COMPENDIO DE RESULTADOS

ABSTRACT.

1. PRELIMINARES

En la categoría Frm los objetos son retículas completas que cumplen la ley distributiva de marcos (LDM) y los morfismos entre ellos son funciones monótonas que preservan la estructura de la retícula. Si $A \in \mathrm{Frm}$, entonces podemos asignarle un espacio topológico a través de $S = \mathrm{pt}\, A$, donde $p \in \mathrm{pt}\, A$ si p es $\wedge$-irreducible.

Denotemos por $\mathcal{Q}S$ a la familia de todos los subconjuntos compactos saturados de S. Por el Teorema de Hoffman-Mislove (Teorema H-M), existe una correspondencia biyectiva entre $\mathcal{Q}S$ y el premarco de los filtros abiertos de A (denotado por $A^\wedge$). A su vez, si $F \in A^\wedge$, estos están en correspondencia biyectiva con lo que se conoce como núcleos ajustados y con ello obtenemos una versión extendida del teorema antes mencionado. En este caso, v_F es el correspondiente núcleo ajustado asociado a F.

Si $j \in NA$, entonces $A_j = \{x \in A \mid j(x) = x\}$ es un marco y este es el marco cociente. El cociente A_j es compacto si y solo si $\nabla(j) \in A^\wedge$, donde

$$\nabla(j) = \{x \in A \mid j(x) = 1\}.$$

En particular, A_{v_F} es un cociente compacto.

Si $f^* \colon A \to B$ es un morfismo de marcos y $F \subseteq A$, $G \subseteq B$ son filtros en A, B, respectivamente, podemos producir nuevos filtros de la siguiente manera:

$$b \in f^*F \Leftrightarrow f_*(b) \in F \quad \text{y} \quad a \in f_*G \Leftrightarrow f^*(a) \in G \tag{1}$$

donde $a \in A, b \in B$ y f_* es el adjunto derecho de f^*. Aquí $f^*F \subseteq B$ y $f_*G \subseteq A$ son filtros en B y A, respectivamente.

Proposición 1.1. *Para $f = f^* \colon A \to B$ un morfismo de marcos y $G \in B^\wedge$, entonces $f_*G \in A^\wedge$.*

Demostración. Por (1), f_*G es un filtro en A. Necesitamos que f_*G satisfaga la condición de filtro abierto. Sea $X \subseteq A$ tal que $\bigvee X \in f_*G$, con X dirigido. Entonces

$$Y = \{f(x) \mid x \in X\}$$

es dirigido y $f(\bigvee X) = \bigvee f[X] = \bigvee Y \in G$. Como G es un filtro abierto, existe $y = f(x) \in Y$ tal que $y \in G$. Así $x \in f_*G$ de modo que $f_*G \in A^\wedge$. $\square$

En [Sim04, Lema 8.9 y Corolario 8.10] muestran que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f^\infty"] \arrow[d, "U_A"'] & A \arrow[d, "U_A"] \\ \mathcal{O}S \arrow[r, "F^\infty"'] & \mathcal{O}S \end{tikzcd}$$

conmuta laxamente, es decir, $U_A \circ f^\infty \leq F^\infty \circ U_A$. En este diagrama U_A es el morfismo reflexión espacial, f^∞ y F^∞ representan los núcleos asociados a los filtros $F \in A^\wedge$ y $\nabla \in \mathcal{O}S^\wedge$. También f^∞ y F^∞ son las cerraduras idempotentes asociadas a a los prenúcleos f y F respectivamente.

Aquí probamos algo más general, ya que consideremos el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\hat{f}^\infty"] \arrow[d, "j"'] & A \arrow[d, "j"] \\ A_j \arrow[r, "f^\infty"'] & A_j \end{tikzcd}$$

donde $\hat{f}^\infty$ es el núcleo asociado al filtro $j_*F \in A^\wedge$ y $j \in NA$.

Lema 1.2. *Para j, f y $\hat{f}$ como antes se cumple que $j \circ \hat{f} \leq f \circ j$.*

Demostración. Por (1)

$$\hat{f} = \dot{\bigvee}\{v_y \mid y \in j_*F\} \quad \text{y} \quad f = \dot{\bigvee}\{v_{j(y)} \mid j(y) \in F\}.$$

entonces para $a \in A$ se cumple

$$v_y(a) = (y \succ a) \leq \hat{f}(a) \leq j(\hat{f}(a)).$$

También, para todo $a, y \in A$, $(y \succ a) \wedge y = y \wedge a$ y

$$\begin{aligned} j((y \succ a) \wedge y) \leq j(a) &\Leftrightarrow j(y \succ a) \wedge j(y) \leq j(a) \\ &\Leftrightarrow j(y \succ a) \leq (j(y) \succ j(a)). \end{aligned}$$

Así

$$v_y(a) \leq j(\hat{f}(a)) \leq (j(y) \succ j(a)) = v_{j(y)}(j(a)) \leq f(j(a)).$$

Por lo tanto $j \circ \hat{f} \leq f \circ j$. □

Ahora probaremos lo anterior, pero para cualquier ordinal.

Corolario 1.3. *Para j, f y $\hat{f}$ como antes, se cumple que $j \circ \hat{f}^\alpha \leq f^\alpha \circ j$*

Demostración. Para $\alpha \in \mathrm{Ord}$ verificaremos que $j \circ \hat{f}^\alpha \leq f^\alpha \circ j$. Lo haremos con inducción transfinita.

Si $\alpha = 0$, es trivial.

Para el paso de inducción, supongamos que para α se cumple. Luego

$$j \circ \hat{f}^{\alpha+1} = j \circ \hat{f} \circ \hat{f}^{\alpha} \leq f \circ j \circ \hat{f}^{\alpha} \leq f \circ f^{\alpha} \circ j = f^{\alpha+1} \circ j,$$

donde la primera desigualdad es el Lema 1.2 y la segunda es la hipótesis de inducción.

Si λ es un ordinal límite, entonces

$$\hat{f}^{\lambda} = \bigvee\{\hat{f}^{\alpha} \mid \alpha < \lambda\}, \quad f^{\lambda} = \bigvee\{f^{\alpha} \mid \alpha < \lambda\}$$

y

$$j \circ \hat{f}^{\lambda} = j \circ \bigvee_{\alpha<\lambda} \hat{f}^{\alpha} \leq \bigvee_{\alpha<\lambda} j \circ \hat{f}^{\alpha}.$$

Por la hipótesis de inducción tenemos que

$$j \circ \hat{f}^{\alpha} \leq f^{\alpha} \circ j \Rightarrow \bigvee_{\alpha<\lambda} j \circ \hat{f}^{\alpha} \leq \bigvee_{\alpha<\lambda} f^{\alpha} \circ j.$$

Por lo tanto $j \circ \hat{f}^{\lambda} \leq f^{\lambda} \circ j$. $\square$

Por el Corolario 1.3, $j \circ \hat{f}^{\infty} \leq f^{\infty} \circ j$ se cumple. Además, por el Teorema H-M, $f^{\infty} = v_F$ y $\hat{f}^{\infty} = v_{j_*F}$. Con esto en mente, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "(v_{j_*F})^*"] \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, "H"] & A_{j_*F} \arrow[l, shift left, "(v_{j_*F})_*"] \\
A_j \arrow[r, shift right, "(v_F)^*"'] & A_F \arrow[l, shift right, "(v_F)_*"']
\end{tikzcd}$$

donde A_F y A_{j_*F} son los cocientes compactos producidos por v_F y v_{j_*F}, respectivamente. El morfismo $H\colon A \to A_F$ está definido por $H = v_F \circ j$. Además, $(v_F)_*$ y $(v_{j_*F})_*$ son inclusiones.

Sea $h\colon A_{j_*F} \to A_j$ tal que, para $x \in A_{j_*F}$, $h(x) = H(x)$. Así si $h = H_{|A_{j_*F}}$, el diagrama anterior conmuta.

Primero necesitamos que h sea un morfismo de marcos. Por la definición de h, este es un $\wedge$-morfismo y restaría verificar que es un $\bigvee$-morfismo.

Los supremos en A_{j_*F} y A_F son calculados de manera diferente. De esta manera, sea $\hat{\bigvee}$ el supremo en A_{j_*F} y $\tilde{\bigvee}$ el supremo en A_F. Por lo tanto

$$\hat{\bigvee} = v_{j_*F} \circ \bigvee \quad \text{and} \quad \tilde{\bigvee} = v_F \circ \bigvee,$$

es decir, para $X \subseteq A$, $Y \subseteq A_j$,

$$\hat{\bigvee} X = v_{j_*F}(\bigvee X) \quad \text{and} \quad \tilde{\bigvee} Y = v_F(\bigvee Y).$$

Como H es un morfismo de marcos, $H \circ \bigvee = \tilde{\bigvee} \circ H$. Necesitamos algo similar para el morfismo h.

Lema 1.4. *$h \circ \hat{\bigvee} = \tilde{\bigvee} \circ h$.*

Demostración. Basta con verificar la desigualdad $h \circ \hat{\bigvee} \leq \tilde{\bigvee} \circ h$. Notemos que

$$h \circ \hat{\bigvee} = H \circ v_{j_*F} \circ \bigvee = v_F \circ j \circ v_{j_*F} \circ \bigvee \leq v_F \circ v_F \circ j \circ \bigvee$$

donde la desigualdad es el Corolario 1.3. Además, $v_F \circ v_F = v_F$ y

$$h \circ \hat{\bigvee} \leq v_F \circ j \circ \bigvee = H \circ \bigvee = \tilde{\bigvee} \circ H = \tilde{\bigvee} \circ h.$$

Por lo tanto $h \circ \hat{\bigvee} = \tilde{\bigvee} \circ h$. □

De esta manera podemos enunciar el siguiente resultado.

Proposición 1.5. *El diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "v_{j_*F}"] \arrow[d, "j"'] & A_{j_*F} \arrow[d, "h"] \\ A_j \arrow[r, "v_F"'] & A_F \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Demostración. HAY QUE PONER LA PRUEBA □

Con el diagrama anterior podríamos analizar algunos cocientes compactos, por ejemplo, los cocientes compactos cerrados.

2. Marcos eficientes y marcos KC

En [SS06] Sexton dice que $A \in \mathbf{Frm}$ es *eficiente* si para todo $F \in A^\wedge$

$$x \in F \Rightarrow u_d(x) = d \vee x = 1$$

donde $d = d(\alpha) = f^\alpha(0)$, $f = \dot{\bigvee}\{v_y \mid y \in F\}$ y v_y es un v-núcleo. Queremos trasladar esta misma noción, pero para A_j cuando $j \in NA$, es decir, para todo $F \in A_j^\wedge$, si $x \in F$ entonces $d \vee x = 1$, con d similar al antes, pero en este caso tomamos $v_y \in NA_j$ y $0_{A_j} = j(0)$.

2.1. **Algunas propiedades de los marcos eficientes.** Los marcos eficientes fueron introducidos como una especie de propiedad de separación dada en el lenguaje libre de puntos, pero que se relaciona con propiedades sensibles a puntos. Un ejemplo de lo anterior es el siguiente.

Corolario 2.1. *Para A un marco espacial, $\mathcal{O}S$ es un marco Hausdorff si y solo si A es $1-$arreglado.*

Demostración. Se sigue del hecho de que la propiedad Hausdorff es conservativa y por el Teorema 8.4.4 de [SS06] □

La eficiencia es una propiedad más fuerte que ser T_1. La pregunta natural que surge es ¿resulta ser más fuerte que T_2 (o las propiedades tipo Hausdorff en Frm)?

Teorema 2.2. *Todo marco fuertemente Hausdorff es arreglado.*

Demostración. Consideremos $A \in \mathrm{Frm}$ fuertemente Hausdorff. Si A cumple (**fH**), entonces todo sublocal compacto es cerrado. Por teoría de marcos, para $j \in NA$ arbitrario, A_j es compacto si y solo si $\nabla(j) \in A^\wedge$. De aquí que, al ser compacto y por (**fH**) $A_j = A_{u_d}$, para algún $d \in A$, es decir, $j = u_d$ y $\nabla(j) = \nabla(u_d)$ para algún $d \in A$, en particular, por H-M, para todo $F \in A^\wedge$, $v_F \in NA$. Así $\nabla(v_F) = \nabla(u_d)$, es decir, para $x \in F$ se cumple que $u_d(x) = 1 = d \vee x$. Por lo tanto A es arreglado. $\square$

Es momento de verificar si la eficiencia es una propiedad que se preserva bajo cocientes.

Proposición 2.3. *Si A es un marco eficiente, entonces A_j es un marco eficiente.*

Demostración. Es fácil verificar que $F \subseteq j_* F$. Como A es eficiente y $F \in A^\wedge$, se cumple que

$$x \in F \Rightarrow \hat{d} \vee x = 1,$$

donde $\hat{d} = d(\alpha) = f^\alpha(0)$.

Si $\hat{d} \leq d$, entonces $d \vee x = 1$, para $d = d(\alpha) = f^\alpha(j(0))$.

Así, por el Corolario 1.3

$$\hat{d} = \hat{d}(\alpha) \leq j(\hat{d}(\alpha)) = j(\hat{f}^\alpha(0)) \leq f^\alpha(j(0)) = d(\alpha) = d.$$

Por lo tanto, si $x \in F$, entonces $d \vee x = 1$ y A_j es eficiente. $\square$

Definición 2.4. Sea $A \in \mathrm{Frm}$ decimos que A es:

(1) KC si cada cociente compacto es cerrado.
(2) *Hausdorff cerrado compacto* (o KCH de manera abreviada) si cada cociente compacto de A es cerrado y Hausdorff.

En otras palabras, la Definición 2.4 nos dice que si $j \in NA$, entonces $\nabla(j) \in A^\wedge$ y $j = u_a$ para algún $a \in A$. De manera adicional, para 2) pedimos que A_j cumpla la propiedad (**H**).

2.2. Propiedades de los marcos KC.

Proposición 2.5. *Si $A \in \mathrm{Frm}$ comple KC, entonces A_j cumple KC para cada $j \in N(A)$.*

Demostración. Consideremos $k \in NA_j$ tal que $(A_j)_k$ es compacto. Como cualquier filtro abierto es admisible, tenemos que $\nabla(k) \in A_j^\wedge$ y por la Proposición 1.1 $j_* \nabla(K) \in A^\wedge$.

Sea $l = j_* \circ k \circ j^* \in NA$, entonces A_l es un cociente compacto de A y existe $a \in A$ tal que $l = u_a$. Así

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "j^*"'] \arrow[rrr, bend left, "l"] & A_j \arrow[r, "k"'] & (A_j)_k \arrow[r, "j_*"'] & A_j \subseteq A \end{tikzcd}$$

y $a \vee x = k(j(x))$. Por lo tanto, si $x = a$, $k(j(x)) = a$.

Necesitamos que $k = u_b$ para algún $b \in A_j$. Para $x \in A_j$ y $b = j(a)$

$$\begin{aligned} u_b(x) = b \vee x = b \vee j(x) &= j(j(a) \vee j(x)) \\ &= j(k(j(a)) \vee x) \\ &= j(u_a(x)) \\ &= j(k(x)) \\ &= k(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto $u_b = k$. □

Proposición 2.6. *Si A es un marco KC, entonces A es un marco T_1.*

Demostración. Sean $p \in \mathrm{pt}\, A$ y $a \in A$ tales que $p \leq a \leq 1$. Consideremos

$$w_p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \nleq p \\ \\ p & \text{si} \quad x \leq p \end{cases}$$

para $x \in A$. $P = \nabla(w_p) = \{x \in A \mid x \nleq p\}$ es un filtro completamente primo (en particular, $P \in A^\wedge$). Como A es KC, entonces A_{w_p} es un cociente compacto cerrado. Así $u_p = w_p$ y

$$u_p(a) = a \quad \text{and} \quad w_p(a) = 1.$$

es decir, $a = 1$. Por lo tanto p es máximo. □

Proposición 2.7. *Si $A_1, A_2 \in \mathrm{Frm}$ son marcos eficientes, entonces $A_1 \oplus A_2$ es un marco eficiente.*

Demostración. Consideremos $A_1, A_2 \in \mathrm{Frm}$ α-eficientes. Por la construcción de $A_1 \oplus A_2$ tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "\alpha_i"] \arrow[rrr, bend left, "\iota_i"] & A_1 \times A_2 \arrow[r, "\downarrow(\text{-})"] & \mathcal{L}(A_1 \times A_2) \arrow[r, "\sim"] & A_1 \oplus A_2 \arrow[lll, bend left, "(\iota_i)_*"] \end{tikzcd}$$

donde $\alpha_1(a) = (a, 1)$ y $\alpha_2(b) = (1, b)$ para $a \in A_1$ y $b \in A_2$. Además, como $\iota_i \in \mathrm{Frm}$, $(\iota_i)_*$ es su adjunto derecho.

Consideremos $F \in (A_1 \oplus A_2)^\wedge$ y, por la Proposición 1.1, $(\iota_i)_*[F] \in A_i^\wedge$. Como A_i es eficiente, para $x_i \in (\iota_i)_*F$ se cumple que $d_i \vee x_i = 1$, donde

$$d_i = d_i(\alpha) = f_i^\alpha(0), \text{ con } f_i = \dot{\bigvee}\{v_y \mid y \in (\iota_i)_*F\}$$

Por (1) se tiene que si $x_i \in (\iota_i)_*F$, entonces $\iota_i(x_i) \in F$, es decir.

$$x_1 \oplus 1, 1 \oplus x_2 \in F$$

y al ser F un filtro, se cumple que $x_1 \oplus 1 \wedge 1 \oplus x_2 = x_1 \oplus x_2 \in F$.

Además, para cada $i = 1, 2$ tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A_i \arrow[r, "f_i"] \arrow[d, "\iota_i"'] & A_i \arrow[d, "\iota_i"] \\ A_1 \oplus A_2 \arrow[r, "f"'] & A_1 \oplus A_2 \end{tikzcd}$$

donde $f = \dot{\{}v_{\iota_i(y)} \mid \iota_i(y) \in F\}$. Veamos que $\iota_i \circ f_i \leq f \circ \iota_i$.

Consideremos $a \in A_i$, entonces $v_y(a) \leq f_i(a)$ y $\iota_i(v_y(a)) \leq \iota_i(f_i(a))$. Además,

$$\begin{aligned} \iota_i((y \succ a) \wedge y) = \iota_i(y \wedge a) \leq \iota_i(a) &\Leftrightarrow \iota_i(y \succ a) \wedge \iota_i(y) \leq \iota_i(a) \\ &\Leftrightarrow \iota_i(y \succ a) \leq (\iota_i(y) \succ \iota_i(a)). \end{aligned}$$

Luego

$$\iota_i(f_i(a)) \leq (\iota_1(y) \succ \iota_i(a)) = v_{\iota_i(y)}(\iota_i(a)) \leq f(\iota_i(a)).$$

Por lo tanto $\iota_i \circ f_i \leq f \circ \iota_i$. De aquí que, por inducción transfinita, $\iota_i \circ f_i^\alpha \leq f^\alpha \circ \iota_i$ para todo ordinal α. Entonces

$$(\iota_i \circ f_i^\alpha)(0) \leq (f^\alpha \circ \iota_i)(0) \Rightarrow \iota_1(d_1) \leq f^\alpha(0 \oplus 1) \text{ y } \iota_2(d_2) \leq f^\alpha(1 \oplus 0),$$

es decir, $\iota_1(d_1) = d_1 \oplus 1 \leq d \oplus 1$ y $\iota_2(d_2) = 1 \oplus d_2 \leq 1 \oplus d$

Luego

$$d_1 \oplus d_2 = d_1 \oplus 1 \wedge 1 \oplus d_2 \leq f^\alpha(0 \oplus 1) \wedge f^\alpha(1 \oplus 0) = f^\alpha(0 \oplus 0).$$

De aquí que, para $d = d(\alpha) = f^\alpha(0 \oplus 0)$, se cumple que

$$(x_1 \oplus x_2) \vee d_1 \oplus d_2 \leq (x_1 \oplus x_2) \vee d,$$

pero $x_1 \oplus x_2 \vee d_1 \oplus d_2 = (x_1 \vee d_1) \oplus (x_2 \vee d_2) = 1 \oplus 1$. Por lo tanto

$$x_1 \oplus x_2 \vee d = 1 \oplus 1,$$

es decir, $A_1 \oplus A_2$ es eficiente. □

Corolario 2.8. *Si $A_1, A_2 \in \mathrm{Frm}$ son marcos α-eficiente y β-eficiente, respectivamente, entonces $A_1 \oplus A_2$ es eficiente.*

Demostración. Sin perdida de generalidad, consideremos $\gamma = \max\{\alpha, \beta\}$. Entonces A_1 y A_2 son γ-eficientes y por la Proposición 2.7, $A_1 \oplus A_2$ es eficiente. □

Proposición 2.9. *Las siguientes afirmaciones son ciertas:*

(1) *La clase de marcos eficientes es cerrada bajo coproductos.*
(2) *La clase de marcos KC es cerrada bajo coproductos.*

3. Familias particulares de núcleos

Nuestro objetivo es estudiar los núcleos que producen cociente compacto. De manera particular, estamos interesados en aquellos núcleos que producen cociente compacto y cerrado.

Lo presentado en esta sección es una generalización de lo hecho por Escardó en [Esc06]. En este caso, el lugar de utilizar la propiedad (**fH**), usamos la eficiencia (o KC cuando sea necesario).

Definición 3.1. Para $A \in \mathrm{Frm}$ y $j \in NA$, decimos que j es kq (por cociente compacto) si A_j es compacto.

Denotamos por
$$\mathfrak{K}A = \{j \in NA \mid j \text{ es } kq\}.$$

Sabemos que los u-núcleos producen cocientes cerrados. De esta manera, un u-núcleo produce cociente compacto si $u_\bullet \in \mathfrak{K}A$ para $\bullet \in A$. Consideremos los subconjuntos

$$\mathfrak{C}A = \{u_\bullet \in NA \mid u_\bullet \in \mathfrak{K}A\} \quad \text{y} \quad \mathfrak{c}A = \{c \in A \mid u_c \in \mathfrak{K}A\}.$$

donde $\mathfrak{C}A \cong \mathfrak{c}A$. El uso de cada uno de ellos depende del enfoque que ocupemos, ya sea como elementos del marco principal o como núcleos.

Para $j, k \in NA$ tenemos la relación de equivalencia dada por

$$j \sim k \Leftrightarrow \nabla(j) = \nabla(k),$$

donde $\nabla(\_)$ es el filtro de admisibilidad correspondiente al respectivo núcleos.

La clase de cada núcleo define un bloque en NA y se puede demostrar que cada uno de estos bloques tiene menor elemento. Al menor elemento del bloque se le conoce como núcleo ajustado y todo núcleo ajustado tiene la forma

$$f = \dot{\bigvee}\{v_a \mid a \in F\}$$

donde F es un filtro en A y $\dot{\bigvee}$ es el supremo puntual.

Lema 3.2. *Consideremos $j \in NA$ y supongamos que j es ajustado. Entonces*

$$j \leq k \Leftrightarrow \nabla(j) \subseteq \nabla(k)$$

para todo $k \in NA$.

Si $F \in A^\wedge$, $F = \nabla(j)$ para algún j en NA, el bloque de j siempre tiene un mayor y un menor elemento. Denotamos al menor elemento del bloque por $v_F = f^\infty$.

Por último, si el marco A es eficiente, se cumple que $v_F = u_d$, donde $d = v_F(0)$. Notemos que la eficiencia proporciona un cociente compacto y cerrado (el respectivo v_F), para cada $F \in A^\wedge$.

Con todo lo anterior tenemos la siguiente relación entre los distintos núcleos mencionado hasta este momento

$$\mathfrak{fC}A \subseteq \mathfrak{C}A \subseteq \mathfrak{K}A \subseteq NA$$

donde $\mathfrak{fC}A$ es el conjunto de núcleos $v_F = u_d$ que se obtienen cuando un marco es eficiente. Además, con respecto a los marcos se cumple que

$$KCH \Rightarrow KC \Rightarrow \text{Eficiente.}$$

Lema 3.3. *Para $c \in A$ las siguientes son equivalentes:*

(1) $c \in \mathfrak{c}A$.
(2) A_{u_c} *es un marco compacto.*
(3) $\nabla(u_c) \in A^\wedge$.

Demostración. $1) \Rightarrow 2)$ se cumple por caracterización de marcos compactos. Si se cumple $3)$, entonces $c \in \mathfrak{c}A$. Por último, $2) \Leftrightarrow 3)$ es cierto por la caracterización de cocientes compactos y filtros admisibles. □

Lema 3.4. *Lo siguiente se cumple:*

(1) $\mathfrak{c}A$ *es una sección superior.*
(2) *Si* $X \subseteq \mathfrak{c}A$, *entonces* $\bigvee X \in \mathfrak{c}A$ *y si* $c, c' \in \mathfrak{c}A$ *entonces* $(c \succ c') \in \mathfrak{c}A$.
(3) *Si* $c, c' \in \mathfrak{c}A$, *entonces* $c \wedge c' \in \mathfrak{c}A$.
(4) $\mathfrak{c}A \subseteq A$ *es un premarco con implicación.*
(5) $\mathfrak{c}A$ *es un premarco compacto.*

Demostración. (1) Sean $c \leq c'$ tal que $c \in \mathfrak{c}A$, entonces $\nabla(u_c) \subseteq \nabla(u_{c'})$. Consideremos $X \subseteq A$ dirigido con $\bigvee X \in \nabla(u_{c'})$. Debemos probar que

$$\nabla(u_{c'}) \cap X \neq \emptyset.$$

Notemos que

$$c' \vee (\bigvee X) = 1 \Rightarrow c \vee (c' \vee (\bigvee X)) = 1 \Rightarrow c' \vee (\bigvee X) \in \nabla(u_c).$$

y el conjunto $Y = \{c' \vee x \mid x \in X\}$ es dirigido tal que $\bigvee Y \in \nabla(u_c)$. Al ser $\nabla(u_c)$ abierto, se tiene que existe $y \in Y$ tal que $y \in \nabla(u_c)$ con $y = c' \vee x$. Además, $y \in \nabla(u_{c'})$, es decir,

$$y \vee c' = (c' \vee x) \vee c' = c' \vee x = 1$$

Por lo tanto $x \in \nabla(u_{c'}) \in A^\wedge$ y así $c' \in \mathfrak{c}A$.

(2) Se cumple por ser sección superior.

(3) Si $c, c' \in \mathfrak{c}A$, entonces $u_c, u_{c'} \in \mathfrak{K}A$. De esta manera, debemos verificar que $u_{c\wedge c'} \in \mathfrak{K}A$. Por propiedades de los u-núcleos $u_{c\wedge c'} = u_c \wedge u_{c'}$, entonces

$$\nabla(u_{c\wedge c'}) = \nabla(u_c \wedge u_{c'}) = \nabla(u_c) \cap \nabla(u_{c'}).$$

Consideremos $X \subseteq A$ dirigido tal que $\bigvee X \in \nabla(u_{c\wedge c'})$. De aquí que $\bigvee X \in \nabla(u_c) \cap \nabla(u_{c'})$. Como ambos son filtros abiertos, existe $x \in X$ tal que $x \in \nabla(u_c)$ y $x \in \nabla(u_{c'})$, es decir, $x \in \nabla(u_c) \cap \nabla(u_{c'})$. Por lo tanto $\nabla(u_{c\wedge c'}) \in A^\wedge$, es decir, $c \wedge c' \in \mathfrak{C}A$.

(4) Es consecuencia de 1), 2) y 3).

(5) Sea X un conjunto dirigido de elementos en $\mathfrak{c}A$ tal que $\bigvee X = 1$ y consideremos $c \in \mathfrak{c}A$. Como u_c es kq, entonces A_{u_c} es compacto y así 1 es compacto en A_{u_c}, es decir, para

$$\bigvee X = \bigvee^{u_c} X = 1$$

existe $x \in X$ tal que $x = 1$ y $1 \in A_{u_c}$. Por lo tanto, $\mathfrak{c}A$ es compacto.

□

Lema 3.5. *Sea $A \in \mathrm{Frm}$ y $\alpha_A \colon \mathfrak{c}A \to A^\wedge$ la función definida por*

$$\alpha_A(c) = \{x \in A \mid c \vee x = 1\} = \nabla(u_c).$$

Lo siguiente se cumple:

(1) *α_A es un morfismo de premarcos.*

(2) *Si A es eficiente, α_A es sobreyectiva.*

Demostración. (1) Veamos primero que α_A preserva la estructura de un premarco.

(a) Si $c \leq c'$, entonces $\alpha_A(c) = \nabla(u_c) \subseteq \alpha_A(c') = \nabla(u_{c'})$.

(b) Consideremos $1 \in \mathfrak{c}A$, entonces

$$\alpha_A(1) = \nabla(\mathrm{tp}) = A,$$

de aquí que, α_A preserva el mayor elemento.

(c) Sean $c_1, c_2 \in \mathfrak{c}A$ y $X \subseteq \mathfrak{c}A$ dirigido. De aquí que

$$\begin{aligned}
\alpha_A(c_1 \wedge c_2) &= \{x \in A \mid (c_1 \wedge c_2) \vee x = 1\} \\
&= \{x \in A \mid (c_1 \vee x) \wedge (c_2 \vee x) = 1\} \\
&= \{x \in A \mid c_1 \vee x = 1 \text{ y } c_1 \vee x = 1\} \\
&= \nabla(u_{c_1}) \cap \nabla(u_{c_2}) \\
&= \alpha_A(c_1) \cap \alpha_A(c_2).
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\alpha_A(\bigvee X) &= \{x \in A \mid (\bigvee X) \vee x = 1\} \\
&= \bigvee \{x \in A \mid x' \vee x = 1, x' \in X\} \\
&= \bigvee \alpha_A[X],
\end{aligned}$$

donde $\{x \in A \mid x' \vee x = 1, x' \in X\}$ dirigido.

(2) Por último, notemos que para un marco eficiente, el morfismo α_A es suprayectivo ya que si $F = \nabla(j) \in A^\wedge$, entonces

$$v_F = u_d$$

donde $d = v_F(0) \in A$, es decir, $\alpha_A(d) = \nabla(u_d) = \nabla(v_F) = \nabla(j)$

$\square$

Corolario 3.6. *Consideremos $c \in \mathfrak{c}A$ tal que u_c es ajustado, entonces α_A es inyectiva.*

Demostración. Consideremos $\nabla(u_c) = \nabla(u_d)$, con $d \in \mathfrak{c}A$. De aquí que $\nabla(u_c) \subseteq \nabla(u_d)$ y $\nabla(u_c) \supseteq \nabla(u_d)$. Aplicando dos veces el Lema 3.2 tenemos que

$$u_c \leq u_d \quad \text{y} \quad u_c \geq u_d.$$

Por lo tanto, evaluando ambos núcleos en 0 obtenemos $c = d$. $\square$

Notemos que el morfismo α_A no siempre es suprayectivo, pero existen maneras de asegurar que esto ocurra.

Lema 3.7. *Para un marco eficiente y $c \in \mathfrak{c}A$ las siguientes son equivalentes*

(1) *α_A es un isomorfismo.*

(2) *Si $u_c \in \mathfrak{C}A$, u_c es ajustado.*

(3) *Para todo $c \in \mathfrak{c}A$ y $d, d' \in A_{u_c}$*

$$d \leq d' \Leftrightarrow \nabla(u_d) \subseteq \nabla(u_{d'}). \tag{2}$$

Demostración. $1) \Rightarrow 2)$**:** Si $c \in \mathfrak{c}A$, entonces $u_c \in NA$ y tomemos $F = \nabla(u_c) \in A^\wedge$. Sea v_F el respectivo núcleo ajustado del bloque, es decir, $v_F \leq u_c$. Además, por la eficiencia $v_F = u_d$ y $\nabla(u_d) = \nabla(u_c)$. Al ser α_A inyectiva, $d = c$. Por lo tanto u_c es ajustado.

$2) \Rightarrow 3)$**:** Supongamos que $\nabla(u_c) \in A^\wedge$ y que u_c es ajustado para $c \in \mathfrak{c}A$. Notemos que la implicación $\Rightarrow)$ de (2) siempre es cierta, pues si $d \leq d'$ y $d \vee e = 1$, entonces $d' \vee e = 1$. Así solo basta probar la otra implicación.

Queremos demostrar que $\nabla(u_d) \subseteq \nabla(u_{d'})$ implica que $d \leq d'$. Por el Lema 3.2

$$\nabla(u_d) \subseteq \nabla(u_{d'}) \Leftrightarrow u_d \leq u_{d'} \Leftrightarrow d \leq d'.$$

$3) \Rightarrow 1)$**:** Si A es un marco es eficiente, por el Lema 3.5, se cumple que α_A es suprayectiva. Para la inyectividad, consideremos $\alpha_A(d) = \alpha_A(d')$, es decir, $\nabla(u_d) = \nabla(u_{d'})$. Luego, aplicando dos veces (2), se cumple que $d = d'$. Por lo tanto, α_A es inyectiva.

$\square$

Los siguientes resultados son consecuencias del Lema 3.7.

Corolario 3.8. *Para un marco KC las siguientes son equivalentes*

(1) *α_A es un isomorfismo.*

(2) *Si $j \in \mathfrak{K}A$, j es ajustado.*

(3) *Para todo* $c \in \mathfrak{c}A$ *y* $d, d' \in A_{u_c}$
$$d \leq d' \Leftrightarrow \nabla(u_d) \subseteq \nabla(u_{d'}).$$

Corolario 3.9. *Para todo* $c \in \mathfrak{c}A$*,* u_c *es ajustado si y solo si* α_A *es isomorfismo y* A *es eficiente.*

Observación 3.10. Si A es un marco eficiente, $j \in \mathfrak{K}A$ y $F = \nabla(j) \in A^\wedge$, entonces $j \in [v_F, w_F]$. Por la eficiencia
$$u_d = v_F \leq j \leq w_F \Rightarrow \nabla(u_d) = \nabla(j),$$
es decir, si consideremos $j \in \mathfrak{K}A$ le asignamos un elemento $d \in \mathfrak{c}A$ a través de
$$\varphi \colon \mathfrak{K}A \to \mathfrak{C}A$$
donde $\varphi(j) = u_d$.

PREGUNTA: ¿Podemos caracterizar a los marcos eficientes por medio de las funciones α_A y φ?

Para $\mathfrak{Q}S = \{j \in \mathfrak{K}A \mid j \text{ es ajustado}\}$ tenemos
$$\mathfrak{K}A \underset{i}{\overset{\varphi}{\rightleftarrows}} \mathfrak{C}A \qquad \text{y} \qquad \mathfrak{K}A \underset{\iota}{\overset{\varphi'}{\rightleftarrows}} \mathfrak{Q}A$$
donde $\iota \colon \mathfrak{C}A \to \mathfrak{K}A$ es una inclusión.

Notemos que φ y φ' son morfismos que desinflan pues $\varphi(k), \varphi'(k) \leq k$. Además, son monótonos, ya que para $j, k \in \mathfrak{K}A$ con $j \leq k$, se cumple que $u_d = \varphi(j) \leq j \leq k$. De aquí que $\nabla(u_d) \subseteq \nabla(k) = \nabla(u_{d'})$, donde $u_{d'} = \varphi(k)$. Como u_d es un núcleo ajustado
$$\nabla(u_d) \subseteq \nabla(u_{d'}) \Rightarrow u_d \leq u_{d'}.$$
El mismo argumento se aplica para φ'.

Verifiquemos que $\varphi \dashv \iota$, es decir, para $j \in \mathfrak{K}A$ y $u_c \in \mathfrak{C}S$ se cumple que
$$\varphi(j) \leq u_c \Leftrightarrow j \leq \iota(u_c).$$
La implicación $\Leftarrow$) es trivial. Para la otra implicación, Supongamos que $\varphi(j) \leq u_c$ y $j \nleq \iota(u_c) = u_c$. Como u_d es ajustado, es el menor elemento de su bloque y como $j \nleq u_c$. Tenemos dos opciones
$$i)\ u_d \leq u_c \leq j \leq w_F \quad \text{o} \quad ii)\ u_d \leq u_c \ \text{ y } \ u_c \notin [u_d, w_F].$$
Si ocurre $i)$, entonces Además, si el marco A es eficiente $\mathfrak{C}A \simeq \mathfrak{Q}A$. Entonces tenemos el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C}A \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend left, "\alpha"] & \mathfrak{K}A \arrow[r, "\hat{\alpha}"] \arrow[l, bend left, "\varphi"] & A^\wedge
\end{tikzcd}$$

donde $\hat{\alpha}(j) = \nabla(j)$

3.1. **Algunos núcleos de $N\mathfrak{c}A$.** Consideremos $A \in \mathrm{Frm}$ y $a, b \in A$. Sabemos que $a \prec b$ si y solo si existe $x \in A$ tal que $a \wedge x = 0$ y $c \vee c = 1$. En otras palabras, para $x = \neg a$, $x \vee b = 1$.

Definición 3.11. Para $c \in \mathfrak{c}A$ y $a, b \in A_{u_c}$ decimos que $a \prec_c b$ para tener la relación *bastante por debajo* en el marco A_{u_c}.

El elemento $(a \succ c)$ es la negación de a en A_{u_c}. De aquí que

$$a \prec_c b \Leftrightarrow b \vee (a \succ c) = 1.$$

Si $c \leq d$, entonces

$$A_{u_c} = \uparrow c \supseteq \uparrow d = A_{u_d}$$

produce un morfismo de marcos $i_{dc} \colon A_{u_d} \to A_{u_c}$ dado por $i_{dc}(x) = d \vee x$. De esta manera para $c \leq d \leq e$ tenemos

$$\begin{tikzcd}
A_{u_e} & & A_{u_d} \arrow[ll, "i_{ed}"'] \\
& A_{u_c} \arrow[ul, "i_{ec}"] \arrow[ur, "i_{dc}"'] &
\end{tikzcd}$$

y $i_{cc} \colon A_{u_c} \to A_{u_c}$ es la identidad.

La construcción anterior produce un funtor $F \colon \mathfrak{c}A \to \mathrm{Frm}$ donde

$$c \mapsto A_{u_c} \quad \text{y} \quad c \leq d \mapsto i_{dc}$$

son la asignación en objetos y flechas, respectivamente.

Consideremos un cono sobre F dado por $(\hat{A}, \{\pi_c \colon \hat{A} \to A_{u_c}\}_{c \in \mathfrak{c}A})$. De manera similar que en la categoría de conjuntos,

$$\prod_{c \in \mathfrak{c}A} F(c) = \prod_{c \in \mathfrak{c}A} A_{u_c} = \{j \colon \mathfrak{c}A \to \bigcup A_{u_c} \mid j(c) \in A_{u_c}\}$$

para todo $c \in \mathfrak{c}A$ y j una función. De aquí que $j(c) \in A_{u_c}$ si y solo si $c \leq j(c)$, es decir,

$$j \in \prod_{c \in \mathfrak{c}A} A_{u_c} \Leftrightarrow c \leq j(c).$$

Además, si $c \leq j(c)$ entonces $\pi_c(j) = j(c) = c \vee j(c)$, es decir, para $c \leq d$, $j(d) = i_{dc}(j(c)) = d \vee j(c)$ y $j \colon \mathfrak{c}A \to \mathfrak{c}A$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \hat{A} &= \{j \in \prod_{c \in \mathfrak{c}A} A_{u_c} \mid j(d) = i_{dc}(j(c))\} \\ &= \{j \colon \mathfrak{c}A \to \mathfrak{c}A \mid j(c) \in A_{u_c}\} \end{aligned} \tag{3}$$

para todo $c \leq d$.

Proposición 3.12. *Si $c \leq d \in \mathfrak{c}A$, entonces $\hat{A}$ es un cono límite sobre F.*

Demostración. (1) Por construcción, cada proyección π_c está bien definida. Además, si $c \leq d$

$$i_{dc} \circ \pi_c(j) = i_{dc}(j(c)) = d \vee j(c) = j(d) = \pi_d(j),$$

es decir, los triángulos del cono conmutan. Por lo tanto, $\hat{A}$ es un cono sobre F.

(2) Sea $(Y, \{f_c \colon Y \to A_{u_c}\}_{c \in \mathfrak{c}A})$ cualquier otro cono sobre F, esto es, para todo $c \leq d$ se cumple $i_{dc} \circ f_c = f_d$. Consideremos el morfismo $u : Y \to \hat{A}$ definido por

$$(u(y))(c) = f_c(y) \qquad (y \in Y,\ c \in \mathfrak{c}A).$$

Primero vemos que $u(y) \in \lim F$ para cada $y \in Y$. Si $c \leq d$, entonces

$$(u(y))(d) = f_d(y) = (i_{dc} \circ f_c)(y) = i_{dc}(f_c(y)) = d \vee (u(y))(c),$$

y por (3), $u(y) \in \hat{A}$.

Además, por definición de u y de las proyecciones, para cada c se tiene

$$\pi_c \circ u \ = \ f_c,$$

de modo que u es un morfismo de conos $(Y \to \hat{A})$. Veamos que u es único.

Si $v \colon Y \to \hat{A}$ es otro morfismo de conos con $\pi_c \circ v = f_c$ para todo c, entonces para todo $y \in Y$ y $c \in \mathfrak{c}A$,

$$(v(y))(c) = \pi_c(v(y)) = f_c(y) = (u(y))(c).$$

De aquí que $v(y) = u(y)$ para todo y, luego $v = u$.

Por lo tanto $\hat{A}$ satisface la propiedad universal del cono límite. □

Lema 3.13. *Para cualquier* $A \in \mathrm{Frm}$ *y cada función* $j \colon \mathfrak{c}A \to \mathfrak{c}A$ *las siguientes son equivalentes:*

(1) $j \in \hat{A}$.
(2) $j(d) = j(c) \vee d$ *para todo* $d \geq c \in \mathfrak{c}A$.
(3) $j(c \vee a) = j(c) \vee a$ *para todo* $c \in \mathfrak{c}A$ *y* $a \in A$.
(4) $j(c \vee e) = j(c) \vee e$ *para todo* $c, e \in \mathfrak{c}A$.

Demostración. $1) \Leftrightarrow 2)$**:** Se cumple por la construcción de $\hat{A}$.

$2) \Rightarrow 3)$**:** Tomando $c \leq d = c \vee a$, $d \in \mathfrak{c}A$, pues $\mathfrak{c}A$ es una sección superior. De esta manera, por 2)

$$j(d) = j(c) \vee d = j(c) \vee c \vee a = j(c) \vee a,$$

pues $c \leq j(c)$.

$3) \Rightarrow 4)$**:** Si $e \in \mathfrak{c}A$, $e \in A$ y aplicando 3) obtenemos lo que queremos.

$4) \Rightarrow 2)$**:** Si $c \leq d$, se cumple que $c \vee d = d$, tomando $e = d$ y aplicando $4)$ se tiene $j(d) = j(c) \vee d$.

□

Lema 3.14. *Para* $A \in \mathrm{Frm}$ *si* $j \in \hat{A}$*, entonces* j *es un núcleo en* $\mathfrak{c}A$.

Demostración. Verifiquemos que $j \in \hat{A}$ cumple las condiciones de núcleo.

(1) Por construcción, $c \leq j(c)$, es decir, j infla.
(2) Notemos que para $d = j(c)$, entonces $j(d) = j(j(c)) = j(c) \vee j(c) = j(c)$. Por lo tanto j es idempotente.
(3) Consideremos $c = d \wedge d'$, entonces $c \leq d, d'$. Luego
$$j(d) = j(d \wedge d') \vee d \quad \text{y} \quad j(d') = j(d \wedge d') \vee d'.$$
De aquí que
$$\begin{aligned} j(d) \wedge j(d') &= (j(d \wedge d') \vee d) \wedge (j(d \wedge d') \vee d') \\ &= j(d \wedge d') \vee (d \wedge d') \\ &= j(d \wedge d') \end{aligned}$$
donde la segunda igual se da por la distributividad y la última del hecho de que j infla. Así j respeta ínfimos.

Por lo tanto, j es un núcleo en $\mathfrak{c}A$. □

Sabemos que si $j \in NA$, entonces $j^{-1}(1)$ es un filtro.

Lema 3.15. *Para cualquier núcleo j en una semiretícula de Heyting A y cualquier $a \in A$, la desigualdad $v_a \leq j$ se cumple si y solo si $j(a) = 1$, donde $v_a(x) = (a \succ x)$.*

Demostración. Es consecuencia de las propiedades de los v-núcleos. □

Enunciamos un lema auxiliar para la prueba del siguiente teorema.

Lema 3.16. *Sea A un marco y $j\colon A \to A$ un núcleo. Si j preserva supremos finitos y supremos dirigidos, entonces j preserva todos los supremos arbitrarios, es decir,*
$$j(\bigvee X) = \bigvee j[X]$$
para todo $X \subseteq A$.

Demostración. Sea $X \subseteq A$ y consideremos el conjunto
$$\mathcal{F}(X) = \{\bigvee F \mid F \subseteq X \text{ es finito}\}.$$
Notemos que $\mathcal{F}(X)$ es dirigido pues $u = \bigvee F$ y $v = \bigvee G$ con F, G finitos, entonces $w = \bigvee(F \cup G) \in \mathcal{F}(X)$ y $u \leq w, v \leq w$.

Además,
$$\bigvee X \;=\; \bigvee \mathcal{F}(X).$$
Por hipótesis j preserva supremos finitos y dirigidos, entonces
$$j(\bigvee X) = j(\bigvee \mathcal{F}(X)) = \bigvee_{u \in \mathcal{F}(X)} j(u) = \bigvee_{F \subseteq_{\text{fin}} X} j(\bigvee F) = \bigvee_{F \subseteq_{\text{fin}} X} \bigvee j[F].$$
Finalmente, como $\{\bigvee j[F] \mid F \subseteq_{\text{fin}} X\}$ es dirigido y su supremo coincide con $\bigvee j[X]$, tenemos que
$$j\Big(\bigvee X\Big) \;=\; \bigvee j[X].$$
□

Teorema 3.17. *Para A un marco Hausdorff y cualquier núcleo $j\colon \mathfrak{c}A \to \mathfrak{c}A$ las siguientes son equivalentes*

(1) $j \in \hat{A}$.
(2) *j preserva supremos no vacíos.*
(3) *j es Scott-continuo.*
(4) $\nabla(j) \in \mathfrak{c}A^{\wedge}$.

Demostración. $1) \Rightarrow 2)$**:** Consideremos $c, d \in \mathfrak{c}A$, entonces

$$j(c \vee d) = j(c) \vee c \vee d = j(c) \vee d \leq j(c) \vee j(d).$$

Por monotonía se cumple que $j(c)\vee j(d) \leq j(c\vee d)$. Por lo tanto $j(c\vee d) = j(c) \vee j(d)$.

Para los supremos dirigidos, consideremos $\mathcal{D} \subseteq \mathfrak{c}A$ dirigido y tomemos $c \in \mathcal{D}$. Como $\bigvee \mathcal{D} \in \mathfrak{c}A$ se cumple que

$$j(\bigvee \mathcal{D}) = j(c \vee \bigvee \mathcal{D}) = j(c) \vee \bigvee \mathcal{D} = \bigvee_{d\in\mathcal{D}} j(c) \vee d = \bigvee_{d\in\mathcal{D}} j(c \vee d) = \bigvee_{e\in\mathcal{D}} j(e)$$

donde la última igual se cumple por ser $\mathcal{D}$ dirigido.

De aquí que, por el Lema 3.16 se cumple que j preserva cualquier supremo.

$2) \Rightarrow 3)$**:** Si j preserva supremos dirigidos, j es Scott continuo.

$3) \Rightarrow 4)$**:** Por la prueba del Lema 3.4 5), como $\mathfrak{c}A$ es compacto se tiene que para $X \subseteq \mathfrak{c}A$, con X dirigido, existe $x \in X$ tal que $x = 1$ y $x \in A_{u_c}$ para $c \in \mathfrak{c}A$ y $1 = \bigvee X$. como j es Scott continuo

$$j(\bigvee X) = \bigvee j[X] = 1,$$

es decir, $\bigvee X \in \nabla(j)$. de aquí que existe $j(x) \in j[X]$ tal que $j(x) = 1$, entonces $x \in \nabla(j)$. Por lo tanto, $X \cap \nabla(j) \neq \emptyset$ y $\nabla(j) \in \mathfrak{c}A^{\wedge}$.

$4) \Rightarrow 1)$**:** Sabemos que $j \in \lim F$ si $j(d) = j(c) \vee d$ para $c \leq d$. Como j es monótona

$$j(c) \leq j(d) \Rightarrow d \vee j(c) \leq d \vee j(d) = j(d)$$

siempre se cumple. De esta manera, basta con verificar que $j(d) \leq d\vee j(c)$. Consideremos $e \in A_{u_c}$ tal que $e \vee j(d) = 1$ y como $e \vee j(d) \leq j(e \vee d)$, entonces $j(e \vee d) = 1$, es decir, $e \vee d \in \nabla(j)$.

$\square$

4. Cosas de Ángel

Trivially KC implies patch trivial (or equivalently tidy) we want some converse of this fact.

Following articulo de igor.,

Definición 4.1. A frame A has *fitted points* (p-fit for short) if for every point $p \in \mathrm{pt}(A)$ the nucleus

$$\mathrm{w}_p \text{ is fitted}$$

that is, to said for every point p the nucleus w_p is alone in its block.

In general for each $p \in \mathrm{pt}(A)$, the nucleus w_p is the largest memeber of his block, that is,

$$[v_{\mathcal{P}}, \mathrm{w}_p]$$

the corresponding block, here $\mathcal{P} = \{x \in A \mid x \nleq p\}$ in this case we know how to calculate

$$v_{\mathcal{P}}.$$

using the prenucleus $f_{\mathcal{P}}$ we know that

$$v_{\mathcal{P}} = f_{\mathcal{P}}^{\infty} = (\dot{\bigvee}\{\mathrm{v}_x \mid x \in \mathcal{P}\})^{\infty}$$

moreover:

$$f_{\mathcal{P}}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \nleq p \\ \\ \leq p & \text{si} \quad x \leq p \end{cases}$$

for $x \in A$.

and in fact $\mathrm{w_p} = u_p \vee v_{\mathcal{P}} = f_{\mathcal{P}} \circ u_p$. If $\mathrm{w_p}$ is fitted, that is,

$$\mathrm{w_p} = v_{\mathcal{P}}$$

then one need to have $u_p \leq v_{\mathcal{P}}$ then

$$p \leq v_{\mathcal{P}}(0)$$

by the equation of $f_{\mathcal{P}}$ we have

$$0 \leq \cdots \leq f_{\mathcal{P}}^{\alpha}(0) \leq \cdots \leq$$

Proposición 4.2. *Let A be a frame for each $p \in \mathrm{pt}(A)$ the following are equivalent:*

(i) w_p *is fitted.*
(ii) w_p *is alone in its block.*
(iii) $u_p \leq v_{\mathcal{P}}$.
(iv) $u_p \leq f_{\mathcal{P}}$.
(v) $f_{\mathcal{P}} \circ u_p = v_{\mathcal{P}}$.
(vi) *aqui debe de ir una formula de primer de orden.*

Proposición 4.3. *In a* p-fit *frame for each $p \in \mathrm{pt}(A)$ the nucleus w_p is a maximal element in* $\mathrm{p}A$.

Demostración. First we dealing with the basics v_F for $F \in A^{\wedge}$ of the patch frame, given any w_p suppose that $\mathrm{w}_p \leq v_F$ then by (propiedades generales de los w) $v_F = \mathrm{w}_b$ where $b = v_F(0)$ thus

$$\mathrm{w}_p \leq \mathrm{w}_b \Leftrightarrow \mathrm{w}_p(b) = b$$

since w_p is two valuated we have $b = 1$ or $b = p$ if the first case occur then we are done, for the case $b = p$ we have $v_f(p) = p$ that is, to say, $p \notin F$, then by the Birkhoff's separation lemma we can find a completely prime filter D such that

$$F \subseteq G \not\ni p$$

let q the corresponding point associated to G, then $p \leq q$ since A is p-fit $v_G = \mathrm{w}_q$ and thus $\mathrm{w}_p \leq \mathrm{w}_q$ wich is equivalent to $\mathrm{w}_p(q) = q$ again since we are dealing with points one neccesary has $p = q$.

Now consider any closed u_c such that, $\mathrm{w}_p \leq \mathrm{u}_c$ then $\mathrm{w}_p(c) = 1$ and thus $1 = c$.

Therefore in basics of the patch the nuclei w_p are maximal, now consider any $k \in \mathrm{p}A$ such that $k \in \mathfrak{K}A$ □

Proposición 4.4. *Let A be a frame then if*

$$v_F \neq v_G$$

Definición 4.5. A frame A is *tame* if does not have wild points.

Proposición 4.6. *In a tame* p-fit *frame the patch frame* $\mathrm{p}A$ *is* T_1.

Since every hausdorff frame is tame and p-fit we have:

Corolario 4.7. *If $A \in \mathcal{H}rm$ then, the patch frame* $\mathrm{p}A$ *is* T_1.

Definición 4.8. Let A be a frame a nucleus k on A it said to be *kq* if A_j is a compact frame.

Denote by

$$\mathfrak{K}A = \{j \in NA \mid j \text{ is } kq\}.$$

Definición 4.9. A frame A is *compact closed Hausdorff* (KCH for short) if every compact quotient of A is closed and Hausdorff.

Denote by $\mathfrak{f}A = \{kq \text{ fitted nuclei }\} = \{v_F \mid F \in A^\wedge\}$
denote by $\mathfrak{C}A = \{a \in A \mid \mathrm{u}_a \in \mathfrak{K}A\}$

5. Resultados adicionales

Lema 5.1. *Sea $p \in A$. p es $\wedge-$irreducible si y solo si A está linealmente ordenado.*

Demostración. $\Rightarrow$)**:** Consideremos p, q elementos $\wedge-$irreducibles. Veamos que $p \leq q$ o $q \leq p$. Notemos que

$$p \wedge q \leq p \qquad \text{y} \qquad p \wedge q \leq q$$

Por hipótesis, p y q son $\wedge-$irreducibles, es decir,

$$p \leq p \text{ o } q \leq p \quad \text{y} \quad p \leq q \text{ o } q \leq q.$$

Por lo tanto $p \leq q$ o $q \leq p$, es decir, A está linealmente ordenado.

$\Leftarrow$)**:** Consideremos $a, b, p \in A$ tales que $a \wedge b \leq p$. Cómo A es linealmente ordenado, se cumple que $a \wedge b = b$ o $a \wedge b = a$ (pues $a \leq b$ o $b \leq a$). Por lo tanto $a \leq p$ o $b \leq p$. Por lo tanto, p es $\wedge-$irreducible. Como p es arbitrario, entonces ocurre para cualquier $p \in A$.

□

Observación 5.2. Los marcos linealmente ordenados no son Hausdorff punteados.

Demostración. En los marcos linealmente ordenados todos los elementos son semiprimos. Por lo tanto existen primos que no son máximos. □

The block structure on a frame is an important problem and its related with some separation properties of frames.

Proposición 5.3. *For $F \in A^{\wedge}$ and $Q \in \mathcal{Q}S$, if $j \in [v_Q, w_Q]$, then $U_* j U^* \in [v_F, w_F]$, where U^* is the morfism spatial reflection U_* is the right adjoint.*

Demostración. Since N is a functor, we have

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "U"'] & & NA \arrow[d, "N(U)"] \\ {} \arrow[r, mapsto, "N(\_)"] & & {} \\ \mathcal{O}S & & N\mathcal{O}S \end{tikzcd}$$

and $N(U)_*$ is the right adjoint of $N(U)^{\wedge}$. Note the following:

(1) $N(U)(j) \leq k \Leftrightarrow j \leq N(U)_* k$.
(2) If $k \in N\mathcal{O}S$ then $N(U)(j) \leq k \Leftrightarrow Uj \leq kU$.
(3) $N(U)_* k = U_* k U^*$ and $UN(U)_* k = k(U)$.

In 3), if $j = k$, $N(U)_*(j) = U_* j U^*$ and $UN(U)_* j = jU$. For $x \in F$

$$x \in A \xrightarrow{U^*} \mathcal{O}S \xrightarrow{j} \mathcal{O}S \xrightarrow{U_*} A$$

and $U_*(j(U(x)) = \bigwedge(S \setminus j(U(x)))$. Note that $U_*(j(U^*(x))) \subseteq \operatorname{pt} A$. Thus

$$\begin{aligned} x \in F \Leftrightarrow Q \subseteq U(x) \Leftrightarrow U(x) \in \nabla(j) = \nabla(Q) \Leftrightarrow S \setminus j(U(x)) = \emptyset \\ \Leftrightarrow \bigwedge(S \setminus j(U(x))) = 1 = (U_* j U^*)(x) \\ \Leftrightarrow x \in \nabla(U_* j U^*) \end{aligned}$$

Therefor $F = \nabla(U_* j U^*)$. □

In this way we have a function

$$\mho \colon [V_Q, W_Q] \to [V_F, W_F]$$

Teorema 5.4. *Let $A \in \mathcal{H}rm$ then for every $F \in A^{\wedge}$ with corresponding $\mathcal{Q}$ compact saturated we have*

$$\mathcal{O}\mathcal{Q} \cong \uparrow \mathcal{Q}'$$

, that is, the frame of opens of the point space of A_F is isomorphic to a compact closed quotient of a Hausdorff space.

Demostración. □

EJEMPLOS DE marcos pt que no sean KC

HAY que COMENTAR LAS COSAS QUE ESTAN MAL comentar me refiero a ponerlas entre

[Esc01] [Esc06]

[SS06]

References

[Esc01] Martın Hötzel Escardó, *The regular-locally compact coreflection of a stably locally compact locale*, Journal of Pure and Applied Algebra **157** (2001), no. 1, 41–55.

[Esc06] Martín H Escardó, *Compactly generated hausdorff locales*, Annals of Pure and Applied Logic **137** (2006), no. 1-3, 147–163.

[Sim04] Harold Simmons, *The vietoris modifications of a frame*, Unpublished manuscript, 79pp., available online at http://www. cs. man. ac. uk/hsimmons (2004).

[SS06] RA Sexton and H Simmons, *Point-sensitive and point-free patch constructions*, Journal of Pure and Applied Algebra **207** (2006), no. 2, 433–468.