  $\langle x_i \rangle \vee \langle d_i \rangle \leq \langle x_i \rangle \vee d$ , pero

$$\langle x_i \rangle \vee \langle d_i \rangle = \langle x_i \vee d_i \rangle = \langle 1 \rangle,$$

es decir,  $\langle 1 \rangle \leq \langle x_i \rangle \vee d$  y por lo tanto  $\langle x_i \rangle \vee d = \langle 1 \rangle$ . Así, por la afirmación anterior,  $\bigoplus_{i \in I} A_i$  es eficiente.  $\square$

**Proposición 2.10.** *La clase de marcos  $KC$  es cerrada bajo coproductos.*

*Demostración.*  $\square$

### 3. FAMILIAS PARTICULARES DE NÚCLEOS

Nuestro objetivo es estudiar los núcleos que producen cociente compacto. De manera particular, estamos interesados en aquellos núcleos que producen cociente compacto y cerrado.

Lo presentado en esta sección es una generalización de lo hecho por Escardó en [Esc06]. En este caso, el lugar de utilizar la propiedad (fH), usamos la eficiencia (o  $KC$  cuando sea necesario).

**Definición 3.1.** Para  $A \in \text{Frm}$  y  $j \in NA$ , decimos que  $j$  es  $kq$  (por cociente compacto) si  $A_j$  es compacto.

Denotamos por

$$\mathfrak{K}A = \{j \in NA \mid j \text{ es } kq\}.$$

Sabemos que los  $u$ -núcleos producen cocientes cerrados. De esta manera, un  $u$ -núcleo produce cociente compacto si  $u_\bullet \in \mathfrak{K}A$  para  $\bullet \in A$ . Consideremos los subconjuntos

$$\mathfrak{C}A = \{u_\bullet \in NA \mid u_\bullet \in \mathfrak{K}A\} \quad \text{y} \quad \mathfrak{c}A = \{c \in A \mid u_c \in \mathfrak{K}A\}.$$

donde  $\mathfrak{C}A \cong \mathfrak{c}A$ . El uso de cada uno de ellos depende del enfoque que ocupemos, ya sea como elementos del marco principal o como núcleos.

Para  $j, k \in NA$  tenemos la relación de equivalencia dada por

$$j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k),$$

donde  $\nabla(-)$  es el filtro de admisibilidad correspondiente al respectivo núcleos.

La clase de cada núcleo define un bloque en  $NA$  y se puede demostrar que cada uno de estos bloques tiene menor elemento. Al menor elemento del bloque se le conoce como núcleo ajustado y todo núcleo ajustado tiene la forma

$$f = \bigvee \{v_a \mid a \in F\}$$

donde  $F$  es un filtro en  $A$  y  $\bigvee$  es el supremo puntual.

**Lema 3.2.** *Consideremos  $j \in NA$  y supongamos que  $j$  es ajustado. Entonces*

$$j \leq k \Leftrightarrow \nabla(j) \subseteq \nabla(k)$$

para todo  $k \in NA$ .

Si  $F \in A^\wedge$ ,  $F = \nabla(j)$  para algún  $j$  en  $NA$ , el bloque de  $j$  siempre tiene un mayor y un menor elemento. Denotamos al menor elemento del bloque por  $v_F = f^\infty$ .

Por último, si el marco  $A$  es eficiente, se cumple que  $v_F = u_d$ , donde  $d = v_F(0)$ . Notemos que la eficiencia proporciona un cociente compacto y cerrado (el respectivo  $v_F$ ), para cada  $F \in A^\wedge$ .

Con todo lo anterior tenemos la siguiente relación entre los distintos núcleos mencionado hasta este momento

$$\mathfrak{f}\mathfrak{C}A \subseteq \mathfrak{C}A \subseteq \mathfrak{K}A \subseteq NA$$

donde  $\mathfrak{f}\mathfrak{C}A$  es el conjunto de núcleos  $v_F = u_d$  que se obtienen cuando un marco es eficiente. Además, con respecto a los marcos se cumple que

$$KCH \Rightarrow KC \Rightarrow \text{Eficiente}.$$

**Lema 3.3.** *Para  $c \in A$  las siguientes son equivalentes:*

- (1)  $c \in \mathfrak{c}A$ .
- (2)  $A_{u_c}$  es un marco compacto.
- (3)  $\nabla(u_c) \in A^\wedge$ .

*Demostración.* 1)  $\Rightarrow$  2) se cumple por caracterización de marcos compactos. Si se cumple 3), entonces  $c \in \mathfrak{c}A$ . Por último, 2)  $\Leftrightarrow$  3) es cierto por la caracterización de cocientes compactos y filtros admisibles.  $\square$

**Lema 3.4.** *Lo siguiente se cumple:*

- (1)  $\mathfrak{c}A$  es una sección superior.
- (2) Si  $X \subseteq \mathfrak{c}A$ , entonces  $\bigvee X \in \mathfrak{c}A$  y si  $c, c' \in \mathfrak{c}A$  entonces  $(c \succ c') \in \mathfrak{c}A$ .

- (3) Si  $c, c' \in \mathfrak{c}A$ , entonces  $c \wedge c' \in \mathfrak{c}A$ .
- (4)  $\mathfrak{c}A \subseteq A$  es un premarco con implicación.
- (5)  $\mathfrak{c}A$  es un premarco compacto.

*Demostración.* (1) Sean  $c \leq c'$  tal que  $c \in \mathfrak{c}A$ , entonces  $\nabla(u_c) \subseteq \nabla(u_{c'})$ . Consideremos  $X \subseteq A$  dirigido con  $\bigvee X \in \nabla(u_{c'})$ . Debemos probar que  $\nabla(u_{c'}) \cap X \neq \emptyset$ .

Notemos que

$$c' \vee (\bigvee X) = 1 \Rightarrow c \vee (c' \vee (\bigvee X)) = 1 \Rightarrow c' \vee (\bigvee X) \in \nabla(u_c).$$

y el conjunto  $Y = \{c' \vee x \mid x \in X\}$  es dirigido tal que  $\bigvee Y \in \nabla(u_c)$ . Al ser  $\nabla(u_c)$  abierto, se tiene que existe  $y \in Y$  tal que  $y \in \nabla(u_c)$  con  $y = c' \vee x$ . Además,  $y \in \nabla(u_{c'})$ , es decir,

$$y \vee c' = (c' \vee x) \vee c' = c' \vee x = 1$$

Por lo tanto  $x \in \nabla(u_{c'}) \in A^\wedge$  y así  $c' \in \mathfrak{c}A$ .

- (2) Se cumple por ser sección superior.
- (3) Si  $c, c' \in \mathfrak{c}A$ , entonces  $u_c, u_{c'} \in \mathfrak{K}A$ . De esta manera, debemos verificar que  $u_{c \wedge c'} \in \mathfrak{K}A$ . Por propiedades de los  $u$ -núcleos  $u_{c \wedge c'} = u_c \wedge u_{c'}$ , entonces

$$\nabla(u_{c \wedge c'}) = \nabla(u_c \wedge u_{c'}) = \nabla(u_c) \cap \nabla(u_{c'}).$$

Consideremos  $X \subseteq A$  dirigido tal que  $\bigvee X \in \nabla(u_{c \wedge c'})$ . De aquí que  $\bigvee X \in \nabla(u_c) \cap \nabla(u_{c'})$ . Como ambos son filtros abiertos, existe  $x \in X$  tal que  $x \in \nabla(u_c)$  y  $x \in \nabla(u_{c'})$ , es decir,  $x \in \nabla(u_c) \cap \nabla(u_{c'})$ . Por lo tanto  $\nabla(u_{c \wedge c'}) \in A^\wedge$ , es decir,  $c \wedge c' \in \mathfrak{c}A$ .

- (4) Es consecuencia de 1), 2) y 3).
- (5) Sea  $X$  un conjunto dirigido de elementos en  $\mathfrak{c}A$  tal que  $\bigvee X = 1$  y consideremos  $c \in \mathfrak{c}A$ . Como  $u_c$  es  $kq$ , entonces  $A_{u_c}$  es compacto y así 1 es compacto en  $A_{u_c}$ , es decir, para

$$\bigvee X = \bigvee^{u_c} X = 1$$

existe  $x \in X$  tal que  $x = 1$  y  $1 \in A_{u_c}$ . Por lo tanto,  $\mathfrak{c}A$  es compacto.  $\square$

**Lema 3.5.** Sea  $A \in \text{Frm}$  y  $\alpha_A: \mathfrak{c}A \rightarrow A^\wedge$  la función definida por

$$\alpha_A(c) = \{x \in A \mid c \vee x = 1\} = \nabla(u_c).$$

Lo siguiente se cumple:

- (1)  $\alpha_A$  es un morfismo de premarcos.
- (2) Si  $A$  es eficiente,  $\alpha_A$  es sobreyectiva.

*Demostración.* (1) Veamos primero que  $\alpha_A$  preserva la estructura de un premarco.

- (a) Si  $c \leq c'$ , entonces  $\alpha_A(c) = \nabla(u_c) \subseteq \nabla(u_{c'}) = \alpha_A(c')$ .

(b) Consideremos  $1 \in \mathfrak{c}A$ , entonces

$$\alpha_A(1) = \nabla(\text{tp}) = A,$$

de aquí que,  $\alpha_A$  preserva el mayor elemento.

(c) Sean  $c_1, c_2 \in \mathfrak{c}A$  y  $X \subseteq \mathfrak{c}A$  dirigido. De aquí que

$$\begin{aligned} \alpha_A(c_1 \wedge c_2) &= \{x \in A \mid (c_1 \wedge c_2) \vee x = 1\} \\ &= \{x \in A \mid (c_1 \vee x) \wedge (c_2 \vee x) = 1\} \\ &= \{x \in A \mid c_1 \vee x = 1 \text{ y } c_2 \vee x = 1\} \\ &= \nabla(u_{c_1}) \cap \nabla(u_{c_2}) \\ &= \alpha_A(c_1) \cap \alpha_A(c_2). \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} \alpha_A(\bigvee X) &= \{x \in A \mid (\bigvee X) \vee x = 1\} \\ &= \bigvee \{x \in A \mid x' \vee x = 1, x' \in X\} \\ &= \bigvee \alpha_A[X], \end{aligned}$$

donde  $\{x \in A \mid x' \vee x = 1, x' \in X\}$  dirigido.

(2) Por último, notemos que para un marco eficiente, el morfismo  $\alpha_A$  es suprayectivo ya que si  $F = \nabla(j) \in A^\wedge$ , entonces

$$v_F = u_d$$

donde  $d = v_F(0) \in A$ , es decir,  $\alpha_A(d) = \nabla(u_d) = \nabla(v_F) = \nabla(j)$

□

**Corolario 3.6.** Consideremos  $c \in \mathfrak{c}A$  tal que  $u_c$  es ajustado, entonces  $\alpha_A$  es inyectiva.

*Demostración.* Consideremos  $\nabla(u_c) = \nabla(u_d)$ , con  $d \in \mathfrak{c}A$ . De aquí que  $\nabla(u_c) \subseteq \nabla(u_d)$  y  $\nabla(u_c) \supseteq \nabla(u_d)$ . Aplicando dos veces el Lema 3.2 tenemos que

$$u_c \leq u_d \quad \text{y} \quad u_c \geq u_d.$$

Por lo tanto, evaluando ambos núcleos en 0 obtenemos  $c = d$ .

□

Notemos que el morfismo  $\alpha_A$  no siempre es suprayectivo, pero existen maneras de asegurar que esto ocurra.

**Lema 3.7.** Para un marco eficiente y  $c \in \mathfrak{c}A$  las siguientes son equivalentes

- (1)  $\alpha_A$  es un isomorfismo.
- (2) Si  $u_c \in \mathfrak{C}A$ ,  $u_c$  es ajustado.
- (3) Para todo  $c \in \mathfrak{c}A$  y  $d, d' \in A_{u_c}$

$$(2) \quad d \leq d' \Leftrightarrow \nabla(u_d) \subseteq \nabla(u_{d'}).$$

*Demostración.* 1)  $\Rightarrow$  2): Si  $c \in \mathfrak{c}A$ , entonces  $u_c \in NA$  y tomemos  $F = \nabla(u_c) \in A^\wedge$ . Sea  $v_F$  el respectivo núcleo ajustado del bloque, es decir,  $v_F \leq u_c$ . Además, por la eficiencia  $v_F = u_d$  y  $\nabla(u_d) = \nabla(u_c)$ . Al ser  $\alpha_A$  inyectiva,  $d = c$ . Por lo tanto  $u_c$  es ajustado.

2)  $\Rightarrow$  3): Supongamos que  $\nabla(u_c) \in A^\wedge$  y que  $u_c$  es ajustado para  $c \in \mathfrak{c}A$ . Notemos que la implicación  $\Rightarrow$ ) de (2) siempre es cierta, pues si  $d \leq d'$  y  $d \vee e = 1$ , entonces  $d' \vee e = 1$ . Así solo basta probar la otra implicación.

Queremos demostrar que  $\nabla(u_d) \subseteq \nabla(u_{d'})$  implica que  $d \leq d'$ . Por el Lema 3.2

$$\nabla(u_d) \subseteq \nabla(u_{d'}) \Leftrightarrow u_d \leq u_{d'} \Leftrightarrow d \leq d'.$$

3)  $\Rightarrow$  1): Si  $A$  es un marco es eficiente, por el Lema 3.5, se cumple que  $\alpha_A$  es suprayectiva. Para la inyectividad, consideremos  $\alpha_A(d) = \alpha_A(d')$ , es decir,  $\nabla(u_d) = \nabla(u_{d'})$ . Luego, aplicando dos veces (2), se cumple que  $d = d'$ . Por lo tanto,  $\alpha_A$  es inyectiva.  $\square$

Los siguientes resultados son consecuencias del Lema 3.7.

**Corolario 3.8.** Para un marco  $KC$  las siguientes son equivalentes

- (1)  $\alpha_A$  es un isomorfismo.
- (2) Si  $j \in \mathfrak{K}A$ ,  $j$  es ajustado.
- (3) Para todo  $c \in \mathfrak{c}A$  y  $d, d' \in A_{u_c}$

$$d \leq d' \Leftrightarrow \nabla(u_d) \subseteq \nabla(u_{d'}).$$

**Corolario 3.9.** Para todo  $c \in \mathfrak{c}A$ ,  $u_c$  es ajustado si y solo si  $\alpha_A$  es isomorfismo y  $A$  es eficiente.

**Observación 3.10.** Si  $A$  es un marco eficiente,  $j \in \mathfrak{K}A$  y  $F = \nabla(j) \in A^\wedge$ , entonces  $j \in [v_F, w_F]$ . Por la eficiencia

$$u_d = v_F \leq j \leq w_F \Rightarrow \nabla(u_d) = \nabla(j),$$

es decir, si consideremos  $j \in \mathfrak{K}A$  le asignamos un elemento  $d \in \mathfrak{c}A$  a través de

$$\varphi: \mathfrak{K}A \rightarrow \mathfrak{C}A$$

donde  $\varphi(j) = u_d$ .

**PREGUNTA:** ¿Podemos caracterizar a los marcos eficientes por medio de las funciones  $\alpha_A$  y  $\varphi$ ?

Para  $\mathfrak{Q}S = \{j \in \mathfrak{K}A \mid j \text{ es ajustado}\}$  tenemos

$$\begin{array}{ccc} \mathfrak{K}A & \xrightarrow{\varphi} & \mathfrak{C}A \\ & \xleftarrow{i} & \\ \mathfrak{K}A & \xrightarrow{\varphi'} & \mathfrak{Q}A \\ & \xleftarrow{\iota} & \end{array} \quad \text{y}$$

donde  $\iota: \mathfrak{C}A \rightarrow \mathfrak{K}A$  es una inclusión.

Notemos que  $\varphi$  y  $\varphi'$  son morfismos que desinflan pues  $\varphi(k), \varphi'(k) \leq k$ . Además, son monótonos, ya que para  $j, k \in \mathfrak{K}A$  con  $j \leq k$ , se cumple que  $u_d = \varphi(j) \leq$

$j \leq k$ . De aquí que  $\nabla(u_d) \subseteq \nabla(k) = \nabla(u_{d'})$ , donde  $u_{d'} = \varphi(k)$ . Como  $u_d$  es un núcleo ajustado

$$\nabla(u_d) \subseteq \nabla(u_{d'}) \Rightarrow u_d \leq u_{d'}.$$

El mismo argumento se aplica para  $\varphi'$ .

Verifiquemos que  $\varphi \dashv \iota$ , es decir, para  $j \in \mathfrak{K}A$  y  $u_c \in \mathfrak{C}S$  se cumple que

$$\varphi(j) \leq u_c \Leftrightarrow j \leq \iota(u_c).$$

La implicación  $\Leftarrow$  es trivial. Para la otra implicación, Supongamos que  $\varphi(j) \leq u_c$  y  $j \not\leq \iota(u_c) = u_c$ . Como  $u_d$  es ajustado, es el menor elemento de su bloque y como  $j \not\leq u_c$ . Tenemos dos opciones

$$i) u_d \leq u_c \leq j \leq w_F \quad \text{o} \quad ii) u_d \leq u_c \text{ y } u_c \notin [u_d, w_F].$$

Si ocurre  $i)$ , entonces Además, si el marco  $A$  es eficiente  $\mathfrak{C}A \simeq \Omega A$ . Entonces tenemos el diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & \alpha & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ \mathfrak{C}A & \xrightarrow{i} & \mathfrak{K}A & \xrightarrow{\hat{\alpha}} & A^\wedge \\ & \nwarrow & & \nearrow & \\ & & \varphi & & \end{array}$$

donde  $\hat{\alpha}(j) = \nabla(j)$

**3.1. Algunos núcleos de  $NcA$ .** Consideremos  $A \in \mathbf{Frm}$  y  $a, b \in A$ . Sabemos que  $a \prec b$  si y solo si existe  $x \in A$  tal que  $a \wedge x = 0$  y  $c \vee c = 1$ . En otras palabras, para  $x = \neg a$ ,  $x \vee b = 1$ .

**Definición 3.11.** Para  $c \in \mathfrak{c}A$  y  $a, b \in A_{u_c}$  decimos que  $a \prec_c b$  para tener la relación *bastante por debajo* en el marco  $A_{u_c}$ .

El elemento  $(a \succ c)$  es la negación de  $a$  en  $A_{u_c}$ . De aquí que

$$a \prec_c b \Leftrightarrow b \vee (a \succ c) = 1.$$

Si  $c \leq d$ , entonces

$$A_{u_c} = \uparrow c \supseteq \uparrow d = A_{u_d}$$

produce un morfismo de marcos  $i_{dc}: A_{u_d} \rightarrow A_{u_c}$  dado por  $i_{dc}(x) = d \vee x$ . De esta manera para  $c \leq d \leq e$  tenemos

$$\begin{array}{ccc} A_{u_e} & \xleftarrow{i_{ed}} & A_{u_d} \\ & \nwarrow i_{ec} \quad \nearrow i_{dc} & \\ & A_{u_c} & \end{array}$$

y  $i_{cc}: A_{u_c} \rightarrow A_{u_c}$  es la identidad.

La construcción anterior produce un funtor  $F: \mathfrak{c}A \rightarrow \mathbf{Frm}$  donde

$$c \mapsto A_{u_c} \quad \text{y} \quad c \leq d \mapsto i_{dc}$$

son la asignación en objetos y flechas, respectivamente.

Consideremos un cono sobre  $F$  dado por  $(\hat{A}, \{\pi_c: \hat{A} \rightarrow A_{u_c}\}_{c \in \mathfrak{c}A})$ . De manera similar que en la categoría de conjuntos,

$$\prod_{c \in \mathfrak{c}A} F(c) = \prod_{c \in \mathfrak{c}A} A_{u_c} = \{j: \mathfrak{c}A \rightarrow \bigcup A_{u_c} \mid j(c) \in A_{u_c}\}$$

para todo  $c \in \mathfrak{c}A$  y  $j$  una función. De aquí que  $j(c) \in A_{u_c}$  si y solo si  $c \leq j(c)$ , es decir,

$$j \in \prod_{c \in \mathfrak{c}A} A_{u_c} \Leftrightarrow c \leq j(c).$$

Además, si  $c \leq j(c)$  entonces  $\pi_c(j) = j(c) = c \vee j(c)$ , es decir, para  $c \leq d$ ,  $j(d) = i_{dc}(j(c)) = d \vee j(c)$  y  $j: \mathfrak{c}A \rightarrow \mathfrak{c}A$ . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \{j \in \prod_{c \in \mathfrak{c}A} A_{u_c} \mid j(d) = i_{dc}(j(c))\} \\ (3) \quad &= \{j: \mathfrak{c}A \rightarrow \mathfrak{c}A \mid j(c) \in A_{u_c}\} \end{aligned}$$

para todo  $c \leq d$ .

**Proposición 3.12.** *Si  $c \leq d \in \mathfrak{c}A$ , entonces  $\hat{A}$  es un cono límite sobre  $F$ .*

*Demostración.* (1) Por construcción, cada proyección  $\pi_c$  está bien definida.

Además, si  $c \leq d$

$$i_{dc} \circ \pi_c(j) = i_{dc}(j(c)) = d \vee j(c) = j(d) = \pi_d(j),$$

es decir, los triángulos del cono conmutan. Por lo tanto,  $\hat{A}$  es un cono sobre  $F$ .

(2) Sea  $(Y, \{f_c: Y \rightarrow A_{u_c}\}_{c \in \mathfrak{c}A})$  cualquier otro cono sobre  $F$ , esto es, para todo  $c \leq d$  se cumple  $i_{dc} \circ f_c = f_d$ . Consideremos el morfismo  $u: Y \rightarrow \hat{A}$  definido por

$$(u(y))(c) = f_c(y) \quad (y \in Y, c \in \mathfrak{c}A).$$

Primero vemos que  $u(y) \in \lim F$  para cada  $y \in Y$ . Si  $c \leq d$ , entonces

$$(u(y))(d) = f_d(y) = (i_{dc} \circ f_c)(y) = i_{dc}(f_c(y)) = d \vee (u(y))(c),$$

y por (3),  $u(y) \in \hat{A}$ .

Además, por definición de  $u$  y de las proyecciones, para cada  $c$  se tiene

$$\pi_c \circ u = f_c,$$

de modo que  $u$  es un morfismo de conos  $(Y \rightarrow \hat{A})$ . Veamos que  $u$  es único.

Si  $v: Y \rightarrow \hat{A}$  es otro morfismo de conos con  $\pi_c \circ v = f_c$  para todo  $c$ , entonces para todo  $y \in Y$  y  $c \in \mathfrak{c}A$ ,

$$(v(y))(c) = \pi_c(v(y)) = f_c(y) = (u(y))(c).$$

De aquí que  $v(y) = u(y)$  para todo  $y$ , luego  $v = u$ .

Por lo tanto  $\hat{A}$  satisface la propiedad universal del cono límite.  $\square$

**Lema 3.13.** Para cualquier  $A \in \text{Frm}$  y cada función  $j: \mathfrak{c}A \rightarrow \mathfrak{c}A$  las siguientes son equivalentes:

- (1)  $j \in \hat{A}$ .
- (2)  $j(d) = j(c) \vee d$  para todo  $d \geq c \in \mathfrak{c}A$ .
- (3)  $j(c \vee a) = j(c) \vee a$  para todo  $c \in \mathfrak{c}A$  y  $a \in A$ .
- (4)  $j(c \vee e) = j(c) \vee e$  para todo  $c, e \in \mathfrak{c}A$ .

*Demostración.* 1)  $\Leftrightarrow$  2): Se cumple por la construcción de  $\hat{A}$ .

2)  $\Rightarrow$  3): Tomando  $c \leq d = c \vee a$ ,  $d \in \mathfrak{c}A$ , pues  $\mathfrak{c}A$  es una sección superior. De esta manera, por 2)

$$j(d) = j(c) \vee d = j(c) \vee c \vee a = j(c) \vee a,$$

pues  $c \leq j(c)$ .

3)  $\Rightarrow$  4): Si  $e \in \mathfrak{c}A$ ,  $e \in A$  y aplicando 3) obtenemos lo que queremos.

4)  $\Rightarrow$  2): Si  $c \leq d$ , se cumple que  $c \vee d = d$ , tomando  $e = d$  y aplicando 4) se tiene  $j(d) = j(c) \vee d$ . □

**Lema 3.14.** Para  $A \in \text{Frm}$  si  $j \in \hat{A}$ , entonces  $j$  es un núcleo en  $\mathfrak{c}A$ .

*Demostración.* Verifiquemos que  $j \in \hat{A}$  cumple las condiciones de núcleo.

- (1) Por construcción,  $c \leq j(c)$ , es decir,  $j$  infla.
- (2) Notemos que para  $d = j(c)$ , entonces  $j(d) = j(j(c)) = j(c) \vee j(c) = j(c)$ . Por lo tanto  $j$  es idempotente.
- (3) Consideremos  $c = d \wedge d'$ , entonces  $c \leq d, d'$ . Luego

$$j(d) = j(d \wedge d') \vee d \quad \text{y} \quad j(d') = j(d \wedge d') \vee d'.$$

De aquí que

$$\begin{aligned} j(d) \wedge j(d') &= (j(d \wedge d') \vee d) \wedge (j(d \wedge d') \vee d') \\ &= j(d \wedge d') \vee (d \wedge d') \\ &= j(d \wedge d') \end{aligned}$$

donde la segunda igual se da por la distributividad y la última del hecho de que  $j$  infla. Así  $j$  respeta ínfimos.

Por lo tanto,  $j$  es un núcleo en  $\mathfrak{c}A$ . □

Sabemos que si  $j \in NA$ , entonces  $j^{-1}(1)$  es un filtro.

**Lema 3.15.** Para cualquier núcleo  $j$  en una semiretícula de Heyting  $A$  y cualquier  $a \in A$ , la desigualdad  $v_a \leq j$  se cumple si y solo si  $j(a) = 1$ , donde  $v_a(x) = (a \succ x)$ .

*Demostración.* Es consecuencia de las propiedades de los  $v$ -núcleos. □

Enunciamos un lema auxiliar para la prueba del siguiente teorema.



**Lema 3.16.** Sea  $A$  un marco y  $j: A \rightarrow A$  un núcleo. Si  $j$  preserva supremos finitos y supremos dirigidos, entonces  $j$  preserva todos los supremos arbitrarios, es decir,

$$j(\bigvee X) = \bigvee j[X]$$

para todo  $X \subseteq A$ .

*Demostración.* Sea  $X \subseteq A$  y consideremos el conjunto

$$\mathcal{F}(X) = \{\bigvee F \mid F \subseteq X \text{ es finito}\}.$$

Notemos que  $\mathcal{F}(X)$  es dirigido pues  $u = \bigvee F$  y  $v = \bigvee G$  con  $F, G$  finitos, entonces  $w = \bigvee (F \cup G) \in \mathcal{F}(X)$  y  $u \leq w, v \leq w$ .

Además,

$$\bigvee X = \bigvee \mathcal{F}(X).$$

Por hipótesis  $j$  preserva supremos finitos y dirigidos, entonces

$$j(\bigvee X) = j(\bigvee \mathcal{F}(X)) = \bigvee_{u \in \mathcal{F}(X)} j(u) = \bigvee_{F \subseteq_{\text{fin}} X} j(\bigvee F) = \bigvee_{F \subseteq_{\text{fin}} X} \bigvee j[F].$$

Finalmente, como  $\{\bigvee j[F] \mid F \subseteq_{\text{fin}} X\}$  es dirigido y su supremo coincide con  $\bigvee j[X]$ , tenemos que

$$j(\bigvee X) = \bigvee j[X].$$

□

**Teorema 3.17.** Para  $A$  un marco Hausdorff y cualquier núcleo  $j: \mathfrak{c}A \rightarrow \mathfrak{c}A$  las siguientes son equivalentes

- (1)  $j \in \hat{A}$ .
- (2)  $j$  preserva supremos no vacíos.
- (3)  $j$  es Scott-continuo.
- (4)  $\nabla(j) \in \mathfrak{c}A^\wedge$ .

*Demostración.* 1)  $\Rightarrow$  2): Consideremos  $c, d \in \mathfrak{c}A$ , entonces

$$j(c \vee d) = j(c) \vee c \vee d = j(c) \vee d \leq j(c) \vee j(d).$$

Por monotonía se cumple que  $j(c) \vee j(d) \leq j(c \vee d)$ . Por lo tanto  $j(c \vee d) = j(c) \vee j(d)$ .

Para los supremos dirigidos, consideremos  $\mathcal{D} \subseteq \mathfrak{c}A$  dirigido y tomemos  $c \in \mathcal{D}$ . Como  $\bigvee \mathcal{D} \in \mathfrak{c}A$  se cumple que

$$j(\bigvee \mathcal{D}) = j(c \vee \bigvee \mathcal{D}) = j(c) \vee \bigvee \mathcal{D} = \bigvee_{d \in \mathcal{D}} j(c) \vee d = \bigvee_{d \in \mathcal{D}} j(c \vee d) = \bigvee_{e \in \mathcal{D}} j(e)$$

donde la última igual se cumple por ser  $\mathcal{D}$  dirigido.

De aquí que, por el Lema 3.16 se cumple que  $j$  preserva cualquier supremo.

2)  $\Rightarrow$  3): Si  $j$  preserva supremos dirigidos,  $j$  es Scott continuo.

3)  $\Rightarrow$  4): Por la prueba del Lema 3.4 5), como  $\mathbf{c}A$  es compacto se tiene que para  $X \subseteq \mathbf{c}A$ , con  $X$  dirigido, existe  $x \in X$  tal que  $x = 1$  y  $x \in A_{u_c}$  para  $c \in \mathbf{c}A$  y  $1 = \bigvee X$ . como  $j$  es Scott continuo

$$j(\bigvee X) = \bigvee j[X] = 1,$$

es decir,  $\bigvee X \in \nabla(j)$ . de aquí que existe  $j(x) \in j[X]$  tal que  $j(x) = 1$ , entonces  $x \in \nabla(j)$ . Por lo tanto,  $X \cap \nabla(j) \neq \emptyset$  y  $\nabla(j) \in \mathbf{c}A^\wedge$ .

4)  $\Rightarrow$  1): Sabemos que  $j \in \lim F$  si  $j(d) = j(c) \vee d$  para  $c \leq d$ . Como  $j$  es monótona

$$j(c) \leq j(d) \Rightarrow d \vee j(c) \leq d \vee j(d) = j(d)$$

siempre se cumple. De esta manera, basta con verificar que  $j(d) \leq d \vee j(c)$ . Consideremos  $e \in A_{u_c}$  tal que  $e \vee j(d) = 1$  y como  $e \vee j(d) \leq j(e \vee d)$ , entonces  $j(e \vee d) = 1$ , es decir,  $e \vee d \in \nabla(j)$ . □

#### 4. COSAS DE ÁNGEL

Trivially KC implies patch trivial (or equivalently tidy) we want some converse of this fact.

Following articulo de igor.,

**Definición 4.1.** A frame  $A$  has *fitted points* (p-fit for short) if for every point  $p \in \text{pt}(A)$  the nucleus

$$w_p \text{ is fitted}$$

that is, to said for every point  $p$  the nucleus  $w_p$  is alone in its block.

In general for each  $p \in \text{pt}(A)$ , the nucleus  $w_p$  is the largest memeber of his block, that is,

$$[v_{\mathcal{P}}, w_p]$$

the corresponding block, here  $\mathcal{P} = \{x \in A \mid x \not\leq p\}$  in this case we know how to calculate

$$v_{\mathcal{P}}.$$

using the prenucleus  $f_{\mathcal{P}}$  we know that

$$v_{\mathcal{P}} = f_{\mathcal{P}}^\infty = (\bigvee \{v_x \mid x \in \mathcal{P}\})^\infty$$

moreover:

$$f_{\mathcal{P}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \not\leq p \\ \leq p & \text{si } x \leq p \end{cases}$$

for  $x \in A$ .

and in fact  $w_p = u_p \vee v_{\mathcal{P}} = f_{\mathcal{P}} \circ u_p$ . If  $w_p$  is fitted, that is,

$$w_p = v_{\mathcal{P}}$$

then one need to have  $u_p \leq v_{\mathcal{P}}$  then

$$p \leq v_{\mathcal{P}}(0)$$

by the equation of  $f_{\mathcal{P}}$  we have

$$0 \leq \dots \leq f_{\mathcal{P}}^{\alpha}(0) \leq \dots \leq$$

**Proposición 4.2.** *Let  $A$  be a frame for each  $p \in \text{pt}(A)$  the following are equivalent:*

- (i)  $w_p$  is fitted.
- (ii)  $w_p$  is alone in its block.
- (iii)  $u_p \leq v_{\mathcal{P}}$ .
- (iv)  $u_p \leq f_{\mathcal{P}}$ .
- (v)  $f_{\mathcal{P}} \circ u_p = v_{\mathcal{P}}$ .
- (vi) *aquí debe de ir una formula de primer de orden.*

**Proposición 4.3.** *In a p-fit frame for each  $p \in \text{pt}(A)$  the nucleus  $w_p$  is a maximal element in  $pA$ .*

*Demostración.* First we dealing with the basics  $v_F$  for  $F \in A^{\wedge}$  of the patch frame, given any  $w_p$  suppose that  $w_p \leq v_F$  then by (propiedades generales de los  $w$ )  $v_F = w_b$  where  $b = v_F(0)$  thus

$$w_p \leq w_b \Leftrightarrow w_p(b) = b$$

since  $w_p$  is two valuated we have  $b = 1$  or  $b = p$  if the first case occur then we are done, for the case  $b = p$  we have  $v_f(p) = p$  that is, to say,  $p \notin F$ , then by the Birkhoff's separation lemma we can find a completely prime filter  $D$  such that

$$F \subseteq G \not\ni p$$

let  $q$  the corresponding point associated to  $G$ , then  $p \leq q$  since  $A$  is p-fit  $v_G = w_q$  and thus  $w_p \leq w_q$  wich is equivalent to  $w_p(q) = q$  again since we are dealing with points one neccesary has  $p = q$ .

Now consider any closed  $u_c$  such that,  $w_p \leq u_c$  then  $w_p(c) = 1$  and thus  $1 = c$ .

Therefore in basics of the patch the nuclei  $w_p$  are maximal, now consider any  $k \in pA$  such that  $k \in \mathfrak{K}A$  □

**Proposición 4.4.** *Let  $A$  be a frame then if*

$$v_F \neq v_G$$

**Definición 4.5.** A frame  $A$  is *tame* if does not have wild points.

**Proposición 4.6.** *In a tame p-fit frame the patch frame  $pA$  is  $T_1$ .*

Since every hausdorff frame is tame and p-fit we have:

**Corolario 4.7.** *If  $A \in \mathcal{Hrm}$  then, the patch frame  $pA$  is  $T_1$ .*

**Definición 4.8.** Let  $A$  be a frame a nucleus  $k$  on  $A$  it said to be  $kq$  if  $A_j$  is a compact frame.

Denote by

$$\mathfrak{K}A = \{j \in NA \mid j \text{ is } kq\}.$$

**Definición 4.9.** A frame  $A$  is *compact closed Hausdorff* (KCH for short) if every compact quotient of  $A$  is closed and Hausdorff.

Denote by  $\mathfrak{f}A = \{kq \text{ fitted nuclei}\} = \{v_F \mid F \in A^\wedge\}$   
 denote by  $\mathfrak{C}A = \{a \in A \mid u_a \in \mathfrak{K}A\}$

## 5. RESULTADOS ADICIONALES

**Lema 5.1.** Sea  $p \in A$ .  $p$  es  $\wedge$ -irreducible si y solo si  $A$  está linealmente ordenado.

*Demostración.*  $\Rightarrow$ ): Consideremos  $p, q$  elementos  $\wedge$ -irreducibles. Veamos que  $p \leq q$  o  $q \leq p$ . Notemos que

$$p \wedge q \leq p \quad \text{y} \quad p \wedge q \leq q$$

Por hipótesis,  $p$  y  $q$  son  $\wedge$ -irreducibles, es decir,

$$p \leq p \circ q \leq p \quad \text{y} \quad p \leq q \circ q \leq q.$$

Por lo tanto  $p \leq q \circ q \leq p$ , es decir,  $A$  está linealmente ordenado.

$\Leftarrow$ ): Consideremos  $a, b, p \in A$  tales que  $a \wedge b \leq p$ . Como  $A$  es linealmente ordenado, se cumple que  $a \wedge b = b$  o  $a \wedge b = a$  (pues  $a \leq b$  o  $b \leq a$ ). Por lo tanto  $a \leq p$  o  $b \leq p$ . Por lo tanto,  $p$  es  $\wedge$ -irreducible. Como  $p$  es arbitrario, entonces ocurre para cualquier  $p \in A$ . □

**Observación 5.2.** Los marcos linealmente ordenados no son Hausdorff punteados.

*Demostración.* En los marcos linealmente ordenados todos los elementos son semiprimos. Por lo tanto existen primos que no son máximos. □

The block structure on a frame is an important problem and its related with some separation properties of frames.

**Proposición 5.3.** For  $F \in A^\wedge$  and  $Q \in \mathcal{QS}$ , if  $j \in [v_Q, w_Q]$ , then  $U_* j U^* \in [v_F, w_F]$ , where  $U^*$  is the morfism spatial reflection  $U_*$  is the right adjoint.

*Demostración.* Since  $N$  is a functor, we have

$$\begin{array}{ccc} A & & NA \\ \downarrow U & \xrightarrow{N(-)} & \downarrow N(U) \\ \mathcal{OS} & & N\mathcal{OS} \end{array}$$

and  $N(U)_*$  is the right adjoint of  $N(U)^\wedge$ . Note the following:

- (1)  $N(U)(j) \leq k \Leftrightarrow j \leq N(U)_* k$ .
- (2) If  $k \in N\mathcal{OS}$  then  $N(U)(j) \leq k \Leftrightarrow Uj \leq kU$ .
- (3)  $N(U)_* k = U_* k U^*$  and  $U N(U)_* k = k(U)$ .

In 3), if  $j = k$ ,  $N(U)_*(j) = U_*jU^*$  and  $UN(U)_*j = jU$ . For  $x \in F$

$$x \in A \xrightarrow{U^*} \mathcal{O}S \xrightarrow{j} \mathcal{O}S \xrightarrow{U_*} A$$

and  $U_*(j(U(x))) = \bigwedge(S \setminus j(U(x)))$ . Note that  $U_*(j(U^*(x))) \subseteq \text{pt } A$ . Thus

$$\begin{aligned} x \in F &\Leftrightarrow Q \subseteq U(x) \Leftrightarrow U(x) \in \nabla(j) = \nabla(Q) \Leftrightarrow S \setminus j(U(x)) = \emptyset \\ &\Leftrightarrow \bigwedge(S \setminus j(U(x))) = 1 = (U_*jU^*)(x) \\ &\Leftrightarrow x \in \nabla(U_*jU^*) \end{aligned}$$

Therefor  $F = \nabla(U_*jU^*)$ . □

In this way we have a function

$$\mathcal{U}: [V_Q, W_Q] \rightarrow [V_F, W_F]$$

**Teorema 5.4.** *Let  $A \in \mathcal{H}rm$  then for every  $F \in A^\wedge$  with corresponding  $\mathcal{Q}$  compact saturated we have*

$$\mathcal{O}\mathcal{Q} \cong \uparrow \mathcal{Q}'$$

, that is, the frame of opens of the point space of  $A_F$  is isomorphic to a compact closed quotient of a Hausdorff space.

*Demostración.* □

EJEMPLOS DE marcos pt que no sean KC

HAY que COMENTAR LAS COSAS QUE ESTAN MAL comentar me refiero a ponerlas entre

[Esc01] [Esc06]

[SS06]

## REFERENCES

- [Esc01] Martin Hötzel Escardó, *The regular-locally compact coreflection of a stably locally compact locale*, Journal of Pure and Applied Algebra **157** (2001), no. 1, 41–55.
- [Esc06] Martín H Escardó, *Compactly generated hausdorff locales*, Annals of Pure and Applied Logic **137** (2006), no. 1-3, 147–163.
- [Sim04] Harold Simmons, *The vietoris modifications of a frame*, Unpublished manuscript, 79pp., available online at <http://www.cs.man.ac.uk/hsimmons> (2004).
- [SS06] RA Sexton and H Simmons, *Point-sensitive and point-free patch constructions*, Journal of Pure and Applied Algebra **207** (2006), no. 2, 433–468.