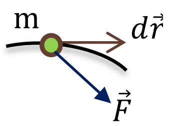
§7. Кинетическая энергия. Работа

Как уже говорилось в § 5 задачей механики является определение закона сил, действующих на тело, и последующее определение закона движения тела. Однако детальное описание поведения тела (системы МТ) с помощью уравнений движения часто бывает затруднительно: из-за сложности самой системы или из-за незнания закона силы (такое тоже бывает). В таких задачах требуется иной подход к описанию движения. Этот подход опирается на *законы сохранения* (его ещё называют энергетическим способом описания движения, в отличие от того, о чём говорилось выше – силового способа).

Рассмотрим сначала МТ массы m, которая под действием силы $\vec{F}$ совершает малое (= бесконечно малое) перемещение $d\vec{r}$.



$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$$

$$d\vec{r}\cdot m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$m\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot d\vec{r} = m\cdot d\vec{v}\cdot\frac{d\vec{r}}{dt} = m\cdot d\vec{v}\cdot\vec{v} = m\vec{v}\cdot d\vec{v}$$

$$\{\vec{v}d\vec{v} = \left(v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}\right)\cdot\left(dv_x\vec{i} + dv_y\vec{j} + dv_z\vec{k}\right) = v_x dv_x\vec{i}^2 + v_x dv_y(\vec{i}\vec{j}) + \cdots =$$

$$= v_x dv_x + v_y dv_y + v_z dv_z = d\frac{v_x^2}{2} + d\frac{v_y^2}{2} + d\frac{v_z^2}{2} = \frac{1}{2}d\left(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2\right) = \frac{dv^2}{2}\}$$

Тогда левая часть:

$$m\vec{v}d\vec{v} = m\frac{dv^2}{2} = d\left(\frac{mv^2}{2}\right) \stackrel{\text{def}}{=} dE_{\text{кин}}$$

$dE_{\text{кин}}$ – малое изменение кинетической энергии точки.

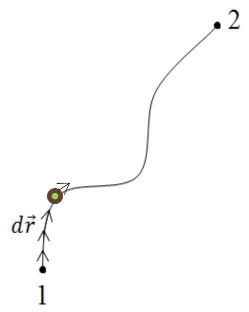
Кинетическая энергия: $\boxed{E_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2} = \frac{(mv)^2}{2m} = \frac{p^2}{2m}.}$

Правая часть выражения: $\vec{F}d\vec{r} \stackrel{\text{def}}{=} \delta A$

δA – малая работа силы (или малое количество работы), скалярное произведение силы на малое перемещение точки.

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \vec{F}d\vec{r}$$

В результате малого перемещения точки: $\boxed{dE_{\text{кин}} = \delta A}$ (1)



Пусть теперь наша точка проходит путь конечной длины из положения 1 в положение 2. Его можно представить как сумму малых перемещений $d\vec{r}$, для каждого из которых справедливо выражение (1). Таким образом, для конечного пути справедливым можно считать следующее выражение:

$$\int_1^2 dE_{\text{кин}} = \int_1^2 \delta A$$

{при суммировании бесконечного числа бесконечно малых слагаемых знак суммы заменяется на интеграл}

$$\int_1^2 dE_{\text{кин}} = \int_1^2 d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = \frac{m{v_2}^2}{2} - \frac{m{v_1}^2}{2} = E_{\text{кин}2} - E_{\text{кин}1} = \Delta E_{\text{кин}}$$

$$\int_1^2 \delta A = \int_1^2 \vec{F} d\vec{r} = A_{12}.$$

Приращение кинетической энергии при перемещении материальной точки равно работе силы, действующей на эту точку:

$$\boxed{\Delta E_{\text{кин}} = A_{12}} \qquad (1')$$

(1′) – интегральная форма записи теоремы о кинетической энергии, (1) – её дифференциальная форма.

Если на точку действует несколько сил: $\vec{F} = \vec{F_1} + \vec{F_2} + \cdots = \sum_{i=1}^{N} \vec{F_i}$;

$\delta A = \vec{F} d\vec{r} = \vec{F_1} d\vec{r} + \vec{F_2} d\vec{r} + \cdots = \delta A_1 + \delta A_2 + \cdots$ то малая работа равна сумме малых работ каждой действующей силы. И для пути конечной длины $A = \int_1^2 \delta A = A_1 + A_2 + \cdots$ – сумме работ всех сил на этом пути.

Единицей работы и энергии в системе СИ является Джоуль:

$$[A] = [E_{\text{кин}}] = [F]\,[dr] = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

Один джоуль есть работа силы в один ньютон на перемещении в один метр при условии, что направление силы совпадает с направлением перемещения.

Работа, совершенная в единицу времени, называется мощностью:

$$N = \boxed{P = \frac{\delta A}{dt}} = \frac{\vec{F} d\vec{r}}{dt} = \boxed{\vec{F}\vec{v}.}$$

Её единицами является джоуль на секунду или ватт (Вт): $[P] = \frac{[A]}{[t]} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт}$.

$\text{E}_{\text{кин}}(\vec{r}, \vec{v}) -$ функция состояния. Конечное изменение любой функции состояния обозначается Δ: $\Delta\text{E}_{\text{кин}}$, малое изменение функции состояния – d: $d\text{E}_{\text{кин}}$.

Поскольку работа получается суммированием по многим перемещениям: $A_{12} = \int_1^2 \delta A$, т.е. по многим состояниям, то в общем случае работа зависит от того, как меняется состояние. *Любое изменение состояния называется процессом*. Таким образом, в общем случае работа является функцией процесса. И, следовательно, *работа*, совершаемая при перемещении МТ, *зависит от формы* её *траектории*.

$A_{12} -$ функция процесса, малое количество функции процесса – δ: δA.

Полученная результат (1′) без труда обобщается на случай произвольной системы материальных точек. Кинетическая энергия системы МТ – сумма кинетических энергий МТ, из которых эта система состоит $\text{E}_{\text{кин}} = \sum_{i=1}^{N} E_{\text{кин}}^{i}$. Так как для любой из МТ системы справедливо выражение:

$$\Delta E_{\text{кин}}^{i} = E_{\text{кин}2}^{i} - E_{\text{кин}1}^{i} = A_{12}^{i}.$$

то сложив эти выражения для всех N точек системы, получим:

$$\text{E}_{\text{кин}2} - \text{E}_{\text{кин}1} = \sum_{i=1}^{N} E_{\text{кин}2}^{i} - \sum_{i=1}^{N} E_{\text{кин}1}^{i} = \sum_{i=1}^{N} \left(E_{\text{кин}2}^{i} - E_{\text{кин}1}^{i}\right) = \sum_{i=1}^{N} A_{12}^{i} = A_{12}.$$

$$\boxed{\Delta\text{E}_{\text{кин}} = A_{12}}$$

Под A_{12} теперь надо понимать сумму работ всех сил, как внутренних, так и внешних, действующих на материальные точки системы. Таким образом,

приращение кинетической энергии системы материальных точек равно работе всех сил, действующих на эту систему – теорема о кинетической энергии.