1. Cosas para trabajar durante el periodo 2026 A

Para la mejor comprensión del presente documento, incluimos la notación básica que será manejada en los distintos puntos que más adelante se enunciaran.

Sea $A \in \mathrm{Frm}$ un marco, entonces $PA \subseteq NA$ denota el marco de parches, donde NA denota el conjunto de todos los núcleos sobre A.

Consideremos $\nabla(j) = \{a \in A \mid j(a) = 1\}$. Se puede verificar que el anterior es un filtro y es conocido como filtro de admisibilidad. Usando los filtros de admisibilidad definimos la siguiente relación de equivalencia:

$$j \sim k \iff \nabla(j) = \nabla(k).$$

donde $j, k \in NA$.

Cada clase de equivalencia proporciona un bloque de elementos en NA. Cuando $F = \nabla(j)$ es un filtro abierto, este bloque tiene asociado un mayor y un menor elemento. Dicho bloque tiene la forma $[v_F, w_F]$ y lo llamamos intervalo de admisibilidad.

Si $p \in \mathrm{pt}\, A$, entonces podemos asociarle un elemento $w_p \in \mathrm{pt}\, NA$ dado por

$$w_p(x) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad x \nleq p \\ \\ p & \text{si} \quad x \leq p \end{cases}$$

Sabemos que $PA \subseteq NA$ y aplicando el funtor pt obtenemos $\mathrm{pt}\, NA \subseteq \mathrm{pt}\, PA$. Por lo tanto $w_p \in \mathrm{pt}\, PA$. De esta manera, para $p \in \mathrm{pt}\, A$ decimos que p es un punto ajustado si w_p es un núcleo ajustado.

Por último, incluimos un breve resumen de algunas propiedades de separación en Frm. Para cualesquiera $a \nleq b \in A$ tenemos que A es:

- **(H)** si $\exists\, c \in A$ tal que $c \nleq a$ y $\neg c \leq b$, con $a \neq 1$.
- **(aju)** si $\exists\, x, y \in A$ tales que $x \vee a = 1, y \nleq b$ y $x \wedge y \leq b$.
- **(saju)** si $\exists\, c \in A$ tal que $c \vee a = 1 \neq c \vee b$.

1.1. Lista de actividades

En la siguiente lista se presentan las principales actividades que realizaré durante el semestre 2026 A, periodo que abarca mi estancia del 6to semestre dentro del doctorado en ciencias en matemáticas.

1. Leer el artículo [Arr24] para caracterizar los $p \in \mathrm{pt}\, A$ que producen w_p ajustados.

2. Relacionar el ejemplo 12.1 de [SS06] y ver la relación que pueda existir con los marcos eficientes y los marcos KC.

3. Para $A = [0, 1]$ describir quienes son ${}^pS$ y PA, donde ${}^pS$ es el espacio de parches.
   - En el ejemplo anterior, verificar que propiedades de separación cumple PA.
   - Comprobar si $P[0, 1]$ es eficiente pero no KC.

4. Si existe un ejemplo de marcos eficientes que no son KC, verificar que la clase de marcos KC es cerrada bajo coproductos.

5. Caracterizar los marcos KC por medio de los intervalos $[v_F, w_F]$.

6. Ver la relación que existe entre la propiedad KC y (**H**).

7. Definir las nociones libres de puntos de apilado y fuertemente apilado. (✓)

8. Verificar si las nociones anteriores son conservativas o no. (✓)

9. Teniendo las nociones libres de puntos de apilado y fuertemente apilado, analizar el comportamiento de marcos que cumplan las propiedades:
   - eficiente + fuertemente apilado.
   - eficiente + apilado.
   - (**saju**)+ fuertemente apilado.
   - (**saju**)+ apilado.
   - (**aju**)+ fuertemente apilado.
   - (**aju**)+ apilado.

10. Leer el artículo [BG25] y dar versiones del Lema 2.6 y Teorema 2.8 para ${}^pS$ y PA.

11. Leer el artículo [Kli13] y comprender los detalles de su construcción de parches. Adaptar algunos de los resultados que el presenta, pero para PA.

12. Dar condiciones sobre PA para que cumpla las propiedades de separación mencionadas anteriormente.

13. Para un marco A realizar el cálculo de P^2A y P^3A. Ver la relación que existe entre PA, P^2A y P^3A.

Referencias

[Arr24] Igor Arrieta, *Localic separation and the duality between closedness and fittedness*, Topology and its Applications **362** (2024), 108785, Open access under CC BY 4.0.

[BG25] Paul Balmer and Martin Gallauer, *Patch-density in tensor-triangular geometry*, arXiv preprint (2025), Preprint.

[Kli13] Olaf Karl Klinke, *Yet another patch construction for continuous frames and connections to the fell compactification*, Algebra universalis **70** (2013), 227–243.

[SS06] RA Sexton and H Simmons, *Point-sensitive and point-free patch constructions*, Journal of Pure and Applied Algebra **207** (2006), no. 2, 433–468.