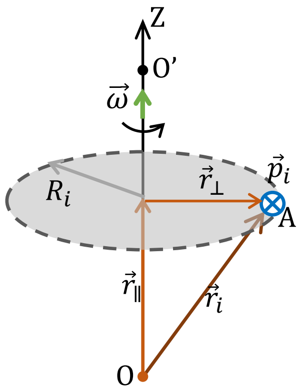
§14. Вращение АТТ вокруг неподвижной оси. Момент инерции. Теорема Гюйгенса-Штейнера

Как было установлено в предыдущем параграфе, вращение систем характеризуется моментом импульса $\vec{L}$. Вычислим момент импульса абсолютно твердого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.



В §3, где уже говорилось об этом движении, для описания такого вращения предлагалось описывать движение одной из точек АТТ.

Рассмотрим точку A АТТ. В процессе вращения АТТ вокруг неподвижной оси наша точка движется по окружности радиуса R_i, центр которой находится на этой оси.

Пусть ось Z СК совмещена с осью вращения АТТ OO′, O – начало отсчета. Вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ согласно направлению вращения АТТ направлен вдоль оси вертикально вверх

$$\vec{\omega} = \omega_z \vec{k} = \omega \vec{k}.$$

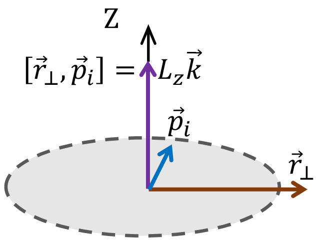
$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i; \vec{p}_i] -$$

момент импульса точки A относительно точки отсчёта O.

Представим радиус-вектор точки как сумму двух составляющих $\vec{r}_i = \vec{r}_\parallel + \vec{r}_\perp$, где $\vec{r}_\parallel -$ составляющая радиус-вектора параллельная оси вращения АТТ, $\vec{r}_\perp -$ составляющая перпендикулярная ей.

$$\vec{L}_i = [\vec{r}_i, \vec{p}_i] = [\vec{r}_\perp, \vec{p}_i] + [\vec{r}_\parallel, \vec{p}_i] = \vec{L}_{xy_i} + L_{z_i}\vec{k}.$$

Каждое слагаемое по отдельности:



- $[\vec{r}_\perp, \vec{p}_i]$: по построению этот вектор параллелен оси вращения АТТ, т.е. это проекция момента импульса на ось вращения (ось OZ) L_z.

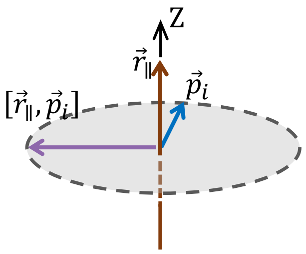
$$|L_{z_i}| = |[\vec{r}_\perp, \vec{p}_i]|$$

$$|L_{z_i}| = |\vec{r}_\perp| \cdot |\vec{p}_i| \cdot \sin\left(\widehat{\vec{r}_\perp, \vec{p}_i}\right) =$$

90°

$$= R_i \cdot p_i = R_i \cdot m_i v_i = R_i \cdot m_i \omega_z R_i = m_i {R_i}^2 \omega$$

$\omega -$ угловая скорость вращения АТТ. Все точки АТТ вращаются с одной угловой скоростью.



- $[\vec{r}_\parallel, \vec{p}_i]$: по построению этот вектор перпендикулярен оси вращения АТТ, т.е. это проекция момента импульса на плоскость OXY

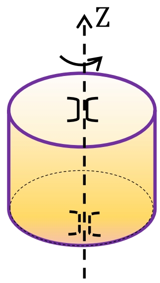
$$\vec{L}_{xy_i} = [\vec{r}_\parallel, \vec{p}_i]$$

Для всего АТТ, поскольку момент импульса – аддитивная величина:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i$$

Соответственно для его проекций справедливы аналогичные выражения:

$$\vec{L}_{xy} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_{xy_i}; \qquad L_z = \sum_{i=1}^{N} L_{z_i}$$



$\vec{L}_{xy}$ – составляющая момента импульса перпендикулярная оси вращения. Мы говорим о вращении АТТ вокруг неподвижной оси только тогда, когда тело закреплено на ней, в противном случае, это произвольное вращение. Поэтому, $\vec{L}_{xy}$ – вместе с телом просто поворачивается вокруг оси и на само вращение АТТ не влияет.

Для описания вращения АТТ вокруг неподвижной оси используют L_z – *момент импульса тела относительно неподвижной оси*:

$$L_z = \sum_{i=1}^{N} L_{z_i} = \sum_{i=1}^{N} m_i {R_i}^2 \omega_z = \omega \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i {R_i}^2; \qquad \boxed{L_z = I\omega_z = I\omega.}$$

I – момент инерции твердого тела относительно оси вращения:

$$\boxed{I = \sum_{i=1}^{N} m_i {R_i}^2.}$$

Единица измерения момента инерции – $[I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2$.

В §13 было установлено, что момент импульса системы МТ может изменяться только под действием момента всех внешних сил:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{сист}}}{dt} = \vec{M}^{\text{внеш}}.$$

Это векторное уравнение эквивалентно трём скалярным уравнениям, получающимся путём проецирования на неподвижные оси ДСК. Для АТТ, вращающегося вокруг неподвижной оси, совмещённой с осью OZ, скалярное уравнение примет следующий вид:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z -$$

уравнение моментов относительно неподвижной оси.

$$\frac{d(I\omega_z)}{dt} = M_z \qquad \text{или} \qquad I\frac{d\omega_z}{dt} = M_z$$

т.к. момент инерции АТТ вокруг неподвижной оси остаётся постоянным.

$$\boxed{I\beta_z = M_z} -$$

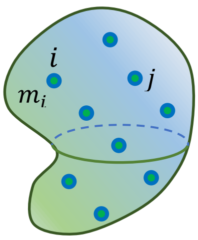
уравнение динамики АТТ, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Моменты инерции простых однородных твердых тел

$$I = \sum_{i=1}^{N} m_i {R_i}^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i {r_i}^2$$

где r_i – теперь обозначим как расстояние до оси вращения.

<u>Описание АТТ</u>



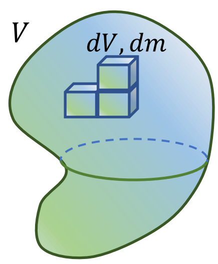
1 способ: *дискретное описание.*

АТТ – система МТ, разделённых между собой пространством.

$$m = \sum_{i=1}^{N} m_i\,; \qquad \vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i\,\vec{v}_i\,; \qquad I = \sum_{i=1}^{N} I_i = \sum_{i=1}^{N} m_i\,{r_i}^2$$

{компактные записи, удобные для теоретического изложения}

2 способ: *непрерывное описание.*



АТТ – система физически малых объёмов

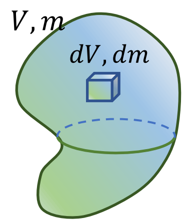
dV – физически малый объём АТТ:

$dV \ll V$, при этом dV – макроскопический объём (т.к. в него попадает много частиц вещества)

$$V = \int\limits_{\text{по всему телу}} dV\,; \qquad m = \int\limits_{\text{по всему телу}} dm\,; \qquad \vec{p} = \int\limits_{\text{по всему телу}} d\vec{p} = \int \vec{v}dm\,; \qquad I = \int\limits_{\text{по всему телу}} dI = \int r^2 dm$$

{применяется при решении практических задач}

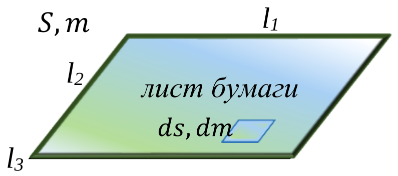
При переходе от дискретного описания вещества к непрерывному, удобно использовать понятие плотности вещества как коэффициента пропорциональности между бесконечно малым объёмом и его массой: $dm \sim dV$



- ***объёмное тело***

$\rho = \frac{dm}{dV}$ – объёмная плотность ($\rho = \frac{m}{V}$ – для однородных тел)

$[\rho] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^3}$

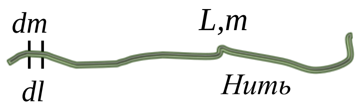


- ***плоское тело*** $(l_1, l_2 \gg l_3)$

$\sigma = \frac{dm}{dS}$ – поверхностная плотность ($\sigma = \frac{m}{S}$ – для однородного тела)

$[\sigma] = \frac{\text{кг}}{\text{м}^2}$

- ***линейное тело*** $(l_1 \gg l_2, l_3)$



$\lambda = \frac{dm}{dl}$ – линейная плотность вещества ($\lambda = \frac{m}{l}$ – для однородного тела)

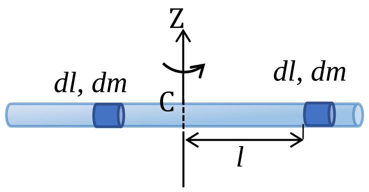
$[\lambda] = \frac{\text{кг}}{\text{м}}$

Примеры расчёта моментов инерции.

Рассмотрим однородные тела симметричной формы (центр масс такого тела совпадает с его геометрическим центром).

- Тонкий однородный стержень массы m и длины L:

1) ось вращения перпендикулярна стержню и проходит через его центр масс.



$$I = \underset{\text{по всему стержню}}{\int dI_{dl}} = \int r^2 dm = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} l^2 dm = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} l^2 \cdot \lambda dl = \lambda \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} l^2 dl =$$

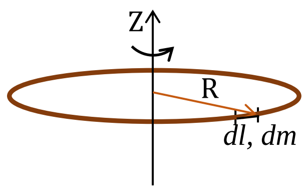
$$= \frac{m}{L} \frac{l^3}{3} \Bigg|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{m}{3L}\left(\frac{L^3}{8} - \left(-\frac{L^3}{8}\right)\right) = \frac{mL^2}{12}$$

2) ось вращения совпадает с осью симметрии тонкого стержня ($d_{ст} \to 0$).

$$I = \int\limits_{\text{по всему стержню}} dI_{dl} = \int r^2 dm = 0$$

т.к. $r \to 0$.

- Тонкое кольцо массы m и радиуса R,

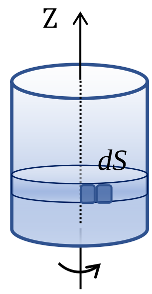


ось вращения перпендикулярна плоскости кольца и проходит через его центр масс.

$$I = \int\limits_{\text{по всему кольцу}} dI_{dl} = \int r^2 dm = \int R^2 dm = R^2 \int\limits_{\text{по всему кольцу}} dm = mR^2$$

- Тонкостенная труба (полый цилиндр) массы m, радиуса R и длины L,

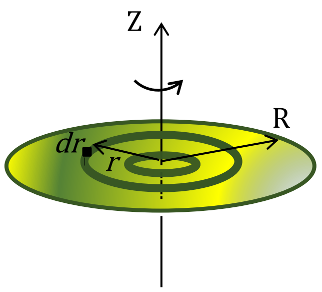
ось вращения совпадает с осью симметрии трубы.



$$I = \int\limits_{\text{по всей поверхности трубы}} dI_{dS} = \{\text{сгруппировали отдельные элементы } dS \text{ в кольца}\} = \int\limits_{\text{по всем кольцам}} dI_к =$$

$$= \int\limits_{\text{по всем кольцам}} R^2 dm_к = R^2 \int\limits_{\text{по всем кольцам}} dm_к = mR^2$$

- Тонкий диск массы m и радиуса R,



ось вращения перпендикулярна плоскости кольца и проходит через его центр масс.

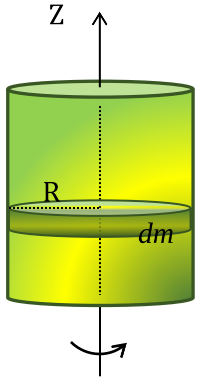
Как и в предыдущем примере представляем диск набором тонких колец радиуса r толщиной dr.

$$I = \int\limits_{\text{по всей поверхности диска}} dI_{dS} = \int\limits_{\text{по всем кольцам}} dI_к = \int\limits_{\text{по всем кольцам}} r^2 dm_к = \int r^2 \sigma dS_к = \sigma \int_0^R r^2 2\pi r dr =$$

$$= 2\pi\sigma \int_0^R r^3 dr = 2\pi \frac{m}{S_д} \frac{R^4}{4} = 2\pi \frac{m}{\pi R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{mR^2}{2}$$

Площадь тонкого кольца $dS_к = \pi(r + dr)^2 - \pi r^2 = r^2 + 2\pi r dr + (dr)^2 - r^2 = 2\pi r dr$, так как слагаемым $(dr)^2$ можно пренебречь. Другой подход позволяет сразу получить искомое выражение. Разрежем кольцо и растянем его в прямоугольник. Мы можем это сделать из-за его малой толщины. Длина получившегося прямоугольника $2\pi r$, ширина dr, площадь равна их произведению.

- Сплошной цилиндр массы m и радиуса R, ось вращения совпадает с осью симметрии цилиндра.

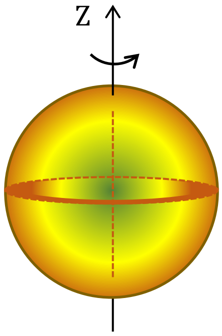


Сплошной цилиндр можно представить как набор дисков одинакового радиуса, нанизанных на ось вращения.

$$I = \int dI_д = \int \frac{R^2}{2} dm_д = \frac{R^2}{2} \int dm_д = \frac{mR^2}{2}$$

- Шар массы m и радиуса R

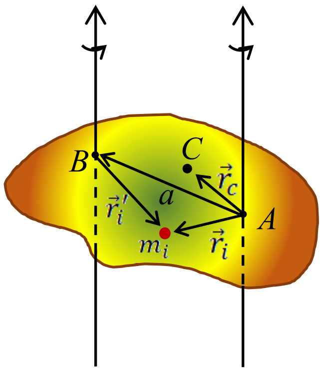
(момент инерции шара можно вычислить, разбивая его на диски).



$$I = \frac{2}{5} mR^2$$

Теорема Гюйгенса-Штейнера

Прикладная теорема, позволяющая при известном моменте инерции относительно одной оси находить момент инерции относительно другой оси. Оси должны быть параллельны.



Предположим, что момент инерции АТТ относительно оси, проходящей через точку А, известен. Необходимо найти момент инерции АТТ относительно оси, проходящей через точку B. Обе оси параллельны. Известны масса АТТ m и расстояние между осями a.

Воспользуемся снова дискретным описанием АТТ.

$$I_B = \sum_{i=1}^{N} I_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \, {r_i'}^2,$$

где r_i' − расстояние от i точки АТТ до оси, проходящей через точку B, I_B − момент инерции тела относительно этой оси; r_i − расстояние от i точки АТТ до оси, проходящей через точку A, I_A − момент инерции тела относительно этой оси.

Согласно рисунку $\vec{r}_i{}' = \vec{r}_i - \vec{a}$, $\quad {r_i'}^2 = (\vec{r}_i - \vec{a})^2 = {r_i}^2 + a^2 - 2\vec{r}_i\vec{a}$.

$$I_B = \sum_{i=1}^{N} m_i \left({r_i}^2 + a^2 - 2\vec{r}_i\vec{a}\right) = \sum_{i=1}^{N} m_i {r_i}^2 + a^2 \sum_{i=1}^{N} m_i - 2\vec{a} \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i.$$

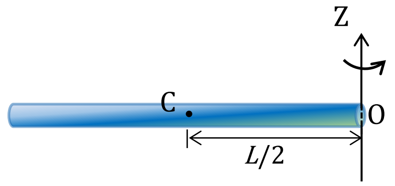
Последнее слагаемое можно преобразовать, использовав определение радиус-вектора центра масс системы МТ (§12): $\vec{r}_c = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{m}$:

$$\boxed{I_B = I_A + ma^2 - 2m\vec{r}_c\vec{a}.}$$

Если точка A не только точка, через которую проходит ось вращения, но и центр масс этого АТТ (точки A и C совпадают), то $\vec{r}_C = 0$ и $\boxed{I = I_C + ma^2}$ – *момент инерции тела относительно произвольной неподвижной оси I равен сумме момента инерции этого тела I_C относительно параллельной ей оси, проходящей через центр масс тела, и произведения массы тела m на квадрат расстояния между осями a.*

Из полученной формулы очевидно, что $I > I_C$. Поэтому можно утверждать: момент инерции тела относительно оси, проходящей через центр масс тела, является наименьшим среди всех моментов инерции тела относительно осей, имеющих данное направление.

Пример: тонкий стержень массы m и длины L,
ось вращения перпендикулярна стержню и проходит через его конец.



$$I_C = \frac{mL^2}{12}$$

$$I_O = I_C + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{mL^2}{12} + \frac{mL^2}{4} = \frac{mL^2}{3}$$