Reporte mensual de actividades

Juan Carlos Monter Cortés

13-enero-2026 a 31-enero-2026

Si consideramos $A \in \mathrm{Frm}$, entonces $S = \mathrm{pt}\, A$ denota el espacio de A. Además, si $x \in A$

$$U_A(x) = \{p \in S \mid x \nleq p\}$$

es un abierto en $\mathcal{O}S$. Lo anterior proporciona el morfismo de marcos $U_A : A \to \mathcal{O}S$ definido por $x \mapsto U_A(x)$ el cual es suprayectivo y se le conoce como la reflexión espacial. De manera adicional, U_A es un isomorfismo si y sólo si A es espacial, es decir, $A \simeq \mathcal{O}S$ para algún $S \in \mathrm{Top}$.

Sabemos que $j\colon A \to A$ es un núcleo en A si es una función que infla, monótona, idempotente y que respeta ínfimos finitos. Para $a, x \in A$ podemos definir los núcleos conocidos

$$u_a(x) = a \vee x, \quad v_a(x) = (a \succ x), \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a).$$

Si $A = \mathcal{O}S$ y $E \subseteq S$ definimos la función

$$[E](U) = (E \cup U)^\circ$$

donde $U \in \mathcal{O}S$. La anterior resulta ser un núcleo en $\mathcal{O}S$ y se le conoce como *núcleo espacialmente inducido*. De manera particular, recordado que la implicación en Top se calcula por $(W \succ U) = (W' \cup U)^\circ$ para cada $U, W \in \mathcal{O}S$ tenemos que

$$u_W = [W] \quad y \quad v_W = [W'].$$

Si a un núcleo espacialmente inducido le calculamos el complemento, obtenemos un operador sobre $\mathcal{C}S$, las diferencias que existen entre estos radican en que los últimos desinflan y respetan supremos finitos. Por ejemplo

$$(v_{W'}(U))' = ([W](U))' = ((W \cup U)^{\circ})' = \overline{(W' \cap U')} = \partial_{W'}(U')$$

donde al operador $\partial_{E'}$ se le denomina derivada sobre $\mathcal{C}S$.

Decimos que $F \subseteq A$ es un filtro abierto si satisface:

1. $1 \in F$,
2. Si $x, y \in F$ entonces $x \wedge y \in F$,
3. Si $x \in F$ y $x \leq y$ entonces $y \in F$.
4. Si $X \subseteq A$ es un conjunto dirigido y $\bigvee X \in F$ entonces existe $x \in X$ tal que $x \in F$.

Denotamos por $A^{\wedge}$ al conjunto de todos los filtros abiertos en A. Decimos que f_F es un núcleos ajustado si este tiene la forma

$$f_F = \bigvee \{v_a \mid a \in F\}$$

el cual es un núcleo en A. Tomando el supremo puntual obtenemos el prenúcleo

$$f_F(x) = \dot{\bigvee} \{v_a \mid a \in F\}.$$

Considerando $F \in A^{\wedge}$ e iterando sobre los ordinales construimos la cadena creciente de prenúcleos

$$f_F^0 = \mathrm{id}, \quad f_F^{\alpha+1} = f_F \circ f_F^{\alpha}, \quad f_F^{\lambda} = \bigvee \{f_F^{\beta} \mid \alpha < \lambda\}$$

para cada ordinal α y cada ordinal límite λ. Finalmente, definimos

$$v_F = f_F^{\infty}$$

como el núcleo ajustado asociado a F.

Por el Teorema de Hofmann-Mislove-Johnstone tenemos una correspondencia biyectiva entre

$$Q \longleftrightarrow F \longleftrightarrow v_F$$

donde $Q \in \mathcal{Q}S$, $F \in A^{\wedge}$ y v_F el núcleo ajustado asociado a F.

Si $A = \mathcal{O}S$, tenemos la siguiente relación entre filtros abiertos y compactos saturados

$$U \in F \iff Q \subseteq U$$

y así el núcleo anterior tiene la forma $v_F = \bigcup\{[U'] \mid U \in F\}$. Calculando su complemento obtenemos el operador

$$\hat{Q}(X) = \bigcap\{\overline{(X \cap U)} \mid Q \subseteq U\}$$

donde $X \in \mathcal{C}S$. Al anterior se le conoce como la Q-derivada.

Similarmente a como construimos la sucesión creciente de prenúcleos, tenemos la siguiente sucesión decreciente de Q-derivadas

$$Q(0) = S, \quad Q(\alpha + 1) = \hat{Q}(Q(\alpha)), \quad Q(\lambda) = \bigcap\{Q(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}.$$

1. Nociones de apilamiento

Los operadores definidos hasta ahora se relacionan por medio de las nociones de apilado y fuertemente apilado.

Definición 1.1. *Consideremos $S \in \mathrm{Top}$.*

1. *Un conjunto $Q \in \mathcal{Q}S$ es apilado si $\overline{Q} = Q(\infty)$ y es fuertemente apilado si $v_F = [Q']$.*

2. *El espacio S es apilado o fuertemente apilado si cada $Q \in \mathcal{Q}S$ es apilado o fuertemente apilado, respectivamente.*

La anterior es la noción sensible a puntos introducida por Sexton y Simmons en [SS06] (Definición 6.1) y cumplen que fuertemente apilado implica apilado. Nosotros damos las nociones libres de puntos, es decir, las definiciones en Frm.

Definición 1.2. *Siguiendo la notación anterior, consideremos $A \in \mathrm{Frm}$ y $\mathcal{U} = U_A$. Decimos que A es:*

1. *apilado si $(\mathcal{U}_*([Q'])\mathcal{U})(0) = v_F(0)$.*

2. *fuertemente apilado si $\mathcal{U}_*([Q'])\mathcal{U} = v_F$.*

Trivialmente tenemos que fuertemente apilado implica apilado. Nuestro objetivo es demostrar que las propiedades anteriores son conservativas, es decir, que un espacio S es apilado (fuertemente apilado) si y sólo si su marco de abiertos $\mathcal{O}S$ es apilado (fuertemente apilado). Antes de hacer esto necesitamos el siguiente lema auxiliar.

Lema 1.3. *Si* $A = \mathcal{O}S$ *y* $E \subseteq S$ *se cumple que*

$$\mathcal{U}_*[E]\mathcal{U} = [E].$$

Demostración. □

Proposición 1.4. *Las nociones de fuertemente apilado y apilado son conservativas.*

Demostración. □

2. El marco $[0, 1]$

3. Actividades realizadas

Durante el presente periodo, se llevaron a cabo las siguientes actividades:

1. Definimos las nociones libres de puntos de apilado y fuertemente apilado.
2. Verificamos que las nociones anteriores son conservativas.
3.

Referencias

[SS06] RA Sexton and H Simmons, *An ordinal indexed hierarchy of separation properties*, to appear (2006).