Hoofdstuk 1

Inleiding

1.1 De affiene ruimte

Een affiene ruimte is een tupel (A, V) van een verzameling A en een vectorruimte V. Op A is een optelling met V gedefinieërd.

$$l : V \times A \to A : \vec{v} + a$$

Een affiene ruimte heeft de volgende eigenschappen.

1. Linker Identiteit
$$\forall a \in A : \vec{0} + a = a$$

2. Associativiteit
$$\forall v, w \in V, \forall a \in A,\ v + (w + a) = (v + w) + a$$

3. Uniciteit
$$\forall a \in A,\ V \to A \colon v \mapsto v + a \text{ is een bijectie}$$

Vanwege de uniciteitseigenschap is de aftrekking van twee elementen a_1 en a_2 gedefiniëerd. In de rest van deze notities zal de verzameling A een verzameling punten zijn en V een verzameling verschilvectoren.

1.2 Combinaties van punten

Punten kunnen niet bij elkaar opgeteld worden, en niet gescaleerd worden omdat er geen oorsprong is en geen assenstelsel in een affiene ruimte. Het verschil van twee punten is wel gedefinieerd, namelijk als een vector. Bovendien is de som van een punt en een vector ook gedefinieerd.

1.2.1 Affiene combinatie

Een affiene combinatie van punten is een lineaire combinatie van punten waarvan de gewichten sommeren tot 1.

Zij $p_1, ...p_n$ n punten en $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$.

Te Bewijzen
Er bestaan v_i zodat volgende bewering geldt.

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i = p_0 + \sum_{i=2}^{n} \vec{v_i}$$

Bewijs. We zullen dit bewijzen door de v_i te construeren.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i p_i = \left(1 - \sum_{i=2}^{n} \alpha_i\right) p_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i p_i = p_1 - \sum_{i=2}^{n} \alpha_i p_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i p_i$$
$$= p_1 + \sum_{i=2}^{n} \alpha_i (p_i - p_1)$$

We weten dat $p_i - p_1$ een vector is. Sterker nog, het zijn de v_i. □

1.2.2 Lineaire combinatie

In 1.2.1 is nu eenvoudig te zien dat een lineaire combinatie van punten niet bepaald is. Opdat de combinatie te herschijven zou vallen als de sum van een punt en een aantal vectoren moeten de gewichten van de lineaire combinatie sommeren tot 1.

1.2.3 Convexe combinatie

Te Bewijzen
Een convexe combinatie van punten behoort tot de convex omhullende van deze punten.

Bewijs. Bewijs door inductie op het aantal punten (n).
Voor $n = 1$ is de convex omhullende enkel dat punt en elke convexe combinatie van een punt is dat punt.
Veronderstel dat de bewering geldt voor een bepaalde $n = k$. We bewijzen nu dat daaruit volgt dat de bewering geldt voor $n = k + 1$.
Zij x de convexe combinatie van de punten $p_1, ..., p_k, p_{k+1}$.

$$x = \sum_{i=1}^{k+1} \alpha_i p_i$$

Als $\alpha_{k+1} = 1$ geldt dan is de bewering triviaal. In wat volgt gaan we ervan uit dat $\alpha_{k+1} \neq 1$ geldt. We weten nu dat volgende bewering geldt, omdat het om een convexe combinatie gaat.

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i = S \to 0 \leq S \leq 1$$

Beschouw nu een punt y dat als volgt gedefinieerd is met $\beta_i = \frac{\alpha_i}{S}$.

$$y = \sum_{i=1}^{k} \beta_i p_i$$

We sommeren nu de β_i om te zien dat y ook een convexe combinatie is.

$$\sum_{i=1}^{k} \beta_i = \sum_{i=1}^{k} \frac{\alpha_i}{S} = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^{k} \alpha_i = \frac{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i}{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i} = 1$$

Volgens de inductiehypothese ligt y in de convex omhullende van $p_1, ..., p_k$. y ligt dus zeker in de convex omhullende van $p_1, ..., p_k, p_{k+1}$. Nu geldt het volgende over x met $1 - S = \alpha_{k+1}$.

$$x = Sy + (1 - S)p_{k+1}$$

Dit is opnieuw een convexe combinatie, van twee punten binnen de convex omhullende. x behoort dus tot de convex omhullende van $p_1, ..., p_k, p_{k+1}$. □

1.2.4 Interpollerende veeltermen

Lagrange veelterm

Bij $n + 1$ punten p_i horen de volgende n Lagrange veeltermen L_i.

$$L_i^n(x) = \prod_{j=0, j \neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Lagrange veeltermen hebben een aantal handige eigenschappen.

1. Voor elke i geldt volgende formule geldt:

$$L_i^n(x_i) = 1$$

Bewijs.

$$L_i^n(x_i) = \prod_{j=0, j \neq i}^{n} \frac{x_i - x_j}{x_i - x_j} = \prod_{j=0, j \neq i}^{n} 1 = 1$$

□

2. Voor elk ander punt k geldt bovendien dit: $(i \neq k)$

$$L_i^n(x_k) = 0$$

Bewijs.

$$L_i^n(x_k) = \prod_{j=0, j \neq i}^{n} \frac{x_k - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x_k - x_1}{x_i - x_1} \cdot \ldots \cdot 0 \cdot \ldots \cdot \frac{x_k - x_n}{x_i - x_n} = 0$$

□

3. De som van alle $n + 1$ lagrange veeltermen is steeds 1.

$$\forall t : \sum_{i=0}^{n} L_i^n(t) = 1$$

Bewijs. Bewijs door inductie op n.
Voor $n = 0$:

$$\sum_{i=0}^{n} L_i^n(t) = L_0^n(t) + L_1^n(t)$$

$$= \frac{t - x_0}{x_1 - x_0} + \frac{t - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{t - x_0}{x_1 - x_0} - \frac{t - x_1}{x_1 - x_0}$$

$$= \frac{t - x_0 - t + x_1}{x_1 - x_0} = \frac{x_1 - x_0}{x_1 - x_0} = 1$$

Veronderstel dat de bewering geldt voor een bepaalde $n = k$. We bewijzen nu dat daaruit volgt dat de bewering geldt voor $n = k + 1$.

$$\sum_{i=0}^{k+1} L_i^{k+1}(t) = \sum_{i=0}^{k+1} \prod_{j=0, j\neq i}^{k+1} \frac{t - x_j}{x_i - x_j}$$

$$= \begin{array}{ll} & \prod_{j=0,j\neq 0}^{k+1} \frac{t-x_j}{x_0-x_j} \\ + & \prod_{j=0,j\neq 1}^{k+1} \frac{t-x_j}{x_1-x_j} \\ + & \vdots \\ + & \prod_{j=0,j\neq k}^{k+1} \frac{t-x_j}{x_k-x_j} \\ + & \prod_{j=0,j\neq k+1}^{k+1} \frac{t-x_j}{x_{k+1}-x_j} \end{array}$$

$$= \begin{array}{ll} & \cdot \frac{t-x_1}{x_0-x_1} \frac{t-x_2}{x_0-x_2} \cdots \frac{t-x_k}{x_0-x_k} \frac{t-x_{k+1}}{x_0-x_{k+1}} \\ + & \frac{t-x_0}{x_1-x_0} \cdot \frac{t-x_2}{x_1-x_2} \cdots \frac{t-x_k}{x_1-x_k} \frac{t-x_{k+1}}{x_1-x_{k+1}} \\ + & \frac{t-x_0}{x_2-x_0} \frac{t-x_1}{x_2-x_1} \cdot \cdots \frac{t-x_k}{x_2-x_k} \frac{t-x_{k+1}}{x_2-x_{k+1}} \\ + & \frac{t-x_0}{x_3-x_0} \frac{t-x_1}{x_3-x_1} \cdots \frac{t-x_k}{x_3-x_k} \frac{t-x_{k+1}}{x_3-x_{k+1}} \\ + & \vdots \\ + & \frac{t-x_0}{x_k-x_0} \frac{t-x_1}{x_k-x_1} \cdots \frac{t-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}} \cdot \frac{t-x_{k+1}}{x_k-x_{k+1}} \\ + & \frac{t-x_0}{x_{k+1}-x_0} \frac{t-x_1}{x_{k+1}-x_1} \cdots \frac{t-x_{k-1}}{x_{k+1}-x_{k-1}} \cdot \frac{t-x_k}{x_{k+1}-x_k}. \end{array}$$

TODO

□