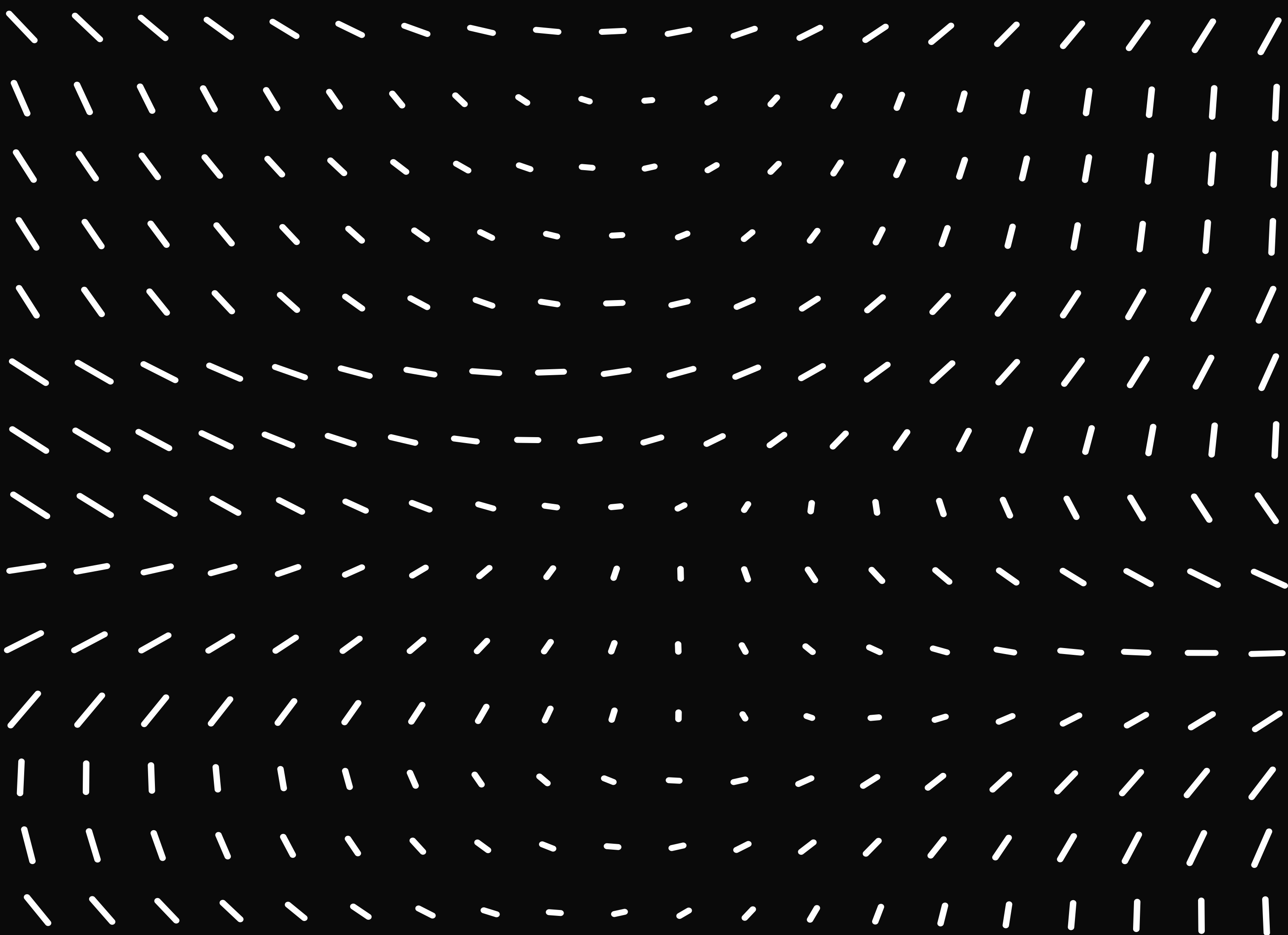


Linear　Quadratic　Regulator　　　　状态空间为基础

Linear → 线性模型　　Quadratic → 二次代价函数　　Regulator → 调节器

1. 全状态反馈控制

假设有一线性系统，以状态向量表示为：

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu & ① \\ y = Cx + Du & ② \end{cases}$$

※ 开环：$\dot{x} = Ax$

where　$x(t) \in \mathbb{R}^n$，　$u(t) \in \mathbb{R}^m$.

设计状态反馈控制器：

$$u = -Kx = -[k_1, k_2, k_3 \dots] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

代入 ① 可得：

$$\dot{x} = (A - BK)x = A_{cL} x$$　闭环控制

选择 K $(k_1, k_2 \dots)$ 以改变 A_{cL} 的 eigen value 从而控制系统表现.

※ Q: 如何确定 λ_i 以达到最优控制？

引入 Cost Function（代价函数）

选择时间段.

$$J = \int_0^{\infty} (\underbrace{X^T Q X}_{>0} + U^T R U)\, dt.$$

$R\uparrow$，U 对 J 的影响$\uparrow$

其中 $Q = \begin{pmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c & \\ & & & \ddots \end{pmatrix}$　$\Rightarrow$　$x^T Q x = a x_1^2 + b x_2^2 + c x_3^2 + \dots$　Penalty，x和0时的惩罚

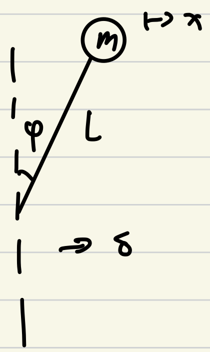
$Q \succeq 0$ 为状态权重矩阵，半正定，用于惩罚系统状态的偏差.
$R \succ 0$ 为正定矩阵. 用于惩罚控制输入的大小.
} 均为 Λ

最优化：

$$\min J = \int_0^{\infty} (X^T J X + U^T R U)\, dt$$

为简化梯度计算，常用 $\frac{1}{2}J$ 代替 J.

eg:



Dynamic:　$\ddot{\varphi} = \frac{g}{L}\varphi - \frac{1}{L}\ddot{\delta}$

$$\begin{cases} x_1 = \varphi \\ x_2 = \dot{\varphi} \\ u = \frac{1}{L}\ddot{\delta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = \frac{g}{L} x_1 - u \end{cases}$$

$$\Rightarrow \dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{g}{L} & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} u$$

令 $L = 1$，　$g = 10$

$$\dot{X} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 10 & 0 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} u,$$　where　$u = -KX = -k_1 x_1 - k_2 x_2$

若想 $\min J$，　$\lim t \to \infty \Rightarrow x(t) \to 0$，$u(t) \to 0$

2. Pontryagin Maximum Principle (PMP) 庞特里亚金 极小(大)值.

确定性最优控制问题的一阶必要条件. 在函数域中为 KKT 条件的特例

动态系统的最优控制可以表述为:

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t), t), \qquad x(t_0) = x_0 \qquad ①$$

目标函数为:

$$J = \underbrace{\Phi(x(t_f), t_f)}_{\text{终端成本}} + \int_{t_0}^{t_f} \underbrace{L(x(t), u(t), t)}_{\text{运行成本.}} dt. \qquad ②$$

为 min 时, PMP 指出:

① 伴随方程

$\exists\ \lambda(t) \in \mathbb{R}^n$, s.t. $\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}$,

其中 $H(x, u, \lambda, t) = L(x, u, t) + \lambda^T f(x, u, t)$ 为 Hamilton 函数.

② 最优性条件:

$\exists$ 最优控制 $u^*(t)$, s.t. $\forall t$, 都有

$$H(x^*, u^*, \lambda, t) \geq H(x^*, u, \lambda, t), \quad \forall u \in \mathbb{U}.$$

③ 状态方程:

最优状态轨迹 $x^*(t)$ 满足:

$$\dot{x}(t) = f(x^*, u^*, t)$$

④ 边界条件:

$$x(t_0) = x_0, \qquad \lambda(t_f) = \frac{\partial \Phi}{\partial x(t_f)}$$

推导过程见下页.

变分法:

为找到最优控制 $u^*(t)$，分析 $u(t)$ 发生微小变化 $\delta u(t)$ 时目标函数 J 的变化.

假设在给定控制 $u(t)$ 下，状态轨迹 $x(t)$ 与目标函数 J 的一阶变分为:

① $\Rightarrow$ $$\delta J = \delta \Phi(x(t_f), t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left(\frac{\partial L}{\partial x}\delta x + \frac{\partial L}{\partial u}\delta u \right) dt.$$

状态方程的一阶变分为:

② $\Rightarrow$ $$\delta \dot{x} = \frac{\partial f}{\partial x}\delta x + \frac{\partial f}{\partial u}\delta u$$

伴随变量:

为将状态约束纳入优化中，引入伴随变量 $\lambda(t)$ (Lagrange 乘数)

定义 Hamilton 函数:

$$H(x,u,\lambda,t) = L(x,u,t) + \lambda^T f(x,u,t) = L(x,u,t) + \lambda^T \dot{x}$$

$$\Rightarrow \quad \delta J = \delta \Phi + \int_{t_0}^{t_f} \left[\frac{\partial H}{\partial x}\delta x + \frac{\partial H}{\partial u}\delta u - \underline{\lambda^T \delta \dot{x}} \right] dt.$$

$$\int_{t_0}^{t_f} -\lambda^T \delta \dot{x}\, dt = -\lambda^T \delta x \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \dot{\lambda}^T \delta x\, dt.$$ Integration by parts.

$$\Rightarrow \quad \delta J = \delta \Phi - \lambda^T \delta x \Big|_{t_0}^{t_f} + \int_{t_0}^{t_f} \left[\dot{\lambda}^T + \frac{\partial H}{\partial x} \right] \delta x\, dt + \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial H}{\partial u}\delta u\, dt.$$

①伴随方程

为保证 $\delta J = 0$，对 δx 项，需求:

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x}.$$

②最优性条件

对 δu 项，有 $$\frac{\partial H}{\partial u} = 0$$

③ 状态方程.

由 Hamilton 函数可知:

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = f(x,u,t)$$

④ 边界条件:

$x(t_0) = x_0$ 已知，由 $\delta J = 0$，可得 $\lambda(t_f) = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x(t_f)}$

3. Ricatti 方程.

在 LQR 中:

$$J = \int_0^\infty (X^T Q X + U^T R U)\,dt$$

构建 Hamilton 函数:

$$H = X^T Q X + U^T R U + \lambda(t)^T (AX + BU),$$ $\lambda(t)$ 表示状态对目标函数敏感性.

由 Pontryagin 原理:

① 伴随方程:

$$\dot{\lambda}(t) = -\frac{\partial H}{\partial x} = -2QX - A^T\lambda$$

② 最优性条件:

$$\frac{\partial H}{\partial u} = 2RU + B^T\lambda = 0. \Rightarrow u^*(t) = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T \lambda(t)$$

③ 状态方程

$$\dot{x}(t) = \frac{\partial H}{\partial \lambda} = AX + Bu$$

由于系统为线性, 假设 $\lambda(t)$ 与 $x(t)$ 间存在:

$\lambda(t) = P x(t)$, 其中 P 为对称常量阵. 代入至 $u^*(t)$,

$$\Rightarrow u^*(t) = -\frac{1}{2} R^{-1} B^T P\, x(t)$$

为简化表示, 定义控制增益阵 $K = \frac{1}{2} R^{-1} B^T P$ $\Rightarrow u = -Kx$.

由伴随方程,

$$\dot{\lambda}(t) = P\dot{x}(t) = -2Q\,x(t) - A^T P\, x(t)$$

由状态方程,

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) = (A - BK)\,x(t)$$

$$\Rightarrow P(A - BK)\,x(t) = -2Qx(t) - A^T P\, x(t)$$

$$\xRightarrow{\text{代入}K} PA + A^T P - PBR^{-1}B^T P + Q = 0.$$

$$\Leftrightarrow A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0$$ Ricatti 方程, 解 P.