

# Descomposición de Flutter en Modales Básicos de Vibración Aeroelástica en Superficie Alar

Matemáticas Especiales

1<sup>st</sup> Oscar Andrés Abaunza  
*Facultad de Ingeniería*  
*Universidad de Antioquia*  
El Carmen de Viboral, Colombia  
oscar.abaunzam@udea.edu.co

2<sup>nd</sup> Juan Diego Ospino  
*Facultad de Ingeniería*  
*Universidad de Antioquia*  
El Carmen de Viboral, Colombia  
juan.ospinor@udea.edu.co

**Resumen**—El artículo se centra en el estudio del comportamiento aeroelástico de superficies alares, donde las vibraciones surgen de la interacción entre el flujo de aire y la geometría del ala. Se utiliza la Transformada Rápida de Fourier para descomponer estas vibraciones en modos fundamentales, cruciales para el diseño aerodinámico. El proceso implica un análisis numérico para resolver ecuaciones diferenciales resultantes del análisis matemático que explica el “Flutter”.

Este estudio aporta al entendimiento y control de las vibraciones aeroelásticas en superficies alares, aspecto crítico en la ingeniería aeroespacial y el diseño de aeronaves. Los resultados pueden mejorar la seguridad y eficiencia de vuelo al optimizar las características aerodinámicas de las alas.

En resumen, el artículo analiza el comportamiento aeroelástico mediante técnicas numéricas y matemáticas para comprender y mitigar las vibraciones en superficies alares, con implicaciones significativas en la industria aeroespacial.

**Index Terms**—Aeroespacial, Aerodinámica, Análisis numérico, Diseño aeronáutico, Transformada de Fourier, Modelo matemático.

## I. INTRODUCCIÓN

La vibración aeroelástica constituye un fenómeno fundamental en la ingeniería aeroespacial que implica la interacción compleja entre la estructura de una superficie alar y el flujo de aire circundante. Entre las formas más críticas de vibración aeroelástica se encuentra el “Flutter”, un fenómeno oscilatorio autoexcitado que puede tener consecuencias devastadoras en la integridad y el rendimiento de aeronaves y estructuras aerodinámicas. Este artículo desarrolla una metodología para estudiar el fenómeno aeroelástico de manera numérica, basada en las ecuaciones propuestas por S. Hulshoff (Aeroelasticity) [4].

El enfoque del artículo se centra en el estudio de la vibración aeroelástica en superficies alares y, particularmente, en el análisis del fenómeno del “Flutter”. Para comprender y caracterizar este fenómeno de manera efectiva, es esencial descomponer las vibraciones resultantes en sus modos básicos. Estos modos básicos representan patrones de vibración fundamentales que son críticos para el diseño y la seguridad de aeronaves y estructuras similares.

A lo largo de este artículo, se explora en detalle el proceso de descomposición del “Flutter” en modos básicos de vibración aeroelástica utilizando la Transformada Rápida de Fourier, así como técnicas de análisis numérico y matemático propuestas para la validación de los resultados. El objetivo es proporcionar una comprensión más profunda de este fenómeno y su importancia en la ingeniería aeroespacial, con la esperanza de contribuir al desarrollo de estrategias efectivas de mitigación de riesgos y diseño aerodinámico más seguro y eficiente.

## II. REVISIÓN DE LITERATURA

- **Aeroelasticity:** “S. Hulshoff (2010) proporciona conferencias sobre la aeroelasticidad (AE4-930) en la Universidad de Tecnología de Delft en forma de apuntes de clase.” [4]
- **Designing the Next Generation of Aircraft with Simulation:** la industria aeroespacial construye las máquinas más complejas en la Tierra, como el Boeing 787 Dreamliner, que consta de más de 2 millones de piezas. La simulación numérica desempeña un papel crucial en el diseño y mantenimiento de estas máquinas debido a su alta complejidad. El artículo se basa en observaciones del autor como director de la industria aeroespacial para ANSYS y resume una introducción a un taller sobre ingeniería flexible para aeronaves ecológicas. [1]
- **Aeroelastic Wind Tunnel Tests of the RIBES Wing Model:** se realizaron pruebas de aeroelasticidad en un modelo de media ala en un túnel de viento para recopilar datos sobre fuerzas aerodinámicas y tensiones. Estos datos se utilizaron para validar enfoques de Interacción Fluido-Estructura para diseño aeronáutico. El objetivo era generar una base de datos significativa para problemas de diseño realistas y los resultados están disponibles para la comunidad científica en línea. [9]

- **Validation of High Fidelity Computational Methods for Aeronautical FSI Analyses:** este artículo compara y valida dos métodos computacionales para estudiar problemas de aeroelasticidad en aeronaves. El primer método utiliza acoplamiento bidireccional con morfología de malla y mapeo de cargas entre solucionadores CFD y FEM. El segundo método incorpora modos estructurales directamente en el solucionador CFD. Ambos métodos se validaron con éxito en un caso de prueba de aeroelasticidad estática y mostraron buen acuerdo con datos experimentales. [3]
- **High-Fidelity Static Aeroelastic Simulations of the Common Research Model:** el diseño actual de aeronaves, con estructuras más flexibles debido a materiales modernos y alas delgadas, puede generar efectos aeroelásticos significativos, especialmente en el régimen transónico. Las herramientas de análisis aeroelástico comunes suelen basarse en teorías lineales y no pueden capturar estos efectos no lineales. Este artículo presenta un primer paso en el desarrollo de una herramienta de simulación aeroelástica de alta fidelidad que permite simulaciones estáticas acoplando la dinámica de fluidos computacional y análisis de elementos finitos. Se estudia un caso de simulación estática aeroelástica en condiciones transónicas y se demuestra una buena concordancia en las propiedades aerodinámicas del ala modelo en equilibrio estático. [8]
- **Aero-elastic Simulations Using the NSMB CFD Solver Including results for a Strut Braced Wing Aircraft:** hace más de 10 años, se invirtió en ampliar el software NSMB para simulaciones de interacción fluido-estructura (FSI). Recientemente, se acopló con el entorno de análisis de elementos finitos B2000++, permitiendo simulaciones FSI estáticas y dinámicas sin interrupciones. Se presentarán resultados de simulaciones aeroelásticas para diversas configuraciones, incluyendo la aeronave MDO y alas AGARD445.6. [11]
- **Semi-Analytical Modeling of Non-stationary Fluid-Structure Interaction:** este capítulo presenta una metodología semi-analítica desarrollada en la última década y media para modelar la interacción entre fluidos y estructuras delgadas sumergidas o llenas de fluido. Se destaca el marco teórico y se ilustra su aplicación en un problema industrial de interacción fluido-estructura, específicamente analizando la respuesta de un cilindro sumergido ante una onda de choque de doble frente. Se comparan resultados obtenidos con versiones 2D y 3D de la metodología, resaltando las diferencias entre enfoques de menor y mayor fidelidad. [5]
- **Fluid Structure Modelling of Ground Excited Vibrations by Mesh Morphing and Modal Superposition:** este artículo presenta un enfoque numérico para modelar con precisión las vibraciones inducidas por el suelo de una estructura interactuando con el flujo de fluido circundante. Utiliza funciones de base radial para incorporar los modos estructurales en la malla del modelo CFD, permitiendo una solución FSI en el tiempo. El método se valida mediante un ejemplo de una viga vibrante en aire, demostrando resultados comparables con soluciones analíticas y un solucionador FEA estándar. [7]
- **Unsteady FSI Analysis of a Square Array of Tubes in Water Crossflow:** este artículo se centra en el análisis numérico de inestabilidades fluido-estructura en un conjunto de tubos flexibles expuestos a flujo cruzado turbulento de agua, con aplicaciones en la industria nuclear. Utiliza un enfoque de Interacción Fluido-Estructura (FSI) no estacionario y técnicas de morfología de malla basadas en Funciones de Base Radial (RBF). Los resultados numéricos concuerdan satisfactoriamente con datos experimentales y se identifica la velocidad de flujo cruzado operativa para el funcionamiento estable de los tubos. Este enfoque ofrece una herramienta efectiva para predecir problemas de FSI en aplicaciones industriales con suposiciones de comportamiento estructural lineal. [2]
- **Risk Measures Applied to Robust Aerodynamic Shape Design Optimization:** se describe y aplica un método de Optimización de Diseño Robusto (RDO) basado en la medida de riesgo CVaR a un problema de diseño aerodinámico. Este enfoque produce soluciones de diseño resistentes a tolerancias de producción y condiciones de operación inestables. Se compara con un método determinístico clásico para analizar ventajas y desventajas. [10]
- **Aero-structural Optimization of a MALE Configuration in the AGILE MDO Framework:** los aviones, especialmente los militares, son sistemas complejos y la demanda de plataformas de vuelo de alto rendimiento está en constante crecimiento. El desarrollo de aeronaves es multidisciplinario y depende cada vez más de la simulación por computadora para tomar decisiones clave en las fases iniciales de diseño. La colaboración entre equipos multidisciplinarios y organizaciones es esencial para abordar los desafíos, como la interacción entre diferentes propiedades de las disciplinas. Un estudio multidisciplinario de un UAV realizado por ocho socios en Europa ejemplifica estos avances. [6]

### III. METODOLOGÍA

A continuación, se describen las fases en las cuales se analiza el comportamiento del Flutter Aeroelástico: en una primera parte se desarrolla el modelo matemático que representa el movimiento físico del sistema. En una segunda parte, se propone la solución numérica de las

ecuaciones diferenciales mediante diferencias finitas en el dominio del tiempo. En una tercera parte, se lleva a cabo el análisis del fenómeno físico en el dominio de frecuencia utilizando la Transformada Rápida de Fourier (FFT) para conocer los modos básicos de la vibración. Y finalmente, el análisis modal proporcionado por el software Ansys para visualizar el comportamiento de la vibración descompuesta en sus fundamentales.

### III-A. Modelo Aerodinámico

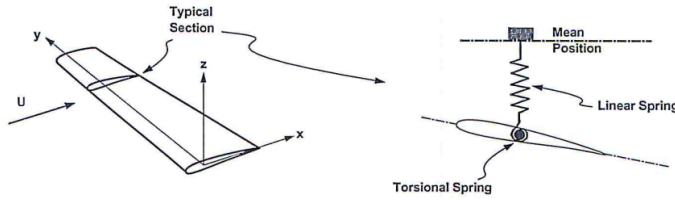


Figura 1: Sección Típica de un Ala [4]

**III-A1. La Sección Típica:** para una demostración estática y dinámica del problema aeroelástico, es suficiente considerar una sección alar en 2 dimensiones la cual está suspendida usando dos resortes. Esto se hace con el objetivo de aproximar las características estructurales, geométricas, propiedades máscas y parámetros aerodinámicos de un ala completa. Esta sección crítica está ubicada en el 75 % de la longitud del ala. [4]

El centro de rotación se refiere a EA, abreviatura de eje elástico. Esta terminología proviene de alas tridimensionales, para las cuales se puede considerar como la línea que se extiende a lo largo de la envergadura y que conecta el centro de rotación de cada sección.

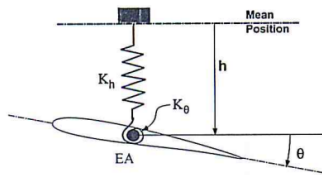


Figura 2: Parámetros Estructurales [4]

- EA : Eje elástico
- h : Deflexión
- $\theta$  : Deformación por torsión
- $K_h$  : Rigidez de flexión
- $K_\theta$  : Rigidez de torsión

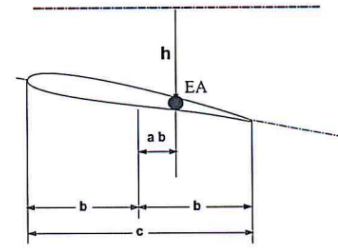


Figura 3: Parámetros Geométricos [4]

- b : Media cuerda
- c : Cuerda
- a : Desplazamiento de EA desde b
- S : Área de referencia

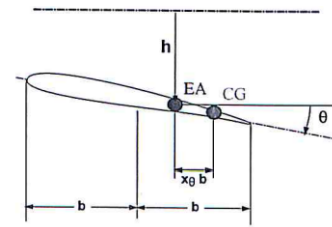


Figura 4: Parámetros de Masa [4]

- CG : Centro de gravedad
- $x_\theta$  : Desplazamiento de CG desde EA
- m : Masa
- $S_\theta$  : Momento estático respecto EA
- $r_{\theta b}$  : Radio de giro sobre EA
- $I_\theta$  : Momento de inercia respecto a EA ( $mr_\theta^2 b^2$ )

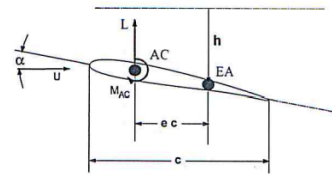


Figura 5: Parámetros Aerodinámicos [4]

- U : Velocidad del flujo
- AC : Centro Aerodinámico
- e : Factor de excentricidad
- $\alpha$  : Ángulo de ataque
- L : Fuerza de sustentación
- $M_{AC}$  : Momento sobre AC
- q : Presión dinámica ( $\frac{1}{2}\rho U^2$ )

**III-A2. Modelo Aerodinámico Estacionario:** el problema de las fluctuaciones es considerado como un movimiento de 2 grados de libertad (2DOF); estos corresponden a la deflexión y la torsión.

La fuerza aerodinámica de sustentación y el momento flector están denotados por:

$$L(t) = qSC_{L_\alpha}\theta(t) \quad (1)$$

$$M_{EA}(t) = e2bqSC_{L_\alpha}\theta(t) \quad (2)$$

Las ecuaciones de movimiento pueden ser escritas como:

$$m\ddot{h} + S_\theta\ddot{\theta} + K_h h + qSC_{L_\alpha}\theta(t) = 0 \quad (3)$$

$$S_\theta\ddot{h} + I_\theta\ddot{\theta} + K_\theta\theta - e2bqSC_{L_\alpha}\theta(t) = 0 \quad (4)$$

Reescribiendo en forma matricial,

$$[M]\ddot{x} + ([K] - q[A_0])x = 0 \quad (5)$$

Con  $x = [h(t), \theta(t)]$ ,

$$[M] = \begin{bmatrix} m & S_\theta \\ S_\theta & I_\theta \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} K_h & 0 \\ 0 & K_\theta \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$[A_0] = \begin{bmatrix} 0 & -SC_{L_\alpha} \\ 0 & 2SebC_{L_\alpha} \end{bmatrix} \quad (8)$$

**III-A3. Modelo Aerodinámico de Baja Frecuencia:** este modelo representa un análisis más robusto y conlleva un efecto más profundo en el análisis de flutter. Esto puede ser considerado teniendo en cuenta el modelo aerodinámico de baja frecuencia, así:

$$[M]\ddot{x} - \frac{q}{U}[A_1]\dot{x} + ([K] - q[A_0])x = 0 \quad (9)$$

Donde  $x = [h(t), \theta(t)]$ ,

$$[A_1] = \begin{bmatrix} -SC_{L_\alpha} & 0 \\ 2SebC_{L_\alpha} & 0 \end{bmatrix} \quad (10)$$

### III-B. Solución con Integración Numérica

Este método se basa en diferencias finitas, el cual requiere expresar un sistema de  $N$  ecuaciones diferenciales de segundo orden en un sistema de  $2N$  ecuaciones de primer orden. En la práctica de este artículo, se emplea el método Runge-Kutta 45. La idea fundamental detrás de RK45 es aproximar la solución de una EDO dividiendo el intervalo de tiempo en pasos más pequeños y utilizando una combinación ponderada de pendientes para avanzar en cada paso. La notación “45” se refiere al hecho de que el método utiliza dos conjuntos de coeficientes, uno de orden 4 y otro de orden 5, para mejorar la precisión de la aproximación. A continuación, se proporciona un pseudocódigo para la solución de este problema.

### Algorithm 1 Método de RK45 para Sistema de Ecuaciones de Segundo Orden

---

```

1: Entrada: Sistema de Ecuaciones Diferenciales de Segundo Orden
2: Salida: Solución numérica del sistema
3: function RK45( $f_1, f_2, t_{\text{inicial}}, t_{\text{final}}, y_{\text{inicial}}, \Delta t$ )
4:    $t \leftarrow t_{\text{inicial}}$ 
5:    $y \leftarrow y_{\text{inicial}}$ 
6:   while  $t < t_{\text{final}}$  do
7:     Calcular los coeficientes  $k_i$  utilizando RK45
8:     Actualizar la solución
9:     Calcular el nuevo valor de  $t$ :  $t \leftarrow t + \Delta t$ 
10:  end while
11:  Devolver: Solución numérica  $y$ 
12: end function

```

---

### III-C. Parámetros del Problema

Cuadro I: Parámetros del ala

| Variable                             | Símbolo        | Magnitud             | Unidad    |
|--------------------------------------|----------------|----------------------|-----------|
| Masa del ala                         | $m$            | 400                  | $kg$      |
| Momento de inercia                   | $I_\theta$     | 200                  | $kgm^2/m$ |
| Momento estático                     | $S_\theta$     | 180                  | $kgm/m$   |
| Rigidez de torsión                   | $K_\theta$     | $3 \times 10^5$      | $Nm/m$    |
| Rigidez de flexión                   | $K_h$          | $1 \times 10^5$      | $Nm/m$    |
| Excentricidad                        | $e$            | 0,2                  | -         |
| Cuerda                               | $c$            | 6                    | $m$       |
| Media cuerda                         | $b$            | 3                    | $m$       |
| Densidad                             | $\rho$         | 0,53                 | $kg/m^3$  |
| Velocidad del flujo                  | $U$            | [100, 200, 300, 400] | $m/s$     |
| Superficie alar                      | $S$            | 122,6                | $m^2$     |
| Coefficiente de lift (ángulo ataque) | $C_{L_\alpha}$ | 0,03029              | -         |

### III-D. Descomposición del Flutter utilizando FFT

Una vez se tengan datos provenientes de la simulación y respuesta del sistema, se procederá a aplicar la FFT para descomponer las vibraciones de flexión y torsión ( $h(t), \theta(t)$ ) en sus frecuencias fundamentales. Con estos resultados, se llevará a cabo un análisis para obtener información crítica en el diseño de alas. El algoritmo que facilitará la descomposición es el siguiente:

Supongamos que tenemos una secuencia de  $N$  números  $x_0, x_1, \dots, x_{N-1}$ . La FFT nos permite calcular la DFT (Transformada de Fourier Discreta)  $X_k$  de esta secuencia de la siguiente manera:

$$X_k = \sum_{n=0}^{N-1} x_n e^{-i2\pi kn/N}$$

Donde  $k = 0, 1, \dots, N-1$ .

### III-E. Representación de los Modales de Vibración

Se emplea el software Ansys, específicamente a través de Design Modeler, donde se introduce un perfil NACA designado, en este caso, el NACA0012. Posteriormente, se realiza una extrusión a lo largo de la longitud del ala, fijada en nuestro caso en 3 metros. Con la herramienta

de Análisis Modal, se genera un espectro de frecuencias que concuerda con aquellas obtenidas en la simulación numérica. Esto se realiza con el propósito de representar visualmente las frecuencias y comprender el impacto que estas tienen sobre el comportamiento del ala.

### III-F. Independencia de Mallado:

La independencia del mallado es clave en simulaciones numéricas para asegurar resultados precisos. La extrapolación de Richardson, arraigada en análisis numérico, destaca como herramienta para mejorar la precisión al extrapolar soluciones de mallados diversos. Esta introducción explora la relevancia de la independencia del mallado, los desafíos asociados y la contribución de la extrapolación de Richardson para mejorar simulaciones numéricas.

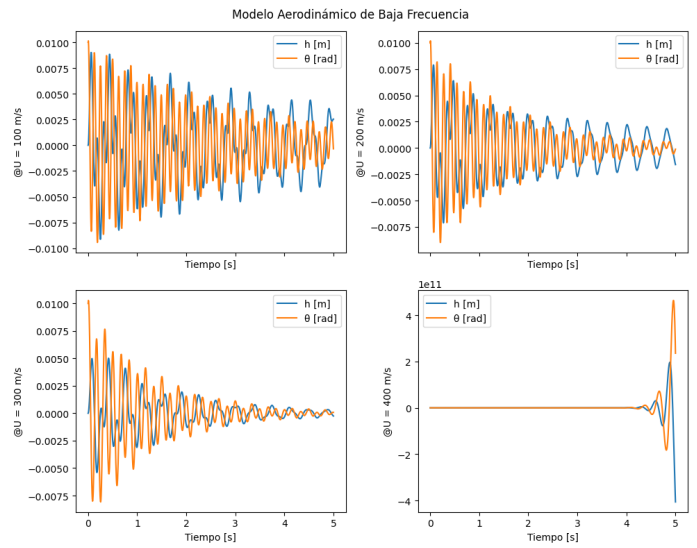


Figura 7: Solución Modelo de Baja Frecuencia

### IV-B. Transformada de Fourier

Aplicando el algoritmo FFT, se obtienen los siguientes datos:

## IV. RESULTADOS

### IV-A. Solución Numérica

A continuación, se presentan las gráficas obtenidas tras ejecutar la solución numérica del sistema de ecuaciones diferenciales.

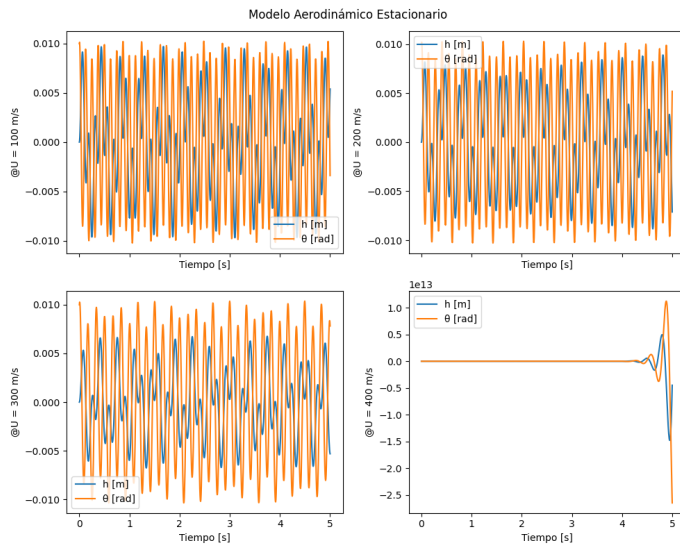


Figura 6: Solución Modelo Estacionario

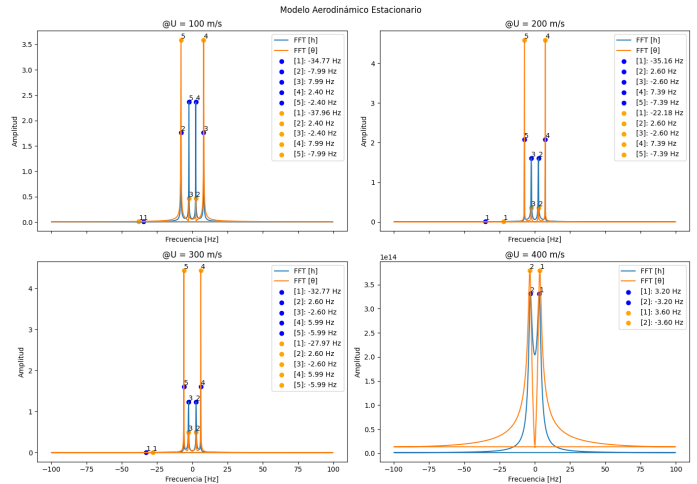


Figura 8: Espectro de Frecuencia Modelo Estacionario

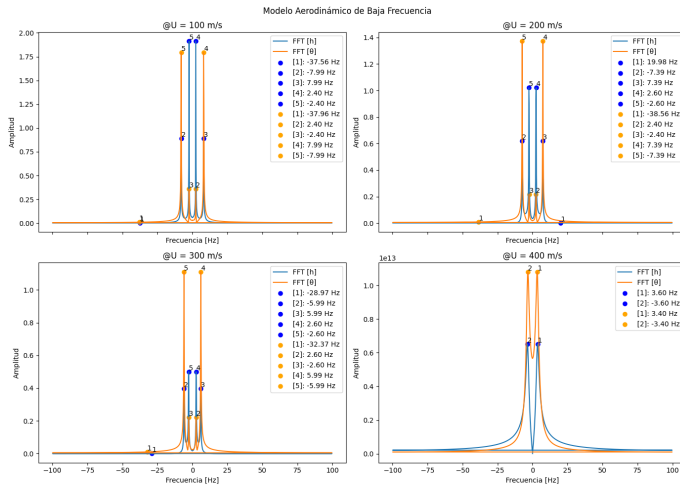


Figura 9: Espectro de Frecuencia Modelo de Baja Frecuencia

#### IV-C. Visualización de Frecuencias

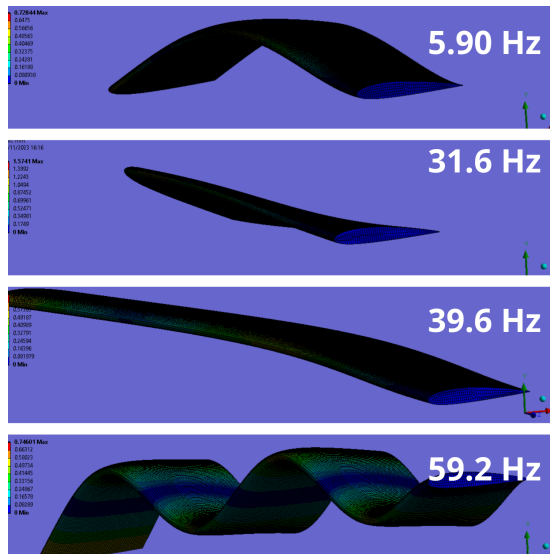


Figura 10: Modales Fundamentales sobre el Ala

#### V. CONCLUSIONES

- La aproximación mediante el modelo matemático de flujo estacionario presenta limitaciones al no reflejar adecuadamente el fenómeno de “dumping”, que resulta crucial en el análisis de las vibraciones aeroelásticas. En contraste, el modelo de baja frecuencia emerge como una representación más fiel de la realidad.
- El modelo simplificado del ala típica, representado en 2 dimensiones, demuestra ser beneficioso al evitar la consideración de geometrías complejas asociadas con alas tridimensionales. Los datos obtenidos mediante la solución numérica y la simulación en Ansys revelan una correlación que respalda la precisión

de la utilización de modelos físicos en fenómenos aeroelásticos.

- En el caso de la velocidad de 400 m/s, se observa que tanto  $h$  como  $\theta$  tienden hacia el infinito. Desde una perspectiva física, esta tendencia indica que la estructura de las alas no es capaz de soportar los esfuerzos generados, resultando en una falla estructural.
- Existe una velocidad óptima para la cual el ala muestra una amplitud de “damping” minimizada, siendo en nuestro caso representada por 300 m/s. Este dato guarda una relación directa con las condiciones aerodinámicas óptimas del ala, en las cuales se observan las vibraciones mínimas.
- Se confirmó que la FFT es un método eficaz para la descomposición de modos fundamentales de vibración aeroelástica.
- Es fascinante observar el comportamiento de las frecuencias, ya que se manifiestan en el mismo instante. Cuando hay una perturbación debido a la deflexión por momento, se observa de inmediato una influencia en la deflexión por torsión, lo que indica un comportamiento autoexcitado.
- Se pueden identificar cuatro tipos distintos de vibraciones: el primero causado por momento, el segundo por torsión, el tercero manifestándose como pandeo, y el cuarto como un fenómeno de deformación sinusoidal.
- Las vibraciones por torsión producen una amplitud en la deflexión significativamente mayor. En nuestro caso, el valor máximo se alcanza con una frecuencia de 31.6 Hz, registrando una amplitud de 1.57 mm.

#### REFERENCIAS

- [1] Paolo Colombo. Designing the next generation of aircraft with simulation. In Marco Evangelos Biancolini and Ubaldo Cella, editors, *Flexible Engineering Toward Green Aircraft*, pages 1–7, Cham, 2020. Springer International Publishing.
- [2] Emiliano Costa, Corrado Groth, Jacques Lavedrine, Domenico Caridi, Gaëtan Dupain, and Marco Evangelos Biancolini. Unsteady fsi analysis of a square array of tubes in water crossflow. In Marco Evangelos Biancolini and Ubaldo Cella, editors, *Flexible Engineering Toward Green Aircraft*, pages 129–152, Cham, 2020. Springer International Publishing.
- [3] Corrado Groth, Marco Evangelos Biancolini, Emiliano Costa, and Ubaldo Cella. Validation of high fidelity computational methods for aeronautical fsi analyses. In Marco Evangelos Biancolini and Ubaldo Cella, editors, *Flexible Engineering Toward Green Aircraft*, pages 29–48, Cham, 2020. Springer International Publishing.
- [4] S. Hulshoff. *AE4-930 Aeroelasticity*. Delft University of Technology, 2010. Lecture notes.
- [5] Serguei Iakovlev. Semi-analytical modeling of non-stationary fluid-structure interaction. In Marco Evangelos Biancolini and Ubaldo Cella, editors, *Flexible Engineering Toward Green Aircraft*, pages 95–109, Cham, 2020. Springer International Publishing.
- [6] Reinhold Maierl, Alessandro Gastaldi, Jan-Niclas Walther, and Aidan Jungo. Aero-structural optimization of a male configuration in the agile mdo framework. In Marco Evangelos Biancolini and Ubaldo Cella, editors, *Flexible Engineering Toward Green Aircraft*, pages 169–187, Cham, 2020. Springer International Publishing.
- [7] A. Martínez-Pascual, Marco Evangelos Biancolini, and J. Ortega-Casanova. Fluid structure modelling of ground excited vibrations by

- mesh morphing and modal superposition. In Marco Evangelos Biancolini and Ubaldo Cella, editors, *Flexible Engineering Toward Green Aircraft*, pages 111–127, Cham, 2020. Springer International Publishing.
- [8] Jan Navrátil. High-fidelity static aeroelastic simulations of the common research model. In Marco Evangelos Biancolini and Ubaldo Cella, editors, *Flexible Engineering Toward Green Aircraft*, pages 49–70, Cham, 2020. Springer International Publishing.
- [9] F. Nicolosi, V. Cusati, D. Ciliberti, Pierluigi Della Vecchia, and S. Corcione. Aeroelastic wind tunnel tests of the ribes wing model. In Marco Evangelos Biancolini and Ubaldo Cella, editors, *Flexible Engineering Toward Green Aircraft*, pages 9–28, Cham, 2020. Springer International Publishing.
- [10] Domenico Quagliarella, Elisa Morales Tirado, and Andrea Bornaccioni. Risk measures applied to robust aerodynamic shape design optimization. In Marco Evangelos Biancolini and Ubaldo Cella, editors, *Flexible Engineering Toward Green Aircraft*, pages 153–168, Cham, 2020. Springer International Publishing.
- [11] J. B. Vos, D. Charbonnier, T. Ludwig, S. Merazzi, H. Timmermans, D. Rajpal, and A. Gehri. Aero-elastic simulations using the nsmb cfd solver including results for a strut braced wing aircraft. In Marco Evangelos Biancolini and Ubaldo Cella, editors, *Flexible Engineering Toward Green Aircraft*, pages 71–94, Cham, 2020. Springer International Publishing.