UKRIDA
Universitas Kristen Krida Wacana

Pusat MEDIA Pembelajaran UKRIDA

Peluang

Dr. Budi Marpaung, ST., MT.

Being Transformed To Win The Future

Pengertian (1)

Manusia tidak bisa mengetahui dengan pasti apa yang akan terjadi pada masa yang akan datang

Manusia hanya dapat memperkirakan kemungkinan terjadinya sesuatu.

Kapan terjadinya gempa, atau hujan, banjir, dapat jodoh, atau, misalnya kapan terjadi kiamat.

BMKG setiap hari mengumumkan prakiraan cuaca, bisa tepat dan tidak tepat.

Pengertian (2)

Kemungkinan terjadinya suatu peristiwa atau kejadian.

Eksperimen	Hasil/*Outcome*	Peristiwa/*Event*
Survey kepada mahasiswa apakah memiliki komputer atau tidak	• Punya (P), • Tidak punya (TP)	- Banyak mahasiswa memiliki komputer - Banyak mahasiswi memiliki komputer
Pelemparan Koin	• Muka (M) • Belakang (B)	- Banyaknya muncul muka - Banyaknya muncul belakang
Pemeriksaan mutu barang di perusahaan	• Baik (B) • Cacat (TB)	- Banyaknya produk yang cacat - Banyaknya produk tidak cacat
Test kesehatan mahasiswa	• Sehat • Tidak Sehat	- Banyaknya mahasiswa yang sehat - Banyaknya mahasiswa tidak sehat.

Sekumpulan o*utcome yang mungkin terjadi dalam eksperimen* = Ruang Sampel (*Sample Space).*

Menghitung Titik Sampel (1)

Aturan Multiplikasi/ *Multiplication Rule*

If an operation can be performed in n_1 ways, and if for each of these a second operation can be performed in n_2 ways, and for each of the first two a third operation can be performed in n_3 ways, and so forth, then the sequence of k operations can be performed in $n_1 n_2 \cdots n_k$ ways.

Berapakah titik sampel bila sepasang dadu dilempar 1 kali..?

$n_1 = 6$; $n_2 = 6$, maka titik sampel = 6.6 = 36

Menghitung Titik Sampel (2)

How many even four-digit numbers can be formed from the digits 0, 1, 2, 5, 6, and 9 if each digit can be used only once?

Misalkan bilangan tersebut: ABCD

- Posisi satuan (**D**) hanya bisa 0, 2, dan 6
- Posisi ribuan **(A)** tidak mungkin 0
- Dengan demikian posisi satuan **(D)** bisa 0 atau bukan 0

Bila posisi satuan **(D)** nilai 0:

Jumlah titik yang mungkin = $(5)_2(3)_4(4)_3(1)_1 = 60$

Bila posisi satuan **(D)** bukan nilai 0:

Jumlah titik yang mungkin = $(4)_2(3)_4(4)_3(2)_1 = 96$

Jumlah titik sampel
= 60 + 96
= 156

Soal Latihan (1)

2.22 In a medical study, patients are classified in 8 ways according to whether they have blood type AB+, AB−, A+, A−, B+, B−, O+, or O−, and also according to whether their blood pressure is low, normal, or high. Find the number of ways in which a patient can be classified.

Walpole, Halaman 51

Soal Latihan (2)

2.36 (a) How many three-digit numbers can be formed from the digits 0, 1, 2, 3, 4, 5, and 6 if each digit can be used only once?

(b) How many of these are odd numbers?

(c) How many are greater than 330?

Walpole, Halaman 52

Menghitung Titik Sample (3)

Permutasi

Susunan seluruh atau sebagian kumpulan objek

Misalnya huruf: a, b, c.
Permutasi : abc, acb, bac, bca, cab, cba (6 susunan)

Misalnya susunan hurufnya: XYZ

- ✓ Untuk posisi Z ada **3** kemungkinan (a,b, atau c);
- ✓ Selanjutnya posisi Y, tinggal **2** kemungkinan, sebab pada posisi Z sudah teralokasi 1 huruf;
- ✓ Terakhir, posisi X tinggal 1 kemungkinan, sebab pada posisi Y dan Z sudah teralokasi masing-masing 1 huruf;
- ✓ Sehingga susunan yang mungkin: 3*2*1 = **6**

Permutasi n objek = n!

n! =n*(n-1)*(n-2)*.....(1)

0! =1

Menghitung Titik Sample (4)

Permutasi

The number of permutations of n objects arranged in a circle is $(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})!$

The number of permutations of n distinct objects taken r at a time is

$$\boldsymbol{nPr} = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})!)}$$

The number of distinct permutations of things of which n_1 are of one kind, n_2 of a second kind, ……, n_k of a k-th kind is

$$\frac{\boldsymbol{n}!}{n_1!\,n_2!\ldots\ldots n_k!}$$

Menghitung Titik Sampel (5)

Contoh Permutasi

Berapa banyak susunan yang mungkin, bila 6 orang duduk dalam meja melingkar?

$$(6-1)! = 5.4.3.2.1 = 120$$

Menghitung Titik Sampel (6)

Contoh Permutasi

2.40 In how many ways can 5 starting positions on a basketball team be filled with 8 men who can play any of the positions?

$$8P5 = \frac{8!}{(8-5)!} = 5720$$

Walpole, Halaman 49

Menghitung Titik Sampel (7)

Contoh Permutasi

Example 2.21: In how many ways can 7 graduate students be assigned to 1 triple and 2 double hotel rooms during a conference?
Solution: The total number of possible partitions would be

$$\binom{7}{3,2,2} = \frac{7!}{3!\,.2!\,.2!} = 210$$

Walpole, Halaman 50

Menghitung Titik Sampel (8)

Contoh Permutasi

Example 2.23: How many different letter arrangements can be made from the letters in the word STATISTICS?

$$\binom{10}{3,3,2,1,1} = \frac{10!}{3!.3!.2!.1!.1!} = 50{,}400$$

Walpole, Halaman 51

Soal Latihan (3)

2.41 Find the number of ways that 6 teachers can be assigned to 4 sections of an introductory psychology course if no teacher is assigned to more than one section.

Walpole, Halaman 52

Soal Latihan (4)

2.45 How many distinct permutations can be made from the letters of the word INFINITY ?

Walpole, Halaman 52

Soal Latihan (5)

2.43 In how many ways can 5 different trees be planted in a circle?

Walpole, Halaman 52

Menghitung Titik Sample (9)

Kombinasi

The number of combinations of n distinct objects taken r at a time is

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{r}!\,(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})!}$$

Soal Latihan (6)

Berapa cara memilih 3 orang dari 10 siswa untuk menjadi pengurus OSIS.

Walpole, Halaman 52

Soal Latihan (7)

Berapa cara memilih 3 orang dari 10 siswa untuk menjadi pengurus OSIS, masing-masing untuk jabatan ketua, sekretaris, dan bendahara?

Menghitung Titik Sampel (10)

Contoh Kombinasi

2.47 How many ways are there to select 3 candidates from 8 equally qualified recent graduates for openings in an accounting firm?

$$\binom{8}{3} = \frac{8!}{3! * (8-3)!} = 56$$

Walpole, Halaman 51

Soal Latihan (8)

2.41 Find the number of ways that 6 teachers can be assigned to 4 sections of an introductory psychology course if no teacher is assigned to more than one section?

Walpole, Halaman 52

Pengertian Probabilitas

- ✓ Probabilitas dinyatakan dengan bilangan antara 0 dan 1.
- ✓ Kejadian yang **sudah pasti terjadi** memiliki peluang 1, kejadian yang **sudah pasti tidak** terjadi memiliki peluang 0.
- ✓ Semakin besar kemungkinan suatu kejadian terjadi maka nilainya semakin dekat dengan 1, dan sebaliknya semakin kecil kemungkinan suatu kejadian akan terjadi maka nilai probabilitasnya semakin dengan 0.

$$0 < P < 1$$

Perhitungan Probabilitas: Pendekatan Klasik

$$p(A) = \frac{x}{n}, x > 0; n > 0; n \geq x$$

Kepala pabrik menyatakan bahwa dari 100 barang yang diproduksi, ada sebanyak 25 barang yang rusak. Bila barang dibungkus rapi, kemudian seorang pembeli mengambil satu barang secara acak, berapakah probabilitasnya bahwa barang itu rusak ?

Penyelesaian

Dari soal n = 100, x = 25; A = barang rusak, maka $p(A) = \frac{25}{100} = 0.25 = 25\%$

Perhitungan Probabilitas: Pendekatan Frekuensi Relatif

$$p(X_i) = \lim_{n \to \sim} \frac{f_i}{n}$$

Hasil pemeriksaaan terhadap barang yang dihasilkan suatu perusahaan, sbb:

Baik	80	79	81	80	79
Cacat	20	21	19	20	21
Total Barang	100	100	100	100	100

Penyelesaian

Misalnya X_1 = produk cacat. Dari tabel di atas terlihat bahwa peluang cacat produk bervariasi antara 19 hingga 21 persen, namun stabil pada angka 20 persen, sehingga dapat disimpulkan bahwa : $p(X_1) = \lim_{n \to \sim} \frac{f_1}{n} = \frac{20}{100} = 0.2 = 20\%$

Kejadian atau Peristiwa

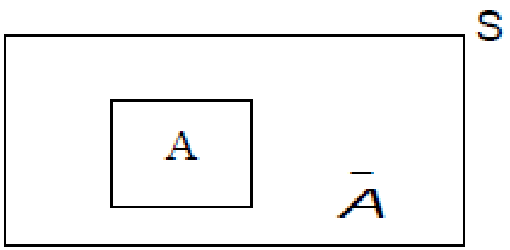
Koin dilempar 2 kali

$$\{MM, \bar{M}M, M\bar{M}, \bar{M}\bar{M}\}$$

X	Outcome	f(X)	p(X)
0	$\bar{M}\ \bar{M}$	1	$\frac{1}{4} = 0.25$
1	$\bar{M}\ M;\ \bar{M}\ M$	2	$\frac{2}{4} = 0.50$
2	$M\ M$	1	$\frac{1}{4} = 0.25$
Jumlah		4	$\frac{4}{4} = 1.00$

Komplemen Sebuah Kejadian

Misalkan bahwa S adalah ruang sampel (himpunan dari hasil eksperimen), A adalah himpunan bagian dari S, dan $\bar{A}$ adalah komplemen dari A atau semua anggota S yang bukan anggota A. Hubungan tersebut dinyatakan dalam gambar berikut :



<u>Contoh 4:</u>
Berdasarkan hasil pemeriksaaan terhadap 100 barang, ternyata ada 10 barang yang rusak. Bila A menyatakan barang rusak, tentukan komplemen A atau $\bar{A}$.

<u>Penyelesaian</u>
S = seluruh barang (=100), rusak dan tidak rusak
A = barang yang rusak = 10
$\bar{A}$ = barang yang tidak rusak (100 – 10 = 90).

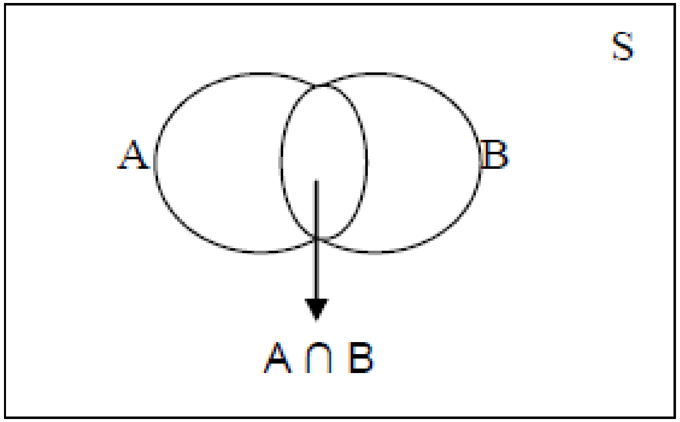
Irisan Dua Kejadian

Irisan (Interseksi) Dua Kejadian

Irisan dua kejadian, misalnya A dan B, ditulis $A \cap B$ (baca : A iris B, atau A interseksi B), terdiri dari elemen-elemen anggota S yang merupakan anggota A sekaligus B, dinyatakan sebagai :

$$\boxed{A \cap B = \{x : x \in A \text{ dan } x \in B}$$

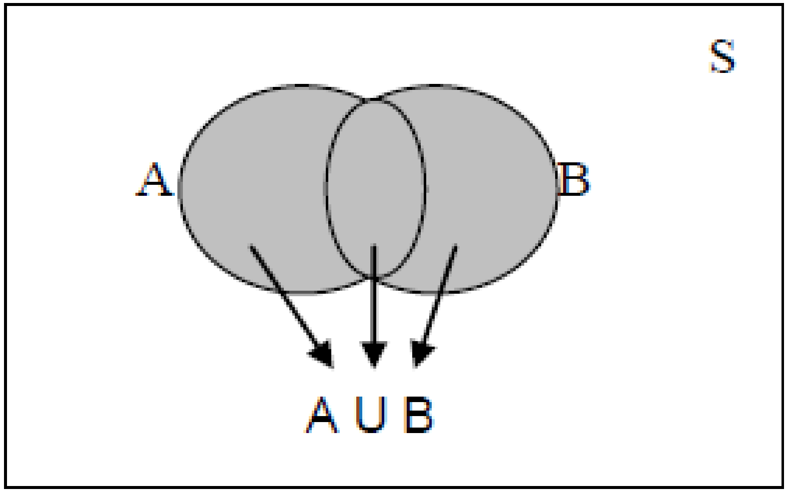
Hubungan tersebut dinyatakan dalam gambar berikut :



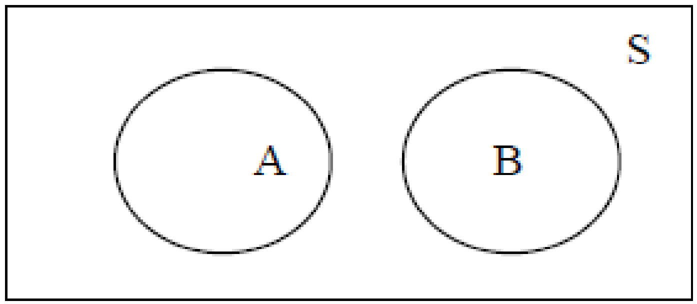
Gabungan Dua Kejadian

$$A \cup B = \{x: x \in A \; atau \; x \; \in B\}$$

Hubungan tersebut dinyatakan dalam gambar berikut :



Kejadian Saling Meniadakan



Untuk kejadian saling meniadakan (mutually exclusive), berlaku :

$P(A_1 \text{ atau } B) = P(A \cup B) = P(A) + P(B) \rightarrow$ kejadian A dan B saja

$P(A \text{ atau } B \text{ atau } C) = P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \rightarrow$ kejadian A, B dan C

Atau

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \ldots\ldots \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + \ldots\ldots\ldots + P(A_k) = \sum_{i=1}^{k} P(A_i)$$

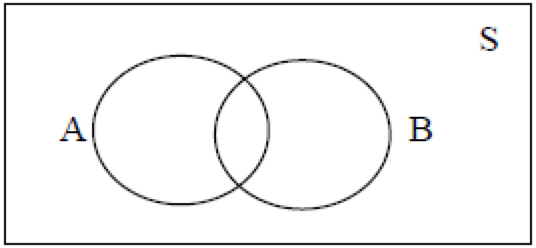
Kejadian Saling Meniadakan

Sebuah mesin otomatis pengisi kantong plastik dengan campuran beberapa sayuran menunjukkan bahwa sebagian besar kantong plastik berisi sayuran tersebut memuat berat yang benar. Meskipun demikian, ada sedikit variasi dalam ukuran sayuran yang ada, sebuah paket kantong plastik mungkin sedikit lebih berat atau lebih ringan dari berat standar. Pengecekan terhadap 4000 paket menunjukkan hasil, sbb:

Berat	Kejadian	Jumlah Paket	Probabilitas
Lebih Ringan	A	100	$\frac{100}{4000} = 0.025$
Standar	B	3600	$\frac{3600}{4000} = 0.900$
Lebih Berat	C	300	$\frac{300}{4000} = 0.075$
Jumlah		4000	1.000

P(A atau C) = P(A U C) = P(A) + P(C) = 0.025 + 0.075 = 0.10.

Kejadian Tidak Saling Meniadakan



P (A atau B) = P (A U B) = P(A) + P(B) – P (A ∩ B)

Departemen Pariwisata memilih sebuah sampel dari 200 wisatawan yang mengunjungi Jakarta. Dari hasil survey diperoleh bahwa 120 orang telah mengunjungi Taman Mini Indonesia Indah (TMII) dan 100 orang telah mengunjungi Taman Impian Jaya Ancol (TIJA), dan 60 orang telah mengunjungi keduanya. Bila seorang wisatawan dipilih secara acak, berapa peluang yang bersangkutan telah mengunjungi TMII atau TIJA ?

Penyelesaian

A = wisatawan mengunjungi TMII; B = wisatawan mengunjungi TIJA.

$P(A)=\frac{120}{200}=0.6$; $P(B)=\frac{100}{200}=0.5$; $P(A\cap B)=\frac{60}{200}=0.3$, maka :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{120}{200}+\frac{100}{200}-\frac{60}{200}=0.8$$

Probabilitas Bersyarat

Probabilitas terjadinya kejadian A bila diketahui B telah terjadi atau akan terjadi disebut sebagai probabilitas bersyarat (*conditional probability*), dinyatakan sebagai $P(A|B)$.

$$\boxed{P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}}$$

Andaikan sebuah kotak berisi 3 bola putih dan 2 bola hitam. Diambil sebuah bola dari kotak dan tidak dikembalikan, selanjutnya dilakukan pengambilan kedua. Ingin diketahui peluang terambilnya bola hitam pada pengambilan kedua? Hal ini jelas sulit dihitung, karena tergantung pada jenis bola yang terambil pada pengambilan pertama. Dalam hal ini kejadian B tergantung pada kejadian A, disebut kejadian tak bebas.

Dari ilustrasi di atas, misalkan :
A_1 = kejadian pengambilan 1 berwarna putih ;
A_2 = kejadian pada pengambilan pertama berwarna hitam
B_1 = kejadian pada pengambilan kedua berwarna putih
B_2 = kejadian pada pengambilan kedua berwarna hitam
Peluang terambil bola berwarna putih pada pengambilan kedua, bila pada pengambilan bola pertama berwarna putih, ditulis sebagai $P(B_1|A_1) = \frac{2}{4}$. Dengan cara yang sama didapat : $P(B_1|A_2) = \frac{3}{4}$; $P(B_2|A_1) = \frac{2}{4}$; $P(B_2|A_2) = \frac{1}{4}$.

Probabilitas Bersyarat

Dari 100 orang mahasiswa yang mengikuti mata kuliah Statistik, 20 orang diantaranya mendapat nilai A, 30 orang mendapat nilai B, 30 orang mendapat nilai C, dan 20 orang mendapat nilai D. Tetapi ternyata tidak semua mahasiswa tersebut tercatat secara resmi dalam daftar pengikut mata kuliah tersebut, dengan uraian sbb:

Nilai	Terdaftar (T)	Terdaftar ($\bar{T}$)	Jumlah
A	20	0	20
B	15	15	30
C	25	5	30
D	5	15	20
Jumlah	65	35	100

a. Tentukan peluang seorang mahasiswa yang terdaftar sebagai pengikut mata kuliah Statistik mendapat nilai B.
b. Tentukan peluang mahasiswa yang mendapat nilai C adalah mahasiswa yang tidak terdaftar.

Probabilitas Bersyarat

Penyelesaian

a. Peluang seorang mahasiswa yang terdaftar sebagai pengikut mata kuliah Statistik mendapat nilai B = $P(B|T) = \frac{P(B \cap T)}{P(T)} = \frac{\frac{15}{100}}{\frac{65}{100}} = \frac{15}{100} x \frac{100}{65} = \frac{3}{13}$

b. Peluang mahasiswa yang mendapat nilai C adalah mahasiswa yang tidak terdaftar =

$$P(\bar{T}|C) = \frac{P(\bar{T} \cap C)}{P(C)} = \frac{\frac{5}{100}}{\frac{30}{100}} = \frac{5}{100} x \frac{100}{30} = \frac{1}{6}$$

Aturan Perkalian

Dari $P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$, maka dapat ditentukan probabilitas irisan :

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A) x P(B|A)}$$

Aturan Perkalian

Andaikan sebuah kotak berisi 3 bola putih dan 2 bola hitam. Diambil sebuah bola dari kotak dan tidak dikembalikan, selanjutnya dilakukan pengambilan kedua. Tentukan peluang bola yang terambil keduanya berwarna putih

<u>Penyelesaian</u>

A_1 = kejadian pada pengambilan pertama berwarna putih

A_2 = kejadian pada pengambilan pertama berwarna hitam

B_1 = kejadian pada pengambilan kedua berwarna putih

B_2 = kejadian pada pengambilan kedua berwarna hitam

$P(A_1) = \frac{3}{5}$; $P(B_1|A_1) = \frac{2}{4}$; Peluang kedua bola yang terambil bola hitam = $P(A_1 \cap B_1)$

$$P(A_1 \cap B_1) = P(A_1)P(B_1|A_1) = \frac{3}{5} x \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = 0.3$$

Soal Latihan (9)

Sebuah kotak terdiri dari 5 bola warna putih, 4 bola warna merah dan 3 bola warna kuning.

a. Hitung peluang terambil bola kuning pada pengambilan pertama, bola putih pada pengambilan kedua dan ketiga, bila setiap bola yang diambil dikembalikan ke tempat semula sebelum dilakukan pengambilan bola berikutnya.
b. Bila pengambilan bola dilakukan tanpa pengembalian, tentukan peluang bola merah terambil pada pengambilan pertama, bola putih pada pengambilan kedua, dan warna kuning pada pengambilan ketiga.

Kejadian Bebas

$$\boxed{P(A \cap B) = P(A)xP(B) = P(B)xP(A)}$$

Andaikan sebuah kotak berisi 3 bola putih dan 2 bola hitam. Bola yang diambil pertama dikembalikan ke kotak semula, tentukan peluang bola yang terambil keduanya berwarna putih.

$$P(A \cap B) = P(A)xP(B) = \frac{3}{5} x \frac{3}{5} = \frac{9}{25}$$

Aturan Bayes

- Ahli matematika dari Inggris Thomas Bayes (1702 – 1761) mengembangkan teori untuk menghitung probabilitas tentang sebab-sebab terjadinya suatu kejadian berdasarkan pengaruh yang dapat diperoleh sebagai hasil observasi.
- Teori yang dikembangkan Bayes kemudian dikenal dengan *Bayesian Decision Theory*, yaitu teori pengambilan keputusan yang mengandung ketidakpastian.

$$\boxed{P(A_i|A)=\frac{P(A_i)P(A|A_i)}{\sum_{i=1}^{k}P(A_i)P(A|A_i)}}$$

Aturan Bayes

Suatu pabrik menggunakan 4 mesin untuk memproduksi sejenis barang. Produksi harian dari mesin 1, mesin 2, mesin 3, dan mesin 4 masing-masing sebesar 1.000, 1.200, 1.800, dan 2.000 buah. Persentasi cacat dari mesin 1, mesin 2, mesin 3, dan mesin 4 berturut-turut 1%, 0.5%, 0.5%, dan 1%. Bila dipilih 1 buah barang secara acak, ternyata cacat, berapa peluang barang tersebut dari mesin 1, mesin 2, mesin 3, dan mesin 4.

Aturan Bayes

Penyelesaian

Misalkan R = barang yang rusak, dan S = 1.000+1.200+1.800+2.000 = 5.000, maka:

$$P(M_1)=\frac{1.000}{6.000}=\frac{1}{6};\; P(M_2)=\frac{1.200}{6.000}=\frac{1}{5};\; P(M_3)=\frac{1.800}{6.000}=\frac{3}{10};\; P(M_4)=\frac{2.000}{6.000}=\frac{1}{3}$$

$$P(R|M_1)=0.01;\; P(R|M_2)=0.005;\; P(R|M_3)=0.005;\; P(R|M_4)=0.01;$$

P(R) = P(R∩M_1) + P(R∩M_2) + P(R∩M_3) + P(R∩M_4)

$$= P(M_1)P(R|M_1)+P(M_2)P(R|M_2)+P(M_3)P(R|M_3)+P(M_4)P(R|M_4)$$

$$= P(M_1)P(R|M_1)+P(M_2)P(R|M_2)+P(M_3)P(R|M_3)+P(M_4)P(R|M_4)$$

$$= \frac{1}{6}x0.01+\frac{1}{5}x0.005+\frac{3}{10}x0.005+\frac{1}{3}x0.01=0.00747$$

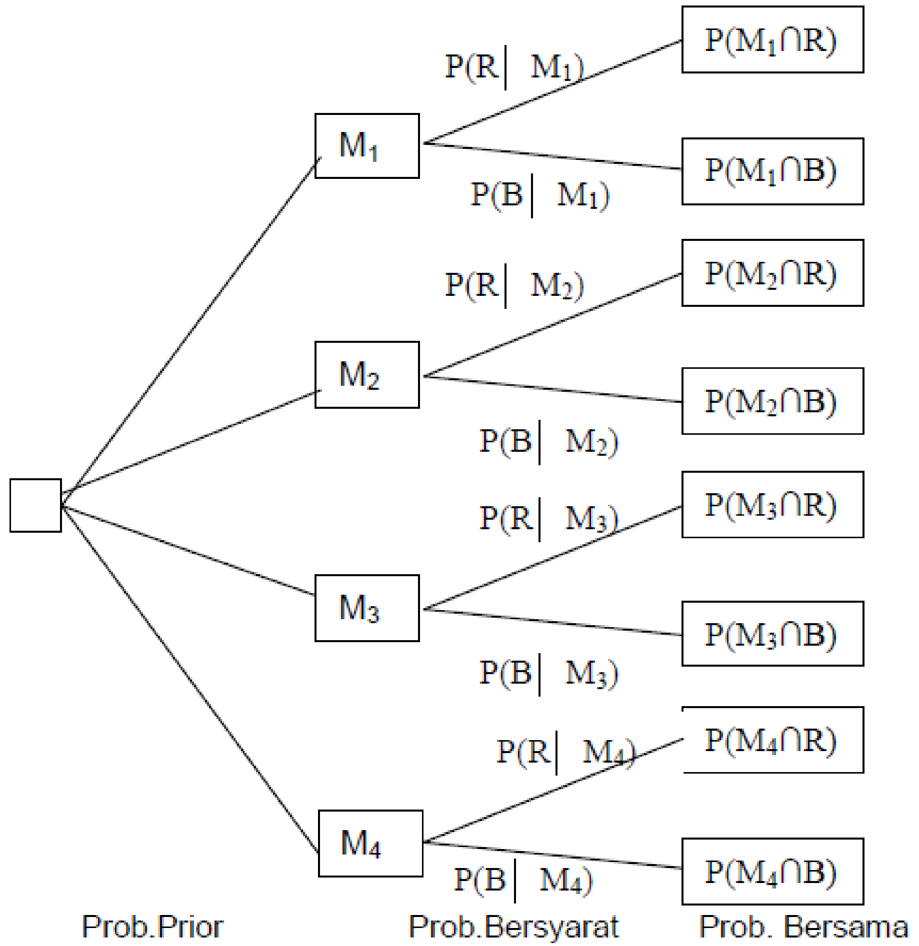
$$P(M_1|R)=\frac{P(M_1)xP(R|M_1)}{P(R)}=\frac{0.00167}{0.00747}=0.22 \text{ (rusak dari mesin 1)}$$

$$P(M_2|R)=\frac{P(M_2)xP(R|M_2)}{P(R)}=\frac{0.001}{0.00747}=0.13 \text{ (rusak dari mesin 2)}$$

$$P(M_3|R)=\frac{P(M_3)xP(R|M_3)}{P(R)}=\frac{0.0015}{0.00747}=0.20 \text{ (rusak dari mesin 3)}$$

$$P(M_4|R)=\frac{P(M_4)xP(R|M_4)}{P(R)}=\frac{0.0033}{0.00747}=0.44 \text{ (rusak dari mesin 4)}$$

Aturan Bayes



Soal Latihan (10)

Terdapat 3 kotak berisi bola berwarna merah, putih dan hitam, dengan jumlah sbb.

	Kotak -1	Kotak - 2	Kotak - 3
Merah	2	4	3
Putih	3	1	4
Hitam	5	3	3

Bila sebuah kotak dipilih secara acak dan dari dalamnya diambil sebuah bola secara acak dan ternyata warna merah, tentukan berapa peluang kotak yang terambil adalah kotak – 3?

SEKIAN