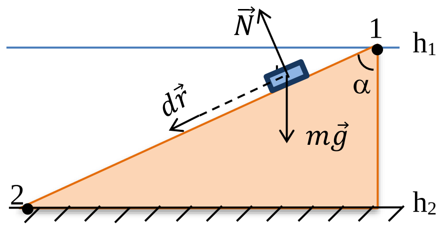
§8. Консервативные и неконсервативные силы

Как об этом было сказано в предыдущем параграфе, *работа* является *функцией процесса*, и, следовательно, работа, совершаемая при перемещении точки, зависит от формы её траектории. Существуют, однако, силы работа которых определяется только начальным и конечным состояниями точки, и форма траектории на неё не влияет.

Сила тяжести: рассчитаем работу силы тяжести, которую она совершает при скольжении без трения МТ по гладкой наклонной плоскости.

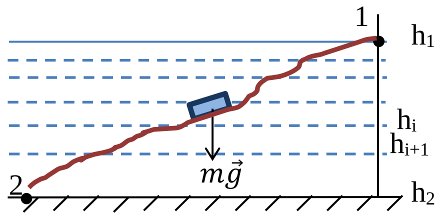


$$A_{12} = \int_1^2 \vec F\cdot d\vec r = \int_1^2 (\vec N + m\vec g)\cdot d\vec r = \int_1^2 \underset{\vec N \perp d\vec r}{\cancelto{0}{\vec N\cdot d\vec r}} +$$

$$+\int_1^2 m\vec g\cdot d\vec r = \int_1^2 |m\vec g||d\vec r|\cos\left(\widehat{m\vec g\, d\vec r}\right) =$$

$$= \int_1^2 mg\, ds\cos\alpha = mg\cos\alpha\int_1^2 ds = mg(s_{12}\cos\alpha) = mg(h_1 - h_2) \quad (1)$$

Здесь h_1 и h_2 высоты, на которых находилась точка в начале и конце пути, отсчитанные от произвольного уровня, например от земной поверхности или пола в 235 аудитории.



Формула (1) будет справедлива, если перемещение точки будет происходить по произвольному криволинейному пути. Это становится очевидным, если разбить весь путь 1-2 горизонтальными плоскостями на малые участки, каждый из которых можно считать прямолинейным.

Записав для каждого участка формулу (1) и сложив полученные работы для всех участков, мы придём к прежней формуле:

$$A_{1\,i} = mg(h_1 - h_i)$$

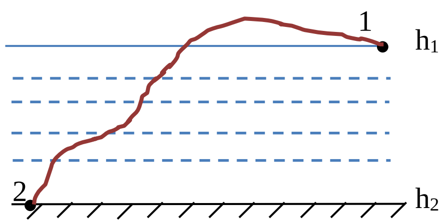
$$+\quad A_{i\,i+1} = mg(h_i - h_{i+1})$$

$$A_{i+1\,i+2} = mg(h_{i+1} - h_{i+2})$$

$$A_{i+n\,2} = mg(h_{i+n} - h_2)$$

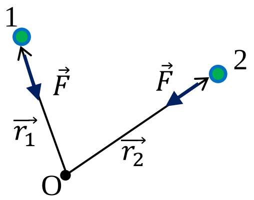
$$A_{12} = \sum_i A_{i\,i+1} = mg(h_1 - h_2)$$

Даже в случае любой другой кривой, проведённой между теми же начальным и конечным положениями 1 и 2, работа силы тяжести не изменится и будет определяться через разность высот $h_1 - h_2$



Таким образом, *работа силы тяжести не зависит от формы пути (траектории движения), а определяется только начальным и конечным положениями перемещающейся точки.*

Центральная сила: *сила* называется *центральной*, если она направлена к одной и той же точке пространства (или от одной и той же точки) и зависит только от расстояния до этой точки, называемой *центром силы* или *силовым центром* (на рис. точка О).



$\vec{F} = \pm F(r)\frac{\vec{r}}{r}$ – общая запись всех центральных сил.

$F(r)$ – величина центральной силы, $\pm\frac{\vec{r}}{r}$ – единичный вектор, задающий её направление.

Центральными силами являются сила Кулона: $\vec{F}_{\text{кул}} = k\frac{q_1 q_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$,

сила тяготения $\vec{F}_{\text{гр}} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\cdot\frac{\vec{r}}{r}$,

внутренние силы взаимодействия между точками $\vec{F}_{ij} = \vec{f}\left(\vec{r}_i, \vec{r}_j\right)$ в системе МТ.

$$A_{12} = \int_1^2 \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_1^2 \pm F(r)\frac{\vec{r}}{r}\cdot d\vec{r} \overset{\text{как в §7}}{=} \pm\int_1^2 F(r)\,dr = \Phi(r_2) - \Phi(r_1) \qquad (1)$$

Воспользовались формулой Ньютона – Лейбница:

если $\psi(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $\Psi(x)$ её первообразная на этом отрезке,

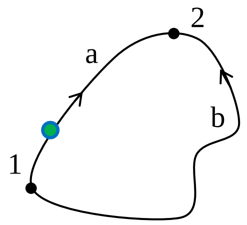
то имеет место равенство: $\int_a^b \psi(x)dx = \Psi(b) - \Psi(a)$

Видно, что работа A_{12} выражается чрез определённый интеграл, значение которого зависит только от расстояний r_1 и r_2 до силового центра и не зависит от формы пути, по которому был осуществлён переход из начального положения 1 в конечное положение 2. В формулу (1) путь перехода совсем не входит.

Итак, *силы, работа которых не зависит от формы пути, а определяется только начальным и конечным положениями тела, называются консервативными (или потенциальными)*.

Можно дать другое определение консервативных сил, эквивалентное только что приведённому.

Рассмотрим пространство, где действуют только консервативные силы. МТ переходит из положения 1 в положение 2 по пути $1a2$, при этом консервативные силы совершают работу A_{1a2}. Если точка перейдёт из положения 1 в положение 2 по пути $1b2$ будет совершена работа A_{1b2}. По определению консервативных сил $A_{1a2} = A_{1b2}$.



$$A_{1b2} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\int_2^1 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -A_{2b1}$$

Пусть теперь наша МТ совершает перемещение по замкнутому пути: $1a2b1$, тогда консервативные силы совершают работу $A_{1a2b1} = A_{\text{о}} = A_{1a2} + A_{2b1} = A_{1a2} - A_{1b2} = 0$.

Т.е. *работа консервативных сил по любому замкнутому пути равна нулю:* $A_{\text{о}} = \oint \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

Все силы, не являющиеся консервативными, называются *неконсервативными*.

К ним, в первую очередь, относятся *диссипативные силы* ($\vec{F}_{\text{тр}}$, $\vec{F}_{\text{сопр}}$), общий вид которых можно представить ввиде $\vec{F} = -F(v)\frac{\vec{v}}{v}$. Найдём работу диссипативной силы при б.м. премещении МТ $d\vec{r}$:

$$\delta A = \vec{F} \cdot d\vec{r} = -F(v)\frac{\vec{v}}{v} \cdot d\vec{r} = -F(v)\frac{\vec{v}}{v} \cdot \vec{v} \cdot dt = -F(v) \cdot v \cdot dt < 0,$$

$$\{\text{т. к. все множители в этом произведениии} - \text{ модули величин}\}.$$

Значит, работа диссипативных сил на любом пути всегда будет отрицательна $A_{\text{дис}} = \int \delta A < 0$.

Диссипативные силы – силы, работа которых всегда отрицательна.

Ещё один вид сил – *гироскопические силы*. Это *силы, зависящие от скорости МТ и действующие всегда перпендикулярно скорости*. Единственным примером гироскопических сил, известных в физике, является магнитная часть силы Лоренца:

$$\overrightarrow{F_{\text{м}}} = q[\vec{v}, \vec{B}], \ \overrightarrow{F_{\text{м}}} \perp \vec{v}.$$

Найдём работу силы Лоренца при малом премещении МТ $d\vec{r}$:

$$\delta A = \overrightarrow{F_{\text{м}}} \cdot d\vec{r} = q\left[\vec{v}, \vec{B}\right] \cdot d\vec{r} = q\left[\vec{v}, \vec{B}\right] \cdot \vec{v} \cdot dt = q \cdot \cancelto{0}{[\vec{v}, \vec{v}]} \cdot \vec{B} \cdot dt = 0$$

Значит, работа гироскопических сил на любом пути всегда будет равна нулю $A_{\text{гир}} = \int \delta A = 0$.