Scribe

Unidad 3 Métodos Numericos

Metodos numericos

Se explica la importancia de los metodos numericos, su necesidad frente a Soluciones analiticas y a los calculos computacionales como errores de truncamiento y redondeo tambien muestran metodos de biseccion, falsa posesion, Newton Rapson y secante para resolver ecuaciones algebraicas y transcedentales Se analiza la convergencia y eficiencia de cada metodo.

Ecuaciones no lineales

Ademas aborda tecnicas para resolver sistemas de ecuaciones lineales, incluyendo métodos directos como eliminacion de Gauss y método iterativos como Jacobi y Gauss-Seidel. Metodos de interpolacion de Lagrange, Newton y splines, junto con técnicas de regresión lineal y no lineal para el ajuste de datos experimentales

Algebra lineal numerica

Se cubren metodos para calcular derivadas e integrales inconcluyendo reglas de Newton-Cotes y metodos mas avanzados como cuadratura gaussiana.

Ecuaciones diferenciales ordinarias

Ecuaciones diferenciales parciales

Optimizacion numerica.

Resolver $y'' - 6y' + 9y = t^2 e^{3t}$

Sujeto a $y(0) = 2 \quad y'(0) = 6$

Definición de errores

Los errores numericos surgen del uso de aproximacion para representar operaciones y cantidades matematicos exactas

E_T = Valor verdadero − Valor aproximado.

Ejemplo:

$y' = 0.2xy$

$\frac{dy}{dx} = 0.2xy$

$\frac{dy}{y} = 0.2x\,dx$

$\int \frac{dy}{y} = \int 0.2x\,dx$

$e^{\ln(y)} = 0.2\frac{x^2}{2} + c$

$y = ce^{0.1x^2}$

$y(x=1) = 1$

$1 = ce^{0.2(1)^2}$

$1 = ce^{0.1}$

$\frac{1}{e^{0.1}} = c$

$y = \frac{e^{0.1x^2}}{e^{0.1}}$

Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO)

Se cubren metodos para calcular derivadas e integrales, incluyendo reglas de Newton cotes (trapecio y simpson) y metodos mas avanzados como cuadratura gaussiana

Se presentan emetodos numericos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias como Euler, euler mejorado, Runge - Kutta y metodos de paso multiple

Ecuaciones parciales Diferenciales (EDP)

Se explican tecnicas de diferencias finitas elementos finitos y volumenes finitos para resolver ecuaciones en derivadas parciales con aplicaciones en transferencia de calor y mecanica de fluidos.

Optimización numerica

Se abordan metodos de optimización sin restricciones, como gradiente descendente y Newton y con restricciones, incluyendo programación lineal y cuadratica

Metodos especificos para ingenieria

Se presentan aplicaciones especificas en distintas ramas de la ingenieria usando Software MatLab y Python

Presicion y exatitud

Presicion: Se refiere a la repetibilidad de una medición o calculo. Un conjunto de valores precisos presenta poca variabilidad entre ellos aunque no necesariamente estan cerca del valor real

Exactitud: Identifica que tan cerca esta un valor medido del valor real. Un resultado exacto esta muy proximo al valor verdadero aunque no puede no ser necesariamente preciso

Insertidumbre

Es una medida del rango de valores dentro del cual se espera que se encuentre el resultado real. En experimentos y calculos numericos, siempre hay un grado de insertidumbre debido a errores en la medicion o aproximación

Sesgo

El sesgo es un error sistematico que causa que los resultados se desvien constantemente en una dirección grafica. A diferencia de los errores aleatorios, que peden fluctuar en ambos direcciones.

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$$

$$m = \frac{dy}{dx}$$

$$m = \frac{y_1 - y_0}{h}$$

$$f(x,y) = \frac{y_1 - y_0}{h}$$

$$hf(x,y) = y_1 - y_0$$

$$y_1 = y_0 + hf(x,y)$$

Euler mejorado

$$y_{n+1} = y_n + h\,\frac{f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, y_{n+1})}{2}$$

$$y^*_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

$$y^*_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$

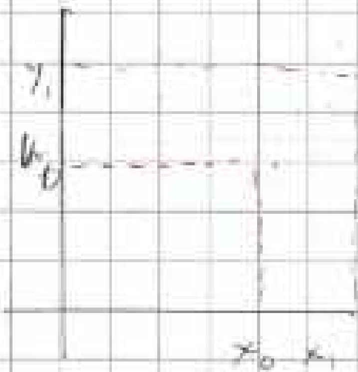
$$f(x_0, y_0) = \frac{y_1 - y_0}{h}$$

$$hf(x_0, y_0) = y_1 - y_0$$

$$y_0 + hf(x_0, y_0) = y_1$$

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$$

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$$



$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{y_1 - y_0}{h}$$

$$m = \frac{dy}{dx} = \frac{y_1 - y_0}{h}$$

$$h = x_1 - x_0$$

Metodo Runge-Kutta

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f(x_n, y_n)$$

$$k_2 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_n + \frac{1}{2}h, y_n + \frac{1}{2}hk_2\right)$$

$$k_4 = f(x_n + h, y_n + hk_3)$$

Metodo euler

$y(x=0.1.5) = 1.1331$

Por solución analitica

$$y = \frac{e^{0.1(1.5)^2}}{e^{0.1}} = 1.1331$$

Por metodo numerico en x 1 a 1.5 existe una distancia de 0.5 u, determinamos $h=0.1$

$$y_1 = y_0 + h[0.2\, x_0\, y_0]$$

$h = 0.1$

n	x_n	y_n	Euler
0	$x_0=1$	$y_0=1$	
1	$x_1=1.1$	$y_1=1.02$	$y=1+0.1[0.2(1)(1)]$
2	$x_2=1.2$	$y_2=1.04244$	$y_2=1.02+0.1[0.2(1.1)(1.02)]$

Ejercicio

$$\frac{dy}{dx} = \overset{f(x,y)}{\boxed{0.2xy}}$$

encontrar $y(1.5) = ?$

con $h = 0.1$

con $y(1) = 1 \leftarrow n = 0$

valor real calculado con:

$$y = \frac{e^{0.1x^2}}{e^{0.1}}$$

n	Euler x_n	y_n	E. rel y_n	Euler mejorado
0	$y_0 = 1$	$y_0 = 1$		$y_0 = 1$
	$x_1 = 1.1$	$y_1 = 1.02$		
		$y_2 =$		

Euler

$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$

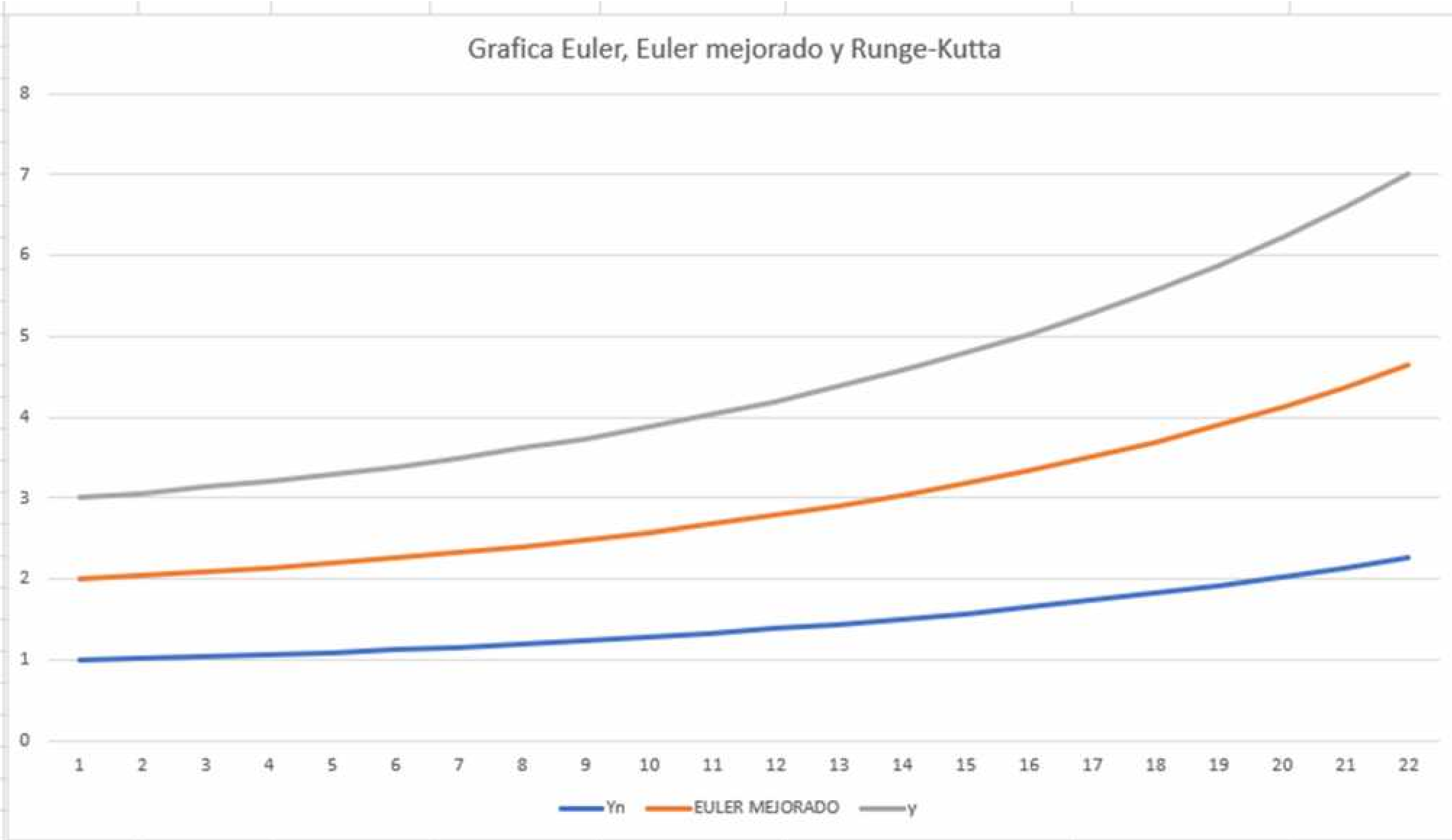
$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0)$

$= 1 + 0.1(0.2)(1)(1) = 1.02$

$y_2 = y_1 + hf(x, y) = 1.02 + 0.1(0.2)(1.1)(1.02)$

Evidencia Excel métodos Euler, Euler mejorado y Runge-Kutta

	0.2																	
h=	0.1	Euler				Euler mejorado	rauge-kutta									Error Euler M	error Relativo rk	error absoluto rk
n	Xn	Yn	Valor Real	Error Absolut	Error Relativo Porcentu	EULER MEJORAD(	k1	k2	k3	k4	y	x	y2	x2	y3	error %	error %2	error %3
0	1	1	1	0	0	1					1	1				0	0	0
1	1.1	1.02	1.021222052	0.001222052	0.119665614	1.02122	0.2	0.2121	0.212227	0.224669	1.021222	1.1	1.10605	1.1	1.212227	0.000201	5.1437E-09	5.25286E-11
2	1.2	1.04244	1.044982355	0.002542355	0.243291657	1.044977662	0.224668851	0.237465	0.237612	0.250796	1.044982	1.2	1.138732	1.2	1.257612	0.000449	1.25596E-08	1.31245E-10
3	1.3	1.06745856	1.071436209	0.003977649	0.371244607	1.071428137	0.250795765	0.264381	0.26455	0.278574	1.071436	1.3	1.17463	1.3	1.30699	0.000753	2.30697E-08	2.47178E-10
4	1.4	1.09521248	1.100759064	0.005546581	0.503886964	1.100746696	0.278573414	0.293049	0.293244	0.308213	1.100759	1.4	1.213983	1.4	1.360702	0.001124	3.77178E-08	4.15182E-10
5	1.5	1.12587843	1.133148453	0.007270021	0.641577101	1.133130664	0.308212538	0.323689	0.323914	0.339945	1.133148	1.5	1.257057	1.5	1.419126	0.00157	5.78064E-08	6.55033E-10
6	1.6	1.15965479	1.168826203	0.009171418	0.784669101	1.168801617	0.339944536	0.356545	0.356802	0.374025	1.168826	1.6	1.304151	1.6	1.482681	0.002103	8.49378E-08	9.92775E-10
7	1.7	1.19676374	1.208040952	0.011277214	0.933512585	1.208007899	0.374024385	0.391884	0.392179	0.410735	1.208041	1.7	1.355597	1.7	1.551834	0.002736	1.21057E-07	1.46241E-09
8	1.8	1.23745371	1.251071019	0.013617314	1.088452531	1.251027476	0.410733923	0.430002	0.430339	0.450387	1.251071	1.8	1.411765	1.8	1.627103	0.00348	1.68496E-07	2.108E-09
9	1.9	1.28200204	1.298227665	0.016225627	1.249829073	1.298171195	0.450385566	0.471228	0.471614	0.493328	1.298228	1.9	1.473068	1.9	1.709068	0.00435	2.30026E-07	2.98626E-09
10	2	1.33071812	1.349858808	0.019140691	1.417977299	1.349786482	0.493326512	0.515929	0.516369	0.539946	1.349859	2	1.539966	2	1.798371	0.005358	3.08904E-07	4.16977E-09
11	2.1	1.38394684	1.406353241	0.0224064	1.59322704	1.406261549	0.539943521	0.564511	0.565015	0.590671	1.406353	2.1	1.612974	2.1	1.895733	0.00652	4.08933E-07	5.75104E-09
12	2.2	1.44207261	1.468145442	0.026072834	1.775902637	1.468030181	0.590668359	0.617431	0.618007	0.645988	1.468145	2.2	1.692662	2.2	2.001954	0.007851	5.3451E-07	7.84738E-09
13	2.3	1.5055238	1.535721034	0.030197232	1.966322717	1.535577186	0.645983991	0.6752	0.675857	0.706436	1.535721	2.3	1.779673	2.3	2.11793	0.009367	6.90692E-07	1.06071E-08
14	2.4	1.5747779	1.609623016	0.034845118	2.164799948	1.60944459	0.706431671	0.73839	0.739141	0.772625	1.609623	2.4	1.874719	2.4	2.244665	0.011085	8.83258E-07	1.42171E-08
15	2.5	1.65036724	1.690458848	0.040091612	2.371640787	1.690238709	0.772619041	0.807644	0.808503	0.845237	1.690459	2.5	1.9786	2.5	2.38328	0.013022	1.11877E-06	1.89123E-08
16	2.6	1.7328856	1.778908546	0.046022948	2.587145231	1.778638193	0.845229415	0.883687	0.884668	0.925041	1.778909	2.6	2.092211	2.6	2.535035	0.015198	1.40463E-06	2.49871E-08
17	2.7	1.82299565	1.875733907	0.052738257	2.811606548	1.875403226	0.925032431	0.967335	0.968456	1.012907	1.875734	2.7	2.216553	2.7	2.701341	0.017629	1.74918E-06	3.28099E-08
18	2.8	1.92143741	1.981789055	0.06035164	3.045311013	1.981386013	1.012896292	1.059508	1.06079	1.109815	1.981789	2.8	2.35275	2.8	2.883786	0.020337	2.16174E-06	4.2841E-08
19	2.9	2.02903791	2.098032498	0.068994588	3.288537629	2.097542786	1.109801847	1.161249	1.162715	1.216875	2.098032	2.9	2.502062	2.9	3.084153	0.023341	2.65269E-06	5.56543E-08
20	3	2.14672211	2.225540928	0.07881882	3.541557855	2.224947535	1.216858817	1.273736	1.275414	1.335344	2.225541	3	2.665906	3	3.304452	0.026663	3.23357E-06	7.19644E-08
21	3.1	2.27552544	2.365525036	0.089999601	3.804635315	2.364807737	1.335324514	1.398307	1.400228	1.466649	2.365525	3.1	2.845876	3.1	3.54695	0.030323	3.91713E-06	9.26606E-08


Grafica Euler, Euler mejorado y Runge-Kutta
8
7
6
5
4
3
2
1
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
Yn
EULER MEJORADO
y