

UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA

Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías

Curso introductorio a la teoría de topos

Impartido por:

Dr. Luis Ángel Zaldívar Corichi

Elaborado por:

Alejandro Aceves, Josué Maldonado, Juan Carlos Monter

Índice general

1. Preliminares	3
1.1. Construcciones básicas	3
1.1.1. Categorías	3
1.1.2. Principio de dualidad	4
1.1.3. Funtores	5
1.1.4. Transformaciones naturales	5
1.2. Límites/colímites	6
1.2.1. Límites	6
1.2.2. Colímites	9
1.3. Adjunciones	11
1.4. Extensiones de Kan	15
1.5. Categorías extensivas	16
2. Gavillas sobre Top	19
2.1. Gavillas sobre Top	19
2.2. El funtor Γ	23
2.3. El funtor Λ	24
2.4. $\mathcal{H}L/S \cong \text{Gav}(S)$	27
2.5. Morfismos ultrafinitos	27
2.6. Cambio de base	27
3. Gavillas sobre locales	28
3.1. Locales y gavillas	28
3.2. Algunas equivalencias importantes	28
3.2.1. $\text{Et}/A \cong \text{Gav}(A)$	28
3.2.2. $\text{Con}(A) \cong \text{Gav}(A)$	28
3.2.3. Topos localico	28
4. Teoría de topos	29
4.1. La 2-categoría de topos	29
4.2. Adjunción entre $\mathcal{T}\mathcal{O}\mathcal{P}$ y $(\text{Frm})^{\text{op}}$	29
4.3. Teoría de conjuntos	29
4.3.1. Separación	29
4.3.2. Vacío y extensionalidad	29
4.3.3. Elección y finitud	29

4.3.4.	Relación de pertenencia	29
4.4.	Teoría local y global en Con	29
4.4.1.	Objeto-conjunto transitivo	29
4.4.2.	Retícula de objeto-conjunto transtivo	29
4.4.3.	Objeto-conjunto	29
4.5.	Zermelo-Franke en \mathcal{E}	29

Capítulo 1

Preliminares

1.1. Construcciones básicas

1.1.1. Categorías

Definición 1.1 (Categoría). Una categoría \mathcal{C} consta de los siguientes datos:

- Una clase (no necesariamente un conjunto) de objetos $\text{Ob}(\mathcal{C})$, y una clase de morfismos $\text{Mor}(\mathcal{C})$.
- A cada par de objetos $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ le corresponde una clase de morfismos (flechas) de X en Y , que se denotará por $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$.
- Para cada terna de objetos $X, Y, Z \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ está definida una función llamada composición

$$\begin{aligned}\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \times \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, Z) &\rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Z) \\ (f, g) &\mapsto g \circ f.\end{aligned}$$

Además, estos datos satisfacen las siguientes propiedades

- La composición es asociativa, es decir, $h \circ (f \circ g) = (h \circ f) \circ g$.
- Para cada objeto $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ existe un morfismo $\text{Id}_X \in \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, X)$ tal que $f \circ \text{Id}_X = \text{Id}_X \circ f$.

Para cualesquiera $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, una manera de denotar los morfismos de X en Y es por $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ tal como se muestra en la definición anterior. Sin embargo, también es común denotarlo por $\text{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ o $\mathcal{C}(X, Y)$.

A continuación se presentan algunos de los ejemplos clásicos de categorías.

Ejemplo 1.

1. Con denota la categoría de conjuntos cuyos objetos son conjuntos y, tiene como morfismos las funciones entre conjuntos. La composición entre morfismos está bien definida, y el morfismo identidad es la función identidad.

2. Vect_k es la categoría que tiene por objetos espacios vectoriales sobre un campo k y, como morfismos transformaciones lineales entre espacios vectoriales.
3. Sean A y B conjuntos parcialmente ordenados. Un morfismo de A a B es una función monótona (creciente). Esto es, para cualesquiera $a, b \in A$, $a \leq b$ implica que $f(a) \leq f(b)$. Así, los conjuntos parcialmente ordenados junto con sus morfismos constituyen la categoría Pos . Un caso “más general” es el siguiente: para cualesquiera dos conjuntos parcialmente ordenados A y B , estos se pueden ver como categorías, por lo que un morfismo de A a B no es más que un funtor.
4. Algunos ejemplos más son los siguientes: Top es la categoría de espacios topológicos con morfismos las funciones continuas. Por otro lado, tenemos las categorías de grupos y la categoría de anillos con unidad, Grp y Ring , cuyos morfismos son homomorfismos de grupos y homomorfismos de anillos, respectivamente.

Definición 1.2 (Categoría pequeña). Una categoría \mathcal{C} se dice *pequeña* si la clase objetos $\text{Ob}(\mathcal{C})$ y la clase de morfismos $\text{Mor}(\mathcal{C})$ es un conjunto.

Definición 1.3 (Objeto final/inicial). Sea \mathcal{C} una categoría. Un objeto $T \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ es *final* si para cualquier otro objeto $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ existe un único morfismo $f : X \rightarrow T$. Análogamente, un objeto $I \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ se dice *inicial* si para cualquier $X \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ existe un único morfismo $g : I \rightarrow X$.

Proposición 1.4. *Los objetos finales/iniciales, si existen, son únicos salvo isomorfismo único [Mac13].*

1.1.2. Principio de dualidad

De la definición de objeto inicial y final, es común pensar que uno es la parte “dual” del otro. En la práctica, es común encontrarse con ciertas propiedades que satisface una categoría, sin embargo, muchas de estas propiedades tienen una noción “dual” en el sentido de que también se siguen cumpliendo aún cuando se cambia la dirección de las flechas entre los objetos. Esto motiva a la siguiente definición.

Definición 1.5 (Categoría opuesta). Sea \mathcal{C} una categoría. Se define la *categoría opuesta* de \mathcal{C} , denotada por \mathcal{C}^{op} , como la categoría cuyos objetos son los mismos que los de \mathcal{C} , i.e., $\text{Ob}(\mathcal{C}^{\text{op}}) = \text{Ob}(\mathcal{C})$, pero sus morfismos van en sentido opuesto, esto es, si $X^{\text{op}} = X, Y^{\text{op}} = Y \in \mathcal{C}^{\text{op}}$, una flecha $f^{\text{op}} : X^{\text{op}} \rightarrow Y^{\text{op}}$ en \mathcal{C}^{op} es una flecha $f : Y \rightarrow X$ en \mathcal{C} . De este modo se tiene que

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}^{\text{op}}}(X, Y) = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Y, X).$$

Además, la ley de composición está dada por $f^* \circ g^* = (g \circ f)^*$. Observemos que $(\mathcal{C}^{\text{op}})^{\text{op}} = \mathcal{C}$, es decir, la categoría opuesta de \mathcal{C}^{op} es la categoría original.

La importancia de trabajar con la categoría dual reside en el siguiente resultado conocido como el principio de dualidad.

Teorema 1.6. *Supongamos la validez, en toda categoría, de un enunciado que expresa la existencia de algún objeto o morfismo o la igualdad de algunas composiciones. Entonces, el "enunciado dual", que se obtiene al voltear la dirección de las flechas y al sustituir cada composición $f \circ g$ por $g \circ f$ en el enunciado original, es también válido en toda categoría.*

1.1.3. Funtores

Definición 1.7 (Funtor covariante). Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} categorías. Un funtor *covariante* $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ consiste de lo siguiente:

- Una asignación en objetos: $F : \text{Ob}(\mathcal{A}) \rightarrow \text{Ob}(\mathcal{B})$.
- Para cada $X, Y \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ se tiene una asignación

$$F : \text{Mor}_{\mathcal{A}}(X, Y) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{B}}(F(X), F(Y)).$$

Que satisfacen las siguientes propiedades.

- F respeta la identidad:

$$F(\text{Id}_X) = \text{Id}_{F(X)}.$$

- Respetar la composición:

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f).$$

Definición 1.8 (Funtor contravariante). Diremos que un funtor es *contravariante* si corresponde a un funtor covariante de la forma $F : \mathcal{A}^{\text{op}} \rightarrow \mathcal{B}$.

De la definición anterior, se tiene que si $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ son funtores, entonces su composición $G \circ F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ está dada por

- i) El compuesto en objetos,

$$(G \circ F)(A) = G(F(A)), \quad A \in \mathcal{A}, \quad G \in \mathcal{C}.$$

- ii) Para cada $A, B \in \mathcal{A}$, el compuesto en morfismos

$$(G_{F(A), F(B)} \circ F_{A, B}) : \text{Mor}_{\mathcal{A}}(A, B) \rightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(G(F(A)), G(F(B))).$$

Con esto en mente, definimos lo siguiente.

Definición 1.9. Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} categorías. Diremos que \mathcal{A} y \mathcal{B} son *isomorfas* si existen funtores $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que uno es inverso del otro, i.e., $F \circ G = \text{id}_{\mathcal{B}}$ y $G \circ F = \text{id}_{\mathcal{A}}$.

Añadir
ejemplos

1.1.4. Transformaciones naturales

La manera de relacionar objetos de una categoría es mediante sus morfismos. Como vimos anteriormente, dadas dos categorías es posible obtener información de una a partir de la otra mediante un funtor. En esta sección, estamos interesados en estudiar transformaciones naturales, que a grandes rasgos, estas se pueden entender como morfismos entre funtores.

Definición 1.10 (Transformación natural). Sean $F, G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ funtores. Una *transformación natural* es una tupla (F, η, G) , en donde $\eta : F \rightarrow G$ es una colección de morfismos $\eta_A : F(A) \rightarrow G(A)$ en \mathcal{B} tal que

1. Para cada $A \in \mathcal{A}$, se tiene que $\eta_A : F(A) \rightarrow G(A)$.
2. Para toda $f \in \mathcal{A}(A, B)$, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\eta_A} & G(A) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(B) & \xrightarrow{\eta_B} & G(B) \end{array}$$

conmuta.

Si $\eta_A : F(A) \rightarrow G(A)$ es un isomorfismo para todo $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$, diremos que $\eta : F \rightarrow G$ es un *isomorfismo natural*, el cual denotamos por $F \cong G$. De esto se sigue que $\eta^{-1} : F \rightarrow G$ dada por $\eta_A^{-1} = (\eta_A)^{-1}$ también es una transformación natural.

Ejemplo 2. Sea \mathcal{A} una categoría pequeña y \mathcal{B} una categoría arbitraria. La categoría de funtores, denotada por $\text{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ (o algunas veces también es denotada por $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$), tiene como objetos funtores con dominio \mathcal{A} y codominio \mathcal{B} . Para cualesquiera dos funtores en $\text{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$, un morfismo entre estos es una transformación natural.

Definición 1.11 (Funtor representable). Sea \mathcal{C} una categoría y $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Con}$ un funtor. Diremos que F es *representable* si existe un isomorfismo natural entre F y $\text{Hom}(A, -)$, para algún $A \in \text{Ob}(\mathcal{C})$. En este caso, se dice que F es representado por A .

Una caracterización de cuando un funtor es representable es la siguiente (véase [Mac13]). Un funtor $F : \mathcal{C}^{\text{op}} \rightarrow \text{Con}$ es representable si, y solo si, $F \cong h_X$ para algún $X \in \text{Top}$. Esto motiva a enunciar uno de los resultados de mayor importancia en la teoría de categorías.

Lema 1.12 (Lema de Yoneda). Sea $F : \mathcal{C} \rightarrow \text{Con}$ un funtor. Dado el funtor $\text{Hom}(C, -)$, se tiene que el morfismo

$$\begin{aligned} \varphi : \text{Hom}(\text{Hom}(A, -)) &\rightarrow F(A) \\ \eta &\mapsto \eta_A \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Añadir en los ejemplos de funtores el funtor de puntos h_X .

1.2. Límites/colímites

1.2.1. Límites

Definición 1.13. Sea $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ un funtor. Un *cono* sobre F es una pareja $(C, \langle P_A \rangle_{A \in \mathcal{A}})$ que consiste de lo siguiente:

1. Un objeto $C \in \mathcal{C}$,

$$\begin{array}{ccccc}
A & & FA & \xrightarrow{F\alpha} & FA' \\
\alpha \downarrow & \rightsquigarrow & \nwarrow P_A & & \nearrow P_{A'} \\
A' & & C & &
\end{array}$$

2. Para cada objeto $A \in \mathcal{A}$, se tiene una flecha $(P_A : C \rightarrow FA) \in \mathcal{C}$ tal que, para cada flecha $(A \xrightarrow{\alpha} A') \in \mathcal{A}$, el siguiente diagrama es sólido en \mathcal{C}

Definición 1.14. Sea $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ un funtor. Un *límite* sobre F es un cono $(L, \langle P_A \rangle_{A \in \mathcal{A}})$ sobre F con la siguiente propiedad: para cualquier otro cono $(M, \langle q_A \rangle_{A \in \mathcal{A}})$ sobre F , existe un único morfismo $m : M \rightarrow L$ tal que, para todo $A \in \mathcal{A}$, el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
M & \xrightarrow{!m} & L \\
q_A \searrow & & \swarrow P_A \\
& FA &
\end{array}$$

conmuta. Esto es, $q_A = P_A \circ m$, para todo $A \in \mathcal{A}$.

A los morfismos $(P_A : L \rightarrow FA, \quad A \in \mathcal{A})$ se les llama *proyecciones*, y al límite de F se denota como $\varprojlim_{A \in \mathcal{A}} FA$.

Lema 1.15. El límite de un funtor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$, cuando existe, es único salvo isomorfismo natural.

Demostración. ■

Pendiente

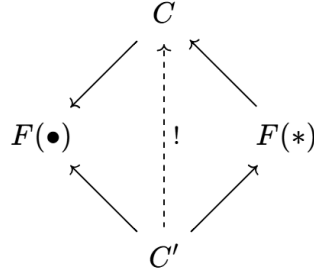
Lema 1.16. Sea $(L, \langle P_A \rangle_{A \in \mathcal{A}})$ el límite de $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$. Son morfismos iguales $\left(M \begin{smallmatrix} f \\ \rightleftarrows \\ g \end{smallmatrix} L \right) \in \mathcal{C}$ si, para todo $A \in \mathcal{A}$, $P_A f = P_A g$.

Demostración. La demostración es inmediata de la propiedad universal del límite. ■

A continuación, se muestran algunos de los ejemplos de límites.

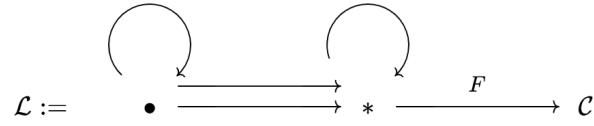
Ejemplo 3.

1. Sea \mathcal{A} una categoría vacía, \mathcal{C} una categoría y $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ un funtor. Entonces, el límite de F es un objeto $C \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ tal que, para todo $C' \in \text{Ob}(\mathcal{C})$, existe un único morfismo $C' \rightarrow C$. Es decir, C es el objeto final de \mathcal{C} .
2. Sea \mathcal{T} una categoría con objetos $\bullet, *$, y $F : \mathcal{T} \rightarrow \mathcal{C}$ un funtor. Entonces, un límite para F es

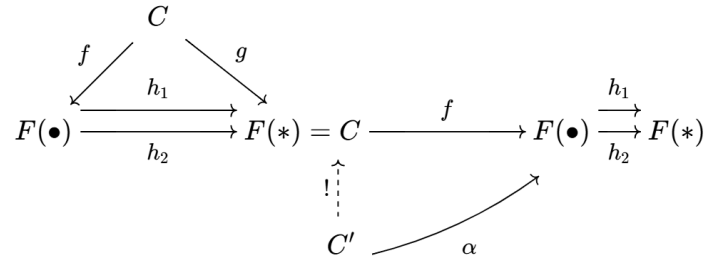


Por lo tanto, C define un producto para $F(\bullet)$ y $F(*)$, el cual denotamos como $C = F(\bullet) \times F(*)$.

3. Sea \mathcal{L} la categoría que consiste de los objetos \bullet y $*$, dos flechas paralelas de \bullet a $*$, y las respectivas identidades. Sea $F : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{C}$ un funtor. De manera diagramática tenemos lo siguiente

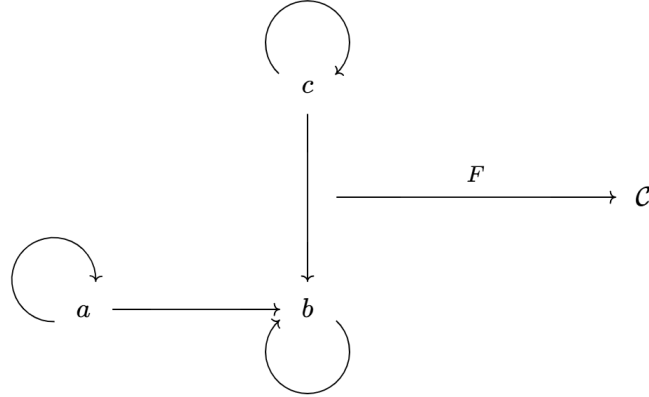


Así, el límite sobre \mathcal{F} de la forma \mathcal{L} es

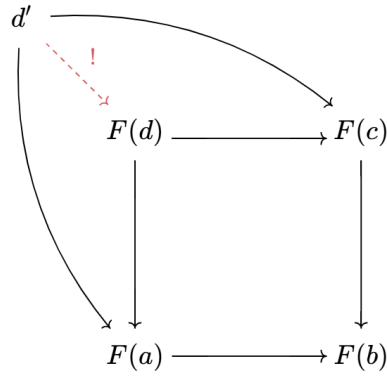


Del diagrama anterior se tiene que, $g = h_1 \circ f = h_2 \circ f$. Por lo tanto, C es el igualador de $F(\mathcal{L})$.

4. Sea P la categoría que consiste de tres objetos a , b y c , dos flechas $a \rightarrow b$, $b \rightarrow c$, y las respectivas identidades. Sea $F : P \rightarrow \mathcal{C}$ un funtor. En un diagrama se tiene que



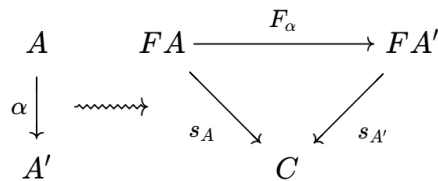
Por lo cual, un límite sobre F de la forma P es el pullback

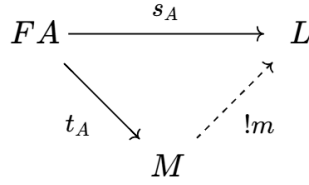


1.2.2. Colímites

Definición 1.17. Sea $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ un funtor. Un *cocono* sobre F es una pareja $(C, \langle s_A \rangle)_{A \in \mathcal{A}}$ que consiste de lo siguiente

1. Un objeto $C \in \mathcal{C}$.
2. Para cada $A \in \mathcal{A}$, un morfismo $(s_A : FA \rightarrow C) \in \mathcal{C}$ tal que, para cada flecha $(A \xrightarrow{\alpha} A') \in \mathcal{A}$, el siguiente diagrama conmuta en \mathcal{C} . Es decir, $s_A = s_{A'} \circ F_\alpha$.





Definición 1.18. Un *colímite* sobre F es un cocono $(L, \langle s_A \rangle_{A \in \mathcal{A}})$ con la siguiente propiedad: para cualquier otro cocono $(M, \langle t_A \rangle_{A \in \mathcal{A}})$ el siguiente diagrama es conmutativo. Esto es, para todo $A \in \mathcal{A}$, $t_A = m s_A$.

Por el principio de dualidad, los ejemplos de colímites se obtienen de manera dual a los ejemplos de límites dados en el Ejemplo 3.

Lema 1.19. Sea $\left(A \xrightarrow{h} B \begin{smallmatrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{smallmatrix} C \right) \in \text{Con}$. Este es un igualador si, y solo si, para cada $b \in B$ tal que $f(b) = g(b)$ implica que existe un único $a \in A$ tal que $h(a) = b$.

Demostración. _____



Pendiente

Definición 1.20. Una categoría \mathcal{C} es *completa* si cada funtor $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tiene límite, donde \mathcal{D} es una categoría pequeña. Dualmente, \mathcal{C} es *cocompleta* si todo funtor $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tiene colímite. Si \mathcal{C} es completa y cocompleta, diremos que es *bicompleta*.

Lema 1.21. La categoría Con es bicompleta. En particular, los (co)límites de cada funtor se calculan puntualmente.

Demostración. _____



Pendiente

Lema 1.22. Sea (A, \leq) un conjunto parcialmente ordenado. Entonces, la categoría

$$\text{Con}^{(A, \leq)^{\text{op}}} : [(A, \leq)^{\text{op}}, \text{Con}]$$

es bicompleta y los (co)límites se calculan puntualmente.

Demostración. _____



Pendiente

Definición 1.23. Sea \mathcal{C} una categoría pequeña.

- Diremos que \mathcal{C} es *finita* si $\text{Ob}(\mathcal{C})$ y $\text{Mor}(\mathcal{C})$ son conjuntos finitos.
- Un límite sobre $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}'$ es *finito* si \mathcal{C} es finita.

Definición 1.24 (Categoría filtrante). Una categoría \mathcal{C} es *filtrante* si

1. \mathcal{C} es no vacía.
2. Para cada $C_1, C_2 \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ existe $C \in \mathcal{C}$ junto con morfismos $C_1 \xrightarrow{f_1} C$ y $C_2 \xrightarrow{f_2} C$.

3. Para cualesquiera $C_1, C_2 \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ y morfismos $C_1 \xrightleftharpoons[f_2]{f_1} C_2$ existe $C_3 \in \text{Ob}(\mathcal{C})$ y un morfismo $C_1 \xrightleftharpoons[f_2]{f_1} C_2 \xrightarrow{h} C_3$ tal que $hf_1 = hf_2$.

Definición 1.25. Un *colímite* sobre $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ es filtrante si \mathcal{C} es filtrante.

Lema 1.26. Sea $F : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ un funtor con \mathcal{B} finita y \mathcal{C} filtrante. Entonces, existe un cono sobre F en \mathcal{C} .

La demostración se sigue del siguiente resultado.

Proposición 1.27. Sea \mathcal{C} una categoría pequeña.

1. Sea $\{C_i \mid i \in I\}$ un conjunto finito de objetos en \mathcal{C} . Entonces, podemos encontrar un objeto $C \in \mathcal{C}$ y morfismos $\{C_i \rightarrow C \mid i \in I\}$.
2. Dado un conjunto finito $\{f_i : C \rightarrow C' \mid i \in I\}$, podemos encontrar un objeto $C'' \in \mathcal{C}$ y un morfismo $C' \xrightarrow{f} C''$ tal que $ff_i = ff_j$, para todo $i, j \in I$.

Demostración. ■

1.3. Adjunciones

Definición 1.28 (Adjunción). Sean \mathcal{C} y \mathcal{D} categorías. Una *adjunción* entre \mathcal{C} y \mathcal{D} es una terna (F, G, φ) donde $\mathcal{D} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathcal{C}$ son funtores y φ es una función que asigna a cada par de objetos $C \in \mathcal{C}$ y $D \in \mathcal{D}$ una biyección

$$\varphi_{\mathcal{D}, \mathcal{C}} : \mathcal{D}(D, GC) \cong \mathcal{C}(FD, C).$$

En este caso, decimos que F es adjunto izquierdo y G es adjunto derecho, lo cual es denotado por $F \dashv G$.

En lo anterior, $\varphi_{\mathcal{D}, \mathcal{C}}$ de hecho es un isomorfismo natural. El siguiente resultado nos dice que las adjunciones se comportan bien bajo composición.

Lema 1.29. Sean $\mathcal{D} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathcal{C} \xrightleftharpoons[G']{F'} \mathcal{B}$ funtores. Si $F \dashv G$ y $F' \dashv G'$, entonces $F' \circ F \dashv G \circ G'$.

Demostración. Como $F \dashv G$ se tiene que, para cada par de objetos $C \in \mathcal{C}$ y $D \in \mathcal{D}$, hay una biyección

$$\varphi_{\mathcal{D}, \mathcal{C}} : \mathcal{D}(D, GC) \cong \mathcal{C}(FD, C). \quad (1.1)$$

Del mismo modo, al ser $F' \dashv G'$, para cada par de objetos $C' \in \mathcal{C}$ y $B \in \mathcal{B}$, existe una biyección

$$\varphi_{\mathcal{C}, \mathcal{B}} : \mathcal{C}(C, G'B) \cong \mathcal{B}(F'C', B). \quad (1.2)$$

Si $D \in \mathcal{D}$ y $B \in \mathcal{B}$, al primero evaluar en (1.1) en los objetos C y $G'B \in \mathcal{C}$, y después evaluar (1.2) en $FC \in \mathcal{D}$ y $B \in \mathcal{B}$, obtenemos

$$\mathcal{D}(D, G(G'B)) \cong \mathcal{C}(FD, G'B) \cong \mathcal{B}(F'(FC), B).$$

Por lo tanto, $F' \circ F \dashv G \circ G'$ tal como se quería. ■

A continuación se enuncian un par de resultados en los que se muestra la relación entre objetos iniciales/finales y adjuntos. Esto es, si una categoría tiene objeto inicial, este da lugar a un adjunto izquierdo. Dualmente, si la categoría tiene objeto final, este determina un adjunto derecho.

Proposición 1.30. *Si \mathcal{A} y \mathcal{B} son categorías con objeto inicial entonces el funtor*

$$\begin{aligned} \sigma_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{B} \\ A &\mapsto (A, 0) \\ f &\mapsto (f, 1_0) \end{aligned}$$

es adjunto izquierdo de la proyección $\pi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \times \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$.

Proposición 1.31. *Sean \mathcal{A} , \mathcal{B} y \mathcal{C} categorías con coproductos finitos y funtores*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{A} \\ G \downarrow & & \\ \mathcal{B} & & \end{array}$$

Entonces, el funtor $\langle F, G \rangle : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ si, y solo si, ambos funtores F y G tienen adjunto izquierdo.

Ahora, considereos \mathcal{C} y \mathcal{D} dos categorías y $\mathcal{D} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathcal{C}$ funtores. Si $(D \xrightarrow{h} D') \in \mathcal{D}$ y $(C \xrightarrow{k} C') \in \mathcal{C}$, de la definición de adjunción, se tienen los siguientes diagramas conmutativos.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(FD, C) & \xrightarrow{\varphi_{D,C}} & \mathcal{D}(D, GC) \\ \mathcal{C}(Fh, C) \downarrow & & \downarrow \mathcal{D}(h, GC) \\ \mathcal{C}(FD', C) & \xrightarrow[\varphi_{D',C}]{} & \mathcal{D}(D', GC) \end{array} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{C}(FD, C) & \xrightarrow{\varphi_{D,C}} & \mathcal{D}(D, GC) \\ \mathcal{C}(FD, k) \uparrow & & \uparrow \mathcal{D}(D, Gk) \\ \mathcal{C}(FD, C') & \xrightarrow[\varphi_{D,C'}]{} & \mathcal{D}(D, GC') \end{array}$$

En otras palabras, para todo $FD \xrightarrow{f} C$ se tiene que $\varphi(f \circ Fh) = \varphi(f)h$ y $\varphi(k \circ f) = Gk \circ \varphi f$. Esto es equivalente a que φ^{-1} sea también un isomorfismo natural. Es decir, con las mismas

flechas y $D' \xrightarrow{g} GC$, se tiene que $\varphi^{-1}(gh) = \varphi^{-1}gFh$ y $\varphi^{-1}(Gkg) = k\varphi^{-1}(g)$. Tomando el caso particular $C = FD$, se tiene el diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(FD, FD) & \xrightarrow{\varphi_{D, FD}} & \mathcal{D}(D, GFD) \\ \mathcal{C}(Fh, FD) \downarrow & & \downarrow \mathcal{D}(h, GFD) \\ \mathcal{C}(FD', FD) & \xrightarrow[\varphi_{D', FD}]{} & \mathcal{D}(D', GFD) \end{array}$$

Defina $\eta_D = \varphi(1_{FD}) : D \rightarrow GFD$, para toda $D \in \mathcal{D}$.

Afirmación. $\langle \eta_D \mid D \in \mathcal{D} \rangle$ define una transformación natural $\eta : 1_D \rightarrow GF$.

Basta verificar que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} D' & \xrightarrow{\eta_{D'}} & GFD' \\ h \downarrow & & \downarrow GFh \\ D & \xrightarrow[\eta_D]{} & GFD \end{array}$$

Lo cual es inmediata ya que

$$GF\varphi(1_D) = \varphi(Fh) = \varphi(1_{D'})h.$$

A esta transformación natural $\eta_D : 1_D \rightarrow GF$ se le llama *unidad de la adjunción* $(F, G, \varphi) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$.

Por otro lado, consideremos el caso particular $D = GC$. Entonces se tiene el siguiente diagrama conmutativo.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(FGC, C) & \xrightarrow{\varphi_{GC, C}} & \mathcal{D}(GC, GC) \\ \mathcal{C}(FGC, k) \uparrow & & \uparrow \mathcal{D}(GC, Gk) \\ \mathcal{C}(FGC, C') & \xrightarrow[\varphi_{GC, C'}]{} & \mathcal{D}(GC, GC') \end{array}$$

Se define ε_C como $\phi^{-1}(1_{GA}) : FGC \rightarrow C$, para toda $C \in \mathcal{C}$. De manera similar a como se hizo con η_D , se puede verificar que ε_C es una transformación natural, a la cual le llamamos *counidad de la adjunción* $(F, G, \phi) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$.

Definición 1.32 (Equivalencia de categorías). Dos categorías \mathcal{C} y \mathcal{D} son *equivalentes* si existe una adjunción $(F, G, \eta, \varepsilon) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que la unidad y la counidad son isomorfismos naturales. En este caso, decimos que los funtores F y G son una equivalencia de categorías.

Para finalizar, veremos una “aplicación” de los conceptos vistos en esta sección para el caso particular cuando las categorías son retículas. Dado un conjunto parcialmente ordenado (A, \leq) , se dice que es una *retícula* si cada subconjunto finito no vacío $X \subseteq A$ tiene supremo e ínfimo.

Lema 1.33. Sean (A, \leq) y (B, \leq) retículas. El funtor $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ tiene adjunto derecho si, y solo si, F preserva supremos arbitrarios.

Demostración.

\Rightarrow Supongamos que existe un funtor $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ tal que $F \dashv G$. Lo anterior ocurre si, y solo si,

$$A \leq GB \iff FA \leq B, \quad \forall A \in \text{Ob}(\mathcal{A}), B \in \text{Ob}(\mathcal{B}). \quad (1.3)$$

Sea $\bigvee_{i \in I} A_i$ un supremo en \mathcal{A} . Esto es, $A \leq \bigvee_{i \in I} A_i$. Dado que F es un funtor, $FA_i \leq F(\bigvee_{i \in I} A_i)$. Luego,

$$FA_i \leq \bigvee_{i \in I} FA_i \leq F\left(\bigvee_{i \in I} A_i\right).$$

Por (1.3), se tiene que

$$A_i \leq G\left(\bigvee_{i \in I} FA_i\right).$$

Así, $\bigvee_{i \in I} A_i \leq G(\bigvee_{i \in I} FA_i)$. Nuevamente, por (1.3),

$$F\left(\bigvee_{i \in I} A_i\right) \leq \bigvee_{i \in I} FA_i.$$

Ya que se tiene la doble desigualdad, se concluye que $F(\bigvee_{i \in I} A_i) = \bigvee_{i \in I} FA_i$.

\Leftarrow . Ahora, supongamos que F preserva supremos arbitrarios. Sea $B \in \text{Ob}(\mathcal{B})$ y tomemos $GB = \bigvee_{FA \leq B} A$. Si $B' \in \text{Ob}(\mathcal{B})$ es tal que $B' \leq B$, entonces $F(A) \leq B'$ implica que $F(A) \leq B$. Así,

$$GB' = \bigvee_{FA \leq B'} A \leq \bigvee_{FA \leq B} A = GB$$

y $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ es funtorial. Ahora, resta probar que $A \leq GB$ si, y solo si $FA \leq B$. Para esto, consideremos $A \in \text{Ob}(\mathcal{A})$ y $B \in \text{Ob}(\mathcal{B})$. Si $A \leq GB$, entonces $A \leq \bigvee_{FA \leq B} A$. En virtud de que F preserva supremos arbitrarios,

$$FA \leq \bigvee_{FA \leq B} FA \leq B.$$

Por otro lado, si $FA \leq B$, al ser G un funtor, se tiene que $GFA \leq GB$. Luego,

$$A = \bigvee_{FA' \leq FA} A' \leq GB$$

tal como se quería. ■

1.4. Extensiones de Kan

Recordemos que $\text{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ denota la categoría de funtores de la categoría \mathcal{A} en la categoría \mathcal{B} , y cuyos morfismos son las transformaciones naturales entre ellos. Lo que se desea probar en esta sección es que la precomposición

$$\begin{aligned} - \circ F : \text{Fun}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) &\rightarrow \text{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \\ G &\mapsto G \circ F \end{aligned}$$

tiene adjunto izquierdo si \mathcal{C} es cocompleta. Como caso particular, esto ocurre si $\mathcal{C} = \text{Con}$.

Definición 1.34 (Extensión de Kan). Sean $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ funtores. La *extensión de Kan izquierda* de G a lo largo de F , si existe, es una pareja $(K : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}, \alpha : G \Rightarrow K \circ F)$, donde K es un funtor y α una transformación natural, que es universal: para cualquier otra pareja $(H : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}, \beta : G \Rightarrow H \circ F)$ existe una única transformación natural $\gamma : K \Rightarrow H$ tal que $(\gamma \circ F)\alpha = \beta$. Es decir, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G & \xRightarrow{\alpha} & KF \\ \beta \Downarrow & \swarrow \gamma F & \\ HF & & \end{array}$$

conmuta. El funtor K es denotado por $\text{Lan}_F G$.

Teorema 1.35. Sean $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ y $G : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$ funtores. Si \mathcal{A} es pequeña, y \mathcal{C} es cocompleta, entonces la extensión de Kan izquierda de G a lo largo de F existe.

Demostración.

■ Pendiente

Sean \mathcal{A} y \mathcal{B} categorías pequeñas y \mathcal{C} una categoría cocompleta. Consideremos el funtor $- \circ F : \text{Fun}(\mathcal{B}, \mathcal{C}) \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ dado por

$$\begin{array}{ccc} L & & L \circ F \\ \lambda \Downarrow & \longrightarrow & \downarrow \lambda \circ F \\ L' & & L' \circ F \end{array}$$

Ahora, definimos el funtor $\text{Lan}_{F_-} : \text{Fun}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \rightarrow \text{Fun}(\mathcal{B}, \mathcal{C})$ como

$$\begin{array}{ccc} M & & \text{Lan}_F M \\ \mu \Downarrow & \longrightarrow & \downarrow \gamma_\mu \\ M' & & \text{Lan}_F M' \end{array}$$

donde $\text{Lan}_F M$ es el funtor de la pareja $(\text{Lan}_F M : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}, \alpha_M : M \Rightarrow \text{Lan}_F M \circ F)$. Para cualquier otra pareja $(\text{Lan}_F M' : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}, \alpha_{M'} \circ \mu : M \Rightarrow \text{Lan}_F M' \circ F)$, se tiene que $\gamma_\mu : \text{Lan}_F M \Rightarrow \text{Lan}_F M'$ es la única transformación natural tal que $(\gamma_\mu \circ F)\alpha_M = \alpha_{M'}$. Así, se tiene el siguiente resultado.

Proposición 1.36. *Sea $F : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ un funtor y \mathcal{C} una categoría. Si \mathcal{A} es pequeña y \mathcal{C} es cocompleta, entonces Lan_{F_-} es adjunto izquierdo de $- \circ F$.*

Demostración.

■ Pendiente

1.5. Categorías extensivas

A lo largo de esta sección, nos referiremos a coproductos finitos como sumas finitas. Para tener una descripción detallada de las demostraciones se sugiere al lector interesado en consultar [Mer02]. Dada una categoría \mathcal{E} que admite sumas finitas, y cualesquiera dos objetos A y B de \mathcal{E} , se construye la categoría $\mathcal{E}/A \times \mathcal{E}/B$ cuyos objetos son pares (f, g) donde $f : A' \rightarrow A$ y $g : B' \rightarrow B$, para todo $A', B' \in \text{Ob}(\mathcal{E})$. Mientras que los morfismos son parejas (α, β) donde $\alpha : A' \rightarrow A''$ es tal que $f = f' \circ \alpha$, con $f' : A'' \rightarrow A'$ para todo A', A'' , y lo mismo con β . A partir de la categoría $\mathcal{E}/A \times \mathcal{E}/B$ se puede construir un funtor que vaya a la categoría $\mathcal{E}/A + B$, esto motiva la siguiente definición.

Definición 1.37. Sea \mathcal{E} una categoría con sumas finitas y, A y B un par de objetos en \mathcal{E} . Se define el funtor

$$+ : \mathcal{E}/A \times \mathcal{E}/B \rightarrow \mathcal{E}/A + B$$

como aquel que para cada $(f, g) \in \text{Ob}(\mathcal{E}/A \times \mathcal{E}/B)$ le asigna una flecha inducida por la suma. En un diagrama, esto es

$$\begin{array}{ccccc} A' & \xrightarrow{\iota_{A'}} & A' + B' & \xleftarrow{\iota_{B'}} & B' \\ f \downarrow & & \vdots f+g & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{\iota_A} & A + B & \xleftarrow{\iota_B} & B \end{array}$$

Mientras que a cada morfismo (α, β) en $\mathcal{E}/A \times \mathcal{E}/B$ también le asigna la flecha inducida por la suma tal como lo muestra el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccc}
& & A'' & \xrightarrow{\iota_{A''}} & A'' + B'' & \xrightarrow{\iota_{B''}} & B'' \\
& \nearrow \alpha & & & \nearrow \alpha + \beta & & \nearrow \beta \\
A' & \xrightarrow{\iota_{A'}} & A' + B' & \xleftarrow{\iota_{B'}} & B' & & \\
& \searrow f' & & & \searrow f' + g' & & \searrow g' \\
f \downarrow & & \downarrow f + g & & \downarrow g & & \\
A & \xrightarrow{\iota_A} & A + B & \xleftarrow{\iota_B} & B & &
\end{array}$$

Definición 1.38 (Categoría extensiva). Sea \mathcal{E} una categoría con sumas finitas. Decimos que \mathcal{E} satisface la *ley extensiva* si, para cada par de objetos A y B de $\mathcal{E}/A \times \mathcal{E}/B$, el funtor $+: \mathcal{E}/A \times \mathcal{E}/B \rightarrow \mathcal{E}/A + B$ es una equivalencia de categorías. En este caso, diremos que \mathcal{E} es una categoría extensiva.

A grandes rasgos, uno puede pensar en una categoría extensiva como aquella en la que los coproductos (sumas finitas en nuestro caso) se “comportan bien” con cierta clase de pullbacks.

Ejemplo 4.

1. \mathbf{Con} es extensiva.
2. \mathbf{Top} es extensiva.
3. Si \mathcal{C} es una categoría pequeña, entonces la categoría $\mathbf{Fun}[\mathcal{C}^{\text{op}}, \mathbf{Con}]$ es extensiva.
4. La categoría de espacios vectoriales sobre un campo k , \mathbf{Vect}_k , no es extensiva (el coproducto es la suma directa).

Definición 1.39 (Sumas universales). Dada una categoría \mathcal{E} que admite sumas finitas, diremos que las sumas son *universales* si, para cualquier morfismo $f: S \rightarrow A + B$, los productos fibrados a lo largo de las inyecciones existen y el renglón superior del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc}
S_1 & \longrightarrow & S & \longleftarrow & S_2 \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
A & \longrightarrow & A + B & \longleftarrow & B
\end{array}$$

es una suma.

Definición 1.40. Si una categoría \mathcal{E} tiene objeto inicial A , se dice que A es *estricto* si para cada flecha $A \rightarrow 0$ se tiene que $A = 0$.

Lema 1.41. Si \mathcal{E} es una suma con sumas universales, entonces el objeto inicial es estricto.

Teorema 1.42. *Sea \mathcal{E} una categoría con sumas universales. Entonces, \mathcal{E} es extensiva si, y solo si, satisface lo siguiente.*

i) *Para cualquier diagrama conmutativo de la forma*

$$\begin{array}{ccccc} A' & \xrightarrow{s'_1} & S' & \xleftarrow{s'_2} & B \\ g \downarrow & & f \downarrow & & h \downarrow \\ A & \xrightarrow{s_1} & S & \xleftarrow{s_2} & B \end{array}$$

tal que el renglón inferior es una suma, cumple que el renglón superior también es una suma, entonces ambos cuadrados son productos fibrados.

ii) *Toda suma en \mathcal{E} es universal.*

Capítulo 2

Gavillas sobre Top

Dado un espacio S , describir sus propiedades globales puede ser una tarea complicada; en muchas ocasiones, resulta conveniente fijarse en sus propiedades locales, es decir, ver qué ocurre en una vecindad alrededor de un punto $x \in S$, por ejemplo. Así, estudiar propiedades globales de un espacio se convierte en un proceso de pasar de local a global. Intuitivamente, esto refleja algo similar a lo que ocurre con una gavilla en un espacio, ya que esta puede entenderse como una asignación F que a cada abierto U en S se le asigna un conjunto $F(U)$, junto con una noción de “pegado” entre los abiertos de S . Dependiendo de la naturaleza del problema, en lugar de conjuntos, se pueden considerar grupos, anillos, módulos, etc., esto hace que las gavillas sean una herramienta bastante utilizada en diversas ramas de la matemática, como topología algebraica, la geometría algebraica y, en general, en álgebra. Precisar el origen de la teoría de gavillas resulta complicado, por lo que muchos consideran un punto de partida y motivación para esta teoría el estudio de la *continuación analítica*, introducida por Riemann para la comprensión de las “funciones multivaluadas”. Aunque, cabe resaltar que, el desarrollo formal de la teoría de gavillas es gracias a Leray, Serre y Cartan. En esta capítulo se presentan los conceptos fundamentales de la teoría de gavillas en conjuntos, para esto nos basamos en las ideas expuestas en [MM12].

2.1. Gavillas sobre Top

Dado un espacio S , denotamos por $\mathcal{O}(S)$ la categoría cuyos objetos son conjuntos abiertos de S . Para cada par de abiertos U y V en $\mathcal{O}(S)$, $\rho : U \rightarrow V$ morfismo en $\mathcal{O}(S)$ si, y solo si, $U \subseteq V$.

Definición 2.1 (Pregavilla). Una *pregavilla* en $\mathcal{O}(S)$ es un funtor $F : \mathcal{O}(S)^{\text{op}} \rightarrow \text{Con}$.

A un elemento $s \in F(U)$ de la imagen de un abierto U de S se le llama *sección*. Al morfismo $F(\rho) : F(V) \rightarrow F(U)$ correspondiente a la inclusión $\rho : U \hookrightarrow V$ le llamamos *restricción*. Adoptamos la notación $F(\rho)(s) = s|_U = \rho_V^U(s) \in F(U)$ con s una sección de V . Con esto en mente, una manera explícita en la que podemos entender una pregavilla es la siguiente: para cada par de abiertos $V \subseteq U$ de S el mapeo restricción actúa como $\rho_V^U : F(U) \rightarrow F(V)$ tal que para todo $U \in \mathcal{O}(S)$ se tiene que $\rho_U^U = \text{id}_U$, y para cualesquiera $W \subseteq V \subseteq U \in \mathcal{O}(S)$ se cumple que, $\rho_W^U = \rho_W^V \circ \rho_V^U$.

Lema 2.2. Sea $F : \mathcal{O}(S)^{\text{op}} \rightarrow \text{Con}$ un funtor, U un abierto de S y $\{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta de U . Entonces el diagrama

$$F(U) \xrightarrow{\varepsilon} \prod_{i \in I} F(U_i) \xrightarrow[p]{q} \prod_{i,j \in I} F(U_i \cap U_j), \quad (2.1)$$

donde para todo $t \in F(U)$, $e(t) = \langle t|_{U_i} \rangle_{i \in I}$ y para toda familia $\langle t_i \in F(U_i) \rangle_{i \in I}$, $p(\langle t_i \rangle_{i \in I}) = \langle t_i|_{(U_i \cap U_j)} \rangle_{i,j \in I}$, siempre existe y se cumple que $pe = qe$.

Demostración. ■

Definición 2.3 (Pregavilla separada). Una pregavilla $F : \mathcal{O}(S)^{\text{op}} \rightarrow \text{Con}$ se dice *separa* si la función e de (2.1) es inyectiva.

Definición 2.4 (Gavilla). Una *gavilla* de conjuntos sobre un espacio topológico S es un funtor $F : \mathcal{O}(S)^{\text{op}} \rightarrow \text{Con}$ tal que para todo conjunto abierto U de S existe una cubierta abierta $\{U_i\}_{i \in I}$ de tal modo que (2.1) es un igualador.

Es decir, una gavilla es pregavilla separada. En la literatura (véase [Ten75], por ejemplo) es común definir una gavilla como una pregavilla que satisface lo siguiente.

- i). Sea $U \in \mathcal{O}(S)$. Si $\{U_i\}_{i \in I}$ es una cubierta abierta para U y para cualesquiera dos secciones s y s' tales que $\rho_{U_i}^U(s) = \rho_{U_i}^U(s')$, se tiene que $s = s'$.
- ii). Sea $U \in \mathcal{O}(S)$ y $\{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta de U . Si $\{s_i\}_{i \in I}$ es una familia de secciones de F , donde $s_i \in F(U_i)$, tal que $\rho_{U_i \cap U_j}^{U_i}(s_i) = \rho_{U_i \cap U_j}^{U_j}(s_j)$, para toda $i, j \in I$. entonces existe una sección $s \in F(U)$ tal que $\rho_{U_i}^U(s) = s_i$.

Obsérvese que la sección $s \in F(U)$ definida en ii), es única por la condición i); a esta condición ii) se le conoce comúnmente como condición de pegado. Resulta que en Con , dar una pregavilla separada es equivalente a dar una pregavilla que satisface i) y ii).

Definición 2.5. Sea S un espacio topológico. La *categoría de gavillas* sobre S consta de lo siguiente.

- *Objetos.* Gavillas de conjuntos sobre S .
- *Morfismos.* Transformaciones naturales.

Algunos ejemplos relvantes de gavillas son los siguientes.

Ejemplo 5.

1. Sea $U \in \mathcal{O}(S)$. El conjunto

$$C(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es continua}\}$$

es una gavilla. Para esto, primero veamos que $C(-)$ es funtorial, lo cual demostraría que en efecto es una pregavilla. Sea $U \xrightarrow{\rho} V$ con $U, V \in \mathcal{O}(S)$. Entonces, $C(\rho) : C(V) \rightarrow C(U)$. Tomando la restricción usual, se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc}
U & \xhookrightarrow{\rho} & V \\
& \searrow & \downarrow f \\
& f|_U & \mathbb{R}
\end{array}$$

conmutativo. Esto prueba la funtorialidad, y así $C(-)$ es una pregavilla.

Ahora, veamos que, para cada $U \in \mathcal{O}(S)$ y $\{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta para U , el siguiente diagrama

$$C(U) \xrightarrow{e} \prod_{i \in I} C(U_i) \xrightleftharpoons[p]{p} \prod_{i,j \in I} C(U_i \cap U_j) \quad (2.2)$$

es un igualador en Con . Sea $\{f_i\}_{i \in I} \in \prod_{i \in I} C(U_i)$ tal que $p(\{f_i\}) = q(\{f_i\})$. Entonces, $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$ para toda $i, j \in I$. Para cada $U \in \mathcal{O}(S)$, definimos la función $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ de la siguiente manera

$$f(x) = \begin{cases} f_i(x) & \text{si } x \in U_i, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $y \in (a, b) \subset \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$, para algún $x \in U$. Ya que $\{U_i\}_{i \in I}$ es una cubierta abierta para U , se tiene que $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, y en particular $x \in U_i$, para algún $i \in I$. Así, $f_i(x) = f(x) = y$. Luego, como $\{f_i\} \in C(U_i)$ se sigue que f_i es continua para toda $i \in I$; esto implica que existe un abierto $V \subset U_i \subset U$ tal que $x \in V$ y $f_i(V) = f(V) \subset (a, b)$. Por lo tanto, $f \in C(U)$ y $e(f) = \{f_i\}_{i \in I}$. Ahora, supongamos que existe $g \in CU$ tal que $e(g) = \{f_i\}$. Si $x \in U$ entonces, $x \in U_i$ para alguna $i \in I$. De esto se sigue que, $f(x_i) = f(x) = g(x)$. Al tener que f y g tienen el mismo dominio, mismo codominio y misma regla de correspondencia, así $f = g$; lo cual prueba la unicidad de f . Por el Lema 1.19, se sigue que (2.2) es un igualador en Con y CU es una gavilla.

2. Sea $U \in \mathcal{O}(S)$. El conjunto

$$C^\infty(U) := \{f : U \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ es suave}\}$$

es una gavilla. La demostración de esto es análoga a la del ejemplo anterior.

3. Sea $U \in \mathcal{O}(S)$. El conjunto de funciones holomorfas

$$\Omega(U) := \{f : U \rightarrow \mathcal{C} \mid f \text{ es holomorfa}\}$$

es una gavilla. Primero, veamos que $\Omega(-)$ es una pregavilla. Sea $U \xhookrightarrow{\rho} V$ con $U, V \in \mathcal{O}(S)$. Entonces,

$$\Omega(\rho) : \Omega(V) \rightarrow \Omega(U).$$

Por definición, $\Omega(V) = \{f : V \rightarrow \mathbb{C} \mid f \text{ es holomorfa}\}$. Tomando la restricción usual, se tiene que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} U & \hookrightarrow & V \\ & \searrow & \downarrow f \\ & f|_U & \mathbb{C} \end{array}$$

Así, $\Omega(-)$ es funtorial y, por lo tanto, una pregavilla.

Para probar que $\Omega(-)$ es una gavilla, vamos a verificar las condiciones i) y ii) dadas anteriormente.

- i). Sea $U \in \mathcal{O}(S)$ y $\{U_i\}_{i \in I}$ una cubierta abierta para U . Supongamos que s y s' son secciones tales que $\rho_{U_i}^U(s) = \rho_{U_i}^U(s')$. Del siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} U_i & \hookrightarrow & U = \bigcup_{i \in I} U_i \\ & \searrow & \downarrow s \quad \downarrow s' \\ & \rho_{U_i}^U(s) & \\ & \rho_{U_i}^U(s') & \\ & \searrow & \downarrow \\ & & \mathbb{C} \end{array}$$

se tiene que $s = s'$.

- ii). Supongamos que $f_j : U_j \rightarrow \mathbb{C}$ son holomorfas y $f_i|_{U_i \cap U_j} = f_j|_{U_i \cap U_j}$. En $U = \bigcup_{i \in I} U_i$, definimos $f(w) = f_j(w)$, para toda $w \in U_i$. Para ver que la condición de pegado se satisface, basta verificar que f satisface las condiciones de Cauchy-Riemann. Sea $z = x + iy \in \mathcal{C}$. Entonces, $f(z) = f(x, y) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$. Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u'}{\partial x} + i \frac{\partial v'}{\partial y} \quad \text{con } u'(x, y) + iv'(x, y) = f_j(z) \\ &= \frac{\partial u'}{\partial x} = -\frac{\partial v'}{\partial y} \quad f_j \text{ es holomorfa} \\ &= \frac{\partial u'}{\partial x_{u_j}} = -\frac{\partial v'}{\partial y_{u_j}} \end{aligned}$$

Por lo tanto, $f_j = f|_{U_j}$. Así, f es holomorfa, y $\Omega(-)$ es gavilla.

2.2. El funtor Γ

Dado S un espacio topológico, la categoría de rebanadas Top/S consta de lo siguiente.

- *Objetos.* Todas las funciones continuas $f \in \text{Mor}(\text{Top})$ cuyo codominio son igual a S .
- *Morfismos.* Para cada función continua $f : E \rightarrow E' \in \text{Mor}(\text{Top})$, existen $p : E \rightarrow S$ y $p' : E' \rightarrow S$ tales que $p = p' \circ f$.

$$\text{Top}/S = \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ & \searrow p & \swarrow p' \\ & S & \end{array}$$

A una función continua de la forma $p : E \rightarrow S$ le llamamos *haz* sobre S , y al espacio E se le conoce como *espacio total*. En topología algebraica es común estudiar un tipo particular de haces, los cuales se llaman haces fibrados, y no deben de confundirse con los haces que estamos estudiando ya que f solo es una función continua y no un homeomorfismo; además, de que no pedimos la condición de localidad trivial como ocurre en el caso de los haces fibrados.

Para cada punto $x \in S$, la *fibra asociada* a x es la preimagen $p^{-1}(x)$. Esto nos permite interpretar al espacio E como un espacio formado por copias de cada fibra parametrizada por los puntos de S . Como $p : E \rightarrow S$ es una función continua, la preimagen de abiertos manda abiertos en abiertos; por lo cual, para cada $U \in S$ conjunto abierto, se tiene que $p_U : p^{-1}(U) \rightarrow U$ es un haz sobre U . Más aún, el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(U) & \hookrightarrow & E \\ p_U \downarrow & & \downarrow p \\ U & \xrightarrow{f} & S \end{array}$$

es un pullback en Top .

Definición 2.6 (Sección). Una *sección* (global) de un haz $p : E \rightarrow S$ es una función continua $s : S \rightarrow E$ tal que $p \circ s = \text{id}_S$. Una *sección local* de p alrededor de $x \in S$ es una sección de p_U .

Proposición 2.7. Sea $p : E \rightarrow S$ un haz y $f : U \rightarrow S$ una función continua. Hay una correspondencia biyectiva entre el conjunto de secciones de p_U y el conjunto de levantamientos de f a E , es decir, funciones continuas $h : U \rightarrow E$ tal que $ph = f$.

Demostración. Por la propiedad universal del pullback, dar una sección de p_U es equivalente a dar un levantamiento $h : U \rightarrow E$ de f que hace completar el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccc}
 U & \xrightarrow{\quad h \quad} & E \\
 \text{\textcolor{blue}{id}}_U \searrow & \text{\textcolor{red}{dashed}} \nearrow & \\
 & p^{-1}(U) \hookrightarrow & \\
 & \downarrow p_U & \downarrow p \\
 U & \xrightarrow{\quad f \quad} & S
 \end{array}$$

■

Denotemos por $\Gamma_p U := \{s \mid s \text{ es una sección local}\}$. Dado un abierto U de S y $V \subset U$, se define

$$\begin{aligned}
 \Gamma_p U &\rightarrow \Gamma_p V \\
 s &\mapsto \rho_V^U(s) := s|_V.
 \end{aligned}$$

Lema 2.8. $\Gamma_p : \mathcal{O}(S)^{op} \rightarrow \text{Con}$ es un funtor.

2.3. El funtor Λ

Sea $P : \mathcal{O}(S)^{op} \rightarrow \text{Con}$ una pregavilla sobre un espacio un espacio S . Sea $x \in S$ un punto, y consideremos la familia $\mathcal{O}(x) := \{U \in \mathcal{O}(S) \mid x \in U\}$ la familia de vecindades abiertas de x en S . Dados $U_\alpha, U_\beta \in \mathcal{O}(x)$ la intersección $U_\gamma := U_\alpha \cap U_\beta \in \mathcal{O}(x)$ cumple que $U_\gamma \subseteq U_\alpha$ y $U_\gamma \subseteq U_\beta$. Esto es, considerando el orden parcial \leq dado por la contención de abiertos, se tiene que $(\mathcal{O}(x), \leq)$ es un conjunto dirigido. Además, para cada morfismo $\iota_\alpha^\beta : U_\alpha \hookrightarrow U_\beta$ en $\mathcal{O}(x)$, se tienen morfismos $\phi_\alpha^\beta := P(\iota_\alpha^\beta) : P(U_\beta) \rightarrow P(U_\alpha)$ los cuales forman una familia directa en Con , denotada por $(P(\mathcal{O}(x)), \leq)$.

Si el colímite de $(P(\mathcal{O}(x)), \leq)$ en Con existe, este es denotado por $P_x := \varinjlim P(U_\alpha)$. Para cada familia $\{M_\alpha\}$ indexada por $\mathcal{O}(x)$, este colímite se puede ver de manera explícita como sigue

$$\varinjlim M_\alpha := \left(\bigsqcup M_\alpha \right) / \sim$$

donde $s \sim t$ ($s \in P U$ y $t \in P V$) si, y solo si, existe un abierto W tal que $W \subseteq U \cap V$ y $s|_W = t|_W \in P W$ para $x \in W$. Además, se tienen morfismos canónicos

$$\phi : P(U_\alpha) \rightarrow \bigsqcup P(U_\alpha) \rightarrow \varinjlim P(U_\alpha).$$

Definición 2.9 (Germen). Dada una sección $s \in P(U)$, se define su *germen* en el punto $x \in S$, denotado por $[s]_x$, como la imagen $\phi(s) \in P_x$.

Notemos que, para un punto $x \in S$, los elementos de P_x son precisamente las secciones en el punto x . A $P_x = \{[s]_x \mid s \in PU, x \in U \in \mathcal{O}(x)\}$ se le conoce como el *tallo* de P en x .

Lema 2.10. *La relación “ \sim ” es de equivalencia.*

Demostración.

- *Reflexividad.* Sea $U \in \mathcal{O}(S)$ y $s \in PU$. Para $x \in U$, tenemos que $U \subseteq U$ y $s = s|_U$. Por lo tanto, $s \sim s$.
- *Simetría.* Para $U, V \in \mathcal{O}(S)$, sean $s \in PU$ y $t \in PV$ tales que $s \sim t$. Entonces, se cumple la definición y dado que existe $W \subseteq U \cap V$, se sigue que también se cumple $t \sim s$.
- *Transitividad.* Consideremos $U, V, W \in \mathcal{O}(S)$ y, $s \in PU$, $t \in PV$ y $r \in PW$ tales que $s \sim t$ y $t \sim r$. Entonces, existen $Y \subseteq U \cap V$ y $Y' \subseteq V \cap W$ vecindades de x donde $s|_Y = t|_Y$ y $t|_{Y'} = r|_{Y'}$. Nótese que $Y \cap Y'$ es una vecindad de $x \in U \cap W$. Como $s|_Y = t|_Y$ implica que $s|_{Y \cap Y'} = t|_{Y \cap Y'}$. Además, $t|_{Y \cap Y'} = r|_{Y \cap Y'}$. Por lo tanto, $s|_{Y \cap Y'} = r|_{Y \cap Y'}$ y $s \sim r$.

Ya que \sim es reflexiva, simétrica y transitiva se tiene que es de equivalencia. ■

Lema 2.11. *Sea $P^x : \mathcal{O}(x) \rightarrow \text{Con}$. Las funciones $\{\text{germ}_x : P(U) \rightarrow \mathcal{O}(x)\}$ tales que para cada sección $s \in P(U)$, $\text{germ}_x s = [s]_x$, forman un cocono colímite sobre $\mathcal{O}(x)$. Más aún, este es filtrante.*

Demostración. Sean $U, V \in \mathcal{O}(x)$. Entonces, se tiene el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} PU & \xrightarrow{\quad} & PV \\ & \searrow \text{germ}_x & \swarrow \text{germ}_x \\ & P_x & \end{array}$$

Si $s \in PU$ es tal que $s|_V = PV$, entonces $[s]_x = [s|_V]_x$. Por lo tanto, el diagrama anterior conmuta y $(\text{germ}_x : PU \rightarrow P_x)_{U \in \mathcal{O}(x)}$ es un cócono. Ahora, consideremos $(\tau_u : PU \rightarrow L)_{U \in \mathcal{O}(x)}$ otro cocono sobre $P^{(x)}$. Veamos que existe una única función $t : P_x \rightarrow L$ tal que $t \circ \text{germ}_x = \tau$. Esto es,

$$\begin{array}{ccccc} & & PU & \xrightarrow{\quad} & PV \\ & \nearrow \tau_U & \searrow \text{germ}_x & & \downarrow \text{germ}_x \\ L & & & & P_x \\ & \nwarrow \tau_V & \nearrow \text{germ}_x & & \\ & & L & \xrightarrow[t]{} & P_x \end{array}$$

Definamos $t : P_x \rightarrow L$ como $t([s]_x) = \tau_U(s)$. Ahora, tomemos r otro representante, i.e., $[s]_x = [r]_x$ implica que existe $W \in U \cap V$ tal que $s|_W = r|_W$ y $\tau_W(s|_W) = \tau_W(r|_W)$. Como τ es un cócono, entonces

$$\tau_U(s) = \tau_W(s|_W) = \tau_W(r|_W) = \tau_V(r).$$

Por lo tanto, t está bien definida. Ahora, sea $s \in PU$. Entonces, $t \circ \text{germ}_x(s) = t([s]_x) = \tau_U(s)$. Por otro lado, consideremos $l : P_x \rightarrow L$ tal que $l \circ \text{germ}_x(s) = \tau$. Si $[s]_x \in P_x$, se tiene que

$$\begin{aligned} t([s]_x) &= t \circ \text{germ}_x(s) = \tau(s) \\ &= l \circ \text{germ}_x(s) = l([s]_x). \end{aligned}$$

Por lo tanto, t es única y $\{\text{germ}_x : PU \rightarrow P_x\}$ es un cócono límite. ■

Lema 2.12. *Cualquier morfismo $h : P \rightarrow Q$ de pregavillas (cualquier transformación natural), en cada punto $s \in S$, induce una única función $h_x : P_x \rightarrow Q_x$ tal que el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} PU & \xrightarrow{h_U} & QU \\ \text{germ}_x \downarrow & & \downarrow \text{germ}_x \\ P_x & \xrightarrow{h_x} & Q_x \end{array}$$

conmuta para cualquier $U \in \mathcal{O}(x)$.

Demostración. Sea $h : P \rightarrow Q$ una transformación natural. Sean $U, V \in \mathcal{O}(x)$ tal que $V \leq U$. Si $s \in PU$, al ser h natural se tiene que $\text{germ}_x \circ h_V(s|_V) = \text{germ}_x(h_V(s)|_V)$. Por el lema anterior, $\{\text{germ}_x : PU \rightarrow PV\}$ es un cócono límite; así, existe una única función $h_x : P_x \rightarrow Q_x$ que hace conmutar el diagrama deseado. Además, $h_x([s]_x) = [h_U(s)]_x$. ■

Del resultado anterior, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} PU & \xrightarrow{\quad} & PV \\ h_U \downarrow & & \downarrow h_V \\ QU & \xrightarrow{\quad} & QV \\ & \searrow \quad \swarrow & \\ & Q_x & \end{array}$$

Un resultado inmediato es el siguiente.

Lema 2.13. *La transformación natural dada por $h \rightarrow h_x$ es un funtor de $\text{Con}^{\mathcal{O}(x)} \rightarrow \text{Con}$. Dicho funtor es “tomar germen en x ”.*

Sea

$$\Lambda_p = \bigsqcup_{x \in S} P_x = \bigsqcup_{x \in S} \{[s]_x \mid s \in PU\}$$

la unión disjunta de germines sobre $x \in S$. Para toda sección $s \in PU$, definamos las siguientes funciones

$$\begin{aligned} p : \Lambda_p &\rightarrow S \\ [s]_x &\mapsto x, \\ \hat{s} : U &\rightarrow \Lambda_p \\ x &\mapsto [s]_x. \end{aligned}$$

Lema 2.14. *El conjunto $B_p := \{\hat{s}(U) \mid s \in PU, U \in \mathcal{O}(S)\}$ es una base para una topología en Λ_p .*

2.4. $\mathcal{H}L/S \cong \text{Gav}(S)$

2.5. Morfismos ultrafinitos

2.6. Cambio de base

Capítulo 3

Gavillas sobre locales

3.1. Locales y gavillas

3.2. Algunas equivalencias importantes

3.2.1. $\text{Et}/A \cong \text{Gav}(A)$

3.2.2. $\text{Con}(A) \cong \text{Gav}(A)$

3.2.3. Topos localico

Capítulo 4

Teoría de topos

4.1. La 2-categoría de topos

4.2. Adjunción entre \mathcal{TOP} y $(\mathbf{Frm})^{\text{op}}$

4.3. Teoría de conjuntos

4.3.1. Separación

4.3.2. Vacío y extensionalidad

4.3.3. Elección y finitud

4.3.4. Relación de pertenencia

4.4. Teoría local y global en \mathbf{Con}

4.4.1. Objeto-conjunto transitivo

4.4.2. Retícula de objeto-conjunto transitivo

4.4.3. Objeto-conjunto

4.5. Zermelo-Franke en \mathcal{E}