FACULTAD DE INGENIERIA
Universidad de Buenos Aires

Análisis Numérico

Ecuaciones no lineales en sistemas mecánicos

Padrón	Alumno	Dirección de correo
101696	Javier Mariano Di Santo	jdisanto@fi.uba.ar
101109	Camila Dvorkin	camidvorkin@gmail.com
95151	Martin Fiorio	fioriomartin@yahoo.com.ar

Primer Cuatrimestre de 2019
Curso 5

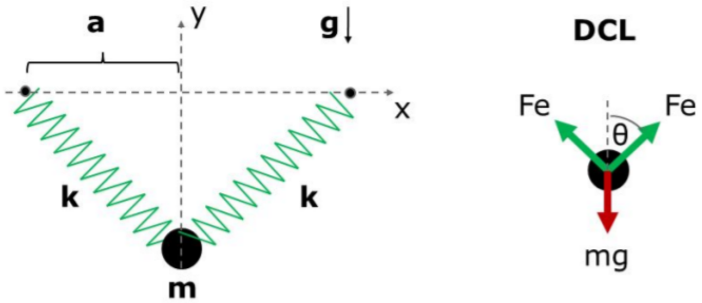
Índice

1. Objetivos

- Experimentar con el uso de métodos numéricos la resolución de ecuaciones no lineales.
- Integrar conocimientos de mecánica.

2. Introducción Teórica

Se plantea un sistema mecánico que consiste en una partícula de masa m unida a dos resortes de longitud natural Lo. Los extremos fijos de cada resorte se encuentran separados una distancia 2a. Se desea encontrar, si es que existen, los puntos de equilibrio, su ubicación y si son estables o inestables.



Donde:

m	[kg]	masa de la partícula
k	[N/m]	constante elástica de los resortes
Lo	[m]	longitud natural de los resortes
a	[m]	mitad de la distancia entre extremos fijos de cada resorte
g	[m/ s^2]	9.81

Su expresión reducida quedará como una función no lineal de la coordenada “y”:

$$F_{resultante}(y) = -2ky(1 - \frac{Lo}{\sqrt{y^2 + a^2}}) - mg$$

Los puntos de equilibrio del sistema serán aquellos donde la energía potencial alcanza un máximo o un mínimo. Esta condición es equivalente a pedir que la resultante de fuerzas conservativas sea nula. Para resolver los ejercicios se utilizan los siguientes datos:

propiedad de los resortes	Lo[m]	2 * 100000 / 101109 = 1.98
	k [N/m]	10
masa de referencia	m0 [kg]	100000 / 101109 = 0.989
geometría	a [m]	1

2.1. Bisección

El método consiste en generar subintervalos del intervalo $[a, b]$ y en cada paso detectar en cuál de esos subintervalos se encuentra p(El teorema de Bolzano garantiza la existencia de $p \in [a, b]$ tal que $f(p) = 0$).

Para ello tomamos: $a_1 = a$ y $b_1 = b$, entonces:

$$p_1 = a_1 + \frac{b_1 - a_1}{2} = \frac{a_1 + b_1}{2}$$

- Si $f(p_1) = 0 \to p = p_1$ y finaliza
- Si $f(p_1) \neq 0 \to$ analizamos donde se produce el cambio de signo:

  Si $f(p_1)$ y $f(a_1)$ tienen el mismo signo, enotnces $p \in (p_1, b_1)$. Se elige $a_2 = p_1$ y $b_2 = b_1$.

  Si $f(p_1).f(a_1) \leq 0$ entonces $p \in (a_1, p_1)$. Se elige $a_2 = a_1$ y $b_2 = p_1$.

2.2. Punto Fijo

Sea $f \in C[a, b]$ se dice que f tiene un punto fijo $p \in [a, b]$ si $f(p) = p$. Para hallarlo, se necesita una semilla p_0 que se obtiene usando el metodo de la bisección. A partir de ello se realiza la siguiente sucesión: $p_{n+1} = g(p_n)\forall n \geq 0$.
Para asegurar la convergencia, se deben cumplir las siguientes condiciones:

- $g \in C[a, b]/g(x) \in [a, b]\forall x \in [a, b]\ \exists$
- $\exists g'(x)\forall[a, b]$
- $\exists k \geq 1/|g'(x)| \leq k\forall x \in (a, b)$

2.3. Newton-Raphson

Sea $f \in C^2[a, b]$. Si $p \in [a, b]/f(p) = 0$ y $f'(p) \neq 0$ entonces $\exists > 0/$ el método de Newton-Rapshon genera un sucesión $p_{n n\geq 1}$ que converge a p para cualquier aproximación lineal $p_0 \in E[p-; p+]$.

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})}{f'(p_{n-1})}$$

3. Ejercicio 1

Se pidió buscar los puntos de equilibrio del sistema sin tener en cuenta el efecto de la gravedad (para ello se consideró m=0 en la ecuación no lineal).

3.1. Tablas

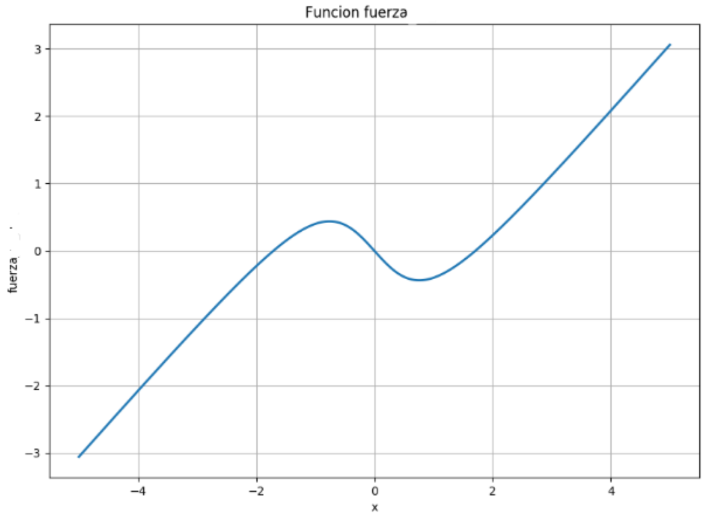


Figura 1: Grafico utilizado para resolver el primer ejercicio

Buscamos el punto de equilibrio positivo mediante los siguientes métodos con error absoluto:

- Bisección

  Observando el gráfico, con el método de bisección usamos el intervalo $[-3{,}5; -1{,}5]$ que cumple con $f(-3{,}5)f(-1{,}5) < 0$.

i	a	b	f(a)	f(b)	r(i+1)	Δr(i+1)	Δr / r
0	-3,50000000000000	-1,50000000000000	-1,59618258367117	0,14745958278893	-2,50000000000000		
1	-2,50000000000000	-1,50000000000000	-0,66161615204719	0,14745958278893	-2,00000000000000	20,00000000000000	-10,00000000000000
2	-2,00000000000000	-1,50000000000000	-0,22903416182017	0,14745958278893	-1,75000000000000	12,50000000000000	-7,14285714285714
3	-1,75000000000000	-1,50000000000000	-0,03087857859357	0,14745958278893	-1,62500000000000	7,14285714285713	-4,39560439560439
4	-1,75000000000000	-1,62500000000000	-0,03087857859357	0,06128346707500	-1,68750000000000	3,57142857142856	-2,11640211640211
5	-1,75000000000000	-1,68750000000000	-0,03087857859357	0,01587723659567	-1,71875000000000	1,78571428571427	-1,03896103896103
6	-1,71875000000000	-1,68750000000000	-0,00734029133543	0,01587723659567	-1,70312500000000	0,90909090909091	-0,53377814845705
7	-1,71875000000000	-1,70312500000000	-0,00734029133543	0,00430957149107	-1,71093750000000	0,45454545454545	-0,26567040265670
8	-1,71093750000000	-1,70312500000000	-0,00150521287390	0,00430957149107	-1,70703125000000	0,22831050228311	-0,13374711346562
9	-1,71093750000000	-1,70703125000000	-0,00150521287390	0,00140473189110	-1,70898437500000	0,11415525114155	-0,06679712981083
10	-1,70898437500000	-1,70703125000000	-0,00004960433188	0,00140473189110	-1,70800781250000	0,05714285714285	-0,03345585232377
42	-1,70891778620307	-1,70891778620261	-2,646705423E-13	7,399391506E-14	-1,70891778620284	1,330136001E-11	-7,783499078E-12
43	-1,70891778620284	-1,70891778620261	-9,524344965E-14	7,399391506E-14	-1,70891778620273	6,650680007E-12	-3,891749539E-12
44	-1,70891778620273	-1,70891778620261	-1,081449528E-14	7,399391506E-14	-1,70891778620267	3,325340003E-12	-1,945874770E-12
45	-1,70891778620273	-1,70891778620267	-1,081449528E-14	3,149484590E-14	-1,70891778620270	1,662670002E-12	-9,729373848E-13
46	-1,70891778620273	-1,70891778620270	-1,081449528E-14	1,062476729E-14	-1,70891778620271	8,242295735E-13	-4,823108403E-13
47	-1,70891778620273	-1,70891778620271	-1,081449528E-14	≈ 0	-1,70891778620272	4,263256415E-13	-2,494711243E-13
48	-1,70891778620272	-1,70891778620271	-5,312383646E-15	≈ 0	-1,70891778620272	2,131628207E-13	-1,247355621E-13
49	-1,70891778620272	-1,70891778620271	-2,656191823E-15	≈ 0	-1,70891778620272	9,947598301E-14	-5,820992900E-14
50	-1,70891778620272	-1,70891778620271	-1,517823899E-15	≈ 0	-1,70891778620271	5,684341886E-14	-3,326281657E-14
51	-1,70891778620271	-1,70891778620271	-7,589119494E-16	≈ 0	-1,70891778620271	2,842170943E-14	-1,663140829E-14

Figura 2: Raiz = -1.708

Aclaración: resultados con ≈ 0 son aquellos que no son representables o calculables en el rango de precisión del programa, por lo que fueron considerados como cero.

- Punto Fijo
  Para cumplir con las condiciones del método y que el mismo converja hacia la raíz, nuestra función de punto fijo será $g(y) = y - \frac{F(y)}{-2k}$.

  En el gráfico de la función $g(y)$ observar que en el intervalo $[1{,}5; 3{,}5]$ esta se encuentra encerrada en un cuadrado, donde se cumple: $\forall x \in [1{,}5; 3{,}5] : g(x) \in [1{,}5; 3{,}5]$. Numéricamente, los valores de g en los bordes den intervalo son: $g(1{,}5) = 1{,}501928, g(3{,}5) = 1{,}758286$

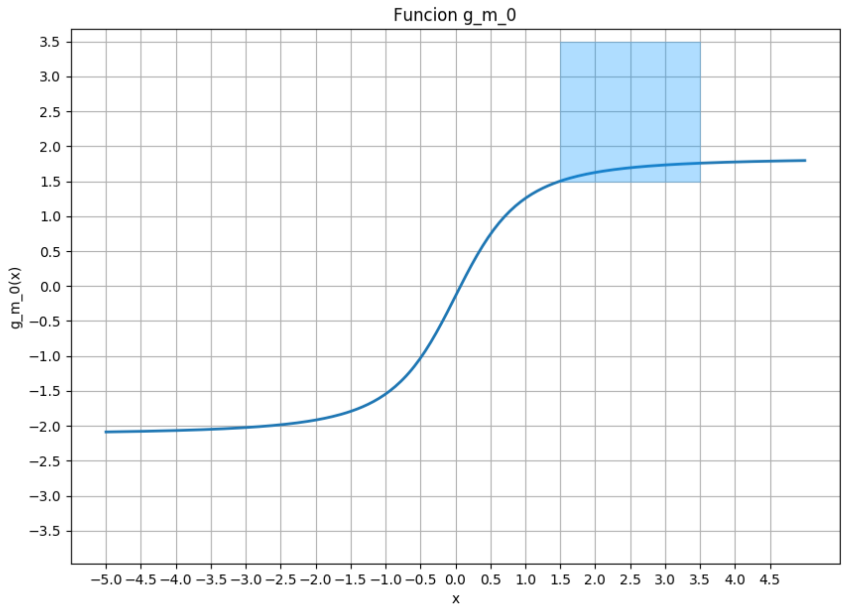


Figura 3: Función g

Por otro lado, buscamos los valores de $y : \exists k \geq 1/|g'(x)| \leq k \forall x \in (a, b)$

$$g(x) = x - f(x) \tag{1}$$

$$g'(x) = 1 - f'(x) \tag{2}$$

$$g'(x) = 1 - \frac{\frac{-2k \cdot Lo \cdot y^2}{\sqrt{y^2+a^2}^3} - 2k \cdot (1 - \frac{Lo}{\sqrt{y^2+a^2}})}{-2k} \tag{3}$$

$$\tag{4}$$

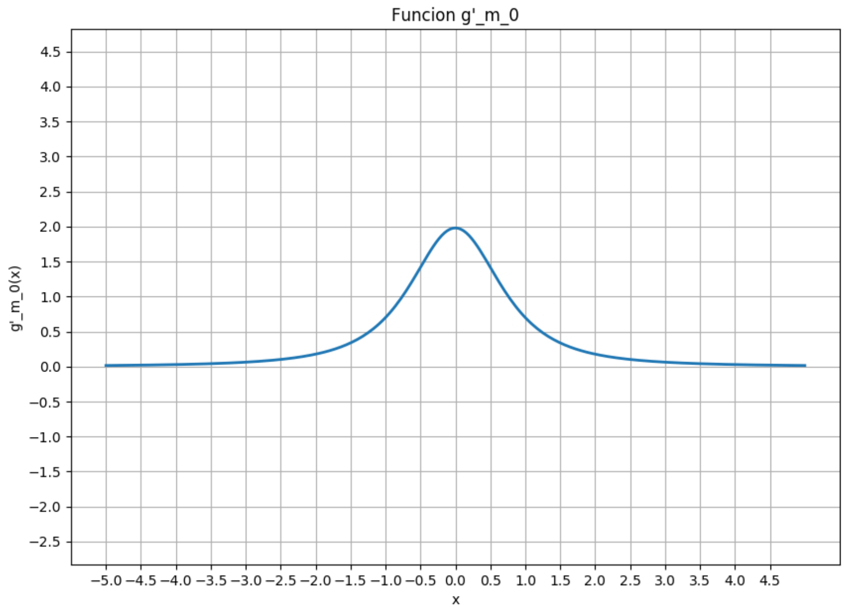


Figura 4: Función g'

Observando el gráfico de la derivada de g' podemos observar que la función se encuentra acotada entre 0 y 1 para los valores del intervalo a evaluar. Al cumplirse todas las condiciones del método, lo podremos aplicar.
Utilizaremos la semilla $\frac{1{,}5+3{,}5}{2} = 2{,}5$.

i	y	Δy	Δy/y
0	2,50000000000000		
1	1,83838384795281	0,66161615204719	0,35989010281174
2	1,73932775363477	0,09905609431803	0,05695079269047
3	1,71652286366097	0,02280488997381	0,01328551483734
4	1,71084805163355	0,00567481202742	0,00331695852358
5	1,70940952982838	0,00143852180517	0,00084153140606
6	1,70904317788645	0,00036635194193	0,00021436084628
7	1,70894976799125	0,00009340989519	0,00005465923981
8	1,70892594381922	0,00002382417203	0,00001394102074
9	1,70891986700391	0,00000607681532	0,00000355593930
10	1,70891831696446	0,00000155003944	0,00000090702957
18	1,70891778621223	2,777778008E-11	1,625460294E-11
19	1,70891778620514	7,085665388E-12	4,146288046E-12
20	1,70891778620333	1,807443084E-12	1,057653621E-12
21	1,70891778620287	4,607425552E-13	2,696107203E-13
22	1,70891778620275	1,176836406E-13	6,886442494E-14
23	1,70891778620272	3,019806627E-14	1,767087130E-14
24	1,70891778620272	7,327471963E-15	4,287784949E-15
25	1,70891778620271	1,998401444E-15	1,169395895E-15
26	1,70891778620271	6,661338148E-16	3,897986317E-16
27	1,70891778620271	≈ 0	≈ 0

Figura 5: Raiz = 1.708

- Newton-Raphson
  Este método requiere que la derivada en el punto a evaluar no sea nula.

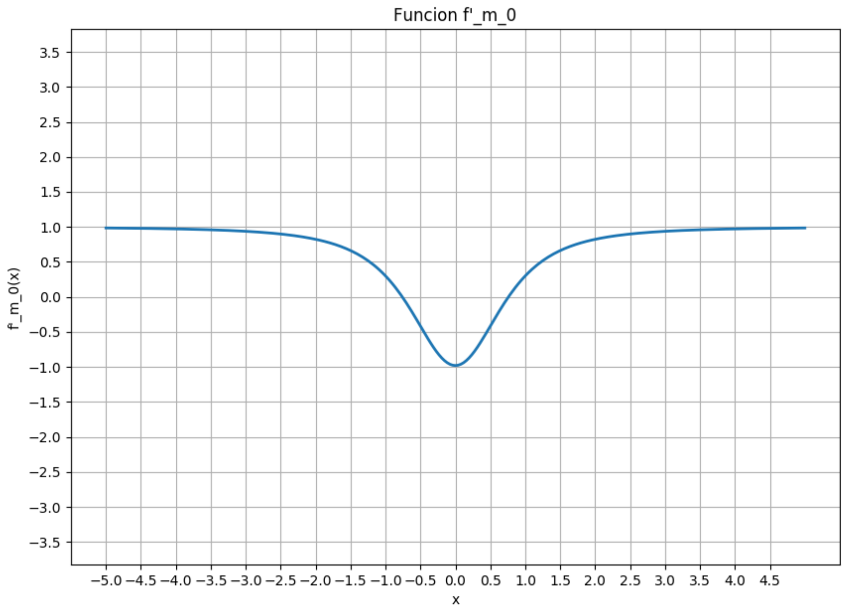


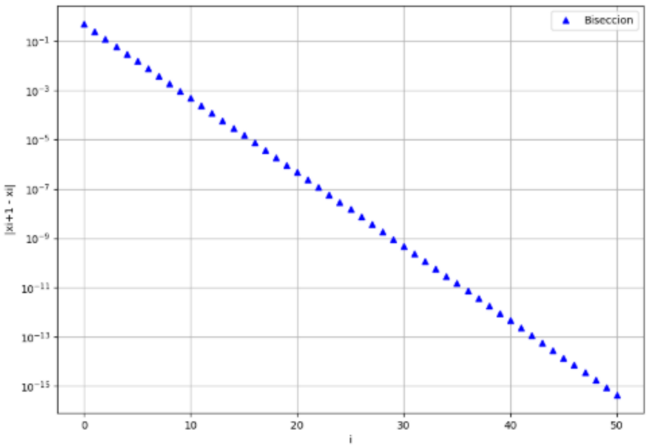
Figura 6: Derivada de la fuerza

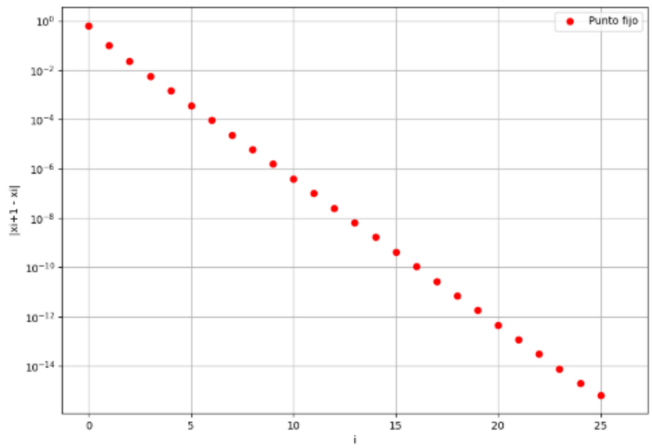
Observando el gráfico, elegimos como semilla el punto $-0{,}5$, donde la derivada no se anula.

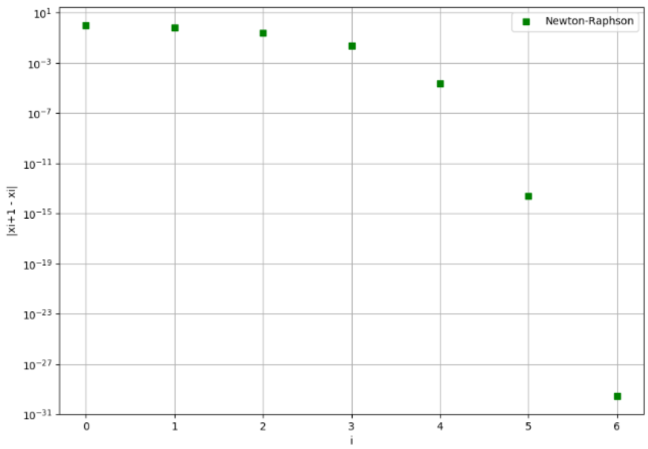
i	y	Δy	Δy/y
0	0,50000000000000		
1	-0,42492369662071	0,92492369662071	-2,17668184659117
2	0,21786697737237	0,64279067399307	2,95038138292269
3	-0,02255129203232	0,24041826940468	-10,66095321989350
4	0,00002318951337	0,02257448154568	973,478019479890
5	-2,519498146E-14	2,318951339E-05	-9,204020819E+08
6	-3,155443621E-30	2,519498146E-14	-7,984608344E+15
7	≈ 0	3,155443621E-30	-

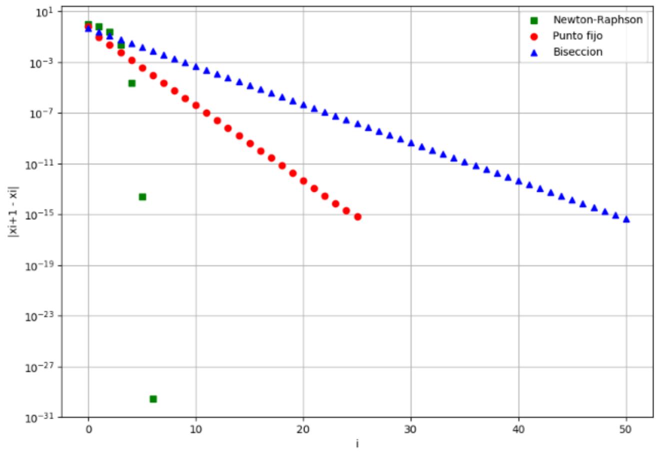
Figura 7: Raiz = 0

3.2. Conclusión









Podemos concluir que en este caso en particular, donde la masa es cero, los puntos de equilibrios se pueden hallar de forma analítica, y estos coinciden con los hallados en la práctica. Acá sería mejor buscar las raíces analíticamente porque no estaríamos limitados con el error de los métodos de búsqueda de raíz ni con las condiciones para aplicar los mismos. Como se puede ver en los graficos, el método de Newton-Rapshon converge con menor cantidad de iteraciones que los otros dos metodos, esto se debe a que este método tiene un orden de convergencia cuadrático.

4. Ejercicio 2

Repetimos el procedimiento realizado en el primer ejercicio para el caso m=0.3*m0

4.1. Tablas

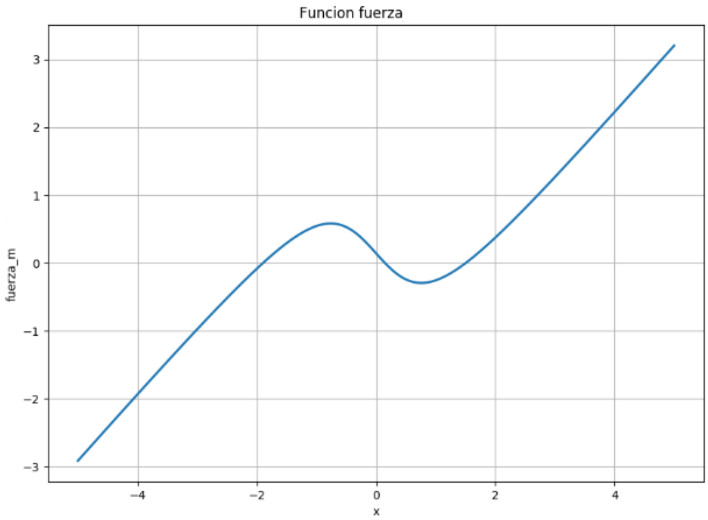


Figura 8: Raiz = 0.151

- Bisección
  Las raices tienen valores cercanos a las del ejercicio 1. En el caso del método de bisección, volvemos a usar el mismo intervalo $[-3{,}5; -1{,}5]$ que cumple con $f(-3{,}5)f(-1{,}5) < 0$.

i	a	b	f(a)	f(b)	r(i+1)	Δr(i+1)	Δr / r
0	-3,50000000000000	-1,50000000000000	-1,45065123367117	0,29299093278893	-2,50000000000000		
1	-2,50000000000000	-1,50000000000000	-0,51608480204719	0,29299093278893	-2,00000000000000	20,00000000000000	-10,00000000000000
2	-2,00000000000000	-1,50000000000000	-0,08350281182017	0,29299093278893	-1,75000000000000	12,50000000000000	-7,14285714285714
3	-2,00000000000000	-1,75000000000000	-0,08350281182017	0,11465277140643	-1,87500000000000	6,25000000000000	-3,33333333333333
4	-2,00000000000000	-1,87500000000000	-0,08350281182017	0,01759017352941	-1,93750000000000	3,12500000000000	-1,61290322580645
5	-1,93750000000000	-1,87500000000000	-0,03249974903137	0,01759017352941	-1,90625000000000	1,61290322580644	-0,84611316763617
6	-1,90625000000000	-1,87500000000000	-0,00733514383115	0,01759017352941	-1,89062500000000	0,81967213114754	-0,43354559002845
7	-1,90625000000000	-1,89062500000000	-0,00733514383115	0,00515814685791	-1,89843750000000	0,40983606557377	-0,21588072589894
8	-1,89843750000000	-1,89062500000000	-0,00108093215869	0,00515814685791	-1,89453125000000	0,20576131687243	-0,10860803529761
9	-1,89843750000000	-1,89453125000000	-0,00108093215869	0,00204051029273	-1,89648437500000	0,10288065843622	-0,05424809178099
10	-1,89843750000000	-1,89648437500000	-0,00108093215869	0,00048026337657	-1,89746093750000	0,05144032921810	-0,02711008601098
42	-1,89708533206430	-1,89708533206385	-2,150946088E-13	1,485700452E-13	-1,89708533206407	1,197975052E-11	-6,314819013E-12
43	-1,89708533206407	-1,89708533206385	-3,337330412E-14	1,485700452E-13	-1,89708533206396	5,996980690E-12	-3,161154951E-12
44	-1,89708533206407	-1,89708533206396	-3,337330412E-14	5,770939282E-14	-1,89708533206402	2,998490345E-12	-1,580577475E-12
45	-1,89708533206407	-1,89708533206402	-3,337330412E-14	1,205702205E-14	-1,89708533206405	1,506350600E-12	-7,940341820E-13
46	-1,89708533206405	-1,89708533206402	-1,034727859E-14	1,205702205E-14	-1,89708533206403	7,389644452E-13	-3,895262025E-13
47	-1,89708533206405	-1,89708533206403	-1,034727859E-14	8,659739592E-16	-1,89708533206404	3,552713679E-13	-1,872722127E-13
48	-1,89708533206404	-1,89708533206403	-4,729550085E-15	8,659739592E-16	-1,89708533206404	1,847411113E-13	-9,738155062E-14
49	-1,89708533206404	-1,89708533206403	-1,931788063E-15	8,659739592E-16	-1,89708533206403	8,526512829E-14	-4,494533106E-14
50	-1,89708533206403	-1,89708533206403	-3,330669074E-16	8,659739592E-16	-1,89708533206403	4,263256415E-14	-2,247266553E-14
51	-1,89708533206403	-1,89708533206403	-3,330669074E-16	3,774758284E-16	-1,89708533206403	1,421085472E-14	-7,490888509E-15

Figura 9: Raiz = -1.897

- Punto Fijo
  Como la derivada de $g(y)$ con gravedad es igual a la del otro punto, podemos volver a usar la misma semilla también para este método.

i	y	Δy	Δy/y
0	2,50000000000000		
1	1,69285249795281	0,80714750204719	0,47679730101901
2	1,55924515078968	0,13360734716313	0,08568719748493
3	1,52115431461126	0,03809083617841	0,02504074426410
4	1,50897363368618	0,01218068092508	0,00807216286167
5	1,50494203872396	0,00403159496222	0,00267890381057
6	1,50359264873158	0,00134938999237	0,00089744386122
7	1,50313932022649	0,00045332850509	0,00030158781624
8	1,50298683422053	0,00015248600596	0,00010145531717
9	1,50293552103932	0,00005131318120	0,00003414197115
10	1,50291825116736	0,00001726987197	0,00001149089244
23	1,50290948961254	1,228750435E-11	8,175811273E-12
24	1,50290948960840	4,135580767E-12	2,751716451E-12
25	1,50290948960701	1,391775584E-12	9,260541591E-13
26	1,50290948960654	4,687361610E-13	3,118858216E-13
27	1,50290948960639	1,576516695E-13	1,048976473E-13
28	1,50290948960633	5,329070518E-14	3,545835964E-14
29	1,50290948960631	1,798561300E-14	1,196719638E-14
30	1,50290948960631	5,995204333E-15	3,989065459E-15
31	1,50290948960631	1,998401444E-15	1,329688486E-15
32	1,50290948960631	4,440892099E-16	2,954863303E-16

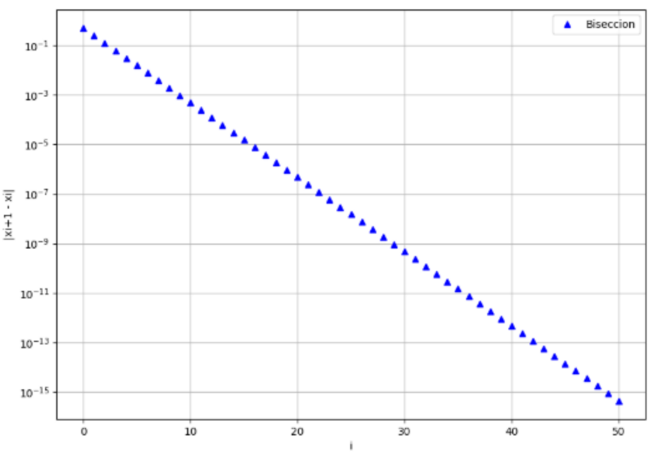
Figura 10: Raiz = 1.5029

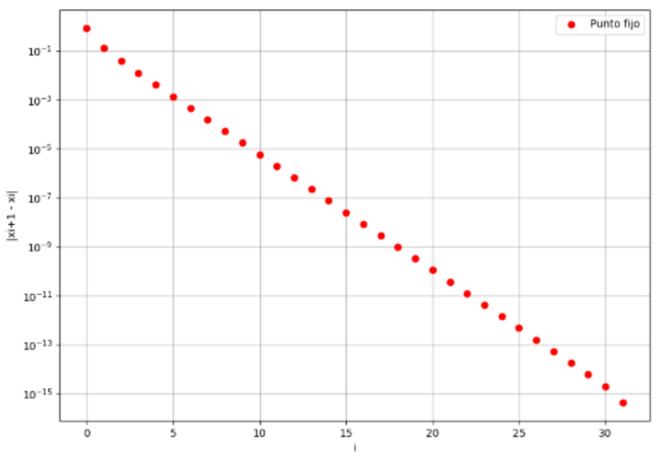
- Newton-Raphson
  Nuevamente la semilla será 0,5

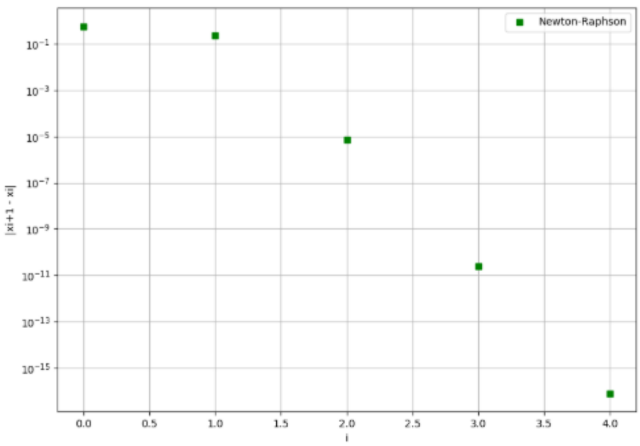
i	y	Δy	Δy/y
0	0,50000000000000		
1	-0,07573729289109	0,57573729289109	-7,60176751655207
2	0,15199508848877	0,22773238137987	1,49828776471737
3	0,15198788233483	0,00000720615394	0,00004741268732
4	0,15198788235908	2,424188628E-11	1,594988094E-10
5	0,15198788235908	8,326672685E-17	5,478510889E-16

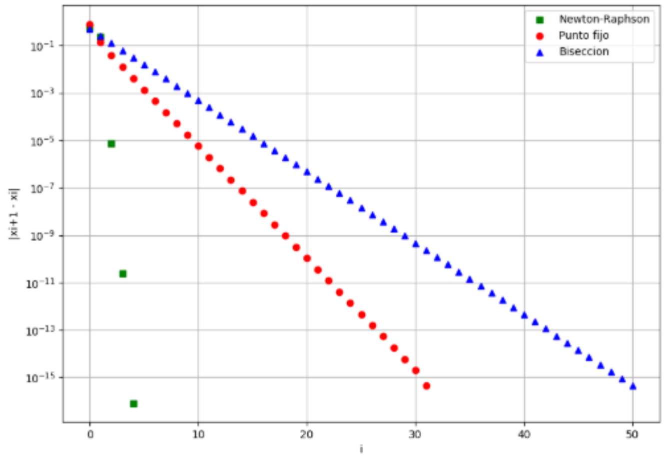
Figura 11: Raiz = 0.151

4.2. Conclusión









En este caso, fue necesario recurrir a métodos numéricos, ya que la forma analítica se vuelve más compleja al tener una masa distinta a cero. Nuevamente podemos observar la marcada diferencia entre el número de iteraciones entre el metodo de Newton-Raphson.

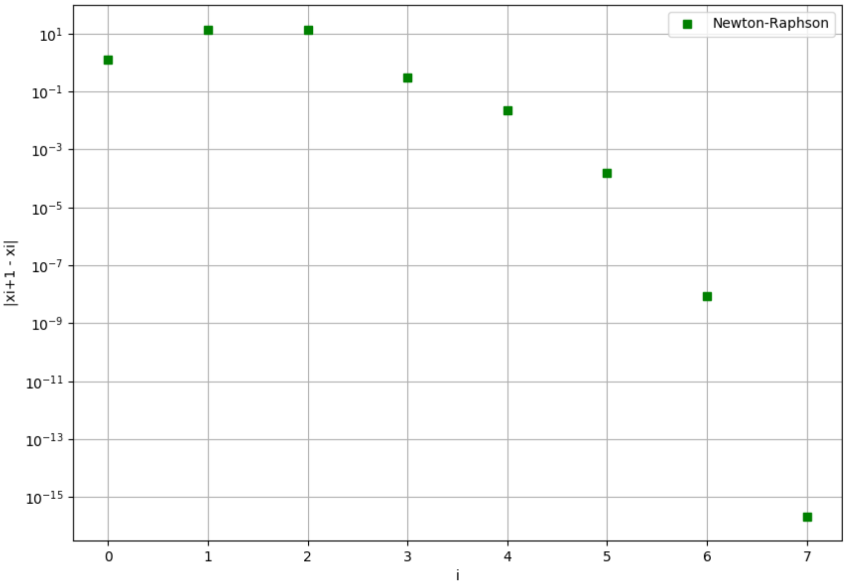
5. Ejercicio 3

Hallamos el máximo intervalo de convergencia de cada raíz, es decir, el intervalo de mayor longitud posible en el cual cualquier semilla perteneciente a él hace que el método converja.

5.1. Desarrollo

Aún utilizando semillas alejadas de las raíces y tendiendo a infinito, el método de Newton-Raphson sigue convergiendo de forma cuadrática. Los únicos puntos para los cuales la función de fuerza no converge cuadráticamente son aquellos que se encuentran aproximados a los valores para las cuáles la derivada se anula (ver gráfico figura 6). Particularmente, podemos observar diferentes comportamientos para diferentes valores dentro del intervalo $[-2, 2]$. Por ejemplo, tomando como semilla $-0{,}5$ el siguiente valor será $0{,}774110$ para el cual la derivada en dicho punto se aproxima bastante al cero por lo que el próximo punto se alejará considerablemente, pero el método terminará convergiendo.

i	y	Δy	Δy/y
0	-0,500000000		
1	0,774110100	1,274110100	1,645902953
2	14,711029433	13,936919333	0,947378931
3	1,821949122	12,889080311	7,074336024
4	1,524635221	0,297313901	0,195006581
5	1,503068884	0,021566337	0,014348203
6	1,502909499	0,000159385	0,000106051
7	1,502909490	8,91457E-09	5,93154E-09
8	1,502909490	2,22045E-16	1,47743E-16



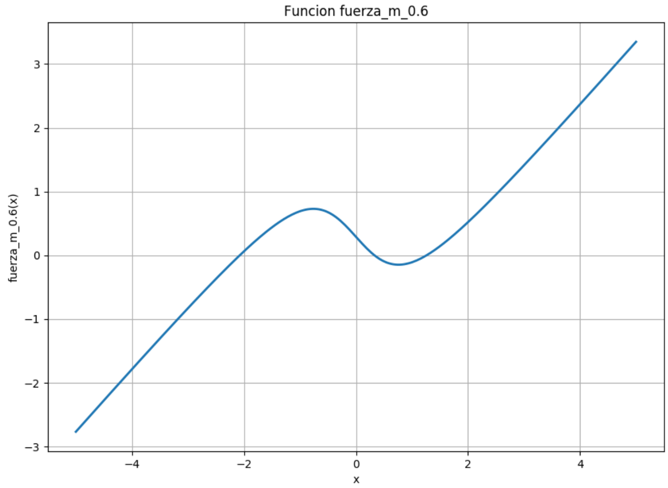
6. Ejercicio 4

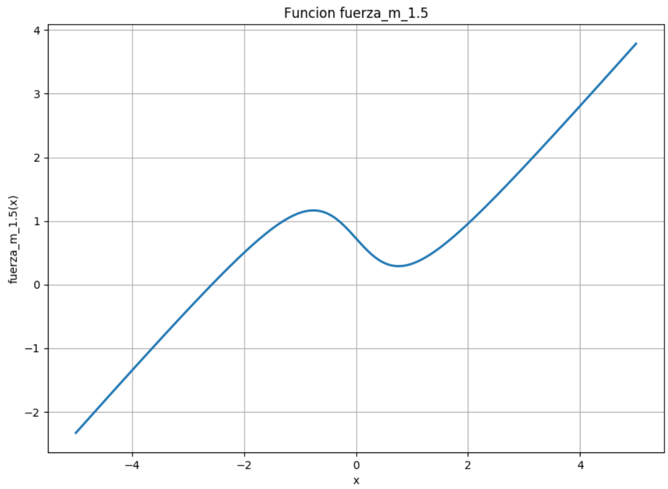
Se desea encontrar todos los puntos de equilibrio del sistema para diferentes masas aplicando el método de Newton-Raphson:

m	Raíz 1	Raíz 2	Raíz 3
0,6	-2,0746834981	0,3308278454	1,2597125761
0,9	-2,2453182940	0,7147085616	0,8049799408
1,2	-2,4110558980		
1,5	-2,5731921085		

6.1. Conclusión

Mostramos los gráficos de los casos extremos, donde es mas marcada la diferencia entre resultados. Estos cambios se deben a que el termino que contiene a la masa, no depende de la coordenada ¿".





Como se puede ver en este último gráfico, coincide con los valores de la tabla, donde a mayor masa, se encuentra una sola raiz negativa. Esto se podría deber a que la fuerza peso vence a la fuerza elastica de los resortes y como consecuencia vamos a tener un solo punto de equilibrio.

7. Conclusión

A modo de conclusión, se afirma que se cumplió el objetivo del Trabajo Práctico, ya que se lograron hallar soluciones aproximadas del sistema planteado.
Las soluciones aproximadas obtenidas se acercan de manera significativa a la solución exacta por lo que se considera que los métodos deberían estar planteados e implementados de manera correcta. Es pertinente aclarar que el error máximo tolerado y la cantidad de iteraciones máxima fueron fijados por un criterio personal del grupo que podría ser cambiado para otro tipo de problemática. Aquí se eligió tener un error lo suficientemente pequeño como para que la solución aproximada se acerque a la real pero no muy pequeño para no obtener una gran cantidad de iteraciones para

hallar la solución.
Tras resolver los ejercicios con los diferentes métodos, se puede observar que:

- La Bisección converge linealmente, por lo cual es un método lento. Sin embargo, se garantiza la convergencia si f(a) y f(b) tienen distinto signo. Es decir que sera un método menos eficiente que otros, pero es más seguro para garantizar la convergencia.
- Punto fijo utiliza una menor cantidad de iteraciones, por ende sera un método mas rápido que el anterior mencionado. Sin embargo, podría presentar dificultades al momento de hallar la función que cumpla con la existencia y unicidad.
- Newton-Raphson utiliza la menor cantidad de iteraciones y presenta un error pequeño. Su principal desventaja sería lo costoso que pudiera ser hallar la derivada, si no se cuenta con una función fácilmente derivable.

En conclusión, siempre y cuando se cuente con la derivada de la función y el método converja, se recomienda el uso de Newton-Rapshson, siendo este el método mas óptimo y seguro.

8. Código

A continuación se muestra el código de los métodos utilizados:

```python
def bisec(f, a, b, a_tol, n_max, file=sys.stdout):

    if (f(a) * f(b) > 0):
        raise ValueError('No cumple con las condiciones para aplicar biseccion')

    r = a+(b-a)/2
    delta = (b-a)/2

    delta_abs_graph = []

    print('{0:^4}\t{1:^17}\t{2:^17}\t{3:^17}\t{4:^17}\t{5:^17}\t{6:^17}'
    .format('i', 'a', 'b', 'f(a)', 'f(b)', 'ri+1', 'ri+1'), file=file)
    print('{0:4}\t{1: .14f}\t{2: .14f}\t{3: .14f}\t{4: .14f}\t{5: .14f}'
    .format(0, a, b, f(a), f(b), r), file=file)

    for i in range(n_max):
        if f(a) * f(r) > 0:
            a = r
        else:
            b = r
        r_old = r
        r = a+(b-a)/2
        delta = np.abs(r - r_old)
        err_porc = np.abs((r / a) * 100 - (r_old / a) * 100)

        delta_abs_graph.append(delta)
```

```
        print('{0:4}\t{1: .14f}\t{2: .14f}\t{3: .14f}\t{4: .14f}\t{5: .14f}\t{6: .14f}'
        .format(i + 1, a, b, f(a), f(b), r, err_porc), file=file)

        if delta <= a_tol:
            print('Hubo convergencia, n_iter = ' + str(i+1), file=file)
            return r, delta, i+1, delta_abs_graph

    raise ValueError('No hubo convergencia')
    return r, delta, i+1, delta_abs_graph



def punto_fijo(f, x0, a_tol, n_max, file=sys.stdout):
    x = x0
    delta = x0

    delta_abs_graph = []

    print('{0:^4}\t{1:^17}\t{2:^17}\t{3:^17}'.format('i', 'xn', 'x', 'x/xn'), file=file)
    print('{0:4}\t{1: .14f}'.format(0, x), file=file)

    for i in range(0, n_max):
        x_old = x
        x = x - f(x)
        err = np.abs(x - x_old)
        err_r = np.abs(x - x_old) / x

        delta = np.abs(x - x_old)

        delta_abs_graph.append(delta)

        print('{0:4}\t{1: .14f}\t{2: .14f}\t{3: .14f}'
        .format(i+1, x, err, err_r), file=file)

        if delta <= a_tol:
            print('Hubo convergencia, n_iter = ' + str(i+1))
            return x, delta, i+1, delta_abs_graph

    return x, delta, i+1, delta_abs_graph


def newton_raphson(f, f_d, x0, a_tol, n_max, file=sys.stdout):
    x = x0
    delta = x0

    print('{0:^4}\t{1:^17}\t{2:^17}\t{3:^17}'.format('i', 'xn', 'x', 'x/xn'), file=file)
```

```
    print('{0:4}\t{1: .14f}'.format(0, x), file=file)

    delta_abs_graph = []

    for i in range(0, n_max):
        x_old = x
        x = x_old - f(x_old) / f_d(x_old)
        delta = np.abs(x - x_old)
        err = np.abs(x - x_old)
        err_r = np.abs(x - x_old) / x

        delta_abs_graph.append(delta) #Solo para el tp

        print('{0:4}\t{1: .14f}\t{2: .14f}\t{3: .14f}'.format(i+1, x, err, err_r), file=fi

        if delta <= a_tol:
            print('Hubo convergencia, n_iter = ' + str(i+1), file=file)
            return x, delta, i+1, delta_abs_graph

    return x, delta, i+1, delta_abs_graph
```

En todo el código se reutilizan las mismas funciones modificando la masa dependiendo el caso pedido:

```
        return lambda y: (-2*k*y * (1 - L0 / np.sqrt(y**2 + a**2))
        - m0 * g * mod_masa) / (-2*k)
```

Para calcular su derivada se utiliza https://www.wolframalpha.com/

```
        return lambda y: ((-2 *k *L0 * y**2)/(np.sqrt((a**2 + y**2)**3))
        - 2 * k *(1 - L0/(np.sqrt(a**2 + y**2)))) / (-2*k)
```