

# Reporte mensual de actividades

Juan Carlos Monter Cortés

13-enero-2026 a 31-enero-2026

Si consideramos  $A \in \mathbf{Frm}$ , entonces  $S = \text{pt } A$  denota el espacio de puntos de  $A$ . Además, si  $x \in A$

$$\mathcal{U}_A(x) = \{p \in S \mid x \not\leq p\}$$

es un abierto en  $\mathcal{O}S$ . Lo anterior proporciona el morfismo de marcos  $\mathcal{U}_A : A \rightarrow \mathcal{O}S$  definido por  $x \mapsto \mathcal{U}_A(x)$  el cual es suprayectivo y se le conoce como la reflexión espacial. De manera adicional,  $\mathcal{U}_A$  es un isomorfismo si y sólo si  $A$  es espacial, es decir,  $A \simeq \mathcal{O}S$  para algún  $S \in \mathbf{Top}$ . Además, podemos omitir el subíndice de la reflexión espacial si es claro cual es el marco con el que se está trabajando.

## 1. Núcleos y derivadas

Sabemos que  $j : A \rightarrow A$  es un núcleo en  $A$  si es una función que infla, monótona, idempotente y que respeta ínfimos finitos. Si la anterior no cumple con la idempotencia, entonces al operador se le conoce como *prenúcleo*.

Para  $a, x \in A$  podemos definir los núcleos conocidos

$$u_a(x) = a \vee x, \quad v_a(x) = (a \succ x), \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a).$$

Si  $A = \mathcal{O}S$  y  $E \subseteq S$  definimos la función

$$[E](U) = (E \cup U)^\circ$$

donde  $U \in \mathcal{O}S$ . La anterior resulta ser un núcleo en  $\mathcal{O}S$  y se le conoce como *núcleo espacialmente inducido*. De manera particular, recordado que la implicación en  $\mathbf{Top}$  se calcula por

$(W \succ U) = (W' \cup U)^\circ$  para cada  $U, W \in \mathcal{OS}$  tenemos que

$$u_W = [W] \quad y \quad v_W = [W'].$$

Si a un núcleo espacialmente inducido le calculamos su complemento dual, obtenemos un operador sobre  $\mathcal{CS}$ . Dicho operador resulta ser una *derivada idempotente*.

**Definición 1.1.** Sea  $S \in \text{Top}$  y  $\mathcal{CS}$  la colección de subconjuntos cerrados de  $S$ . Un operador  $\partial: \mathcal{CS} \rightarrow \mathcal{CS}$  es una *derivada* si satisface:

1. Si  $X \subseteq Y$  entonces  $\partial(X) \subseteq \partial(Y)$ ,
2.  $\partial(X) \subseteq X$ ,
3.  $\partial(X \cup Y) = \partial(X) \cup \partial(Y)$

para todo  $X, Y \in \mathcal{CS}$ . De manera adicional, decimos que la derivada es *idempotente* si  $\partial^2 = \partial$ .

Tanto para núcleos como para derivadas, el orden se define puntualmente y considerando id el operador identidad, tp el operador constante  $x \mapsto 1$  y fd el operador constante  $x \mapsto 0$  obtenemos

$$\text{id} \leq j \leq \text{tp} \quad y \quad \text{id} \geq \partial \geq \text{fd}$$

para  $j$  un núcleo y  $\partial$  una derivada.

Como mencionamos antes, si tomamos el núcleo  $v_W = [W']$  y calculamos su complemento dual obtenemos

$$(v_W(U))' = ([W'](U))' = ((W' \cup U)^\circ)' = (((W \cap U')^\circ)')' = \overline{(W \cap U')} = \partial_W(U'). \quad (1)$$

En este caso, la última proporciona el operador  $\partial_W$  que es una derivada idempotente.

Decimos que  $F \subseteq A$  es un filtro abierto si satisface:

1.  $1 \in F$ ,
2. Si  $x, y \in F$  entonces  $x \wedge y \in F$ ,
3. Si  $x \in F$  y  $x \leq y$  entonces  $y \in F$ .
4. Si  $X \subseteq A$  es un conjunto dirigido y  $\bigvee X \in F$  entonces existe  $x \in X$  tal que  $x \in F$ .

Denotamos por  $A^\wedge$  al conjunto de todos los filtros abiertos en  $A$ . Decimos que  $f$  es un núcleo ajustado si este tiene la forma

$$f = \bigvee \{v_a \mid a \in F\}$$

y es un núcleo en  $A$ . Tomando el supremo puntual obtenemos

$$f_F = \bigvee \{v_a \mid a \in F\} \quad (2)$$

el cual resulta ser un prenúcleo en  $A$ .

Considerando  $F \in A^\wedge$  e iterando sobre los ordinales construimos la cadena creciente de prenúcleos

$$f_F^0 = \text{id}, \quad f_F^{\alpha+1} = f_F \circ f_F^\alpha, \quad f_F^\lambda = \bigvee \{f_F^\alpha \mid \alpha < \lambda\}$$

para cada ordinal  $\alpha$  y cada ordinal límite  $\lambda$ . De manera usual, denotamos por  $\infty$  al ordinal bajo el cual la sucesión se estabiliza, es decir,  $f_F^{\infty+1} = f_F^\infty$ . A este se le conoce como la cerradura idempotente y haciendo uso de el definimos

$$v_F = f_F^\infty.$$

donde  $v_F$  es el núcleo ajustado asociado a  $F$ .

Si  $A = \mathcal{OS}$ , tenemos que el prenúcleo (2) tiene la forma

$$f_F = \bigvee \{[U'] \mid U \in F\}$$

y por el Teorema de Hofmann-Mislove obtenemos  $f_F = \bigvee \{[U'] \mid Q \subseteq U\}$  donde  $Q \in \mathcal{QS}$  es el conjunto compacto saturado asociado a  $F$ .

Calculando su complemento dual obtenemos la derivada  $\partial_F(X) = \bigcap \{\overline{(X \cap U)} \mid Q \subseteq U\}$  donde  $X \in \mathcal{CS}$ . Por lo tanto, tenemos que

$$\partial_F(X) = f_F(X')'. \quad (3)$$

Al operador  $\partial_F$  se le conoce como la  $Q$ -derivada (ver Lema 6.1 de [Sim04]).

Similarmente a como construimos la sucesión creciente de prenúcleos  $f_F^\alpha$  tenemos la si-

guiente sucesión decreciente de  $Q$ -derivadas

$$\partial_F^0 = \text{id}, \quad \partial_F^{\alpha+1} = \partial_F(\partial_F^\alpha), \quad \partial_F^\lambda = \bigcap \{\partial_F^\alpha \mid \alpha < \lambda\}.$$

La manera de relacionar ambas sucesiones se muestra en el siguiente lema.

**Lema 1.2.** *Para todo  $\alpha \in \text{Ord}$  y  $X \in CS$ , se cumple*

$$\partial_F^\alpha(X) = \left(f_F^\alpha(X')\right)'. \quad (4)$$

*Demostración.* Procedemos por inducción transfinita sobre  $\alpha \in \text{Ord}$ .

**Caso base**  $\alpha = 0$ . Por definición,  $\partial_F^0 = \text{id}$ , es decir,  $\partial_F^0(X) = X$  y  $f_F^0 = \text{id}$ , luego

$$\partial_F^0(X) = X = (X'') = \left(f_F^0(X')\right)'.$$

**Caso sucesor.** Supongamos que la afirmación es cierta para  $\alpha$  y probemos para  $\alpha + 1$ . Por definición de iteración,

$$\partial_F^{\alpha+1}(X) = \partial_F(\partial_F^\alpha(X)).$$

Además, por (3)

$$\partial_F^{\alpha+1}(X) = (f_F((\partial_F^\alpha(X))'))'.$$

Por hipótesis inducción,  $\partial_F^\alpha(X) = \left(f_F^\alpha(X')\right)'$  y sustituyendo obtenemos

$$\partial_F^{\alpha+1}(X) = (f_F(f_F^\alpha(X')))' = \left(f_F^{\alpha+1}(X')\right)'$$

que es lo que queríamos.

**Caso límite.** Sea  $\lambda$  un ordinal límite y supongamos que lo anterior se cumple para todo  $\alpha < \lambda$ . Por definición de la iteración,

$$\partial_F^\lambda(X) = \bigcap_{\alpha < \lambda} \partial_F^\alpha(X).$$

Por De Morgan,

$$\left(\partial_F^\lambda(X)\right)' = \left(\bigcap_{\alpha < \lambda} \partial_F^\alpha(X)\right)' = \bigcup_{\alpha < \lambda} \left(\partial_F^\alpha(X)\right)'.$$

Usando la hipótesis de inducción, para todo  $\alpha < \lambda$ ,

$$\left(\partial_F^\alpha(X)\right)' = f_F^\alpha(X'),$$

Luego,

$$\left(\partial_F^\lambda(X)\right)' = \bigcup_{\alpha < \lambda} f_F^\alpha(X') = f_F^\lambda(X').$$

Por lo tanto,

$$\left(\partial_F^\lambda(X)\right)' = f_F^\lambda(X'),$$

es decir,

$$\partial_F^\lambda(X) = \left(f_F^\lambda(X')\right)'.$$

y obtenemos lo que queríamos. □

Un caso particular del lema anterior es cuando  $\alpha = \infty$ .

**Corolario 1.3.**

$$\partial_F^\infty(X) = (v_F(X'))'. \quad (5)$$

## 2. Nociones de apilamiento

Los operadores definidos hasta ahora se relacionan por medio de las nociones de apilado y fuertemente apilado.

**Definición 2.1.** *Consideremos  $S \in \text{Top}$ .*

1. *Un conjunto  $Q \in \mathcal{QS}$  es apilado si  $\overline{Q} = \partial_F^\infty(S)$  y es fuertemente apilado si  $v_F = [Q']$ .*
2. *El espacio  $S$  es apilado o fuertemente apilado si cada  $Q \in \mathcal{QS}$  es apilado o fuertemente apilado, respectivamente.*

La anterior es la noción sensible a puntos introducida por Sexton y Simmons en [SS06] (Definición 6.1) y cumplen que fuertemente apilado implica apilado. Nosotros damos las nociones libres de puntos, es decir, las definiciones en  $\text{Frm}$ .

**Definición 2.2.** *Siguiendo la notación anterior, consideremos  $A \in \text{Frm}$ . Decimos que  $A$  es:*

1. *apilado si  $(\mathcal{U}_*([Q'])\mathcal{U})(0) = v_F(0)$ .*
2. *fuertemente apilado si  $\mathcal{U}_*[Q']\mathcal{U} = v_F$ .*

Trivialmente tenemos que fuertemente apilado implica apilado. Nuestro objetivo es demostrar que las propiedades anteriores son conservativas, es decir, que un espacio  $S$  es apilado (fuertemente apilado) si y sólo si su marco de abiertos  $\mathcal{OS}$  es apilado (fuertemente apilado). Antes de hacer esto necesitamos el siguiente lema auxiliar.

**Lema 2.3.** Si  $A = \mathcal{O}S$  y  $E \subseteq S$  se cumple que

$$\mathcal{U}_*[E]\mathcal{U} = [E].$$

*Demostración.* Como el marco  $A$  es espacial se cumple que  $\mathcal{U}$  es un isomorfismo. De aquí que si  $U \in \mathcal{O}\text{pt } A$  existe  $V \in \text{pt } A$  tal que  $U = \mathcal{U}(V)$  y como  $U \in \text{pt } A$ , se cumple que  $U = V$ . Luego

$$\begin{aligned} (\mathcal{U}_*[E]\mathcal{U})(U) &= \mathcal{U}_*[E](\mathcal{U}(U)) = \mathcal{U}_*([E](U)) \\ &= \mathcal{U}_*(E \cup U)^\circ = \bigcup \{W \in \mathcal{O}S \mid W \subseteq (E \cup U)^\circ\} \\ &= (E \cup U)^\circ = [E](U). \end{aligned}$$

Por lo tanto  $\mathcal{U}_*[E]\mathcal{U} = [E]$ . □

**Proposición 2.4.** Las nociones de fuertemente apilado y apilado son conservativas.

*Demostración.* Consideremos  $S \in \text{Top}$ ,  $A = \mathcal{O}S$ ,  $F \in A^\wedge$  y  $Q \in \mathcal{Q}S$ .

Primero, supongamos que  $S$  es fuertemente apilado. De aquí que  $v_F = [Q']$  y por el Lema 2.3 tenemos que  $\mathcal{U}_*[Q']\mathcal{U} = [Q'] = v_F$ . Por lo tanto  $\mathcal{O}S$  es fuertemente apilado.

Supongamos ahora que  $S$  es apilado. Por lo anterior se cumple que

$$\overline{Q} = \partial_F^\infty(S) \iff \overline{Q}' = (\partial_F^\infty(S))'.$$

Además,

$$\begin{aligned} (\mathcal{U}_*[Q']\mathcal{U})(\emptyset) &= \mathcal{U}_*([Q'](\{V \in \text{pt } \mathcal{O}S \mid \emptyset \not\subseteq V\})) \\ &= \mathcal{U}_*([Q'](\emptyset)) = \mathcal{U}_*(Q')^\circ \\ &= \bigcup \{W \in \mathcal{O}S \mid W \subseteq (Q')^\circ\} \\ &= (Q')^\circ = \overline{Q}'. \end{aligned}$$

Por el Corolario 1.3 tenemos que  $v_F(\emptyset) = (\partial_F^\infty(\emptyset'))'$ . Por lo tanto

$$v_F(\emptyset) = (\mathcal{U}_*[Q']\mathcal{U})(\emptyset),$$

es decir,  $\mathcal{O}S$  es apilado. □

### 3. El marco $[0, 1]$

Siguiendo la idea de mostrada en [Sim06] (o de manera alternativa [Sim04]), consideremos el marco linealmente ordenado  $A = [0, 1]$ . En este caso particular podemos hacer las siguientes observaciones:

1. La operación de implicación en  $A$  para cualesquier  $a, b \in A$  se calcula como

$$(a \succ b) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \leq b, \\ b & \text{si } a > b. \end{cases}$$

2. Los núcleos distinguidos  $u_a, v_a, w_a$  para  $a \in A$  se calculan como

$$u_a(x) = \text{máx}\{a, x\}, \quad v_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \geq a, \\ a & \text{si } x < a, \end{cases} \quad \text{y} \quad w_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > a, \\ a & \text{si } x \leq a. \end{cases}$$

3. Si  $F \subseteq A$  es un filtro, entonces este siempre es admisible y tiene la forma

$$F = \nabla(w_a) = (a, 1] \quad \text{o} \quad F = \nabla(v_a) = [a, 1]$$

para algún  $a \in A$ . De manera particular,  $F \in A^\wedge$  si y solo si  $F = (a, 1]$ .

4. Si  $F \in A^\wedge$ , el núcleo ajustado  $v_F$  se calcula como

$$v_F(x) = l_m(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > m, \\ x & \text{si } x \leq m. \end{cases}$$

donde  $l_m = v_m \wedge w_m$  y  $m = \bigwedge F$ .

5. Para  $S = \text{pt } A$ , el espacio de puntos de  $A$ , se cumple que  $S = [0, 1)$  y los abietos en  $\mathcal{OS}$  son de la forma

$$\mathcal{U}_A(x) = \{p \in S \mid p < x\} = [0, x).$$

6. El marco  $A$  no es  $T_1$  pues ningún  $p \in S$  es máximo. Por lo tanto,  $A$  no satisface alguna otra propiedad de separación en Frm.

7. Para  $F \in A^\wedge$  el conjunto  $Q \in \mathcal{QS}$  asociado a  $F$  se calcula como  $Q = [0, m]$  donde  $m = \bigwedge F$ .

Todo lo anterior es un resumen de las principales características del marco  $[0, 1]$ . Lo que sigue es realizar el análisis de las construcciones de parches tanto de  $A$  como de  $S$ .

### 3.1. Análisis de las construcciones de parches

## 4. Actividades realizadas

Durante el presente periodo, se llevaron a cabo las siguientes actividades:

1. Definimos las nociones libres de puntos de apilado y fuertemente apilado.
2. Verificamos que las nociones anteriores son conservativas.
- 3.

## Referencias

- [Sim04] Harold Simmons, *The vietoris modifications of a frame*, Unpublished manuscript, 79pp., available online at <http://www.cs.man.ac.uk/hsimmons> (2004).
- [Sim06] ———, *Regularity, fitness, and the block structure of frames*, Applied Categorical Structures **14** (2006), 1–34.
- [SS06] RA Sexton and H Simmons, *An ordinal indexed hierarchy of separation properties*, to appear (2006).