

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA

Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías

## Curso introductorio a la teoría de topos

Impartido por:

Dr. Luis Ángel Zaldívar Corichi

Elaborado por:

Alejandro Aceves, Josué Maldonado, Juan Carlos Monter



# Índice general

<b>1. Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1. Construcciones básicas . . . . .	5
1.1.1. Categorías . . . . .	5
1.1.2. Principio de dualidad . . . . .	6
1.1.3. Funtores . . . . .	7
1.1.4. Transformaciones naturales . . . . .	7
1.2. Límites/colímites . . . . .	8
1.2.1. Límites . . . . .	8
1.2.2. Colímites . . . . .	10
1.3. Adjunciones . . . . .	12
1.4. Extensiones de Kan . . . . .	16
1.5. Categorías extensivas . . . . .	17
<b>2. Gavillas sobre Top</b>	<b>19</b>
2.1. Gavillas sobre Top . . . . .	19
2.2. El funtor $\Gamma$ . . . . .	22
2.3. El funtor $\Lambda$ . . . . .	24
2.4. $\mathcal{H}L/S \simeq \text{Gav}(S)$ . . . . .	29
2.5. Cambio de base . . . . .	30
2.6. Morfismos ultrafinitos . . . . .	35
<b>3. Gavillas sobre Marcos</b>	<b>39</b>
3.1. Marcos y gavillas . . . . .	39
3.1.1. Núcleos y cocientes en marcos . . . . .	41
3.1.2. Morfismos abiertos . . . . .	43
3.1.3. Morfismos étale . . . . .	47
3.2. Algunas equivalencias importantes . . . . .	53
3.2.1. $\text{Et}/A \cong \text{Gav}(A)$ . . . . .	53
3.2.2. $\text{Con}(A) \cong \text{Gav}(A)$ . . . . .	53
3.2.3. Topos localico . . . . .	53
<b>4. Teoría de topos</b>	<b>55</b>
4.1. La 2-categoría de topos . . . . .	55
4.2. Adjunción entre $\mathcal{TOP}$ y $(\text{Frm})^{\text{op}}$ . . . . .	55
4.3. Teoría de conjuntos . . . . .	55

4.3.1.	Separación . . . . .	55
4.3.2.	Vacío y extensionalidad . . . . .	55
4.3.3.	Elección y finitud . . . . .	55
4.3.4.	Relación de pertenencia . . . . .	55
4.4.	Teoría local y global en Con . . . . .	55
4.4.1.	Objeto-conjunto transitivo . . . . .	55
4.4.2.	Retícula de objeto-conjunto transitivo . . . . .	55
4.4.3.	Objeto-conjunto . . . . .	55
4.5.	Zermelo-Franke en $\mathcal{E}$ . . . . .	55

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Construcciones básicas

#### 1.1.1. Categorías

**Definición 1.1** (Categoría). Una categoría  $\mathcal{C}$  consta de los siguientes datos:

- Una clase (no necesariamente un conjunto) de objetos  $\text{Ob}(\mathcal{C})$ , y una clase de morfismos  $\text{Mor}(\mathcal{C})$ .
- A cada par de objetos  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  le corresponde una clase de morfismos (flechas) de  $X$  en  $Y$ , que se denotará por  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ .
- Para cada terna de objetos  $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  está definida una función llamada composición

$$\begin{aligned}\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z) &\rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f.\end{aligned}$$

Además, estos datos satisfacen las siguientes propiedades

- La composición es asociativa, es decir,  $h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g$ .
- Para cada objeto  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  existe un morfismo  $Id_X \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X)$  tal que  $f \circ Id_X = Id_X \circ f$ .

Para cualesquiera  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , una manera de denotar los morfismos de  $X$  en  $Y$  es por  $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  tal como se muestra en la definición anterior. Sin embargo, también es común denotarlo por  $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$  o  $\mathcal{C}(X, Y)$ .

A continuación se presentan algunos de los ejemplos clásicos de categorías.

#### Ejemplo 1.2.

1. Con denota la categoría de conjuntos cuyos objetos son conjuntos y, tiene como morfismos las funciones entre conjuntos. La composición entre morfismos está bien definida, y el morfismo identidad es la función identidad.

2.  $\text{Vect}_k$  es la categoría que tiene por objetos espacios vectoriales sobre un campo  $k$  y, como morfismos transformaciones lineales entre espacios vectoriales.
3. Sean  $A$  y  $B$  conjuntos parcialmente ordenados. Un morfismo de  $A$  a  $B$  es una función monótona (creciente). Esto es, para cualesquiera  $a, b \in A$ ,  $a \leq b$  implica que  $f(a) \leq f(b)$ . Así, los conjuntos parcialmente ordenados junto con sus morfismos constituyen la categoría  $\text{Pos}$ . Un caso “más general” es el siguiente: para cualesquiera dos conjuntos parcialmente ordenados  $A$  y  $B$ , estos se pueden ver como categorías, por lo que un morfismo de  $A$  a  $B$  no es más que un funtor.
4. Algunos ejemplos más son los siguientes:  $\text{Top}$  es la categoría de espacios topológicos con morfismos las funciones continuas. Por otro lado, tenemos las categorías de grupos y la categoría de anillos con unidad,  $\text{Grp}$  y  $\text{Ring}$ , cuyos morfismos son homomorfismos de grupos y homomorfismos de anillos, respectivamente.

**Definición 1.3** (Categoría pequeña). Una categoría  $\mathcal{C}$  se dice *pequeña* si la clase objetos  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  y la clase de morfismos  $\text{Mor}(\mathcal{C})$  es un conjunto.

**Definición 1.4** (Objeto final/inicial). Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Un objeto  $T \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  es *final* si para cualquier otro objeto  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  existe un único morfismo  $f : X \rightarrow T$ . Análogamente, un objeto  $I \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  se dice *inicial* si para cualquier  $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  existe un único morfismo  $g : I \rightarrow X$ .

**Proposición 1.5.** *Los objetos finales/iniciales, si existen, son únicos salvo isomorfismo único [Mac13].*

### 1.1.2. Principio de dualidad

De la definición de objeto inicial y final, es común pensar que uno es la parte “dual” del otro. En la práctica, es común encontrarse con ciertas propiedades que satisface una categoría, sin embargo, muchas de estas propiedades tienen una noción “dual” en el sentido de que también se siguen cumpliendo aún cuando se cambia la dirección de las flechas entre los objetos. Esto motiva a la siguiente definición.

**Definición 1.6** (Categoría opuesta). Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Se define la *categoría opuesta* de  $\mathcal{C}$ , denotada por  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ , como la categoría cuyos objetos son los mismos que los de  $\mathcal{C}$ , i.e.,  $\text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) = \text{Ob}(\mathcal{C})$ , pero sus morfismos van en sentido opuesto, esto es, si  $X^{\text{op}} = X, Y = Y^{\text{op}} \in \mathcal{C}^{\text{op}}$ , una flecha  $f^{\text{op}} : X^{\text{op}} \rightarrow Y^{\text{op}}$  en  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  es una flecha  $f : Y \rightarrow X$  en  $\mathcal{C}$ . De este modo se tiene que

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, Y) = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X).$$

Además, la ley de composición está dada por  $f^* \circ g^* = (g \circ f)^*$ . Observemos que  $(\mathcal{C}^{\text{op}})^{\text{op}} = \mathcal{C}$ , es decir, la categoría opuesta de  $\mathcal{C}^{\text{op}}$  es la categoría original.

La importancia de trabajar con la categoría dual reside en el siguiente resultado conocido como el principio de dualidad.

**Teorema 1.7.** *Supongamos la validez, en toda categoría, de un enunciado que expresa la existencia de algún objeto o morfismo o la igualdad de algunas composiciones. Entonces, el “enunciado dual”, que se obtiene al voltear la dirección de las flechas y al sustituir cada composición  $f \circ g$  por  $g \circ f$  en el enunciado original, es también válido en toda categoría.*

### 1.1.3. Funtores

**Definición 1.8** (Functor covariante). Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  categorías. Un functor *covariante*  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  consiste de lo siguiente:

- Una asignación en objetos:  $F : \text{Ob}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{B})$ .
- Para cada  $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{A})$  se tiene una asignación

$$F : \text{Mor}_{\mathcal{A}}(X, Y) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{B}}(F(X), F(Y)).$$

Que satisfacen las siguientes propiedades.

- $F$  respeta la identidad:

$$F(Id_X) = Id_{F(X)}.$$

- Respeta la composición:

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

**Definición 1.9** (Functor contravariante). Diremos que un functor es *contravariante* si corresponde a un functor covariante de la forma  $F : \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{B}$ .

De la definición anterior, se tiene que si  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  y  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  son funtores, entonces su composición  $G \circ F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  está dada por

- i) El compuesto en objetos,

$$(G_0 \circ F_0) : A_0 \rightarrow C_0, \quad A_0 \in \mathcal{A}, \quad C_0 \in \mathcal{C}.$$

- ii) Para cada  $A, B \in \mathcal{C}$ , el compuesto en morfismos

$$(G_{F(A), F(B)} \circ F_{A, B}) : \text{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(G(F(A)), G(F(B))).$$

Con esto en mente, definimos lo siguiente.

**Definición 1.10.** Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  categorías. Diremos que  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son *isomorfas* si existen funtores  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  y  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  tal que uno es inverso del otro, i.e.,  $F \circ G = \text{id}_{\mathcal{B}}$  y  $G \circ F = \text{id}_{\mathcal{A}}$ .

Añadir ejemplos

### 1.1.4. Transformaciones naturales

La manera de relacionar objetos de una categoría es mediante sus morfismos. Como vimos anteriormente, dadas dos categorías es posible obtener información de una a partir de la otra mediante un functor. En esta sección, estamos interesados en estudiar transformaciones naturales, que a grandes rasgos, estas se pueden entender como morfismos entre funtores.

**Definición 1.11** (Transformación natural). Sean  $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  funtores. Un *transformación natural* es una tupla  $(F, \eta, G)$ , en donde  $\eta : F \rightarrow G$  es una colección de morfismos  $\eta_A : F(A) \rightarrow G(A)$  en  $\mathcal{B}$  tal que

1. Para cada  $A \in \mathcal{A}$ , se tiene que  $\eta_A : F(A) \rightarrow G(A)$ .
2. Para toda  $f \in \mathcal{A}(A, B)$ , el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\eta_A} & G(A) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(B) & \xrightarrow{\eta_B} & G(B) \end{array}$$

commuta.

Si  $\eta_A : F(A) \rightarrow G(A)$  es un isomorfismo para todo  $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ , diremos que  $\eta : F \rightarrow G$  es un *isomorfismo natural*, el cual denotamos por  $F \cong G$ . De esto se sigue que  $\eta^{-1} : G \rightarrow F$  dada por  $\eta_A^{-1} = (\eta_A)^{-1}$  también es una transformación natural.

**Ejemplo 1.12.** Sea  $\mathcal{A}$  una categoría pequeña y  $\mathcal{B}$  una categoría arbitraria. La categoría de funtores, denotada por  $\text{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  (o algunas veces también es denotada por  $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ ), tiene como objetos funtores con dominio  $\mathcal{A}$  y codominio  $\mathcal{B}$ . Para cualesquiera dos funtores en  $\text{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ , un morfismo entre estos es una transformación natural.

**Definición 1.13** (Functor representable). Sea  $\mathcal{C}$  una categoría y  $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Con}$  un functor. Diremos que  $F$  es *representable* si existe un isomorfismo natural entre  $F$  y  $\text{Hom}(A, -)$ , para algún  $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ . En este caso, se dice que  $F$  es representado por  $A$ .

Una caracterización de cuando un functor es representable es la siguiente (veáse [Mac13]). Un functor  $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Con}$  es representable si, y solo si,  $F \cong h_X$  para algún  $X \in \text{Top}$ . Esto motiva a enunciar uno de los resultados de mayor importancia en la teoría de categorías.

**Lema 1.14** (Lema de Yoneda). *Sea  $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Con}$  un functor. Dado el functor  $\text{Hom}(C, -)$ , se tiene que el morfismo*

$$\begin{aligned} \varphi : \text{Hom}(\text{Hom}(A, -)) &\rightarrow F(A) \\ \eta &\mapsto \eta_A \end{aligned}$$

*es un isomorfismo.*

## 1.2. Límites/colímites

### 1.2.1. Límites

**Definición 1.15.** Sea  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  un functor. Un *cono* sobre  $F$  es una pareja  $(C, \langle P_A \rangle_{A \in \mathcal{A}})$  que consiste de lo siguiente:

1. Un objeto  $C \in \mathcal{C}$ ,

Añadir en los ejemplos de funtores el functor de puntos  $h_X$ .

2. Para cada objeto  $A \in \mathcal{A}$ , se tiene una flecha  $(P_A : C \rightarrow FA) \in \mathcal{C}$  tal que, para cada flecha  $(A \xrightarrow{\alpha} A') \in \mathcal{A}$ , el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} A & & FA & \xrightarrow{F\alpha} & FA' \\ \downarrow \alpha & \rightsquigarrow & & \swarrow P_A & \nearrow P_{A'} \\ A' & & C & & \end{array}$$

es sólido en  $\mathcal{C}$

**Definición 1.16.** Sea  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  un funtor. Un *límite* sobre  $F$  es un cono  $(L, \langle P_A \rangle_{A \in \mathcal{A}})$  sobre  $F$  con la siguiente propiedad: para cualquier otro cono  $(M, \langle q_A \rangle_{A \in \mathcal{A}})$  sobre  $F$ , existe un único morfismo  $m : M \rightarrow L$  tal que, para todo  $A \in \mathcal{A}$ , el diagrama

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{!m} & L \\ & \searrow q_A & \swarrow P_A \\ & FA & \end{array}$$

comuta. Esto es,  $q_A = P_A \circ m$ , para todo  $A \in \mathcal{A}$ .

A los morfismos  $(P_A : L \rightarrow FA, A \in \mathcal{A})$  se les llama *proyecciones*, y al límite de  $F$  se denota como  $\varprojlim_{A \in \mathcal{A}} FA$ .

**Lema 1.17.** El límite de un funtor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ , cuando existe, es único salvo isomorfismo natural.

*Demostración.*

■ Pendiente

**Lema 1.18.** Sea  $(L, \langle P_A \rangle_{A \in \mathcal{A}})$  el límite de  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ . Son morfismos son iguales  $\left( M \xrightleftharpoons[g]{f} L \right) \in \mathcal{C}$  si, para todo  $A \in \mathcal{A}$ ,  $P_A f = P_A g$ .

*Demostración.* La demostración es inmediata de la propiedad universal del límite. ■

A continuación, se muestran algunos de los ejemplos de límites.

**Ejemplo 1.19.**

1. Sea  $\mathcal{A}$  una categoría vacía,  $\mathcal{C}$  una categoría y  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  un funtor. Entonces, el límite de  $F$  es un objeto  $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  tal que, para todo  $C' \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ , existe un único morfismo  $C' \rightarrow C$ . Es decir,  $C$  es el objeto final de  $\mathcal{C}$ .
2. Sea  $\mathcal{T}$  una categoría con objetos  $\bullet, *$ , y  $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C}$  un funtor. Entonces, un límite para  $F$  es

$$\begin{array}{ccccc} & & C & & \\ & \swarrow & \uparrow ! & \nearrow & \\ F(\bullet) & & C' & & F(*) \\ \uparrow & & \uparrow & & \uparrow \\ & & C & & \end{array}$$

Por lo tanto,  $C$  define un producto para  $F(\bullet)$  y  $F(*)$ , el cual denotamos como  $C = F(\bullet) \times F(*)$ .

3. Sea  $\mathcal{L}$  la categoría que consiste de los objetos  $\bullet$  y  $*$ , dos flechas paralelas de  $\bullet$  a  $*$ , y las respectivas identidades. Sea  $F : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$  un funtor. De manera diagramática tenemos lo siguiente

$$\mathcal{L} := \bullet \rightrightarrows * \xrightarrow{F} \mathcal{C}$$

Así, el límite sobre  $\mathcal{F}$  de la forma  $\mathcal{L}$  es

$$\begin{array}{ccccc} & C & & & \\ f \swarrow & & \searrow g & & \\ F(\bullet) & \xrightarrow{h_1} & F(*) = C & \xrightarrow{f} & F(\bullet) \xrightarrow{h_1} F(*) \\ & h_2 & \uparrow ! & & h_2 \\ & & C' & \nearrow \alpha & \end{array}$$

Del diagrama anterior se tiene que,  $g = h_1 \circ f = h_2 \circ f$ . Por lo tanto,  $C$  es el igualador de  $F(\mathcal{L})$ .

4. Sea  $P$  la categoría que consiste de tres objetos  $a, b$  y  $c$ , dos flechas  $a \rightarrow b, b \rightarrow c$ , y las respectivas identidades. Sea  $F : P \rightarrow \mathcal{C}$  un funtor. En un diagrama se tiene que

$$\begin{array}{ccc} & c & \\ & \downarrow & \\ & \mathcal{C} & \\ & \downarrow & \\ a & \longrightarrow & b \end{array}$$

Por lo cual, un límite sobre  $F$  de la forma  $P$  es el pullback

$$\begin{array}{ccccc} d' & \dashrightarrow & F(d) & \longrightarrow & F(c) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ & & F(a) & \longrightarrow & F(b) \end{array}$$

### 1.2.2. Colímites

**Definición 1.20.** Sea  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$  un funtor. Un *cocono* sobre  $F$  es una pareja  $(C, \langle s_A \rangle)_{A \in \mathcal{A}}$  que consiste de lo siguiente

1. Un objeto  $C \in \mathcal{C}$ .
2. Para cada  $A \in \mathcal{A}$ , un morfismo  $(s_A : FA \rightarrow C) \in \mathcal{C}$  tal que, para cada flecha  $(A \xrightarrow{\alpha} A') \in \mathcal{A}$ , el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & A & & FA & FA' \\
 & \downarrow \alpha & \rightsquigarrow & s_A \searrow & s_{A'} \swarrow \\
 & A' & & C &
 \end{array}$$

$\xrightarrow{F_\alpha}$

commuta en  $\mathcal{C}$ . Es decir,  $s_A = s_{A'} \circ F_\alpha$ .

**Definición 1.21.** Un *colímite* sobre  $F$  es un cocono  $(L, \langle s_A \rangle_{A \in \mathcal{A}})$  con la siguiente propiedad: para cualquier otro cocono  $(M, \langle t_A \rangle_{A \in \mathcal{A}})$  el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 FA & \xrightarrow{s_A} & L \\
 & \searrow t_A & \nearrow !m \\
 & M &
 \end{array}$$

es comutativo. Esto es, para todo  $A \in \mathcal{A}$ ,  $t_A = ms_A$ .

Por el principio de dualidad, los ejemplos de colímites se obtienen de manera dual a los ejemplos de límites dados en el Ejemplo 1.19.

**Lema 1.22.** Sea  $(A \xrightarrow{h} B \rightrightarrows g \xrightarrow{f} C) \in \text{Con}$ . Este es un igualador si, y solo si, para cada  $b \in B$  tal que  $f(b) = g(b)$  implica que existe un único  $a \in A$  tal que  $h(a) = b$ .

*Demostración.*

Pendiente

**Definición 1.23.** Una categoría  $\mathcal{C}$  es *completa* si cada functor  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  tiene límite, donde  $\mathcal{D}$  es una categoría pequeña. Dualmente,  $\mathcal{C}$  es *cocompleta* si todo functor  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  tiene colímite. Si  $\mathcal{C}$  es completa y cocompleta, diremos que es *bicompleta*.

**Lema 1.24.** La categoría  $\text{Con}$  es bicompleta. En particular, los (co)límites de cada functor se calculan puntualmente.

*Demostración.*

Pendiente

**Lema 1.25.** Sea  $(A, \leq)$  un conjunto parcialmente ordenado. Entonces, la categoría

$$\text{Con}^{(A, \leq)^{\text{op}}} : [(A, \leq)^{\text{op}}, \text{Con}]$$

es bicompleta y los (co)límites se calculan puntualmente.

*Demostración.*

Pendiente

**Definición 1.26.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría pequeña.

- Diremos que  $\mathcal{C}$  es *finita* si  $\text{Ob}(\mathcal{C})$  y  $\text{Mor}(\mathcal{C})$  son conjuntos finitos.

- Un límite sobre  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$  es *finito* si  $\mathcal{C}$  es finita.

**Definición 1.27** (Categoría filtrante). Una categoría  $\mathcal{C}$  es *filtrante* si

1.  $\mathcal{C}$  es no vacía.
2. Para cada  $C_1, C_2 \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  existe  $C \in \mathcal{C}$  junto con morfismos  $C_1 \xrightarrow{f_1} C$  y  $C_2 \xrightarrow{f_2} C$ .
3. Para cualesquiera  $C_1, C_2 \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  y morfismos  $C_1 \xrightarrow[\substack{f_2 \\ f_1}]{} C_2$  existe  $C_3 \in \text{Ob}(\mathcal{C})$  y un morfismo  $C_1 \xrightarrow[\substack{f_2 \\ f_1}]{} C_2 \xrightarrow{h} C_3$  tal que  $hf_1 = hf_2$ .

**Definición 1.28.** Un *colímite* sobre  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$  es filtrante si  $\mathcal{C}$  es filtrante.

**Lema 1.29.** Sea  $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  un funtor con  $\mathcal{B}$  finita y  $\mathcal{C}$  filtrante. Entonces, existe un cono sobre  $F$  en  $\mathcal{C}$ .

La demostración se sigue del siguiente resultado.

**Proposición 1.30.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría pequeña.

1. Sea  $\{C_i \mid i \in I\}$  un conjunto finito de objetos en  $\mathcal{C}$ . Entonces, podemos encontrar un objeto  $C \in \mathcal{C}$  y morfismos  $\{C_i \rightarrow C \mid i \in I\}$ .
2. Dado un conjunto finito  $\{f_i : C \rightarrow C' \mid i \in I\}$ , podemos encontrar un objeto  $C'' \in \mathcal{C}$  y un morfismo  $C' \xrightarrow{f} C''$  tal que  $ff_i = ff_j$ , para todo  $i, j \in I$ .

*Demostración.*

■

### 1.3. Adjunciones

**Definición 1.31** (Adjunción). Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  categorías. Una *adjunción* entre  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  es una terna  $(F, G, \varphi)$  donde  $\mathcal{D} \xrightleftharpoons[\substack{G \\ F}]{} \mathcal{C}$  son funtores y  $\varphi$  es una función que asigna a cada par de objetos  $C \in \mathcal{C}$  y  $D \in \mathcal{D}$  una biyección

$$\varphi_{\mathcal{D}, \mathcal{C}} : \mathcal{D}(D, GC) \cong \mathcal{C}(FD, C).$$

En este caso, decimos que  $F$  es adjunto izquierdo y  $G$  es adjunto derecho, lo cual es denotado por  $F \dashv G$ .

En lo anterior,  $\varphi_{\mathcal{D}, \mathcal{C}}$  de hecho es un isomorfismo natural. El siguiente resultado nos dice que las adjunciones se comportan bien bajo composición.

**Lema 1.32.** Sean  $\mathcal{D} \xrightleftharpoons[\substack{G \\ F}]{} \mathcal{C} \xrightleftharpoons[\substack{G' \\ F'}]{} \mathcal{B}$  funtores. Si  $F \dashv G$  y  $F' \dashv G'$ , entonces  $F' \circ F \dashv G \circ G'$ .

*Demostración.* Como  $F \dashv G$  se tiene que, para cada par de objetos  $C \in \mathcal{C}$  y  $D \in \mathcal{D}$ , hay una biyección

$$\varphi_{\mathcal{D},\mathcal{C}} : \mathcal{D}(D, GC) \cong \mathcal{C}(FD, C). \quad (1.1)$$

Del mismo modo, al ser  $F' \dashv G'$ , para cada par de objetos  $C' \in \mathcal{C}$  y  $B \in \mathcal{B}$ , existe una biyección

$$\varphi_{\mathcal{C},\mathcal{B}} : \mathcal{C}(C, G'B) \cong \mathcal{B}(F'C', B). \quad (1.2)$$

Si  $D \in \mathcal{D}$  y  $B \in \mathcal{B}$ , al primero evaluar en (1.1) en los objetos  $C$  y  $G'B \in \mathcal{C}$ , y después evaluar (1.2) en  $FC \in \mathcal{D}$  y  $B \in \mathcal{B}$ , obtenemos

$$\mathcal{D}(D, G(G'B)) \cong \mathcal{C}(FD, G'B) \cong \mathcal{B}(F'(FC), B).$$

Por lo tanto,  $F' \circ F \dashv G \circ G'$  tal como se quería. ■

A continuación se enuncian un par de resultados en los que se muestra la relación entre objetos iniciales/finales y adjuntos. Esto es, si una categoría tiene objeto inicial, este da lugar a un adjunto izquierdo. Dualmente, si la categoría tiene objeto final, este determina un adjunto derecho.

**Proposición 1.33.** *Si  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  son categorías con objeto inicial entonces el funtor*

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{B} \\ A &\mapsto (A, 0) \\ f &\mapsto (f, 1_0) \end{aligned}$$

es adjunto izquierdo de la proyección  $\pi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ .

**Proposición 1.34.** *Sean  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{B}$  y  $\mathcal{C}$  categorías con coproductos finitos y funtores*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{A} \\ G \downarrow & & \\ \mathcal{B} & & \end{array}$$

*Entonces, el funtor  $\langle F, G \rangle : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{B}$  si, y solo si, ambos funtores  $F$  y  $G$  tienen adjunto izquierdo.*

Ahora, considereos  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  dos categorías y  $\mathcal{D} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathcal{C}$  funtores. Si  $(D \xrightarrow{h} D') \in \mathcal{D}$  y  $(C \xrightarrow{k} C') \in \mathcal{C}$ , de la definición de adjunción, se tienen los siguientes diagramas commutativos.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(FD, C) & \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{D},\mathcal{C}}} & \mathcal{D}(D, GC) \\ \mathcal{C}(Fh, C) \downarrow & & \downarrow \mathcal{D}(h, GC) \\ \mathcal{C}(FD', C) & \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{D}',\mathcal{C}}} & \mathcal{D}(D', GC) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(FD, C) & \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{D},\mathcal{C}}} & \mathcal{D}(D, GC) \\ \mathcal{C}(FD, k) \downarrow & & \downarrow \mathcal{D}(D, GK) \\ \mathcal{C}(FD, C') & \xrightarrow{\varphi_{\mathcal{D},\mathcal{C}'}} & \mathcal{D}(D, GC') \end{array}$$

En otras palabras, para todo  $FD \xrightarrow{f} C$  se tiene que  $\varphi(f \circ Fh) = \varphi(f)h$  y  $\varphi(k \circ f) = Gk \circ \varphi f$ . Esto es equivalente a que  $\varphi^{-1}$  sea también un isomorfismo natural. Es decir, con las mismas flechas y  $D' \xrightarrow{g} GC$ , se tiene que  $\varphi^{-1}(gh) = \varphi^{-1}gFh$  y  $\varphi^{-1}(Gkg) = k\varphi^{-1}(g)$ . Tomando el caso particular  $C = FD$ , se tiene el diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(FD, FD) & \xrightarrow{\varphi_{D, FD}} & \mathcal{D}(D, GFD) \\ FD \downarrow & & \downarrow \mathcal{D}(h, GFD) \\ \mathcal{C}(FD', FD) & \xrightarrow{\varphi_{D', FD}} & \mathcal{D}(D', GFD) \end{array}$$

Defina  $\eta_D = \varphi(1_{FD}) : D \rightarrow GFD$ , para toda  $D \in \mathcal{D}$ .

*Afirmación.*  $\langle \eta_D \mid D \in \mathcal{D} \rangle$  define una transformación natural  $\eta : 1_D \rightarrow GF$ .

Basta verificar que el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} D' & \xrightarrow{\eta_{D'}} & GFD' \\ h \downarrow & & \downarrow GFh \\ D & \xrightarrow{\eta_D} & GFD \end{array}$$

comuta. Lo cual es inmediata ya que

$$GF\varphi(1_D) = \varphi(Fh) = \varphi(1_{D'})h.$$

A esta transformación natural  $\eta_D : 1_D \rightarrow GF$  se le llama *unidad de la adjunción* ( $F, G, \varphi$ ) :  $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ .

Por otro lado, consideremos el caso particular  $D = GC$ . Entonces se tiene el siguiente diagrama comutativo.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(FGC, C) & \xrightarrow{\varphi_{GC, C}} & \mathcal{D}(GC, GC) \\ c(FGC, k) \uparrow & & \uparrow \mathcal{D}(GC, Gk) \\ \mathcal{C}(FGC, C') & \xrightarrow{\varphi_{GC, C'}} & \mathcal{D}(GC, GC') \end{array}$$

Se define  $\varepsilon_C$  como  $\phi^{-1}(1_{GA}) : FGC \rightarrow C$ , para toda  $C \in \mathcal{C}$ . De manera similar a como se hizo con  $\eta_D$ , se puede verificar que  $\varepsilon_C$  es una transformación natural, a la cual le llamamos *counidad de la adjunción* ( $F, G, \phi$ ) :  $\mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ .

**Definición 1.35** (Equivalencia de categorías). Dos categorías  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  son *equivalentes* si existe una adjunción  $(F, G, \eta, \varepsilon) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  tal que la unidad y la counidad son isomorfismos naturales. En este caso, decimos que los funtores  $F$  y  $G$  son una equivalencia de categorías.

Para finalizar, veremos una “aplicación” de los conceptos vistos en esta sección para el caso particular cuando las categorías son retículas. Dado un conjunto parcialmente ordenado  $(A, \leq)$ , se dice que es una *retícula* si cada subconjunto finito no vacío  $X \subseteq A$  tiene supremo e ínfimo.

**Lema 1.36.** *Sean  $(A, \leq)$  y  $(B, \leq)$  retículas. El funtor  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  tiene adjunto derecho si, y solo si,  $F$  preserva supremos arbitrarios.*

*Demostración.*

→ Supongamos que existe un funtor  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  tal que  $F \dashv G$ . Lo anterior ocurre si, y solo si,

$$A \leq GB \iff FA \leq B, \quad \forall A \in \text{Ob}(\mathcal{A}), B \in \text{Ob}(\mathcal{B}). \quad (1.3)$$

Sea  $\bigvee_{i \in I} A_i$  un supremo en  $\mathcal{A}$ . Esto es,  $A \leq \bigvee_{i \in I} A_i$ . Dado que  $F$  es un funtor,  $FA_i \leq F(\bigvee_{i \in I} A_i)$ . Luego,

$$FA_i \leq \bigvee_{i \in I} FA_i \leq F\left(\bigvee_{i \in I} A_i\right).$$

Por (1.3), se tiene que

$$A_i \leq G\left(\bigvee_{i \in I} FA_i\right).$$

Así,  $\bigvee_{i \in I} A_i \leq G\left(\bigvee_{i \in I} FA_i\right)$ . Nuevamente, por (1.3),

$$F\left(\bigvee_{i \in I} A_i\right) \leq \bigvee_{i \in I} FA_i.$$

Ya que se tiene la doble desigualdad, se concluye que  $F\left(\bigvee_{i \in I} A_i\right) = \bigvee_{i \in I} FA_i$ .

← Ahora, supongamos que  $F$  preserva supremos arbitrarios. Sea  $B \in \text{Ob}(\mathcal{B})$  y tomemos  $GB = \bigvee_{FA \leq B} A$ . Si  $B' \in \text{Ob}(\mathcal{B})$  es tal que  $B' \leq B$ , entonces  $F(A) \leq B'$  implica que  $F(A) \leq B$ . Así,

$$GB' = \bigvee_{FA \leq B'} A \leq \bigvee_{FA \leq B} A = GB$$

y  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$  es functorial. Ahora, resta probar que  $A \leq GB$  si, y solo si  $FA \leq B$ . Para esto, consideremos  $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$  y  $B \in \text{Ob}(\mathcal{B})$ . Si  $A \leq GB$ , entonces  $A \leq \bigvee_{FA \leq B} A$ . En virtud de que  $F$  preserva supremos arbitrarios,

$$FA \leq \bigvee_{FA \leq B} FA \leq B.$$

Por otro lado, si  $FA \leq B$ , al ser  $G$  un funtor, se tiene que  $GFA \leq GB$ . Luego,

$$A = \bigvee_{FA' \leq FA} A' \leq GB$$

tal como se quería. ■

## 1.4. Extensiones de Kan

Recordemos que  $\text{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  denota la categoría de funtores de la categoría  $\mathcal{A}$  en la categoría  $\mathcal{B}$ , y cuyos morfismos son las transformaciones naturales entre ellos. Lo que se desea probar en esta sección es que la precomposición

$$\begin{aligned}- \circ F : \text{Fun}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) &\rightarrow \text{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \\ G &\mapsto G \circ F\end{aligned}$$

tiene adjunto izquierdo si  $\mathcal{C}$  es cocompleta. Como caso particular, esto ocurre si  $\mathcal{C} = \text{Con}$ .

**Definición 1.37** (Extensión de Kan). Sean  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  y  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  funtores. La *extensión de Kan izquierda* de  $G$  a lo largo de  $F$ , si existe, es una pareja  $(K : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}, \alpha : G \Rightarrow K \circ F)$ , donde  $K$  es un functor y  $\alpha$  una transformación natural, que es universal: para cualquier otra pareja  $(H : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}, \beta : G \Rightarrow H \circ F)$  existe una única transformación natural  $\gamma : K \Rightarrow H$  tal que  $(\gamma \circ F)\alpha = \beta$ . Es decir, el diagrama

$$\begin{array}{ccc}G & \xrightarrow{\alpha} & KF \\ \beta \Downarrow & & \swarrow \gamma F \\ HF & & \end{array}$$

comuta. El functor  $K$  es denotado por  $\text{Lan}_F G$ .

**Teorema 1.38.** Sean  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  y  $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  funtores. Si  $\mathcal{A}$  es pequeña, y  $\mathcal{C}$  es cocompleta, entonces la extensión de Kan izquierda de  $G$  a lo largo de  $F$  existe. ■

Pendiente [Demostración.](#)

Sean  $\mathcal{A}$  y  $\mathcal{B}$  categorías pequeñas y  $\mathcal{C}$  una categoría cocompleta. Consideremos el functor  $- \circ F : \text{Fun}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$  dado por

$$\begin{array}{ccc}L & & L \circ F \\ \lambda \Downarrow & \longrightarrow & \downarrow \lambda \circ F \\ L' & & L' \circ F\end{array}$$

Ahora, definimos el functor  $\text{Lan}_{F_-} : \text{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$  como

$$\begin{array}{ccc}M & & \text{Lan}_F M \\ \mu \Downarrow & \longrightarrow & \downarrow \gamma_\mu \\ M' & & \text{Lan}_F M'\end{array}$$

donde  $\text{Lan}_F M$  es el functor de la pareja  $(\text{Lan}_F M : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}, \alpha_M : M \Rightarrow \text{Lan}_F M \circ F)$ . Para cualquier otra pareja  $(\text{Lan}_F M' : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}, \alpha_{M'} \circ \mu : M \Rightarrow \text{Lan}_F M' \circ F)$ , se tiene que  $\gamma_\mu : \text{Lan}_F M \Rightarrow \text{Lan}_F M'$  es la única transformación natural tal que  $(\gamma_\mu \circ F)\alpha_M = \alpha_{M'}$ . Así, se tiene el siguiente resultado.

**Proposición 1.39.** Sea  $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  un functor y  $\mathcal{C}$  una categoría. Si  $\mathcal{A}$  es pequeña y  $\mathcal{C}$  es cocompleta, entonces  $\text{Lan}_{F_-}$  es adjunto izquierdo de  $- \circ F$ . ■

Pendiente [Demostración.](#)

## 1.5. Categorías extensivas

A lo largo de esta sección, nos referiremos a coproductos finitos como sumas finitas. Para tener una descripción detallada de las demostraciones se sugiere al lector interesado en consultar [Mer02]. Dada una categoría  $\mathcal{E}$  que admite sumas finitas, y cualesquiera dos objetos  $A$  y  $B$  de  $\mathcal{E}$ , se construye la categoría  $\mathcal{E}/A \times \mathcal{E}/B$  cuyos objetos son pares  $(f, g)$  donde  $f : A' \rightarrow A$  y  $g : B' \rightarrow B$ , para todo  $A', B' \in \text{Ob}(\mathcal{E})$ . Mientras que los morfismos son parejas  $(\alpha, \beta)$  donde  $\alpha : A' \rightarrow A''$  es tal que  $f = f' \circ \alpha$ , con  $f' : A'' \rightarrow A'$  para todo  $A', A''$ , y lo mismo con  $\beta$ . A partir de la categoría  $\mathcal{E}/A \times \mathcal{E}/B$  se puede construir un functor que vaya a la categoría  $\mathcal{E}/A + B$ , esto motiva la siguiente definición.

**Definición 1.40.** Sea  $\mathcal{E}$  una categoría con sumas finitas y,  $A$  y  $B$  un par de objetos en  $\mathcal{E}$ . Se define el functor

$$+ : \mathcal{E}/A \times \mathcal{E}/B \rightarrow \mathcal{E}/A + B$$

como aquel que para cada  $(f, g) \in \text{Ob}(\mathcal{E}/A \times \mathcal{E}/B)$  le asigna una flecha inducida por la suma. En un diagrama, esto es

$$\begin{array}{ccccc} A' & \xrightarrow{\iota_{A'}} & A' + B' & \xleftarrow{\iota_{B'}} & B' \\ f \downarrow & & \downarrow f+g & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{\iota_A} & A + B & \xleftarrow{\iota_B} & B \end{array}$$

Mientras que a cada morfismo  $(\alpha, \beta)$  en  $\mathcal{E}/A \times \mathcal{E}/B$  también le asigna la flecha inducida por la suma tal como lo muestra el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccccc} & & A'' & \xrightarrow{\iota_{A''}} & A'' + B'' & \xrightarrow{\iota_{B''}} & B'' \\ & \nearrow \alpha & \nearrow \iota_{A'} & & \nearrow \alpha+\beta & \nearrow \iota_{B'} & \nearrow \beta \\ A' & \xrightarrow{\iota_{A'}} & A' + B' & \xleftarrow{\iota_B} & A + B & \xleftarrow{\iota_B} & B \\ \downarrow & \nearrow f' & \downarrow & & \nearrow f'+g' & \downarrow & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{\iota_A} & A + B & \xleftarrow{\iota_B} & A + B & \xleftarrow{\iota_B} & B \end{array}$$

**Definición 1.41 (Categoría extensiva).** Sea  $\mathcal{E}$  una categoría con sumas finitas. Decimos que  $\mathcal{E}$  satisface la *ley extensiva* si, para cada par de objetos  $A$  y  $B$  de  $\mathcal{E}/A \times \mathcal{E}/B$ , el functor  $+ : \mathcal{E}/A \times \mathcal{E}/B \rightarrow \mathcal{E}/A + B$  es una equivalencia de categorías. En este caso, diremos que  $\mathcal{E}$  es una categoría extensiva.

A grandes rasgos, uno puede pensar en una categoría extensiva como aquella en la que los coproductos (sumas finitas en nuestro caso) se “comportan bien” con cierta clase de pullbacks.

**Ejemplo 1.42.**

1. Con es extensiva.
2. Top es extensiva.
3. Si  $\mathcal{C}$  es una categoría pequeña, entonces la categoría  $\text{Fun}[\mathcal{C}^{\text{op}}, \text{Con}]$  es extensiva.

4. La categoría de espacios vectoriales sobre un campo  $k$ ,  $\text{Vect}_k$ , no es extensiva (el producto es la suma directa).

**Definición 1.43** (Sumas universales). Dada una categoría  $\mathcal{E}$  que admite sumas finitas, diremos que las sumas son *universales* si, para cualquier morfismo  $f : S \rightarrow A + B$ , los productos fibrados a lo largo de las inyecciones existen y el renglón superior del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} S_1 & \longrightarrow & S & \longleftarrow & S_2 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & A + B & \longleftarrow & B \end{array}$$

es una suma.

**Definición 1.44.** Si una categoría  $\mathcal{E}$  tiene objeto inicial  $A$ , se dice que  $A$  es *estricto* si para cada flecha  $A \rightarrow 0$  se tiene que  $A = 0$ .

**Lema 1.45.** Si  $\mathcal{E}$  es una suma con sumas universales, entonces el objeto inicial es estricto.

**Teorema 1.46.** Sea  $\mathcal{E}$  una categoría con sumas universales. Entonces,  $\mathcal{E}$  es extensiva si, y solo si, satisface lo siguiente.

- i) Para cualquier diagrama comutativo de la forma

$$\begin{array}{ccccc} A' & \xrightarrow{s'_1} & S' & \xleftarrow{s'_2} & B \\ g \downarrow & & f \downarrow & & \downarrow h \\ A & \xrightarrow{s_1} & S & \xleftarrow{s_2} & B \end{array}$$

tal que el renglón inferior es una suma, cumple que el renglón superior también es una suma, entonces ambos cuadrados son productos fibrados.

- ii) Toda suma en  $\mathcal{E}$  es universal.

# Capítulo 2

## Gavillas sobre Top

Dado un espacio  $S$ , describir sus propiedades globales puede ser una tarea complicada; en muchas ocasiones, resulta conveniente fijarse en sus propiedades locales, es decir, ver qué ocurre en una vecindad alrededor de un punto  $x \in S$ , por ejemplo. Así, estudiar propiedades globales de un espacio se convierte en un proceso de pasar de local a global. Intuitivamente, esto refleja algo similar a lo que ocurre con una gavilla en un espacio, ya que esta puede entenderse como una asignación  $F$  que a cada abierto  $U$  en  $S$  se le asigna un conjunto  $F(U)$ , junto con una noción de “pegado” entre los abiertos de  $S$ . Dependiendo de la naturaleza del problema, en lugar de conjuntos, se pueden considerar grupos, anillos, módulos, etc., esto hace que las gavillas sean una herramienta bastante utilizada en diversas ramas de la matemática, como topología algebraica, la geometría algebraica y, en general, en álgebra. Precisar el origen de la teoría de gavillas resulta complicado, por lo que muchos consideran un punto de partida y motivación para esta teoría el estudio de la *continuación analítica*, introducida por Riemann para la comprensión de las “funciones multivaluadas”. Aunque, cabe resaltar que, el desarrollo formal de la teoría de gavillas es gracias a Leray, Serre y Cartan. En esta capítulo se presentan los conceptos fundamentales de la teoría de gavillas en conjuntos, para esto nos basamos en las ideas expuestas en [MM12].

### 2.1. Gavillas sobre Top

Dado un espacio  $S$ , denotamos por  $\mathcal{O}(S)$  la categoría cuyos objetos son conjuntos abiertos de  $S$ . Para cada par de abiertos  $U$  y  $V$  en  $\mathcal{O}(S)$ ,  $\rho : U \rightarrow V$  morfismo en  $\mathcal{O}(S)$  si, y solo si,  $U \subseteq V$ .

**Definición 2.1** (Pregavilla). Una *pregavilla* en  $\mathcal{O}(S)$  es un funtor  $F : \mathcal{O}(S)^{\text{op}} \rightarrow \text{Con}$ .

A un elemento  $s \in F(U)$  de la imagen de un abierto  $U$  de  $S$  se le llama *sección*. Al morfismo  $F(\rho) : F(V) \rightarrow F(U)$  correspondiente a la inclusión  $\rho : U \hookrightarrow V$  le llamamos *restricción*. Adoptamos la notación  $F(\rho)(s) = s|_U = \rho_U^V(s) \in F(U)$  con  $s$  una sección de  $V$ . Con esto en mente, una manera explícita en la que podemos entender una pregavilla es la siguiente: para cada par de abiertos  $V \subseteq U$  de  $S$  el mapeo restricción actúa como  $\rho_V^U : F(U) \rightarrow F(V)$  tal que para todo  $U \in \mathcal{O}(S)$  se tiene que  $\rho_U^U = \text{id}_U$ , y para cualesquiera  $W \subseteq V \subseteq U \in \mathcal{O}(S)$  se cumple que,  $\rho_W^U = \rho_W^V \circ \rho_V^U$ .

**Lema 2.2.** Sea  $F : \mathcal{O}(S)^{\text{op}} \rightarrow \text{Con}$  un functor,  $U$  un abierto de  $S$  y  $\{U_i\}_{i \in I}$  una cubierta abierta de  $U$ . Entonces el diagrama

$$F(U) \xrightarrow{\varepsilon} \prod_{i \in I} F(U_i) \xrightarrow[q]{p} \prod_{i, j \in I} F(U_i \cap U_j), \quad (2.1)$$

donde para todo  $t \in F(U)$ ,  $e(t) = \langle t|_{U_i} \rangle_{i \in I}$  y para toda familia  $\langle t_i \in F(U_i) \rangle_{i \in I}$ ,  $p(\langle t_i \rangle_{i \in I}) = \langle t_i|_{(U_i \cap U_j)} \rangle_{i, j \in I}$ , siempre existe y se cumple que  $pe = qe$ .

*Demostración.*

■

**Definición 2.3** (Pregavilla separada). Una pregavilla  $F : \mathcal{O}(S)^{\text{op}} \rightarrow \text{Con}$  se dice *separada* si la función  $e$  de (2.1) es inyectiva.

**Definición 2.4** (Gavilla). Una *gavilla* de conjuntos sobre un espacio topológico  $S$  es un functor  $F : \mathcal{O}(S)^{\text{op}} \rightarrow \text{Con}$  tal que para todo conjunto abierto  $U$  de  $S$  existe una cubierta abierta  $\{U_i\}_{i \in I}$  de tal modo que (2.1) es un igualador.

Es decir, una gavilla es pregavilla separada. En la literatura (veáse [Ten75], por ejemplo) es común definir una gavilla como una pregavilla que satisface lo siguiente.

- i). Sea  $U \in \mathcal{O}(S)$ . Si  $\{U_i\}_{i \in I}$  es una cubierta abierta para  $U$  y para cualesquiera dos secciones  $s$  y  $s'$  tales que  $\rho_{U_i}^U(s) = \rho_{U_i}^U(s')$ , se tiene que  $s = s'$ .
- ii). Sea  $U \in \mathcal{O}(S)$  y  $\{U_i\}_{i \in I}$  una cubierta de  $U$ . Si  $\{s_i\}_{i \in I}$  es una familia de secciones de  $F$ , donde  $s_i \in F(U_i)$ , tal que  $\rho_{U_i \cap U_j}^{U_i}(s_i) = \rho_{U_i \cap U_j}^{U_j}(s_j)$ , para toda  $i, j \in I$ . entonces existe una sección  $s \in F(U)$  tal que  $\rho_U^U(s) = s_i$ .

Obsérvese que la sección  $s \in F(U)$  definida en ii), es única por la condición i); a esta condición ii) se le conoce comúnmente como condición de pegado. Resulta que en Con, dar una pregavilla separada es equivalente a dar una pregavilla que satisface i) y ii).

**Definición 2.5.** Sea  $S$  un espacio topológico. La *categoría de gavillas* sobre  $S$  consta de lo siguiente.

- *Objetos.* Gavillas de conjuntos sobre  $S$ .
- *Morfismos.* Transformaciones naturales.

Algunos ejemplos relevantes de gavillas son los siguientes.

**Ejemplo 2.6.**

1. Sea  $U \in \mathcal{O}(S)$ . El conjunto

$$C(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$$

es una gavilla. Para esto, primero veamos que  $C(-)$  es funtorial, lo cual demostraría que en efecto es una pregavilla. Sea  $U \xrightarrow{\rho} V$  con  $U, V \in \mathcal{O}(S)$ . Entonces,  $C(\rho) : C(V) \rightarrow C(U)$ . Tomando la restricción usual, se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} U & \xleftarrow{\rho} & V \\ & \searrow f|_U & \downarrow f \\ & & \mathbb{R} \end{array}$$

comutativo. Esto prueba la funtorialidad, y así  $C(-)$  es una pregavilla.

Ahora, veamos que, para cada  $U \in \mathcal{O}(S)$  Y  $\{U_i\}_{i \in I}$  una cubierta abierta para  $U$ , el siguiente diagrama

$$C(U) \xrightarrow{e} \prod_{i \in I} C(U_i) \xrightarrow[p]{q} \prod_{i, j \in I} C(U_i \cap U_j) \quad (2.2)$$

es un igualador en Con. Sea  $\{f_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} C(U_i)$  tal que  $p(\{f_i\}) = q(\{f_i\})$ . Entonces,  $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$  para toda  $i, j \in I$ . Para cada  $U \in \mathcal{O}(S)$ , definimos la función  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  de la siguiente manera

$$f(x) = \begin{cases} f_i(x) & \text{si } x \in U_i, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea  $y \in (a, b) \subset \mathbb{R}$  tal que  $f(x) = y$ , para algún  $x \in U$ . Ya que  $\{U_i\}_{i \in I}$  es una cubierta abierta para  $U$ , se tiene que  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ , y en particular  $x \in U_i$ , para algún  $i \in I$ . Así,  $f_i(x) = f(x) = y$ . Luego, como  $\{f_i\} \in C(U_i)$  se sigue que  $f_i$  es continua para toda  $i \in I$ ; esto implica que existe un abierto  $V \subset U_i \subset U$  tal que  $x \in V$  y  $f_i(V) = f(V) \subset (a, b)$ . Por lo tanto,  $f \in C(U)$  y  $e(f) = \{f_i\}_{i \in I}$ . Ahora, supongamos que existe  $g \in CU$  tal que  $e(g) = \{f_i\}$ . Si  $x \in U$  entonces,  $x \in U_i$  para alguna  $i \in I$ . De esto se sigue que,  $f(x) = f_i(x) = g(x)$ . Al tener que  $f$  y  $g$  tienen el mismo dominio, mismo codominio y misma regla de correspondencia, así  $f = g$ ; lo cual prueba la unicidad de  $f$ . Por el Lema 1.22, se sigue que (2.2) es un igualador en Con y  $CU$  es una gavilla.

2. Sea  $U \in \mathcal{O}(S)$ . El conjunto

$$C^\infty(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es suave}\}$$

es una gavilla. La demostración de esto es análoga a la del ejemplo anterior.

3. Sea  $U \in \mathcal{O}(S)$ . El conjunto de funciones holomorfas

$$\Omega(U) := \{f : U \rightarrow \mathcal{C} \mid f \text{ es holomorfa}\}$$

es una gavilla. Primero, veamos que  $\Omega(-)$  es una pregavilla. Sea  $U \xrightarrow{\rho} V$  con  $U, V \in \Omega(S)$ . Entonces,

$$\Omega(\rho) : \Omega(V) \rightarrow \Omega(U).$$

Por definición,  $\Omega(V) = \{f : V \rightarrow \mathcal{C} \mid f \text{ es holomorfa}\}$ . Tomando la restricción usual, se tiene que el siguiente diagrama comuta.

$$\begin{array}{ccc} U & \xhookrightarrow{\rho} & V \\ & \searrow f_{|U} & \downarrow f \\ & & \mathbb{C} \end{array}$$

Así,  $\Omega(-)$  es functorial y, por lo tanto, una pregavilla.

Para probar que  $\Omega(-)$  es una gavilla, vamos a verificar las condiciones i) y ii) dadas anteriormente.

- i). Sea  $U \in \mathcal{O}(S)$  y  $\{U_i\}_{i \in I}$  una cubierta abierta para  $U$ . Supongamos que  $s$  y  $s'$  son secciones tales que  $\rho_{U_i}^U(s) = \rho_{U_i}^U(s')$ . Del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} U_i & \xrightarrow{\quad} & U = \bigcup_{i \in I} U_i \\ & \searrow \rho_{U_i}^U(s) & \downarrow \\ & \searrow \rho_{U_i}^U(s') & \mathbb{C} \end{array}$$

se tiene que  $s = s'$ .

- ii). Supongamos que  $f_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}$  son holomorfas y  $f_i |_{U_i \cap U_j} = f_j |_{U_i \cap U_j}$ . En  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$ , definimos  $f(w) = f_j(w)$ , para toda  $w \in U_i$ . Para ver que la condición de pegado se satisface, basta verificar que  $f$  satisface las condiciones de Cauchy-Riemann. Sea  $z = x + iy \in \mathcal{C}$ . Entonces,  $f(z) = f(x, y) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ . Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial u'}{\partial x} + i \frac{\partial v'}{\partial y} \quad \text{con } u'(x, y) + iv'(x, y) = f_j(z) \\ &= \frac{\partial u'}{\partial x} = - \frac{\partial v'}{\partial y} \quad f_j \text{ es holomorfa} \\ &= \frac{\partial u'}{\partial x}_{u_j} = - \frac{\partial v'}{\partial y}_{u_j} \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $f_j = f |_{U_j}$ . Así,  $f$  es holomorfa, y  $\Omega(-)$  es gavilla.

## 2.2. El functor $\Gamma$

Dado  $S$  un espacio topológico, la categoría de rebanadas  $\text{Top}/S$  consta de lo siguiente.

- *Objetos.* Todas las funciones continuas  $f \in \text{Mor}(\text{Top})$  cuyo codominio son igual a  $S$ .

- *Morfismos.* Para cada función continua  $f : E \rightarrow E' \in \text{Mor}(\text{Top})$ , existen  $p : E \rightarrow S$  y  $p' : E' \rightarrow S$  tales que  $p = p' \circ f$ .

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ \text{Top}/S = & & S \end{array}$$

A una función continua de la forma  $p : E \rightarrow S$  le llamamos *haz* sobre  $S$ , y al espacio  $E$  se le conoce como *espacio total*. En topología algebraica es común estudiar un tipo particular de haces, los cuales se llaman haces fibrados, y no deben de confundirse con los haces que estamos estudiando ya que  $f$  solo es una función continua y no un homeomorfismo; además, de que no pedimos la condición de localidad trivial como ocurre en el caso de los haces fibrados.

Para cada punto  $x \in S$ , la *fibra asociada* a  $x$  es la preimagen  $p^{-1}(x)$ . Esto nos permite interpretar al espacio  $E$  como un espacio formado por copias de cada fibra parametrizada por los puntos de  $S$ . Como  $p : E \rightarrow S$  es una función continua, la preimagen de abiertos manda abiertos en abiertos; por lo cual, para cada  $U \in S$  conjunto abierto, se tiene que  $p_U : p^{-1}(U) \rightarrow U$  es un haz sobre  $U$ . Más aún, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \hookrightarrow & E \\ p_U \downarrow & & \downarrow p \\ U & \xleftarrow{f} & S \end{array}$$

es un pullback en Top.

**Definición 2.7** (Sección). Una *sección (global)* de un haz  $p : E \rightarrow S$  es una función continua  $s : S \rightarrow E$  tal que  $p \circ s = \text{id}_S$ . Una *sección local* de  $p$  alrededor de  $x \in S$  es una sección de  $p_U$ .

**Proposición 2.8.** *Sea  $p : E \rightarrow S$  un haz y  $f : U \rightarrow S$  una función continua. Hay una correspondencia biyectiva entre el conjunto de secciones de  $p_U$  y el conjunto de levantamientos de  $f$  a  $E$ , es decir, funciones continuas  $h : U \rightarrow E$  tal que  $ph = f$ .*

*Demostración.* Por la propiedad universal del pullback, dar una sección de  $p_U$  es equivalente a dar un levantamiento  $h : U \rightarrow E$  de  $f$  que hace completar el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccc} U & & & & \\ & \searrow \text{id}_U & \swarrow h & & \\ & p^{-1}(U) & \hookrightarrow & E & \\ & \downarrow p_U & & \downarrow p & \\ U & \xleftarrow{f} & S & & \end{array}$$

■

Denotemos por  $\Gamma_p U := \{s \mid s \text{ es una sección local}\}$ . Dado un abierto  $U$  de  $S$  y  $V \subset U$ , se define

$$\begin{aligned} \Gamma_p U &\rightarrow \Gamma_p V \\ s &\mapsto \rho_V^U(s) := s|_V. \end{aligned}$$

**Lema 2.9.**  $\Gamma_p : \mathcal{O}(S)^{op} \rightarrow \text{Con}$  es un functor.

### 2.3. El functor $\Lambda$

Sea  $P : \mathcal{O}(S)^{op} \rightarrow \text{Con}$  una pregavilla sobre un espacio  $S$ . Sea  $x \in S$  un punto, y consideremos la familia  $\mathcal{O}(x) := \{U \in \mathcal{O}(S) \mid x \in U\}$  la familia de vecindades abiertas de  $x$  en  $S$ . Dados  $U_\alpha, U_\beta \in \mathcal{O}(x)$  la intersección  $U_\gamma := U_\alpha \cap U_\beta \in \mathcal{O}(x)$  cumple que  $U_\gamma \subseteq U_\alpha$  y  $U_\gamma \subseteq U_\beta$ . Esto es, considerando el orden parcial  $\leq$  dado por la contención de abiertos, se tiene que  $(\mathcal{O}(x), \leq)$  es un conjunto dirigido. Además, para cada morfismo  $\iota_\alpha^\beta : U_\alpha \hookrightarrow U_\beta$  en  $\mathcal{O}(x)$ , se tienen morfismos  $\phi_\alpha^\beta := P(\iota_\alpha^\beta) : P(U_\beta) \rightarrow P(U_\alpha)$  los cuales forman una familia directa en  $\text{Con}$ , denotada por  $(P(\mathcal{O}(x)), \leq)$ .

Si el colímite de  $(P(\mathcal{O}(x)), \leq)$  en  $\text{Con}$  existe, este es denotado por  $P_x := \varinjlim P(U_\alpha)$ . Para cada familia  $\{M_\alpha\}$  indexada por  $\mathcal{O}(x)$ , este colímite se puede ver de manera explícita como sigue

$$\varinjlim M_\alpha := \left( \bigsqcup M_\alpha \right) / \sim$$

donde  $s \sim t$  ( $s \in PU$  y  $t \in PV$ ) si, y solo si, existe un abierto  $W$  tal que  $W \subseteq U \cap V$  y  $s|_W = t|_W \in PW$  para  $x \in W$ . Además, se tienen morfismos canónicos

$$\phi : P(U_\alpha) \rightarrow \bigsqcup P(U_\alpha) \rightarrow \varinjlim P(U_\alpha).$$

**Definición 2.10** (Germen). Dada una sección  $s \in P(U)$ , se define su *germen* en el punto  $x \in S$ , denotado por  $[s]_x$ , como la imagen  $\phi(s) \in P_x$ .

Notemos que, para un punto  $x \in S$ , los elementos de  $P_x$  son precisamente las secciones en el punto  $x$ . A  $P_x = \{[s]_x \mid s \in PU, x \in U \in \mathcal{O}(x)\}$  se le conoce como el *tallo* de  $P$  en  $x$ .

**Lema 2.11.** La relación “ $\sim$ ” es de equivalencia.

*Demostración.*

- *Reflexividad.* Sea  $U \in \mathcal{O}(S)$  y  $s \in PU$ . Para  $x \in U$ , tenemos que  $U \subseteq U$  y  $s = s|_U$ . Por lo tanto,  $s \sim s$ .
- *Simetría.* Para  $U, V \in \mathcal{O}(S)$ , sean  $s \in PU$  y  $t \in PV$  tales que  $s \sim t$ . Entonces, se cumple la definición y dado que existe  $W \subseteq U \cap V$ , se sigue que también se cumple  $t \sim s$ .
- *Transitividad.* Consideremos  $U, V, W \in \mathcal{O}(S)$  y,  $s \in PU$ ,  $t \in PV$  y  $r \in PW$  tales que  $s \sim t$  y  $t \sim r$ . Entonces, existen  $Y \subseteq U \cap V$  y  $Y' \subseteq V \cap W$  vecindades de  $x$  donde  $s|_Y = t|_Y$  y  $t|_{Y'} = r|_{Y'}$ . Nótese que  $Y \cap Y'$  es una vecindad de  $x \in U \cap W$ . Como  $s|_Y = t|_Y$  implica que  $s|_{Y \cap Y'} = t|_{Y \cap Y'}$ . Además,  $t|_{Y \cap Y'} = r|_{Y \cap Y'}$ . Por lo tanto,  $s|_{Y \cap Y'} = r|_{Y \cap Y'}$  y  $s \sim r$ .

Ya que  $\sim$  es reflexiva, simétrica y transitiva se tiene que es de equivalencia.  $\blacksquare$

**Lema 2.12.** *Sea  $P^x : \mathcal{O}(x) \rightarrow \text{Con}$ . Las funciones  $\{\text{germ}_x : P(U) \rightarrow \mathcal{O}(x)\}$  tales que para cada sección  $s \in P(U)$ ,  $\text{germ}_x s = [s]_x$ , forman un cocono colímite sobre  $\mathcal{O}(x)$ . Más aún, este es filtrante.*

*Demostración.* Sean  $U, V \in \mathcal{O}(x)$ . Entonces, se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} PU & \xrightarrow{\quad} & PV \\ \searrow \text{germ}_x & & \swarrow \text{germ}_x \\ & P_x & \end{array}$$

Si  $s \in PU$  es tal que  $s|_V = PV$ , entonces  $[s]_x = [s|_V]_x$ . Por lo tanto, el diagrama anterior conmuta y  $(\text{germ}_x : PU \rightarrow P_x)_{U \in \mathcal{O}(x)}$  es un cócono. Ahora, consideremos  $(\tau_u : PU \rightarrow L)_{U \in \mathcal{O}(x)}$  otro cocono sobre  $P^{(x)}$ . Veamos que existe una única función  $t : P_x \rightarrow L$  tal que  $t \circ \text{germ}_x = \tau$ . Esto es,

$$\begin{array}{ccccc} & PU & \xrightarrow{\quad} & PV & \\ & \swarrow \tau_U & & \searrow \tau_V & \downarrow \text{germ}_x \\ L & \xleftarrow{\quad t \quad} & P_x & \xrightarrow{\quad} & \end{array}$$

Definamos  $t : P_x \rightarrow L$  como  $t([s]_x) = \tau_U(s)$ . Ahora, tomemos  $r$  otro representante, i.e.,  $[s]_x = [r]_x$  implica que existe  $W \in U \cap V$  tal que  $s|_W = r|_W$  y  $\tau_W(s|_W) = \tau_W(r|_W)$ . Como  $\tau$  es un cócono, entonces

$$\tau_U(s) = \tau_W(s|_W) = \tau_W(r|_W) = \tau_V(r).$$

Por lo tanto,  $t$  está bien definida. Ahora, sea  $s \in PU$ . Entonces,  $t \circ \text{germ}_x(s) = t([s]_x) = \tau_U(s)$ . Por otro lado, consideremos  $l : P_x \rightarrow L$  tal que  $l \circ \text{germ}_x(s) = \tau$ . Si  $[s]_x \in P_x$ , se tiene que

$$\begin{aligned} t([s]_x) &= t \circ \text{germ}_x(s) = \tau(s) \\ &= l \circ \text{germ}_x(s) = l([s]_x). \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $t$  es única y  $\{\text{germ}_x : PU \rightarrow P_x\}$  es un cócono límite.  $\blacksquare$

**Lema 2.13.** *Cualquier morfismo  $h : P \rightarrow Q$  de pregavillas (cualquier transformación natural), en cada punto  $x \in S$ , induce una única función  $h_x : P_x \rightarrow Q_x$  tal que el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} PU & \xrightarrow{h_U} & QU \\ \text{germ}_x \downarrow & & \downarrow \text{germ}_x \\ P_x & \xrightarrow{h_x} & Q_x \end{array}$$

conmuta para cualquier  $U \in \mathcal{O}(x)$ .

*Demostración.* Sea  $h : P \rightarrow Q$  una transformación natural. Sean  $U, V \in \mathcal{O}(x)$  tal que  $V \leq U$ . Si  $s \in PU$ , al ser  $h$  natural se tiene que  $\text{germ}_x \circ h_V(s|_V) = \text{germ}_x(h_U(s)|_V)$ . Por el lema anterior,  $\{\text{germ}_x : PU \rightarrow PV\}$  es un cócono límite; así, existe una única función  $h_x : P_x \rightarrow Q_x$  que hace conmutar el diagrama deseado. Además,  $h_x([s]_x) = [h_U(s)]_x$ .  $\blacksquare$

Del resultado anterior, tenemos el diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 PU & \xrightarrow{\quad} & PV \\
 H_U \downarrow & & \downarrow H_V \\
 QU & \xrightarrow{\quad} & QV \\
 & \searrow & \swarrow \\
 & Q_x &
 \end{array}$$

Un resultado inmediato es el siguiente.

**Lema 2.14.** *La transformación natural dada por  $h \rightarrow h_x$  es un functor de  $\text{Con}^{\mathcal{O}(x)^{op}} \rightarrow \text{Con}$ . Dicho functor es “tomar germen en  $x$ ”.*

*Demostración.* Ya hemos probado que la asignación de objetos y flechas está bien definida. Resta verificar que preserva identidades y composiciones.

- Sea  $\text{id}_p: P \rightarrow P$  en  $\text{Con}^{\mathcal{O}(x)^{op}}$ , Veamos que  $(\text{id}_p)_x = \text{id}_{p_x}$ . Sea  $[s]_x \in P_x$ , por el lema anterior, cualquier morfismo  $\text{id}_p: P \rightarrow P$  induce  $\text{id}_{p_x}$ . Así,

$$\text{id}_{p_x}([s]_x) = [\text{id}_p(s)]_x = [s]_x.$$

- Sean  $h: P \rightarrow Q$  y  $g: Q \rightarrow R$  morfismos en  $\text{Con}^{\mathcal{O}(x)^{op}}$ . Veamos que  $(g \circ h)_x = g_x \circ h_x$ . Sea  $[s]_x \in P_x$  y al ser  $h$ ,  $g$
- transformaciones naturales, se tiene que

$$(g \circ h)_x([s]_x) = g_x([h_U(s)]_x) = [g_U(h_U(s))]_x = g_x \circ h_x([s]_x).$$

■

Sea

$$\Lambda_p = \bigsqcup_{x \in S} P_x = \bigsqcup_{x \in S} \{[s]_x \mid s \in PU\}$$

la unión disjunta de germenes sobre  $x \in S$ . Para toda sección  $s \in PU$ , definamos las siguientes funciones

$$\begin{aligned}
 p : \Lambda_p &\rightarrow S \\
 [s]_x &\mapsto x, \\
 \hat{s} : U &\rightarrow \Lambda_p \\
 x &\mapsto [s]_x.
 \end{aligned}$$

**Lema 2.15.** *El conjunto  $B_p := \{\hat{s}(U) \mid s \in PU, U \in \mathcal{O}(S)\}$  es una base para una topología en  $\Lambda_p$ .*

*Demostración.* Primero veamos que  $\bigcup B_p = \Lambda_p$ .

- Se cumple que  $\bigcup B_p \subseteq \Lambda_p$ , para la otra condición consideremos  $[s]_x \in \Lambda_p$ , entonces  $[s]_x = \hat{s}(U)$  para algún  $U \in \mathcal{O}(S)$  y  $s \in PU$ . Por lo tanto,  $[s]_x \in B_p$ .
- Sean  $\hat{s}(U), \hat{r}(V) \in B_p$  y supongamos que  $\hat{s}(x) = \hat{r}(y)$ , entonces  $[s]_x = [r]_y$ . Por lo tanto  $x = y$  y así existe  $W \subset U \cap V$  tal que  $s|_W = r|_W$ . Luego  $\widehat{s|_W}(W)$  es un elemento en  $B_p$  tal que

$$[s]_x \in \widehat{s|_W}(W) \subset \hat{s}(U) \cap \hat{r}(V).$$

■

**Observación 2.16.** Sean  $U, V \in \mathcal{O}(S)$  tales que  $V \subset U$  y  $s \in PU$ . Entonces  $\hat{s}(V) = \widehat{s|_V}(V)$  para todo  $s \in PU$ .

**Lema 2.17.** Sea  $\Lambda_p$  dotado con la topología  $B_p$ . Entonces  $p$  y  $\hat{s}$  son continuas. Más aún,  $p$  es un haz sobre  $S$  y  $\hat{s}$  es una sección local de  $p$ .

*Demostración.* ■ Sea  $V \subseteq S$  abierto y sea  $[s]_x \in \Lambda_p$  tal que  $[s]_x \in p^{-1}(V)$ , entonces  $x \in U \cap V$ . Consideremos  $\widehat{s|_{U \cap V}}(U \cap V) \in B_p$ . Por la observación anterior

$$[s]_x = [s|_{U \cap V}]_x \in \widehat{s|_{U \cap V}}(U \cap V) \subseteq p^{-1}(V).$$

Por lo tanto,  $p$  es continua.

- Para  $\hat{s}: U \rightarrow \Lambda_p$  sea  $\hat{r}(V) \in B_p$  un abierto básico y  $x \in U$  tal que  $\hat{s}(x) \in \hat{r}(V)$ . Entonces  $[r]_y = [s]_x$  y  $x = y$ , de aquí que existe  $W \subset U \cap V$  tal que  $s|_W = r|_W$ . Por lo tanto,  $\hat{s}(W)$  es un abierto básico tal que

$$[s]_x \in \hat{s}(W) \subseteq \hat{r}(V).$$

De esta manera se concluye que  $\hat{s}$  es continua.

Para ver que  $\hat{s}$  es una sección local de  $p$ , basta notar que para todo  $x \in U$  se tiene que  $p \circ \hat{s}(x) = p([s]_x) = x$ , por lo tanto  $p \circ \hat{s} = \text{id}_U$ , es decir, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\hat{s}} & \Lambda_p \\ & \searrow i & \swarrow p \\ & S & \end{array}$$

commuta. ■

**Definición 2.18.** Sea  $f \in \text{Top}$ , decimos que  $f$  es un *homeomorfismo* si tiene una inversa continua.

**Lema 2.19.**  $\hat{s}: U \rightarrow \hat{s}(U)$  es un homeomorfismo.

*Demostración.* Consideremos  $V \subset U$  abierto de  $S$ , entonces  $\hat{s}(V) \in B_p$  y al ser continua,  $\hat{s}$  es abierta.

Supongamos que  $\hat{s}(x) = \hat{s}(y)$ , entonces  $[s]_x = [s]_y$ , es decir,  $x = y$ . Por lo tanto  $\hat{s}$  es inyectiva. Ahora, sea  $W \subset \hat{s}(U)$  abierto, entonces existe  $V \subset U$  abierto tal que  $\hat{s}(V) = W$ . Por lo tanto,  $\hat{s}^{-1}(W) = V$  y así  $\hat{s}$  es biyectiva. Finalmente, como  $\hat{s}$  es continua y abierta, se sigue que es un homeomorfismo. ■

**Lema 2.20.** Si  $h: P \rightarrow Q$  es un morfismo de pregavillas, la unión ajena de funciones  $h_x: P_x \rightarrow Q_x$  es un morfismo de haces continuos  $h_p: \Lambda_P \rightarrow \Lambda_Q$ .

*Demostración.* Primero verificamos que  $\langle h_x : P_x \rightarrow Q_x \rangle_{x \in S}$  es una función continua.

Sean  $\hat{s}(U) \in B_Q$  un abierto básico de  $\Lambda_Q$  y  $[t]_x \in \Lambda_P$  tal que  $h_x([t]_x) \in \hat{s}(U)$ . Entonces,  $[h_U(t)]_x = [s]_x$  y por lo tanto existe una vecindad  $V$  de  $x$  tal que  $V \subset U \cap W$  de forma que  $h_U(t)|_V = s|_V$  y  $\widehat{h_U(t)}|_V(V) = \widehat{h_U(t)}(V)$ . Por lo tanto,  $\widehat{h_U(t)}(V) \in B_Q$ .

También tenemos que  $[t]_x \in \hat{t}(V) = \widehat{t}|_V(V)$ . Como  $h$  es transformación natural, se tiene que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} PU & \xrightarrow{h_U} & QU \\ \downarrow & & \downarrow \\ PV & \xrightarrow{h_V} & QV \end{array}$$

comuta. Así,  $h_V(t|_V) = h_U(t)|_V = s|_V$  para todo  $t \in PU$ . Por lo tanto,  $\langle h_x : P_x \rightarrow Q_x \rangle_{x \in S}$  es continua.

Sea  $[s]_x \in \Lambda_P$ , entonces  $p([s]_x) = x = q([h_U(s)]_x)$  y  $\langle h_x : P_x \rightarrow Q_x \rangle_{x \in S}$  es un morfismo de haces. ■

**Lema 2.21.** La asignación  $P \mapsto \Lambda_P$  determina un functor de pregavillas a haces.

*Demostración.* Sea  $\text{id}_P: P \rightarrow P$  la identidad en  $\text{Con}^{\mathcal{O}(S)^{op}}$ , entonces  $\text{id}_{P_x}$  es la función identidad para cada  $x \in S$ . De aquí que  $\langle \text{id}_{P_x} : P_x \rightarrow P_x \rangle_{x \in S}$  es la identidad en  $\Lambda_P$ . Por lo tanto preserva identidades la asignación.

Sean  $h: P \rightarrow Q$  y  $g: Q \rightarrow R$  morfismos de pregavillas, entonces  $g_x \circ h_x = (g \circ h)_x$  para cada  $x \in S$ . Por lo tanto,  $\langle g_x \circ h_x : P_x \rightarrow R_x \rangle_{x \in S}$  es la composición de morfismos de haces. Así, la asignación preserva composiciones.

Por lo tanto,  $\Lambda$  es un functor de pregavillas a haces. ■

**Definición 2.22.** Una función  $f: S \rightarrow T$  entre espacios topológicos es un homomorfismo local si para cada  $x \in S$  existe un abierto  $U \subset S$  tal que  $x \in U$  y  $f|_U$  es un homeomorfismo.

**Lema 2.23.** Toda sección de un homeomorfismo local es una función abierta.

*Demostración.* Sea  $p: T \rightarrow S$  un homeomorfismo local,  $s: U \rightarrow T$  una sección de  $p$  y  $V \subset U$  un abierto. Sea  $y \in s(V)$  y como  $p$  es un homeomorfismo local, existe un abierto  $W \subset S$  tal que  $p|_W$  es un homeomorfismo. Entonces,  $p(W)$  es un abierto de  $T$  y así  $p(W) \cap V$  es abierto. Al ser  $s$  una sección de  $p$ , se tiene que  $p(W \cap s(V)) = p(W) \cap V$ . Además,  $p|_W$  es una función abierta,  $W \cap s(V)$  es una vecindad abierta de  $y$  contenida en  $s(V)$ . Por lo tanto,  $s(V)$  es abierto en  $T$ . ■

**Lema 2.24.** La función  $p: \Lambda_P \rightarrow S$  es un homeomorfismo local.

*Demostración.* Sea  $[s]_x \in \Lambda_P$ . El abierto básico  $\hat{s}(U)$  contiene a  $[s]_x$  y al ser  $\hat{s}$  una sección de  $p$ ,  $p(\hat{s}(U)) = U$ . Luego,  $\hat{s}: U \rightarrow \hat{s}(U)$  es un homeomorfismo. Por lo tanto,  $p|_{\hat{s}(U)}: \hat{s}(U) \rightarrow p\hat{s}(U)$  es un homeomorfismo. ■

## 2.4. $\mathcal{H}L/S \simeq \text{Gav}(S)$

Vamos a ver primero que hay una adjunción entre la categoría  $\text{Con}^{\mathcal{O}S^{\text{op}}}$  de pregavillas sobre un espacio  $S \in \text{Top}$  y la categoría  $\text{Top}/S$  de haces sobre  $S$ . Para esto notemos que dada una pregavilla  $P \in \text{Con}^{\mathcal{O}S^{\text{op}}}$  y la gavilla  $\Gamma\Lambda_P$  de las secciones del haz  $\Lambda_P \rightarrow S$ , podemos construir, para cada abierto  $U \in \mathcal{O}S$ , la siguiente función

$$\eta_{PU} : PU \rightarrow \Gamma\Lambda_P U, \quad \eta_{PU}(s) = \widehat{s}$$

**Lema 2.25.**  $\eta_P := (\eta_{PU} : PU \rightarrow \Gamma\Lambda_P U)_{U \in \mathcal{O}S^{\text{op}}}$  es una transformación natural del functor  $P$  al functor  $\Gamma\Lambda_P$ .

*Demostración.* Sean dos abiertos  $V \subseteq U \in \mathcal{O}S$  y  $s \in PU$ . Por la observación 2.16, se tiene que  $\eta_{PU}(s)|_V = \widehat{s}|_V = \widehat{s}|_V = \eta_{PV}(s|_V)$ . Lo que significa que el cuadrado natural

$$\begin{array}{ccc} PU & \xrightarrow{\eta_{PU}} & \Gamma\Lambda_P U \\ \downarrow|_V & & \downarrow|_V \\ PV & \xrightarrow{\eta_{PV}} & \Gamma\Lambda_P V \end{array}$$

commuta, y por lo tanto  $\eta_P$  es una transformación natural. ■

**Lema 2.26.**  $\eta := (\eta_P : P \Rightarrow \Gamma\Lambda_P)_{P \in \text{Con}^{\mathcal{O}S^{\text{op}}}}$  es una transformación natural del functor  $\text{id}_{\text{Con}^{\mathcal{O}S^{\text{op}}}}$  a la composición de funtores  $\Gamma\Lambda$

*Demostración.* Sea  $h : P \Rightarrow Q \in \text{Con}^{\mathcal{O}S^{\text{op}}}$ , queremos ver que el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\eta_P} & \Gamma\Lambda_P \\ \downarrow h & & \downarrow \Gamma\Lambda h \\ Q & \xrightarrow{\eta_Q} & \Gamma\Lambda_Q \end{array}$$

commuta. Para esto tomamos un abierto  $U \in \mathcal{O}S$  y veamos que el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} PU & \xrightarrow{\eta_{PU}} & \Gamma\Lambda_P U \\ \downarrow h_U & & \downarrow (\Gamma\Lambda h)_U \\ QU & \xrightarrow{\eta_{QU}} & \Gamma\Lambda_Q U \end{array}$$

commuta. Sea  $s \in PU$ , entonces  $\eta_{PU}(s) = \widehat{s}$ , y por la definición de la composición  $\Lambda\Gamma$  tenemos  $(\Gamma\Lambda h)_U(\widehat{s}) = h_x \circ \widehat{s}$ . Entonces:

$$h_x \circ \widehat{s}(x) = h_x([s \in PU]_x) = [h_U(s) \in QU]_x = \widehat{h_U(s)}(x).$$

Lo que prueba la comutatividad de los diagramas. ■

**Lema 2.27.** Sea  $h : T \rightarrow S \in \text{Top}/S$ , entonces  $\varepsilon_h : \Lambda\Gamma_h \rightarrow T$  definida como

$$\varepsilon_h([s \in \Gamma_h U]_x) = s(x)$$

es un morfismo de haces.

*Demostración.*

**Lema 2.28.**  $\varepsilon := (\varepsilon_h : \Lambda\Gamma_h \rightarrow T)_{T \xrightarrow{h} S \in \text{Top}/S}$  es una transformación natural de la composición de funtores  $\Lambda\Gamma$  al functor  $\text{id}_{\text{Top}/S}$ .

*Demostración.*

**Teorema 2.29.** El functor  $\Lambda$  es adjunto izquierdo del functor  $\Gamma$

*Demostración.*

Notemos que tenemos unas subcategorías

$$\text{Gav}(S) \subseteq \text{Con}^{\mathcal{O}S^{\text{op}}}, \text{ y } \mathcal{H}L/S \subseteq \text{Top}/S$$

donde  $\mathcal{H}L/S$  los objetos son haces que son homeomorfismos locales. También recordemos que para cualquier preavilla  $P \in \text{Con}^{\mathcal{O}S^{\text{op}}}$  el haz  $\Lambda_P \rightarrow S$  es un homeomorfismo local (Lema 2.24); y para cada haz  $T \xrightarrow{h} S \in \text{Top}/S$ , el functor  $\Gamma_h \in \text{Con}^{\mathcal{O}S^{\text{op}}}$  es una gavilla (Referencia pendiente).

Esto nos dice que podemos restringir  $\Lambda$  y  $\Gamma$  a  $\text{Gav}(S)$  y  $\mathcal{H}L/S$  respectivamente.

**Teorema 2.30.** Para todo espacio topológico  $S \in \text{Top}$ , las categorías  $\mathcal{H}L/S$  y  $\text{Gav}(S)$  son equivalentes.

*Demostración.*

## 2.5. Cambio de base

Recordemos que para  $S \in \text{Top}$ ,  $\mathcal{O}S$  es la categoría cuyos objetos son los abiertos de  $S$  y los morfismos son las inclusiones. De esta manera, para  $U, V \in \mathcal{O}S$  con  $V \subseteq U$ ,  $\mathcal{O}S^{\text{op}}$  tiene las flechas  $U \rightarrow V$ .

Así, para  $S, T \in \text{Top}$  tomamos  $\text{Gav}(S), \text{Gav}(T)$  partiendo de la siguiente definición.

**Definición 2.31.** Consideremos  $f_* : \text{Gav}(S) \rightarrow \text{Gav}(T)$  dado por

$$f_*(F(V)) = F(f^{-1}(V))$$

para  $V \in \mathcal{O}T$  y  $F \in \text{Gav}(S)$ . Además, si  $h : F \rightarrow G$  es una transformación natural en  $\text{Gav}(S)$  y  $V \in \mathcal{O}S$ , entonces

$$f_*(h_V) = h_{f^{-1}(V)}.$$

**Lema 2.32.**  $f_*F$  es una gavilla.

*Demostración.* Sea  $V \in \mathcal{O}T$  y  $\{V_i\}_{i \in I}$ . Debemos verificar que

$$f_*F(V) \xrightarrow{\epsilon} \prod_{i \in I} f_*F(V_i) \xrightarrow[q]{p} \prod_{i,j \in I} f_*F(V_i \cap V_j) \quad (2.3)$$

es un igualador.

Al ser  $f: S \rightarrow T$  una función continua,  $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}S$ . Consideremos  $U = f^{-1}(V)$  y  $\{U_i\}_{i \in I}$  con  $U_i = f^{-1}(V_i)$ . Luego,  $U = \bigcup_{i \in I} U_i$  y por 2.3 tenemos

$$F(U) \xrightarrow{\epsilon} \prod_{i \in I} F(U_i) \xrightarrow[p]{q} \prod_{i,j \in I} F(U_i \cap U_j)$$

es un igualador pues, por hipótesis,  $F$  es una gavilla. ■

**Lema 2.33.**  $f_*: \text{Gav}(S) \rightarrow \text{Gav}(T)$  es un functor.

*Demostración.* Consideremos  $F \in \text{Gav}(S)$  y sea  $\text{id}_F: F \rightarrow F$  la transformación natural identidad. Para  $V \in \mathcal{O}T$  tenemos que

$$f_*\text{id}_F(V): f_*F(V) \rightarrow f_*F(V)$$

es la identidad para todo  $V \in \mathcal{O}T$ . Por la Definición 2.31

$$\text{id}_F(f^{-1}(V)): F(f^{-1}(V)) \rightarrow F(f^{-1}(V))$$

y por lo tanto,  $f_*$  respeta identidades.

Ahora, sean  $F, G, H \in \text{Gav}(S)$  y  $h: F \rightarrow G$ ,  $g: G \rightarrow H$  transformaciones naturales. Entonces, para  $V \in \mathcal{O}T$

$$f_*F(V) \xrightarrow{f_*k(V)} f_*G(V) \xrightarrow{f_*l(V)} f_*H(V)$$

es la composición  $f_*(L \circ h)$ . Por definición,

$$F(f^{-1}(V)) \xrightarrow{k_{f^{-1}(V)}} G(f^{-1}(V)) \xrightarrow{l_{f^{-1}(V)}} H(f^{-1}(V))$$

Como  $k, l$  son transformaciones naturales,

$$(l \circ k)_{f^{-1}(V)}: F(f^{-1}(V)) \rightarrow H(f^{-1}(V))$$

y por definición

$$f_*(L \circ h)(V) = (l \circ k)_{f^{-1}(V)}.$$

Por lo tanto,  $f_*$  respeta composiciones. ■

**Definición 2.34.** Consideremos  $f^*: \text{Top}/T \rightarrow \text{Top}/S$  dada por la asignación

- para  $(p: E \rightarrow T) \in \text{Top}/T$ ,  $f^*p: f^*E \rightarrow S$  (o simplemente  $p^*$ ) es el pullback del diagrama

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{e} & E \\ p^* \downarrow & & \downarrow p \\ S & \xrightarrow{f} & T \end{array}$$

2. para  $k: p \rightarrow p'$  un morfismo en  $\text{Top}/T$ ,  $f^*k: p^* \rightarrow p'^*$  (o simplemente  $k^*$ ) es el morfismo inducido por la propiedad universal del pullback que hace commutar el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 f^*E & \xrightarrow{e} & E & & \\
 \searrow & \dashrightarrow & \downarrow k & & \\
 & k^* & & & \\
 \swarrow & & f^*E' & \xrightarrow{e'} & E' \\
 p^* & & \downarrow p'^* & & \downarrow p' \\
 S & \xrightarrow{f} & T & &
 \end{array}$$

**Lema 2.35.** Si  $p: E \rightarrow T$  es un homeomorfismo local, entonces  $p^*: f^*E \rightarrow S$  es un homeomorfismo local.

*Demostración.* Sabemos que  $f: S \rightarrow T$  es continua y  $p: E \rightarrow T$  un homeomorfismo local. Además,

$$f^*E = \{(s, e) \in S \times E \mid f(s) = p(e)\}$$

con la topología de subespacio de  $S \times E$ . Consideraremos  $\langle x, e \rangle \in f^*E$ , al ser  $p$  un homeomorfismo local, para todo  $e \in E$  existe un abierto  $U \subset E$  tal que  $e \in U$  y  $p|_U: U \rightarrow p(U)$  es un homeomorfismo, de aquí que  $p(U) \in \mathcal{O}T$  y  $f^{-1}(p(U)) \in \mathcal{O}S$ . Luego,

$$f(s) = p(e) \in p(U) \Rightarrow s \in f^{-1}(p(U)).$$

Para que  $p^* = f^*p$  sea un homeomorfismo local necesitamos que para todo  $x \in f^*E$  exista un abierto  $W \subset f^*E$  tal que  $x \in W$  y  $p^*|_W: W \rightarrow p^*(W)$  es un homeomorfismo. Consideremos  $f^{-1}(p(U)) \times U$  un abierto que contiene a  $\langle x, e \rangle$  en  $S \times E$ . Así, para

$$W = f^{-1}(p(U)) \times U \cap f^*E,$$

si  $\langle s, e \rangle \in W$ , entonces  $f(s) = p(e)$ . De aquí que debemos probar que  $p^*: W \rightarrow f^{-1}(p(U))$  es homeomorfismo.

Primero veamos que es suprayectiva. Sea  $z \in f^{-1}(p(U))$ , entonces  $f(z) \in p(U)$  y como  $p|_U: U \rightarrow p(U)$  es suprayectiva, existe  $e \in U$  tal que  $p(e) = f(z)$ . Por lo tanto,

$$\langle z, e \rangle \in W \quad \text{y} \quad p^*(\langle z, e \rangle) = z.$$

Para la inyectividad, si  $p^*(\langle z, v \rangle) = p^*(\langle z', v' \rangle)$ , entonces  $z = z'$  y como  $f(z) = p(v)$  y  $f(z') = p(v')$ , se tiene que  $p(v) = p(v')$ . Al ser  $p|_U: U \rightarrow p(U)$  inyectiva, se sigue que  $v = v'$ . Por lo tanto,  $\langle z, v \rangle = \langle z', v' \rangle$  y así  $p^*$  es inyectiva.

Notemos que  $p^*$  es continua por construcción. Así, para ver que es abierta, sean  $\langle s, e \rangle \in f^*E$  y  $U \subseteq E$  abierto tal que  $p|_U: U \rightarrow p(U)$  es un homeomorfismo y  $p(U) \in \mathcal{O}T$ .  $W$  es abierto en  $f^*E$  y contiene a  $\langle s, e \rangle$ . Al ser  $p|_U$  un homeomorfismo, existe  $(p|_U)^{-1}: p(U) \rightarrow U$  y para  $z \in f^{-1}(p(U))$  se tiene que

$$h: f^{-1}(p(U)) \rightarrow W \quad \text{dada por} \quad h(z) = \langle z, (p|_U)^{-1}(f(z)) \rangle$$

es la inversa de  $p^*|_W$  y es continua (pues  $f$  y  $p|_U$  son continuas). Por lo tanto,  $p^*|_W$  es un homeomorfismo y así  $p^*$  es un homeomorfismo local. ■

**Lema 2.36.**  $f^*: \text{Top}/T \rightarrow \text{Top}/S$  es un functor.

*Demostración.* Sea  $p: E \rightarrow T$  un objeto en  $\text{Top}/T$  y  $\text{id}_p: p \rightarrow p$  la identidad en  $\text{Top}/T$ . Entonces, por la Definición 2.34,  $f^*\text{id}_p: p^* \rightarrow p^*$  es la identidad en  $\text{Top}/S$ . Por lo tanto,  $f^*$  preserva identidades.

Sean  $k: p \rightarrow p'$  y  $k': p' \rightarrow p''$  morfismos en  $\text{Top}/T$ . El haz composición es  $k' \circ k$  y por la Definición 2.34,  $(k' \circ k)^*: p^* \rightarrow p''^*$  es el morfismo inducido por la propiedad universal del pullback que hace commutar el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 f^*E & \xrightarrow{e} & E & & \\
 \downarrow k^* & \nearrow k'^* \circ k^* & & \downarrow k' & \nearrow k' \circ k \\
 f^*E' & \xrightarrow{e'} & E' & \xleftarrow{k'} & \\
 \downarrow k'^* & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\
 f^*E'' & \xrightarrow{e''} & E'' & & \\
 \downarrow p''^* & \downarrow & \downarrow p'' & & \\
 S & \xrightarrow{f} & T & &
 \end{array}$$

Por lo tanto, respecta composiciones. ■

De esta manera, para  $(f: S \rightarrow T) \in \text{Top}$ , tenemos un functor de  $\text{Gav}(t) \rightarrow \text{Gav}(S)$  dado por

$$\text{Gav}(T) \xrightarrow{\Lambda} \text{Top}/T \xrightarrow{f^*} \text{Top}/S \xrightarrow{\Gamma} \text{Gav}(S) \quad (2.4)$$

Para  $G \in \text{Gav}(T)$ , notemos que  $\Lambda G = \{[s \in GV]_y \mid y \in T, s \in GV\}$  y el homeomorfismo local  $p: \Lambda G \rightarrow T$  es tal que  $p([s \in GV]_y) = y$ . Así

$$f^*\Lambda G = \{(x, [s \in GV]_y) \in S \times \Lambda G \mid f(x) = p([s \in GV]_y) = y\}$$

y el homeomorfismo local  $p^*: f^*\Lambda G \rightarrow S$  es tal que  $p^*(x, [s \in GV]_y) = x$ .

Si  $p([s \in GV]_y) = y$ , entonces  $f^*\Lambda G = \{(x, [s \in GV]_y) \in S \times \Lambda G \mid f(x) = y\}$  y

$$f^*\Lambda G = \{(x, [s \in GV]_{f(x)}) \in S \times \Lambda G \mid x \in S, s \in GV\}.$$

Por último,  $\Gamma f^*\Lambda G = \Gamma_{p^*}$ . Así,

$$\Gamma_{p^*}(U) = \{t: U \rightarrow f^*\Lambda G \text{ continua} \mid p^* \circ t = i_U\}.$$

con  $U \in \mathcal{OS}$ .

Cada sección  $t \in \Gamma_{p^*}(U)$  se describe a través de  $t': U \rightarrow \Lambda G$  continua, como

$$\begin{array}{ccc} U & & \\ & \searrow t \dashrightarrow & \swarrow t' \\ & f^*\Lambda G & \xrightarrow{e} \Lambda G \\ \downarrow i & & \downarrow p^* \\ S & \xrightarrow{f} & T \end{array}$$

La sección  $\hat{s}: V \rightarrow \Lambda G$  induce una sección  $t_s$  de  $p^*$  como

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(V) & \xrightarrow{f} & V \\ & \searrow t_s \dashrightarrow & \swarrow \hat{s} \\ & f^*\Lambda G & \xrightarrow{e} \Lambda G \\ \downarrow i & & \downarrow p^* \\ S & \xrightarrow{f} & T \end{array}$$

para  $V \in \mathcal{O}T$  y  $s \in GV$ .

Si  $x \in f^{-1}(V)$ , entonces  $p(\hat{s}(f(x))) = p([s \in GV]_{f(x)})$  y  $t_s(x) = (x, [s \in GV]_{f(x)})$ .

**Definición 2.37.** Denotamos por  $f^*: \text{Gav}(T) \rightarrow \text{Gav}(S)$  al functor compuesto  $f^* = \Gamma \circ f^* \circ \Lambda$ .

**Lema 2.38.** Consideremos  $X \in \text{Top}$ . Una función  $k: f^*\Gamma G \rightarrow X$  es continua si y solo si

$$f^{-1}(W) \xrightarrow{t_r} f^*\Lambda G \xrightarrow{k} X$$

es continua para todo  $W \subseteq T$  y para toda  $r \in GW$ .

*Demostración.*  $\Rightarrow)$  Supongamos que  $k: f^*\Gamma G \rightarrow X$  es continua. Sea  $W \in \mathcal{O}T$  y  $r \in GW$ .

Entonces,  $t_r: f^{-1}(W) \rightarrow f^*\Lambda G$  es continua por construcción y así la composición  $k \circ t_r: f^{-1}(W) \rightarrow X$  es continua.

$\Leftarrow)$  Supongamos que para todo  $W \in \mathcal{O}T$  y  $r \in GW$ , la composición  $k \circ t_r: f^{-1}(W) \rightarrow X$  es continua. Sea  $U \in \mathcal{O}X$ , debemos ver que  $k^{-1}(U)$  es abierto en  $f^*\Lambda G$ . Sea  $\langle x, [s \in GV]_{f(x)} \rangle \in k^{-1}(U)$ , entonces  $k(\langle x, [s \in GV]_{f(x)} \rangle) \in U$ . Por hipótesis, la función  $k \circ t_s: f^{-1}(V) \rightarrow X$  es continua, luego

$$(k \circ t_s)^{-1}(U) = (t_s^{-1} \circ k^{-1})(U)$$

es  $f^{-1}(V)$ . Además,  $t_s((t_s)^{-1} \circ k^{-1})(U)$  es abierto y  $t_s((t_s)^{-1} \circ k^{-1})(U) = k^{-1}(U)$ . Por lo tanto  $k$  es continua. ■

**Teorema 2.39.** Si  $(f: S \rightarrow T) \in \text{Top}$ , entonces el functor  $f^*: \text{Gav}(T) \rightarrow \text{Gav}(S)$  es adjunto izquierdo del functor  $f_*: \text{Gav}(S) \rightarrow \text{Gav}(T)$ .

*Demostración.* ■

**Lema 2.40.** El functor  $f^*: \text{Gav}(T) \rightarrow \text{Gav}(S)$  es exacto izquierdo.

*Demostración.* ■

## 2.6. Morfismos ultrafinitos

Sabemos que si  $(f: S \rightarrow T) \in \text{Top}$ ,  $f$  induce la siguiente adjunción

$$\begin{array}{ccc} & f_* & \\ \text{Gav}(S) & \perp & \text{Gav}(T) \\ & f^* & \end{array}$$

donde  $f^*: \text{Gav}(T) \rightarrow \text{Gav}(S)$  es exacto izquierdo.

Además, para el funtor  $f_*: \text{Gav}(S) \rightarrow \text{Gav}(T)$  tenemos que si  $V \in \mathcal{O}T$  y  $F \in \text{Gav}(S)$ ,  $f_*F(V) = F(f^{-1}(V))$  y para  $(h: F \rightarrow G) \in \text{Gav}(S)$ ,  $f_h(V) = h_{f^{-1}(V)}$ . Queremos ver que  $f_*$  preserva:

1. Objeto inicial.
2. Epimorfismos.
3. Sumas finitas.

Primero, si  $\mathbf{0} \in \text{Gav}(S)$  queremos ver que para todo  $\emptyset \neq U \in \mathcal{O}S$ ,  $\mathbf{0}(U) = \emptyset$ . Sea  $\mathbf{0}: \mathcal{O}S^{\text{op}} \rightarrow \text{Con}$  la pregarilla tal que  $\mathbf{0}(U) = \emptyset$  para todo  $\emptyset \neq U \in \mathcal{O}S$ . Notemos que

$$\Lambda(\mathbf{0}) = \{[s \in \mathbf{0}U]_x \mid x \in S, s \in \mathbf{0}U\}$$

y  $\mathbf{0}U = \emptyset$ , entonces  $\Lambda(\mathbf{0}) = \emptyset$ . Luego,  $\Gamma_\emptyset U = \{s: U \rightarrow \emptyset \mid s \text{ es sección de } i: \emptyset \rightarrow S\}$ . Por lo tanto,  $\Gamma_\emptyset U = \emptyset$  cuando  $U \neq \emptyset$ .

**Lema 2.41.** *Sea  $(f: S \rightarrow T) \in \text{Top}$ , entonces el funtor  $f_*: \text{Gav}(S) \rightarrow \text{Gav}(T)$  preserva el objeto inicial si y solo si  $s(S)$  es denso en  $T$ .*

*Demostración.*  $\Rightarrow)$  Supongamos que  $f_*$  preserva el objeto inicial. Sea  $V \in \mathcal{O}T$  tal que  $V \neq \emptyset$ .

Entonces

$$f_*\mathbf{0}(V) = \mathbf{0}(f^{-1}(V)) = \emptyset \Rightarrow f^{-1}(V) \neq \emptyset.$$

Notemos que  $f(S)$  es denso en  $T$  si para todo  $V \in \mathcal{O}T$  se tiene que  $V \cap f(S) \neq \emptyset$ . Si  $f^{-1}(V) \neq \emptyset$ , existe  $x \in S$  tal que  $f(x) \in V$ . Por lo tanto,  $V \cap f(S) \neq \emptyset$  y así  $f(S)$  es denso en  $T$ .

$\Leftarrow)$  Supongamos que  $f(S)$  es denso en  $T$ . Sea  $V \in \mathcal{O}T$  tal que  $V \neq \emptyset$ , entonces  $V \cap f(S) \neq \emptyset$ . Por lo tanto, existe  $x \in S$  tal que  $f(x) \in V$  y así  $f^{-1}(V) \neq \emptyset$ . Luego,  $\mathbf{0}(f^{-1}(V)) = \emptyset$  y por lo tanto  $f_*\mathbf{0}(V) = \emptyset$ . Así,  $f_*$  preserva el objeto inicial. ■

Ahora, enunciaremos las condiciones necesarias y suficientes para que  $f_*$  preserve epimorfismos.

**Lema 2.42.** Si para cada  $V \in \mathcal{OT}$ ,  $y \in V$  y  $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{OS}$  una cubierta abierta de  $f^{-1}(V)$ , existen  $W \in \mathcal{OT}$  tal que  $y \in W$  y  $\{W_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{OS}$  una cubierta abierta ajena de  $f^{-1}(W)$  con la propiedad que  $W_i \subseteq U_i$  para todo  $i \in I$ . Entonces para todo  $q: E \rightarrow f^{-1}(V)$  epimorfismo en  $HL/S$ , existe  $t: f^{-1}(W) \rightarrow E$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(W) & \xrightarrow{\quad} & f^{-1}(V) \\ & \searrow t & \nearrow q \\ & E & \end{array}$$

comuta.

*Demuestra*ción. Sea  $q: E \rightarrow f^{-1}(V)$  un epimorfismo en  $HL/S$ . Si  $x \in f^{-1}(V)$ , entonces tenemos abiertos  $U_x \subset f^{-1}(V)$  y  $U'_x \subset E$  tales que

$$q: U'_x \rightarrow U_x$$

es un homeomorfismo. Así,  $\{U_x\}_{x \in f^{-1}(V)}$  es una cubierta abierta de  $f^{-1}(V)$ . Por hipótesis, existen  $W \in \mathcal{OT}$  tal que  $y \in W$  y  $\{W_x\}_{x \in f^{-1}(V)}$  una cubierta abierta ajena de  $f^{-1}(W)$  con la propiedad que  $W_x \subseteq U_x$  para todo  $x \in f^{-1}(V)$ . Además  $q|_{U'_x}: U'_x \rightarrow q(U'_x)$  es un homeomorfismo, entonces definimos

$$t_x = (q|_{U'_x})^{-1}: W_x \rightarrow E.$$

y así tomamos  $t: f^{-1}(W) \rightarrow E$  dada por  $t|_{W_x} = t_x$ . Por construcción,  $q \circ t = i_{f^{-1}(W)}$  y el diagrama comuta. ■

Para la prueba del siguiente resultado, hacemos uso de los siguientes criterios. Estos pueden ser encontrados en **Citar los criterios**.

**Criterio 1:** Sea  $h: F \rightarrow G$  un morfismo en  $\text{Gav}(S)$ . Entonces  $h$  es un epimorfismo si y solo si para todo  $U \in \mathcal{OS}$  y  $s \in G(U)$ , existe una cubierta abierta  $\{U_i\}_{i \in I}$  de  $U$  y para cada  $i \in I$  una sección  $t_i \in F(U_i)$  tal que  $h_{U_i}(t_i) = s|_{U_i}$ , en otras palabras, para  $y \in U$

$$[s \in G(U)]_y = [h_{U_i}(t_i) \in G(U_i)]_y.$$

**Criterio 2:**  $\Lambda f_* \Gamma(h)$  es un epimorfismo en  $HL/T$  si y solo si para todo  $x \in S$  y germen  $s_x$  de  $G$  en  $x$  existe un germen  $t_x$  en  $F$  con la propiedad que

$$[h_U(t_x) \in G(U)]_{f(x)} = [s_x \in G(U)]_{f(x)}$$

para algún abierto  $U \in \mathcal{OT}$  que contiene a  $f(x)$ .

**Lema 2.43.** Sea  $h: E \rightarrow E'$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{h} & E' \\ & \searrow p & \nearrow p' \\ & S & \end{array}$$

commuta. Entonces  $\Lambda f_*\Gamma(h)$  es un epimorfismo si y solo si para todo  $V \in \mathcal{OT}$ ,  $y \in V$  y cualquier sección  $s: f^{-1}(V) \rightarrow E'$  de  $p'$ , existen  $W \in \mathcal{OT}$  con  $y \in W$  y una sección  $t: f^{-1}(W) \rightarrow E$  de  $p$  tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} f^{-1}(W) & \xhookrightarrow{\quad} & f^{-1}(V) \\ \downarrow t & & \downarrow s \\ E & \xrightarrow{h} & E' \end{array} \quad (2.5)$$

commuta.

*Demostración.*  $\Rightarrow)$  Para  $h: E \rightarrow E'$  tenemos que  $\Lambda f_*\Gamma(h): \Lambda f_*\Gamma E \rightarrow \Lambda f_*\Gamma E'$  es un morfismo en  $HL/T$  tal que si  $r \in \Gamma_p(f^{-1}(V))$ , entonces

$$\Lambda f_*\Gamma(h)([r \in \Gamma_p(f^{-1}(V))]_y) = [h \circ r \in \Gamma_{p'}(f^{-1}(V))]_y.$$

Sean  $V \in \mathcal{OT}$ ,  $y \in V$  y  $s: f^{-1}(V) \rightarrow E'$  una sección de  $p'$ . Supongamos que  $\Lambda f_*\Gamma(h)$  es un epimorfismo, entonces existe  $[t \in \Gamma_p(f^{-1}(V))]_y \in \Lambda f_*\Gamma(E)$  tal que

$$[h \circ t \in \Gamma_{p'}f^{-1}(V)]_y = [s \in \Gamma_{p'}f^{-1}(V)]_y. \quad (2.6)$$

De aquí, por el Criterio 1, existe un abierto  $W \subset V$  con  $y \in W$  tal que  $h \circ t|_{f^{-1}(W)} = s|_{f^{-1}(W)}$ . Por lo tanto, el diagrama (2.5) commuta.

$\Leftarrow)$  Supongamos que para todo  $V \in \mathcal{OT}$ ,  $y \in V$  y cualquier sección  $s: f^{-1}(V) \rightarrow E'$  de  $p'$ , existen  $W \in \mathcal{OT}$  con  $y \in W$  y una sección  $t: f^{-1}(W) \rightarrow E$  de  $p$  tal que el diagrama (2.5) commuta. De aquí que 2.6 se cumple y

$$[s|_{f^{-1}(V)} \in \Gamma_{p'}(f^{-1}(V))]_y = [s \in \Gamma_{p'}(f^{-1}(V))]_y.$$

Por lo tanto, por el Criterio 2,  $\Lambda f_*\Gamma(h)$  es un epimorfismo. ■

**Proposición 2.44.** Consideremos  $(f: S \rightarrow T) \in \text{Top}$ . El functor  $f_*: \text{Gav}(S) \rightarrow \text{Gav}(T)$  preserva epimorfismos si y solo si para todo  $V \in \mathcal{OT}$ ,  $y \in V$  y  $\{U_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{OS}$  una cubierta abierta de  $f^{-1}(V)$ , existe  $W \in \mathcal{OT}$  tal que  $y \in W$  y  $\{W_i\}_{i \in I} \subseteq \mathcal{OS}$  una cubierta abierta ajena de  $f^{-1}(W)$  con la propiedad que  $W_i \subseteq U_i$  para todo  $i \in I$ .

*Demostración.* ■

**Proposición 2.45.** Sea  $(f: S \rightarrow T) \in \text{Top}$  con  $f(S)$  denso en  $T$ . Entonces, el functor  $f_*: \text{Gav}(S) \rightarrow \text{Gav}(T)$  preserva coproductos si y solo si para cada  $V \in \mathcal{OT}$  y  $y \in V$  siempre que  $f^{-1}(V) = A \cup B$  con  $A, B \in \mathcal{OS}$  ajenos, entonces existe  $W \in \mathcal{OT}$  con  $y \in W$  tal que  $f^{-1}(W) \subseteq A$  o  $f^{-1}(W) \subseteq B$ .

*Demostración.* ■

**Teorema 2.46.** Sea  $f: S \rightarrow T$  una función continua es un morfismo ultrafinito si y solo si el functor  $f_*: \text{Gav}(S) \rightarrow \text{Gav}(T)$  preserva el objeto inicial, epimorfismos y sumas finitas. 0



# Capítulo 3

## Gavillas sobre Marcos

Lo que se ha abordado hasta ahora es la teoría de haces y gavillas de conjuntos sobre espacios topológicos. En [Mer02], se encargan de trasladar las nociones de morfismo étale y morfismos ultrafinitos a un contexto más general, el de los locales. En este capítulo se presentan algunas de las ideas principales de dicha referencia pero viéndolo desde el enfoque de marcos. Para tener más información sobre teoría de marcos, se puede consultar [Joh82], [PP12] o [Zal23].

### 3.1. Marcos y gavillas

En el sentido categórico, trabajar con locales y trabajar con marcos, en esencia podría parecer lo mismo, ya que la categoría de locales es la categoría opuesta a la categoría de marcos. Sin embargo, en la práctica, trabajar con marcos suele ser más sencillo. Lo primero que faremos es dar las herramientas necesarias para trasladar las nociones vistas en capítulos anteriores al lenguaje de marcos.

**Definición 3.1.** Un *marco* es una retícula completa  $(A, \leq, \vee, \wedge, 0, 1)$  que satisface la siguiente propiedad distributiva:

$$a \wedge \bigvee x = \bigvee \{a \wedge b \mid x \in X\}$$

para todo  $a \in A$  y  $X \subseteq A$ .

**Definición 3.2.** Sean  $A$  y  $B$  dos marcos. Un *morfismo de marcos* es una función monótona  $f: A \rightarrow B$  que preserva la estructura de la retícula, es decir, para todo  $X \subseteq A$  y  $a, b \in A$  se cumple:

- $f(\bigvee X) = \bigvee \{f(x) \mid x \in X\}$ .
- $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$ .
- $f(0) = 0$  y  $f(1) = 1$ .

De esta manera, la categoría de marcos  $\text{Frm}$  es la categoría cuyos objetos son marcos y cuyos morfismos son morfismos de marcos, y como mencionamos antes, la categoría de locales

Loc es la categoría opuesta a Frm.

Si  $f : A \rightarrow B$  es un morfismo de marcos, entonces  $f$  tiene un adjunto derecho  $f_* : B \rightarrow A$  y cumple la siguiente propiedad:

$$f(a) \leq b \iff a \leq f_*(b)$$

para todo  $a \in A$  y  $b \in B$ . De manera general, podemos calcular el adjunto derecho de un morfismo de marcos  $f : A \rightarrow B$  como:

$$f_*(b) = \bigvee \{a \in A \mid f(a) \leq b\}$$

**Definición 3.3.** Sea  $A \in \text{Frm}$ . La operación *implicación* (o también conocida como implicación de Heyting), denotada por  $(a \succ b)$  para  $a, b \in A$ , se define por:

$$a \wedge c \leq b \iff c \leq (a \succ b).$$

Consideremos los morfismos de copos  $f : A \rightarrow A$  y  $f_* : A \rightarrow A$ , dados por

$$f(x) = a \wedge x \quad y \quad f_*(x) = (a \succ x),$$

entonces  $f(x) \leq y$  si y solo si  $x \leq f_*(y)$ , es decir,  $x \wedge a \leq y$  si y solo si  $x \leq (a \succ y)$ . En otras palabras, implicar es adjunto derecho de calcular ínfimo. Por lo tanto, la implicación se puede calcular como

$$(a \succ b) = \bigvee \{x \in A \mid a \wedge x \leq b\}.$$

El siguiente resultado proporciona algunas propiedades básicas de la implicación.

**Proposición 3.4.** Consideremos  $A$  un marco y  $a, b, c \in A$ . Entonces

1.  $(1 \succ a) = a$ .
2.  $a \leq b$  si y solo si  $(a \succ b) = 1$ .
3.  $a \leq (b \succ a)$ .
4.  $(a \succ b) = (a \succ (a \wedge b))$ .
5.  $a \wedge (a \succ b) = a \wedge b$ .
6.  $(a \vee b) \succ c = (a \succ c) \wedge (b \succ c)$ .
7.  $(a \wedge b) \succ c = (a \succ (b \succ c)) = (b \succ (a \succ c))$ .
8.  $a = (a \vee b) \wedge (b \succ a)$ .
9.  $a \leq ((a \succ b) \succ b)$ .
10.  $((a \succ b) \succ b) = (a \succ b)$ .
11. Si  $c \leq b$ , entonces  $(b \succ a) \leq (c \succ a)$ .
12.  $\neg a = (a \succ 0)$ .

*Demostración.* (Podrían dejarse la prueba de las propiedades como ejercicio.) ■

### 3.1.1. Núcleos y cocientes en marcos

Cuando trabajamos en Top, la noción de subespacio puede ser capturada mediante la noción de sublocal. A su vez, los sublocales pueden ser estudiados de manera algebraica mediante lo que en marcos se conoce como *núcleos*. Esta subsección explicara brevemente la relación entre núcleos y sublocales.

**Definición 3.5.** Sean  $A \in \text{Frm}$  y  $j: A \rightarrow A$  una función. Decimos que  $j$  es un *núcleo* si cumple las siguientes propiedades para todo  $a, b \in A$ :

1. Si  $a \leq b$ , entonces  $j(a) \leq j(b)$  (monotonía).
2.  $a \leq j(a)$  (inflación).
3.  $j(j(a)) = j(a)$  (idempotencia).
4.  $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$  (preservación de ínfimos finitos).

Cuando consideramos a  $A$  como nuestro marco base, denotamos por  $NA$  al conjunto de todos los núcleos sobre  $A$ .

**Proposición 3.6.** Sean  $A$  un marco y  $a, x \in A$ . Las funciones

$$u_a(x) = a \vee x, \quad v_a(x) = (a \succ x), \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a)$$

son núcleos en  $A$ .

*Demostración.*

■

En la práctica, a los núcleos de la forma  $v_a$  se les conoce como *núcleos abiertos*, mientras que a los núcleos de la forma  $u_a$  se les conoce como *núcleos cerrados*.

**Proposición 3.7.** Si  $A$  es un marco y  $j \in NA$ , entonces el conjunto

$$A_j = \{x \in A \mid j(x) = x\}$$

es un marco y el morfismo  $j^*: A \rightarrow A_j$ , dado por  $j^*(x) = j(x)$ , es un morfismo de marcos.

Al trabajar en cualquier estructura algebraica, la manera más natural de construir un cociente es a través de ciertas relaciones de equivalencia. Con ellas definimos lo que se conoce como congruencias y por medio de ellas damos el paso hacia los cocientes. En el caso de los marcos, el proceso anterior se puede realizar de manera más sencilla y directa ya que los núcleos pueden sustituir a las congruencias al momento de construir cocientes. Los detalles de esto se pueden consultar en [Zal23].

**Definición 3.8.** Sea  $A$  un marco y  $f: A \rightarrow B$  un morfismo de marcos. Decimos que  $B$  es un *cociente* de  $A$  si  $f$  es suprayectivo.

**Lema 3.9.** Sean  $A \xrightarrow{f} B, A \xrightarrow{g} C \in \text{Frm}$  dos cocientes de  $A$  tales que  $f_* f^* = g_* g^*$ , entonces  $B \cong C$ .

*Demostración.* Sea el núcleo  $k = f_*f^* = g_*g^* \in NA$ . Veamos que el marco de puntos fijos  $A_k$  es isomorfo a  $B$ . Para ver esto definamos  $f^\sharp : A_k \rightarrow B$  como  $f^\sharp(x) := f(k(x))$  para todo  $x \in A_k$ . Los detalles de la prueba de ser un morfismo de marcos se pueden revisar en [Zal23], aquí solo veamos que es biyectivo.

Para esto sean  $x, y \in A_k$  tales que  $f^\sharp(x) = f^\sharp(y)$ , de lo que tenemos

$$f(k(x)) = f(k(y)) \implies f(x) = f(y) \implies f_*f^*(x) = f_*f^*(y) \implies x = k(x) = k(y) = y$$

Lo que prueba que es inyectiva.

Ahora sea  $b \in B$ , por ser cociente,  $f$  es suprayectivo y existe  $a \in A$  tal que  $f(a) = b$ . Entonces  $k(a) \in A_k$  y es tal que

$$f^\sharp(k(a)) = f(kk(a)) = f(k(a)) = f^*f_*f^*(a) = f^*(a) = b$$

Lo que prueba que  $f^\sharp$  es un isomorfismo de marcos.

Análogamente tenemos que  $A_k \xrightarrow{g^\sharp} C$  es un isomorfismo y por lo tanto  $B \cong C$ . ■

La construcción de  $f^\sharp$  en la demostración anterior, es muy importante y de hecho, como se puede ver en [Zal23], es el único tal que el triángulo

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ k^* \downarrow & \nearrow f^\sharp & \\ A_k & & \end{array}$$

commuta. Donde  $k = f_*f^*$  es el núcleo de  $f$ .

**Observación 3.10.** 1. Si  $j$  es un núcleo en el marco  $A$ , entonces  $A_j$  es un cociente de  $A$ . Denominamos a  $A_j$  como el *marco cociente*.

2. Si consideramos los núcleos  $u_a$  y  $v_a$  a sus respectivos marcos  $A_{u_a}$  y  $A_{v_a}$  los denominamos *cociente cerrado* y *cociente abierto*, respectivamente.

**Proposición 3.11.** *Sea  $A$  un marco y  $j \in NA$ , entonces la inclusión de  $A_j$  en  $A$  es el adjunto derecho de  $j^* : A \rightarrow A_j$*

*Demostración.* Consideremos  $x \in A$  y  $y \in A_j$ , entonces

$$x \leq y \iff x \leq j^*(y) \leq j^*(y) = y$$

■

**Lema 3.12.** *Sea un morfismo de marcos  $A \xrightarrow{f} B$  y los núcleos  $j \in NA$ ,  $k \in NB$ . Para cualquier morfismo de marcos  $A_j \xrightarrow{g} B_k$  es equivalente lo siguiente:*

$$\begin{array}{c} A \xrightarrow{f} B \\ \bullet \text{ El cuadrado } \begin{array}{ccc} j^* \downarrow & & \downarrow k^* \\ A_j & \xrightarrow{g} & B_k \end{array} \text{ conmuta.} \end{array}$$

- $g(x) = k(f(x))$  para  $x \in A_j$  y  $g_*(y) = f_*(y)$  para  $y \in B_k$ .

*Demostración.* Supongamos que el cuadrado conmuta, entonces para  $x \in A_j \subseteq A$  tenemos

$$k(f(x)) = g(j^*(x)) = g(x)$$

Por otro lado, al conmutar el cuadrado, conmuta el cuadrado de los adjuntos derechos

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{f_*} & B \\ \uparrow & & \uparrow \\ A_j & \xleftarrow{g_*} & B_k \end{array}, \text{ lo que significa que } g_*(y) = f_*(y) \text{ para } y \in B_k.$$

Para el recíproco solo hay que notar de saber que  $g_*(y) = f_*(y)$  para  $y \in B_k$ , sabemos

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{f_*} & B \\ \uparrow & & \uparrow \\ A_j & \xleftarrow{g_*} & B_k \end{array} \text{ que conmuta el cuadrado} \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ \downarrow j^* & & \downarrow k^* \\ A_j & \xrightarrow{g} & B_k \end{array}, \text{ y pues al ser todos adjuntos derechos, entonces}$$

$$\begin{array}{ccc} & & A \xrightarrow{f} B \\ & & \downarrow k^* \\ \text{conmuta el cuadrado de adjuntos izquierdos} \quad \begin{array}{ccc} & & A \\ & \downarrow j^* & \downarrow k^* \\ A_j & \xrightarrow{g} & B_k \end{array} & & \blacksquare \end{array}$$

**Observación 3.13.** Sea un marco  $A$  y  $a \in A$ , entonces el marco cociente del núcleo  $v_a$  le llamamos núcleo abierto, y notemos que  $A_{v_a} \cong \downarrow a$ . Este isomorfismo está dado por los morfismos  $a \wedge - : A_{v_a} \rightarrow \downarrow a$  y  $a \succ - : \downarrow a \rightarrow A_{v_a}$ . Ya que de las propiedades de la implicación (proposición 3.4) no es muy complicado ver que para  $x \in A_{v_a}$  tenemos

$$a \succ (a \wedge x) = (a \succ a) \wedge (a \succ x) = 1 \wedge x = x$$

Y para  $y \in \downarrow a$  tenemos

$$a \wedge (a \succ y) = a \wedge y = y.$$

### 3.1.2. Morfismos abiertos

**Definición 3.14** (Morfismo abierto). Sea  $f : A \rightarrow B$  un morfismo de marcos. Decimos que es abierto si existe  $f_l : B \rightarrow A$ , un morfismo de copos tal que:

- $f_l \dashv f$ .
- Para cada  $a \in A$  y  $b \in B$  se tiene la identidad de Frobenius

$$f_l(b \wedge f(a)) = f_l(b) \wedge a.$$

**Observación 3.15.** En general, para cualquier par de morfismos adjuntos  $f_l \dashv f$ , se cumple una desigualdad de la identidad de Frobenius. Sabemos que, por un lado,  $b \wedge f(a) \leq b$  y entonces  $f_l(b \wedge f(a)) \leq f_l(b)$ ; y por otro lado, como  $b \wedge f(a) \leq f(a)$ , tenemos que  $f_l(b \wedge f(a)) \leq f_l(f(a)) \leq a$ ; por lo tanto  $f_l(b \wedge f(a)) \leq f_l(b) \wedge a$ .

**Ejemplo 3.16.** Consideremos una función  $f : S \rightarrow T$  continua y abierta, entonces tenemos que el morfismo de marcos  $f^{-1} : \mathcal{OT} \rightarrow \mathcal{OS}$ , dado por la preimagen, es un morfismo abierto. Pues ya al ser la función abierta, tenemos que el morfismo de copos  $f : \mathcal{OS} \rightarrow \mathcal{OT}$ , dado por la imagen directa, es adjunto izquierdo de  $f^{-1}$ , ya que

$$f(U) \subseteq V \iff U \subseteq f^{-1}(V)$$

para todo  $U \in \mathcal{OS}$  y  $V \in \mathcal{OT}$ . Además satisface la identidad de Frobenius

$$f(U \cap f^{-1}(V)) = f(U) \cap V$$

**Ejemplo 3.17.** Consideremos un marco  $A$  y un elemento  $a \in A$ , entonces el morfismo de marcos  $a \wedge - : A \rightarrow \downarrow a$  es un morfismo abierto. Veamos que la inclusión de la sección inferior en el marco, es su adjunto izquierdo: Ya que para  $x \in A$  y  $y \in \downarrow a$  siempre se tiene que

$$y \leq a \wedge x \iff y \leq x$$

Y satisface Frobenius, pues

$$y \wedge (a \wedge x) = (y \wedge a) \wedge x = y \wedge x$$

**Lema 3.18.** *Sea  $A$  un marco y  $j : A \rightarrow A$  un núcleo del marco. Entonces  $j$  es un núcleo abierto si y solo si el morfismo de marcos  $j^* : A \rightarrow A_j$  es un morfismo abierto.*

*Demostración.* Si  $j$  es abierto, entonces existe un elemento  $a \in A$  tal que  $j = v_a$ , veamos entonces que  $v_a^* : A \rightarrow A_{v_a}$  es un morfismo abierto. Es claro que su adjunto izquierdo es  $a \wedge - : A_{v_a} \rightarrow A$ , por la misma definición de la implicación. Y por otro lado, veamos que satisface Frobenius, pues para  $x \in A$  y  $y \in A_{v_a}$  tenemos

$$a \wedge (y \wedge v_a(x)) = (a \wedge (a \succ x)) \wedge y = (a \wedge x) \wedge y = x \wedge (a \wedge y).$$

Por lo tanto  $v_a^*$  es un morfismo abierto.

Por otro lado supongamos que  $j^*$  es un morfismo abierto, por lo tanto existe  $j_l : A_j \rightarrow A$  tal que  $j_l \dashv j^*$  y  $j_l(y \wedge j^*(x)) = j_l(y) \wedge x$  para todo  $x \in A$  y  $y \in A_j$ . Definamos  $a := f_l(1)$  y notemos que dado  $x \in A_j$  tenemos que

$$j_l(x) = j_l(j^*(x)) = j_l(j^*(x) \wedge 1) = x \wedge j_l(1)$$

por lo tanto  $j_l = a \wedge -$  y como los adjuntos son únicos, al ser la implicación su adjunto derecho, tenemos que  $j^* = a \succ - = v_a^*$ , lo que significa que  $j$  es un núcleo abierto. ■

**Proposición 3.19.** *Sea  $f : A \rightarrow B$  un morfismo de marcos abierto. Entonces el núcleo  $k = f_* f$  es un núcleo abierto.*

*Demostración.* Usaremos el lema anterior (3.18), y veamos que  $k^* : A \rightarrow A_k$  es un morfismo abierto. Para esto, consideremos que  $f$  es un morfismo abierto y por lo tanto existe  $f_l \dashv f$  que satisface Frobenius. Ahora definamos el morfismo  $k_l : A_k \rightarrow A$  como  $k_l(y) := f_l(f(y))$  y veamos que son adjuntos.

Sean  $x \in A$  y  $y \in A_k$ , entonces

$$y \leq k^*(x) = f_*(f(x)) \iff f(y) \leq f(x) \iff k_l(y) = f_l(f(y)) \leq x$$

ya que  $f_l \dashv f \dashv f_*$ . Luego veamos que  $k_l$  satisface Frobenius, pues

$$k_l(k^*(x) \wedge y) = f_l(f(k^*(x) \wedge y)) = f_l(f f_* f(x) \wedge f(y)) = f_l(f(x) \wedge f(y)) = x \wedge f_l(f(y)) = x \wedge k_l(y)$$

considerando propiedades de morfismos adjuntos y que  $f_l$  ya satisface Frobenius. ■

**Teorema 3.20.** *Sea  $f : A \rightarrow B$  un morfismo de marcos, entonces  $f$  es un morfismo abierto si y solo si  $f$  preserva ínfimos arbitrarios y  $f(x \succ y) = f(x) \succ f(y)$  para todo  $x, y \in A$*

*Demostración.* Supongamos que  $f$  es un morfismo abierto, entonces existe  $f_l : B \rightarrow A$  tal que  $f_l \dashv f$  y satisface Frobenius.

Como  $f$  tiene adjunto adjunto izquierdo, entonces preserva ínfimos arbitrarios. Para probar que abre implicaciones consideremos  $x, y \in A$  y notemos que

$$(x \succ y) \wedge x \leq y \implies f((x \succ y) \wedge x) \leq f(y) \implies f(x \succ y) \wedge f(x) \leq f(y)$$

y por un lado, por ser la implicación adjunto derecho de sacar ínfimo, tenemos  $f(x \succ y) \leq f(x) \succ f(y)$ . Por otro lado podemos aplicar el adjunto izquierdo

$$f(x \succ y) \wedge f(x) \leq f(y) \implies f_l(f(x \succ y) \wedge f(x)) \leq f_l(f(y)) \leq y$$

recordando que aplicar el adjunto derecho seguido del adjunto izquierdo desinfla. Y como  $f_l$  satisface Frobenius tenemos

$$f_l(f(x \succ y)) \wedge x \leq y \implies f_l(f(x \succ y)) \leq x \succ y$$

lo que por fórmula de adjunción nos da que es equivalente a  $f(x \succ y) \leq f(x \succ y)$ ; probando que  $f$  abre implicaciones.

Ahora supongamos que  $f$  preserva ínfimos arbitrarios y preserva implicaciones. Como preserva ínfimos entonces tiene adjunto izquierdo  $f_l$ . Para ver que satisface Frobenius necesitamos probar que  $f_*(b \succ f(a)) = f_l(b) \succ a$  para cada  $a \in A$  y  $b \in B$ . Sabemos que  $b \leq f(f_l(b))$ , luego como dejar fija la segunda entrada en una implicación es un morfismo antítono, tenemos  $f(f_l(b)) \succ f(a) \leq b \succ f(a)$ , y considerando que  $f$  abre implicaciones y la fórmula de adjunción para  $f \dashv f_*$  entonces

$$f(f_l(b) \succ a) \leq b \succ f(a) \implies f_l(b) \succ a \leq f_*(b \succ f(a))$$

Por otro lado veamos que

$$b \succ f(a) \leq b \succ f(a) \implies (b \succ f(a)) \wedge b \leq f(a) \implies b \leq (b \succ f(a)) \succ f(a)$$

entonces, considerando que  $f$  abre supremos, propiedades de adjunción y en que condiciones la implicación es antítona, tenemos

$$b \leq (b \succ f(a)) \succ f(a) \leq f f_*(b \succ f(a)) \succ f(a) = f(f_*(b \succ f(a))) \succ a$$

por último, aplicando la fórmula de adjunción y propiedades de la implicación

$$f_l(b) \leq f_*(b \succ f(a)) \succ a \implies f_l(a) \wedge f_*(b \succ f(a)) \leq a \implies f_*(b \succ f(a)) \leq f_l(b) \succ a$$

lo que nos da la igualdad que deseábamos.

Para la identidad de Frobenius, recordemos que es suficiente probar la desigualdad  $f_l(b) \wedge a \leq f_l(b \wedge f(a))$  (Observación 3.15), o equivalentemente,  $a \leq f_l(b) \succ f_l(b \wedge f(a))$ , por lo que probaremos lo segundo:

$$\begin{aligned} f_l(b) \succ f_l(b \wedge f(a)) &= f_*(b \succ f f_l(b \wedge f(a))) \\ &\geq f_*(b \succ (b \wedge f(a))) = f_*((b \succ b) \wedge (b \wedge f(a))) \\ &= f_*(b \succ f(a)) = f_l(b) \succ a \geq a \end{aligned}$$

■

**Lema 3.21.** *La composición de morfismos de marcos abiertos es un morfismo abierto.*

*Demostración.* Sean  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \in \text{Frm}$  dos morfismos abiertos. Del teorema anterior (3.20) ambos morfismos preservan implicaciones e ínfimos arbitrarios. Es claro que entonces la composición  $g \circ f$  también preserva implicaciones e ínfimos arbitrarios, por lo tanto es un morfismo abierto. ■

**Lema 3.22.** *Sea una familia  $\{f_i : A \rightarrow A_i\}_{i \in I} \subseteq \text{Frm}$  de morfismos abiertos. Entonces el morfismo  $f : A \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$ , inducido por la propiedad universal del producto, es un morfismo abierto.*

*Demostración.* Definamos  $f_l : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A$  como  $f_l((a_i)_{i \in I}) = \bigvee_{i \in I} f_{il}(a_i)$  para cada  $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$ , donde  $f_{il} \dashv f_i$  y satisface Frobenius para cada  $i \in I$  (ya que cada  $f_i$  es abierto). Veamos que es el adjunto izquierdo, sean  $(a_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i$  y  $a \in A$ , entonces

$$\begin{aligned} f_l((a_i)_{i \in I}) \leq a &\iff \bigvee_{i \in I} f_{il}(a_i) \leq a \\ &\iff f_{il}(a_i) \leq a \quad \forall i \in I \\ &\iff a_i \leq f_i(a) \quad \forall i \in I \\ &\iff (a_i)_{i \in I} \leq (f_i(a))_{i \in I} = f(a) \end{aligned}$$

lo que prueba que  $f_l \dashv f$ . Y para la identidad de Frobenius, notemos que

$$\begin{aligned} f_l((a_i)_{i \in I} \wedge f(a)) &= f_l((a_i)_{i \in I} \wedge (f_i(a))_{i \in I}) = f_l((a_i \wedge f_i(a))_{i \in I}) \\ &= \bigvee_{i \in I} f_{il}(a_i \wedge f_i(a)) = \bigvee_{i \in I} (f_{il}(a_i) \wedge a) \\ &= \bigvee_{i \in I} f_{il}(a_i) \wedge a = f_l((a_i)_{i \in I}) \wedge a \end{aligned}$$

■

### 3.1.3. Morfismos étals

**Lema 3.23.** Sea  $f : A \rightarrow B$  un morfismo de marcos,  $a \in A$ ,  $b \in B$  y  $g : \downarrow a \rightarrow \downarrow b$  otro

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ a \wedge - \downarrow & & \downarrow b \wedge - \\ \downarrow a & \xrightarrow{g} & \downarrow b \end{array}$$

morfismo de marcos tal que el cuadrado conmuta, entonces  $g(x) = b \wedge f(x)$

para todo  $x \leq a$  y  $g_*(y) = f_*(b \succ y) \wedge a$  para todo  $y \leq b$ .

*Demostración.* Sea  $x \leq a$ , entonces:

$$g(x) = g(a \wedge x) = b \wedge f(x)$$

ya que el diagrama conmuta. Por otro lado sea  $y \leq b$ , entonces:

$$f_*(b \succ y) = f_* \circ (b \wedge -)_*(y) = (a \wedge -)_* \circ g_*(y) = a \succ g_*(y)$$

ya que si el cuadrado conmuta, entonces conmuta el cuadrado de los respectivos adjuntos derechos.

De lo anterior, por un lado tenemos que  $f_*(b \succ y) \wedge a \leq g_*(y)$ . Por otro lado, notemos que  $g_*(y) \leq a$ , y por lo obtenido previamente, tenemos que  $b \wedge f(g_*(y)) = g(g_*(y)) \leq y$  (Esta última desigualdad porque  $g \dashv g_*$ ). Luego eso es equivalente a que  $f(g_*(y)) \leq b \succ y$  (Por ser la implicación el adjunto derecho de sacar ínfimo), y por último  $g_*(y) \leq f_*(b \succ y)$  (ya que  $f \dashv f_*$ ). Y por lo tanto  $g_*(y) = f_*(b \succ y) \wedge a$ . ■

**Lema 3.24.** Sea  $f : A \rightarrow B$  un morfismo de marcos,  $a \in A$ ,  $b \in B$  y  $g : A_{v_a} \rightarrow B_{v_b}$  otro

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ v_a \downarrow & & \downarrow v_b \\ A_{v_a} & \xrightarrow{g} & B_{v_b} \end{array}$$

morfismo de marcos tal que el cuadrado conmuta, entonces  $g(x) = b \succ f(x)$

para todo  $x \in A_{v_a}$  y  $g_*(y) = f_*(y)$  para todo  $y \in B_{v_b}$ .

*Demostración.* Es un caso particular del lema 3.12, con los núcleos abiertos  $v_a$  y  $v_b$  ■

Sabemos de la observación 3.13 que hay un isomorfismo entre los cocientes abiertos y las secciones inferiores, veamos que en cierto sentido son equivalentes los dos lemas anteriores.

**Proposición 3.25.** Sean  $A \xrightarrow{f} B$  un morfismo de marcos,  $a \in A$  y  $b \in B$ , entonces lo siguiente es equivalente:

- Existe un morfismo de marcos  $g : A_{v_a} \rightarrow B_{v_b}$  que hace conmutar el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ v_a \downarrow & & \downarrow v_b \\ A_{v_a} & \xrightarrow{g} & B_{v_b} \end{array}$$

- Existe un morfismo de marcos  $\widehat{g} : \downarrow a \rightarrow \downarrow b$  que hace conmutar el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ a \wedge - \downarrow & & \downarrow b \wedge - \\ \downarrow a & \xrightarrow{\widehat{g}} & \downarrow b \end{array}$$

*Demostración.* Supongamos que conmuta el cuadrado  $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ v_a \downarrow & & \downarrow v_b \\ A_{v_a} & \xrightarrow{g} & B_{v_b} \end{array}$ , entonces, del lema 3.24, tenemos que  $g(x) = b \succ f(x)$  para todo  $x \in A_{v_a}$  y  $g_*(y) = f_*(y)$  para todo  $y \in B_{v_b}$ . Usaremos el isomorfismo entre las secciones inferiores y los cocientes abiertos, entonces definimos  $\widehat{g} : \downarrow a \rightarrow \downarrow b$  como  $\widehat{g}(w) := b \wedge g(a \succ w)$  para todo  $w \in \downarrow a$ . Tomemos  $z \in A$ , entonces

$$\widehat{g}(a \wedge z) = b \wedge g(a \succ (a \wedge z)) = b \wedge g(a \succ z) = b \wedge (b \succ f(z)) = b \wedge f(z)$$

lo que muestra que conmuta el cuadrado  $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ a \wedge - \downarrow & & \downarrow b \wedge - \\ \downarrow a & \xrightarrow{\widehat{g}} & \downarrow b \end{array}$

Ahora supongamos que conmuta el cuadrado  $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ a \wedge - \downarrow & & \downarrow b \wedge - \\ \downarrow a & \xrightarrow{\widehat{g}} & \downarrow b \end{array}$ , entonces del lema 3.23,

tenemos que  $\widehat{g}(x) = b \wedge f(x)$  para todo  $x \leq a$  y  $\widehat{g}_*(y) = f_*(b \succ y) \wedge a$  para todo  $y \leq b$ . Por el mismo isomorfismo mencionado previamente, definimos  $g(w) := b \succ \widehat{g}(a \wedge w)$  para todo  $w \in A_{v_a}$ . Tomemos  $z \in A$ , entonces

$$g(a \succ z) = b \succ \widehat{g}(a \wedge (a \succ z)) = b \succ \widehat{g}(a \wedge z) = b \succ (b \wedge f(z)) = b \succ f(z)$$

lo que muestra que conmuta el cuadrado  $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ v_a \downarrow & & \downarrow v_b \\ A_{v_a} & \xrightarrow{g} & B_{v_b} \end{array}$  ■

Notemos que la proposición anterior básicamente dice que si se tiene el siguiente diagrama

Pendiente  
arreglar  
diagra-  
ma

$$\begin{array}{ccccc} & & A & \xrightarrow{f} & B \\ & a \wedge - \downarrow & \downarrow & & \downarrow b \wedge - \\ v_a \downarrow & \downarrow a & \xrightarrow{\widehat{g}} & \downarrow b & \downarrow \\ \uparrow & \uparrow & & & \uparrow \\ v_a & a \wedge - & & & v_b \\ \cong & \cong & & & \cong \\ \downarrow & \downarrow & & & \downarrow \\ A_{v_a} & \xrightarrow{g} & A_{v_b} & & \end{array}$$

es equivalente que este diagrama commute a que commute el cuadrado  $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ a \wedge - \downarrow & & \downarrow b \wedge - \\ \downarrow a & \xrightarrow{\hat{g}} & \downarrow b \end{array}$ , lo

que a su vez es equivalente a que commute el cuadrado  $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ v_a \downarrow & & \downarrow v_b \\ A_{v_a} & \xrightarrow{g} & B_{v_b} \end{array}$

**Definición 3.26.** Sea  $f : A \rightarrow B$  un morfismo de marcos. Decimos que  $f$  es un morfismo étale si existen familias  $\{a_i\}_{i \in I} \subseteq A$  y  $\{b_i\}_{i \in I} \subseteq B$  tales que:

1.  $\bigvee_{i \in I} b_i = 1$ .
2. Para cada  $i \in I$   $f_i : A_{v_{a_i}} \rightarrow B_{v_{b_i}}$  definido como  $f_i(x) := b_i \succ f(x)$  es un isomorfismo.

**Lema 3.27.** *Todo morfismo de marcos étale es un morfismo abierto.*

*Demostración.* Sea  $f : A \rightarrow B$  un morfismo de marcos étale, entonces existen familias

$\{a_i\}_{i \in I} \subseteq A$  y  $\{b_i\}_{i \in I} \subseteq B$  tales que  $\bigvee_{i \in I} b_i = 1$  y el cuadrado  $\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ v_{a_i} \downarrow & & \downarrow v_{b_i} \\ A_{v_{a_i}} & \xrightarrow{g} & B_{v_{b_i}} \end{array}$  commuta y

$f_i$  es isomorfismo para toda  $i \in I$ .

Definamos  $f_l : B \rightarrow A$  como  $f_l(y) := \bigvee_{i \in I} (a_i \wedge f_{i*}(b_i \succ y))$  para cada  $y \in B$ . Veamos que es el adjunto izquierdo. Sean  $x \in A$  y  $y \in B$ , entonces

$$\begin{aligned} f_l(y) \leq x &\iff \bigvee_{i \in I} (a_i \wedge f_{i*}(b_i \succ y)) \leq x \\ &\iff a_i \wedge f_{i*}(b_i \succ y) \leq x \text{ para todo } i \in I \\ &\iff f_{i*}(b_i \succ y) \leq a_i \succ x \text{ para todo } i \in I \\ &\iff b_i \succ y \leq f_i(a_i \succ x) = b_i \succ f(x) \text{ para todo } i \in I \\ &\iff b_i \wedge y = b_i \wedge (b_i \succ y) \leq f(x) \text{ para todo } i \in I \\ &\iff \bigvee_{i \in I} (b_i \wedge y) = \bigvee_{i \in I} b_i \wedge y = y \leq f(x) \end{aligned}$$

Lo que prueba que  $f_l \dashv f$  (Recuérdese que se usa el hecho de que cada  $f_i$  son isomorfismos, y por lo tanto su inverso es tanto su adjunto derecho como izquierdo, lo que significa que  $f_{i*} = f_i^{-1}$ ).

Para la identidad de Frobenius primero observemos que para cada  $i \in I$  se tiene que

$$\begin{aligned} a_i \wedge f_{i*}(b_i \succ y) \wedge x &= a_i \wedge f_{i*}(b_i \succ y) \wedge (a_i \succ x) = a_i \wedge f_{i*}(b_i \succ y) \wedge f_{i*}f_i(a_i \succ x) \\ &= a_i \wedge f_{i*}((b_i \succ y) \wedge f_i(a_i \succ x)) = a_i \wedge f_{i*}((b_i \succ y) \wedge (b_i \succ f(x))) \\ &= a_i \wedge f_{i*}(b_i \succ (y \wedge f(x))) \end{aligned}$$

Y ahora veamos que

$$\begin{aligned} f_l(y) \wedge x &= \bigvee_{i \in I} (a_i \wedge f_{i*}(b_i \succ y)) \wedge x = \bigvee_{i \in I} (a_i \wedge f_{i*}(b_i \succ y) \wedge x) \\ &= \bigvee_{i \in I} (a_i \wedge f_{i*}(b_i \succ (y \wedge f(x)))) = f_l(y \wedge f(x)). \end{aligned}$$

■

**Corolario 3.28.** *Sea  $f : A \rightarrow B$  un morfismo de marcos.  $f$  es étale si y solo si:*

1.  *$f$  es abierto (e.i. existe  $f_l \dashv f$  que satisface Frobenius)*
2. *Existe una familia  $\{b_i\} \subseteq B$  tal que  $\bigvee_{i \in I} b_i = 1$  y  $f_{il} : B_{v_{b_i}} \rightarrow A_{v_{f_l(b_i)}}$  definido como  $f_{il}(z) := f_l(b_i) \succ f_l(b_i \wedge z)$  para todo  $z \in B_{v_{b_i}}$ , es un isomorfismo.*

*Demostración.* Si  $f$  es étale, por el lema 3.27  $f$  es abierto, y existen familias  $\{a_i\}_{i \in I} \subseteq A$  y  $\{b_i\}_{i \in I} \subseteq B$  tales que  $\bigvee_{i \in I} b_i = 1$  y se tiene para cada  $i \in I$  un isomorfismo  $f_i : A_{v_{a_i}} \rightarrow B_{v_{b_i}}$

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ v_{a_i} \downarrow & & \downarrow v_{b_i} \\ A_{v_{a_i}} & \xrightarrow{f_i} & B_{v_{b_i}} \end{array}$$

que hace commutar el cuadrado

Como  $f_i$  es un isomorfismo, definimos  $f_{il} := f_i^{-1}$ . Y entonces tenemos que commuta el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{f_l} & B \\ a_i \wedge - \uparrow & & \uparrow b_i \wedge - \\ A_{v_{a_i}} & \xleftarrow{f_{il}} & B_{v_{b_i}} \end{array}$$

que

$$f_l(b_i \wedge z) = a_i \wedge f_{il}(z) \implies a_i \succ f_l(b_i \wedge z) = a_i \succ (a_i \wedge f_{il}(z)) = f_{il}(z)$$

considerando las propiedades de la implicación y que  $f_{il}(z)$  es un punto fijo del núcleo  $v_{a_i}$ . Solo resta ver que

$$f_l(b_i) = f_l(b_i \wedge 1) = f_{il}(1) \wedge a_i = a_i$$

puesto que el cuadrado de adjuntos izquierdos commuta y el isomorfismo preserva el elemento tope.

Por otro lado, supongamos que  $f$  satisface 1. y 2., entonces definimos  $a_i := f_l(b_i)$  y veamos que para  $z \in B_{v_{b_i}}$  tenemos que

$$a_i \wedge f_{il}(z) = a_i \wedge (a_i \succ f_l(b_i \wedge z)) = a_i \wedge f_l(b_i \wedge z) = f_l(f(a_i) \wedge b_i \wedge z) = f_l(b_i \wedge z)$$

considerando que  $f_l$  satisface la identidad de Frobenius y que  $b_i \leq f(a_i) = f(f_l(b_i))$ . Esto

significa que el cuadrado

$$\begin{array}{ccc} A & \xleftarrow{f_l} & B \\ a_i \wedge - \uparrow & & \uparrow b_i \wedge - \\ A_{v_{a_i}} & \xleftarrow{f_{il}} & B_{v_{b_i}} \end{array}$$

commuta, y por lo tanto commuta el cuadrado

$A \xrightarrow{f} B$   
 de los adjuntos derechos  $v_{a_i} \downarrow \quad \downarrow v_{b_i}$  (considerando que  $f_{il}$  es un isomorfismo, su inversa  
 $A_{v_{a_i}} \xrightarrow{f_i} B_{v_{b_i}}$   
 es su adjunto derecho). Lo que prueba que  $f$  es étale. ■

**Observación 3.29.** Para un marco arbitrario  $A$  y un elemento  $a \in A$ :

- El morfismo de paso al cociente  $A \xrightarrow{v_a^*} A_{v_a}$  es étale. Usando el lema anterior, ya sabemos que es abierto (lema 3.18). Luego tomamos la familia unipuntual  $1 \subseteq A_{v_a}$  que obviamente cubre ( $\bigvee\{1\} = 1$ ), y es justo la identidad en  $A_{v_a}$  el que es el isomorfismo entre los cocientes.
- El morfismo  $A \xrightarrow{a \wedge -} \downarrow a$  es étale. El morfismo es abierto (su adjunto izquierdo es la inclusión, y satisface Frobenius). Luego la familia  $\{a\} \subseteq \downarrow a$  cubre, y de nuevo la identidad del cociente  $A_{v_a}$  es el isomorfismo que hace étale al morfismo deseado.

**Proposición 3.30.** Sea  $:f_l : B \rightarrow A$  un morfismo de copos entre dos marcos. Lo siguiente es equivalente:

- Existe un morfismo de marcos  $f : A \rightarrow B$  tal que es étale y  $f_l \dashv f$ .
- $f_l$  preserva supremos arbitrarios y existe una familia  $\{b_i\} \subseteq B$  tal que  $\bigvee_{i \in I} b_i = 1$  y  $f_{il} : B_{v_{b_i}} \rightarrow A_{v_{f_l(b_i)}}$  definido como  $f_{il}(z) := f_l(b_i) \succ f_l(b_i \wedge z)$  para todo  $z \in B_{v_{b_i}}$ , es un isomorfismo.

*Demostración.* Supongamos existe  $f$  un morfismo de marcos étale que es adjunto derecho de  $f_l$ . Como  $f_l$  tiene adjunto derecho, entonces preserva supremos arbitrarios y del corolario 3.28 existen la familia  $\{b_i\}_{i \in I} \subseteq B$  tal que cubre y  $f_{il} : B_{v_{b_i}} \rightarrow A_{v_{a_i}}$  es un isomorfismo.

Para el converso, como  $f_l$  preserva supremos arbitrarios, entonces tiene adjunto derecho  $f : A \rightarrow B$  (que solo sabemos es un morfismo de COPOS). Para ver que  $f$  es morfismo de marcos, es suficiente con probar que respeta supremos arbitrarios (por tener adjunto izquierdo, ya abre ínfimos y preserva tope); para eso veremos que tiene adjunto derecho. Definamos  $f_* : B \rightarrow A$  como  $f_*(y) := \bigwedge_{i \in I} f_{il}(b_i \succ y)$  para cada  $y \in B$ . Ahora sean  $x \in A$ ,  $y \in B$  entonces, por un lado

$$\begin{aligned}
 x \leq f_*(y) &\iff x \leq \bigwedge_{i \in I} f_{il}(b_i \succ y) \\
 &\iff x \leq f_{il}(b_i \succ y) \text{ para todo } i \in I \\
 &\implies a_i \succ x \leq a_i \succ f_{il}(b_i \succ y) = f_{il}(b_i \succ y) \text{ para todo } i \in I \\
 &\implies f_i(a_i \succ x) = b_i \succ f(x) \leq b_i \succ y \text{ para todo } i \in I \\
 &\implies b_i \wedge f(x) \leq y \text{ para todo } i \in I \\
 &\iff \bigvee_{i \in I} (b_i \wedge f(x)) = \bigvee_{i \in I} b_i \wedge f(x) = f(x) \leq y
 \end{aligned}$$

y por otro lado

$$f(x) \leq y \iff \bigvee_{i \in I} b_i \wedge f(x) =$$

■

**Proposición 3.31.** *La composición de morfismos étals de marcos es un morfismo étale.*

*Demostración.* Sean  $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \in \text{Frm}$  dos morfismos étals. Entonces existen las familias  $\{b_i\}_{i \in I} \subseteq B$ ,  $\{c_j\}_{j \in J} \subseteq C$  tales que  $\bigvee_{i \in I} b_i = 1$ ,  $\bigvee_{j \in J} c_j = 1$  y el diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 & A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} C \\
 v_{f_l(b_i)} \swarrow & & \searrow v_{b_i} & & \swarrow v_{g_l(c_j)} \\
 A_{v_{f_l(b_i)}} & \xleftarrow[\cong]{f_{il}} & B_{v_{b_i}} & \xleftarrow[\cong]{g_{jl}} & B_{v_{g_l(c_j)}} \\
 & \searrow & & \swarrow & \\
 & & C_{v_{c_j}} & &
 \end{array}$$

commuta (los morfismos  $f_{il}$  y  $g_{jl}$  se dan en el corolario 3.28).

Sea la familia  $\{\gamma_{ij}\}_{(i,j) \in I \times J} \subseteq C$  donde  $\gamma_{ij} := g(b_i) \wedge c_j$ . Veamos que

■

**Lema 3.32.** *Sea  $f : A \rightarrow B \in \text{Frm}$ . Entonces  $f$  es un morfismo étale si y solo si existe  $X \subseteq B$  tal que:*

- $\bigvee X = 1$ .
- Para cada  $x \in X$  el morfismo  $v_x^* \circ f$  es suprayectivo con núcleo abierto.

*Demostración.* Si  $f$  es étale entonces existen familias  $\{a_i\}_{i \in I} \subseteq A$  y  $\{b_i\}_{i \in I} \subseteq B$  tales que  $\bigvee_{i \in I} b_i = 1$  y se tiene para cada  $i \in I$  un isomorfismo  $f_i : A_{v_{a_i}} \rightarrow B_{v_{b_i}}$  que hace commutar el

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 v_{a_i} \downarrow & & \downarrow v_{b_i} \\
 A_{v_{a_i}} & \xrightarrow[f_i]{\quad} & B_{v_{b_i}}
 \end{array}$$

cuadrado. Esto significa que  $v_{a_i} = f_* \circ v_{b_i}^* \circ f$  (Recordemos que el adjunto derecho de un paso al cociente es la inclusión), lo que significa que  $v_x^* \circ f$  tiene núcleo abierto, además debe ser suprayectiva, pues tenemos que es igual a la composición de dos funciones suprayectivas ( $v_{a_i}$  y  $f_i$ ).

Por otro lado, supongamos que existe  $X \subseteq B$  tal que  $\bigvee X = 1$  y para cada  $x \in X$  el morfismo  $v_x^* \circ f$  es suprayectivo con núcleo abierto. Entonces, para cada  $x \in X$  existe  $a_x \in A$  tal que  $v_{a_x} = f_* \circ v_x^* \circ f$ , entonces por el lema 3.9, tenemos que los cocientes son isomorfos,

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 v_{a_x} \downarrow & & \downarrow v_x \\
 A_{v_{a_x}} & \xrightarrow[f_x]{\quad} & B_{v_x}
 \end{array}$$

lo que significa que el cuadrado  $v_{a_x} \downarrow$  es suprayectivo con núcleo abierto. Donde  $f_x = (v_x^* \circ f)^\sharp$  (Detalles de  $(-)^{\sharp}$  en [Zal23]).

■

**Lema 3.33.** *Sea el triángulo commutativo*

$$\begin{array}{ccc}
 & A & \\
 f \swarrow & & \searrow g \\
 B & \xrightarrow[h]{\quad} & C
 \end{array}$$

*Si  $f$  y  $g$  son étals, entonces  $h$  es étale.*

*Demostración.* Por ser  $f$  y  $g$  étale, existen  $X \subseteq B$  y  $Y \in C$  tales que  $\bigvee X = 1$ ,  $\bigvee Y = 1$ , y para cada  $x \in X$  y  $y \in Y$ , el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
 A_{k_x} & \xleftarrow{k_x^*} & A & \xrightarrow{k_y^*} & A_{k_y} \\
 f_x \downarrow & \swarrow f & \searrow g & & \downarrow g_y \\
 B_{v_x} & \xleftarrow{v_x^*} & B & \xrightarrow{h} & C \xrightarrow{v_y^*} C_{v_y}
 \end{array}$$

comuta. Donde  $f_x$  y  $g_y$  son isomorfismos, y los núcleos  $k_x, k_y \in NA$  son abiertos y corresponden a los núcleos de los morfismos  $v_x^* \circ f$  y  $v_y^* \circ g$  respectivamente.

Definamos  $Z := \{y \wedge h(x) | x \in X, y \in Y\}$ , veamos que cubre:

$$\begin{aligned}
 \bigvee Z &= \bigvee_{x \in X, y \in Y} (y \wedge h(x)) = \bigvee_{x \in X} \bigvee_{y \in Y} (y \wedge h(x)) \\
 &= \bigvee_{x \in X} (\bigvee_{y \in Y} y \wedge h(x)) = \bigvee_{x \in X} h(x) \\
 &= h(\bigvee_{x \in X} x) = 1
 \end{aligned}$$

Recordando que  $X$  y  $Y$  cubren, la distributividad de un marco, y que  $h$  es morfismo de marcos.

Notemos que para  $z = y \wedge h(x)$  tenemos que  $z \leq y$ , por lo tanto  $C_{v_z} \subseteq C_{v_y}$  y  $v_z = v_y \circ v_z$  ■

## 3.2. Algunas equivalencias importantes

**3.2.1.**  $\text{Et}/A \cong \text{Gav}(A)$

**3.2.2.**  $\text{Con}(A) \cong \text{Gav}(A)$

**3.2.3.** **Topos localico**



# Capítulo 4

## Teoría de topos

4.1. La 2-categoría de topos

4.2. Adjunción entre  $\mathcal{TOP}$  y  $(\text{Frm})^{\text{op}}$

4.3. Teoría de conjuntos

4.3.1. Separación

4.3.2. Vacío y extensionalidad

4.3.3. Elección y finitud

4.3.4. Relación de pertenencia

4.4. Teoría local y global en Con

4.4.1. Objeto-conjunto transitivo

4.4.2. Retícula de objeto-conjunto transitivo

4.4.3. Objeto-conjunto

4.5. Zermelo-Franke en  $\mathcal{E}$