Universidad de Guadalajara

Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías

Doctorado en Ciencias en Matemáticas

Modificaciones de parches y algunos axiomas de separación en la topología sin puntos

Protocolo de Tesis

que presenta

Juan Carlos Monter Cortés

Director(a): Dr. Luis Ángel Zaldívar Corichi

Guadalajara, Jal., enero de 2026

1. Introducción

La construcción de parches introducida por Sexton en Sexton and Simmons (2006b) busca dar una variante libre de puntos que se comporte de manera similar a lo que topológicamente se conoce como *espacio de parches*. De manera especifica, se busca imitar la propiedad de que un espacio topológico S sea empaquetado. Lo anterior se cumple si y solo si

$$^{p}S = S,$$

donde ^{p}S es el espacio de parches. Esto es traducido al lenguaje de marcos como la propiedad de que un marco A sea *parche trivial*. En otras palabras, un marco A es parche trivial si

$$A \simeq PA,$$

donde PA es conocido como el *marco de parches*. Los autores de Sexton and Simmons (2006b), Sexton and Simmons (2006a) y Sexton (2003) se encargan de caracterizar esta propiedad por medio de lo que ellos definen como *marcos eficientes*. Parte de las propiedades demostradas relacionan a los marcos eficientes con los axiomas clásicos de separación. El siguiente teorema de un ejemplo de ello.

Teorema 1.1. *Un espacio S que es T_0 tiene topología 1-eficiente si y solo si S es T_2.*

En la actualidad, el estudio de los axiomas de separación es un área de interés dentro de los grupos de investigación sobre teoría de marcos. De manera similar a los axiomas para espacios topológicos, los axiomas dentro de la categoría de marcos se relacionan de manera jerárquica, en este caso

$$(\mathbf{reg}) \Rightarrow (\mathbf{fH}) \Rightarrow (\mathbf{H}) \Rightarrow T_1$$

donde (**reg**) es la propiedad de ser *regular*, (**fH**) es *fuertemente Hausdorff* y (**H**) la de ser *Hausdorff* (ver Picado and Pultr (2021)). De esta manera resulta natural preguntarnos lo siguiente: *¿se puede incluir la propiedad de eficiencia en alguna parte de esta jerarquía?*.

2. Planteamiento del Problema

Describe qué se quiere saber o resolver.

3. Hipótesis

Propone una posible respuesta al planteamiento del problema.

4. Objetivos

5. Metodología

El plan de trabajo para la realización de este proyecto de investigación es el que se describe a continuación.

Referencias

Arrieta, I. (2024). Localic separation and the duality between closedness and fittedness. *Topology and its Applications*, 362:108785. Open access under CC BY 4.0.

Arrieta, I., Picado, J., and Pultr, A. (2022). A new diagonal separation and its relations with the hausdorff property. *Applied Categorical Structures*, 30(2):247–263.

Ávila, F., Bezhanishvili, G., Morandi, P., and Zaldívar, A. (2020). When is the frame of nuclei spatial: A new approach. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 224(7):106302.

Cuadro 1: Cronograma

Semestre	1	2	3	4	5	6	7	8
Revisión de bibliografía	✓	✓	✓	✓	✓	✓		
Lectura de artículos	✓	✓	✓	✓	✓	✓		
Proponer conjeturas		✓	✓	✓	✓	✓		
Probar resultados			✓	✓	✓	✓	✓	
Validación y rechazo de conjeturas			✓	✓	✓	✓	✓	
Redacción de artículos y otros documentos		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Desarrollar conclusiones						✓	✓	✓
Sustentación								✓

Balmer, P. and Gallauer, M. (2025). Patch-density in tensor-triangular geometry. *arXiv preprint*. Preprint.

Dowker, C. and Papert, D. (1966). Quotient frames and subspaces. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(1):275–296.

Escardó, M. H. (2001). The regular-locally compact coreflection of a stably locally compact locale. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 157(1):41–55.

Escardó, M. H. (2003). Joins in the frame of nuclei. *Applied Categorical Structures*, 11:117–124.

Escardó, M. H. (2006). Compactly generated hausdorff locales. *Annals of Pure and Applied Logic*, 137(1-3):147–163.

Gierz, G., Hofmann, K. H., Keimel, K., Lawson, J. D., Mislove, M., and Scott, D. S. (2012). *A compendium of continuous lattices*. Springer Science & Business Media.

Hochster, M. (1969). Prime ideal structure in commutative rings. *Transactions of the American Mathematical Society*, 142:43–60.

Hofmann, K. H. and Lawson, J. D. (1978). The spectral theory of distributive continuous lattices. *Transactions of the American Mathematical Society*, 246:285–310.

Hofmann, K. H. and Mislove, M. W. (2006). Local compactness and continuous lattices. In *Continuous Lattices: Proceedings of the Conference on Topological and Categorical Aspects of Continuous Lattices (Workshop IV) Held at the University of Bremen, Germany, November 9–11, 1979*, pages 209–248. Springer.

Isbell, J. R. (1972). Atomless parts of spaces. *Mathematica Scandinavica*, 31(1):5–32.

Johnstone, P. T. (1982). *Stone Spaces*, volume 3 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge.

Johnstone, P. T. (1983). The point of pointless topology. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 8(1):41–53.

Johnstone, P. T. (2020). Vietoris locales and localic semilattices. In *Continuous lattices and their applications*, pages 155–180. CRC Press.

Klinke, O. K. (2013). Yet another patch construction for continuous frames and connections to the fell compactification. *Algebra universalis*, 70:227–243.

Paseka, J. (1987). t_2-separation axioms on frames. *Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica*, 028(2):95–98.

Picado, J. and Pultr, A. (2012). *Frames and Locales: Topology without points*. Frontiers in Mathematics. Springer Basel.

Picado, J. and Pultr, A. (2016). New aspects of subfitness in frames and spaces. *Applied Categorical Structures*, 24(5):703–714.

Picado, J. and Pultr, A. (2021). *Separation in point-free topology.* Springer.

Sexton, R. and Simmons, H. (2006a). An ordinal indexed hierarchy of separation properties. *to appear.*

Sexton, R. and Simmons, H. (2006b). Point-sensitive and point-free patch constructions. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 207(2):433–468.

Sexton, R. A. (2003). *A point-free and point-sensitive analysis of the patch assembly.* The University of Manchester (United Kingdom).

Simmons, H. The basics of frame theory.

Simmons, H. A collection of notes on frames.

Simmons, H. (1978). A framework for topology. In *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, volume 96, pages 239–251. Elsevier.

Simmons, H. (2004). The vietoris modifications of a frame. *Unpublished manuscript, 79pp., available online at http://www. cs. man. ac. uk/hsimmons.*

Simmons, H. (2006a). The assembly of a frame. *University of Manchester.*

Simmons, H. (2006b). The fundamental triangle of a space. *Corpus ID*, 126365252.

Simmons, H. (2006c). Regularity, fitness, and the block structure of frames. *Applied Categorical Structures*, 14:1–34.

Simmons, H. (2017). The point space of a frame.

Zaldívar Corichi, L. A. (2023). *Una Introducción a la teoría de marcos.*