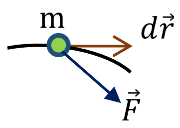
§10. Закон сохранения энергии (ЗСЭ)

Законы сохранения – фундаментальные физические законы, согласно которым при определённых условиях некоторые физические величины, характеризующие замкнутую физическую систему, не изменяются с течением времени. Являются наиболее общими законами в любой физической теории.

Рассмотрим МТ, движущуюся в стационарном поле консервативных сил.

Стационарное силовое поле – силовое поле, в котором величина и направление силы, зависят только от точки пространства $\vec{r}$ и не зависят от времени.



Силы поля на этом перемещении совершают работу $\delta A = dE_{кин}$ {см. §7}

Т.к. силы консервативны, то работа, совершаемая силами, приводит к убыли потенциальной энергии МТ $\delta A = -\,dE_{пот}$ {см. §9}

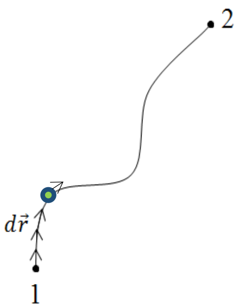
$$dE_{кин} = -\,dE_{пот} \qquad \text{или} \qquad d(E_{кин} + E_{пот}) = 0$$

Сумму кинетической и потенциальной энергий называют *полной механической энергией* тела

$$E_{кин} + E_{пот} \stackrel{\text{def}}{=} E_{мех}$$

$$dE_{мех} = 0 \implies E_{мех} = const$$

Если МТ проходит путь конечной длины из положения 1 в положение 2 всё в том же поле,



то $A_{12} = \Delta E_{кин} = E_{кин2} - E_{кин1}$ и

$$A_{12} = A_{12}^{гир} + A_{12}^{конс} = -\,\Delta E_{пот} = E_{пот1} - E_{пот2}$$

$$E_{кин2} - E_{кин1} = E_{пот1} - E_{пот2}$$

$$E_{кин1} + E_{пот1} = E_{кин2} + E_{пот2}$$

$$\boxed{E_{мех1} = E_{мех2}} \qquad \boxed{E_{мех} = const} \qquad \textbf{ЗСЭ}$$

В стационарном поле консервативных сил механическая энергия МТ остаётся неизменной – закон сохранения энергии.

Допустим теперь, что в пространстве, где точка проходит путь конечной длины наряду с консервативными силами, действуют также и диссипативные силы.

$$A_{12} = A_{12}^{всех\ сил} = \Delta E_{кин}$$

$$A_{12} = A_{12}^{\text{конс}} + A_{12}^{\text{дис}} = -\Delta E_{\text{пот}} + 0 + A_{12}^{\text{дис}}$$

$$\Delta E_{\text{кин}} = -\Delta E_{\text{пот}} + 0 + A_{12}^{\text{дис}}$$

$$\Delta E_{\text{мех}} = A_{12}^{\text{дис}}$$

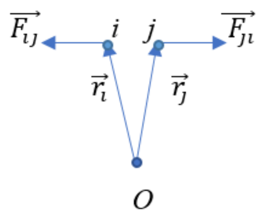
Таким образом, в рассматриваемом случае механическая энергия МТ не остаётся постоянной, а уменьшается, т.к. работа диссипативных сил отрицательна $A_{12}^{\text{дис}} < 0.$ {см. §8}

ЗСЭ – ***как и другие законы сохранения - фундаментальный закон природы.*** Иными словами, он связан с определёнными свойствами симметрии пространства и времени. Закон сохранения энергии является следствием *однородности времени* (§1). Если бы время не было однородным, то потенциальная энергия в разные моменты времени была бы различной и ЗСЭ не выполнялся:

$$dE_{\text{мех}} = \frac{\partial E_{\text{пот}}}{\partial t} dt.$$

Перейдём теперь к системе, состоящей из N МТ. Пусть силы, действующие на нашу систему извне, – только консервативные, иначе говоря, система находится в стационарном поле внешних консервативных сил.

Внутренние же силы системы, силы с которыми точки взаимодействуют друг с другом, консервативные центральные силы (§8).



Сначала рассмотрим взаимодействие между парой точек системы (i и j, к примеру): $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ (по III з. Ньютона).

Работа, совершаемая силами взаимодействия между точками этой пары, при их перемещении на $d\vec{r_i}$ и $d\vec{r_j}$ соответственно, равна сумме работ:

$$\delta A = \delta A_i + \delta A_j = \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_i + \vec{F}_{ji} \cdot d\vec{r}_j = \vec{F}_{ij} \cdot \left(d\vec{r}_i - d\vec{r}_j\right) = \vec{F}_{ij} \cdot d\vec{r}_{ij} = \delta A_{ij}^{\text{конс}} = -dE_{\text{пот}_{ij}}^{\text{взаим}},$$

где $d\vec{r}_{ij} -$ относительное перемещение точек.

Т.к. $\vec{F}_{ij} -$ консервативные силы, то $-dE_{\text{пот}_{ij}}^{\text{взаим}} -$ убыль потенциальной энергии взаимодействия рассматриваемой пары точек. В следствии свойства парности сил $E_{\text{пот}ij}$ будет зависеть только от расстояния между этими двумя точками.

Рассмотрим теперь одну i-ую точку системы. Силу, действующую на неё, можно представить в виде суммы всех внешних и внутренних сил:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{\text{внеш}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij}$$

II закон Ньютона для этой точки:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i$$

Умножим его на её малое перемещение $d\vec{r}_i$:

$$\frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i = \left(\vec{F}_i^{\text{внеш}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j=\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} \right) \cdot d\vec{r}_i$$

и просуммируем по всем точкам системы от 1 до N:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i^{\text{внеш}} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} \right) \cdot d\vec{r}_i$$

Левая часть:

$$\sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} d\vec{p}_i \cdot \frac{d\vec{r}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} d(m_i \vec{v}_i)\vec{v}_i \overset{\{\text{см. §7}\}}{=} \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot d\left(\frac{v_i^2}{2}\right) = \sum_{i=1}^{N} d\left(\frac{m_i v_i^2}{2}\right) =$$

$$= d\left(\sum_{i=1}^{N} E_{\text{кин}_i}\right) =$$

$= dE_{\text{кин}}$ − изменение кинетической энергии системы наших точек.

Правая часть 1:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{\text{внеш}} \cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \delta A_i^{\text{конс}} = \sum_{i=1}^{N} (-dE_{\text{пот}\,i}^{\text{внеш}}) = -dE_{\text{пот}}^{\text{внеш}}$$

Правая часть 2:

Вспомним свойства двойных сумм: перестановка индексов суммирования приводит к престановке слагаемых в сумме, но результат суммирования не меняет

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ij}\cdot d\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ji}\cdot d\vec{r}_j$$

Воспользуемся этим свойством:

$$\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ij}\cdot d\vec{r}_i = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ij}\cdot d\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ji}\cdot d\vec{r}_j\right) = \{\text{по III з. Ньютона}\}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ij}\cdot d\vec{r}_i - \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ij}\cdot d\vec{r}_j\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ij}\left(d\vec{r}_i - d\vec{r}_j\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ij}\cdot d\vec{r}_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\left(\delta A_{ij}^{\text{конс}}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\left(-dE_{\text{пот}_{ij}}^{\text{взаим}}\right) =$$

$$= -d\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}E_{\text{пот}_{ij}}^{\text{взаим}}\right) = -dE_{\text{пот}}^{\text{взаим}}$$

Вся правая часть после преобразований:

$-dE_{\text{пот}}^{\text{внеш}} - dE_{\text{пот}}^{\text{взаим}} = -d(E_{\text{пот}}^{\text{внеш}} + E_{\text{пот}}^{\text{взаим}}) = -dE_{\text{пот}}$ –убыль полной потенциальной энергии системы.

Собираем всё вместе, правая часть = левой части:

$$dE_{\text{кин}} = -dE_{\text{пот}}$$

$$d(E_{\text{кин}} + E_{\text{пот}}) = 0$$

$$dE_{\text{мех}} = 0 \Rightarrow \boxed{E_{\text{мех}} = const} \quad \textbf{(ЗСЭ)}$$

В системе с одними только консервативными силами механическая энергия остаётся неизменной. Могут происходить лишь превращения потенциальной энергии в кинетическую и обратно, но полный запас энергии измениться не может – закон сохранения энергии системы в механике.

$$E_{\text{пот}}^{\text{взаим}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} E_{\text{пот}_{ij}}^{\text{взаим}} -$$

потенциальная энергия взаимодействия системы МТ (собственная потенциальная энергия).

Команда	«Ветер»	«Ураган»	«Тайфун»	«Торнадо»
«Ветер»		2:0	3:1	1:4
«Ураган»	~~0:2~~		2:2	3:1
«Тайфун»	~~1:3~~	~~2:2~~		3:3
«Торнадо»	~~4:1~~	~~1:3~~	~~3:3~~	

Взаимодействие между точками системы легко представить с помощью турнирной таблицы спортивных игр. Команда сама с собой не играет (если только на тренировке) – выбрасываем элементы с диагонали таблицы. Точка системы сама с собой не взаимодействует – выбрасываем из суммы слагаемые с индексами $j = i$). Игра «Урагана» с «Тайфуном» тоже самое что и игра «Тайфуна» с «Ураганом». Соответственно игр в таблице в два раза меньше, чем прямоугольников с баллами. Отсюда и в нашей двойной сумме коэффициент $\frac{1}{2}$: $E_{\text{пот}_{ij}}^{\text{взаим}} = E_{\text{пот}_{ji}}^{\text{взаим}}$.

Если на систему МТ наряду с консервативными силами действуют также диссипативные силы, то механическая энергия системы будет уменьшаться $\boxed{\Delta E_{\text{мех}} = A^{\text{дис}} < 0.}$ Это положение является несколько формальным, поскольку не раскрывает универсальный смысл закона сохранения энергии: *энергия никогда не создаётся и не уничтожается, она может только переходить из одной формы в другую или обмениваться между отдельными частями материи*. При этом понимается расширенное понятие энергии (не только механическая). Так, например, сила трения, действующая в системе, может переводить кинетическую энергию в тепловую (внутреннюю) энергию системы.