

# 1. Cosas para trabajar durante el periodo 2026 A

Para la mejor comprensión del presente documento, incluimos la notación básica que será manejada en los distintos puntos que más adelante se enunciaran.

Sea  $A \in \text{Frm}$  un marco, entonces  $PA \subseteq NA$  denota el marco de parches, donde  $NA$  denota el conjunto de todos los núcleos sobre  $A$ .

Consideremos  $\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}$ . Se puede verificar que el anterior es un filtro y es conocido como filtro de admisibilidad. Usando los filtros de admisibilidad definimos la siguiente relación de equivalencia:

$$j \sim k \iff \nabla(j) = \nabla(k).$$

donde  $j, k \in NA$ .

Cada clase de equivalencia proporciona un bloque de elementos en  $NA$ . Cuando  $F = \nabla(j)$  es un filtro abierto, este bloque tiene asociado un mayor y un menor elemento. Dicho bloque tiene la forma  $[v_F, w_F]$  y lo llamamos intervalo de admisibilidad.

Si  $p \in \text{pt } A$ , entonces podemos asociarle un elemento  $w_p \in \text{pt } NA$  dado por

$$w_p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \not\leq p \\ p & \text{si } x \leq p \end{cases}$$

Sabemos que  $PA \subseteq NA$  y aplicando el funtor  $\text{pt}$  obtenemos  $\text{pt } NA \subseteq \text{pt } PA$ . Por lo tanto  $w_p \in \text{pt } PA$ . De esta manera, para  $p \in \text{pt } A$  decimos que  $p$  es un punto ajusto si  $w_p$  es un núcleo ajustado.

Por último, incluimos un breve resumen de algunas propiedades de separación en  $\text{Frm}$ . Para cualesquiera  $a \not\leq b \in A$  tenemos que  $A$  es:

- **(H)** si  $\exists c \in A$  tal que  $c \not\leq a$  y  $\neg c \leq b$ , con  $a \neq 1$ .
- **(aju)** si  $\exists x, y \in A$  tales que  $x \vee a = 1, y \not\leq b$  y  $x \wedge y \leq b$ .
- **(saju)** si  $\exists c \in A$  tal que  $c \vee a = 1 \neq c \vee b$ .

## 1.1. Lista de actividades

En la siguiente lista se presentan las principales actividades que realizaré durante el semestre 2026 periodo que abarca mi estancia del 6to semestre dentro del doctorado en ciencias en matemáticas.

1. Leer el artículo [Arr24] para caracterizar los  $p \in \text{pt } A$  que producen  $w_p$  ajustados.
2. Relacionar el ejemplo 12.1 de [SS06] y ver la relación que pueda existir con los marcos eficientes y los marcos  $KC$ .
3. Para  $A = [0, 1]$  describir quienes son  ${}^pS$  y  $PA$ , donde  ${}^pS$  es el espacio de parches.
  - En el ejemplo anterior, verificar que propiedades de separación cumple  $PA$ .
  - Comprobar si  $P[0, 1]$  es eficiente pero no  $KC$ .
4. Caracterizar los marcos  $KC$  por medio de los intervalos  $[v_F, w_F]$ .
5. Si existe un ejemplo de marcos eficientes que no son  $KC$ , verificar que la clase de marcos  $KC$  es cerrada bajo coproductos.
6. Ver la relación que existe entre la propiedad  $KC$  y **(H)**.
7. Definir las nociones libres de puntos de apilado y fuertemente apilado.
8. Verificar si las nociones anteriores son conservativas o no.
9. Teniendo las nociones libres de puntos de apilado y fuertemente apilado, analizar el comportamiento de marcos que cumplan las propiedades:
  - eficiente + fuertemente apilado.
  - eficiente + apilado.
  - **(saju)**+ fuertemente apilado.
  - **(saju)**+ apilado.
  - **(aju)**+ fuertemente apilado.
  - **(aju)**+ apilado.
10. En caso de que las nociones anteriores no sean conservativas, ver la relación que existe entre ellas y la propiedad **(H)**.
11. Leer el artículo [BG25] y dar versiones del Lema 2.6 y Teorema 2.8 para  ${}^pS$  y  $PA$ .

## Referencias

- [Arr24] Igor Arrieta, *Localic separation and the duality between closedness and fittedness*, Topology and its Applications **362** (2024), 108785, Open access under CC BY 4.0.
- [BG25] Paul Balmer and Martin Gallauer, *Patch-density in tensor-triangular geometry*, arXiv preprint (2025), Preprint.
- [SS06] RA Sexton and H Simmons, *Point-sensitive and point-free patch constructions*, Journal of Pure and Applied Algebra **207** (2006), no. 2, 433–468.