Universidad de Guadalajara

Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías

Doctorado en Ciencias en Matemáticas

Modificaciones de parches y algunos axiomas de separación en la topología sin puntos

Protocolo de Tesis

que presenta

Juan Carlos Monter Cortés

Director(a): Dr. Luis Ángel Zaldívar Corichi

Guadalajara, Jal., enero de 2026

1. Introducción

La construcción de parches introducida por Sexton en Sexton and Simmons (2006b) busca dar una variante libre de puntos que se comporte de manera similar a lo que topológicamente se conoce como *espacio de parches*. De manera especifica, se busca imitar la propiedad de que un espacio topológico S sea empaquetado. Lo anterior se cumple si y solo si

$$^{p}S = S,$$

donde ^{p}S es el espacio de parches de S. Esto es traducido al lenguaje de marcos como la propiedad de que un marco A sea *parche trivial*. En otras palabras, un marco A es parche trivial si

$$A \simeq PA,$$

donde PA es conocido como el *marco de parches*. Los autores de Sexton and Simmons (2006b), Sexton and Simmons (2006a) y Sexton (2003) se encargan de caracterizar esta propiedad por medio de lo que ellos definen como *marcos eficientes*. Ellos prueban que dicha propiedad genera un jerarquía estratificada sobre los ordinales, es decir, para $\alpha \in \mathrm{Ord}$ se cumple que

$$1\text{-eficiente} \Rightarrow 2\text{-eficiente} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha\text{-eficiente} \Rightarrow \alpha + 1\text{-eficiente} \Rightarrow \ldots$$

Parte de las propiedades que aparecen en la literatura relacionan a los marcos eficientes con los axiomas clásicos de separación. El siguiente teorema proporciona un ejemplo de ello.

Teorema 1.1. *Un espacio S que es T_0 tiene topología 1-eficiente si y solo si S es T_2.*

En la actualidad, el estudio de los axiomas de separación es un área de interés dentro de los grupos de investigación sobre teoría de marcos. De manera similar a los axiomas para espacios topológicos, los axiomas dentro de la categoría de marcos se relacionan de manera jerárquica, en este caso

$$(\mathbf{reg}) \Rightarrow (\mathbf{fH}) \Rightarrow (\mathbf{H}) \Rightarrow T_1$$

donde (**reg**) es la propiedad de ser *regular*, (**fH**) es *fuertemente Hausdorff* y (**H**) la de ser *Hausdorff* (ver Picado and Pultr (2021)). De esta manera resulta natural preguntarnos lo siguiente: *¿se puede incluir la propiedad de eficiencia en alguna parte de esta jerarquía?*.

De manera adicional, se tiene la siguiente caracterización

$$A \text{ es parche tivial} \iff A \text{ es eficiente} \iff S \text{ es empaquetado y apilado.}$$

Con ello, resulta de nuestro interés estudiar a los marcos eficientes y conocer nociones en la teoría de marcos que se relaciones con la propiedad de eficiencia, por ejemplo dar los análogos en marcos para apilado.

De la misma manera en la que Sexton introduce su noción de parches, existen distintos autores que han establecidos otras construcciones de parches. Todas ellas motivadas por la idea original de Hochster Hochster (1969) y su construcción del espacio de parches. Algunos ejemplos de estas construcciones pueden consultarse en Escardó (2001) y Klinke (2013). Bajo ciertas condiciones, la construcción presentada por Escardo en Escardó (2001) termina siendo isomorfa a la de Sexton. La construcción de Klinke en Klinke (2013) puede considerarse como un caso más general con respecto a PA.

Por lo tanto, debido a la relación que existe entre los marcos eficientes y los marcos parche trivial, el explorar la relación que existe entre la eficiencia y las diferentes construcciones podría proporcionar información adicional en el estudio de dichos marcos.

2. Planteamiento del Problema

Dado que la noción de eficiencia es introducida como una propiedad en marcos que es caracterizada a través de propiedades topológicas, resultaría más general estudiar esta clase de marcos dentro de la misma categoría Frm.

De igual manera verificar si esta clase de marcos satisface las condiciones necesarias y suficientes como para ser considerados como una especie de axioma de separación.

3. Hipótesis

4. Objetivos

5. Metodología

El plan de trabajo para la realización de este proyecto de investigación es el que se describe a continuación.

Cuadro 1: Cronograma

Semestre	1	2	3	4	5	6	7	8
Revisión de bibliografía	✓	✓	✓	✓	✓	✓		
Lectura de artículos	✓	✓	✓	✓	✓	✓		
Proponer conjeturas		✓	✓	✓	✓	✓		
Probar resultados			✓	✓	✓	✓	✓	
Validación y rechazo de conjeturas			✓	✓	✓	✓	✓	
Redacción de artículos y otros documentos		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Desarrollar conclusiones						✓	✓	✓
Sustentación								✓

Referencias

Escardó, M. H. (2001). The regular-locally compact coreflection of a stably locally compact locale. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 157(1):41–55.

Hochster, M. (1969). Prime ideal structure in commutative rings. *Transactions of the American Mathematical Society*, 142:43–60.

Klinke, O. K. (2013). Yet another patch construction for continuous frames and connections to the fell compactification. *Algebra universalis*, 70:227–243.

Picado, J. and Pultr, A. (2021). *Separation in point-free topology*. Springer.

Sexton, R. and Simmons, H. (2006a). An ordinal indexed hierarchy of separation properties. *to appear*.

Sexton, R. and Simmons, H. (2006b). Point-sensitive and point-free patch constructions. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 207(2):433–468.

Sexton, R. A. (2003). *A point-free and point-sensitive analysis of the patch assembly*. The University of Manchester (United Kingdom).