UNIVERSIDAD DE GUADALAJARA
CENTRO UNIVERSITARIO DE CIENCIAS EXACTAS E INGENIER˝AS
DIVISIÓN DE CIENCIAS B`SICAS

# Patch modi cations and separation axioms in point-free topology

TESIS QUE PRESENTA
Juan Carlos Monter CortØs
PARA OBTENER EL GRADO DE
Doctor en Ciencias en MatemÆticas

DIRECTOR DE TESIS:
Dr. Luis `ngel Zaldívar Corichi

Guadalajara, Jalisco, Agosto, 2027

Dedicado a:

# Agradecimientos

Juan Carlos Monter CortØs
Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías
Guadalajara, Jalisco, MÉXICO
Agosto 2027

# Contents

# Chapter 1

# Preliminares

El desarrollo de esta investigación gira en torno de dos ejes principales: la teoría de marcos y la topología de un espacio. Por tal motivo, en este capítulo nos encargamos de presentar toda la información necesaria para su desarrollo y comprensión. Para consultar información adicional de la que aquí mencionaremos, recomendamos consultar [1] o [4]. Algunas de las cuestiones espaciales que aquí serÆn mencionadas pueden encontrarse tambiØn en [6], [7] y [8].

Algunos de los resultados que se muestran en este capítulo son muy conocidos, por tal motivo, los presentamos si prueba. Los que van acompaæados de su demostración es porque consideramos que son mÆs relevantes o simplemente porque no encontramos la prueba en la literatura (por ejemplo, la Proposición 1.1.22).

## 1.1 Teoría de marcos

Trabajar con marcos, hasta cierto punto, es trabajar con estructura sencillas de de nir, pues estos se construyen a partir de un caso particular de retículas. De esta manera, lo ideal es comenzar con estructuras ordenadas.

De nición 1.1.1 Sea S un conjunto. Un orden parcial sobre S es una relación binaria la cual es

1. Re exiva: para todo a 2 S, a a,
2. Transitiva: si a b y b c, entonces a c,
3. AntisimØtrica: si a b y b a, entonces a = b.

Un conjunto parcialmente ordenado (o copo de manera abreviada), es un conjunto equipado de un orden parcial. Si en la de nición solo se cumplen las condiciones 1 y 2, entonces tenemos un preorden parcial.

De nición 1.1.2 Si S es un copo y A S. Decimos que un elemento a 2 S es un supremo (la mínima cota superior), para A y escribimos a W=A, si

1. a es una cota superior de A; es decir, s a para todo s 2 A

2. si $b \in S$ satisface que $s \leq b$ para todo $s \in A$, entonces $a \leq b$.

Si $A$ es $\emptyset$, entonces utilizamos 0 para denotar $\bigvee \emptyset$, donde 0 es el elemento mínimo de $S$. De hecho, para cualesquiera dos elementos $a, b \in A$, podemos calcular $a \vee b$, es decir, $\vee$ es una operación binaria. Además si para cualquier subconjunto finito $A$, $\vee$ y 0 cumplen

1. $a \vee a = a$,
2. $a \vee b = b \vee a$,
3. $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$,
4. $a \vee 0 = a$,

para cualesquiera $a, b, c \in A$, obtenemos un conjunto con la estructura $(S, \vee, 0)$ la cual se conoce como estructura de semiretícula o a veces $\vee$ semiretícula.

De manera dual, en cualquier copo podemos considerar la noción de ínfimo, (cota inferior más grande), definida invirtiendo todas las desigualdades de la Definición 1.1.2. Así, escribimos $\bigwedge A$, $\wedge$ y 1 para los análogos de $\bigvee A$, $\vee$ y 0. Por lo tanto, obtenemos una estructura $(S, \wedge, 1)$ que también es una semiretícula (o $\wedge$ semiretícula).

**Definición 1.1.3** Una retícula es un conjunto con dos operaciones binarias ($\vee$ y $\wedge$) y dos elementos distinguidos (0 y 1) tal que $\vee$ (respectivamente $\wedge$) es asociativa, conmutativa, idempotente y tienen a 0 (respectivamente 1) como elementos neutros.

**Definición 1.1.4** Consideremos una retícula $(S, \leq, \vee, \wedge, 0, 1)$. Si esta cumple las siguientes leyes distributivas

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \quad \text{y} \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

para todo $a, b, c \in S$. Entonces decimos $S$ es una retícula distributiva.

**Definición 1.1.5** Decimos que una $\vee$ semiretícula es completa si para cualquier subconjunto $A$ (no solo finito) existe $\bigvee A$.

**Definición 1.1.6** Un marco es una retícula completa $(S, \leq, \wedge, \bigvee, 0, 1)$ que cumple la siguiente ley distributiva, la cual se conoce como ley distributiva para marcos (LDM), y dice lo siguiente:

$$x \wedge \left(\bigvee Y\right) = \bigvee \{x \wedge y \mid y \in Y\}$$

para cualesquiera $x \in S$ y $Y \subseteq S$.

**Ejemplo 1.1.7** Para todo espacio topológico $S$ se tienen dos familias de subconjuntos: los subconjuntos abiertos, que denotamos por $\mathcal{O}S$ y sus subconjuntos cerrados, denotados por $\mathcal{C}S$. De esta forma para cualquier $(S, \mathcal{O}S)$, $\mathcal{O}S$ tiene la estructura de retícula completa

$$(\mathcal{O}S, \subseteq, \cap, \bigcup, S, \emptyset).$$

Además la familia de subconjuntos abiertos cumple la LDM. Es decir, $\mathcal{O}S$ es un marco.

Consideremos $U \subseteq S$, denotamos por

$$U; \quad U \; ; \quad U \; ;$$

como el complemento, la cerradura y el interior de $U$ en $S$, respectivamente.

Como mencionamos en el ejemplo, $\mathcal{O}S$ es un marco, en la literatura a $\mathcal{O}S$ también se le conoce como el marco de abiertos de $S$ o como la retícula de conjuntos abiertos. Al ser $\mathcal{O}S$ una retícula, en ocasiones también se le denota por $(S)$. En estas notas aparecerán ambas notaciones para referirnos a los subconjuntos abiertos del espacio topológico $S$.

Calcular ínfimos arbitrarios se puede realizar de la siguiente forma

$$\bigwedge U = \bigcap U \; :$$

Definición 1.1.8 Sean $A$ y $B$ dos marcos arbitrarios. Un morfismo de marcos es una función $f : A \to B$ tal que para cualesquiera $a, b \in A$ y $X \subseteq A$ se cumple lo siguiente:

- $a \leq b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$.
- $f(0_A) = 0_B$ y $f(1_A) = 1_B$.
- $f(a \wedge b) = f(a) \wedge f(b)$.
- $f(\bigvee X) = \bigvee f(X)$.

Utilizando las Definiciones 1.1.6 y 1.1.8 podemos demostrar que la composición de morfismos de marcos es también un morfismo de marcos. Además, el morfismo identidad (id) actúa como elemento neutro en la composición. Como consecuencia tenemos una categoría, la cual denotaremos por **Frm** y es conocida como la categoría de marcos.

Definición 1.1.9 Sea $f : A \to B$ una función monótona. El adjunto derecho de $f$ es una función monótona $f : B \to A$ tal que $f(a) \leq b \Leftrightarrow a \leq f \quad (b)$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$. Denotamos a $f$ como $f$ y escribimos $f \dashv f$

La relación que existe entre los morfismos de marcos y el adjunto de un morfismo se enuncia en el siguiente resultado.

Proposición 1.1.10 Todo morfismo de marcos tiene adjunto derecho

Demostración. Sea $f : A \to B$ un morfismo de marcos, definimos $f : B \to A$ como $f \quad (b) = \bigvee \{a \in A \mid f(a) \leq b\}$, con esta definición es inmediato que $f(a) \leq b \Rightarrow a \leq f \quad (b)$ para cualesquiera $a \in A$ y $b \in B$. Ahora, si $a \leq f \,(b) = \bigvee \{a \in A \mid f(a) \leq b\}$ al aplicar $f$, como este es un morfismo de marcos y respeta supremos arbitrarios, nos queda que $f(a) \leq f(f \,(b)) = \bigvee \{f(a) \mid a \in A; f(a) \leq b\} \leq b$. Por lo tanto, $f \dashv f \quad$.

Podemos construir la categoría opuesta a Frm, esta recibe el nombre de categoría de locales. Por la Proposición 1.1.10 tenemos que para cualesquiera $A, B \in$ Frm, si

$$f : A \to B \Rightarrow f_* : B \to A$$

donde $f$ es un morfismo de marcos y $f_*$ es su adjunto derecho. Notemos que $f_*$ invierte el dominio y codominio de $f$. Por lo tanto, podemos considerar un morfismo de locales como

$$f : B \to A$$

tales que $f$ preserva los ínfimos y sus adjuntos izquierdos, ($f^*$), son un morfismo de marcos. Así, invirtiendo la composición de los morfismos de marcos obtenemos la categoría Loc $=$ Frm$^{op}$

Recordemos que existe una adjunción entre Frm y Top (la categoría de espacios topológicos)

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Top} \arrow[d, shift right=3, "\mathcal{O}"'] \arrow[d, phantom, "\dashv"] \\ \mathrm{Frm}^{op} \arrow[u, shift right=3, "pt"'] \end{tikzcd}$$

donde pt se le conoce como el funtor de puntos y $\mathcal{O}$ como el funtor de abiertos. En la siguiente subsección mencionaremos de manera breve la construcción del funtor pt.

De esta manera $\mathcal{O}(f) : \mathcal{O}S \to \mathcal{O}T$ es un morfismo de marcos y $f$ es una función continua $f : T \to S$, donde $\mathcal{O}(f)[U] = f^{-1}[U]$ para $U \in \mathcal{O}S$.

### 1.1.1 El espacio de puntos de un marco

Sabemos que si $S$ es un espacio topológico, entonces la familia de todos los conjuntos abiertos, $\mathcal{O}S$, es un marco. Y la asignación $S \mapsto \mathcal{O}S$ está dada por un funtor contravariante.

Como mencionamos antes de comenzar esta subsección, el funtor $\mathcal{O}$ tiene un adjunto que lleva a cada marco a un espacio topológico. Esta es la construcción del espacio de puntos.

**Definición 1.1.11** Sea $A$ un marco. Un caracter de $A$ es un morfismo de marcos $h : A \to 2$, donde $2$ es el marco de dos elementos.

Existe una correspondencia entre caracteres de un marco y otros dos dispositivos: elementos $\wedge$-irreducibles y filtros completamente primos. Estos últimos serán introducidos más adelante.

**Definición 1.1.12** Sea $A$ un marco. Un elemento $p \in A$ es $\wedge$-irreducible si $p \neq 1$ y si $x \wedge y \leq p$, entonces $x \leq p$ o $y \leq p$ se cumple para cada $x, y \in A$.

Para convertir un marco en un espacio, primero debemos saber quienes son los puntos.

**Definición 1.1.13** Sea $A$ un marco. El espacio de puntos de $A$ es la colección de todos los elementos $\wedge$ irreducibles de $A$. Denotamos a estos por $ptA$.

Notemos que para que $ptA$ sea un espacio, este necesita una topología.

**Definición 1.1.14** Sea $A$ un maco con espacio de puntos $S = ptA$, vistos como elementos $\wedge$ irreducibles. Definimos

$$U_A(a) = \{p \in S \mid a \nleq p\}$$

para cada elemento $A \in A$.

Si es claro el marco bajo el cual se esta trabajando, eliminamos el subindice $A$ y solo escribimos $U(a)$.

Se puede demostrar que las intersecciones finitas y las uniones arbitrarias de conjuntos de esta forma, también tienen la misma estructura, es decir,

$$U(a) \cap U(b) = U(a \wedge b) \qquad \text{y} \qquad \bigcup \{U(a) \mid a \in X\} = U\left(\bigvee X\right)$$

se cumplen para todo $a, b \in A$ y $X \subseteq A$. Con lo mencionado antes tenemos el siguiente lema.

**Lema 1.1.15** Sea $A$ un marco con espacio de puntos $S = ptA$. La colección de conjuntos $OS = \{U(a) \mid a \in A\}$ forman una topología en $S$ y

$$U_a(\_) : A \to OS \tag{1.1}$$

es un morfismo suprayectivo de marcos.

El morfismo presentado en (1.1) es conocido como la reflexión espacial y al conjunto $OS$ se le conoce como el marco de abiertos.

Para agregar información adicional con respecto al espacio de puntos, enunciamos este último lema.

**Lema 1.1.16** Sea $A$ un marco con espacio de puntos $S$. El orden de especialización en $S$ es el orden inverso heredado de $A$.

En el Capítulo 2, haremos uso de la construcción del espacio de puntos para dar algunos otros resultados. Por el momento hablaremos de otros objetos que están en correspondencia biyectiva con los elementos del espacio de puntos.

**Definición 1.1.17** Sea $A$ un marco. Un subconjunto $F \subseteq A$ es un filtro si

- $1 \in F$.
- $a \leq b$, $a \in F$, entonces $b \in F$.
- $a, b \in F$, entonces $a \wedge b \in F$.

Decimos que un filtro es propio si $0 \notin F$. Si agregamos ciertas propiedades particulares obtenemos otros tipos de filtros.

**Definición 1.1.18** Sea $A$ un marco. Decimos que un filtro $F$ en $A$ es:

- Primo si $x \vee y \in F$, entonces $x \in F$ o $y \in F$. Además, $F$ requiere ser propio.
- Completamente primo si $\bigvee X \in F$, entonces $X \cap F \neq \emptyset$, para cada $X \subseteq A$. Además. requiere ser propio.
- Abierto (o de Scott) si $\bigvee X \in F$, entonces $X \cap F \neq \emptyset$, para cada conjunto dirigido $X \subseteq A$.

A manera de notación, agrupamos a los distintos filtros en los siguientes conjuntos:

$$Fil(A) = \{\text{Filtros en } A\}; \quad A^{\wedge} = \{\text{F. abiertos en } A\}; \quad CFil = \{\text{F. c. primos en } A\}.$$

Los filtros mencionados en la Definición 1.1.18 están relacionados de la siguiente manera.

**Proposición 1.1.19** Un filtro es completamente primo si y solo si este es primo y abierto.

Además, de manera equivalente podemos decir que un filtro es completamente primo si

$$\bigcap_{i \in J} U_i \in F; \text{ entonces } \exists k \in J \text{ tal que } U_k \in F.$$

Notemos que esta noción está dada para los abiertos del espacio de puntos, es decir, elementos de $OS$.

Para un espacio $S$ si consideramos $x \in S$, tenemos el filtro completamente primo de vecindades abiertas de $x$

$$F(x) = \{U \in OS \mid x \in U\}.$$

**Proposición 1.1.20** Sea $F_a$ la familia de filtros abiertos, entonces

1. si $F_1, F_2 \in F_a$, entonces $F_1 \cap F_2 \in F_a$.
2. si $U \subseteq F_a$ una familia dirigida, entonces $\bigcup U \in F_a$.

Como mencionamos antes, los elementos de $ptA$ están en correspondencia biyectiva con algunos otros dispositivos que se pueden definir para el marco $A$, uno de estos son precisamente los filtros completamente primos.

**Lema 1.1.21** Sea $A$ un marco. Los dispositivos

- caracteres de $A$,
- filtros completamente primos de $A$,

elementos ^ irreducibles de A

están en correspondencia biyectiva por pares.

Si f : A ! B es un mor smo de marcos y F A, G B ltros en A, B, respectivamente, podemos producir nuevos ltros como sigue

$$b 2 f F , f (b) 2 F \quad y \quad a 2 f G , f (a) 2 G \tag{1.2}$$

donde a 2 A; b 2 B y f es el adjunto derecho de f. Aquí f F B y f G A son ltros en B y A, respectivamente.

Proposición 1.1.22 Para f = f : A ! B un mor smo de marcos y G 2 B ^ , se cumple que f G 2 A ^ .

Demostración. Por (1.2), f G es un ltro en A. Necesitamos que f G satisfaga la condición de ltro abierto. Sea X A tal que W X 2 f G, con X dirigido. Entonces

$$Y = ff(x) j x 2 Xg$$

es dirigido y f( W X) = W f[X] = W Y 2 G. Como G es un ltro abierto, existe y = f(x) 2 Y tal que y 2 G. Así x 2 f G, de modo que, f G 2 A ^ .
Este œltima proposición serÆ de gran utilidad para probar algunos otros resultados en los Capitulos 4 y 5.

### 1.1.2 Estudio algebraico de los marcos

Como en toda estructura algebraica, en ocasiones es mÆs sencillo obtener información de la estructura si ponemos nuestra atención en sus cocientes. Esto mismo ocurre en la categoría Frm. De manera similar a cualquier otra estructura, podemos obtener lo cocientes a travØs de una relación de equivalencia. Con esta, de nir ciertas congruencias y por medio de las congruencias obtener el cociente.

La ventaja que proporciona trabajar con los marco es que tenemos las siguientes correspondencias biyectivas:

Congruencias $ Conjuntos implicativos $ Nœcleos

Para observar mÆs detalles sobre estas correspondencias, se puede consultar [13]. Nosotros solo mencionaresmos los detalles necesarios.

De nición 1.1.23 Sea f : A ! B un mor smo de marcos, una congruencia (o marco de congruencias), es el conjunto generado por la relación de equivalencia x y , f(x) = f(y).

Trasladando lo anterior al lenguaje de retículas de conjuntos abiertos tenemos que para un mor smo h: OS ! OT , tenemos una congruencia

$$E_h = f(U; V) j h(U) = h(V)g:$$

En particular, para un subespacio $X \subseteq S$, el encaje $j$ produce la congruencia

$$E_X = \{(U, V) \mid U \cap X = V \cap Y\};$$

tales congruencias pueden usarse como representaciones de subespacio.

**Definición 1.1.24** Un cociente de un marco $A$ es un morfismo suprayectivo

$$f : A \to B$$

**Definición 1.1.25** Sea $f : A \to B$ un morfismo de $\bigvee$ retículas, el kernel de $f$ es la relación de equivalencia dada por $x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$

Sabemos que si $f^* = f$ es un morfismo de marcos, entonces este tiene adjunto derecho $f_*$. El siguiente resultado relaciona a mabos para obtener el kernel.

**Lema 1.1.26** Sea $f : A \to B$ un morfismo de $\bigvee$ retículas, el kernel $k$ de $f$ es

$$k = f_* \circ f^*$$

**Definición 1.1.27** Sea $A$ una $\bigvee$ retícula. Decimos que $F \subseteq A$ es $\bigwedge$ cerrado o cerrado bajo ínfimos si $\bigwedge X \in F$ para cualquier $X \subseteq F$.

**Definición 1.1.28** Sea $A \in \mathrm{Frm}$. Decimos que $F \subseteq A$ es un conjunto implicativo de $A$ si éste es $\bigwedge$ cerrado y cumple que para $a \in F$, $(x \succ a) \in F$, donde $x \in A$.

El cociente adecuado para un marco $A$ es cierto conjunto de puntos fijos. Por el momento dejaremos los detalles importantes de esta afirmación para la siguiente sección.

**Definición 1.1.29** Sea $A \in \mathrm{Frm}$ y $j : A \to A$. $A_j$ es el conjunto de puntos fijos y se define como

$$A_j = \{a \in A \mid a = j(a)\}.$$

## 1.2 El ensamble de un marco

Si $A$ es un marco, podemos definir operadores $j : A \to A$ y al solicitarles algunas condiciones específicas, estos pueden permitirnos construir nuevos marcos. Los detalles de esta sección pueden consultarse en [2], [13] o en el compendio de notas sobre toería de marcos de Simmons (ver [9]).

### 1.2.1 Operadores en $A$

**Definición 1.2.1** Sea $A \in \mathbf{Frm}$. Decimos que:

1. Una derivada en $A$ es una función $j : A \to A$ tal que
   (a) $a \leq j(a)$ para cualquier $a \in A$, (el operador infla).
   (b) Si $a \leq b \Rightarrow j(a) \leq j(b)$ para cualesquiera $a, b \in A$, (el operador es monótono).

   $DA$ denotará al conjunto de todos los operadores derivada sobre $A$.

2. $j$ es un operador cerradura si $j \in DA$ y $j^2 = j$.
   $CA$ denotará al conjunto de todos los operadores cerradura sobre $A$.

3. $j$ es un núcleo si $j \in CA$ y $j(a) \wedge j(b) \leq j(a \wedge b)$.
   $NA$ denotará al conjunto de todos los núcleos sobre $A$.

Notemos que por la forma en que definimos estos tres operadores tenemos la siguiente relación entre ellos

$$NA \subseteq CA \subseteq DA.$$

**Ejemplo 1.2.2** Si $A \in \mathbf{Frm}$ para cualquier $a \in A$ definimos las funciones

$u_a : A \to A;\ u_a(x) = a \vee x;\ \forall x \in A$ (núcleo cerrado)

$v_a : A \to A;\ v_a(x) = (a \succ x);\ \forall x \in A$ (núcleo abierto)

$w_a : A \to A;\ w_a(x) = ((x \succ a) \succ a);\ \forall x \in A$ (núcleo regular)

Es sencillo verificar que los tres operadores definidos son núcleos.

Si $j \in NA$ es un núcleo arbitrario, este puede obtenerse por medio de los núcleos del Ejemplo 1.2.2.

**Lema 1.2.3** Para cada marco $A$, núcleo $j \in NA$ y $a \in A$, donde $b = j(0)$, se cumple lo siguiente

1. $u_a \leq j \Leftrightarrow a \leq j(0)$.
2. $v_a \leq j \Leftrightarrow j(a) = 1$.
3. $j \leq w_a \Leftrightarrow j(a) = a$.
4. $w_a \leq j \Leftrightarrow j = w_b$.
5. $u_a$ y $v_a$ son complementados en $NA$.

**Lema 1.2.4** Para cada marco $A$ tenemos que

$$\bigvee \{u_{j(a)} \wedge v_a \mid a \in A\} = j = \bigwedge \{w_a \mid a \in A_j\}$$

donde $j \in NA$.

**Lema 1.2.5** Para cada marco $A$ tenemos lo siguiente

$$v_b \vee j \vee u_a = v_b \circ j \circ u_a \qquad \text{y} \qquad w_a \vee j = w_a \circ j \circ w_a$$

para cada $a, b \in A$ y $j \in NA$.

**Teorema 1.2.6** Para cada marco $A$ consideremos cualquier elemento $a \in A$ y núcleo $k \in NA$ con $u_a \leq k \leq w_a$. Entonces

$$j \vee w_a = w_a \circ j \circ k = w_d$$

donde $d = w_a(j(a))$.

**Lema 1.2.7** Para cada marco $A$ tenemos que

$$w_{(b \supset a)} = v_b \vee w_a$$

para cada $a, b \in A$.

Haciendo uso de las definiciones presentadas en la Subsección 1.1.2 podemos enunciar el siguiente resultado.

**Lema 1.2.8** Para cualesquiera $A \in Frm$ y $j \in CA$, $A_j$ es un conjunto implicativo si y solo si $j \in NA$. Además, si $j \in NA$, $A_j$ es un marco y $j^* : A \to A_j$, $j^*(x) = j(x)$ es un morfismo de marcos.

Notemos que $j^*$ no es mas que la restricción del morfismo $j$ en $A_j$. Además, el conjunto de puntos fijos nos permite factorizar cualquier morfismo de marcos a través del morfismo $j^*$.

**Teorema 1.2.9** Sean $A \in Frm$, $j \in NA$. Si $f : A \to B$ es un morfismo de marcos y $j \leq k$, donde $k$ es el kernel de $f$, entonces existe un único morfismo de marcos $f^{\#} : A_j \to B$ tal que hace conmutar el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "j"'] & B \\ A_j \arrow[ur, dashed, "f^{\#}"'] & \end{tikzcd}$$

Sabemos que un operador derivada es un morfismo monótono y que infla. Ahora, si además de estas dos condiciones le pedimos que cumpla lo que se menciona en la siguiente definición, obtenemos nuevos operadores. A estos les llamaremos operadores estables y prenúcleos.

**Definición 1.2.10** Sea $j \in DA$. Para cualesquiera $a, b \in A$ tenemos que

1. $j$ es un operador estable si $j(a) \wedge b \leq j(a \wedge b)$.
   $SA$ denotará al conjunto de todos los operadores estables sobre $A$.

2. $j$ es un prenúcleo si $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$.
   $PA$ denotará al conjunto de todos los prenúcleos sobre $A$.

Observación 1.2.11

1. Todo prenúcleo es un operador estable.

2. Si una derivada es estable e idempotente, entonces es un núcleo.

3. Los operadores $id, tp \in DA$. Donde $tp(x) = 1$ para todo $x \in A$ e $id$ es el operador identidad.

Así para cualquier $A \in \mathbf{Frm}$ tenemos está nueva relación entre los operadores definidos hasta este momento

$$NA \subseteq PA \subseteq SA \subseteq DA.$$

Definición 1.2.12 Sea $A \in \mathbf{Frm}$ definimos un orden para los elementos de $DA$ de la siguiente manera

$$j \leq k \Leftrightarrow j(a) \leq k(a), \text{ para cualquier } j, k \in DA \text{ y } \forall a \in A.$$

Definición 1.2.13 Sea $A \in \mathbf{Frm}$. Para cada $F \subseteq DA$ definimos

1. El ínfimo puntual como $\bigwedge F : A \to A$,

$$\left(\bigwedge F\right)(x) = \bigwedge \{f(x) \mid x \in X\}.$$

2. El supremo puntual como $\bigvee F : A \to A$,

$$\left(\bigsqcup F\right)(x) = \bigsqcup \{f(x) \mid x \in X\}.$$

Observación 1.2.14

1. $CA$, $NA$, $PA$, $SA$, al ser subconjuntos de $DA$, podemos dotarlos del mismo orden presentado en la Definición 1.2.12 para sus elementos, es decir, junto con $DA$ son conjuntos parcialmente ordenados. De manera particular los operadores $id$ y $tp$ son los elementos distinguidos 0 y 1 respectivamente en estos conjuntos ordenados.

2. $DA$, $SA$, $PA$, $CA$ y $NA$ son cerrados bajo ínfimos puntuales. Además, $SA$ y $DA$ son cerrados bajo supremos puntuales.

3. $SA$ es un marco. En consecuencia $(f \to g) \in SA$, con $f, g \in SA$.

En otras palabras la observación anterior nos dice que podemos dotar de una estructura de retícula completa a los operadores derivada y a los operadores estables. AdemÆs, podemos definir la implicación sobre $SA$. En consecuencia $SA$ es un marco, sin embargo, ¿esta implicación sólo se puede calcular en $SA$? La respuesta la encontramos en el siguiente lema.

Lema 1.2.15 Sean $A \in \mathbf{Frm}$, $f \in SA$ y $k \in NA$, entonces $(f \to k) \in NA$. Donde la implicación es la que existe en $SA$.

Observemos que hemos dotado al conjunto $NA$ de una implicación. De esta manera, lo dicho en el Lema 1.2.15 y por el comentario del párrafo anterior tenemos un esbozo de la demostración de un teorema importante de la teoría de marcos.

**Teorema 1.2.16** (Teorema fundamental de la teoría de marcos) *Sea $A \in Frm$, entonces $NA$ es un marco.*

Al marco $NA$ también se le conoce como el ensamble de $A$.

Es momento de ver como se compartan los diferentes operadores definidos hasta este momento bajo composiciones.

**Definición 1.2.17** Sean $A \in Frm$ y $f \in DA$, definimos recursivamente sobre los ordinales

$$f^0 = id; \quad f^{\alpha^+} = f \circ f^\alpha; \quad f^\lambda = \bigvee\{f^\alpha \mid \alpha < \lambda\}$$

cuando $\lambda$ es un ordinal límite y $\alpha^+$ denota al ordinal sucesor de $\alpha$.

De esta manera producimos una cadena de derivadas

$$id \leq f \leq f^2 \leq f^3 \leq \cdots \leq f^\alpha \leq \cdots$$

Esta cadena se detiene en algún punto, es decir, hay un ordinal $\gamma$ tal que $f^\gamma = f^{\gamma^+}$ para cualquier $\gamma \leq \alpha$. Al mínimo ordinal para el cual se detiene la cadena lo denotamos por $\infty$. Por como construimos la cadena $f^\infty$ es idempotente.

**Lema 1.2.18** *Sean $A \in Frm$ y $f \in DA$, entonces $f^\infty$ es el menor operador cerradura mayor que $f$.*

El siguiente resultado nos dice que, cuando consideramos al operador $f \in SA$, entonces $f^\infty \in NA$. De hecho, cuando esto ocurra, a $f^\infty$ lo llamaremos la cerradura idempotente.

**Teorema 1.2.19** *Sea $A \in Frm$. La asignación $(\cdot)^\infty : SA \to SA$ es un núcleo en $SA$. Además, el conjunto de puntos fijos de $(\cdot)^\infty$ es $NA$.*

Si tomamos un elemento $a \in A$, podemos asignarle un único elemento del marco $NA$. La forma de hacerlo se explica en la siguiente definición.

**Definición 1.2.20** Para cualquier $A \in Frm$, la función $\eta_A$ se define como

$$\begin{aligned} \eta_A : A &\to NA \\ a &\mapsto u_a \end{aligned}$$

Este morfismo es epimorfismo y en general no es suprayectivo, de hecho:

**Lema 1.2.21** *Sea $A \in Frm$, el morfismo $\eta_A : A \to NA$ es suprayectivo si y sólo si $A$ es booleano.*

**Definición 1.2.22** Decimos que un morfismo de marcos $f : A \to B$ resuelve el problema de la complementación booleana en $A$ si para cualquier $a \in A$, $f(a) \in B$ tiene complemento.

Para cualquier $A \in Frm$, $\eta_A$ resuelve el problema de la complementación booleana en $A$, pues $u_a$ es un elemento del marco $NA$.

### 1.2.2 Núcleos espacialmente inducidos

Para un marco espacial $A = OS$ existe una clase de núcleos que contiene todos los núcleos $u$ y $v$ descritos en la subsección anterior (además de estos, contiene muchos más). Estos capturan el contenido espacial de $OS$ en un sentido que veremos a continuación.

**Definición 1.2.23** Sea $S$ un espacio topológico. Para cada $E \in PS$ definimos

$$[E](U) = (E \cup U)^{\circ}$$

donde $U \in OS$.

La definición anterior nos permite obtener una función $[\_]: OS \to OS$. No es complicado verificar que $[E]$ es un núcleo en el marco $OS$.

**Definición 1.2.24** Para un espacio topológico $S$, un núcleo en $OS$ es espacialmente inducido si este tiene la forma $[E]$ para algún $E \subseteq S$.

La razón por la cual se denomina a este núcleo espacialmente inducido se debe a que cada función continua entre dos espacios topológicos $\phi: T \to S$ produce un morfismo de marcos $\phi^{-1}: OS \to OT$ entre sus topologías. Este morfismo tiene el kernel $\ker(\phi^{-1})$ caracterizado por

$$V \leq \ker(\phi^{-1})(U) \Leftrightarrow \phi^{-1}(V) \leq \phi^{-1}(U)$$

para $U, V \in OS$. Precisamente $\ker(\phi^{-1})$ coincide con nuestro núcleo espacialmente inducido.

**Teorema 1.2.25** Sea $\phi$ una función continua como la de antes. Sea $E = S \setminus \phi(T)$ el complemento del rango de $\phi$. Entonces $\ker(\phi^{-1}) = [E]$.

*Demostración.* Para cada $U, V \in OS$ tenemos

$$\begin{aligned}
V \leq \ker(\phi^{-1})(U) &\Leftrightarrow \phi^{-1}(V) \leq \phi^{-1}(U) \\
&\Leftrightarrow (\forall t \in T)[\phi(t) \in V \Rightarrow \phi(t) \in U] \\
&\Leftrightarrow (\forall s \in S)[s \in V \cap \phi(T) \Rightarrow s \in U] \\
&\Leftrightarrow (\forall s \in S)[s \in V \Rightarrow s \in E \cup U] \\
&\Leftrightarrow V \subseteq E \cup U.
\end{aligned}$$

y al calcular interior tenemos que $V \leq \ker(\phi^{-1})(U) \Leftrightarrow V \leq (E \cup U)^{\circ} = [E](U)$.

Esto muestra como un morfismo de marcos inducido espacialmente produce un núcleo inducido espacialmente. Recíprocamente, todo núcleo espacialmente inducido surge de esta manera. Para ver esto consideremos cualquier espacio $S$ y subconjunto $E \subseteq S$. Sea $T = S \setminus E$ con la topología de subespacio, así el encaje $\iota: T \to S$ es continuo. Entonces $E = S \setminus \iota(T)$ y por lo tanto $[E]$ es el kernel del encaje.

En un marco espacial, es posible determinar explícitamente la operación implicación.

Lema 1.2.26 Sea S un espacio topológico. La implicación en el marco espacial OS está dada por

$$W \quad M = (W \quad {}^0[\,M)$$

para cada W; M 2 OS.

Demostración. Para cualesquier U; W; M 2 OS tenemos

$$U \quad (W \quad M)\ ,\ U \setminus W \quad M\ ,\ U \quad (W \qquad {}^0[\,M)\ ,\ U \quad (W \qquad {}^0[\,M) \quad :$$

Cada marco lleva sus nœcleos distinguidos u y v, ¿quØ son estos para una topología?

Lema 1.2.27 Para un espacio topológico S tenemos que

$$\text{i)}\ u_W = [W] \quad \text{y} \quad \text{ii)}\ v_W = [W^0]$$

para cada W 2 OS.

Demostración.

i) Sean W; M 2 OS. Sabemos que $u_W(M) = W$ [ M = (W [ M) = [W](M).

ii) Consideremos M 2 OS. Por el Lema 1.2.26 la implicación en OS estÆ dada por (W M) = (W $^0$[ M) .De aquí que

$$v_W(M) = (W \quad M) = (W \quad {}^0[\,M) \quad = [W^0](M):$$

Cada subconjunto E de un espacio S determina un nœcleo [E] en la topología. Sin embargo, los nœcleos [E] no necesitan determinar al subconjunto E.

### 1.2.3 El funtor N(_)

En esta subsección veremos que $_A$: A ! NA de ne un funtor. Esto lo hacemos al veri car que la asignación a 7! $u_a$ proporciona cierta propiedad universal. Antes de eso mencionamos un par de observaciones.

Sabemos que los nœcleos $u_a$ y $v_a$ son complementos entre si en NA, es decir, el encaje $_A$ crea elementos complementados para elementos de A. AdemÆs, sabemos que para todo j 2 NA

$$j = {}^{-}\ fu_{j(a)} \ \wedge v_a \ j\ a\ 2\ Ag:$$

Lema 1.2.28 Para cada A 2 Frm y mor smos de marcos g; h: NA ! B, si g $_A$ = h $_A$, entonces g = h. En otras palabras, $_A$ es un epimor smo.

Demostración. Consideremos los morfismos $g, h$ tales que $g\eta_A = h\eta_A$. De esta manera $g(u_a) = h(u_a)$ para todo $a \in A$. Como $u_a$ es complementado por $v_a$, es decir, $u_a \wedge v_a = id$ y $u_a \vee v_a = tp$, se puede verificar que $g(v_a) = h(v_a)$.

Ahora, consideremos $j \in NA$, entonces $j = \bigvee\{u_{j(a)} \wedge v_a \mid a \in A\}$. Así

$$\begin{aligned} g(j) &= \bigvee\{g(u_{j(a)}) \wedge g(v_a) \mid a \in A\} \\ &= \bigvee\{h(u_{j(a)}) \wedge h(v_a) \mid a \in A\} = h(j). \end{aligned}$$

Por lo tanto $g = h$.

Un morfismo $f : A \to B$ resuelve el problema de complementación para $A$ si para $a \in A$, $f(a)$ tiene complemento en $B$.

Teorema 1.2.29 Para cada marco $A$, el morfismo $\eta_A : A \to NA$ resuelve universalmente el problema de la complementación para $A$. Es decir, para cada morfismo $f : A \to B$ existe un único morfismo $f^{\#}$ tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle \eta_A}\downarrow & \nearrow{\scriptstyle f^{\#}} & \\ NA & & \end{array}$$

Demostración. Por el Lema 1.2.28, $\eta_A$ es un epimorfismo, de esta manera, de existir el morfismo $f^{\#}$, este debe ser único.

Para cada $j \in NA$, consideremos

$$f^{\#}(j) = \bigvee\{f(j(x)) \wedge f(x)' \mid x \in A\};$$

donde $f(x)'$ es el complemento de $f(x)$ es $B$. Se puede verificar que el morfismo $f^{\#} : NA \to B$ es monótono y además es un $\wedge$-morfismo.

Para $b \in B$, consideremos la siguiente composición

$$A \to B \to [b, 1_B];$$

donde $[b, 1_B]$ es un intervalo en $B$. Sea $\langle b \rangle$ el kernel de la composición anterior, de esta manera

$$y \leq \langle b \rangle(x) \Leftrightarrow b \vee f(y) \leq b \vee f(x) \Leftrightarrow f(y) \leq b \vee f(x)$$

para todo $x, y \in A$. Verifiquemos que el morfismo $f_b : B \to NA$, dado por la asignación $b \mapsto \langle b \rangle$ es el adjunto derecho de $f^{\#}$, es decir, debemos verificar que $f^{\#}(j) \leq b \Leftrightarrow j \leq \langle b \rangle$ para $j \in NA$ y $b \in B$.

Supongamos que $f^{\#}(j) \leq b$ y sea $x \in A$ tal que $y = j(x)$. De esta manera

$$f(y) \wedge f(x)' \leq f^{\#}(j) \leq b,\ j(x) = y \Rightarrow f(y) \leq b \vee f(x);$$

es decir $j(x) \leq \langle b\rangle(x)$.

De manera reciproca, supongamos que $j \leq \langle b\rangle$ y consideremos $x \in A$. De esta manera $j(x) \leq \langle b\rangle(x)$, de modo que $f(j(x)) \leq b \vee f(x)$. Así $f(j(x)) \wedge f(x)' \leq b$. Como lo anterior se cumple para todo $x \in A$, en particular se cumple para $f^{\#}$, es decir, $f^{\#}(j) \leq b$.

Lo anterior también muestra que $f^{\#}$ es un morfismo de marcos.

Por último, veamos que el diagrama conmuta. Sean $x, a \in A$. Así

$$f(a \vee x) \wedge f(x)' = (f(a) \vee f(x)) \wedge f(x)' = f(a) \wedge f(x)' \leq f(a).$$

Además, $f(a \vee 1) \wedge f(1)' = f(a)$. Por lo tanto

$$(f^{\#} \circ \eta_A)(a) = f^{\#}(u_a) = \bigvee \{f(a \vee x) \wedge f(x)' \mid x, a \in A\} = f(a)$$

que es lo que queríamos.
La prueba del Teorema 1.2.29, de manera indirecta, proporciona un funtor. En este punto es importante mencionar lo siguiente: Toda propiedad universal define un funtor.

Teorema 1.2.30 La asignación $A \mapsto NA$ es la relación entre objetos por el funtor $N(\_): \mathbf{Frm} \to \mathbf{Frm}$ y el morfismo $\eta_A : A \to NA$ es una transformación natural. En otras palabras, para todo $A, B \in \mathbf{Frm}$ y cada morfismo $f \in \mathbf{Frm}$, el siguiente diagrama conmuta para un único morfismo $Nf$.

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "f"'] & NA \arrow[d, "Nf"] \\ B \arrow[r, "\eta_B"'] & NB \end{tikzcd}$$

Demostración. En el diagrama anterior, la imagen de cada elemento de $A$ bajo la composición $\eta_B \circ f$ es complementada en $NB$, y así, por el Teorema 1.2.29 existe un único morfismo $Nf : NA \to NB$ que hace conmutar el cuadrado.

Resta verificar que este es un funtor, es decir, para

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$$

se cumple que $N(g \circ f) = Ng \circ Nf$. Notemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\eta_A"'] & B \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\eta_B"'] & C \arrow[d, "\eta_C"'] \\ NA \arrow[r, "Nf"'] & NB \arrow[r, "Ng"'] & NC \end{tikzcd}$$

conmuta. De esta manera $Ng \circ Nf$ es la œnica echa que hace conmutar el rectÆngulo. Por lo tanto $N(g \circ f) = Ng \circ Nf$.
De manera adicional, tenemos la siguiente relación entre el funtor $N$ y los nœcleos abiertos y cerrados.

Corolario 1.2.31 Para $f \in Frm(A; B)$ y $a \in A$ se cumple lo siguiente:

1. $(Nf)u_a = u_{f(a)}$.
2. $(Nf)v_a = v_{f(a)}$.

Demostración.

1. Es la asignación del cuadro en el Teorema 1.2.30.
2. Sabemos que los nœcleos $u_a$ y $v_a$ son complementos en $NA$. AdemÆs, $Nf$ es un mor smo de marcos. Así

$$u_{f(a)} \wedge (Nf)(v_a) = (Nf)(u_a \wedge v_a) = id$$
$$u_{f(a)} \vee (Nf)(v_a) = (Nf)(u_a \vee v_a) = tp:$$

de esta manera $(Nf)(v_a)$ es el complemento de $u_{f(a)}$ en $NA$, pero el complemento es œnico, es decir, $(Nf)(v_a) = v_{f(a)}$.

## 1.3 Aspectos topológicos

Si $S$ es un espacio topológico, entonces este puede cumplir distintas propiedades (axiomas de separación, compacidad, sobriedad, entre otras). En este trabajo, una de las construcciones en las que mÆs centramos nuestra atención es la del espacio de parches. La anterior es motivada por la siguiente situación: si $S$ es un espacio $T_2$, entonces todo conjunto compacto (saturado) es cerrado. Lo primero que podemos preguntarnos es: ¿quØ pasa si el espacio no es $T_2$? El espacio de parches, como veremos mÆs adelante, soluciona este defecto .

En esta sección se mencionan los antecedentes topológicos que se necesitan para comprender que es el espacio parches. De igual manera mencionamos algunas otras propiedades topológicas y la relación que existe entre todas estas.

### 1.3.1 Espacios sobrios

De nición 1.3.1 Un conjunto cerrado $X$ no vacío es irreducible en $S$ si para cada $U; V$ abiertos disjuntos se cumple que

$$U \cap X \neq \emptyset; V \cap X \neq \emptyset \Rightarrow U \cap V \cap X \neq \emptyset:$$

**Definición 1.3.2** Para un espacio $S$ decimos que este es sobrio si es $T_0$ y cada conjunto $X$ cerrado irreducible es la cerradura de un único punto, es decir,

$$X = \overline{\{x\}}$$

con $x \in S$.

Se puede verificar que si $S$ es un espacio $T_2$, entonces este es sobrio, pero las propiedades de sobriedad y $T_1$ no son comparables.

Si tenemos un espacio que no es sobrio, entonces existe una manera de sobrificarlo.

**Definición 1.3.3** Sea $S$ un espacio topológico. La reflexión sobria de $S$, denotada por ${}^+S$, es el espacio topológico cuyos puntos son los conjuntos cerrados irreducibles de $S$. Para $U \in OS$ sea ${}^+U \subseteq S$ dado por

$$X \in {}^+U \Leftrightarrow U \cap X \neq \emptyset$$

para cada $X \in {}^+S$.

De esta manera tenemos el espacio topológico $({}^+S, O^+S)$, donde

$$O^+S = \{{}^+U \mid U \in OS\}$$

También, tenemos un morfismo de marcos $OS \to O^+S$ dado por la reflexión sobria y la función continua de $S$ a ${}^+S$ dada por la asignación $p \mapsto \overline{p}$.

**Lema 1.3.4** Para cada función continua $: S \to T$ de un espacio arbitrario $S$ a un espacio sobrio $T$, existe una única función continua $^+ : {}^+S \to T$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[rr] \arrow[dr] & & T \\
& {}^+S \arrow[ur, "{}^+"'] &
\end{tikzcd}$$

**Lema 1.3.5** Si un espacio $S$ tiene reflexión sobria que es $T_1$, entonces $S$ es sobrio y $T_1$.

*Demostración.* Notemos que $S \subseteq {}^+S$, donde $S$ tiene la topología del subespacio. Supongamos que $X \subseteq S$ es un conjunto cerrado irreducible de $S$ y consideremos la clausura de $X$ en ${}^+S$. Para $U \in O^+S$ tenemos

$$X^- \cap U \Rightarrow X \cap U \Rightarrow X \cap (S \cap U);$$

es decir $X^-$ es cerrado irreducible en ${}^+S$. Ahora, si ${}^+S$ es $T_1$ y sobrio, entonces $X = \overline{\{p\}}$ para algún $p \in {}^+S$ y por lo tanto $X = \{p\}$.

Los siguiente resultados involucran al espacio de puntos de un marco y a espacios sobrios.

**Lema 1.3.6** El espacio de puntos $ptA$ de un marco $A$ es sobrio

**Lema 1.3.7** *Sea $S$ un espacio topológico. El espacio de puntos de $\mathcal{O}S$ es la reflexión sobria de $S$.*

Para ver esto, notemos que los subconjuntos cerrados irreducibles de $S$ son precisamente los complementos de los elementos $\wedge$-irreducibles. De esta manera encontramos que

$$\begin{aligned} S &\to pt(\mathcal{O}S \\ p &\mapsto \overline{\{p\}}' \end{aligned}$$

es el mapeo que da la reflexión.

### 1.3.2 Conjuntos saturados

Cada espacio topológico tiene un preorden para sus puntos. Este es un orden de especialización y se define de la siguiente manera.

**Definición 1.3.8** *Sea $S$ un espacio topológico. El orden de especialización en $S$ es la comparación "$\sqsubseteq$" dado por*

$$p \sqsubseteq q \Leftrightarrow \overline{p} \subseteq \overline{q}$$

*donde $p, q \in S$. De manera equivalente tenemos que $p \sqsubseteq q \Leftrightarrow p \in \overline{q}$.*

La comparación definida es un preorden y este es un orden parcial precisamente cuando el espacio es $T_0$. Si el espacio es $T_1$, entonces el orden está dado por la igualdad.

Recordemos que si tenemos un marco arbitrario, por lo visto en 1.1.1, podemos asignarle a este un espacio topológico por medio de su espacio de puntos.

**Lema 1.3.9** *Sea $A$ un marco con espacio de puntos $ptA$. El orden de especialización en $S$ es el orden inverso del orden heredado de $A$.*

Usando este orden parcial en un espacio $T_0$, podemos introducir el concepto de saturación.

**Definición 1.3.10** *Sea $(S, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Para cada $E \subseteq S$, $\downarrow E$ y $\uparrow E$ son, respectivamente, la sección inferior y la sección superior generada por $E$, es decir,*

$$\downarrow E = \{x \mid (\exists e \in E)[x \leq e]\} \quad \text{y} \quad \uparrow E = \{x \mid (\exists e \in E)[x \geq e]\}$$

*respectivamente. Decimos que $\uparrow E$ es la saturación de $E$ y $E$ es saturado si $E = \uparrow E$.*

Para $p \in S$ escribimos $\downarrow p$ para $\downarrow\{p\}$ y $\uparrow p$ para $\uparrow\{p\}$. Trivialmente $\uparrow\uparrow E = \uparrow E$, por lo que la saturación de $E$ es saturada.

Si $S$ es cualquier espacio topológico y $p \in S$, tenemos que $\downarrow p = \overline{p}$. Sin embargo, esto no es cierto para subconjuntos arbitrarios de $S$. Usualmente $\downarrow E \neq \overline{E}$ aunque hay una clase de topologías para las cuales $\downarrow(\_)$ y $\overline{(\_)}$ coinciden (las topologías de Alexandorff).

En un espacio topológico, la saturación de un subconjunto se puede obtener sin referencia al orden de especialización.

**Lema 1.3.11** Sea $S$ un espacio topológico. Para cada subconjunto $E \subseteq S$ tenemos que

$$\uparrow E = \bigcap \{U \in \mathcal{O}S \mid E \subseteq U\}$$

*Demostración.* Consideremos $x \in \uparrow E$, entonces $\exists\, e \in E$ tal que $e \sqsubseteq x$, es decir, $x \in \uparrow e$. De aquí que para $U \in \mathcal{O}S$, si $e \in U$ entonces $x \in U$. Por lo tanto

$$x \in \bigcap \{U \in \mathcal{O}S \mid e \in U\} \subseteq \bigcap \{U \in \mathcal{O}S \mid E \subseteq U\};$$

es decir, $\uparrow E \subseteq \bigcap \{U \in \mathcal{O}S \mid E \subseteq U\}$.

Para la otra contención, consideremos $x \in \bigcap \{U \in \mathcal{O}S \mid E \subseteq U\}$. Notemos que si $E \subseteq U$, entonces $x \in U$ para todo $U \in \mathcal{O}S$. De aquí que al menos existe algún $e \in E$ tal que $x \sqsupseteq e$, es decir, $e \sqsubseteq x$.
De esta manera cada subconjunto abierto es saturado. Sin embargo, el reciproco no necesariamente ocurre, por lo general, hay muchos conjuntos saturados que no son abiertos. Por ejemplo, en un espacio $T_1$ todos los conjuntos son saturados. En un espacio de Alexandroff ocurre lo contrario, cada saturado es abierto.

En cualquier conjunto parcialmente ordenado, la familia de conjuntos saturados (secciones superiores), es cerrada bajo uniones e intersecciones arbitrarias. En particular, los conjuntos saturados forman la topología de Alexandroff.

**Definición 1.3.12** Sea $(S, \sqsubseteq)$ un orden parcial. La topología de Alexandroff en $S$ es la topología que consta de todos los conjuntos saturados

**Definición 1.3.13** Una cubierta abierta para un conjunto $A$ es una colección $\mathcal{U}$ de conjuntos abiertos tales que

$$A \subseteq \bigcup \mathcal{U}$$

se cumple.

- Una subcubierta de una cubierta abierta $\mathcal{U}$ para $A$ es una subcolección $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{U}$ la cual forma una cubierta abierta para $A$.
- Una cubierta $\mathcal{U}$ es dirigida si esta es $\subseteq$-dirigida, es decir, para cada $U, V \in \mathcal{U}$, existe algún $W \in \mathcal{U}$ tal que $U \cup V \subseteq W$.
- Un conjunto $X$ de un espacio topológico $S$ es compacto si cada cubierta abierta de $X$ tiene una subcubierta abierta finita.

A veces es conveniente usar una formulación equivalente de compacidad. Reescribimos la definición en términos de cubiertas abiertas dirigidas.

**Lema 1.3.14** Sea $S$ un espacio topológico. Un conjunto $X \subseteq S$ es compacto si y solo si para cada cubierta abierta dirigida $\mathcal{W}$ existe algún $W \in \mathcal{W}$ tal que $X \subseteq W$.

*Demostración.*

$\Rightarrow)$ Consideremos un subconjunto compacto $X$ y una cubierta dirigida de abiertos $\mathcal{W}$, es decir $X \subseteq \bigcup \mathcal{W}$. De aquí que debe existir una cubierta finita, digamos $\mathcal{V}$. Al ser $\mathcal{W}$ dirigida, tenemos que $\bigcup \mathcal{V} \in \mathcal{W}$ y al ser $X$ compacto se cumple que $X \subseteq \bigcup \mathcal{V}$.

$\Leftarrow)$ Consideremos $X \subseteq S$ tal que para cada cubierta abierta dirigida $\mathcal{W}$ existe $W \in \mathcal{W}$, con $X \subseteq W$. Notemos que si $\mathcal{U}$ es cualquier cubierta abierta, entonces agregando todas las uniones finitas obtenemos una cubierta abierta dirigida $\mathcal{U}_0$. Por hipótesis, existe $U \in \mathcal{U}_0$ tal que $X \subseteq U$. Luego, al ser $U$ solo uniones finitas de $\mathcal{U}$, esta es una subcubierta finita de $X$. Por lo tanto $X$ es compacto.

**Definición 1.3.15** Para un espacio topológico $S$, consideramos $\mathcal{Q}S$ como la colección de conjuntos compactos saturados de $S$.

El conjunto vacío está en $\mathcal{Q}S$. De igual manera para $p \in S$, la saturación $\uparrow p$ está en $\mathcal{Q}S$. Esto puede ser generalizado.

**Lema 1.3.16** Sea $K$ un subconjunto compacto de un espacio $S$. La saturación $\uparrow K$ está en $\mathcal{Q}S$:

*Demostración.* Debemos probar que para $K \subseteq S$ un conjunto compacto se cumple que $\uparrow K$ también lo es. Consideremos $\mathcal{U}$ una cubierta abierta dirigida de $\uparrow K$. De aquí que $\mathcal{U}$ es también una cubierta abierta dirigida de $K$. Luego, como $K$ es compacto existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $K \subseteq U$. Se puede verificar que $U$ es un conjunto saturado que contiene a $K$, de aquí que $\uparrow K \subseteq U$. Por lo tanto $\uparrow K$ es compacto.
De esta manera tenemos tres familias distinguidas de subconjuntos de $S$, los abiertos $\mathcal{O}S$, los cerrados $\mathcal{C}S$ y los compactos saturados $\mathcal{Q}S$.

Sabemos que la unión de dos conjuntos compactos es compacta. De igual manera, se puede comprobar que la unión de dos conjuntos saturados es saturada. Esto nos da como resultado el siguiente lema.

**Lema 1.3.17** La unión de dos conjuntos saturados compactos es saturada compacta.

Por otro lado, la unión de una familia arbitraria de conjuntos compactos saturados no necesita ser compacta saturada. Para ver esto, consideremos la unión de todos los $\uparrow p$ para cada punto $p$ de un espacio $S$ que no es compacto.

Tampoco es el caso que la intersección de cualesquiera dos conjuntos compactos saturados deba ser compacta saturada.

El siguiente resultado es el que nos motiva a estudiar lo que en la Sección 1.3.4 aparece como construcción del espacio de parches.

**Lema 1.3.18** En un espacio $T_2$ cada conjunto compacto saturado es cerrado.

Demostración. Consideremos un espacio que es $2$, en consecuencia es $1$ y así todo conjunto del espacio es saturado. Consideremos un conjunto compacto. veamos que es cerrado. Para ello consideremos y veamos que para una vecindad abierta de se cumple que

Consideremos y al ser un espacio $2$ tenemos que existen $q$ $q$ tales que

$$q \quad q \quad q \quad q$$

De aquí que $q$ forma una cubierta abierta para y, por la compacidad, podemos extraer una subcubierta nita $i$ , donde es un subconjunto nito de . Considerando $i$ tenemos la vecindad de que buscábamos.

El siguiente resultado nos da una caracterización similar a la regularidad de nida para espacios topológicos.

*Corolario . .* Sea un espacio $2$. Para un punto y conjunto compacto (saturado), que no contiene a existe conjuntos abiertos tales que

## . . *La topologa frontal topologa de Skulla*

.

La topología frontal de un espacio es la topología más na que hace a todos los cerrados originales conjuntos clopen (conjuntos que son cerrados y abiertos al mismo tiempo). Esto puede parecer una topología muy poco interesante, pero veremos que tiene alguna relevancia para las construcciones sin puntos que se verán más adelante.

*Denicin . .* El espacio frontal, denotado por $f$ de un espacio topológico tiene los mismos puntos que , pero la topología más na $f$ generada por

Se puede veri car que es también una base para la topología frontal en . De hecho los conjuntos para forman las vecindades abiertas frontales de .

Para , escribimos $^2$ y $^=$ para el interior frontal y la clausura frontal de , respectivamente. Estos están relacionados por

$$2 \qquad =$$

y pueden ser distintos.

Notemos que $^=$ si y solo si para todo , si , entonces se cumple.

Notemos que $f$ no es el espacio discreto. Para complementar esto tenemos el siguiente resultado.

**Lema 1.3.21** Sea $S$ un espacio topológico

- Si $S$ es $T_1$, entonces ${}^{f}S$ es discreto.
- Si ${}^{f}S$ es discreto, entonces $S$ es $T_0$.
- Si $S$ es $T_0$, entonces ${}^{ff}S$ es discreto.

En la tercera parte del lema anterior, se usa el segundo espacio frontal ${}^{ff}S$. Hay ejemplos de espacios sobrios $S$ tales que $\mathcal{O}S$, $\mathcal{O}^{f}S$, $\mathcal{O}^{ff}S = \mathcal{P}S$ son distintos.

**Teorema 1.3.22** Si $S$ es un espacio sobrio, entonces también lo es ${}^{f}S$.

*Demostración.* Observemos que al ser $S$ un espacio sobrio, este es $T_0$. De aquí que ${}^{f}S$ también es $T_0$. De está manera debemos probar que cada conjunto cerrado irreducible en ${}^{f}S$ es la cerradura de un punto.

Consideremos $F \subseteq S$ un conjunto cerrado tal que es irreducible en ${}^{f}S$. Entonces para cada $U, V \in \mathcal{O}S$ y $X, Y \in \mathcal{C}S$ se cumple

$$F \cap X \cap U \neq \emptyset,\; F \cap Y \cap V \neq \emptyset \;\Rightarrow\; F \cap X \cap Y \cap U \cap V \neq \emptyset.$$

Veamos ahora que $F^{-}$ es cerrado irreducible en $S$. Supongamos que $F^{-} \cap U \neq \emptyset$ y $F^{-} \cap V \neq \emptyset$. Por las propiedades de la clausura tenemos que $F \cap U \neq \emptyset$ y $F \cap V \neq \emptyset$ y así, por ser irreducible en ${}^{f}S$, se cumple que $F \cap U \cap V \neq \emptyset$. Por lo tanto $F^{-} \cap U \cap V \neq \emptyset$, es decir $F^{-}$ es cerrado irreducible en $S$.

Por hipótesis $S$ es sobrio, de aquí que $F^{-} = \overline{\{p\}}$ para algún $p \in S$. Observemos que si $p \in F$ se cumple que $F^{=} = F$. Supongamos que $p \in U \in \mathcal{O}S$, entonces $F^{-} \cap U \neq \emptyset$ y por lo tanto $F \cap U \neq \emptyset$. Así cada vecindad abierta del punto $p$ de la forma $U \cap \overline{\{p\}}$ también intersecta a $F$. Luego por la definición de la cerradura frontal tenemos que $p \in F^{=} = F$.
Recordando lo visto en la Sección 1.3.1, si consideramos un espacio $T$ que es $T_0$, tenemos que

$$T \hookrightarrow {}^{+}T$$

En particular, si tenemos $T \subseteq S$ para algún espacio sobrio $S$, entonces $T \subseteq {}^{+}T \subseteq S$. Podemos identificar cual es este espacio $S$ que es sobrio.

**Teorema 1.3.23** Sean $S$ un espacio sobrio y $T \subseteq S$ un subconjunto arbitrario. Entonces $T = T^{=}$ en $S$ precisamente cuando, como subespacio, $T$ es sobrio.

*Demostración.*

$\Rightarrow$) Primero, supongamos que $T$ es cerrado frontal. Notemos que, como subespacio, los cerrados de $T$ son de la forma $T \cap X$, donde $X \in \mathcal{C}S$. Además dicho conjunto es la clausura de un punto si y solo si $T \cap X = T \cap \overline{\{p\}}$ para algún $p \in T$.

Supongamos que $T \cap X$ es cerrado irreducible en $T$. De esta manera, para $U; V \in OS$ se cumple que

$$T \cap X \cap U \neq \emptyset;\quad T \cap X \cap V \neq \emptyset \quad \Rightarrow \quad T \cap X \cap U \cap V \neq \emptyset$$

Además, para los mismos $U; V$ se cumple que

$$(T \cap X) \quad \cap U \neq \emptyset \Rightarrow T \cap X \cap U \neq \emptyset$$
$$(T \cap X) \quad \cap V \neq \emptyset \Rightarrow T \cap X \cap V \neq \emptyset$$

lo cual implica que $(T \cap X)$ es cerrado irreducible en $S$. Por hipótesis $S$ es sobrio, de aquí que $(T \cap X) = p$ para un único $p \in (T \cap X)$. Notemos que $p \in (T \cap X) \quad X = X$, es decir, $p \quad X$. Luego

$$T \cap p \quad T \cap X \quad T \cap (T \cap X) \quad = T \cap p \quad ;$$

es decir, $T \cap X = T \cap p$. Por lo tanto, basta mostrar que $p \in T$.

Para cada $U \in OS$, como $(T \cap X) = p$. tenemos

$$\begin{aligned} p \in U \ &\Rightarrow\ (T \cap X) \quad \cap U \neq \emptyset \\ &\Rightarrow\ T \cap X \cap U \neq \emptyset \\ &\Rightarrow\ T \cap U \cap p \quad \neq \emptyset \end{aligned}$$

y así $p \in T = T$.

($\Leftarrow$) Supongamos que, como subespacio, $T$ es sobrio. Demostraremos que $T$

Consideremos cualquier punto $p \in T$, entonces $p \in U$ si y solo si $T \cap U \cap p \neq \emptyset$ para cada $U \in OS$. En particular, para $U = S$ tenemos que $T \cap p \neq \emptyset$ y así este conjunto es cerrado en $T$. Veamos que $T \cap p$ es iireducible. Consideremos $U; V \in OS$, entonces

$$T \cap p \quad \cap U \neq \emptyset;\ T \cap p \quad \cap V \neq \emptyset \Rightarrow p \in U \cap V;$$

de modo que $T \cap p \cap U \cap V \neq \emptyset$ .Por hipótesis, $T$ es sobrio, entonces $T \cap p = T \cap q$ para algún $q \in T \cap p$. En particular, $q \in p$. Luego para cada $U \in OS$ tenemos

$$\begin{aligned} p \in U \Rightarrow T \cap p &\quad \cap U \neq \emptyset \\ T \cap q &\quad \cap U \neq \emptyset \\ q &\quad \cap U \neq \emptyset \\ q &\in U; \end{aligned}$$

es decir, $p \in q$ y por lo tanto, $p = q$. Como $S$ es $T_0$, entonces $p = q \in T$. Luego $T \quad T$ lo cual implica que $T = T$.

**Corolario 1.3.24** Consideremos $T$ un espacio $T_0$ y supongamos que $T \quad S$ para algún espacio sobrio $S$. Entonces la reflexión sobria $T^+$ de $T$ es la clausura frontal de $T$ en $S$.

*Demostración.* Sabemos que $T^+ \quad T \quad S$. Además, por el Teorema 1.3.23, tenemos que $T^+$ es cerrado frontal. Así $T \quad {}^+T$. Similarmente, sabemos que $T \quad T \quad S$, por el Teorema 1.3.23, $T$ es sobrio. Así $T^+ \quad T$ .

### 1.3.4 El espacio de parches

Como vimos en el Lema 1.3.18, los espacios $T_2$ cumplen que todo conjunto compacto saturado es cerrado, pero el regreso no se cumple. En esta sección daremos el nombre de empaquetados a los espacios que cumplen con esta propiedad. Nuestro objetivo serÆ el encontrar una manera de empaquetar cualquier espacio arbitrario.

De nición 1.3.25 Decimos que un espacio topológico S es empaquetado si todo conjunto compacto saturado es cerrado.

Observemos que la propiedad de ser empaquetado es mÆs dØbil que ser $T_2$. La pregunta que surge es ¿quØ relación existe entre empaquetado y $T_1$?

Lema 1.3.26 Un espacio topológico que es $T_0$ y empaquetado es $T_1$.

Demostración. Sabemos que (" p) es saturado y para ver que (" p) es compacto notemos que

$$(" p) = \bigcap \{U \in OS \mid (p) \quad U\};$$

ademÆs (" p) $\bigcup$ U y se le puede extraer una cubierta nita. Por lo tanto (" p) es compacto saturado.

Al ser (" p) compacto saturado, por hipótesis de empaquetado, (" p) es cerrado. Ahora, consideremos dos puntos distintos $p; q$ tales que p v q no se cumple. Entonces, por la de nición del orden de especialización tenemos que

$$p \;\ast\; q \quad , p \in (q \quad)^0 \text{ y } q \in (" p)^0;$$

donde $(q\ )^0$, $(" p)^0$ son abiertos y $(q)^0 \cap (" p)^0 = ;$. Por lo tanto tenemos una separación $T_1$ de p y q.

Podemos tener espacios empaquetados que no son $T_0$, estos no serÆn abordados aquí, pues suponemos que todos nuestros espacios son al menos $T_0$, pero por lo visto en el Lema 1.3.26, $T_0$+empaquetado se encuentra entre $T_2$ y $T_1$.

Algunos espacios tienen una propiedad aœn mÆs fuerte que empaquetado. Es œtil tener un nombre para esto.

De nición 1.3.27 S es estrictamente empaquetado si todo conjunto compacto saturado es nito.

De esta manera un espacio no es empaquetado si tiene al menos un conjunto compacto saturado que no es cerrado. En otras palabras, no tiene su cientes conjuntos cerrados, o equivalentemente, su cientes conjuntos abiertos. Podemos corregir este defecto agregando a la topología nuevos conjuntos abiertos para formar un topología mÆs grande.

Para un espacio S consideremos la familia

$$pbase = \{U \cap Q^0 \mid U \in OS; Q \in QS\}$$

que por el Lema 1.3.17 es cerrada bajo intersecciones binarias y por lo tanto forman una base para una nueva topología.

Al considerar $Q = \emptyset$ tenemos que la pbase contiene a la topología original y al dejar $U = S$ vemos que la pbase contiene a los complementos de cada conjunto compacto saturado.

Definición 1.3.28 Para un espacio topológico $S$, consideramos ${}^{P}S$ el espacio con los mismos puntos que $S$ y la topología $\mathcal{O}\,{}^{P}S$ generada por la pbase.

En otras palabras, $\mathcal{O}\,{}^{P}S$ es la topología más pequeña que contiene todos los conjuntos abiertos originales y también el complemento de todos los conjuntos compactos saturados de $S$. Notemos que hacer esto puede crear nuevos conjuntos compactos saturados que no son cerrados en $S$.

Usando esta construcción tenemos que $S$ es empaquetado si y sólo si ${}^{P}S = S$.

Lema 1.3.29 Sea $S$ un espacio topológico. Si $U \in \mathcal{O}\,{}^{P}S$ entonces $U \in \mathcal{O}\,{}^{f}S$.

Demostración. Consideremos un conjunto $Q$ compacto saturado. Notemos que, por la Definición 1.3.20, basta con verificar que $Q' = \bigcup \{q \mid q \in CS\}$.

Como $Q$ es saturado, entonces $Q = \uparrow Q$, de aquí que $Q' = Q$ en el orden de especialización. Luego si $q \in Q'$ entonces $p \quad Q'$ y por lo tanto

$$Q' = \bigcup \{q \mid p \notin Q\} = \bigcup \{q \mid q \in CS\}$$

El resultado anterior muestra que la topología de parches es intermedia entre la topología original y la topología frontal. En otras palabra tenemos

$$\mathcal{O}S \rightarrow \mathcal{O}\,{}^{P}S \rightarrow \mathcal{O}\,{}^{f}S$$

para cada espacio $S$.

Es momento de saber como se comporta el espacio de parches con las propiedades de separación.

Lema 1.3.30 El espacio de parches de un espacio $T_0$ es $T_1$.

Demostración. Sea $S$ un espacio $T_0$ y consideremos $p, q \in S$ tales que $p \neq q$, es decir, $p \not\leq q$. Como $S$ es $T_0$ tenemos que $\exists U \in \mathcal{O}S$ tal que $q \notin U \ni p$. Observemos que $q \notin \uparrow p$, donde $\uparrow p \in \mathcal{Q}S$. Entonces $(\uparrow p)' \in \mathcal{O}\,{}^{P}S$ y además

$$p \notin (\uparrow p)' \ni q,$$

es decir, el espacio de parches es $T_1$.

Lema 1.3.31 En un espacio $T_1$ la operación de parches es idempotente, es decir, ${}^{PP}S = {}^{P}S$.

### 1.3.5 Propiedades funtoriales del espacio de parches

Las preguntas naturales que surgen sobre la funtorialidad de la construcción de parches sensible a puntos son las siguientes:

1. ¿Es posible ver la construcción de parches sensible a puntos

$$S \mapsto {}^{P}S$$

   como la asignación de objetos de un funtor en la categoría de espacios topológicos o en alguna subcategoría adecuada?

2. ¿Es posible ver el mapeo continuo

$$^{P}S \to S$$

   como natural en la relación con este funtor y el funtor identidad?

Estas dos preguntas se pueden plantear de una forma más concreta.

Supongamos que $: T \to S$ es una función continua entre espacios topológicos. Esto da tres lados de un cuadrado

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r] & S \\ {}^{P}T \arrow[u] & {}^{P}S \arrow[u] \end{tikzcd}$$

donde cada lado es continuo. ¿Bajo que circunstancias existe un mapeo continuo $^{P} \; {}^{P}T \to {}^{P}S$ que hace que el cuadrado conmute?

Como funciones, ambas aplicaciones verticales son funciones identidad. Por lo tanto, si existe un mapeo $^{P}$ , entonces como función es solo .

Así se puede plantear la siguiente pregunta: ¿Bajo que circunstancias una función continua $: T \to S$ es también "parche continua", es decir, es continua en relación con las topologías de parches?

Definición 1.3.36 Decimos que una función continua $: T \to S$ es parche continua si envía conjuntos compactos saturados a conjuntos compactos saturados, es decir, $^{-1}(Q) \in \mathcal{Q}T$ siempre que $Q \in \mathcal{Q}S$.

Por lo tanto, si convierte conjuntos compactos saturados, entonces ciertamente es parche continuo. Pero presumiblemente esta condición suficiente para la continuidad del parche no es necesaria.

Sea $f : A \to B$ un morfismo de marcos y $f$ su adjunto derecho. En general, $f$ preserva ínfimos arbitrarios, pero no necesariamente preserva supremos. Nos fijaremos en aquellos morfismos para los que $f$ preserva ciertos supremos.

**Definición 1.3.37** Para un morfismo de marcos $f$ y su adjunto derecho $f$ dados como antes, decimos que el adjunto derecho $f$ es Scott-continuo si

$$f\,(\bar{\ }\,Y) = \bar{\ }\,f\,(Y)$$

para cada subconjunto dirigido $Y$ de $B$.

Sabemos que cada función continua $: T \to S$ da un morfismo de marcos

$$\mathcal{O}S \rightleftarrows \mathcal{O}T$$

entre las topologías. Podemos imponer la condición extra de Scott-continuidad en . Donde esta no debe confundirse con la continuidad dada por .

**Lema 1.3.38** Sea una función continua como la dada antes y supongamos que el espacio $T$ es sobrio. Si es Scott-continua, entonces convierte conjuntos compactos saturados y por lo tanto es parche continua.

**Teorema 1.3.39** Sea una función continua como la dada antes y supongamos que ambos espacios, $S$ y $T$ son sobrios. Entonces es Scott-continua si y solo si las siguientes condiciones se cumplen

convierte conjuntos compactos saturados.

Si $Y \in \mathcal{C}T$, entonces $\downarrow(Y) \in \mathcal{C}S$.

### 1.3.6 El triángulo fundamental de un espacio

La inclusión $: \mathcal{O}S \to \mathcal{O}^f S$, en cierto modo, es un morfismo de marcos que resuelve el problema de complementación para $\mathcal{O}S$. En esta subsección, usamos la información anterior para encontrar el espacio de puntos del ensamble de un marco $A$.

**Lema 1.3.40** Para cada espacio $S$ existe un único morfismo de marcos tal que el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}S & \longrightarrow & \mathcal{O}^f S \\ {\scriptstyle os}\downarrow & \nearrow & \\ N\mathcal{O}S & & \end{array}$$

*Demostración.* Es un caso particular del Teorema 1.2.29.

El resultado anterior es cierto para cualquier espacio $S$. En la practica, es más conveniente utilizar $S = \mathrm{pt}A$, donde $A \in \mathrm{Frm}$. Además, para este caso $S$ resulta ser sobrio.

Observemos que el morfismo actúa como una transformación natural cuando el espacio $S$ varia. Nuestro objetivo es encontrar una descripción especifica para el morfismo .

*Denicin* . . Sean $op$ y consideremos el mor smo . f dado por

$$| \quad [ \quad |$$

para cada | .

Para veri car que es un mor smo de marcos usaremos una manera equivalente de de nirlo.

*Lema* . . Para como en la De nición 1.3.41 tenemos

$$| \qquad |^{-0}$$

para cada . Además, es un mor smo.

Demostración. Consideremos arbitrario. Si | , entonces

$$[ \quad |$$

Así, | y para algún abierto . De aquí que

$$^{-0} \quad \text{y} \quad | \qquad ^{-0}|$$

que es lo que queríamos.

Recíprocamente, supongamos que $^{-0}|$ . Estableciendo $^{-0}$ tenemos que | y . Por lo tanto | .

Por último, de manera general, consideremos | . Entonces

$$| \qquad | \quad ^{-0} \qquad | ^{-0} \quad ^{-0} \qquad |$$

para veri car que es un mor smo.
En la De nición 1.2.23 se introducen los núcleos espacialmente inducidos. El siguiente resultado nos da más información sobre ellos.

*Lema* . . Para de nido como antes tenemos que $^2$ para cada .

Demostración. Consideremos . Para cada tenemos

$$^2$$

Así, S $^2$ se cumple.

Para la otra contención, supongamos que $^2$. Así existe tal que

$$^{-0} \qquad ^{-0} \qquad ^{-0}$$

Por lo tanto $^{-0}$ $^{-0}$, es decir, .
Hasta este punto hemos mostrado que es un mor smo. Para veri car que es un mor smo de marcos basta con mostrar quien es su adjunto derecho.

**Teorema 1.3.44** Para cada espacio $S$ el par de asignaciones

$$\begin{tikzcd} N\mathcal{O}S \arrow[r, shift left] & \mathcal{O}^f S \arrow[l, shift left, "{[\,]}"] \end{tikzcd}$$

forman un par adjunto. Además, es un morfismo de marcos.

*Demostración.* Por la definición de adjunción, debemos verificar que $(j) \quad E \;,\; j \quad [E]$ se cumple para todo $j \in N\mathcal{O}S$ y $E \in \mathcal{O}^f S$.

Supongamos que $(j) \quad E$. Así, para cada $U \in \mathcal{O}S$ y $p \in S$ tenemos

$$\begin{aligned} p \in j(U) &\Rightarrow p \in (j(U) \setminus U) \text{ o } p \in U \\ &\Rightarrow p \in \quad (J) \text{ o } p \in U \\ &\Rightarrow p \in E \text{ o } p \in U \\ &\Rightarrow p \in E \cup U = (E \cup U) : \end{aligned}$$

Por lo tanto $j(U) \quad [E](U)$, y al ser $U$ arbitrario se cumple que $j \quad [E]$.

Recíprocamente, supongamos que $j \quad [E]$. Entonces $(J) \qquad ([E])$. Por el Lema 1.3.43 sabemos que $([E]) = E^2$ para todo $E \in PS$. De aquí que $(j) \quad E^2 \quad E$ que es lo que queríamos.

Por lo tanto $[\,]$ es el adjunto derecho de

Para ver que es un morfismo de marcos debemos recordar que cualquier función monótona con adjunto derecho respeta supremos arbitrarios. Resta verificar el comportamiento de en los núcleos id y tp.

$$\begin{aligned} (\mathrm{id}) &= \bigcup \{\mathrm{id}(W) \setminus W \mid W \in \mathcal{O}S\} = \bigcup \{W \setminus W \mid W \in \mathcal{O}S\} = \emptyset \\ (\mathrm{tp}) &= \bigcup \{\mathrm{tp}(W) \setminus W \mid W \in \mathcal{O}S\} = \bigcup \{S \setminus W \mid W \in \mathcal{O}S\} = S: \end{aligned}$$

Para terminar esta subsección retomamos lo dicho en el Lema 1.3.40 y verificamos que, así definido, hace conmutar el diagrama de dicho resultado.

**Lema 1.3.45** Con los datos anteriores el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}S \arrow[r] \arrow[d, "_{\mathcal{O}S}"'] & \mathcal{O}^f S \\ N\mathcal{O}S \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

*Demostración.* Consideremos $U \in \mathcal{O}S$, entonces $( \quad _{\mathcal{O}S})(U) = \quad (u_U)$. Luego, para $V \in \mathcal{O}S$ se cumple que

$$(u_U(V)) = \quad (U \cup V) = \quad ((U \cup V)\;) = \quad ([U]) = U^2 = U:$$

### 1.3.7 El espacio de puntos del ensamble

Es momento de ver la relación entre el ensamble de la topología de un espacio ($\mathcal{N}\mathcal{O}S$ y la topología de Skula. El siguiente Teorema resulta de juntar el Teorema 1.2.30 y el Lema 1.3.40.

**Teorema 1.3.46** Para $A \in \mathbf{Frm}$ y $S = \mathrm{pt}A$ el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "U_A"] \arrow[d, "{}_A"'] & \mathcal{O}S \arrow[d, "{}_{\mathcal{O}S}"'] \arrow[dr] & \\
\mathcal{N}A \arrow[r, "\mathcal{N}U_A"'] & \mathcal{N}\mathcal{O}S \arrow[r, "{}_{\mathcal{O}S}"'] & \mathcal{O}^f S
\end{tikzcd}$$

A manera de notación, denotamos la composición inferior del diagrama por ${}_{\mathcal{O}S} \, \mathcal{N}U_A = {}_A$.
Se puede verificar que este morfismo le asigna al ensamble su espacio de puntos.

**Lema 1.3.47** Para cada $j \in \mathcal{N}A$ las tres condiciones son equivalentes:

1. $j$ es $\wedge$ irreducible (en $\mathcal{N}A$).
2. $j$ es 2-valuado (cada valor de $j$ es 0 o 1).
3. $a = j(0)$ es $\wedge$ irreducible (en $A$) y $j = w_a$.

*Demostración.*

1) $\Rightarrow$ 2) Supongamos que $j$ es $\wedge$ irreducible. Verificaremos que $j$ es de la forma

$$j(x) = \begin{cases} 1; & \text{si } x \not\leq a \\ a; & \text{si } x \leq a \end{cases}$$

donde $a = j(0)$. Notemos que la anterior es la única manera posible en la que un núcleo puede tomar dos valores.

Sabemos que $u_x \wedge v_x = id \leq j$ se cumple para todo $x \in A$. Por lo tanto $u_x \leq j$ o $v_x \leq j$. Supongamos lo primero, es decir, para todo $y \in A$, $u_x(y) \leq j(y)$. De manera particular

$$x = u_x(0) \leq j(0) = a \quad \text{y} \quad j(x) = j(a) = a;$$

pues $0 \leq x$ y $a = j(0) \leq j(x)$. Observemos que esto ocurre cuando $x \leq a$. Supongamos ahora que $x \not\leq a$. Así $v_x \leq j$ y $1 = v_x(x) \leq j(x)$, es decir, $j(x) = 1$. Por lo tanto, $j$ tiene la forma que requeríamos.

2) $\Rightarrow$ 3) Supongamos que $j$ es 2 valuado y consideremos $x \wedge y \leq a$ para algunos $x, y \in A$. Entonces

$$j(x) \wedge j(y) \leq j(x \wedge y) \leq a$$

por la forma de $j$. Como $j(x), j(y) \in \{a, 1\}$, entonces $j(x) = a$ o $j(y) = a$ y por lo tanto $x \leq a$ o $y \leq a$, nuevamente por la forma de $j$. Como $a = j(0)$ se cumple que $a \neq 1$ y así a es ^ irreducible.

Ahora debemos probar que $w_a(x) = j(x)$, con j de nido como antes, siempre que a es ^ irreducible. Supongamos que x a entonces

$$((x \quad a) \quad a) = (1 \quad a) = a:$$

Si x a entonces

$$(x \quad a) \wedge a = (x \quad a) \wedge ((x \quad a) \quad a)) \quad a \quad y \quad x \quad w_a(x)$$

así $w_a(x)$ = ((x a) a) a. Como a es ^ irreducible se debe cumplir que (x a) a. Por lo tanto ((x a) a) = 1, es decir,

$$w_a(x) = \begin{cases} 1; & \text{si } x \quad a \\ a; & \text{si } x \quad a \end{cases}$$

3) ) 1) Queremos probar que $w_a$ es ^ irreducible en NA siempre que a es ^ irreducible en A. Ya hemos demostrado que cuando a es ^ irreducible, entonces $w_a$ es 2 valuado. TambiØn sabes que si k ^ l $w_a$ entonces

$$k(a) \wedge l(a) \quad w_a(a) \Rightarrow k(a) \quad a \text{ o } l(a) \quad a \Rightarrow k \quad w_a \text{ o } l \quad w_a;$$

es decir, $w_a$ es ^ irreducible en NA.

Considerando S = ptA y T = ptNA, lo anterior nos proporciona un par inverso de biyecciones entre S y T, es decir

$$S \rightleftarrows T$$

donde (p) = $w_p$ y (m) = m(0). De esta manera, el espacio de puntos de NA tiene esencialmente los mismos puntos que S, pero en una topología diferente. ¿CuÆl es esta topología?

Lema 1.3.48 Sean A 2 Frm, S = ptA y T = ptNA. Para OT se cumple que $\mathcal{O}^f S$ es la topología que provoca que las siguientes funciones sean un par de homeomor smos.

$$S \rightleftarrows T$$

Demostración. Los conjuntos abiertos usuales de S (los elementos de OS) son de la forma

$$U_A(x) = \{p \in S \mid x \quad p\}$$

para $x \in A$. Los abiertos de $T$ son de la forma

$$U_{NA} = \{m \in T \mid j \leq m\}$$

para $j \in NA$.

También sabemos que si $j \in NA$, entonces $j = \bigvee\{v_x \wedge u_{j(x)} \mid x \in A\}$. Por lo tanto, los conjuntos $U_{NA}(u_x)$ y $U_{NA}(v_x)$ con $x \in A$ forman una sub-base de $T$, ya que $U(\_)$ es un morfismo de marcos.

Luego

$$\begin{aligned}\varphi^{-1}(U_{NA}(u_x)) = \varphi(U_{NA}(u_x)) &= \{\varphi(m) \mid u_x \leq m \in T\}\\ &= \{m(0) \mid u_x \leq m \in T\}\\ &= \{p \mid x \nleq p \in S\}\\ &= U_A(x).\end{aligned}$$

Sabemos que $v_x \wedge u_x = \mathrm{id} \leq m$ y $v_x \vee u_x = tp$ se cumple para todo $x \in A$ y $m \in T$. De esta manera se debe cumplir que $v_x \leq m$ o $u_x \leq m$. En otras palabras

$$x \in U_{NA}(v_x) \iff m \notin U_{NA}(u_x)$$

para cada $x \in A$ y $m \in T$. Así

$$\varphi^{-1}(U_{NA}(v_x)) = \varphi(U_{NA}(v_x)) = \varphi(U_{NA}(u_x)') = U_A(x)'$$

pues $\varphi$ es un morfismo biyectivo de marcos.

De manera similar tenemos que $\varphi^{-1}(U_A(x)) = U_{NA}(u_x)$ y $\varphi^{-1}(U_A(x)') = U_{NA}(v_x)$. Por lo tanto los conjuntos $U_A(x)$ y $(U_A(x))'$ forman una sub-base para la topología inducida en $S$. Además, esta es la topología de Skula $S$. □

## 1.4 El Teorema de Hoffman-Mislove

En esta última sección relacionamos algunos de los conceptos vistos hasta este momento para un marco $A$ y los trasladamos a la topología de su espacio de puntos. De manera específica, nos interesa descubrir la correspondencia biyectiva que proporcina el Teorema de Hoffman-Mislove.

Recordemos que, para un espacio $S$, $\mathcal{Q}S$ es el conjunto de todos los subconjuntos compactos saturados de $S$. Para cada conjunto $Q \in \mathcal{Q}S$ podremos obtener un filtro abierto $\nabla(Q)$ en $A$ dado por

$$x \in \nabla(Q) \iff Q \subseteq U_A(x)$$

donde $U_A$ es la reflexión espacial presentada en 1.1. Veremos que cada filtro abierto surge de esta manera de un único $Q$ compacto saturado.

**Lema 1.4.1** Sea $F$ un filtro abierto de $A$. Consideramos a $M$ como el conjunto de elementos máximos en $A \setminus F$. Entonces para cada $a \in A \setminus F$ existe algún $m \in M$ tal que $a \leq m$.

*Demostración.* Notemos que como $F$ es un filtro abierto arbitrario, entonces el complemento $A \setminus F$ es cerrado bajo supremos dirigidos. De esta manera, para $A \setminus F$ podemos hacer uso del Lema de Zorn para obtener $m \in M$ tal que $a \leq m$, con $a \in A \setminus F$.
Se puede verificar que para un marco $A$, cada elemento máximo es un elemento $\wedge$ irreducible. En otras palabras, para cada $m \in M$ tenemos que $m \in ptA$, es decir, $m \neq 1$ y si $x \wedge y \leq m$, entonces $x \leq m$ o $y \leq m$ se cumple.

De esta manera, para $S = ptA$, como $M \subseteq S$, podemos reformular el lema anterior de la siguiente manera.

**Corolario 1.4.2** La equivalencia

$$M \subseteq U_A(a) \Leftrightarrow a \in F$$

se cumple para cada $a \in A$.

*Demostración.* Primero, supongamos que $a \in F$. Si $m \in M$, entonces $m \notin F$, es decir, $a \nleq m$. Por lo tanto $m \in U_A(a)$.

Ahora, supongamos que $a \notin F$. Por el Lema 1.4.1 existe algún $m \in M$ tal que $a \leq m$, de modo que $m \notin U_A(a)$ y por lo tanto $M \nsubseteq U_A(a)$, es decir, $M \subseteq U_A(a)$ implica que $a \in F$.
Este resultado tiene otra consecuencia más importante.

**Lema 1.4.3** El conjunto $M$ es compacto en $S = ptA$.

*Demostración.* Consideremos cualquier cubierta abierta $\{U_A(x) \mid x \in X\}$ de $M$. De manera usual, supongamos que el conjunto $X \subseteq A$ es dirigido. Sea $a = \bigvee X$, entonces

$$M \subseteq \bigcup \{U_A(x) \mid x \in X\} = U_A(a)$$

y por lo tanto $a \in F$. Pero $F$ es un filtro abierto y $X$ es un conjunto dirigido, de modo que $x \in F$ para algún $x \in X$. Esto nos da $M \subseteq U_A(x)$ para obtener la subcubierta requerida.
Ahora, sea $Q$ la saturación de $M$. Como cada conjunto abierto es saturado, tenemos que $Q$ y $M$ tienen exactamente los mismos súper conjuntos abiertos. En particular, $Q$ es compacto, y por lo tanto, $Q \in QS$.

Notemos también que para cada $x \in A$ tenemos

$$x \in F \Leftrightarrow M \subseteq U_A(x) \Leftrightarrow Q \subseteq U_A(x) \tag{1.3}$$

de modo que el filtro abierto $F$ surge del conjunto compacto saturado $Q$ como queríamos. Veamos ahora que $Q$ es el único conjunto compacto saturado asignado a $F$ de esta manera.

**Lema 2.1.3** *Si el marco $A$ es ajustado, entonces pt $A$ es $T_1$ y sobrio.*

**Lema 2.1.4** *En un espacio con topología ajustada, las tres condiciones son equivalentes, $T_0$, $T_1$ y sobrio.*

**Corolario 2.1.5** *Un espacio $T_0$ con topología ajustada es $T_1$ y sobrio.*

En el Capítulo 1, para un marco $A$, definimos diferentes tipos de filtros. De manera particular, existe un filtro especial que está en relación con los filtros abiertos.

**Definición 2.1.6**
1. Sea $A$ un marco. Para un elemento $a \in A$ y núcleo $j \in \mathcal{N}A$ decimos que $j$ *admite* al elemento $a$ si $j(a) = 1$.
2. Sea $\nabla(j)$ el conjunto de elementos admitidos por el núcleo $j$. $\nabla(j)$ es un filtro en $A$.
3. Para un marco $A$, un filtro en $A$ es *de admisibilidad* si tiene la forma $\nabla(j)$ para algún $j \in \mathcal{N}A$.
4. La relación $j \sim k$ si y solo si $\nabla(j) = \nabla(k)$ es una relación de equivalencia. A las clases de equivalencia las llamamos *bloques*.
5. Un núcleo es *ajustado* si es el menor elemento de su bloque.

El Teorema 1.4.5 proporciona una correspondencia biyectiva entre filtros abiertos y conjuntos compactos saturados. Los filtros de admisibilidad permiten extender esta correspondencia por medio de los núcleos ajustados. Para ver esto necesitamos primero unos cuantos resultados más.

**Lema 2.1.7** *Sea $A$ un marco. Cada bloque de un núcleo tiene un menor elemento.*

*Demostración.* Sea $F$ un filtro admisible en $A$ y consideremos $B = \{j \in \mathcal{N}A \mid \nabla(j) = F\}$. De esta manera $B$ es la colección de todos los núcleos que admiten exactamente al conjunto $F$. Recordemos que los ínfimos en $\mathcal{N}A$ se calculan puntualmente. Así, sea $k = \bigwedge B$ y $k$ es el menor elemento de $B$.

Sea $a \in F$, entonces por definición $j(a) = 1$ para todo $j \in B$, en particular $k(a) = 1$. De modo que $a \in \nabla(k)$. Por lo tanto $F = \nabla(j) \subseteq \nabla(k)$. La otra inclusión se cumple debido a que $k \leq j$. Así $\nabla(k) = F$ y $k \in B$.

**Lema 2.1.8** *Cada filtro principal es admisible.*

*Demostración.* Consideremos el filtro principal $F = \{x \in A \mid x \geq a\}$ para algún $a \in A$. Notemos que para $j = v_a$, $\nabla(j) = F$, pues si $x \geq a$, $(a \to x) = 1$.

No todos los filtros son admisibles. Por ejemplo, supongamos que $A$ es booleano. Entonces cada núcleo $j$ tiene la forma $u_a$ para algún $a \in A$. De igual manera podría tener la forma $v_{a'}$ para algún $a' \in A$. Entonces cada filtro admisible $\nabla(j)$ es principal, pero cuando $A$ es infinito no hay filtros principales.

Aunque no todos los filtros son admisibles, existe una manera de obtener filtros de admisibilidad.

**Teorema 2.1.15** Para cada marco $A$ las siguientes condiciones son equivalentes.

i) $A$ es ajustado.

ii) Cada núcleo en $A$ es ajustado.

iii) Cada $u$ núcleo en $A$ está solo en su bloque.

iv) Cada $u$ núcleo en $A$ es mínimo en su bloque.

*Demostración.*

i) $\Rightarrow$ ii) Supongamos que $A$ es ajustado y supongamos que existen núcleos no ajustados, es decir, existen $j, k \in NA$ tales que $j \leq k$. Entonces $j(c) \leq k(c)$ para algún $c \in A$. Sean $a = j(c)$, $b = k(c)$ y al ser $A$ ajustado, podemos encontrar $x, y \in A$ tales que

$$a \vee x = 1; \quad x \wedge y \leq b; \quad y \nleq b.$$

Definimos $z = (y \succ b)$, de modo que $x \leq z$ y $c \leq b \leq z$. De aquí que $a = j(c) \leq j(z)$ y $x \leq z \leq j(z)$. Por lo tanto $1 = a \vee x \leq j(z)$, lo cual implica que $k(z) = 1$, pues $j$ y $k$ son compañeros.

Como $y \wedge z \leq b$ tenemos que $k(y) \leq k(b) = k(k(c)) = k(c) = b$, es decir, $y \leq b$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto cada núcleo en $A$ es ajustado.

ii) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ iv) Si consideramos un $u$ núcleo, por ii) este es ajustado. De aquí que $u$ es el menor elemento de su bloque, es decir, para $j \in NA$, no se cumple que $j < u$, pero para todo $j \in NA$

$$j = \bigvee \{ u \wedge v_{j(\bullet)} \mid \bullet \in A \};$$

de aquí que $j = u$, es decir, $u$ no tiene compañeros en su bloque. Al no tener compañeros en su bloque, $u$ es el menor elemento del bloque.

iv) $\Rightarrow$ i) Supongamos iv) y sean $A$ un marco y $a \nleq b \in A$, de aquí que $u_a \nleq w_b$, pues para $0 \in A$, $u_a(0) = a$ y $w_b(0) = b$. Por hipótesis $u_a$ es ajustado y por el Lema 2.1.14 se cumple que $r(u_a) \nsubseteq r(w_b)$. Entonces existe $x \in A$ tal que $a \vee x = 1$ y $w_b(x) \neq 1$. Consideremos $y = (x \succ b)$, así $w_b(x) = (y \succ b) \neq 1$ lo que implica que $y \nleq b$ y $x \wedge y = x \wedge (x \succ b) = x \wedge b \leq b$.

En otras palabras, el resultado anterior nos dice que si $A$ es ajustado, se simplifica la estructura del bloque de admisibilidad. En el Capítulo 4 profundisaremos un poco más sobre esta cuestión.

## 2.2 La extensión de Teorema de Hoffman-Mislove

Una de las aportaciones más importantes de Sexton es que da el analogo a la construcción del espacio de parches. Para hacer esto, ella proporcina los objetos necesarios en marcos para construir una $\mathfrak{p}$base. Por el Teorema 1.4.5 tenemos la correspondencia entre filtros abiertos

Podemos hacer lo mismo en un contexto sensible a puntos. Sea $S$ un espacio topológico. Para un filtro abierto $F$ en $\mathcal{O}S$ tenemos

$$v_F = \bigvee\{v_a \mid a \in F\} = \bigvee\{[U'] \mid Q \subseteq U\}$$

donde $Q = \bigcap F$ es el conjunto compacto saturado correspondiente a $F$.

En lugar de considerar la sucesión de abiertos, resulta más sencillo el hacerlo en sus complementos. Para $Q \in \mathcal{Q}S$ usamos la operación $\hat{Q}$ en $\mathcal{C}S$ dada por

$$\hat{Q}(X) = \bigcap\{(X \cap U)^{-} \mid Q \subseteq U\}$$

para cada $X \in \mathcal{C}S$. Establecemos

$$Q(0) = S; \quad Q(\alpha + 1) = \hat{Q}(Q(\alpha)); \quad Q(\lambda) = \bigcap\{Q(\alpha) \mid \alpha < \lambda\}$$

para obtener una sucesión descendente de conjuntos cerrados. Por razones de cardinalidad, esta sucesión eventualmente se estabiliza en algún conjunto cerrado $Q(\infty)$. Sabemos que $Q \subseteq Q(\infty)$ ya que cada conjunto cerrado $Q(\alpha)$ contiene a $Q$. Después se darán condiciones que hagan notar la diferencia entre $Q$ y $Q(\infty)$ y las consecuencias que esto tiene para un marco y lo que en la siguiente sección denominaremos como *marco de parches*.

### 2.2.1 Estructura de bloques

Si $A$ es un marco, podemos construir un nuevo marco formado por todos sus núcleos ($NA$). Por si mismo, $NA$ puede ser un marco difícil de estudiar, incluso si solo nos restringimos a los núcleos que producen el mismo filtro de admisibilidad.

En esta subsección veremos una primera construcción de lo que más adelante llamaremos el *Q-cuadrado*.

Consideremos $A \in \mathrm{Frm}$, $S = pt(A)$, $F \in A^{\wedge}$ y $Q$ el compacto saturado correspondiente para $F$. Así, por el Teorema 2.2.1

$$F = \nabla(v_F), \quad a \in F \Leftrightarrow Q \subseteq U(a)$$

donde $v_F \in NA$. Consideremos el cociente de $A$ dado por $v_F$, es decir, $A_F = A_{v_F}$. El marco $A_F$ tiene un espacio de puntos fácil de localizar.

**Lema 2.2.3** Sean $A$ un marco y $F$, $Q$ los conjuntos antes considerados. Entonces $Q = pt(A_F)$.

*Demostración.*

($\Rightarrow$) Recordemos que los puntos de $A_F$ son aquellos $p \in S$ tales que $v_F(p) = p$. Además, si $p \in F$ entonces $v_F(p) = 1$ y por lo tanto $p \notin pt(A_F)$. De esta manera si $p \in pt(A_F)$, entonces $p \in S \setminus F = Q$, es decir, $pt(A_F) \subseteq Q$.

( ) Consideremos cualquier $p \in Q$. Para cada $x \in F$ sea $y = (x \quad p)$ y así $y \wedge x \quad p$. Notemos que si $p \notin F$, entonces

$$(x \quad p) \neq 1 \;) \quad x \quad p$$

y como $p \in S$ se debe cumplir que $y \quad p$. Como $y = (x \quad p)$ es arbitrario, se debe cumplir que

$$f(p) = \bigwedge \{ v_x(p) \mid x \in F \} \quad p;$$

y además $p \quad f(p)$. De aquí que $f_F(p) = p$, es decir, $V_F(p) = p$. Por lo tanto $p \in pt(A_F)$.

Lo anterior nos proporciona el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A_F \\ \downarrow & & \downarrow \\ OS & \longrightarrow & Opt(A_F) = OQ \end{array} \tag{2.3}$$

el cual será extendido y estudiado en el Capítulo 4.

Para un subespacio $T \quad S$, tenemos el siguiente cociente

$$A \to O \quad S \to O \quad T$$

donde $a \mapsto \bigvee \{ p \in T \mid a \quad p \}$ es el kernel de dicho cociente. En particular, podemos hacer lo anterior para $Q \in QS$.

Por el Lema 1.4.1, el conjunto $Q$ tiene un conjunto de generadores mínimos $M \quad Q$, es decir, el conjunto de elementos máximos de $A$ en $F$. Ahora, si extendemos el mismo razonamiento para $M$ visto como un subespacio de $Q$ tenemos

$$A \to \quad A_F \to O \quad Q \to O \quad M \tag{2.4}$$

con kernel dado por $w_F(a) = \bigvee \{ p \in m \mid a \quad o \}$, donde $a \in A$.

**Lema 2.2.4** El núcleo $w_F$ es el núcleo máximo que admite a $F$.

*Demostración.* Sea $j \in NA$ tal que $r(j) = F$. Cada punto $m \in M$ es jado por $j$ ya que $m$ es un punto máximo y no está en $F$. Sabemos que $j(a) = 1$, $a \in F$, en otras palabras

$$j(a) = 1 \;, \quad (\forall m \in M)[j(a) \quad m]$$

(ver Lema 1.4.1). Como $j \quad w_F$, entonces $j(a) = (w_F)(a) = 1$ para $a \in F$. Supongamos que $a \notin F$, entonces $a \quad m$ para algún $m \in M$ y $j(a) \quad j(m) = m$, de modo que

$$j(a) \quad \bigwedge \{ p \in M \mid a \quad p \} = w_F(a):$$

Por lo tanto $j \quad w_F$.

De esta manera, si $F \in A^{\wedge}$, obtenemos bloques en $NA$ de la forma $[v_F, w_F]$ (los cuales serán llamados *intervalos de admisibilidad* más adelante).

Notemos que $I_F = [v_F(0), w_F(0)]$ es un intervalo de $A$. Para cada $a \in I_F$ consideremos $j_a = (v_F \vee u_a)$ para producir un núcleo $v_F \leq j_a \leq w_F$. Además, $a \leq b$ si y solo si $j_a \leq j_b$ para cada $a, b \in I_F$. Esto nos da un encaje de marcos

$$\begin{aligned} I_F &\to [v_F, w_F] \\ a &\mapsto j_a \end{aligned}$$

y por lo tanto, el intervalo $I_F$ da una idea de lo complejo que puede ser el intervalo $[v_F, w_F]$. Existen formas de asegurar que $v_F = w_F$, (algunas de ellas serán vista en el Capítulo 4), en cuyo caso $I_F$ es solo un punto.

Supongamos que $A = \mathcal{O}S$ para algún espacio sobrio $S$. Si $Q \in \mathcal{Q}S$ tenemos el siguiente caso del cociente 2.4

$$\mathcal{O}S \to (\mathcal{O}S)_F \to \mathcal{O}Q \to \mathcal{O}M \tag{2.5}$$

que determinan al menor y al mayor elemento del intervalo ($v_F$ y $w_F$, respectivamente) y un elemento intermedio. En este caso tenemos que $w_F = [M']$ y, de manera similar, $[Q']$ es el elemento intermedio del intervalo. Así tenemos un intervalo

$$v_F \leq [Q'] \leq w_F \in N\mathcal{O}S$$

En general, $[Q']$ puede estar en cualquier extremo o en algún punto intermedio. La observación de que $v_F \leq [Q']$. El estudio de este intervalo espacial también se verá más adelante.

Si $S$ es $T_1$, entonces $Q = M$, pero esto no asegura que el intervalo sea simple. De esta manera, tenemos condiciones que rigen al cociente 2.5. La idea es hacer algo similar, pero para el caso general 2.4.

## 2.3 El marco de parches

En esta sección veremos la construcción libre de puntos del espacio de parches ${}^pS$. Daremos el análogo de la pbase dada en la Sección 1.3.4, pero para $A \in \mathrm{Frm}$. A esta construcción la llamaremos *el marco de parches*. Dicho marco resultará ser un submarco del ensamble $NA$.

Recordemos que para un espacio $S$, el espacio de parches se construye a través de sus abiertos y sus conjuntos compactos saturados. Así

$$\text{pbase} = \{U \cap Q' \mid U \in \mathcal{O}S, Q \in \mathcal{Q}S\}$$

Esta es la base para una nueva topología en $S$ y $\mathcal{O}^pS$ es el conjunto de uniones de todas las subfamilias de la pbase. Una construcción similar es la que nos permite obtener el marco de parches.

**Teorema 2.3.4** *Para $A$ un marco regular y $j \in NA$ un núcleo tal que $\nabla(j) \in A^\wedge$. Se cumple que $j = u_d$, donde $d = j(0)$.*

*Demostración.* Por hipótesis, $A$ es un marco regular, en consecuencia, $A$ es ajustado. De esta manera, cada bloque de admisibilidad está compuesto por un único elemento. Así, basta con probar que $j$ y $u_d$ tienen el mismo filtro de admisibilidad, y por lo tanto, concluir que $j = u_d$.

Como $d = j(0)$, se cumple que $u_d \leq j$ y así $\nabla(u_d) \subseteq \nabla(j)$.

Para la otra contención debemos probar que para $x \in A$ y $j(x) = 1$, entonces $u_d(x) = d \vee x = 1$. Por la regularidad se cumple que

$$x = \bigvee\{y \in A \mid (\exists z)[z \wedge y = 0 \text{ y } z \vee x = 1]\},$$

además, este es un supremo dirigido. Al ser $\nabla(j)$ un filtro abierto se debe cumplir que $y' \in \nabla(j)$ para algún $y' \in \{y \in A \mid (\exists z)[z \wedge y = 0 \text{ y } z \vee x = 1]\}$., es decir,

$$j(y') = 1, \quad z \wedge y' = 0, \quad z \vee x = 1$$

para algunos $y', z \in A$. De esta manera $d \vee x = j(z) \vee z \geq z \vee x = 1$, es decir $\nabla(j) \subseteq \nabla(u_d)$.

Por lo tanto $\nabla(j) = \nabla(u_d)$. □

Sabemos que $A \simeq NA$ ocurre cuando $A$ es booleano (lo cual provocaría que $A \simeq PA$, lamentablemente que $A$ sea booleano es una condición bastante fuerte). El Teorema 2.3.4, de manera indirecta nos dice que, bajo las hipótesis convenientes, la regularidad implica que $A \simeq PA$, pues solo nos restringimos a algunos $j \in NA$.

### 2.3.1 ¿Es $P(\_)$ un funtor?

En la subsección 1.3.5 se discuten las propiedades funtoriales de la construcción del espacio de parches. Ahí se menciona que una función continua $\phi\colon T \to S$ es parche continua si la imagen inversa $\phi^{-1}$ envía conjuntos compactos saturados $Q \in \mathcal{Q}S$ a conjuntos compactos saturados $\phi^{-1}(Q) \in \mathcal{Q}T$ (ver Definición 1.3.36). La restricción de estás imágenes inversas producen un morfismo de marcos $\phi^*$ entre las topologías y estos tienen adjunto derecho $\phi_*$, es decir,

$$\mathcal{O}S \underset{\phi_*}{\overset{\phi^*}{\rightleftarrows}} \mathcal{O}T$$

Por el Lema 1.3.38, al ser $\phi_*$ una función Scott-continua, tenemos que $\phi^*$ es parche continua. También, por la funtorialidad de $N$, tenemos que para cada morfismo de marcos $f\colon A \to B$, $Nf$ resulta ser un morfismo entre los ensambles. De esta manera obtenemos el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & PA \arrow[r] & NA \arrow[d, "Nf"] \\
B \arrow[r] & PB \arrow[r] & NB
\end{tikzcd}$$

para todo $x, y \in A$. En particular $x \in \mathcal{X} \Leftrightarrow sp(x) \in \mathcal{X}$ para $x \in A$. Usando esto, verificamos primero que $\mathcal{X}$ es dirigido. Sean $x, y \in A$, entonces $U(x), U(y) \in \mathcal{U}$ y por lo tanto, al ser $\mathcal{U}$ dirigida, tenemos que $U(x), U(y) \subseteq U(z) = U(sp(z))$ para algún $z \in \mathcal{X}$. Así $sp(z) \in \mathcal{X}$ y por la definición de $sp$ tenemos que si $x, y \leq sp(z)$, entonces $x \vee y \leq sp(z)$ produciendo la cota superior en $\mathcal{X}$ requerida para concluir que $\mathcal{X}$ es dirigido.

Luego, sea $a = \bigvee \mathcal{X}$, entonces

$$U(a) = \bigcup \{U(x) \mid x \in \mathcal{X}\} = \bigcup \mathcal{U};$$

de modo que $U(a) \in \nabla$, así $U(a) = U(b)$ para algún $b \in F$.

Ahora $sp(a) = s(b) \in F$ y como $U(sp(x)) = U(x)$ tenemos que $sp(x) \in \mathcal{X} \Leftrightarrow x \in \mathcal{X}$. Así $\bigvee \mathcal{X} = a \in F$ y al ser $F$ un filtro abierto se cumple que $x \in \mathcal{X} \cap F$. Por lo tanto $U(x) \in \mathcal{U} \cap \nabla$.

En [6] se puede consultar un ejemplo donde el adjunto derecho de $U_A$ no es continuo (Ejemplo 7.2.7).
El Teorema 2.3.8 tiene un lado positivo: nos permite llegar a $U_A$ con el funtor $P$ y así obtener un morfismo

$$PA \xrightarrow{P(U_A)} POS$$

entre el marco de parches asociado.

### 2.3.2 El diagrama completo del marco de parches

La información recopilada hasta este momento nos permite construir el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "U_A"'] & PA \arrow[r, hook] \arrow[d, "P(U_A)"] & NA \arrow[d, "N(U_A)"] \\
OS \arrow[r] \arrow[dr, hook] & POS \arrow[r, hook] & NOS \arrow[d, "{}_S"] \\
 & O^P S \arrow[r, hook] & O^f S
\end{tikzcd}$$

El rectángulo superior de este diagrama se presenta en el Lema 2.3.6. La sección inferior

$$OS \to O^P S \to O^f S$$

es la relación que tiene una topología con las topologías de parches y Skulla. El morfismo ${}_S : NOS \to O^f S$ es el morfismo del espacio de puntos del ensamble a la topología de su espacio de puntos $pt(NOS) = O^f S$.

Para completar el diagrama y conseguir que todas las partes conmuten necesitamos los siguientes resultados.

Lema 2.3.9 Sea $S$ un espacio con topología $OS$. Para cada filtro $F$ en $OS$ tenemos $Q$ con $F = \nabla(Q)$ y $(v_F) = Q'$ donde $Q$ es el correspondiente conjunto compacto saturado.

*Demostración.* Sabemos que $v_F$ y $[Q']$ son compañeros bajo la relación de admisibilidad, es decir, admiten los mismos elementos. Al ser $v_F$ el mínimo elemento del bloque, se cumple que $v_F \leq [Q']$ y así $\sigma(v_F) \subseteq \sigma([Q']) = Q'$. pues $Q \in \mathcal{O}^f S$.

Para verificar la otra contención consideremos $p \in Q'$. Notemos que $\overline{p} \subseteq Q'$ se cumple al ser $Q$ saturado, entonces $Q \subseteq \overline{p}'$ y $\overline{p}' \in F$. Por lo tanto $p \in v_F(\overline{p}') = 1$ y así, por el Lema 1.3.42, $p \in \sigma(v_F)$. $\square$

**Lema 2.3.10** *Sea $S$ un espacio con topología $\mathcal{O}S$. La restricción del morfismo de marcos $\sigma$ a $P\mathcal{O}S$ proporciona un morfismo de marcos $\pi\colon PA \to \mathcal{P}^P S$. Además, el morfismo es suprayectivo.*

*Demostración.* El marco $P\mathcal{O}S$ es generado por núcleos de la forma $[U] \wedge v_F$ donde $U \in \mathcal{O}S$ y $F \in \mathcal{O}S^\wedge$. Tenemos que $\sigma([U]) = U$, pues $U$ es abierto, y $F = \nabla(Q)$ para algún $Q \in \mathcal{Q}S$ de modo que $\sigma(v_F) = Q'$ por el Lema 2.3.9. Por lo tanto $\sigma([U] \wedge v_F) = U \cap Q'$ y estos conjuntos forman una base para $\mathcal{O}^P S$. $\square$

Lo anterior nos proporciona el diagrama completo del marco de parches.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d, "U_A"'] & PA \arrow[r, hook] \arrow[d, "P(U_A)"] & NA \arrow[d, "N(U_A)"] \\
\mathcal{O}S \arrow[r] \arrow[dr] & P\mathcal{O}S \arrow[r, hook] \arrow[d, "\pi_S"] & N\mathcal{O}S \arrow[d, "\sigma_S"] \\
& \mathcal{O}^P S \arrow[r, hook] & \mathcal{O}^f S
\end{tikzcd}$$

El morfismo de marco $\pi$ no necesariamente debe ser un isomorfismo. Notemos que si $S$ es empaquetado, entonces ${}^pS = P$ así las composición

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{O}S \arrow[r, shift left] & P\mathcal{O}S \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}$$

dan la identidad en $\mathcal{O}S$, pero $\pi$ no necesita ser un isomorfismo.

# 2.4 Jerarquía de propiedades de separación

Como hemos visto en este capítulo, existen dos construcciones que tratan de imitar una propiedad similar a la que cumplen los espacios $T_2$, la construcción del espacio de parches y la del marco de parches (una sensible a puntos y la otra libre de puntos). La primera sirve para caracterizar a los espacios empaquetados. La segunda, como mostraremos más adelante, caracteriza a los espacios cuya topología cumple ser “arreglada”. De manera similar a los espacios empaquetados, los marcos arreglados produce una propiedad de separación entre los axiomas $T_1$ y $T_2$.

## 2.4.1 Marco parche trivial

Cuando se traslada una noción sensible a puntos a su variante libre de puntos, lo que se busca es que la nueva nueva noción tenga un comportamiento parecido al de su variante espacial. En este caso, las propiedades que se busca imitar son las que satisface el espacio de parches, de manera especifica

$$\text{Empaquetado} \Leftrightarrow S = {}^{p}S.$$

**Definición 2.4.1** *Para* $A \in \mathrm{Frm}$ *decimos que este es* parche trivial *si el encaje* $\iota\colon A \to PA$ *es un isomorfismo.*

De esta manera la propiedad libre de puntos sería

$$\text{Parche trivial} \Leftrightarrow A \simeq PA.$$

La prueba del Teorema 2.3.4 da una idea de como, con algunas condiciones particulares, algunos $j \in NA$ cumplen que $j = u_d$ donde $d = j(0)$. Para restringirnos únicamente al marco $PA$ debemos observar que para algún $u \in A$ y cualquier $F \in A^{\wedge}$ se cumple que $u_d = v_F$. Lo anterior daría una condición necesaria y suficiente para obtener la trivialidad del parche.

Veamos como se comporta la trivialidad del parche con algunas propiedades espaciales.

**Lema 2.4.2** *Consideremos* $S \in \mathrm{Top}$ *si:*

*a)* $S$ *es* $T_2$ *o*

*b)* $S$ *es* $T_0$*, ajustado y empaquetado (en otras palabras,* $T_1$ *y sobrio),*

*entonces* $\mathcal{O}S$ *es parche trivial.*

*Demostración.*

a) Se verá más adelante (Teorema 2.4.14).

b) Consideremos cualquier $v_F$ para $F \in A^{\wedge}$. Por el Teorema 1.4.5, $F$ está determinado por algún $Q \in \mathcal{Q}S$. Además, también sabemos que los núcleos $v_F$ y $[Q']$ producen el mismo filtro de admisibilidad y al ser ajustado, se cumple que $v_F = [Q']$. Luego, al ser $T_1$, se cumple que $Q = M$, es decir $[Q'] = [M'] = w_F$, por lo tanto, el intervalo de admisibilidad colapsa.

□

La parte $b$) de la prueba anterior nos da un criterio un poco distinto para verificar la trivialidad del parche (cuando el marco en cuestión es la topología de un espacio). En este caso, basto verificar que los intervalos de admisibilidad son solo un punto, siempre que $F \in \mathcal{O}S^{\wedge}$.

Ambos ejemplos proporcionan una condición necesaria, pero no suficiente. Existen espacios $T_2$ y espacios $T_1$+sobrios que no son parche trivial.

### 2.4.2 Marcos arreglados

Si F 2 A^, podemos asignarle un núcleo $v_F = \bigvee \{ v_a \mid a \in F \}$ y, a manera de notación, consideramos sel supremo puntual $f = \bigvee \{ v_a \mid a \in F \}$ el cual nos permite construir una sucesión

$$d(0) = id\,; \quad d( \; + 1) = f\,(d( \;))\,; \quad d( \;) = \bigvee \{ d( \;) \mid \; < \; \}$$

para cada ordinal y ordinal límite . Además, veri camos que esta se estabiliza en algún elemento $d = d(1 \;) = v_F(0)$ para algún ordinal 1 .

Al principio de esta sección mencionamos que una condición que asegura la trivialidad del parche es que $u_d = v_F$ para algún d 2 A y F 2 A^.

En general, se cumple que $u_d \; v_F$. Por lo tanto, solo ocupamos ver la otra desigualdad y esta ocurre siempre que para x 2 F, $u_d(x) = 1$.

De nición 2.4.3 Sean A 2 Frm y un ordinal.

1. Un ltro abierto F 2 A^ es -arreglado si

$$x \in F \Rightarrow u_{d( \;)}(x) = d( \;) \vee x = 1$$

   donde $d( \;) = f \; (0)$.

2. El marco A es -arreglado si para todo F 2 A^, F es arreglado.

3. El marco A es arreglado si es -arreglado para algún ordinal .

Notemos que si el marco A es arreglado, su grado de arreglo es el menor ordinal para el cual se cumple que A es -arreglado.

Lema 2.4.4 Un marco es arreglado si y solo si es parche trivial.

Demostración.

) ) Consideremos A 2 Frm y supongamos que A es arreglado. De esta manera para F 2 A^ se cumple que si x 2 F ) d( ) _ x = 1, es decir, F r (u$_{d( \;)}$), en particular, para el núcleo $v_F$ asociado se cumple que $v_F \; u_d$. Por lo tanto $v_F = u_d$, es decir, A es parche trivial.

( ) Supongamos que A = P A y consideremos F 2 A^ arbitrario. Por la trivialidad del parche se cumple que $v_F = u_d$ para algún d 2 A. Notemos que lo anterior obliga que para x 2 F, siempre se debe de cumplir que d _ x = 1, pero esto solo ocurre cuando

$$\begin{aligned} d = \bigwedge \{ f : \; x \mid x \in F \} &= \bigwedge \{ f\,(x \;\; 0) \mid x \in F \} \\ &= \bigwedge \{ v_x(0) \mid x \in F \} \\ &= v_F(0) = d(1 \;) \end{aligned}$$

para algún ordinal 1 . Por lo tanto como F = r (v$_F$) = r (u$_d$) se debe cumplir que si x 2 F, entonces d _ x = 1, es decir, A es arreglado (pues F es arbitrario).

Notemos que si $F$ 2 $A^{\wedge}$ es -arreglado, entonces $F$ es -arreglado para ordinales , pues r (f (d( ))) r (f (d( ))) . De esta manera se obtiene una jerarquía de propiedades

$$) \quad \text{-arreglado} ) \quad ( \quad 1)\text{-arreglado} ) \quad 1\text{-arreglado} ) \quad 0\text{-arreglado}$$

En el Teorema Referenciar el Teorema 11.3.7 una vez que ya este escrito se mostrará que cada una de estas es distinta.

De manera sencilla podemos observar que

$$A \text{ es } 0\text{-arreglado}, \quad A = f g :$$

Daremos un poco más de información para cuando $A$ es 1 arreglado.

Queremos usar la condición de arreglo para el caso en que $A$ = $OS$.

Lema 2.4.5 Consideremos $S$ un espacio sobrio, $Q$ 2 $QS$ y $F$ = r (Q) el ltro abierto correspondiente a $Q$ en $OS$. Para cada ordinal , el ltro $F$ es arreglado si y solo si $Q($ $) = Q$.

Demostración. Por hipótesis $F$ = r (Q) es -arreglado y por de nición esto ocurre si

$$U \; 2 \; F \; ) \quad (Q( \;))^{0} [ \; U = S$$

pues $d( ) = ( Q( ))^{0}$. Así, si $Q$ $U$, entonces $Q($ $)$ $U$. Por lo tanto $Q($ $)$ $Q$ y $Q$ $Q($ $)$, es decir, $Q($ $) = Q$ como queríamos.

### 2.4.3 La jerarquía de la regularidad

La subsección anterior proporciona una jerarquía de propiedades por medio del grado de arreglo. Como veremos ahora, podemos establecer una jerarquía similar, pero en este caso, relacionadas con la regularidad.

De nición 2.4.6 Consideremos $A$ 2 Frm y un ordinal. Decimos que $A$ es:

a) débilmente -regular si para cada $a; b$ 2 $A$ y $F$ 2 $A^{\wedge}$ con $a$ $b$ y $a$ 2 $F$ existen $x; y$ 2 $A$ tales que

$$a \_ x = 1; \quad y \quad a; \quad y \quad b \quad y \quad x \wedge y \quad d( \; )$$

se cumple.

b) -regular si para cada $a; b$ 2 $A$ existe $y$ 2 $A$ tal que para cada $F$ 2 $A^{\wedge}$ con $a$ 2 $F$ existe un elemento $x$ 2 $A$ tal que

$$a \_ x = 1; \quad y \quad a; \quad y \quad b \quad y \quad x \wedge y \quad d( \; )$$

se cumple.

Observemos que a) y b) de la definición anterior está en el orden de los cuantificadores. Para el caso de a) tenemos

$$(\forall a)(\forall F)(\exists y)(\exists x)$$

y para b) se cumple que

$$(\forall a)(\exists y)(\forall F)(\exists x):$$

En otras palabras, débilmente -regular requiere cierta uniformidad en la elección de y.

Al principio, débilmente -regular parece la más obvia y, de hecho, fue la primera que demostraron. Sin embargo, la segunda se relaciona mejor con algunas de las otras propiedades que implican la regularidad. En particular, podemos dar una versión indexada para decir que un elemento a está bastante por debajo de b. Recordemos que podemos caracterizar a los marcos regulares por medio de sus elementos bastante por debajo.

**Definición 2.4.7** Para $a; y \in A$, decimos que $y$ está bastante -por debajo de $a$ (denotado por "$y\ 0\ \ a$"), si para cada $F \in A^{\wedge}$ tal que $a \in F$ existe $x \in A$ tal que

$$a \vee x = 1; \quad y \quad a; \quad y \quad x \wedge y \quad d(\ )$$

se cumple.

Observemos que $0$ es simplemente la definición de . De las definiciones de -regular y bastante -por debajo vemos que $A$ es -regular exactamente cuando para cada $a$ $b$ existe algún $y\ 0\ a$ y $y$ $b$ se cumple.

**Lema 2.4.8** Un marco $A$ es -regular si y solo si para todo $a \in A$

$$a = \bigvee \{b \in A \mid b\ 0\ a\}:$$

*Demostración.* Supongamos que $A$ es -regular. Consideremos $a \in A$ y $b = \bigvee\{y \in A \mid y\ 0\ a\}$, entonces $b$ $a$. Si $a$ $b$, por la definición de la -regularidad $y\ 0\ a$ y $y$ $b$ para algún $y \in A$, lo cual es una contradicción (pues $y$ $b$). Por lo tanto $a$ $b$.

Recíprocamente, supongamos que $a = \bigvee\{y \in A \mid y\ 0\ a\}$ para todo $a \in A$. Así, si $a$ $b$, entonces existe $y \in A$ tal que $y\ 0\ a$ y $y$ $b$ lo cual implica la -regularidad.
La siguiente propiedad de la -regularidad surgen directamente de la definición.

**Lema 2.4.9** Para cada $A \in \mathrm{Frm}$ y ordinales , las siguiente implicaciones se cumplen:

1. -regular $\Rightarrow$ débilmente -regular.
2. -regular $\Rightarrow$ -regular.
3. débilmente -regular $\Rightarrow$ débilmente -regular.
4. 0-regular $\Leftrightarrow$ regular.

De esta manera tenemos una jerarquía en tres propiedades. Además, podemos relacionarlas.

**Teorema 2.4.10** *Para cada $A \in \mathrm{Frm}$ y ordinal $\alpha$ las siguientes implicaciones se cumplen*

$$\alpha\text{-}\textit{arreglado} \Rightarrow \alpha\text{-}\textit{regular} \Rightarrow \textit{débilmente } \alpha\text{-}\textit{regular} \Rightarrow (\alpha - 1)\text{-}\textit{regular}.$$

*Demostración.* Supongamos que $A$ es $\alpha$-arreglado y consideremos $a, b \in A$ con $a \nleq b$. Sea $y = a$ y supongamos que para $F \in A^\wedge$, $a \in F$. Al ser $A$ $\alpha$-arreglado, se cumple que $d(\alpha) \vee a = 1$. Tomemos $x = (a \succ d(\alpha))$, entonces

$$x \wedge y = x \wedge a \leq d(\alpha), \quad a \vee x \geq a \vee d(\alpha) = 1 \quad \text{y} \quad y \leq a$$

con $y \nleq b$ y así obtener que $A$ es $\alpha$-regular.

La segunda implicación se cumple por la definición de ambas propiedades.

Por último, supongamos que $A$ es débilmente $\alpha$-regular. Sean $F \in A^\wedge$ y $a \in F$. Por hipótesis

$$a = \bigvee\{y \in A \mid y \leq a \text{ y } a \vee (y \succ d(\alpha)) = 1\}$$

donde este supremo resulta ser dirigido. Como $a \in F$, se debe cumplir que existe $y \in F$ tal que $y \leq a$ y $a \vee (y \succ d(\alpha)) = 1$. Luego

$$(y \succ d(\alpha)) = v_y(d(\alpha)) \leq f(d(\alpha)) = d(\alpha + 1).$$

De esta manera $1 = a \vee (y \succ d(\alpha)) \leq a \vee d(\alpha + 1)$. Lo cual implica que $a \vee d(\alpha + 1) = 1$ y por lo tanto $A$ es $(\alpha + 1)$-arreglado. □

La parte $c$) del Lema 2.4.9 nos proporciona un caso particular del Teorema 2.4.10, pues regular= 0-regular, y este implica 1−arreglado. Notemos que lo anterior es el Teorema 2.3.4.

### 2.4.4 Topologías arregladas

Teniendo en cuenta que la topología de un espacio es un marco, resulta natural el preguntarnos, ¿cuál es el comportamiento del grado de arreglo con respecto a las propiedades clásicas de separación?

**Lema 2.4.11** *Si el marco $A$ es arreglado, entonces cada punto de $A$ es máximo. Además, $\mathrm{pt}A$ es un espacio $T_1$.*

*Demostración.* Consideremos $S = \mathrm{pt}A$. Sea $p \in S$ y $P$ el filtro completamente primo correspondiente a $p$, es decir,

$$y \in P \Leftrightarrow y \nleq p$$

para $y \in A$. Recordemos que si $P$ es completamente primo, entonces este es abierto y primo, de esta manera consideramos $v_P$ el núcleo asociado a $P$. Luego $d = v_P(0) \leq w_p(0) = p$ y, sin perdida de generalidad, tomemos $a \in A$ tal que $p < a$. Como $a \nleq p$ entonces $a \in P$ y al ser $A$ arreglado, se cumple que

$$a = a \vee p \leq a \vee d = 1,$$

es decir, $a \vee p = 1$ y al ser $a$ arbitrario, se debe cumplir que $p$ es máximo. □

El resultado anterior se puede extender a espacios $T_0$ generales. Cada espacio $T_0$ es un subespacio de su reflexión sobria ${}^+S$ y ambos espacios tienen topologías isomorfas. Si la topología $\mathcal{O}S$ es arreglada, entonces, por el Lema anterior, su espacio de puntos de ${}^+S$ es $T_1$. Sabemos que si $S$ es un espacio con reflexión sobria que es $T_1$, entonces el espacio $S$ es $T_1$ y sobrio.

2. $OS$ es $0$-regular, $S$ es $T_3$.
3. $OS$ es $4$-arreglado, $S$ es $T_2$.
4. $OS$ es $1$-regular, ??
5. $OS$ es arreglado, $S$ es empaquetado y apilado.

### 2.4.5 Espacios apilados

Las nociones empaquetado y arreglado, hasta cierto punto, podrían parecer similares. Sin embargo, la caracterización 5) mencionada antes nos da la sospecha de que no es así. Recordemos parte de la información que tenemos sobre estas.

- Un marco $A$ es parche trivial si y solo si este es arreglado. De esta manera, podemos asociar a un marco un grado de arreglo.
- Un espacio $S$ es empaqueta justamente cuando $S = {}^{p}S$.

Lema 2.4.15 Sean $A$ 2 Frm y $S$ = pt $A$. Si $A$ es arreglado, entonces $S$ es empaquetado.

Demostración. Consideremos $Q$ 2 $QS$ y sea $F$ = r ($Q$) el ltro abierto correspondiente. Por el Teorema 1.3.46 tenemos que $_A = {}_{OS}\ NU_A$, donde

$$_A : NA\ !\ O\ {}^fS; \quad {}_{OS} : NOS\ !\ O\ {}^fS \quad y \quad NU_A : NA\ !\ NOS:$$

Luego,

$$(\ v_F) = (\ {}_{OS}\ NU_A)(v_F) = {}_{OS}(NU_A(v_F)) = {}_{OS}(v_{U(F)}) = {}_{OS}(v_F):$$

Por el Lema 2.3.9 tenemos que $_{OS}(v_F) = Q^0$. Por hipótesis, $A$ es arreglado, así este es parche trivial, es decir, $v_F = u_d$ para algún $d$ 2 $A$. De aquí que

$$Q^0 = (\ v_F) = (\ u_d) = U(d);$$

pues es la re exión espacial de $OS$, es decir, $Q^0$ 2 $OS$. Por lo tanto, $Q$ 2 $CS$ y al ser $Q$ arbitrario, se cumple que todo conjunto compacto saturado es cerrado, es decir, $S$ es empaquetado.
Como un caso particular de lo anterior, si un espacio sobrio tiene una topología arreglada.

Lema 2.4.16 Si el espacio $S$ es sobrio y empaquetado, entonces el encaje canónico del marco de parches

$$OS \;\substack{\longrightarrow \\ \longleftarrow}\; POS$$

se divide, es decir, tiene un inverso unilateral donde la composición en $OS$ es la identidad.

El Lema 2.4.15 muestra que si la topología de un espacio sobrio $S$ es arreglada, entonces $S$ es empaquetado. Sin embargo, existen ejemplos que muestran que sobriedad y empaquetado no son su cientes para obtener la condición de arreglo. Para que esto suceda necesitamos algo más de información.

**Definición 2.4.17** *Sean $S$ un espacio y $Q \in \mathcal{Q}S$. Decimos que un conjunto cerrado $X \in \mathcal{C}S$ es* $Q$-irreducible *(denotado por $Q \ltimes X$), si*

$$Q \subseteq U \Rightarrow X \subseteq \overline{(X \cap U}$$

*se cumple para cada $U \in \mathcal{O}S$.*

¿Qué tiene que ver esta noción de $Q$-irreductibilidad con la noción estándar de irreductibilidad? Para cada punto $x$ de un espacio, la saturación $\uparrow x$ es compacto. Nos fijamos en $(\uparrow x)$-irreductibilidad.

**Lema 2.4.18** *Sean $S$ un espacio y $X \in \mathcal{C}S$ con $X \neq \emptyset$. Entonces $X$ es irreducible exactamente cuando $x \in X$ implica $(\uparrow x) \ltimes X$ para cada $x \in S$.*

*Demostración.* Supongamos primero que $X$ es irreducible y consideremos cualesquiera $x \in X$ y $U \in \mathcal{O}S$ tal que $x \in U$. Sea $V = \overline{(X \cap U)}'$, entonces debemos probar que $X \subseteq V'$, es decir, $X \cap V = \emptyset$.

Por contradicción, supongamos que $X \cap V \neq \emptyset$. Sabemos que $X \cap U \neq \emptyset$ y por la irreductibilidad se cumpliría que $X \cap U \cap V \neq \emptyset$, pero $X \cap U \cap V \subseteq V \cap V' = \emptyset$ lo cual es una contradicción.

Recíprocamente, supongamos $x \in X \Rightarrow (\uparrow x) \ltimes X$ para cada $x \in S$. Consideremos que $U, V \in \mathcal{O}S$, $x \in X \cap U$ y $y \in X \cap V$. Debemos probar que $X \cap U \cap V \neq \emptyset$. Por hipótesis, $(\uparrow x) \ltimes X$, es decir, $X = \overline{(X \cap U)}$ para cada $U \in \mathcal{O}S$. De esta manera

$$\overline{(X \cap U)} = X = \overline{(X \cap V)},$$

y en particular $y \in \overline{(X \cap U)}$. Pero $y \in V \in \mathcal{O}S$ y por lo tanto $X \cap U \cap V \neq \emptyset$ como requeríamos. □

Por medio de la relación $\ltimes$ podemos dar las siguientes definiciones.

**Definición 2.4.19** *a) Un espacio $S$ es* apilado *si $Q \ltimes X \Rightarrow X \subseteq \overline{Q}$ se cumple para cada $Q \in \mathcal{Q}S$ y $X \in \mathcal{C}S$.*

*b) Un espacio $S$ es fuertemente apilado si $Q \ltimes X \Rightarrow X \subseteq \overline{(X \cap Q)}$ se cumple para cada $Q \in \mathcal{Q}S$ y $X \in \mathcal{C}S$.*

Como mencionamos antes, la noción de apilamiento se puede relacionar con el grado de arreglo. Antes de ver eso, observemos la relación con las propiedades espaciales.

**Lema 2.4.20** *a) Cada espacio $T_2$ es fuertemente apilado.*

*b) Cada espacio fuertemente apilado es apilado.*

*c) Cada espacio $T_1$ y sobrio es apilado.*

*Demostración.*

Lema 2.4.22 Para cada espacio $S$ y $Q \in QS$ tenemos

$$Q \; n \; X \;,\quad \hat{Q}(X) = X \;,\quad v_F(X^0) = X^0$$

para cada $X \in CS$.

Lema 2.4.23 Para cada espacio $S$ y $Q \in QS$ tenemos

a) $\overline{Q} \quad Q(1)$, b) $Q \; n \; Q(1)$, c) $Q \; n \; X \;) \; X \quad Q(1)$

para cada $X \in CS$.

Demostración.

a) Tenemos que por la construcción de $\hat{Q}(\;)$, $Q \quad Q(1)$. Luego, como $Q(1)$ es cerrado, por lo tanto $\overline{Q} \quad Q(1)$.

b) Por definición $Q(1) = \hat{Q}(Q(1)) = \bigcap \{\overline{(Q(1) \cap U)} \mid Q \quad U\}$. de esta manera, si $Q \quad U$, entonces $Q(1) \quad \overline{(Q(1) \cap U)}$, es decir, $Q \; n \; Q(1)$.

c) Por construcción $Q(1)$ es el mayor conjunto $Y$ con $\hat{Q}(Y) = Y$

$$\hat{Q}(Y) = \bigcap \{\overline{(Y \cap U)} \mid Q \quad U\} = Y;$$

si $Q \; n \; X$, entonces por definición, $Q \quad U$ implica que $X \quad \overline{(X \cap U)} \quad \hat{Q}(1)$.

De esta manera $Q \quad \overline{Q} \quad Q(1)$ para cada $Q \in QS$ Por definición, la inclusión de la izquierda es una igualdad precisamente cuando el espacio $S$ es empaquetado, ¿cuándo es una igualdad la contención de la derecha?

Corolario 2.4.24 Un espacio $S$ es apilado precisamente cuando $\overline{Q} = Q(1)$ para cada $Q \in QS$.

Demostración. Supongamos que el espacio $S$ es apilado. Por b) del Lema 2.4.23, tenemos que para cada espacio $S$ y $Q \in QS$ se cumple que $Q \; n \; Q(1)$ y al ser $S$ apilado implica que $Q(1) \quad \overline{Q}$. La otra contención es la parte a) del Lema 2.4.23, Por lo tanto $\overline{Q} = (1)$.

Recíprocamente, si $\overline{Q} = Q(1)$, entonces por c) del Lema 2.4.23, se cumple que $Q \; n \; X \;) \; X \quad Q(1) = \overline{Q}$ y esta es la definición de apilado.

Los espacios apilados van un paso más allá.

Lema 2.4.25 Para cada espacio $S$ las siguientes afirmaciones son equivalentes.

1. $S$ es fuertemente apilado.
2. Para cada $F \in OS^{\wedge}$ tenemos que $v_F = [Q^0]$ donde $F$ es el filtro de vecindades de $Q \in QS$.

- La flecha $_S$ es suprayectiva, pues para cada $Q \in \mathcal{Q}S$ tenemos que $(v_F) = Q'$ donde $F$ es el filtro abierto en $\mathcal{O}S$ generado por $Q$.

Esta información genera las siguientes preguntas:

- ¿Qué es el espacio de puntos $pt(\mathcal{P}A)$ del marco de parches de $A$?
- En particular, ¿qué es el espacio de puntos de $\mathcal{P}\mathcal{O}S$?
- ¿Son diferentes estos espacios de puntos?

Para el espacio $S$ el espacio de Skula $^{f}S$ es el espacio de puntos de $\mathcal{N}\mathcal{O}S$ y de $\mathcal{N}A$. Nuestra intuición nos podría llevar a pensar que el espacio de parches $^{p}S$ es el espacio de puntos de $\mathcal{P}\mathcal{O}S$ o de $\mathcal{P}A$ o de ambos. Esto se aclarara más adelante con algunos ejemplos.

Existen casos donde $^{p}S$ es el espacio de puntos $\mathcal{P}\mathcal{O}S$. Por ejemplo, si $S$ es $T_2$, entonces $^{p}S = S$ y $\mathcal{O}S \to \mathcal{P}\mathcal{O}S$ es un isomorfismo. Sin embargo, en general tenemos que buscar un poco más para encontrar el espacio de puntos.

Otra pregunta que podríamos hacernos es ¿$\mathcal{P}\mathcal{O}S$ es siempre espacial? La respuesta a esto no es afirmativa, pues existe una colección de ejemplos que lo contradice (estos ejemplos también se presentaran después).

**Lema 2.5.1** Sea $S$ un espacio sobrio. Si el encaje $\mathcal{P}\mathcal{O}S \to \mathcal{O}{}^{p}S$ es un isomorfismo, entonces $S$ es fuertemente apilado

*Demostración.* Consideremos $Q \in \mathcal{Q}S$. Por el Lema 2.4.25 es suficiente verificar que $v_F = [Q']$ donde $F \in \mathcal{O}S^{\wedge}$ es el filtro correspondiente a $Q$. Por el Lema 2.3.9 tenemos que $(v_F) = Q' = ([Q'])$ y, por hipótesis, es inyectiva, es decir, $v_F = [Q']$.

El recíproco no es cierto, pues es posible tener un espacio fuertemente apilado donde no es un isomorfismo.

## 2.5.1 Los puntos "ordinarios" del marco de parches

Notemos que la composición $\mathcal{P}A \to \mathcal{P}\mathcal{O}S \to \mathcal{O}{}^{p}S$ proporciona un morfismo de marcos suprayectivo y, a su vez, este indica que existe alguna conexión entre $^{p}S$ y el espacio de puntos $pt(\mathcal{P}A)$. En particular, existe una función continua $^{p}S \to pt(\mathcal{O}{}^{p}S) \to pt(\mathcal{P}A)$, donde el espacio de en medio es la reflexión sobria de $^{p}S$. Lo que haremos ahora será obtener una descripción explicita de esta función y se mostrará que $^{p}S$ es un subespacio de $pt(\mathcal{P}A)$.

Recordemos que para $p \in A$, $p \in ptA$ si y solo si $p$ es un elemento $\wedge$-irreducible. En particular, en $\mathcal{P}A$ sus puntos son los núcleos de parches que, como elementos de $\mathcal{P}A$ son $\wedge$-irreducibles. Además, cuando consideramos al ensamble $\mathcal{N}A$, $pt(\mathcal{N}A) = \{w_p \mid p \in ptA\}$ y al ser $pt$ un funtor contravariante, se cumple que $pt(\mathcal{N}A) \to pt(\mathcal{P}A)$ es una inclusión, es decir, si $w_P \in pt(\mathcal{N}A)$, entonces $w_p \in pt(\mathcal{P}A)$.

### 2.6.1 La topología cofinita y la topología conumerable

### 2.6.2 La topología subregular de $\mathbb{R}$

### 2.6.3 La topología máxima compacta

### 2.6.4 Una construcción de pegado

### 2.6.5 La topología lider para árboles

# Chapter 3

# Axiomas de separación en Frm

Como el título lo menciona, en esta parte hablaremos sobre axiomas de separación. Primero daremos un vistazo a los axiomas clásicos conocidos en Topología. Después se dará la versión al lenguaje de retículas, que para nuestro caso será la retícula de conjuntos abiertos ($\mathcal{O}S$). Por último se generalizará para un marco arbitrario. También, hablaremos de las propiedades ajustado y subajustado para un marco. Por último, se enunciaran las distintas propiedades que existen para que un marco sea Hausdorff y mencionaremos la relación que existe entre las diferentes propiedades de separación. La información contenida en este capítulo es extraída de [5].

## 3.1 Los axiomas de separación sensibles a puntos.

Para empezar, recordemos que un espacio topológico $S$ es un conjunto dotado de una topología la cual es una familia de subconjuntos de $S$ que, en la mayoría de los casos, se denota por $\tau$, donde para cada $U \subseteq S$, si $U \in \tau$, entonces decimos que $U$ es un conjunto abierto. Además, $\tau$ cumple ciertas condiciones:

1. $S, \emptyset \in \tau$.
2. Es cerrado bajo intersecciones finitas.
3. Es cerrado bajo uniones arbitrarias.

De manera habitual, si consideramos $U \subseteq S$ denotamos por

$$\overline{U}\,; \quad U^{\circ}\,; \quad U'$$

la cerradura, el interior y el complemento del subconjunto $U$, respectivamente.

Además, si $S$ es un espacio topológico, $\mathcal{O}S$ y $\mathcal{C}S$ denotan la colección de conjuntos abiertos y la de conjuntos cerrados de $S$, respectivamente. Así, si $U \in \mathcal{O}S$, entonces $U' \in \mathcal{C}S$.

Sabemos que si $S$ y $T$ son dos espacios topológicos, la manera de relacionarlos es por medio de una *función continua*. En este caso si $f: S \to T$ decimos que $f$ es una función continua si para

Con esto en mente, podemos dar la respectiva equivalencia para que un marco sea regular y completamente regular. Usaremos $m$ como subíndice para indicar que las nociones están dadas en el lenguaje de marcos.

($\mathrm{reg}_m$) $\forall a \in A;\ a = \bigvee\{x \in A \mid x \prec a\}$.

($\mathrm{creg}_m$) $\forall a \in A;\ a = \bigvee\{x \in A \mid x \prec\prec a\}$.

Ahora damos la noción de normalidad para marcos.

($\mathrm{norm}_m$) $\forall a; b \in A;$ tales que $a \vee b = 1;\ \exists u; v \in A$ tales que

$$a \vee u = b \vee v = 1 \text{ y } u \wedge v = 0$$

## 3.3 Propiedades de separación adicionales

En la literatura se pueden encontrar algunas propiedades de separación adicionales. La primera que discutiremos es más fuerte que $T_0$, pero más débil que $T_1$.

($T_D$) $\forall x \in S;\ \exists U \in \mathcal{O}S$ tal que $x \in U$ y $U \setminus \{x\} \in \mathcal{O}S$.

Podemos ver que $T_1$ implica $T_D$ y que $T_D$ implica $T_0$.

**Proposición 3.3.1** *Un espacio $S$ satisface $T_D$ si y solo si para cada $x \in S$*

$$(S \setminus \overline{\{x\}}) \cup \{x\} \in \mathcal{O}S.$$

*Demostración.*

$\Rightarrow$) Consideremos un espacio $S$ que satisface $T_D$ y sea $U \in \mathcal{O}S$ como el que aparece en ($T_D$). Para $x \neq y$ el conjunto $V = (S \setminus \overline{\{x\}}) \cup \{x\}$ es una vecindad de $y$ y una vecindad para $x$, pues si $x \in U$, entonces $U \setminus \overline{\{x\}} = U \setminus \{x\}$ y por lo tanto $x \in U \subseteq V$. De aquí que $V$ es abierto.

$\Leftarrow$) Si $V = (S \setminus \overline{\{x\}}) \cup \{x\}$ es abierto tenemos que si $x \in V$, entonces

$$V \setminus \{x\} = (S \setminus \overline{\{x\}}) \cup \{x\} \setminus \{x\} = S \setminus \overline{\{x\}}$$

y $S \setminus \overline{\{x\}} \in \mathcal{O}S$. Por lo tanto $V \setminus \{x\}$ es abierto, es decir, $S$ es $T_D$.

**Teorema 3.3.2** *Sean $S$ y $T$ espacios que satisfacen $T_D$ y sean $\mathcal{O}S$ y $\mathcal{O}T$ retículas isomorfas. Entonces $S$ y $T$ son homeomorfos.*

ii) Consideremos $S$ un espacio infinito dotado de la topología cofinita, es decir,

$$U \in \mathcal{O}S \iff U = \emptyset \text{ o } S \setminus U \text{ es finito}.$$

Este espacio es $T_1$, pero no es sobrio, pues $\emptyset$ es un elemento $\wedge$-irreducible y $\emptyset \neq S \setminus \overline{\{x\}}$ para todo $x \in S$.

iii) Sea $\mathbb{S}$ el espacio de Sierpinski, es decir,

$$\mathbb{S} = (S = \{0, 1\}, \mathcal{O}S = \{\emptyset, \{1\}, \{0, 1\}\}).$$

Los elementos $\wedge$-irreducibles son $\emptyset = S \setminus \overline{\{1\}}$ y $\{1\} = S \setminus \overline{\{0\}}$, por lo tanto $\mathbb{S}$ es sobrio, pero no es $T_1$.

Una manera de caracterizar a los espacios sobrios es la siguiente.

**Teorema 3.3.6** Un espacio $S$ que es $T_0$ es sobrio si y solo si los filtros completamente primos en $\mathcal{O}S$ son precisamente los filtros de vecindades

$$\mathcal{F}(x) = \{U \in \mathcal{O}S \mid x \in U\}.$$

*Demostración.*

$\Rightarrow$) Consideremos un espacio $S$ sobrio y $\mathcal{F}$ un filtro completamente primo. Sea

$$U_0 = \bigcup \{U \mid U \notin \mathcal{F}\}.$$

Al ser $\mathcal{F}$ un filtro completamente primo tenemos que $U_0 \notin \mathcal{F}$ y así $U_0$ es el elemento más grande de $\mathcal{O}S$ que no está en $\mathcal{F}$. Como los filtros son secciones superiores vemos que $U \in \mathcal{F}$ si y solo si $U \nsubseteq U_0$

Notemos que $U_0$ es un elemento $\wedge$-irreducible, pues si $U \cap V \subseteq U_0$, entonces $U \cap V \notin \mathcal{F}$. Lo cual implica que $U \notin \mathcal{F}$ o $V \notin \mathcal{F}$, es decir, $U \in U_0$ o $V \in U_0$. Además $U_0$ no es todo $S$, pues de ser así $\mathcal{F}$ sería el filtro trivial.

Por lo tanto, por la sobriedad de $S$, tenemos que $U_0 = S \setminus \overline{\{x\}}$ para algún $x \in S$. De aquí que

$$U \in \mathcal{F} \iff U \nsubseteq U_0 \iff U \nsubseteq S \setminus \overline{\{x\}} \iff x \in U;$$

es decir, $\mathcal{F}(x) = \{U \in \mathcal{O}S \mid x \in U\}$.

$\Leftarrow$) Consideremos $P \in \mathcal{O}S$ $\wedge$-irreducible y sea $\mathcal{F} = \{u \in \mathcal{O}S \mid U \nsubseteq P\}$. Veamos que $\mathcal{F}$ es un filtro.

Primero, $\mathcal{F}$ es una sección superior. Además, si $U, V \nsubseteq P$, entonces $U \cap V \nsubseteq P$. Este también es un filtro completamente primo, pues si $U_i \subseteq P$ para todo $i \in J$, se cumple que

$$\bigcup_{i \in J} U_i \subseteq P.$$

Observación 3.3.9 La asignación $U \mapsto \tilde{U}$ establece un isomorfismo entre $\mathcal{O}S$ y $\mathcal{O}\tilde{S}$.

Con todo lo anterior, podemos concluir que la modificación sobria se comporta de manera agradable. Resta verificar que efectivamente hacer esta construcción nos devuelve un espacio sobrio.

Proposición 3.3.10 El espacio $\tilde{S}$ es sobrio.

Demostración. Consideremos un filtro completamente primo $\mathcal{F}$ en $\mathcal{O}\tilde{S}$. Definimos

$$F = \{U \in \mathcal{O}S \mid \tilde{U} \in \mathcal{F}\}:$$

Veamos que $F$ es un filtro completamente primo que se puede describir como un filtro de vecindades.

Primero, consideremos $U, V \in F$, entonces $\widetilde{U \cap V} = \tilde{U} \cap \tilde{V} \in \mathcal{F}$. Similarmente, si $U \in F$ y $U \subseteq V$, al ser $\mathcal{F}$ completamente primo, tenemos que $\tilde{U} \subseteq \tilde{V} \in \mathcal{F}$. Así $V \in F$. Por último, si

$$\bigcup_{i \in J} U_i \in F \Rightarrow \widetilde{\bigcup_{i \in J} U_i} = \bigcup_{i \in J} \tilde{U}_i \in \mathcal{F}:$$

Como $\mathcal{F}$ es completamente primo $\exists\, i \in J$ tal que $\tilde{U}_i \in \mathcal{F}$ y así $U_i \in F$. Por lo tanto $F$ es un filtro completamente primo.

Resta verificar que $\mathcal{F}$ es un filtro. Sabemos que

$$\tilde{U} \in \mathcal{F} \Leftrightarrow U \in F \Leftrightarrow F \in \tilde{U}:$$

Así, $\mathcal{F}(F) = \{\tilde{U} \in \mathcal{O}\tilde{S} \mid F \in \tilde{U}\}$ es un filtro de vecindades. Por lo tanto $\tilde{S}$ es sobrio.

Proposición 3.3.11 Un espacio $S$ que es $T_0$ tiene la propiedad de que $\mathcal{O}S = \mathcal{O}T$ solamente para $T$ homeomorfo a $S$ si y solo si $T$ es sobrio.

Demostración. Si $S$ es sobrio, por el Corolario 3.3.7 tenemos que $S = \mathcal{O}\tilde{S}$, donde, por la construcción de la modificación sobria, $\tilde{S}$ es sobrio. Si $S$ no es sobrio, consideramos $\tilde{S}$ el cual es un espacio sobrio , pero no homeomorfo a $S$ y por la Observación 3.3.9 se cumple la condición de que $\mathcal{O}S = \mathcal{O}\tilde{S}$.
Para terminar esta sección, recordemos que los funtores $\mathcal{O}$ y $pt$ forman una adjunción. Los resultados anteriores proporcionan la información de cuando esta es una equivalencia. Si nos restringimos a espacios sobrios y marcos espaciales tenemos

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{Top} \arrow[r, "(\tilde{\ })"] \arrow[d, shift right, "\mathcal{O}"'] & \mathbf{sob} \arrow[d, shift right] \\
\mathbf{Frm} \arrow[r, "sp"'] \arrow[u, shift right, "pt"'] & \mathbf{Frm}_{sp} \arrow[u, shift right] \arrow[u, phantom, shift left=3, "="]
\end{tikzcd}$$

($\Leftarrow$) Consideremos $U \nsubseteq V$. Sean $x \in U \setminus V$ y $y \in S$ tal que $y \in \overline{\{x\}}$ con $\overline{\{y\}} \subseteq U$. Entonces para $W = S \setminus \overline{\{y\}}$ se cumple que $W \cup U = S$ y $y \notin W \cup V$, pues si $y \in V$, entonces $x \in V$, lo cual no ocurre. Por lo tanto $W \cup V \neq S$, es decir $S$ es subajustado.

Subajustado resulta ser más débil que la propiedad $T_1$. Por ejemplo, si consideramos el espacio $\omega + 1 = \{0; 1; 2; \dots\} \cup \{\omega\}$ donde $U \in \mathcal{O}\omega + 1$ si $\omega \in U$ o $U = \emptyset$, este es un espacio que cumple (saju), pero no es $T_1$.

**Proposición 3.4.2** $T_D$ y (saju) coinciden con $T_1$.

*Demostración.* Sabemos que $T_1$ implica subajustado y $T_D$. Ahora consideremos un espacio $S$ que es $T_D$ y subajustado. Por $T_D$ elegimos un abierto $U \ni x$ tal que $U \setminus \{x\}$ es abierto. Al ser subajustado tenemos que existe $W \in \mathcal{O}S$ tal que

$$W \cup U = S \neq W \cup (U \setminus \{x\}).$$

Entonces $W \cup (U \setminus \{x\}) = (W \cup U) \cap (W \cup S \setminus \{x\}) = S \setminus \{x\}$ el cual es un conjunto abierto. Por lo tanto $\{x\}$ es cerrado, es decir, $S$ es $T_1$.

**Corolario 3.4.3** $T_D$ y (saju) son incomparables.

Notemos que la normalidad más $T_0$ no implican completamente regular (y en consecuencia no implican regularidad), para solucionar esto lo que hicimos en la Sección 3.1 fue pedir que los espacios fueran $T_1$. Con la noción de subajustado podemos pedir menos que esto.

**Proposición 3.4.4** Un espacio subajustado y normal es regular.

*Demostración.* Sea $S$ un espacio normal y subajustado y supongamos que no se cumple

$$U \neq \bigcup \{V \in \mathcal{O}S \mid V \prec U\}.$$

Por (saju) existe $W \in \mathcal{O}S$ tal que

$$W \cup U = S \quad \text{y} \quad W \cup \bigcup \{V \in \mathcal{O}S \mid V \prec U\} \neq S.$$

Por la normalidad existen $U_1; U_2 \in \mathcal{O}S$ tales que

$$U \cup U_1 = W \cup U_2 = S \quad \text{y} \quad U_1 \cap U_2 = \emptyset.$$

De aquí que $\overline{U_2} \subseteq U$ lo cual implica que $U_2 \prec U$.

Así $U_2 \subseteq \bigcup \{V \in \mathcal{O}S \mid V \prec U\}$. Luego $W \cup \bigcup \{V \in \mathcal{O}S \mid V \prec U\} = S$ lo cual es una contradicción. Por lo tanto $U = \bigcup \{V \in \mathcal{O}S \mid V \prec U\}$.
El resultado anterior es válido para la normalidad y la regularidad sin puntos.

Un marco $\mathcal{A}$ es espacial si es isomorfo a $\mathcal{O}S$, lo que se cumple precisamente si cada elemento de $\mathcal{A}$ es intersección de elementos $\wedge$-irreducibles. Una propiedad algo más fuerte es $T_1$-espacial, en la cual el marco $\mathcal{A}$ es isomorfo a $\mathcal{O}S$, con $S$ un espacio $T_1$. Por lo tanto para $T_1$-espacial requerimos que cada elemento de $\mathcal{A}$ es intersección de elementos máximos.

iii) Cada sublocal abierto en $L$ es supremo de sublocales cerrados.

*Demostración.*

i) $\Rightarrow$ ii) Es la prueba del Teorema 3.4.15.

ii) $\Rightarrow$ iii) Consideremos un sublocal abierto $o(a)$ y sea

$$S = \bigvee \{c(b) \mid c(b) \subseteq o(a)\}.$$

Sea $c(x)$ un sublocal cerrado disjunto de $c(a) \vee S$. De aquí que

$$c(x \vee a) = [x \vee a, 1] = [x, 1] \cap [a, 1] = c(x) \cap c(a)$$

Notemos que por la forma en que consideramos $c(x)$ tenemos que $c(x) \vee c(a) = 0$. Así $c(x) \subseteq o(a)$ y $c(x) \subseteq S$. Además $c(x) \cap S = 0$, entonces $c(x) = 0$. Luego, por hipótesis, al ser $c(a) \vee S$ un sublocal cerrado y disjunto de un sublocal cerrado no vacío tenemos que $c(a) \vee S = L$. De aquí que $o(a) \subseteq S$ y $S \subseteq o(a)$. Por lo tanto $S = o(a)$.

iii) $\Rightarrow$ i) Afirmación:

$$c(a) \subseteq o(b) \iff a \vee b = 1 \tag{3.4}$$

Prueba de la afirmación: Supongamos que $c(a) \subseteq o(b)$. Notemos que

$$c(a \vee b) = c(a) \cap c(b) \subseteq o(a) \cap c(b) = 0;$$

es decir, $a \vee b = 1$.

Recíprocamente, supongamos $a \vee b = 1$. Notemos que $c(a \vee b) = 0$ y $c(a \vee b) = c(a) \cap c(b) = 0$. Por lo tanto $c(a) \subseteq o(b)$.

Ahora, si $a \not\leq b$, entonces $o(a) \not\subseteq o(b)$ y así existe $x \in L$ tal que $c(x) \subseteq o(a)$ y $c(x) \not\subseteq o(b)$, es decir, $x \vee a = 1$ y $x \vee b \neq 1$. Por lo tanto $L$ es subajustado

La equivalencia 1) $\iff$ 3) es lo que denominaremos como noción de *segundo orden*. Para abreviarla únicamente nos referiremos a ella como *abierto como supremo*. Esta fue la forma en la que Isbell enuncio subajustado, para la noción de ajustado tenemos

cada sublocal cerrado es ínfimo de sublocales abiertos

y de la misma manera que lo hicimos para subajustado, nos referiremos a ella como *cerrado como ínfimo*. Esta será nuestra noción de segundo orden para ajustado. La noción de primer orden vienen enunciada en el siguiente teorema.

**Teorema 3.4.17** *Cada sublocal cerrado en $L$ es ínfimo de abiertos si y solo si*

(aju) $\forall a, b \in L,\ a \not\leq b,\ \exists c \in L$ tal que $a \vee c = 1$ y $c \to b \neq b$.

Así $S$ es subajustado. Notemos que $a, b \in S$, pues si $a \vee u = 1$ entonces

$$a = ((a \vee u) \to a) = (a \to a) \wedge (u \to a) = (u \to a).$$

De está manera, como $a \neq b$ existe $c \in S$ tal que $a \vee^S c = 1 \neq b \vee^S c$. Recordemos que, en general, el supremo en $S$ puede ser más grande que cuando se toma en $L$. Sin embargo, por el Teorema 3.4.13, si $a \vee u = 1$ entonces

$$(u \to (a \vee c)) = \bigwedge \{x \in S \mid u \vee x = 1;\ x \geq a \vee c\} = a \vee c;$$

pues $u \vee a \vee c = 1$. Por lo tanto $a \vee c \in S$ y éste coincide con $a \vee^S c$. De aquí que $a \vee^S c = 1 = a \vee c$ y $1 = (c \to c) = c$ lo cual es una contradicción. Así $L$ es ajustado.

Corolario 3.4.24 Subajustado no es una propiedad hereditaria.

El Ejemplo 3.4.18 nos proporciona un espacio subajustado que no es ajustado. Para este caso particular, si consideramos el espacio $S$ con la topología cofinita, el marco $\mathcal{O}S$ es subajustado. Además, $\mathcal{O}S$ tiene muchos sublocales que no son subajustados, usando las fórmulas para $\mathcal{V}$, se puede comprobar que las cadenas $S_x = \{\emptyset; S \setminus \{x\}; S\}$, donde $x$ varia en $S$, no son subajustados. Por lo tanto $\mathcal{O}S$ es subajustado, pero $S_x$ no lo es. Sin embargo, subajustado se hereda en algunos casos importantes.

La prueba del siguiente resultado usa el hecho de que para cualquier $a \in L$ se cumple que

$$o(a) \cap S = o_S(j_S(a)) \quad \text{y} \quad c(a) \cap S = c_S(j_S(a)).$$

Por lo tanto, si $a \in S$ tenemos que $o_S(a) = o(a) \cap S$ y $c_S(a) = c(a) \cap S$.

Teorema 3.4.25 Sea $S$ un sublocal complementado de un marco $L$ subajustado. Entonces $S$ es subajustado.

Demostración. Sea $o_S(a)$ un sublocal abierto en $S$, entonces $o_S(a) = o(a) \cap S$ con $o(a)$ abierto en $L$. Luego como $L$ es subajustado se cumple que

$$o(a) = \bigcup_{i \in J} c(b_i);$$

donde $c(b_i)$ son sublocales cerrados en $L$. Como $S$ es complementado, podemos distribuir supremos arbitrarios con intersecciones finitas, es decir,

$$o_S(a) = o(a) \cap S = \bigcup_{i \in J} c(b_i) \cap S = \bigcup_{i \in J} (c(b_i) \cap S) = \bigcup_{i \in J} c_S(j_S(b_i)).$$

Por lo tanto cada sublocal abierto en $S$ se puede ver como supremo de cerrados en $S$, es decir, $S$ es subajustado.

Ahora analizaremos como se comporta (sub)ajustado en sublocales. Los siguiente resultado se siguen del Teorema 3.4.23 y la Proposición 3.4.9, respectivamente.

**Corolario 3.4.26** Una marco $L$ es subajustado si y solo si cada uno de sus sublocales es débilmente subajustado.

*Demostración.* Si $L$ es ajustado entonces $S$ es ajustado (Teorema 3.4.23. Luego ajustado implica subajustado y subajustado implica débilmente subajustado.

**Proposición 3.4.27** Un marco $L$ es débilmente subajustado si y solo si cada uno de sus sublocales abiertos es débilmente subajustado.

*Demostración.* Supongamos que $L$ es débilmente subajustado y consideremos $b \in o(a)$ tal que $b \neq 0_{o(a)} = a$. Entonces $b \wedge a \neq 0$ y, por (dsaju), existe $c \in L$ tal que $(a \wedge b) \vee c = 1$. Luego $1 = b \vee c \leq b \vee (a \to c)$ y $(a \to c) \neq 1$, pues en caso contrario tendríamos que si $(a \to c) = 1$ entonces $a \leq c$ lo cual implicaría que $1 = a \vee c = c$ lo cual sería una contradicción. Sea $c' = (a \to c) \in o(a)$, es decir, $c' = a \to c$, y notemos que $b \vee c'$ en $o(a)$ se calcula por $a \to (b \vee c') = (a \to 1) = 1 \neq c'$. Por lo tanto $\exists c' \in o(a)$ tal que $b \vee c' = 1$, con $b \neq 0_{o(a)}$ y $c' \neq 1$, es decir, $o(a)$ es débilmente subajustado.

Recopilando toda la información presentada en esta sección tenemos las siguientes implicaciones.

$$
\begin{array}{ccl}
\text{Ajustado} & \Longleftrightarrow & \text{cada sublocal es débilmente subajustado} \\
\Downarrow & & \\
\text{Subajustado} & \Longleftrightarrow & \text{cada sublocal cerrado es débilmente subajustado} \\
\Downarrow & & \\
\text{Débilmente subajustado} & \Longleftrightarrow & \text{cada sublocal abierto es dédilmente subajustado}
\end{array}
$$

donde las equivalencias son las que se muestran en el Corolario 3.4.26 y las Proposiciones 3.4.9 y 3.4.27, respectivamente.

**Corolario 3.4.28** Débilmente subajustado no es una propiedad hereditaria.

## 3.4.4 Ajustado y subajustado en congruencias

En la sección anterior analizamos el comportamiento hereditario de estas dos propiedades. Lo que haremos ahora es ver el comportamiento algebraico de ellas a través de las congruencias, esto debido a la correspondencia uno a uno que existe entre estas y los sublocales.

Consideremos un homomorfismo de marcos $h : \mathcal{O}S \to \mathcal{O}T$. Una *congruencia* es una relación, $\sim$, dada por

$$U \sim V \Leftrightarrow h(U) = h(V);$$

donde $U, V \subseteq S$. Denotamos por $E_h = \{(U, V) \mid h(U) = h(V)\}$.

Para un subespacio $X \subseteq S$, el encaje produce la congruencia

$$E_X = \{(U, V) \mid U \cap X = V \cap X\}.$$

Recordemos que $A_j$ es una congruencia y esta está en relación con los sublocales de un loca (siempre que $j \in NA$).

Los conjuntos $\downarrow(S \setminus \{1\})$ obtenidos de los sublocales $S_j$ jugaran un papel crucial.

**Proposición 3.4.29** *Para el núcleo $j_S$ y la congruencia $E_S$ asociados al sublocal $S$ se tiene que*

$$\downarrow(S \setminus \{1\}) = \{x \in L \mid j_S(x) \neq 1\} = L \setminus E_S(1), \tag{3.5}$$

*donde $E_S(1) = E(1) \cap S$.*

*Demostración.* Se puede verificar de manera sencilla que $\downarrow(S \setminus \{1\}) = L \setminus E_S(1)$. Veamos que $\downarrow(S \setminus \{1\}) = \{x \in L \mid j_S(x) \neq 1\}$.

Sea $x \in\downarrow(S \setminus \{1\})$, entonces $x \neq 1$ y existe $s \in S \setminus \{1\}$ tal que $x \leq s$. Notemos que $x \in L$ y $x \leq s$, en particular, para $\bigwedge\{s \in S \mid x \leq s\}$ y $x \neq 1$, se cumple que $x \in \{j_s(x) \neq 1\}$, es decir, $\downarrow(S \setminus \{1\}) \subseteq \{x \in L \mid j_S(x) \neq 1\}$. La otra contención es similar. □

**Teorema 3.4.30** *Un marco $L$ es subajustado si y solo si cada congruencia $E$ en $L$ es trivial siempre que $E(1) = \{1\}$*

*Demostración.* Si $L$ es subajustado, por la equivalencia $1) \Leftrightarrow 2)$ del Teorema 3.4.16, tenemos que un sublocal cerrado $c(a) =\uparrow a$ es disjunto de un sublocal $S$ si y solo si existe $a \in L$, con $a \neq 1$ tal que $a \notin\downarrow S$. Aplicando esto al correspondiente sublocal asociado con $E$ obtenemos lo que queremos. □

**Proposición 3.4.31** *Un marco $L$ es ajustado si y solo si para cualesquiera dos sublocales $S, T \subseteq L$ se cumple la implicación*

$$\downarrow(S \setminus \{1\}) =\downarrow(T \setminus \{1\}) \Rightarrow S = T.$$

*Demostración.*

$\Rightarrow$) Consideremos $\downarrow(S \setminus \{1\}) =\downarrow(T \setminus \{1\})$. Sean $b \in T$ y $a = j_S(b)$. Si $a \vee c = 1$ tenemos que $j(b \vee c) \leq a \vee c = 1$, de modo que $j_S(b \vee c) = 1$ y así $b \vee c \notin\downarrow(S \setminus \{1\})$ y por lo tanto $b \vee c \notin\downarrow(T \setminus \{1\})$.

Por propiedades de la implicación tenemos que $b = (c \vee b) \wedge (c \succ b)$, en particular, $(c \vee b) \wedge (c \succ b) \leq b$. Así, $(c \vee b) \leq ((c \succ b) \succ b)$ y $((c \succ b) \succ b) \in T$. Luego, como $b \vee c = 1$, tenemos que $((c \succ b) \succ b) = 1$, de modo que $(c \succ b) \leq b$ y por lo tanto $b = (c \succ b)$. De aquí que si $a \vee c = 1$ implica que $(c \succ b) = b$ y como $L$ es ajustado, se cumple que $a = j_S(b) \leq b$, es decir, $j_S(b) = b$. Así $b \in S$, es decir, $T \subseteq S$.

De manera similar probamos que $S \subseteq T$ y por lo tanto $S = T$.

$\Leftarrow$) Consideremos un sublocal $S \subseteq L$ y sea

$$T = \bigcap\{o(x) \mid S \subseteq o(x)\}.$$

Si $s \in S$ y $j_S(x) = 1$, entonces $x = 1$. Luego

$$(j_S(x) \succ s) = (1 \succ s) = s \Rightarrow (j_S(x) \succ s) = (x \succ s) = s,$$

es decir, $s \in o(x)$. Así, si $j_S(x) = 1$, entonces $S \subseteq o(x)$. De aquí que $S \subseteq T$. Por lo tanto para cada $a \in T$, $(x \to a) = a$ siempre que $j_S(x) = 1$ y si $a \neq 1$, como $(a \to a) = 1 \neq a$, $j_S(a)$ no puede ser 1, de modo que $a \in (S \setminus \{1\})$. Por lo tanto $T \setminus \{1\} \subseteq \downarrow(S \setminus \{1\})$ y en consecuencia $\downarrow(T \setminus \{1\}) \subseteq \downarrow(S \setminus \{1\})$

Veamos que $\downarrow(S \setminus \{1\}) \subseteq \downarrow(T \setminus \{1\})$. Sea $a \in \downarrow(S \setminus \{1\})$, entonces existe $b \in S \setminus \{1\}$ tal que $a \leq b$. Como $S \subseteq T$, entonces $b \in T$ y así $a \in \downarrow(T \setminus \{1\})$. Por lo tanto $\downarrow(S \setminus \{1\}) = \downarrow(T \setminus \{1\})$ y por hipótesis, $S = T$. Luego $S = \bigcap\{o(x)\}$ y al ser $S$ un sublocal arbitrario, en particular se cumple también para

$$S = c(x) = \bigcap\{o(x)\}$$

y, por el Teorema 3.4.17, $L$ es ajustado.

**Teorema 3.4.32** Un marco $L$ es ajustado si y solo si para cualesquiera dos congruencias $E, F$ en $L$ se cumple la implicación

$$E(1) = F(1) \Rightarrow E = F.$$

*Demostración.* Por la Proposición 3.4.31, para cualesquiera $S, T \subseteq L$ se cumple que

$$\downarrow(S \setminus \{1\}) = \downarrow(T \setminus \{1\}) \Rightarrow S = T.$$

Consideremos $E, F$ las congruencias correspondientes a $S, T$, respectivamente, entonces, por ??

$$\downarrow(S \setminus \{1\}) = L \setminus E(1) = L \setminus F(1) = \downarrow(T \setminus \{1\})$$

y $S = T$. Por lo tanto $E = F$.

Notemos que en la prueba de la implicación "$(\Leftarrow)$" en la Proposición 3.4.31 se demostró que $S = \bigcap\{o(x) \mid S \subseteq o(x)\}$ para cualquier sublocal $S \subseteq L$, no solamente para los sublocales cerrados. De esta manera obtenemos el siguiente resultado

**Teorema 3.4.33** Un marco es ajustado si y solo si cada sublocal $S \subseteq L$ es intersección de sublocales abiertos.

## 3.5 Axiomas tipo Hausdorff

Para el análisis sin puntos de los axiomas de separación, la propiedad de que un espacio sea Hausdorff (o $T_2$), necesita ser tratada con mayor detalle. Esto debido a que no existe solo una manera de que esta propiedad sea abordada, dependiendo el enfoque o el objeto de estudio, puede ser utilizada una "traducción" u otra.

En esta sección presentamos las distintas nociones sin puntos de tipo Hausdorff que existen hasta el momento. Cabe mencionar que estas fueron enunciadas por diferentes matemáticos y algunas de ellas salieron a la luz casi al mismo tiempo. Para conocer un poco sobre la motivación de cada una de estas nociones, se puede consultar [5], de manera específica, el Capítulo 3.

La razón por la cual se trabaja con diferentes nociones de que un marco sea Hausdorff se debe al comportamiento de cada una de ellas. Algunas son propiedades conservativas e incluso equivalentes entre si. En otras existe un buen comportamiento espacial. Dependiendo el uso que se les quiera dar podemos encontrar diferentes aplicaciones. Parte de nuestra análisis consiste en decidir (en caso de que se pueda), cual es la mejor de todas ellas y hacer uso de estas para relacionarlas con las construcciones vistas en el Capítulo 2.

### 3.5.1 Marcos débilmente Hausdorff

Esta noción fue enunciada por Dowker y Papert Strauss y unas ligeras modificaciones de ella dan origen a cierta jerarquía, que al juntarlas con subajustado, resultan ser una equivalencia. Esta primer noción es conocida como *débilmente Hausdorff* y la denotaremos por $dH$.

$(dH)$ Si $a \vee b = 1$ y $a, b \neq 1$, entonces existen $u, v$ tales que $u \not\leq a$, $v \not\leq b$ y $u \wedge v = 0$.

La siguiente noción es ligeramente más fuerte que $(dH)$.

$(dH')$ Si $a \not\leq b$ y $b \not\leq a$, entonces existen $u, v$ tales que $u \not\leq a$, $v \not\leq b$ y $u \wedge v = 0$.

Esta última es la más fuerte de esta jerarquía

$(dH'')$ Si $a \not\leq b$ y $b \not\leq a$, entonces existe $u, v$ tales que $u \not\leq a$, $v \not\leq b$, $u \leq b$, $v \leq a$ y $u \wedge v = 0$.

De esta manera tenemos lo siguiente

$$(dH'') \Rightarrow (dH') \Rightarrow (dH).$$

Estas tres condiciones no son conservativas y sin (saju) no son suficientemente Hausdorff. Por ello, Dowker y Papert Strauss sugirieron como un axioma tipo Hausdorff conveniente la combinación (dH) + (saju). De hecho, esta propiedad es conservativa.

**Proposición 3.5.1** *Bajo subajustado, las condiciones $(dH)$, $(dH')$ y $(dH'')$ son equivalentes.*

*Demostración.* Pendiente

### 3.5.2 Marcos Hausdorff

La noción que ahora veremos es presentada por Paseka y Smarda quienes vieron la propiedad de Hausdorff como una regularidad débil. Con esto en mente, ellos sugieren una modificación de la relación mostrada en la Definición 3.2.1 dada por $\prec$ y reemplazándola por una un poco más débil, denotada por $\lessdot$.

**Definición 3.5.2** Para un espacio topológico $S$ y cualesquiera $U, V \in \mathcal{O}S$ decimos que $U$ se relaciona con $V$ por medio de $\lessdot$, denotado por $U \lessdot V$, si y solo si

$$U \subseteq V \quad \text{y} \quad \overline{U} \cup V \neq S.$$

### 3.5.4 Marcos fuertemente Hausdorff

Los espacios $T_2$ cumplen lo siguiente: Un espacio $S$ es $T_2$ si y solo si la diagonal

$$\Delta = \{(x, x) \in S \times S \mid x \in S\}$$

es un subconjunto cerrado en $S \times S$.

Con esto en mente, Isbell da su noción tipo Hausdorff, enunciada para el producto binario de sublocales. La desventaja de la variante presentada por Isbell es que esta propiedad no es conservativa, pero esto es compensado por otros méritos.

Para un local $L$ consideramos el coproducto binario $L \oplus L$. En particular, tomemos las inyecciones al coproducto

$$\iota_1 = (a \mapsto a \oplus 1) : L \to L \oplus L \quad \text{y} \quad \iota_2 = (b \mapsto 1 \oplus b) : L \to L \oplus L.$$

El morfismo codiagonal $\nabla$ que satisface $\nabla\iota_i = \mathrm{id}$ está dado por

$$\nabla(U) = \bigvee \{a \wedge b \mid a \oplus b \subseteq U\} = \bigvee \{a \wedge b \mid (a, b) \in U\}.$$

Consideremos la adjunción

$$L \oplus L \rightleftarrows L$$

con $\delta$ el morfismo diagonal locálico asociado. Además,

$$\delta(a) = \{(x, y) \mid x \wedge y \leq a\}.$$

Por lo tanto tenemos $U \subseteq \delta(\nabla(U))$ y $\nabla\delta = \mathrm{id}$, donde el sublocal diagonal $\Delta[L]$ corresponde al subespacio diagonal clásico.

**Definición 3.5.13** Decimos que un marco es *fuertemente Hausdorff* si y solo si el sublocal diagonal $\Delta[L]$ es cerrado en $L \oplus L$.

La propiedad enunciada en la Definición 3.5.13 puede ser reescrita de la siguiente manera.

(fH) $\Delta[L] = \uparrow d_L$,

donde $d_L$ es el menor elemento de $\Delta[L]$, es decir,

$$d_L = \delta(0) = \{(x, y) \mid x \wedge y \leq 0\} = \downarrow \{(x, x^*) \mid x \in L\}.$$

Existen diferentes caracterizaciones para los marcos fuertemente Hausdorff. Por el momento solo haremos mención a sus propiedades más importantes.

**Proposición 3.5.14** Cada sublocal de un marco fuertemente Hausdorff es fuertemente Hausdorff.

*Demostración.* Pendiente.

**Proposición 3.5.15** *Un marco fuertemente Hausdorff es Hausdorff.*

*Demostración.* Pendiente. □

**Proposición 3.5.16** *Sean $S$ un espacio $T_0$ y $\mathcal{O}S$ un marco fuertemente Hausdorff. Entonces $S$ es Hausdorff.*

*Demostración.* Pendiente. □

El marco $\mathcal{O}S$ de un espacio $S$ que es Hausdorff no necesariamente es fuertemente Hausdorff. Así, la propiedad $(\mathbf{fH})$ no es conservativa. Lo anterior queda ilustrado en el siguiente diagrama.

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{fH}) \arrow[r, Rightarrow, "3.5.16"] \arrow[dr, Rightarrow, "3.5.15"'] & T_2 \arrow[d, Leftrightarrow, "3.5.6"] \\
& (\mathbf{H})
\end{tikzcd}$$

Los siguientes diagramas muestran un resumen de la relación que existe entre las distintas propiedades presentadas en este capítulo.

$$\begin{tikzcd}
& (\mathbf{reg}) \arrow[dl, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & \\
(\mathbf{aju}) \arrow[r, squiggly, no head] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[drr, squiggly, no head] & (\mathbf{fH}) \arrow[r, squiggly, no head] \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] \arrow[dl, squiggly, no head] & (\mathbf{H})+(\mathbf{saju}) \arrow[d, Rightarrow] \arrow[dll, Rightarrow] \arrow[dl, squiggly, no head] \\
(\mathbf{saju}) \arrow[r, squiggly, no head] \arrow[dr, squiggly, no head] & (T_U) \arrow[r, squiggly, no head] \arrow[d, Rightarrow] & (\mathbf{H}) \arrow[dl, Rightarrow] \\
& (T_1) &
\end{tikzcd} \tag{3.6}$$

$$\begin{tikzcd}
& & (\mathbf{saju}) \\
(\mathbf{reg}) \arrow[r, Rightarrow] & (\mathbf{aju}) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[dr, Rightarrow] & (T_1) \\
& & (T_u)
\end{tikzcd} \tag{3.7}$$

$$\begin{tikzcd}
& & (\mathbf{H}) & \\
(\mathbf{reg}) \arrow[r, Rightarrow] & (\mathbf{fH}) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & (T_U) \arrow[r, Rightarrow] & (T_1)
\end{tikzcd} \tag{3.8}$$

$$\begin{tikzcd}
& & (\mathbf{saju}) & \\
(\mathbf{reg}) \arrow[r, Rightarrow] & (\mathbf{H})+(\mathbf{saju}) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] & (\mathbf{H}) \arrow[r, Rightarrow] & (T_1)
\end{tikzcd} \tag{3.9}$$

*Demostración.* Consideremos $A \in \mathrm{Frm}$ fuertemente Hausdorff. Si $A$ cumple $(\mathbf{fH})$, entonces todo sublocal compacto es cerrado. Por teoría de marcos, para $j \in NA$ arbitrario, $A_j$ es compacto si y solo si $\nabla(j) \in A^\wedge$. De aquí que, al ser compacto y por $(\mathbf{fH})$ $A_j = A_{u_d}$, para algún $d \in A$, es decir, $j = u_d$ y $\nabla(j) = \nabla(u_d)$ para algún $d \in A$, en particular, por H-M, para todo $F \in A^\wedge$, $v_F \in NA$. Así $\nabla(v_F) = \nabla(u_d)$, es decir, para $x \in F$ se cumple que $u_d(x) = 1 = d \vee x$. Por lo tanto $A$ es arreglado. $\square$

Con esto tenemos las implicaciones

$$(\mathbf{fH}) \Rightarrow \text{ Arreglado } \Rightarrow T_1$$

Resulta natural el pensar que la propiedad $(\mathbf{H})$ este metida entre ellas. La realidad es que hasta el dia de hoy no hemos logrado demostrar que

*Todo marco Hausdorff es arreglado.*

**Observación 4.1.2** *Sexton prueba en su tesis doctoral que si un marco es regular, entonces este es parche trivial (ver Teorema 2.3.4). Además, tenemos que parche trivial si y solo si arreglado. Por lo tanto*

$$(\mathbf{reg}) \Rightarrow \textit{ Arreglado.}$$

*Por otro lado, Simmons en su artículo [10] (ver Teorema 2.1.15), aunque ni el ni Sexton lo mencionan, prueba que*

$$(\mathbf{aju}) \Rightarrow \textit{ Arreglado.}$$

Las pruebas que ellos realizan nos llevan a pensar que existe cierto comportamiento en algo que nosotros llamamos *intervalos de admisibilidad*. Este tema los trataremos más adelante.

Por el momento, solo podemos suponer que alguna relación debe existir entre la propiedad $(\mathbf{H})$ y la condición de arreglo. Hasta que no tengamos una prueba exitosa de este hecho (porque vaya que lo hemos intentado) o exista un ejemplo que exhiba información relevante, lo anterior seguirá siendo una duda.

De esta manera, el siguiente diagrama reune la información proporcinada por el Lema 4.1.1, la Observación 4.1.2 y la pregunta abierta que aun existe sobre la relación que podria proporcionar la propiedad $(\mathbf{H})$.

$$\begin{tikzcd}
(\mathbf{aju}) \arrow[dr, Rightarrow] & \\
(\mathbf{reg}) \arrow[u, Rightarrow] \arrow[r, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \text{Arreglado} \\
(\mathbf{fH}) \arrow[ur, Rightarrow] \arrow[d, Rightarrow] & \\
(\mathbf{H}) \arrow[uur, Rightarrow, "?"'] &
\end{tikzcd}$$

Lo que sigue ahora es analizar el comportamiento del marco $PA$ (el marco de parches de un marco $A$), con los axiomas de separación

### 4.1.1 ¿Qué propiedades de separación cumple el marco de parches?

Aunque al final de esta pequeña subsección pueda sentirse que es innecesaria, este análisis nos hace pensar que el marco $P^2A$ (el marco de parches del marco de parches) es en el que debemos enfocar en mayor parte nuestro interés. Recordemos que el marco de parches viene inspirado por la definición de espacio de parches. La noción de que un marco sea parche trivial (o equivalentemente arreglado), se basa en imitar lo que se conoce como espacio empaquetado. En el Capítulo 2 se prueba que la construcción del espacio de parches se estaviliza en el tercer paso, es decir,

$$^{pp}S = {}^{ppp}S;$$

de esta manera, la sospecha que tenemos es que $P^2A$ debe actuar de manera similar. Veamos que ocurre con el parche antecesor.

- Observemos que si un marco es regular, entonces es arreglado. Si el marco es arreglado, entonces este es parche trivial. Por definición, un marco $A$ es parche trivial si $A \simeq PA$. Por lo tanto, si $PA$ fuera regular, siempre se cumpliria que $A$ es parche trivial, lo cual no es cierto siempre.
- Similar al punto anterior, no puede cumplirse que $PA$ cumpla $(H)$, pues de ser así, también implicaría que cualquier marco $A$ es parche trivial y en general, esto no es cierto.
- Si $PA$ es $T_1$, entonces para todo $j \in ptPA$ se cumple que $j$ es máximo. Además, si $j \in ptPA$, entonces $j$ es un punto salvaje o $j$ es un punto ordinario, es decir,

  $$j = w_p \quad \text{o} \quad j \neq w_p$$

  para algún $p \in ptA$. Si $j$ es salvaje, entonces para $a \in A$ se cumple que

  $$u_a \quad j \quad w_a$$

  donde $a = j(0)$. Lo anterior nos dice que $j \in ptPA$ no siempre es máximo y con ello no necesariamente será un marco $T_1$.

Como mencionamos al principio, puede resultar decepcionante el darse cuenta que $PA$ no cumple ninguna de las propiedades que teniamos en mente. Por tal motivo habrá que investigar que ocurre con $P^2A$.

## 4.2 Intervalos de admisibilidad

Recordemos que, por el Lema 2.1.9, si $F \in A^\wedge$, entonces $F$ es admisible, es decir, $F = r(j)$ para algún $j \in NA$. Además, el filtro abierto $F$ está asociado al núcleo ajustado $v_F$ y al núcleo $w_F$. De tal manera que obtenemos un intervalo de elementos en $NA$. Al intervalo $[v_F; w_F]$, cuando $F \in A^\wedge$, lo llamamos *intervalo de admisibilidad*.

Notemos que la construcción anterior está hecha para un marco $A$ arbitrario. De tal manera que podemos hacer lo mismo para el marco $\mathcal{O}S$, es decir, considerar un filtro $\nabla = \nabla(Q) \in \mathcal{O}S^{\wedge}$, donde $Q \in \mathcal{Q}S$ es el correspondiente conjunto compacto saturado al filtro abierto $\nabla$. Entonces, el intervalo de admisibilidad asociado a $\nabla$ es $[v_Q, w_Q]$. Así, obtenemos un intervalo en $N\mathcal{O}S$ y el subíndice $Q$ solo indica que este es determinado por $Q$. Veamos cual es la relación que existe entre ambos intervalos.

**Proposición 4.2.1** *Para $F \in A^{\wedge}$ y $Q \in \mathcal{Q}S$, si $j \in [V_Q, W_Q]$, entonces*

$$\nabla(U_* j U^*) = F.$$

*En otras palabras, $U_* j U^* \in [V_F, W_F]$, donde $U^*$ es el morfismo reflexión espacial y $U_*$ es su adjunto derecho.*

*Demostración.* Como $N$ es un funtor, tenemos

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "U"'] & NA \arrow[d, "N(U)"] \\ \mathcal{O}S \arrow[r, phantom, "\overset{N(\_)}{\longmapsto}"] & N\mathcal{O}S \end{tikzcd}$$

y $N(U)_*$ es el adjunto derecho de $N(U)$.

Por propiedades del adjunto se cumple lo siguiente:

1. $N(U)(j) \leq k \Leftrightarrow j \leq N(U)_*(k)$.
2. Si $k \in N\mathcal{O}S$ se cumple que

$$N(U)(j) \leq k \Leftrightarrow Uj \leq kU$$

3. $N(U)_*(k) = U_* k U^*$ y $UN(U)_*(k) = kU$ (C-Assembly, Corolario 6.7).

En 3), sustituyendo $k = j$,

$$N(U)_*(j) = U_* j U^* \quad \text{y} \quad UN(U)_* j = jU.$$

Así, para $x \in F$

$$x \in A \xrightarrow{U^*} \mathcal{O}S \xrightarrow{j} \mathcal{O}S \xrightarrow{U_*} A$$

y $U_*(j(U(x)) = \bigwedge(S \setminus j(U(x)))$. Notemos que $U_*(j(U^*(x))) \subseteq \mathrm{pt}A$. Luego,

$$x \in F \Leftrightarrow U(x) \in \nabla(j) = \nabla(Q) \Leftrightarrow S \setminus j(U(x)) = \emptyset$$

Además, evaluando $j(U^*(x))$ en $U_*$ tenemos que

$$(U_* j U^*)(x) = \bigwedge(S \setminus j(U(x))) = \bigwedge \emptyset = 1$$

es decir, $x \in \nabla(U_* j U^*)$. Por lo tanto $F = \nabla(U_* j U^*)$. □

Lo anterior define una función

$$\mho \colon [V_Q, W_Q] \to [V_F, W_F].$$

Por lo visto en la Subsección 2.2.1, para $Q \in \mathcal{Q}S$, el intervalo $[v_Q, w_Q]$ siempre tiene un elemento intermedio

$$v_Q \leq [Q'] \leq w_Q = [M']$$

donde $M = \{m \in \mathcal{O}S \setminus \nabla(Q) \mid a \leq m \neq S\}$ y $a \in \mathcal{O}S \setminus \nabla(Q)$. De está manera, al evaluar a $[Q']$ en la función $\mho$, obtenemos un elemento en $NA$, en este caso la pregunta es, ¿cómo es este elemento?, es decir, ¿cúal es el comportamiendo de $U_*[Q']U^*$ dentro del intervalo $[V_F, W_F]$?

Si $U_*[Q']U^*$ es un $u$-núcleo, recuperamos una condición similar a la que proporciona la Definición 2.4.3. Además, si esto ocurre, ¿bajo que circunstancias sucede?. La tarea ahora será responder esto.

Si empezamos con un espacio Huasdorff, entonces tenemos que... (falta escribir bien está parte).

### 4.2.1 Condiciones de colapso

## 4.3 El $Q$-cuadrado

Con lo visto hasta este momento, sabemos que para los marcos $A$ y $\mathcal{O}S$, si consideremos filtros $F \in A^\wedge$ y $\nabla \in \mathcal{O}S^\wedge$, estos están en correspondencia con su respectivo núcleo ajustado $v_F$ y $v_\nabla$. Estos producen los cocientes $A_{v_F}$ y $\mathcal{O}S_{v_\nabla}$ de los marcos principales $A$ y $\mathcal{O}S$, respectivamente. Para simplificar la notación, denotaremos por $A_F$ al cociente $A_{v_F}$ y por $\mathcal{O}S_\nabla$ al cociente $\mathcal{O}S_{v_\nabla}$. Con todo lo anterior tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "v_F"] \arrow[d, "U_A"'] & A_F \arrow[d, "g"] \arrow[dr] & \\
 & & \mathcal{O}Q \\
\mathcal{O}S \arrow[r, "v_\nabla"'] & \mathcal{O}S_\nabla \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

El diagrama anterior es presentado por Simmons en [11]. Nosotros lo llamamos el $Q$-*cuadrado*.

Recordemos que $v_F$ y $v_\nabla$ son las cerraduras idempotentes de sus prenúcleos correspondientes (ver Definición 2.4.3). Así, $v_F$ y $v_\nabla$ son mapeos de $A$ en $A$ y de $\mathcal{O}S$ en $\mathcal{O}S$, respectivamente.

De esta manera, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f^\infty"] \arrow[d, "U_A"'] & A \arrow[d, "U_A"] \\
\mathcal{O}S \arrow[r, "F^\infty"'] & \mathcal{O}S
\end{tikzcd}$$

En [11] prueban que el cuadrado anterior conmuta laxamente, es decir, $U_A \circ f^\infty \leq F^\infty \circ U_A$.

En este diagrama $U_A$ es el morfismo reflexión espacial, $f^\infty$ y $F^\infty$ representan los núcleos asociados a los filtros $F \in A^\wedge$ y $\nabla \in \mathcal{O}S^\wedge$.

Lo que probaremos aquí es más general, pues consideramos el cuadrado

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\hat{f}^\infty"] \arrow[d, "j"'] & A \arrow[d, "j"] \\ A_j \arrow[r, "f^\infty"'] & A_j \end{tikzcd}$$

donde $\hat{f}^\infty$ es el núcleo asociado al filtro $j_*F \in A^\wedge$ y $j \in NA$.

**Lema 4.3.1** *Para $j$, $f$ y $\hat{f}$ como antes, se cumple que $j \circ \hat{f} \leq f \circ j$.*

*Demostración.* Por la Proposición 1.1.22 se cumple que

$$\hat{f} = \dot{\bigvee}\{v_y \mid y \in \hat{F} = j_*F\} \quad \text{y} \quad f = \dot{\bigvee}\{v_{j(y)} \mid j(y) \in F\}.$$

Luego, para $a \in A$ se cumple que

$$v_y(a) = (y \succ a) \leq \hat{f}(a) \leq j(\hat{f}(a)).$$

También, para todo $a, y \in A$, $(y \succ a) \wedge y = y \wedge a$ y

$$\begin{aligned} j((y \succ a) \wedge y) \leq j(a) &\Leftrightarrow j(y \succ a) \wedge j(y) \leq j(a) \\ &\Leftrightarrow j(y \succ a) \leq (j(y) \succ j(a)). \end{aligned}$$

Así

$$v_y(a) \leq j(\hat{f}(a)) \leq (j(y) \succ j(a)) = v_{j(y)}(j(a)) \leq f(j(a)).$$

Por lo tanto $j \circ \hat{f} \leq f \circ j$. ☐

Para que $\hat{f}$ y $f$ sean núcleos, necesitamos sus cerraduras idempotentes.

**Corolario 4.3.2** *Para $j$, $f$ y $\hat{f}$ como antes, se cumple que $j \circ \hat{f}^\infty \leq f^\infty \circ j$*

*Demostración.* Para $\alpha$ un ordinal, verificaremos que $j \circ \hat{f}^\alpha \leq f^\alpha \circ j$. Para ello, lo haremos por inducción.

Si $\alpha = 0$, el resultado es trivial.

Para el paso de inducción, supongamos que para $\alpha$ es cierto. Luego

$$j \circ \hat{f}^{\alpha+1} = j \circ \hat{f} \circ \hat{f}^\alpha \leq f \circ j \circ \hat{f}^\alpha \leq f \circ f^\alpha \circ j = f^{\alpha+1} \circ j,$$

donde la primera desigualdad es el Lema 4.3.1 y la segunda se obtiene por la hipótesis de inducción.

Si es un ordinal límite, entonces

$$\hat{f} = \bar{\ } f \hat{f} \ j \ < \ g; \quad f = \bar{\ } f f \ j \ < \ g$$

y

$$j \ \hat{f} = j \ \bar{\ }_{<} \hat{f} \quad \bar{\ }_{<} j \ \hat{f} :$$

Así, por la hipótesis de inducción, tenemos que

$$j \ \hat{f} \quad f \quad j \ ) \ \bar{\ }_{<} j \ \hat{f} \quad \bar{\ }_{<} f \quad j:$$

Por lo tanto $j \ \hat{f} \quad f \quad j$.
Por el Corolario 4.3.2 tenemos que $\hat{f}^{1} \quad f^{1} \quad j$ se cumple. Además, por el Teorema H-M, $f^{1} = v_F$ y $\hat{f}^{1} = v_{j \ F}$. Con esto en mente, tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, shift left, "(v_{j \ F})"] \arrow[d, "j"'] \arrow[dr, "H"] & A_{j \ F} \arrow[l, shift left, "(v_{j \ F})"] \\
A_j \arrow[r, shift right, "(v_F)"'] & A_F \arrow[l, shift right, "(v_F)"']
\end{tikzcd}$$

Aquí, $A_F$ y $A_{j \ F}$ los cocientes producidos por $v_F$ y $v_{j \ F}$, respectivamente. El mor smo $H : A \ ! \ A_F$ está de nido por $H = v_F \quad j$. Además, $(v_F)$ y $(v_{j \ F})$ son inclusiones.

Consideremos $h : A_{j \ F} \ ! \ A_j$ tal que, para $x \ 2 \ A_{j \ F}$, $h(x) = H(x)$. Por lo tanto, si $h = H_{jA_{j \ F}}$, entonces el diagrama anterior conmuta.

Necesitamos que $h$ sea un mor smo de marcos. Primero, por la de nición de $h$, este es un $\hat{\ }$-mor smo. Resta ver que $h$ es un $\bigvee$-mor smo.

Los supremos en $A_{j \ F}$ y $A_F$ son calculados de manera diferente. Por ello, consideremos por $\hat{\bigvee}$ el supremo en $A_{j \ F}$ y por $\tilde{\bigvee}$ el supremo en $A_F$. Por lo tanto

$$\hat{\bar{\ }} = v_{j \ F} \quad \bar{\ } \quad y \quad \tilde{\bar{\ }} = v_F \quad \bar{\ } ;$$

es decir, para $X \quad A$, $Y \quad A_j$,

$$\hat{\bar{\ }} X = v_{j \ F}(\bar{\ } \ X) \quad y \quad \tilde{\bar{\ }} Y = v_F(\bar{\ } \ Y):$$

Ya que $H$ es un mor smo de marcos, $H \ \bigvee = \tilde{\bigvee} \ H$. Esto establece algo similar para $h$. Lema 4.3.3 $h \ \hat{\bigvee} = \tilde{\bigvee} \ h$.

Demostración. Para esto, solo es necesario probar la comparación $\widehat{h} \quad \widetilde{h}$. Así

$$\widehat{h} = H \quad v_{j \; F} \quad = v_F \quad j \quad v_{j \; F} \qquad v_F \quad v_F \quad j$$

donde la desigualdad es el Corolario 4.3.2. Además, $v_F = v_F$, luego

$$\widehat{h} \qquad v_F \quad j \quad = H \quad = \widetilde{\ } \quad H = \widetilde{\ } \quad h:$$

Por lo tanto $\widehat{h} = \widetilde{h}$.

Todo lo anterior demuestra el siguiente resultado.

Proposición 4.3.4 El diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "v_{j \; F}"] \arrow[d, "j"'] & A_{j \; F} \arrow[d, "h"] \\ A_j \arrow[r, "v_F"'] & A_F \end{tikzcd}$$

es conmutativo.

Con el diagrama anterior podriamos analizar más a fondo algunos casos particulares de cocientes, por ejemplo los cocientes compactos, los cuales serán abordados en el Capítulo 5.

3. $A$ es *compacto* si cada cubierta tiene una subcubierta finita.

Una manera sencilla de comprender la definición anterior es la siguiente: el marco $A$ es compacto si $1_A$ es compacto. En ocasiones verificar que $1$ es compacto puede resultar más sencillo.

Podemos producir algunos cocientes especiales por medio de algunos núcleos, por ejemplo: para $a \in A$, los núcleos $u_a$ y $v_a$ proporcionan los cocientes $A_{u_a}$ y $A_{v_a}$, respectivamente. A estos cocientes podriamos llamarlos *cociente cerrado* y *cociente abierto*, debido al núcleo que los produce (el núcleo cerrado y el núcleo abierto, respectivamente). Lo anterior nos lleva a pensar que necesitamos un núcleo especial para definir el cociente compacto.

**Proposición 5.1.2** *Sean $A$ un marco y $j \in NA$. $A_j$ es compacto si y solo si $\kappa(j) \in A^\wedge$.*

La proposición anterior es el Lema 5.17 de [7]. La prueba puede ser consultada en la misma referencia.

Sabemos que no necesariamente todo filtro admisible es abierto, pero en este caso, cuando $j \in NA$ produce un cociente compacto, se cumple que $\kappa(j) \in A^\wedge$.

De esta manera, podemos dar nuestra definición de que un marco sea KC.

**Definición 5.1.3** Un marco $A$ tiene la propiedad KC si cada cociente compacto de $A$ es cerrado. En otras palabras, cada sublocal compacto es cerrado.

Notemos que todo lo anterior es equivalente a decir que para $F \in A^\wedge$,

$$A_F = A_{u_d}$$

para algún $d \in A$.

**Definición 5.1.4** Consideremos $A$ un marco y $F \in A^\wedge$. El cociente compacto $A_F$ es cerrado si $A_F = A_{u_d}$ para algún $d \in A$.

El filtro $F \in A^\wedge$ produce un intervalo $[v_F; w_F]$ y que a su vez proporciona una familia de cocientes compactos. Si el marco principal es KC, entonces para todo $j \in [v_F; w_F]$, $A_j$ es un cociente compacto cerrado. Con esto en mente, es fácil darse cuenta de que

$$\text{KC} \Rightarrow \text{Arreglado}$$

Veamos cual es la relación de la propiedad KC con las diferentes propiedades en marcos que conocemos.

Cuando trabajamos con el marco cociente (el marco $A_j$), lo ideal es que este herede algunas de las propiedades del marco principal. En este caso, queremos ver si para $A$ arreglado o KC, $A_j$ hereda este par de propiedades. Comenzaremos con arreglado.

Si $A$ es un marco arreglado, queremos trasladar la Definición 2.4.3 para $A_j$ cuando $j \in NA$, de modo que, para todo $F \in A_j^\wedge$, si

$$x \in F \Rightarrow d \vee x = 1$$

con $d$ similar al de la definición, pero para este caso tenemos que $v_y \in NA_j$ y $0_{A_j} = j(0)$.