UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIERÍAS
DIVISIÓN DE CIENCIAS BÁSICAS

Patch modifications and separation axioms in point-free topology

TESIS QUE PRESENTA
Juan Carlos Monter Cortés
PARA OBTENER EL GRADO DE
Doctor en Ciencias en Matemáticas

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Luis Ángel Zaldívar Corichi

Guadalajara, Jalisco, Agosto, 2027

Dedicado a:

Agradecimientos

Juan Carlos Monter Cortés
Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías
Guadalajara, Jalisco, MÉXICO
Agosto 2027

Contents

Introduction

Chapter 1

Preliminares

El desarrollo de esta investigación gira en torno de dos conceptos principales: la teoría de marcos y la topología de un espacio. Por tal motivo, en este capítulo nos encargamos de presentar toda la información necesaria para su desarrollo y comprensión. Para consultar información adicional de la que aquí mencionaremos, recomendamos consultar [1] o [4]. Algunas de las cuestiones espaciales que aquí serán mencionadas pueden encontrarse también en [6] y [7].

Algunos de los resultados que se muestran en este capítulo son muy conocidos, por tal motivo, los presentamos si prueba. Los que van acompañados de su demostración es porque consideramos que son más relevantes o simplemente porque no encontramos la prueba en la literatura (por ejemplo, la Proposición 1.1.22).

1.1 Teoría de marcos

Trabajar con marcos, hasta cierto punto, es trabajar con estructura sencillas de definir, pues estos se construyen a partir de un caso particular de retículas. De esta manera, lo ideal es comenzar con estructuras ordenadas.

Definición 1.1.1 *Sea S un conjunto. Un* orden parcial *sobre S es una relación binaria* "$\leq$" *la cual es*

1. Reflexiva: *para todo $a \in S$, $a \leq a$,*

2. Transitiva: *si $a \leq b$ y $b \leq c$, entonces $a \leq c$,*

3. Antisimétrica: *si $a \leq b$ y $b \leq a$, entonces $a = b$.*

Un conjunto parcialmente ordenado *(o* copo *de manera abreviada), es un conjunto equipado de un orden parcial. Si en la definición solo se cumplen las condiciones 1 y 2, entonces tenemos un* preorden parcial.

Definición 1.1.2 *Si S es un copo y $A \subseteq S$. Decimos que un elemento $a \in S$ es un* supremo *(la mínima cota superior), para A y escribimos $a = \bigvee A$, si*

1. a es una cota superior de A; es decir, $s \leq a$ para todo $s \in A$

2. *si $b \in S$ satisface que $s \leq b$ para todo $s \in A$, entonces $a \leq b$.*

Si A es $\varnothing$, entonces utilizamos 0 para denotar $\bigvee \varnothing$, donde 0 es el elemento mínimo de S. De hecho, para cualesquiera dos elementos $a, b \in A$, podemos calcular $a \vee b$, es decir, "$\vee$" es una operación binaria. Además si para cualquier subconjunto finito A, $\vee$ y 0 cumplen

1. $a \vee a = a$,
2. $a \vee b = b \vee a$,
3. $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$,
4. $a \vee 0 = a$,

para cualesquiera $a, b, c \in A$, obtenemos un conjunto con la estructura $(S, \vee, 0)$ la cual se conoce como *estructura de semiretícula* o a veces $\vee-$*semiretícula*.

De manera dual, en cualquier copo podemos considerar la noción de *ínfimo*, (cota inferior más grande), definida invirtiendo todas las desigualdades de la Definición 1.1.2. Así, escribimos $\bigwedge A$, $\wedge$ y 1 para los análogos de $\bigvee A$, $\vee$ y 0. Por lo tanto, obtenemos una estructura $(S, \wedge, 1)$ que también es una semiretícula (o $\wedge-$*semiretícula*).

Definición 1.1.3 *Una* retícula *es un conjunto con dos operaciones binarias ($\vee$ y $\wedge$) y dos elementos distinguidos (0 y 1) tal que $\vee$ (respectivamente $\wedge$) es asociativa, conmutativa, idempotente y tienen a 0 (respectivamente 1) como elementos neutros.*

Definición 1.1.4 *Consideremos una retícula $(S, \leq, \vee, \wedge, 0, 1)$. Si esta cumple las siguientes leyes distributivas*

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \quad y \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

para todo $a, b, c \in S$. Entonces decimos S es una retícula distributiva.

Definición 1.1.5 *Decimos que una $\vee-$semiretícula es* completa *si para cualquier subconjunto A (no solo finito) existe $\bigvee A$.*

Definición 1.1.6 *Un* marco *es una retícula completa $(S, \leq, \wedge, \bigvee, 0, 1)$ que cumple la siguiente ley distributiva, la cual se conoce como* ley distributiva para marcos (**LDM**)*, y dice lo siguiente:*

$$x \wedge \bigvee Y = \bigvee \{x \wedge y \mid y \in Y\}$$

para cualesquiera $x \in S$ y $Y \subseteq S$.

Ejemplo 1.1.7 *Para todo espacio topológico S se tienen dos familias de subconjuntos: los subconjuntos abiertos, que denotamos por $\mathcal{O}S$ y sus subconjuntos cerrados, denotados por $\mathcal{C}S$. De esta forma para cualquier $(S, \mathcal{O}S)$, $\mathcal{O}S$ tiene la estructura de retícula completa*

$$(\mathcal{O}S, \subseteq, \cap, \bigcup, S, \emptyset).$$

Además la familia de subconjuntos abiertos cumple la LDM. Es decir, $\mathcal{O}S$ es un marco.

Consideremos $U \subseteq S$, denotamos por

$$U, \qquad U^{-}, \qquad U^{\circ},$$

como el complemento, la cerradura y el interior de U en S, respectivamente.

Como mencionamos en el ejemplo, $\mathcal{O}S$ es un marco, en la literatura a $\mathcal{O}S$ también se le conoce como el marco de abiertos de S o como la retícula de conjuntos abiertos. Al ser $\mathcal{O}S$ una retícula, en ocasiones también se le denota por $\Omega(S)$. En estas notas aparecerán ambas notaciones para referirnos a los subconjuntos abiertos del espacio topológico S.

Calcular ínfimos arbitrarios se puede realizar de la siguiente forma

$$\bigwedge U = \left(\bigcap U\right)^{\circ}.$$

Definición 1.1.8 *Sean A y B dos marcos arbitrarios. Un* morfismo de marcos *es una función $f\colon A \to B$ tal que para cualesquiera $a, b \in A$ y $X \subseteq A$ se cumple lo siguiente:*

- $a \leq b$, $f(a) \leq f(b)$.
- $f(0_A) = 0_B$ y $f(1_A) = 1_B$.
- $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$.
- $f(\bigvee X) = \bigvee f(X)$.

Utilizando las Definiciones 1.1.6 y 1.1.8 podemos demostrar que la composición de morfismos de marcos es también un morfismo de marcos. Además, el morfismo identidad (id) actúa como elemento neutro en la composición. Como consecuencia tenemos una categoría, la cual denotaremos por Frm y es conocida como la *categoría de marcos*.

Definición 1.1.9 *Sea $f : A \to B$ una función monótona. El* adjunto derecho de f *es una función monótona $f_* : B \to A$ tal que $f(a) \leq b \Leftrightarrow a \leq f_*(b)$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$. Denotamos a f como f^* y escribimos $f^* \dashv f_*$*

La relación que existe entre los morfismos de marcos y el adjunto de un morfismo se enuncia en el siguiente resultado.

Proposición 1.1.10 *Todo morfismo de marcos tiene adjunto derecho*

Demostración. Sea $f\colon A \to B$ un morfismo de marcos, definimos $f_*\colon B \to A$ como $f_*(b) = \bigvee\{a \in A \mid f(a) \leq b\}$, con esta definición es inmediato que $f(a) \leq b \Rightarrow a \leq f_*(b)$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$. Ahora, si $a \leq f_*(b) = \bigvee\{a \in A \mid f(a) \leq b\}$ al aplicar f, como este es un morfismo de marcos y respeta supremos arbitrarios, nos queda que $f(a) \leq f_*(b) = \bigvee\{f(a) | a \in A, f(a) \leq b\} \leq b$. Por lo tanto, $f \dashv f_*$. $\square$

Podemos construir la categoría opuesta a Frm, esta recibe el nombre de *categoría de locales*. Por la Proposición 1.1.10 tenemos que para cualesquiera $A, B \in \mathrm{Frm}$, si

$$f\colon A \to B \Longrightarrow f_*\colon B \to A$$

donde f es un morfismo de marcos y f_* es su adjunto derecho. Notemos que f_* invierte el dominio y codominio de f. Por lo tanto, podemos considerar un morfismo de locales como

$$f\colon B \to A$$

tales que f preserva los ínfimos y sus adjuntos izquierdos (f^*), son un morfismo de marcos. Así, invirtiendo la composición de los morfismos de marcos obtenemos la categoría $\mathrm{Loc} = \mathrm{Frm}^{\mathrm{op}}$.

Recordemos que existe una adjunción entre Frm y Top (la categoría de espacios topológicos)

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Top} \arrow[d, shift right=3ex, "\mathcal{O}"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\ \mathrm{Frm}^{\mathrm{op}} \arrow[u, shift right=3ex, "\mathrm{pt}"'] \end{tikzcd}$$

donde pt se le conoce como el funtor de puntos y $\mathcal{O}$ como el funtor de abiertos. En la siguiente subsección mencionaremos de manera breve la construcción del funtor pt.

De esta manera $\mathcal{O}(f)\colon \mathcal{O}S \to \mathcal{O}T$ es un morfismo de marcos y f es una función continua $f\colon T \to S$, donde $\mathcal{O}(f)[U] = f^{-1}[U]$ para $U \in \mathcal{O}S$.

1.1.1 El espacio de puntos de un marco

Sabemos que si S es un espacio topológico, entonces la familia de todos los conjuntos abiertos, $\mathcal{O}S$, es un marco. Y la asignación $S \mapsto \mathcal{O}S$ está dada por un funtor contravariante.

Como mencionamos en la sección anterior el funtor $\mathcal{O}$ tiene un adjunto que lleva a cada marco a un espacio topológico. Esta es la construcción del espacio de puntos.

Definición 1.1.11 *Sea A un marco. Un* caracter *de A es un morfismo de marcos $h\colon A \to \mathbf{2}$, donde $\mathbf{2}$ es el marco de dos elementos.*

Existe una correspondencia entre caracteres de un marco y otros dos dispositivos: elementos $\wedge-$irreducibles y filtros completamente primos. Estos últimos serán introducidos más adelante.

Definición 1.1.12 *Sea A un marco. Un elemento $p \in A$ es $\wedge-$irreducible si $p \neq 1$ y si $x \wedge y \leq p$, entonces $x \leq p$ o $y \leq p$ se cumple para cada $x, y \in A$.*

Para convertir un marco en un espacio, primero debemos saber quienes son los puntos.

Definición 1.1.13 *Sea A un marco. El* espacio de puntos *de A es la colección de todos los elementos $\wedge-$irreducibles de A. Denotamos a estos por* $\mathrm{pt}A$*.*

Notemos que para que $\mathrm{pt}A$ sea un espacio, este necesita una topología.

Definición 1.1.14 *Sea A un maco con espacio de puntos $S = \mathrm{pt}A$, vistos como elementos $\wedge-$irreducibles. Definimos*

$$U_A(a) = \{p \in S \mid a \nleq p\}$$

para cada elemento $A \in A$.

Si es claro el marco bajo el cual se esta trabajando, eliminamos el subindice A y solo escribimos $U(a)$.

Se puede demostrar que las intersecciones finitas y las uniones arbitrarias de conjuntos de esta forma, también tienen la misma estructura, es decir,

$$U(a) \cap U(b) = U(a \wedge b) \qquad \text{y} \qquad \bigcup\{U(a) \mid a \in X\} = U\left(\bigvee X\right)$$

se cumplen para todo $a, b \in A$ y $X \subseteq A$. Con lo mencionado antes tenemos el siguiente lema.

Lema 1.1.15 *Sea A un marco con espacio de puntos $S = \mathrm{pt}A$. La colección de conjuntos $\mathcal{O}S = \{U(a) \mid a \in A\}$ forman una topología en S y*

$$U_a(\_)\colon A \to \mathcal{O}S \tag{1.1}$$

es un morfismo suprayectivo de marcos.

El morfismo presentado en (1.1) es conocido como la *reflexión espacial* y al conjunto $\mathcal{O}S$ se le conoce como *el marco de abiertos*.

Para agregar información adicional con respecto al espacio de puntos, enunciamos este último lema.

Lema 1.1.16 *Sea A un marco con espacio de puntos S. El orden de especialización en S es el orden inverso heredado de A.*

En el Capítulo 2, haremos uso de la construcción del espacio de puntos para dar algunos otros resultados. Por el momento hablaremos de otros objetos que están en correspondencia biyectiva con los elementos del espacio de puntos.

Definición 1.1.17 *Sea A un marco. Un subconjunto $F \subseteq A$ es un* filtro *si*

- $1 \in F$.
- *$a \leq b$, $a \in F$, entonces $b \in F$.*
- *$a, b \in F$, entonces $a \wedge b \in F$.*

Decimos que un filtro es *propio* si $0 \notin F$. Si agregamos ciertas propiedades particulares obtenemos otros tipos de filtros.

Definición 1.1.18 *Sea A un marco. Decimos que un filtro propio F en A es:*

- Primo *si $x \vee y \in F$, entonces $x \in F$ o $y \in F$.*
- Completamente primo *si $\bigvee X \in F$, entonces $X \cap F \neq \emptyset$, para cada $X \subseteq A$.*
- Abierto *(o de* Scott*) si $\bigvee X \in F$, entonces $X \cap F \neq \emptyset$, para cada conjunto dirigido $X \subseteq A$.*

A manera de notación, agrupamos a los distintos filtros en los siguientes conjuntos

$$Fil(A) = \{\text{Filtros en } A\}, \quad A^{\wedge} = \{\text{F. abiertos en } A\}, \quad CFil = \{\text{F. c. primos en } A\}$$

Los filtros mencionados en la Definición 1.1.18 están relacionados de la siguiente manera.

Proposición 1.1.19 *Un filtro es completamente primo si y solo si este es primo y abierto.*

Además, de manera equivalente podemos decir que un filtro es completamente primo si

$$\bigcap_{i \in J} U_i \in F, \text{ entonces } \exists k \in J \text{ tal que } U_k \in F.$$

Notemos que esta noción está dada para los abiertos del espacio de puntos, es decir, elementos de $\mathcal{O}S$.

Para un espacio S si consideramos $x \in S$ tenemos el filtro completamente primo de vecindades abiertas de x

$$F(x) = \{U \in \mathcal{O}S \mid x \in U\}.$$

Proposición 1.1.20 *Sea $\mathcal{F}_a$ la familia de filtros abiertos, entonces*

1. *si $F_1, F_2 \in \mathcal{F}_a$, entonces $F_1 \cap F_2 \in \mathcal{F}_a$.*
2. *si $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{F}_a$ una familia dirigida, entonces $\bigcup \mathcal{U} \in \mathcal{F}_a$.*

Como mencionamos antes, los elementos de $\mathrm{pt}A$ están en correspondencia biyectiva con algunos otros dispositivos que se pueden definir para el marco A, uno de estos son precisamente los filtros completamente primos.

Lema 1.1.21 *Sea A un marco. Los dispositivos*

- *caracteres de A,*
- *filtros completamente primos de A,*
- *elementos $\wedge-$irreducibles de A*

están en correspondencia biyectiva por pares.

Si $f^*\colon A \to B$ es un morfismo de marcos y $F \subseteq A$, $G \subseteq B$ filtros en A, B, respectivamente, podemos producir nuevos filtros como sigue

$$b \in f^*F \Leftrightarrow f_*(b) \in F \quad \text{y} \quad a \in f_*G \Leftrightarrow f^*(a) \in G \tag{1.2}$$

donde $a \in A, b \in B$ y f_* es el adjunto derecho de f^*. Aquí $f^*F \subseteq B$ y $f_*G \subseteq A$ son filtros en B y A, respectivamente.

Proposición 1.1.22 *Para $f = f^*\colon A \to B$ un morfismo de marcos y $G \in B^\wedge$, se cumple que $f_*G \in A^\wedge$.*

Demostración. Por (1.2), f_*G es un filtro en A. Necesitamos que f_*G satisfaga la condición de filtro abierto. Sea $X \subseteq A$ tal que $\bigvee X \in f_*G$, con X dirigido. Entonces

$$Y = \{f(x) \mid x \in X\}$$

es dirigido y $f(\bigvee X) = \bigvee f[X] = \bigvee Y \in G$. Como G es un filtro abierto, existe $y = f(x) \in Y$ tal que $y \in G$. Así $x \in f_*G$, de modo que, $f_*G \in A^\wedge$. □

Este última proposición será de gran utilidad para probar algunos otros resultados en los Capitulos 4 y 5

1.1.2 Estudio algebraico de los marcos

Como en toda estructura algebraica, en ocasiones es más sencillo obtener información de la estructura si ponemos nuestra atención en sus *cocientes*. Esto mismo ocurre en la categoría Frm. De manera similar a cualquier otra estructura, podemos obtener lo cocientes a través de una relación de equivalencia. Con esta, definir ciertas congruencias y por medio de las congruencias obtener el cociente.

La ventaja que proporciona trabajar con los marco es que tenemos las siguientes correspondencias biyectivas:

$$\text{Congruencias} \leftrightarrow \text{Conjuntos implicativos} \leftrightarrow \text{Núcleos}$$

Para observar más detalles sobre estas correspondencias, se puede consultar [12]. Nosotros solo mencionaresmos los detalles necesarios.

Definición 1.1.23 *Sea $f : A \to B$ un morfismo de marcos, una* congruencia *(o marco de congruencias), es el conjunto generado por la relación de equivalencia $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$.*

Trasladando lo anterior al lenguaje de retículas de conjuntos abiertos tenemos que para un morfismo $h\colon \mathcal{O}S \to \mathcal{O}T$, tenemos una congruencia

$$E_h = \{(U, V) \mid h(U) = h(V)\}.$$

En particular, para un subespacio $X \subseteq S$, el encaje j produce la congruencia

$$E_X = \{(U, V) \mid U \cap X = V \cap Y\},$$

tales congruencias pueden usarse como representaciones de subespacio.

Definición 1.1.24 *Un* cociente de un marco A *es un morfismo suprayectivo*

$$f : A \to B$$

Definición 1.1.25 *Sea $f : A \to B$ un morfismo de $\bigvee -$retículas, el* kernel *de f es la relación de equivalencia dada por $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$*

Sabemos que si $f = f^*$ es un morfismo de marcos, entonces este tiene adjunto derecho f_*. El siguiente resultado relaciona a mabos para obtener el kernel.

Lema 1.1.26 *Sea $f : A \to B$ un morfismo de $\bigvee -$retículas, el kernel k de f es*

$$k = f_* \circ f^*$$

Definición 1.1.27 *Sea A una $\bigvee -$retícula. Decimos que $F \subseteq A$ es $\bigwedge -$*cerrado *o* cerrado bajo ínfimos *si $\bigwedge X \in F$ para cualquier $X \subseteq F$.*

Definición 1.1.28 *Sea $A \in \mathrm{Frm}$. Decimos que $F \subseteq A$ es un* conjunto implicativo *de A si éste es $\bigwedge -$cerrado y cumple que para $a \in F$, $(x \succ a) \in F$, donde $x \in A$.*

El cociente adecuado para un marco A es cierto conjunto de puntos fijos. Por el momento dejaremos los detalles importantes de esta afirmación para la siguiente sección.

Definición 1.1.29 *Sea $A \in \mathrm{Frm}$ y $j\colon A \to A$. A_j es el* conjunto de puntos fijos *y se define como*

$$A_j = \{a \in A | a = j(a)\}.$$

1.2 El ensamble de un marco

Si A es un marco, podemos definir operadores $j\colon A \to A$ y al solicitarles algunas condiciones especificas, estos pueden permitirnos construir nuevos marcos. Los detalles de esta sección pueden consultarse en [2], [12] o en el compendio de notas sobre toería de marcos de Simmons (ver [8]).

1.2.1 Operadores en A

Definición 1.2.1 *Sea $A \in \mathrm{Frm}$. Decimos que:*

1. *Una* derivada *en A es una función $j : A \to A$ tal que*

   (a) *$a \leq j(a)$ para cualquier $a \in A$, (el operador infla).*

   (b) *Si $a \leq b \Rightarrow j(a) \leq j(b)$ para cualesquiera $a, b \in A$, (el operador es monótono).*

   DA denotará al conjunto de todos los operadores derivada sobre A.

2. *j es un* operador cerradura *si $j \in DA$ y $j^2 = j$.*
   CA denotará al conjunto de todos los operadores cerradura sobre A.

3. *j es un* núcleo *si $j \in CA$ y $j(a) \wedge j(b) \leq j(a \wedge b)$.*
   NA denotará al conjunto de todos los núcleos sobre A.

Notemos que por la forma en que definimos estos tres operadores tenemos la siguiente relación entre ellos

$$NA \subseteq CA \subseteq DA.$$

Ejemplo 1.2.2 *Si $A \in \mathrm{Frm}$ para cualquier $a \in A$ definimos las funciones*

- $u_a \colon A \to A,\ u_a(x) = a \vee x,\ \forall x \in A$ (núcleo cerrado)
- $v_a \colon A \to A,\ v_a(x) = (a \succ x),\ \forall x \in A$ (núcleo abierto)
- $w_a \colon A \to A,\ w_a(x) = ((x \succ a) \succ a),\ \forall x \in A$ (núcleo regular)

Es sencillo verificar que los tres operadores definidos son núcleos.

Si $j \in NA$ es un núcleo arbitrario, este puede obtenerse por medio de los núcleos del Ejemplo 1.2.2.

Lema 1.2.3 *Para cada marco A, núcleo $j \in NA$ y $a \in A$, donde $b = j(0)$, se cumple lo siguiente*

1. *$u_a \leq j \iff a \leq j(0)$.*
2. *$v_a \leq j \iff j(a) = 1$.*
3. *$j \leq w_a \iff j(a) = a$.*
4. *$w_a \leq j \iff j = w_b$.*
5. *u_a y v_a son complementados en NA.*

Lema 1.2.4 *Para cada marco A tenemos que*

$$\bigvee\{u_{j(a)} \wedge v_a \mid a \in A\} = j = \bigwedge\{w_a \mid a \in A_j\}$$

donde $j \in NA$.

Lema 1.2.5 *Para cada marco A tenemos lo siguiente*

$$v_b \vee j \vee u_a = v_b \circ j \circ u_a \qquad y \qquad w_a \vee j = w_a \circ j \circ w_a$$

para cada $a, b \in A$ y $j \in NA$.

Teorema 1.2.6 *Para cada marco A consideremos cualquier elemento $a \in A$ y núcleo $k \in NA$ con $u_a \leq k \leq w_a$. Entonces*

$$j \vee w_a = w_a \circ j \circ k = w_d$$

donde $d = w_a(j(a))$.

Lema 1.2.7 *Para cada marco A tenemos que*

$$w_{(b \succ a)} = v_b \vee w_a$$

para cada $a, b \in A$.

Haciendo uso de las definiciones presentadas en la Subsección 1.1.2 podemos enunciar el siguiente resultado.

Lema 1.2.8 *Para cualesquiera $A \in \mathrm{Frm}$ y $j \in CA$, A_j es un conjunto implicativo si y solo si $j \in NA$. Además, si $j \in NA$, A_j es un marco y $j^* : A \to A_j$, $j^*(x) = j(x)$ es un morfismo de marcos.*

Notemos que j^* no es mas que la restricción del morfismo j en A_j. Además, el conjunto de puntos fijos nos permite factorizar cualquier morfismo de marcos a través del morfismo j^*.

Teorema 1.2.9 *Sean $A \in \mathrm{Frm}$, $j \in NA$. Si $f : A \to B$ es un morfismo de marcos y $j \leq k$, donde k es el kernel de f, entonces existe un único morfismo de marcos $f^\# : A_j \to B$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j^*"'] & B \\ A_j \arrow[ur, dashed, "f^\#"'] & \end{tikzcd}$$

Sabemos que un operador derivada es un morfismo monótono y que infla. Ahora, si además de estas dos condiciones le pedimos que cumpla lo que se menciona en la siguiente definición, obtenemos nuevos operadores. A estos les llamaremos operadores estables y prenúcleos.

Definición 1.2.10 *Sea $j \in DA$. Para cualesquiera $a, b \in A$ tenemos que*

1. *j es un* operador estable *si $j(a) \wedge b \leq j(a \wedge b)$.*
   SA denotará al conjunto de todos los operadores estables sobre A.

2. *j es un* prenúcleo *si* $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$.
   PA denotará al conjunto de todos los prenúcleos sobre A.

Observación 1.2.11

1. *Todo prenúcleo es un operador estable.*

2. *Si una derivada es estable e idempotente, entonces es un núcleo.*

3. *Los operadores* $\mathrm{id}, \mathrm{tp} \in DA$. *Donde* $\mathrm{tp}(x) = 1$ *para todo* $x \in A$ *e* id *es el operador identidad.*

Así para cualquier $A \in \mathrm{Frm}$ tenemos está nueva relación entre los operadores definidos hasta este momento

$$NA \subseteq PA \subseteq SA \subseteq DA.$$

Definición 1.2.12 *Sea $A \in \mathrm{Frm}$ definimos un orden para los elementos de DA de la siguiente manera*

$$j \leq k \Leftrightarrow j(a) \leq k(a), \text{ para cualquier } j, k \in DA \text{ y } \forall a \in A.$$

Definición 1.2.13 *Sea $A \in \mathrm{Frm}$. Para cada $F \subseteq DA$ definimos*

1. *El* ínfimo puntual *como* $\bigwedge F : A \to A$,

$$(\bigwedge F)(x) = \bigwedge\{f(x)|x \in X\}.$$

2. *El* supremo puntual *como* $\dot{\bigvee} F : A \to A$,

$$(\dot{\bigvee} F)(x) = \bigvee\{f(x)|x \in X\}.$$

Observación 1.2.14

1. *CA, NA, PA, SA, al ser subconjuntos de DA, podemos dotarlos del mismo orden presentado en la Definición 1.2.12 para sus elementos, es decir, junto con DA son conjuntos parcialmente ordenados. De manera particular los operadores* id *y* tp *son los elementos distinguidos 0 y 1 respectivamente en estos conjuntos ordenados.*

2. *DA, SA, PA, CA y NA son cerrados bajo ínfimos puntuales. Además, SA y DA son cerrados bajo supremos puntuales.*

3. *SA es un marco. En consecuencia $(f \succ g) \in SA$, con $f, g \in SA$.*

En otras palabras la observación anterior nos dice que podemos dotar de una estructura de retícula completa a los operadores derivada y a los operadores estables. Además, podemos definir la implicación sobre SA. En consecuencia SA es un marco, sin embargo, ¿esta implicación sólo se puede calcular en SA? La respuesta la encontramos en el siguiente lema.

Lema 1.2.15 *Sean $A \in \mathrm{Frm}$, $f \in SA$ y $k \in NA$, entonces $(f \succ k) \in NA$. Donde la implicación es la que existe en SA.*

Observemos que hemos dotado al conjunto NA de una implicación. De esta manera, lo dicho en el Lema 1.2.15 y por el comentario del párrafo anterior tenemos un esbozo de la demostración de un teorema importante de la teoría de marcos.

Teorema 1.2.16 (Teorema fundamental de la teoría de marcos) *Sea $A \in \mathrm{Frm}$, entonces NA es un marco.*

Al marco NA también se le conoce como *el ensamble* de A.

Es momento de ver como se compartan los diferentes operadores difinidos hasta este momento bajo composiciones.

Definición 1.2.17 *Sean $A \in \mathrm{Frm}$ y $f \in DA$, definimos recursivamente sobre los ordinales*

$$f^0 = \mathrm{id}, \quad f^{\alpha+} = f \circ f^\alpha, \quad f^\alpha = \dot{\bigvee}\{f^\beta \mid \beta < \alpha\}$$

cuando α es un ordinal límite y $\alpha+$ denota al ordinal sucesor de α.

De esta manera producimos una cadena de derivadas

$$\mathrm{id} \leq f \leq f^2 \leq f^3 \leq \ldots \leq f^\alpha \leq \ldots$$

Esta cadena se detiene en algún punto, es decir, hay un ordinal δ tal que $f^\theta = f^{\theta+}$ para cualquier $\delta \leq \theta$. Al mínimo ordinal para el cual se detiene la cadena lo denotamos por ∞. Por como construimos la cadena f^∞ es idempotente.

Lema 1.2.18 *Sean $A \in \mathrm{Frm}$ y $f \in DA$, entonces f^∞ es el menor operador cerradura mayor que f.*

El siguiente resultado nos dice que, cuando consideramos al operador $f \in SA$, entonces $f^\infty \in NA$. De hecho, cuando esto ocurra, a f^∞ lo llamaremos *la cerradura idempotente*.

Teorema 1.2.19 *Sea $A \in \mathrm{Frm}$. La asignación $-^\infty\colon SA \to SA$ es un núcleo en SA. Además, el conjunto de puntos fijos de $-^\infty$ es NA.*

Si tomamos un elemento $a \in A$, podemos asignarle un único elemento del marco NA. La forma de hacerlo se explica en la siguiente definición.

Definición 1.2.20 *Para cualquier $A \in \mathrm{Frm}$, la* función *η_A se define como*

$$\begin{aligned} \eta_A\colon A &\to NA \\ a &\mapsto u_a \end{aligned}$$

Este morfismo es epimorfismo y en general no es suprayectivo, de hecho:

Lema 1.2.21 *Sea $A \in \mathrm{Frm}$, el morfismo $\eta_A\colon A \to NA$ es suprayectivo si y sólo si A es booleano.*

Definición 1.2.22 *Decimos que un morfismo de marcos $f\colon A \to B$ resuelve* el problema de la complementación booleana *en A si para cualquier $a \in A$, $f(a) \in B$ tiene complemento.*

Para cualquier $A \in \mathrm{Frm}$, η_A resuelve el problema de la complementación booleana en A, pues u_a es un elemento del marco NA.

1.2.2 Núcleos espacialmente inducidos

Para un marco espacial $A = \mathcal{O}S$ existe una clase de núcleos que contiene todos los núcleos $u_\circ$ y $v_\circ$ descritos en la subsección anterior (además de estos, contiene muchos más). Estos capturan el "contenido espacial" de $\mathcal{O}S$ en un sentido que veremos a continuación.

Definición 1.2.23 *Sea S un espacio topológico. Para cada $E \in \mathcal{P}S$ definimos*

$$[E](U) = (E \cup U)^\circ$$

para cada $U \in \mathcal{O}S$ para obtener una función en $\mathcal{O}S$.

No es complicado verificar que $[E]$ es un núcleo en el marco $\mathcal{O}S$.

Definición 1.2.24 *Para un espacio topológico S, un núcleo en $\mathcal{O}S$ es* espacialmente inducido *si este tiene la forma $[E]$ para algún $E \subseteq S$.*

La razón por la cual se denomina a este núcleo espacialmente inducido se debe a que cada función continua entre dos espacios topológicos $\phi\colon T \to S$ produce un morfismo de marcos $\phi^{-1}\colon \mathcal{O}S \to \mathcal{O}T$ entre sus topologías. Este morfismo tiene el kernel $\ker(\phi^{-1})$ caracterizado por

$$V \subseteq \ker(\phi^{-1})(U) \Leftrightarrow \phi^{-1}(V) \subseteq \phi^{-1}(U)$$

para $U, V \in \mathcal{O}S$. Precisamente $\ker(\phi^{-1})$ coincide con nuestro núcleo espacialmente inducido.

Teorema 1.2.25 *Sea ϕ una función continua como la de antes. Sea $E = S \backslash \phi(T)$ el complemento del rango de ϕ. Entonces* $\ker(\phi^{-1}) = [E]$.

Demostración. Para cada $U, V \in \mathcal{O}S$ tenemos

$$\begin{aligned} V \subseteq \ker(\phi^{-1})(U) &\Leftrightarrow \phi^{-1}(V) \subseteq \phi^{-1}(U) \\ &\Leftrightarrow (\forall t \in T)[\phi(t) \in V \Rightarrow \phi(t) \in U] \\ &\Leftrightarrow (\forall s \in S)[s \in V \cap \phi(T)^{-1} \Rightarrow s \in U] \\ &\Leftrightarrow (\forall s \in S)[s \in V \Rightarrow s \in E \cup U] \\ &\Leftrightarrow V \subseteq E \cup U. \end{aligned}$$

y al calcular interior tenemos que $V \subseteq \ker(\phi^{-1})(U) \Leftrightarrow V \subseteq (E \cup U)^\circ = [E](U)$. □

Esto muestra como un morfismo de marcos inducido espacialmente produce un núcleo inducido espacialmente. Recíprocamente, todo núcleo espacialmente inducido surge de esta manera. Para ver esto consideremos cualquier espacio S y subconjunto $E \subseteq S$. Sea $T = S \setminus E$ con la topología de subespacio, así el encaje $\phi\colon T \to S$ es continuo. Entonces $E = S \setminus \phi(T)$ y por lo tanto $[E]$ es el kernel del encaje.

En un marco espacial, es posible determinar explícitamente la operación implicación.

Lema 1.2.26 *Sea S un espacio topológico. La implicación en el marco espacial $\mathcal{O}S$ está dada por*

$$W \succ M = (W' \cup M)^\circ$$

para cada $W, M \in \mathcal{O}S$.

Demostración. Para cualesquier $U, W, M \in \mathcal{O}S$ tenemos

$$U \subseteq (W \succ M) \Leftrightarrow U \cap W \subseteq M \Leftrightarrow U \subseteq (W' \cup M) \Leftrightarrow U \subseteq (W' \cup M)^{\circ}.$$

$\square$

Cada marco lleva sus núcleos distinguidos u y v, ¿qué son estos para una topología?

Lema 1.2.27 *Para un espacio topológico S tenemos que*

$$i)\, u_W = [W] \quad y \quad ii)\, v_W = [W']$$

para cada $W \in \mathcal{O}S$.

Demostración.

$i)$ Sean $W, M \in \mathcal{O}S$. Sabemos que $u_W(M) = W \cup M = (W \cup M)^{\circ} = [W](M)$.

$ii)$ Consideremos $M \in \mathcal{O}S$. Por el Lema 1.2.26 la implicación en $\mathcal{O}S$ está dada por $(W \succ M) = (W' \cup M)^{\circ}$.De aquí que

$$v_W(M) = (W \succ M) = (W' \cup M)^{\circ} = [W'](M).$$

$\square$

Cada subconjunto E de un espacio S determina un núcleo $[E]$ en la topología. Sin embargo, los núcleos $[E]$ no necesitan determinar al subconjunto E.

Recordemos que además del interior E° y la clausura E^{-} de E tenemos también el interior frontal $E^{\square}$ y la clausura frontal $E^{=}$.

El siguiente resultado muestra que para cada espacio S existe un encaje

$$\begin{aligned} \mathcal{O}^f S &\to N\mathcal{O}S \\ E &\mapsto [E] \end{aligned}$$

desde la topología frontal al ensamble de la topología principal.

Lema 1.2.28 *Sea S un espacio topológico. Para subconjuntos arbitrarios $D, E \subseteq S$, tenemos que $[D] = [E]$ si y solo si D y E tienen el mismo interior frontal. En otras palabras*

$$[D] = [E] \Leftrightarrow D^{\square} = E^{\square}$$

para todo $D, E \in \mathcal{P}S$.

Demostración.

$\Rightarrow$) Debemos probar que si $[D] \leq [E]$ entonces $D^{\square} \subseteq E^{\square}$. Supongamos que $[D] \leq [E]$. Sabemos que los conjuntos $U \cap p^{-}$, donde $U \in \mathcal{O}S$ y $p \in S$, forman una base para la topología frontal. Por lo tanto

$$\begin{aligned} p \in D^{\square} & (\exists U \in \mathcal{O}S)[p \in U \cap p^{-} \subseteq D] \\ & \Rightarrow (\exists U \in \mathcal{O}S)[p \in U \subseteq D \cup (p-)'] \\ & \Rightarrow p \in [D](p^{-'}) \subseteq [E](p^{-'}) \subseteq E \cup p^{-'} \\ & \Rightarrow p \in E. \end{aligned}$$

De aquí que $D^{\square} \subseteq E$ y como $D^{\square}$ es abierto frontal, tenemos que $D^{\square} \subseteq E^{\square}$.

La otra contención se prueba de manera similar.

$\Leftarrow$) Veamos que $[D] = [D^{\square}]$. La desigualdad $[D^{\square}] \leq [D]$ es inmediata de $D^{\square} \subseteq D$.

Para la otra desigualdad supongamos que $V \subseteq (D \cup U)$ para abiertos $U, V \in \mathcal{O}S$. Mostraremos que $V \subseteq (D^{\square} \cup U)$. Como $V \subseteq (D \cup U)$ vemos que $V \cap U' \subseteq D$. Luego $V \cap U'$ es un abierto frontal, de aquí que $V \cap U' \subseteq U^{\square}$ y por lo tanto $V \subseteq D^{\square} \cup U$.De aquí que $[D] = [D^{\square}]$.

□

1.2.3 El funtor $N(\_)$

En esta subsección veremos que $\eta_A \colon A \to NA$ define un funtor. Esto lo hacemos al verificar que la asignación $a \mapsto u_a$ proporciona cierta propiedad universal. Antes de eso mencionamos un par de observaciones.

Sabemos que los núcleos u_a y v_a son complementos entre si en NA, es decir, el encaje η_A crea elementos complementados para elementos de A. Además, sabemos que para todo $j \in NA$

$$j = \bigvee \{u_{j(a)} \wedge v_a \mid a \in A\}.$$

Lema 1.2.29 *Para cada $A \in \mathrm{Frm}$ y morfismos de marcos $g, h \colon NA \to B$, si $g \circ \eta_A = h \circ \eta_A$, entonces $g = h$. En otras palabras, η_A es un epimorfismo.*

Demostración. Consideremos los morfismos g, h tales que $g \circ \eta_A = h \circ \eta_A$. De esta manera $g(u_a) = h(u_a)$ para todo $a \in A$. Como u_a es complementado por v_a, es decir, $u_a \wedge v_a = \mathrm{id}$ y $u_a \vee v_a = \mathrm{tp}$, se puede verificar que $g(v_a) = h(v_a)$.

Ahora, consideremos $j \in NA$, entonces $j = \bigvee \{u_{j(a)} \wedge v_a \mid a \in A\}$. Así

$$\begin{aligned} g(j) &= \bigvee \{g(u_{j(a)} \wedge g(v_a) \mid a \in A\} \\ &= \bigvee \{h(u_{j(a)} \wedge h(v_a) \mid a \in A\} = h(j). \end{aligned}$$

Por lo tanto $g = h$. □

Un morfismo $f \colon A \to B$ *resuelve el problema de complementación* para A si para $a \in A$, $f(a)$ tiene complemento en B.

Teorema 1.2.30 *Para cada marco A, el morfismo $\eta_A\colon A \to NA$ resuelve universalmente el problema de la complementación para A. Es decir, para cada morfismo $f\colon A \to B$ existe un único morfismo $f^{\#}$ tal que el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_A"'] & B \\ NA \arrow[ur, "f^{\#}"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Por el Lema 1.2.29, η_A es un epimorfismo, de esta manera, de existir el morfismo $f^{\#}$, este debe ser único.

Para cada $j \in NA$, consideremos

$$f^{\#}(j) = \bigvee\{f(j(x)) \wedge f(x)' \mid x \in A\},$$

donde $f(x)'$ es el complemento de $f(x)$ es B. Se puede verificar que el morfismo $f^{\#}\colon NA \to B$ es monótono y además es un $\wedge-$morfismo.

Para $b \in B$, consideremos la siguiente composición

$$A \to B \to [b, 1_B],$$

donde $[b, 1_B]$ es un intervalo en B. Sea $\langle b\rangle$ el kernel de la composición anterior, de esta manera

$$y \leq \langle b\rangle(x) \Leftrightarrow b \vee f(y) \leq b \vee f(x) \Leftrightarrow f(y) \leq b \vee f(x)$$

para todo $x, y \in A$. Verifiquemos que el morfismo $f_b\colon B \to NA$, dado por la asignación $b \mapsto \langle b\rangle$ es el adjunto derecho de $f^{\#}$, es decir, debemos verificar que $f^{\#}(j) \leq b \Leftrightarrow j \leq \langle b\rangle$ para $j \in NA$ y $b \in B$.

Supongamos que $f^{\#}(j) \leq b$ y sea $x \in A$ tal que $y = j(x)$. De esta manera

$$f(y) \wedge f(x)' \leq f^{\#}(j) \leq b \Leftrightarrow j(x) = y \leq f(y) \leq b \vee f(x),$$

es decir $j(x) \leq \langle b\rangle(x)$.

De manera reciproca, supongamos que $j \leq \langle b\rangle$ y consideremos $x \in A$. De esta manera $j(x) \leq \langle b\rangle(x)$, de modo que $f(j(x)) \leq b \vee f(x)$. Así $f(j(x)) \wedge f(x)' \leq b$. Como lo anterior se cumple para todo $x \in A$, en particular se cumple para $f^{\#}$, es decir, $f^{\#}(j) \leq b$.

Lo anterior también muestra que $f^{\#}$ es un morfismo de marcos.

Por último, veamos que el diagrama conmuta. Sean $x, a \in A$. Así

$$f(a \vee x) \wedge f(x)' = (f(a) \vee f(x)) \wedge f(x)' = f(a) \wedge f(x)' \leq f(a).$$

Además, $f(a \vee 1) \wedge f(1)' = f(a)$. Por lo tanto

$$(f^{\#} \circ \eta_A)(a) = f^{\#}(u_a) = \bigvee \{f(a \vee x) \wedge f(x)' \mid x, a \in A\} = f(a)$$

que es lo que queríamos. $\square$

La prueba del Teorema 1.2.30, de manera indirecta, proporciona un funtor. En este punto es importante mencionar lo siguiente: **Toda propiedad universal define un funtor**.

Teorema 1.2.31 *La asignación $A \mapsto NA$ es la relación entre objetos por el funtor $N(\_)\colon \mathrm{Frm} \to \mathrm{Frm}$ y el morfismo $\eta_A\colon A \to NA$ es una transformación natural. En otras palabras, para todo $A, B \in \mathrm{Frm}$ y cada morfismo $f \in \mathrm{Frm}$, el siguiente diagrama conmuta para un único morfismo Nf.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] & NA \arrow[d, "Nf"] \\ B \arrow[r, "\eta_B"'] & NB \end{tikzcd}$$

Demostración. En el diagrama anterior, la imagen de cada elemento de A bajo la composición $\eta_B \circ f$ es complementada en NB, y así, por el Teorema 1.2.30 existe un único morfismo $Nf\colon NA \to NB$ que hace conmutar el cuadrado.

Resta verificar que este es un funtor, es decir, para

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

se cumple que $N(g \circ f) = Ng \circ Nf$. Notemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_A"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\eta_B"'] & C \arrow[d, "\eta_C"'] \\ NA \arrow[r, "Nf"'] & NB \arrow[r, "Ng"'] & NC \end{tikzcd}$$

conmuta. De esta manera $Ng \circ Nf$ es la única flecha que hace conmutar el rectángulo. Por lo tanto $N(g \circ f) = Ng \circ Nf$. $\square$

De manera adicional, tenemos la siguiente relación entre el funtor N y los núcleos abiertos y cerrados.

Corolario 1.2.32 *Para $f \in \mathrm{Frm}(A, B)$ y $a \in A$ se cumple lo siguiente:*

1. $(Nf)u_a = u_{f(a)}$.
2. $(Nf)v_a = v_{f(a)}$.

Demostración.

1. Es la asignación del cuadro en el Teorema 1.2.31.

2. Sabemos que los núcleos u_a y v_a son complementos en NA. Además, Nf es un morfismo de marcos. Así

$$u_{f(a)} \wedge (Nf)(v_a) = (Nf)(u_a \wedge v_a) = \mathrm{id}$$
$$u_{f(a)} \vee (Nf)(v_a) = (Nf)(u_a \vee v_a) = \mathrm{tp}.$$

de esta manera $(Nf)(v_a)$ es el complemento de $u_{f(a)}$ en NA, pero el complemento es único, es decir, $(Nf)(v_a) = v_{f(a)}$.

□

1.3 Aspectos topológicos

Si S es un espacio topológico, entonces este puede cumplir distintas propiedades (axiomas de separación, compacidad, sobriedad, entre otras). En este trabajo, una de las construcciones en las que más centramos nuestra atención es la del *espacio de parches*. La anterior es motivada por la siguiente situación: si S es un espacio T_2, entonces todo conjunto compacto (saturado) es cerrado. Lo primero que podemos preguntarnos es: ¿qué pasa si el espacio no es T_2? El espacio de parches, como veremos más adelante, soluciona este "defecto".

En esta sección se mencionan los antecedentes topológicos que se necesitan para comprender que es el espacio parches. De igual manera mencionamos algunas otras propiedades topológicas y la relación que existe entre todas estas.

1.3.1 Espacios sobrios

Definición 1.3.1 *Un conjunto cerrado X no vacío es* irreducible *en S si para cada U, V abiertos disjuntos se cumple que*

$$U \cap X \neq \emptyset, V \cap X \neq \emptyset \Rightarrow U \cap V \cap X \neq \emptyset.$$

Definición 1.3.2 *Para un espacio S decimos que este es* sobrio *si es T_0 y cada conjunto X cerrado irreducible es la cerradura de un único punto, es decir,*

$$X = \overline{\{x\}}$$

con $x \in S$.

Se puede verificar que si S es un espacio T_2, entonces este es sobrio, pero las propiedades de sobriedad y T_1 no son comparables.

Si tenemos un espacio que no es sobrio, entonces existe una manera de "sobrificarlo".

Definición 1.3.3 *Sea S un espacio topológico. La* reflexión sobria *de S, denotada por ${}^+S$, es el espacio topológico cuyos puntos son los conjuntos cerrados irreducibles de S. Para $U \in \mathcal{O}S$ sea ${}^+U \subseteq S$ dado por*

$$X \in {}^+U \Leftrightarrow U \cap X \neq \emptyset$$

para cada $X \in {}^+S$.

De esta manera tenemos el espacio topológico $({}^+S, \mathcal{O}^+S)$, donde

$$\mathcal{O}^+S = \{{}^+U \mid U \in \mathcal{O}S\}$$

También, tenemos un morfismo de marcos $\_^+ \colon \mathcal{O}S \to \mathcal{O}^+S$ dado por la reflexión sobria y la función continua de S a ${}^+S$ dada por la asignación $p \mapsto p^-$.

Lema 1.3.4 *Para cada función continua* $\Phi\colon S \to T$ *de un espacio arbitrario* S *a un espacio sobrio* T*, existe una única función continua* ${}^+\Phi\colon {}^+S \to T$ *tal que el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[rr, "\Phi"] \arrow[dr] & & T \\
& {}^+S \arrow[ur, "{}^+\Phi"'] &
\end{tikzcd}$$

Lema 1.3.5 *Si un espacio* S *tiene reflexión sobria que es* T_1*, entonces* S *es sobrio y* T_1.

Demostración. Notemos que $S \subseteq {}^+S$, donde S tiene la topología del subespacio. Supongamos que $X \subseteq S$ es un conjunto cerrado irreducible de S y consideremos la clausura X^- de X en ${}^+S$. Para $U \in \mathcal{O}^+S$ tenemos

$$X^- \cap U \Rightarrow X \cap U \Rightarrow X \cap (S \cap U),$$

es decir X^- es cerrado irreducible en ${}^+S$. Ahora, si ${}^+S$ es T_1 y sobrio, entonces $X^- = \{p\}$ para algún $p \in^+ S$ y por lo tanto $X = \{p\}$. $\square$

Los siguiente resultados involucran al espacio de puntos de un marco y a espacios sobrios.

Lema 1.3.6 *El espacio de puntos* $\mathrm{pt}A$ *de un marco* A *es sobrio*

Lema 1.3.7 *Sea* S *un espacio topológico. El espacio de puntos de* $\mathcal{O}S$ *es la reflexión sobria de* S.

Para ver esto, notemos que los subconjuntos cerrados irreducibles de S son precisamente los complementos de los elementos $\wedge$-irreducibles. De esta manera encontramos que

$$S \to \mathrm{pt}(\mathcal{O}S$$
$$p \mapsto \overline{\{p\}}'$$

es el mapeo que da la reflexión.

1.3.2 Conjuntos saturados

Cada espacio topológico tiene un preorden para sus puntos. Este es un orden de especialización y se define de la siguiente manera.

Definición 1.3.8 *Sea S un espacio topológico. El* orden de especialización *en S es la comparación "$\sqsubseteq$" dado por*

$$p \sqsubseteq q \Leftrightarrow p^- \subseteq q^-$$

donde $p, q \in S$. De manera equivalente tenemos que $p \sqsubseteq q \Leftrightarrow p \in q^-$.

La comparación definida es un preorden y este es un orden parcial precisamente cuando el espacio es T_0. Si el espacio es T_1, entonces el orden está dado por la igualdad.

Recordemos que si tenemos un marco arbitrario, por lo visto en 1.1.1, podemos asignarle a este un espacio topológico por medio de su espacio de puntos.

Lema 1.3.9 *Sea A un marco con espacio de puntos $\mathrm{pt}A$. El orden de especialización en S es el orden inverso del orden heredado de A.*

Usando este orden parcial en un espacio T_0, podemos introducir el concepto de saturación.

Definición 1.3.10 *Sea $(S, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Para cada $E \subseteq S$, $\downarrow E$ y $\uparrow E$ son, respectivamente, la sección inferior y la sección superior generada por E, es decir,*

$$\downarrow E = \{x \mid (\exists e \in E)[x \leq e]\} \quad \text{y} \quad \uparrow E = \{x \mid (\exists e \in E)[x \geq e]\}$$

respectivamente. Decimos que $\uparrow E$ es la saturación *de E y E es* saturado *si $E = \uparrow E$.*

Para $p \in S$ escribimos $\downarrow p$ para $\downarrow \{p\}$ y $\uparrow p$ para $\uparrow \{p\}$. Trivialmente $\uparrow\uparrow E = \uparrow E$, por lo que la saturación de E es saturada.

Si S es cualquier espacio topológico y $p \in S$, tenemos que $\downarrow p = p^-$. Sin embargo, esto no es cierto para subconjuntos arbitrarios de S. Usualmente $\downarrow E \neq E^-$ aunque hay una clase de topologías para las cuales $\downarrow (\_)$ y $(\_)^-$ coinciden (las topologías de Alexandorff).

En un espacio topológico, la saturación de un subconjunto se puede obtener sin referencia al orden de especialización.

Lema 1.3.11 *Sea S un espacio topológico. Para cada subconjunto $E \subseteq S$ tenemos que*

$$\uparrow E = \bigcap \{U \in \mathcal{O}S \mid E \subseteq U\}$$

Demostración. Consideremos $x \in \uparrow E$, entonces $\exists\, e \in E$ tal que $e \sqsubseteq x$, es decir, $e^- \subseteq x^-$. De aquí que para $U \in \mathcal{O}S$, si $e \in U$ entonces $x \in U$. Por lo tanto

$$x \in \bigcap \{U \in \mathcal{O}S \mid e \in U\} \subseteq \bigcap \{U \in \mathcal{O}S \mid E \subseteq U\},$$

es decir, $\uparrow E \subseteq \bigcap\{U \in \mathcal{O}S \mid E \subseteq U\}$.

Para la otra contención, consideremos $x \in \bigcap\{U \in \mathcal{O}S \mid E \subseteq U\}$. Notemos que si $E \subseteq U$, entonces $x \in U$ para todo $U \in \mathcal{O}S$. De aquí que al menos existe algún $e \in E$ tal que $e^- \subseteq x^-$, es decir, $e \sqsubseteq x$. $\square$

De esta manera cada subconjunto abierto es saturado. Sin embargo, el reciproco no necesariamente ocurre, por lo general, hay muchos conjuntos saturados que no son abiertos. Por ejemplo, en un espacio T_1 todos los conjuntos son saturados. En un espacio de Alexandroff ocurre lo contrario, cada saturado es abierto.

En cualquier conjunto parcialmente ordenado, la familia de conjuntos saturados (secciones superiores), es cerrada bajo uniones e intersecciones arbitrarias. En particular, los conjuntos saturados forman la topología de Alexandroff.

Definición 1.3.12 *Sea $(S, \leq)$ un orden parcial. La* topología de Alexandroff *en S es la topología que consta de todos los conjuntos saturados*

Definición 1.3.13 *Una cubierta abierta para un conjunto A es una colección $\mathcal{U}$ de conjuntos abiertos tales que*

$$A \subseteq \bigcup \mathcal{U}$$

se cumple.

- *Una subcubierta de una cubierta abierta $\mathcal{U}$ para A es una subcolección de $\mathcal{U}$ $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ la cual forma una cubierta abierta para A.*
- *Una cubierta $\mathcal{U}$ es dirigida si esta es $\subseteq -$dirigida, es decir, para cada $U, V \in \mathcal{U}$, existe algún $W \in \mathcal{U}$ tal que $U \cup V \subseteq W$.*
- *Un conjunto X de un espacio topológico S es compacto si cada cubierta abierta de X tiene una subcubierta abierta finita.*

A veces es conveniente usar una formulación equivalente de compacidad. Reescribimos la definición en términos de cubiertas abiertas dirigidas.

Lema 1.3.14 *Sea S un espacio topológico. Un conjunto $X \subseteq S$ es compacto si y solo si para cada cubierta abierta dirigida $\mathcal{W}$ existe algún $W \in \mathcal{W}$ tal que $X \subseteq W$.*

Demostración.

$\Rightarrow)$ Consideremos un subconjunto compacto X y una cubierta dirigida de abiertos $\mathcal{W}$, es decir $X \subseteq \bigcup \mathcal{W}$. De aquí que debe existir una cubierta finita, digamos $\mathcal{V}$. Al ser $\mathcal{W}$ dirigida, tenemos que $\bigcup \mathcal{V} \in \mathcal{W}$ y al ser X compacto se cumple que $X \subseteq \bigcup \mathcal{V}$.

$\Leftarrow)$ Consideremos $X \subseteq S$ tal que para cada cubierta abierta dirigida $\mathcal{W}$ existe $W \in \mathcal{W}$, con $X \subseteq W$. Notemos que si $\mathcal{U}$ es cualquier cubierta abierta, entonces agregando todas las uniones finitas obtenemos una cubierta abierta dirigida $\mathcal{U}_0$. Por hipótesis, existe $U \in \mathcal{U}_0$ tal que $X \subseteq U$. Luego, al ser U solo uniones finitas de $\mathcal{U}$, esta es una subcubierta finita de X. Por lo tanto X es compacto.

$\square$

Definición 1.3.15 *Para un espacio topológico S, consideramos $\mathcal{Q}S$ como la colección de conjuntos compactos saturados de S.*

El conjunto vacío está en $\mathcal{Q}S$. De igual manera para $p \in S$, la saturación $\uparrow p$ está en $\mathcal{Q}S$. Esto puede ser generalizado.

Lema 1.3.16 *Sea K un subconjunto compacto de un espacio S. La saturación $\uparrow K$ está en $\mathcal{Q}S$.*

Demostración. Debemos probar que para $K \subseteq S$ un conjunto compacto se cumple que $\uparrow K$ también lo es. Consideremos $\mathcal{U}$ una cubierta abierta dirigida de $\uparrow K$. De aquí que $\mathcal{U}$ es también una cubierta abierta dirigida de K. Luego, como K es compacto existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $K \subseteq U$. Se puede verificar que U es un conjunto saturado que contiene a K, de aquí que $\uparrow K \subseteq U$. Por lo tanto $\uparrow K$ es compacto. $\square$

De esta manera tenemos tres familias distinguidas de subconjuntos de S, los abiertos $\mathcal{O}S$, los cerrados $\mathcal{C}S$ y los compactos saturados $\mathcal{Q}S$.

Sabemos que la unión de dos conjuntos compactos es compacta. De igual manera, se puede comprobar que la unión de dos conjuntos saturados es saturada. Esto nos da como resultado el siguiente lema.

Lema 1.3.17 *La unión de dos conjuntos saturados compactos es saturada compacta.*

Por otro lado, la unión de una familia arbitraria de conjuntos compactos saturados no necesita ser compacta saturada. Para ver esto, consideremos la unión de todos los $\uparrow p$ para cada punto p de un espacio S que no es compacto.

Tampoco es el caso que la intersección de cualesquiera dos conjuntos compactos saturados deba ser compacta saturada.

El siguiente resultado es el que nos motiva a estudiar lo que en la Sección 1.3.4 aparece como *construcción del espacio de parches*.

Lema 1.3.18 *En un espacio T_2 cada conjunto compacto saturado es cerrado.*

Demostración. Consideremos un espacio S que es T_2, en consecuencia S es T_1 y así todo conjunto del espacio es saturado. Consideremos $Q \subseteq S$ un conjunto compacto. veamos que Q es cerrado. Para ello consideremos $p \notin Q$ y veamos que para $\mathcal{U}(p)$ una vecindad abierta de p se cumple que

$$Q \cap \mathcal{U}(p) = \emptyset.$$

Consideremos $q \in Q$ y al ser S un espacio T_2 tenemos que existen $U_q, V_q \in \mathcal{O}S$ tales que

$$p \in U_q, \quad q \in V_q, \quad U_q \cap V_q = \emptyset.$$

De aquí que $\{V_q \mid q \in Q\}$ forma una cubierta abierta para Q y, por la compacidad, podemos extraer una subcubierta finita $\{V_i \mid i \in \mathcal{I}\}$, donde $\mathcal{I}$ es un subconjunto finito de Q. Considerando $\mathcal{U}(p) = \{U_i \mid i \in \mathcal{I}\}$ tenemos la vecindad de p que buscábamos. $\square$

El siguiente resultado nos da una caracterización similar a la regularidad definida para espacios topológicos.

Corolario 1.3.19 *Sea S un espacio T_2. Para un punto p y conjunto Q compacto (saturado), que no contiene a p existe conjuntos abiertos U, V tales que*

$$p \in U, \qquad Q \subseteq V, \qquad U \cap V = \emptyset.$$

1.3.3 La topología frontal (topología de Skulla)

.
La topología frontal de un espacio S es la topología más fina que hace a todos los cerrados originales conjuntos *clopen* (conjuntos que son cerrados y abiertos al mismo tiempo). Esto puede parecer una topología muy poco interesante, pero veremos que tiene alguna relevancia para las construcciones sin puntos que se verán más adelante.

Definición 1.3.20 *El espacio frontal, denotado por ${}^fS$ de un espacio topológico S tiene los mismos puntos que S, pero la topología más fina $\mathcal{O}^fS$ generada por*

$$\{U \cap X \mid U \in \mathcal{O}S, X \in \mathcal{C}S\}.$$

Se puede verificar que $\{U \cap p^- \mid U \in \mathcal{O}S, p^- \in \mathcal{C}S\}$ es también una base para la topología frontal en S. De hecho los conjuntos $U \cap p^-$ para $U \in \mathcal{O}S$ forman las vecindades abiertas frontales de $p \in S$.

Para $E \subseteq S$, escribimos $E^\square$ y $E^=$ para el interior frontal y la clausura frontal de E, respectivamente. Estos están relacionados por

$$E^\circ \subseteq E^\square \subseteq E \subseteq E^= \subseteq E^-$$

y pueden ser distintos.

Notemos que $p \in E^=$ si y solo si para todo $U \in \mathcal{O}S$, si $p \in U$, entonces $E \cap U \cap p^- \neq \emptyset$ se cumple.

Notemos que ${}^fS$ no es el espacio discreto. Para complementar esto tenemos el siguiente resultado.

Lema 1.3.21 *Sea S un espacio topológico*

- *Si S es T_1, entonces ${}^fS$ es discreto.*
- *Si ${}^fS$ es discreto, entonces S es T_0.*
- *Si S es T_0, entonces ${}^{ff}S$ es discreto.*

En la tercera parte del lema anterior, se usa el segundo espacio frontal ${}^{ff}S$. Hay ejemplos de espacios sobrios S tales que $\mathcal{O}S$, $\mathcal{O}^fS$, $\mathcal{O}^{ff}S = \mathcal{P}S$ son distintos.

Teorema 1.3.22 *Si S es un espacio sobrio, entonces también lo es ${}^fS$.*

Demostración. Observemos que al ser S un espacio sobrio, este es T_0. De aquí que ${}^{f}S$ también es T_0. De está manera debemos probar que cada conjunto cerrado irreducible en ${}^{f}S$ es la cerradura de un punto.

Consideremos $F \subseteq S$ un conjunto cerrado tal que es irreducible en ${}^{f}S$. Entonces para cada $U, V \in \mathcal{O}S$ y $X, Y \in \mathcal{C}S$ se cumple

$$F \cap X \cap U \neq \emptyset,\ F \cap Y \cap V \neq \emptyset \ \Rightarrow\ F \cap X \cap Y \cap U \cap V \neq \emptyset.$$

Veamos ahora que F^- es cerrado irreducible en S. Supongamos que $F^- \cap U \neq \emptyset$ y $F^- \cap V \neq \emptyset$. Por las propiedades de la clausura tenemos que $F \cap U \neq \emptyset$ y $F \cap V \neq \emptyset$ y así, por ser irreducible en ${}^{f}S$, se cumple que $F \cap U \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto $F^- \cap U \cap V \neq \emptyset$, es decir F^- es cerrado irreducible en S.

Por hipótesis S es sobrio, de aquí que $F^- = p^-$ para algún $p \in S$. Observemos que si $p \in F$ se cumple que $F^= = F$. Supongamos que $p \in U \in \mathcal{O}S$, entonces $F^- \cap U \neq \emptyset$ y por lo tanto $F \cap U \neq \emptyset$. Así cada vecindad abierta del punto p de la forma $U \cap p^-$ también intersecta a F. Luego por la definición de la cerradura frontal tenemos que $p \in F^= = F$. □

Recordando lo visto en la Sección 1.3.1, si consideramos un espacio T que es T_0, tenemos que

$$T \hookrightarrow {}^{+}T$$

En particular, si tenemos $T \subseteq S$ para algún espacio sobrio S, entonces $T \subseteq^{+} T \subseteq S$. Podemos identificar cual es este espacio S que es sobrio.

Teorema 1.3.23 *Sean S un espacio sobrio y $T \subseteq S$ un subconjunto arbitrario. Entonces $T = T^=$ en S precisamente cuando, como subespacio, T es sobrio.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Primero, supongamos que T es cerrado frontal. Notemos que, como subespacio, los subconjuntos cerrados de T son de la forma $T \cap X$, donde $X \in \mathcal{C}S$. Además dicho conjunto es la clausura de un punto si y solo si $T \cap X = T \cap p^-$ para algún $p \in T$.

Supongamos que $T \cap X$ es cerrado irreducible en T. De esta manera, para $U, V \in \mathcal{O}S$ se cumple que

$$T \cap X \cap U \neq \emptyset, \quad T \cap X \cap V \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad T \cap X \cap U \cap V \neq \emptyset$$

Además, para los mismos U, V se cumple que

$$(T \cap X)^- \cap U \neq \emptyset \Rightarrow T \cap X \cap U \neq \emptyset$$
$$(T \cap X)^- \cap V \neq \emptyset \Rightarrow T \cap X \cap V \neq \emptyset$$

lo cual implica que $(T \cap X)^-$ es cerrado irreducible en S. Por hipótesis S es sobrio, de aquí que $(T \cap X)^- = p^-$ para un único $p \in (T \cap X)^-$. Notemos que $p \in (T \cap X)^- \subseteq X^- = X$, es decir, $p^- \subseteq X$. Luego

$$T \cap p^- \subseteq T \cap X \subseteq T \cap (T \cap X)^- = T \cap p^-,$$

es decir, $T \cap X = T \cap p^-$. Por lo tanto, basta mostrar que $p \in T$.

Para cada $U \in \mathcal{O}S$, como $(T \cap X)^- = p^-$. tenemos

$$\begin{aligned} p \in U &\Rightarrow (T \cap X)^- \cap U \neq \emptyset \\ &\Rightarrow T \cap X \cap U \neq \emptyset \\ &\Rightarrow T \cap U \cap p^- \neq \emptyset \end{aligned}$$

y así $p \in T^= = T$.

$\Leftarrow$) Supongamos que, como subespacio, T es sobrio. Demostraremos que $T^= \subseteq T$.

Consideremos cualquier punto $p \in T^=$, entonces $p \in U$ si y solo si $T \cap U \cap p^- \neq \emptyset$ para cada $U \in \mathcal{O}S$. En particular, para $U = S$ tenemos que $T \cap p^- \neq \emptyset$ y así este conjunto es cerrado en T. Veamos que $T \cap p^-$ es iireducible. Consideremos $U, V \in \mathcal{O}S$, entonces

$$T \cap p^- \cap U \neq \emptyset, T \cap p^- \cap V \neq \emptyset \Rightarrow p \in U \cap V,$$

de modo que $T \cap p^- \cap U \cap V \neq \emptyset$ .Por hipótesis, T es sobrio, entonces $T \cap p^- = T \cap q^-$ para algún $q \in T \cap p^-$. En particular, $q \in p^-$. Luego para cada $U \in \mathcal{O}S$ tenemos

$$\begin{aligned} p \in U \Rightarrow\ & T \cap p^- \cap U \neq \emptyset \\ & T \cap q^- \cap U \neq \emptyset \\ & q^- \cap U \neq \emptyset \\ & q \in U, \end{aligned}$$

es decir, $p \in q^-$ y por lo tanto, $p^- = q^-$. Como S es T_0, entonces $p = q \in T$. Luego $T^= \subseteq T$ lo cual implica que $T^= = T$.

□

Corolario 1.3.24 *Consideremos T un espacio T_0 y supongamos que $T \subseteq S$ para algún espacio sobrio S. Entonces la reflexión sobria ${}^+T$ de T es la clausura frontal de T en S.*

Demostración. Sabemos que $T \subseteq^+ T \subseteq S$. Además, por el Teorema 1.3.23, tenemos que ${}^+T$ es cerrado frontal. Así $T^= \subseteq {}^+T$. Similarmente, sabemos que $T \subseteq T^= \subseteq S$, por el Teorema 1.3.23, $T^=$ es sobrio. Así ${}^+T \subseteq T^=$. □

1.3.4 El espacio de parches

Como vimos en el Lema 1.3.18, los espacios T_2 cumplen que todo conjunto compacto saturado es cerrado, pero el regreso no se cumple. En esta sección daremos el nombre de *empaquetados* a los espacios que cumplen con esta propiedad. Nuestro objetivo será el encontrar una manera de empaquetar cualquier espacio arbitrario.

Definición 1.3.25 *Decimos que un espacio topológico S es* empaquetado *si todo conjunto compacto saturado es cerrado.*

Observemos que la propiedad de ser empaquetado es más débil que ser T_2, la pregunta que surge es ¿qué relación existe entre empaquetado y T_1?

Lema 1.3.26 *Un espacio topológico que es T_0 y empaquetado es T_1.*

Demostración. Sabemos que $(\uparrow p)$ es saturado y para ver que $(\uparrow p)$ es compacto notemos que

$$(\uparrow p) = \bigcap\{U \in \mathcal{O}S \mid (p) \subseteq U\},$$

además $(\uparrow p) \subseteq \bigcup U$ y se le puede extraer una cubierta finita. Por lo tanto $(\uparrow p)$ es compacto saturado.

Al ser $(\uparrow p)$ compacto saturado, por hipótesis de empaquetado, $(\uparrow p)$ es cerrado. Ahora, consideremos dos puntos distintos p, q tales que $p \sqsubseteq q$ no se cumple. Entonces, por la definición del orden de especialización tenemos que

$$p^- \nsubseteq q^- \Leftrightarrow p \in (q^-)' \text{ y } q \in (\uparrow p)',$$

donde $(q^-)'$, $(\uparrow p)'$ son abiertos y $(q^-)' \cap (\uparrow p)' = \emptyset$. Por lo tanto tenemos una separación T_1 de p y q. $\square$

Podemos tener espacios empaquetados que no son T_0, estos no serán abordados aquí, pues suponemos que todos nuestros espacios son al menos T_0, pero por lo visto en el Lema 1.3.26, T_0+empaquetado se encuentra entre T_2 y T_1.

Algunos espacios tienen una propiedad aún más fuerte que empaquetado. Es útil tener un nombre para esto.

Definición 1.3.27 *En espacio S es* estrictamente empaquetado *si todo conjunto compacto saturado es finito.*

De esta manera un espacio no es empaquetado si tiene al menos un conjunto compacto saturado que no es cerrado. En otras palabras, no tiene suficientes conjuntos cerrados, o equivalentemente, suficientes conjuntos abiertos. Podemos corregir este defecto agregando a la topología nuevos conjuntos abiertos para formar un topología más grande.

Para un espacio S consideremos la familia

$$pbase = \{U \cap Q' \mid U \in \mathcal{O}S, Q \in \mathcal{Q}S\}$$

que por el Lema 1.3.17 es cerrada bajo intersecciones binarias y por lo tanto forman una base para una nueva topología.

Al considerar $Q = \emptyset$ tenemos que la $pbase$ contiene a la topología original y al dejar $U = S$ vemos que la $pbase$ contiene a los complementos de cada conjunto compacto saturado.

Definición 1.3.28 *Para un espacio topológico S, consideramos ${}^PS$ el espacio con los mismos puntos que S y la topología $\mathcal{O}^PS$ generada por la $pbase$.*

En otras palabras, $\mathcal{O}^P S$ es la topología más pequeña que contiene todos los conjuntos abiertos originales y también el complemento de todos los conjuntos compactos saturados de S. Notemos que hacer esto puede crear nuevos conjuntos compactos saturados que no son cerrados en S.

Usando esta construcción tenemos que S es empaquetado si y solo si ${}^P S = S$.

Lema 1.3.29 *Sea S un espacio topológico. Si $U \in \mathcal{O}^P S$ entonces $U \in \mathcal{O}^f S$.*

Demostración. Consideremos un conjunto Q compacto saturado. Notemos que, por la Definición 1.3.20, basta con verificar que $Q' = \bigcup\{q^- \mid q^- \in \mathcal{C}S\}$.

Como Q es saturado, entonces $Q =\uparrow Q$, de aquí que $Q' =\downarrow Q$ en el orden de especialización. Luego si $q \in Q'$ entonces $p^- \subseteq Q'$ y por lo tanto

$$Q' = \bigcup\{q^- \mid p \notin Q\} = \bigcup\{q^- \mid q^- \in \mathcal{C}S\}$$

□

El resultado anterior muestra que la topología de parches es intermedia entre la topología original y la topología frontal. En otras palabra tenemos

$$\mathcal{O}S \hookrightarrow \mathcal{O}^P S \hookrightarrow \mathcal{O}^f S$$

para cada espacio S.

Es momento de saber como se comporta el espacio de parches con las propiedades de separación.

Lema 1.3.30 *El espacio de parches de un espacio T_0 es T_1.*

Demostración. Sea S un espacio T_0 y consideremos $p, q \in S$ tales que $p^- \nsubseteq q^-$, es decir, $p \notin q^-$. Como S es T_0 tenemos que $\exists U \in \mathcal{O}S$ tal que $q \notin U \ni p$. Observemos que $q \notin\uparrow p$, donde $\uparrow p \in \mathcal{Q}S$. Entonces $(\uparrow p)' \in \mathcal{O}^P S$ y además

$$p \notin (\uparrow p)' \ni q,$$

es decir, el espacio de parches es T_1. □

Lema 1.3.31 *En un espacio T_1 la operación de parches es idempotente, es decir, ${}^{PP}S =^P S$.*

Demostración. Recordemos que en un espacio T_1 todos los conjuntos son saturados. De esta manera, si S es T_1, entonces todos los subconjuntos de S y ${}^P S$ son saturados. Además cada conjunto compacto de ${}^P S$ es también compacto de S. Así cada subconjunto compacto saturado de ${}^P S$ es también compacto saturado y por lo tanto ${}^P S = {}^{PP} S$ como queríamos. □

Corolario 1.3.32 *Para cada espacio S que es T_0 tenemos que ${}^{PPP}S =^{PP} S$.*

Demostración. Sea S un espacio T_0. Por el Lema 1.3.30 tenemos que ${}^P S$ es T_1 y así, al aplicar el Lema 1.3.31 para ${}^P S$ obtenemos ${}^{PP}({}^P S) = {}^P({}^P S)$. □

Lema 1.3.33 *El espacio de parches de un espacio T_2 es el mismo.*

Demostración. Sea S un espacio T_2. Por el Lema 1.3.18 tenemos que todo conjunto compacto saturado es cerrado, es decir, S es empaquetado. Si S es empaquetado, ${}^{P}S = S$ que es lo que queríamos probar. $\square$

El Teorema 1.3.22 nos dice que si un espacio es sobrio, entonces su espacio frontal también lo es. Para el espacio de parches sensible a puntos no ocurre lo mismo, es decir, si el espacio es sobrio, el parche del espacio no es necesariamente sobrio.

Lema 1.3.34 *Sean S un espacio sobrio y F un subconjunto cerrado irreducible de ${}^{P}S$ (es decir, $F \in \mathcal{C}^{P}S$ y es cerrado irreducible en ${}^{P}S$). Entonces F está conformado por un único punto o es infinito.*

Demostración. Sea F un conjunto cerrado e irreducible en ${}^{P}S$, entonces F^{-} es cerrado e irreducible en S, pues si $\mathcal{O}S \subseteq \mathcal{O}^{P}S$ implica que $(\mathcal{O}S' \supseteq (\mathcal{O}^{P}S)'$. Por hipótesis S es sobrio, y por lo tanto $F^{-} = p^{-}$ para un único $p \in S$. Como $p \in F^{-}$ tenemos que si

$$p \in U \in \mathcal{O}S \Rightarrow F \cap U \cap p^{-} = F \cap U \neq \emptyset$$

y por lo tanto $p \in F^{=}$. .De esta manera tenemos que $F^{-} = F^{=}$ y como F es cerrado frontal $F^{=} = F$ y en consecuencia $p \in F$.

Supongamos que $F \neq \{p\}$ y, por contradicción, supongamos que F finito. Así $F = \{p, q_0, q_1, \ldots, q_n\}$ para algunos puntos $q_0, \ldots q_n$ distintos de p. Para cada q_i tenemos que $q_i \in F \subseteq p^{-}$, es decir, $q_i \sqsubseteq p$ en el orden de especialización. Luego $p \in F \cap q_i^{-}$, pues de lo contrario $p \sqsubseteq q_i$ y eso implicaría que $p = q_i$ lo cual no es posible. De esta manera los conjuntos

$$F \cap (\uparrow p)', F \cap (q_0^{-})', \ldots, F \cap (q_n^{-})' \neq \emptyset.$$

Pero $F \cap (\uparrow p)' \cap (q_0^{-})' \cap \cdots \cap (q_n^{-})' = \emptyset$ lo cual contradice que F es irreducible en ${}^{P}S$. Por lo tanto F es infinito. $\square$

Este argumento se puede refinar de diferentes maneras para obtener más información.

Lema 1.3.35 *El espacio de parches de un espacio T_1 y sobrio es T_1 y sobrio.*

Demostración. Sean S un espacio T_1 y sobrio y F un conjunto cerrado irreducible de ${}^{P}S$. Similar al Lema 1.3.34 tenemos $F^{-} = p^{-}$ para algún $p \in S$. Por hipótesis, S es T_1, es decir

$$p \in F \subseteq F^{-} = p^{-} = \{p\},$$

es decir, $F = \{p\}$. Por lo tanto, como F es un conjunto cerrado irreducible en ${}^{P}S$, entonces ${}^{P}S$ es T_1 $\square$

1.3.5 Propiedades funtoriales del espacio de parches

Las preguntas naturales que surgen sobre la funtorialidad de la construcción de parches sensible a puntos son las siguientes:

1. ¿Es posible ver la construcción de parches sensible a puntos
$$S \mapsto {}^{P}S$$
como la asignación de objetos de un funtor en la categoría de espacios topológicos o en alguna subcategoría adecuada?

2. ¿Es posible ver el mapeo continuo
$${}^{P}S \to S$$
como natural en la relación con este funtor y el funtor identidad?

Estas dos preguntas se pueden plantear de una forma más concreta.

Supongamos que $\phi\colon T \to S$ es una función continua entre espacios topológicos. Esto da tres lados de un cuadrado

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\phi"] & S \\ {}^{P}T \arrow[u] & {}^{P}S \arrow[u] \end{tikzcd}$$

donde cada lado es continuo. ¿Bajo que circunstancias existe un mapeo continuo ${}^{P}\phi\colon\ {}^{P}T \to {}^{P}S$ que hace que el cuadrado conmute?

Como funciones, ambas aplicaciones verticales son funciones identidad. Por lo tanto, si existe un mapeo ${}^{P}\phi$, entonces como función es solo ϕ.

Así se puede plantear la siguiente pregunta: *¿Bajo que circunstancias una función continua $\phi\colon T \to S$ es también "**parche continua**", es decir, es continua en relación con las topologías de parches?*

Definición 1.3.36 *Decimos que una función continua $\phi\colon T \to S$ es* parche continua *si envía conjuntos compactos saturados a conjuntos compactos saturados, es decir, si $\phi^{-1}(Q) \in \mathcal{Q}T$ siempre que $Q \in \mathcal{Q}S$.*

Por lo tanto, si ϕ convierte conjuntos compactos saturados, entonces ciertamente es parche continuo. Pero presumiblemente esta condición suficiente para la continuidad del parche no es necesaria.

Sea $f^*\colon A \to B$ un morfismo de marcos y f_* su adjunto derecho. En general, f_* preserva ínfimos arbitrarios, pero no necesariamente preserva supremos. Nos fijaremos en aquellos morfismos para los que f_* preserva ciertos supremos.

Definición 1.3.37 *Para un morfismo de marcos f^* y su adjunto derecho f_* dados como antes, decimos que el adjunto derecho f_* es* Scott-continuo *si*

$$f_*(\bigvee Y) = \bigvee f_*(Y)$$

para cada subconjunto dirigido Y de B.

Sabemos que cada función continua $\phi\colon T \to S$ da un morfismo de marcos

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}S \arrow[r, shift left, "\phi^*"] & \mathcal{O}T \arrow[l, shift left, "\phi_*"] \end{tikzcd}$$

entre las topologías. Podemos imponer la condición extra de Scott-continuidad en ϕ_*. Donde esta no debe confundirse con la continuidad dada por ϕ.

Lema 1.3.38 *Sea ϕ una función continua como la dada antes y supongamos que el espacio T es sobrio. Si ϕ_* es Scott-continua, entonces ϕ convierte conjuntos compactos saturados y por lo tanto ϕ es parche continua.*

Teorema 1.3.39 *Sea ϕ una función continua como la dada antes y supongamos que ambos espacios, S y T son sobrios. Entonces ϕ_* es Scott-continua si y solo si las siguientes condiciones se cumplen*

- *ϕ convierte conjuntos compactos saturados.*
- *Si $Y \in \mathcal{C}T$, entonces $\downarrow \phi(Y) \in \mathcal{C}S$.*

1.3.6 El triángulo fundamental de un espacio

La inclusión $\iota\colon \mathcal{O}S \to \mathcal{O}^f S$, en cierto modo, es un morfismo de marcos que resuelve el problema de complementación para $\mathcal{O}S$. En esta subsección, usamos la información anterior para encontrar el espacio de puntos del ensamble de un marco A.

Lema 1.3.40 *Para cada espacio S existe un único morfismo de marcos σ tal que el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}S \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\eta_{\mathcal{O}S}"'] & \mathcal{O}^f S \\ N\mathcal{O}S \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Es un caso particular del Teorema 1.2.30. ∎

El resultado anterior es cierto para cualquier espacio S. En la practica, es más conveniente utilizar $S = \mathrm{pt}A$, donde $A \in \mathrm{Frm}$. Además, para este caso S resulta ser sobrio.

Observemos que el morfismo σ actúa como una transformación natural cuando el espacio S varia. Nuestro objetivo es encontrar una descripción especifica para el morfismo σ.

Definición 1.3.41 *Sean $S \in \mathrm{Top}$ y consideremos el morfismo $\sigma\colon N\mathcal{O}S \to \mathcal{O}^f S$ dado por*

$$\sigma(j) = \bigcup\{j(W) \setminus W \mid W \in \mathcal{O}S\}$$

para cada $j \in N\mathcal{O}S$.

Para verificar que σ es un morfismo de marcos usaremos una manera equivalente de definirlo.

Lema 1.3.42 *Para σ como en la Definición 1.3.41 tenemos*

$$p \in \sigma(j) \Leftrightarrow p \in j(\overline{p}')$$

para cada $p \in S$. Además, σ es un $\wedge-$morfismo.

Demostración. Consideremos $p \in S$ arbitrario. Si $p \in \sigma(j)$, entonces

$$p \in \bigcup\{j(W) \setminus W \mid W \in \mathcal{O}S\}.$$

Así, $p \in j(W)$ y $p \notin W$ para algún abierto W. De aquí que

$$W \subseteq \overline{p}' \quad \text{y} \quad p \in j(W) \subseteq j(\overline{p}')$$

que es lo que queríamos.

Recíprocamente, supongamos que $p \in j(\overline{p}')$. Estableciendo $W = \overline{p}'$ tenemos que $p \in j(W)$ y $p \notin W$. Por lo tanto $p \in \sigma(j)$.

Por último, de manera general, consideremos $j, k \in NA$. Entonces

$$p \in \sigma(j \wedge k) \Leftrightarrow p \in (j \wedge k)(\overline{p}') \Leftrightarrow p \in j(\overline{p}' \cap k(\overline{p}') \Leftrightarrow p \in \sigma(j) \wedge \sigma(k)$$

para verificar que σ es un $\wedge-$morfismo. □

En la Definición 1.2.23 se introducen los núcleos espacialmente inducidos. El siguiente resultado nos da más información sobre ellos.

Lema 1.3.43 *Para σ definido como antes tenemos que $\sigma([E]) = E^{\square}$ para cada $E \in \mathcal{P}S$.*

Demostración. Consideremos $E \in \mathcal{P}S$. Para cada $U \in \mathcal{O}S$ tenemos

$$[E](U) \setminus U = (E \cup U)^{\circ} \setminus U \subseteq E^{\square}.$$

Así, $\sigma([E]) = \bigcup\{[E](W) \setminus W \mid W \in \mathcal{O}S\} \subseteq E^{\square}$ se cumple.

Para la otra contención, supongamos que $p \in E^{\square}$. Así existe $U \in \mathcal{O}S$ tal que

$$p \in U \cap \overline{p}' \subseteq E \subseteq\Rightarrow p \in U \subseteq E \cup \overline{p}' \Rightarrow p \in [E](\overline{p}').$$

Por lo tanto $p \in [E](\overline{p}') \setminus \overline{p}'$, es decir, $p \in \sigma([E])$. □

Hasta este punto hemos mostrado que σ es un $\wedge-$morfismo. Para verificar que es un morfismo de marcos basta con mostrar quien es su adjunto derecho.

Teorema 1.3.44 *Para cada espacio S el par de asignaciones*

$$\begin{tikzcd} N\mathcal{O}S \arrow[r, shift left, "\sigma"] & \mathcal{O}^f S \arrow[l, shift left, "{[\_]}"] \end{tikzcd}$$

forman un par adjunto. Además, σ es un morfismo de marcos.

Demostración. Por la definición de adjunción, debemos verificar que $\sigma(j) \subseteq E \Leftrightarrow j \leq [E]$ se cumple para todo $j \in N\mathcal{O}S$ y $E \in \mathcal{O}^f S$.

Supongamos que $\sigma(j) \subseteq E$. Así, para cada $U \in \mathcal{O}S$ y $p \in S$ tenemos

$$\begin{aligned} p \in j(U) &\Rightarrow p \in (j(U) \setminus U) \ \text{ o } \ p \in U \\ &\Rightarrow p \in \sigma(J) \ \text{ o } \ p \in U \\ &\Rightarrow p \in E \ \text{ o } \ p \in U \\ &\Rightarrow p \in E \cup U = (E \cup U)^\circ. \end{aligned}$$

Por lo tanto $j(U) \subseteq [E](U)$, y al ser U arbitrario se cumple que $j \leq [E]$.

Recíprocamente, supongamos que $j \leq [E]$. Entonces $\sigma(J) \subseteq \sigma([E])$. Por el Lema 1.3.43 sabemos que $\sigma([E]) = E^\square$ para todo $E \in \mathcal{P}S$. De aquí que $\sigma(j) \subseteq E^\square \subseteq E$ que es lo que queríamos.

Por lo tanto [_] es el adjunto derecho de σ.

Para ver que es un morfismo de marcos debemos primero recordar que cualquier función monótona con adjunto derecho respeta supremos arbitrarios. Resta verificar el comportamiento de σ a través de los núcleos id y tp.

$$\begin{aligned} \sigma(\mathrm{id}) &= \bigcup\{\mathrm{id}(W) \setminus W \mid W \in \mathcal{O}S\} = \bigcup\{W \setminus W \mid W \in \mathcal{O}S\} = \emptyset \\ \sigma(\mathrm{tp}) &= \bigcup\{\mathrm{tp}(W) \setminus W \mid W \in \mathcal{O}S\} = \bigcup\{S \setminus W \mid W \in \mathcal{O}S\} = S. \end{aligned}$$

□

Para terminar esta subsección retomamos lo dicho en el Lema 1.3.40 y verificamos que, así definido, σ hace conmutar el diagrama de dicho resultado.

Lema 1.3.45 *Con los datos anteriores el siguiente diagrama conmuta*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}S \arrow[r, "\iota"] \arrow[d, "\eta_{\mathcal{O}S}"'] & \mathcal{O}^f S \\ N\mathcal{O}S \arrow[ur, "\sigma"'] & \end{tikzcd}$$

Demostración. Consideremos $U \in \mathcal{O}S$, entonces $(\sigma \circ \eta_{\mathcal{O}S})(U) = \sigma(u_U)$. Luego, para $V \in \mathcal{O}S$ se cumple que

$$\sigma(u_U(V)) = \sigma(U \cup V) = \sigma((U \cup V)^\circ) = \sigma([U]) = U^\square = U.$$

□

1.3.7 El espacio de puntos del ensamble

Esta parte de las notas veremos la relación que existe entre el ensamble de la topología de un espacio ($N\mathcal{O}S$ y la topología de Skula.
El siguiente Teorema resulta de juntar el Teorema 1.2.31 y el Lema 1.3.40.

Teorema 1.3.46 *Para $A \in \mathrm{Frm}$ y $S = \mathrm{pt}A$ el siguiente diagrama conmuta.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "U_A"] \arrow[d, "\eta_A"'] & \mathcal{O}S \arrow[d, "\eta_{\mathcal{O}S}"'] \arrow[dr, "\iota"] & \\ NA \arrow[r, "NU_A"'] & N\mathcal{O}S \arrow[r, "\sigma_{\mathcal{O}S}"'] & \mathcal{O}^f S \end{tikzcd}$$

A manera de notación, denotamos la composición inferior del diagrama por $\sigma_{\mathcal{O}S} \circ NU_A = \Sigma_A$. Se puede verificar que este morfismo le asigna al ensamble su espacio de puntos.

Lema 1.3.47 *Para cada $j \in NA$ las tres condiciones son equivalentes:*

1. *j es $\wedge-$irreducible (en NA).*
2. *j es 2-valuado (cada valor de j es 0 o 1).*
3. *$a = j(0)$ es $\wedge-$irreducible (en A) y $j = w_a$.*

Demostración.

$1) \Rightarrow 2)$ Supongamos que j es $\wedge-$irreducible. Verificaremos que j es de la forma

$$j(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \nleq a \\ \\ a, & \text{si} \quad x \leq a \end{cases}$$

donde $a = j(0)$. Notemos que la anterior es la única manera posible en la que un núcleo puede tomar dos valores.

Sabemos que $u_x \wedge v_x = id \leq j$ se cumple para todo $x \in A$. Por lo tanto $u_x \leq j$ o $v_x \leq j$. Supongamos lo primero, es decir, para todo $y \in A$ $u_x(y) \leq j(y)$. De manera particular

$$x = u_x(0) \leq j(0) = a \quad \text{y} \quad j(x) = j(a) = a,$$

pues $0 \leq x$ y $a = j(0) \leq j(x)$. Observemos que esto ocurre cuando $x \leq a$.
Supongamos ahora que $x \nleq a$. Así $v_x \leq j$ y $10v_x(x) \leq j(x)$, es decir, $j(x) = 1$. Por lo tanto, j tiene la forma que requeríamos.

$2) \Rightarrow 3)$ Supongamos que j es $2-$valuado y consideremos $x \wedge y \leq a$ para algunos $x, y \in A$. Entonces

$$j(x) \wedge j(y) \leq j(x \wedge y) \leq a$$

por la forma de j. Como $j(x), j(y) \in \{a, 1\}$, entonces $j(x) = a$ o $j(y) = a$ y por lo tanto $x \leq a$ o $y \leq a$, nuevamente por la forma de j. Como $a = j(0)$ se cumple que $a \neq 1$ y así a es $\wedge-$irreducible.

Ahora debemos probar que $w_a(x) = j(x)$, con j definido como antes, siempre que a es $\wedge-$irreducible. Supongamos que $x \leq a$ entonces

$$((x \succ a) \succ a) = (1 \succ a) = a.$$

Si $x \nleq a$ entonces

$$(x \succ a) \wedge a = (x \succ a) \wedge ((x \succ a) \succ a)) \leq a \quad \text{y} \quad x \leq w_a(x)$$

así $w_a(x) = ((x \succ a) \succ a) \nleq a$. Como a es $\wedge-$irreducible se debe cumplir que $(x \succ a) \leq a$. Por lo tanto $((x \succ a) \succ a) = 1$, es decir,

$$w_a(x) = \begin{cases} 1, & \text{si} \quad x \nleq a \\ \\ a, & \text{si} \quad x \leq a \end{cases}$$

$3) \Rightarrow 1)$ Queremos probar que w_a es $\wedge-$irreducible en NA siempre que a es $\wedge-$irreducible en A. Ya hemos demostrado que cuando a es $\wedge-$irreducible, entonces w_a es $2-$valuado. También sabes que si $k \wedge l \leq w_a$ entonces

$$k(a) \wedge l(a) \leq w_a(a) \Rightarrow k(a) \leq a \text{ o } l(a) \leq a \Rightarrow k \leq w_a \text{ o } l \leq w_a,$$

es decir, w_a es $\wedge-$irreducible en NA.

$\square$

Considerando $S = \mathrm{pt}A$ y $T = \mathrm{pt}NA$, lo anterior nos proporciona un par inverso de biyecciones entre S y T, es decir

$$S \underset{\psi}{\overset{\phi}{\rightleftarrows}} T$$

donde $\phi(p) = w_p$ y $\psi(m) = m(0)$. De esta manera, el espacio de puntos de NA tiene esencialmente los mismos puntos que S, pero en una topología diferente. ¿Cuál es esta topología?

Lema 1.3.48 *Sean $A \in \mathrm{Frm}$, $S = \mathrm{pt}A$ y $T = \mathrm{pt}NA$. Para $\mathcal{O}T$ se cumple que $\mathcal{O}^f S$ es la topología que provoca que las siguientes funciones sean un par de homeomorfismos.*

$$S \underset{\psi}{\overset{\phi}{\rightleftarrows}} T$$

Demostración. Los conjuntos abiertos usuales de S (los elementos de $\mathcal{O}S$) son de la forma

$$U_A(x) = \{p \in S \mid x \nleq p\}$$

para $x \in A$. Los abiertos de T son de la forma

$$U_{NA} = \{m \in T \mid j \nleq m\}$$

para $j \in NA$.

También sabemos que si $j \in NA$, entonces $j = \bigvee\{v_x \wedge u_{j(x)} \mid x \in A\}$. Por lo tanto, los conjuntos $U_{NA}(u_x)$ y $U_{NA}(v_x)$ con $x \in A$ forman una sub-base de T, ya que $U(\_)$ es un morfismo de marcos.

Luego

$$\begin{aligned}\phi^{-1}(U_{NA}(u_x)) = \psi(U_{NA}(u_x)) &= \{\psi(m) \mid u_x \nleq m \in T\}\\ &= \{m(0) \mid u_x \nleq m \in T\}\\ &= \{p \mid x \nleq p \in S\}\\ &= U_A(x).\end{aligned}$$

Sabemos que $v_x \wedge u_x = \mathrm{id} \leq m$ y $v_x \vee u_x = \mathrm{tp}$ se cumple para todo $x \in A$ y $m \in T$. De esta manera se debe cumplir que $v_x \leq m$ o $u_x \leq m$. En otras palabras

$$x \in U_{NA}(v_x) \Leftrightarrow m \notin U_{NA}(u_x)$$

para cada $x \in A$ y $m \in T$. Así

$$\phi^{-1}(U_{NA}(v_x)) = \psi(U_{NA}(v_x)) = \psi(U_{NA}(u_x)') = U_A(x)'$$

pues ψ es un morfismo biyectivo de marcos.

De manera similar tenemos que $\psi^{-1}(U_A(x)) = U_{NA}(u_x)$ y $\psi^{-1}(U_A(x)') = U_{NA}(v_x)$. Por lo tanto los conjuntos $U_A(x)$ y $(U_A(x))'$ forman una sub-base para la topología inducida en S.Además, esta es la topología de Skula, $\mathcal{O}^f S$. $\square$

1.4 El Teorema de Hoffman-Mislove

En esta última sección relacionamos algunos de los conceptos vistos hasta este momento para un marco A y los trasladamos a la topología de su espacio de puntos. De manera especifica, nos interesa descubrir la correspondencia biyectiva que proporcina el Teorema de Hoffman-Mislove.

Recordemos que, para un espacio S, $\mathcal{Q}S$ es el conjunto de todos los subconjuntos compactos saturados de S. Para cada conjunto $Q \in \mathcal{Q}S$ podremos obtener un filtro abierto $\nabla(Q)$ en A dado por

$$x \in \nabla(Q) \Leftrightarrow Q \subseteq U_A(x)$$

donde U_A es la reflexión espacial presentada en 1.1. Veremos que cada filtro abierto surge de esta manera de un único Q compacto saturado.

Lema 1.4.1 *Sea F un filtro abierto de A. Consideramos a M como el conjunto de elementos máximos en $A \setminus F$. Entonces para cada $a \in A \setminus F$ existe algún $m \in M$ tal que $a \leq m$.*

Demostración. Notemos que como F es un filtro abierto arbitrario, entonces el complemento $A \setminus F$ es cerrado bajo supremos dirigidos. De esta manera, para $A \setminus F$ podemos hacer uso del Lema de Zorn para obtener $m \in M$ tal que $a \leq m$, con $a \in A \setminus F$. □
Se puede verificar que para un marco A, cada elemento máximo es un elemento $\wedge-$irreducible. En otras palabras, para cada $m \in M$ tenemos que $m \in \mathrm{pt}A$, es decir, $m \neq 1$ y si $x \wedge y \leq m$, entonces $x \leq m$ o $y \leq m$ se cumple.

De esta manera, para $S = \mathrm{pt}A$, como $M \subseteq S$, podemos reformular el lema anterior de la siguiente manera.

Corolario 1.4.2 *La equivalencia*

$$M \subseteq U_A(a) \Leftrightarrow a \in F$$

se cumple para cada $a \in A$.

Demostración. Primero, supongamos que $a \in F$. Si $m \in M$, entonces $m \notin F$, es decir, $a \nleq m$. Por lo tanto $m \in U_A(a)$.

Ahora, supongamos que $a \notin F$. Por el Lema 1.4.1 existe algún $m \in M$ tal que $a \leq m$, de modo que $m \notin U_A(a)$ y por lo tanto $M \nsubseteq U_A(a)$, es decir, $M \subseteq U_A(a)$ implica que $a \in F$. □
Este resultado tiene otra consecuencia más importante.

Lema 1.4.3 *El conjunto M es compacto en $S = \mathrm{pt}A$.*

Demostración. Consideremos cualquier cubierta abierta $\{U_A(x) \mid x \in X\}$ de M. De manera usual, supongamos que el conjunto $X \subseteq A$ es dirigido. Sea $a = \bigvee X$, entonces

$$M \subseteq \bigcup \{U_A(x) \mid x \in X\} = U_A(a)$$

y por lo tanto $a \in F$. Pero F es un filtro abierto y X es un conjunto dirigido, de modo que $x \in F$ para algún $x \in X$. Esto nos da $M \subseteq U_A(x)$ para obtener la subcubierta requerida. □
Ahora, sea Q la saturación de M. Como cada conjunto abierto es saturado, tenemos que Q y M tienen exactamente los mismos súper conjuntos abiertos. En particular, Q es compacto, y por lo tanto, $Q \in \mathcal{Q}S$.

Notemos también que para cada $x \in A$ tenemos

$$x \in F \Leftrightarrow M \subseteq U_A(x) \Leftrightarrow Q \subseteq U_A(x) \tag{1.3}$$

de modo que el filtro abierto F surge del conjunto compacto saturado Q como queríamos. Veamos ahora que Q es el único conjunto compacto saturado asignado a F de esta manera.

Supongamos que existen dos conjuntos P y Q que cumplen lo mencionado antes. Entonces

$$P \subseteq U_A(x) \Leftrightarrow Q \subseteq U_A(x)$$

para cada $x \in A$. Lo anterior puede reformularse como

$$(\exists p \in P)[x \leq p] \Leftrightarrow (\exists q \in Q)[x \leq q]$$

para cada $x \in A$. Consideremos cualquier $p \in P$ y sea $x = p$. Entonces existe algún $q \in Q$ con $p \leq q$ y por lo tanto $q \sqsubseteq p$. Como Q es saturado, esto da que $p \in P$ y por lo tanto $Q \subseteq P$. Similarmente vemos que $P \subseteq Q$.

Esto muestra que podemos obtener un filtro abierto de un único $Q \in \mathcal{Q}S$ de manera canónica. Resta ver que tenemos un proceso inverso, es decir, dado cualquier filtro abierto, por medio de este obtener un conjunto compacto saturado.

Lema 1.4.4 *Si $S = \mathrm{pt}A$, F un filtro abierto y Q la saturación del conjunto M definido antes, entonces $Q = S \setminus F$.*

Demostración. Consideremos cualquier $q \in Q$. Como Q es la saturación de M, existe algún $m \in M$ tal que $m \sqsubseteq q$ en el orden de especialización de S. Entonces $q \leq m \notin F$ en el orden original del marco A, es decir, $q \notin F$. De esta manera $Q \subseteq (S \setminus F)$.

Recíprocamente, supongamos que $p \in S \setminus F$. Si $p \in S \setminus F$, por el Lema 1.4.1, existe $m \in M$ tal que $p \leq m$, es decir, $m \sqsubseteq p$ y por lo tanto $p \in Q$. $\square$

La versión corta del Teorema de Hoffman-Mislove que estaremos usando a lo largo de este trabajo es la que se enuncia a continuación.

Teorema 1.4.5 (Hoffmann-Mislove) *Sea A un marco con $S = \mathrm{pt}(A)$ su espacio de puntos, entonces existe una biyección entre:*

i) $A^\wedge =$ *filtros abiertos en A.*

ii) $\mathcal{Q}S =$ *conjuntos compactos saturados.*

La prueba de este resultado son las demostraciones del Corolario 1.4.2 y el Lema 1.4.4.

Chapter 2

Marcos arreglados

El objetivo de este capítulo es obtener una versión libre de puntos de la construcción presentada en la Subsección 1.3.4. Todo lo que hemos visto hasta este momento es suficiente como para establecer las respectivas correspondencias y encontrar algo similar a la *pbase*. Para hacer esto, primero necesitamos algo de información adicional.

Todo lo que aquí se muestra es parte del trabajo de Sexton y Simmons. La fuente original es la tesis doctoral [6]

2.1 Filtros admisibles y núcleos ajustados

Este será nuestro primer contacto con propiedades de separación traducidas al lenguaje sin puntos. El siguiente capítulo abardora de manera más profunda este tema.

Definición 2.1.1 *Consideremos A un marco. Decimos que*

1. *A es* regular *si para cada $a, b \in A$ con $a \nleq b$, existen $x, y \in A$ tales que*

$$a \vee x = 1, \quad y \nleq b, \quad x \wedge y = 0$$

se cumplen.

2. *A es* ajustado *si para cada $a, b \in A$, con $a \nleq b$ existen $x, y \in A$ tales que*

$$a \vee x = 1, \quad y \nleq b, \quad x \wedge y = 0$$

se cumplen.

Estas nociones vuelven a ser abordadas en el Capítulo 3. Aunque el enfoque puede parecer distinto, estas definiciones terminan siendo equivalentes a las que ahí se presentan. Por el momento, solo enunciaremos aquellas propiedades que no serán presentadas en el siguiente capítulo. Las pruebas pueden consultarse en [6].

Lema 2.1.2 *Sea A un marco ajustado. Los puntos (vistos como elementos $\wedge-$irreducibles) de A son elementos máximos.*

Lema 2.1.3 *Si el marco A es ajustado, entonces* $\mathrm{pt}A$ *es T_1 y sobrio.*

Lema 2.1.4 *En un espacio con topología ajustada, las tres condiciones son equivalentes, T_0, T_1 y sobrio.*

Corolario 2.1.5 *Un espacio T_0 con topología ajustada es T_1 y sobrio.*

Para un marco A, si $j \in NA$, entonces j nos permite construir un filtro, pero no necesariamente cualquier filtro nos permite obtener un núcleo.

Definición 2.1.6

1. *Sea A un marco. Para un elemento $a \in A$ y núcleo $j \in NA$ decimos que j* admite *al elemento a si $j(a) = 1$.*
2. *Sea $\nabla(j)$ el conjunto de elementos admitidos por el núcleo j. $\nabla(j)$ es un filtro en A.*
3. *Para un marco A, un filtro en A es* admisible *si tiene la forma $\nabla(j)$ para algún $j \in NA$.*
4. *La relación $j \sim k$ si y solo si $\nabla(j) = \nabla(k)$ es una relación de equivalencia. A las clases de equivalencia las llamamos* bloques.
5. *Un núcleo es* ajustado *si es el menor elemento de su bloque.*

Existe una correspondencia uno a uno entre bloques y núcleos ajustados, como se muestra en el siguiente resultado.

Lema 2.1.7 *Sea A un marco. Cada bloque de un núcleo tiene un menor elemento.*

Demostración. Sea F un filtro admisible en A y consideremos $B = \{j \in NA \mid \nabla(j) = F\}$. De esta manera B es la colección de todos los núcleos que admiten exactamente al conjunto F. Recordemos que los ínfimos en NA se calculan puntualmente. Así, sea $k = \bigwedge B$ y k es el menor elemento de B.

Sea $a \in F$, entonces por definición $j(a) = 1$ para todo $j \in B$, en particular, $k(a) = 1$. De modo que $a \in \nabla(k)$. Por lo tanto $F = \nabla(j) \subseteq \nabla(k)$. La otra inclusión se cumple debido a que $k \leq j$. Así $\nabla(k) = F$ y $k \in B$. □

Lema 2.1.8 *Cada filtro principal es admisible.*

Demostración. Consideremos el filtro principal $F = \{x \in A \mid x \geq a\}$ para algún $a \in A$. Notemos que para $j = v_a$, $\nabla(j) = F$, pues si $x \geq a$, $(a \succ x) = 1$. □

No todos los filtros son admisibles. Por ejemplo, supongamos que A es booleano. Entonces cada núcleo j tiene la forma u_a para algún $a \in A$, o equivalentemente v_a para algún $a \in A$ (diferente). Entonces cada filtro admisible $\nabla(j)$ es principal y cuando A es infinito no hay filtros principales.

Lema 2.1.9 *Sea A un marco. Todo filtro abierto en A es admisible.*

Demostración. Sea $F \in A^{\wedge}$ y sea $f = \dot{\bigvee}\{v_a \mid a \in F\}$ de modo que para algún ordinal ∞ tenemos $V_F = f^{\infty}$, y este es el menor núcleo que admite a F. Así, $F \subseteq \nabla(f^{\infty})$. Debemos probar que $\nabla(f^{\infty}) \subseteq F$. Comencemos por mostrar que si

$$f(x) \in F \Rightarrow x \in F, \tag{2.1}$$

para cada $x \in A$.

El supremo $f(x) = \bigvee\{v_a(x) \mid a \in F\}$ es dirigido y como $F \in A^{\wedge}$ si $f(x) \in F$, se cumple que $v_a(x) \in F$ para algún $a \in F$. De aquí que si $x \in F$, pues al ser F un filtro, se cumple que

$$x \geq a \wedge x = a \wedge (a \wedge x) \in F.$$

Ahora probamos por inducción sobre los ordinales que si $f^{\alpha}(x) \in F$, entonces $x \in F$ se cumple para cada ordinal α.

El caso $\alpha = 0$ es trivial pues obtenemos $v_a(x)$ y estos corresponden a filtros admisibles. El paso de inducción de α a $\alpha + 1$ se sigue de 2.1, pues si suponemos que $f^{\alpha}(x) \in F$, entonces $x \in F$. De aquí que

$$f^{\alpha+1}(x) = f(f^{\alpha}(x)) \in F \Rightarrow f^{\alpha}(x) \in F \Rightarrow x \in F.$$

Resta el caso λ un ordinal limite. Por definición, $f^{\lambda}(x) = \bigvee\{f^{\alpha}(x) \mid \alpha \leq \lambda\}$, el cual es un supremo dirigido y así

$$f^{\lambda}(x) \in F \Rightarrow (\exists \alpha \leq \lambda)[f^{\alpha}(x) \in F]$$

pues F es abierto. Luego la hipótesis de inducción implica que $x \in F$. Por lo tanto $f^{\infty}(x) \in F$ si y solo si $x \in F$ para todo $x \in A$. En particular

$$f^{\infty}(x) = 1 \Rightarrow f^{\infty}(x) \in F \Rightarrow x \in F,$$

es decir, $\nabla(f^{\infty}) \subseteq F$. □

Ejemplo 2.1.10 *En el marco $(\mathbb{N}, \leq) \cup \{\infty\}$ consideremos el filtro generado por el conjunto de los números pares. Notemos que este es un filtro principal y por lo tanto es admisible, pero no es un filtro abierto. Ya que*

$$\infty = \bigvee\{\textit{impares}\} \in \{\textit{pares}\}$$

pero $\{\textit{impares}\} \cap \{\textit{pares}\} = \emptyset$, es decir, no existe $y \in \{\textit{impares}\}$ tal que $y \in \{\textit{pares}\}$. Por lo tanto $\{\textit{pares}\}$ no es filtro abierto.

Sabemos que no todos los filtros son admisibles, pero cada filtro genera un menor filtro admisible por arriba de el.

Definición 2.1.11 *Sean A un marco y F un filtro en A. Definimos*

$$v_F = \bigvee\{v_a \mid a \in F\}, \tag{2.2}$$

donde el supremo es calculado en NA.

Por como construimos a v_F, éste admite cada $a \in F$, y así $F \subseteq \nabla(v_F)$. Se puede verificar que $\nabla(v_F)$ es el menor filtro admisible por encima de F. Además, v_F es ajustado. De hecho, un núcleo es ajustado si tiene la forma de 2.2.

Los núcleos ajustados se comportan de manera similar a los $v-$núcleos. El siguiente resultado es consecuencia de las propiedades de los $v-$núcleos.

Lema 2.1.12 *Sea A un marco. Los siguientes resultados se cumplen para todos los filtros F, G y familias dirigidas de filtros $\mathcal{F}$ en A.*

i) $v_F \wedge v_G = v_{F\cap G}$.

ii) $v_F \vee v_G = v_{F\cup G}$.

iii) $\bigvee\{v_F \mid F \in \mathcal{F}\} = v_{\bigcup \mathcal{F}}$.

Además de un elemento mínimo, algunos bloques también tienen un elemento máximo.

Lema 2.1.13 *Para cada $a \in A$ el núcleo w_a es el mayor elemento de su bloque.*

Demostración. Supongamos que j es un compañero de w_a. Basta con demostrar que $j(a) = a$, pues esto es equivalente a que $j \leq w_a$. Sean $x = j(a)$ y $y = (x \succ a)$, de aquí que

$$w_a(y) = ((y \succ a) \succ a) = (((x \succ a) \succ a) \succ a) = (x \succ a) = y.$$

Además

$$((y \vee x) \succ a) = (y \succ a) \wedge (x \succ a) = (y \succ a) \wedge y = y \wedge a = a$$

Por lo tanto $((y \vee x) \succ a) = a$ y $1 = ((y \vee x) \succ a) \succ a) = w_A(y \vee x)$. Así $y \vee x \in \nabla(w_a)$ y por hipótesis $y \vee x \in \nabla(j)$, es decir, $j(y \vee x) = 1$.
Luego

$$j(y \vee a) = j(y \vee j(a)) = j(y \vee x) = 1,$$

de aquí que $w_a(y \vee a) = 1$. Pero $(x \succ a) = y = w_a(y) = w_a(y \vee a) = 1$. Por lo tanto $j(a) = x \leq a$, es decir, $j(a) = a$. $\square$

Se puede hacer una comparación con un núcleo ajustado a través de su filtro. La afirmación $j \leq k \Rightarrow \nabla(j) \subseteq \nabla(k)$ es trivial. Cuando j es ajustado se puede fortalecer esto.

Lema 2.1.14 *Sea A un marco. Supongamos que $j \in NA$ es ajustado. Entonces*

$$j \leq k \Leftrightarrow \nabla(j) \subseteq \nabla(k)$$

se cumple para todo $k \in NA$.

Demostración. Consideremos $a \in \nabla(j) \subseteq \nabla(k)$ y $x \in A$. Sea $y = v_a(x)$, entonces $a \wedge y \leq x$. Así,

$$y \leq k(y) = k(a) \wedge k(y) = k(a \wedge y) \leq k(x).$$

Lo cual muestra que $v_a \leq k$ y como j es ajustado $j = \bigvee\{v_a \mid a \in \nabla(j)\} \leq k$. $\square$

Existe una relación entre la propiedad de separación ajustado y núcleo ajustado.

Teorema 2.1.15 *Para cada marco A las siguientes condiciones son equivalentes.*

$i)$ *A es ajustado.*

$ii)$ *Cada núcleo en A es ajustado.*

$iii)$ *Cada $u-$núcleo en A está solo en su bloque.*

$iv)$ *Cada $u-$núcleo en A es mínimo en su bloque.*

Demostración.

$i) \Rightarrow ii)$ Supongamos que A es ajustado y supongamos que existen núcleos no ajustados, es decir, existen $j, k \in NA$ tales que $j \nleq k$. Entonces $j(c) \nleq k(c)$ para algún $c \in A$. Sean $a = j(c)$, $b = k(c)$ y al ser A ajustado, podemos encontrar $x, y \in A$ tales que

$$a \vee x = 1, \quad x \wedge y \leq b, \quad y \nleq b.$$

Definimos $z = (y \succ b)$, de modo que $x \leq z$ y $c \leq b \leq z$. De aquí que $a = j(c) \leq j(z)$ y $x \leq z \leq j(z)$. Por lo tanto $1 = a \vee x \leq j(z)$, lo cual implica que $k(z) = 1$, pues j y k son compañeros.

Como $y \wedge z \leq b$ tenemos que $k(y) \leq k(b) = k(k(c)) = k(c) = b$, es decir, $y \leq b$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto cada núcleo en A es ajustado.

$ii) \Rightarrow iii) \Rightarrow iv)$ Si consideramos un $u-$núcleo, por $ii)$ este es ajustado. De aquí que $u_\bullet$ es el menor elemento de su bloque, es decir, para $j \in NA$, no se cumple que $j \leq u_\bullet$, pero para todo $j \in NA$

$$j = \bigvee\{u_\bullet \wedge v_{j(\bullet)} \mid \bullet \in A\},$$

de aquí que $j = u_\bullet$, es decir, $u_\bullet$ no tiene compañeros en su bloque. Al no tener compañeros en su bloque, $u_\bullet$ es el menor elemento del bloque.

$iv) \Rightarrow i)$ Supongamos $iv)$ y sean A un marco y $a \nleq b \in A$, de aquí que $u_a \nleq w_b$, pues para $0 \in A$, $u_a(0) = a$ y $w_b(0) = b$. Por hipótesis, u_a es ajustado y por el Lema 2.1.14 se cumple que $\nabla(u_a) \nsubseteq \nabla(w_b)$. Entonces existe $x \in A$ tal que $a \vee x = 1$ y $w_b(x) \neq 1$. Consideremos $y = (x \succ b)$, así $w_b(x) = (y \succ b) \neq 1$ lo que implica que $y \nleq b$ y $x \wedge y = x \wedge (x \succ b) = x \wedge b \leq b$.

$\square$

El resultado anterior nos dice que ajustado es una propiedad que simplifica enormemente la estructura del conjunto.

2.1.1 Núcleos asociados a filtros abiertos

Sabemos que cada filtro admisible en un marco A está asociado con un núcleo

$$v_F = \bigvee\{v_a \mid a \in F\}$$

y que cada núcleo está asociado a su filtro admisible. En el Lema 2.1.9 vimos que todo filtro abierto es admisible.

En esta subsección echamos un vistazo más a fondo a los núcleos asociados con los filtros abiertos. Recordemos también que en un marco espacial existe una correspondencia entre conjuntos saturados y filtros abiertos.

Uno de nuestros objetivos es obtener la construcción de parches para el ensamble de un marco. Para hacer esto necesitamos un dispositivo sin puntos que ocupe el lugar de los conjuntos compactos saturado. Los filtros abiertos son el principal candidato.

Lema 2.1.16 *Sea A un marco. Entonces para todos los filtros abiertos F, G y familias dirigidas de filtros abiertos $\mathcal{F}$ tenemos*

i) $v_F \wedge v_G = v_{F\cap G}$,

ii) $\bigvee\{v_F \mid F \in \mathcal{F}\} = v_{\bigcup \mathcal{F}}$

y $F \cap G$, $\bigcup \mathcal{F}$ son filtros abiertos

Demostración. La prueba se sigue del Lema 2.1.12 y la Proposición 1.1.20. □

Cada uno de los núcleos ajustados v_F es el supremo sobre un conjunto dirigido. Tomando el supremo puntual

$$f_F = \dot{\bigvee}\{v_a \mid a \in F\}$$

donde podremos omitir el subíndice F cuando el filtro en cuestión éste claro, e iterando a través de los ordinales obtenemos una sucesión

$$f^0 = \mathrm{id}, \quad f^{\alpha+1} = f(f^\alpha), \quad f^\lambda = \bigvee\{f^\alpha \mid \alpha \leq \lambda\}$$

para cada ordinal α y ordinal limite λ. Esta sucesión eventualmente se estabiliza en f^∞ para algún ordinal ∞.

Nos concentraremos en la sucesión obtenida al aplicar cada derivada f^α al menor elemento de nuestro marco. Definimos

$$d(0) = 0, \quad d(\alpha + 1) = f(d(\alpha)), \quad d(\lambda) = \bigvee\{f(\alpha) \mid \alpha \leq \lambda\}$$

para cada ordinal α y ordinal limite λ.

Podemos hacer lo mismo en un contexto sensible a puntos. Sea S un espacio topológico. Para un filtro abierto F en $\mathcal{O}S$ tenemos

$$v_F = \bigvee\{v_a \mid a \in F\} = \bigvee\{[U'] \mid Q \subseteq U\}$$

donde $Q = \cap F$ es el conjunto compacto saturado correspondiente a F.

Esta vez, en lugar de considerar la sucesión de abiertos, es más fácil concentrarse en los conjuntos cerrados complementarios. Para $Q \in \mathcal{Q}S$ usamos la operación $\hat{Q}$ en $\mathcal{C}S$ dada por

$$\hat{Q}(X) = \bigcap\{(X \cap U)^- \mid Q \subseteq U\}$$

para cada $X \in \mathcal{C}S$. Establecemos

$$Q(0) = S, \quad Q(\alpha + 1) = \hat{Q}(Q(\alpha)), \quad Q(\lambda) = \bigcap\{Q(\alpha) \mid \alpha \leq \lambda\}$$

para obtener una sucesión descendente de conjuntos cerrados. Por razones de cardinalidad, esta sucesión eventualmente se estabiliza en algún conjunto cerrado $Q(\alpha)$. Sabemos que $Q^{\subseteq}Q(\infty)$ ya que cada conjunto cerrado $Q(\alpha)$ contiene a Q. Más adelante nos cuestionaremos si podemos encontrar condiciones que hagan que la diferencia entre Q^- y $Q(\infty)$ sea grande o pequeña y las consecuencias que esto tiene para un marco y su ensamble de parches.

2.1.2 Estructura de bloques

Sabemos que para todo marco A podemos construir un nuevo marco formado por todos los núcleos en A (el ensamble de A). Por si mismo, NA puede ser un marco difícil de estudiar. En NA pueden existir bloques bastante complicados.

En esta sección veremos que para el caso donde $A = \mathcal{O}S$, analizar los bloques de NA puede resultar algo mucho más agradable.

Consideremos nuestro marco A y $S = \mathrm{pt}(A)$. Sea F un filtro abierto en A y Q el compacto saturado correspondiente para F. Así

$$a \in F \Leftrightarrow Q \subseteq U(a)$$

para $a \in A$. Por el Lema 2.1.9 tenemos que F es admisible y por lo tanto obtenemos un bloque en NA que tiene un menor elemento (v_F). Veremos que también tenemos otros elementos especiales.

Consideremos el cociente de A dado por el conjunto de puntos fijos de v_F, de decir, $A_F = A_{v_F}$. Este tiene un espacio de puntos fácil de localizar.

Lema 2.1.17 *Consideremos un marco A y los conjuntos F, Q como se mencionan antes. Entonces* $Q = \mathrm{pt}(A_F)$.

Demostración.

$\Rightarrow$) Recordemos que los puntos de A_F son aquellos $p \in S$ tales que $v_F(p) = p$. Además, si $p \in F$ entonces $v_F(p) = 1$ y por lo tanto $p \notin \mathrm{pt}(A_F)$. De esta manera si $p \in \mathrm{pt}(A_F)$, entonces $p \in S \setminus F = Q$, es decir, $\mathrm{pt}(A_F) \subseteq Q$.

$\Leftarrow$) Consideremos cualquier $p \in Q$. Para cada $x \in F$ sea $y = (x \succ p)$ y así $y \wedge x \leq p$. Notemos que si $p \notin F$, entonces

$$(x \succ p) \neq 1 \Rightarrow x \nleq p$$

y como $p \in S$ se debe cumplir que $y \leq p$. Como $y = (x \succ p)$ es arbitrario, se debe cumplir que

$$f(p) = \bigvee\{v_x(p) \mid x \in F\} \leq p,$$

y además $p \leq f(p)$. De aquí que $f_F(p) = p$, es decir, $V_F(p) = p$. Por lo tanto $p \in \mathrm{pt}(A_F)$.

□

Lo anterior nos proporciona el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathcal{O}S \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_F & \longrightarrow & \mathcal{O}Q \end{array}$$

el cual será extendido.

Cada subconjunto $T \subseteq S$, visto como subespacio nos da el siguiente cociente.

$$A \to \mathcal{O}S \to \mathcal{O}T$$

En el cual se puede comprobar que $a \mapsto \bigwedge\{p \in T \mid a \leq p\}$ es el kernel del cociente anterior. En particular, el conjunto $Q \subseteq S$ da un ejemplo de esto.

Por el Lema 1.4.1, el conjunto Q tiene un conjunto de generadores mínimos $M \subseteq Q$, es decir, el conjunto de elementos máximos de $A \setminus F$. Vemos a M como un subespacio de Q para obtener el siguiente cociente

$$A \to A_F \to \mathcal{O}Q \to \mathcal{O}M$$

con kernel dado por $W_F(a) = \bigwedge\{p \in m \mid a \leq o\}$, donde $a \in A$.

Lema 2.1.18 *El núcleo W_F es el núcleo máximo que admite a F.*

Demostración. Sea $j \in NA$ tal que $\nabla(j) = F$. Cada punto $m \in M$ es fijado por j ya que m es un punto máximo y no está en F. Sabemos que $j(a) = 1 \Leftrightarrow a \in F$, en otras palabras

$$j(a) = 1 \Leftrightarrow (\forall\, m \in M)[j(a) \nleq m]$$

(ver Lema 1.4.1). Como $j \sim W_F$, entonces $j(a) = (W_F(a) = 1$ para $a \in F$. Supongamos que $a \notin F$, entonces $a \leq m$ para algún $m \in M$ y $j(a) \leq j(m) = m$, de modo que

$$j(a) \leq \bigwedge\{p \in M \mid a \leq p\} = W_F(a).$$

Por lo tanto $j \leq W_F$. □

Cada bloque en NA tiene un menor elemento (el núcleo ajustado correspondiente). Tal bloque no necesita tener mayor elemento, o incluso elementos máximos. Sin embargo, para un filtro abierto F el bloque correspondiente $[V_F, W_F]$ es un intervalo acotado en NA. Esto nos da un intervalo acotado $I_F = [V_F(0), W_F(0)]$ de A. La estructura de este bloque está íntimamente relacionada con las propiedades del parche de A (y otras propiedades).

Para cada $a \in I_F$ sea $j_a(V_F \vee u_a$ para producir un núcleo $V_F \leq j_a \leq W_F$. Además, $a \leq b$ si y solo si $j_a \leq j_b$ para cada $a, b \in I_F$. La implicación $j_a \leq j \Rightarrow a \leq b$ se cumple debido a que $I_F \subseteq A_F$ y por lo tanto $a = j_a(0)$ para cada $a \in I_F$. Esto nos da un encaje de marcos

$$\begin{aligned} I_F &\to [V_F, W_F] \\ a &\mapsto j_a \end{aligned}$$

y por lo tanto I_F nos da una indicación de la complejidad del bloque.

Notemos que puede suceder que $V_F = W_F$ en cuyo caso I_F es solo un punto. Sin embargo, se producirá un ejemplo donde I_F es bastante complejo. De hecho se produce un ejemplo espacial.

Supongamos que A es espacial, de modo que $A = \mathcal{O}S$ para algún espacio sobrio S. Para $Q \in \mathcal{Q}S$ tenemos cocientes

$$\mathcal{O}S \to (\mathcal{O}S)_F \to \mathcal{O}Q \to \mathcal{O}M$$

que determinan el menor y el mayor elemento del bloque (V_F y W_F, respectivamente) y un elemento intermedio. En este caso tenemos que $W_F = [M']$ el núcleo espacialmente inducido. De manera similar, $[Q']$ es el elemento intermedio del bloque. Así tenemos un intervalo $V_F \leq [Q'] \leq W_F$ de $N\mathcal{O}S$ con un elemento espacial $[Q']$. Parece que, en general, $[Q']$ puede estar en cualquier extremo o en algún punto intermedio. La observación de que $V_F \leq [Q']$ y que estos dos núcleos son compañeros es una observación importante a lo que se verá más adelante.

Si S es T_1, entonces $Q = M$, pero esto no asegura que el intervalo sea simple.

Ejemplo 2.1.19 *Hay un espacio S que es T_1, sobrio y estrechamente empaquetado. Este espacio tiene un punto especial $*$ que controla gran parte de la estructura. El conjunto $\mathbb{S} = S \setminus \{*\}$ es un árbol grande con varios subárboles grandes. Sea F el filtro sobre $\mathcal{O}S$ dado por $Q = \{*\}$, que es un filtro de vecindad abierto del punto. Entonces cada subárbol grande produce un elemento de I_F.*

Este ejemplo se tratará más adelante, donde se dará el significado preciso de “grande”.

2.2 El marco de parches

En esta sección veremos la construcción libre de puntos del espacio de parches ${}^pS$. Daremos el análogo de la pbase introducida en la Sección 1.3.4, pero para $a \in \mathrm{Frm}$. A dicha construcción la llamaremos *el marco de parches*. Dicho marco resultará ser un submarco del ensamble NA.

Recordemos que para un espacio S, el espacio se construye a través de los abiertos de S ($\mathcal{O}S$) y los conjuntos compactos saturados de S ($\mathcal{Q}S$). Con estos dimos

$$\text{pbase} = \{U \cap Q' \mid U \in \mathcal{O}S, Q \in \mathcal{Q}S\}$$

para obtener una familia $\cap-$cerrada de subconjuntos de S. Esta es la base para una nueva topología en S y $\mathcal{O}^p S$ es el conjunto de uniones de todas las subfamilias de la pbase. Una construcción similar es la que nos permite obtener el marco de parches.

Consideremos $A \in \mathrm{Frm}$ un marco arbitrario y NA su ensamble. Sabemos que dentro de NA podemos considerar las familias

$$\{u_a \mid a \in A\} \quad \text{y} \quad \{v_F \mid F \in A^\wedge\}.$$

La primera es una copia isomorfa de A en NA, lo cual es un análogo de $\mathcal{O}S$. Por el Teorema 1.4.5, la segunda es un análogo de $\mathcal{Q}S$.

Definición 2.2.1 *Para $A \in \mathrm{Frm}$ definimos*

$$\textit{Pbase} = \{u_a \wedge v_F \mid a \in A, F \in A^\wedge\}$$

la cual es una familia $\wedge-$cerrada de elementos en NA.

Notemos que si consideramos $F = A$ y $a = 1$, podemos probar que la Pbase contiene cada u_a, para cada $a \in A$, y cada v_F para $F^{\in} A^\wedge$.

Definición 2.2.2 *Para cada $A \in \mathrm{Frm}$, definimos el* marco de parches*, denotado por PA por el conjunto supremos de todas las subfamilias de la Pbase donde estos supremos son calculados en NA.*

No es complicado verificar que, efectivamente, PA es un marco. De esta manera obtenemos lo siguiente.

Teorema 2.2.3 *Para $A \in \mathrm{Frm}$, PA es un submarco de NA, el cual incluye la imagen canónica de A.*

El resultado anterior nos proporciona el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\iota"'] \arrow[rr, bend left, "\eta_A"] & PA \arrow[r, "i"'] & NA \end{tikzcd}$$

donde ι es un encaje e i es una inclusión. Está construcción nos lleva a cuestionarnos lo siguiente:

P1) Dentro de la relación $A \to NA$, ¿dónde puede ocurrir PA?

P2) ¿Puede $A \to PA$ ser un isomorfismo de manera no trivial?

P3) ¿Puede ocurrir $PA = NA$ de una manera no trivial?

P4) ¿Cuál es la relación, si la hay, entre la construcción sin puntos y la construcción sensible a puntos?

P5) ¿Qué es $\mathrm{pt}(PA)$? ¿Coinciden con ${}^{p}\mathrm{pt}A$?

El siguiente resultado da una manera de responder P2). Como veremos más adelante, existen otras manera de obtener $A \cong PA$.

Teorema 2.2.4 *Para A un marco regular y $j \in NA$ un núcleo tal que $\nabla(j) \in A^{\wedge}$. Se cumple que $j = u_d$, donde $d = j(0)$.*

Demostración. Por hipótesis, A es un marco regular, en consecuencia, A es ajustado. De esta manera, cada bloque de admisibilidad está compuesto por un único elemento. Así, basta con probar que j y u_d tienen el mismo filtro de admisibilidad, y por lo tanto, concluir que $j = u_d$.

Como $d = j(0)$, se cumple que $u_d \leq j$ y así $\nabla(u_d) \subseteq \nabla(j)$.

Para la otra contención debemos probar que para $x \in A$ y $j(x) = 1$, entonces $u_d(x) = d \vee x = 1$. Por la regularidad se cumple que

$$x = \bigvee\{y \in A \mid (\exists z)[z \wedge y = 0 \text{ y } z \vee x = 1]\},$$

además, este es un supremo dirigido. Al ser $\nabla(j)$ un filtro abierto se debe cumplir que $y' \in \nabla(j)$ para algún $y' \in \{y \in A \mid (\exists z)[z \wedge y = 0 \text{ y } z \vee x = 1]\}$., es decir,

$$j(y') = 1, \quad z \wedge y' = 0, \quad z \vee x = 1$$

para algunos $y', z \in A$. De esta manera $d \vee x = j(z) \vee z \geq z \vee x = 1$, es decir $\nabla(j) \subseteq \nabla(u_d)$.

Por lo tanto $\nabla(j) = \nabla(u_d)$. $\square$

Sabemos que $A \cong NA$ ocurre cuando A es booleano (lo cual provocaría que $A \cong PA$, lamentablemente que A sea booleano es una condición bastante fuerte). El Teorema 2.2.4, de manera indirecta nos dice que, bajo las hipótesis convenientes, la regularidad implica que $A \cong PA$, pues solo nos restringimos a algunos $j \in NA$.

2.2.1 ¿Es $P(\_)$ un funtor?

En la subsección 1.3.5 se discuten las propiedades funtoriales de la construcción de parches sensible a puntos. Allí se menciona que una función continua $\phi\colon T \to S$ es parche continua si la imagen inversa ϕ^{-1} envía conjuntos compactos saturados $Q \in \mathcal{Q}S$ a conjuntos compactos saturados $\phi^{-1}(Q) \in \mathcal{Q}T$ (ver Definición 1.3.36). La restricción de estás imágenes inversas producen un morfismo de marcos ϕ^* entre las topologías y estos tienen adjunto derecho ϕ_*, es decir,

$$\mathcal{O}S \underset{\phi_*}{\overset{\phi^*}{\rightleftarrows}} \mathcal{O}T$$

Por el Lema 1.3.38, al ser ϕ_* una función Scott-continua, tenemos que ϕ^* es parche continua. También, por la funtorialidad de N, tenemos que para cada morfismo de marcos $f\colon A \to B$, Nf resulta ser un morfismo entre los ensambles. De esta manera obtenemos el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & PA & \longrightarrow & NA \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle Nf} \\ B & \longrightarrow & PB & \longrightarrow & NB \end{array}$$

El objetivo de esta subsección es obtener un morfismo $Pf\colon PA \to PB$ entre los marcos de parches. Para que esto sea posible, necesitamos imponer algunas condiciones adicionales sobre f.

Para un filtro F en A, la imagen $f(F)$ no necesariamente es un filtro en B, sino es la clausura de la sección superior $f(F) = \uparrow f(F)$. Sin embargo, cunado $F \in A^\wedge$ no necesita serlo.

Ejemplo 2.2.5 *Consideremos el intervalo real $B = [0,1]$ como un marco linealmente ordenado y sea $0 < * < 1$ (por ejemplo, $* = 1/2$), tomando $A = \{0, *, 1\}$ como un submarco y $f\colon A \to B$ la inclusión. Notemos que el filtro $F = \{*, 1\}$ es completamente primo, y por lo tanto, abierto. Además,la imagen $f(F) = [*, 1]$ no es abierto en B, pues*

$$f(F) \ni \bigvee [0, *) \quad y \quad [0, *) \cap f(F) = \emptyset.$$

En espacios, una función continua no necesariamente debe respetar conjuntos compactos saturados. Necesitamos imponer una condición para lograr la funtorialidad. El ejemplo anterior nos dice que un morfismo de marcos no necesariamente debe respetar filtros abiertos, de manera similar al caso espacial, necesitamos imponer condiciones adicionales.

Definición 2.2.6 *Un morfismo de marcos $f\colon A \to B$ decimos que* convierte filtros abiertos *si para cada $F \in A^\wedge$, la imagen $f(F) \in B^\wedge$.*

La definición anterior proporciona la condición que queremos, pues recordemos que

$$N(u_a) = u_{f(a)}, \quad N(v_a) = v_{f(a)}, \quad N(v_F) = N(v_{f(F)}$$

para cada $a \in A$ y $F \in A^\wedge$. En particular, si f convierte filtros abiertos se cumple que $F \in A^\wedge$ implica $f(F) \in B^\wedge$, por definición. En consecuencia, si $j \in \text{Pbase}(A)$ implica que $Nf(j) \in \text{Pbase}B$.

Lema 2.2.7 *Sea $f\colon a \to B$ tal que convierte filtros abiertos. Entonces $j \in PA$ implica que $Nf(j) \in PB$ y por lo tanto, P actúa funtorialmente sobre esta clase de flechas.*

En otras palabras, cuando f convierte filtros abierto, podemos definir Pf como la restricción de Nf a PA. Esto nos da el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & PA & \longrightarrow & NA \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle Nf_{|PA}} & & \downarrow{\scriptstyle Nf} \\ B & \longrightarrow & PB & \longrightarrow & NB \end{array}$$

y así P pasa a través de las composiciones.

Requerimos descubrir cual es la relación que existe entre ambas construcciones de parches. En el siguiente resultado se considera un morfismo de marcos $f\colon A \to B$ y su adjunto derecho f_*. También, consideramos una función continua $\phi\colon T \to S$ y el morfismo de marcos inducido por sus topologías $\phi^*\colon \mathcal{O}S \to \mathcal{O}T$ junto con su adjunto derecho.

Teorema 2.2.8 *1. Para un morfimos de marcos como se menciona antes, si el adjunto derecho f_* es Scott-continuo, entonces f^* convierte filtros abiertos.*

2. Para una función continua ϕ como se menciona antes, el adjunto derecho ϕ_* es Scott-continuo si y solo si ϕ^* convierte filtros abiertos.

Demostración.

1. Sabemos que $f^*(a) \leq b \Leftrightarrow a \leq f_*(b)$ para $a \in A$ y $b \in B$. Consideremos un filtro abierto $F \in A^\wedge$ y sea $Y \subseteq B$ un subconjunto dirigido con $\bigvee Y \in f^*(F)$. De esta manera $f^*(a) \leq \bigvee Y$ para algún $a \in F$. Luego $a \leq f_*(\bigvee Y) = \bigvee f_*(\bigvee Y)$, lo anterior se debe a que f_* es Scott-continua.

   Por lo tanto, como $f_*(Y)$ es dirigido en A se cumple que $a \leq f_*(y)$ para algún $y \in Y$. De esta manera $f^*(a) \leq y$ y $Y \cap f(F) \neq \emptyset$.

2. Supongamos primero que ϕ_* es Scott-continua, de esta manera, por $a)$ se cumple que ϕ^* convierte filtros abiertos.

   Recíprocamente, supongamos que ϕ^* convierte filtros abiertos. Consideremos conjunto dirigido $\mathcal{W} \subseteq \mathcal{O}T$ y sea $V = \phi_*(\bigcup \mathcal{W})$. Debemos mostrar $V \subseteq \bigcup \phi_*(\mathcal{W})$ para obtener la Scott-continuidad.

   Consideremos cualquier $s \in V$. El filtros de vecindades F de s está dado por $U \in F \Leftrightarrow s \in U$, donde $U \in \mathcal{O}S$. Este filtro es abierto y así $\phi(F)$ también lo es, pero en $\mathcal{O}T$. Luego

   $$W \in \phi(F) \Leftrightarrow \phi_*(W) \in F \Leftrightarrow s \in \phi_*(W)$$

   para cada $W \in \mathcal{O}T$. En particular, tenemos $\bigcup \mathcal{W} \in \phi(F)$ y por lo tanto $\exists W \in \mathcal{W}$ con $W \in \phi F$. Así $s \in \phi_*(W) \subseteq \bigcup \phi_(W)$ como requeríamos.

□

Consideremos una función continua como antes y supongamos que los espacios S y T son sobrios. Tenemos un morfismo de marcos asociado $\phi^* \mapsto \phi_*$ entre las topologías. Supongamos que el adjunto derecho ϕ_* es Scott-continuo. De esta manera ϕ convierte conjuntos compactos saturados, y por lo tanto es parche continuo. También, por el Teorema 2.2.8 el morfismo ϕ^* convierte filtros abiertos. Con esto se obtiene un par de morfismos de marcos

$$P(\phi^*)\colon P\mathcal{O}S \to P\mathcal{O}T \quad \text{y} \quad \phi^*\colon \mathcal{O}^P S \to \mathcal{O}^P T$$

relacionando las construcciones libre de puntos y sensible a puntos. Más adelante se verá de manera más amplia esta conexión.

Teorema 2.2.9 *Sea $A \in \mathrm{Frm}$ y $S = \mathrm{pt}A$. La reflexión espacial $U_A\colon A \to \mathcal{O}S$ convierte filtros abiertos, pero su adjunto derecho $U_A)_*$ no necesariamente es un morfismo continuo.*

Demostración. Sea $F \in A^\wedge$ y $\nabla U_A(F)$. Mostraremos que $\nabla \in \mathcal{O}S^\wedge$. Consideremos cualquier familia dirigida $\mathcal{U}$ en $\mathcal{O}S$ tal que $\bigcup \mathcal{U} \in \nabla$. Debemos verificar que $\mathcal{U} \cap \nabla \neq \emptyset$.

Consideremos $X \subseteq A$ dado por $x \in X \Leftrightarrow U(x) \in \mathcal{U}$ y así, al ser $U(\_)$ suprayectivo obtenemos $\mathcal{U} = \{U(x) \mid x \in X\}$ y X indexa a $\mathcal{U}$ (posiblemente con alguna repetición). Vemos que $X \cap F \neq \emptyset$ y por lo tanto $\mathcal{U} \cap \nabla \neq \emptyset$.

Sea sp el kernel de $U(\_)$, entonces

$$y \leq sp(x) \Leftrightarrow U(y) \subseteq U(x) \quad \text{y} \quad U(x) = U(sp(x))$$

para todo $x, y \in A$. En particular $x \in X \Leftrightarrow sp(x) \in X$ para $x \in A$. Usando esto, verificamos primero que X es dirigido. Sean $x, y \in A$, entonces $U(x), U(y) \in \mathcal{U}$ y por lo tanto, al ser $\mathcal{U}$ dirigida, tenemos que $U(x), U(y) \subseteq U(z) = U(sp(z)$ para algún $z \in X$. Así $sp(z) \in X$ y por la definición de sp tenemos que si $x, y \leq sp(z)$, entonces $x \vee y \leq sp(z)$ produciendo la cota superior en X requerida para concluir que X es dirigido.

Luego, sea $a = \bigvee X$, entonces

$$U(a) = \bigcup\{U(x) \mid x \in X\} = \bigcup \mathcal{U},$$

de modo que $U(a) \in \nabla$, así $U(a) = U(b)$ para algún $b \in F$.

Ahora $sp(a) = s(b) \in F$ y como $U(sp(x)) = U(x)$ tenemos que $sp(x) \in X \Leftrightarrow x \in X$. Así $\bigvee X = a \in F$ y al ser F un filtro abierto se cumple que $x \in X \cap F$. Por lo tanto $U(x) \in \mathcal{U} \cap \nabla$.

En el siguiente ejemplo se proporcionara un marco A donde el adjunto derecho de U_A no es continuo. $\square$

Necesitamos un marco no trivial sin puntos. Existen algunos marcos complicados de este tipo, pero aquí está una manera simple de producir uno.

Lema 2.2.10 *Sea S cualquier espacio sobrio, T_1, sin puntos aislados. Sea $(\mathcal{O}S)_{\neg\neg}$ el álgebra booleana de conjuntos abiertos de S (el cociente del marco $\mathcal{O}S$ bajo los núcleos dados por la doble negación). El marco $(\mathcal{O}S)_{\neg\neg}$ no tiene puntos.*

Demostración. Veremos los puntos de $(\mathcal{O}S)_{\neg\neg}$ como caracteres, es decir,

$$(\mathcal{O}S)_{\neg\neg} \xrightarrow{\ p\ } \mathbf{2}$$

y supongamos que existe tal punto (caracter) p. entonces podemos llevarlo de vuelta a un punto de $\mathcal{O}S$ por medio de

$$\mathcal{O}S \xrightarrow{\neg\neg} (\mathcal{O}S)_{\neg\neg} \xrightarrow{\ p\ } \mathbf{2}$$

Por lo tanto, para algún $p \in S$ se tiene que $\overline{p}' \in \mathrm{pt}(\mathcal{O}S$ y así $\neg\neg(\overline{p}') = \overline{\{(p^\circ)\}}'$ es un punto de $(\mathcal{O}S)_{\neg\neg}$, pero $\{p\}^\circ = \emptyset$ al no tener S puntos aislados y así $\neg\neg(\overline{p}' = S$ y S no es irreducible en $(\mathcal{O}S)_{\neg\neg}$. $\square$

Para el siguiente ejemplo se necesita un marco no trivial sin puntos. Para conseguir esto, aplicamos el lema anterior al espacio $S = \mathbb{R}$ con la topología métrica.

Ejemplo 2.2.11 *Sea B un marco no trivial sin puntos. Agregamos una copia de $\mathbb{N}$ debajo de B, así tenemos una cola X que consta de ω elementos. Lo anterior forma un marco que denotamos por A.*

Afirmación: *Para el marco A definido antes, U_A no tiene adjunto derecho continuo.*

Para mostrar esto, sea sp el kernel del morfismo U_A. Notemos que $U(x) \subseteq U(a) \Leftrightarrow x \leq sp(a)$ para $x, a \in A$. El morfismo sp lleva a cada elemento de A al ínfimo (en A) de los puntos por encima de el.

Supongamos, por contradicción, que U tiene adjunto derecho continuo. Entonce, su kernel sp es continuo (ya que sp es la composición de U con su adjunto derecho). En otras palabras $sp(\bigvee X) = \bigvee sp(X)$ para cada subconjunto dirigido X de A. De esta manera, consideremos la cola X de A, entonces $\bigvee X = b$, donde b es el menor elemento de B. Así, $sp(\bigvee X) = sp(b) = 1$, pues no hay puntos en A encima de b. Pero cada elemento de X es un punto de A, por lo tanto $\bigvee sp(X) = \bigvee X = b$ lo cual es una contradicción.

El Teorema 2.2.9 tiene un lado positivo: nos permite llegar a U_A con el funtor P y así obtener un morfismo

$$PA \xrightarrow{P(U_A)} P\mathcal{O}S$$

entre el marco de parches asociado.

2.2.2 El diagrama completo del marco de parches

Con toda la información recopilada hasta este momento podemos construir el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "U_A"'] & PA \arrow[r, hook] \arrow[d, "P(U_A)"] & NA \arrow[d, "N(U_A)"] \\
\mathcal{O}S \arrow[r] \arrow[dr, hook] & P\mathcal{O}S \arrow[r, hook] & N\mathcal{O}S \arrow[d, "\sigma_S"] \\
& \mathcal{O}^P S \arrow[r, hook] & \mathcal{O}^f S
\end{tikzcd}$$

El rectángulo superior de este diagrama se presenta en el Lema 2.2.7. La sección inferior

$$\mathcal{O}S \hookrightarrow \mathcal{O}^P S \hookrightarrow \mathcal{O}^f S$$

es la relación que tiene una topología con las topologías de parches y Skulla. El morfismo $\sigma_S \colon N\mathcal{O}S \to \wr^f S$ es el morfismo del espacio de puntos del ensamble a la topología de su espacio de puntos (pt$N\mathcal{O}S = \mathcal{O}^f S$.

La pregunta natural que surge es si existe un morfismo entre $P\mathcal{O}S$ y $\mathcal{O}^P S$ que haga que las celdas resultantes conmuten. La restricción de σ_S a $P\mathcal{O}S$ es el morfismo que buscamos.

Lema 2.2.12 *Sea S un espacio con topología $\mathcal{O}S$. Para cada filtro F en $\mathcal{O}S$ tenemos Q con $F = \nabla(Q)$ y $\sigma(v_F) = Q'$ donde Q es el correspondiente conjunto compacto saturado.*

Demostración. Sabemos que v_F y $[Q']$ son compañeros bajo la relación de admisibilidad, es decir, admiten los mismos elementos. Al ser v_F el mínimo elemento del bloque, se cumple que $v_F \leq [Q']$ y así $\sigma(v_F) \subseteq \sigma([Q']) = Q'$. pues $Q \in \mathcal{O}^f S$.

Para verificar la otra contención consideremos $p \in Q'$. Notemos que $\overline{p} \subseteq Q'$ se cumple al ser Q saturado, entonces $Q \subseteq \overline{p}'$ y $\overline{p}' \in F$. Por lo tanto $p \in v_F(\overline{p}') = 1$ y así, por el Lema 1.3.42, $p \in \sigma(v_F)$. □

Lema 2.2.13 *Sea S un espacio con topología $\mathcal{O}S$. La restricción del morfismo de marcos σ a $P\mathcal{O}S$ proporciona un morfismo de marcos $\pi\colon PA \to \mathcal{P}^P S$. Además, el morfismo es suprayectivo.*

Demostración. El marco $P\mathcal{O}S$ es generado por núcleos de la forma $[U] \wedge v_F$ donde $U \in \mathcal{O}S$ y $F \in \mathcal{O}S^\wedge$. Tenemos que $\sigma([U]) = U$, pues U es abierto, y $F = \nabla(Q)$ para algún $Q \in \mathcal{Q}S$ de modo que $\sigma(v_F) = Q'$ por el Lema 2.2.12. Por lo tanto $\sigma([U] \wedge v_F) = U \cap Q'$ y estos conjuntos forman una base para $\mathcal{O}^P S$. □

Lo anterior nos proporciona el diagrama completo del marco de parches.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "U_A"'] & PA \arrow[r, hook] \arrow[d, "P(U_A)"] & NA \arrow[d, "N(U_A)"] \\
\mathcal{O}S \arrow[r] \arrow[dr] & P\mathcal{O}S \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi_S"] & N\mathcal{O}S \arrow[d, "\sigma_S"] \\
& \mathcal{O}^P S \arrow[r, hook] & \mathcal{O}^f S
\end{tikzcd}$$

El morfismo de marco π no necesariamente debe ser un isomorfismo aunque parece serlo en la mayoría de ejemplos naturales. Sin embargo, π no es inyectivo para algunos de los ejemplos que se veran más adelante, **de hecho, si S es empaquetado, entonces ${}^pS = P$ así**

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}S \arrow[r, shift left] & P\mathcal{O}S \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}$$

se componen para dar la identidad en $\mathcal{O}S$. pero π no necesita ser un isomorfismo.

2.3 Jerarquía de propiedades de separación

Como hemos visto en este capítulo, existen dos construcciones que tratan de imitar una propiedad similar a la que cumplen los espacios T_2, la construcción del espacio de parches y la del marco de parches (una sensible a puntos y la otra libre de puntos). La primera sirve para caracterizar a los espacios empaquetados. La segunda, como mostraremos más adelante, caracteriza a los espacios cuya topología cumple ser "arreglada". De manera similar a los espacios empaquetados, los marcos arreglados produce una propiedad de separación entre los axiomas T_1 y T_2.

2.3.1 Marco parche trivial

Recordemos que el espacio de parches produce una construcción en la cual todo conjunto compacto (en particular, saturado), resulta ser cerrado. Cuando comenzamos a trabajar con un espacio que es empaquetado, dicho construcción no hace nada. El objetivo principal de la construcción del marco de parches es mimetizar el comportamiento del espacio de parches, pero brindando una variante libre de puntos. La pregunta que podría surgir al plantearnos lo anterior es, ¿el marco de parche cumple con las expectativas?

Sabemos que para $A \in \mathrm{Frm}$ podemos asignar de manera canónica a cada elemento $a \in A$ un elemento $u_a \in PA$. ¿Existe la posibilidad de que este sea un isomorfismo? Para ir avanzando en la respuesta de esto, se da la siguiente definición.

Definición 2.3.1 *Para $A \in \mathrm{Frm}$ decimos que este es* parche trivial *si el encaje $\iota\colon A \to PA$ es un isomorfismo.*

La teoría de marcos nos dice que un marco A es isomorfo a su ensamble NA siempre que A es booleano. Lo anterior podría darnos una respuesta de cuando ocurre la trivialidad del parche, pero esto se puede mejorar de muy buena manera. Para hacer esto lo ideal sería dar respuesta a la siguiente pregunta: **¿Bajo que circunstancias es un marco A parche trivial?**

La prueba del Teorema 2.2.4 da una idea de como con algunas condiciones particulares, algunos $j \in NA$ cumplen que $j = u_d$ donde $d = j(0)$. Para restringirnos únicamente al marco PA debemos observar que para algún $u \in A$ y cualquier $F \in A^\wedge$ se cumple que $u_d = v_F$. Lo anterior daría una condición necesaria y suficiente para obtener la trivialidad del parche. Antes de seguir analizando esta caracterización, tratemos de entender un poco sobre el comportamiento de ambas construcciones de parches.

Para un espacio S que es sobrio y empaquetado tenemos que S es T_1. Además, por la relación

$$\mathcal{O}S \underset{\pi_S}{\overset{\iota}{\rightleftarrows}} P\mathcal{O}S$$

donde la composición $\pi_S \circ \iota$ da el morfismo identidad en $\mathcal{O}S$. Notemos que si $\iota \circ \pi_S$ resultara ser la identidad en $P\mathcal{O}S$ podríamos concluir que $\mathcal{O}S$ es parche trivial.

Ejemplo 2.3.2 *Existen espacios S que son sobrios y empaquetados pero donde la topología $\mathcal{O}S$ no es parche trivial. Se verá una colección de estos ejemplos más adelante.*

El ejemplo anterior nos menciona parte de la relación que existe entre la noción parche trivial y algunos de los axiomas clásicos de separación. En otras palabras

$$T_1 \nRightarrow \text{ Parche trivial} \quad \text{y} \quad T_3 \Rightarrow \text{ Parche trivial.}$$

El siguiente lema enriquece aun más la información espacial.

Lema 2.3.3 *Consideremos $S \in \mathrm{Top}$ si:*

a) *S es T_2 o*

b) *S es T_0, ajustado y empaquetado (en otras palabras, T_1 y sobrio),*

entonces $\mathcal{O}S$ es parche trivial.

Demostración.

a) Se verá más adelante (Teorema 2.3.16).

b) Consideremos cualquier v_F para $F \in A^\wedge$. Por el Teorema 1.4.5, F está determinado por algún $Q \in \mathcal{Q}S$. Además, también sabemos que los núcleos v_F y $[Q']$ producen el mismo filtro de admisibilidad y al ser ajustado, se cumple que $v_F = [Q']$. Luego, al ser T_1, se cumple que $Q = M$, es decir $[Q'] = [M'] = w_F$, por lo tanto, el intervalo de admisibilidad colapsa.

□

Observemos que la parte $b)$ de la prueba anterior nos da un criterio un poco distinto para verificar la trivialidad del parche (cuando el marco en cuestión es la topología de un espacio). En este caso, basto verificar que los intervalos de admisibilidad son solo un punto, siempre que $F \in \mathcal{O}S^\wedge$.

Ambos ejemplos proporcionan una condición necesaria, pero no suficiente. Existen espacios T_2 y espacios T_1+sobrios que no son parche trivial.

Ejemplo 2.3.4 *a) La topología subregular sobre los números reales que se discutirá más adelante **(Citar ejemplo cuando ya sea escrito)** es un espacio T_2 (por lo tanto, empaquetado y sobrio), el cual no es ajustado. En particular, a condición*

$$T_0 + \textit{ Ajustado } + \textit{ empaquetado}$$

no es necesaria para lograr una topología parche trivial.

b) La topología máxima compacta es un es un espacio T_0, empaquetado, ajustado y compacto pero no es T_2. En particular, T_2 no es necesario para asegurar un topología parche trivial.

2.3.2 Marcos arreglados

Si $F \in A^\wedge$, podemos asignarle un núcleo $v_F = \bigvee\{v_a \mid a \in F\}$ y, a manera de notación, consideramos sel supremo puntual $f = \dot{\bigvee}\{v_a \mid a \in F\}$ el cual nos permite construir una sucesión

$$d(0) = \mathrm{id}, \quad d(\alpha+1) = f(d(\alpha)), \quad d(\lambda) = \bigvee\{d(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}$$

para cada ordinal α y ordinal límite λ. Además, verificamos que esta se estabiliza en algún elemento $d = d(\infty) = v_F(0)$ para algún ordinal ∞.

Al principio de esta sección mencionamos que una condición que asegura la trivialidad del parche es que $u_d = v_F$ para algún $d \in A$ y $F \in A^\wedge$.

En general, se cumple que $u_d \leq v_F$. Por lo tanto, solo ocupamos ver la otra desigualdad y esta ocurre siempre que para $x \in F$, $u_d(x) = 1$.

Definición 2.3.5 *Sean $A \in \mathrm{Frm}$ y α un ordinal.*

1. *Un filtro abierto $F \in A^\wedge$ es α*-arreglado *si*

$$x \in F \Rightarrow u_{d(\alpha)}(x) = d(\alpha) \vee x = 1$$

donde $d(\alpha) = f^\alpha(0)$.

2. *El marco A es α-arreglado si para todo $F \in A^\wedge$, F es $\alpha-$arreglado.*

3. *El marco A es arreglado si es α-arreglado para algún ordinal α.*

Notemos que si el marco A es arreglado, su grado de arreglo es el menor ordinal α para el cual se cumple que A es α-arreglado.

Lema 2.3.6 *Un marco es arreglado si y solo si es parche trivial.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Consideremos $A \in \mathrm{Frm}$ y supongamos que A es arreglado. De esta manera para $F \in A^\wedge$ se cumple que si $x \in F \Rightarrow d(\alpha) \vee x = 1$, es decir, $F \subseteq \nabla(u_{d(\alpha)}$, en particular, para el núcleo v_F asociado se cumple que $v_F \leq u_d$. Por lo tanto $v_F = u_d$, es decir, A es parche trivial.

$\Leftarrow$) Supongamos que $A \cong PA$ y consideremos $F \in A^\wedge$ arbitrario. Por la trivialidad del parche se cumple que $v_F = u_d$ para algún $d \in A$. Notemos que lo anterior obliga que para $x \in F$, siempre se debe de cumplir que $d \vee x = 1$, pero esto solo ocurre cuando

$$\begin{aligned} d = \bigvee\{\neg x \mid x \in F\} &= \bigvee\{(x \succ 0) \mid x \in F\} \\ &= \dot{\bigvee}\{v_x(0) \mid x \in F\} \\ &= v_F(0) = d(\infty) \end{aligned}$$

para algún ordinal ∞. Por lo tanto como $F = \nabla(v_F) = \nabla(u_d)$ se debe cumplir que si $x \in F$, entonces $d \vee x = 1$, es decir, A es arreglado (pues F es arbitrario).

$\square$

Notemos que si $F \in A^\wedge$ es α-arreglado, entonces F es β-arreglado para ordinales $\beta \leq \alpha$, pues $\nabla(f(d(\beta))) \subseteq \nabla(f(d(\alpha)))$. De esta manera se obtiene una jerarquía de propiedades

$$\cdots \Rightarrow \alpha\text{-arreglado} \Rightarrow (\alpha - 1)\text{-arreglado} \Rightarrow \cdots 1\text{-arreglado} \Rightarrow 0\text{-arreglado}$$

En el Teorema **Referenciar el Teorema 11.3.7 una vez que ya este escrito** se mostrará que cada una de estas es distinta.

De manera sencilla podemos observar que

$$A \text{ es } 0\text{-arreglado } \Leftrightarrow A = \{*\}.$$

Daremos un poco más de información para cuando A es $1-$arreglado.

Queremos usar la condición de arreglo para el caso en que $A = \mathcal{O}S$.

Lema 2.3.7 *Consideremos S un espacio sobrio, $Q \in \mathcal{Q}S$ y $F = \nabla(Q)$ el filtro abierto correspondiente a Q en $\mathcal{O}S$. Para cada ordinal α, el filtro F es $\alpha-$arreglado si y solo si $Q(\alpha) = Q$.*

Demostración. Por hipótesis $F = \nabla(Q)$ es α-arreglado y por definición esto ocurre si

$$U \in F \Rightarrow (Q(\alpha))' \cup U = S$$

pues $d(\alpha) = (Q(\alpha))'$. Así, si $Q \subseteq U$, entonces $Q(\alpha) \subseteq U$. Por lo tanto $Q(\alpha) \subseteq Q$ y $Q \subseteq Q(\alpha)$, es decir, $Q(\alpha) = Q$ como queríamos. ☐

2.3.3 La jerarquía de la regularidad

La subsección anterior proporciona una jerarquía de propiedades por medio del grado de arreglo. Como veremos ahora, podemos establecer una jerarquía similar, pero en este caso, relacionadas con la regularidad.

Definición 2.3.8 *Consideremos $A \in \mathrm{Frm}$ y α un ordinal. Decimos que A es:*

a) débilmente α-regular si para cada $a, b \in A$ y $F \in A^\wedge$ con $a \nleq b$ y $a \in F$ existen $x, y \in A$ tales que

$$a \vee x = 1, \quad y \leq a, \quad y \nleq b \quad y \quad x \wedge y \leq d(\alpha)$$

se cumple.

b) α-regular si para cada$a, b \in A$ existe $y \in A$ tal que para cada $F \in A^\wedge$ con $a \in F$ existe un elemento $x \in A$ tal que

$$a \vee x = 1, \quad y \leq a, \quad y \nleq b \quad y \quad x \wedge y \leq d(\alpha)$$

se cumple.

Observemos que a) y b) de la definición anterior está en el orden de los cuantificadores. Para el caso de a) tenemos

$$(\forall a)\ (\forall F)\ (\exists y)\ (\exists x)$$

y para b) se cumple que

$$(\forall a)\ (\exists y)\ (\forall F)\ (\exists x).$$

En otras palabras, débilmente α-regular requiere cierta uniformidad en la elección de y.

Al principio, débilmente α-regular parece la más obvia y, de hecho, fue la primera que demostraron. Sin embargo, la segunda se relaciona mejor con algunas de las otras propiedades que implican la regularidad. En particular, podemos dar una versión α-indexada para decir que un elemento a está bastante por debajo de b. Recordemos que podemos caracterizar a los marcos regulares por medio de sus elementos bastante por debajo.

Definición 2.3.9 *Para $a, y \in A$, decimos que y está* bastante α-por debajo de *a (denotado por "$y \leqslant_\alpha a$"), si para cada $F \in A^\wedge$ tal que $a \in F$ existe $x \in A$ tal que*

$$a \vee x = 1, \quad y \leq a, \quad \text{y} \quad x \wedge y \leq d(\alpha)$$

se cumple.

Observemos que $\leqslant_0$ es simplemente la definición de $\leqslant$. De las definiciones de α-regular y bastante α-por debajo vemos que A es α-regular exactamente cuando para cada $a \nleq b$ existe algún $y \leqslant_\alpha a$ y $y \nleq b$ se cumple.

Lema 2.3.10 *Un marco A es α-regular si y solo si para todo $a \in A$*

$$a = \bigvee\{b \in A \mid b \leqslant_\alpha a\}.$$

Demostración. Supongamos que A es α-regular. Consideremos $a \in A$ y $b = \bigvee\{y \in A \mid y \leqslant_\alpha a\}$, entonces $b \leq a$. Si $a \nleq b$, por la definición de la α-regularidad $y \leqslant_\alpha a$ y $y \nleq b$ para algún $y \in A$, lo cual es una contradicción (pues $y \leq b$). Por lo tanto $a \leq b$.

Recíprocamente, supongamos que $a = \bigvee\{y \in A \mid y \leqslant_\alpha a\}$ para todo $a \in A$. Así, si $a \nleq b$, entonces existe $y \in A$ tal que $y \leqslant_\alpha a$ y $y \nleq b$ lo cual implica la α-regularidad. □
La siguiente propiedad de la α-regularidad surgen directamente de la definición.

Lema 2.3.11 *Para cada $A \in \mathrm{Frm}$ y ordinales $\alpha \leq \beta$, las siguiente implicaciones se cumplen:*

1. *α-regular $\Rightarrow$ débilmente α-regular.*
2. *α-regular $\Rightarrow$ β-regular.*
3. *débilmente α-regular $\Rightarrow$ débilmente β-regular.*
4. *0-regular $\Leftrightarrow$ regular.*

De esta manera tenemos una jerarquía en tres propiedades. Además, podemos relacionarlas.

Teorema 2.3.12 *Para cada $A \in \mathrm{Frm}$ y ordinal α las siguientes implicaciones se cumplen*

$$\alpha\text{-arreglado} \Rightarrow \alpha\text{-regular} \Rightarrow \text{débilmente } \alpha\text{-regular} \Rightarrow (\alpha - 1)\text{-regular}.$$

Demostración. Supongamos que A es α-arreglado y consideremos $a, b \in A$ con $a \nleq b$. Sea $y = a$ y supongamos que para $F \in A^\wedge$, $a \in F$. Al ser A α-arreglado, se cumple que $d(\alpha) \vee a = 1$. Tomemos $x = (a \succ d(\alpha))$, entonces

$$x \wedge y = x \wedge a \leq d(\alpha), \quad a \vee x \geq a \vee d(\alpha) = 1 \quad \text{y} \quad y \leq a$$

con $y \nleq b$ y así obtener que A es α-regular.

La segunda implicación se cumple por la definición de ambas propiedades.

Por último, supongamos que A es débilmente α-regular. Sean $F \in A^\wedge$ y $a \in F$. Por hipótesis

$$a = \bigvee \{y \in A \mid y \leq a \text{ y } a \vee (y \succ d(\alpha)) = 1\}$$

donde este supremo resulta ser dirigido. Como $a \in F$, se debe cumplir que existe $y \in F$ tal que $y \leq a$ y $a \vee (y \succ d(\alpha)) = 1$. Luego

$$(y \succ d(\alpha)) = v_y(d(\alpha)) \leq f(d(\alpha)) = d(\alpha + 1).$$

De esta manera $1 = a \vee (y \succ d(\alpha)) \leq a \vee d(\alpha + 1)$. Lo cual implica que $a \vee d(\alpha + 1) = 1$ y por lo tanto A es $(\alpha + 1)$-arreglado. □

La parte c) del Lema 2.3.11 nos proporciona un caso particular del Teorema 2.3.12, pues regular= 0-regular, y este implica $1-$arreglado. Notemos que lo anterior es el Teorema 2.2.4.

2.3.4 Topologías arregladas

Teniendo en cuenta que la topología de un espacio es un marco, resulta natural el preguntarnos, ¿cuál es el comportamiento del grado de arreglo con respecto a las propiedades clásicas de separación?

Lema 2.3.13 *Si el marco A es arreglado, entonces cada punto de A es máximo. Además,* $\mathrm{pt}A$ *es un espacio T_1.*

Demostración. Consideremos $S = \mathrm{pt}A$. Sea $p \in S$ y P el filtro completamente primo correspondiente a p, es decir,

$$y \in P \Leftrightarrow y \nleq p$$

para $y \in A$. Recordemos que si P es completamente primo, entonces este es abierto y primo, de esta manera consideramos v_P el núcleo asociado a P. Luego $d = v_P(0) \leq w_p(0) = p$ y, sin perdida de generalidad, tomemos $a \in A$ tal que $p < a$. Como $a \nleq p$ entonces $a \in P$ y al ser A arreglado, se cumple que

$$a = a \vee p \leq a \vee d = 1,$$

es decir, $a \vee p = 1$ y al ser a arbitrario, se debe cumplir que p es máximo. □

El resultado anterior se puede extender a espacios T_0 generales. Cada espacio T_0 es un subespacio de su reflexión sobria ^+S y ambos espacios tienen topologías isomorfas. Si la topología $\mathcal{O}S$ es arreglada, entonces, por el Lema anterior, su espacio de puntos de ^+S es T_1. Sabemos que si S es un espacio con reflexión sobria que es T_1, entonces el espacio S es T_1 y sobrio.

Lema 2.3.14 *Si un espacio T_0 tiene una topología arreglada, entonces el espacio original es T_1 y sobrio.*

Un espacio T_0 es T_3 precisamente cuando este es 0-regular. ¿Qué pasa con el siguiente nivel de la jerarquía que 0-regular implica? Los siguientes resultados responden lo anterior.

Lema 2.3.15 *Si un marco A es 1-arreglado entonces su espacio de puntos S es T_2.*

Demostración. Consideremos $p \in S$ y su correspondiente filtro completamente primo P. Notemos que

$$d(1) = \bigvee\{v_x(0) \mid x \in P\} = \bigvee\{\neg x \mid x \nleq p\}$$

y al ser A 1-arreglado, si $a \nleq p$, entonces $a \vee d(1) = 1$ para $a \in A$. Consideremos cualquier punto $q \neq p$, necesitamos encontrar vecindades abiertas disjuntas de p y q. Por el Lema 2.3.13 p y q son máximos, entonces se debe cumplir que $q \nleq p$ en A y así $q \in P$. Si $q \in P$ entonces $q \vee d(1) = 1$ y por la maximalidad de q se debe cumplir que $d(1) \nleq q$. De esta manera, existe $x \nleq p$ con $y = \neg x \nleq q$ y por lo tanto tenemos que

$$p \in U_x, \quad q \in U_y, \quad U_x \cap U_y = U_0 = \emptyset,$$

es decir, S es un espacio T_2, pues obtuvimos una separación de abiertos para p y q. $\square$

Teorema 2.3.16 *Un espacio S que es T_0 tiene topología 1-arreglada si y solo si S es T_2.*

Demostración. Cada espacio T_0 es un subespacio de su reflexión sobria. Si tal espacio tiene topología 1-arreglada, entonces por el Lema 2.3.15 es un subespacio de un espacio T_2 y por lo tanto, S es T_2 en si mismo.

Recíprocamente, supongamos que S es T_2 y consideremos $F \in \mathcal{O}S^\wedge$. Al ser S T_2 este es un espacio sobrio. Sea $F = \nabla(Q)$ para el respectivo $Q \in \mathcal{Q}S$ y así $U \in F \Leftrightarrow Q \subseteq U$ para $U\mathcal{O}S$. Notemos que

$$Q(1) = \hat{Q}(Q(0)) = \hat{Q}(S) = \bigcap\{\overline{(S \cap U)} \mid Q \subseteq U\} = \bigcap\{\overline{U} \mid Q \subseteq U\}$$

y $Q \subseteq Q(1)$. Por el Lema 2.3.7, F es 1-arreglado si $Q(1) = Q$, y al ser F arbitrario, tendríamos que $\mathcal{O}S$ es1-arreglado. Por lo tanto, debemos verificar que $Q(1) \subseteq Q$.

Supongamos que $p \notin Q$, entonces existen $U, V \in \mathcal{O}S$ tales que $p \in U$, $Q \subseteq V$ y $U \cap V = \emptyset$. De esta manera $p \notin \overline{V}$, y además, por la forma de $Q(1)$ se cumple que $p \notin Q(1)$, es decir, $Q(1) \subseteq Q$. $\square$

Tenemos dos resultados que relacionan los espacios T_2 con la condición de arreglo. Uno de los objetivos que buscamos con estas notas es explorar de mejor manera la relación que existe entre los marcos arreglados y los diferentes axiomas de separación libre de puntos.

A manera de resumen, si S es al menos un espacio T_0, se tienen las siguientes caracterizaciones.

1. $\mathcal{O}S$ es 0-arreglado $\Leftrightarrow S = \emptyset$.

2. $\mathcal{O}S$ es 0-regular $\Leftrightarrow$ S es T_3.
3. $\mathcal{O}S$ es 4-arreglado $\Leftrightarrow$ S es T_2.
4. $\mathcal{O}S$ es 1-regular $\Leftrightarrow$??
5. $\mathcal{O}S$ es arreglado $\Leftrightarrow$ S es empaquetado y ***apilado***.

2.3.5 Espacios apilados

Las nociones empaquetado y arreglado, hasta cierto punto, podrían parecer similares. Sin embargo, la caracterización $5)$ mencionada antes nos da la sospecha de que no es así. Recordemos parte de la información que tenemos sobre estas.

- Un marco A es parche trivial si y solo si este es arreglado. De esta manera, podemos asociar a un marco un grado de arreglo.
- Un espacio S es empaqueta justamente cuando $S = {}^pS$.

Lema 2.3.17 *Sean $A \in \mathrm{Frm}$ y $S = \mathrm{pt}A$. Si A es arreglado, entonces S es empaquetado.*

Demostración. Consideremos $Q \in \mathcal{Q}S$ y sea $F = \nabla(Q)$ el filtro abierto correspondiente. Por el Teorema 1.3.46 tenemos que $\Sigma_A = \sigma_{\mathcal{O}S} \circ NU_A$, donde

$$\Sigma_A \colon NA \to \mathcal{O}^f S, \quad \sigma_{\mathcal{O}S} \colon N\mathcal{O}S \to \mathcal{O}^f S \quad \text{y} \quad NU_A \colon NA \to N\mathcal{O}S.$$

Luego,

$$\Sigma(v_F) = (\sigma_{\mathcal{O}S} \circ NU_A)(v_F) = \sigma_{\mathcal{O}S}(NU_A(v_F)) = \sigma_{\mathcal{O}S}(v_{U(F)}) = \sigma_{\mathcal{O}S}(v_F).$$

Por el Lema 2.2.12 tenemos que $\sigma_{\mathcal{O}S}(v_F) = Q'$. Por hipótesis, A es arreglado, así este es parche trivial, es decir, $v_F = u_d$ para algún $d \in A$. De aquí que

$$Q' = \Sigma(v_F) = \Sigma(u_d) = U(d),$$

pues Σ es la reflexión espacial de $\mathcal{O}S$, es decir, $Q' \in \mathcal{O}S$. Por lo tanto, $Q \in \mathcal{C}S$ y al ser Q arbitrario, se cumple que todo conjunto compacto saturado es cerrado, es decir, S es empaquetado. ☐

Como un caso particular de lo anterior, si un espacio sobrio tiene una topología arreglada.

Lema 2.3.18 *Si el espacio S es sobrio y empaquetado, entonces el encaje canónico del marco de parches*

$$\mathcal{O}S \underset{\longleftarrow}{\overset{\longrightarrow}{}} P\mathcal{O}S$$

se divide, es decir, tiene un inverso unilateral donde la composición en $\mathcal{O}S$ es la identidad.

El Lema 2.3.17 muestra que si la topología de un espacio sobrio S es arreglada, entonces S es empaquetado. Sin embargo, existen ejemplos que muestran que sobriedad y empaquetado no son suficientes para obtener la condición de arreglo. Para que esto suceda necesitamos algo más de información.

Definición 2.3.19 *Sean S un espacio y $Q \in \mathcal{Q}S$. Decimos que un conjunto cerrado $X \in \mathcal{C}S$ es* Q-irreducible *(denotado por $Q \ltimes X$), si*

$$Q \subseteq U \Rightarrow X \subseteq \overline{(X \cap U}$$

se cumple para cada $U \in \mathcal{O}S$.

¿Qué tiene que ver esta noción de Q-irreductibilidad con la noción estándar de irreductibilidad? Para cada punto x de un espacio, la saturación $\uparrow x$ es compacto. Nos fijamos en $(\uparrow x)$-irreductibilidad.

Lema 2.3.20 *Sean S un espacio y $X \in \mathcal{C}S$ con $X \neq \emptyset$. Entonces X es irreducible exactamente cuando $x \in X$ implica $(\uparrow x) \ltimes X$ para cada $x \in S$.*

Demostración. Supongamos primero que X es irreducible y consideremos cualesquiera $x \in X$ y $U \in \mathcal{O}S$ tal que $x \in U$. Sea $V = \overline{(X \cap U)}'$, entonces debemos probar que $X \subseteq V'$, es decir, $X \cap V = \emptyset$.

Por contradicción, supongamos que $X \cap V \neq \emptyset$. Sabemos que $X \cap U \neq \emptyset$ y por la irreductibilidad se cumpliría que $X \cap U \cap V \neq \emptyset$, pero $X \cap U \cap V \subseteq V \cap V' = \emptyset$ lo cual es una contradicción.

Recíprocamente, supongamos $x \in X \Rightarrow (\uparrow x) \ltimes X$ para cada $x \in S$. Consideremos que $U, V \in \mathcal{O}S$, $x \in X \cap U$ y $y \in X \cap V$. Debemos probar que $X \cap U \cap V \neq \emptyset$. Por hipótesis, $(\uparrow x) \ltimes X$, es decir, $X = \overline{(X \cap U)}$ para cada $U \in \mathcal{O}S$. De esta manera

$$\overline{(X \cap U)} = X = \overline{(X \cap V)},$$

y en particular $y \in \overline{(X \cap U)}$. Pero $y \in V \in \mathcal{O}S$ y por lo tanto $X \cap U \cap V \neq \emptyset$ como requeríamos.
□

Por medio de la relación $\ltimes$ podemos dar las siguientes definiciones.

Definición 2.3.21 *a) Un espacio S es* apilado *si $Q \ltimes X \Rightarrow X \subseteq \overline{Q}$ se cumple para cada $Q \in \mathcal{Q}S$ y $X \in \mathcal{C}S$.*

b) Un espacio S es fuertemente apilado si $Q \ltimes X \Rightarrow X \subseteq \overline{(X \cap Q)}$ se cumple para cada $Q \in \mathcal{Q}S$ y $X \in \mathcal{C}S$.

Como mencionamos antes, la noción de apilamiento se puede relacionar con el grado de arreglo. Antes de ver eso, observemos la relación con las propiedades espaciales.

Lema 2.3.22 *a) Cada espacio T_2 es fuertemente apilado.*

b) Cada espacio fuertemente apilado es apilado.

c) Cada espacio T_1 y sobrio es apilado.

Demostración.

a) Consideremos un espacio S que es T_2 y supongamos que $Q \ltimes X$ para $Q \in \mathcal{Q}S$ y $X \in \mathcal{C}S$. Es suficiente mostrar que $X \subseteq Q$.

Por contradicción, supongamos que $X \nsubseteq Q$. De esta manera existe $p \in X \setminus Q$ y al ser S un espacio T_2, existen $U, V \in \mathcal{O}S$ tales que $Q \subseteq U$, $p \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. Al cumplirse $Q \ltimes X$, entonces $X \subseteq \overline{(X \cap U)} \subseteq \overline{U} \subseteq V'$ y por lo tanto $p \in V \cap X \subseteq V \cap V' = \emptyset$, lo cual es una contradicción.

b) Se da por definición.

c) Consideremos un espacio S tal que es T_1 y apilado. Consideremos cualquier $X \in \mathcal{C}S$ irreducible y $x \in X$. Mostraremos que $X = \{x\}$.

Por el Lema 2.3.20 tenemos que $(\uparrow x) \ltimes X$. Como S es T_1, entonces $(\uparrow x) = \{x\} = \overline{x}$ y al ser S apilado se cumple $x \in X \subseteq \overline{(\uparrow x)} = \{x\}$. Por lo tanto, $\{x\} = X$.

$\square$

El parte $a)$ del Lema 2.3.22 nos abre el panorama con una de las propiedades de separación más importantes, pero la mayoría de los espacios que nos interesan son fuertemente apilados, pero no T_2. La ventaja es que existen muchos otros espacios fuertemente apilados que cumplen otras condiciones.

Lema 2.3.23 *Cada topología de Alexandroff es fuertemente apilada.*

Demostración. Sean $Q \in \mathcal{Q}S$ y $X \in \mathcal{C}S$ tales que $Q \ltimes X$. Por definición tenemos que $Q \subseteq U \Rightarrow X \subseteq \overline{(X \cap U)}$, donde $U \in \mathcal{O}S$. Si S es un espacio de Alexandroff, entonces todo conjunto saturado es abierto, es decir, $Q \in \mathcal{O}S$. Por lo tanto si $Q \ltimes X \Rightarrow X \subseteq \overline{(X \cap Q)}$ y es lo que queríamos probar. $\square$

Podríamos no tener claro cual es la función de la relación $\ltimes$. El Lema 2.3.22 únicamente menciona un comportamiento sensible a puntos. Su verdadero propósito se vuelve claro cuando vemos la situación en un enfoque sin puntos.

Cada $Q \in \mathcal{Q}S$ produce un $F \in \mathcal{O}S^{\wedge}$ y a su vez, este produce una derivada f y un núcleo $v_F = f^{\infty}$ en $\mathcal{O}S$. De igual manera tenemos un núcleo espacialmente inducido $[Q']$ en $\mathcal{O}S$. Además, $v_F \leq [Q']$ (pues F es admitido por ambos núcleos).

Sabemos que $f(W) = \bigcup\{(u \succ W)^{\circ} \mid q \subseteq U\}$ para cada $W \in \mathcal{O}S$. Así, para cada $X \in \mathcal{C}S$ tenemos

$$\begin{aligned}
f(X') &= \bigcup\{(U' \cup X')^{\circ} \mid Q \subseteq U\} \\
&= \bigcup\{\overline{(X \cap U)}' \mid Q \subseteq U\} \\
&= \left(\bigcap\{\overline{(X \cap U)} \mid Q \subseteq U\}\right)' \\
&= (\hat{Q}(X))'
\end{aligned}$$

Lema 2.3.24 *Para cada espacio S y $Q \in \mathcal{Q}S$ tenemos*

$$Q \ltimes X \Leftrightarrow \hat{Q}(X) = X \Leftrightarrow v_F(X') = X'$$

para cada $X \in \mathcal{C}S$.

Lema 2.3.25 *Para cada espacio S y $Q \in \mathcal{Q}S$ tenemos*

a) $\overline{Q} \subseteq Q(\infty)$, *b)* $Q \ltimes Q(\infty)$, *c)* $Q \ltimes X \Rightarrow X \subseteq Q(\infty)$

para cada $X \in \mathcal{C}S$.

Demostración.

a) Tenemos que por la construcción de $\hat{Q}(\alpha)$, $Q \subseteq Q(\infty)$. Luego, como $Q(\infty)$ es cerrado, por lo tanto $\overline{Q} \subseteq Q(\infty)$.

b) Por definición $Q(\infty) = \hat{Q}(Q(\infty)) = \bigcap\{\overline{(Q(\infty) \cap U)} \mid Q \subseteq U\}$. de esta manera, si $Q \subseteq U$, entonces $Q(\infty) \subseteq \overline{(Q(\infty) \cap U)}$, es decir, $Q \ltimes Q(\infty)$.

c) Por construcción $Q(\infty)$ es el mayor conjunto Y con $\hat{Q}(Y) = Y$

$$\hat{Q}(Y) = \bigcap\{\overline{(Y \cap U)} \mid Q \subseteq U\} = Y,$$

si $Q \ltimes X$, entonces por definición, $Q \subseteq U$ implica que $X \subseteq \overline{(X \cap U)} \subseteq \hat{Q}(\infty)$.

□

De esta manera $Q \subseteq \overline{Q} \subseteq Q(\infty)$ para cada $Q \in \mathcal{Q}S$ Por definición, la inclusión de la izquierda es una igualdad precisamente cuando el espacio S es empaquetado, ¿cuándo es una igualdad la contención de la derecha?

Corolario 2.3.26 *Un espacio S es apilado precisamente cuando $\overline{Q} = Q(\infty)$ para cada $Q \in \mathcal{Q}S$.*

Demostración. Supongamos que el espacio S es apilado. Por $b)$ del Lema 2.3.25, tenemos que para cada espacio S y $Q \in \mathcal{Q}S$ se cumple que $Q \ltimes Q(\infty)$ y al ser S apilado implica que $Q(\infty) \subseteq \overline{Q}$. La otra contención es la parte $a)$ del Lema 2.3.25, Por lo tanto $\overline{Q} = (\infty)$.

Recíprocamente, si $\overline{Q} = Q(\infty)$, entonces por $c)$ del Lema 2.3.25, se cumple que $Q \ltimes X \Rightarrow X \subseteq Q(\infty) = \overline{Q}$ y esta es la definición de apilado. □

Los espacios apilados van un paso más allá.

Lema 2.3.27 *Para cada espacio S las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

1. *S es fuertemente apilado.*
2. *Para cada $F \in \mathcal{O}S^{\wedge}$ tenemos que $v_F = [Q']$ donde F es el filtro de vecindades de $Q \in \mathcal{Q}S$.*

3. *Para cada $F \in \mathcal{O}S^{\wedge}$ el núcleo v_F es espacialmente inducido.*

Demostración.

1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que S es fuertemente apilado. Consideremos $Q \in \mathcal{Q}S$ y $F \in \mathcal{Q}S$ el respectivo filtro abierto asociado a Q. Sabemos que $v_F \leq [Q']$, entonces debemos verificar la otra desigualdad. Por el Lema 2.3.24 se cumple que para cada $X \in \mathcal{C}S$

$$v_F(X') = X' \Rightarrow Q \ltimes X \Rightarrow X \subseteq \overline{(X \cap Q)} \Rightarrow \overline{(X \cap Q)}' \subseteq X' \Rightarrow [Q'](X') = X',$$

es decir, cualquier abierto fijado por v_F es fijado por $[Q']$ y así $[Q'] \leq v_F$.

2) $\Rightarrow$ 3) Si $v_F = [Q']$ en consecuencia v_F es espacialmente inducido.

3) $\Rightarrow$ 1) Supongamos que $v_F = [E']$ para algún $E \subseteq S$. Sabemos que

$$v_F = \bigcup\{[U'] \mid Q \subset U\},$$

donde Q es el compacto saturado correspondiente a F y $Q = \bigcap F$. De aquí que $Q \subseteq U \Leftrightarrow E \subseteq U$ para $U \in \mathcal{O}S$. Al ser Q saturado

$$Q = \bigcap\{U \mid E \subseteq U\} \quad \text{y} \quad E \subseteq Q \Leftrightarrow Q' \subseteq E' \Leftrightarrow [Q'] \leq [E'] = v_F.$$

Supongamos ahora que $Q \ltimes X$ para $X \in \mathcal{C}S$, entonces $X \subseteq \overline{(X \cap U)}$, pues $Q \subseteq U$. Luego,

$$\begin{aligned} [Q'](X') \leq [E'](X') &\Leftrightarrow (Q' \cup X')^{\circ} \subseteq (E' \cup X')^{\circ} \\ &\Leftrightarrow \overline{(Q \cap X)}' \subseteq \overline{(E \cap X)}' \subseteq X', \end{aligned}$$

es decir, $X \subseteq \overline{(Q \cap X}$. Por lo tanto S de fuertemente apilado.

$\square$

Con esto podemos juntar varios resultados para obtener una caracterización de arreglo que es sensible a puntos.

Teorema 2.3.28 *Un espacio S que es T_0 tiene topología arreglada si y solo si S es empaquetado y apilado.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que $\mathcal{O}S$ es arreglado y consideremos $Q \in \mathcal{Q}S$. Sabemos que $Q \subseteq \overline{Q} \subseteq Q(\infty)$ y así, es suficiente demostrar que $Q \supseteq Q(\infty)$, de esta manera obtendríamos que $Q = \overline{Q}$ (todo conjunto compacto saturado es cerrado) y $\overline{Q} = Q(\infty)$ (por el Corolario 2.3.26).

Sea F el filtro en $\mathcal{O}S$ inducido por Q. Como $\mathcal{O}S$ es arreglado, se cumple que $v_F = [D]$ para algún $D \in \mathcal{O}S$. Supongamos que para $X \in \mathcal{C}S$, $Q \ltimes X$. De aquí que $Q(\infty) = \hat{Q}(Q(\infty))$ y por el Lema 2.3.24 $Q(\infty) = D'$, o equivalentemente $D = Q(\infty)'$. Luego

$$U \in F \Leftrightarrow Q \subseteq U \Rightarrow D \cup U = S$$

(por definición de arreglado). Además, si $\mathcal{O}S$ es arreglado, también es parche trivial, es decir, $v_F = u_D$. Entonces $v_F(U) = u_D(U) = D \cup U = S$, y como $D = Q(\infty)'$ tenemos que $Q(\infty) \subseteq U$, es decir, se cumplen las siguientes equivalencias

$$Q \subseteq U \Leftrightarrow v_F(U) = S \Leftrightarrow D \cup U = S \Leftrightarrow Q(\infty) \subseteq U,$$

como Q es saturado, $Q = \bigcap\{U \mid Q(\infty) \subseteq U\}$, es decir, $Q(\infty) \subseteq Q$, que es lo que queríamos.

$\Leftarrow$) Recíprocamente, supongamos que S es empaquetado y apilado y consideremos cualquier $F \in \mathcal{O}S^\wedge$. Si S es empaquetado, entonces S es T_1 y así, por el Lema 2.3.22, S es sobrio.

Sabemos que F es inducido por algún $Q \in \mathcal{Q}S$. En general, entonces $[Q(\infty)'] \leq v_F \leq [Q']$, pero en un espacio empaquetado y apilado se cumple que $Q(\infty) = Q \in \mathcal{C}S$, por el Lema 2.3.7. Luego $v_F = [D]$ para algún $D \in \mathcal{O}S$ y así $\mathcal{O}S$ es arreglado.

□

2.4 El espacio de puntos del marco de parches

Para un marco A con espacio de puntos S podemos construir dos marcos de parches diferentes. Estos son la topología del espacio de puntos del marco de parches ($\mathcal{O}\mathrm{pt}(PA)$) y el marco de parches de la topología del espacio de puntos ($P\mathcal{O}S = P(\mathcal{O}\mathrm{pt}A)$). Es momento de ver si existe relación entre estos.

Sabemos que la relación que existe entre el marco A, PA y NA nos proporciona el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "U_A"'] & PA \arrow[r] \arrow[d, "PU_A"] & NA \arrow[d, "NU_A"] \\
\mathcal{O}S \arrow[r] \arrow[dr] & P\mathcal{O}S \arrow[r] \arrow[d, "\pi_S"] & N\mathcal{O}S \arrow[d, "\sigma_S"] \\
& \mathcal{O}^p S \arrow[r] & \mathcal{O}^f S
\end{tikzcd}$$

para el cual sabemos que

- Cada flecha horizontal es un encaje y tres de estas son inclusiones.
- La flecha reflexión espacial (U_A) es suprayectiva.
- La propiedades funtoriales de N aseguran que tanto NU_A como PU_A son suprayectivas.
- La flecha σ_S es suprayectiva. Además, el espacio ${}^fS$ es el espacio de puntos tanto de $N\mathcal{O}S$ y NA, donde σ_S y la composición $\Sigma_S = \sigma_S \circ NU_A$ son las respectivas reflexiones espaciales.

- La flecha π_S es suprayectiva, pues para cada $Q \in \mathcal{Q}S$ tenemos que $\pi(v_F) = Q'$ donde F es el filtro abierto en $\mathcal{O}S$ generado por Q.

Esta información genera las siguientes preguntas:

- ¿Qué es el espacio de puntos $\mathrm{pt}(PA)$ del marco de parches de A?
- En particular, ¿qué es el espacio de puntos de $P\mathcal{O}S$?
- ¿Son diferentes estos espacios de puntos?

Para el espacio S el espacio de Skula ${}^fS$ es el espacio de puntos de $N\mathcal{O}S$ y de NA. Nuestra intuición nos podría llevar a pensar que el espacio de parches ${}^pS$ es el espacio de puntos de $P\mathcal{O}S$ o de PA o de ambos. Esto se aclarara más adelante con algunos ejemplos.

Existen casos donde ${}^pS$ es el espacio de puntos $P\mathcal{O}S$. Por ejemplo, si S es T_2, entonces ${}^pS = S$ y $\mathcal{O}S \to P\mathcal{O}S$ es un isomorfismo. Sin embargo, en general tenemos que buscar un poco más para encontrar el espacio de puntos.

Otra pregunta que podríamos hacernos es ¿$P\mathcal{O}S$ es siempre espacial? La respuesta a esto no es afirmativa, pues existe una colección de ejemplos que lo contradice (estos ejemplos también se presentaran después).

Lema 2.4.1 *Sea S un espacio sobrio. Si el encaje $\pi\colon P\mathcal{O}S \to \mathcal{O}^pS$ es un isomorfismo, entonces S es fuertemente apilado*

Demostración. Consideremos $Q \in \mathcal{Q}S$. Por el Lema 2.3.27 es suficiente verificar que $v_F = [Q']$ donde $F \in \mathcal{O}S^\wedge$ es el filtro correspondiente a Q. Por el Lema 2.2.12 tenemos que $\pi(v_F) = Q' = \pi([Q'])$ y, por hipótesis, π es inyectiva, es decir, $v_F = [Q']$. $\square$

El recíproco no es cierto, pues es posible tener un espacio fuertemente apilado donde π no es un isomorfismo.

2.4.1 Los puntos "ordinarios" del marco de parches

Notemos que la composición $PA \to P\mathcal{O}S \to \mathcal{O}^pS$ proporciona un morfismo de marcos suprayectivo y, a su vez, este indica que existe alguna conexión entre ${}^pS$ y el espacio de puntos $\mathrm{pt}(PA)$. En particular, existe una función continua ${}^pS \to \mathrm{pt}(\mathcal{O}^pS) \to \mathrm{pt}(PA)$, donde el espacio de en medio es la reflexión sobria de ${}^pS$. Lo que haremos ahora será obtener una descripción explicita de esta función y se mostrará que ${}^pS$ es un subespacio de $\mathrm{pt}(PA)$.

Recordemos que para $p \in A$, $p \in \mathrm{pt}A$ si y solo si p es un elemento $\wedge$-irreducible. En particular, en PA sus puntos son los núcleos de parches que, como elementos de PA son $\wedge$-irreducibles. Además, cuando consideramos al ensamble NA, $\mathrm{pt}(NA) = \{w_p \mid p \in \mathrm{pt}A\}$ y al ser pt un funtor contravariante, se cumple que $\mathrm{pt}(NA) \to \mathrm{pt}(PA)$ es una inclusión, es decir, si $w_P \in \mathrm{pt}(NA)$, entonces $w_p \in \mathrm{pt}(PA)$.

Consideremos $p \in \mathrm{pt}A$, entonces

$$w_p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \nleq p \\ \\ p & \text{si} \quad x \leq p \end{cases}$$

para $x \in A$. Sea $P = \nabla(w_p) = \{x \in A \mid x \nleq p\}$ el filtro completamente primo asociado a p y al mismo tiempo, el filtro de admisibilidad de w_p. Al ser este un filtro abierto, w_p es el mayor elemento de su bloque, ¿quién es el menor elemento v_p? Para responder lo anterior usamos la derivada $f_p = f_P = \dot{\bigvee}\{v_y \mid y \in P\}$. Así,

$$f_p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \nleq p \\ \\ \leq p & \text{si} \quad x \leq p \end{cases}$$

para $x \in A$. Después veremos que $f_p(0) = 0 \neq p$ puede ocurrir.

Lema 2.4.2 *En la situación anterior se cumple que* $w_p = u_p \vee v_P = f_p \circ u_p$ *y* $w_p \in \mathrm{pt}(PA)$.

Demostración. Observemos que $f_p \circ u_p \leq v_P \circ u_p = u_p \vee v_P \leq w_p$ y así, por la descripción de f_p tenemos

$$(f_p \circ u_p)(x) = f_p(p \vee x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \nleq p \\ \\ p & \text{si} \quad x \leq p \end{cases} = w_p(x)$$

para $x \in A$.

Sabemos que u_p y v_P pertenecen a PA, entonces $w_p \in PA$. Además, $w_p \in \mathrm{pt}(NA)$ de aquí que $w_p \in \mathrm{pt}(PA)$. $\square$

El resultado anterior proporciona un encaje $\alpha \colon S \to \mathrm{pt}(PA)$, en donde a cada $p \in \mathrm{pt}A$ le corresponde un $w_p \in \mathrm{pt}(PA)$ y así se impone una topología en el conjunto S usando la topología dada en $\mathrm{pt}(PA)$. Para describir la topología impuesta, se usan los conjuntos abiertos subbásicos canónicos $U_{PA}(u_a)$ y $U_{PA}(v_F)$ de $\mathrm{pt}(PA)$.

Aquí a es un elemento arbitrario de A y F es un filtro abierto arbitrario. Recordemos que $Q = S \setminus F$ está en $\mathcal{Q}S$ y F está determinado por

$$x \in F \Leftrightarrow Q \subseteq U_A(x),$$

donde $x \in A$.

Lema 2.4.3 *Para la situación anterior tenemos*

$$w_p \in U_{PA}(u_a) \Leftrightarrow p \in U_A(a) \quad \text{y} \quad w_p \in U_{PA}(v_F) \Leftrightarrow p \in Q'$$

para cada $a \in A$, $F \in A^{\wedge}$ *y* $p \in S$.

Demostración. Por definición tenemos que

$$w_p \in U_{PA}(u_a) \Leftrightarrow u_a \nleq w_p \Leftrightarrow u_a(p) \neq p \Leftrightarrow a \vee p \neq p \Leftrightarrow a \nleq p \Leftrightarrow p \in U_A(a)$$

Para la otra equivalencia, recordemos que v_F es un núcleo ajustado. Así, por definición tenemos

$$w_p \in U_{PA}(v_F) \Leftrightarrow v_F \nleq w_p \Leftrightarrow F \nsubseteq \nabla(w_p) \Leftrightarrow p \in F \Leftrightarrow p \in Q'$$

□

Este resultado muestra que α es una función continua cuando S lleva la topología de parches.

Teorema 2.4.4 *Sea $A \in \mathrm{Frm}$ y $S = \mathrm{pt}A$. El encaje ${}^pS \to \mathrm{pt}PA$ exhibe a ${}^pS$ como un subespacio de $\mathrm{pt}(PA)$.*

Este resultado localiza la que se espera que sea gran parte de $\mathrm{pt}(PA)$.

Definición 2.4.5 *Un punto de PA que no es de la forma w_p para algún $p \in \mathrm{pt}A$ es un punto salvaje.*

Dado que $\mathrm{pt}(PA)$ es sobrio, pero ${}^pS$ no necesita serlo, entonces deben existir puntos salvajes para algunos marcos A. Más adelante se muestran como son algunos de estos.

Pregunta: ¿Es $\mathrm{pt}(PA)$ solo la reflexión sobria de ${}^pS$?

Ciertamente la reflexión sobria de ${}^pS$ debe estar dentro de $\mathrm{pt}(PA)$. Sabemos que ${}^{+p}S$ es solo la clausura frontal de ${}^pS$ en $\mathrm{pt}(PA)$. El problema está en si es todo $\mathrm{pt}(PA)$. No se ha podido responder toda esta pregunta. Por el momento tiende a la opinión de que la respuesta es si.

2.4.2 Los puntos salvajes del ensamble de parches

Comenzamos con un ejemplo de punto salvaje.

Ejemplo 2.4.6 *El ensamble de parches de la reflexión sobria de la topología cofinita contiene un punto salvaje. Ver subsección* **??**.

Cada punto salvaje se adjunta a uno de los puntos w_p de forma canónica.

Lema 2.4.7 *Sea $A \in \mathrm{Frm}$, $S = \mathrm{pt}A$ PA su marco de parches. Para cada punto $m \in \mathrm{pt}(PA)$, el elemento $p = m(0)$ es un punto de A y es el único elemento tal que $u_p \leq m \leq w_a$.*

Demostración. El núcleo $m \in PA$ es $\wedge$-irreducible en PA. En particular, este no es tp y así $p \neq 1$. Consideremos $x, y \in A$ con $x \wedge y \leq p$. Notemos que $u_x, u_y \in PA$ y $u_x \wedge u_y = u_{x \wedge y} \leq m$ y como $m \in \mathrm{pt}(PA)$, entonces $u_x \leq m$ o $u_y \leq m$. Así tenemos

$$x = u_x(0) \leq m(0) = p \quad \text{o} \quad y = u_y(0) \leq m(0) = p,$$

es decir, $p \in S$.

Por construcción tenemos $u_p \leq m \leq w_p$. Consideremos cualquier $a \in A$ con $u_a \leq m \leq w_a$. Evaluando en 0 tenemos

$$a = u_a(0) \leq m(0) = p \leq w_a(0) = a,$$

es decir, $a = p$. □

Esto muestra que cualquiera que sean los puntos de PA, cada uno tiene un padre p el cual es un punto de A y la imagen de un punto de PA.

¿Qué tiene un punto de un marco que permite asociarlo con puntos salvajes del parche? Recordemos que cada elemento máximo es automáticamente un punto, pero hay puntos que no son máximos.

Lema 2.4.8 *Si el punto p del marco A es máximo, entonces $u_p = w_p$ y p no tiene puntos salvajes asociados.*

Demostración. Por la maximalidad de p tenemos que para $x \in A$

$$u_p = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \not\leq p \\ \\ p & \text{si} \quad x \leq p \end{cases} = w_p$$

y el intervalo $[u_p, w_p]$ colapsa, es decir, no hay nada entre estos. □

Conocemos varias condiciones en un marco que aseguran que todos los puntos sean máximos. Por ejemplo, este es el caso cuando el marco es ajustado o cuando es ∞-arreglado. Para tal marco, el Lema 2.4.8 nos dice que la situación del parche es simple.

Teorema 2.4.9 *Si cada punto del marco A es máximo, entonces A no tiene puntos salvajes y los dos espacios ${}^p(\mathrm{pt}A)$ y $\mathrm{pt}(PA)$ son esencialmente el mismo.*

Por supuesto, el Lema 2.4.8 no dice que un punto no máximo deba tener un punto salvaje asociado. De hecho, como veremos, no esta nada claro que permite o impide la existencia de puntos salvajes.

Sabemos que para un espacio T_1 todo punto es máximo. Así tenemos el siguiente resultado.

Corolario 2.4.10 *Si A es un marco con espacio de puntos T_1, entonces A no tiene puntos salvajes y ${}^p\mathrm{pt}A \simeq \mathrm{pt}(PA)$.*

¿Qué podemos decir de los puntos en $\mathrm{pt}(PA)$? Establecemos un poco de notación para ser usada con $m \in \mathrm{pt}(PA)$ arbitrario y obtener algunas propiedades. Por supuesto, si m no es salvaje, entonces casi todo lo que hacemos ya se conoce.

Para $m \in \mathrm{pt}(PA)$ sea $p = m(0)$ el punto asociado y sea $M = \nabla(m)$ su filtro de admisibilidad. En general, este no necesita ser abierto. Sea lo que sea, M tiene un mínimo núcleo asociado v_M, el menor compañero de m. No se sabe si $v_M \in PA$.

Consideremos $\mathcal{M}$ el conjunto de todos los filtros abiertos F con $F \subseteq M$. Así $\mathcal{M}$ podría ser vacío. Sea $K = \bigvee \mathcal{M}$ donde este supremo está tomado en el copo de todos los filtros en A. Ya que

$$v_K = \bigvee \{v_F \mid F \in \mathcal{M}\},$$

entonces $v_K \leq v_M \leq m \leq w_p$ y $v_k \in PA$.

Lema 2.4.11 *Usando la notación anterior, para cada marco A y $m \in \mathrm{pt}(PA)$ tenemos*

$$m = u_p \vee v_M = u_p \vee v_K \quad y \quad G \cap H \subseteq M \Rightarrow G \subseteq M \;\; o \;\; H \subseteq M,$$

para cualesquiera filtros abiertos G y H.

Demostración. Consideremos $\kappa = u_p \vee v_K$ de modo que $\kappa \leq u_p \vee v_M \leq m$. Así, una comparación $m \leq \kappa$ es suficiente para la primera parte.

Como $m \in PA$ este es un supremo de núcleos $u_a \wedge v_F$ para ciertos $a \in A$ y filtro abierto F. Para tal núcleo tenemos $u_a \wedge v_F \leq m$ y por lo tanto, como $m \in \mathrm{pt}(PA)$ se cumple que $u_a \leq m$ o $v_F \leq m$. Esto da $a \leq p$ o $F \subseteq M$ y por lo tanto

$$u_a \wedge v_F \leq u_a \leq u_p \leq \kappa \quad \text{o} \quad u_a \wedge v_F \leq v_F \leq v_\kappa \leq \kappa$$

se cumple, es decir, siempre se cumple que $u_a \wedge v_F \leq \kappa$. En particular, $m \leq \kappa$ ya que m es el supremo de los núcleos $u_a \leq v_F$ considerados.

Para la segunda parte, consideremos los filtros abiertos G, H con $G \cap H \subseteq M$. Entonces $v_G \wedge v_H = v_{G \wedge H} \leq v_M \leq m$ y por lo tanto se cumple que $v_G \leq m$ o $v_H \leq m$, es decir, $G \subseteq M$ o $H \subseteq M$. □

Hay mucho que no se sabe sobre esta situación. Se concluye esta sección con lo que se cree es una pregunta muy importante.

Sea A un marco arbitrario con espacio de puntos S. Consideremos el encaje topológico ${}^pS \to \mathrm{pt}(PA)$ descrito antes. Sabemos que ${}^pS$ no es necesariamente sobrio, pero $\mathrm{pt}(PA)$ es sobrio. La reflexión sobria de ${}^pS$ vive dentro de $\mathrm{pt}(PA)$ y es solo la clausura frontal de ${}^pS$. Esto lleva a la pregunta crucial

Pregunta: Para un marco A ¿bajo que circunstancias es la reflexión sobria de ${}^pS$ solo el espacio $\mathrm{pt}(PA)$?

Es posible que sea así, pero aun no se ha encontrado una prueba o contraejemplo.

2.5 Ejemplos

En las siguientes secciones se reúnen varios ejemplos que han llevado a comprender de mejor manera las construcciones de parches.

2.5.1 La topología cofinita y conumerable

Como lo anuncia el titulo de la subsección, lo primero que haremos es trabajar con espacios dotados de la topología cofinita y conumerable.

Definición 2.5.1 *a) Sea S un conjunto infinito. La topología cofinita en S es la siguiente:*

$$\mathcal{O}S = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq S \mid U' \text{ es finito}\}.$$

b) Sea S un conjunto no numerable. La topología conumerable en S es la siguiente:

$$\mathcal{O}S = \{\emptyset\} \cup \{U \subseteq S \mid U' \text{ es numerable}\}.$$

Los espacios topológicos anteriores cumplen que

- Si $U, V \in \mathcal{O}S$, con $U, V \neq \emptyset$, entonces $U \cap V \neq \emptyset$.
- Si $U \subseteq V$, con $U \in \mathcal{O}S$, entonces $V \in \mathcal{O}S$.

En otras palabras, la topología cofinita y conumerable, sin considerar al conjunto vacío, definen un par de filtros en S. De esta manera incluimos la notación

$$\mathcal{O}S = \{\emptyset\} \cup \mathcal{F}S$$

donde $\mathcal{F}S$ es el filtro correspondiente a la topología cofinita y conumerable, respectivamente. Es decir,

$$\text{a) } \mathcal{F}S = \mathcal{P}_{\text{cof}}S \quad \text{y} \quad \text{b) } \mathcal{F}S = \mathcal{P}_{\text{con}}S.$$

Cuando sea necesario, haremos la diferencia entre las distintas construcciones que vayamos haciendo para cada uno de los espacios topológicos. Comenzaremos con las propiedades sensibles a los puntos.

Ambos espacios son T_1 (los conjuntos formados por un punto son cerrados). Además al ser $\mathcal{F}S$ un filtro, se cumple que S es un conjunto cerrado irreducible, pero por definición, S no es unipuntual. En otras palabras, estos espacios no son sobrios.

Lema 2.5.2 *Consideremos los espacios dados en la Definición 2.5.1. En cada caso, si $X \subsetneq S$, entonces $X = \{x\}$, para $x \in S$.*

Demostración. Sea X un subconjunto cerrado irreducible con $X \neq S$, en particular, $X \neq \emptyset$ (por definición de irreducibilidad). Por contradicción, supongamos que X esta conformado por al menos dos elementos, digamos x, y. Como X es cerrado, los conjuntos

$$U_x = X' \cup \{x\} \quad \text{y} \quad U_y = X' \cup \{y\}$$

son abiertos, pues $X' \subseteq U_x, U_y$ y $\mathcal{F}S$ es un filtro.

Notemos que $U_x \cap X \neq \emptyset \neq U_y \cap X$ y al ser X irreducible, $U_x \cap U_y \cap X \neq \emptyset$, pero $U_x \cap U_y = X'$ y esto daría una contradicción. Por lo tanto, X debe estar conformado por un único punto. □

Con esto, los dos espacios mencionados "casi" son sobrios. Unicamente necesitamos reparar el defecto para el cerrado S. Para ello hacemos lo siguiente.

Definición 2.5.3 *Sea S cualquiera de los espacios de la Definición 2.5.1. Consideremos ${}^+S = S \cup \{\omega\}$, donde ω es un nuevo punto. De manera similar, sea ${}^+E = E \cup \{w\}$ para cada $E \subseteq S$. De esta manera*

$$ {}^+\mathcal{F}S = \{{}^+U \mid U \mid \mathcal{F}S\} \quad y \quad \mathcal{O}^+S = \{\emptyset\} \cup {}^+\mathcal{F}S $$

producen un filtro y una topología en ${}^+S$.

Se puede verificar que $\mathcal{O}^+S$ es una topología en ${}^+S$ y que S es un subespacio de ${}^+S$. De hecho, se tiene más información.

Lema 2.5.4 *En los espacios S de la Definición 2.5.1, la inclusión $\iota\colon S \to {}^+S$ es la reflexión sobria de S.*

Demostración. Suponiendo que $\mathcal{O}^+S$ es una topología en ${}^+S$ (no es complicado verificarlo), solo debemos probar que ${}^+S$ es un espacio sobrio.

Para todo ${}^+U \in \mathcal{O}^+S$, con ${}^+U \neq \emptyset$, se cumple que ${}^+U = U \cup \{\omega\}$. Además,

$$ ({}^+U)' = (U \cup \{\omega\})' = U' \cap \{\omega\}', $$

es decir, el único cerrado que contiene a $\{\omega\}$ es ${}^+S$. De aquí que $\overline{\{\omega\}} = {}^+S$.

Consideremos $X \subsetneq {}^+S$ un cerrado irreducible. Supongamos que $X = \{x, y\}$, entonces

$$ {}^+U_x = X' \cup \{x\} \quad \text{y} \quad {}^+U_y = X' \cup \{y\}. $$

Además, ${}^+U_x \cap X \neq \emptyset \neq {}^+U_y \cap X$, pero ${}^+U_x \cap {}^+U_y \cap X = \emptyset$, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, todos los conjuntos cerrados irreducibles son un único punto, es decir, ${}^+S$ es sobrio. $\square$

La topología de un espacio y su reflexión sobria son canónicamente isomorfos. En estos casos vemos que para $W \in \mathcal{F}S$

$$ \begin{aligned} \mathcal{O}S &\to \mathcal{O}^+S \\ W &\mapsto {}^+W \\ \emptyset &\mapsto {}^+\emptyset \end{aligned} $$

es el isomorfismo.

Ahora vamos a construir la topología de Skulla.

Lema 2.5.5 *Para cada espacio de la Definición 2.5.1 tenemos*

$$ \mathcal{O}^{f+}S = \mathcal{P}S \cup {}^+\mathcal{F}S, $$

es decir, cada subconjunto abierto de Skulla de ${}^+S$ es un subconjunto de S o de ${}^+\mathcal{F}S$.

Demostración. La topología de Skulla tiene como base a los subconjuntos de la forma $U \cap X$ para $U \in \mathcal{O}S$ y $X \in \mathcal{C}S$. Como cada $s \in S$ es un conjunto cerrado de ${}^{+}S$. Además, si ${}^{+}U \in \mathcal{O}^{+}S$, entonces ${}^{+}U \in \mathcal{O}^{f+}S$. Por lo tanto

$$\mathcal{P}S \cup \mathcal{F}S \cup \mathcal{O}^{\{+}\mathcal{S}$$

y así solo resta probar la otra contención.

Consideremos cualquier conjunto abierto básico $U \cap X$ de ${}^{f+}S$. Si $U = \emptyset$, entonces $U \cap X = \emptyset \subseteq S$. De lo contrario, $U = {}^{+}F$ para algún $F \in \mathcal{F}S$.

Si $X' \in \mathcal{F}S$, entonces $U \cap X \subseteq S$, de lo contrario $X = {}^{+}S$ y entonces $U \cap X = {}^{+}F \in {}^{+}\mathcal{F}S$. □

Con esto tenemos la forma de dos de las construcciones presentadas en este capitulo (la reflexión sobria y la topología de Skulla). La otra construcción espacial que abordamos en este capítulo fue el espacio de parches.

La principal diferencia entre la topología cofinita y la conumerable (y la razón por la que se encuentra a la topología numerable más útil para nuestros propósitos), radica en los conjuntos compactos saturados. Sabemos que ambos espacios son T_1, por lo que cada subconjunto es saturado. Sin embargo, los conjuntos compactos son muy diferentes.

Lema 2.5.6 *a) Para el espacio cofinito tenemos que $\mathcal{Q}S = \mathcal{P}S$.*

b) Para el espacio conumerable tenemos que $\mathcal{Q}S = \mathcal{P}_{fin}S$ y esta es la colección de subconjuntos finitos.

Demostración.

a) Sea Q cualquier subconjunto no vacío y sea $\mathcal{U}$ cualquier cubierta abierta de Q. Como $Q \neq \emptyset$, existe al menos un $U \in \mathcal{U}$ no vacío. Luego $Q \setminus U$ es finito por lo que puede cubrirse por un número finito de elementos de $\mathcal{U}$. Al ser Q arbitrario podemos decir que $\mathcal{Q}S = \mathcal{P}S$.

b) Consideremos cualquier $Q \in \mathcal{Q}S$ y, a manera de contradicción, supongamos que Q es infinito. Sea X cualquier subconjunto infinito numerable de Q. Notemos que X' es abierto. Para cada $y \in Q$, sea $U_y = X' \cup \{y\}$ para obtener un conjunto abierto. Entonces $\mathcal{U} = \{U_y \mid y \in Q\}$ cubre a Q y por la compacidad

$$Q \subseteq U_{y_1} \cup \ldots \cup U_{y_n} = X' \cup \{y_1, \ldots, y_n\}$$

para algunos $y_1, \ldots, y_n \in Q$. Así $X = Q \cap X \subseteq \{y_1, \ldots, y_n\}$, lo cual es una contradicción ya que X es infinito.

□

Con este resultado podemos describir la topología de parches tanto para S como para ${}^{+}S$. Para hacer esto introducimos algo de notación.

Definición 2.5.7 *Para los espacios de la Definición 2.5.1, sea GS la colección de todos los subconjuntos $U \cap (S \setminus H)$ para $U \in \mathcal{F}S$ y $H \in \mathcal{Q}S$.*

La colección GS es un filtro en S. De hecho se tiene que

$$\text{a) } GS = \mathcal{P}S \quad \text{y} \quad \text{b) } GS = \mathcal{P}_{\text{con}}S = \mathcal{F}S,$$

para ambos casos.

Usando esta notación tenemos lo siguiente.

Teorema 2.5.8 *Para cada uno de los espacios S de la Definición 2.5.1, tenemos*

$$\mathcal{O}^p S = \{\emptyset\} \cup GS \quad \text{y } \mathcal{O}^{p+} S = \{\emptyset\} \cup {}^+\mathcal{F}S \cup GS,$$

donde GS es como en la Definición 2.5.7.

Demostración. La topología en ${}^pS$ es generada por los conjuntos $U \cap Q'$ para $U \in \mathcal{O}S$ y $Q \in \mathcal{Q}S$, pero esta familia es generada solo por $\{\emptyset\} \cup GS$, la cual es una topología.

Para la descripción de $\mathcal{O}^{p+}S$ se verifican varias inclusiones. Las inclusiones

$$\{\emptyset\} \cup {}^+\mathcal{F}S \subseteq \mathcal{O}^+S \subseteq \mathcal{O}^{p+}S$$

son inmediatas.

Consideremos cualquier $Q \in \mathcal{Q}^+S$ no vacío. El orden de especialización de ${}^+S$ es el conjunto discreto S con el punto ω en la parte superior. Así, $Q = \{\omega\} \cup H$ para algún $H \subseteq S$. $\square$

Chapter 3

Axiomas de separación en $\mathcal{O}S$

En este capítulo hablaremos sobre los axiomas de separación clásicos conocidos en topología. Primero veremos las nociones dadas para la topología sensible a puntos y después las "traduciremos" al lenguaje de retículas, que para nuestro caso será la retícula de conjuntos abiertos $\mathcal{O}S$.

Para empezar, recordemos que un espacio topológico S es un conjunto dotado de una topología la cual es una familia de subconjuntos de S que, en la mayoría de los casos, se denota por τ, donde para cada $U \subseteq S$, si $U \in \tau$, entonces decimos que U es un conjunto abierto. Además, τ cumple ciertas condiciones:

1. $S, \emptyset \in \tau$.
2. Es cerrado bajo intersecciones finitas.
3. Es cerrado bajo uniones arbitrarias.

De manera habitual, si consideramos $U \subseteq S$ denotamos por

$$U^{-}, \qquad U^{\circ}, \qquad U'$$

la cerradura, el interior y el complemento del subconjunto U, respectivamente.

Si S es un espacio topológico, entonces denotaremos por $\mathcal{O}S$ a la colección de todos los conjuntos abiertos de S. Ahora, si $U \in \mathcal{O}S$, entonces U' es un conjunto cerrado. Además, denotaremos por $\mathcal{C}S$ a la colección de todos los conjuntos cerrados del espacio S. De esta manera tenemos dos familias distinguidas de subconjuntos de S (que conforme vayamos avanzando, agregaremos más).

Se debe advertir que a lo largo de estas notas, cuando mencionemos espacio, no referiremos a espacio topológico y si en algunas partes de este texto hay necesidad de distinguir entre otro tipo de espacio, lo mencionaremos con anticipación. También, en ocasiones podremos usar $\Omega(S)$ en lugar de $\mathcal{O}S$, dependiendo el contexto sobre el cual estemos hablando, pero ambos casos nos referimos al los abiertos de un espacio topológico.

Consideremos S y T dos espacios topológicos, la manera de relacionar estos es por medio de una *función continua*. En este caso si $f\colon S \to T$ decimos que f es una función continua si para todo $V \in \mathcal{O}T$, $f^{-1}(V) \in \mathcal{O}S$.

3.1 Los axiomas de separación sensibles a puntos.

Recordemos que los axiomas de separación nos proporcionan condiciones bajo las cuales, en un espacio S, podemos separar puntos diferentes por medio de elementos en $\mathcal{O}S$ y, en el caso de los axiomas T_3 y T_4, podemos separar también conjuntos cerrados.

Comencemos con el axioma T_0, este es el primer axioma de separación y el más general. Para un espacio S decimos que este es T_0 si:

$(\mathbf{T_0})$ $\forall x, y \in S, x \neq y,\ \exists\, U \in \Omega(S)$ tal que $x \notin U \ni y$ ó $y \notin U \ni x$.

Equivalentemente, el espacio S es T_0 si y solo si $\forall x, y \in S$, si $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}} \Rightarrow x = y$.

Observación 3.1.1 *Para T un espacio T_0 y $f, g\colon S \to T$ funciones continuas. Si $f^{-1}(U) = g^{-1}(U)$ para cada abierto U en T, entonces $f = g$.*

Para los espacios T_1 tenemos la siguiente suposición.

$(\mathbf{T_1})$ $\forall x, y \in S, x \neq y,\ \exists\, U \in \Omega(S)$ tal que $y \notin U \ni x$.

También podemos decir que el espacio S es T_1 si y solo si los conjuntos formados por un punto son cerrados, es decir, $\forall x \in S$, $\{x\} = \overline{\{x\}}$.

Ahora enunciaremos el axioma de separación T_2 (o de Hausdorff). Este axioma es de los más usados en topología y nuestro objetivo dentro de este proyecto doctoral es conocer las distintas nociones que existen de este axioma en la teoría sin puntos, compararlas y, de ser posible, encontrar entre todas ellas cual es la mejor. Diremos que un espacio es Hausdorff, o T_2, si

$(\mathbf{T_2})$ $\forall x, y \in S, x \neq y,\ \exists\, U, V \in \Omega(S)$ tal que $x \in U, y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$.

Este axioma es muy importante para nuestra investigación, pues los cosas que implica nos motiva a seguir estudiándolo. En el siguiente capítulo enunciaremos varios resultados que hacen uso del supuesto de que un espacio sea Hausdorff y de que manera podemos arreglar el espacio cuando este no es T_2.

Para enunciar el siguiente axioma de separación necesitamos del concepto de espacio regular. Decimos que un espacio *regular* si

(**reg**) $\forall x \in S, A \subseteq S$ cerrado tal que $x \notin A,\ \exists\, U, V \in \Omega(S)$ tales que

$$x \in U, \quad A \subseteq V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

Proposición 3.1.2 *Si un espacio regular es T_0, este es T_2 y por lo tanto T_1.*

Demostración. Consideremos S un espacio topológico y $x, y \in S$, con $x \neq y$. Por T_0 existe $W \in \mathcal{O}S$ tal que $y \notin W \ni x$. Así $x \notin \overline{\{y\}}$ y aplicando la regularidad para x y $\overline{\{y\}}$ obtenemos abiertos disjuntos U_1, U_2 tales que $x \in U_1$ y $\overline{\{y\}} \subseteq U_2$. Haciendo lo mismo para y y $\overline{\{x\}}$ obtenemos abiertos disjuntos V_1, V_2 tales que $y \in V_1$ y $\overline{\{x\}} \subseteq V_2$. Por lo tanto, por la forma en la que fueron construidos, tenemos $x \in U_1$, $y \in V_1$ con U_1 y V_1 disjuntos, es decir, S es T_2 y en consecuencia S es T_1. $\square$

Si consideramos la regularidad junto con T_1 obtenemos el axioma T_3, es decir,

$$T_3 = (\textbf{reg}) + T_1.$$

La siguiente noción que enunciaremos es la de completamente regular. Un espacio es completamente regular si

($\textbf{creg}$) $\forall x \in S, A \subseteq S$ cerrado tal que $x \notin A$, $\exists\, f\colon S \to \mathbb{I}$ tal que

$$f(x) = 0, \quad f[A] = 1$$

donde $\mathbb{I}$ es el intervalo cerrado $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$.

Si un espacio es completamente regular, entonces este también es regular. Además, si a un espacio completamente regular le pedimos que sea T_1, entonces obtenemos el axioma de separación $T_{3\frac{1}{2}}$, es decir,

$$T_{3\frac{1}{2}} = (\textbf{reg}) + T_1.$$

Para terminar con los axiomas clásicos de separación necesitamos definir la normalidad. Decimos que un espacio S es *normal* si

($\textbf{norm}$) $\forall\, A, B \subseteq S$ cerrados tales que $A \cap B = \emptyset$, $\exists\, U, V \in \Omega(S)$ tales que

$$A \subseteq U, \quad B \subseteq V, \quad U \cap V = \emptyset.$$

Así, obtenemos el axioma de separación T_4 dado por

$$T_4 = (\textbf{norm}) + T_1.$$

De esta manera tenemos la siguiente sucesión de axiomas

$$T_4 \Rightarrow T_{3\frac{1}{2}} \Rightarrow T_3 \Rightarrow T_2 \Rightarrow T_1 \Rightarrow T_0$$

Ya con estas nociones, lo que sigue es obtener su significado en el lenguaje de retículas de conjuntos abiertos, es decir, modificaremos aquello que sea necesario para que todas esas condiciones dadas para puntos o conjuntos cerrados queden en términos de conjuntos abiertos, pero esa es tarea para siguiente sección.

Podemos definir nociones entre espacios que son T_0 y T_1 y también entre T_1 y T_2. A estos espacios, en la literatura, se les denotan por R_0 y R_1.

$$(\mathbf{R_0}) \qquad \forall x, y \in S, x \in \overline{\{y\}} \Leftrightarrow y \in \overline{\{x\}}.$$

En otras palabras, $x \in \overline{\{y\}}$ implica que $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$. A los espacios que cumplen con esta propiedad también se les conoce como simétricos.

Ahora definimos a los espacios R_1.

$$(\mathbf{R_1}) \qquad \forall x, y \in S, \text{ si } \overline{\{x\}} \neq \overline{\{y\}} \Rightarrow \overline{\{x\}} \subseteq U \text{ y } \overline{\{y\}} \subseteq V.$$

para algunos abiertos disjuntos U y V.

El siguientes resultado relaciona a los espacios R_0 y R_1 con los que son T_1 y T_2 respectivamente.

Proposición 3.1.3 *Bajo T_0, $R_0 \Leftrightarrow T_1$. Bajo T_1, $R_1 \Leftrightarrow T_2$.*

Demostración. Consideremos un espacio S

i) Supongamos que S cumple R_0. Consideremos $x \in \overline{\{y\}}$, por R_0 se cumple que $\overline{\{x\}} = \overline{\{y\}}$ y por T_0 $x = y$. Por otro lado, si S cumple T_1 y consideramos $x \in \overline{\{y\}}$, por T_1 tenemos que $\overline{\{x\}} = \{x\}$ y $\overline{\{y\}} = \{y\}$. De esta manera $x = y$ y así $y \in \overline{\{x\}}$.

ii) Supongamos que R_1 se cumple. Sean $x \neq y$. Por T_1 $\overline{\{x\}} = \{x\} \neq \{y\} = \overline{\{y\}}$ y por R_1 existen $U, V \in \mathcal{O}S$ tales que $x \in U$ y $y \in V$. Por otro lado, supongamos que se cumple T_2, entonces para $x \neq y$ $\exists$ U, V abiertos disjuntos tales que $x \in U$ y $y \in V$. Al cumplirse T_1 $\overline{\{x\}} = \{x\}$ y $\overline{\{y\}} = \{y\}$, de aquí que $\overline{\{x\}} = \{x\} \subseteq U$ y $\overline{\{y\}} = \{y\} \subseteq V$.

$\square$

De esta manera, denotando la regularidad y le regularidad completa por R_2 y R_3, respectivamente, tenemos la siguiente relación.

$$\begin{tikzcd}
T_4 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & T_{3\frac{1}{2}} \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & T_3 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & T_2 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & T_1 \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & T_0 \\
 & (norm) & R_3 \arrow[r, Rightarrow] & R_2 \arrow[r, Rightarrow] & R_1 \arrow[r, Rightarrow] & R_0
\end{tikzcd}$$

3.2 Las "traducciones" de las nociones de separación

Cuando hacemos mención a "traducción" nos referimos a trasladar cada una de las distintas nociones dadas en el lenguaje sensible a puntos a lo que significan cada una de estas en el lenguaje de retículas de abiertos. Recordemos que en $\mathcal{O}S$, los objetos con los que trabajamos son los conjuntos abiertos. De esta manera, nuestro objetivo es trasladar los axiomas de separación en términos de los elementos de $\mathcal{O}S$.

De manera similar a como fueron enunciados en la sección anterior, presentaremos los axiomas de separación en orden ascendente según la “fuerza” de estos. Comenzaremos con T_0 y terminaremos con la noción de normalidad. Aclaramos que en esta parte no se hará mención a la traducción de ser T_2. Esta recibirá un tratamiento especial más adelante.

3.2.1 T_0 sin puntos

Primero, recordemos que la propiedad de separación T_0 nos menciona que si tenemos cualesquiera dos puntos de un espacio, estos pueden ser separados por un conjunto abierto de tal manera que un punto este en el abierto y el otro no. En el lenguaje de retículas, esta noción no aporta mucha información. Si T_0 no se cumple, entonces para $x, y \in S$ distintos se tiene que para todo abierto $U \in \mathcal{O}S$, $x \in U$ si y solo si $y \in U$.

De esta manera, en el lenguaje de retículas de abiertos, estos dos puntos son indistinguibles. Por lo tanto, para evitar esta situación supondremos que el axioma T_0 se cumple para los distintos espacios con los que trabajaremos. Además, bajo este supuesto, no se buscará una equivalencia para esta noción.

3.2.2 T_1 sin puntos

Sabemos que en un espacio T_1, para todo $x \in S$, $\overline{\{x\}} = \{x\}$, es decir, los conjuntos de un punto son cerrados, en consecuencia todos los conjuntos finitos son cerrados. Luego, si $\{x\}$ es cerrado, entonces $S \setminus \{x\}$ es abierto y es un elemento máximo en $\mathcal{O}S$. Además, los elementos de la forma $S \setminus \overline{\{x\}}$ son $\wedge-$irreducibles. De esta manera tenemos una noción equivalente a ser T_1.

$(\mathbf{T_{1_S}})$ Un espacio es $T_1 \Leftrightarrow$ todo elemento $\wedge-$irreducible es máximo.

3.2.3 Regularidad sin puntos

Para obtener la noción sin puntos de la regularidad necesitamos dar antes una definición.

Definición 3.2.1 *Para $U, V \in \mathcal{O}S$ decimos que V está* bastante por debajo *de U, y lo denotamos por $V \prec U$, si $\overline{V} \subseteq U$.*

Notemos que la definición no está aun en el lenguaje de retículas de abiertos, pero hay una manera de arreglarla pues en $\mathcal{O}S$ tenemos pseudocomplementos, es decir, tenemos un elemento V tal que $U \cap V = \emptyset$. De esta manera, para $V^* = S \setminus \overline{V}$, tenemos

$$V \prec U \Leftrightarrow \overline{V} \subseteq U \Leftrightarrow U \cup V^* = S.$$

Así, la noción de regularidad sin puntos es la siguiente.

$(\mathbf{reg_S})$ S es regular $\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{O}S, U = \bigcup\{V \mid V \prec U\}$.

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que S es regular y sea $U \in \mathcal{O}S$. Para $x \in U$ consideramos $A = S \setminus U$ y por la regularidad tenemos que existe $V_x, W \in \mathcal{O}S$ tales que $x \in V_x$, $A \subseteq W$ y $V_x \cap W = \emptyset$. Como $A \subseteq W$, entonces $W \cup U = S$, de aquí que $x \in V_x \succ U$. Por lo tanto

$$U = \bigcup\{V_x \mid x \in S\} \subseteq \bigcup\{V \mid V \succ U\} \subseteq U$$

$\Leftarrow$) Supongamos que $U = \bigcup\{V \mid V \succ U\}$ y sea $x \notin A$ donde $A \in \mathcal{C}S$. De aquí que $x \in U = S \setminus A$ y por lo tanto $x \in V$ para algún $V \succ U$. De aquí que, para $W = S \setminus \overline{V}$, $A \subseteq W$ y $V \cap W = \emptyset$, es decir, se cumple la regularidad.

□

Equivalentemente a lo que hicimos en la sección anterior

$$T_{3_S} = (\mathbf{reg_S}) + T_{1_S}.$$

3.2.4 Completamente regular sin puntos

Recordemos que si S es un espacio completamente regular, entonces S es regular. Con esto en mente podríamos esperar que la traducción de completamente regular tenga relación con la noción bastante por debajo. La manera más natural de realizarlo sería interpolando $\prec$, es decir, si para U, V abiertos tales que $V \prec U$, existe W abierto para el cual $V \prec W \prec U$, pero eso no es del todo cierto.

Para reparar esto, consideremos el conjunto D de los racionales diádicos en el intervalo unitario cerrado $\mathbb{I} \subseteq \mathbb{R}$, es decir,

$$D = \{\frac{k}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}, k = 0, 1, \ldots, 2^n\}.$$

Definición 3.2.2 *Para $U, V \in \mathcal{O}S$, decimos que V está* completamente por debajo *de U, denotado por $V \prec\prec U$, si existen abiertos U_d, con $d \in D$, tales que*

$$U_0 = V, \qquad U_1 = U, \qquad U_d \prec U_e,$$

es decir, $\overline{U_d} \subseteq U_e$ para $d < e$.

Notemos lo siguiente:

- Si $V' \subseteq V \prec\prec U \subseteq U'$, entonces $V' \prec\prec U'$.
- La relación $\prec\prec$ es interpolativa.
- Si W interpola $\prec\prec$, entonces W interpola $\prec$.

Proposición 3.2.3 *Para un espacio topológico S consideremos $U_d \in \mathcal{O}S$, con $d \in D$, tal que $U_0 = V$, $U_1 = U$ y $U_d \succ U_e$, para $d < e$. Definimos*

$$\Phi(x) = \inf\{d \mid x \in U_d\}.$$

Entonces Φ es continua.

Así, usando la Definición 3.2.2, tenemos

$(\mathbf{cregs_S})$ S es completamente regular $\Leftrightarrow \forall U \in \mathcal{O}S, U = \bigcup\{v \mid V \prec\!\prec U\}$.

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea S completamente regular. Consideremos $U \in \mathcal{O}S$ y $x \in U$. Entonces $x \in S \setminus U$ y por lo tanto existe una función continua $f\colon S \to \mathbb{I}$ tal que $f(x) = 0$ y $f(y) = 1$ para $y \notin U$. Para $d \in D$ consideramos

$$U_d = f^{-1}([0, \frac{1+d}{2}))\ \text{ y }\ B_d = f^{-1}([0, \frac{1+d}{2}]),$$

de aquí que $U_d \in \mathcal{O}S$ y $B_d \in \mathcal{C}S$ y para $d < e$, $B_d \subseteq U_e$. Así $B_d = \overline{U_d} \subseteq U_e$, es decir, $U_d \succ U_e$. Y por la Definición 3.2.2 tenemos que para $U(x) = U_0 \succ\!\succ U_1$. Como $x \in U(x)$ y $U_1 \subseteq U$, por la interpolatividad de $\succ\!\succ$, tenemos que $x \in U(x) \succ\!\succ U$. Por lo tanto

$$U = \bigcup\{U(x) \mid x \in S\} \subseteq \bigcup\{V \mid V \succ\!\succ U\} \subseteq U$$

$\Leftarrow$) Supongamos que $U = \bigcup\{V \mid V \succ\!\succ U\}$ se cumple y consideremos $A \in \mathcal{C}S$ tal que $x \notin A$. Para $U = S \setminus A$, entonces $x \in U$ y por hipótesis tenemos $V \succ\!\succ U$ tal que $x \in V$. Si tomamos un sistema $(U_d)_{d\in D}$ como testigo para $V = U_0 \succ\!\succ U_1 = U$ y la función continua definida en la Proposición 3.2.3 vemos que $\Phi(x) = 0$, pues $x \in U_d$, para $d \in D$, en particular para U_0 y 0 es el menor de los d. Para $y \in A$,

$$\Phi(y) = \inf\{d \mid y \in U_d\},$$

pero $y \in A$, es decir, $y \notin U_d$ para $d \in D$, entonces $d \mid y \in U_d\} = \emptyset$, de aquí que $\Phi(y) = 1$ y se cumple la definición de completamente regular.

□ Por lo tanto

$$T_{3\frac{1}{2}_S} = (\mathbf{cregs_S}) + T_{1_S}.$$

3.2.5 Normalidad sin puntos

La normalidad es una noción que está enunciada sin el uso de puntos. De esta manera su traducción al lenguaje de retículas de conjuntos abiertos es más sencilla. En la normalidad separamos cualesquiera dos conjuntos cerrados distintos por medio de dos abiertos disjuntos.

Para un espacio S, consideremos $A, B \in \mathcal{C}S$, entonces $X = S \setminus A$ y $Y = S \setminus B$ están en $\mathcal{O}S$. Además, $A \subseteq U$ y $B \subseteq V$, para abiertos U y V, si y solo si $X \cup U = Y \cup V = S$. Por lo tanto, el espacio S es normal si se cumple

$(\mathbf{norm_S})$ Para $X, Y \in \Omega(S)$, con $X \cup Y = S$, entonces $\exists U, V \in \Omega(S)$ tales que

$$X \cup U = S, \qquad Y \cup V = S, \qquad U \cap V = \emptyset.$$

Y así,

$$T_{4_S} = (\mathbf{norm_S}) + T_{1_S}.$$

3.2.6 Propiedades de separación para marcos

Sabemos que si S es un espacio topológico, $\mathcal{O}S$ es un marco. Todo lo que hemos hecho en esta sección es dar la equivalencia de las propiedades de separación en términos de elementos en $\mathcal{O}S$, es decir, para un marco particular. En este punto debemos preguntarnos lo siguiente, ¿qué pasa para un marco A arbitrario?

Para responder la pregunta anterior lo único que necesitamos hacer es trasladar las nociones presentadas considerando elementos arbitrarios en un marco A en lugar de conjuntos abiertos en $\mathcal{O}S$. La siguiente es la equivalencia de bastante por debajo en la teoría de marcos.

$$a \prec b \equiv_{dm} \exists\, c \in A \text{ tal que } a \wedge c = 0 \text{ y } b \vee c = 1$$

donde $a, b \in A$.

Con esto en mente, podemos dar la respectiva equivalencia para que un marco sea regular y completamente regular. Usaremos m como subíndice para indicar que las nociones están dadas en el lenguaje de marcos.

$(\mathbf{reg_m})$ $\forall\, a \in A, a = \bigvee\{x \in A \mid x \prec a\}$.

$(\mathbf{creg_m})$ $\forall\, a \in A, a = \bigvee\{x \in A \mid x \prec\!\prec a\}$.

Ahora damos la noción de normalidad para marcos.

$(\mathbf{norm_m})$ $\forall\, a, b \in A,$ tales que $a \vee b = 1, \exists\, u, v \in A$ tales que

$$a \vee u = b \vee v = 1 \text{ y } u \wedge v = 0$$

3.3 Propiedades de separación adicionales

En la literatura se pueden encontrar algunas propiedades de separación adicionales. La primera que discutiremos es más fuerte que T_0, pero más débil que T_1.

$(\mathbf{T_D})$ $\forall x \in S,\ \exists\, U \in \mathcal{O}S$ tal que $x \notin U$ y $U \setminus \{x\} \in \mathcal{O}S$.

Podemos ver que T_1 implica T_D y que T_D implica T_0.

Proposición 3.3.1 *Un espacio S satisface T_D si y solo si para cada $x \in S$*

$$(S \setminus \overline{\{x\}} \cup \{x\} \in \mathcal{O}S.$$

Demostración.

$\Rightarrow$) Consideremos un espacio S que satisface T_D y sea $U \in \mathcal{O}S$ como el que aparece en $(\mathbf{T_D})$. Para $x \neq y$ el conjunto $V = (S \setminus \overline{\{x\}}) \cup \{x\}$ es una vecindad de y y una vecindad para x, pues si $x \in U$, entonces $U \setminus \overline{\{x\}} = U \setminus \{x\}$ y por lo tanto $x \in U \subseteq V$. De aquí que V es abierto.

$\Leftarrow$) Si $V = (S \setminus \overline{\{x\}}) \cup \{x\}$ es abierto tenemos que si $x \in V$, entonces

$$V \setminus \{x\} = (S \setminus \overline{\{x\}}) \cup \{x\} \setminus \{x\} = S \setminus \overline{\{x\}}$$

y $S \setminus \overline{\{x\}} \in \mathcal{O}S$. Por lo tanto $V \setminus \{x\}$ es abierto, es decir, S es T_D.

$\square$

Teorema 3.3.2 *Sean S y T espacios que satisfacen T_D y sean $\mathcal{O}S$ y $\mathcal{O}T$ retículas isomorfas. Entonces S y T son homeomorfos.*

Demostración. Sea $\varphi\colon \mathcal{O}S \to \mathcal{O}T$ un isomorfismo de retículas. Para cada $x \in S$, $U(x) = S \setminus \overline{\{x\}}$ y $V(x) = U(x) \cup \{x\}$. Notemos que $U(x) \neq V(x)$ y por lo tanto $\varphi(V(x)) \setminus \varphi(U(x)) \neq \emptyset$.

Afirmación: El conjunto $D = \varphi(V(x)) \setminus \varphi(U(x)) \neq \emptyset$ consiste de un solo punto.

Prueba de la afirmación: Supongamos que existen dos puntos $y_1, y_2 \in D$. Como T es T_D, éste es en particular T_0 y así $y_2 \notin \overline{\{y_1\}}$. Como $y_1 \notin \varphi(U(x))$, entonces $\overline{\{y_1\}} \cap \varphi(U(x)) = \emptyset$. Por lo tanto

$$\varphi(U(x)) \subsetneq (V(x)) \setminus \overline{\{y_1\}} \subsetneq \varphi(V(x)).$$

Denotando $W = \varphi(V(x)) \setminus \overline{\{y_1\}}$ y aplicando el inverso del isomorfismo, φ^{-1}, a las contenciones anteriores obtenemos

$$S \setminus \overline{\{x\}} \subsetneq \varphi^{-1}(W) \subsetneq (S \setminus \overline{\{x\}} \cup \{x\}.$$

Lo cual es una contradicción, pues $S \setminus \overline{\{x\}} \subseteq S \setminus \overline{\{x\}} \cup \{x\}$. Por lo tanto, denotando por $f(x)$ al único elemento de D tenemos

$$\{f(x)\} = \varphi(V) \setminus \varphi(U) \Rightarrow \varphi(V(x)) = \varphi(U(x)) \cup \{f(x)\}$$

Sabemos que $\overline{\{y_1\}} \cap \varphi(U(x)) = \emptyset$ y en consecuencia $\varphi(U(x)) \subseteq T \setminus \overline{\{f(x)\}}$. Notemos que no se cumple $\varphi(U(x)) \subsetneq T \setminus \overline{\{f(x)\}}$, pues de ser así tendríamos

$$U(x) \subsetneq \varphi^{-1}(T \setminus \overline{\{f(x)\}}) \Rightarrow V(x) \subseteq \varphi^{-1}(T \setminus \overline{\{f(x)\}}) \Rightarrow \varphi(V(x)) \subseteq T \setminus \overline{\{f(x)\}}$$

contradiciendo que $f(x) \in \varphi(V(x))$. Así $\varphi(S \setminus \overline{\{x\}}) = T \setminus \overline{\{f(x)\}}$.

Similarmente para φ^{-1}, tenemos una función $g\colon T \to S$ tal que

$$\varphi^{-1}(T \setminus \overline{\{y\}}) = S \setminus \overline{\{g(y)\}}.$$

Las funciones $f\colon S \to T$ y $g\colon T \to S$ son inversas entre si, de hecho

$$S \setminus \overline{\{x\}} = \varphi^{-1}(\varphi(S \setminus \overline{\{x\}} = \varphi^{-1}(V \setminus \overline{\{f(x)\}}) = S \setminus \overline{\{g(f(x))\}}$$

y por lo tanto $x = gf(x)$. Similarmente $y = fg(y)$.

Resta ver que son homeomorfismos, para esto basta probar que para cualquier $U \in \mathcal{O}S$, $f(U) = \varphi(U)$. Consideremos $x \notin U$, entonces

$$U \subseteq S \setminus \overline{\{x\}} \Rightarrow \varphi(U) \subseteq \varphi(S \setminus \overline{\{x\}} = T \setminus \overline{\{f(x)\}},$$

es decir, $\varphi(U) \cap \overline{\{f(x)\}}$. Luego $f(x) \notin \varphi(U)$ y así

$$x \notin U \Rightarrow f(x) \notin \varphi(U).$$

Similarmente $y \notin \varphi(U) \Rightarrow g(y) \notin \varphi^{-1}(\varphi(U)) = U$. Por lo tanto, considerando $y = f(x)$, $x \notin U \Leftrightarrow f(x) \in \varphi(U)$ y finalmente $F(U) = \varphi(U)$. $\square$

Una de las aplicaciones de la propiedad T_D la podemos encontrar en la topología sin puntos. Recordemos que los subespacios están bien representados por su marco de congruencias. Con esto en mente, podemos enunciar el siguiente resultado.

Teorema 3.3.3 *Sean X y Y subespacios distintos de S. $E_X \neq E_Y$ si y solo si S es un espacio T_D.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Consideremos $X \neq Y$ tales que $E_X \neq E_Y$, en particular,

$$E_{S\setminus\{x\}} \neq E_S.$$

Por lo tanto existe un abierto $U \nsubseteq V$ tal que

$$U \cap (S \setminus \{x\}) = U \setminus \{x\} = V \cap (S \setminus \{x\}) = V \setminus \{x\}.$$

Lo cual solo es posible precisamente si $x \in U$ y $V = U \setminus \{x\}$, es decir, S es T_D.

$\Leftarrow$) Sean S un espacio T_D y $a \in X \setminus Y$. Consideremos los abiertos $U \ni a$ y $V = U \setminus \{a\}$. Entonces $U \cap X \neq V \cap X$ mientras $U \cap Y = V \cap Y$. Así $E_X \neq E_Y$.

$\square$

A lo largo de estas notas encontraremos distintas propiedades de separación. Cada una de estas utilizadas o presentadas para diferentes situaciones. La mayoría de ellas comparables entre si. La que presentamos ahora es la *sobriedad*. La manera en la que la abordamos en esta sección es equivalente a la que presentaremos en el siguiente capítulo.

En la Definición 1.1.12 mencionamos que un elemento $p \in A$ es $\wedge-$irreducible si $p \neq 1$ y si $a \wedge b \leq p$, entonces $a \leq p$ o $b \leq p$. En ocasiones, la noción anterior es presentada en la literatura como ser primo.

En la Subsección 3.2.2 vimos que para un espacio S y $x \in S$, entonces $S \setminus \overline{\{x\}}$ es un elemento $\wedge-$irreducible en $\mathcal{O}S$.

Definición 3.3.4 *Un espacio se dice que es* sobrio *(en la formulación de Grothendieck y Dieudonné), si este es T_0 y si todos los elementos $\wedge-$irreducibles son de la forma $S \setminus \overline{\{x\}}$.*

Notemos que bajo el supuesto de que todos los espacio con los que trabajaremos son T_0, la asignación $x \mapsto S \setminus \overline{\{x\}}$ es inyectiva. De esta manera, los elementos $\wedge-$irreducibles en los espacios sobrios están determinados de manera única.

Proposición 3.3.5 *Cada espacio T_2 es sobrio, pero la sobriedad es incomparable con T_1.*

Demostración.

i) Sean S un espacio T_2 y $P \in \mathcal{O}S$ un elemento $\wedge-$irreducible. Supongamos que existe $x, y \notin P$, con $x \neq y$. Por T_2, elegimos $U, V \in \mathcal{O}S$ tales que $x \in U$, $y \in V$ y $U \cap V = \emptyset$. De aquí que
$$P = (P \cup U) \cap (P \cup V) = P \cup (U \cap V) = P \cup \emptyset.$$
Notemos que ni $P \cup U$ o $P \cup V$ es P. Por lo tanto $P = S \setminus \{x\}$, es decir, S es sobrio.

ii) Consideremos S un espacio infinito dotado de la topología cofinita, es decir,
$$U \in \mathcal{O}S \Leftrightarrow U = \emptyset \ \text{ o } \ S \setminus U \text{ es finito.}$$
Este espacio es T_1, pero no es sobrio, pues $\emptyset$ es un elemento $\wedge-$irreducible y $\emptyset \neq S \setminus \overline{\{x\}}$ para todo $x \in S$.

iii) Sea S el espacio de Sierpinski, es decir,
$$S = (S = \{0, 1\}, \mathcal{O}S = \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}).$$
Los elementos $\wedge-$irreducibles son $\emptyset = S \setminus \overline{\{1\}}$ y $\{1\} = S \setminus \overline{\{0\}}$, por lo tanto S es sobrio, pero no es T_1.

$\square$

Una manera de caracterizar a los espacios sobrios es la siguiente.

Teorema 3.3.6 *Un espacio S que es T_0 es sobrio si y solo si los filtros completamente primos en $\mathcal{O}S$ son precisamente los filtros de vecindades*
$$F(x) = \{U \in \mathcal{O}S \mid x \in U\}.$$

Demostración.

$\Rightarrow$) Consideremos un espacio S sobrio y $\mathcal{F}$ un filtro completamente primo. Sea
$$U_0 = \bigcup\{U \mid U \notin \mathcal{F}\}.$$
Al ser $\mathcal{F}$ un filtro completamente primo tenemos que $U_0 \notin \mathcal{F}$ y así U_0 es el elemento más grande de $\mathcal{O}S$ que no está en $\mathcal{F}$. Como los filtros son secciones superiores vemos que $U \in \mathcal{F}$ si y solo si $U \nsubseteq U_0$

Notemos que U_0 es un elemento $\wedge-$irreducible, pues si $U \cap V \subseteq U_0$, entonces $U \cap V \notin \mathcal{F}$. Lo cual implica que $U \notin \mathcal{F}$ o $V \notin \mathcal{F}$, es decir, $U \in U_0$ o $V \in U_0$. Además U_0 no es todo

S, pues de ser así $\mathcal{F}$ sería el filtro trivial.

Por lo tanto, por la sobriedad de S, tenemos que $U_0 = S \setminus \overline{\{x\}}$ para algún $x \in S$. De aquí que

$$U \in \mathcal{F} \Leftrightarrow U \nsubseteq U_0 \Leftrightarrow U \nsubseteq S \setminus \overline{\{x\}} \Leftrightarrow x \in U,$$

es decir, $\mathcal{F}(x) = \{U \in \mathcal{O}S \mid x \in U\}$.

$\Leftarrow)$ Supongamos que la afirmación sobre los filtros completamente primos se cumple y consideremos $P \in \mathcal{O}S$ $\wedge-$irreducible. Sea

$$\mathcal{F} = \{u \in \mathcal{O}S \mid U \nsubseteq P\}.$$

Notemos que $\mathcal{F}$ es un filtro. Primero, $\mathcal{F}$ es una sección superior. Además, si $U, V \nsubseteq P$, entonces $U \cap V \nsubseteq P$. Este también es un filtro completamente primo, pues si $U_i \subseteq P$ para todo $i \in \mathcal{J}$, se cumple que

$$\bigcup_{i \in \mathcal{J}} U_i \subseteq P.$$

Por lo tanto $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x)$ para algún x, es decir $U \nsubseteq P$ si y solo si $x \in U$. Luego

$$U \subseteq P \Leftrightarrow \{x\} \cap U = \emptyset \Leftrightarrow \overline{\{x\}} \cap U = \emptyset \Leftrightarrow U \subseteq S \setminus \overline{\{x\}}.$$

De aquí que $P = S \setminus \overline{\{x\}}$, es decir, S es sobrio.

□

Si tenemos un espacio S que no es sobrio, entonces podemos "*sobrificarlo*" por medio de elementos en $\mathcal{O}S$. A este proceso se le conoce como la construcción de la reflexión sobria. Este será abordado en el siguiente capítulo. Para lo que haremos en esta sección lo llamaremos *modificación sobria*.

Corolario 3.3.7 *Un espacio sobrio S puede ser reconstruido a partir de los elementos de $\mathcal{O}S$.*

Demostración. Para la retícula $L = \mathcal{O}S$ consideremos el conjunto

$$\tilde{S} = \{\mathcal{F} \mid \mathcal{F} \text{ es un filtro completamente primo en } L\}$$

Por el Teorema 3.3.6 este conjunto está en correspondencia uno a uno $x \mapsto \mathcal{F}(x)$ con S. Así, si definimos para $U \in \mathcal{O}S$ un subconjunto

$$\tilde{U} = \{\mathcal{F} \mid U \in \mathcal{F}\} \subseteq \tilde{S}.$$

Notemos que $\tilde{U}$ está determinado en términos de la retícula L, sin referencia a los puntos originales de S. De esta manera obtenemos el espacio topológico

$$(\tilde{S}, \{\tilde{U} \mid U \in \mathcal{O}S\})$$

el cual es homeomorfo con el espacio original S ya que $\mathcal{F}(x) \in \tilde{U} \Leftrightarrow x \in U$. □

Teorema 3.3.8 *Sea S un espacio sobrio. Entonces cada homomorfismo de marcos*

$$h\colon \mathcal{O}S \to \mathcal{O}T$$

está dado por $h = \mathcal{O}(f)$, donde $f: T \to S$ es una función continua $\mathcal{O}(f) = f^{-1}$. Por otro lado, si cada homomorfismo $h\colon \mathcal{O}S \to \mathcal{O}T$ es de la forma $h = \mathcal{O}(f)$, para una función continua $f\colon T \to S$, entonces S es sobrio.

Demostración.

$\Rightarrow$) Consideremos un espacio sobrio S y un homomorfismo $h\colon \mathcal{O}S \to \mathcal{O}T$. Para cada $y \in T$ sea

$$\mathcal{F}_y = \{U \in \mathcal{O}S \mid y \in h(U)\}.$$

Notemos que $\mathcal{F}_y$ es un filtro completamente primo. Primero $\mathcal{F}_y$ es una sección superior. Además, si $U, V \in \mathcal{F}_y$, entonces

$$y \in h(U) \cap h(V) = h(U \cap V) \Rightarrow U \cap V \in \mathcal{F}_y.$$

Por último, si $\bigcup_{i \in \mathcal{J}} U_i \in \mathcal{F}$ tenemos que

$$y \in h(\bigcup_{i \in \mathcal{J}} U_i) = \bigcup_{i \in \mathcal{J}} h(U_i).$$

Entonces $y \in h(U_j)$ para algún $j \in \mathcal{J}$. Por el Teorema 3.3.6 $\mathcal{F}_y = \mathcal{F}(x)$ para algún $x \in S$. Si consideramos $x = f(y)$ vemos que

$$y \in f^{-1}[U] \Leftrightarrow x = f(y) \in U \Leftrightarrow U \in \mathcal{F}(x) = \mathcal{F}_y \Leftrightarrow y \in h(U).$$

De aquí que $\mathcal{O}(f)[U] = f^{-1}[U] = h[U]$. Por lo tanto $h = \mathcal{O}(f)$.

$\Leftarrow$) Sin perdida de generalidad, consideremos el homomorfismo $h\colon \mathcal{O}S \to \mathcal{O}P$, donde $P = \{p\}$ es un espacio de un punto. Se puede verificar que cada h es de la forma $\mathcal{O}(f)$. Si $\mathcal{F}$ es un filtro completamente primo en $\mathcal{O}S$ definimos

$$h(U) = \begin{cases} P & \text{si} \quad U \in \mathcal{F} \\ \\ \emptyset & \text{si} \quad U \notin \mathcal{F} \end{cases}$$

Se puede verificar que el homomorfismo h respeta intersecciones finitas y uniones arbitrarias. De aquí que h es un morfismo de marcos. Por lo tanto $h = \mathcal{O}(f)$, donde $f\colon P \to S$. Sin embargo, existe un único f tal que $p \mapsto x$ con $x \in S$. De aquí que

$$U \in \mathcal{F} \Leftrightarrow h(U) = f^{-1}(U) = P \Leftrightarrow x = f(p) \in U.$$

Es decir, $\mathcal{F} = \mathcal{F}(x)$. Por lo tanto S es sobrio.

□

Por el Corolario 3.3.7, para un espacio S arbitrario que es T_0 podemos construir un espacio $\tilde{S}$ dado por

$$\tilde{S} = (\{F \mid F \text{ es un filtro completamente primo en } \mathcal{O}S\}, \{\tilde{U} \mid U \in \mathcal{O}S\}),$$

donde $\tilde{U} = \{F \mid U \in F\}$.

Como nuestros filtros son no triviales, tenemos $\tilde{} = \emptyset$ y $\tilde{S} = S$. Además,

$$\tilde{U} \cap \tilde{V} = \{F \mid U \in F, V \in F\} = \{F \mid U \cap V \in F\} = \widetilde{U \cap V}$$

$$\widetilde{\bigcup_{i \in J} U_i} = \{F \mid \bigcup_{i \in J} U_i \in F\} = \{F \mid \exists i \in J, U_i \in F\} = \bigcup_{i \in J} \widetilde{U_i}$$

es decir, la modificación sobria es una topología. Finalmente, denotando

$$F(x) = \{U \mid x \in U\},$$

de esta manera si $U \nsubseteq V$ existe $x \in U \setminus V$ y por lo tanto $F(x) \in \tilde{U} \setminus \tilde{V}$. De está manera obtenemos

Observación 3.3.9 *La asignación $U \mapsto \tilde{U}$ establece un isomorfismo entre $\mathcal{O}S$ y $\mathcal{O}\tilde{S}$.*

Con todo lo anterior, podemos concluir que la modificación sobria se comporta de manera agradable. Resta verificar que efectivamente hacer esta construcción nos devuelve un espacio sobrio.

Proposición 3.3.10 *El espacio $\tilde{S}$ es sobrio.*

Demostración. Consideremos un filtro completamente primo $\mathcal{F}$ en $\mathcal{O}\tilde{S}$. Definimos

$$F = \{U \in \mathcal{O}S \mid \tilde{U} \in \mathcal{F}\}.$$

Veamos que F es un filtro completamente primo que se puede describir como un filtro de vecindades.

Primero, consideremos $U, V \in F$, entonces $\widetilde{U \cap V} = \tilde{U} \cap \tilde{V} \in F$. Similarmente, si $U \in F$ y $U \subseteq V$, al ser $\mathcal{F}$ completamente primo, tenemos que $\tilde{U} \subseteq \tilde{V} \in \mathcal{F}$. Así $V \in F$. Por último, si

$$\bigcup_{i \in \mathcal{J}} U_i \in F \Rightarrow \widetilde{\bigcup_{i \in \mathcal{J}} U_i} = \bigcup_{i \in \mathcal{J}} \widetilde{U_i} \in \mathcal{F}.$$

Como $\mathcal{F}$ es completamente primo $\exists\ i \in \mathcal{J}$ tal que $\widetilde{U_i} \in \mathcal{F}$ y así $U_i \in F$. Por lo tanto F es un filtro completamente primo.

Resta verificar que F es un filtro. Sabemos que

$$\tilde{U} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow U \in F \Leftrightarrow F \in \tilde{U}.$$

Así, $\mathcal{F}(F) = \{\tilde{U} \in \mathcal{O}\tilde{S} \mid F \in \tilde{U}\}$ es un filtro de vecindades. Por lo tanto $\tilde{S}$ es sobrio. □

Proposición 3.3.11 *Un espacio S que es T_0 tiene la propiedad de que $\mathcal{O}S \cong \mathcal{O}T$ solamente para T homeomorfo a S si y solo si T es sobrio.*

Demostración. Si S es sobrio, por el Corolario 3.3.7 tenemos que $\mathcal{O}S \cong \mathcal{O}\tilde{S}$, donde, por la construcción de la modificación sobria, $\tilde{S}$ es sobrio. Si S no es sobrio, consideramos $\tilde{S}$ el cual es un espacio sobrio , pero no homeomorfo a S y por la Observación 3.3.9 se cumple la condición de que $\mathcal{O}S \cong \mathcal{O}\tilde{S}$. $\square$

Para terminar esta sección, recordemos que los funtores $\mathcal{O}$ y pt forman una adjunción. Los resultados anteriores proporcionan la información de cuando entre estos dos existe una equivalencia. Si nos restringimos a espacios sobrios y marcos espaciales tenemos

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Top} \arrow[r, "\tilde{(_)}"] \arrow[d, shift right, "\mathcal{O}"'] & \mathrm{sob} \arrow[d, shift right] \arrow[d, phantom, "\cong"] \\
\mathrm{Frm} \arrow[u, shift right, "\mathrm{pt}"'] \arrow[r, "sp"'] & \mathrm{Frm}_{sp} \arrow[u, shift right]
\end{tikzcd}$$

3.4 Las nociones de subajustado y ajustado

Estas nociones aparecieron en la literatura como propiedades bajas de separación, ideales para ser tratadas en el contexto sin puntos. Subajustado fue la primera en ser presentada, en 1938 se enunció por Wallman con el nombre de disyuntividad. Años más tarde se formula su noción dual, conocida como conjuntividad y es la manera en la que actualmente se trabaja con la propiedad de que un espacio sea subajustado. Con la intención de resolver algunos defectos categóricos que presentaba esta noción, se introduce la propiedad de espacio ajustado. Como veremos más adelante, esta última implica subajustado.

De manera similar a como presentamos los axiomas de separación, daremos dos versiones diferentes (pero equivalentes entre si), de subajustado y ajustado. A estas las llamaremos nociones de primer orden y segundo orden, según la forma en la que sean enunciada.

3.4.1 Subajustado

Para comenzar a hablar de esta noción consideremos un espacio S y $\mathcal{C}S$ su retícula de conjuntos cerrados. Wallman presenta la propiedad disyuntiva como

$$\text{Si } a \neq b, \exists\, c \in S \text{ tal que } a \wedge c \neq 0 = b \wedge c$$

donde $a, b, c \in \mathcal{C}S$.

Notemos que para efectos de la teoría que nos interesa desarrollar, necesitamos la noción dual, que como mencionamos al principio de esta sección, fue presentada como propiedad conjuntiva, actualmente subajustado. Diremos que un espacio S es *subajustado* si

$(\mathbf{saju})$ para $a \nleq b\ \exists\, c \in S$ tal que $a \vee c = 1 \neq b \vee c$, donde $a, b \in \mathcal{O}S$.

A la forma en la que está enunciada esta noción la denominaremos como *de primer orden*.

Teorema 3.4.1 *Un espacio es subajustado, es decir $\mathcal{O}S$ satisface* $(\mathbf{saju})$*, si y solo si para cada $x \in S$ y cada abierto $U \in \mathcal{O}S$ existe $y \in S$ tal que $y \in \overline{\{x\}}$ con $\overline{\{y\}} \subseteq U$.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que el espacio S es subajustado y sea $U \ni x$ un abierto. Como $U \nsubseteq U \setminus \overline{\{x\}}$, por $(\mathbf{saju})$, existe $W \in \mathcal{O}S$ tal que

$$U \cup W = S \quad \text{y} \quad (U \setminus \overline{\{x\}}) \cup W \neq S. \tag{3.1}$$

Tomando $y \notin (U \setminus \overline{\{x\}}) \cup W$. Entonces

$$y \notin U \setminus \overline{\{x\}}, \quad y \notin W, \quad y \in \overline{\{x\}}. \tag{3.2}$$

Sea $z \notin U$ para algún $z \in \overline{\{y\}}$, por 3.1, $z \in W$. Al ser W abierto, $y \in W$, lo cual contradice 3.2. Por lo tanto se debe cumplir que $\overline{\{y\}} \subseteq U$.

$\Leftarrow$) Consideremos $U \nsubseteq V$. Sean $x \in U \setminus V$ y $y \in S$ tal que $y \in \overline{\{x\}}$ con $\overline{\{y\}} \subseteq U$. Entonces para $W = S \setminus \overline{\{y\}}$ se cumple que $W \cup U = S$ y $y \notin W \cup V$, pues si $y \in V$, entonces $x \in V$, lo cual no ocurre. Por lo tanto $W \cup V \neq S$, es decir S es subajustado.

□

Subajustado resulta ser más débil que la propiedad T_1. Por ejemplo, si consideramos el espacio $\omega + 1 = \{0, 1, 2, \dots\} \cup \{\omega\}$ donde $U \in \mathcal{O}\omega + 1$ si $\omega \in U$ o $U = \emptyset$, este es un espacio que cumple $(\mathbf{saju})$, pero no es T_1.

Proposición 3.4.2 T_D *y* $(\mathbf{saju})$ *coinciden con* T_1.

Demostración. Sabemos que T_1 implica subajustado y T_D. Ahora consideremos un espacio S que es T_D y subajustado. Por T_D elegimos un abierto $U \ni x$ tal que $U \setminus \{x\}$ es abierto. Al ser subajustado tenemos que existe $W \in \mathcal{O}S$ tal que

$$W \cup U = S \neq W \cup (U \setminus \{x\}).$$

Entonces $W \cup (U \setminus \{x\} = (W \cup U) \cap (W \cup S \setminus \{x\} = S \setminus \{x\}$ el cual es un conjunto abierto. Por lo tanto $\{x\}$ es cerrado, es decir, S es T_1. □

Corolario 3.4.3 T_D *y* $(\mathbf{saju})$ *son incomparables.*

Notemos que la normalidad más T_0 no implican completamente regular (y en consecuencia no implican regularidad), para solucionar esto lo que hicimos en la Sección 3.1 fue pedir que los espacios fueran T_1. Con la noción de subajustado podemos pedir menos que esto.

Proposición 3.4.4 *Un espacio subajustado y normal es regular.*

Demostración. Sea S un espacio normal y subajustado y supongamos que no se cumple

$$U \neq \bigcup\{V \in \mathcal{O}S \mid V \succ U\}.$$

Por $(\mathbf{saju})$ existe $W \in \mathcal{O}S$ tal que

$$W \cup U = S \quad \text{y} \quad W \cup \bigcup\{V \in \mathcal{O}S \mid V \succ U\} \neq S.$$

Por la normalidad existen $U_1, U_2 \in \mathcal{O}S$ tales que

$$U \cup U_1 = W \cup U_2 = S \quad \text{y} \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

De aquí que $\overline{U_2} \subseteq U$ lo cual implica que $U_2 \succ U$.

Así $U_2 \subseteq \bigcup\{V \in \mathcal{O}S \mid V \succ U\}$. Luego $W \cup \bigcup\{V \in \mathcal{O}S \mid V \succ U\} = S$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $U = \bigcup\{V \in \mathcal{O}S \mid V \succ U\}$. □

El resultado anterior es válido para la normalidad y la regularidad sin puntos.

Un marco A es espacial si es isomorfo a $\mathcal{O}S$ que se cumple precisamente si cada elemento de A es intersección de elementos $\wedge-$irreducibles. Una propiedad algo más fuerte es T_1-espacial, en la cual el marco A es isomorfo a $\mathcal{O}S$, con S un espacio T_1. Por lo tanto para T_1-espacial requerimos que cada elemento de A es intersección de elementos máximos.

Definición 3.4.5 *Decimos que un marco A es* máximo acotado *si para cada $1 \neq x \in A$ existe un elemento máximo $p \in A$, con $p < 1$, tal que $x \leq p$.*

Haciendo uso de la definición anterior podemos caracterizar los marcos subajustado y T_1-espacial.

Teorema 3.4.6 *Un marco máximo acotado es T_1-espacial si y solo si este es subajustado.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Consideremos $a \nleq b$. Elegimos un maximal p tal que $a \nleq p \geq b$. Así $p < a \vee p$ y por la maximalidad de p se cumple que $a \vee p = 1$ y $b \vee p = p \neq 1$.

$\Leftarrow$) Consideremos $a \nleq b$ y sea c tal que $a \vee c = 1 \neq b \vee c$. Sea $p < 1$ un elemento maximal tal que $p \geq b \vee c$. Así $p \ngeq a$. De modo que $a \nleq p \geq b$. Por lo tanto elementos maximales distinguen elementos distintos.

□

Teorema 3.4.7 *Un marco compacto y subajustado es T_1-espacial*

Demostración. Sea $\mathcal{C}$ una cadena en $L \setminus \{1\}$. Entonces para $X \subseteq \mathcal{C}$, $\bigcup X \neq 1$, pues en caso contrario existiría un elemento $C = 1 \in \mathcal{C}$, lo cual no es posible. Por lo tanto, por el Lema de Zorn, cada elemento en $L \setminus \{1\}$ es acotado por un elemento dentro de L, es decir, L es máximo acotado, y por el Teorema 3.4.6, L es T_1-espacial □

El Teorema 3.4.7 es conocido como Teorema de especialización de Isbell. Como consecuencia de este teorema tenemos que cada marco finito y subajustado es una álgebra booleana.

Para establecer (**saju**) consideramos un elemento $b \neq 0$. Si quitamos esta restricción obtenemos la noción de *débilmente subajustado*.

(**dsaju**) para $a \neq 0 \; \exists \, c \neq 1$ tal que $a \vee c = 1$.

Para un espacio S, el marco $\mathcal{O}S$ es débilmente subajustado si y solo si cada conjunto abierto no vacío contiene un conjunto cerrado no vacío, en otras palabras,

$$\forall \, U \in \mathcal{O}S, \text{ con } U \neq \emptyset, \exists \, x \in U \text{ tal que } \overline{\{x\}} \subseteq U.$$

Débilmente subajustado es más débil que subajustado.

Ejemplo 3.4.8 *Consideremos $S = \mathbb{N} \cup \{\omega_1, \omega_2\}$ dotado de la topología*

$$\{A \mid A \subseteq \mathbb{N}\} \cup \{A \cup \{\omega_1\} \mid A \subseteq \mathbb{N}\} \cup \{A \cup \{\omega_1, \omega_2\} \mid A \subseteq \mathbb{N}\} \cup \{\emptyset\}$$

con $\mathbb{N} \setminus A$ finito. Notemos que $\overline{\{n\}} = \{n\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, $\overline{\{\omega_1\}} = \{\omega_1, \omega_2\}$ y $\overline{\{\omega_2\}} = \{\omega_2\}$. $\mathcal{O}S$ es débilmente subajustado (ya que cada abierto no vacío contiene un conjunto cerrado $\{n\}$ para $n \in \mathbb{N}$), pero no es subajustado pues no satisface la condición del Teorema 3.4.1. Si consideramos $U = \mathbb{N} \cup \{\omega_1\} in \mathcal{O}S$ y $x = \omega_1 \in U$ tenemos $\overline{\{x\}} = \{\omega_1, \omega_2\}$, pero

$$\overline{\{\omega_1\}}, \overline{\{\omega_1\}} \nsubseteq U.$$

Proposición 3.4.9 *L es subajustado si y solo si cada sublocal cerrado de L es débilmente subajustado*

Demostración. Notemos que si $c(b)$ es un sublocal cerrado, entonces $c(b) = \uparrow b$, pues cada sublocal cerrado está en correspondencia biyectiva con el conjunto de puntos fijos

$$L_{u_b} = [b, 1] = \{a \in L \mid b \leq a\}.$$

Los supremos no triviales coinciden con los de L, pues $0 \neq 0_{\uparrow b}$. De está manera basta probar que $\uparrow b$ es subajustado para $c \in L$, con $b \leq c$, tendríamos que $\uparrow b$ es débilmente subajustado (pues $b = 0_{\uparrow b}$).

Para $a \neq b$ en $\uparrow b$ tenemos que $0_{\uparrow b} = b < a \vee b$ y por lo tanto existe $c \neq 1$, con $c \geq b$, tal que $(a \vee b) \vee c = a \vee c = 1$ y $b \vee c = c \neq 1$. □

Teorema 3.4.10 *Un marco L es débilmente subajustado si y solo si para $a \in L$,, el pseudocomplemento de a (a^*), se calcula por la fórmula*

$$a^* = \{\bigwedge \{x \mid a \vee x = 1\}.$$

Demostración.

$\Rightarrow$) Sea $u = \bigwedge \{x \mid a \vee x = 1\}$. Si $a \vee x = 1$, entonces

$$a^* = a^* \wedge (a \vee x) = (a^* \wedge a) \vee (a^* \wedge x) = a^* \wedge x,$$

de aquí que $a^* \leq u$.

Supongamos que $a \wedge u \neq 0$, por (**dsaju**), existe $c \neq 1$ tal que $(a \wedge u) \vee c = (a \vee c) \wedge (u \vee c) = 1$. Por lo tanto, $a \vee c = 1$, de modo que $c \leq u$ y en consecuencia $u \vee c = 1$ implica que $c = 1$, lo cual es una contradicción. Así $a \wedge u = 0$ y $u \leq a^*$. Luego $a = u$.

$\Leftarrow$) Si L no es débilmente subajustado existe $a \neq 0$ tal que $a \vee x = 1$ solamente si $x = 1$. Así consideramos $u = \bigwedge\{x \mid a \vee x = 1\} = 1$ y $a \wedge u = a \neq 0$.

$\square$

Notemos que para un elemento $a \in L$, con la fórmula anterior es como si estuviéramos calculando el suplemento de a (el b más pequeño tal que $a \vee b = 1$), el cual, de manera general, no necesariamente existe, incluso para marcos subajustados generales. En esta situación concreta, a^* no necesariamente cumple que $a \vee a^* = 1$, para ello es necesario la propiedad distributiva de comarcos.

$$a \vee \bigwedge b_i = \bigwedge (a \vee b_i).$$

Pero podemos concluir lo siguiente.

Teorema 3.4.11 *Sea L un marco débilmente subajustado que es también un comarco. Entonces L es un álgebra booleana.*

En particular, una retícula distributiva finita es booleana si y solo si esta es débilmente subajustada.

Proposición 3.4.12 *En un marco subajustado, un elemento es colineal si y solo si este es complementado.*

La suposición de subajustado es esencial en un marco finito, todos los elementos son colineales, pero no todos se complementan.

Consideremos un sublocal $S \sqsubseteq L$, el calcular ínfimo e implicación en S coincide con los cálculos en L. En particular, para un sublocal cerrado $c(b) = \uparrow b$, para $a \leq b$, los pseudocomplementos son

$$a^{*b} = (a \succ b).$$

Teorema 3.4.13 *Un marco L es subajustado si y solo si la implicación se calcula por la fórmula*

$$(a \succ b) = \bigwedge\{x \mid a \vee x = 1\,, b \leq x\}$$

Demostración.

$\Rightarrow$) Supongamos que L es subajustado. Entonces por el Teorema 3.4.9 $\uparrow b$ es débilmente subajustado. De aquí que

$$(a \succ b) = ((a \succ b) \wedge (b \succ b) = ((a \vee b) \succ b)$$

y como $a \vee b \geq b$, entonces $((a \vee b) \succ b) = (a \vee b)^{*b}$ y por la fórmula del Teorema 3.4.10

$$(a \succ b) = (a \vee b)^{*b} = \bigwedge\{x \mid a \vee b \vee x = 1,\ x \geq b\} = \bigwedge\{x \mid a \vee x = 1,\ x \geq b\}.$$

$\Leftarrow$) Supongamos que L no es subajustado. Por el Teorema 3.4.9 algunos de sus sublocales cerrados, $\uparrow b$, no son débilmente subajustados y por lo tanto, por el Teorema 3.4.10, considerando $b \leq a$, tal que

$$a^{*b} \neq \bigwedge\{x \mid a \vee x = 1, x \geq b\},\ \text{ es decir },\ (a \succ b) \neq \bigwedge\{x \mid a \vee x = 1, x \geq b\}.$$

□

El siguiente resultado no hace uso de suposiciones extras de distributividad.

Teorema 3.4.14 *Sea L un marco subajustado. Entonces todo homomorfismo completo $h\colon L \to M$ preserva la implicación.*

Demostración. Sea $H(u,v) = \{x \mid x \vee u = 1,\ x \geq v\}$, entonces en cualquier marco y para cualquier homomorfismo se cumple que

Afirmación:

$$\textbf{i)}\ (u \succ v) \leq \bigwedge H(u,v) \quad \text{y} \quad \textbf{ii)}\ h[H(u,v)] \subseteq H(h(u),h(v)) \tag{3.3}$$

Prueba de la afirmación:

i) Sea $x \in H(u,v)$, entonces

$$\begin{aligned}(u \succ v) = (x \vee u) \wedge (u \succ v) &= (x \wedge (u \succ v)) \vee (u \wedge (u \succ v)) \\ &\leq x \vee (u \wedge (u \succ v)) \\ &= x \vee v = x\end{aligned}$$

Por lo tanto $(u \succ v) \leq x$, en particular $((u \succ v) \leq \bigwedge H(u,v)$.

ii) Para $x \in H(u,v)$ se cumple que $h(x) \vee h(u) = h(x \vee U) = 1$. Además, si $x \leq v$, entonces $h(x) \leq h(v)$. Por lo tanto $h(x) \in H(h(u),h(v))$.

Luego, por el Teorema 3.4.13, $(a \succ b) = \bigwedge H(a,b)$. Así, por 3.3,

$$h(a \succ b)) = \bigwedge h[H(a,b)] \geq \bigwedge H(h(a),h(b)) \geq (h(a) \succ h(b)).$$

Además, $h(a \succ b) \leq (h(a) \succ h(b))$, pues

$$h(a) \wedge h(a \succ b) = h(a \wedge (a \succ b)) \leq h(b).$$

Por lo tanto $h(a \succ b) = (h(a) \succ h(b))$. □

3.4.2 Ajustado

Es el momento de analizar esta noción que fue dada por Isbell para solucionar los defectos categóricos que presentaba subajustado. Comenzaremos abordando nuevas caracterizaciones de marcos subajustados para después trasladarlas a los marcos ajustados.

Proposición 3.4.15 *Sea L subajustado. Entonces para cada sublocal $S \neq L$ existe un sublocal cerrado no vacío $c(a)$ tal que $c(a) \cap S = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{0}$ es el sublocal correspondiente al elemento* 1.

Demostración. Por contrapositiva, consideremos $S \subseteq L$ disjunto de todo sublocal cerrado no vacío, es decir,

$$c(a) \cap S = \mathbf{0}$$

donde $\mathbf{0} = \{1\}$ es el sublocal correspondiente al elemento 1 y $c(a) \neq \mathbf{0}$. Sea j_s el núcleo asociado a S, es decir,

$$j_S(x) = \bigwedge\{s \in S \mid x \leq s\}.$$

Notemos que si $j_S(a) = 1$, entonces $a = 1$. Consideremos $x \in L$ arbitrario y sea $c \vee j_S(x) = 1$. Sabemos que $j_S(c \vee x) \leq c \vee j_S(x) = 1$. De aquí que $c \vee x = 1$. Por $(\mathbf{saju})$, $c \vee x = 1 = c \vee j_S(x)$, entonces $j_S(x) \leq x$ y por lo tanto $j_S(x) = x$, es decir $x \in S$ y $L \subseteq S$. Por lo tanto $S = L$. $\square$

Teorema 3.4.16 *Las siguientes afirmaciones sobre un marco L son equivalentes.*

$i)$ *L es subajustado.*

$ii)$ *El único sublocal de L que es disjunto de un sublocal cerrado no vacío es el mismo L.*

$iii)$ *Cada sublocal abierto en L es supremo de sublocales cerrados.*

Demostración.

$i) \Rightarrow ii)$ Es la prueba del Teorema 3.4.15.

$ii) \Rightarrow iii)$ Consideremos un sublocal abierto $o(a)$ y sea

$$S = \bigvee\{c(b) \mid c(b) \subseteq o(a)\}.$$

Sea $c(x)$ un sublocal cerrado disjunto de $c(a) \vee S$. De aquí que

$$c(x \vee a) = [x \vee a, 1] = [x, 1] \cap [a, 1] = c(x) \cap c(a)$$

Notemos que por la forma en que consideramos a $c(x)$ tenemos que $c(x) \vee c(a) = \mathbf{0}$. Así $c(x) \subseteq o(a)$ y $c(x) \subseteq S$. Además. $c(x) \cap S = \mathbf{0}$, entonces $c(x) = \mathbf{0}$. Luego, por hipótesis, al ser $c(a) \vee S$ un sublocal cerrado y disjunto de un sublocal cerrado no vacío tenemos que $c(a) \vee S = L$. De aquí que $o(a) \subseteq S$ y $S \subseteq o(a)$. Por lo tanto $S = o(a)$.

$iii) \Rightarrow i)$ ***Afirmación:***

$$c(a) \subseteq o(b) \Leftrightarrow a \vee b = 1 \tag{3.4}$$

Prueba de la afirmación: Supongamos que $c(a) \subseteq o(b)$. Notemos que

$$c(a \vee b) = c(a) \cap c(b) \subseteq o(a) \cap c(b) = \mathbf{0},$$

es decir, $a \vee b = 1$.

Recíprocamente, supongamos $a \vee b = 1$. Notemos que $c(a \vee b) = 0$ y $c(a \vee b) = c(a) \cap c(b) = 0$. Por lo tanto $c(a) \subseteq o(b)$.

Ahora, si $a \nleq b$, entonces $o(a) \nsubseteq o(b)$ y así existe $x \in L$ tal que $c(x) \subseteq o(a)$ y $c(x) \nsubseteq o(b), es decir,$ $x \vee a = 1$ y $x \vee b \neq 1$. Por lo tanto L es subajustado

□

La equivalencia 1) $\Leftrightarrow$ 3) es lo que denominaremos como noción de *segundo orden*. Para abreviarla únicamente nos referiremos a ella como **abierto como supremo**. Esta fue la forma en la que Isbell enuncio subajustado, para la noción de ajustado tenemos

cada sublocal cerrado es ínfimo de sublocales abiertos

y de la misma manera que lo hicimos para subajustado, nos referiremos a ella como **cerrado como ínfimo**. Esta será nuestra noción de segundo orden para ajustado. La noción de primer orden vienen enunciada en el siguiente teorema.

Teorema 3.4.17 *Cada sublocal cerrado en L es ínfimo de abiertos si y solo si*

$(\mathbf{aju})$ $\forall a, b \in L$, $a \nleq b$, $\exists\, c \in L$ *tal que* $a \vee c = 1$ *y* $c \succ b \neq b$.

Demostración. Supongamos que $c(a) = \bigcap\{o(x) \mid x \in L\}$, por 3.4, es equivalente a

$$c(a) \subseteq \bigcap\{o(x) \mid x \in L\} \quad \text{y} \quad c(a) \supseteq \bigcap\{o(x) \mid x \in L\},$$

que por 3.4 es equivalente a

$$c(a) \subseteq \bigcap\{o(x) \mid x \vee a = 1\} \quad \text{y} \quad c(a) \supseteq \bigcap\{o(x) \mid x \vee a = 1\},$$

es decir, si $b \in \bigcap\{o(x) \mid x \vee a = 1\}$, entonces $b \in c(a)$. Todo lo anterior equivale a las afirmaciones

$$a \vee x = 1 \quad \text{y} \quad (x \prec b) = b \quad \Rightarrow \quad a \leq b$$

donde $(x \succ b) = b$ se cumple por la correspondencia del sublocal abierto con el núcleo $v_x(b)$. Así, considerando la negación de la implicación anterior obtenemos $(\mathbf{aju})$. □

Veamos ahora que ajustado implica subajustado, para probar esto haremos uso de las nociones de primer orden. Supongamos que L es ajustado, entonces considerando el c de la fórmula tenemos que si $c \vee b = 1$, entonces

$$b = (1 \succ b) = ((c \vee b) \succ b) = (c \succ b) \wedge (b \succ b) = (c \succ b),$$

es decir, $b = (c \succ b)$, lo cual es equivalente a que si $b \neq (c \succ b)$, entonces $c \vee b \neq 1$ y recuperamos la fórmula de primer orden de $(\mathbf{saju})$.

Las afirmaciones abierto como supremo y cerrado como ínfimos podrían parecer duales entre si, pero como vimos antes, ajustado es más fuerte. De hecho, como veremos más adelante, ajustado es equivalente a una afirmación más fuerte sobre sublocales arbitrarios.

Ejemplo 3.4.18 *La topología cofinita proporciona el ejemplo de un espacio que es subajustado, pero no es ajustado. Para verificar lo anterior basta calcular la implicación para cualesquiera dos subconjuntos $U, V \in S$, donde S tiene la topología cofinita. Notemos que para este caso, S es T_1 y en consecuencia, S es subajustado. Con la información anterior y realizando los cálculos de la implicación podemos concluir que S no cumple con la fórmula de primer orden de* $(\mathbf{aju})$.

Observemos que las nociones de segundo orden están enunciadas para los sublocales de un local, al trasladarlas a los subespacios abiertos y cerrados de un espacio son diferentes a las de ajustado y subajustado.

Proposición 3.4.19 *Las siguientes afirmaciones sobre un espacio S son equivalentes.*

$i)$ *Cada subconjunto abierto $U \subseteq S$ es la unión de subconjuntos cerrados.*

$ii)$ *Cada subconjunto cerrado $A \subseteq S$ es la intersección de subconjuntos abiertos.*

$iii)$ *S es un espacio simétrico.*

Demostración.

$i) \Leftrightarrow ii)$ Sean U abierto y $A = U'$ cerrado. Si $U = \bigcup A_i$, con A_i cerrados

$$A = U' = (\bigcup A_i)' = \bigcap A_i'$$

donde A_i son subconjuntos abiertos.

$i) \Rightarrow iii)$ Si $x \notin \overline{\{y\}}$, entonces $x \in S \setminus \overline{\{y\}}$ y por $i)$ $\overline{\{x\}} \subseteq S \setminus \overline{\{y\}}$. Por lo tanto $\overline{\{x\}} \cap \overline{\{y\}}$ y $y \notin \overline{\{x\}}$.

$iii) \Rightarrow i)$ Sea U abierto tal que $\overline{\{y\}} \subseteq U$, por la simetría $x \in \overline{\{y\}}$ si y solo si $y \in \overline{\{x\}}$. Ahora

$$U = \bigcup \{\overline{\{x\}} \mid x \in U\}$$

y $\overline{\{x\}}$ es cerrado.

$\square$

Proposición 3.4.20 *Las siguientes afirmaciones sobre un espacio S son equivalentes.*

$i)$ *Cada subconjunto $M \subseteq S$ es la unión de subconjuntos cerrados.*

$ii)$ *Cada subconjunto $M \subseteq S$ es la intersección de subconjuntos abiertos.*

$iii)$ *S es un espacio T_1.*

Demostración.

$i) \Leftrightarrow ii)$ De manera similar a la proposición anterior, hacemos uso de las leyes de De Morgan.

$i) \Rightarrow iii)$ Consideremos $\{x\} \subseteq S$. Por hipótesis, $\{x\}$ es la unión de cerrados. Por lo tanto $\{x\}$ es cerrado.

$iii) \Rightarrow i)$ Notemos que si S es T_1, entonces $\{x\}$ es cerrado. Además

$$M = \bigcup \{\{x\} \mid x \in M\}.$$

$\square$

3.4.3 Subajustado y ajustado en sublocales

Es momento de ver como se comportan estas nociones para los sublocales de un local. En esta subsección enunciaremos los resultado necesarios para identificar bajo que circunstancias estas propiedades son hereditarias o no.

Antes de comenzar, mostraremos primero una propiedad que cumple la implicación y el núcleo asociado a un sublocal.

Proposición 3.4.21 *Si $s \in S$ entonces para el núcleo asociado j_S y cualquier $a \in L$ se cumple que $a \succ s = j_S(a) \succ s$*

Demostración. Por propiedades de la implicación, $a \leq j_S(a)$ si y solo si $(j_S(a) \succ s) \leq (a \succ s)$. Para la otra desigualdad, sabemos que $a \leq ((a \succ s) \succ s)$. Además, $s \leq ((a \succ s) \succ s)$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} j_S(a) \leq ((a \succ s) \succ s) &\Leftrightarrow (((a \succ s) \succ s) \succ s) \leq (j_S(a) \succ s) \\ &\Leftrightarrow (a \succ s) \leq (j_S(a) \succ s). \end{aligned}$$

□

Proposición 3.4.22 *Cada sublocal de un marco ajustado es ajustado.*

Demostración. Sea L un marco ajustado y $S \subseteq L$ un sublocal. Si $a \nleq b$ en S, entonces $a \nleq b$ en L. Como L existe $c \in L$ tal que $c \vee a = 1$ y $(c \succ b) = b$. Consideremos $c' = j_S(c)$, entonces

$$c' \vee^S a \geq c' \vee a \geq c \vee a = 1,$$

es decir, $c' \vee^S a = 1$ y por la Proposición 3.4.21 tenemos que $(c' \succ b) \neq b$. Por lo tanto S es subajustado. □

Teorema 3.4.23 *Cada marco L es ajustado si y solo si cada uno de sus sublocales es subajustado.*

Demostración.

$\Rightarrow$) Si L es ajustado, entonces por la Proposición 3.4.22 S es ajustado lo cual implica que S es subajustado.

$\Leftarrow$) Por contradicción, supongamos que S es subajustado y que L no es ajustado. Entonces existen $a \nleq b$ tales que para cada $u \in L$ se cumple $a \vee u = 1$ y $(u \succ b) = b$. Consideremos el conjunto

$$S = \{x \mid a \vee u = 1 \ \Rightarrow (u \succ x) = x\}$$

Afirmación: S es un sublocal.

Prueba de la afirmación:

1. $1 \in S$, pues si $a \vee u = 1$, entonces $(u \succ 1) = 1$.

2. Si x_i y $a \vee u = 1$, entonces $(u \succ x_i) = x_i$ para todo i y por lo tanto
$$(u \succ \bigwedge x_i) = \bigwedge (u \succ x_i) = \bigwedge x_i,$$
de modo que $\bigwedge x_i \in S$.
3. Consideremos $x \in S$, $y \in L$ y $a \vee u = 1$. Luego
$$(u \succ (y \succ x)) = (y \succ (u \succ x)) = (y \succ x),$$
de aquí que $(y \succ x) \in S$. Por lo tanto S es un sublocal.

Así S es subajustado. Notemos que $a, b \in S$, pues si $a \vee u = 1$ entonces
$$a = ((a \vee u) \succ a) = (a \succ a) \wedge (u \succ a) = (u \succ a).$$
De está manera, como $a \nleq b$ existe $c \in S$ tal que $a \vee^S c = 1 \neq b \vee^S c$. Recordemos que, en general, el supremo en S puede ser más grande que cuando se toma en L. Sin embargo, por el Teorema 3.4.13, si $a \vee u = 1$ entonces
$$(u \succ (a \vee c)) = \bigwedge \{x \in S \mid u \vee x = 1,\ x \geq a \vee c\} = a \vee c,$$
pues $u \vee a \vee c = 1$. Por lo tanto $a \vee c \in S$ y éste coincide con $a \vee^S c$. De aquí que $a \vee^S c = 1 = a \vee c$ y $1 = (c \succ c) = c$ lo cual es una contradicción. Así L es ajustado.

□

Corolario 3.4.24 *Subajustado no es una propiedad hereditaria.*

El Ejemplo 3.4.18 nos proporciona un espacio subajustado que no es ajustado. Para este caso particular, si consideramos el espacio S con la topología cofinita, el marco $\mathcal{O}S$ es subajustado. Además, $\mathcal{O}S$ tiene muchos sublocales que no son subajustados, usando las fórmulas para $U \succ V$, se puede comprobar que las $3-$cadenas $S_x = \{\emptyset, S \setminus \{x\}, S\}$, donde x varia en S, no son subajustados. Por lo tanto $\mathcal{O}S$ es subajustado, pero S_x no lo es. Sin embargo, subajustado se hereda en algunos casos importantes.

La prueba del siguiente resultado usa el hecho de que para cualquier $a \in L$ se cumple que
$$o(a) \cap S = O_S(j_S(a)) \quad \text{y} \quad c(a) \cap S = c_S(j_S(a)).$$
Por lo tanto, si $a \in S$ tenemos que $o_S(a) = o(a) \cap S$ y $c_S(a) = c(a) \cap S$.

Teorema 3.4.25 *Sea S un sublocal complementado de un marco L subajustado. Entonces S es subajustado.*

Demostración. Sea $o_S(a)$ un sublocal abierto en S, entonces $o_S(a) = o(a) \cap S$ con $o(a)$ abierto en L. Luego como L es subajustado se cumple que
$$o(a) = \bigcup_{iin\mathcal{J}} c(b_i),$$

donde $c(b_i)$ son sublocales cerrados en L. Como S es complementado, podemos distribuir supremos arbitrarios con intersecciones finitas, es decir,

$$o_S(a) = o(a) \cap S = \bigcup_{i \in \mathcal{J}} c(b_i) \cap S = \bigcup_{i \in \mathcal{J}} (c(b_i) \cap S) = \bigcup_{i \in \mathcal{J}} c_S(j_S(b_i)).$$

Por lo tanto cada sublocal abierto en S se puede ver como supremo de cerrados en S, es decir, S es subajustado. $\square$

Ahora analizaremos como se comporta $(\mathbf{dsaju})$ en sublocales. Los siguiente resultado se siguen del Teorema 3.4.23 y la Proposición 3.4.9, respectivamente.

Corolario 3.4.26 *Una marco L es subajustado si y solo si cada uno de sus sublocales es débilmente subajustado.*

Demostración. Si L es ajustado entonces S es ajustado (Teorema 3.4.23. Luego ajustado implica subajustado y subajustado implica débilmente subajustado. $\square$

Proposición 3.4.27 *Un marco L es débilmente subajustado si y solo si cada uno de sus sublocales abiertos es débilmente subajustado.*

Demostración. Supongamos que L es débilmente subajustado y consideremos $b \in o(a)$ tal que $b \neq \mathbf{0}_{o(a)} = a^*$. Entonces $b \wedge a \neq 0$ y, por $(\mathbf{dsaju})$, existe $c \in L$ tal que $(a \wedge b) \vee c = 1$. Luego $1 = b \vee c \leq b \vee (a \succ c)$ y $(a \succ c) \neq 1$, pues en caso contrario tendríamos que si $(a \succ c) = 1$ entonces $a \leq c$ lo cual implicaría que $1 = a \vee c = c$ lo cual sería una contradicción. Sea $c' = (a \succ c) \in o(a)$, es decir, $c' = c$, y notemos que $b \vee c'$ en $o(a)$ se calcula por $a \succ (b \vee c') = (a \succ 1) = 1 \neq c'$. Por lo tanto $\exists c' \in o(a)$ tal que $b \vee c' = 1$, con $b \neq \mathbf{0}_{o(a)}$ y $c' \neq 1$, es decir, $o(a)$ es débilmente subajustado. $\square$

Recopilando toda la información presentada en esta sección tenemos las siguientes implicaciones.

$$\begin{array}{ccl}
\text{Ajustado} & \Longleftrightarrow & \text{cada sublocal es débilmente subajustado} \\
\Downarrow & & \\
\text{Subajustado} & \Longleftrightarrow & \text{cada sublocal cerrado es débilmente subajustado} \\
\Downarrow & & \\
\text{Débilmente subajustado} & \Longleftrightarrow & \text{cada sublocal abierto es dédilmente subajustado}
\end{array}$$

donde las equivalencias son las que se muestran en el Corolario 3.4.26 y las Proposiciones 3.4.9 y 3.4.27, respectivamente.

Corolario 3.4.28 *Débilmente subajustado no es una propiedad hereditaria.*

3.4.4 Ajustado y subajustado en congruencias

En la sección anterior analizamos el comportamiento hereditario de estas dos propiedades. Lo que haremos ahora es ver el comportamiento algebraico de ellas a través de las congruencias, esto debido a la correspondencia uno a uno que existe entre estas y los sublocales.

Consideremos un homomorfismo de marcos $h\colon \mathcal{O}S \to \mathcal{O}T$. Una *congruencia* es una relación, $\sim$, dada por

$$U \sim V \Leftrightarrow h(U) = h(V),$$

donde $U, V \subseteq S$. Denotamos por $E_h = \{(U,V) \mid h(U) = h(V)\}$.

Para un subespacio $X \subseteq S$, el encaje produce la congruencia

$$E_X = \{(U,V) \mid U \cap X = V \cap X\}.$$

Recordemos que A_j es una congruencia y esta está en relación con los sublocales de un loca (siempre que $j \in NA$).

Los conjuntos $\downarrow (S \setminus \{1\})$ obtenidos de los sublocales S jugaran un papel crucial.

Proposición 3.4.29 *Para el núcleo j_S y la congruencia E_S asociados al sublocal S se tiene que*

$$\downarrow (S \setminus \{1\}) = \{x \in L \mid j_S(x) \neq 1\} = L \setminus E_S(1), \tag{3.5}$$

donde $E_S(1) = E(1) \cap S$.

Demostración. Se puede verificar de manera sencilla que $\downarrow (S \setminus \{1\}) = L \setminus E_S(1)$. Veamos que $\downarrow (S \setminus \{1\}) = \{x \in L \mid j_S(x) \neq 1\}$.

Sea $x \in \downarrow (S \setminus \{1\})$, entonces $x \neq 1$ y existe $s \in S \setminus \{1\}$ tal que $x \leq s$. Notemos que $x \in L$ y $x \leq s$, en particular, para $\bigwedge\{s \in S \mid x \leq s\}$ y $x \neq 1$, se cumple que $x \in \{j_s(x) \neq 1\}$, es decir, $\downarrow (S \setminus \{1\}) \subseteq \{x \in L \mid j_S(x) \neq 1\}$. La otra contención es similar. $\square$

Teorema 3.4.30 *Un marco L es subajustado si y solo si cada congruencia E en L es trivial siempre que $E(1) = \{1\}$*

Demostración. Si L es subajustado, por la equivalencia $1) \Leftrightarrow 2)$ del Teorema 3.4.16, tenemos que un sublocal cerrado $c(a) = \uparrow a$ es disjunto de un sublocal S si y solo si existe $a \in L$, con $a \neq 1$ tal que $a \notin \downarrow S$. Aplicando esto al correspondiente sublocal asociado con E obtenemos lo que queremos. $\square$

Proposición 3.4.31 *Un marco L es ajustado si y solo si para cualesquiera dos sublocales $S, T \subseteq L$ se cumple la implicación*

$$\downarrow (S \setminus \{1\}) = \downarrow (T \setminus \{1\}) \Rightarrow S = T.$$

Demostración.

$\Rightarrow$) Consideremos $\downarrow (S \setminus \{1\}) = \downarrow (T \setminus \{1\})$. Sean $b \in T$ y $a = j_S(b)$. Si $a \vee c = 1$ tenemos que $j(b \vee c) \leq a \vee c = 1$, de modo que $j_S(b \vee c) = 1$ y así $b \vee c \notin \downarrow (S \setminus \{1\})$ y por lo tanto $b \vee c \notin \downarrow (T \setminus \{1\})$.

Por propiedades de la implicación tenemos que $b = (c \vee b) \wedge (c \succ b)$, en particular, $(c \vee b) \wedge (c \succ b) \leq b$. Así, $(c \vee b) \leq ((c \succ b) \succ b)$ y $((c \succ b) \succ b) \in T$. Luego, como $b \vee c = 1$, tenemos que $((c \succ b) \succ b) = 1$, de modo que $(c \succ b) \leq b$ y por lo tanto $b = (c \succ b)$. De aquí que si $a \vee c = 1$ implica que $(c \succ b) = b$ y como L es ajustado, se cumple que $a = j_S(b) \leq b$, es decir, $j_S(b) = b$. Así $b \in S$, es decir, $T \subseteq S$.

De manera similar probamos que $S \subseteq T$ y por lo tanto $S = T$.

$\Leftarrow$) Consideremos un sublocal $S \subseteq L$ y sea

$$T = \bigcap\{o(x) \mid S \subseteq o(x)\}.$$

Si $s \in S$ y $j_S(x) = 1$, entonces $x = 1$. Luego

$$(j_S(x) \succ s) = (1 \succ s) = s \Rightarrow (j_S(x) \succ s) = (x \succ s) = s,$$

es decir, $s \in o(x)$. Así, si $j_S(x) = 1$, entonces $S \subseteq o(x)$. De aquí que $S \subseteq T$. Por lo tanto para cada $a \in T$, $(x \succ a) = a$ siempre que $j_S(x) = 1$ y si $a \neq 1$, como $(a \succ a) = 1 \neq a$, $j_S(a)$ no puede ser 1, de modo que $a \in (S \setminus \{1\})$. Por lo tanto $T \setminus \{1\} \subseteq \downarrow (S \setminus \{1\})$ y en consecuencia $\downarrow (T \setminus \{1\}) \subseteq \downarrow (S \setminus \{1\})$

Veamos que $\downarrow (S \setminus \{1\}) \subseteq \downarrow (T \setminus \{1\})$. Sea $a \in \downarrow (S \setminus \{1\})$, entonces existe $b \in S \setminus \{1\}$ tal que $a \leq b$. Como $S \subseteq T$, entonces $b \in T$ y así $a \in \downarrow (T \setminus \{1\})$. Por lo tanto $\downarrow (S \setminus \{1\}) = \downarrow (T \setminus \{1\})$ y por hipótesis, $S = T$. Luego $S = \bigcap\{o(x)\}$ y al ser S un sublocal arbitrario, en particular se cumple también para

$$S = c(x) = \bigcap \varnothing(x)\}$$

y, por el Teorema 3.4.17, L es ajustado.

□

Teorema 3.4.32 *Un marco L es ajustado si y solo si para cualesquiera dos congruencias E, F en L se cumple la implicación*

$$E(1) = F(1) \Rightarrow E = F.$$

Demostración. Por la Proposición 3.4.31, para cualesquiera $S, T \subseteq L$ se cumple que

$$\downarrow (S \setminus \{1\}) = \downarrow (T \setminus \{1\}) \Rightarrow S = T.$$

Consideremos E, F las congruencias correspondientes a S, T, respectivamente, entonces, por **??**

$$\downarrow (S \setminus \{1\}) = L \setminus E(1) = L \setminus F(1) = \downarrow (T \setminus \{1\})$$

y $S = T$. Por lo tanto $E = F$. □

Notemos que en la prueba de la implicación "$\Leftarrow$" en la Proposición 3.4.31 se demostró que $S = \bigcap\{o(x) \mid S \subseteq o(x)\}$ para cualquier sublocal $S \subseteq L$, no solamente para los sublocales cerrados. De esta manera obtenemos el siguiente resultado

Teorema 3.4.33 *Un marco es ajustado si y solo si cada sublocal $S \subseteq L$ es intersección de sublocales abiertos.*

3.5 Axiomas tipo Hausdorff

Para el análisis sin puntos de los axiomas de separación, la propiedad de que un espacio sea Hausdorff (o T_2), necesita ser tratada con mayor detalle. Esto debido a que no existe solo una manera de que esta propiedad sea abordada, dependiendo el enfoque o el objeto de estudio, puede ser utilizada una “traducción‘" u otra.

En esta sección presentamos las distintas nociones sin puntos de tipo Hausdorff que existen hasta el momento. Cabe mencionar que estas fueron enunciadas por diferentes matemáticos y algunas de ellas salieron a la luz casi al mismo tiempo. Para conocer un poco sobre la motivación de cada una de estas nociones, se puede consultar [5], donde su Capítulo 3 es de donde se extrae gran parte de la información de esta sección.

La razón por la cual se trabaja con diferentes nociones de que un marco sea Hausdorff se debe al comportamiento de cada una de ellas. Algunas son propiedades conservativas e incluso equivalentes entre si. En otras existe un buen comportamiento espacial. Dependiendo el uso que se les quiera dar podemos encontrar diferentes aplicaciones. Parte de nuestra análisis consiste en decidir (en caso de que se pueda), cual es la mejor de todas ellas y hacer uso de estas para caracterizar un fenómeno que será presentado en el Capítulo 2.

3.5.1 Marcos débilmente Hausdorff

Esta noción fue enunciada por Dowker y Papert Strauss y unas ligeras modificaciones de ella dan origen a cierta jerarquía, que al juntarlas con subajustado, resultan ser una equivalencia. Esta primer noción es conocida como *débilmente Hausdorff* y la denotaremos por **dH**.

$(\mathbf{dH})$ Si $a \vee b = 1$ y $a, b \neq 1$, entonces existen u, v tales que $u \nleq a$, $v \nleq b$ y $u \wedge v = 0$.

La siguiente noción es ligeramente más fuerte que **(dH)**.

$(\mathbf{dH}')$ Si $a \nleq b$ y $b \nleq a$, entonces existen u, v tales que $u \nleq a$, $v \nleq b$ y $u \wedge v = 0$.

Esta última es la más fuerte de esta jerarquía

$(\mathbf{dH}'')$ Si $a \nleq b$ y $b \nleq a$, entonces existe u, v tales que $u \nleq a$, $v \nleq b$, $u \leq b$, $v \leq a$ y $u \wedge v = 0$.

De esta manera tenemos lo siguiente

$$(\mathbf{dH}'') \Rightarrow (\mathbf{dH}') \Rightarrow (\mathbf{dH}).$$

Estas tres condiciones no son conservativas y sin **(saju)** no son suficientemente Hausdorff. Por ello, Dowker y Papert Strauss sugirieron como un axioma tipo Hausdorff conveniente la combinación **(dH)** + **(saju)**. De hecho, esta propiedad es conservativa.

Proposición 3.5.1 *Para un marco subajustado las condiciones* $(\mathbf{dH})$*,* $(\mathbf{dH}')$ *y* $(\mathbf{dH}'')$ *son equivalentes.*

Demostración. Pendiente □

3.5.2 Marcos Hausdorff

La noción que ahora veremos es presentada por Paseka y Smarda quienes vieron la propiedad de Hausdorff como una regularidad débil. Con esto en mente, ellos sugieren una modificación de la relación mostrada en la Definición 3.2.1 dada por "$\prec$" y reemplazándola por una un poco más débil, denotada por "$\sqsubset$"

Definición 3.5.2 *Para un espacio topológico S y cualesquiera $U, V \in \mathcal{O}S$ decimos que U se relaciona con V por medio de $\sqsubset$, denotado por $U \sqsubset V$, si y solo si*

$$U \subseteq V \quad y \quad \overline{U} \cup V \neq S.$$

Proposición 3.5.3 *Un espacio S que es T_0 es Hausdorff (T_2) si y solo si para todo $V \in \mathcal{O}S$, con $V \neq S$, tenemos que*

$$V = \bigcup\{U \mid U \sqsubset V\}$$

donde $U \in \mathcal{O}S$.

Demostración. Pendiente □

Notemos que en la condición $\overline{U} \cup V \neq S$ se cumple si y solo si $S \setminus \overline{U} \nsubseteq V$. De esta manera, podemos reescribir la Definición 3.5.2 como

$$U \sqsubset V \Leftrightarrow U \subseteq V \quad y \quad U^* \nsubseteq V$$

De esta manera, para un marco L podemos escribir la siguiente noción sin puntos de T_2.

$(\mathbf{T_{2S}})$ Si para $a \in L$, con $a \neq 1$, entonces $a = \bigvee\{u \in L \mid u \sqsubset a\}$,

donde $u \sqsubset a$ si y solo si $u \leq a$ y $u^* \nleq a$.

Notemos que $\bigvee\{u \in L \mid u \sqsubset a\} \leq a$ de esta manera T_{2_S} es equivalente a afirmar que si $1 \neq a \nleq b$ entonces existe un $v \sqsubset a$ tal que $v \nleq b$. Sustituyendo u por v^* obtenemos la siguiente modificación.

$(\mathbf{T_{2S}})$ Si $1 \neq a \nleq b$, entonces existen $u, v \in L$ tales que $u \nleq a$, $v \nleq b$, $v \leq a$ y $u \wedge v = 0$.

En 1987 Johnstone y Shu-Hao enunciaron la siguiente noción tipo Hausdorff y observaron que es equivalente a T_{2_S}.

$(\mathbf{S_2})$ Si $1 \neq a \nleq b$. entonces existen $u, v \in L$ tales que $u \nleq a$, $v \nleq b$ y $u \wedge v = 0$.

Proposición 3.5.4 $(\mathbf{S_2})$ *y* $(\mathbf{T_{2S}})$ *son equivalentes.*

Demostración. Pendiente. □

De esta manera tenemos dos nociones que son equivalentes y que fueran motivadas por direcciones muy diferentes. Así, podemos convenir en considerar la noción de Johnstone y Shu-Hao como la conveniente para decir que un marco es Hausdorff.

Definición 3.5.5 *Decimos que un marco L es un* marco Hausdorff *si cumple la siguiente propiedad*

$(\mathbf{H})$ *Para cualquier* $1 \neq a \nleq b \in L$ *existen* $u, v \in L$ *tales que* $u \nleq a$, $v \nleq b$ *y* $u \wedge v = 0$.

En otras palabras, tenemos que un marco es Hausdorff si

$(\mathbf{H})$ Para cualquier $1 \neq a \nleq b \in L$ existe $u \in L$ tales que $u \nleq a$ y $u^* \nleq b$.

Se puede verificar que, efectivamente, pedir que un marco sea Hausdorff es algo más fuerte que débilmente Hausdorff.

Observación 3.5.6 *Los marcos Hausdorff tienen un buen comportamiento conservativo, es decir,* S *es un espacio Hausdorff si y solo si* $\mathcal{O}S$ *es un marco Hausdorff. Además, esta propiedad se hereda para sublocales y productos.*

Proposición 3.5.7

1. *Un sublocal de un local Hausdorff es Hausdorff.*
2. *Un producto de locales Hausdorff es Hausdorff*

Demostración. Pendiente. □

3.5.3 Marcos Hausdorff basados

La motivación de la siguiente noción viene dada por la equivalente noción sin puntos de que un marco sea T_1. Recordemos que un marco cumple T_{1_S} si todo elemento $\wedge-$irreducible (o elemento primo), es máximo. Veamos que algo similar pasa para lo que definiremos como marcos Hausdorff basados. Antes de hacer eso necesitamos un poco de información.

Definición 3.5.8 *Para un marco* L *decimos que un elemento* $p \in L$ *es semiprimo si* $a \wedge b = 0$ *implica que* $a \leq p$ *o* $b \leq p$.

Obviamente cada elemento $\wedge-$irreducible es semiprimo.

Proposición 3.5.9 *Un espacio* S *que es* T_0 *es Hausdorff si y solo si todos los elementos semiprimos* $P \in \mathcal{O}S$ *son maximales.*

Demostración. Pendiente. □

Este análisis fue hecho por Rosicky y Smarda. Ellos introducen la siguiente noción.

Definición 3.5.10 *Decimos que un marco* L *es* Hausdorff basado *si cumple la siguiente propiedad*

$(\mathbf{Hb})$ *cada elemento semiprimo en* L *es máximo.*

De esta manera, como asumimos que se cumple T_0, por la Proposición 3.5.9, $(\mathbf{Hb})$ es conservativa.

Proposición 3.5.11 *Cada marco Hausdorff es Hausdorff basado.*

Los marcos Hausdorff basados tienen un buen comportamiento categórico, lamentablemente no hay mucha información sobre estos marcos en la literatura.

Considerando la siguiente relajación de $(\mathbf{Hb})$ podemos ver que $(\mathbf{H})$ y $(\mathbf{T_{1_S}})$ tienen un comportamiento similar que sus variantes sensibles a puntos.

Definición 3.5.12 *Decimos que un marco L es* débilmente Hausdorff basado *si cumple la siguiente propiedad*

$(\mathbf{dHb})$ *cada elemento semiprimo en L es $\wedge-$irreducible.*

Por lo tanto, tenemos las siguientes implicaciones

$$(\mathbf{H}) \Rightarrow (\mathbf{Hb}) \Rightarrow (\mathbf{dHb}) \Rightarrow (\mathbf{T_{1_S}}).$$

3.5.4 Marcos fuertemente Hausdorff

Los espacios T_2 cumplen lo siguiente: *Un espacio S es T_2 si y solo si la diagonal $\Delta = \{(x,x) \in S \times S \mid x \in S\}$ es un subconjunto cerrado en $S \times S$.*

Con esto en mente, Isbell da su noción tipo Hausdorff sin puntos, enunciada para el producto binario de sublocales. La desventaja de la variante presentada por Isbell es que esta propiedad no es conservativa, pero esto es compensado por otros méritos.

Para un local L consideramos el coproducto binario $L \oplus L$. En particular, tomemos las inyecciones al coproducto

$$\iota_1 = (a \mapsto a \oplus 1)\colon L \to L \oplus L \quad \text{y} \quad \iota_2 = (b \mapsto 1 \oplus b)\colon L \to L \oplus L.$$

El morfismo codiagonal Δ^* que satisface $\Delta^* \iota_i = id$ está dado por

$$\Delta^*(U) = \bigvee \{a \wedge b \mid a \oplus b \subseteq U\} = \bigvee \{a \wedge b \mid (a,b) \in U\}.$$

Consideremos la adjunción

$$\begin{tikzcd} L \oplus L \arrow[r, shift left, "\Delta^*"] & L \arrow[l, shift left, "\Delta"] \end{tikzcd}$$

con Δ el morfismo diagonal locálico asociado. Además,

$$\Delta(a) = \{(x,y) \mid x \wedge y \leq a\}.$$

Por lo tanto tenemos $U \subseteq \Delta(\Delta^*(U))$ y $\Delta^*\Delta = id$, donde el sublocal diagonal $\Delta[L]$ corresponde al subespacio diagonal clásico.

Definición 3.5.13 *Decimos que un marco es* fuertemente Hausdorff *si y solo si el sublocal diagonal $\Delta[L]$ es cerrado en $L \oplus L$.*

La propiedad enunciada en la Definición 3.5.13 puede ser reescrita de la siguiente manera.

$(\mathbf{fH})$ $\Delta[L] = \uparrow d_L$,

donde d_L es el menor elemento de $\Delta[L]$, es decir,

$$d_L = \Delta(0) = \{(x, y) \mid x \wedge y \leq 0\} = \downarrow \{(x, x^*) \mid x \in L\}.$$

Existen diferentes caracterizaciones para los marcos fuertemente Hausdorff. Por el momento solo haremos mención a sus propiedades más importantes.

Proposición 3.5.14 *Cada sublocal de un marco fuertemente Hausdorff es fuertemente Hausdorff.*

Demostración. Pendiente. $\square$

Proposición 3.5.15 *Un marco fuertemente Hausdorff es Hausdorff.*

Demostración. Pendiente. $\square$

Proposición 3.5.16 *Sean S un espacio T_0 y $\mathcal{O}S$ un marco fuertemente Hausdorff. Entonces S es Hausdorff.*

Demostración. Pendiente. $\square$

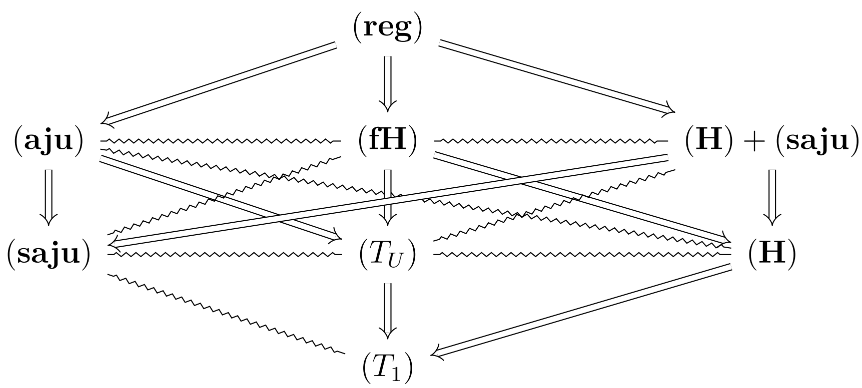
El marco $\mathcal{O}S$ de un espacio S que es Hausdorff no necesariamente es fuertemente Hausdorff. Así, la propiedad $(\mathbf{fH})$ no es conservativa. Lo anterior queda ilustrado en el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{fH}) \arrow[r, Rightarrow, "3.5.16"] \arrow[dr, Rightarrow, "3.5.15"'] & T_2 \arrow[d, Leftrightarrow, "3.5.6"] \\
& (\mathbf{H})
\end{tikzcd}$$

Podemos tratar de extender la propiedad de simetría (presentada en el Capítulo 1 como simetría), que por la Proposición 3.1.3, bajo T_0 es equivalente a T_1. Para este caso, si h_1 y h_2 son dos morfismos de marcos, decimos que $h_1 \leq h_2$ si $h_1(a) \leq h_2(a)$ para todo $a \in A$, donde A es el dominio de los respectivos morfismos. De esta manera diremos que un espacio es T_U si se cumple

$$(\mathbf{T_U}) \quad \forall\, h_1, h_2 \colon A \to B,\ \text{con } h_1, h_2 \in \mathrm{Frm},\ \text{si } h_1 \leq h_2,\ \text{tenemos que } h_1 = h_2$$

Haremos uso de esta propiedad más adelante.



$$\begin{tikzcd}
 & & (\mathbf{saju}) \\
(\mathbf{reg}) \arrow[r, Rightarrow] & (\mathbf{aju}) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & (T_1) \\
 & & (T_u)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & (\mathbf{H}) & \\
(\mathbf{reg}) \arrow[r, Rightarrow] & (\mathbf{fH}) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & (T_U) \arrow[r, Rightarrow] & (T_1)
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & (\mathbf{saju}) & \\
(\mathbf{reg}) \arrow[r, Rightarrow] & (\mathbf{H}) + (\mathbf{saju}) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & (\mathbf{H}) \arrow[r, Rightarrow] & (T_1)
\end{tikzcd}$$

Chapter 4

Marcos arreglados vs Axiomas tipo Hausdorff

Notemos que la Definición 2.3.5 identifica a un tipo especifico de marcos. El Teorema 2.3.16 caracteriza a los marcos arreglados por medio de una condición especial, de manera especifica con el axioma de separación T_2. Con esto en mente, resulta natural el preguntarse: *¿se pueden enunciar caracterizaciones para los marcos arreglados que sean meramente de marcos?*, es decir, que no se haga mención a la topología de un espacio. Un ejemplo no tan exitoso de lo que que acabamos de preguntar lo tenemos en el siguiente resultado.

Corolario 4.0.1 *Para A un marco espacial se cumple lo siguiente: $\mathcal{O}S$ es un marco Hausdorff si y solo si A es 1-arreglado.*

Demostración. Se sigue del hecho de que la propiedad $(\mathbf{H})$ es conservativa.
□
De esta manera, hemos relacionado la condición de arreglo con uno de los axiomas de separación. Veamos cual es la relación de esta con las otras propiedades.

4.1 Arreglado y su relación con los propiedades en Frm

El Lema 2.3.13 nos dice que arreglado implica T_1. ¿Qué pasa con las propiedades más fuertes que T_1?

Lema 4.1.1 *Todo marco fuertemente Hausdorff es arreglado.*

Demostración. Consideremos $A \in \mathrm{Frm}$ fuertemente Hausdorff. Si A cumple (**fH**), entonces todo sublocal compacto es cerrado. Por teoría de marcos, para $j \in NA$ arbitrario, A_j es compacto si y solo si $\nabla(j) \in A^\wedge$. De aquí que, al ser compacto y por (**fH**) $A_j = A_{u_d}$, para algún $d \in A$, es decir, $j = u_d$ y $\nabla(j) = \nabla(u_d)$ para algún $d \in A$, en particular, por H-M, para todo $F \in A^\wedge$, $v_F \in NA$. Así $\nabla(v_F) = \nabla(u_d)$, es decir, para $x \in F$ se cumple que $u_d(x) = 1 = d \vee x$. Por lo tanto A es arreglado. □

Con esto tenemos las implicaciones

$$(\mathbf{fH}) \Rightarrow \text{ Arreglado } \Rightarrow T_1$$

Resulta natural el pensar que la propiedad $(\mathbf{H})$ este metida entre ellas. La realidad es que hasta el dia de hoy no hemos logrado demostrar que

Todo marco Hausdorff es arreglado.

Aunque no lo menciona, Sexton prueba en su tesis doctoral que si un marco es regular, entonces este es parche trivial. Además, tenemos que parche trivial si y solo si arreglado. Por lo tanto

$$(\mathbf{reg}) \Rightarrow \text{ Arreglado.}$$

Por otro lado, Simmons en su artículo [9], prueba que

$$(\mathbf{aju}) \Rightarrow \text{ Arreglado.}$$

Las pruebas que ellos realizan nos llevan a pensar que existe cierto comportamiento en algo que nosotros llamamos *intervalos de admisibilidad*. Este tema los trataremos más adelante.

Por el momento, solo podemos suponer que alguna relación debe existir entre la propiedad $(\mathbf{H})$ y la condición de arreglo. Hasta que no tengamos una prueba exitosa de este hecho (porque vaya que lo hemos intentado) o exista un ejemplo que exhiba información relevante, lo anterior seguirá siendo una duda.

Lo que sigue ahora es analizar el comportamiento del marco PA (el marco de parches de un marco A), con los axiomas de separación

4.1.1 ¿Qué propiedades de separación cumple el marco de parches?

Aunque al final de esta pequeña subsección pueda sentirse que es innecesaria, este análisis nos hace pensar que el marco P^2A (el marco de parches del marco de parches) es en el que debemos enfocar en mayor parte nuestro interés. Recordemos que el marco de parches viene inspirado por la definición de espacio de parches. La noción de que un marco sea parche trivial (o equivalentemente arreglado), se basa en imitar lo que se conoce como espacio empaquetado. En el Capítulo 2 se prueba que la construcción del espacio de parches se estaviliza en el tercer paso, es decir,

$${}^{pp}S = {}^{ppp}S,$$

de esta manera, la sospecha que tenemos es que P^2A debe actuar de manera similar. Veamos que ocurre con el parche antecesor.

- Observemos que si un marco es regular, entonces es arreglado. Si el marco es arreglado, entonces este es parche trivial. Por definición, un marco A es parche trivial si $A \simeq PA$. Por lo tanto, si PA fuera regular, siempre se cumpliria que A es parche trivial, lo cual no es cierto siempre.

- Similar al punto anterior, no puede cumplirse que PA cumpla $(\mathbf{H})$, pues de ser así, también implicaría que cualquier marco A es parche trivial y en general, esto no es cierto.

- Si PA es T_1, entonces para todo $j \in \mathrm{pt}PA$ se cumple que j es máximo. Además, si $j \in \mathrm{pt}PA$, entonces j es un punto salvaje o j es un punto ordinario, es decir,

$$j = w_p \quad \text{o} \quad j \neq w_p$$

para algún $p \in \mathrm{pt}A$. Si j es salvaje, entonces para $a \in A$ se cumple que

$$u_a \leq j \leq w_a$$

donde $a = j(0)$. Lo anterior nos dice que $j \in \mathrm{pt}PA$ no siempre es máximo y con ello no necesariamente será un marco T_1.

Como mencionamos al principio, puede resultar decepcionante el darse cuenta que PA no cumple ninguna de las propiedades que teniamos en mente. Por tal motivo habrá que investigar que ocurre con P^2A.

4.2 Intervalos de admisibilidad

Recordemos que, por el Lema 2.1.9, si $F \in A^\wedge$, entonces F es admisible, es decir, $F = \nabla(j)$ para algún $j \in NA$. Además, el filtro abierto F está asociado al núcleo ajustado v_F y al núcleo w_F. De tal manera que obtenemos un intervalo de elementos en NA. Al intervalo $[v_F, w_F]$, cuando $F \in A^\wedge$, lo llamamos *intervalo de admisibilidad*.

Notemos que la construcción anterior está hecha para un marco A arbitrario. De tal manera que podemos hacer lo mismo para el marco $\mathcal{O}S$, es decir, considerar un filtro $\nabla = \nabla(Q) \in \mathcal{O}S^\wedge$, donde $Q \in \mathcal{Q}S$ es el correspondiente conjunto compacto saturado al filtro abierto ∇. Entonces, el intervalo de admisibilidad asociado a ∇ es $[v_Q, w_Q]$. Así, obtenemos un intervalo en $N\mathcal{O}S$ y el subíndice Q solo indica que este es determinado por Q. Veamos cual es la relación que existe entre ambos intervalos.

Proposición 4.2.1 *Para $F \in A^\wedge$ y $Q \in \mathcal{Q}S$, si $j \in [V_Q, W_Q]$, entonces*

$$\nabla(U_* j U^*) = F.$$

En otras palabras, $U_* j U^* \in [V_F, W_F]$, donde U^* es la reflexión espacial y U_* es su adjunto derecho.

Demostración. Como N es un funtor, tenemos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "U"'] \arrow[r, phantom, "\xmapsto{N(\_)}"] & NA \arrow[d, "N(U)"] \\ \mathcal{O}S & N\mathcal{O}S \end{tikzcd}$$

y $N(U)_*$ es el adjunto derecho de $N(U)$.

Por propiedades del adjunto se cumple lo siguiente:

1. $N(U)(j) \leq k \Leftrightarrow j \leq N(U)_*(k)$.
2. Si $k \in N\mathcal{O}S$ se cumple que
$$N(U)(j) \leq k \Leftrightarrow Uj \leq kU$$
3. $N(U)_*(k) = U_*kU^*$ y $UN(U)_*(k) = kU$ (C-Assembly, Corolario 6.7).

En 3), sustituyendo $k = j$,

$$N(U)_*(j) = U_*jU^* \quad \text{y} \quad UN(U)_*j = jU.$$

Así, para $x \in F$

$$x \in A \xrightarrow{U^*} \mathcal{O}S \xrightarrow{j} \mathcal{O}S \xrightarrow{U_*} A$$

y $U_*(j(U(x)) = \bigwedge(S \setminus j(U(x)))$. Notemos que $U_*(j(U^*(x))) \subseteq \mathrm{pt}A$. Luego,

$$x \in F \Leftrightarrow U(x) \in \nabla(j) = \nabla(Q) \Leftrightarrow S \setminus j(U(x)) = \emptyset$$

Además, evaluando $j(U^*(x))$ en U_* tenemos que

$$(U_*jU^*)(x) = \bigwedge(S \setminus j(U(x))) = \bigwedge \emptyset = 1$$

es decir, $x \in \nabla(U_*jU^*)$. Por lo tanto $F = \nabla(U_*jU^*)$. $\square$

Lo anterior define una función

$$\mho\colon [V_Q, W_Q] \to [V_F, W_F].$$

Por lo visto en la Subsección 2.1.2, para $Q \in \mathcal{Q}S$, el intervalo $[v_Q, w_Q]$ siempre tiene un elemento intermedio

$$v_Q \leq [Q'] \leq w_Q = [M']$$

donde $M = \{m \in \mathcal{O}S \setminus \nabla(Q) \mid a \leq m \neq S\}$ y $a \in \mathcal{O}S \setminus \nabla(Q)$. De está manera, al evaluar a $[Q']$ en la función $\mho$, obtenemos un elemento en NA, en este caso la pregunta es, ¿cómo es este elemento?, es decir, ¿cúal es el comportamiendo de $U_*[Q']U^*$ dentro del intervalo $[V_F, W_F]$?

Notemos que si $U_*[Q']U^*$ es un u-núcleo, recuperamos una condición similar a la que proporciona la Definición 2.3.5. Además, si esto ocurre, ¿bajo que circunstancias sucede?. La tarea ahora será responder esto.

Si empezamos con un espacio Huasdorff, entonces tenemos que... (falta escribir bien está parte).

4.3 El Q-cuadrado

Con lo visto hasta este momento, sabemos que para los marcos A y $\mathcal{O}S$, si consideremos filtros $F \in A^{\wedge}$ y $\nabla \in \mathcal{O}S^{\wedge}$, estos están en correspondencia con su respectivo núcleo ajustado v_F y v_{∇}. Estos producen los cocientes A_{v_F} y $\mathcal{O}S_{v_{\nabla}}$ de los marcos principales A y $\mathcal{O}S$, respectivamente. Para simplificar la notación, denotaremos por A_F al cociente A_{v_F} y por $\mathcal{O}S_{\nabla}$ al cociente $\mathcal{O}S_{v_{\nabla}}$. Con todo lo anterior tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "v_F"] \arrow[dd, "U_A"'] & A_F \arrow[dd, "g"] \arrow[dr] & \\
 & & \mathcal{O}Q \\
\mathcal{O}S \arrow[r, "v_{\nabla}"'] & \mathcal{O}S_{\nabla} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

El diagrama anterior es presentado por Simmons en [10]. Nosotros lo llamamos el *Q-cuadrado*.

Recordemos que los núcleos v_F y v_{∇} son las cerraduras idempotentes de sus prenúcleos correspondientes (ver Definición 2.3.5). Así, v_F y v_{∇} son mapeos de A en A y de $\mathcal{O}S$ en $\mathcal{O}S$, respectivamente.

De esta manera, tenemos el siguiente cuadrado, que en [10] prueban que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f^{\infty}"] \arrow[d, "U_A"'] & A \arrow[d, "U_A"] \\
\mathcal{O}S \arrow[r, "F^{\infty}"'] & \mathcal{O}S
\end{tikzcd}$$

conmuta laxamente, es decir, $U_A \circ f^{\infty} \leq F^{\infty} \circ U_A$.

En este diagrama U_A es el morfismo reflexión espacial, f^{∞} y F^{∞} representan los núcleos asociados a los filtros $F \in A^{\wedge}$ y $\nabla \in \mathcal{O}S^{\wedge}$.

Lo que probaremos aquí es más general, pues consideramos el cuadrado

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\hat{f}^{\infty}"] \arrow[d, "j"'] & A \arrow[d, "j"] \\
A_j \arrow[r, "f^{\infty}"'] & A_j
\end{tikzcd}$$

donde $\hat{f}^{\infty}$ es el núcleo asociado al filtro $j_*F \in A^{\wedge}$ y $j \in NA$.

Lema 4.3.1 *Para j, f y $\hat{f}$ como antes, se cumple que $j \circ \hat{f} \leq f \circ j$.*

Demostración. Por la Proposición 1.1.22 se cumple que

$$\hat{f} = \dot{\bigvee}\{v_y \mid y \in \hat{F} = j_*F\} \quad \text{y} \quad f = \dot{\bigvee}\{v_{j(y)} \mid j(y) \in F\}.$$

Luego, para $a \in A$ se cumple que

$$v_y(a) = (y \succ a) \leq \hat{f}(a) \leq j(\hat{f}(a)).$$

También, para todo $a, y \in A$, $(y \succ a) \wedge y = y \wedge a$ y

$$\begin{aligned} j((y \succ a) \wedge y) \leq j(a) &\Leftrightarrow j(y \succ a) \wedge j(y) \leq j(a) \\ &\Leftrightarrow j(y \succ a) \leq (j(y) \succ j(a)). \end{aligned}$$

Así

$$v_y(a) \leq j(\hat{f}(a)) \leq (j(y) \succ j(a)) = v_{j(y)}(j(a)) \leq f(j(a)).$$

Por lo tanto $j \circ \hat{f} \leq f \circ j$. $\square$

Para que $\hat{f}$ y f sean núcleos, necesitamos sus cerraduras idempotentes.

Corolario 4.3.2 *Para j, f y $\hat{f}$ como antes, se cumple que $j \circ \hat{f}^\infty \leq f^\infty \circ j$*

Demostración. Para α un ordinal, verificaremos que $j \circ \hat{f}^\alpha \leq f^\alpha \circ j$. Para ello, lo haremos por inducción.

Si $\alpha = 0$, el resultado es trivial.

Para el paso de inducción, supongamos que para α es cierto. Luego

$$j \circ \hat{f}^{\alpha+1} = j \circ \hat{f} \circ \hat{f}^\alpha \leq f \circ j \circ \hat{f}^\alpha \leq f \circ f^\alpha \circ j = f^{\alpha+1} \circ j,$$

donde la primera desigualdad es el Lema 4.3.1 y la segunda se obtiene por la hipótesis de inducción.

Si λ es un ordinal límite, entonces

$$\hat{f}^\lambda = \bigvee\{\hat{f}^\alpha \mid \alpha < \lambda\}, \quad f^\lambda = \bigvee\{f^\alpha \mid \alpha < \lambda\}$$

y

$$j \circ \hat{f}^\lambda = j \circ \bigvee_{\alpha<\lambda} \hat{f}^\alpha \leq \bigvee_{\alpha<\lambda} j \circ \hat{f}^\alpha.$$

Así, por la hipótesis de inducción, tenemos que

$$j \circ \hat{f}^\alpha \leq f^\alpha \circ j \Rightarrow \bigvee_{\alpha<\lambda} j \circ \hat{f}^\alpha \leq \bigvee_{\alpha<\lambda} f^\alpha \circ j.$$

Por lo tanto $j \circ \hat{f}^\lambda \leq f^\lambda \circ j$. $\square$

Por el Corolario 4.3.2 tenemos que $j \circ \hat{f}^\infty \leq f^\infty \circ j$ se cumple. Además, por el Teorema H-M, $f^\infty = v_F$ y $\hat{f}^\infty = v_{j_*F}$. Con esto en mente, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "(v_{j_*F})^*"] \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, "H"] & A_{j_*F} \arrow[l, shift left, "(v_{j_*F})_*"] \\ A_j \arrow[r, shift right, "(v_F)^*"'] & A_F \arrow[l, shift right, "(v_F)_*"'] \end{tikzcd}$$

Aquí, A_F y A_{j_*F} los cocientes producidos por v_F y v_{j_*F}, respectivamente. El morfismo $H\colon A \to A_F$ está definido por $H = v_F \circ j$. Además, $(v_F)_*$ y $(v_{j_*F})_*$ son inclusiones.

Consideremos $h\colon A_{j_*F} \to A_j$ tal que, para $x \in A_{j_*F}$, $h(x) = H(x)$. Por lo tanto, si $h = H_{|A_{j_*F}}$, entonces el diagrama anterior conmuta.

Necesitamos que h sea un morfismo de marcos. Primero, por la definición de h, este es un $\wedge$-morphism. Resta ver que h es un $\bigvee$-morfismo.

Los supremos en A_{j_*F} y A_F son calculados de manera diferente. Por ello, consideremos $\hat{\bigvee}$ por el supremo en A_{j_*F} y por $\tilde{\bigvee}$ el supremo en A_F. Por lo tanto

$$\hat{\bigvee} = v_{j_*F} \circ \bigvee \quad \text{y} \quad \tilde{\bigvee} = v_F \circ \bigvee,$$

es decir, para $X \subseteq A$, $Y \subseteq A_j$,

$$\hat{\bigvee} X = v_{j_*F}(\bigvee X) \quad \text{y} \quad \tilde{\bigvee} Y = v_F(\bigvee Y).$$

Ya que H es un morfismo de marcos, $H \circ \bigvee = \tilde{\bigvee} \circ H$. Esto establece algo similar para h.

Lema 4.3.3 $h \circ \hat{\bigvee} = \tilde{\bigvee} \circ h.$

Demostración. Para esto, solo es necesario probar la comparación $h \circ \hat{\bigvee} \leq \tilde{\bigvee} \circ h$. Así

$$h \circ \hat{\bigvee} = H \circ v_{j_*F} \circ \bigvee = v_F \circ j \circ v_{j_*F} \circ \bigvee \leq v_F \circ v_F \circ j \circ \bigvee$$

donde la desigualdad es el Corolario 4.3.2. Además, $v_F \circ v_F = v_F$, luego

$$h \circ \hat{\bigvee} \leq v_F \circ j \circ \bigvee = H \circ \bigvee = \tilde{\bigvee} \circ H = \tilde{\bigvee} \circ h.$$

Por lo tanto $h \circ \hat{\bigvee} = \tilde{\bigvee} \circ h.$ ☐

Todo lo anterior demuestra el siguiente resultado.

Proposición 4.3.4 *El diagrama*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "v_{j_*F}"] \arrow[d, "j"'] & A_{j_*F} \arrow[d, "h"] \\ A_j \arrow[r, "v_F"'] & A_F \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Con el diagrama anterior podriamos analizar más a fondo algunos casos particulares de cocientes, por ejemplo los *cocientes compactos*, los cuales serán abordados en el Capítulo 5.

Chapter 5

Marcos arreglados vs cocientes compactos

Mientras buscábamos alternativas para estudiar el comportamiento de los marcos arreglados, nos sugirieron consultar el artículo *"Between T_1 and T_2"* de Albert Wilansky (ver [11]). Como su título lo sugiere, en el presentan propiedades espaciales que se ubican entre los axiomas clásicos de separación T_1 y T_2. Hasta este momento, nos interesamos un poco más en la propiedad KC.

Definición 5.0.1 *Un espacio topológico es llamada* KC *si cada conjunto compacto es cerrado y un espacio es llamada* US *si cada sucesión convergente tiene exactamente un límite al cual converge.*

En [11], prueban que

$$T_2 \Rightarrow \mathrm{KC} \Rightarrow \mathrm{US} \Rightarrow T_1$$

y además, dan ejemplos para mostrar que las flechas de regreso no siempre se cumplen.

Notemos que la Definición 5.0.1 es muy parecida a la Definición 1.3.25, con la omisión de los conjuntos compactos saturados. Como nuestro interés está puesto principalmente en los marcos, lo ideal es trasladar la noción KC hacía este lenguaje.

5.1 Marcos KC

Sabemos que la noción de subespacio está en correspondencia biyectiva con la de sublocal. A su vez, los sublocales están en correspondencia biyectiva con los núcleos por medio de los cocientes que estos producen. De esta manera, parece ser que el camino adecuado que necesitamos para establecer la definición es a través de los núcleos $j \in NA$ y los cocientes A_j. La siguiente respuesta que necesitamos contestar es ¿qué sería lo equivalente a cociente compacto?
Primero. recordemos que es un marco compacto.

Definición 5.1.1 *Consideremos A un marco.*

1. *Una* cubierta *de A es un subconjunto $X \subseteq A$ tal que $\bigvee X = 1$.*
2. *Una* subcubierta *de X es un subconjunto $Y \subseteq X$ tal que $\bigvee Y = 1$.*
3. *A es* compacto *si cada cubierta tiene una subcubierta finita.*

Podemos producir algunos cocientes especiales por medio de algunos núcleos, por ejemplo: para $a \in A$, los núcleos u_a y v_a proporcionan los cocientes A_{u_a} y A_{v_a}, respectivamente. A estos cocientes podriamos llamarlos *cociente cerrado* y *cociente abierto*, debido al núcleo que los produce (el núcleo cerrado y el núcleo abierto, respectivamente). Lo anterior nos lleva a pensar que necesitamos un núcleo especial para definir el cociente compacto.

Proposición 5.1.2 *Sean A un marco y $j \in NA$. A_j es compacto si y solo si $\nabla(j) \in A^\wedge$, es decir, si todo filtro admisible es abierto.*

De esta manera, podemos dar nuestra definición de que un marco sea KC.

Definición 5.1.3 *Un marco A tiene la propiedad* KC *si cada cociente compacto de A es cerrado. En otras palabras, cada sublocal compacto es cerrado.*

Notemos que todo lo anterior es equivalente a decir que para $F \in A^\wedge$,

$$A_F = A_{u_d}$$

para algún $d \in A$.

Definición 5.1.4 *Consideremos A un marco y $F \in A^\wedge$. El cociente compacto A_F es cerrado si $A_F = A_{u_d}$ para algún $d \in A$.*

El filtro $F \in A^\wedge$ produce un intervalo $[v_F, w_F]$ y que a su vez proporciona una familia de cocientes compactos. Si el marco principal es KC, entonces para todo $j \in [v_F, w_F]$, A_j es un cociente compacto cerrado. Con esto en mente, es fácil darse cuenta de que

$$\mathrm{KC} \Rightarrow \text{ Arreglado.}$$

Veamos cual es la relación de la propiedad KC con las diferentes propiedades en marcos que conocemos.

Cuando trabajamos con el marco cociente, lo ideal es que este herede algunas de las propiedades del marco principal. En este caso, queremos ver si para A arreglado o KC, A_j hereda este par de propiedades. Comenzaremos con arreglado.

Si A es un marco arreglado, queremos trasladar la Definición 2.3.5 para A_j cuando $j \in NA$, de modo que, para todo $F \in A_j^\wedge$, si

$$x \in F \Rightarrow d \vee x = 1$$

con d similar al de la definición, pero para este caso tenemos que $v_y \in NA_j$ y $0_{A_j} = j(0)$.

Proposición 5.1.5 *Si A es un marco arreglado, entonces A_j es arreglado.*

Demostración. Es fácil verificar que $F \subseteq j_* F$. Como A es arreglado y $F \in A^\wedge$, es cierto que

$$x \in F \Rightarrow \hat{d} \vee x = 1,$$

donde $\hat{d} = d(\alpha) = f^\alpha(0)$.
Si $\hat{d} \leq d$, entonces $d \vee x = 1$, para $d = d(\alpha) = f^\alpha(j(0))$.

Así, por el Corolario 4.3.2

$$\hat{d} = \hat{d}(\alpha) \leq j(\hat{d}(\alpha)) = j(\hat{f}^\alpha(0)) \leq f^\alpha(j(0)) = d(\alpha) = d.$$

Por lo tanto, si $x \in F$, entonces $d \vee x = 1$ y A_j es arreglado. □
Ahora es el turno de KC.

Proposición 5.1.6 *Si A cumple KC, entonces A_j cumple KC para cada $j \in N(A)$.*

Demostración. Consideremos $k \in NA_j$ tal que $(A_j)_k$ es compacto. Como todo filtro abierto es admisible, tenemos que $\nabla(k) \in A_j^\wedge$ y, por la Proposición 1.1.22, $j_* \nabla(K) \in A^\wedge$.

Sea $l = j_* \circ k \circ j^* \in NA$, entonces A_l es un cociente compacto de A y existe $a \in A$ tal que $l = u_a$. Así, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "j^*"'] \arrow[rrr, bend left, "l"] & A_j \arrow[r, "k"'] & (A_j)_k \arrow[r, "j_*"'] & A_j \subseteq A \end{tikzcd}$$

y $a \vee x = k(j(x))$. Por lo tanto, si $x = a$, $k(j(x)) = a$.

Necesitamos que $k = u_b$ para algún $b \in A_j$. Si $x \in A_j$ y $b = j(a)$

$$\begin{aligned} u_b(x) = b \vee x = b \vee j(x) &= j(j(a) \vee j(x)) \\ &= j(k(j(a)) \vee x) \\ &= j(u_a(x)) \\ &= j(k(x)) \\ &= k(x). \end{aligned}$$

Por lo tanto $u_b = k$. □
No hay mucho que hacer con las propiedades de separación. Si se cumple la propiedad $(\mathbf{H})$, por la naturaleza de KC, esta también se cumple. Con T_1 requerimos un poco más de trabajo.

Proposición 5.1.7 *Si A es un marco KC, entonces A es un marco T_1.*

Demostración. Sabemos que A es T_1 si y solo si para todo $p \in \mathrm{pt}A$, p es máximo. Sean $p \in \mathrm{pt}A$ y $a \in A$ tales que $p \leq a \leq 1$. Consideremos

$$w_p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \not\leq p \\ \\ p & \text{si} \quad x \leq p \end{cases}$$

para $x \in A$. $P = \nabla(w_p) = \{x \in A \mid x \nleq p\}$ es un filtro completamente primo (en particular, $P \in A^\wedge$). Como A es KC, entonces A_{w_p} es un cociente compacto cerrado. Luego $u_p = w_p$, también

$$u_p(a) = a \quad \text{y} \quad w_p(a) = 1.$$

es decir, $a = 1$. Por lo tanto p es máximo. $\square$

De esta manera tenemos que KC tiene un comportamiento parecido a la propiedad espacial puesto

$$(\mathbf{H}) \Rightarrow \mathrm{KC} \Rightarrow \text{ Arreglado } \Rightarrow T_1.$$

Bibliography

Bibliography

[1] P. T. Johnstone, *Stone spaces*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 3, Cambridge University Press, Cambridge, 1982. MR 698074

[2] J. Monter; A. Zaldívar, *El enfoque locálico de las reflexiones booleanas: un análisis en la categoría de marcos* [tesis de maestría], 2022. Universidad de Guadalajara.

[3] J. Paseka and B. Smarda, *T_2-frames and almost compact frames.* Czechoslovak Mathematical Journal (1992), 42(3), 385-402.

[4] J. Picado and A. Pultr, *Frames and locales: Topology without points*, Frontiers in Mathematics, Springer Basel, 2012.

[5] J. Picado and A. Pultr, *Separation in point-free topology*, Springer, 2021.

[6] RA Sexton, *A point free and point-sensitive analysis of the patch assembly*, The University of Manchester (United Kingdom), 2003.

[7] RA Sexton and H. Simmons, *Point-sensitive and point-free patch constructions*, Journal of Pure and Applied Algebra **207** (2006), no. 2, 433-468.

[8] H. Simmons, *An Introduction to Frame Theory*, lecture notes, University of Manchester. Disponible en línea en `https://web.archive.org/web/20190714073511/http://staff.cs.manchester.ac.uk/~hsimmons`.

[9] H. Simmons, *Regularity, fitness, and the block structure of frames.* Applied Categorical Structures 14 (2006): 1-34.

[10] H. Simmons, *The Vietoris modifications of a frame*. Unpublished manuscript (2004), 79pp., available online at http://www. cs. man. ac. uk/hsimmons.

[11] A. Wilansky, *Between T1 and T2*, MONTHLY (1967): 261-266.

[12] A. Zaldívar, *Introducción a la teoría de marcos* [notas curso], 2025. Universidad de Guadalajara.