§3. Кинематика твердого тела

Рассмотренная в предыдущем параграфе материальная точка (МТ) является простейшей *моделью* реального тела, используемой для описания движения в тех случаях, когда размерами тела можно пренебречь.

Описать движение одной материальной точки можно, зная всего три уравнения:

$$x = x(t);$$
$$y = y(t);$$
$$z = z(t).$$

Движение N материальных точек описывается уже $3N$ уравнениями:

$$x_1(t) \ \dots \ x_N(t)$$
$$y_1(t) \ \dots \ y_N(t)$$
$$z_1(t) \ \dots \ z_N(t)$$

Число независимых параметров, с помощью которых описывается движение системы, называется *числом степеней свободы* i. Чем больше i, тем сложнее описание движения.

Движение тела конечных размеров, которое может изменять свою форму, необходимо рассматривать как движение большого (и даже очень большого) числа материальных точек. Однако во многих случаях изменением размеров и формы тела можно пренебречь и использовать следующую простую модель – модель *абсолютно твердого тела*.

Абсолютно твердое тело *(АТТ)* – макроскопическое тело, размеры и форма которого в процессе движения сохраняются.

Положение АТТ в пространстве можно указать, задав координаты любых трех его точек, не лежащих на одной прямой. Для $N = 3$ число степеней свободы системы $i = 3N - n_{\text{связей}} = 3 \cdot 3 - 3 = 6$. В процессе движения размеры и форма АТТ не изменяются, а значит расстояния между этими точками будут фиксированы ($n_{\text{связей}} = 3$).

Вычислить число степеней свободы можно также и другим способом. Положение АТТ в пространстве можно задать тремя координатами какой-либо его точки (например, центра тяжести) и углами поворота вокруг трех осей ДСК, проходящих через эту точку. Таким образом получаем то же значение $i = 3 + 3 = 6$. Такой подход к описанию движения АТТ приводит к следующему важному выводу.

Любое движение абсолютно твердого тела можно разложить на поступательное и вращательное.

Поступательное движение (параллельный перенос) абсолютно твердого тела – это движение, при котором перемещение всех точек одинаково. При поступательном движении все точки твердого тела двигаются по одинаковым траекториям, и любая прямая, связанная с телом, остаётся параллельной своему первоначальному положению.

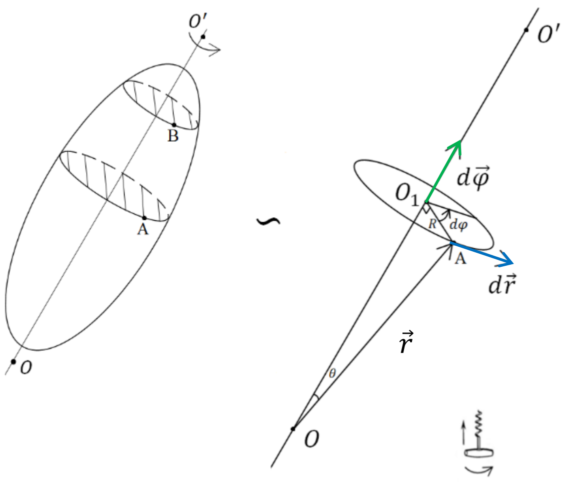
Пример поступательного движения АТТ – движение железнодорожного вагона по прямолинейному участку пути.

Рассмотрим промежуток времени dt:

$i = 1 \dots N$, где i – номер точки.

$d\vec{r}_i = d\vec{r}$ – перемещение каждой точки АТТ (все одинаковы) $\Longrightarrow$ $\vec{v}_i = \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}$ – скорости движения всех точек одинаковы и $\vec{a}_i = \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{a}$ – ускорения всех точек тоже одинаковы. Значит поступательное движение твердого тела можно описывать через движение одной его материальной точки.

Вращение абсолютно твердого тела – это движение, при котором одна или несколько его точек остаются неподвижны. При вращении в трехмерном пространстве остаются неподвижными все точки, лежащие на одной линии – оси вращения. Вращение вокруг неподвижной оси является частным случаем плоского движения.



Плоское движение твердого тела – это движение, при котором траектории всех точек тела лежат в параллельных плоскостях.

Так как траектории всех точек лежат в параллельных плоскостях, то для описания движения достаточно следить за одной такой плоскостью АТТ.

Рассмотрим поворот на малый угол $d\varphi$. Помимо величины угла, поворот характеризуется осью вращения, точнее ее направлением в пространстве. Эти две величины можно объединить в один вектор $d\vec{\varphi}$ – вектор угла поворота:

длина этого вектора $|d\vec{\varphi}| = d\varphi;\ [d\varphi] - \text{рад};$

направление $d\vec{\varphi}$ совпадает с направление оси вращения и определяется по правилу «правого винта» (буравчика).

Только малые углы можно принимать за векторные величины.

Установим связь между векторами $d\vec{\varphi}$ и $d\vec{r}$ – вектор перемещения, которое точка А тела, совершила за тот же промежуток времени dt:

$$|d\vec{r}| = R|d\vec{\varphi}| = |\vec{r}| \cdot |d\vec{\varphi}| \cdot \sin\theta = |\vec{r}| \cdot |d\vec{\varphi}| \cdot \sin(\widehat{\vec{r}; d\vec{\varphi}})$$

$$d\vec{r} \perp d\vec{\varphi}$$

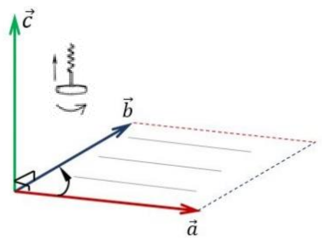
$$d\vec{r} \perp \vec{r}$$

$$d\vec{r} \perp OAO_1$$

$d\vec{r} = [d\vec{\varphi}, \vec{r}] = d\vec{\varphi} \times \vec{r}$ – операция векторного произведения.

Математическое дополнение: векторы (продолжение)

8. Векторное произведение векторов $\vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}]$ – результат вектор.



($c = \vec{a} \cdot \vec{b}$, где c – число (скалярная величина) – скалярное произведение)

Длина вектора $|\vec{c}| = |[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$ равна площади параллелограмма, образованного исходными векторами.

Вектор $\vec{c}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ образуют «правую тройку»: вращаем винт от первого вектора ($\vec{a}$) ко второму ($\vec{b}$), вектор $\vec{c}$ направлен в сторону «завинчивания».

Свойства векторного произведения:

1) антикоммутативно

$$[\vec{a}, \vec{b}] = -[\vec{b}, \vec{a}]$$

2) умножение на скаляр (число)

$$\alpha[\vec{a}, \vec{b}] = [\alpha\vec{a}, \vec{b}] = [\vec{a}, \alpha\vec{b}]$$

3) дистрибутивно

$$[\vec{c}, (\vec{a} + \vec{b})] = [\vec{c}, \vec{a}] + [\vec{c}, \vec{b}]$$

4) двойное векторное произведение

$$[\vec{a}, [\vec{b}, \vec{c}]] = [[\vec{c}, \vec{b}], \vec{a}] = \vec{b} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} \cdot (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

5) смешанное произведение

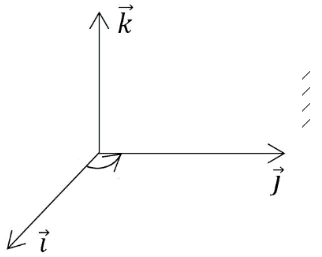
$$\vec{a}\cdot[\vec{b},\vec{c}]=\vec{b}\cdot[\vec{c},\vec{a}]=\vec{c}\cdot[\vec{a},\vec{b}]$$

6) покомпонентная запись

$$[\vec{a},\vec{b}]=\left[\left(a_x\vec{\imath}+a_y\vec{\jmath}+a_z\vec{k}\right),\left(b_x\vec{\imath}+b_y\vec{\jmath}+b_z\vec{k}\right)\right]=$$

$$=a_xb_x[\vec{\imath},\vec{\imath}]+a_xb_y[\vec{\imath},\vec{\jmath}]+a_xb_z[\vec{\imath},\vec{k}]+a_yb_x[\vec{\jmath},\vec{\imath}]+a_yb_y[\vec{\jmath},\vec{\jmath}]+$$

$$+a_yb_z[\vec{\jmath},\vec{k}]+a_zb_x[\vec{k},\vec{\imath}]+a_zb_y[\vec{k},\vec{\jmath}]+a_zb_z[\vec{k},\vec{k}]=$$



$[\vec{a},\vec{a}]=0,$ т. к. $|\vec{a}|\cdot|\vec{a}|\cdot\sin(\widehat{\vec{a},\vec{a}})=a^2\sin 0=0$

$\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2=a^2$

$[\vec{\imath},\vec{\jmath}]=\vec{k}$ – орты ДСК (как и оси) образуют «правую тройку»

$[\vec{\imath},\vec{k}]=-\vec{\jmath};\ \ [\vec{\jmath},\vec{k}]=\vec{\imath}$ и т. д.

$$=a_xb_y\vec{k}-a_xb_z\vec{\jmath}-a_yb_x\vec{k}+a_zb_x\vec{\jmath}-a_zb_y\vec{\imath}+a_yb_z\vec{\imath}=$$

$$=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{\imath}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{\jmath}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}.$$

$$[\vec{a},\vec{b}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\vec{\imath}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{\jmath}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\vec{k}.$$

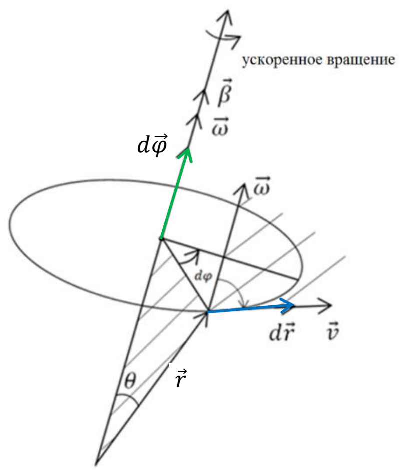
По аналогии с мгновенной скоростью $\vec{v}=\frac{d\vec{r}}{dt}$ и ускорением $\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}$ можно ввести:

$$\vec{\omega}=\frac{d\vec{\varphi}}{dt}\text{ – вектор угловой скорости}$$

$$\vec{\omega}\uparrow\uparrow d\vec{\varphi}$$

$$\omega=\frac{d\varphi}{dt}$$

$$[\omega]=\frac{[d\varphi]}{[dt]}=\frac{\text{рад}}{\text{с}}$$



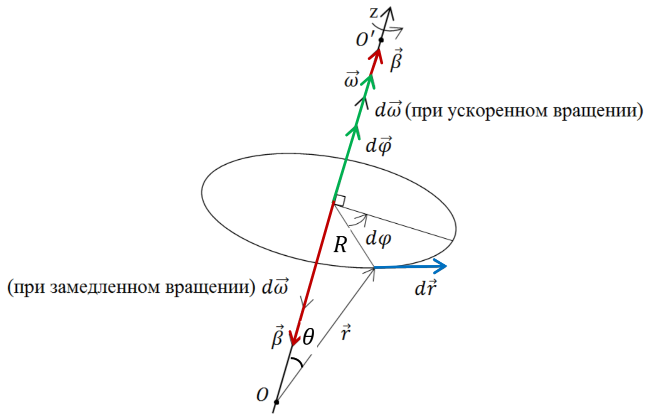
$$\vec{\beta} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} - \text{вектор углового ускорения}$$

$$\vec{\beta} \uparrow\uparrow d\vec{\omega}$$

$$\beta = \pm\frac{d\omega}{dt} - \begin{matrix}\text{ускоренное вращение} \\ \text{замедленное вращение}\end{matrix}$$

При вращении вокруг неподвижной оси вектор углового ускорения также направлен по оси вращения. Его направление может совпадать (при ускоренном вращении) или быть противоположным с направлением вектора угловой скорости (при замедлении).

$$[\beta] = \frac{[d\omega]}{[dt]} = \frac{\text{рад/с}}{\text{с}} = \frac{\text{рад}}{\text{с}^2}$$



Способы решения задач:

$$\varphi = \varphi(t) \ - \text{уравнение вращения}$$

$\downarrow$ дифференцируем $\qquad\qquad$ $\uparrow$ интегрируем

$$\omega = \omega(t)$$

$\downarrow$ дифференцируем $\qquad\qquad$ $\uparrow$ интегрируем

$$\beta = \beta(t)$$

Связь линейных и угловых величин

линейные величины – *полярные* векторы направление определяется самим движением	угловые величины – *аксиальные* векторы (*пвсевдовекторы*) – для определения направления требуется *правило буравчика – дополнительное правило*
$d\vec{r}$	$d\vec{\varphi}$
$\vec{v}$	$\vec{\omega}$
$\vec{a}$	$\vec{\beta}$

Линейная	Связь величин	Угловая
$d\vec{r}$	$d\vec{r} = [d\vec{\varphi}, \vec{r}]$ $\lvert d\vec{r}\rvert = \lvert d\vec{\varphi}\rvert \cdot \underbrace{\lvert\vec{r}\rvert \cdot \sin(\widehat{d\vec{\varphi}, \vec{r}})}_{R} = d\varphi \cdot R$ $\boxed{\lvert d\vec{r}\rvert = Rd\varphi}$	$d\vec{\varphi}$
$\vec{v}$	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{[d\vec{\varphi}, \vec{r}]}{dt} = \left[\frac{d\vec{\varphi}}{dt}, \vec{r}\right] = [\vec{\omega}, \vec{r}]$ $\lvert\vec{v}\rvert = \lvert\vec{\omega}\rvert \cdot \lvert\vec{r}\rvert \cdot \sin(\widehat{\vec{\omega}, \vec{r}}) = \lvert\vec{\omega}\rvert \cdot \underbrace{\lvert\vec{r}\rvert \cdot \sin(\widehat{d\vec{\varphi}, \vec{r}})} = \omega R$ $\boxed{v = \omega R}$	$\vec{\omega}$
$\vec{a}$	$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}[\vec{\omega}, \vec{r}] = \left[\frac{d\vec{\omega}}{dt}, \vec{r}\right] + \left[\vec{\omega}, \frac{d\vec{r}}{dt}\right] = [\vec{\beta}, \vec{r}] + [\vec{\omega}, \vec{v}]$ $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$ *При вращении вокруг неподвижной оси* $\vec{a}_n = [\vec{\omega}, \vec{v}];\ \boxed{a_n = \omega^2 R}$ $\vec{a}_\tau = [\vec{\beta}, \vec{r}];\ \boxed{a_\tau = \beta R}$	$\vec{\beta}$

Вывод формул: $a_n = \omega^2 R,\ a_\tau = \beta R$:

$$d\vec{r} \perp (\vec{\beta}, \vec{r}), \qquad \vec{v} \perp (\vec{\beta}, \vec{r}) \Rightarrow \vec{a}_\tau = [\vec{\beta}, \vec{r}];$$

$$\Rightarrow \vec{a}_n = [\vec{\omega}, \vec{v}];$$

$$|\vec{a}_\tau| = |\vec{\beta}| \cdot |\vec{r}| \cdot \sin\left(\widehat{\vec{\beta}, \vec{r}}\right) = \beta R;$$

$$|\vec{a}_n| = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin\left(\widehat{\vec{\omega}, \vec{v}}\right) = |\vec{\omega}| \cdot |\vec{v}| \cdot \sin 90° = \omega v = \omega^2 R.$$

Можно складывать между собой только векторы одного типа:

$$\cancel{\overrightarrow{v_0} + \vec{\omega} R} \Rightarrow \vec{v}_0 + [\vec{\omega}, \vec{r}] = \vec{v}_0 + \vec{v}.$$