Solución a la Ecuación del Calor en 3 Dimensiones

18 de enero de 2026

Índice

Introducción

Considérese la ecuación de difusión del calor en tres dimensiones dependiente del tiempo:

$$\nabla^2\psi - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0, \tag{1}$$

o de forma equivalente:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{\alpha}\frac{\partial\psi}{\partial t} = 0, \tag{2}$$

con $\psi = \psi(\vec{x}, t) = \psi(x, y, z, t)$ sujeta a:

$$x, y, z \in (-\infty, \infty),\, t \in [0, \infty),$$

$$\lim_{x,y,z\to\pm\infty} \psi(\vec{x}, t) = 0, \tag{3}$$

$$\psi(\vec{x}, 0) = \phi(\vec{x}).$$

Es decir, un dominio sobre todo el espacio, y tiempos positivos. Se resolverá un caso particular donde se hará uso del método de las transformadas integrales, en particular, la transformada de Fourier para una función $\psi(\vec{x}, t)$ que satisfaga $\psi(\vec{x}, 0) = \phi(\vec{x}) = T_0\, \delta^{(3)}(\vec{x})$ (delta de Dirac tridimensional).

1. Transformada de Fourier

Para funciones $f \in L^1(\mathbb{R})$, se define la transformada de Fourier:

$$\hat{f}(\omega) = \mathcal{F}[f](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)e^{-i\omega x}, \tag{4}$$

y la transformada de Fourier inversa:

$$f(x) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\, \hat{f}(\omega)e^{i\omega x}. \tag{5}$$

La generalización a mayores dimensiones, como en nuestro caso (3 dimensiones espaciales), viene dada por:

$$\hat{f}(\vec{\omega}) = \mathcal{F}[f](\vec{\omega}) = \int_{-\infty}^{\infty} d^j x\, f(\vec{x})e^{-i(\vec{\omega}\cdot\vec{x})}, \tag{6}$$

con su respectiva transformada inversa:

$$f(\vec{x}) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{f}](\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi)^j}\int_{-\infty}^{\infty} d^j\omega\, \hat{f}(\vec{\omega})e^{i(\vec{\omega}\cdot\vec{x})}, \tag{7}$$

con j siendo el número de dimensiones en cuestión, y i la unidad imaginaria. Los elementos $d^j x$ hacen referencia a los diferenciales por cada dimensión (en 3 dimensiones, $d^3x = dx\, dy\, dz$).

2. Propiedades Importantes

2.1. Derivadas

Si f es una función que se anula cuando $x \to \pm\infty$, la transformada de Fourier de la derivada n-ésima de la función, es decir, $\mathcal{F}[f^{(n)}](\omega)$, satisface:

$$\mathcal{F}[f^{(n)}](\omega) = (i\omega)^n\mathcal{F}[f](\omega). \tag{8}$$

La demostración resulta simple. Se inicia con el caso $n = 1$ utilizando integración por partes, tal que:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f^{(1)}](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\, f'(x)e^{-i\omega x} \\ &= f(x)e^{-i\omega x}\Big|_{-\infty}^{\infty} - i\omega\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)e^{-i\omega x} \\ &= -i\omega\int_{-\infty}^{\infty} dx\, f(x)e^{-i\omega x} \\ &= -i\omega\mathcal{F}[f](\omega) \end{aligned} \tag{9}$$

donde se ha eliminado el producto de f con la exponencial pues se partió con la hipótesis de que f se anulaba cuando x tendía a infinito. Iterando varias veces se puede demostrar que esto es verdad para $f^{(n)}$.

2.2. Integración por Partes en Varias Variables

Es necesario rescatar la integración por partes para más adelante. Supongamos que tenemos un campo escalar $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diferenciable. Continuemos bajo la hipótesis de que para $f(\vec{x}) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, si $x_j \to \pm\infty,\ f(\vec{x}) = 0$ para x_j una componente del vector $\vec{x}$, f y sus derivadas bien comportadas. Con esto en mente, consideremos la integral multiple sobre todas las componentes de $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} d^n x \; \frac{\partial f}{\partial x_j} \; e^{-(\vec{\lambda}\cdot\vec{x})} \\ &= \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{n} dx_1 \cdots dx_n \; \frac{\partial f}{\partial x_j} \; e^{-(\vec{\lambda}\cdot\vec{x})} \end{aligned} \tag{10}$$

con $\vec{\lambda} \in \mathbb{R}^n$ constante. Suponiendo que el producto entre la derivada parcial de f y la exponencial de la integral es una función bien comportada, podemos aplicar el teorema de Fubini e intercambiar el orden de integración, tal que integremos primero respecto a la componente x_j. Al ser una integral respecto a una variable, podemos hacer uso de la integración por partes:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\infty}^{\infty} dx_j \; \frac{\partial f}{\partial x_j} \; e^{-(\vec{\lambda}\cdot\vec{x})} \\ &= f(\vec{x}) \; e^{-(\vec{\lambda}\cdot\vec{x})} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} dx_j \; f(\vec{x}) \; \frac{\partial}{\partial x_j} e^{-(\vec{\lambda}\cdot\vec{x})} \end{aligned} \tag{11}$$

Recordemos que $e^{-(\vec{\lambda}\cdot\vec{x})} = \exp\left(-\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right)$, por lo que es que es fácil ver que $\partial_{x_j} e^{-(\vec{\lambda}\cdot\vec{x})} = -\lambda_j \; e^{-(\vec{\lambda}\cdot\vec{x})}$. Por lo tanto:

$$I = -\lambda_j \int_{-\infty}^{\infty} dx_j \; f(\vec{x}) \; e^{-(\vec{\lambda}\cdot\vec{x})} \tag{12}$$

donde se ha recuperado la relación (9) (basta reemplazar $\vec{\lambda} = i\vec{\omega}$) y se usó el hecho que f se anula cuando una componente tiende a infinito. Esto será importante más adelante.

3. Transformadas Útiles

3.1. Gaussiana ($\alpha > 0$)

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[e^{-\alpha x^2}](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-\alpha x^2} e^{-i\omega x} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-(\alpha x^2 + i\omega x)}\end{aligned} \tag{13}$$

Notar que el exponente se puede expresar expresar como:

$$\begin{aligned}\alpha x^2 + i\omega x &= \alpha\left(x^2 + \frac{i\omega x}{\alpha}\right) \\ &= \alpha\left(x^2 + \frac{i\omega x}{\alpha} + \left(\frac{i\omega}{2\alpha}\right)^2 - \left(\frac{i\omega}{2\alpha}\right)^2\right) \\ &= \alpha\left(\left(x + \frac{i\omega}{2\alpha}\right)^2 + \frac{\omega^2}{4\alpha^2}\right) \\ &= \alpha\left(x + \frac{i\omega}{2\alpha}\right)^2 + \frac{\omega^2}{4\alpha}.\end{aligned} \tag{14}$$

Con esto, la integral (13) puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[e^{-\alpha x^2}](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-(\alpha x^2 + i\omega x)} \\ &= e^{-\omega^2/(4\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-\alpha(x + \frac{i\omega}{2\alpha})^2} \\ &= e^{-\omega^2/(4\alpha)} \int_{-\infty}^{\infty} d\eta\; e^{-\alpha\eta^2}.\end{aligned} \tag{15}$$

Donde se utilizó el cambio de variable $\eta = x + i\omega/(2\alpha)$. La última integral es la conocida Gaussiana, la cual se resuelve fácilmente con un cambio de coordenadas cartesianas a polares:

$$\begin{aligned}I &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-\alpha x^2}, \\ I^2 = I \cdot I &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} dx\; e^{-\alpha x^2}\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} dy\; e^{-\alpha y^2}\right).\end{aligned} \tag{16}$$

Por teorema de Fubini, podemos representar esto como una sola integral del producto de los integrandos:

$$I^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dxdy\; e^{-\alpha(x^2+y^2)}. \tag{17}$$

Definimos el cambio de coordenadas:

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, & r \in [0,\infty) \\ y = r\sin\theta, & \theta \in [0,2\pi) \end{cases}$$

con su respectivo Jacobiano:

$$J = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix}$$

Calculando el determinante:

$$J = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r,$$

por lo tanto,

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| = r.$$

Así, (16) se puede reescribir como:

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} drd\theta\ \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| e^{-\alpha r^2} \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} drd\theta\ re^{-\alpha r^2} \\ &= 2\pi\int_0^{\infty} dr\ re^{-\alpha r^2} \\ &= -\frac{2\pi}{2\alpha}\left(e^{-\alpha r^2}\right)\Big|_0^{\infty} \\ &= -\frac{\pi}{\alpha}(0-1) \\ &= \frac{\pi}{\alpha}. \end{aligned} \tag{18}$$

Por lo tanto se concluye que:

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}, \tag{19}$$

y que:

$$\mathcal{F}[e^{-\alpha x^2}](\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\ e^{-\omega^2/(4\alpha)}. \tag{20}$$

3.2. Delta de Dirac

La delta de Dirac, usada generalmente para representar pulsos instantáneos, se define como:

$$\delta(x-\xi) = \begin{cases} 0, & x \neq \xi \\ \infty, & x = \xi \end{cases} \tag{21}$$

cumpliendo las propiedades:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta(x-\xi) = 1, \tag{22}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta(x-\xi) f(x) = f(\xi). \tag{23}$$

Con estas propiedades, resulta fácil calcular la transformada de Fourier de esta función:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta(x-\xi)](\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} dx\ \delta(x-\xi)\ e^{-i\omega x} \\ &= e^{-i\omega\xi}. \end{aligned} \tag{24}$$

pudiendo definir la delta de Dirac como:

$$\begin{aligned} \delta(x-\xi) &= \mathcal{F}^{-1}[e^{-i\omega\xi}](\omega) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ e^{-i\omega\xi}\ e^{i\omega x} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ e^{i\omega(x-\xi)}. \end{aligned} \tag{25}$$

En particular:

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\omega\ e^{i\omega x}. \tag{26}$$

Se puede generalizar la delta de Dirac a n dimensiones:

$$\delta^{(n)}\left(\vec{x}-\vec{\xi}\right) = \prod_{k=1}^{n} \delta(x_k - \xi_k), \tag{27}$$

donde su transformada de Fourier es:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta^{(n)}(\vec{x}-\vec{\xi})](\vec{\omega}) &= \int_{-\infty}^{\infty} d^n x\ \ \delta^{(n)}\left(\vec{x}-\vec{\xi}\right)\ e^{-i(\vec{\omega}\cdot\vec{x})} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} d^n x\ \ \prod_{k=1}^{n}\left(\delta(x_k-\xi_k)\ e^{-i\omega_k x_k}\right), \end{aligned} \tag{28}$$

aplicando teorema de Fubini, obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\delta^{(n)}(\vec{x}-\vec{\xi})](\vec{\omega}) &= \prod_{k=1}^{n}\left(\int_{-\infty}^{\infty} dx_k\ \delta(x_k-\xi_k)\ e^{-i\omega_k x_k}\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \mathcal{F}[\delta(x_k-\xi_k)](\omega_k) \\ &= \prod_{k=1}^{n} e^{-i\omega_k \xi_k} \\ &= e^{-i(\vec{\omega}\cdot\vec{\xi})}, \end{aligned} \tag{29}$$

en particular:

$$\mathcal{F}[\delta^{(n)}(\vec{x})](\vec{\omega}) = 1. \tag{30}$$

Finalmente, con la transformada inversa, podemos definir la delta de Dirac n dimensional como:

$$\begin{aligned}
\delta^{(n)}\left(\vec{x}-\vec{\xi}\right) &= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty} d^n\omega \;\; e^{-i(\vec{\omega}\cdot\vec{\xi})}\; e^{i(\vec{\omega}\cdot\vec{x})} \\
&= \frac{1}{(2\pi)^n}\int_{-\infty}^{\infty} d^n\omega \;\; e^{i\vec{\omega}\cdot(\vec{x}-\vec{\xi})}.
\end{aligned} \tag{31}$$

4. Aplicación a la Ecuación del Calor

Volvemos al problema original de encontrar la solución a la ecuación del calor (2) sujeta a:

$$x, y, z \in (-\infty, \infty),\, t \in [0, \infty),$$

$$\lim_{x,y,z\to\pm\infty} \psi(\vec{x}, t) = 0, \tag{32}$$

$$\psi(\vec{x}, 0) = \phi(\vec{x}) = T_0\, \delta^{(3)}(\vec{x}).$$

Podemos partir del supuesto que ψ y sus derivadas son bien comportadas. Con esto, ocupando el resultado (12), aplicamos la transformada de Fourier respecto a las coordenadas espaciales a ambos lados de (2):

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{3} \mathcal{F}\left[\frac{\partial^2\psi}{\partial x_i^2}\right](\vec{\omega}, t) &= \frac{1}{\alpha}\mathcal{F}\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}\right](\vec{\omega}, t) \\
-(\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2)\hat{\psi}(\vec{\omega}, t) &= \frac{1}{\alpha}\mathcal{F}\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}\right](\vec{\omega}, t),
\end{aligned} \tag{33}$$

además, transformando la condición inicial, tenemos:

$$\begin{aligned}
\hat{\phi}(\vec{\omega}) &= \mathcal{F}[\psi(\vec{x}, 0)](\vec{\omega}, t) \\
&= T_0\, \mathcal{F}[\delta^{(3)}(\vec{x})](\vec{\omega}) \\
&= T_0.
\end{aligned} \tag{34}$$

Notemos en (33) que podemos conmutar los operadores al lado derecho, pues uno tiene dependencia espacial y el otro temporal, obteniendo así:

$$-\alpha(\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2)\; \hat{\psi}(\vec{\omega}, t) = \frac{\partial}{\partial t}\hat{\psi}(\vec{\omega}, t). \tag{35}$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria sobre la variable t. Integrando, obtenemos (y con $\hat{\psi}' = \partial_t \hat{\psi}$):

$$\begin{aligned} -\int dt\ \alpha(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2) &= \int dt\ \frac{\hat{\psi}'}{\hat{\psi}} \\ -\alpha(\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2)t + \mathcal{H}(\vec{\omega}) &= \ln|\hat{\psi}| \\ \hat{\psi}(\vec{\omega}, t) &= e^{\mathcal{H}(\vec{\omega})}\ e^{-\alpha(\omega_x^2+\omega_y^2+\omega_z^2)t} \\ \hat{\psi}(\vec{\omega}, t) &= \mathcal{B}(\vec{\omega})\ e^{-\alpha(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})t}. \end{aligned} \tag{36}$$

La función $\mathcal{B}(\vec{\omega})$ queda determinada al evaluar nuestra función $\hat{\psi}$ en $t = 0$, pues podemos usar la condición inicial:

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(\vec{\omega}, 0) &= \mathcal{B}(\vec{\omega})\ e^{-\alpha(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})0} \\ &= \mathcal{B}(\vec{\omega}) \\ &= \hat{\phi}(\vec{\omega}) \\ &= T_0. \end{aligned} \tag{37}$$

Con esto, nuestra función $\hat{\psi}$ viene dada por:

$$\hat{\psi}(\vec{\omega}, t) = T_0\ e^{-\alpha(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})t}. \tag{38}$$

Finalmente, para obtener nuestra solución $\psi(\vec{x}, t)$, aplicamos la transformada inversa de Fourier en tres dimensiones:

$$\mathcal{F}[\psi(\vec{x}, 0)](\vec{\omega}, t) = \mathcal{F}^{-1}[\hat{\psi}(\vec{\omega}, t)](\vec{x}) \tag{39}$$

$$= \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\omega\ T_0\ e^{-\alpha(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})t}\ e^{i(\vec{\omega}\cdot\vec{x})} \tag{40}$$

$$= \frac{T_0}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} d^3\omega\ e^{-\alpha(\vec{\omega}\cdot\vec{\omega})t + i(\vec{\omega}\cdot\vec{x})} \tag{41}$$

$$= \frac{T_0}{8\pi^3} \prod_{k=1}^{3} \left(\int_{-\infty}^{\infty} d\omega_k\ e^{-\alpha\omega_k^2 t + i\omega_k x_k} \right). \tag{42}$$

Donde se ha utilizado el teorema de Fubini para separar las integrales como productos. Vemos que el exponente del término del productorio es parecido a (14), es más, vemos que se puede factorizar como:

$$-\alpha t \left(\omega_k - \frac{i x_k}{2\alpha t} \right)^2 - \frac{x_k^2}{4\alpha t}. \tag{43}$$

Con esto, la ecuación (42) se expresa como:

$$\frac{T_0}{8\pi^3} \prod_{k=1}^{3} \left(\int_{-\infty}^{\infty} d\omega_k\ e^{-\alpha t(\omega_k + \frac{i x_k}{2\alpha t})^2\ -\ x_k^2/(4\alpha t)} \right), \tag{44}$$

$$= \frac{T_0}{8\pi^3}\ e^{-(x_1^2+x_2^2+x_3^2)/(4\alpha t)}\ \prod_{k=1}^{3} \left(\int_{-\infty}^{\infty} d\omega_k\ e^{-\alpha t(\omega_k + \frac{i x_k}{2\alpha t})^2} \right). \tag{45}$$

Por último, aplicando el cambio de variables $\eta_k = \omega_k + (ix_k)/(2\alpha t)$ y recordando que $(x_1, x_2, x_3) = (x, y, z)$, la ecuación (45) se convierte en:

$$\frac{T_0}{8\pi^3}\ e^{-(x^2+y^2+z^2)/(4\alpha t)}\ \prod_{k=1}^{3}\left(\int_{-\infty}^{\infty} d\eta_k\ e^{-\alpha t\eta_k^2}\right), \tag{46}$$

donde cada término del productorio es una Gaussiana, cuyo valor ya calculamos en (19). Tenemos:

$$\frac{T_0}{8\pi^3}\ e^{-(x^2+y^2+z^2)/(4\alpha t)}\ \left(\sqrt{\frac{\pi}{\alpha t}}\right)^3, \tag{47}$$

obteniendo así la solución :

$$\psi(\vec{x}, t) = \frac{T_0}{8(\pi\alpha t)^{3/2}}\ e^{-(x^2+y^2+z^2)/(4\alpha t)}, \tag{48}$$

o en coordenadas esféricas:

$$\psi(\vec{r}, t) + = \frac{T_0}{8(\pi\alpha t)^{3/2}}\ e^{-r^2/(4\alpha t)}, \tag{49}$$

En la siguiente página se presenta la resolución numérica de la ecuación de calor en 3D (evaluada en el plano z=0) para tres instantes de tiempo distintos. Las gráficas ilustran como evoluciona el sistema bajo una difusividad térmica $\alpha = 1{,}0$ y una temperatura inicial $T_0 = 1{,}0$.

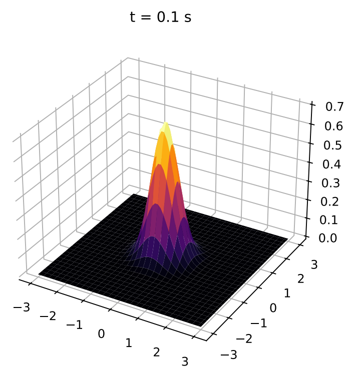

Figura 1: Distribución inicial ($t = 0{,}1$ s).

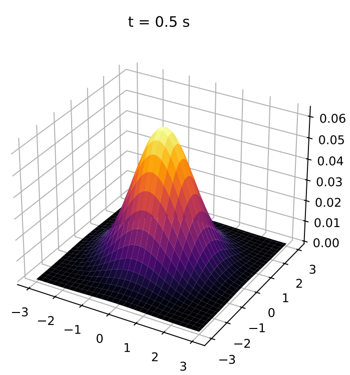

Figura 2: Distribución intermedia ($t = 0{,}5$ s).

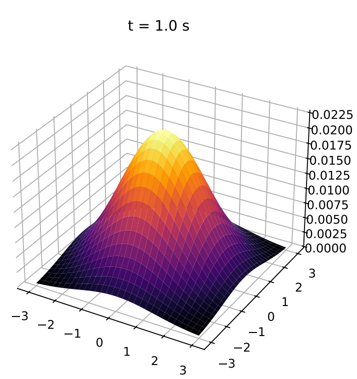

Figura 3: Distribución final ($t = 1{,}0$ s).