

Reporte mensual de actividades

Juan Carlos Monter Cortés

13-enero-2026 a 31-enero-2026

Si consideramos $A \in \text{Frm}$, entonces $S = \text{pt } A$ denota el espacio de A . Además, si $x \in A$

$$\mathcal{U}_A(x) = \{p \in S \mid x \not\leq p\}$$

es un abierto en \mathcal{OS} . Lo anterior proporciona el morfismo de marcos $\mathcal{U}_A : A \rightarrow \mathcal{OS}$ definido por $x \mapsto \mathcal{U}_A(x)$ el cual es suprayectivo y se le conoce como la reflexión espacial. De manera adicional, \mathcal{U}_A es un isomorfismo si y sólo si A es espacial, es decir, $A \simeq \mathcal{OS}$ para algún $S \in \text{Top}$. Además, podemos omitir el subíndice de la reflexión espacial si es claro cual es el marco con el que se está trabajando.

Sabemos que $j : A \rightarrow A$ es un núcleo en A si es una función que infla, monótona, idempotente y que respeta ínfimos finitos. Para $a, x \in A$ podemos definir los núcleos conocidos

$$u_a(x) = a \vee x, \quad v_a(x) = (a \succ x), \quad w_a(x) = ((x \succ a) \succ a).$$

Si $A = \mathcal{OS}$ y $E \subseteq S$ definimos la función

$$[E](U) = (E \cup U)^\circ$$

donde $U \in \mathcal{OS}$. La anterior resulta ser un núcleo en \mathcal{OS} y se le conoce como *núcleo espacialmente inducido*. De manera particular, recordando que la implicación en Top se calcula por $(W \succ U) = (W' \cup U)^\circ$ para cada $U, W \in \mathcal{OS}$ tenemos que

$$u_W = [W] \quad y \quad v_W = [W'].$$

Si a un núcleo espacialmente inducido le calculamos el complemento, obtenemos un operador sobre \mathcal{CS} , las diferencias que existen entre estos radican en que los últimos desinflan y

respetan supremos finitos. Por ejemplo

$$(v_{W'}(U))' = ([W](U))' = ((W \cup U)^\circ)' = \overline{(W' \cap U')} = \partial_{W'}(U') \quad (1)$$

donde al operador $\partial_{E'}$ se le conoce como derivada sobre \mathcal{CS} .

Decimos que $F \subseteq A$ es un filtro abierto si satisface:

1. $1 \in F$,
2. Si $x, y \in F$ entonces $x \wedge y \in F$,
3. Si $x \in F$ y $x \leq y$ entonces $y \in F$.
4. Si $X \subseteq A$ es un conjunto dirigido y $\forall X \in F$ entonces existe $x \in X$ tal que $x \in F$.

Denotamos por A^\wedge al conjunto de todos los filtros abiertos en A . Decimos que f_F es un núcleo ajustado si este tiene la forma

$$f = \bigvee \{v_a \mid a \in F\}$$

el cual es un núcleo en A . Tomando el supremo puntual obtenemos el prenúcleo

$$f_F = \dot{\bigvee} \{v_a \mid a \in F\}. \quad (2)$$

Considerando $F \in A^\wedge$ e iterando sobre los ordinales construimos la cadena creciente de prenúcleos

$$f_F^0 = \text{id}, \quad f_F^{\alpha+1} = f_F \circ f_F^\alpha, \quad f_F^\lambda = \bigvee \{f_F^\beta \mid \alpha < \lambda\}$$

para cada ordinal α y cada ordinal límite λ .

En el caso espacial, tenemos que el prenúcleo (2) tiene la forma

$$f_F = \dot{\bigvee} \{[U'] \mid U \in F\}.$$

Finalmente, definimos

$$v_F = f_F^\infty$$

como el núcleo ajustado asociado a F .

Por el Teorema de Hofmann-Mislove-Johnstone tenemos una correspondencia biyectiva entre

$$Q \longleftrightarrow F \longleftrightarrow v_F$$

donde $Q \in \mathcal{QS}$, $F \in A^\wedge$ y v_F el núcleo ajustado asociado a F .

Si $A = \mathcal{OS}$, tenemos la siguiente relación entre filtros abiertos y compactos saturados

$$U \in F \iff Q \subseteq U$$

y así el prenúcleo (2) tiene la forma $f_F = \dot{\vee}\{[U] \mid Q \subseteq U\}$. Calculando su complemento obtenemos el operador

$$\partial_F(X) = \bigcap\{\overline{(X \cap U)} \mid Q \subseteq U\}$$

donde $X \in \mathcal{CS}$ (ver Lema 6.1 de [Sim04]). Al anterior se le conoce como la Q -derivada.

Similarmente a como construimos la sucesión creciente de prenúcleos, tenemos la siguiente sucesión decreciente de Q -derivadas

$$\partial_F^0 = \text{tp}, \quad \partial_F^{\alpha+1} = \partial_F(\partial_F^\alpha(S)), \quad \partial_F^\nabla = \bigcap\{\partial_F^\alpha \mid \alpha < \lambda\}.$$

De esta manera tenemos que

$$\partial_F^\alpha(X) = \partial_F(\partial_F^{\alpha-1}(X)) = (f_F(\partial_F^{\alpha-1}(X))')' = (f_F(f_F^{\alpha-1}(X')))' = (f_F^\alpha(X'))' \quad (3)$$

donde $X \in \mathcal{CS}$ y para todo $\alpha \in \text{Ord}$. De manera particular,

$$\partial_F^\infty(X) = (v_F(X'))'.$$

1. Nociones de apilamiento

Los operadores definidos hasta ahora se relacionan por medio de las nociones de apilado y fuertemente apilado.

Definición 1.1. Consideremos $S \in \text{Top}$.

1. Un conjunto $Q \in \mathcal{QS}$ es apilado si $\overline{Q} = \partial_F^\infty(S)$ y es fuertemente apilado si $v_F = [Q']$.
2. El espacio S es apilado o fuertemente apilado si cada $Q \in \mathcal{QS}$ es apilado o fuertemente apilado, respectivamente.

La anterior es la noción sensible a puntos introducida por Sexton y Simmons en [SS06] (Definición 6.1) y cumplen que fuertemente apilado implica apilado. Nosotros damos las nociones libres de puntos, es decir, las definiciones en Frm.

Definición 1.2. Siguiendo la notación anterior, consideremos $A \in \text{Frm}$. Decimos que A es:

1. apilado si $(\mathcal{U}_*[Q'])\mathcal{U})(0) = v_F(0)$.
2. fuertemente apilado si $\mathcal{U}_*[Q']\mathcal{U} = v_F$.

Trivialmente tenemos que fuertemente apilado implica apilado. Nuestro objetivo es demostrar que las propiedades anteriores son conservativas, es decir, que un espacio S es apilado (fuertemente apilado) si y sólo si su marco de abiertos \mathcal{OS} es apilado (fuertemente apilado). Antes de hacer esto necesitamos el siguiente lema auxiliar.

Lema 1.3. Si $A = \mathcal{OS}$ y $E \subseteq S$ se cumple que

$$\mathcal{U}_*[E]\mathcal{U} = [E].$$

Demostración. Como el marco A es espacial se cumple que \mathcal{U} es un isomorfismo. De aquí que si $U \in \mathcal{O}\text{pt } A$ existe $V \in \text{pt } A$ tal que $U = \mathcal{U}(V)$ y como $U \in \text{pt } A$, se cumple que $U = V$. Luego

$$\begin{aligned} (\mathcal{U}_*[E]\mathcal{U})(U) &= \mathcal{U}_*[E](\mathcal{U}(U)) = \mathcal{U}_*([E](U)) \\ &= \mathcal{U}_*(E \cup U)^\circ = \bigcup\{W \in \mathcal{OS} \mid W \subseteq (E \cup U)^\circ\} \\ &= (E \cup U)^\circ = [E](U). \end{aligned}$$

Por lo tanto $\mathcal{U}_*[E]\mathcal{U} = [E]$. □

Proposición 1.4. Las nociones de fuertemente apilado y apilado son conservativas.

Demostración. Consideremos $S \in \text{Top}$, $A = \mathcal{OS}$, $F \in A^\wedge$ y $Q \in \mathcal{QS}$.

Primero, supongamos que S es fuertemente apilado. De aquí que $v_F = [Q']$ y por el Lema 1.3 tenemos que $\mathcal{U}_*[Q']\mathcal{U} = [Q'] = v_F$. Por lo tanto \mathcal{OS} es fuertemente apilado.

Supongamos ahora que S es apilado. Por lo anterior se cumple que

$$\overline{Q} = Q(\infty)(S) \Leftrightarrow \overline{Q}' = (Q(\infty)(S))'.$$

Además,

$$\begin{aligned}
(\mathcal{U}_*[Q']\mathcal{U})(\emptyset) &= \mathcal{U}_*([Q'](\{V \in \text{pt } \mathcal{OS} \mid \emptyset \not\subseteq V\})) \\
&= \mathcal{U}_*([Q'](\emptyset)) = \mathcal{U}_*(Q')^\circ \\
&= \bigcup\{W \in \mathcal{OS} \mid W \subseteq (Q')^\circ\} \\
&= (Q')^\circ = \overline{Q}'.
\end{aligned}$$

Por (3) tenemos que $v_F(\emptyset) = (Q(\infty)(\emptyset'))'$. Por lo tanto

$$v_F(\emptyset) = (\mathcal{U}_*[Q']\mathcal{U})(\emptyset),$$

es decir, \mathcal{OS} es apilado.

□

2. El marco $[0, 1]$

3. Actividades realizadas

Durante el presente periodo, se llevaron a cabo las siguientes actividades:

1. Definimos las nociones libres de puntos de apilado y fuertemente apilado.
2. Verificamos que las nociones anteriores son conservativas.
- 3.

Referencias

- [Sim04] Harold Simmons, *The vietoris modifications of a frame*, Unpublished manuscript, 79pp., available online at <http://www.cs.man.ac.uk/~hsimmons> (2004).
- [SS06] RA Sexton and H Simmons, *An ordinal indexed hierarchy of separation properties*, to appear (2006).