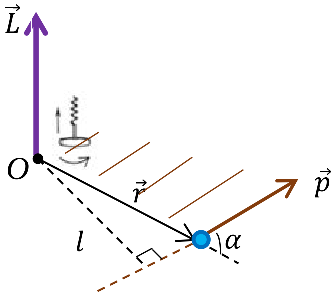
§13. Момент импульса.
Закон сохранения момента импульса

Анализ поведения систем показывает, что кроме энергии и импульса существует ещё одна механическая величина, с которой также связан закон сохранения, – момент импульса (момент количества движения).



Рассмотрим МТ, движущуюся с некоторым импульсом $\vec{p}$, в пространстве, положение точки в любой момент времени описывается радиус-вектором $\vec{r}$ относительно точки отсчёта О. *Моментом импульса МТ относительно точки* называется вектор $\vec{L}$, равный векторному произведению векторов $\vec{r}$ и $\vec{p}$:

$$\boxed{\vec{L} = [\vec{r}, \vec{p}].}$$

Из этого определения следует, что

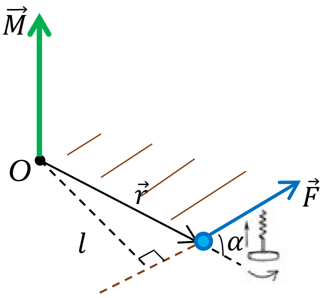
1) вектор $\vec{L}$ является аксиальным вектором (см. §3) – направлен по правилу «правого винта». $\vec{L} \perp$ плоскости, в которой лежат векторы $\vec{r}$ и $\vec{p}$.
2) модуль вектора $|\vec{L}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{p}| \cdot \sin(\widehat{\vec{r}, \vec{p}}) = |\vec{p}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin\alpha = \ p \cdot l.$

   где l – плечо вектора $\vec{p}$ относительно точки О (кратчайшее расстояние от точки О до линии действия $\vec{p}$).

Единица измерения $\vec{L}$: $[p] \cdot [l] = \text{кг}\frac{\text{м}}{\text{с}} \cdot \text{м} = \text{кг}\frac{\text{м}^2}{\text{с}}$.

Выясним, какая механическая величина отвечает за изменение момента импульса $\vec{L}$ со временем в данной системе отсчёта:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{r}, \vec{p}] = \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, \vec{p}\right] + \left[\vec{r}, \frac{d\vec{p}}{dt}\right] \overset{\{\text{по II з. Ньютона}\}}{=} \left[\frac{d\vec{r}}{dt}, m\vec{v}\right] + [\vec{r}, \vec{F}] = m\underbrace{[\vec{v}, \vec{v}]}_{0} + [\vec{r}, \vec{F}]$$



Момент силы, действующей на МТ, относительно точки

$$\boxed{\vec{M} = [\vec{r}, \vec{F}]:}$$

1) вектор $\vec{M}$ – аксиальный вектор.
2) модуль $|\vec{M}| = |\vec{r}| \cdot |\vec{F}| \cdot \sin(\widehat{\vec{r}, \vec{F}}) = |\vec{F}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin\alpha = \ F \cdot l.$

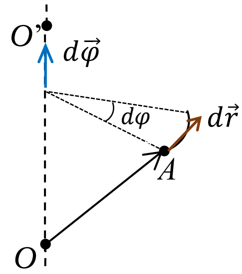
Единица измерения $\vec{M}$: $[F] \cdot [l] = \text{кг}\frac{\text{м}}{\text{с}^2} \cdot \text{м} = \text{кг}\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$.

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$

уравнение моментов: *производная по времени от момента импульса относительно точки равна моменту сил, относительно той же точки, действующих на частицу*.

Введённые выше величины позволяют по-новому записать выражение для работы силы.

Рассмотрим МТ массы m вращающуюся вместе с АТТ вокруг неподвижной оси



$d\vec{r}$ – малое перемещение точки за время dt, $d\vec{\varphi}$ – вектор угла поворота,

$d\vec{r} = [d\vec{\varphi}, \vec{r}]$ (§3).

$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \{§7\} = \vec{F} \cdot [d\vec{\varphi}, \vec{r}] = d\vec{\varphi} \cdot [\vec{r}, \vec{F}] = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$ – работа силы при малом перемещении точки.

{см. §3 Математическое. дополнение}

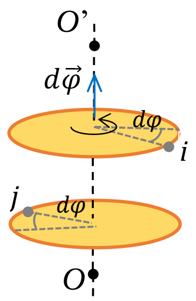
Для пути конечной длины (для поворота на конечный угол) $\boxed{A_{12} = \int \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}.}$

Рассмотрим систему N МТ. Момент импульса данной системы будет равен векторной сумме моментов импульсов её отдельных точек:

$$\vec{L}_{\text{сист}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} [\vec{r}_i, \vec{p}_i]$$

где все векторы $\vec{L}_i$ определены относительно одной и той же точки О заданной системы отсчёта, т.е. момент импульса – аддитивная величина.

Предположим, что наша система – замкнутая система. Пусть все её точки за время dt повернутся на на один и тот же угол $d\vec{\varphi}_i = d\vec{\varphi}$:



Вычислим работу, которую совершили внутренние силы системы при таком повороте.

$$\delta A = \sum_{i=1}^{N} \delta A_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{\text{внутр}} \cdot d\vec{\varphi}_i = d\vec{\varphi} \cdot \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{\text{внутр}} = d\vec{\varphi} \cdot \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{L}_i}{dt} =$$

$$= d\vec{\varphi} \cdot \frac{d\vec{L}_{\text{сист}}}{dt}$$

С другой стороны:

- ✓ конфигурация системы (расположение точек) не изменилась (все точки повернулись на один и тот же угол);
- ✓ в результате поворота положение системы относительно внешних тел не изменилось (система замкнутая – внешние тела где-то далеко);

- ✓ пространство изотропно, его свойства не зависят от направления и, значит, поворот не изменил свойств системы;
- ✓ и, вообще, повернулись мы, а не система.

Можно сделать вывод, что «тратить» работу было не на что, т.е. $\delta A = 0$.

Следовательно, справедливо следующее:

$$d\vec{\varphi} \cdot \frac{d\vec{L}_{\text{сист}}}{dt} = 0 \quad \overset{\forall\, d\vec{\varphi} \neq 0}{\Longrightarrow} \quad \frac{d\vec{L}_{\text{сист}}}{dt} = 0$$

$$\boxed{\vec{L}_{\text{сист}} = const} - \text{закон сохранения момента импульса (ЗСМИ)}$$

момент импульса замкнутой системы МТ не меняется со временем.

Если бы пространство не было изотропным, утверждать, что $\delta A = 0$, мы не могли бы.

ЗСМИ – ***как и другие законы сохранения – фундаментальный закон природы.*** Иными словами, он связан с определёнными свойствами симметрии пространства и времени. Закон сохранения момента импульса является следствием *изотропности пространства* (§1).

Вернёмся к нашей замкнутой системе МТ. Мы показали, что при повороте всех точек на угол $d\vec{\varphi}$ работа не совершается

$$0 = \delta A = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{\text{внутр}} \cdot d\vec{\varphi}_i = d\vec{\varphi} \cdot \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{\text{внутр}} = d\vec{\varphi} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{M}_{ij},$$

где $\vec{M}_{ij} = [\vec{r}_i, \vec{F}_{ij}]$ – момент силы, с которой j точка действует на i точку.

$$0 = d\vec{\varphi} \cdot \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{M}_{ij}$$

$\Longrightarrow$ $\{d\vec{\varphi} \neq 0\}$ моменты внутренних сил не могут изменить момент импульса системы

$$\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{M}_{ij} = 0, \quad \vec{M}_{ij} = -\vec{M}_{ji}. \qquad \left\{ \text{аналогично §11} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} = 0 \right\}$$

Рассмотрим **не**замкнутую систему N МТ:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{сист}}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{M}_i^{\text{внеш}} + \vec{M}_i^{\text{внут}}\right) = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{\text{внеш}} + \cancelto{0}{\sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{M}_{ij}}$$

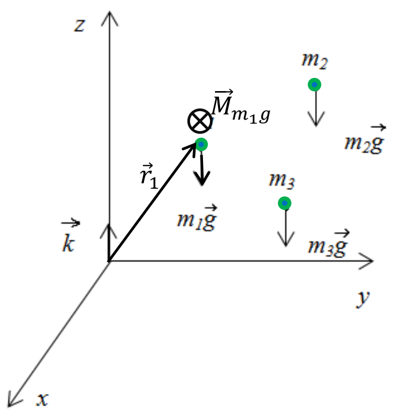
$$= \vec{M}_i^{\text{внеш}}$$

Момент импульса системы МТ может изменяться под действием только суммарного момента всех внешних сил, действующих на систему:

$$\boxed{\frac{d\vec{L}_{\text{сист}}}{dt} = \vec{M}^{\text{внеш}}}$$

В некоторых случаях момент импульса **не**замкнутой системы частиц тоже может сохраняться. Рассмотрим эти случаи.

1) если проекция момента всех внешних сил на ось OZ равна нулю, то сохраняется не сам момент импульса $\vec{L}$, а его проекция на эту ось L_z:



$$\vec{M}^{\text{внеш}} = M_x\vec{i} + M_y\vec{j}, \qquad (M_z = 0)$$

$$\vec{M}_{mg} \perp OZ$$

$$\frac{d\vec{L}_{\text{сист}}}{dt} = \vec{M}^{\text{внеш}}: \quad \begin{cases} \dfrac{dL_x}{dt} = M_x; & L_x \neq const \\ \dfrac{dL_y}{dt} = M_y; & L_y \neq const \\ \dfrac{dL_z}{dt} = 0; & L_z = const \end{cases}$$

Вдоль оси OZ такой системы момент импульса сохраняется, что бы в системе не происходило. А проекции момента импульса на любое горизонтальной направление L_x, L_y –будут изменяться.

2) если на МТ системы действует внешняя центральная сила (§8) с центром в точке О, то момент импульса системы относительно этой точки сохраняется $\vec{L}_{\text{сист}} = const$:

$$\frac{d\vec{L}_{\text{сист}}}{dt} = \vec{M}^{\text{внеш}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{\text{внеш}} = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i, \vec{F}_i^{\text{цент}}\right] = \sum_{i=1}^{N} \left[\vec{r}_i, F(r_i)\frac{\vec{r}_i}{r_i}\right] = \sum_{i=1}^{N} \frac{F(r_i)}{r_i}[\vec{r}_i, \vec{r}_i] = 0$$