Universidad de Guadalajara

Centro Universitario de Ciencias Exactas e Ingenierías

Doctorado en Ciencias en Matemáticas

Modificaciones de parches y algunos axiomas de separación en la topología sin puntos

Protocolo de Tesis

que presenta

Juan Carlos Monter Cortés

Director(a): Dr. Luis Ángel Zaldívar Corichi

Guadalajara, Jal., 13 de febrero de 2026

1. Introducción

La primera modificación de parches fue introducida por Hochster en [Hoc69]. Su idea está motivada por el funtor

$$\mathrm{Spec}\colon \mathrm{CRing}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Top}$$

el cual a cada anillo conmutativo con unidad A le asigna el espacio topológico $S = \mathrm{Spec}(A)$. Debido a que esta asignación no siempre produce espacios T_2, Hochster propone una "reparación" del espacio S mediante el funtor

$$^{p}\colon \mathrm{Top} \to \mathrm{Top}$$

donde el espacio resultante ^{p}S es un espacio Hausdorff. Al espacio ^{p}S se le conoce como el *espacio de parches* y cuando $S \in \mathrm{Top}$ es un espacio arbitrario, su espacio de parches no necesariamente es Hausdorff.

De manera análoga, la categoría Frm se relacionada con la categoría Top por medio de los funtores contravariantes

$$\mathcal{O}\colon \mathrm{Top} \to \mathrm{Frm} \quad \text{y} \quad \mathrm{pt}\colon \mathrm{Frm} \to \mathrm{Top}$$

los cuales forman una adjunción entre ambas categorías. Esta adjunción constituye una herramienta fundamental en la teoría de marcos para trasladar nociones topológicas clásicas a sus variantes "point-free". Un ejemplo de ello son las modificaciones de parches introducidas por Escardó y Sexton (véase [Esc01, SS06b]).

En particula, para cada $A \in \mathrm{Frm}$ se consideran los funtores

$$M\colon \mathrm{Frm} \to \mathrm{Frm} \quad \text{y} \quad P\colon \mathrm{Frm} \to \mathrm{Frm}$$

donde MA es el *parche continuo* y PA es el *marco de parches*. Ambas construcciones buscan capturar, dentro de Frm, ciertos comportamiento característicos del espacio de parches.

Por ejemplo, para $S \in \mathrm{Top}$, si todo subconjunto compacto es cerrado, decimos que el espacio S es *empaquetado*, y un espacio se dice empaquetado si y solo si $^{p}S = S$. Esta noción se traduce al lenguaje de marcos diciendo que un marco A es *parche trivial* si

$$A \cong PA.$$

Los autores de [SS06b, SS06a, Sex03] caracterizan esta propiedad mediante lo que denominan *marcos eficientes*, mostrando además que da lugar a una jerarquía de propiedades indexada por ordinales, es decir, para $\alpha \in \mathrm{Ord}$ se cumple que

$$1\text{-eficiente} \Rightarrow 2\text{-eficiente} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \alpha\text{-eficiente} \Rightarrow \alpha + 1\text{-eficiente} \Rightarrow \ldots$$

Parte de las propiedades que aparecen en la literatura relacionan a los marcos eficientes con los axiomas clásicos de separación. Por ejemplo,

Teorema 1.1. *Un espacio S que es T_0 tiene topología 1-eficiente si y solo si S es T_2.*

Asimismo, en teoría de marcos existen jerarquías de propiedades de separación del tipo

$$(\mathbf{reg}) \Rightarrow (\mathbf{fH}) \Rightarrow (\mathbf{H}) \Rightarrow T_1$$

(véase [PP21]).

Adicionalmente, se cuenta con la caracterización:

$$A \text{ es parche tivial} \iff A \text{ es eficiente} \iff S \text{ es empaquetado y apilado.}$$

En [SS06a] se muestra que la noción de apilado se relaciona con la construcción del hiperespacio de Vietoris, mientras que en [Sim04] se presenta su versión en marcos, denominada V-modificación.

De manera complementaria, existen trabajos que analizan variantes y extensiones de las construcciones de parches en contextos particulares dentro de Frm. Por ejemplo, [Kli13] estudia una construcción alternativa de parches para marcos continuos, mientras que Balmer y Gallauer [BG25] introducen nociones de densidad de parche en geometría tensor-triangular. Aunque estos desarrollos no están formulados directamente en términos de eficiencia, sugieren que las modificaciones de parches aparecen de manera natural en distintos escenarios.

En este proyecto se propone profundizar en el estudio de los marcos eficientes a través de la construcción del marco de parches, analizando su relación con distintos axiomas de separación en Frm y explorando su interacción con otras modificaciones de parches descritas en la literatura.

2. Planteamiento del Problema

La noción de marco eficiente surge como una propiedad definida en la categoría Frm que, originalmente, es caracterizada mediante condiciones topológicas. En particular, la eficiencia se introduce como una condición necesaria y suficiente para que ocurra la trivialidad del parche y se organiza en una jerarquía ordinal que exhibe una estrecha relación con axiomas clásicos de separación.

Sin embargo, gran parte de los resultados existentes describen esta noción a partir de traducciones desde el contexto de espacios topológicos, mientras que un análisis interno, puramente formulado dentro de la categoría Frm, permanece incompleto. Esto motiva al estudio sistemático de los marcos eficientes como una clase de objetos definida en Frm, independiente de referencias externas a espacios.

Por otro lado, aunque se conocen diversas jerarquías de axiomas de separación en teoría de marcos, no está completamente claro cuál es la posición exacta que ocupa la jerarquía de eficiencia dentro de estas cadenas de implicaciones, ni en que medida puede interpretarse por si solo como una familia de axiomas de separación.

En consecuencia, el problema central que se aborda en este proyecto es determinar como la construcción del marco de parches y la jerarquía de marcos eficientes se relacionan con los axiomas de separación en Frm, así como identificar caracterizaciones internas de eficiencia que permitan comprender su naturaleza y alcance.

3. Hipótesis

Hipótesis general:
Es posible caracterizar la eficiencia de manera interna dentro de la categoría Frm, y la jerarquía que esta clase de marcos produce puede interpretarse como una familia de propiedades análogas a axiomas de separación.

Hipótesis especificas:

1. Existen caracterizaciones internas de los marcos eficientes formuladas únicamente en términos de la estructura del marco principal y del marco de parches asociado.
2. La jerarquía de marcos eficientes se puede insertar, total o parcialmente, dentro de las jerarquías conocidas de axiomas de separación en Frm.
3. Las modificaciones de parches y otras construcciones relacionadas, como la V-modificación, inducen condiciones suficientes o necesarias para la eficiencia en marcos.

4. Objetivos

Objetivo general:
Analizar la construcción del marco de parches y su relación con los marcos eficientes, con el fin de comprender su interacción con distintos axiomas de separación en la categoría Frm.

Objetivos específicos:

1. Estudiar las modificaciones de parches y los axiomas de separación desde el enfoque de Frm.

2. Obtener caracterizaciones internas de marcos eficientes en términos de núcleos, sublocales o condiciones asociadas al marco de parches.
3. Investigar la posición de la jerarquía de marcos eficientes dentro de las jerarquías conocidas de axiomas de separación en teoría de marcos.
4. Analizar la relación entre la eficiencia con otras modificaciones de parches y la V-modificación.
5. Desarrollar ejemplos y contraejemplos que ilustren las relaciones encontradas.

5. Metodología

La investigación se desarrollará dentro del contexto de la matemática pura, específicamente en teoría de marcos y topología sin puntos. El trabajo será principalmente de carácter analítico y deductivo, apoyado en el estudio crítico de literatura especializada y en el desarrollo de nuevas demostraciones.

En una primera etapa se realizará una revisión sistemática de bibliografía relacionada con teoría general de marcos, axiomas de separación, el marco de parches y marcos eficientes, con el propósito de identificar resultados fundamentales, técnicas recurrentes y problemas abiertos. De manera especifica se consultará [PP12, Joh82, PP21, Sex03, ZC23, Simb, Sima].

Posteriormente, se estudiará con detalles de la construcción del marco de parches y del parche continuo, así como su formulación en términos de filtros, núcleos y sublocales, por ejemplo [Esc06, Esc01, SS06b, SS06a, GHK+12]. A partir de este análisis se buscarán caracterizaciones internas de la eficiencia y de las diferentes nociones que se logren definir.

En una etapa posterior se investigará la relación entre la jerarquía de marcos eficientes y los axiomas de separación en teoría de marcos, con el objetivo de determinar posibles implicaciones, equivalencias o independencias.

De manera complementaria, se analizará la interacción de la eficiencia y el marco de parches con otras modificaciones de parches, como la V-modificación, se estudiarán ejemplos y contraejemplos que permitan ilustrar los fenómenos observados. Es esta parte, consultaremos [Kli13, Sim04, Joh20, Sim06b, ÁBMZ20, Sim06c]

Finalmente, los resultados obtenidos se organizarán en un artículo y capítulos de tesis, y se someterán a discusión con especialistas del área mediante seminarios y estancias de investigación.

A manera de resumen, el plan de trabajo para la realización de este proyecto de investigación es el que se describe a continuación.

Cuadro 1: Cronograma

Actividad / Semestre	1	2	3	4	5	6	7	8
Revisión de bibliografía	✓	✓	✓	✓	✓	✓		
Lectura de artículos	✓	✓	✓	✓	✓	✓		
Proponer conjeturas		✓	✓	✓	✓	✓		
Probar resultados			✓	✓	✓	✓	✓	
Validación y rechazo de conjeturas			✓	✓	✓	✓	✓	
Redacción de artículo y otros documentos		✓	✓	✓	✓	✓	✓	✓
Desarrollar conclusiones						✓	✓	✓
Sustentación								✓

Referencias

[ÁBMZ20] Francisco Ávila, Guram Bezhanishvili, PJ Morandi, and Angel Zaldívar. When is the frame of nuclei spatial: A new approach. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 224(7):106302, 2020.

[APP22] Igor Arrieta, Jorge Picado, and Aleš Pultr. A new diagonal separation and its relations with the hausdorff property. *Applied Categorical Structures*, 30(2):247–263, 2022.

[Arr24] Igor Arrieta. Localic separation and the duality between closedness and fittedness. *Topology and its Applications*, 362:108785, 2024. Open access under CC BY 4.0.

[BG25] Paul Balmer and Martin Gallauer. Patch-density in tensor-triangular geometry. *arXiv preprint*, 2025. Preprint.

[DP66] CH Dowker and Dona Papert. Quotient frames and subspaces. *Proceedings of the London Mathematical Society*, 3(1):275–296, 1966.

[Esc01] Martın Hötzel Escardó. The regular-locally compact coreflection of a stably locally compact locale. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 157(1):41–55, 2001.

[Esc03] Martín H Escardó. Joins in the frame of nuclei. *Applied Categorical Structures*, 11:117–124, 2003.

[Esc06] Martín H Escardó. Compactly generated hausdorff locales. *Annals of Pure and Applied Logic*, 137(1-3):147–163, 2006.

[GHK$^+$12] Gerhard Gierz, Karl Heinrich Hofmann, Klaus Keimel, Jimmie D Lawson, Michael Mislove, and Dana S Scott. *A compendium of continuous lattices*. Springer Science & Business Media, 2012.

[HL78] Karl H Hofmann and Jimmie D Lawson. The spectral theory of distributive continuous lattices. *Transactions of the American Mathematical Society*, 246:285–310, 1978.

[HM06] Karl H Hofmann and Michael W Mislove. Local compactness and continuous lattices. In *Continuous Lattices: Proceedings of the Conference on Topological and Categorical Aspects of Continuous Lattices (Workshop IV) Held at the University of Bremen, Germany, November 9–11, 1979*, pages 209–248. Springer, 2006.

[Hoc69] Melvin Hochster. Prime ideal structure in commutative rings. *Transactions of the American Mathematical Society*, 142:43–60, 1969.

[Isb72] John R Isbell. Atomless parts of spaces. *Mathematica Scandinavica*, 31(1):5–32, 1972.

[Joh82] P. T. Johnstone. *Stone Spaces*, volume 3 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[Joh83] Peter T Johnstone. The point of pointless topology. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 8(1):41–53, 1983.

[Joh20] Peter T Johnstone. Vietoris locales and localic semilattices. In *Continuous lattices and their applications*, pages 155–180. CRC Press, 2020.

[Kli13] Olaf Karl Klinke. Yet another patch construction for continuous frames and connections to the fell compactification. *Algebra universalis*, 70:227–243, 2013.

[Pas87] Jan Paseka. t_2-separation axioms on frames. *Acta Universitatis Carolinae. Mathematica et Physica*, 028(2):95–98, 1987.

[PP12] J. Picado and A. Pultr. *Frames and Locales: Topology without points*. Frontiers in Mathematics. Springer Basel, 2012.

[PP16] Jorge Picado and Aleš Pultr. New aspects of subfitness in frames and spaces. *Applied Categorical Structures*, 24(5):703–714, 2016.

[PP21] Jorge Picado and Aleš Pultr. *Separation in point-free topology*. Springer, 2021.

[Sex03] Rosemary A Sexton. *A point-free and point-sensitive analysis of the patch assembly.* The University of Manchester (United Kingdom), 2003.

[Sima] Harold Simmons. The basics of frame theory.

[Simb] Harold Simmons. A collection of notes on frames.

[Sim78] Harold Simmons. A framework for topology. In *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, volume 96, pages 239–251. Elsevier, 1978.

[Sim04] Harold Simmons. The vietoris modifications of a frame. *Unpublished manuscript, 79pp., available online at http://www. cs. man. ac. uk/hsimmons*, 2004.

[Sim06a] Harold Simmons. The assembly of a frame. *University of Manchester*, 2006.

[Sim06b] Harold Simmons. The fundamental triangle of a space. *Corpus ID*, 126365252, 2006.

[Sim06c] Harold Simmons. Regularity, fitness, and the block structure of frames. *Applied Categorical Structures*, 14:1–34, 2006.

[Sim17] Harold Simmons. The point space of a frame, 2017.

[SS06a] RA Sexton and H Simmons. An ordinal indexed hierarchy of separation properties. *to appear*, 2006.

[SS06b] RA Sexton and H Simmons. Point-sensitive and point-free patch constructions. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 207(2):433–468, 2006.

[ZC23] L. A. Zaldívar Corichi. *Una Introducción a la teoría de marcos.* 2023.