# §2. Кинематика материальной точки

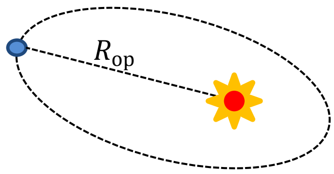
***Кинематика*** – раздел механики, занимающийся описанием движения без изучения его причин.

***Материальная точка (МТ)*** – тело, размерами которого в условиях данного движения можно пренебречь. МТ – понятие относительное, одно и тоже материальное тело при одном движении можно считать МТ, а при другом – нельзя.

Пример:

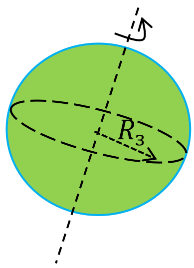
Земля – материальная точка (вращение Земли вокруг Солнца)

Земля – не материальная точка (вращение Земли вокруг собственной оси)

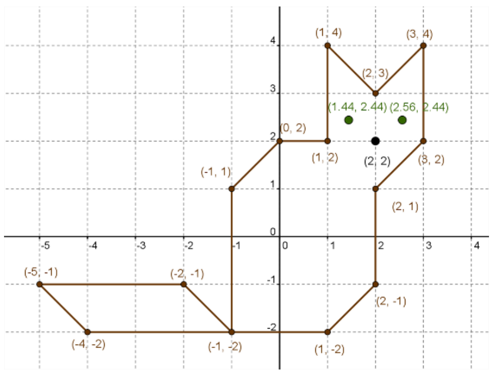



$R_{\text{ор}} = 150\,000\,000$ км

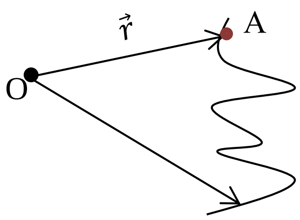
$R_{\text{з}} = 6\,400$ км




Любое тело может быть представлено как система материальных точек:




### *Описание движения через векторы:*




O – точка отсчета

$\vec{r}$ – радиус-вектор

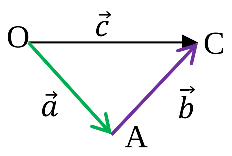
$\vec{r} = \vec{r}(t)$ – уравнение движения (закон движения)

***Траектория*** – линия в пространстве, по которой движется МТ, представляющая собой множество точек, в которых находилась, находится или будет находиться МТ при своём перемещении в пространстве.

---

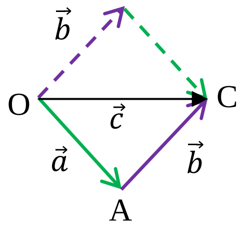
## *Математическое дополнение: векторы*

1. Сложение векторов




$$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AC}$$

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$




Правило треугольника

Правило параллелограмма

2. Умножение на число

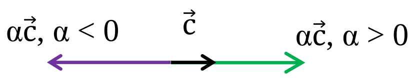
$\sqsupset\ \alpha = \text{const}$

$\vec{c} \longrightarrow$

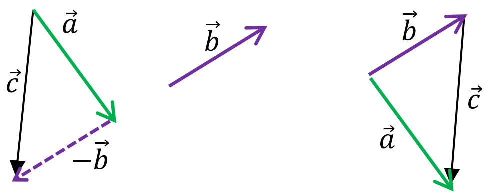
$\alpha\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{c}$, $\alpha > 0$

$\alpha\vec{c} \uparrow\downarrow \vec{c}$, $\alpha < 0$

$|\alpha\vec{c}\,| = |\alpha||\vec{c}\,|$




3. Вычитание

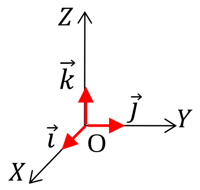



$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-1)\vec{b}$$

4. Запись через единичный вектор

$$\vec{c} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|}|\vec{c}| = \vec{e}c$$

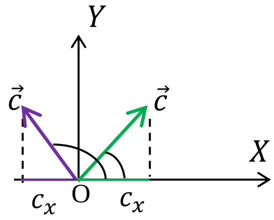

$\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{e}$; $\qquad |\vec{e}| = 1$



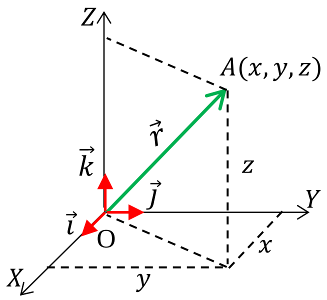

Единичные векторы $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$, совпадающие по направлению с осями $OX, OY$ и $OZ$ соответственно, – орты ДСК

5. Проекция вектора на ось

$$c_x = |\vec{c}|\cos\left(\widehat{\vec{c}, OX}\right) \gtrless 0$$




6. Покомпонентная форма записи вектора




$$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OX} + \overrightarrow{XY} + \overrightarrow{YZ}$$

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

$\sqsupset \quad \vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$

Покомпонентная форма записи суммы векторов

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \left(a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}\right) + \left(b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}\right)$$
$$= (a_x + b_x)\vec{\imath} + \left(a_y + b_y\right)\vec{\jmath} + (a_z + b_z)\vec{k} = c_x\vec{\imath} + c_y\vec{\jmath} + c_z\vec{k}$$

7. Скалярное произведение

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right|\cos\left(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}\right)$$

Покомпонентная форма скалярного произведения

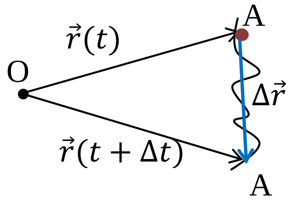
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left(a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}\right) \cdot \left(b_x\vec{\imath} + b_y\vec{\jmath} + b_z\vec{k}\right) = a_x b_x\vec{\imath}\vec{\imath} + \cancelto{0}{a_x b_y\vec{\imath}\vec{\jmath}} + \cancelto{0}{a_x b_z\vec{\imath}\vec{k}} + \cancelto{0}{a_y b_x\vec{\jmath}\vec{\imath}} +$$
$$a_y b_y\vec{\jmath}\vec{\jmath} + \cancelto{0}{a_y b_z\vec{\jmath}\vec{k}} + \cancelto{0}{a_z b_x\vec{k}\vec{\imath}} + \cancelto{0}{a_z b_y\vec{k}\vec{\jmath}} + a_z b_z\vec{k}\vec{k} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

$$\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = \vec{\imath} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{\jmath} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 90° = 0$$

$$\vec{\imath} \cdot \vec{\imath} = \vec{k} \cdot \vec{k} = \vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath} = 1 \cdot 1 \cdot \cos 0° = 1$$

$\vec{r} \cdot \vec{r} = |\vec{r}||\vec{r}|\cos 0° = r^2$ $\qquad$ $\vec{r} \cdot \vec{r} = \left(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}\right) \cdot \left(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}\right) = x^2 + y^2 + z^2$

$$r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$




$\Delta t$ – конечный интервал времени (конечное изменение времени)

$\Delta\vec{r}$ – вектор перемещения (или приращения радиус-вектора; конечное изменение радиус-вектора)

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t+\Delta t) - \vec{r}(t)$$

$\langle\vec{v}\rangle \overset{\text{def}}{=} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}$ – средний вектор скорости

$\langle\vec{v}\rangle \uparrow\uparrow \Delta\vec{r}, \Delta t > 0$

$\Delta t \to dt$

$\Delta\vec{r} \to d\vec{r}$

dt – бесконечно малый интервал времени

d$\vec{r}$ – бесконечно малое приращение радиус-вектора,

бесконечно малое перемещение

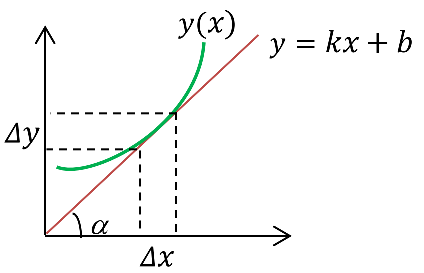
$$\boxed{\vec{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta\vec{t}} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{dt}} = \dot{\vec{r}}}$$ – вектор мгновенной скорости

$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ $\quad\vec{v} \uparrow\uparrow d\vec{r}$, т.е направлен по касательной линии в данном месте траектории

---

## *Математическое дополнение: производная и дифференциал*

$\frac{dy}{dx} = y' = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$ – производная (операция дифференцирования)




$\Delta x \to 0 \qquad dx$

$\Delta y \to 0 \qquad dy$

$k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ – угловой коэффициент прямой $\left(k = \frac{dy}{dx}\right)$

$$tg\alpha = k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$dy = y'dx$ – *дифференциал.*

$dy = y(x+dx) - y(x)$

***Операции с дифференциалами:***

1. Сложение

$$d(f_1 + f_2) = df_1 + df_2$$

2. Умножение на число

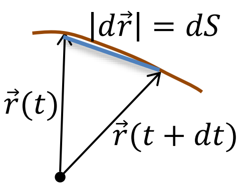
$$d(\alpha f_1) = \alpha df_1$$

3. Дифференциал произведения

$$d(f_1 \cdot f_2) = f_2 df_1 + f_1 df_2$$

---

$$|\langle\vec{v}\rangle| = \left|\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\right| = \frac{|\Delta\vec{r}|}{\Delta t}$$

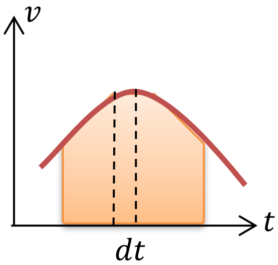



$$\Delta t \to dt$$

$$|d\vec{r}| = dS$$

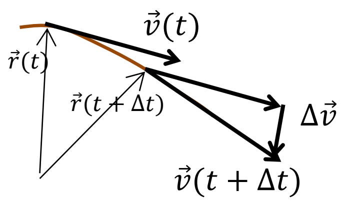
$dS$ – пройденный путь (длина вектора перемещения)

$$\boxed{\begin{gathered} v = |\vec{v}| = \left|\frac{d\vec{r}}{dt}\right| = \frac{|d\vec{r}|}{dt} = \frac{dS}{dt} \\ \Delta\vec{r} = \int d\vec{r} = \int_{t_0}^{t} \vec{v}\,dt \\ \vec{r}(t) - \vec{r}(t_0) = \int_{t_0}^{t} \vec{v}\,dt \\ S = \int dS = \int v dt \end{gathered}}$$




$$v = v(t) \qquad dS = vdt$$

$S = \int dS = \int vdt$ – сумма площадей полоски = площади под графиком v(t)




$$\langle\vec{a}\rangle = \frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} -$$

средний вектор ускорения; $\langle\vec{a}\rangle \uparrow\uparrow \Delta\vec{v}$

$$\Delta t \to dt$$

$$\vec{a} = \lim_{t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \dot{\vec{v}} -$$

вектор мгновенного ускорения; $\vec{a} \uparrow\uparrow d\vec{v}$

$$a = |\vec{a}| = \left|\frac{d\vec{v}}{dt}\right| = \frac{|d\vec{v}|}{dt} -$$

модуль мгновенного ускорения

$$\sqsupset \text{ известно } r = \vec{r}(t)$$

↓ дифференцируем ↑ интегрируем

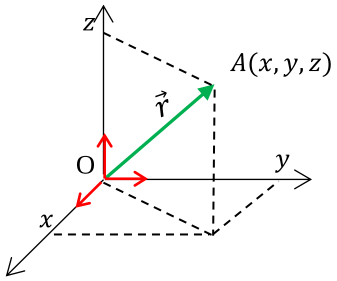
$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v}(t)$$

↓ дифференцируем ↑ интегрируем

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}(t)$$

## *Описание движения через координаты:*

Пусть в пространстве для задания положения тел используется декартовая система координат (ДСК). Используя покомпонентную форму записи вектора $\vec{r}$:




$$r = \vec{r}(t)$$

уравнение движения

$$\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned}\right\} \text{уравнения движения}$$

$\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ – орты ДСК

Вектор мгновенной скорости:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}\right) = \frac{dx}{dt}\vec{\imath} + \frac{dy}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

$$v_x = \frac{dx}{dt} \qquad v_y = \frac{dy}{dt} \qquad v_z = \frac{dz}{dt}$$

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_y^2}$$

Вектор мгновенного ускорения:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v_x\vec{\imath} + v_y\vec{\jmath} + v_z\vec{k}\right) = \frac{dv_x}{dt}\vec{\imath} + \frac{dv_y}{dt}\vec{\jmath} + \frac{dv_z}{dt}\vec{k}$$

$$\vec{a} = a_x\vec{\imath} + a_y\vec{\jmath} + a_z\vec{k}$$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}$$

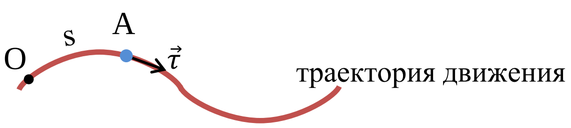
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}\right) = \frac{d^2y}{dt^2}$$

$$a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\right) = \frac{d^2z}{dt^2}$$

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_y^2}$$

## ***Описание движения через параметры траектории («естественные координаты»):***

⊐ уравнение траектории движения известно: $y(x)$ – известная функция




O – точка отчета

$s$ – дуговая координата (пройденный путь)

$s = s(t)$ – уравнение движения

$\vec{\tau}$ – вспомогательный единичный вектор, направленный по касательной прямой в данном месте траектории. При перемещении точки A этот единичный вектор изменяет своё направление, всё время оставаясь касательным к траектории движения, поэтому:

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}(t)$$

Так как вектор мгновенной скорости $\vec{v}$ тоже направлен по касательной к траектории движения, то его можно выразить через единичный вектор $\vec{\tau}$:

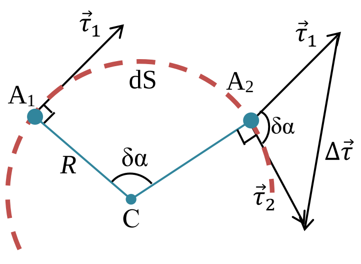
$$\vec{v} = |\vec{v}| \cdot \vec{\tau} = v\vec{\tau}$$

$$\boxed{v = \frac{ds}{dt}}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\vec{\tau}) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{dS} \cdot \frac{dS}{dt} = v\frac{d\vec{\tau}}{dS}$$

Проследим за перемещением точки A в течение малого промежутка времени $dt \to 0$




⇒1→2, $\delta\alpha$ – малый угол

(·)C – центр кривизны траектории

$R$ – радиус кривизны траектории

$$R = R(t)$$

$$\delta\alpha = \frac{dS}{R}$$

$$\left.\begin{matrix}\triangle A_1CA_2 \\ \triangle(\vec{\tau}_1, d\vec{\tau}, \vec{\tau}_2)\end{matrix}\right\} \quad \triangle \text{ подобны} \qquad \begin{matrix}\vec{\tau}_1 \perp A_1C \\ \vec{\tau}_2 \perp A_2C\end{matrix}$$

$$\angle A_1CA_2 = \left(\widehat{\vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2}\right) = \delta\alpha$$

$$\delta\alpha = \frac{ds}{R} = \frac{|d\vec{\tau}|}{|\vec{\tau_1}|} = \frac{|d\vec{\tau}|}{|\vec{\tau_2}|} = \frac{|d\vec{\tau}|}{1}$$

Как направлен вектор $d\vec{\tau}$?

1) способ: $\triangle(\vec{\tau}_1, d\vec{\tau}, \vec{\tau}_2)$ – равнобедренный, значит углы при $d\vec{\tau}$: $\frac{180-\delta\alpha}{2} \to 90° \Longrightarrow d\vec{\tau} \perp \vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2$

2) способ: $\vec{\tau}^2 = 1$

$$d(\vec{\tau}^2) = d(1)$$

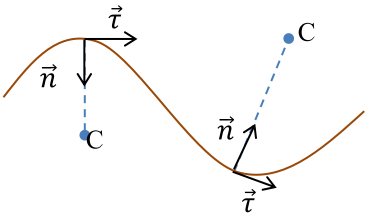
$$2\vec{\tau}d\vec{\tau} = 0 \Rightarrow \cos(\vec{\tau}, d\vec{\tau}) = 0 \;\Rightarrow\; \widehat{\vec{\tau}, d\vec{\tau}} = 90° \Longrightarrow d\vec{\tau} \perp \vec{\tau}_1, \vec{\tau}_2 \Longrightarrow$$

в любой точке траектории $d\vec{\tau} \,||\, R$ (можно считать, что он смотрит на центр кривизны траектории (·)С в этом месте) $\Longrightarrow d\vec{\tau} \perp \vec{\tau}$,

тогда ∃ ещё один вспомогательный единичный вектор – вектор нормали $\vec{n}$:

$\vec{n} \perp \vec{\tau}$;  $|\vec{n}| = 1$.

Воспользуемся правилом записи вектора через единичный вектор:




$$d\vec{\tau} = |d\vec{\tau}| \cdot \vec{n}$$

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = v\frac{d\vec{\tau}}{dS} = v\frac{|d\vec{\tau}| \cdot \vec{n}}{dS} = \frac{v}{R}\vec{n}$$

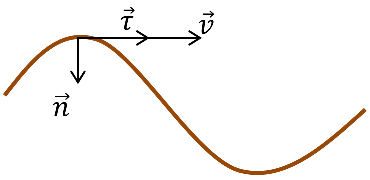
$$\vec{a} = \dots = \underbrace{\frac{dv}{dt}}_{a_\tau}\vec{\tau} + \underbrace{v\frac{d\vec{\tau}}{dt}}_{a_n} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\vec{n} -$$

вектор полного ускорения

$a_\tau$ – тангенциальное ускорение $\boxed{a_\tau = \frac{dv}{dt} \gtrless 0}$

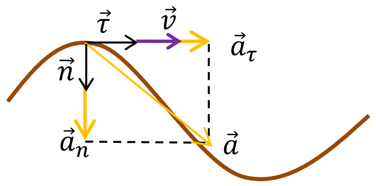
$a_\tau$ отвечает за изменение величины вектора $\vec{v}$, $a_\tau \parallel \vec{\tau}$.

$a_n$ – нормальное ускорение $\boxed{a_n = \frac{v^2}{R} > 0}$




$\vec{a}_n \uparrow\uparrow \vec{n}$;  $\vec{v} \perp \vec{n}\ (\vec{a}_n)$

$\vec{a}_n$ меняет направление вектора скорости $\vec{v}$, но не величину.




$$\boxed{a = \sqrt{{a_n}^2 + {a_\tau}^2}}$$

Если точка движется равномерно по окружности:

$(\cdot)$C, $R\ =\ const$ и $v = const \Longrightarrow a_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$

$$\vec{a} = a_n \cdot \vec{n} = \frac{v^2}{R}\vec{n}$$

Если точка движется ускоренно по прямой ($R\ =\ \infty$):

$$a_n = \frac{v^2}{R} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \vec{a} = a_\tau \vec{\tau} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau}$$