

# Solución a la Ecuación del Calor en 3 Dimensiones

Joaquín Parra

18 de enero de 2026

## Índice

<b>1. Transformada de Fourier</b>	<b>2</b>
<b>2. Propiedades Importantes</b>	<b>2</b>
2.1. Derivadas . . . . .	2
2.2. Integración por Partes en Varias Variables . . . . .	3
<b>3. Transformadas Útiles</b>	<b>4</b>
3.1. Gaussiana ( $\alpha > 0$ ) . . . . .	4
3.2. Delta de Dirac . . . . .	5
<b>4. Aplicación a la Ecuación del Calor</b>	<b>7</b>

## Introducción

Considérese la ecuación de difusión del calor en tres dimensiones dependiente del tiempo:

$$\nabla^2 \psi - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, \quad (1)$$

o de forma equivalente:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial \psi}{\partial t} = 0, \quad (2)$$

con  $\psi = \psi(\vec{x}, t) = \psi(x, y, z, t)$  sujeta a:

$$x, y, z \in (-\infty, \infty), t \in [0, \infty),$$

$$\lim_{x, y, z \rightarrow \pm\infty} \psi(\vec{x}, t) = 0, \quad (3)$$

$$\psi(\vec{x}, 0) = \phi(\vec{x}).$$

Es decir, un dominio sobre todo el espacio, y tiempos positivos. Se resolverá un caso particular donde se hará uso del método de las transformadas integrales, en particular, la transformada de Fourier para una función  $\psi(\vec{x}, t)$  que satisfaga  $\psi(\vec{x}, 0) = \phi(\vec{x}) = T_0 \delta^{(3)}(\vec{x})$  (delta de Dirac tridimensional).

## 1. Transformada de Fourier

Para funciones  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , se define la transformada de Fourier:

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-i\omega x}, \quad (4)$$

y la transformada de Fourier inversa:

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \hat{f}(\omega) e^{i\omega x}. \quad (5)$$

La generalización a mayores dimensiones, como en nuestro caso (3 dimensiones espaciales), viene dada por:

$$\hat{f}(\vec{\omega}) = \mathcal{F}[f](\vec{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^j x f(\vec{x}) e^{-i(\vec{\omega} \cdot \vec{x})}, \quad (6)$$

con su respectiva transformada inversa:

$$f(\vec{x}) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^j} \int_{-\infty}^{\infty} d^j \omega \hat{f}(\vec{\omega}) e^{i(\vec{\omega} \cdot \vec{x})}, \quad (7)$$

con  $j$  siendo el número de dimensiones en cuestión, y  $i$  la unidad imaginaria. Los elementos  $d^j x$  hacen referencia a los diferenciales por cada dimensión (en 3 dimensiones,  $d^3 x = dx dy dz$ ).

## 2. Propiedades Importantes

### 2.1. Derivadas

Si  $f$  es una función que se anula cuando  $x \rightarrow \pm\infty$ , la transformada de Fourier de la derivada  $n$ -ésima de la función, es decir,  $\mathcal{F}[f^{(n)}](\omega)$ , satisface:

$$\mathcal{F}[f^{(n)}](\omega) = (i\omega)^n \mathcal{F}[f](\omega). \quad (8)$$

La demostración resulta simple. Se inicia con el caso  $n = 1$  utilizando integración por partes, tal que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f^{(1)}](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx f'(x) e^{-i\omega x} \\ &= f(x) e^{-i\omega x} \Big|_{-\infty}^{\infty} - i\omega \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-i\omega x} \\ &= -i\omega \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x) e^{-i\omega x} \\ &= -i\omega \mathcal{F}[f](\omega) \end{aligned} \quad (9)$$

donde se ha eliminado el producto de  $f$  con la exponencial pues se parti6 con la hip6tesis de que  $f$  se anulaba cuando  $x$  tendía a infinito. Iterando varias veces se puede demostrar que esto es verdad para  $f^{(n)}$ .

## 2.2. Integraci6n por Partes en Varias Variables

Es necesario rescatar la integraci6n por partes para m6s adelante. Supongamos que tenemos un campo escalar  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciable. Continuemos bajo la hip6tesis de que para  $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , si  $x_j \rightarrow \pm\infty$ ,  $f(\vec{x}) = 0$  para  $x_j$  una componente del vector  $\vec{x}$ ,  $f$  y sus derivadas bien comportadas. Con esto en mente, consideremos la integral multiple sobre todas las componentes de  $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} d^n x \frac{\partial f}{\partial x_j} e^{-(\vec{\lambda} \cdot \vec{x})} \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty}}_n dx_1 \dots dx_n \frac{\partial f}{\partial x_j} e^{-(\vec{\lambda} \cdot \vec{x})} \end{aligned} \quad (10)$$

con  $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^n$  constante. Suponiendo que el producto entre la derivada parcial de  $f$  y la exponencial de la integral es una funci6n bien comportada, podemos aplicar el teorema de Fubini e intercambiar el orden de integraci6n, tal que integremos primero respecto a la componente  $x_j$ . Al ser una integral respecto a una variable, podemos hacer uso de la integraci6n por partes:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_j \frac{\partial f}{\partial x_j} e^{-(\vec{\lambda} \cdot \vec{x})} \\ &= f(\vec{x}) e^{-(\vec{\lambda} \cdot \vec{x})} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx_j f(\vec{x}) \frac{\partial}{\partial x_j} e^{-(\vec{\lambda} \cdot \vec{x})} \end{aligned} \quad (11)$$

Recordemos que  $e^{-(\vec{\lambda} \cdot \vec{x})} = \exp(-\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k)$ , por lo que es f6cil ver que  $\partial_{x_j} e^{-(\vec{\lambda} \cdot \vec{x})} = -\lambda_j e^{-(\vec{\lambda} \cdot \vec{x})}$ . Por lo tanto:

$$I = -\lambda_j \int_{-\infty}^{\infty} dx_j f(\vec{x}) e^{-(\vec{\lambda} \cdot \vec{x})} \quad (12)$$

donde se ha recuperado la relaci6n (9) (basta reemplazar  $\vec{\lambda} = i\vec{\omega}$ ) y se us6 el hecho que  $f$  se anula cuando una componente tiende a infinito. Esto ser6 importante m6s adelante.

### 3. Transformadas Útiles

#### 3.1. Gaussiana ( $\alpha > 0$ )

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[e^{-\alpha x^2}](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} e^{-i\omega x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(\alpha x^2 + i\omega x)}\end{aligned}\tag{13}$$

Notar que el exponente se puede expresar como:

$$\begin{aligned}\alpha x^2 + i\omega x &= \alpha \left( x^2 + \frac{i\omega x}{\alpha} \right) \\ &= \alpha \left( x^2 + \frac{i\omega x}{\alpha} + \left( \frac{i\omega}{2\alpha} \right)^2 - \left( \frac{i\omega}{2\alpha} \right)^2 \right) \\ &= \alpha \left( \left( x + \frac{i\omega}{2\alpha} \right)^2 + \frac{\omega^2}{4\alpha^2} \right) \\ &= \alpha \left( x + \frac{i\omega}{2\alpha} \right)^2 + \frac{\omega^2}{4\alpha}.\end{aligned}\tag{14}$$

Con esto, la integral (13) puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[e^{-\alpha x^2}](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(\alpha x^2 + i\omega x)} \\ &= e^{-\omega^2/(4\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha \left( x + \frac{i\omega}{2\alpha} \right)^2} \\ &= e^{-\omega^2/(4\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta e^{-\alpha \eta^2}.\end{aligned}\tag{15}$$

Donde se utilizó el cambio de variable  $\eta = x + i\omega/(2\alpha)$ . La última integral es la conocida Gaussiana, la cual se resuelve fácilmente con un cambio de coordenadas cartesianas a polares:

$$\begin{aligned}I &= \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2}, \\ I^2 &= I \cdot I = \left( \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{-\alpha y^2} \right).\end{aligned}\tag{16}$$

Por teorema de Fubini, podemos representar esto como una sola integral del producto de los integrandos:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy e^{-\alpha(x^2 + y^2)}.\tag{17}$$

Definimos el cambio de coordenadas:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta, & r \in [0, \infty) \\ y = r \sin \theta, & \theta \in [0, 2\pi) \end{cases}$$

con su respectivo Jacobiano:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix}$$

Calculando el determinante:

$$J = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r,$$

por lo tanto,

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| = r.$$

Así, (16) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty dr d\theta \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| e^{-\alpha r^2} \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty dr d\theta r e^{-\alpha r^2} \\ &= 2\pi \int_0^\infty dr r e^{-\alpha r^2} \\ &= -\frac{2\pi}{2\alpha} \left( e^{-\alpha r^2} \right) \Big|_0^\infty \\ &= -\frac{\pi}{\alpha} (0 - 1) \\ &= \frac{\pi}{\alpha}. \end{aligned} \tag{18}$$

Por lo tanto se concluye que:

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \tag{19}$$

y que:

$$\mathcal{F}[e^{-\alpha x^2}](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\omega^2/(4\alpha)}. \tag{20}$$

### 3.2. Delta de Dirac

La delta de Dirac, usada generalmente para representar pulsos instantáneos, se define como:

$$\delta(x - \xi) = \begin{cases} 0, & x \neq \xi \\ \infty, & x = \xi \end{cases} \tag{21}$$

cumpliendo las propiedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - \xi) = 1, \quad (22)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - \xi) f(x) = f(\xi). \quad (23)$$

Con estas propiedades, resulta fácil calcular la transformada de Fourier de esta función:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta(x - \xi)](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx \delta(x - \xi) e^{-i\omega x} \\ &= e^{-i\omega \xi}. \end{aligned} \quad (24)$$

pudiendo definir la delta de Dirac como:

$$\begin{aligned} \delta(x - \xi) &= \mathcal{F}^{-1}[e^{-i\omega \xi}](\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{-i\omega \xi} e^{i\omega x} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega(x - \xi)}. \end{aligned} \quad (25)$$

En particular:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega e^{i\omega x}. \quad (26)$$

Se puede generalizar la delta de Dirac a  $n$  dimensiones:

$$\delta^{(n)}(\vec{x} - \vec{\xi}) = \prod_{k=1}^n \delta(x_k - \xi_k), \quad (27)$$

donde su transformada de Fourier es:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta^{(n)}(\vec{x} - \vec{\xi})](\vec{\omega}) &= \int_{-\infty}^{\infty} d^n x \delta^{(n)}(\vec{x} - \vec{\xi}) e^{-i(\vec{\omega} \cdot \vec{x})} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d^n x \prod_{k=1}^n (\delta(x_k - \xi_k) e^{-i\omega_k x_k}), \end{aligned} \quad (28)$$

aplicando teorema de Fubini, obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta^{(n)}(\vec{x} - \vec{\xi})](\vec{\omega}) &= \prod_{k=1}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} dx_k \delta(x_k - \xi_k) e^{-i\omega_k x_k} \right) \\ &= \prod_{k=1}^n \mathcal{F}[\delta(x_k - \xi_k)](\omega_k) \\ &= \prod_{k=1}^n e^{-i\omega_k \xi_k} \\ &= e^{-i(\vec{\omega} \cdot \vec{\xi})}, \end{aligned} \quad (29)$$

en particular:

$$\mathcal{F}[\delta^{(n)}(\vec{x})](\vec{\omega}) = 1. \quad (30)$$

Finalmente, con la transformada inversa, podemos definir la delta de Dirac  $n$  dimensional como:

$$\begin{aligned} \delta^{(n)}(\vec{x} - \vec{\xi}) &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} d^n \omega \ e^{-i(\vec{\omega} \cdot \vec{\xi})} e^{i(\vec{\omega} \cdot \vec{x})} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} d^n \omega \ e^{i\vec{\omega} \cdot (\vec{x} - \vec{\xi})}. \end{aligned} \quad (31)$$

## 4. Aplicación a la Ecuación del Calor

Volvemos al problema original de encontrar la solución a la ecuación del calor (2) sujeta a:

$$x, y, z \in (-\infty, \infty), t \in [0, \infty),$$

$$\lim_{x, y, z \rightarrow \pm\infty} \psi(\vec{x}, t) = 0, \quad (32)$$

$$\psi(\vec{x}, 0) = \phi(\vec{x}) = T_0 \delta^{(3)}(\vec{x}).$$

Podemos partir del supuesto que  $\psi$  y sus derivadas son bien comportadas. Con esto, ocupando el resultado (12), aplicamos la transformada de Fourier respecto a las coordenadas espaciales a ambos lados de (2):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^3 \mathcal{F} \left[ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x_i^2} \right] (\vec{\omega}, t) &= \frac{1}{\alpha} \mathcal{F} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] (\vec{\omega}, t) \\ -(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) \hat{\psi}(\vec{\omega}, t) &= \frac{1}{\alpha} \mathcal{F} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial t} \right] (\vec{\omega}, t), \end{aligned} \quad (33)$$

además, transformando la condición inicial, tenemos:

$$\begin{aligned} \hat{\phi}(\vec{\omega}) &= \mathcal{F}[\psi(\vec{x}, 0)](\vec{\omega}, t) \\ &= T_0 \mathcal{F}[\delta^{(3)}(\vec{x})](\vec{\omega}) \\ &= T_0. \end{aligned} \quad (34)$$

Notemos en (33) que podemos conmutar los operadores al lado derecho, pues uno tiene dependencia espacial y el otro temporal, obteniendo así:

$$-\alpha(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) \hat{\psi}(\vec{\omega}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \hat{\psi}(\vec{\omega}, t). \quad (35)$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria sobre la variable  $t$ . Integrando, obtenemos (y con  $\hat{\psi}' = \partial_t \hat{\psi}$ ):

$$\begin{aligned}
-\int dt \alpha(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) &= \int dt \frac{\hat{\psi}'}{\hat{\psi}} \\
-\alpha(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)t + \mathcal{H}(\vec{\omega}) &= \ln |\hat{\psi}| \\
\hat{\psi}(\vec{\omega}, t) &= e^{\mathcal{H}(\vec{\omega})} e^{-\alpha(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)t} \\
\hat{\psi}(\vec{\omega}, t) &= \mathcal{B}(\vec{\omega}) e^{-\alpha(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})t}.
\end{aligned} \tag{36}$$

La función  $\mathcal{B}(\vec{\omega})$  queda determinada al evaluar nuestra función  $\hat{\psi}$  en  $t = 0$ , pues podemos usar la condición inicial:

$$\begin{aligned}
\hat{\psi}(\vec{\omega}, 0) &= \mathcal{B}(\vec{\omega}) e^{-\alpha(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})0} \\
&= \mathcal{B}(\vec{\omega}) \\
&= \hat{\phi}(\vec{\omega}) \\
&= T_0.
\end{aligned} \tag{37}$$

Con esto, nuestra función  $\hat{\psi}$  viene dada por:

$$\hat{\psi}(\vec{\omega}, t) = T_0 e^{-\alpha(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})t}. \tag{38}$$

Finalmente, para obtener nuestra solución  $\psi(\vec{x}, t)$ , aplicamos la transformada inversa de Fourier en tres dimensiones:

$$\mathcal{F}[\psi(\vec{x}, 0)](\vec{\omega}, t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{\psi}(\vec{\omega}, t)](\vec{x}) \tag{39}$$

$$= \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\omega T_0 e^{-\alpha(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})t} e^{i(\vec{\omega} \cdot \vec{x})} \tag{40}$$

$$= \frac{T_0}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\omega e^{-\alpha(\vec{\omega} \cdot \vec{\omega})t + i(\vec{\omega} \cdot \vec{x})} \tag{41}$$

$$= \frac{T_0}{8\pi^3} \prod_{k=1}^3 \left( \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_k e^{-\alpha\omega_k^2 t + i\omega_k x_k} \right). \tag{42}$$

Donde se ha utilizado el teorema de Fubini para separar las integrales como productos. Vemos que el exponente del término del productorio es parecido a (14), es más, vemos que se puede factorizar como:

$$-\alpha t \left( \omega_k - \frac{ix_k}{2\alpha t} \right)^2 - \frac{x_k^2}{4\alpha t}. \tag{43}$$

Con esto, la ecuación (42) se expresa como:

$$\frac{T_0}{8\pi^3} \prod_{k=1}^3 \left( \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_k e^{-\alpha t (\omega_k + \frac{ix_k}{2\alpha t})^2 - x_k^2/(4\alpha t)} \right), \tag{44}$$

$$= \frac{T_0}{8\pi^3} e^{-(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)/(4\alpha t)} \prod_{k=1}^3 \left( \int_{-\infty}^{\infty} d\omega_k e^{-\alpha t (\omega_k + \frac{ix_k}{2\alpha t})^2} \right). \tag{45}$$



Por último, aplicando el cambio de variables  $\eta_k = \omega_k + (ix_k)/(2\alpha t)$  y recordando que  $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$ , la ecuación (45) se convierte en:

$$\frac{T_0}{8\pi^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)/(4\alpha t)} \prod_{k=1}^3 \left( \int_{-\infty}^{\infty} d\eta_k e^{-\alpha t \eta_k^2} \right), \quad (46)$$

donde cada término del productorio es una Gaussiana, cuyo valor ya calculamos en (19). Tenemos:

$$\frac{T_0}{8\pi^3} e^{-(x^2+y^2+z^2)/(4\alpha t)} \left( \sqrt{\frac{\pi}{\alpha t}} \right)^3, \quad (47)$$

obteniendo así la solución :

$$\psi(\vec{x}, t) = \frac{T_0}{8(\pi\alpha t)^{3/2}} e^{-(x^2+y^2+z^2)/(4\alpha t)}, \quad (48)$$

o en coordenadas esféricas:

$$\psi(\vec{r}, t) = \frac{T_0}{8(\pi\alpha t)^{3/2}} e^{-r^2/(4\alpha t)}, \quad (49)$$

En la siguiente página se presenta la resolución numérica de la ecuación de calor en 3D (evaluada en el plano  $z=0$ ) para tres instantes de tiempo distintos. Las gráficas ilustran como evoluciona el sistema bajo una difusividad térmica  $\alpha = 1,0$  y una temperatura inicial  $T_0 = 1,0$ .

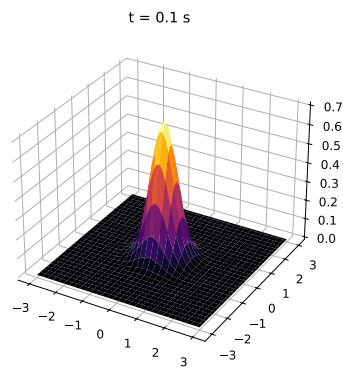


Figura 1: Distribución inicial ( $t = 0,1 \text{ s}$ ).

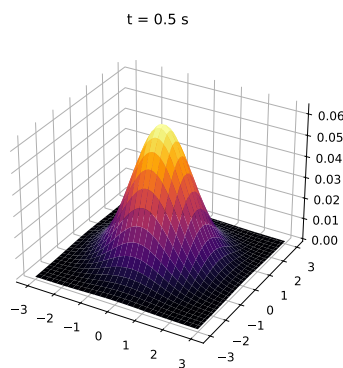


Figura 2: Distribución intermedia ( $t = 0,5 \text{ s}$ ).

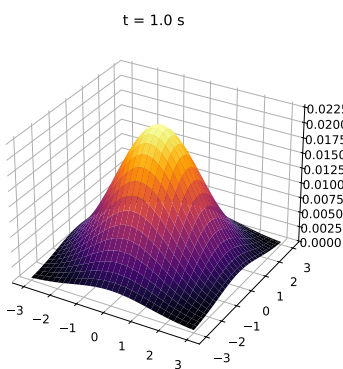


Figura 3: Distribución final ( $t = 1,0 \text{ s}$ ).