§24. Процессы в идеальных газах

Рассмотрим простейшую модель макроскопической системы – идеальный газ, для которого справедливо уравнение состояния: $PV = \nu RT$.

Вычислим для этой системы значения работы, теплоёмкости, внутренней энергии и теплоты при различных квазиравновесных изопроцессах.

Изопроцессы – термодинамические процессы, в которых количество вещества и один из параметров состояния: давление, объём или температура – остаются неизменными: $\nu = const \Rightarrow \frac{PV}{T} = const$.

1. *Изохорический (изохорный) процесс.*

Процесс, протекающий при постоянном объёме: $V = const$.

$$\frac{P}{T} = const - \text{ закон Шарля.}$$

Для любых состояний идеального газа в изохорическом процессе

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}.$$

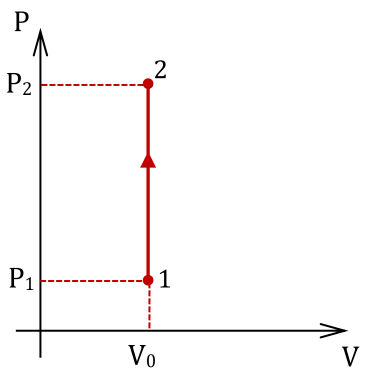


График – вертикальная прямая на диаграмме в координатах (P, V).

Газ не совершает работы в изохорном процессе:

$$V = const, \ \ dV = 0$$

$$\delta A = PdV = 0; \ \ A = \int_1^2 \delta A = 0.$$

Исходя из первого начала термодинамики (см. §22) всё тепло, получаемое системой в этом процессе, идёт на приращение внутренней энергии $\delta Q = dU$ или $Q = \Delta U$.

Если тепло к системе подводится $Q > 0$, то внутренняя энергия $\Delta U > 0$ увеличивается; если система отдаёт тепло $Q < 0$, то это происходит за счёт уменьшения внутренней энергия $\Delta U < 0$.

Количество теплоты может быть выражено через макропараметры системы:

$$Q = \int_1^2 \delta Q = \int_1^2 dU = \int_1^2 \nu c_V dT = \nu c_V (T_2 - T_1) = \nu c_V \Delta T$$

или, используя уравнение состояния идеального газа,

$$T_1 = \frac{P_1 V_0}{\nu R}, \qquad T_2 = \frac{P_2 V_0}{\nu R}$$

$$Q = \nu c_V \left(\frac{P_2 V_0}{\nu R} - \frac{P_1 V_0}{\nu R} \right) = \frac{V_0}{R} c_V (P_2 - P_1) = \frac{V_0}{R} c_V \Delta P.$$

Теплоёмкость идеального газа в изохорическом процессе равна $c = c_V$.

2. *Изобарический (изобарный) процесс.*

Процесс, протекающий при постоянном давлении: $P = const$.

$$\frac{V}{T} = const - \text{закон Гей} - \text{Люссака.}$$

Для любых состояний идеального газа в изобарическом процессе

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}.$$

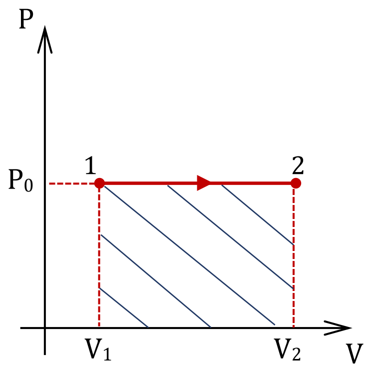


График – горизонтальная прямая на диаграмме в координатах (P, V).

В изобарическом процессе газ совершает работу:

$$A = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 P_0 dV = P_0 \int_{V_1}^{V_2} dV = P_0 (V_2 - V_1) = P_0 \Delta V$$

или, с использованием уравнения состояния идеального газа:

$$P_0 V_1 = \nu R T_1, \qquad P_0 V_2 = \nu R T_2$$

$$A = \nu R (T_2 - T_1) = \nu R \Delta T.$$

Изменение внутренней энергии газа в изобарическом процессе равно:

$$\Delta U = \int_1^2 dU = \int_1^2 \nu c_V dT = \nu c_V (T_2 - T_1) = \nu c_V \Delta T = \frac{c_V}{R} P_0 \Delta V.$$

Тепло, подводимое к газу в изобарическом процессе равно:

$$Q = \int_1^2 \delta Q = \int_1^2 (dU + \delta A) = \int_1^2 dU + \int_1^2 \delta A = \nu c_V \Delta T + \nu R \Delta T = \nu (c_V + R) \Delta T = \nu c_P \Delta T =$$

{использовали уравнение Майера из §23}

$$= \nu c_P \left(\frac{P_0 V_2}{\nu R} - \frac{P_0 V_1}{\nu R} \right) = \frac{P_0}{R} c_P (V_2 - V_1) = \frac{P_0}{R} c_P \Delta V.$$

Теплоёмкость идеального газа в изобарическом процессе равна $c = c_P$.

3. *Изотермический процесс.*

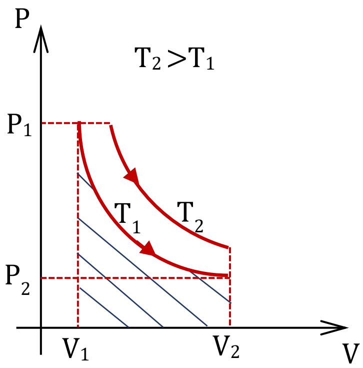
Процесс, протекающий при постоянной температуре: $T = const$.

$$PV = const - \text{закон Бойля – Мариотта.}$$

Для любых состояний идеального газа в изотермическом процессе

$$P_1V_1 = P_2V_2.$$

График – гипербола на диаграмме в координатах (P, V): $P = \frac{const}{V}$. Чем больше температура газа, тем выше на диаграмме (P, V) расположена соответствующая ей изотерма.



Внутренняя энергия идеального газа в изотермическом процессе не изменяется: $U = \nu c_V T = const$; $\Delta U = 0$.

Всё тепло, исходя из первого начала термодинамики, получаемое системой в этом процессе, идёт на совершение работы $\delta Q = \delta A$ или $Q = A$.

Если тепло к газу подводится $Q > 0$, то газ сам совершает работу

$$A > 0,$$

и газ отдаёт тепло $Q < 0$, если работу совершают над газом $A < 0$,

$$A' = (-A) > 0\,.$$

Работа, совершаемая газом в изотермическом процессе, равна

$$A = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 PdV = \int_1^2 P(V,T)\cdot dV = \int_1^2 \frac{\nu RT_0}{V} dV = \nu RT_0 \int_1^2 \frac{dV}{V} = \nu RT_0 \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} =$$

$$= \nu RT_0 (\ln V_2 - \ln V_1) = \nu RT_0 \ln\frac{V_2}{V_1} = P_1V_1 \ln\frac{V_2}{V_1} = P_2V_2 \ln\frac{V_2}{V_1}$$

$$Q = A = \nu RT_0 \ln\frac{V_2}{V_1}$$

Теплоёмкость идеального газа в изотермическом процессе бесконечно велика:

$$c_T = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\delta Q}{dT}\right)_T \xrightarrow[dT=0]{} \infty.$$

4. *Адиабатический (адиабатный) процесс.*

Процесс, при котором газ не обменивается теплом с окружающим пространством: $\delta Q = 0$.

Используя выражение первого начала термодинамики и уравнение состояния идеального газа, найдём уравнение адиабатического процесса, например, в макропараметрах (T, V):

$$dU + \delta A = 0$$

$$\nu c_V dT + PdV = 0$$

$$\nu c_V dT + \frac{\nu RT}{V} dV = 0$$

Разделим на T обе части выражения, универсальную газовую постоянную заменим, используя уравнение Майера:

$$\frac{c_V dT}{T} + \frac{(c_P - c_V)dV}{V} = 0$$

Избавимся от молярных теплоёмкостей, введя показатель адиабаты $\gamma = \frac{c_P}{c_V}$:

$$\frac{dT}{T} + (\gamma - 1)\frac{dV}{V} = 0$$

$$\frac{dT}{T} = d(\ln T)$$

$$\frac{dV}{V} = d(\ln V)$$

$$0 = d(const) = d(\ln const)$$

$$d(\ln T) + (\gamma - 1)d(\ln V) = d(\ln const)$$

Т.к. показатель адиабаты идеального газа величина постоянная, определяемая только строением частиц газа (§23):

$$d(\ln T) + d((\gamma - 1)\ln V)$$

$$d(\ln T) + d(\ln V^{\gamma-1}) = d(\ln const)$$

$$d(\ln T + \ln V^{\gamma-1}) = d(\ln const)$$

$$d(\ln(TV^{\gamma-1})) = d(\ln const)$$

$$\ln(TV^{\gamma-1}) = \ln const$$

$$\boxed{TV^{\gamma-1} = const} -$$

уравнение адиабаты в макропараметрах (T, V).

То же самое уравнение для других пар макропараметров получится, если заменять одни макропараметры на другие, используя уравнение состояния идеального газа, например,

$$T = \frac{PV}{\nu R}.$$

$$\Longrightarrow PV \cdot V^{\gamma-1} = \nu R \cdot const$$

$$\boxed{PV^{\gamma} = const} -$$

уравнение адиабаты в макропараметрах (P, V) – уравнение Пуассона.

Аналогично:

$$V = \frac{\nu RT}{P}$$

$$T\left(\frac{\nu RT}{P}\right)^{\gamma-1} = const$$

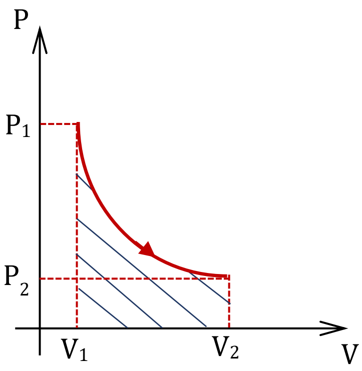
$$\boxed{P^{1-\gamma} \cdot T^{\gamma} = const} -$$

уравнение адиабаты в макропараметрах (P, T).

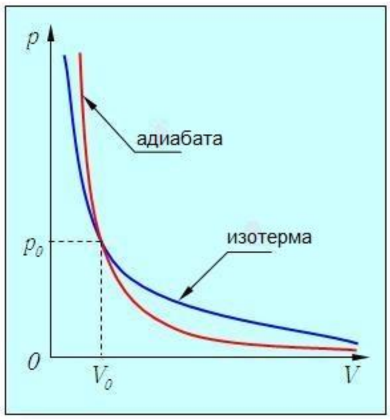
Для любых двух состояний идеального газа в адиабатическом процессе

$$P_1 {V_1}^{\gamma} = P_2 {V_2}^{\gamma}.$$

График – гипербола на диаграмме в координатах (P, V): $P = \frac{const}{V^{\gamma}}$



От гиперболы, соответствующей изотермическому процессу, адиабату отличает более резкое падение давления, т.к. в отличие от изотермы, где $P \sim V^{-1}$, на адиабате $P \sim V^{-\gamma}$, где показатель степени $\gamma > 1$ (см. §23).



Вычислим работу, совершаемую газом в адиабатическом процессе:

$$A = \int_1^2 \delta A = \int_1^2 P dV =$$

{используем уравнение Пуассона: $PV^{\gamma} = P_1 {V_1}^{\gamma}$}

$$= \int_1^2 \frac{P_1 V_1^{\gamma}}{V^{\gamma}} dV = P_1 V_1^{\gamma} \int_1^2 \frac{dV}{V^{\gamma}} = P_1 V_1^{\gamma} \int_1^2 V^{-\gamma} dV = P_1 V_1^{\gamma} \frac{V^{1-\gamma}}{1-\gamma}\Big|_{V_1}^{V_2} = \frac{P_1 V_1^{\gamma}}{1-\gamma}\left(V_2^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}\right) =$$

{поменяем знак в знаменателе и скобке, а также представим V_1^{γ} как $V_1 \cdot V_1^{\gamma-1}$}

$$= \frac{P_1 V_1 \cdot V_1^{-(1-\gamma)}}{\gamma - 1}\left(V_1^{1-\gamma} - V_2^{1-\gamma}\right) = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1}\left(1 - \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{1-\gamma}\right) = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1}\left(1 - \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1}\right) =$$

{из уравнения состояния идеального газа $P_1 V_1 = \nu R T_1$, а из *уравнения адиабаты* в макропараметрах (T, V) $T_1 {V_1}^{\gamma-1} = T_2 {V_2}^{\gamma-1}$}

$$= \frac{\nu R T_1}{\gamma - 1}\left(1 - \frac{T_2}{T_1}\right) = \frac{\nu R}{\gamma - 1}(T_1 - T_2) = -\frac{\nu R}{\gamma - 1}(T_2 - T_1) = -\frac{\nu R}{\gamma - 1}\Delta T.$$

Т.к. при адиабатическом процессе газ не обменивается теплом с окружающим пространством $\delta Q = 0$, то из первого начала термодинамики следует, что газ в адиабатическом процессе может совершать работу только за счёт убыли своей внутренней энергии:

$$\delta Q = dU + \delta A = 0 \implies \delta A = -dU.$$

Для конечных величин аналогично: $A = -\Delta U$, тогда

$$\Delta U = -A = \frac{\nu R}{\gamma - 1}\Delta T.$$

$U = \frac{\nu R}{\gamma - 1} T$ −внутренняя энергия идеального газа.

Теплоёмкость идеального газа в адиабатическом процессе равна нулю $\delta Q = 0$:

$$c = \frac{1}{\nu}\frac{\delta Q}{dT} = 0$$