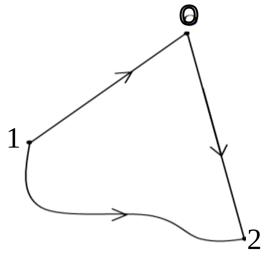
§9. Потенциальная энергия

Если на систему действуют одни только консервативные силы, то можно для неё ввести понятие потенциальной энергии.

Представим себе пространство, в котором действуют только консервативные силы. Рассмотрим перемещение МТ из точки 1 в точку 2 в этом пространстве. Можно перейти непосредственно из точки 1 в точку 2, а можно с заходом в точку О. Так как работа не зависит от вида пути



$$A_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_O} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} = A_{10} + A_{02} = \{\text{см. §8}\}$$

$$= A_{10} - A_{20}$$

Введем обозначение

$$\boxed{\mathrm{E}_{\text{пот}}(\vec{r}) \overset{\text{def}}{=} A_{\vec{r}O} = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_O} \vec{F}\cdot d\vec{r}}$$

Тогда $A_{12} = A_{10} - A_{20} = \mathrm{E}_{\text{пот}}(\vec{r}_1) - \mathrm{E}_{\text{пот}}(\vec{r}_2) = -\Delta\mathrm{E}_{\text{пот}}$.

Работа консервативной силы равна убыли потенциальной энергии точки.

Согласно нашему определению, потенциальная энергия в точке О равна 0: $\mathrm{E}_{\text{пот}}(\vec{r}_O) = 0$, то есть точка О является началом отсчета для потенциальной энергии. В зависимости от положения этой точки потенциальная энергия будет иметь разное значение. Покажем, что выбор начала отсчета не влияет на полученное соотношение. Выберем новое начало отсчета точку O'. Новое значение потенциальной энергии будет равно

$$\mathrm{E}'_{\text{пот}}(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_{O'}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_O} \vec{F}\cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_O}^{\vec{r}_{O'}} \vec{F}\cdot d\vec{r} = \mathrm{E}_{\text{пот}}(\vec{r}) - \mathrm{E}_{\text{пот}}(\vec{r}_{O'}),$$

то есть будет отличаться от прежнего на некоторую постоянную величину $\mathrm{E}_{\text{пот}}(\vec{r}_{O'})$.

Перенос начала отсчета не влияет на разность потенциальных энергий

$$-\Delta\mathrm{E}'_{\text{пот}} = \mathrm{E}'_{\text{пот}}(\vec{r}_1) - \mathrm{E}'_{\text{пот}}(\vec{r}_2) = \mathrm{E}_{\text{пот}}(\vec{r}_1) - \mathrm{E}_{\text{пот}}(\vec{r}_O) - \big(\mathrm{E}_{\text{пот}}(\vec{r}_2) - \mathrm{E}_{\text{пот}}(\vec{r}_O)\big) =$$

$$= \mathrm{E}_{\text{пот}}(\vec{r}_1) - \mathrm{E}_{\text{пот}}(\vec{r}_2) = -\Delta\mathrm{E}_{\text{пот}}$$

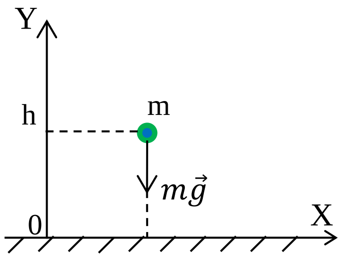
Следовательно, изменение потенциальной энергии $\Delta\mathrm{E}_{\text{пот}}$ не зависит от выбора начала отсчета – точки О.

Окончательно, имеем

$$\boxed{A^{кон}{}_{12} = -\Delta \mathrm{E}_{пот}} \qquad \boxed{\delta A^{кон} = -d\mathrm{E}_{пот}} \text{ (диф. ф − ма)}$$

Примеры расчета потенциальной энергии.

1. Потенциальная энергия в однородном поле силы тяжести.



Тело движется под действием силы тяжести.

Начало отсчета О выбираем на поверхности: $\vec{r}_O = 0$ $(y = 0)$,

$$\mathrm{E}_{пот}(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{0} m\vec{g} \cdot d\vec{r} =$$

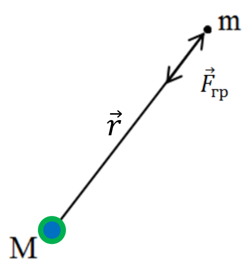
$$= \int_{\vec{r}}^{0} mg(-\vec{j}) \cdot (\vec{i}dx + \vec{j}dy + \vec{k}dz) = \{\text{учтём, что } \vec{g} \text{ направлено вниз по оси } y\} =$$

$$= -\int_{h}^{0} mg \cdot dy = \int_{0}^{h} mg \cdot dy = mg\int_{0}^{h} dy = mgh$$

$$\mathrm{E}_{пот}(h) = mgh$$

$$\Delta\mathrm{E}_{пот} = mg(h_2 - h_1) = mg\Delta h$$

2. Потенциальная энергия в поле силы тяготения (гравитационном поле).



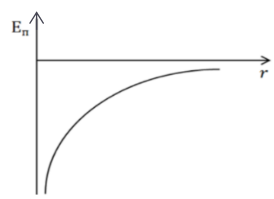
$$\vec{F}_{гр} = -G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

Гравитационное взаимодействие между телами отсутствует, когда они находятся на бесконечно большом расстоянии друг от друга, т.е.

$r_0 = \infty$, поэтому естественно считать, что $\mathrm{E}_{пот}(\infty) = 0$

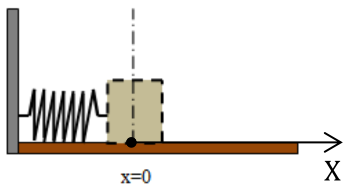
$$\mathrm{E}_{пот}(\vec{r}) = \mathrm{E}_{пот}(r) = \int_{r}^{\infty} \vec{F}_{гр} \cdot d\vec{r} = -\int_{r}^{\infty} G\frac{mM}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \cdot d\vec{r} = -GMm\int_{\vec{r}}^{\infty}\frac{\vec{r}d\vec{r}}{r^2 r} = \{\text{см. §8}\}$$

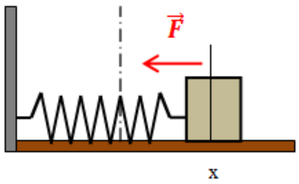
$$= -GMm\int_{\vec{r}}^{\infty}\frac{dr}{r^2} = -GMm\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_{r}^{\infty} = GMm\frac{1}{r}\Bigg|_{r}^{\infty} = -G\frac{Mm}{r}$$



$$\mathrm{E}_{пот}(r) = -G\frac{Mm}{r}$$

3. Потенциальная энергия в поле упругой силы.





$$\vec{F}_{упр} = -k\Delta\vec{r}$$

Если принять, что груз, растягивающий пружину, смещается вдоль оси x и выбрать за начало отсчёта положение груза при недеформированной пружине, то величину силы упругости можно представить в виде: $F_{x\,упр} = -kx$.

В недеформированное состояние пружины можно считать $\mathrm{E}_{пот}(0) = 0$.

$$E_{пот}(x) = \int_{\vec{r}}^{0} \vec{F}_{упр} \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}}^{0} \left(\vec{\imath}F_{x\,упр} + \vec{\jmath}F_{y\,упр} + \vec{k}F_{z\,упр}\right) \cdot \left(\vec{\imath}dx + \vec{\jmath}dy + \vec{k}dz\right) = \int_{x}^{0} F_{x\,упр} \cdot dx =$$

$$= -\int_{x}^{0} kxdx = -k\int_{x}^{0} xdx = -k\left.\frac{x^2}{2}\right|_{x}^{0} = \frac{kx^2}{2}$$

$$\mathrm{E}_{пот}(x) = k\frac{x^2}{2}$$