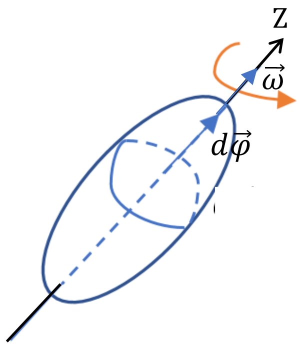
§15. Кинетическая энергия твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси

Рассмотрим АТТ, вращающееся с угловой скоростью $\vec{\omega}$ вокруг неподвижной оси, совпадающей с осью Z ДСК.



Пусть за время dt тело поворачивается на угол $d\vec{\varphi}$:

$d\vec{\varphi} = d\varphi \cdot \vec{k},\ \vec{k} -$ единичный вектор (орт) оси Z.

Сосчитаем работу, совершённую силами, действующими на АТТ:

$$\delta A = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi} \overset{\{\text{см. §13}\}}{=} \vec{M}^{\text{внеш}} d\vec{\varphi} = \frac{d\vec{L}}{dt}\, d\vec{\varphi} = \frac{d\vec{L}}{dt}\, d\varphi \cdot \vec{k} = \frac{d\left(\vec{L} \cdot \vec{k}\right)}{dt} d\varphi =$$

$$= \frac{dL_z}{dt} d\varphi = \qquad \{\text{согласно §14: } \vec{L} \cdot \vec{k} = L_z, \text{ где } L_z = I\omega\}$$

$$= \frac{d(I\omega)}{dt} \cdot d\varphi = I \cdot \frac{d\omega}{dt} \cdot d\varphi = I \cdot d\omega \cdot \frac{d\varphi}{dt} = I \cdot d\omega \cdot \omega = I \cdot d\left(\frac{\omega^2}{2}\right) = d\left(\frac{I \cdot \omega^2}{2}\right)$$

По теореме о кинетической энергии работа всех сил, действующих на тело, равна приращению его кинетической энергии (§7):

$$\delta A = dE_{\text{кин}}$$

$$dE_{\text{кин}} = d\left(\frac{I \cdot \omega^2}{2}\right) \Longrightarrow \boxed{E_{\text{кин}} = \frac{I \cdot \omega^2}{2}} -$$

кинетическая энергия твёрдого тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.

Это выражение напоминает выражение для кинетической энергии МТ, только вместо массы фигурирует момент инерции, а вместо линейной скорости – угловая: $E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2}$.

Аналогии между движением МТ и вращением АТТ вокруг неподвижной оси:

МТ	АТТ, вращающееся вокруг неподвижной оси
$d\vec{r}$	$d\vec{\varphi}$
$\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt}$	$\vec{\omega} = \dfrac{d\vec{\varphi}}{dt}$
m	I
$p = mv$	$L_z = I\omega$
$\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$	$\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$
$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r}$	$\delta A = \vec{M} \cdot d\vec{\varphi}$
$m\vec{a} = \vec{F}$	$I\beta_z = M_z$
$E_{\text{кин}} = \dfrac{mv^2}{2}$	$E_{\text{кин}} = \dfrac{I \cdot \omega^2}{2}$

Динамика плоского движения АТТ

При плоском движение (§3) АТТ его центр масс (C) движется в определённой плоскости, неподвижной в системе отсчёта, а вектор его угловой скорости $\vec{\omega}$ всё время остаётся перпендикулярным этой плоскости. Т.е. в системе центра масс АТТ тело просто вращается относительно неподвижной оси, проходящей через точку C и перпендикулярной плоскости движения. Из этого следует, что плоское движение АТТ можно описывать двумя уравнениями:

$\boxed{m\vec{a}_{\text{C}} = \vec{F}}$ – уравнение движения центра масс системы (§12) (поступательное движение АТТ как целого);

$\boxed{I_C \beta_z = M_z}$ – уравнение динамики АТТ, вращающегося вокруг неподвижной оси (§14) (вращение АТТ), где M_z суммарный момент всех внешних сил относительно оси, проходящей через центр масс (C).

Кинетическая энергия АТТ при плоском движении тоже складывается из энергии движения центра масс (поступательного движения) и энергии вращения вокруг неподвижной оси, проходящей через точку C:

$$\boxed{E_{\text{кин}} = \frac{m v_{\text{C}}^2}{2} + \frac{I_{\text{C}} \cdot \omega^2}{2}}$$