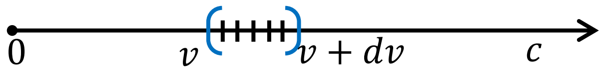
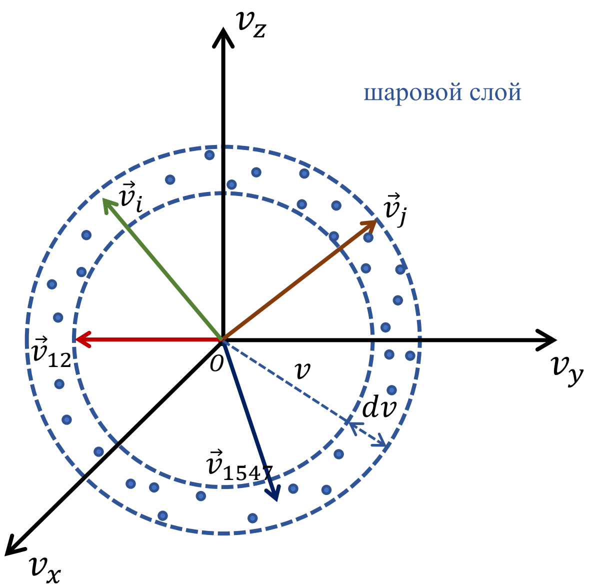
§18. Функция распределения Максвелла для модуля скорости

Найдём относительное число частиц $\frac{dN}{N}$, модуль скорости которых принадлежит интервалу $v \in [v, v + dv]$:

$$\frac{dN(v)}{N} = F(v) \cdot dv. \qquad (1)$$



$F(v)$ – функция распределения. Модуль скорости частиц системы может принимать любые значения из множества $v \in [0;\ 3 \cdot 10^8) \sim [0, +\infty)$ (см. §17).



Как и в предыдущем параграфе, будем рассматривать систему с большим количеством частиц – «газ в баллоне». Оценим величину скорости каждой частицы. Для частиц, модуль скорости которых $v \in [v, v + dv]$ построим вектор скорости в ортогональной системе координат с осями Ov_x, Ov_y, Ov_z (пространство скоростей системы). Направление скорости частиц не имеет значение, для нас важен будет лишь модуль скорости. Проанализировав все частицы системы таким образом, увидим, что в пространстве скоростей образовался шаровой слой, радиусом v и толщиной dv. Объём получившегося слоя равен:

$$dV_{\text{шаров.сл}} = \frac{4}{3}\pi(v + dv)^3 - \frac{4}{3}\pi v^3 =$$

$$= \frac{4}{3}\pi\left(v^3 + 3v^2\,dv + 3v(dv)^2 + (dv)^3 - v^3\right) \underset{dv \ll v}{\Longrightarrow} 4\pi v^2 dv.$$

Подсчитаем относительное число частиц внутри шарового слоя. Т.к. все направления движения частиц равноправны, то плотность точек (концов векторов скорости) в нашем слое постоянна и равна $f(\vec{v})$ – функции распределения Максвелла для вектора скорости, относительное число частиц будет равно произведению плотности точек в слое на объём шарового слоя:

$$\frac{dN(v)}{N} = f(\vec{v}) \cdot dV_{\text{шаров.сл}} = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) 4\pi v^2\,dv \qquad (2)$$

Сравнивая (2) выражение с (1), получим *функцию распределения Максвелла для модуля скорости* частиц:

$$F(v) = \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) 4\pi v^2 \qquad (3)$$

Исследуем полученную функцию.

- область определения функции $v \in [0, +\infty)$.
- условие нормировки: $\int_0^{+\infty} F(v)dv = 1$, т.е площадь под графиком функции имеет постоянное значение.
- $F(v) -$ несимметричная функция. При малых значениях величины скорости поведение $F(v)$ определяется множителем v^2, т.е. при малых v функция похожа на параболу. При больших v множитель $exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)$ убывает быстрее чем растёт v^2, и соответственно, $F(v)$ экспоненциально убывает.
- $F(0) = 0 -$ относительное число частиц, модуль скорости которых равен нулю, равно нулю. Таких частиц почти нет. И это несмотря на то, что в §17 было показано, что $\varphi(0) = \varphi_{max}$. {Как и в симметричном распределении Гаусса, максимум функции распределения Максвелла для проекции скорости приходится на среднее значение проекции скорости, т.е. на ноль}. Значит, частиц, у которых одна из компонент вектора скорости равна нулю, много. Этот факт можно объяснить следующим образом: $v = \sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2 + {v_z}^2}$, т.е. что бы модуль скорости стал равен нулю, одновременно в ноль должны обратиться все три компоненты скорости, это очень редкое событие.

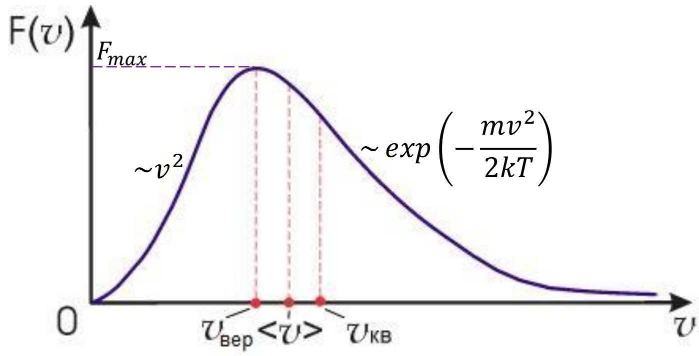


Рис.2. Распределение Максвелла для модуля скорости

Значение случайной величины, при которой функция распределения имеет максимум, носит название *наиболее вероятной величины* $t_{вер}$: $f(t_{вер}) = f_{max}$. Для симметричных функций распределения соответственно: $t_{вер} = \langle t \rangle$ и $v_{x_{вер}} = \langle v_x \rangle$ (§17 – функции распределения Гаусса и Максвелла для проекции скорости).

Сосчитаем $v_{вер}$ для $F(v)$ (3). Для этого найдём производную $\frac{dF}{dv}$ и посмотрим при каких значениях v она обращается в ноль:

$$\frac{dF}{dv} = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{d\left(v^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\right)}{dv} = \qquad \boxed{(x\cdot y)' = x'\cdot y + x\cdot y'}$$

$$= 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \left\{2v \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) + v^2 \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \cdot \left(-\frac{m}{2kT}\right) 2v\right\} =$$

$$= 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot 2v \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) \cdot \left(1 - \frac{mv^2}{2kT}\right)$$

$$\left.\frac{dF}{dv}\right|_{v=v_{\text{вер}}} = 0$$

$$v_{\text{вер}} \cdot \exp\left(-\frac{mv_{\text{вер}}{}^2}{2kT}\right)\left(1 - \frac{mv_{\text{вер}}{}^2}{2kT}\right) = 0$$

1) $v_{\text{вер}} = 0;\quad F(0) = 0 \rightarrow F_{min}$. (см. график)

2) $v_{\text{вер}} \rightarrow \infty;\quad \exp\left(-\frac{mv_{\text{вер}}{}^2}{2kT}\right) = 0;\quad F(\infty) = 0 \rightarrow F_{min}$. (см. график)

3) $1 - \frac{mv_{\text{вер}}{}^2}{2kT} = 0;\quad v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad \rightarrow F_{max}$.

$$\boxed{v_{\text{вер}} = \sqrt{\frac{2kT}{m}}} \quad (4)$$

наиболее вероятное значение модуля скорости (наиболее вероятная скорость), $v_{\text{вер}} \sim \sqrt{\frac{T}{m}}$.

Найдём максимальное значение функции F:

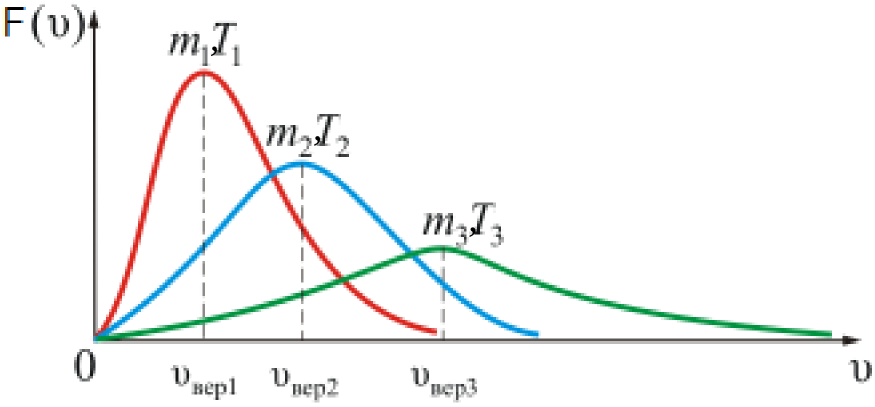
$$F_{max} = F(v_{\text{вер}}) = 4\pi \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} v_{\text{вер}}^2 \exp\left(-\frac{mv_{\text{вер}}^2}{2kT}\right) = 4\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2\pi kT}{m} \exp\left(-\frac{m}{2kt} \cdot \frac{2kT}{m}\right) =$$

$$= 4\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{-1} \exp(-1) = \frac{4}{e}\sqrt{\frac{m}{2\pi kT}} \sim \sqrt{\frac{m}{T}}$$

Рассмотрев $v_{\text{вер}}$ и F_{max}, можно представить как будет изменяться вид функции распределения Максвелла для модуля скорости в следующих ситуациях:

a) масса всех частиц одинакова $m = const$, изменяется температура, при которой находится система:

$T_1 < T_2 < T_3$.



С ростом температуры $T \uparrow$ наиболее вероятное значение скорости тоже увеличивается $v_{\text{вер}} \uparrow$, а максимальное значение функции распределения уменьшается $F_{max} \downarrow$.

Графики смещаются вправо, площадь под графиками не изменяется (см. условие нормировки).

b) температура системы не изменна $T = const$,

в системе присутствуют частицы трёх видов: $m_1 > m_2 > m_3$

С уменьшением массы частицы $m \downarrow$ $v_{\text{вер}} \uparrow$ увеличивается, а $F_{max} \downarrow$ уменьшается.

Найдём среднее значение модуля скорости:

$$\langle v \rangle \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_{\text{по всему диапазону значений}\, v} v\frac{dN(v)}{N} = \int_0^\infty vF(v)dv =$$

$$= \int_0^\infty v \cdot 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} \cdot v^2\, exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dv = 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^\infty v^2\, exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)d\left(\frac{v^2}{2}\right) =$$

$$= 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{kT}{m}\right)\int_0^\infty v^2\, exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\left(-\frac{m}{kT}\right)d\left(\frac{v^2}{2}\right) =$$

$$= 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{kT}{m}\right)\int_0^\infty v^2\, exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)d\left(-\frac{m}{kT}\frac{v^2}{2}\right) =$$

$$= 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kt}\right)^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{kT}{m}\right)\int_0^\infty \underbrace{v^2}_{x}\underbrace{d\left(exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\right)}_{dy} =$$

$$\boxed{\begin{gathered} d(xy) = xdy + ydx \\ \int_a^b xdy = xy\Big|_a^b - \int_a^b ydx \end{gathered}}$$

$$= 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{kT}{m}\right)\left\{\underbrace{\cancelto{0}{v^2}}_{x}\underbrace{\cancelto{0}{exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)}}_{y}\Bigg|_0^\infty - \int_0^\infty \underbrace{exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)}_{y}\underbrace{dv^2}_{dx}\right\} =$$

$$= 4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}}\left(-\frac{kT}{m}\right)\left(\frac{2kT}{m}\right)\int_0^\infty \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)d\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right) =$$

$$= -4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{\frac{3}{2}} 2\left(\frac{kT}{m}\right)^2 \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)\Bigg|_0^\infty =$$

$$= -\frac{8\pi}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{\frac{3}{2}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{-2}(0-1) = \frac{2^3\cdot\pi}{2^{\frac{3}{2}}\cdot\pi^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{m}{kT}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{2^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{kT}{m}} = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}$$

$$\boxed{\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}}$$

среднее значение модуля скорости (средняя скорость).

Найдём ещё одну характерную скорость – среднеквадратичную $v_{\text{кв}} = \sqrt{\langle v^2\rangle}$:

$$\langle v^2\rangle \overset{\text{def}}{=} \int\limits_{\text{по всему диапазону значений } v} v^2\frac{dN(v)}{N} = \int_0^\infty v^2F(v)dv = \int_0^\infty v^2 4\pi v^2\, exp\left(-\frac{mv^2}{2kT}\right)dv = \cdots$$

Другой способ, используя $\langle v_x^2\rangle = \frac{kT}{m}$ сосчитанное в §17:

$$\langle v^2\rangle = \langle v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\rangle = \langle v_x^2\rangle + \langle v_y^2\rangle + \langle v_z^2\rangle = 3\langle v_x^2\rangle = 3\frac{kT}{m}$$

$$\boxed{v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}}}$$

среднеквадратичное значение модуля скорости (среднеквадратичная скорость).

Приведённые характерные скорости отличаются друг от друга в пропорции:

$$v_{\text{вер}}:\langle v\rangle : v_{\text{кв}} = 1:1{,}13:1{,}22$$

$$v_{\text{вер}} < \langle v\rangle < v_{\text{кв}}$$

Качественно это показано на рис. 2.

<u>Пример</u> расчета $v_{\text{кв}}$ для основной составляющей воздуха – азота N_2:

$t = 20°C, \qquad T = 293\ K$

$\mu = 28\cdot 10^{-3}\,\frac{\text{кг}}{\text{моль}}$ –*молярная масса* азота – масса одного моля, т.е. масса $6{,}02\cdot 10^{23}$ молекул азота.

$$v_{\text{кв}} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} = \sqrt{\frac{3kN_A T}{mN_A}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3 \cdot 8{,}31 \cdot 293}{28 \cdot 10^{-3}}} \cong \sqrt{26 \cdot 10^4} \approx 510\ \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

$R = kN_A = 1{,}38 \cdot 10^{-23}\,\frac{\text{Дж}}{\text{К}} \cdot 6 \cdot 10^{23}\,\frac{1}{\text{моль}} = 8{,}31\ \frac{\text{Дж}}{\text{моль} \cdot \text{К}}$ – *газовая постоянная*.

Распределения Максвелла можно использовать и для жидких материальнх тел (жидкостей), т.к. в них входит лишь скорость частиц системы, и нет, ничего связанного с растоянием между частицами.