Reporte mensual de actividades

Juan Carlos Monter Cortés

13-enero-2026 a 31-enero-2026

Si consideramos $A \in \mathrm{Frm}$, entonces $S = \mathrm{pt}\, A$ denota el espacio de puntos de A. Además, si $x \in A$

$$\mathcal{U}_A(x) = \{p \in S \mid x \nleq p\}$$

es un abierto en $\mathcal{O}S$. Lo anterior proporciona el morfismo de marcos $\mathcal{U}_A : A \to \mathcal{O}S$ definido por $x \mapsto \mathcal{U}_A(x)$ el cual es suprayectivo y se le conoce como la reflexión espacial. De manera adicional, $\mathcal{U}_A$ es un isomorfismo si y sólo si A es espacial, es decir, $A \simeq \mathcal{O}S$ para algún $S \in \mathrm{Top}$. Además, podemos omitir el subíndice de la reflexión espacial si es claro cual es el marco con el que se está trabajando.

1. Núcleos y derivadas

Sabemos que $j \colon A \to A$ es un núcleo en A si es una función que infla, monótona, idempotente y que respeta ínfimos finitos. Si la anterior no cumple con la idempotencia, entonces al operador se le conoce como *prenúcleo*.

Para $a, x \in A$ podemos definir los núcleos conocidos

$$u_a(x) = a \vee x, \quad v_a(x) = (a \succ x), \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a).$$

Si $A = \mathcal{O}S$ y $E \subseteq S$ definimos la función

$$[E](U) = (E \cup U)^\circ$$

donde $U \in \mathcal{O}S$. La anterior resulta ser un núcleo en $\mathcal{O}S$ y se le conoce como *núcleo espacialmente inducido*. De manera particular, recordado que la implicación en Top se calcula por

$(W \succ U) = (W' \cup U)^\circ$ para cada $U, W \in \mathcal{O}S$ tenemos que

$$u_W = [W] \quad y \quad v_W = [W'].$$

Si a un núcleo espacialmente inducido le calculamos su complemento dual, obtenemos un operador sobre $\mathcal{C}S$. Dicho operador resulta ser una *derivada idempotente*.

Definición 1.1. *Sea $S \in \mathrm{Top}$ y $\mathcal{C}S$ la colección de subconjuntos cerrados de S. Un operador $\partial\colon \mathcal{C}S \to \mathcal{C}S$ es una derivada si satisface:*

1. *Si $X \subseteq Y$ entonces $\partial(X) \subseteq \partial(Y)$,*

2. *$\partial(X) \subseteq X$,*

3. *$\partial(X \cup Y) = \partial(X) \cup \partial(Y)$*

para todo $X, Y \in \mathcal{C}S$. De manera adicional, decimos que la derivada es idempotente si $\partial^2 = \partial$.

Tanto para núcleos como para derivadas, el orden se define puntualmente y considerando id el operador identidad, tp el operador constante $x \mapsto 1$ y fd el operador constante $x \mapsto 0$ obtenemos

$$\mathrm{id} \leq j \leq \mathrm{tp} \quad \text{y} \quad \mathrm{id} \geq \partial \geq \mathrm{fd}$$

para j un núcleo y ∂ una derivada.

Como mencionamos antes, si tomamos el núcleo $v_W = [W']$ y calculamos su complemento dual obtenemos

$$(v_W(U))' = ([W'](U))' = ((W' \cup U)^\circ)' = (((W \cap U')')^\circ)' = \overline{(W \cap U')} = \partial_W(U'). \tag{1}$$

En este caso, la última proporciona el operador ∂_W que es una derivada idempotente.

Decimos que $F \subseteq A$ es un filtro abierto si satisface:

1. $1 \in F$,

2. Si $x, y \in F$ entonces $x \wedge y \in F$,

3. Si $x \in F$ y $x \leq y$ entonces $y \in F$.

4. Si $X \subseteq A$ es un conjunto dirigido y $\bigvee X \in F$ entonces existe $x \in X$ tal que $x \in F$.

Denotamos por $A^\wedge$ al conjunto de todos los filtros abiertos en A. Decimos que f es un núcleo ajustado si este tiene la forma

$$f = \bigvee\{v_a \mid a \in F\}$$

y es un núcleo en A. Tomando el supremo puntual obtenemos

$$f_F = \dot{\bigvee}\{v_a \mid a \in F\} \tag{2}$$

el cual resulta ser un prenúcleo en A.

Considerando $F \in A^\wedge$ e iterando sobre los ordinales construimos la cadena creciente de prenúcleos

$$f_F^0 = \mathrm{id}, \quad f_F^{\alpha+1} = f_F \circ f_F^\alpha, \quad f_F^\lambda = \bigvee\{f_F^\beta \mid \alpha < \lambda\}$$

para cada ordinal α y cada ordinal límite λ. De manera usual, denotamos por ∞ al ordinal bajo el cual la sucesión se estabiliza, es decir, $f_F^{\infty+1} = f_F^\infty$. A este se le conoce como la cerradura idempotente y haciendo uso de el definimos

$$v_F = f_F^\infty.$$

donde v_F es el núcleo ajustado asociado a F.

Si $A = \mathcal{O}S$, tenemos que el prenúcleo (2) tiene la forma

$$f_F = \dot{\bigvee}\{[U'] \mid U \in F\}$$

y por el Teorema de Hofmann-Mislove obtenemos $f_F = \dot{\bigvee}\{[U'] \mid Q \subseteq U\}$ donde $Q \in \mathcal{Q}S$ es el conjunto compacto saturado asociado a F.

Calculando su complemento dual obtenemos la derivada $\partial_F(X) = \bigcap\{\overline{(X \cap U)} \mid Q \subseteq U\}$ donde $X \in \mathcal{C}S$. Por lo tanto, tenemos que

$$\partial_F(X) = f_F(X')'. \tag{3}$$

Al operador ∂_F se le conoce como la Q-derivada (ver Lema 6.1 de [Sim04]).

Similarmente a como construimos la sucesión creciente de prenúcleos f_F^α tenemos la siguiente sucesión decreciente de Q-derivadas

$$\partial_F^0 = \mathrm{id}, \quad \partial_F^{\alpha+1} = \partial_F(\partial_F^\alpha), \quad \partial_F^\lambda = \bigcap\{\partial_F^\alpha \mid \alpha < \lambda\}.$$

La manera de relacionar ambas sucesiones se muestra en el siguiente lema.

Lema 1.2. *Para todo $\alpha \in \mathrm{Ord}$ y $X \in CS$, se cumple*

$$\partial_F^\alpha(X) = \Big(f_F^\alpha(X')\Big)'. \tag{4}$$

Demostración. Procedemos por inducción transfinita sobre $\alpha \in \mathrm{Ord}$.

Caso base $\alpha = 0$. Por definición, $\partial_F^0 = \mathrm{id}$, es decir, $\partial_F^0(X) = X$ y $f_F^0 = \mathrm{id}$, luego

$$\partial_F^0(X) = X = (X'') = \Big(f_F^0(X')\Big)'.$$

Caso sucesor. Supongamos que la afirmación es cierta para α y probemos para $\alpha + 1$. Por definición de iteración,

$$\partial_F^{\alpha+1}(X) = \partial_F\Big(\partial_F^\alpha(X)\Big).$$

Además, por (3)

$$\partial_F^{\alpha+1}(X) = (f_F((\partial_F^\alpha(X))'))'.$$

Por hipótesis inducción, $\partial_F^\alpha(X) = \Big(f_F^\alpha(X')\Big)'$ y sustituyendo obtenemos

$$\partial_F^{\alpha+1}(X) = (f_F(f_F^\alpha(X')))' = \Big(f_F^{\alpha+1}(X')\Big)'$$

que es lo que queríamos.

Caso límite. Sea λ un ordinal límite y supongamos que lo anterior se cumple para todo $\alpha < \lambda$. Por definición de la iteración,

$$\partial_F^\lambda(X) = \bigcap_{\alpha<\lambda} \partial_F^\alpha(X).$$

Por De Morgan,

$$\Big(\partial_F^\lambda(X)\Big)' = \Big(\bigcap_{\alpha<\lambda} \partial_F^\alpha(X)\Big)' = \bigcup_{\alpha<\lambda} \Big(\partial_F^\alpha(X)\Big)'.$$

Usando la hipótesis de inducción, para todo $\alpha < \lambda$,

$$\Big(\partial_F^\alpha(X)\Big)' = f_F^\alpha(X'),$$

Luego,

$$\left(\partial_F^\lambda(X)\right)' = \bigcup_{\alpha<\lambda} f_F^\alpha(X') = f_F^\lambda(X').$$

Por lo tanto,

$$\left(\partial_F^\lambda(X)\right)' = f_F^\lambda(X'),$$

es decir,

$$\partial_F^\lambda(X) = \left(f_F^\lambda(X')\right)'.$$

y obtenemos lo que queríamos. □

Un caso particular del lema anterior es cuando $\alpha = \infty$.

Corolario 1.3.

$$\partial_F^\infty(X) = (v_F(X'))'. \tag{5}$$

2. Nociones de apilamiento

Los operadores definidos hasta ahora se relacionan por medio de las nociones de apilado y fuertemente apilado.

Definición 2.1. *Consideremos* $S \in \mathrm{Top}$.

1. *Un conjunto* $Q \in \mathcal{Q}S$ *es apilado si* $\overline{Q} = \partial_F^\infty(S)$ *y es fuertemente apilado si* $v_F = [Q']$.
2. *El espacio* S *es apilado o fuertemente apilado si cada* $Q \in \mathcal{Q}S$ *es apilado o fuertemente apilado, respectivamente.*

La anterior es la noción sensible a puntos introducida por Sexton y Simmons en [SS06] (Definición 6.1) y cumplen que fuertemente apilado implica apilado. Nosotros damos las nociones libres de puntos, es decir, las definiciones en Frm.

Definición 2.2. *Siguiendo la notación anterior, consideremos* $A \in \mathrm{Frm}$. *Decimos que* A *es:*

1. *apilado si* $(\mathcal{U}_*([Q'])\mathcal{U})(0) = v_F(0)$.
2. *fuertemente apilado si* $\mathcal{U}_*[Q']\mathcal{U} = v_F$.

Trivialmente tenemos que fuertemente apilado implica apilado. Nuestro objetivo es demostrar que las propiedades anteriores son conservativas, es decir, que un espacio S es apilado (fuertemente apilado) si y sólo si su marco de abiertos $\mathcal{O}S$ es apilado (fuertemente apilado). Antes de hacer esto necesitamos el siguiente lema auxiliar.

Lema 2.3. *Si $A = \mathcal{O}S$ y $E \subseteq S$ se cumple que*

$$\mathcal{U}_*[E]\mathcal{U} = [E].$$

Demostración. Como el marco A es espacial se cumple que $\mathcal{U}$ es un isomorfismo. De aquí que si $U \in \mathcal{O}\,\mathrm{pt}\,A$ existe $V \in \mathrm{pt}\,A$ tal que $U = \mathcal{U}(V)$ y como $U \in \mathrm{pt}\,A$, se cumple que $U = V$. Luego

$$\begin{aligned}(\mathcal{U}_*[E]\mathcal{U})(U) &= \mathcal{U}_*[E](\mathcal{U}(U)) = \mathcal{U}_*([E](U)) \\ &= \mathcal{U}_*(E \cup U)^\circ = \bigcup\{W \in \mathcal{O}S \mid W \subseteq (E \cup U)^\circ\} \\ &= (E \cup U)^\circ = [E](U).\end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{U}_*[E]\mathcal{U} = [E]$. □

Proposición 2.4. *Las nociones de fuertemente apilado y apilado son conservativas.*

Demostración. Consideremos $S \in \mathrm{Top}$, $A = \mathcal{O}S$, $F \in A^\wedge$ y $Q \in \mathcal{Q}S$.

Primero, supongamos que S es fuertemente apilado. De aquí que $v_F = [Q']$ y por el Lema 2.3 tenemos que $\mathcal{U}_*[Q']\mathcal{U} = [Q'] = v_F$. Por lo tanto $\mathcal{O}S$ es fuertemente apilado.

Supongamos ahora que S es apilado. Por lo anterior se cumple que

$$\overline{Q} = \partial_F^\infty(S) \iff \overline{Q}' = (\partial_F^\infty(S))'.$$

Además,

$$\begin{aligned}(\mathcal{U}_*[Q']\mathcal{U})(\emptyset) &= \mathcal{U}_*([Q'](\{V \in \mathrm{pt}\,\mathcal{O}S \mid \emptyset \not\subseteq V\})) \\ &= \mathcal{U}_*([Q'](\emptyset)) = \mathcal{U}_*(Q')^\circ \\ &= \bigcup\{W \in \mathcal{O}S \mid W \subseteq (Q')^\circ\} \\ &= (Q')^\circ = \overline{Q}'.\end{aligned}$$

Por el Corolario 1.3 tenemos que $v_F(\emptyset) = (\partial_F^\infty(\emptyset'))'$. Por lo tanto

$$v_F(\emptyset) = (\mathcal{U}_*[Q']\mathcal{U})(\emptyset),$$

es decir, $\mathcal{O}S$ es apilado.

□

3. El marco $[0, 1]$

4. Actividades realizadas

Durante el presente periodo, se llevaron a cabo las siguientes actividades:

1. Definimos las nociones libres de puntos de apilado y fuertemente apilado.
2. Verificamos que las nociones anteriores son conservativas.
3.

Referencias

[Sim04] Harold Simmons, *The vietoris modifications of a frame*, Unpublished manuscript, 79pp., available online at http://www. cs. man. ac. uk/hsimmons (2004).

[SS06] RA Sexton and H Simmons, *An ordinal indexed hierarchy of separation properties*, to appear (2006).