UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA

Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías

Curso introductorio a la teoría de topos

Impartido por:

Dr. Luis Ángel Zaldívar Corichi

Elaborado por:

Alejandro Aceves, Josué Maldonado, Juan Carlos Monter

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Construcciones básicas

1.1.1. Categorías

Definición 1.1 (Categoría)**.** Una categoría $\mathcal{C}$ consta de los siguientes datos:

- Una clase (no necesarimente un cojunto) de objetos $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, y una clase de morfismos $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$.
- A cada par de objetos $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ le corresponde una clase de morfismos (flechas) de X en Y, que se denotará por $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.
- Para cada terna de objetos $X, Y, Z \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ está definida una función llamada composición

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Y) \times \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(Y,Z) & \to & \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X,Z) \\ (f,g) & \mapsto & g \circ f. \end{array}$$

Además, estos datos satisfacen las siguientes propiedades

- La composición es asociativa, es decir, $h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g$.
- Para cada objeto $X \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ existe un morfismo $Id_X \in \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X)$ tal que $f \circ Id_X = Id_X \circ f$.

Para cualesquiera $X, Y \in \mathrm{Ob}(C)$, una manera de denotar los morfismos de X en Y es por $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ tal como se muestra en la definición anterior. Sin embargo, también es común denotarlo por $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ o $\mathcal{C}(X, Y)$.
A continuación se presentan algunos de los ejemplos clásicos de categorías.

Ejemplo 1.2.

1. Con denota la categoría de conjuntos cuyos objetos son conjuntos y, tiene como morfismos las funciones entre conjuntos. La composición entre morfismos está bien definida, y el morfismo identidad es la función identidad.

2. Vect_k es la categoría que tiene por objetos espacios vectoriales sobre un campo k y, como morfismos transformaciones lineales entre espacios vectoriales.

3. Sean A y B conjuntos parcialmente ordenados. Un morfismo de A a B es una función monótona (creciente). Esto es, para cualesquiera $a, b \in A$, $a \leq b$ implica que $f(a) \leq f(b)$. Así, los conjuntos parcialmente ordenados junto con sus morfismos constituyen la categoría Pos. Un caso "más general" es el siguiente: para cualesquiera dos conjuntos parcialmente ordenados A y B, estos se pueden ver como categorías, por lo que un morfismo de A a B no es más que un funtor.

4. Algunos ejemplos más son los siguientes: Top es la categoría de espacios topológicos con morfismos las funciones continuas. Por otro lado, tenemos las categorías de grupos y la categoría de anillos con unidad, Grp y Ring, cuyos morfismos son homomorfismos de grupos y homomorfismos de anillos, respectivamente.

Definición 1.3 (Categoría pequeña)**.** Una categoría $\mathcal{C}$ se dice *pequeña* si la clase objetos $\text{Ob}(\mathcal{C})$ y la clase de morfismos $\text{Mor}(\mathcal{C})$ es un conjunto.

Definición 1.4 (Objeto final/inicial)**.** Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Un objeto $T \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ es *final* si para cualquier otro objeto $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ existe un único morfismo $f : X \to T$. Análogamente, un objeto $I \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ se dice *inicial* si para cualquier $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ existe un único morfismo $g : I \to X$.

Proposición 1.5. *Los objetos finales/inicales, si existen, son únicos salvo isomorfismo único [Mac13].*

1.1.2. Principio de dualidad

De la definición de objeto inicial y final, es común pensar que uno es la parte "dual" del otro. En la práctica, es común encontrarse con ciertas propiedades que satisface una categoría, sin embargo, muchas de estas propiedades tienen una noción "dual" en el sentido de que también se siguen cumpliendo aún cuando se cambia la dirección de las flechas entre los objetos. Esto motiva a la siguiente definición.

Definición 1.6 (Categoría opuesta)**.** Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Se define la *categoría opuesta* de $\mathcal{C}$, denotada por $\mathcal{C}^{\text{op}}$, como la categoría cuyos objetos son los mismos que los de $\mathcal{C}$, i.e., $\text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) = \text{Ob}(\mathcal{C})$, pero sus morfismos van en sentido opuesto, esto es, si $X^{\text{op}} = X, Y = Y^{\text{op}} \in \mathcal{C}^{\text{op}}$, una flecha $f^{\text{op}} : X^{\text{op}} \to Y^{\text{op}}$ en $\mathcal{C}^{\text{op}}$ es una flecha $f : Y \to X$ en $\mathcal{C}$. De este modo se tiene que

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, Y) = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X).$$

Además, la ley de composición está dada por $f^* \circ g^* = (g \circ f)^*$. Observemos que $(\mathcal{C}^{\text{op}})^{\text{op}} = \mathcal{C}$, es decir, la categoría opuesta de $\mathcal{C}^{\text{op}}$ es la categoría original.
La importancia de trabajar con la categoría dual reside en el siguiente resultado conocido como el principio de dualidad.

Teorema 1.7. *Supongamos la validez, en toda categoría, de un enunciado que expresa la existencia de algún objeto o morfismo o la igualdad de algunas composiciones. Entonces, el "enunciado dual ", que se obtiene al voltear la dirección de las flechas y al sustituir cada composición $f \circ g$ por $g \circ f$ en el enunciado original, es también válido en toda categoría.*

1.1.3. Funtores

Definición 1.8 (Funtor covariante)**.** Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías. Un funtor *covariante* $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ consiste de lo siguiente:

- Una asignación en objetos: $F : \mathrm{Ob}(\mathcal{A}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$.
- Para cada $X, Y \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ se tiene una asignación

$$F : \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(X, Y) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{B}}(F(X), F(Y)).$$

Que satisfacen las siguientes propiedades.

- F respeta la identidad:
$$F(Id_X) = Id_{F(X)}.$$
- Respeta la composición:
$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

Definición 1.9 (Funtor contravariante)**.** Diremos que un funtor es *contravaruiante* si corresponde a un funtor covariante de la forma $F : \mathcal{A}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{B}$.

De la definición anterior, se tiene que si $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ son funtores, entonces su composición $G \circ F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ está dada por

i) El compuesto en objetos,

$$(G_0 \circ F_0) : A_0 \to C_0, \quad A_0 \in \mathcal{A},\ C_0 \in \mathcal{C}.$$

ii) Para cada $A, B \in \mathcal{C}$, el compuesto en morfismos

$$(G_{F(A),F(B)} \circ F_{A,B}) : \mathrm{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(G(F(A)), G(F(B))).$$

Con esto en mente, definimos lo siguiente.

Definición 1.10. Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías. Diremos que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son *isomorfas* si existen funtores $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tal que uno es inverso del otro, i.e., $F \circ G = \mathrm{id}_{\mathcal{B}}$ y $G \circ F = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}$.

Añadir ejemplos

1.1.4. Transformaciones naturales

La manera de relacionar objetos de una categoría es mediante sus morfismos. Como vimos anteriormente, dadas dos categorías es posible obtener información de una a partir de la otra mediante un funtor. En esta sección, estamos interesados en estudiar transformaciones naturales, que a grandes rasgos, estas se pueden entender como morfismos entre funtores.

Definición 1.11 (Transformación natural)**.** Sean $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ funtores. Un *transformación natural* es una tupla (F, η, G), en donde $\eta : F \to G$ es una colección de morfismos $\eta_A : F(A) \to G(A)$ en $\mathcal{B}$ tal que

1. Para cada $A \in \mathcal{A}$, se tiene que $\eta_A : F(A) \to G(A)$.

2. Para toda $f \in \mathcal{A}(A, B)$, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(A) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(B) \arrow[r, "\eta_B"'] & G(B) \end{tikzcd}$$

conmuta.

Si $\eta_A : F(A) \to G(A)$ es un isomorfismo para todo $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$, diremos que $\eta : F \to G$ es un *isomorfismo natural*, el cual denotamos por $F \cong G$. De esto se sigue que $\eta^{-1} : F \to G$ dada por $\eta_A^{-1} = (\eta_A)^{-1}$ también es una transformación natural.

Ejemplo 1.12. Sea $\mathcal{A}$ una categoría pequeña y $\mathcal{B}$ una categoría arbitraria. La categoría de funtores, denotada por $\mathrm{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ (o algunas veces también es denotada por $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$), tiene como objetos funtores con dominio $\mathcal{A}$ y codominio $\mathcal{B}$. Para cualesquiera dos funtores en $\mathrm{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, un morfismo entre estos es una transformación natural.

Definición 1.13 (Funtor representable)**.** Sea $\mathcal{C}$ una categoría y $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Con}$ un funtor. Diremos que F es *representable* si existe un isomorfismo natural entre F y $\mathrm{Hom}(A, -)$, para algún $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$. En este caso, se dice que F es representado por A.

Una caracterización de cuando un funtor es representable es la siguiente (veáse [Mac13]). Un funtor $F : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Con}$ es representable si, y solo si, $F \cong h_X$ para algún $X \in \mathrm{Top}$. Esto motiva a enunciar uno de los resultados de mayor importancia en la teoría de categorías.

Añadir en los ejemplos de funtores el funtor de puntos h_X.

Lema 1.14 (Lema de Yoneda)**.** *Sea* $F : \mathcal{C} \to \mathrm{Con}$ *un funtor. Dado el funtor* $\mathrm{Hom}(C, -)$*, se tiene que el morfismo*

$$\begin{aligned} \varphi : \mathrm{Hom}(\mathrm{Hom}(A, -)) &\to F(A) \\ \eta &\mapsto \eta_A \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

1.2. Límites/colímites

1.2.1. Límites

Definición 1.15. Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ un funtor. Un *cono* sobre F es una pareja $(C, \langle P_A \rangle_{A \in \mathcal{A}})$ que consiste de lo siguiente:

1. Un objeto $C \in \mathcal{C}$,

2. Para cada objeto $A \in \mathcal{A}$, se tiene una flecha $(P_A : C \to FA) \in \mathcal{C}$ tal que, para cada flecha $\left(A \xrightarrow{\alpha} A'\right) \in \mathcal{A}$, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\alpha"'] \arrow[r, phantom, "\rightsquigarrow"] & FA \arrow[rr, "F\alpha"] & & FA' \\ A' & & C \arrow[ul, "P_A"] \arrow[ur, "P_{A'}"'] & \end{tikzcd}$$

es sólido en $\mathcal{C}$

Definición 1.16. Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ un funtor. Un *límite* sobre F es un cono $(L, \langle P_A \rangle_{A \in \mathcal{A}})$ sobre F con la siguiente propiedad: para cualquier otro cono $(M, \langle q_A \rangle_{A \in \mathcal{A}})$ sobre F, existe un único morfismo $m : M \to L$ tal que, para todo $A \in \mathcal{A}$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, dashed, "!m"] \arrow[dr, "q_A"'] & & L \arrow[dl, "P_A"] \\ & FA & \end{tikzcd}$$

conmuta. Esto es, $q_A = P_A \circ m$, para todo $A \in \mathcal{A}$.

A los morfismos $(P_A : L \to FA, \quad A \in \mathcal{A})$ se les llama *proyecciones*, y al límite de F se denota como $\varprojlim_{A \in \mathcal{A}} FA$.

Lema 1.17. *El límite de un funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$, cuando existe, es único salvo isomorfismo natural.*

Demostración. ■ Pendiente

Lema 1.18. *Sea $(L, \langle P_A \rangle_{A \in \mathcal{A}})$ el límite de $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$. Son morfismos son iguales $\left(M \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} L\right) \in \mathcal{C}$ si, para todo $A \in \mathcal{A}$, $P_A f = P_A g$.*

Demostración. La demostración es inmediata de la propiedad universal del límite. ■

A continuación, se muestran algunos de los ejemplos de límites.

Ejemplo 1.19.

1. Sea $\mathcal{A}$ una categoría vacía, $\mathcal{C}$ una categoría y $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ un funtor. Entonces, el límite de F es un objeto $C \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ tal que, para todo $C' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$, existe un único morfismo $C' \to C$. Es decir, C es el objeto final de $\mathcal{C}$.

2. Sea $\mathcal{T}$ una categoría con objetos $\bullet$, $*$, y $F : \mathcal{T} \to \mathcal{C}$ un funtor. Entonces, un límite para F es

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl] & \\ F(\bullet) & & F(*) \arrow[ul] \\ & C' \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[uu, dashed, "!"] & \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, C define un producto para $F(\bullet)$ y $F(*)$, el cual denotamos como $C = F(\bullet) \times F(*)$.

3. Sea $\mathcal{L}$ la categoría que consiste de los objetos $\bullet$ y $*$, dos flechas paralelas de $\bullet$ a $*$, y las respectivas identidades. Sea $F : \mathcal{L} \to \mathcal{C}$ un funtor. De manera diagramática tenemos lo siguiente

$$\mathcal{L} := \begin{tikzcd} \bullet \arrow[loop above] \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & * \arrow[loop above] \arrow[r, "F"] & \mathcal{C} \end{tikzcd}$$

Así, el límite sobre $\mathcal{F}$ de la forma $\mathcal{L}$ es

$$\begin{tikzcd} & C \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & & & \\ F(\bullet) \arrow[rr, shift left, "h_1"] \arrow[rr, shift right, "h_2"'] & & F(*) = C \arrow[r, "f"] & F(\bullet) \arrow[r, shift left, "h_1"] \arrow[r, shift right, "h_2"'] & F(*) \\ & & C' \arrow[u, dashed, "!"] \arrow[ur, "\alpha"'] & & \end{tikzcd}$$

Del diagrama anterior se tiene que, $g = h_1 \circ f = h_2 \circ f$. Por lo tanto, C es el igualador de $F(\mathcal{L})$.

4. Sea P la categoría que consiste de tres objetos a, b y c, dos flechas $a \to b$, $b \to c$, y las respectivas identidades. Sea $F : P \to \mathcal{C}$ un funtor. En un diagrama se tiene que

$$\begin{tikzcd} & c \arrow[loop above] \arrow[dd] & \\ & & \xrightarrow{F} \mathcal{C} \\ a \arrow[loop left] \arrow[r] & b \arrow[loop below] & \end{tikzcd}$$

Por lo cual, un límite sobre F de la forma P es el pullback

$$\begin{tikzcd} d' \arrow[dr, dashed, "!"] \arrow[drr, bend left] \arrow[ddr, bend right] & & \\ & F(d) \arrow[r] \arrow[d] & F(c) \arrow[d] \\ & F(a) \arrow[r] & F(b) \end{tikzcd}$$

1.2.2. Colímites

Definición 1.20. Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ un funtor. Un *cocono* sobre F es una pareja $(C, \langle s_A \rangle)_{A \in \mathcal{A}}$ que consiste de lo siguiente

1. Un objeto $C \in \mathcal{C}$.
2. Para cada $A \in \mathcal{A}$, un morfismo $(s_A : FA \to C) \in \mathcal{C}$ tal que, para cada flecha $\left(A \xrightarrow{\alpha} A'\right) \in \mathcal{A}$, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "\alpha"'] & & FA \arrow[rr, "F_\alpha"] \arrow[dr, "s_A"'] & & FA' \arrow[dl, "s_{A'}"] \\ A' \arrow[u, phantom, ""] & \arrow[r, squiggly] & {} & C & \end{tikzcd}$$

conmuta en $\mathcal{C}$. Es decir, $s_A = s_{A'} \circ F_\alpha$.

Definición 1.21. Un *colímite* sobre F es un cocono $(L, \langle s_A \rangle_{A \in \mathcal{A}})$ con la siguiente propiedad: para cualquier otro cocono $(M, \langle t_A \rangle_{A \in \mathcal{A}})$ el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} FA \arrow[rr, "s_A"] \arrow[dr, "t_A"'] & & L \\ & M \arrow[ur, dashed, "!m"'] & \end{tikzcd}$$

es conmutativo. Esto es, para todo $A \in \mathcal{A}$, $t_A = m s_A$.

Por el principio de dualidad, los ejemplos de colímites se obtienen de manera dual a los ejemplos de límites dados en el Ejemplo 1.19.

Lema 1.22. *Sea* $\left(A \xrightarrow{h} B \underset{g}{\overset{f}{\rightrightarrows}} C\right) \in \mathrm{Con}$. *Este es un igualador si, y solo si, para cda $b \in B$ tal que $f(b) = g(b)$ implica que existe un único $a \in A$ tal que $h(a) = b$.*

Demostración. ■ Pendiente

Definición 1.23. Una categoría $\mathcal{C}$ es *completa* si cada funtor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tiene límite, donde $\mathcal{D}$ es una categoría pequeña. Dualmente, $\mathcal{C}$ es *cocompleta* si todo funtor $F : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tiene colímite. Si $\mathcal{C}$ es completa y cocompleta, diremos que es *bicompleta.*

Lema 1.24. *La categoría* Con *es bicompleta. En particular, los (co)límites de cada funtor se calculan puntualmente.*

Demostración. ■ Pendiente

Lema 1.25. *Sea $(A, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Entonces, la categoría*

$$\mathrm{Con}^{(A,\leq)^{\mathrm{op}}} : [(A, \leq)^{\mathrm{op}}, \mathrm{Con}]$$

es bicompleta y los (co)límites se calculan puntualmente.

Demostración. ■ Pendiente

Definición 1.26. Sea $\mathcal{C}$ una categoría pequeña.

- Diremos que $\mathcal{C}$ es *finita* si $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ y $\mathrm{Mor}(\mathcal{C})$ son conjuntos finitos.

- Un límite sobre $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ es *finito* si $\mathcal{C}$ es finita.

Definición 1.27 (Categoría filtrante)**.** Una categoría $\mathcal{C}$ es *filtrante* si

1. $\mathcal{C}$ es no vacía.
2. Para cada $C_1, C_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ existe $C \in \mathcal{C}$ junto con morfismos $C_1 \xrightarrow{f_1} C$ y $C_2 \xrightarrow{f_2} C$.
3. Para cualesquiera $C_1, C_2 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ y morfismos $C_1 \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} C_2$ existe $C_3 \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ y un morfismo $C_1 \underset{f_2}{\overset{f_1}{\rightrightarrows}} C_2 \xrightarrow{h} C_3$ tal que $hf_1 = hf_2$.

Definición 1.28. Un *colímite* sobre $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es filtrante si $\mathcal{C}$ es filtrante.

Lema 1.29. *Sea $F : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ un funtor con $\mathcal{B}$ finita y $\mathcal{C}$ filtrante. Entonces, existe un cono sobre F en $\mathcal{C}$.*

La demostración se sigue del siguiente resultado.

Proposición 1.30. *Sea $\mathcal{C}$ una categoría pequeña.*

1. *Sea $\{C_i \mid i \in I\}$ un conjunto finito de objetos en $\mathcal{C}$. Entonces, podemos encontrar un objeto $C \in \mathcal{C}$ y morfismos $\{C_i \to C \mid i \in I\}$.*
2. *Dado un conjunto finito $\{f_i : C \to C' \mid i \in I\}$, podemos encontrar un objeto $C'' \in \mathcal{C}$ y un morfismo $C' \xrightarrow{f} C''$ tal que $ff_i = ff_j$, para todo $i, j \in I$.*

Demostración. ■

1.3. Adjunciones

Definición 1.31 (Adjunción)**.** Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ categorías. Una *adjunción* entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ es una terna (F, G, φ) donde $\mathcal{D} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}$ son funtores y φ es una función que asigna a cada par de objetos $C \in \mathcal{C}$ y $D \in \mathcal{D}$ una biyección

$$\varphi_{\mathcal{D},\mathcal{C}} : \mathcal{D}(D, GC) \cong \mathcal{C}(FD, C).$$

En este caso, decimos que F es adjunto izquierdo y G es adjunto derecho, lo cual es denotado por $F \dashv G$.

En lo anterior, $\varphi_{\mathcal{D},\mathcal{C}}$ de hecho es un ismorfismo natural. El siguiente resultado nos dice que las adjunciones se comportan bien bajo composición.

Lema 1.32. *Sean $\mathcal{D} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{C} \underset{G'}{\overset{F'}{\rightleftarrows}} \mathcal{B}$ funtores. Si $F \dashv G$ y $F' \dashv G'$, entonces $F' \circ F \dashv G \circ G'$.*

Demostración. Como $F \dashv G$ se tiene que, para cada par de objetos $C \in \mathcal{C}$ y $D \in \mathcal{D}$, hay una biyección

$$\varphi_{\mathcal{D},\mathcal{C}} : \mathcal{D}(D, GC) \cong \mathcal{C}(FD, C). \tag{1.1}$$

Del mismo modo, al ser $F' \dashv G'$, para cada par de objetos $C' \in C$ y $B \in \mathcal{B}$, existe una biyección

$$\varphi_{\mathcal{C},\mathcal{B}} : \mathcal{C}(C, G'B) \cong \mathcal{B}(F'C', B). \tag{1.2}$$

Si $D \in \mathcal{D}$ y $B \in \mathcal{B}$, al primero evaluar en (1.1) en los objetos C y $G'B \in \mathcal{C}$, y después evaluar (1.2) en $FC \in \mathcal{D}$ y $B \in \mathcal{B}$, obtenemos

$$\mathcal{D}(D, G(G'B)) \cong \mathcal{C}(FD, G'B) \cong \mathcal{B}(F'(FC), B).$$

Por lo tanto, $F' \circ F \dashv G \circ G'$ tal como se quería. ■

A continuación se enuncian un par de resultados en los que se muestra la relación entre objetos iniciales/finales y adjuntos. Esto es, si una categoría tiene objeto inicial, este da lugar a un adjunto izquierdo. Dualmente, si la categoría tiene objeto final, este determina un adjunto derecho.

Proposición 1.33. *Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son categorías con objeto inicial entonces el funtor*

$$\begin{array}{rcl} \sigma_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} & \to & \mathcal{A} \times \mathcal{B} \\ A & \mapsto & (A, 0) \\ f & \mapsto & (f, 1_0) \end{array}$$

es adjunto izquierdo de la proyección $\pi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \to \mathcal{A}$.

Proposición 1.34. *Sean $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ categorías con coproductos finitos y funtores*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C} \arrow[r, "F"] \arrow[d, "G"'] & \mathcal{A} \\ \mathcal{B} & \end{tikzcd}$$

Entonces, el funtor $\langle F, G \rangle : \mathcal{C} \to \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ si, y solo si, ambos funtores F y G tienen adjunto izquierdo.

Ahora, considereos $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías y $\mathcal{D} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}$ funtores. Si $\left(D \xrightarrow{h} D'\right) \in \mathcal{D}$ y $\left(C \xrightarrow{k} C'\right) \in \mathcal{D}$, de la definición de adjunción, se tienen los siguientes diagramas conmutativos.

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}(FD, C) \arrow[r, "\varphi_{D,C}"] \arrow[d, "\mathcal{C}(Fh,C)"'] & \mathcal{D}(D, GC) \arrow[d, "\mathcal{D}(h,GC)"] \\ \mathcal{C}(FD', C) \arrow[r, "\varphi_{D',C}"'] & \mathcal{D}(D', GC) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \mathcal{C}(FD, C) \arrow[r, "\varphi_{D,C}"] \arrow[d, "\mathcal{C}(FD,k)"'] & \mathcal{D}(D, GC) \arrow[d, "\mathcal{D}(D,GK)"] \\ \mathcal{C}(FD, C') \arrow[r, "\varphi_{D,C'}"'] & \mathcal{D}(D, GC') \end{tikzcd}$$

En otras palabras, para todo $FD \xrightarrow{f} C$ se tiene que $\varphi(f \circ Fh) = \varphi(f)h$ y $\varphi(k \circ f) = Gk \circ \varphi f$. Esto es equivalentea que φ^{-1} sea también un isomorfismo natural. Es decir, con las mismas flechas y $D' \xrightarrow{g} GC$, se tiene que $\varphi^{-1}(gh) = \varphi^{-1}gFh$ y $\varphi^{-1}(Gkg) = k\varphi^{-1}(g)$.
Tomando el caso particular $C = FD$, se tiene el diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(FD, FD) \arrow[r, "\varphi_{D,FD}"] \arrow[d, "FD"'] & \mathcal{D}(D, GFD) \arrow[d, "\mathcal{D}(h,GFD)"] \\
\mathcal{C}(FD', FD) \arrow[r, "\varphi_{D',FD}"'] & \mathcal{D}(D', GFD)
\end{tikzcd}$$

Defina $\eta_D = \varphi(1_{FD}) : D \to GFD$, para toda $D \in \mathcal{D}$.
Afirmación. $\langle \eta_D \mid D \in \mathcal{D} \rangle$ define una transformación natural $\eta : 1_D \to GF$.
Basta verificar que el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
D' \arrow[r, "\eta_{D'}"] \arrow[d, "h"'] & GFD' \arrow[d, "GFh"] \\
D \arrow[r, "\eta_D"'] & GFD
\end{tikzcd}$$

conmuta. Lo cual es inmediata ya que

$$GF\varphi(1_D) = \varphi(Fh) = \varphi(1_{D'})h.$$

A esta transformación natural $\eta_D : 1_D \to GF$ se le llama *unidad de la adjunción* $(F, G, \varphi) : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$.
Por otro lado, consideremos el caso particular $D = GC$. Entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{C}(FGC, C) \arrow[r, "\varphi_{GC,C}"] & \mathcal{D}(GC, GC) \\
\mathcal{C}(FGC, C') \arrow[r, "\varphi_{GC,C'}"'] \arrow[u, "\mathcal{C}(FGC,k)"] & \mathcal{D}(GC, GC') \arrow[u, "\mathcal{D}(GC,Gk)"']
\end{tikzcd}$$

Se define ε_C como $\phi^{-1}(1_{GA}) : FGC \to C$, para toda $C \in \mathcal{C}$. De manera similar a como se hizo con η_D, se puede verificar que ϵ_C es una transformación natural, a la cual le llamamos *counidad de la adjunción* $(F, G, \phi) : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$.

Definición 1.35 (Equivalencia de categorías)**.** Dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ son *equivalentes* si existe una adjunción $(F, G, \eta, \varepsilon) : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que la unidad y la counidad son isomorfismos naturales. En este caso, decimos que los funtores F y G son una equivalencia de categorías.

Para finalizar, veremos una "aplicación" de los conceptos vistos en esta sección para el caso particular cuando las categorías son retículas. Dado un conjunto parcialmente ordenado $(A, \leq)$, se dice que es una *retícula* si cada subconjunto finito no vacío $X \subseteq A$ tiene supremo e ínfimo.

Lema 1.36. *Sean $(A, \leq)$ y $(B, \leq)$ retículas. El funtor $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ tiene adjunto derecho si, y solo si, F preserva supremos arbitrarios.*

Demostración.

$\boxed{\Longrightarrow}$ Supongamos que existe un funtor $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tal que $F \dashv G$. Lo anterior ocurre si, y solo si,

$$A \leq GB \iff FA \leq B, \quad \forall A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A}), B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B}). \tag{1.3}$$

Sea $\bigvee_{i\in I} A_i$ un supremo en $\mathcal{A}$. Esto es, $A \leq \bigvee_{i\in I} A_i$. Dado que F es un funtor, $FA_i \leq F\left(\bigvee_{i\in I} A_i\right)$. Luego,

$$FA_i \leq \bigvee_{i\in I} FA_i \leq F\left(\bigvee_{i\in I} A_i\right).$$

Por (1.3), se tiene que

$$A_i \leq G\left(\bigvee_{i\in I} FA_i\right).$$

Así, $\bigvee_{i\in I} A_i \leq G\left(\bigvee_{i\in I} FA_i\right)$. Nuevamente, por (1.3),

$$F\left(\bigvee_{i\in I} A_i\right) \leq \bigvee_{i\in I} FA_i.$$

Ya que se tiene la doble desigualdad, se concluye que $F\left(\bigvee_{i\in I} A_i\right) = \bigvee_{i\in I} FA_i$.

$\boxed{\Longleftarrow}$. Ahora, supongamos que F preserva supremos arbitrarios. Sea $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ y tomemos $GB = \bigvee_{FA\leq B} A$. Si $B' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$ es tal que $B' \leq B$, entonces $F(A) \leq B'$ implica que $F(A) \leq B$. Así,

$$GB' = \bigvee_{FA\leq B'} A \leq \bigvee_{FA\leq B} A = GB$$

y $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ es funtorial. Ahora, resta probar que $A \leq GB$ si, y solo si $FA \leq B$. Para esto, consideremos $A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{A})$ y $B \in \mathrm{Ob}(\mathcal{B})$. Si $A \leq GB$, entonces $A \leq \bigvee_{FA\leq B} A$. En virtud de que F preserva supremos arbitrarios,

$$FA \leq \bigvee_{FA\leq B} FA \leq B.$$

Por otro lado, si $FA \leq B$, al ser G un funtor, se tiene que $GFA \leq GB$. Luego,

$$A = \bigvee_{FA'\leq FA} A' \leq GB$$

tal como se quería. $\blacksquare$

1.4. Extensiones de Kan

Recordemos que $\mathrm{Fun}(\mathcal{A},\mathcal{B})$ denota la categoría de funtores de la categoría $\mathcal{A}$ en la categoría $\mathcal{B}$, y cuyos morfismos son las transformaciones naturales entre ellos. Lo que se desea probar en esta sección es que la precomposición

$$\begin{array}{rcl} -\circ F : \mathrm{Fun}(\mathcal{B},\mathcal{C}) & \to & \mathrm{Fun}(\mathcal{A},\mathcal{C}) \\ G & \mapsto & G\circ F \end{array}$$

tiene adjunto izquierdo si $\mathcal{C}$ es cocompleta. Como caso particular, esto ocurre si $\mathcal{C} = \mathrm{Con}$.

Definición 1.37 (Extensión de Kan)**.** Sean $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ funtores. La *extensión de Kan izquierdad* de G a lo largo de F, si existe, es una pareja $(K : \mathcal{B} \to \mathcal{C},\ \alpha : G \Rightarrow K\circ F)$, donde K es un funtor y α una transformación natural, que es universal: para cualquier otra pareja $(H : \mathcal{B} \to \mathcal{C},\ \beta : G \Rightarrow H\circ F)$ existe una única transformación natural $\gamma : K \Rightarrow H$ tal que $(\gamma\circ F)\alpha = \beta$. Es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, Rightarrow, "\alpha"] \arrow[d, Rightarrow, "\beta"'] & KF \arrow[dl, Rightarrow, "\gamma F"] \\ HF & \end{tikzcd}$$

conmuta. El funtor K es denotado por $\mathrm{Lan}_F G$.

Teorema 1.38. *Sean $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ funtores. Si $\mathcal{A}$ es pequeña, y $\mathcal{C}$ es cocompleta, entonces la extensión de Kan izquierda de G a lo largo de F existe.*

Pendiente *Demostración.* ∎

Sean $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ categorías pequeñas y $\mathcal{C}$ una categoría cocompleta. Consideremos el funtor $-\circ F : \mathrm{Fun}(\mathcal{B},\mathcal{C}) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{A},\mathcal{C})$ dado por

$$\begin{array}{ccc} L & & L\circ F \\ {\scriptstyle\lambda}\Big\Downarrow & \longrightarrow & \Big\downarrow{\scriptstyle\lambda\circ F} \\ L' & & L'\circ F \end{array}$$

Ahora, definimos el funtor $\mathrm{Lan}_{F\_} : \mathrm{Fun}(\mathcal{A},\mathcal{C}) \to \mathrm{Fun}(\mathcal{B},\mathcal{C})$ como

$$\begin{array}{ccc} M & & \mathrm{Lan}_F M \\ {\scriptstyle\mu}\Big\Downarrow & \longrightarrow & \Big\downarrow{\scriptstyle\gamma_\mu} \\ M' & & \mathrm{Lan}_F M' \end{array}$$

donde $\mathrm{Lan}_F M$ es el funtor de la pareja $(\mathrm{Lan}_F M : \mathcal{B} \to \mathcal{C},\ \alpha_M : M \Rightarrow \mathrm{Lan}_F M\circ F)$. Para culaquier otra pareja $(\mathrm{Lan}_F M' : \mathcal{B} \to \mathcal{C},\ \alpha_{M'}\circ\mu : M \Rightarrow \mathrm{Lan}_F M'\circ F)$, se tiene que $\gamma_\mu : \mathrm{Lan}_F M \Rightarrow \mathrm{Lan}_F M'$ es la única transformación natural tal que $(\gamma_\mu\circ F)\alpha_M = \alpha_{M'}$. Así, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.39. *Sea $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ un funtor y $\mathcal{C}$ una categoría. Si $\mathcal{A}$ es pequeña y $\mathcal{C}$ es cocompleta, entonces $\mathrm{Lan}_{F\_}$ es adjunto izquierdo de $-\circ F$.*

Pendiente *Demostración.* ∎

1.5. Categorías extensivas

A lo largo de esta sección, nos referiremos a coproductos finitos como sumas finitas. Para tener una descripción detallada de las demostraciones se sugiere al lector interesado en consultar [Mer02]. Dada una categoría $\mathcal{E}$ que admite sumas finitas, y cualesquiera dos objetos A y B de $\mathcal{E}$, se construye la categoría $\mathcal{E}/A \times \mathcal{E}/B$ cuyos objetos son pares (f, g) donde $f : A' \to A$ y $g : B' \to B$, para todo $A', B' \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E})$. Mientras que los morfismos son parejas (α, β) donde $\alpha : A' \to A''$ es tal que $f = f' \circ \alpha$, con $f' : A'' \to A'$ para todo A', A'', y lo mismo con β. A partir de la categoría $\mathcal{E}/A \times \mathcal{E}/B$ se puede construir un funtor que vaya a la categoría $\mathcal{E}/A + B$, esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.40. Sea $\mathcal{E}$ una categoría con sumas finitas y, A y B un par de objetos en $\mathcal{E}$. Se define el funtor

$$+ : \mathcal{E}/A \times \mathcal{E}/B \to \mathcal{E}/A + B$$

como aquel que para cada $(f, g) \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E}/A \times \mathcal{E}/B)$ le asigna una flecha inducida por la suma. En un diagrama, esto es

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "\iota_{A'}"] \arrow[d, "f"'] & A' + B' \arrow[d, dashed, "f+g"] & B' \arrow[l, "\iota_{B'}"'] \arrow[d, "g"] \\
A \arrow[r, "\iota_A"'] & A + B & B \arrow[l, "\iota_B"]
\end{tikzcd}$$

Mientras que a cada morfismo (α, β) en $\mathcal{E}/A \times \mathcal{E}/B$ también le asigna la flecha inducida por la suma tal como lo muestra el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
& A'' \arrow[rr, "\iota_{A''}"] \arrow[ddl, dashed, "f'"'] & & A'' + B'' \arrow[rr, "\iota_{B''}"] \arrow[ddl, dashed, "f'+g'"] & & B'' \arrow[ddl, "g'"] \\
A' \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[rr, "\iota_{A'}"] \arrow[d] & & A' + B' \arrow[ur, "\alpha+\beta"] \arrow[d] & & \bullet \arrow[ll, "\iota_{B'}"'] \arrow[ur, "\beta"] \arrow[d, "g"] & \\
A \arrow[rr, "\iota_A"'] & & A + B & & \bullet \arrow[ll, "\iota_B"] &
\end{tikzcd}$$

Definición 1.41 (Categoría extensiva)**.** Sea $\mathcal{E}$ una categoría con sumas finitas. Decimos que $\mathcal{E}$ satisface la *ley extensiva* si, para cada par de objetos A y B de $\mathcal{E}/A \times \mathcal{E}/B$, el funtor $+ : \mathcal{E}/A \times \mathcal{E}/B \to \mathcal{E}/A + B$ es una equivalencia de categorías. En este caso, diremos que $\mathcal{E}$ es una categoría extensiva.

A grandes rasgos, uno puede pensar en una categoría extensiva como aquella en la que los coproductos (sumas finitas en nuestro caso) se "comportan bien" con cierta clase de pullbacks.

Ejemplo 1.42.

1. Con es extensiva.

2. Top es extensiva.

3. Si $\mathcal{C}$ es una categoría pequeña, entonces la categoría $\mathrm{Fun}[\mathcal{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Con}]$ es extensiva.

4. La categoría de espacios vectoriales sobre un campo k, Vect_k, no es extensiva (el coproducto es la suma directa).

Definición 1.43 (Sumas universales)**.** Dada una categoría $\mathcal{E}$ que admite sumas finitas, diremos que las sumas son *universales* si, para cualquier morfismo $f : S \to A + B$, los productos fibrados a lo largo de las inyecciones existen y el renglón superior del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
S_1 \arrow[r] \arrow[d] & S \arrow[d] & S_2 \arrow[l] \arrow[d] \\
A \arrow[r] & A+B & B \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

es una suma.

Definición 1.44. Si una categoría $\mathcal{E}$ tiene objeto inicial A, se dice que A es *estricto* si para cada flecha $A \to 0$ se tiene que $A = 0$.

Lema 1.45. *Si $\mathcal{E}$ es una suma con sumas universales, ebtobces el objeto inicial es estricto.*

Teorema 1.46. *Sea $\mathcal{E}$ una categoría con sumas universales. Entonces, $\mathcal{E}$ es extensiva si, y solo si, satisface lo siguiente.*

i) Para cualquier diagrama conmutativo de la forma

$$\begin{tikzcd}
A' \arrow[r, "s_1'"] \arrow[d, "g"'] & S' \arrow[d, "f"'] & B \arrow[l, "s_2'"'] \arrow[d, "h"] \\
A \arrow[r, "s_1"'] & S & B \arrow[l, "s_2"]
\end{tikzcd}$$

tal que el renglón inferior es una suma, cumple que el renglón superior también es una suma, entonces ambos cuadrados son productos fibrados.

ii) Toda suma en $\mathcal{E}$ es universal.

Capítulo 2

Gavillas sobre Top

Dado un espacio S, describir sus propiedades globales puede ser una tarea complicada; en muchas ocasiones, resulta conveniente fijarse en sus propiedades locales, es decir, ver qué ocurre en una vecindad alrededor de un punto $x \in S$, por ejemplo. Así, estudiar propiedades globales de un espacio se convierte en un proceso de pasar de local a global. Intuitivamente, esto refleja algo similar a lo que ocurre con una gavilla en un espacio, ya que esta puede entenderse como una asignación F que a cada abierto U en S se le asigna un conjunto $F(U)$, junto con una noción de "pegado" entre los abiertos de S. Dependiendo de la naturaleza del problema, en lugar de connjuntos, se pueden considerar grupos, anillos, módulos, etc., esto hace que las gavillas sean una herramienta bastante utilizada en diversas ramas de la matemática, como topología algebraica, la geometría algebraica y, en general, en álgebra. Precisar el origen de la teoría de gavillas resulta complicado, por lo que muchos consideran un punto de partida y motivación para esta teoría el estudio de la *continuación analítica*, introducida por Riemann para la comprensión de las "funciones multivaluadas". Aunque, cabe resaltar que, el desarrollo formal de la teoría de gavillas es gracias a Leray, Serre y Cartan.
En esta capítulo se presentan los conceptos fundamentales de la teoría de gavillas en conjuntos, para esto nos basamos en las ideas expuestas en [MM12].

2.1. Gavillas sobre Top

Dado un espacio S, denotamos por $\mathcal{O}(S)$ la categoría cuyos objetos son conjuntos abiertos de S. Para cada par de abiertos U y V en $\mathcal{O}(S)$, $\rho : U \to V$ morfismo en $\mathcal{O}(S)$ si, y solo si, $U \subseteq V$.

Definición 2.1 (Pregavilla)**.** Una *pregavilla* en $\mathcal{O}(S)$ es un funtor $F : \mathcal{O}(S)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Con}$.

A un elemento $s \in F(U)$ de la imagen de un abierto U de S se le llama *sección*. Al morfismo $F(\rho) : F(V) \to F(U)$ correspondiente a la inclusión $\rho : U \hookrightarrow V$ le llamamos *restricción*. Adoptamos la notación $F(\rho)(s) = s\,|_U = \rho^V_U(s) \in F(U)$ con s una sección de V. Con esto en mente, una manera explícita en la que podemos entender una pregavilla es la siguiente: para cada par de abiertos $V \subseteq U$ de S el mapeo restricción actúa como $\rho^U_V : F(U) \to F(V)$ tal que para todo $U \in \mathcal{O}(S)$ se tiene que $\rho^U_U = \mathrm{id}_U$, y para cualesquiera $W \subseteq V \subseteq U \in \mathcal{O}(S)$ se cumple que, $\rho^U_W = \rho^V_W \circ \rho^U_V$.

Lema 2.2. *Sea $F : \mathcal{O}(S)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Con}$ un funtor, U un abierto de S y $\{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta de U. Entonces el diagrama*

$$F(U) \xrightarrow{\varepsilon} \prod_{i\in I} F(U_i) \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j\in I} F(U_i \cap U_j), \tag{2.1}$$

donde para todo $t \in F(U)$, $e(t) = \langle t\,|_{U_i}\rangle_{i\in I}$ y para toda familia $\langle t_i \in F(U_i)\rangle_{i\in I}$, $p(\langle t_i\rangle_{i\in I}) = \langle t_i\,|_{(U_i\cap U_j)}\rangle_{i,j\in I}$, siempre existe y se cumple que $pe = qe$.

Demostración. ■

Definición 2.3 (Pregavilla separada)**.** Una pregavilla $F : \mathcal{O}(S)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Con}$ se dice *separada* si la función e de (2.1) es inyectiva.

Definición 2.4 (Gavilla)**.** Una *gavilla* de conjuntos sobre un espacio topológico S es un funtor $F : \mathcal{O}(S)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Con}$ tal que para todo conjunto abierto U de S existe una cubierta abierta $\{U_i\}_{i\in I}$ de tal modo que (2.1) es un igualador.

Es decir, una gavilla es pregavilla separada. En la literatura (veáse [Ten75], por ejemplo) es común definir una gavilla como una pregavilla que satisface lo siguiente.

i). Sea $U \in \mathcal{O}(S)$. Si $\{U_i\}_{i\in I}$ es una cubierta abierta para U y para cualesquiera dos secciones s y s' tales que $\rho^U_{U_i}(s) = \rho^U_{U_i}(s')$, se tiene que $s = s'$.

ii). Sea $U \in \mathcal{O}(S)$ y $\{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta de U. Si $\{s_i\}_{i\in I}$ es una familia de secciones de F, donde $s_i \in F(U_i)$, tal que $\rho^{U_i}_{U_i\cap U_J}(s_i) = \rho^{U_j}_{U_i\cap U_j}$, para toda $i, j \in I$. entonces existe una sección $s \in F(U)$ tal que $\rho^U_{U_i}(s) = s_i$.

Obsérvese que la sección $s \in F(U)$ definida en ii), es única por la condición i); a esta condición ii) se le conoce comúnmente como condición de pegado. Resulta que en Con, dar una pregavilla separada es equivalente a dar una pregavilla que satisface i) y ii).

Definición 2.5. Sea S un espacio topológico. La *categoría de gavillas* sobre S consta de lo siguiente.

- *Objetos*. Gavillas de conjuntos sobre S.
- *Morfismos*. Transformaciones naturales.

Algunos ejemplos relvantes de gavillas son los siguientes.

Ejemplo 2.6.

1. Sea $U \in \mathcal{O}(S)$. El conjunto

$$C(U) := \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$$

es una gavilla. Para esto, primero veamos que $C(-)$ es funtorial, lo cual demostraría que en efecto es una pregavilla. Sea $U \overset{\rho}{\hookrightarrow} V$ con $U, V \in \mathcal{O}(S)$. Entonces, $C(\rho) : C(V) \to C(U)$. Tomando la restricción usual, se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook, "\rho"] \arrow[dr, "f|_U"'] & V \arrow[d, "f"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

conmutativo. Esto prueba la funtorialidad, y así $C(-)$ es una pregavilla.
Ahora, veamos que, para cada $U \in \mathcal{O}(S)$Y $\{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta para U, el siguiente diagrama

$$C(U) \xrightarrow{e} \prod_{i\in I} C(U_i) \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j\in I} C(U_i \cap U_j) \tag{2.2}$$

es un igualador en Con. Sea $\{f_i\}_{i\in I} \in \prod_{i\in I} C(U_i)$ tal que $p(\{f_i\}) = q(\{f_i\})$. Entonces, $f_i \mid_{U_i\cap U_j} = f_j \mid_{U_i\cap U_j}$ para toda $i, j \in I$. Para cada $U \in \mathcal{O}(S)$, definimos la función $f : U \to \mathbb{R}$ de la siguiente manera

$$f(x) = \begin{cases} f_i(x) & \text{si } x \in Ui, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $y \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$, para algún $x \in U$. Ya que $\{U_i\}_{i\in I}$ es una cubierta abierta para U, se tiene que $U = \bigcup_{i\in I} U_i$, y en particular $x \in U_i$, para algún $i \in I$. Así, $f_i(x) = f(x) = y$. Luego, como $\{f_i\} \in C(U_i)$ se sigue que f_i es continua para toda $i \in I$; esto implica que existe un abierto $V \subset U_i \subset U$ tal que $x \in V$ y $f_i(V) = f(V) \subset (a, b)$. Por lo tanto, $f \in C(U)$ y $e(f) = \{f_i\}_{i\in I}$. Ahora, supongamos que existe $g \in CU$ tal que $e(g) = \{f_i\}$. Si $x \in U$ entonces, $x \in U_i$ para alguna $i \in I$. De esto se sigue que, $f(x_i) = f(x) = g(x)$. Al tener que f y g tienen el mismo dominio, mismo codominio y misma regla de correspondencia, así $f = g$; lo cual prueba la unicidad de f. Por el Lema 1.22, se sigue que (2.2) es un igualador en Con y CU es una gavilla.

2. Sea $U \in \mathcal{O}(S)$. El conjunto

$$C^\infty(U) := \{f : U \to \mathbb{R} \mid f \text{ es suave}\}$$

es una gavilla. La demostración de esto es análoga a la del ejemplo anterior.

3. Sea $U \in \mathcal{O}(S)$. El conjunto de funciones holomorfas

$$\Omega(U) := \{f : U \to \mathcal{C} \mid f \text{ es holomorfa}\}$$

es una gavilla. Primero, veamos que $\Omega(-)$ es una pregavilla. Sea $U \overset{\rho}{\hookrightarrow} V$ con $U, V \in \Omega(S)$. Entonces,

$$\Omega(\rho) : \Omega(V) \;\to\; \Omega(U).$$

Por definición, $\Omega(V) = \{f : V \to \mathcal{C} \mid f \text{ es holomorfa}\}$. Tomando la restricción usual, se tiene que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, hook] \arrow[dr, "f\mid_U"'] & V \arrow[d, "f"] \\
& \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

Así, $\Omega(-)$ es funtorial y, por lo tanto, una pregavilla.
Para probar que $\Omega(-)$ es una gavilla, vamos a verificar las condiciones i) y ii) dadas anteriormente.

i). Sea $U \in \mathcal{O}(S)$ y $\{U_i\}_{i\in I}$ una cubierta abierta para U. Supongamos que s y s' son secciones tales que $\rho^U_{U_i}(s) = \rho^U_{U_i}(s')$. Del siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
U_i \arrow[r, hook] \arrow[dr, shift left, "\rho^U_{U_i}(s)"] \arrow[dr, shift right, "\rho^U_{U_i}(s')"'] & U = \bigcup_{i\in I} U_i \arrow[d, shift right, "s"'] \arrow[d, shift left, "s'"] \\
& \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

se tiene que $s = s'$.

ii). Supongamos que $f_j : U_j \to \mathbb{C}$ son holomorfas y $f_i \mid_{U_i\cap U_j} = f_j \mid_{U_i\cap U_j}$. En $U = \bigcup_{i\in I} U_i$, definimos $f(w) = f_j(w)$, para toda $w \in U_i$. Para ver que la condición de pegado se satisface, basta verificar que f satisface las condiciones de Cauchy-Riemann. Sea $z = x + iy \in \mathcal{C}$. Entonces, $f(z) = f(x, y) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Luego,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u'}{\partial x} + i\frac{\partial v'}{\partial y} \quad \text{con } u'(x,y) + iv'(x,y) = f_j(z) \\
&= \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{\partial v'}{\partial y} \quad f_j \text{ es holomorfa} \\
&= \frac{\partial u'}{\partial x}_{u_j} = -\frac{\partial v'}{\partial y}_{u_j}
\end{aligned}$$

Por lo tanto, $f_j = f \mid_{U_j}$. Así, f es holomorfa, y $\Omega(-)$ es gavilla.

2.2. El funtor Γ

Dado S un espacio topológico, la categoría de rebanadas Top$/S$ consta de lo siguiente.

- *Objetos.* Todas las funciones continuas $f \in \mathrm{Mor}(\mathrm{Top})$ cuyo codominio son igual a S.
- *Morfismos.* Para cada función continua $f : E \to E' \in \mathrm{Mor}(\mathrm{Top})$, existen $p : E \to S$ y $p' : E' \to S$ tales que $p = p' \circ f$.

$$\mathrm{Top}/S = \begin{tikzcd} E \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \arrow[dl, "p'"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

A una función continua de la forma $p : E \to S$ le llamamos *haz* sobre S, y al espacio E se le conoce como *espacio total*. En topología algebraica es común estudiar un tipo particular de haces, los cuales se llaman haces fibrados, y no deben de confundirse con los haces que estamos estudiando ya que f solo es una función continua y no un homeomorfismo; además, de que no pedimos la condición de localidad trivial como ocurre en el caso de los haces fibrados.
Para cada punto $x \in S$, la *fibra asociada* a x es la preimagen $p^{-1}(x)$. Esto nos permite interpretar al espacio E como un espacio formado por copias de cada fibra parametrizada por los puntos de S. Como $p : E \to S$ es una función continua, la preimagen de abiertos manda abiertos en abiertos; por lo cual, para cada $U \in S$ conjunto abierto, se tiene que $p_U : p^{-1}(U) \to U$ es un haz sobre U. Más aún, el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} p^{-1}(U) \arrow[r, hook] \arrow[d, "p_U"'] & E \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r, hook, "f"'] & S \end{tikzcd}$$

es un pullback en Top.

Definición 2.7 (Sección)**.** Una *sección* (global) de un haz $p : E \to S$ es una función continua $s : S \to E$ tal que $p \circ s = \mathrm{id}_S$. Una *sección local* de p alrededor de $x \in S$ es una sección de p_U.

Proposición 2.8. *Sea $p : E \to S$ un haz y $f : U \to S$ una función continua. Hay una correspondencia biyectiva entre el conjunto de secciones de p_U y el conjunto de levantamientos de f a E, es decir, funciones continuas $h : U \to E$ tal que $ph = f$.*

Demostración. Por la propiedad universal del pullback, dar una sección de p_U es equivalente a dar un levantamiento $h : U \to E$ de f que hace completar el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[drr, bend left, "h"] \arrow[dr, dashed] \arrow[ddr, bend right, "\mathrm{id}_U"'] & & \\
& p^{-1}(U) \arrow[r, hook] \arrow[d, "p_U"'] & E \arrow[d, "p"] \\
& U \arrow[r, hook, "f"'] & S
\end{tikzcd}$$

■

Denotemos por $\Gamma_p U := \{s \mid s \text{ es una sección local}\}$. Dado un abierto U de S y $V \subset U$, se define

$$\begin{array}{rcl} \Gamma_p U & \to & \Gamma_p V \\ s & \mapsto & \rho_V^U(s) := s\,|_V \,. \end{array}$$

Lema 2.9. $\Gamma_p : \mathcal{O}(S)^{op} \to \mathrm{Con}$ *es un funtor.*

2.3. El funtor Λ

Sea $P : \mathcal{O}(S)^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Con}$ una pregavilla sobre un espacio S. Sea $x \in S$ un punto, y consideremos la familia $\mathcal{O}(x) := \{U \in \mathcal{O}(S) \mid x \in U\}$ la familia de vecindades abiertas de x en S. Dados $U_\alpha, U_\beta \in \mathcal{O}(x)$ la intersección $U_\gamma := U_\alpha \cap U_\beta \in \mathcal{O}(x)$ cumple que $U_\gamma \subseteq U_\alpha$ y $U_\gamma \subseteq U_\beta$. Esto es, considerando el orden pacial $\leq$ dado por la contención de abiertos, se tiene que $(\mathcal{O}(x), \leq)$ es un conjunto dirigido. Además, para cada morfismo $\iota_\alpha^\beta : U_\alpha \hookrightarrow U_\beta$ en $\mathcal{O}(x)$, se tienen morfismos $\phi_\alpha^\beta := P(\iota_\alpha^\beta) : P(U_\beta) \to P(U_\alpha)$ los cuales forman una familia directa en Con, denotada por $(P(\mathcal{O}(x)), \leq)$.
Si el colímite de $(P(\mathcal{O}(x)), \leq)$ en Con existe, este es denotado por $P_x := \varinjlim P(U_\alpha)$. Para cada familia $\{M_\alpha\}$ indexada por $\mathcal{O}(x)$, este colímite se puede ver de manera explícita como sigue

$$\varinjlim M_\alpha := \left(\bigsqcup M_\alpha \right) / \sim$$

donde $s \sim t$ ($s \in PU$ y $t \in PV$) si, y solo si, existe un abierto W tal que $W \subseteq U \cap V$ y $s\,|_W = t\,|_W \in PW$ para $x \in W$. Además, se tienen morfismos canónicos

$$\phi : P(U_\alpha) \to \bigsqcup P(U_\alpha) \to \varinjlim P(U_\alpha).$$

Definición 2.10 (Germen)**.** Dada una sección $s \in P(U)$, se define su *germen* en el punto $x \in S$, denotado por $[s]_x$, como la imagen $\phi(s) \in P_x$.

Notemos que, para un punto $x \in S$, los elementos de P_x son precisamente las secciones en el punto x. A $P_x = \{[s]_x \mid s \in PU, x \in U \in \mathcal{O}(x)\}$ se le conoce como el *tallo* de P en x.

Lema 2.11. *La relación "$\sim$" es de equivalencia.*

Demostración.

- *Reflexividad.* Sea $U \in \mathcal{O}(S)$ y $s \in PU$. Para $x \in U$, tenemos que $U \subseteq U$ y $s = s\mid_U$. Por lo tanto, $s \sim s$.

- *Simetría.* Para $U, V \in \mathcal{O}(S)$, sean $s \in PU$ y $t \in PV$ tales que $s \sim t$. Entonces, se cumple la definición y dado que existe $W \subseteq U \cap V$, se sigue que también se cumple $t \sim s$.

- *Transitividad.* Consideremos $U, V, W \in \mathcal{O}(S)$ y, $s \in PU$, $t \in PV$ y $r \in PW$ tales que $s \sim t$ y $t \sim r$. Entonces, existen $Y \subseteq U \cap V$ y $Y' \subseteq V \cap W$ vecindades de x donde $s\mid_Y = t\mid_Y$ y $t\mid_{Y'} = r\mid_{Y'}$. Nótese que $Y \cap Y'$ es una vecindad de $x \in U \cap W$. Como $s\mid_Y = t\mid_Y$ implica que $s\mid_{Y\cap Y'} = t\mid_{Y\cap Y'}$. Además, $t\mid_{Y\cap Y'} = r\mid_{Y\cap Y'}$. Por lo tanto, $s\mid_{Y\cap Y'} = r\mid_{Y\cap Y'}$ y $s \sim r$.

Ya que $\sim$ es reflexiva, simétrica y transitiva se tiene que es de equivalencia. ■

Lema 2.12. *Sea* $P^x : \mathcal{O}(x) \to \mathrm{Con}$. *Las funciones* $\{\mathrm{germ}_x : P(U) \to \mathcal{O}(x)\}$ *tales que para cada sección* $s \in P(U)$, $\mathrm{germ}_x s = [s]_x$, *forman un cocono colímite sobre* $\mathcal{O}(x)$. *Más aún, este es filtrante.*

Demostración. Sean $U, V \in \mathcal{O}(x)$. Entonces, se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} PU \arrow[rr] \arrow[dr, "\mathrm{germ}_x"'] & & PV \arrow[dl, "\mathrm{germ}_x"] \\ & P_x & \end{tikzcd}$$

Si $s \in PU$ es tal que $s\mid_V = PV$, entonces $[s]_x = [s\mid_V]_x$. Por lo tanto, el diagrama anterior conmuta y $(\mathrm{germ}_x : PU \to P_x)_{U \in \mathcal{O}(x)}$ es un cócono. Ahora, consideremos $(\tau_u : PU \to L)_{U\in\mathcal{O}(x)}$ otro cocono sobre $P^{(x)}$. Veamos que existe una única función $t : P_x \to L$ tal que $t \circ \mathrm{germ}_x = \tau$. Esto es,

$$\begin{tikzcd} & PU \arrow[r] \arrow[dl, "\tau_U"'] \arrow[dr, "\mathrm{germ}_x"] & PV \arrow[d, "\mathrm{germ}_x"] \arrow[dll, "\tau_V"'] \\ L \arrow[rr, dashed, "t"'] & & P_x \end{tikzcd}$$

Definamos $t : P_x \to L$ como $t([s]_x) = \tau_U(s)$. Ahora, tomemos r otro representante, i.e., $[s]_x = [r]_x$ implica que existe $W \in U \cap V$ tal que $s \mid_W = r \mid_W$ y $\tau_W(s \mid_W) = \tau_W(r \mid_W)$. Como τ es un cócono, entonces

$$\tau_U(s) = \tau_W(s \mid_W) = \tau_W(r \mid_W) = \tau_V(r).$$

Por lo tanto, t está bien definida. Ahora, sea $s \in PU$. Entonces, $t \circ \mathrm{germ}_x(s) = t([s]_x) = \tau_U(s)$. Por otro lado, consideremos $l : P_x \to L$ tal que $l \circ \mathrm{germ}_x(s) = \tau$. Si $[s]_x \in P_x$, se tiene que

$$\begin{aligned} t([s]_x) &= t \circ \mathrm{germ}_x(s) = \tau(s) \\ &= l \circ \mathrm{germ}_x(s) = l([s]_x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, t es única y $\{\mathrm{germ}_x : PU \to P_x\}$ es un cócono límite. ■

Lema 2.13. *Cualquier morfismo $h : P \to Q$ de pregavillas (cualquier transformación natural), en cada punto $x \in S$, induce una única función $h_x : P_x \to Q_x$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} PU \arrow[r, "h_U"] \arrow[d, "\mathrm{germ}_x"'] & QU \arrow[d, "\mathrm{germ}_x"] \\ P_x \arrow[r, "h_x"'] & Q_x \end{tikzcd}$$

conmuta para cualquier $U \in \mathcal{O}(x)$.

Demostración. Sea $h : P \to Q$ una transformación natural. Sean $U, V \in \mathcal{O}(x)$ tal que $V \leq U$. Si $s \in PU$, al ser h natural se tiene que $\mathrm{germ}_x \circ h_V(s \mid_V) = \mathrm{germ}_x(h_V(s) \mid_V)$. Por el lema anterior, $\{\mathrm{germ}_x : PU \to PV\}$ es un cócono límite; así, existe una única función $h_x : P_x \to Q_x$ que hace conmutar el diagrama deseado. Además, $h_x([s]_x) = [h_U(s)]_x$. ■

Del resultado anterior, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd} PU \arrow[rr] \arrow[d, "h_U"'] & & PV \arrow[d, "h_V"] \\ QU \arrow[rr] \arrow[dr] & & QV \arrow[dl] \\ & Q_x & \end{tikzcd}$$

Un resultado inmediato es el siguiente.

Lema 2.14. *La transformación natural dada por $h \to h_x$ es un funtor de $\mathrm{Con}^{\mathcal{O}(x)^{op}} \to \mathrm{Con}$. Dicho funtor es "tomar germen en x".*

Demostración. Ya hemos probado que la asignación de objetos y flechas está bien definida. Resta verificar que preserva identidades y composiciones.

- Sea $\mathrm{id}_p \colon P \to P$ en $\mathrm{Con}^{\mathcal{O}(x)^{op}}$, Veamos que $(\mathrm{id}_p)_x = \mathrm{id}_{p_x}$. Sea $[s]_x \in P_x$, por el lema anterior, cualquier morfismo $\mathrm{id}_p \colon P \to P$ induce id_{p_x}. Así,

$$\mathrm{id}_{p_x}([s]_x) = [\mathrm{id}_p(s)]_x = [s]_x.$$

- Sean $h \colon P \to Q$ y $g \colon Q \to R$ morfismos en $\mathrm{Con}^{\mathcal{O}(x)^{op}}$. Veamos que $(g \circ h)_x = g_x \circ h_x$. Sea $[s]_x \in P_x$ y al ser h, g

- transformaciones naturales, se tiene que

$$(g \circ h)_x([s]_x) = g_x([h_U(s)]_x) = [g_U(h_U(s))]_x = g_x \circ h_x([s]_x).$$

■

Sea

$$\Lambda_p = \bigsqcup_{x \in S} P_x = \bigsqcup_{x \in S} \{[s]_x \mid s \in PU\}$$

la unión disjunta de germenes sobre $x \in S$. Para toda sección $s \in PU$, definamos las siguientes funciones

$$\begin{array}{rcl} p : \Lambda_p & \to & S \\ [s]_x & \mapsto & x, \\ \hat{s} : U & \to & \Lambda_p \\ x & \mapsto & [s]_x \, . \end{array}$$

Lema 2.15. *El conjunto $B_p := \{\hat{s}(U) \mid s \in PU, U \in \mathcal{O}(S)\}$ es una base para una topología en Λ_p.*

Demostración. Primero veamos que $\bigcup B_p = \Lambda_p$.

- Se cumple que $\bigcup B_p \subseteq \Lambda_p$, para la otra condición consideremos $[s]_x \in \Lambda_p$, entonces $[s]_x = \hat{s}(U)$ para algún $U \in \mathcal{O}(S)$ y $s \in PU$. Por lo tanto, $[s]_x \in B_p$.

- Sean $\hat{s}(U)$, $\hat{r}(V) \in B_p$ y supongamos que $\hat{s}(x) = \hat{r}(y)$, entonces $[s]_x = [r]_y$. Por lo tanto $x = y$ y así existe $W \subset U \cap V$ tal que $s \mid_W = r \mid_W$. Luego $\widehat{s \mid_W}(W)$ es un elemento en B_p tal que

$$[s]_x \in \widehat{s \mid_W}(W) \subset \hat{s}(U) \cap \hat{r}(W).$$

■

Observación 2.16. Sean $U, V \in \mathcal{O}(S)$ tales que $V \subset U$ y $s \in PU$. Entonces $\hat{s}(V) = \widehat{s \mid_V}(V)$ para todo $s \in PU$.

Lema 2.17. *Sea Λ_p dotado con la topología B_p. Entonces p y $\hat{s}$ son continuas. Más aún, p es un haz sobre S y $\hat{s}$ es una sección local de p.*

Demostración.

- Sea $V \subseteq S$ abierto y sea $[s]_x \in \Lambda_p$ tal que $[s]_x \in p^{-1}(V)$, entonces $x \in U \cap V$. Consideremos $\widehat{s\mid_{U\cap V}}(U \cap V) \in B_p$. Por la observación anterior

$$[s]_x = [s\mid_{U\cap V}]_x \in \widehat{s\mid_{U\cap V}}(U \cap V) \subseteq p^{-1}(V).$$

Por lo tanto, p es continua.

- Para $\hat{s}\colon U \to \Lambda_p$ sea $\hat{r}(V) \in B_p$ un abierto básico y $x \in U$ tal que $\hat{s}(x) \in \hat{r}(V)$. Entonces $[r]_y = [s]_x$ y $x = y$, de aquí que existe $W \subset U \cap V$ tal que $s\mid_W = r\mid_W$. Por lo tanto, $\hat{s}(W)$ es un abierto básico tal que

$$[s]_x \in \hat{s}(W) \subseteq \hat{r}(V).$$

De esta manera se concluye que $\hat{s}$ es continua.

Para ver que $\hat{s}$ es una sección local de p, basta notar que para todo $x \in U$ se tiene que $p \circ \hat{s}(x) = p([s]_x) = x$, por lo tanto $p \circ \hat{s} = \mathrm{id}_U$, es decir, el diagrama

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "\hat{s}"] \arrow[dr, "i"'] & & \Lambda_p \arrow[dl, "p"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

conmuta. ■

Definición 2.18. Sea $f \in$ Top, decimos que f es un *homeomorfismo* si tiene una inversa continua.

Lema 2.19. *$\hat{s}\colon U \to \hat{s}(U)$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Consideremos $V \subset U$ abierto de S, entonces $\hat{s}(V) \in B_p$ y al ser continua, $\hat{s}$ es abierta.

Supongamos que $\hat{s}(x) = \hat{s}(y)$, entonces $[s]_x = [s]_y$, es decir, $x = y$. Por lo tanto $\hat{s}$ es inyectiva. Ahora, sea $W \subset \hat{s}(U)$ abierto, entonces existe $V \subset U$ abierto tal que $\hat{s}(V) = W$. Por lo tanto, $\hat{s}^{-1}(W) = V$ y así $\hat{s}$ es biyectiva. Finalmente, como $\hat{s}$ es continua y abierta, se sigue que es un homeomorfismo. ■

Lema 2.20. *Si $h\colon P \to Q$ es un morfismo de pregavillas, la unión ajena de funciones $h_x\colon P_x \to Q_x$ es un morfismo de hazes continuos $h_p\colon \Lambda_P \to \Lambda_Q$.*

Demostración. Primero verificamos que $\langle h_x : P_x \to Q_x\rangle_{x\in S}$ es una función continua.

Sean $\hat{s}(U) \in B_Q$ un abierto básico de Λ_Q y $[t]_x \in \Lambda_p$ tal que $h_x([t]_x) \in \hat{s}(U)$. Entonces, $[h_U(t)]_x = [s]_x$ y por lo tanto existe uan vecindad V de x tal que $V \subset U \cap W$ de forma que $h_U(t)\mid_V = s\mid_V$ y $\widehat{h_U(t)\mid_V}(V) = \widehat{h_U(t)}(V)$. Por lo tanto, $\widehat{h_U(t)}(V) \in B_Q$.

También tenemos que $[t]_x \in \hat{t}(V) = \widehat{t\,|_V}(V)$. Como h es transformación natural, se tiene que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} PU & \xrightarrow{h_U} & QU \\ \downarrow & & \downarrow \\ PV & \xrightarrow[h_V]{} & QV \end{array}$$

conmuta. Así, $h_V(t\,|_V) = h_U(t)\,|_V = s\,|_V$ para todo $t \in PU$. Por lo tanto, $\langle h_x : P_x \to Q_x\rangle_{x\in S}$ es continua.

Sea $[s]_x \in \Lambda_P$, entonces $p([s]_x) = x = q([h_U(s)]_x)$ y $\langle h_x : P_x \to Q_x\rangle_{x\in S}$ es un morfismo de hazes. ■

Lema 2.21. *La asignación $P \mapsto \Lambda_P$ determina un funtor de pregavillas a haces.*

Demostración. Sea $\mathrm{id}_p \colon P \to P$ la identidad en $\mathrm{Con}^{\mathcal{O}(S)^{op}}$, entonces id_{p_x} es la función identidad para cada $x \in S$. De aquí que $\langle \mathrm{id}_{p_x} : P_x \to P_x\rangle_{x\in S}$ es la identidad en Λ_P. Por lo tanto preserva identidades la asignación.

Sean $h\colon P \to Q$ y $g\colon Q \to R$ morfismos de pregavillas, entonces $g_x \circ h_x = (g \circ h)_x$ para cada $x \in S$. Por lo tanto, $\langle g_x \circ h_x : P_x \to R_x\rangle_{x\in S}$ es la composición de morfismos de hazes. Así, la asignación preserva composiciones.

Por lo tanto, Λ es un funtor de pregavillas a haces. ■

Definición 2.22. Una función $f\colon S \to T$ entre espacios topológicos es un homomorfismo local si para cada $x \in S$ existe un abierto $U \subset S$ tal que $x \in U$ y $f\,|_U$ es un homeomorfismo.

Lema 2.23. *Toda sección de un homeomorfismo local es una función abierta.*

Demostración. Sea $p\colon T \to S$ un homeomorfismo local, $s\colon U \to T$ una sección de p y $V \subset U$ un abierto. Sea $y \in s(V)$ y como p es un homeomorfismo local, existe un abierto $W \subset S$ tal que $p\,|_W$ es un homeomorfismo. Entonces, $p(W)$ es un abierto de T y así $p(W) \cap V$ es abierto. Al ser s una sección de p, se tiene que $p(W \cap s(V)) = p(W) \cap V$. Además, $p\,|_W$ es una función abierta, $W \cap s(V)$ es una vecindad abierta de x contenida en $s(V)$. Por lo tanto, $s(V)$ es abierto en T. ■

Lema 2.24. *La función $p\colon \Lambda_P \to S$ es un homeomorfismo local.*

Demostración. Sea $[s]_x \in \Lambda_P$. El abierto básico $\hat{s}(U)$ contiene a $[s]_x$ y al ser $\hat{s}$ una sección de p, $p(\hat{s}(U)) = U$. Luego, $\hat{s}\colon U \to \hat{s}(U)$ es un homeomorfismo. Por lo tanto, $p\,|_{\hat{s}(U)}\colon \hat{s}(U) \to p\hat{s}(U)$ es un homeomorfismo. ■

2.4. $\mathcal{H}L/S \simeq \mathrm{Gav}(S)$

Vamos a ver primero que hay una adjunción entre la categoría $\mathrm{Con}^{\mathcal{O}S^{\mathrm{op}}}$ de pregavillas sobre un espacio $S \in \mathrm{Top}$ y la categoría Top/S de haces sobre S. Para esto notemos que dada una pregavilla $P \in \mathrm{Con}^{\mathcal{O}S^{\mathrm{op}}}$ y la gavilla $\Gamma\Lambda_P$ de las secciones del haz $\Lambda_P \to S$, podemos construir, para cada abierto $U \in \mathcal{O}S$, la siguiente función

$$\eta_{PU} : PU \to \Gamma\Lambda_P U, \qquad \eta_{PU}(s) = \widehat{s}$$

Lema 2.25. $\eta_P := (\eta_{PU} : PU \to \Gamma\Lambda_P U)_{U\in \mathcal{O}S^{\mathrm{op}}}$ *es una transformación natural del funtor* P *al funtor* $\Gamma\Lambda_P$.

Demostración. Sean dos abiertos $V \subseteq U \in \mathcal{O}S$ y $s \in PU$. Por la observación 2.16, se tiene que $\eta_{PU}(s) \mid_V = \hat{s} \mid_V = \widehat{s \mid_V} = \eta_{PV}(s \mid_V)$. Lo que significa que el cuadrado natural

$$\begin{tikzcd} PU \arrow[r, "\eta_{PU}"] \arrow[d, "|_V"'] & \Gamma\Lambda_P U \arrow[d, "|_V"] \\ PV \arrow[r, "\eta_{PV}"'] & \Gamma\Lambda_P V \end{tikzcd}$$

conmuta, y por lo tanto η_P es una transformación natural. ■

Lema 2.26. $\eta := (\eta_P : P \Rightarrow \Gamma\Lambda_P)_{P\in \mathrm{Con}^{\mathcal{O}S^{\mathrm{op}}}}$ *es una transformación natural del funtor* $\mathrm{id}_{\mathrm{Con}^{\mathcal{O}S^{\mathrm{op}}}}$ *a la composición de funtores* $\Gamma\Lambda$

Demostración. Sea $h : P \Rightarrow Q \in \mathrm{Con}^{\mathcal{O}S^{\mathrm{op}}}$, queremos ver que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, Rightarrow, "\eta_P"] \arrow[d, Rightarrow, "h"'] & \Gamma\Lambda_P \arrow[d, Rightarrow, "\Gamma\Lambda h"] \\ Q \arrow[r, Rightarrow, "\eta_Q"'] & \Gamma\Lambda_Q \end{tikzcd}$$

conmuta. Para esto tomamos un abierto $U \in \mathcal{O}S$ y veamos que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} PU \arrow[r, "\eta_{PU}"] \arrow[d, "h_U"'] & \Gamma\Lambda_P U \arrow[d, "(\Gamma\Lambda h)_U"] \\ QU \arrow[r, "\eta_{QU}"'] & \Gamma\Lambda_Q U \end{tikzcd}$$

conmuta. Sea $s \in PU$, entonces $\eta_{PU}(s) = \widehat{s}$, y por la definición de la composición $\Lambda\Gamma$ tenemos $(\Gamma\Lambda h)_U(\widehat{s}) = h_x \circ \widehat{s}$. Entonces:

$$h_x \circ \widehat{s}(x) = h_x([s \in PU]_x) = [h_U(s) \in QU]_x = \widehat{h_U(s)}(x).$$

Lo que prueba la conmutatividad de los diagramas. ■

Lema 2.27. *Sea* $h : T \to S \in \mathrm{Top}/S$, *entonces* $\varepsilon_h : \Lambda\Gamma_h \to T$ *definida como*

$$\varepsilon_h([s \in \Gamma_h U]_x) = s(x)$$

es un morfismo de haces.

Demostración. ■

Lema 2.28. $\varepsilon := (\varepsilon_h : \Lambda\Gamma_h \to T)_{T \xrightarrow{h} S \in \mathrm{Top}/S}$ *es una transformación natural de la composición de funtores* $\Lambda\Gamma$ *al funtor* $\mathrm{id}_{\mathrm{Top}/S}$.

Demostración. ■

Teorema 2.29. *El funtor Λ es adjunto izquierdo del funtor Γ*

Demostración. ■

Notemos que tenemos unas subcategorías

$$\mathrm{Gav}(S) \subseteq \mathrm{Con}^{\mathcal{O}S^{\mathrm{op}}}, \text{ y } \mathcal{H}L/S \subseteq \mathrm{Top}/S$$

donde $\mathcal{H}L/S$ los objetos son haces que son homeomorfismos locales. También recordemos que para cualquier pregavilla $P \in \mathrm{Con}^{\mathcal{O}S^{\mathrm{op}}}$ el haz $\Lambda_P \to S$ es un homeomorfismo local (Lema 2.24); y para cada haz $T \xrightarrow{h} S \in \mathrm{Top}/S$, el funtor $\Gamma_h \in \mathrm{Con}^{\mathcal{O}S^{\mathrm{op}}}$ es una gavilla (Referencia pendiente).

Esto nos dice que podemos restringir Λ y Γ a $\mathrm{Gav}(S)$ y $\mathcal{H}L/S$ respectivamente.

Teorema 2.30. *Para todo espacio topológico $S \in \mathrm{Top}$, las categorías $\mathcal{H}L/S$ y $\mathrm{Gav}(S)$ son equivalentes.*

Demostración. ■

2.5. Cambio de base

Recordemos que para $S \in \mathrm{Top}$, $\mathcal{O}S$ es la categoría cuyos objetos son los abiertos de S y los morfismos son las inclusiones. De esta manera, para $U, V \in \mathcal{O}S$ con $V \subseteq U$, $\mathcal{O}S^{\mathrm{op}}$ tiene las flechas $U \to V$.

Así, para $S, T \in \mathrm{Top}$ tomamos $\mathrm{Gav}(S), \mathrm{Gav}(T)$ parta dar la siguiente definición.

Definición 2.31. Consideremos $f_*\colon \mathrm{Gav}(S) \to \mathrm{Gav}(T)$ dado por

$$f_*(F(V)) = F(f^{-1}(V))$$

para $V \in \mathcal{O}T$ y $F \in \mathrm{Gav}(S)$. Además, si $h\colon F \to G$ es una transformación natural en $\mathrm{Gav}(S)$ y $V \in \mathcal{O}S$, entonces

$$f_*(h_V) = h_{f^{-1}(V)}.$$

Lema 2.32. *f_*F es una gavilla.*

Demostración. Sea $V \in \mathcal{O}T$ y $\{V_i\}_{i\in I}$. Debemos verificar que

$$f_*F(V) \xrightarrow{\ \epsilon\ } \textstyle\prod_{i\in I} f_*F(V_i) \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j\in I} f_*F(V_i \cap V_j) \tag{2.3}$$

es un igualador.

Al ser $f\colon S \to T$ una función continua, $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}S$. Consideremos $U = f^{-1}(V)$ y $\{U_i\}_{i\in I}$ con $U_i = f^{-1}(V_i)$. Luego, $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ y por 2.3 tenemos

$$F(U) \xrightarrow{\ \epsilon\ } \textstyle\prod_{i\in I} F(U_i) \underset{q}{\overset{p}{\rightrightarrows}} \prod_{i,j\in I} F(U_i \cap U_j)$$

es un igualador pues, por hipótesis, F es una gavilla. ■

Lema 2.33. *$f_*\colon \mathrm{Gav}(S) \to \mathrm{Gav}(T)$ es un funtor.*

Demostración. Consideremos $F \in \mathrm{Gav}(S)$ y sea $\mathrm{id}_F\colon F \to F$ la transformación natural identidad. Para $V \in \mathcal{O}T$ tenemos que

$$f_*\mathrm{id}_F(V)\colon f_*F(V) \to f_*F(V)$$

es la identidad para todo $V \in \mathcal{O}T$. Por la Definición 2.31

$$\mathrm{id}_F(f^{-1}(V))\colon F(f^{-1}(V)) \to F(f^{-1}(V))$$

y por lo tanto, f_* respeta identidades.

Ahora, sean $F, G, H \in \mathrm{Gav}(S)$ y $h\colon F \to G$, $g\colon G \to H$ transformaciones naturales. Entonces, para $V \in \mathcal{O}T$

$$f_*F(V) \xrightarrow{f_*k(V)} f_*G(V) \xrightarrow{f_*l(V)} f_*H(V)$$

es la composición $f_*(L \circ h)$. Por definición,

$$F(f^{-1}(V)) \xrightarrow{\quad k_{f^{-1}(V)} \quad} G(f^{-1}(V)) \xrightarrow{\quad l_{f^{-1}(V)} \quad} H(f^{-1}(V))$$

Como k, l son transformaciones naturales,

$$(l \circ k)_{f^{-1}(v)}\colon F(f^{-1}(V)) \to H(f^{-1}(V))$$

y por definición

$$f_*(L \circ h)(V) = (l \circ k)_{f^{-1}(V)}.$$

Por lo tanto, f_* respeta composiciones. ■

Definición 2.34. Consideremos $f^*\colon \mathrm{Top}/T \to \mathrm{Top}/S$ dada por la asignación

1. para $(p\colon E \to T) \in \mathrm{Top}/T$, $f^*p\colon f^*E \to S$ (o simplemente p^*) es el pullback del diagrama

$$\begin{tikzcd}
f^*E \arrow[r, "e"] \arrow[d, "p^*"'] & E \arrow[d, "p"] \\
S \arrow[r, "f"'] & T
\end{tikzcd}$$

2. para $k\colon p \to p'$ un morfismo en Top/T, $f^*k\colon p^* \to p'^*$ (o simplemente k^*) es el morfismo inducido por la propiedad universal del pullback que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
f^*E \arrow[r, "e"] \arrow[dr, dashed, "k^*"] \arrow[ddr, "p^*"'] & E \arrow[dr, "k"] & \\
& f^*E' \arrow[r, "e'"'] \arrow[d, "p'^*"] & E' \arrow[d, "p'"] \\
& S \arrow[r, "f"'] & T
\end{tikzcd}$$

Lema 2.35. *Si $p\colon E \to T$ es un homeomorfismo local, entonces $p^*\colon f^*E \to S$ es un homeomorfismo local.*

Demostración. Sabemos que $f\colon S \to T$ es continua y $p\colon E \to T$ un homeomorfismo local. Además,

$$f^*E = \{(s,e) \in S \times E \mid f(s) = p(e)\}$$

con la topología de subespacio de $S \times E$. Consoideremos $\langle x, e\rangle \in f^*E$, al ser p un homeomorfismo local, para todo $e \in E$ existe un abierto $U \subset E$ tal que $e \in U$ y $p\mid_U\colon U \to p(U)$ es un homeomorfismo, de aquí que $p(U) \in \mathcal{O}T$ y $f^{-1}(p(U)) \in \mathcal{O}S$. Luego,

$$f(s) = p(e) \in p(U) \Rightarrow s \in f^{-1}(p(U)).$$

Para que $p^* = f^*p$ sea un homeomorfismo local necesitamos que para todo $x \in f^*E$ exista un abierto $W \subset f^*E$ tal que $x \in W$ y $p^*\mid_W\colon W \to p^*(W)$ es un homeomorfismo. Consideremos $f^{-1}(p(U)) \times U$ un abierto que contiene a $\langle x, e\rangle$ en $S \times E$. Asi, para

$$W = f^{-1}(p(U)) \times U \cap f^*E,$$

si $\langle s, e\rangle \in W$, entonces $f(s) = p(e)$. De aquí que debemos probar que $p^*\colon W \to f^{-1}(p(U))$ es homeomorfismo.

Primero veamos que es suprayectiva. Sea $z \in f^{-1}(p(U))$, entonces $f(z) \in p(U)$ y como $p\mid_U\colon U \to p(U)$ es suprayectiva, existe $e \in U$ tal que $p(e) = f(z)$. Por lo tanto,

$$\langle z, e\rangle \in W \quad \text{y} \quad p^*(\langle z, e\rangle) = z.$$

Para la inyectividad, si $p^*(\langle z, v\rangle) = p^*(\langle z', v'\rangle)$, entonces $z = z'$ y como $f(z) = p(v)$ y $f(z') = p(v')$, se tiene que $p(v) = p(v')$. Al ser $p\mid_U\colon U \to p(U)$ inyectiva, se sigue que $v = v'$. Por lo tanto, $\langle z, v\rangle = \langle z', v'\rangle$ y así p^* es inyectiva.

Notemos que p^* es continua por construcción. Así, para ver que es abierta, sean $\langle s, e\rangle \in f^*E$ y $U \subseteq E$ abierto tal que $p\mid_U\colon U \to p(U)$ es un homeomorfismo y $p(U) \in \mathcal{O}T$. W es abierto en f^*E y contiene a $\langle s, e\rangle$. Al ser $p\mid_U$ un homeomorfismo, existe $(p\mid_U)^{-1}\colon p(U) \to U$ y para $z \in f^{-1}(p(U))$ se tiene que

$$h\colon f^{-1}(p(U)) \to W \quad \text{dada por} \quad h(z) = \langle z, (p\mid_U)^{-1}(f(z))\rangle$$

es la inversa de $p^*\mid_W$ y es continua (pues f y $p\mid_U$ son continuas). Por lo tanto, $p^*\mid_W$ es un homeomorfismo y así p^* es un homeomorfismo local. ■

Lema 2.36. *$f^*\colon \mathrm{Top}/T \to \mathrm{Top}/S$ es un funtor.*

Demostración. Sea $p\colon E \to T$ un objeto en Top/T y $\mathrm{id}_p\colon p \to p$ la identidad en Top/T. Entonces, por la Definición 2.34, $f^*\mathrm{id}_p\colon p^* \to p^*$ es la identidad en Top/S. Por lo tanto, f^* preserva identidades.

Sean $k\colon p \to p'$ y $k'\colon p' \to p''$ morfismos en Top/T. EL haz composición es $k' \circ k$ y por la Definición 2.34, $(k' \circ k)^*\colon p^* \to p''^*$ es el morfismo inducido por la propiedad universal del pullback que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd}
f^*E \arrow[rrr, "e"] \arrow[dr, dashed, "k^*"] \arrow[ddr, "k'^*\circ k^*"'] \arrow[dddr, bend right, "p^*"'] & & & E \arrow[dl, "k"'] \arrow[dddl, bend left, "p"] \\
& f^*E' \arrow[r, "e'"] \arrow[d, dashed, "k'^*"'] & E' \arrow[d, "k'"] & \\
& f^*E'' \arrow[r, "e''"] \arrow[d, "p''^*"'] & E'' \arrow[d, "p''"] \arrow[uur, "k'\circ k"'] & \\
& S \arrow[r, "f"] & T &
\end{tikzcd}$$

Por lo tanto, respecta composiciones. ■

De esta manera, para $(f\colon S \to T) \in \mathrm{Top}$, tenemos un funtor de $\mathrm{Gav}(t) \to \mathrm{Gav}(S)$ dado por

$$\mathrm{Gav}(T) \xrightarrow{\Lambda} \mathrm{Top}/T \xrightarrow{f^*} \mathrm{Top}/S \xrightarrow{\Gamma} \mathrm{Gav}(S) \tag{2.4}$$

Para $G \in \mathrm{Gav}(T)$, notemos que $\Lambda G = \{[s \in GV]_y \mid y \in T, s \in GV\}$ y el homeomorfismo local $p\colon \Lambda G \to T$ es tal que $p([s \in GV]_y) = y$. Así

$$f^*\Lambda G = \{(x, [s \in GV]_y) \in S \times \Lambda G \mid f(x) = p([s \in GV]_y) = y\}$$

y el homeomorfismo local $p^*\colon f^*\Lambda G \to S$ es tal que $p^*(x, [s \in GV]_y) = x$.

Si $p([s \in GV]_y) = y$, entonces $f^*\Lambda G = \{(x, [s \in GV]_y) \in S \times \Lambda G \mid f(x) = y\}$ y

$$f^*\Lambda G = \{(x, [s \in GV]_{f(x)}) \in S \times \Lambda G \mid x \in S, s \in GV\}.$$

Por último, $\Gamma f^*\Lambda G = \Gamma_{p^*}$. Así,

$$\Gamma_{p^*}(U) = \{t\colon U \to f^*\Lambda G \text{ continia} \mid p^* \circ t = i_U\}.$$

con $U \in \mathcal{O}S$.

Cada sección $t \in \Gamma_{p^*}(U)$ se describe a través de $t'\colon U \to \Lambda G$ continua, como

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[drr, "t'"] \arrow[dr, dashed, "t"] \arrow[ddr, "i"'] & & \\
& f^*\Lambda G \arrow[r, "e"'] \arrow[d, "p^*"] & \Lambda G \arrow[d, "p"] \\
& S \arrow[r, "f"'] & T
\end{tikzcd}$$

La sección $\hat{s}\colon V \to \Lambda G$ induce una sección t_s de p^* como

$$\begin{tikzcd}
f^{-1}(V) \arrow[r, "f"] \arrow[dr, dashed, "t_s"] \arrow[ddr, "i"'] & V \arrow[dr, "\hat{s}"] & \\
& f^*\Lambda G \arrow[r, "e"'] \arrow[d, "p^*"] & \Lambda G \arrow[d, "p"] \\
& S \arrow[r, "f"'] & T
\end{tikzcd}$$

para $V \in \mathcal{O}T$ y $s \in GV$.

Si $x \in f^{-1}(V)$, entonces $p(\hat{s}(f(x))) = p([s \in GV]_{f(x)})$ y $t_s(x) = (x, [s \in GV]_{f(x)})$.

Definición 2.37. Denotamos por $f^*\colon \mathrm{Gav}(T) \to \mathrm{Gav}(S)$ al funtor compuesto $f^* = \Gamma \circ f^* \circ \Lambda$.

Lema 2.38. *Consideremos $X \in \mathrm{Top}$. Una función $k\colon f^*\Gamma G \to X$ es continua si y solo si*

$$f^{-1}(W) \xrightarrow{t_r} f^*\Lambda G \xrightarrow{k} X$$

es continua para todo $W \subseteq T$ y para toda $r \in GW$.

Demostración. ■

2.6. Morfismos ultrafinitos

Sabemos que si $(f\colon S \to T) \in \mathrm{Top}$, f induce la siguiente adjunción

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Gav}(S) \arrow[rr, bend left, "f_*"] \arrow[rr, phantom, "\perp"] & & \mathrm{Gav}(T) \arrow[ll, bend left, "f^*"]
\end{tikzcd}$$

donde $f^*\colon \mathrm{Gav}(T) \to \mathrm{Gav}(S)$ es exacto izquierdo.

Además, para el funtor $f_*\colon \mathrm{Gav}(S) \to \mathrm{Gav}(T)$ tenemos que si $V \in \mathcal{O}T$ y $F \in \mathrm{Gav}(S)$, $f_*F(V) = F(f^{-1}(V))$ y para $(h\colon F \to G) \in \mathrm{Gav}(S)$, $f_h(V) = h_{f^{-1}(V)}$. Queremos ver que f_* preserva:

1. Objeto inicial.

2. Epimorfismos.

3. Sumas finitas.

Primero, si $\mathbf{0} \in \mathrm{Gav}(S)$ queremos ver que para todo $\emptyset \neq U \in \mathcal{O}S$, $\mathbf{0}(U) = \emptyset$. Sea $\mathbf{0}\colon \mathcal{O}S^{\mathrm{op}} \to$ Con la pregavilla tal que $\mathbf{0}(U) = \emptyset$ para todo $\emptyset \neq U \in \mathcal{O}S$. Notemos que

$$\Lambda(\mathbf{0}) = \{[s \in \mathbf{0}U]_x \mid x \in S, s \in \mathbf{0}U\}$$

y $\mathbf{0}U = \emptyset$, entonces $\Lambda(\mathbf{0}) = \emptyset$. Luego, $\Gamma_\emptyset U = \{s\colon U \to \emptyset \mid s$ es sección de $i\colon \emptyset \to S\}$. Por lo tanto, $\Gamma_\emptyset U = \emptyset$ cuando $U \neq \emptyset$.

Lema 2.39. *Sea* $(f\colon S \to T) \in \mathrm{Top}$, *entonces el funtor* $f_*\colon \mathrm{Gav}(S) \to \mathrm{Gav}(T)$ *preserva el objeto inicial si y solo si* $s(S)$ *es denso en* T.

Demostración. $\Rightarrow$) Supongamos que f_* preserva el objeto inicial. Sea $V \in \mathcal{O}T$ tal que $V \neq \emptyset$. Entonces

$$f_*\mathbf{0}(V) = \mathbf{0}(f^{-1}(V)) = \emptyset \Rightarrow f^{-1}(V) \neq \emptyset.$$

Notemos que $f(S)$ es denso en T si para todo $V \in \mathcal{O}T$ se tiene que $V \cap f(S) \neq \emptyset$. Si $f^{-1}(V) \neq \emptyset$, existe $x \in S$ tal que $f(x) \in V$. Por lo tanto, $V \cap f(S) \neq \emptyset$ y así $f(S)$ es denso en T.

$\Leftarrow$) Supongamos que $f(S)$ es denso en T. Sea $V \in \mathcal{O}T$ tal que $V \neq \emptyset$, entonces $V \cap f(S) \neq \emptyset$. Por lo tanto, existe $x \in S$ tal que $f(x) \in V$ y así $f^{-1}(V) \neq \emptyset$. Luego, $\mathbf{0}(f^{-1}(V)) = \emptyset$ y por lo tanto $f_*\mathbf{0}(V) = \emptyset$. Así, f_* preserva el objeto inicial. ■

Ahora, enunciaremos las condiciones necesarias y suficientes para que f_* preserve epimorfismos.

Lema 2.40. *Si para cada* $V \in \mathcal{O}T$, $y \in V$ *y* $\{U_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{O}S$ *una cubierta abierta de* $f^{-1}(V)$, *existen* $W \in \mathcal{O}T$ *tal que* $y \in W$ *y* $\{W_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{O}S$ *una cubierta abierta ajena de* $f^{-1}(W)$ *con la propiedad que* $W_i \subseteq U_i$ *para todo* $i \in I$. *Enotnces para todo* $q\colon E \to f^{-1}(V)$ *epimorfismo en* HL/S, *existe* $t\colon f^{-1}(W) \to E$ *tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(W) \arrow[rr, hook] \arrow[dr, "t"'] & & f^{-1}(V) \\ & E \arrow[ur, "q"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. Sea $q\colon E \to f^{-1}(V)$ un epimorfismo en HL/S. Si $x \in f^{-1}(V)$, entonces tenemos abiertos $U_x \subset f^{-1}(V)$ y $U'_x \subset E$ tales que

$$q\colon U'_x \to U_x$$

es un homeomorfismo. Así, $\{U_x\}_{x\in f^{-1}(V)}$ es una cubierta abierta de $f^{-1}(V)$. Por hipótesis, existen $W \in \mathcal{O}T$ tal que $y \in W$ y $\{W_x\}_{x\in f^{-1}(V)}$ una cubierta abierta ajena de $f^{-1}(W)$ con la propiedad que $W_x \subseteq U_x$ para todo $x \in f^{-1}(V)$. Además $q_{|U'_x}\colon U'_x \to q(U'_x)$ es un homeomorfismo, entonces definimos

$$t_x = (q_{|U_x})^{-1}\colon W_x \to E.$$

y así tomamos $t\colon f^{-1}(W) \to E$ dada por $t_{|W_x} = t_x$. Por construcción, $q \circ t = i_{f^{-1}(W)}$ y el diagrama conmuta. ■

Para la prueba del siguiente resultado, hacemos uso de los siguientes criterios. Estos pueden ser encontrados en **Citar los criterios**.

Criterio 1: Sea $h\colon F \to G$ un morfismo en $\mathrm{Gav}(S)$. Entonces h es un epimorfismo si y solo si para todo $U \in \mathcal{O}S$ y $s \in G(U)$, existe una cubierta abierta $\{U_i\}_{i\in I}$ de U y para cada $i \in I$ una sección $t_i \in F(U_i)$ tal que $h_{U_i}(t_i) = s_{|_{U_i}}$, en otras palabras, para $y \in U$

$$[s \in G(U)]_y = [h_{U_i}(t_i) \in G(U_i)]_y.$$

Criterio 2: $\Lambda f_*\Gamma(h)$ es un epimorfismo en HL/T si y solo si para todo $x \in S$ y germen s_x de G en x existe un germen t_x en F con la propiedad que

$$[h_U(t_x) \in G(U)]_{f(x)} = [s_x \in G(U)]_{f(x)}$$

para algún abierto $U \in \mathcal{O}T$ que contiene a $f(x)$.

Lema 2.41. *Sea $h\colon E \to E'$ tal que el diagrama*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "p"'] & & E' \\ & S \arrow[ur, "p'"'] & \end{tikzcd}$$

conmuta. Entonces $\Lambda f_*\Gamma(h)$ es un epimorfismo si y solo si para todo $V \in \mathcal{O}T$, $y \in V$ y cualquier sección $s\colon f^{-1}(V) \to E'$ de p', existen $W \in \mathcal{O}T$ con $y \in W$ y una sección $t\colon f^{-1}(W) \to E$ de p tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} f^{-1}(W) \arrow[r, hook] \arrow[d, "t"] & f^{-1}(V) \arrow[d, "s"'] \\ E \arrow[r, "h"] & E' \end{tikzcd} \tag{2.5}$$

conmuta.

Demostración. $\Rightarrow$) Para $h\colon E \to E'$ tenemos que $\Lambda f_*\Gamma(h)\colon \Lambda f_*\Gamma E \to \Lambda f_*\Gamma E'$ es un morfismo en HL/T tal que si $r \in \Gamma_p(f^{-1}(V))$, entonces

$$\Lambda f_*\Gamma(h)([r \in \Gamma_p(f^{-1}(V))]_y) = [h \circ r \in \Gamma_{p'}(f^{-1}(V))]_y.$$

Sean $V \in \mathcal{O}T$, $y \in V$ y $s\colon f^{-1}(V) \to E'$ una sección de p'. Supongamos que $\Lambda f_*\Gamma(h)$ es un epimorfismo, entonces existe $[t \in \Gamma_p(f^{-1}(V))]_y \in \Lambda f_*\Gamma(E)$ tal que

$$[h \circ t \in \Gamma_{p'} f^{-1}(V)]_y = [s \in \Gamma_{p'} f^{-1}(V)]_y. \tag{2.6}$$

De aquí, por el Criterio 1, existe un abierto $W \subset V$ con $y \in W$ tal que $h \circ t_{|_{f^{-1}(W)}} = s_{|_{f^{-1}(W)}}$. Por lo tanto, el diagrama (2.5) conmuta.

$\Leftarrow$) Supongamos que para todo $V \in \mathcal{O}T$, $y \in V$ y cualquier sección $s\colon f^{-1}(V) \to E'$ de p', existen $W \in \mathcal{O}T$ con $y \in W$ y una sección $t\colon f^{-1}(W) \to E$ de p tal que el diagrama (2.5) conmuta. De aquí que 2.6 se cumple y

$$[s|_{f^{-1}(V)} \in \Gamma_{p'}(f^{-1}(W))]_y = [s \in \Gamma_{p'}(f^{-1}(V))]_y.$$

Por lo tanto, por el Criterio 2, $\Lambda f_* \Gamma(h)$ es un epimorfismo.

■

Proposición 2.42. *Consideremos* $(f\colon S \to T) \in \mathrm{Top}$. *El funtor* $f_*\colon \mathrm{Gav}(S) \to \mathrm{Gav}(T)$ *preserva epimorfismos si y solo si para todo* $V \in \mathcal{O}T$, $y \in V$ *y* $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{O}S$ *una cubierta abierta de* $f^{-1}(V)$, *existe* $W \in \mathcal{O}T$ *tal que* $y \in W$ *y* $\{W_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{O}S$ *una cubierta abierta ajena de* $f^{-1}(W)$ *con la propiedad que* $W_i \subseteq U_i$ *para todo* $i \in I$.

Demostración. ■

Capítulo 3

Gavillas sobre Marcos

Lo que se ha abordado hasta ahora es la teoría de haces y gavillas de conjuntos sobre espacios topológicos. En [Mer02], se encargan de trasladar las nociones de morfismo étale y morfismos ultrafinitos a un contexto más general, el de los locales. En este capítulo se presentan algunas de las ideas principales de dicha referencia pero viéndolo desde el enfoque de marcos. Para tener más información sobre teoría de marcos, se puede consultar (**citar las notas de Ángel y bibliografía básica sobre teoría de marcos**).

3.1. Marcos y gavillas

En el sentido categórico, trabajar con locales y trabajar con marcos, en esencia podría parecer lo mismo, ya que la categoría de locales es la categoría opuesta a la categoría de marcos. Sin embargo, en la práctica, trabajar con marcos suele ser más sencillo. Lo primero que haremos es dar las herramientas necesarias para trasladar las nociones vistas en capítulos anteriores al lenguaje de marcos.

Definición 3.1. Un *marco* es una retícula completa $(A, \leq, \bigvee, \wedge, 0, 1)$ que satisface la siguiente propiedad distributiva:

$$a \wedge \bigvee x = \bigvee \{a \wedge b \mid x \in X\}$$

para todo $a \in A$ y $X \subseteq A$.

Definición 3.2. Sean A y B dos marcos. Un *morfismo de marcos* es una función monótona $f\colon A \to B$ que preserva la estructura de la retícula, es decir, para todo $X \subseteq A$ y $a, b \in A$ se cumple:

- $f(\bigvee X) = \bigvee \{f(x) \mid x \in X\}$.
- $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$.
- $f(0) = 0$ y $f(1) = 1$.

De esta manera, la categoría de marcos Frm es la categoría cuyos objetos son marcos y cuyos morfismos son morfismos de marcos, y como mencionamos antes, la categoría de locales

Loc es la categoría opuesta a Frm.

Si $f : A \to B$ es un morfismo de marcos, entonces f tiene un adjunto derecho $f_* : B \to A$ y cumple la siguiente propiedad:

$$f(a) \leq b \iff a \leq f_*(b)$$

para todo $a \in A$ y $b \in B$. De manera general, podemos calcular el adjunto derecho de un morfismo de marcos $f : A \to B$ como:

$$f_*(b) = \bigvee \{a \in A \mid f(a) \leq b\}$$

Definición 3.3. Sea $A \in$ Frm. La operación *implicación* (o también conocida como implicación de Heyting), denotada por $(a \succ b)$ para $a, b \in A$, se define por:

$$a \wedge c \leq b \iff c \leq (a \succ b).$$

Consideremos los morfismos de copos $f\colon A \to A$ y $f_*\colon A \to A$, dados por

$$f(x) = a \wedge x \quad \text{y} \quad f_*(x) = (a \succ x),$$

entonces $f(x) \leq y$ si y solo si $x \leq f_*(y)$, es decir, $x \wedge a \leq y$ si y solo si $x \leq (a \succ y)$. En otras palabras, implicar es adjunto derecho de calcular ínfimo. Por lo tanto, la implicación se puede calcular como

$$(a \succ b) = \bigvee \{x \in A \mid a \wedge x \leq b\}.$$

El siguiente resultado proporciona algunas propiedades básicas de la implicación.

Proposición 3.4. *Consideremos A un marco y $a, b, c \in A$. Entonces*

- $1 \succ a = a$.
- $a \succ (b \wedge c) = (a \succ b) \wedge (a \succ c)$.
- $(a \vee b) \succ c = (a \succ c) \wedge (b \succ c)$.
- $a \leq b$ *si y solo si* $1 \leq (a \succ b)$.
- $a \leq (b \succ c)$ *si y solo si* $a \wedge b \leq c$.
- $(a \wedge b) \succ c = a \succ (b \succ c)$
- $a \wedge (a \succ b) = a \wedge b$

3.1.1. Núcleos y cocientes en marcos

Cuando trabajamos en Top, la noción de subespacio puede ser capturada mediante la noción de sublocal. A su vez, los sublocales pueden ser estudiados de manera algebraica mediante lo que en marcos se conoce como *núcleos*. Esta subsección explicara brevemente la relación entre núcleos y sublocales.

Proposición 3.5. *Sea A un marco y $j \in NA$, entonces la inclusión de A_j en A es el adjunto derecho de $j^* : A \to A_j$*

Demostración. Consideremos $x \in A$ y $y \in A_j$, entonces

$$x \leq y \iff x \leq j^*(x) \leq j^*(y) = y$$

. ■

Lema 3.6. *Sea un morfismo de marcos $A \xrightarrow{f} B$ y los núcleos $j \in NA$, $k \in NB$. Para cualquier morfismo de marcos $A_j \xrightarrow{g} B_k$ es equivalente lo siguiente:*

- *El cuadrado* $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j^*"'] & B \arrow[d, "k^*"] \\ A_j \arrow[r, "g"'] & B_k \end{tikzcd}$ *conmuta.*
- $g(x) = k(f(x))$ *para* $x \in A_j$ *y* $g_*(y) = f_*(y)$ *para* $y \in B_k$.

Demostración. Supongamos que el cuadrado conmuta, entonces para $x \in A_j \subseteq A$ tenemos

$$k(f(x)) = g(j^*(x)) = g(x)$$

Por otro lado, al conmutar el cuadrado, conmuta el cuadrado de los adjuntos derechos $\begin{tikzcd} A & B \arrow[l, "f_*"'] \\ A_j \arrow[u, hook] & B_k \arrow[l, "g_*"] \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$, lo que significa que $g_*(y) = f_*(y)$ para $y \in B_k$.

Para el recíproco solo hay que notar de saber que $g_*(y) = f_*(y)$ para $y \in B_k$, sabemos que conmuta el cuadrado $\begin{tikzcd} A & B \arrow[l, "f_*"'] \\ A_j \arrow[u, hook] & B_k \arrow[l, "g_*"] \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$, y pues al ser todos adjuntos derechos, entonces conmuta el cuadrado de adjuntos izquierdos $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j^*"'] & B \arrow[d, "k^*"] \\ A_j \arrow[r, "g"'] & B_k \end{tikzcd}$. ■

Observación 3.7. Sea un marco A y $a \in A$, entonces el marco cociente del núcleo v_a le llamamos núcleo abierto, y notemos que $A_{v_a} \cong \downarrow a$. Este isomorfismo está dado por los morfismos $a \wedge - : A_{v_a} \to \downarrow a$ y $a \succ - : \downarrow a \to A_{v_a}$. Ya que de las propiedades de la implicación (proposición 3.4) no es muy complicado ver que para $x \in A_{v_a}$ tenemos

$$a \succ (a \wedge x) = (a \succ a) \wedge (a \succ x) = 1 \wedge x = x$$

Y para $y \in \downarrow a$ tenemos

$$a \wedge (a \succ y) = a \wedge y = y.$$

3.1.2. Morfismos abiertos

Definición 3.8 (Morfismo abierto)**.** Sea $f : A \to B$ un morfismo de marcos. Decimos que es abierto si existe $f_l : B \to A$, un morfismo de copos tal que:

- $f_l \dashv f$.
- Para cada $a \in A$ y $b \in B$ se tiene la identidad de Frobenius

$$f_l(b \wedge f(a)) = f_l(b) \wedge a.$$

Observación 3.9. En general, para cualquier par de morfismos adjuntos $f_l \dashv f$, se cumple una desigualdad de la identidad de Frobenius. Sabemos que, por un lado, $b \wedge f(a) \leq b$ y entonces $f_l(b \wedge f(a)) \leq f_l(b)$; y por otro lado, como $b \wedge f(a) \leq f(a)$, tenemos que $f_l(b \wedge f(a)) \leq f_l(f(a)) \leq a$; por lo tanto $f_l(b \wedge f(a)) \leq f_l(b) \wedge a$.

Ejemplo 3.10. Considere una función $f : S \to T$ continua y abierta, entonces tenemos que el morfismo de marcos $f^{-1} : \mathcal{O}T \to \mathcal{O}S$, dado por la preimagen, es un morfismo abierto. Pues ya al ser la función abierta, tenemos que el morfismo de copos $f : \mathcal{O}S \to \mathcal{O}T$, dado por la imagen directa, es adjunto izquierdo de f^{-1}, ya que

$$f(U) \subseteq V \iff U \subseteq f^{-1}(V)$$

para todo $U \in \mathcal{O}S$ y $V \in \mathcal{O}T$. Además satisface la identidad de Frobenius

$$f(U \cap f^{-1}(V)) = f(U) \cap V$$

Ejemplo 3.11. Consideremos un marco A y un elemento $a \in A$, entonces el morfismo de marcos $a \wedge - : A \to \downarrow a$ es un morfismo abierto. Veamos que la inclusión de la sección inferior en el marco, es su adjunto izquierdo: Ya que para $x \in A$ y $y \in \downarrow a$ siempre se tiene que

$$y \leq a \wedge x \iff y \leq x$$

Y satisface Frobenius, pues

$$y \wedge (a \wedge x) = (y \wedge a) \wedge x = y \wedge x$$

Lema 3.12. *Sea A un marco y $j : A \to A$ un núcleo del marco. Entonces j es un núcleo abierto si y solo si el morfismo de marcos $j^* : A \to A_j$ es un morfismo abierto.*

Demostración. Si j es abierto, entonces existe un elemento $a \in A$ tal que $j = v_a$, veamos entonces que $v_a^* : A \to A_{v_a}$ es un morfismo abierto. Es claro que su adjunto izquierdo es $a \wedge - : A_{v_a} \to A$, por la misma definición de la implicación. Y por otro lado, veamos que satisface Frobenius, pues para $x \in A$ y $y \in A_{v_a}$ tenemos

$$a \wedge (y \wedge v_a(x)) = (a \wedge (a \succ x)) \wedge y = (a \wedge x) \wedge y = x \wedge (a \wedge y).$$

Por lo tanto v_a^* es un morfismo abierto.

Por otro lado supongamos que j^* es un morfismo abierto, por lo tanto existe $j_l : A_j \to A$ tal que $j_l \dashv j^*$ y $j_l(y \wedge j^*(x)) = j_l(y) \wedge x$ para todo $x \in A$ y $y \in A_j$. Definamos $a := f_l(1)$ y notemos que dado $x \in A_j$ tenemos que

$$j_l(x) = j_l(j^*(x)) = j_l(j^*(x) \wedge 1) = x \wedge j_l(1)$$

por lo tanto $j_l = a \wedge -$ y como los adjuntos son únicos, al ser la implicación su adjunto derecho, tenemos que $j^* = a \succ - = v_a^*$, lo que significa que j es un núcleo abierto. ∎

Proposición 3.13. *Sea $f : A \to B$ un morfismo de marcos abierto. Entonces el núcleo $k = f_* f$ es un núcleo abierto.*

Demostración. Usaremos el lema anterior (3.12), y veamos que $k^* : A \to A_k$ es un morfismo abierto. Para esto, consideremos que f es un morfismo abierto y por lo tanto existe $f_l \dashv f$ que satisface Frobenius. Ahora definamos el morfismo $k_l : A_k \to A$ como $k_l(y) := f_l(f(y))$ y veamos que son adjuntos.

Sean $x \in A$ y $y \in A_k$, entonces

$$y \leq k^*(x) = f_*(f(x)) \iff f(y) \leq f(x) \iff k_l(y) = f_l(f(y)) \leq x$$

ya que $f_l \dashv f \dashv f_*$. Luego veamos que k_l satisface Frobenius, pues

$$k_l(k^*(x) \wedge y) = f_l(f(k^*(x) \wedge y)) = f_l(f f_* f(x) \wedge f(y)) = f_l(f(x) \wedge f(y)) = x \wedge f_l(f(y)) = x \wedge k_l(y)$$

considerando propiedades de morfismos adjuntos y que f_l ya satisface Frobenius. ∎

Teorema 3.14. *Sea $f : A \to B$ un morfismo de marcos, entonces f es un morfismo abierto si y solo si f preserva ínfimos arbitrarios y $f(x \succ y) = f(x) \succ f(y)$ para todo $x, y \in A$*

Demostración. Supongamos que f es un morfismo abierto, entonces existe $f_l : B \to A$ tal que $f_l \dashv f$ y satisface Frobenius.

Como f tiene adjunto adjunto izquierdo, entonces preserva ínfimos arbitrarios. Para probar que abre implicaciones consideremos $x, y \in A$ y notemos que

$$(x \succ y) \wedge x \leq y \implies f((x \succ y) \wedge x) \leq f(y) \implies f(x \succ y) \wedge f(x) \leq f(y)$$

y por un lado, por ser la implicación adjunto derecho de sacar ínfimo, tenemos $f(x \succ y) \leq f(x) \succ f(y)$. Por otro lado podemos aplicar el adjunto izquierdo

$$f(x \succ y) \wedge f(x) \leq f(y) \implies f_l(f(x \succ y) \wedge f(x)) \leq f_l(f(y)) \leq y$$

recordando que aplicar el adjunto derecho seguido del adjunto izquierdo desinfla. Y como f_l satisface Frobenius tenemos

$$f_l(f(x \succ y)) \wedge x \leq y \implies f_l(f(x \succ y)) \leq x \succ y$$

lo que por fórmula de adjunción nos da que es equivalente a $f(x \succ y) \leq f(x \succ y)$; probando que f abre implicaciones.

Ahora supongamos que f preserva ínfimos arbitrarios y preserva implicaciones. Como preserva ínfimos entonces tiene adjunto izquierdo f_l. Para ver que satisface Frobenius necesitamos probar que $f_*(b \succ f(a)) = f_l(b) \succ a$ para cada $a \in A$ y $b \in B$. Sabemos que $b \leq f(f_l(b))$, luego como dejar fija la segunda entrada en una implicación es un morfismo antítono, tenemos $f(f_l(b)) \succ f(a) \leq b \succ f(a)$, y considerando que f abre implicaciones y la fórmula de adjunción para $f \dashv f_*$ entonces

$$f(f_l(b) \succ a) \leq b \succ f(a) \implies f_l(b) \succ a \leq f_*(b \succ f(a))$$

Por otro lado veamos que

$$b \succ f(a) \leq b \succ f(a) \implies (b \succ f(a)) \wedge b \leq f(a) \implies b \leq (b \succ f(a)) \succ f(a)$$

entonces, considerando que f abre supremos, propiedades de adjunción y en que condiciones la implicación es antítona, tenemos

$$b \leq (b \succ f(a)) \succ f(a) \leq f f_*(b \succ f(a)) \succ f(a) = f(f_*(b \succ f(a)) \succ a)$$

por último, aplicando la fórmula de adjunción y propiedades de la implicación

$$f_l(b) \leq f_*(b \succ f(a)) \succ a \implies f_l(a) \wedge f_*(b \succ f(a)) \leq a \implies f_*(b \succ f(a)) \leq f_l(b) \succ a$$

lo que nos da la igualdad que deseábamos.

Para la identidad de Frobenius, recordemos que es suficiente probar la desigualdad $f_l(b) \wedge a \leq f_l(b \wedge f(a))$ (Observación 3.9), o equivalentemente, $a \leq f_l(b) \succ f_l(b \wedge f(a))$, por lo que probaremos lo segundo:

$$\begin{aligned} f_l(b) \succ f_l(b \wedge f(a)) &= f_*(b \succ f f_l(b \wedge f(a))) \\ &\geq f_*(b \succ (b \wedge f(a))) = f_*((b \succ b) \wedge (b \wedge f(a))) \\ &= f_*(b \succ f(a)) = f_l(b) \succ a \geq a \end{aligned}$$

■

Lema 3.15. *La composición de morfismos de marcos abiertos es un morfismo abierto.*

Demostración. Sean $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \in \mathrm{Frm}$ dos morfismos abiertos. Del teorema anterior (3.14) ambos morfismos preservan implicaciones e ínfimos arbitrarios. Es claro que entonces la composición $g \circ f$ también preserva implicaciones e ínfimos arbitrarios, por lo tanto es un morfismo abierto. ■

Lema 3.16. *Sea una familia $\{f_i : A \to A_i\}_{i \in I} \subseteq \mathrm{Frm}$ de morfismos abiertos. Entonces el morfismo $f : A \to \prod_{i \in I} A_i$, inducido por la propiedad universal del producto, es un morfismo abierto.*

Demostración. Definamos $f_l : \prod_{i\in I} A_i \to A$ como $f_l((a_i)_{i\in I}) = \bigvee_{i\in I} f_{il}(a_i)$ para cada $(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$, donde $f_{il} \dashv f_i$ y satisface Frobenius para cada $i \in I$ (ya que cada f_i es abierto). Veamos que es el adjunto izquierdo, sean $(a_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} A_i$ y $a \in A$, entonces

$$\begin{aligned} f_l((a_i)_{i\in I}) \leq a &\iff \bigvee_{i\in I} f_{il}(a_i) \leq a \\ &\iff f_{il}(a_i) \leq a \quad \forall i \in I \\ &\iff a_i \leq f_i(a) \quad \forall i \in I \\ &\iff (a_i)_{i\in I} \leq (f_i(a))_{i\in I} = f(a) \end{aligned}$$

lo que prueba que $f_l \dashv f$. Y para la identidad de Frobenius, notemos que

$$\begin{aligned} f_l((a_i)_{i\in I} \wedge f(a)) &= f_l((a_i)_{i\in I} \wedge (f_i(a))_{i\in I}) = f_l((a_i \wedge f_i(a))_{i\in I}) \\ &= \bigvee_{i\in I} f_{il}(a_i \wedge f_i(a)) = \bigvee_{i\in I} (f_{il}(a_i) \wedge a) \\ &= \bigvee_{i\in I} f_{il}(a_i) \wedge a = f_l((a_i)_{i\in I}) \wedge a \end{aligned}$$

■

3.1.3. Morfismos étales

Lema 3.17. *Sea $f : A \to B$ un morfismo de marcos, $a \in A$, $b \in B$ y $g :\downarrow a \to \downarrow b$ otro morfismo de marcos tal que el cuadrado*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a\wedge -"'] & B \arrow[d, "b\wedge -"] \\ \downarrow a \arrow[r, "g"'] & \downarrow b \end{tikzcd}$$

conmuta, entonces $g(x) = b \wedge f(x)$ para todo $x \leq a$ y $g_*(y) = f_*(b \succ y) \wedge a$ para todo $y \leq b$.

Demostración. Sea $x \leq a$, entonces:

$$g(x) = g(a \wedge x) = b \wedge f(x)$$

ya que el diagrama conmuta. Por otro lado sea $y \leq b$, entonces:

$$f_*(b \succ y) = f_* \circ (b \wedge -)_*(y) = (a \wedge -)_* \circ g_*(y) = a \succ g_*(y)$$

ya que si el cuadrado conmuta, entonces conmuta el cuadrado de los respectivos adjuntos derechos.

De lo anterior, por un lado tenemos que $f_*(b \succ y) \wedge a \leq g_*(y)$. Por otro lado, notemos que $g_*(y) \leq a$, y por lo obtenido previamente, tenemos que $b \wedge f(g_*(y)) = g(g_*(y)) \leq y$ (Esta última desigualdad porque $g \dashv g_*$). Luego eso es equivalente a que $f(g_*(y)) \leq b \succ y$ (Por ser la implicación el adjunto derecho de sacar ínfimo), y por último $g_*(y) \leq f_*(b \succ y)$ (ya que $f \dashv f_*$). Y por lo tanto $g_*(y) = f_*(b \succ y) \wedge a$. ■

Lema 3.18. *Sea $f : A \to B$ un morfismo de marcos, $a \in A$, $b \in B$ y $g : A_{v_a} \to B_{v_b}$ otro morfismo de marcos tal que el cuadrado* $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "v_a"'] & B \arrow[d, "v_b"] \\ A_{v_a} \arrow[r, "g"'] & B_{v_b} \end{tikzcd}$ *conmuta, entonces $g(x) = b \succ f(x)$ para todo $x \in A_{v_a}$ y $g_*(y) = f_*(y)$ para todo $y \in B_{v_b}$.*

Demostración. Es un caso particular del lema 3.6, con los núcleos abiertos v_a y v_b ■

Sabemos de la observación 3.7 que hay un isomorfismo entre los cocientes abiertos y las secciones inferiores, veamos que en cierto sentido son equivalentes los dos lemas anteriores.

Proposición 3.19. *Sean $A \xrightarrow{f} B$ un morfismo de marcos, $a \in A$ y $b \in B$, entonces lo siguiente es equivalente:*

- *Existe un morfismo de marcos $g : A_{v_a} \to B_{v_b}$ que hace conmutar el cuadrado*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "v_a"'] & B \arrow[d, "v_b"] \\ A_{v_a} \arrow[r, "g"'] & B_{v_b} \end{tikzcd}$$

- *Existe un morfismo de marcos $\widehat{g} :\downarrow a \to \downarrow b$ que hace conmutar el cuadrado*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a\wedge -"'] & B \arrow[d, "b\wedge -"] \\ \downarrow a \arrow[r, "\widehat{g}"'] & \downarrow b \end{tikzcd}$$

Demostración. Supongamos que conmuta el cuadrado $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "v_a"'] & B \arrow[d, "v_b"] \\ A_{v_a} \arrow[r, "g"'] & B_{v_b} \end{tikzcd}$, entonces, del lema 3.18, tenemos que $g(x) = b \succ f(x)$ para todo $x \in A_{v_a}$ y $g_*(y) = f_*(y)$ para todo $y \in B_{v_b}$. Usaremos el isomorfismo entre las secciones inferiores y los cocientes abiertos, entonces definimos $\widehat{g} :\downarrow a \to\downarrow b$ como $\widehat{g}(w) := b \wedge g(a \succ w)$ para todo $w \in\downarrow a$. Tomemos $z \in A$, entonces

$$\widehat{g}(a \wedge z) = b \wedge g(a \succ (a \wedge z)) = b \wedge g(a \succ z) = b \wedge (b \succ f(z)) = b \wedge f(z)$$

lo que muestra que conmuta el cuadrado $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a\wedge -"'] & B \arrow[d, "b\wedge -"] \\ \downarrow a \arrow[r, "\widehat{g}"'] & \downarrow b \end{tikzcd}$

Ahora supongamos que conmuta el cuadrado $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a\wedge -"'] & B \arrow[d, "b\wedge -"] \\ \downarrow a \arrow[r, "\widehat{g}"'] & \downarrow b \end{tikzcd}$, entonces del lema 3.17, tenemos que $\widehat{g}(x) = b \wedge f(x)$ para todo $x \le a$ y $\widehat{g}_*(y) = f_*(b \succ y) \wedge a$ para todo $y \le b$. Por el mismo isomorfismo mencionado previamente, definimos $g(w) := b \succ \widehat{g}(a \wedge w)$ para todo $w \in A_{v_a}$. Tomemos $z \in A$, entonces

$$g(a \succ z) = b \succ \widehat{g}(a \wedge (a \succ z)) = b \succ \widehat{g}(a \wedge z) = b \succ (b \wedge f(z)) = b \succ f(z)$$

lo que muestra que conmuta el cuadrado $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "v_a"'] & B \arrow[d, "v_b"] \\ A_{v_a} \arrow[r, "g"'] & B_{v_b} \end{tikzcd}$ ■

Notemos que la proposición anterior básicamente dice que si se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a\wedge -"'] \arrow[dd, "v_a"', shift right=2] & B \arrow[d, "b\wedge -"] \arrow[dd, "v_b", shift left=2] \\
\downarrow a \arrow[r, "\widehat{g}"'] \arrow[d, "v_a"', shift right, "\cong"] & \downarrow b \arrow[d, "v_b", shift left, "\cong"'] \\
A_{v_a} \arrow[r, "g"'] \arrow[u, "a\wedge -"', shift right] & A_{v_b} \arrow[u, "b\wedge -", shift left]
\end{tikzcd}$$

es equivalente que este diagrama conmute a que conmute el cuadrado $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a\wedge -"'] & B \arrow[d, "b\wedge -"] \\ \downarrow a \arrow[r, "\widehat{g}"'] & \downarrow b \end{tikzcd}$, lo que a su vez es equivalente a que conmute el cuadrado $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "v_a"'] & B \arrow[d, "v_b"] \\ A_{v_a} \arrow[r, "g"'] & B_{v_b} \end{tikzcd}$

Definición 3.20. Sea $f : A \to B$ un morfismo de marcos. Decimos que f es un morfismo étale si existen familias $\{a_i\}_{i\in I} \subseteq A$ y $\{b_i\}_{i\in I} \subseteq B$ tales que:

1. $\bigvee_{i\in I} b_i = 1$.
2. Para cada $i \in I$ $f_i : A_{v_{a_i}} \to B_{v_{b_i}}$ definido como $f_i(x) := b_i \succ f(x)$ es un isomorfismo.

Lema 3.21. *Todo morfismo de marcos étale es un morfismo abierto.*

Demostración. Sea $f : A \to B$ un morfismo de marcos étale, entonces existen familias $\{a_i\}_{i\in I} \subseteq A$ y $\{b_i\}_{i\in I} \subseteq B$ tales que $\bigvee_{i\in I} b_i = 1$ y el cuadrado $\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "v_{a_i}"'] & B \arrow[d, "v_{b_i}"] \\ A_{v_{a_i}} \arrow[r, "g"'] & B_{v_{b_i}} \end{tikzcd}$ conmuta y f_i es isomorfismo para toda $i \in I$.

Definamos $f_l : B \to A$ como $f_l(y) := \bigvee_{i\in I}(a_i \wedge f_{i*}(b_i \succ y))$ para cada $y \in B$. Veamos que es el adjunto izquierdo. Sean $x \in A$ y $y \in B$, entonces

$$\begin{aligned}
f_l(y) \leq x &\iff \bigvee_{i\in I}(a_i \wedge f_{i*}(b_i \succ y)) \leq x \\
&\iff a_i \wedge f_{i*}(b_i \succ y) \leq x \text{ para todo } i \in I \\
&\iff f_{i*}(b_i \succ y) \leq a_i \succ x \text{ para todo } i \in I \\
&\iff b_i \succ y \leq f_i(a_i \succ x) = b_i \succ f(x) \text{ para todo } i \in I \\
&\iff b_i \wedge y = b_i \wedge (b_i \succ y) \leq f(x) \text{ para todo } i \in I \\
&\iff \bigvee_{i\in I}(b_i \wedge y) = \bigvee_{i\in I} b_i \wedge y = y \leq f(x)
\end{aligned}$$

Lo que prueba que $f_l \dashv f$ (Recuérdese que se usa el hecho de que cada f_i son isomorfismos, y por lo tanto su inverso es tanto su adjunto derecho como izquierdo, lo que significa que $f_{i*} = f_i^{-1}$).

Para la identidad de Frobenius primero observemos que para cada $i \in I$ se tiene que

$$\begin{aligned}
a_i \wedge fi*(b_i \succ y) \wedge x &= a_i \wedge f_{i*}(b_i \succ y) \wedge (a_i \succ x) = a_i \wedge f_{i*}(b_i \succ y) \wedge f_{i*}f_i(a_i \succ x) \\
&= a_i \wedge f_{i*}((b_i \succ y) \wedge f_i(a_i \succ x)) = a_i \wedge f_{i*}((b_i \succ y) \wedge (b_i \succ f(x))) \\
&= a_i \wedge f_{i*}(b_i \succ (y \wedge f(x)))
\end{aligned}$$

Y ahora veamos que

$$\begin{aligned}
f_l(y) \wedge x &= \bigvee_{i\in I}(a_i \wedge f_{i*}(b_i \succ y)) \wedge x = \bigvee_{i\in I}(a_i \wedge f_{i*}(b_i \succ y) \wedge x) \\
&= \bigvee_{i\in I}(a_i \wedge f_{i*}(b_i \succ (y \wedge f(x)))) = f_l(y \wedge f(x)).
\end{aligned}$$

■

Corolario 3.22. *Sea $f : A \to B$ un morfismo de marcos. f es étale si y solo si:*

1. *f es abierto (e.i. existe $f_l \dashv f$ que satisface Frobenius)*
2. *Existe una familia $\{b_i\} \subseteq B$ tal que $\bigvee_{i\in I} b_i = 1$ y $f_{il} : B_{v_{b_i}} \to A_{v_{f_l(b_i)}}$ definido como $f_{il}(z) := f_l(b_i) \succ f_l(b_i \wedge z)$ para todo $z \in B_{v_{b_i}}$, es un isomorfismo.*

Demostración. ■

Proposición 3.23. *Sea :$f_l : B \to A$ un morfismo de copos entre dos marcos. Lo siguiente es equivalente:*

- *Existe un morfismo de marcos $f : A \to B$ tal que es étale y $f_l \dashv f$.*
- *f_l preserva supremos arbitrarios y existe una familia $\{b_i\} \subseteq B$ tal que $\bigvee_{i\in I} b_i = 1$ y $f_{il} : B_{v_{b_i}} \to A_{v_{f_l(b_i)}}$ definido como $f_{il}(z) := f_l(b_i) \succ f_l(b_i \wedge z)$ para todo $z \in B_{v_{b_i}}$, es un isomorfismo.*

Demostración. ■

Proposición 3.24. *La composición de morfismos étales de marcos es un morfismo étale.*

Demostración. Sean $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \in \mathrm{Frm}$ dos morfismos étales. Entonces existen las familias $\{b_i\}_{i\in I} \subseteq B$ $\{c_j\}_{j\in J} \subseteq C$ tales que $\bigvee_{i\in I} b_i = 1$, $\bigvee_{j\in J} c_j = 1$ y el diagrama

$$\begin{tikzcd}
& A \arrow[rr, "f"] \arrow[dl, "v_{f_l(b_i)}"'] & & B \arrow[rr, "g"] \arrow[dl, "v_{b_i}"] \arrow[dr, "v_{g_l(c_j)}"] & & C \arrow[dr, "v_{c_j}"] & \\
A_{v_{f_l(b_i)}} \arrow[rr, bend left, "f_i"] \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & B_{v_{b_i}} \arrow[ll, bend left, "f_{il}"] & & B_{v_{g_l(c_j)}} \arrow[rr, bend left, "g_j"] \arrow[rr, phantom, "\cong"] & & C_{v_{c_j}} \arrow[ll, bend left, "g_{il}"]
\end{tikzcd}$$

conmuta (los morfismos f_{il} y g_{jl} se dan en el corolario 3.22).

Sea la familia $\{\gamma_{ij}\}_{(i,j)\in I\times J} \subseteq C$ donde $\gamma_{ij} := g(b_i) \wedge c_j$. Veamos que ■

3.2. Algunas equivalencias importantes

3.2.1. $\mathrm{Et}/A \cong \mathrm{Gav}(A)$

3.2.2. $\mathrm{Con}(A) \cong \mathrm{Gav}(A)$

3.2.3. Topos localico

Capítulo 4

Teoría de topos

4.1. La 2-categoría de topos

4.2. Adjunción entre $\mathcal{TOP}$ y $(\mathrm{Frm})^{\mathrm{op}}$

4.3. Teoría de conjuntos

4.3.1. Separación

4.3.2. Vacío y extensionalidad

4.3.3. Elección y finitud

4.3.4. Relación de pertenencia

4.4. Teoría local y global en Con

4.4.1. Objeto-conjunto transitivo

4.4.2. Retícula de objeto-conjunto transtivo

4.4.3. Objeto-conjunto

4.5. Zermelo-Franke en $\mathcal{E}$