



ANÁLISIS NUMÉRICO

Métodos numéricos aplicados a la Ingeniería de procesos

Padrón	Alumno	Dirección de correo
101696	Javier Mariano Di Santo	jdisanto@fi.uba.ar
101109	Camila Dvorkin	camidvorkin@gmail.com
95151	Martin Fiorio	fioriomartin@yahoo.com.ar

PRIMER CUATRIMESTRE DE 2019

CURSO 5

Índice

1. Objetivos	2
2. Introducción Teórica	2
2.1. Euler	2
2.2. Runge-Kutta de orden 4	3
2.3. Punto Fijo	3
2.4. Parámetros de salida del proceso	4
3. Constantes	4
4. Ejercicio 1	4
5. Ejercicio 2	6
6. Ejercicio 3	7
7. Ejercicio 4	7
8. Ejercicio 5	8
9. Conclusiones	9
10. Código	10

1. Objetivos

- Experimentar con el uso de métodos numéricos la resolución de ecuaciones diferenciales no lineales.
- Aplicar métodos numéricos de diferentes temas de la materia y ensamblarlos para resolver un problema de mayor relevancia.
- Adquirir conocimientos básicos de la ingeniería de procesos industriales.

2. Introducción Teórica

El presente trabajo práctico consta de uno de los procesos más comunes de la industria metalúrgica. El tratamiento se divide en tres etapas diferentes: Austenizado, Temple y Revenido, que podemos observar en la Figura I. En la realización del experimento nos concentramos en la última etapa del proceso, en donde se denota un nuevo calentamiento hasta una temperatura objetivo. A medida que el material se calienta la Martensita disminuye su resistencia mecánica ganando tenacidad. La temperatura final definirá la combinación final de propiedades mecánicas.

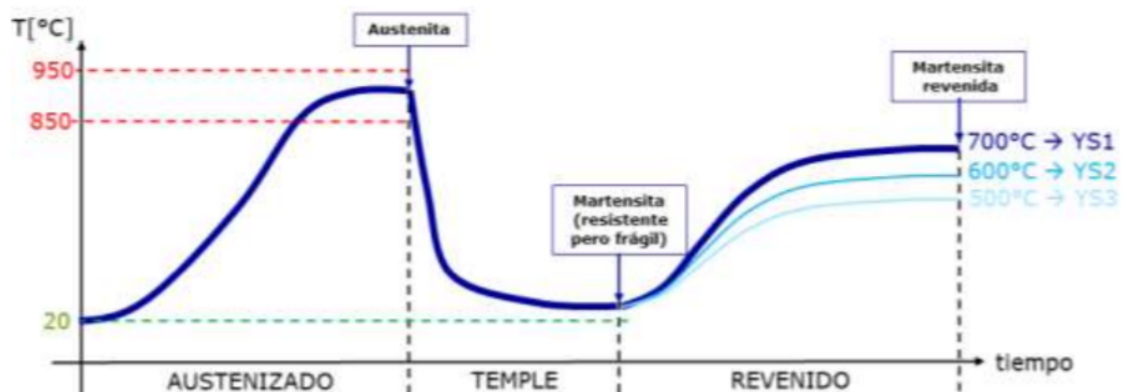


Figura 1: Figura I

Se deberá resolver la evolución temporal para un tubo de acero que viaja con una velocidad a través de un horno de con dos zonas independientes (cada una cuenta con una temperatura diferente). El intercambio de calor entre un sólido y su entorno está dado por la ley de conservación de energía:

$$-mC \frac{dT}{dt} = h_c S (T - T_\infty) + S (T^4 - T_\infty^4)$$

Se utilizan tubos de acero que van a avanzar dentro de un horno a velocidad constante y cada cierto intervalo de tiempo (cadencia) un tubo sale del horno a la temperatura objetivo, a la vez un nuevo tubo entra a temperatura ambiente.

2.1. Euler

Para obtener una solución aproximada para un problema de valor inicial en donde:

$$w' = f(t, w), a \leq t \leq b, w(a) = \alpha$$

Se elige como semilla la posición inicial y tiempo inicial recibidos por parámetro, para luego ir obteniendo los diferentes w_i y t_i a partir de:

$$t_{i+1} = a + i * h$$

$$w_{i+1} = w_i + h * f(t_i, w_i)$$

para todo $i = 0, 1, \dots, N - 1$ siendo N la cantidad de bolsillos multiplicado por la cadencia (el tiempo en segundos que tarda un tubo en pasar de un bolsillo al siguiente).

2.2. Runge-Kutta de orden 4

Para obtener una solución aproximada para un problema de valor inicial en donde:

$$w' = f(t, w), a \leq t \leq b, w(a) = \alpha$$

Se elige usar el método de orden cuatro. A continuación enseñamos las diferentes fórmulas que se deben realizar en cada iteración para las diferentes variables:

$$K_1 = h * f(t, w)$$

$$K_2 = h * f\left(t + \frac{h}{2}, w + \frac{K_1}{2}\right)$$

$$K_3 = h * f\left(t + \frac{h}{2}, w + \frac{K_2}{2}\right)$$

$$K_4 = h * f(t + h, w + K_3)$$

Ya calculadas todas las variables obtengo el w_i y el t_i :

$$w_{i+1} = w_i + \frac{K_1 + 2 * K_2 + 2 * K_3 + K_4}{6};$$

$$t_{i+1} = a + i * h$$

Si se elegía realizar el método en un orden de 2, se obtiene un error de $O(h^2)$, lo cual proviene del costo de la evolución de dos funciones. Se elige el orden 4, en donde evaluamos cuatro funciones por paso, por lo que el error local truncado será de $O(h^4)$.

2.3. Punto Fijo

A partir del siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$f_1(T_1, T_2) - T_{sk-obj} = 0$$

$$f_2(T_1, T_2) - sk_{obj} = 0$$

Representamos estas ecuaciones en una función F :

$$\mathbf{F}(T_1, T_2) = (f_1(T_1, T_2), f_2(T_1, T_2)) = 0$$

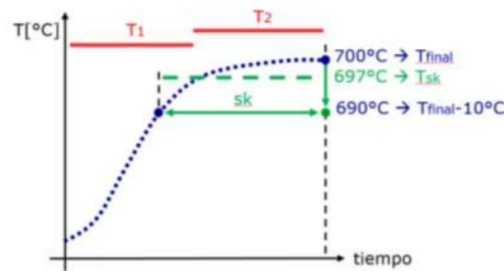
Una $\mathbf{F}D \subset R^n \rightarrow R^n$ tiene punto fijo en $pD \Leftrightarrow \mathbf{F}(\mathbf{p}) = \mathbf{p}$, por lo tanto es posible plantear un esquema de punto fijo para resolver el problema de manera iterativa:

$$\begin{bmatrix} T_1^{(k+1)} \\ T_2^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_1^{(k)} \\ T_2^{(k)} \end{bmatrix} - \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} F_1(T_1^{(k)}, T_2^{(k)}) \\ F_2(T_1^{(k)}, T_2^{(k)}) \end{bmatrix}$$

2.4. Parámetros de salida del proceso

Los parámetros de salida del proceso están definidos como:

- Soaking S_k : Intervalo de tiempo para el cual el material permanece dentro del horno en el rango de temperatura más elevada. Dicho rango se define como $[T_{final} - 10^\circ C, T_{final}]$.
- Temperatura T_{sk} : Temperatura promedio durante el soaking. Representa la temperatura objetivo del proceso de revenido.



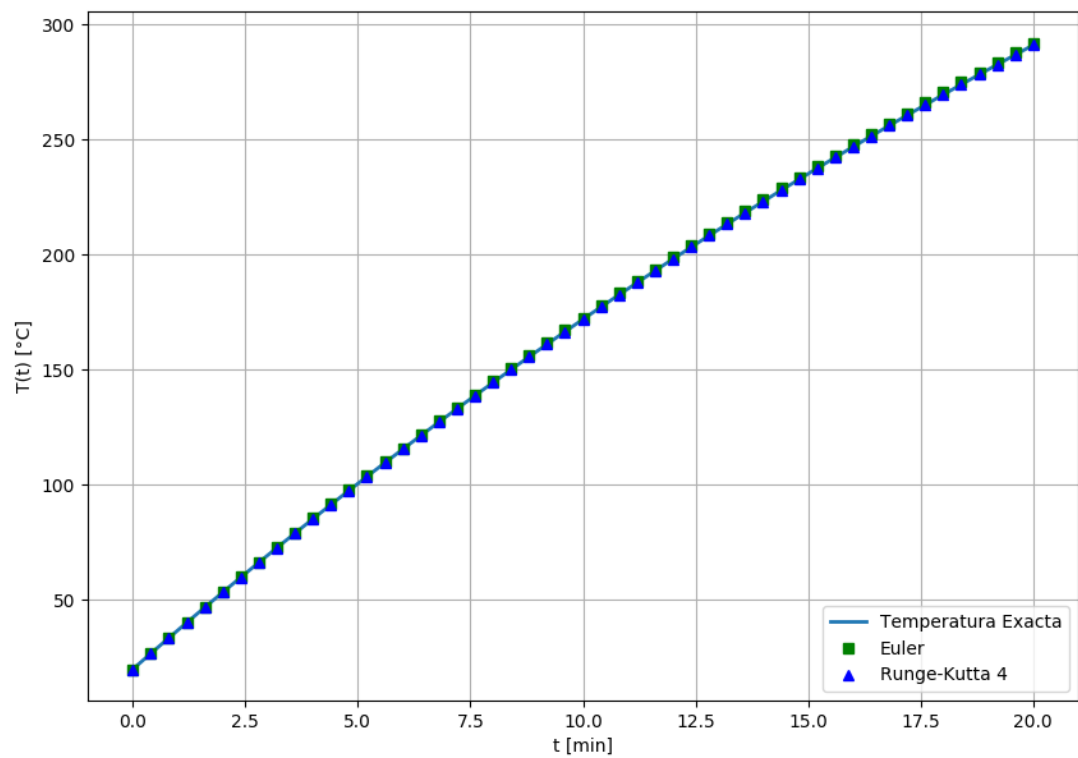
3. Constantes

Utilizando como NP el padrón de la alumna Camila Dvorkin (101109), el valor de las constantes dependientes de este son:

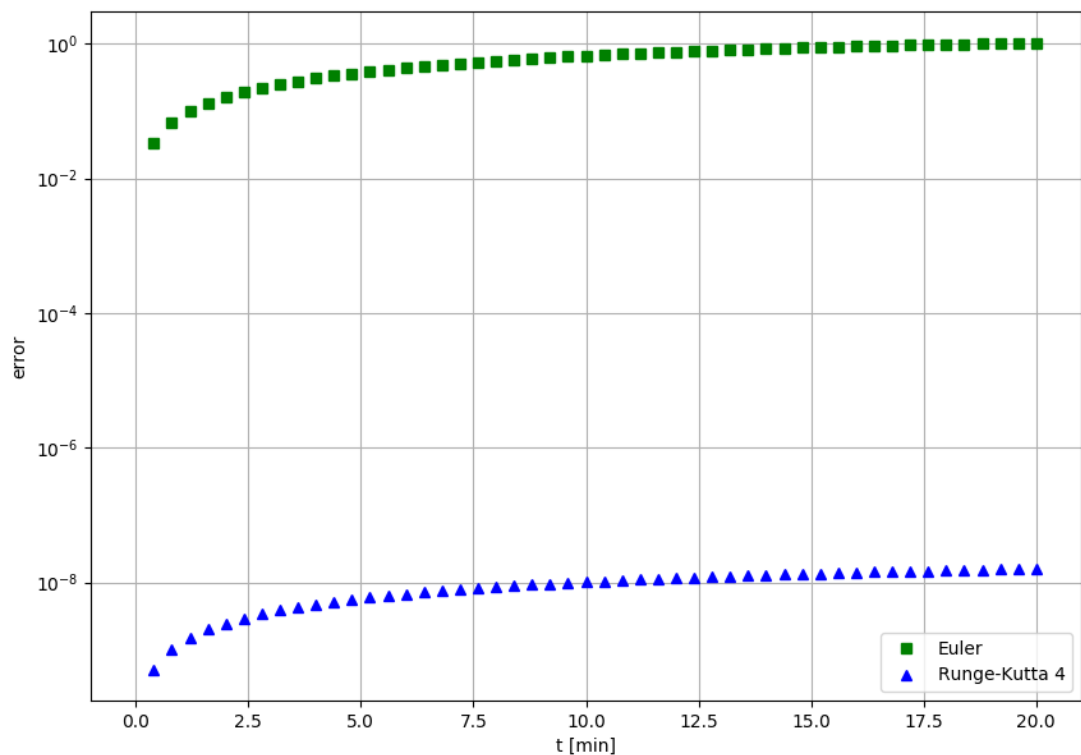
cad	$\text{round}(-10 / 10000 * (101109 - 90000) + 35)$	24 seg
T1	$\text{round}(200 / 10000 * (101109 - 90000) + 500)$	722 °C
T2	$\text{round}(200 / 10000 * (101109 - 90000) + 500)$	722 °C

4. Ejercicio 1

Se aplicaron los métodos de Euler y Runge Kutta de orden 4 para una condición inicial $T_0 = 20^\circ C$ y un paso de tiempo determinado a partir de la cadencia. Para esta primera parte se considero únicamente el intercambio de calor por convección.



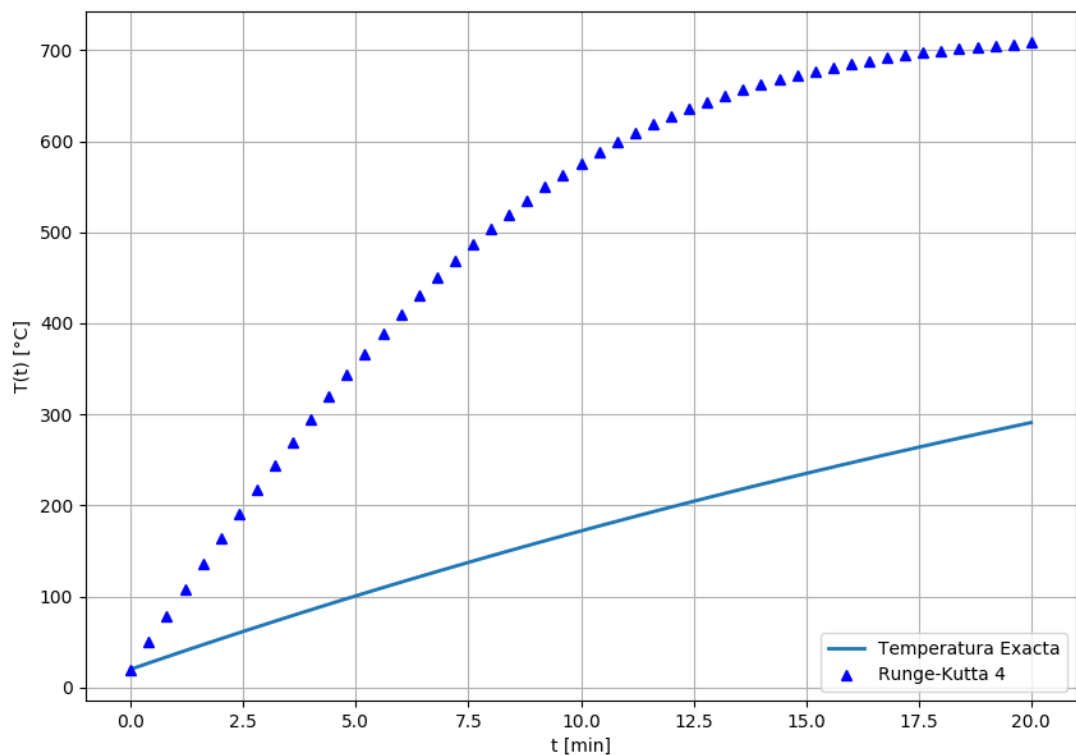
Observando el gráfico, podemos afirmar que ambos métodos aproximan a la solución muy bien.



Ambos métodos tienen evoluciones similares, donde el método de Runge-Kutta 4 tiene menor error. Se puede apreciar los órdenes de los errores $O(h)$ y $O(h^4)$ para los métodos de Euler y Runge-Kutta 4 respectivamente.

5. Ejercicio 2

Se repite el ejercicio anterior incorporando el término de intercambio radiativo a la ecuación. Utilizamos el método de Runge-Kutta de orden 4 porque este aproxima mejor a la solución del sistema.



Como la solución exacta no tiene el término de radiación, y anteriormente vimos que el método numérico aproxima muy bien a la solución, podemos afirmar que este término no es despreciable.

6. Ejercicio 3

Cambiamos los valores de T_1 y T_2 a mano para encontrar un $sK = 10 \pm 0,5$.

T_1 [°C]	T_2 [°C]	T_k [°C]	s_k [min]	Intervalo s_k	
812	722	719,266514	10	10	20

7. Ejercicio 4

Buscamos aumentar la producción un 5%, por lo que queremos reducir la cadencia para producir el material un 5% más rápido. Para ello, buscamos nuevos valores de T_1 y T_2 de forma manual ya que se busca mejorar el producto sin alterar los parámetros metalúrgicos de interés.

cad	T_1 [°C]	T_2 [°C]	T_k [°C]	s_k [min]	Intervalo s_k	
22,8	827	727	718,877287	9,88	9,12	19

8. Ejercicio 5

Para automatizar el proceso de encontrar los valores de temperatura del horno, utilizamos el método de punto fijo para un sistema no lineal de ecuaciones. Las funciones que reciben las temperaturas y devuelven el T_{sk} y S_k utilizarán el método de Runge-Kutta de orden 4 como fue desarrollado en el ítem 2.

Caso	sk obj [min]	Tk obj [°C]	T1 [°C]	T2 [°C]	Iteraciones
A	10	719	811,5977775	721,9997052	131
B	10	772	846,5931732	774,7858922	144
C	10	822	880,6369522	824,5172292	158

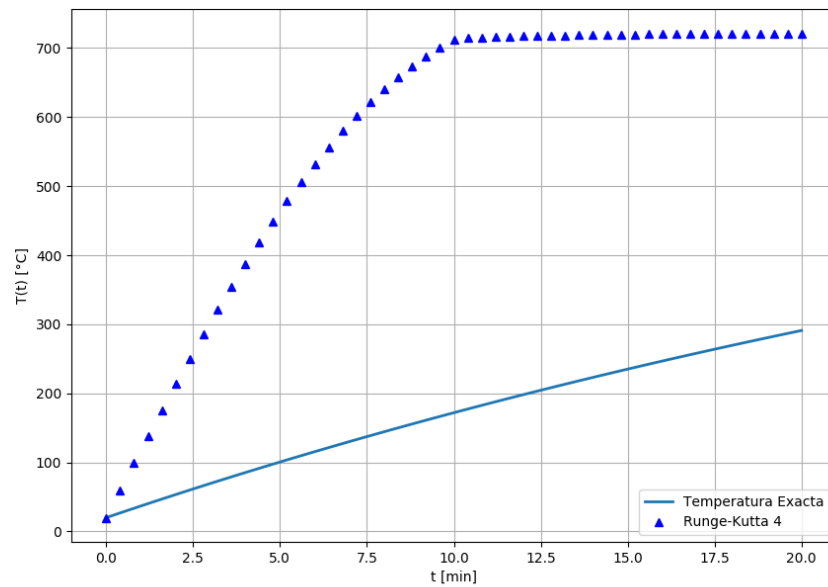


Figura 2: Caso A

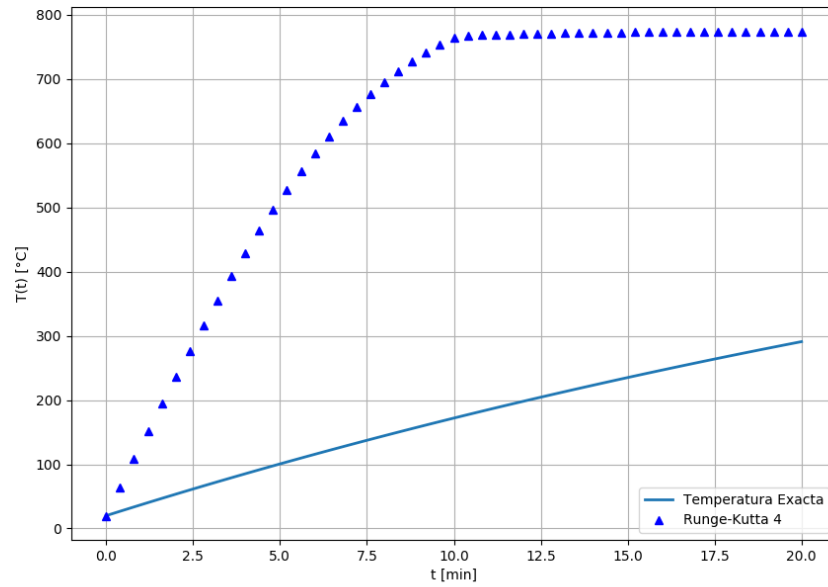


Figura 3: Caso B

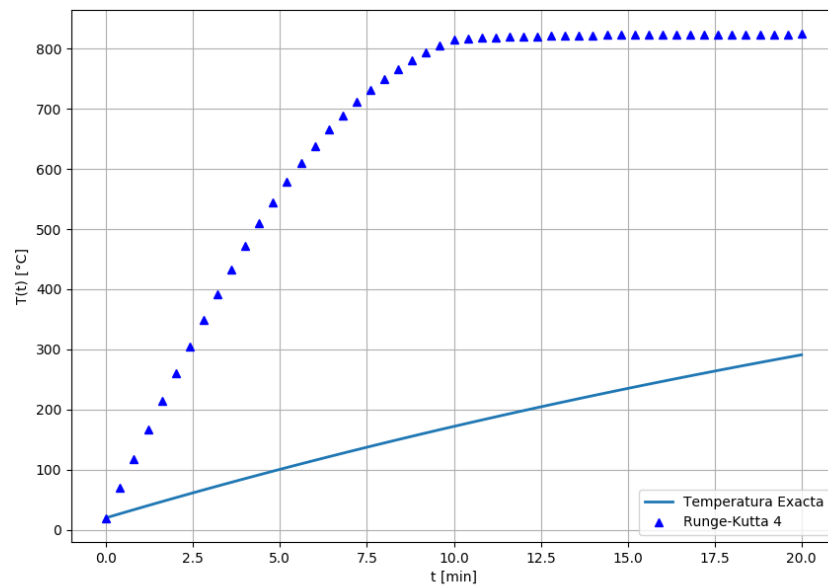


Figura 4: Caso C

9. Conclusiones

Podemos concluir que el Método de Euler es el mas sencillo para la resolución de ecuaciones diferenciales, sin embargo a medida que aumenta el tiempo, el error crece. De esta forma se espera, en el peor de los casos, un orden de error lineal.

Por otro lado, el Método de Runge-Kutta, posee el error de truncamiento del método de Taylor y prescinde del cálculo y evaluación de las derivadas de la función. Para resolver los problemas planteados a lo largo del trabajo práctico, se utiliza Runge-Kutta de orden cuatro, que presenta una complejidad de $O(h^4)$. Podemos concluir los resultados presentan mayor precisión en las aproximaciones realizadas, pero el consumo de tiempo y costo es mayor que otros métodos, además de ser un algoritmo de mayor complejidad.

Como era de esperarse se puede ver que como Runge-Kutta es un algoritmo de orden mayor de error que Euler su precisión sea mayor.

En el ejercicio I se puede observar que ambos métodos coinciden con la temperatura presentada con exactitud, sin embargo difieren en cuanto al error relativo cometido en función del tiempo. Por otro lado, en el ejercicio II, se puede apreciar que el calor por radiación no es para nada despreciable en comparación al de convección. En la figura se puede ver como los resultados difieren al incorporar el término de intercambio radiativo.

Se pide obtener los parametros de salida del proceso S_k y T_{sk} , pero con las temperaturas del horno y la cadencia obtenidas con el número de padrón, el material no llega a una temperatura que se encuentre en el intervalo especificado. Particularmente, el intervalo comienza en la temperatura 712°C y el material llega a la temperatura $708,33^\circ\text{C}$. Por lo tanto, no se logran calcular los parámetros correspondientes.

En el ejercicio V, se busca automatizar la búsqueda manual del ítem III para encontrar valores de T_1 y T_2 que obtengan el S_k y T_{sk} predeterminado. La realización del ítem III del trabajo práctico, al ser ejecutado de forma manual hasta hallar el valor esperado, es costosa y no es muy precisa. A diferencia del primer caso del ítem V, que se halló un valor de mayor exactitud de forma automática. Al crear una función que a partir de valores iniciales dados, devuelva el resultado correspondiente, evitamos buscar de forma manual cada uno de los casos pedidos, de esta forma me facilitará la tarea en este caso y en todos los casos futuros que se deseen calcular. Bastara con llamar a la función automatizada con los nuevos parámetros.

Además se podría aumentar la cantidad de iteraciones del metodo de punto fijo para obtener un error aún menor y acercarse aún más a la realidad. Siempre y cuando se tenga en cuenta la relación con respecto a su costo, ya que puede no ser rentable. La velocidad de convergencia de punto fijo puede ser lo suficientemente costosa como para optar por una menor precisión con una menor cantidad de recursos.

10. Código

A continuación se muestra el código de los métodos utilizados:

```
def euler(f, t0, t_fin, y0, h):  
    resultados_y = []  
    resultados_t = []  
  
    w = y0  
    t = t0  
  
    resultados_y.append(w)
```

```
    resultados_t.append(t)

    i = 1
    while t < t_fin:
        w = w + h * f(t, w)
        t = t0 + i * h
        resultados_y.append(w)
        resultados_t.append(t)
        i = i + 1

    return [resultados_y, resultados_t]

def runge_kutta_4(f, t0, t_fin, y0, h):
    resultados_y = []
    resultados_t = []

    t = t0
    w = y0

    resultados_y.append(w)
    resultados_t.append(t)
    i = 1
    while t < t_fin:
        k1 = h * f(t, w)
        k2 = h * f(t + h / 2, w + k1 / 2)
        k3 = h * f(t + h / 2, w + k2 / 2)
        k4 = h * f(t + h, w + k3)

        w = w + (k1 + 2 * k2 + 2 * k3 + k4) / 6
        t = t0 + i * h
        resultados_y.append(w)
        resultados_t.append(t)
        i = i + 1

    return [resultados_y, resultados_t]

def punto_fijo_sistema(f, x0, err, j_inv):
    x = x0
    delta = np.max(np.abs(x0))

    i = 1
    while delta > err:
        x_old = x
        x = np.subtract(x, j_inv.dot(f(x)))
        delta = np.max(np.abs(np.subtract(x_old, x)))
        i = i + 1
```

```
return x, i
```

Por otro lado, se implementa una función que busca los parámetros de salida:

```
def buscar_tk_sk(tmp1, tmp2):
    T0 = 20 + 273
    t0 = 0
    t_fin = NBOL * CADE
    tmp = tmp2 - 10 - 273
    arr = runge_kutta_4(interambio_total(tmp1, tmp2), t0, t_fin, T0, CADE)

    pos_temp_i = -1
    for i in range(len(arr[0])):
        if arr[0][i] > tmp:
            pos_temp_i = i
            break

    return np.matrix([[sum(arr[0][pos_temp_i:])/len(arr[0][pos_temp_i:]),
                      [(arr[1][len(arr[1]) - 1]) - (arr[1][pos_temp_i])]])
```