

Reporte mensual de actividades

Juan Carlos Monter Cortés

13-enero-2026 a 31-enero-2026

Si consideramos $A \in \text{Frm}$, entonces $S = \text{pt } A$ denota el espacio de puntos de A . Además, si $x \in A$

$$\mathcal{U}_A(x) = \{p \in S \mid x \not\leq p\}$$

es un abierto en \mathcal{OS} . Lo anterior proporciona el morfismo de marcos $\mathcal{U}_A : A \rightarrow \mathcal{OS}$ definido por $x \mapsto \mathcal{U}_A(x)$ el cual es suprayectivo y se le conoce como la reflexión espacial. De manera adicional, \mathcal{U}_A es un isomorfismo si y sólo si A es espacial, es decir, $A \simeq \mathcal{OS}$ para algún $S \in \text{Top}$. Además, podemos omitir el subíndice de la reflexión espacial si es claro cual es el marco con el que se está trabajando.

1. Núcleos y derivadas

Sabemos que $j : A \rightarrow A$ es un núcleo en A si es una función que infla, monótona, idempotente y que respeta ínfimos finitos. Si la anterior no cumple con la idempotencia, entonces al operador se le conoce como *prenúcleo*.

Para $a, x \in A$ podemos definir los núcleos conocidos

$$u_a(x) = a \vee x, \quad v_a(x) = (a \succ x), \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a).$$

Si $A = \mathcal{OS}$ y $E \subseteq S$ definimos la función

$$[E](U) = (E \cup U)^\circ$$

donde $U \in \mathcal{OS}$. La anterior resulta ser un núcleo en \mathcal{OS} y se le conoce como *núcleo espacialmente inducido*. De manera particular, recordado que la implicación en Top se calcula por

$(W \succ U) = (W' \cup U)^\circ$ para cada $U, W \in \mathcal{OS}$ tenemos que

$$u_W = [W] \quad y \quad v_W = [W'].$$

Si a un núcleo espacialmente inducido le calculamos su complemento dual, obtenemos un operador sobre \mathcal{CS} . Dicho operador resulta ser una *derivada idempotente*.

Definición 1.1. Sea $S \in \text{Top}$ y \mathcal{CS} la colección de subconjuntos cerrados de S . Un operador $\partial: \mathcal{CS} \rightarrow \mathcal{CS}$ es una derivada si satisface:

1. Si $X \subseteq Y$ entonces $\partial(X) \subseteq \partial(Y)$,
2. $\partial(X) \subseteq X$,
3. $\partial(X \cup Y) = \partial(X) \cup \partial(Y)$

para todo $X, Y \in \mathcal{CS}$. De manera adicional, decimos que la derivada es idempotente si $\partial^2 = \partial$.

Tanto para núcleos como para derivadas, el orden se define puntualmente y considerando id el operador identidad, tp el operador constante $x \mapsto 1$ y fd el operador constante $x \mapsto 0$ obtenemos

$$\text{id} \leq j \leq \text{tp} \quad y \quad \text{id} \geq \partial \geq \text{fd}$$

para j un núcleo y ∂ una derivada.

Como mencionamos antes, si tomamos el núcleo $v_W = [W']$ y calculamos su complemento dual obtenemos

$$(v_W(U))' = ([W'](U))' = ((W' \cup U)^\circ)' = (((W \cap U')')^\circ)' = \overline{(W \cap U')} = \partial_W(U'). \quad (1)$$

En este caso, la última proporciona el operador ∂_W que es una derivada idempotente.

Decimos que $F \subseteq A$ es un filtro abierto si satisface:

1. $1 \in F$,
2. Si $x, y \in F$ entonces $x \wedge y \in F$,
3. Si $x \in F$ y $x \leq y$ entonces $y \in F$.
4. Si $X \subseteq A$ es un conjunto dirigido y $\forall X \in F$ entonces existe $x \in X$ tal que $x \in F$.

Denotamos por A^\wedge al conjunto de todos los filtros abiertos en A . Decimos que f es un núcleo ajustado si este tiene la forma

$$f = \bigvee \{v_a \mid a \in F\}$$

y es un núcleo en A . Tomando el supremo puntual obtenemos

$$f_F = \dot{\bigvee} \{v_a \mid a \in F\} \quad (2)$$

el cual resulta ser un prenúcleo en A .

Considerando $F \in A^\wedge$ e iterando sobre los ordinales construimos la cadena creciente de prenúcleos

$$f_F^0 = \text{id}, \quad f_F^{\alpha+1} = f_F \circ f_F^\alpha, \quad f_F^\lambda = \bigvee \{f_F^\alpha \mid \alpha < \lambda\}$$

para cada ordinal α y cada ordinal límite λ . De manera usual, denotamos por ∞ al ordinal bajo el cual la sucesión se estabiliza, es decir, $f_F^{\infty+1} = f_F^\infty$. A este se le conoce como la cerradura idempotente y haciendo uso de él definimos

$$v_F = f_F^\infty.$$

donde v_F es el núcleo ajustado asociado a F .

Si $A = \mathcal{OS}$, tenemos que el prenúcleo (2) tiene la forma

$$f_F = \dot{\bigvee} \{[U'] \mid U \in F\}$$

y por el Teorema de Hofmann-Mislove obtenemos $f_F = \dot{\bigvee} \{[U'] \mid Q \subseteq U\}$ donde $Q \in \mathcal{QS}$ es el conjunto compacto saturado asociado a F .

Calculando su complemento dual obtenemos la derivada $\partial_F(X) = \bigcap \{\overline{(X \cap U)} \mid Q \subseteq U\}$ donde $X \in \mathcal{CS}$. Por lo tanto, tenemos que

$$\partial_F(X) = f_F(X')'. \quad (3)$$

Al operador ∂_F se le conoce como la Q -derivada (ver Lema 6.1 de [Sim04]).

Similarmente a como construimos la sucesión creciente de prenúcleos f_F^α tenemos la si-

guiente sucesión decreciente de Q -derivadas

$$\partial_F^0 = \text{id}, \quad \partial_F^{\alpha+1} = \partial_F(\partial_F^\alpha), \quad \partial_F^\lambda = \bigcap\{\partial_F^\alpha \mid \alpha < \lambda\}.$$

La manera de relacionar ambas sucesiones se muestra en el siguiente lema.

Lema 1.2. *Para todo $\alpha \in \text{Ord}$ y $X \in CS$, se cumple*

$$\partial_F^\alpha(X) = (f_F^\alpha(X'))'. \quad (4)$$

Demostración. Procedemos por inducción transfinita sobre $\alpha \in \text{Ord}$.

Caso base $\alpha = 0$. Por definición, $\partial_F^0 = \text{id}$, es decir, $\partial_F^0(X) = X$ y $f_F^0 = \text{id}$, luego

$$\partial_F^0(X) = X = (X'') = (f_F^0(X'))'.$$

Caso sucesor. Supongamos que la afirmación es cierta para α y probemos para $\alpha + 1$. Por definición de iteración,

$$\partial_F^{\alpha+1}(X) = \partial_F(\partial_F^\alpha(X)).$$

Además, por (3)

$$\partial_F^{\alpha+1}(X) = (f_F((\partial_F^\alpha(X))'))'.$$

Por hipótesis inducción, $\partial_F^\alpha(X) = (f_F^\alpha(X'))'$ y sustituyendo obtenemos

$$\partial_F^{\alpha+1}(X) = (f_F(f_F^\alpha(X')))' = (f_F^{\alpha+1}(X'))'$$

que es lo que queríamos.

Caso límite. Sea λ un ordinal límite y supongamos que lo anterior se cumple para todo $\alpha < \lambda$. Por definición de la iteración,

$$\partial_F^\lambda(X) = \bigcap_{\alpha < \lambda} \partial_F^\alpha(X).$$

Por De Morgan,

$$(\partial_F^\lambda(X))' = \left(\bigcap_{\alpha < \lambda} \partial_F^\alpha(X) \right)' = \bigcup_{\alpha < \lambda} (\partial_F^\alpha(X))'.$$

Usando la hipótesis de inducción, para todo $\alpha < \lambda$,

$$(\partial_F^\alpha(X))' = f_F^\alpha(X'),$$

Luego,

$$\left(\partial_F^\lambda(X)\right)' = \bigcup_{\alpha < \lambda} f_F^\alpha(X') = f_F^\lambda(X').$$

Por lo tanto,

$$\left(\partial_F^\lambda(X)\right)' = f_F^\lambda(X'),$$

es decir,

$$\partial_F^\lambda(X) = \left(f_F^\lambda(X')\right)'.$$

y obtenemos lo que queríamos. \square

Un caso particular del lema anterior es cuando $\alpha = \infty$.

Corolario 1.3.

$$\partial_F^\infty(X) = (v_F(X'))'. \quad (5)$$

2. Nociones de apilamiento

Los operadores definidos hasta ahora se relacionan por medio de las nociones de apilado y fuertemente apilado.

Definición 2.1. Consideremos $S \in \text{Top}$.

1. Un conjunto $Q \in \mathcal{Q}_S$ es apilado si $\overline{Q} = \partial_F^\infty(S)$ y es fuertemente apilado si $v_F = [Q']$.
2. El espacio S es apilado o fuertemente apilado si cada $Q \in \mathcal{Q}_S$ es apilado o fuertemente apilado, respectivamente.

La anterior es la noción sensible a puntos introducida por Sexton y Simmons en [SS06a] (Definición 6.1) y cumplen que fuertemente apilado implica apilado. Nosotros damos las nociones libres de puntos, es decir, las definiciones en Frm .

Definición 2.2. Siguiendo la notación anterior, consideremos $A \in \text{Frm}$. Decimos que A es:

1. apilado si $(\mathcal{U}_*([Q'])\mathcal{U})(0) = v_F(0)$.
2. fuertemente apilado si $\mathcal{U}_*[Q']\mathcal{U} = v_F$.

Trivialmente tenemos que fuertemente apilado implica apilado. Nuestro objetivo es demostrar que las propiedades anteriores son conservativas, es decir, que un espacio S es apilado (fuertemente apilado) si y sólo si su marco de abiertos \mathcal{O}_S es apilado (fuertemente apilado). Antes de hacer esto necesitamos el siguiente lema auxiliar.

Lema 2.3. Si $A = \mathcal{O}S$ y $E \subseteq S$ se cumple que

$$\mathcal{U}_*[E]\mathcal{U} = [E].$$

Demostración. Como el marco A es espacial se cumple que \mathcal{U} es un isomorfismo. De aquí que si $U \in \mathcal{O}\text{pt } A$ existe $V \in \text{pt } A$ tal que $U = \mathcal{U}(V)$ y como $U \in \text{pt } A$, se cumple que $U = V$. Luego

$$\begin{aligned} (\mathcal{U}_*[E]\mathcal{U})(U) &= \mathcal{U}_*[E](\mathcal{U}(U)) = \mathcal{U}_*([E](U)) \\ &= \mathcal{U}_*(E \cup U)^\circ = \bigcup\{W \in \mathcal{O}S \mid W \subseteq (E \cup U)^\circ\} \\ &= (E \cup U)^\circ = [E](U). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{U}_*[E]\mathcal{U} = [E]$. □

Proposición 2.4. Las nociones de fuertemente apilado y apilado son conservativas.

Demostración. Consideremos $S \in \text{Top}$, $A = \mathcal{O}S$, $F \in A^\wedge$ y $Q \in \mathcal{Q}S$.

Primero, supongamos que S es fuertemente apilado. De aquí que $v_F = [Q']$ y por el Lema 2.3 tenemos que $\mathcal{U}_*[Q']\mathcal{U} = [Q'] = v_F$. Por lo tanto $\mathcal{O}S$ es fuertemente apilado.

Supongamos ahora que S es apilado. Por lo anterior se cumple que

$$\overline{Q} = \partial_F^\infty(S) \iff \overline{Q}' = (\partial_F^\infty(S))'.$$

Además,

$$\begin{aligned} (\mathcal{U}_*[Q']\mathcal{U})(\emptyset) &= \mathcal{U}_*([Q'](\{V \in \text{pt } \mathcal{O}S \mid \emptyset \not\subseteq V\})) \\ &= \mathcal{U}_*([Q'](\emptyset)) = \mathcal{U}_*(Q')^\circ \\ &= \bigcup\{W \in \mathcal{O}S \mid W \subseteq (Q')^\circ\} \\ &= (Q')^\circ = \overline{Q}'. \end{aligned}$$

Por el Corolario 1.3 tenemos que $v_F(\emptyset) = (\partial_F^\infty(\emptyset'))'$. Por lo tanto

$$v_F(\emptyset) = (\mathcal{U}_*[Q']\mathcal{U})(\emptyset),$$

es decir, $\mathcal{O}S$ es apilado. □

Nuestro siguiente paso será el verificar cual es el comportamiento de las nociones de apilamiento en conjunto con la eficiencia.

3. El marco $[0, 1]$

Siguiendo la idea mostrada en [Sim06] (o de manera alternativa [Sim04]), consideremos el marco linealmente ordenado $A = [0, 1]$. En este caso particular podemos hacer las siguientes observaciones:

1. Para cualesquiera $a, b \in A$ la implicación $(a \succ b)$ se calcula por

$$(a \succ b) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b, \\ b & \text{si } a > b. \end{cases}$$

2. Los núcleos distinguidos u_a, v_a, w_a para $a \in A$ se calculan como

$$u_a(x) = \begin{cases} x & \text{si } a \leq x, \\ a & \text{si } x < a, \end{cases}, \quad v_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq a, \\ a & \text{si } x < a, \end{cases} \quad \text{y} \quad w_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > a, \\ a & \text{si } x \leq a. \end{cases}$$

3. Si $F \subseteq A$ es un filtro, entonces este siempre es admisible y tiene la forma

$$F = \nabla(w_a) = (a, 1] \quad \text{o} \quad F = \nabla(v_a) = [a, 1]$$

para algún $a \in A$. De manera particular, $F \in A^\wedge$ si y solo si $F = (a, 1]$.

4. Si $F \in A^\wedge$, el núcleo ajustado v_F se calcula como

$$v_F(x) = l_m(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > m, \\ x & \text{si } x \leq m. \end{cases} \tag{6}$$

donde $l_m = v_m \wedge w_m$ y $m = \bigwedge F$.

5. Para $S = \text{pt } A$ se cumple que $S = [0, 1)$ y los abiertos en \mathcal{OS} son de la forma

$$\mathcal{U}_A(x) = \{p \in S \mid p < x\} = [0, x).$$

6. El marco A no es T_1 pues ningún $p \in S$ es máximo. Por lo tanto, A no satisface alguna otra propiedad de separación en Frm.

7. Para $F \in A^\wedge$ el conjunto $Q \in \mathcal{QS}$ asociado a F es de la forma $Q = [0, m]$ donde $m = \bigwedge F$.
8. Se cumple que $[Q'] = v_F$ y por lo tanto S es fuertemente apilado.
9. Ya que $[0, x) \in \mathcal{OS}$, entonces $[x, 1] \in \mathcal{CS}$. Como $Q = [0, m] \in \mathcal{QS}$, tenemos que los subconjuntos compactos no son cerrados, es decir, S no es empaquetado.
10. A no es eficiente.

Todo lo anterior es un resumen de las principales características del marco $[0, 1]$. Lo que sigue es realizar el análisis de las construcciones de parches tanto de A como de S .

3.1. Análisis de las construcciones de parches

Recordemos que para $A \in \text{Frm}$ y $S \in \text{Top}$ tenemos

$$\text{Pbase} = \{u_a \wedge v_F \mid a \in A, F \in A^\wedge\} \quad \text{y} \quad \text{pbase} = \{U \cap Q' \mid U \in \mathcal{OS}, Q \in \mathcal{QS}\}$$

donde Pbase genera al marco de parches de A (denotado por PA) y pbase genera la topología del espacio de parches de S (denotado por pS). Por (6) tenemos que

$$\text{Pbase} = \{u_a \wedge l_m \mid a \in [0, 1], m \in [0, 1]\}.$$

Por lo tanto, si queremos conocer el comportamiento del marco PA necesitamos saber la relación que existe entre a y m .

Para $x \in A$ tenemos que $(u_a \wedge l_m)(x) = u_a(x) \wedge l_m(x)$. Primero veamos la relación entre x y m .

Caso 1: Si $x < m$, entonces $(u_a \wedge l_m)(x) = u_a(x) \wedge x = x$.

Caso 2: Si $x = m$, entonces $(u_a \wedge l_m)(x) = u_a(m) \wedge m = x$.

Caso 3: Si $x > m$, entonces $(u_a \wedge l_m)(x) = u_a(x) \wedge 1 = u_a(x)$.

Notemos que en los primeros 2 casos el valor de a no afecta el resultado de la evaluación. Además $u_a \wedge l_m = \text{id}$, es decir, los generadores básicos de la Pbase son distinto a id cuando $m < x$. Ahora veamos la relación entre a y m en el tercer caso.

Caso 3.1: Si $m < x < a$, entonces $(u_a \wedge l_m)(x) = a$.

Caso 3.2: Si $m < a \leq x$, entonces $(u_a \wedge l_m)(x) = x$.

De esta manera, tenemos que la Pbase está conformada por

$$\text{Pbase} = \begin{cases} \{u_a \wedge l_m\} & \text{si } m < a, \\ \{\text{id}\} & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

es decir, el marco PA está codificado por los intervalos de la forma (m, a) , donde $m \in \text{pt } A$ y $a \in A$.

Queremos identificar si en nuestro ejemplo, PA satisface alguna propiedad de separación. Para hacerlo, ocuparemos recordar información respecto a los parches.

Si $A \in \text{Frm}$ es un marco arbitrario y S su espacio de puntos, podemos construir el siguiente diagrama conmutativo que relaciona ambas construcciones de parches.

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & PA & \longleftarrow & NA \\ U_A \downarrow & & \downarrow P(U_A) & & \downarrow N(U_A) \\ \mathcal{OS} & \longrightarrow & P\mathcal{OS} & \longrightarrow & N\mathcal{OS} \\ & \searrow & \downarrow \pi & & \downarrow \sigma \\ & & \mathcal{O}^p S & \longrightarrow & \mathcal{O}^f S \end{array}$$

donde $\mathcal{O}^f S$ es la topología de Skula (o topología frontal) del espacio S . En [SS06b] lo llaman el *diagrama del ensamble de parches* y más detalles sobre este también pueden ser encontrados en [Sex03].

En nuestro caso, U_A es un isomorfismo. Además, bajo U_A , la construcción de parches resulta ser functorial y, por lo tanto, $PA \cong P\mathcal{OS}$. De manera similar, $NA \cong N\mathcal{OS}$. Para obtener más información sobre $P\mathcal{OS}$ y $N\mathcal{OS}$ podemos hacer uso de los siguientes resultados, el cual puede consultarse en [ÁBMZ20].

Proposición 3.1. *Sea S un conjunto parcialmente ordenado.*

1. *Si S no tiene anticadenas infinitas, entonces $N\mathcal{OS}$ es espacial.*
2. *Si S es totalmente ordenado, entonces $N\mathcal{OS}$ es espacial.*

Así, por la Proposición 3.1 tenemos que $N\mathcal{OS}$ es espacial y por lo tanto $N\mathcal{OS} \cong \mathcal{O}^f S$. Juntando toda esta información el diagrama del ensamble de parches en nuestro caso particular queda como sigue.

$$\begin{array}{ccccc}
A & \longrightarrow & PA & \longrightarrow & NA \\
\cong \downarrow & & \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\
OS & \longrightarrow & O^p S & \longrightarrow & O^f S
\end{array}$$

Por lo tanto, si queremos estudiar al marco PA podemos estudiar a la topología de parches $O^p S$. Recordemos que

$$\text{pbase} = \{U \cap Q' \mid U \in OS, Q \in QS\}.$$

y, en nuestro caso,

$$\text{pbase} = \{[0, a) \cap [m, 1) \mid a \in [0, 1], m \in [0, 1]\} = \{(m, a)\}.$$

Notemos que la anterior es la base para la topología usual en $[0, 1]$ y al ser ${}^p S$ un espacio Hausdorff, $O^p S \cong PA$ satisface **(H)**. De manera adicional, PA es un marco KC .

4. Actividades realizadas

Durante el presente periodo, se llevaron a cabo las siguientes actividades:

1. Definimos las nociones libres de puntos de apilado y fuertemente apilado.
2. Verificamos que las nociones anteriores son conservativas.
3. Culminamos el análisis del marco $[0, 1]$ y su construcción de parches.

Referencias

- [ÁBMZ20] Francisco Ávila, Guram Bezhanishvili, PJ Morandi, and Angel Zaldívar, *The frame of nuclei on an alexandorff space*, Order (2020).
- [Sex03] Rosemary A Sexton, *A point-free and point-sensitive analysis of the patch assembly*, The University of Manchester (United Kingdom), 2003.
- [Sim04] Harold Simmons, *The vietoris modifications of a frame*, Unpublished manuscript, 79pp., available online at <http://www.cs.man.ac.uk/~hsimmons> (2004).
- [Sim06] ———, *Regularity, fitness, and the block structure of frames*, Applied Categorical Structures **14** (2006), 1–34.

- [SS06a] RA Sexton and H Simmons, *An ordinal indexed hierarchy of separation properties*, to appear (2006).
- [SS06b] _____, *Point-sensitive and point-free patch constructions*, Journal of Pure and Applied Algebra **207** (2006), no. 2, 433–468.