Reporte mensual de actividades

Juan Carlos Monter Cortés

13-enero-2026 a 31-enero-2026

Si consideramos $A \in \mathrm{Frm}$, entonces $S = \mathrm{pt}\, A$ denota el espacio de puntos de A. Además, si $x \in A$

$$\mathcal{U}_A(x) = \{p \in S \mid x \nleq p\}$$

es un abierto en $\mathcal{O}S$. Lo anterior proporciona el morfismo de marcos $\mathcal{U}_A : A \to \mathcal{O}S$ definido por $x \mapsto \mathcal{U}_A(x)$ el cual es suprayectivo y se le conoce como la reflexión espacial. De manera adicional, $\mathcal{U}_A$ es un isomorfismo si y sólo si A es espacial, es decir, $A \simeq \mathcal{O}S$ para algún $S \in \mathrm{Top}$. Además, podemos omitir el subíndice de la reflexión espacial si es claro cual es el marco con el que se está trabajando.

1. Núcleos y derivadas

Sabemos que $j\colon A \to A$ es un núcleo en A si es una función que infla, monótona, idempotente y que respeta ínfimos finitos. Si la anterior no cumple con la idempotencia, entonces al operador se le conoce como *prenúcleo*.

Para $a, x \in A$ podemos definir los núcleos conocidos

$$u_a(x) = a \vee x, \quad v_a(x) = (a \succ x), \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a).$$

Si $A = \mathcal{O}S$ y $E \subseteq S$ definimos la función

$$[E](U) = (E \cup U)^\circ$$

donde $U \in \mathcal{O}S$. La anterior resulta ser un núcleo en $\mathcal{O}S$ y se le conoce como *núcleo espacialmente inducido*. De manera particular, recordado que la implicación en Top se calcula por

$(W \succ U) = (W' \cup U)^\circ$ para cada $U, W \in \mathcal{O}S$ tenemos que

$$u_W = [W] \quad y \quad v_W = [W'].$$

Si a un núcleo espacialmente inducido le calculamos su complemento dual, obtenemos un operador sobre $\mathcal{C}S$. Dicho operador resulta ser una *derivada idempotente*.

Definición 1.1. *Sea $S \in \mathrm{Top}$ y $\mathcal{C}S$ la colección de subconjuntos cerrados de S. Un operador $\partial \colon \mathcal{C}S \to \mathcal{C}S$ es una derivada si satisface:*

1. *Si $X \subseteq Y$ entonces $\partial(X) \subseteq \partial(Y)$,*

2. *$\partial(X) \subseteq X$,*

3. *$\partial(X \cup Y) = \partial(X) \cup \partial(Y)$*

para todo $X, Y \in \mathcal{C}S$. De manera adicional, decimos que la derivada es idempotente si $\partial^2 = \partial$.

Tanto para núcleos como para derivadas, el orden se define puntualmente y considerando id el operador identidad, tp el operador constante $x \mapsto 1$ y fd el operador constante $x \mapsto 0$ obtenemos

$$\mathrm{id} \leq j \leq \mathrm{tp} \quad \text{y} \quad \mathrm{id} \geq \partial \geq \mathrm{fd}$$

para j un núcleo y ∂ una derivada.

Como mencionamos antes, si tomamos el núcleo $v_W = [W']$ y calculamos su complemento dual obtenemos

$$(v_W(U))' = ([W'](U))' = ((W' \cup U)^\circ)' = (((W \cap U')')^\circ)' = \overline{(W \cap U')} = \partial_W(U'). \qquad (1)$$

En este caso, la última proporciona el operador ∂_W que es una derivada idempotente.

Decimos que $F \subseteq A$ es un filtro abierto si satisface:

1. $1 \in F$,

2. Si $x, y \in F$ entonces $x \wedge y \in F$,

3. Si $x \in F$ y $x \leq y$ entonces $y \in F$.

4. Si $X \subseteq A$ es un conjunto dirigido y $\bigvee X \in F$ entonces existe $x \in X$ tal que $x \in F$.

Denotamos por $A^\wedge$ al conjunto de todos los filtros abiertos en A. Decimos que f es un núcleo ajustado si este tiene la forma

$$f = \bigvee\{v_a \mid a \in F\}$$

y es un núcleo en A. Tomando el supremo puntual obtenemos

$$f_F = \dot{\bigvee}\{v_a \mid a \in F\} \tag{2}$$

el cual resulta ser un prenúcleo en A.

Considerando $F \in A^\wedge$ e iterando sobre los ordinales construimos la cadena creciente de prenúcleos

$$f_F^0 = \mathrm{id}, \quad f_F^{\alpha+1} = f_F \circ f_F^\alpha, \quad f_F^\lambda = \bigvee\{f_F^\alpha \mid \alpha < \lambda\}$$

para cada ordinal α y cada ordinal límite λ. De manera usual, denotamos por ∞ al ordinal bajo el cual la sucesión se estabiliza, es decir, $f_F^{\infty+1} = f_F^\infty$. A este se le conoce como la cerradura idempotente y haciendo uso de el definimos

$$v_F = f_F^\infty.$$

donde v_F es el núcleo ajustado asociado a F.

Si $A = \mathcal{O}S$, tenemos que el prenúcleo (2) tiene la forma

$$f_F = \dot{\bigvee}\{[U'] \mid U \in F\}$$

y por el Teorema de Hofmann-Mislove obtenemos $f_F = \dot{\bigvee}\{[U'] \mid Q \subseteq U\}$ donde $Q \in \mathcal{Q}S$ es el conjunto compacto saturado asociado a F.

Calculando su complemento dual obtenemos la derivada $\partial_F(X) = \bigcap\{\overline{(X \cap U)} \mid Q \subseteq U\}$ donde $X \in \mathcal{C}S$. Por lo tanto, tenemos que

$$\partial_F(X) = f_F(X')'. \tag{3}$$

Al operador ∂_F se le conoce como la Q-derivada (ver Lema 6.1 de [Sim04]).

Similarmente a como construimos la sucesión creciente de prenúcleos f_F^α tenemos la siguiente sucesión decreciente de Q-derivadas

$$\partial_F^0 = \mathrm{id}, \quad \partial_F^{\alpha+1} = \partial_F(\partial_F^\alpha), \quad \partial_F^\lambda = \bigcap\{\partial_F^\alpha \mid \alpha < \lambda\}.$$

La manera de relacionar ambas sucesiones se muestra en el siguiente lema.

Lema 1.2. *Para todo* $\alpha \in \mathrm{Ord}$ *y* $X \in CS$*, se cumple*

$$\partial_F^\alpha(X) = \Big(f_F^\alpha(X')\Big)'. \tag{4}$$

Demostración. Procedemos por inducción transfinita sobre $\alpha \in \mathrm{Ord}$.

Caso base $\alpha = 0$**.** Por definición, $\partial_F^0 = \mathrm{id}$, es decir, $\partial_F^0(X) = X$ y $f_F^0 = \mathrm{id}$, luego

$$\partial_F^0(X) = X = (X'') = \Big(f_F^0(X')\Big)'.$$

Caso sucesor. Supongamos que la afirmación es cierta para α y probemos para $\alpha + 1$. Por definición de iteración,

$$\partial_F^{\alpha+1}(X) = \partial_F\Big(\partial_F^\alpha(X)\Big).$$

Además, por (3)

$$\partial_F^{\alpha+1}(X) = (f_F((\partial_F^\alpha(X))'))'.$$

Por hipótesis inducción, $\partial_F^\alpha(X) = \Big(f_F^\alpha(X')\Big)'$ y sustituyendo obtenemos

$$\partial_F^{\alpha+1}(X) = (f_F(f_F^\alpha(X')))' = \Big(f_F^{\alpha+1}(X')\Big)'$$

que es lo que queríamos.

Caso límite. Sea λ un ordinal límite y supongamos que lo anterior se cumple para todo $\alpha < \lambda$. Por definición de la iteración,

$$\partial_F^\lambda(X) = \bigcap_{\alpha<\lambda} \partial_F^\alpha(X).$$

Por De Morgan,

$$\Big(\partial_F^\lambda(X)\Big)' = \Big(\bigcap_{\alpha<\lambda} \partial_F^\alpha(X)\Big)' = \bigcup_{\alpha<\lambda} \Big(\partial_F^\alpha(X)\Big)'.$$

Usando la hipótesis de inducción, para todo $\alpha < \lambda$,

$$\Big(\partial_F^\alpha(X)\Big)' = f_F^\alpha(X'),$$

Luego,

$$\left(\partial_F^\lambda(X)\right)' = \bigcup_{\alpha<\lambda} f_F^\alpha(X') = f_F^\lambda(X').$$

Por lo tanto,

$$\left(\partial_F^\lambda(X)\right)' = f_F^\lambda(X'),$$

es decir,

$$\partial_F^\lambda(X) = \left(f_F^\lambda(X')\right)'.$$

y obtenemos lo que queríamos. □

Un caso particular del lema anterior es cuando $\alpha = \infty$.

Corolario 1.3.

$$\partial_F^\infty(X) = (v_F(X'))'. \tag{5}$$

2. Nociones de apilamiento

Los operadores definidos hasta ahora se relacionan por medio de las nociones de apilado y fuertemente apilado.

Definición 2.1. *Consideremos $S \in \mathrm{Top}$.*

1. *Un conjunto $Q \in \mathcal{Q}S$ es apilado si $\overline{Q} = \partial_F^\infty(S)$ y es fuertemente apilado si $v_F = [Q']$.*

2. *El espacio S es apilado o fuertemente apilado si cada $Q \in \mathcal{Q}S$ es apilado o fuertemente apilado, respectivamente.*

La anterior es la noción topológica introducida por Sexton y Simmons en [SS06a] (Definición 6.1) y cumple que fuertemente apilado implica apilado. Nosotros damos sus análogos en la teoría de marcos, es decir, las definiciones en Frm.

Definición 2.2. *Siguiendo la notación anterior, consideremos $A \in \mathrm{Frm}$. Decimos que A es:*

1. *apilado si $(\mathcal{U}_*([Q'])\mathcal{U})(0) = v_F(0)$.*

2. *fuertemente apilado si $\mathcal{U}_*[Q']\mathcal{U} = v_F$.*

Trivialmente tenemos que fuertemente apilado implica apilado. Nuestro objetivo es demostrar que las propiedades anteriores son conservativas, es decir, que un espacio S es apilado (fuertemente apilado) si y sólo si su marco de abiertos $\mathcal{O}S$ es apilado (fuertemente apilado). Antes de hacer esto necesitamos el siguiente lema auxiliar.

Lema 2.3. *Si $A = \mathcal{O}S$ y $E \subseteq S$ se cumple que*

$$\mathcal{U}_*[E]\mathcal{U} = [E].$$

Demostración. Como el marco A es espacial se cumple que $\mathcal{U}$ es un isomorfismo. De aquí que si $U \in \mathcal{O}\,\mathrm{pt}\,A$ existe $V \in \mathrm{pt}\,A$ tal que $U = \mathcal{U}(V)$ y como $U \in \mathrm{pt}\,A$, se cumple que $U = V$. Luego

$$\begin{aligned}
(\mathcal{U}_*[E]\mathcal{U})(U) &= \mathcal{U}_*[E](\mathcal{U}(U)) = \mathcal{U}_*([E](U)) \\
&= \mathcal{U}_*(E \cup U)^\circ = \bigcup\{W \in \mathcal{O}S \mid W \subseteq (E \cup U)^\circ\} \\
&= (E \cup U)^\circ = [E](U).
\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{U}_*[E]\mathcal{U} = [E]$. □

Proposición 2.4. *Las nociones de fuertemente apilado y apilado son conservativas.*

Demostración. Consideremos $S \in \mathrm{Top}$, $A = \mathcal{O}S$, $F \in A^\wedge$ y $Q \in \mathcal{Q}S$.

Primero, supongamos que S es fuertemente apilado. De aquí que $v_F = [Q']$ y por el Lema 2.3 tenemos que $\mathcal{U}_*[Q']\mathcal{U} = [Q'] = v_F$. Por lo tanto $\mathcal{O}S$ es fuertemente apilado.

Supongamos ahora que S es apilado. Por lo anterior se cumple que

$$\overline{Q} = \partial_F^\infty(S) \iff \overline{Q}' = (\partial_F^\infty(S))'.$$

Además,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{U}_*[Q']\mathcal{U})(\emptyset) &= \mathcal{U}_*([Q'](\{V \in \mathrm{pt}\,\mathcal{O}S \mid \emptyset \nsubseteq V\})) \\
&= \mathcal{U}_*([Q'](\emptyset)) = \mathcal{U}_*(Q')^\circ \\
&= \bigcup\{W \in \mathcal{O}S \mid W \subseteq (Q')^\circ\} \\
&= (Q')^\circ = \overline{Q}'.
\end{aligned}$$

Por el Corolario 1.3 tenemos que $v_F(\emptyset) = (\partial_F^\infty(\emptyset'))'$. Por lo tanto

$$v_F(\emptyset) = (\mathcal{U}_*[Q']\mathcal{U})(\emptyset),$$

es decir, $\mathcal{O}S$ es apilado.

□

Nuestro siguiente paso será el verificar cual es el comportamiento de las nociones de apilamiento en conjunto con la eficiencia.

3. El marco $[0, 1]$

Siguiendo la idea presentada en [Sim06] (o, de manera alternativa, en [Sim04]), consideremos el marco linealmente ordenado

$$A = [0, 1].$$

En este caso particular se cumplen las siguientes observaciones.

1. Para cualesquiera $a, b \in A$ la implicación $(a \succ b)$ se calcula mediante

$$(a \succ b) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b, \\ b & \text{si } a > b. \end{cases}$$

2. Los núcleos distinguidos u_a, v_a, w_a están dados por

$$u_a(x) = \begin{cases} x & \text{si } a \leq x, \\ a & \text{si } x < a, \end{cases}, \quad v_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq a, \\ a & \text{si } x < a, \end{cases} \quad w_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > a, \\ a & \text{si } x \leq a. \end{cases}$$

   donde $a, x \in A$.

3. Si $F \subseteq A$ es un filtro, entonces siempre es admisible y tiene la forma

$$F = \nabla(w_a) = (a, 1] \quad \text{o bien} \quad F = \nabla(v_a) = [a, 1]$$

   para algún $a \in A$. En particular, $F \in A^\wedge$ si y solo si $F = (a, 1]$.

4. Si $F \in A^\wedge$, el núcleo ajustado asociado v_F se calcula como

$$v_F(x) = l_m(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > m, \\ x & \text{si } x \leq m. \end{cases} \tag{6}$$

   donde $l_m = v_m \wedge w_m$ y $m = \bigwedge F$.

5. Para $S = \text{pt}\, A$ se cumple que $S = [0, 1)$ y los abiertos en $\mathcal{O}S$ son de la forma

$$\mathcal{U}_A(x) = \{p \in S \mid p < x\} = [0, x).$$

6. El marco A no es T_1, pues ningún $p \in S$ es máximo. En consecuencia, A no satisface ninguna propiedad de separación más fuerte en Frm.

7. Para $F \in A^\wedge$ el conjunto compacto saturado asociado $Q \in \mathcal{Q}S$ es de la forma $Q = [0, m]$, donde $m = \bigwedge F$.

8. Se cumple que $[Q'] = v_F$; por lo tanto, S es fuertemente apilado.

9. Como $[0, x) \in \mathcal{O}S$, se tiene que $[x, 1] \in \mathcal{C}S$. Dado que $Q = [0, m] \in \mathcal{Q}S$, concluimos que los subconjuntos compactos no son cerrados; es decir, S no es empaquetado.

10. El marco A no es eficiente.

Todo lo anterior resume las principales características del marco $[0, 1]$. En lo que sigue, realizaremos el análisis de las construcciones de parches tanto de A como de su espacio de puntos S.

3.1. Análisis de las construcciones de parches

Recordemos que para $A \in \mathrm{Frm}$ y $S \in \mathrm{Top}$ tenemos

$$\mathrm{Pbase} = \{u_a \wedge v_F \mid a \in A, F \in A^\wedge\} \quad \text{y} \quad \mathrm{pbase} = \{U \cap Q' \mid U \in \mathcal{O}S, Q \in \mathcal{Q}S\}$$

donde Pbase genera al marco de parches de A (denotado por PA) y pbase genera la topología del espacio de parches de S (denotado por ${}^{p}S$). Por (6) tenemos que

$$\mathrm{Pbase} = \{u_a \wedge l_m \mid a \in [0, 1], m \in [0, 1)\}.$$

Por lo tanto, si queremos conocer el comportamiento del marco PA necesitamos saber la relación que existe entre a y m.

Para $x \in A$ tenemos que $(u_a \wedge l_m)(x) = u_a(x) \wedge l_m(x)$. Primero veamos la relación entre x y m.

Caso 1: Si $x < m$, entonces $(u_a \wedge l_m)(x) = u_a(x) \wedge x = x$.

Caso 2: Si $x = m$, entonces $(u_a \wedge l_m)(x) = u_a(m) \wedge m = x$.

Caso 3: Si $x > m$, entonces $(u_a \wedge l_m)(x) = u_a(x) \wedge 1 = u_a(x)$.

Notemos que en los primeros 2 casos el valor de a no afecta el resultado de la evaluación. Además $u_a \wedge l_m = \mathrm{id}$, es decir, los generadores básicos de la Pbase son distinto a id cuando $m < x$. Ahora veamos la relación entre a y m en el tercer caso.

Caso 3.1: Si $m < x < a$, entonces $(u_a \wedge l_m)(x) = a$.

Caso 3.2: Si $m < a \leq x$, entonces $(u_a \wedge l_m)(x) = x$.

De esta manera, tenemos que la Pbase está conformada por

$$\text{Pbase} = \begin{cases} \{u_a \wedge l_m\} & \text{si } m < a, \\ \{\text{id}\} & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

es decir, el marco PA está codificado por los intervalos de la forma (m, a), donde $m \in \text{pt}\, A$ y $a \in A$.

Queremos identificar si en nuestro ejemplo, PA satisface alguna propiedad de separación. Para hacerlo, ocuparemos recordar información respecto a los parches.

Si $A \in \text{Frm}$ es un marco arbitrario y S su espacio de puntos, podemos construir el siguiente diagrama conmutativo que relaciona ambas construcciones de parches.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "U_A"'] & PA \arrow[r, hook] \arrow[d, "P(U_A)"] & NA \arrow[d, "N(U_A)"] \\
\mathcal{O}S \arrow[r] \arrow[dr, hook] & P\mathcal{O}S \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi"] & N\mathcal{O}S \arrow[d, "\sigma"] \\
 & \mathcal{O}^p S \arrow[r, hook] & \mathcal{O}^f S
\end{tikzcd}$$

donde $\mathcal{O}^f S$ es la topología de Skula (o topología frontal) del espacio S. En [SS06b] lo llaman el *diagrama del ensamble de parches* y más detalles sobre este también pueden ser encontrados en [Sex03].

En nuestro caso, U_A es un isomorfismo. Además, bajo U_A, la construcción de parches resulta ser funtorial y, por lo tanto, $PA \cong P\mathcal{O}S$. De manera similar, $NA \cong N\mathcal{O}S$. Para obtener más información sobre $P\mathcal{O}S$ y $N\mathcal{O}S$ podemos hacer uso de los siguientes resultados, el cual puede consultarse en [ÁBMZ20].

Proposición 3.1. *Sea S un conjunto parcialmente ordenado.*

1. *Si S no tiene anticadenas infinitas, entonces $N\mathcal{O}S$ es espacial.*

2. *Si S es totalmente ordenado, entonces $N\mathcal{O}S$ es espacial.*

Así, por la Proposición 3.1 tenemos que $N\mathcal{O}S$ es espacial y por lo tanto $N\mathcal{O}S \cong \mathcal{O}^f S$. Juntando toda esta información el diagrama del ensamble de parches en nuestro caso particular queda como sigue.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d, "\cong"'] & PA \arrow[r] \arrow[d, "\cong"] & NA \arrow[d, "\cong"] \\ \mathcal{O}S \arrow[r] & \mathcal{O}^p S \arrow[r] & \mathcal{O}^f S \end{tikzcd}$$

Por lo tanto, si queremos estudiar al marco PA podemos estudiar a la topología de parches $\mathcal{O}^p S$. Recordemos que

$$\text{pbase} = \{U \cap Q' \mid U \in \mathcal{O}S, Q \in \mathcal{Q}S\}.$$

y, en nuestro caso,

$$\text{pbase} = \{[0,a) \cap [m,1) \mid a \in [0,1], m \in [0,1)\} = \{(m,a)\}.$$

Notemos que la anterior es la base para la topología usual en $[0,1)$ y al ser ${}^p S$ un espacio Hausdorff, $\mathcal{O}^p S \cong PA$ satisface (**H**). De manera adicional, PA es un marco KC.

4. Actividades realizadas

Durante el presente periodo, se llevaron a cabo las siguientes actividades:

1. Definimos las nociones de marcos apilados y fuertemente apilados.
2. Verificamos que las nociones anteriores son conservativas.
3. Analizamos algunas de las propiedades que tiene el marco $[0,1]$ y su construcción de parches.

Referencias

[ÁBMZ20] Francisco Ávila, Guram Bezhanishvili, PJ Morandi, and Angel Zaldívar, *The frame of nuclei on an alexandorff space*, Order (2020).

[Sex03] Rosemary A Sexton, *A point-free and point-sensitive analysis of the patch assembly*, The University of Manchester (United Kingdom), 2003.

[Sim04] Harold Simmons, *The vietoris modifications of a frame*, Unpublished manuscript, 79pp., available online at http://www. cs. man. ac. uk/hsimmons (2004).

[Sim06] ______, *Regularity, fitness, and the block structure of frames*, Applied Categorical Structures **14** (2006), 1–34.

[SS06a] RA Sexton and H Simmons, *An ordinal indexed hierarchy of separation properties*, to appear (2006).

[SS06b] ______, *Point-sensitive and point-free patch constructions*, Journal of Pure and Applied Algebra **207** (2006), no. 2, 433–468.