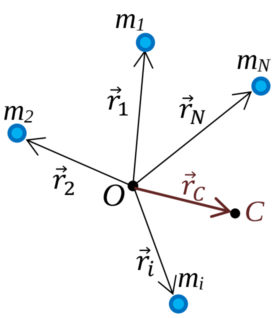
§12. Центр масс (центр инерции)

При исследовании поведения систем частиц часто удобно использовать для описания движения точку, которая характеризует положение и движение рассматриваемой системы как единого целого. Такой точкой служит центр масс (центр инерции) – точка C.

Рассмотрим систему N материальных точек:



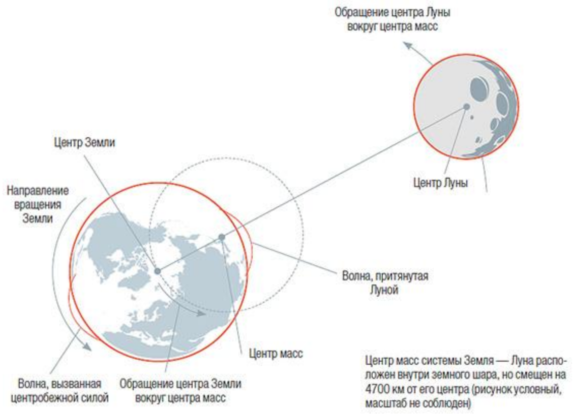
Пусть O – начало отсчёта, выбранное в нашем пространстве; $m_1, m_2, \dots, m_N$ – точки системы.

Центром масс или *центром инерции* называется такая точка C, радиус-вектор которой $\vec{r}_c$ выражается через радиусы-векторы материальных точек системы $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_N$ по формуле

$$\boxed{\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{m},} \qquad (1)$$

где $m = m_1 + m_2 + \dots + m_N = \sum_{i=1}^{N} m_i$ – общая масса всей системы.

Для однородных тел, обладающих симметрией, центр масс часто совпадает с геометрическим центром тела. Центр тяжести системы – точка приложения силы тяжести (равнодействующей всех гравитационных сил), у систем материальных точек и тел совпадает с центром масс только в однородном гравитационном поле.



Продифференцировав выражение (1) по времени, можно найти *скорость центра масс* $\vec{v}_c$ (скорость движения всей системы как целого)

$$\vec{v}_c = \frac{d\vec{r}_c}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}\right) = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N} m_i} \sum_{i=1}^{N} m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i}{m},$$

где $\vec{v}_i$ – скорость движения каждой материальной точки системы.

$$\boxed{\vec{v}_c = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i} \qquad (2)$$

Если скорость центра масс равна нулю, то система как целое покоится, т.е. точки системы движутся только относительно друг друга. Во внешнем пространстве система как целое не перемещается.

Из формулы (2) следует, что *импульс системы равен произведению массы системы на скорость её центра масс*

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i = \vec{p}_{\text{сист}}$$

$$\vec{v}_c = \frac{\vec{p}_{\text{сист}}}{m} \quad \Rightarrow \quad \vec{p}_{\text{сист}} = m\vec{v}_c$$

Понятие центра масс позволяет придать уравнению из §11 иную форму

$$\frac{d\vec{p}_{\text{сист}}}{dt} = \vec{F}^{\text{внеш}}; \qquad \frac{d}{dt}(m\vec{v}_c) = m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}^{\text{внеш}}.$$

$$\boxed{m\frac{d\vec{v}_c}{dt} = \vec{F}^{\text{внеш}}} -$$

уравнение движения центра масс системы. Из него следует, что *центр масс системы движется как материальная точка, масса которой равна сумме масс всей системы, а действующая сила – векторной сумме всех внешних сил, действующих на систему*.

Понятие центра масс широко используется в физике, в частности, в механике. Движение твёрдого тела можно рассматривать как суперпозицию движения центра масс тела и вращательного движения тела вокруг его центра масс. Центр масс при этом движется так же, как двигалось бы тело с такой же массой, но бесконечно малыми размерами (материальная точка). Последнее означает, в частности, что для описания этого движения применимы все законы Ньютона. Во многих случаях можно вообще не учитывать размеры и форму тела и рассматривать только движение его центра масс. (Пример, поступательное движение ТТ §3)

Если система замкнута, то её центр масс движется равномерно и прямолинейно (если центр масс покоился, то продолжает покоиться), а импульс сохраняется:

$$\vec{F}^{\text{внеш}} = 0 \ \Rightarrow \ \vec{v}_c = const, \ \ \vec{p}_{\text{сист}} = const.$$

В замкнутой системе могут действовать внутренние силы, в результате их действия части системы могут иметь ускорения. Но это не оказывает влияния на движение центра масс. Под действием внутренних сил скорость центра масс не изменяется.

Часто бывает удобно рассматривать движение замкнутой системы МТ в системе отсчёта, связанной с центром масс (С). Такая система отсчёта называется *системой центра масс* (*Ц-система*), или системой центра инерции. В ней центр масс системы покоится $\vec{v}_c = 0$. А следовательно, полный импульс замкнутой системы остаётся равным нулю $\vec{p}_{\text{сист}} = 0$. Это позволяет упростить уравнения движения системы МТ. Другими словами, любая система МТ как целое покоится в своей Ц-системе. Для замкнутой системы МТ Ц-система является инерциальной.

Рассмотрим *теорему Кёнига*, позволяющую разложить кинетическую энергию системы на: энергию движения точек друг относительно друга и энергию движения системы относительно других (внешних) тел, т.е. на энергию движения относительно центра масс и энергию движения центра масс.

Кинетическая энергия системы МТ, движущаяся в пространстве:

$$E_{\text{кин}}^{\text{сист}} = \sum_{i=1}^{N} E_{\text{кин}_i} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec{v}_i^2}{2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i\big((\vec{v}_i - \vec{v}_c) + \vec{v}_c\big)^2}{2} = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i(\vec{v}_i - \vec{v}_c)^2}{2}}_{\boxed{I}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i\,(\vec{v}_i - \vec{v}_c)\vec{v}_c}_{\boxed{II}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec{v}_c^2}{2}}_{\boxed{III}}.$$

Подробнее распишем каждое слагаемое.

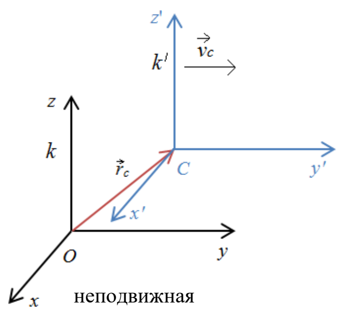
$\boxed{\text{III}}$ Кинетическая энергия движения системы как единого целого относительно других тел (во внешнем пространстве):

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i \vec{v}_c^2}{2} = \frac{\vec{v}_c^2}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i = \frac{m \vec{v}_c^2}{2} = E_{\text{кин}\,c}.$$

$\boxed{\text{II}}$ $$\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{v}_i - \vec{v}_c)\vec{v}_c = \sum_{i=1}^{N} (m_i \vec{v}_i)\vec{v}_c - \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_c^2 = \vec{p}_{\text{сист}} \cdot \vec{v}_c - \vec{v}_c^2 \sum_{i=1}^{N} m_i = m\vec{v}_c \cdot \vec{v}_c - \vec{v}_c^2 m = 0.$$

$\boxed{\text{I}}$ Кинетическая энергия системы относительно центра масс (движение частиц относительно друг друга):

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{m_i(\vec{v}_i - \vec{v}_c)^2}{2} = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_i {\vec{v}_i}'^2}{2} = E'_{\text{кин.}}.$$



<u>Примечание:</u> см. §4 (преобразование Галилея): $\vec{v}_i = \vec{v}_c + \vec{v}_i'$,

где $\vec{v}_i'$ – скорость точки в подвижной системе отсчета, связанной с точкой С.

$$\boxed{E_{\text{кин}} = E_{\text{кин}_C} + E'_{\text{кин}},}$$

где $E_{\text{кин}_C}$– кинетическая энергия движения системы как целого (во внешнем пространстве), $E'_{\text{кин}}$ – внутренняя/собственная энергия системы. {См. §10: $E_{\text{пот}} = E_{\text{пот}}^{\text{внеш}} + E_{\text{пот}}^{\text{взаим}}$ }. Например, $E_{\text{кин}_C}$– кинетическая энергия, связанная с перемещение автобуса, а $E'_{\text{кин}}$ – кинетическая энергия, связанная с перемещением людей в этом автобусе.