§11. Закон сохранения импульса

Ранее {в §5}, было введено понятие импульса тела как произведение его массы на его скорость: $\vec{p} = m\vec{v}$. Там же выяснили, что в замкнутой системе двух тел (двух МТ) импульс сохраняется.

$$\vec{p}_{\text{сист}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2' = const$$

Импульс каждой точки в отдельности изменяется под действием силы, действующей со стороны другой точки

$$\frac{d\vec{p}_1}{dt} = \vec{F}_{12} \quad \text{и} \quad \frac{d\vec{p}_2}{dt} = \vec{F}_{21},$$

Но суммарный импульс системы сохраняется.

Рассмотрим теперь **не**замкнутую систему N МТ.

Силу, действующую на $i-$ ую точку системы, можно представить в виде суммы всех внешних и внутренних сил, действующих на неё:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{внеш}} + \vec{F}_i^{\text{внутр}} \Leftrightarrow \vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{внеш}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij},$$

II закон Ньютона для i - ой точки:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i^{\text{внеш}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij}.$$

Суммируем по всем точкам системы $i \in (1 \dots N)$:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i^{\text{внеш}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} \right).$$

Левая часть отдельно:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \right) = \frac{d\vec{p}_{\text{сист}}}{dt}$$

Правая часть (1 слагаемое) – результирующая всех внешних сил, действующих на систему

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{внеш}} = \vec{F}^{\text{внеш}}$$

Правая часть (2 слагаемое):

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} \overset{\{\text{см. §10}\}}{=} \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ji}\right) \overset{\{\text{по III з. Ньютона}\}}{=} \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} - \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij}\right) = 0$$

Собираем всё вместе, правая часть = левой части:

$$\boxed{\frac{d\vec{p}_{\text{сист}}}{dt} = \vec{F}^{\text{внеш}}} -$$

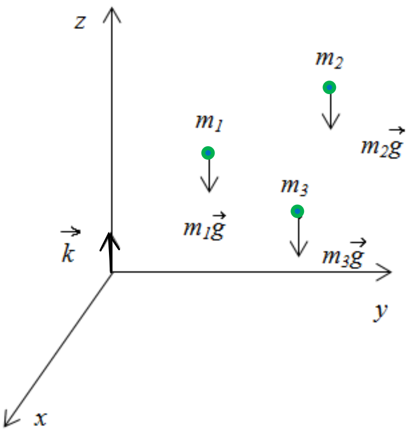
импульс системы МТ может изменяться под действием только внешних сил.

Значит, если система МТ – замкнутая система $\left(\vec{F}^{\text{внеш}} = 0\right)$, то её импульс сохраняется:

$$\frac{d\vec{p}_{\text{сист}}}{dt} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{p}_{\text{сист}} = const} - \text{ЗСИ для замкнутой системы МТ.}$$

Импульс системы – векторная характеристика. У незамкнутой системы МТ может сохраняться не сам импульс в целом, а его проекция на некоторое направление.

Пусть система МТ **не**замкнута, на неё действует внешняя сила, направленная определённым образом, например $\vec{F}^{\text{внеш}} = F_z\vec{k}$.



$$\frac{d\vec{p}_{\text{сист.}}}{dt} = \vec{F}^{\text{внеш.}} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{dp_x}{dt} = F_x^{\text{внеш.}} = 0; & p_x = const \\ \dfrac{dp_y}{dt} = F_y^{\text{внеш.}} = 0; & p_y = const \\ \dfrac{dp_z}{dt} = F_z^{\text{внеш.}} \neq 0; & p_z \neq const \end{cases}$$

Вдоль оси z такой системы импульс сохраняться не будет. А проекции импульса на любое горизонтальной направление p_x, p_y –будут оставаться неизменными, что бы в системе не происходило.

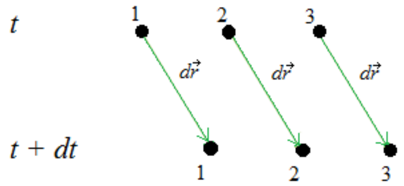
Пример: система МТ находится во внешнем однородном поле силы тяжести:

$$\vec{F}^{\text{внеш}} = \vec{F}_{\text{тяж}} = -mg\vec{k}.$$

$$p_x = const; \;\; p_y = const; \;\; \frac{dp_z}{dt} = -mg$$

ЗСИ – ***как и другие законы сохранения – фундаментальный закон природы.*** Иными словами, он связан с определёнными свойствами симметрии пространства и времени. Закон сохранения импульса является следствием *однородности пространства* (§1).

Покажем, что если бы пространство не обладало свойством однородности, то для замкнутой системы N МТ *ЗСИ* не выполнялся бы. Пусть в некоторый момент времени все точки системы совершат одинаковое перемещение: $d\vec{r}_i = d\vec{r}$.



Вычислим работу, которую совершили внутренние силы системы в результате перемещения точек.

$$\delta A = \sum_{i=1}^{N} \delta A_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot d\vec{r}_i = d\vec{r} \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = d\vec{r} \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = d\vec{r} \cdot \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = d\vec{r} \cdot \frac{d\vec{p}_{\text{сист}}}{dt}.$$

С другой стороны:

- ✓ конфигурация системы (расположение точек) не изменилась (все точки переместились одинаково);
- ✓ в результате перемещения положение системы относительно внешних тел не изменилось (система замкнутая – внешние тела где-то далеко);
- ✓ пространство однородно, перемещение в новое место не изменило свойств системы;
- ✓ и, вообще, ввиду относительности пространства, вполне может быть, что переместились мы, а не система.

Можно сделать вывод, что «тратить» работу было не на что, т.е. $\delta A = 0$.

Следовательно, справедливо следующее:

$$d\vec{r} \cdot \frac{d\vec{p}_{\text{сист}}}{dt} = 0 \underset{\forall d\vec{r} \neq 0}{\Longrightarrow} \frac{d\vec{p}_{\text{сист}}}{dt} = 0 \Longrightarrow \vec{p}_{\text{сист}} = const.$$