ANÁLISIS DE VARIABLE REAL

Juan Diego Barrado Daganzo e Iker Muñox Martínez
1º de Carrera

3 de julio de 2021

INTRODUCCIÓN A CONJUNTOS Y FUNCIONES

CONJUNTOS

Un **Conjunto** es una "colección" o "familia" de objetos al que puede pertenecer o no un conjunto cualquiera, pero no puede hacer ambas cosas a la vez.

Operaciones con conjuntos

- Inclusión: $A \subset B \Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \in B$
- Equivalencia: $A \equiv B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$
- Pertenencia: $x \in A \Leftrightarrow A = \{..., x, ...\}$
- Conjunto vacío: $\emptyset = \{\} : \forall x \in \emptyset$
- Intersección: $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
- Unión: $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
- Complemento: $A \backslash B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
- Intersecciones múltiples: Sea I un conjunto de de índices y $\forall i \in I$

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : \forall i \in I : x \in A_i\}$$

- Uniones múltiples: Sea I un conjunto de de índices y $\forall i \in I$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists i \in I : x \in A_i\}$$

Producto Cartesiano

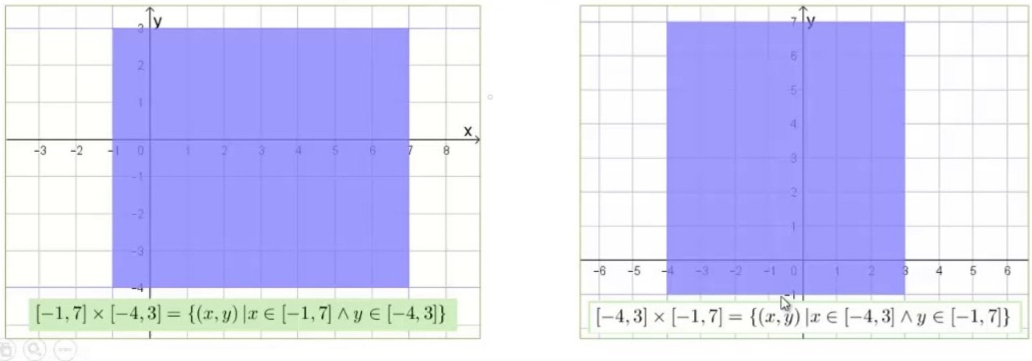
Sean A y B conjuntos no vacíos, llamamos par ordenado a una pareja donde $a \in A$ y $b \in B$:

$$(a, b) \neq (b, a) : a \in A \wedge b \in B$$

El producto cartesiano es el conjunto:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

$$A \times B = \{(x,y) \mid x \in [-1,7] \text{ y } y \in [-4,3]\}$$
$$B \times A = \{(x,y) \mid x \in [-4,3] \text{ y } y \in [-1,7]\}$$



Correspondencia

Una correspondencia entre conjuntos es la asignación de cada elemento de un conjunto a otro del otro conjunto.

Sean A y B conjuntos, la correspondencia es un subconjunto C del producto cartesiano de ambos conjuntos iniciales, es decir, una serie de pares ordenados del producto cartesiano. Sin embargo, a cada elemento del primer conjunto **sólo puede corresponderle como mucho un elemento del segundo conjunto**.

$$\text{Si } (x,y) \in C \wedge (x,z) \in C \Rightarrow y = z$$

Aunque es cierto que no todo elemento tiene que tener su correspondiente.

Dominio

Si C es una correspondencia entre A y B, el dominio de C son aquellos elementos que sí poseen un correspondiente en B.

$$dom(C) = \{a \in A : \exists b \in B : (a,b) \in C\}$$

Rango o Imagen

El rango o imagen de la correspondencia son aquellos elementos del conjunto B que son el correspondiente de algún elemento del conjunto A.

$$ran(C) = im(C) = \{b \in B : \exists a \in A : (a,b) \in C\}$$

Observaciones

Si el conjunto C es una correspondencia entre A y B y $(x,y) \in C$, decimos que a $x \in A$ le corresponde $y \in B$ o que $y \in B$ es la imagen de $x \in A$. Esta correspondencia entre ambos conjuntos se puede llamar **función** (f) en cuyo caso se expresa como:

$$dom(f) = \{x \in A : \exists f(x) \in B\}$$

$$ran(f) = im(f) = \{y \in B : \exists x \in A : y = f(x)\}$$

Funciones

Una correspondencia se denomina FUNCIÓN o aplicación si $dom(f) = A$, es decir, todo el conjunto posee un correspondiente en B como imagen.

$$f : A \to B$$

Sean A, el dominio, y B, el codominio, y una función entre esos dos conjuntos llamada f.

$$E \subset A \Rightarrow f(E) = \{\forall b \in B : \exists a \in E : b = f(a)\}$$

De forma análoga:

$$F \subset B \Rightarrow f^{-1}(F) = \{a \in A : f(a) \in F\}$$

Es decir, la condición de función al aplicarse a elementos también afecta a conjuntos.

Inyectividad

Sean A y B conjuntos y $f : A \to B$ una función, se dice que f es **inyectiva** cuando todo elemento de A posee una imagen distinta de la imagen de cualquier otro elemento de A:

$$\forall a_1, a_2 \in A : a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$$

Para poder ser cierto $card(A) \leq card(B)$

En la práctica, para calcular si una función es inyectiva o no, tomaremos $f(x_1) = f(x_2)$ y si eso resulta en $x_1 = x_2$ entonces es inyectiva, si no no.

Ej.: "$f(x) = x^2$"

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1^2 = x_2^2 \Rightarrow x_1^2 - x_2^2 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow & x_1 = x_2 \\ x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow & x_1 = -x_2 \end{cases} \Rightarrow \text{ no es inyectiva}$$

También se puede coger un elemento y que pertenezca a la imagen, despejar x de $y = f(x)$ y ver si para un mismo y hay varios valores de x:

Ej.: $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ : f(x) = \frac{x^2}{1+x}$

$$y \in im(f) \Rightarrow y = f(x) = \frac{x^2}{1+x} \Leftrightarrow x^2 - yx - y = 0$$

$$x = \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4y}}{2} \text{ pero como } \frac{y \pm \sqrt{y^2 + 4y}}{2} < 0 \Rightarrow x \notin \mathbb{R}^+ \Rightarrow \textit{inyectiva}$$

Ej.: "$E = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x \leq 2\}$, $G = \{y \in \mathbb{R} : 1 \leq y \leq 4\}$ y $f(x) = \frac{1}{x^2}$"

$$f(E)? \to 1 \leq x \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq x^2 \leq 4 \Leftrightarrow 1 \geq x \geq \frac{1}{4} = f(E)$$

$$f^{-1}(G)? \to 1 \leq y = f(x) = \frac{1}{x^2} \leq 4 \Leftrightarrow 1 \geq x^2 \geq \frac{1}{4} \Leftrightarrow 1 \geq |x| \geq \frac{1}{2} \begin{cases} 1 \geq x \geq \frac{1}{2} & \Rightarrow 1 \geq x \geq \frac{1}{2} \\ 1 \geq -x \geq \frac{1}{2} & \Rightarrow -1 \leq x \leq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Suprayectividad

Sean A y B conjuntos y $f : A \to B$ una función, se dice que f es **suprayectiva** o *sobre* cuando todo elemento de B es imagen[1] de algún elemento de A:

$$\forall b \in B : \exists a \in A : f(a) = b$$

Para poder ser cierto $card(A) \geq card(B)$

En la práctica, para calcular si una función es inyectiva o no, tomaremos $y = f(x)$ y despejaremos x, si y toma como posibles valores los mismos que los valores del codominio, es suprayectiva.

Ej.: "$f(x) = x^2$"

$$y = x^2 \Rightarrow x = \sqrt{y} \Rightarrow y \in (0, \infty)$$

Luego no es suprayectiva porque $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Biyectividad

Sean A y B conjuntos y $f : A \to B$ una función, se dice que f es **biyectiva** cuando f es inyectiva y suprayectiva simultáneamente.

Para poder ser cierto $card(A) = card(B)$

Observaciones

No es difícil entre ver que la cantidad de elementos en los distintos conjuntos determinan en cierto modo (puesto que para conjuntos infinitos no podemos contarlos) la obtención o no de los calificativos anteriores. De este hecho se desprende que:

$$\text{Sea } f : A \to B \text{ suprayectiva} \Rightarrow \exists f : B \to A \text{ inyectiva}$$

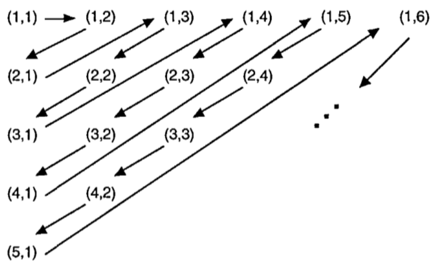
Numerabilidad de conjuntos

Decimos que además un conjunto es NUMERABLE[2] cuando entre él y $\mathbb{N}$ se puede establecer una función biyectiva. Hay un teorema que dice que:

$$\forall n \in \mathbb{N} : A_n \text{ es numerable} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \text{ es numerable}$$

Además se tiene que:

$$f : \mathbb{N} \overset{biyec.}{\to} \mathbb{N} \times \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \text{ es numerable}$$



[1] Lo que se traduce en que $im(f) = B$

[2] Por ejemplo, $\mathbb{R}$ no es numerable

Teorema de Schöder-Berstein

Sean A y B dos conjuntos:

$$\exists f : A \to B \text{ inyectiva} \wedge \exists g : A \to B \text{ suprayectiva} \Rightarrow \exists h : A \to B \text{ biyectiva}$$

Composición de funciones

Sea A, B, C conjuntos y $f : A \to B$, $g : B \to C$:

$$gof(a) = g\left(f(a)\right), \forall a \in A \Rightarrow gof : A \to C$$

Conjunto P(A)

Sea A un conjunto, se le llama *partes de A* o P(A) al conjunto formado por todos los subconjuntos de A:

$$\text{Ej.: } A = \{a, b, c\} \to P(A) = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \emptyset, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, A\}$$

Concretamente la función que relaciona A con su P(A) es una función inyectiva.

$$\begin{aligned} f : A &\to P(A) \text{ inyectiva} \Rightarrow card(A) \leq card(B) \\ a &\longmapsto \{a\} \end{aligned}$$

Concretamente para el conjunto vacío:

$$A = \emptyset \Rightarrow P(A) = \{\emptyset\} \Rightarrow P(P(A)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

Teorema (de Castor)

Sea A un conjunto cualquiera, entonces $\nexists f : A \to P(A)$ suprayectiva.

Demostración:

Supongamos que sí:

$$\begin{aligned} \exists f : A &\to P(A) \text{ suprayectiva} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Sea el conjunto $D = \{x \in A : x \notin f(x)\}$ como $D \subset A \Rightarrow D \in P(A)$ y como f es suprayectiva $\Rightarrow \exists a \in A : f(a) = D$ Llegados este punto:

- Si $a \in D \Rightarrow a \notin f(a)$ pero $f(a) = D$ #
- Si $a \notin D \Rightarrow a \in f(a)$ pero $f(a) = D$ #

De este razonamiento se desprende que $\mathbb{N}$ es numerable pero $P(\mathbb{N})$ no lo es puesto que ser biyectivo a $\mathbb{N}$ supondría la existencia de alguna aplicación suprayectiva y como hemos demostrado no es cierto.

- Usando el axioma de elección $\to card(P(\mathbb{N})) \leq card(\mathbb{R})$
- Usando la hipótesis del continuo $\to card(P(\mathbb{N})) = card(\mathbb{R})$

Principio de Inducción

Sea $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$, este conjunto posee una propiedad que se llama de Buen Orden que dice:

$$A \subset \mathbb{N}, A \neq \emptyset \Rightarrow \exists m \in A : \forall a \in A : m \leq a$$

Lo que quiere decir que siempre encontraremos en ese subconjunto A un elemento que podremos calificar como el *primero*.

Ahora bien, el principio de inducción dice que sea $S \subset \mathbb{N}$:

$$1 \in S \wedge (k \in S \Rightarrow k + 1 \in S) \Rightarrow S = \mathbb{N}$$

Demostración:

Supongamos que $S \subsetneq \mathbb{N}$ y que $A = \mathbb{N} \backslash S \neq 0$. Por la propiedad del Buen Orden:

$$\exists m \in A : \forall a \in A : m \leq a$$

Sin embargo, $m = 1 \notin A$ porque $1 \in S$, luego $m - 1 \in S \overset{Hip,2}{\Rightarrow} (m - 1) + 1 = m \in S$ #

O dicho de otra forma: si $1 \in S \Rightarrow 2 \in S \Rightarrow ... \Rightarrow \mathbb{N} = S \Rightarrow A = \mathbb{N} \backslash S = \mathbb{N} \backslash \mathbb{N} = \emptyset$ #

Corolario

Supongamos que tenemos una propiedad que depende de un número natural: $k \in \mathbb{N} : P(k)$ y supongamos que $P(1)$ es cierto. Si $P(k) \Rightarrow P(k + 1)$ entonces $\forall n \in \mathbb{N} : P(n)$

Demostración:

Supongamos el conjunto S

- $1 \in S$
- $k \in S \Rightarrow k + 1 \in S$

Los dos hechos anteriores según el principio de inducción implican que $S = \mathbb{N} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : P(n)$

CONJUNTOS DE NÚMEROS

Los seres humanos a lo largo de la Historia han ido "descubriendo" o "inventando" distintos conjuntos de números en función de las necesidades que iban surgiendo en cada momento. Hasta el momento tenemos:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

Entendemos como $\mathbb{N}$ al conjunto de los naturales $\mathbb{N} = 1, 2, 3, 4, ...$ y al conjunto de los enteros $\mathbb{Z}$ como el conjunto de los Naturales añadiéndoles el 0 y los negativos. El conjunto de los racionales surge ante la necesidad de nuevos números como el que describe la diagonal de un cuadrado de lado 1: $\sqrt{2}$, estos están conformados por: $\mathbb{Q} = \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z} \wedge b \neq 0$, además cada número racional está representado por un conjunto de fracciones equivalentes: $[\frac{a}{b}] = \frac{m}{n} : \frac{m}{n} = \frac{a}{b}$. Llegamos por lo menos hasta el momento a los número reales de los que diremos que tienen una representación decimal arbitraria por el momento.

PROPIEDADES ALGEBRAICAS DE $\mathbb{R}$

Sea $\mathbb{K}$ un conjunto de números tenemos las siguientes operaciones:

Suma

Sea $\mathbb{K}$ un conjunto de números tenemos que la adición $(+)$ cumple las siguientes propiedades:

Operación interna

$$\begin{array}{rcl} + : \mathbb{K} \times \mathbb{K} & \xrightarrow{+} & \mathbb{K} \\ (a, b) & \longmapsto & a + b \end{array}$$

1. Propiedad conmutativa: $\forall a, b \in \mathbb{K} : a + b = b + a$
2. Propiedad asociativa: $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : (a + b) + c = a + (b + c)$
3. Propiedad elemento neutro: $\exists 0_k \in \mathbb{K} : \forall a \in \mathbb{K} : a + 0_k = 0_k + a = a$
4. Propiedad elemento opuesto: $\forall a \in \mathbb{K} : \exists (-a) : a + (-a) = 0_k$

Los $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ cumplen las 4 propiedades, pero $\mathbb{N}$ no puesto que cumplen solo las dos primeras.

Un conjunto de números $(\mathbb{K}, +)$ que verifica todas las propiedades recibe el nombre de GRUPO CONMUTATIVO.

Producto

Sea $\mathbb{K}$ un conjunto de números tenemos que el producto $(\cdot)$ cumple las siguientes propiedades:

Operación interna

$$\begin{aligned} \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} &\ \dot{\rightarrow}\ \mathbb{K} \\ (a, b) &\longmapsto a \cdot b \end{aligned}$$

1. Propiedad conmutativa: $\forall a, b \in \mathbb{K} : a \cdot b = b \cdot a$
2. Propiedad asociativa: $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
3. Propiedad elemento neutro: $\exists 1_k \in \mathbb{K} : \forall a \in \mathbb{K} : a \cdot 1_k = 1_k \cdot a = a$
4. Propiedad elemento inverso: $\forall a \in \mathbb{K} : \exists a^{-1} : a \cdot a^{-1} = 1_k$

Los $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ cumplen las 4 propiedades, pero $\mathbb{N}, \mathbb{Z}$ no puesto que cumplen solo las tres primeras.

Un conjunto de números $(\mathbb{K}, \cdot)$ que verifica todas las propiedades recibe el nombre de GRUPO CONMUTATIVO.

En ambos casos de cada operación, si $\mathbb{K}$ es un GRUPO CONMUTATIVO, podemos definir las operaciones contrarias "resta" como la suma del opuesto y la "división" como el producto del inverso.

La propiedad que relaciona ambas operaciones es la **propiedad distributiva**[3]

5. $\forall a, b, c \in \mathbb{K} : a \cdot (b + c) = ab + ac$

Estructura de Cuerpo

Si $\mathbb{K} : (\mathbb{K}, +)$ es un grupo conmutativo y $(\mathbb{K}, \cdot)$ es un grupo conmutativo y se cumple la propiedad distributiva, decimos que $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ es un **CUERPO CONMUTATIVO**.

Consecuencias de la estructura de cuerpo

Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cuerpo conmutativo se cumplen las siguientes propiedades:

1. **El elemento neutro de la suma es único**.

   Supongamos que hay dos elementos neutros, e, e':

$$\begin{cases} e' + e = e & \text{si } e' \text{ es el elemento neutro} \\ e' + e = e' & \text{si } e \text{ es el elemento neutro} \end{cases} \Rightarrow e = e'$$

2. **El elemento neutro del producto es único**.

   Supongamos que hay dos elementos neutros, e, e':

$$\begin{cases} e' \cdot e = e & \text{si } e' \text{ es el elemento neutro} \\ e' \cdot e = e' & \text{si } e \text{ es el elemento neutro} \end{cases} \Rightarrow e = e'$$

[3]Que se cumple en TODOS los conjuntos.

3. **Si** $x + a = a \Rightarrow x = 0$
   Supongamos que:
   $$x + a = a \Leftrightarrow x + a + (-a) = a + (-a) \Leftrightarrow x + 0 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
4. **Si** $a \in \mathbb{K}, a \neq 0 \Rightarrow x \cdot a = a \Rightarrow x = 1$
   Como $a \neq 0, \exists a^{-1} \in \mathbb{K}$ y entonces:
   $$x \cdot a = a \Leftrightarrow x \cdot a \cdot a^{-1} = a \cdot a^{-1} \Leftrightarrow x \cdot 1 = 1 \Leftrightarrow x = 1$$
5. **El elemento opuesto de** $x \in \mathbb{K}$ **es único y en particular**
   $$-(-x) = x$$
   Supongamos que x_1, x_2 son ambos opuestos de x:
   $$x_1 = 0 + x_1 = (x_2 + x) + x_1 = x_2 + (x + x_1) = x_2 + 0 = x_2$$
6. **El elemento inverso de** $x \in \mathbb{K}, x \neq 0$ **es único, en particular** $(x^{-1})^{-1}$
   Supongamos que x_1, x_2 son inversos de x entonces:
   $$x_1 = 1 \cdot x_1 = (x_2 \cdot x) \cdot x_1 = x_2 \cdot (x \cdot x_1) = x_2 \cdot 1 = x_2$$
7. $x \cdot 0 = 0, \forall x \in \mathbb{K}$**, lo que implica que 0 no puede tener inverso**.
   Supongamos que:
   $$x = x \cdot 1 = x \cdot (1 + 0) = x \cdot 1 + x \cdot 0 = x + x \cdot 0 \Rightarrow 0 = x \cdot 0$$
8. $\forall x \in \mathbb{K} : -x = (-1) \cdot x$
   Supongamos que:
   $$0 = x \cdot 0 = x(1 + (-1)) = x + (-1)x \Rightarrow -x = (-1)x$$
9. **Conocidos** a, b**, la ecuación** $x + a = b$ **tiene una única solución** $x = b - a$
   Supongamos que:
   $$x + a = b \Rightarrow (x + a) + (-a) = b + (-a) \Leftrightarrow x = b + (-a) = b - a$$
10. **Si** $a \neq 0$**, la ecuación** $a \cdot x = b$ **tiene una única solución :** $x = \frac{b}{a}$
    Supongamos que:
    $$a \cdot x = b \Rightarrow a^{-1}(ax) = a^{-1}b \Rightarrow x = \frac{b}{a}$$
11. **Si** $ab = ac \wedge a \neq 0 \Rightarrow b = c$
    Supongamos que:
    $$ab = ac \Leftrightarrow a^{-1}(ab) = a^{-1}(ac) \Leftrightarrow a^{-1}a \cdot b = a^{-1}a \cdot c \Leftrightarrow b = c$$
12. **Si** $ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$
    Supongamos que:
    $$\begin{cases} a = 0 & (a = 0 \vee b = 0) \equiv V \\ a \neq 0 & \exists a^{-1} \in \mathbb{K} : a^{-1}(ab) = 0 \cdot a^{-1} \Leftrightarrow b = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0) \equiv T \end{cases}$$
13. **Si** $a, b \neq 0 \Rightarrow ab \neq 0 \Rightarrow \exists (ab)^{-1} : (ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$
    Para la primera parte, por la propiedad 12. si $ab = 0 \Rightarrow (a = 0 \vee b = 0) \Leftrightarrow (a \neq 0 \wedge b \neq 0) \Rightarrow ab \neq 0$
    Demostrado que $ab \neq 0$, $ab \neq 0 \Rightarrow \exists (ab)^{-1}$
    $$(a^{-1}b^{-1})(ab) = a^{-1}a \cdot b^{-1}b = 1 \Rightarrow (a^{-1}b^{-1}) = (ab)^{-1}$$

Propiedades de orden

En $\mathbb{R}$ hay una "relación de orden" que se escribe como "$\leq$" que cumple que:

- Propiedad Reflexiva: $\forall x \in \mathbb{R} : x \leq x$
- Propiedad Antisimétrica: $(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow x = y$
- Propiedad Transitiva: $(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow x \leq z$
- Propiedad de Orden Total: $\forall x, y \in \mathbb{R} : (x \leq y) \vee (y \leq x)$

Esta relación de orden tiene una serie de propiedades con respecto a las operaciones:

1. $x \leq y \Rightarrow \forall z \in \mathbb{R} : x + z \leq y + z$
2. $(x \geq 0 \wedge y \geq 0) \Rightarrow xy \geq 0$

Si $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ posee las propiedades de la relación de orden definidas para "$\leq$" , decimos que se trata de un cuerpo **TOTALMENTE ORDENADO**.

Definiciones

- Decimos que un número $x \in \mathbb{R}$ es positivo$\Leftrightarrow (0 \leq x \wedge x \neq 0)$
- Decimos que un número $x \in \mathbb{R}$ es negativo $\Leftrightarrow (-x) > 0$

1. Si $(a > 0) \wedge (b > 0) \Rightarrow a + b > 0$

$$a > 0 \Rightarrow a \geq 0 \Rightarrow a + b \geq b \overset{Trans}{\Rightarrow} a + b \geq b \geq 0 \Rightarrow a + b \geq 0$$

$$\text{Si } a + b = 0 \Rightarrow 0 \geq b \geq 0 \Rightarrow b = 0 \ \# \Rightarrow a + b \neq 0 \Rightarrow a + b > 0$$

2. Si $(a > 0) \wedge (b > 0) \Rightarrow ab > 0$

$$(a \geq 0) \wedge (b \geq 0) \Rightarrow (a > 0) \wedge (b > 0) \Rightarrow ab \geq 0$$

$$\text{Si } ab = 0 \Rightarrow (a = 0) \vee (b = 0) \ \# \Rightarrow ab \neq 0 \Rightarrow ab > 0$$

3. Si $(a < 0) \wedge (b < 0) \Rightarrow ab > 0$

$$(-a > 0) \wedge (-b > 0) \Rightarrow (-a)(-b) > 0 \Rightarrow (-1)a(-1)b = (-1)(-1)ab = ab > 0$$

4. Si $(a > 0) \wedge (b < 0) \Rightarrow ab < 0$

$$(a > 0) \wedge (-b) > 0 \Rightarrow a(-b) > 0 \Leftrightarrow a(-1)b = (-1)ab = (-ab) > 0 \Rightarrow ab < 0$$

5. Si $a, b \in \mathbb{R}$ decimos que $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$

Concretamente en el contexto de $(\mathbb{R}, \leq)$ se cumplen además las siguientes propiedades:

1. Si $(a > b) \wedge (b > c) \Rightarrow a > c$

$$(a > b) \wedge (b > c) \Rightarrow (a \geq b) \wedge (b \geq c) \Rightarrow a \geq b \geq c \overset{Trans.}{\Rightarrow} a \geq c$$

$$\text{Si } a = c \Rightarrow (b \leq c) \wedge (c \leq b) \Rightarrow c = b \ \# \Rightarrow a > c$$

2. Si $a > b \Rightarrow a + x > b + x : \forall x \in \mathbb{R}$

$a > b \Rightarrow a \geq b \Rightarrow a + x \geq b + x \Rightarrow a + x + (-x) \geq b + x + (-x) \Leftrightarrow a \geq b \ \# \Rightarrow a + x > b + x$

3. Si $a \neq 0 \Rightarrow a^2 = a \cdot a > 0$

$$\begin{cases} a \geq 0 \Rightarrow & a > 0 \Rightarrow a^2 > 0 \\ a \leq 0 \Rightarrow & a < 0 \Rightarrow a^2 > 0 \end{cases}$$

4. **Tricotomía del Orden**: Si $a \in \mathbb{R} \Rightarrow (a > 0) \vee (a < 0) \vee (a = 0)$

$$\begin{cases} a = 0 \Rightarrow & a = 0 \\ a \geq 0 \Rightarrow & a > 0 \\ a \leq 0 \Rightarrow & a < 0 \end{cases}$$

5. $1 > 0$

$1 = 1 \cdot 1 > 0$ Porque el elemento neutro es positivo

6. Si $(a > b) \wedge (c \geq d) \Rightarrow a + c > b + d$

Como $a > b \Rightarrow a + c > b + c$, y de modo paralelo: $c + b > d + b$. Luego: $\Rightarrow a + c > b + d$

7. Si $(a > b) \wedge (c > 0) \Rightarrow ac > bc$

$(a > b) \Rightarrow (a - b > 0)$, y como $(c > 0) \Rightarrow c(a - b) > 0 \Rightarrow ac - bc > 0 \Rightarrow ac > bc$

8. Si $(a > b) \wedge (c < 0) \Rightarrow ac < bc$

$(a > b) \Rightarrow (a - b > 0)$, y como $(-c) > 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow (-c)(a - b) > 0 \Rightarrow (-1)c(a - b) > 0 \Rightarrow c(a - b) < 0 \Rightarrow ac - cb < 0 \Rightarrow ac < bc$$

9. Si $(a > 0) \Rightarrow (a^{-1} > 0)$

$$a > 0 \Rightarrow \exists a^{-1}$$
$$a^{-1} < 0 \Rightarrow 1 = a \cdot a^{-1} < 0 \;\# \Rightarrow a^{-1} > 0$$

10. Si $a < b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$

    Concretamente, entre dos números reales distintos hay infinitos números reales. En particular, si $0 < b \Rightarrow 0 \leq \frac{b}{2} \leq b$ y en consecuencia, hay infinitos números positivos sin que ninguno de ellos sea .el más pequeño".

$$a < b \Rightarrow 2a < a + b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} \text{ pero también } a + b < 2b \Rightarrow \frac{a+b}{2} < b \Rightarrow a < \frac{a+b}{2} < b$$

11. Si $0 \leq a \leq \varepsilon : \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow a = 0$

$$\text{Si } a \neq 0 \Rightarrow a > 0 \Rightarrow a > \varepsilon = \frac{a}{2} > 0 \;\# \Rightarrow a = 0$$

12. Si $ab > 0 \Rightarrow [(a > 0) \wedge (b > 0)] \vee [(a < 0) \wedge (b < 0)]$

$$\text{Tomamos } a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \Rightarrow b > 0 & \text{Si fuese } b < 0 \Rightarrow ab < 0 \;\# \\ a < 0 \Rightarrow b < 0 & \text{Si fuese } b > 0 \Rightarrow ab < 0 \;\# \end{cases}$$

13. Si $ab < 0 \Rightarrow [(a < 0) \wedge (b > 0)] \vee [(a > 0) \wedge (b < 0)]$

$$\text{Tomamos } a \neq 0, b \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \Rightarrow b < 0 & \text{Si fuese } b > 0 \Rightarrow ab > 0 \;\# \\ a < 0 \Rightarrow b > 0 & \text{Si fuese } b < 0 \Rightarrow ab > 0 \;\# \end{cases}$$

14. Si $(a > b > 0) \wedge (c > d > 0) \Rightarrow ac > bd$

$$\begin{cases} \text{Como } (a > b) \wedge (c > 0) \Rightarrow ac > bc \\ \text{Como } (c > d) \wedge (b > 0) \Rightarrow bc > db \end{cases} \Rightarrow ac > bd$$

15. Si $0 < a < b \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : (0 < a^n < b^n) \wedge (0 < \frac{1}{b} < \frac{1}{a})$

$$\text{Por la propiedad anterior } \Rightarrow a^2 < b^2 \Rightarrow a^3 < b^3 \overset{induccion}{\Rightarrow} a^n < b^n \Rightarrow a^{n+1} < b^{n+1}$$

$$a^{n+1} = a^n \cdot a < b^n \cdot a \Rightarrow b^n \cdot a \overset{?}{<} b^{n+1} \Rightarrow b^n \cdot a < b^n \cdot b \Rightarrow a < b, \text{ QED}$$

$$\text{Si } \frac{1}{b} > \frac{1}{a} \Rightarrow a \geq b \;\# \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$$

16. Si $(a > 1) \Rightarrow (\frac{1}{a} < 1)$ y si $(0 < a < 1) \Rightarrow (\frac{1}{a} > 1)$

$$a > 1 \Rightarrow a^{-1} \cdot a > 1 \cdot a^{-1} \Rightarrow 1 > \frac{1}{a}$$

$$(0 < a < 1) \Rightarrow a < 1 \Rightarrow a^{-1} \cdot a < 1 \cdot a^{-1} \Rightarrow 1 < \frac{1}{a}$$

Proposición

Los números naturales están contenidos en los enteros como los enteros positivos.

$$\forall n \in \mathbb{N} : n \geq 1 \wedge \mathbb{N} = \{n \in \mathbb{Z} : n \geq 1\} = \{n \in \mathbb{Z} : n > 0\}$$

Y además:

$$\forall n, m \in \mathbb{Z} : n \leq m \leq n+1 \Rightarrow m = n \vee m = n+1$$

Demostración:

1. Como $1 \geq 0 \Rightarrow 2 \geq 1 \Rightarrow$ ..., demostramos por inducción sobre n:

   Sea $S = \{n \in \mathbb{N} : n \geq 1\}$, $1 \in S$ porque $1 \geq 1$ y como $1 \geq 1 \Rightarrow 2 \geq 2$ entonces tenemos que para un elemento k del conjunto, otro $k+1$ también pertenece a él, en consecuencia por el principio de inducción: $\mathbb{N} = S$

   Ahora sea $m \in \mathbb{Z} : m > 0$ probamos que es natural:

   $$m \notin \mathbb{N} \Rightarrow (-m) \in \mathbb{N} \Rightarrow (-m) \geq 1 \text{ pero como } m > 0 \ \# \Rightarrow m \in \mathbb{Z}$$

2. Si $m \neq n$ y $m \neq n+1$, sea $k = m - n > 0$:

   $$k = m - n > 0 \Rightarrow k \in \mathbb{N} \text{ pero como } n \leq m \leq n+1 \Rightarrow m - n <\leq 1 \Rightarrow k \leq 1$$

   $$\text{pero como } m \neq n+1 \Rightarrow k \neq 1 \Rightarrow k < 1 \ \# \text{ Por ser natural k}$$

Algunas desigualdades

Vamos a suponer demostrado (aunque lo haremos después) que si $a \in \mathbb{R} : a > 0 \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} : (x > 0) \wedge (x^2 = a)$

Ecuaciones de 2º grado

Sean $a, b, c \in \mathbb{R} : a \neq 0$ y buscamos un $x \in \mathbb{R}$ que verifique que:

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Siendo $\Delta = b^2 - 4ac$:

- Si $\Delta < 0 \Rightarrow \nexists x \in \mathbb{R} : ax^2 + bx + c = 0$
- Si $\Delta > 0 \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$
- Si $\Delta = 0 \Rightarrow \exists! x \in \mathbb{R} : x = \frac{-b}{2a}$

Demostración:

$$ax^2 + bx + c = 0 \overset{a \neq 0}{\Leftrightarrow} x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} = 0 \Leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{\Delta}{4a^2}$$

- Si $\Delta > 0 \Rightarrow$ Q.E.D.
- Si $\Delta < 0 \Rightarrow 0 < (x + \frac{b}{2a})^2 \neq \frac{\Delta}{4a^2} < 0$
- Si $\Delta = 0 \Rightarrow x + \frac{b}{2a} = 0 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a}$

Desigualdades de 2º grado

Sean $a, b, c \in \mathbb{R} : a > 0$ y buscamos un $x \in \mathbb{R}$ que verifique que:

$$ax^2 + bx + c \geq 0$$

Siendo $\Delta = b^2 - 4ac$:

- Si $\Delta \leq 0 \Rightarrow \forall x$ es cierto
- Si $\Delta > 0 \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R} : x \geq \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \wedge x \leq \frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$

Demostración:

$$ax^2 + bx + c \geq 0 \overset{a\neq 0}{\Leftrightarrow} x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{c}{a} \geq 0 \Leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} \geq 0 \Leftrightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 \geq \frac{\Delta}{4a^2}$$

- Si $\Delta \leq 0 \Rightarrow 0 < (x + \frac{b}{2a})^2 \geq \frac{\Delta}{4a^2} < 0$
- Si $\Delta > 0 \Rightarrow (x + \frac{b}{2a})^2 \geq \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow \left((x + \frac{b}{2a}) + \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right)\left((x + \frac{b}{2a}) - \sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}}\right)$

Desigualdad de Cauchy

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ y $b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}$

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + ... + a_n^2) \cdot (b_1^2 + ... + b_n^2)$$

Además casi siempre suele ser una desigualdad estricta puesto que la igualdad solo ocurre cuando: $\exists c \in \mathbb{R} : \forall i = 1, ...n : a_i = c \cdot b_i$

Demostración:

Sea $F(t) = (a_1 - tb_1)^2 + ... + (a_n - tb_n)^2 : t \in \mathbb{R}$, se observa que la función siempre cumple que "≥ 0" por ser suma de cuadrados. Desarrollando los binomios[4]:

$$F(t) = \sum_{i=1}^{n}(a_i)^2 - 2t\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i) + t^2\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2 = A - 2Ct + Bt^2$$

Para los casos[5] en los que $B > 0 \Rightarrow$:

$$\Delta \leq 0 \Leftrightarrow 4C^2 - 4AB \leq 0 \Leftrightarrow 4C^2 \leq 4AB \Leftrightarrow C^2 \leq AB$$

De este modo se ve fácilmente que para el caso de $C^2 = AB \Rightarrow \Delta = 0 \Rightarrow \exists c \in \mathbb{R} : F(c) = 0 \Rightarrow \forall i, a_i - c \cdot b_i = 0$

Desigualdad de Minkovski

Sea $n \in \mathbb{N}$ y $a_1, a_2, ..., a_n \in \mathbb{R}$ y $b_1, b_2, ..., b_n \in \mathbb{R}$

$$\sqrt{(a_1 + b_1)^2 + ... + (a_n + b_n)^2} \leq \sqrt{a_1^2 + ... + a_n^2} + \sqrt{b_1^2 + ... + b_n^2}$$

Ademá, para que se de el caso de "$=$": $\exists c \in \mathbb{R} : \forall i = 1, ..., n : a_i = c \cdot b_i$

[4]Llamamos a cada cosa con una letra mayúscula para simplificar la demostración

[5]Es obvio que nunca puede ser menor que 0 pero para el caso $B = 0 \Rightarrow \forall i, b_i = 0$ y se ve fácilmente en la fórmula inicial que eso siempre es cierto

Demostración:

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2=\sum_{i=1}^{n}(a_i)^2+2\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i)+\sum_{i=1}^{n}(b_i)^2\overset{Cauchy}{\leq}A+2\sqrt{A}\sqrt{B}+B=(\sqrt{A}+\sqrt{B})^2\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i)^2}\leq\sqrt{A}+\sqrt{B}$$

Concretamente para que se de el caso "=": $2\sum_{i=1}^{n}(a_ib_i)=2\sqrt{A}+\sqrt{B}$

VALOR ABSOLUTO

Sea $a\in\mathbb{R}$ entonces:

$$|a|=\begin{cases}a & a>0\\ 0 & a=0\\ -a & a<0\end{cases}=max\{a,-a\}$$

Propiedades

1. $|a|=0\Leftrightarrow a=0$
2. $|-a|=|a|:\forall a\in\mathbb{R}$
3. $|ab|=|a||b|:\forall a,b\in\mathbb{R}$
4. $\forall c\geq 0:|a|\leq c\Leftrightarrow -c\leq a\leq c$
5. $\forall a\in\mathbb{R}:-|a|\leq a\leq|a|$

Demostraciones:

1. Dada por la propia definición
2. Por definición: $max\{a,-a\}=max\{-a,-(-a)\}$
3. Para esta distinguimos casos:
   - Para $a=0$ o $b=0$, es inmediata porque $|ab|=|a|\cdot|b|=0\cdot|b|=0$
   - Para $a>0$, $b>0$ y $a,b\neq 0$: $|ab|=|a|\cdot|b|\Leftrightarrow ab=a\cdot b$
   - Para $a<0$, $b<0$ y $a,b\neq 0$:$|ab|=|a|\cdot|b|\Leftrightarrow -ab=-a\cdot(-b)\Leftrightarrow ab=a\cdot b$
   - Para $a>0$, $b<0$ y $a,b\neq 0$: $|ab|=|a|\cdot|b|\Leftrightarrow -ab=a\cdot(-b)$
4. $|a|=max\{a,-a\}\leq c\Leftrightarrow a\leq c$ y $-a\leq c\Leftrightarrow a\leq c$ y $a\geq -c\Leftrightarrow -c\leq a\leq c$
5. Demostrada la propiedad 4. , se trata de decir que $c=a$

Desigualdad triangular

Sean $a,b\in\mathbb{R}$ entonces:

$$|a+b|\leq|a|+|b|$$

Demostración:

Tenemos que $-|a|\leq a\leq|a|$ y que $-|b|\leq b\leq|b|$, sumando ambas expresiones:

$$-|a|-|b|\leq a+b\leq|a|+|b|\Leftrightarrow -(|a|+|b|)\leq a+b\leq(|a|+|b|)$$

Corolarios

1. $||a|-|b|| \leq |a-b|$
2. $|a-b| \leq |a|+|b|$

Demostración:

1. Como $a = a-b+b \overset{Des.triang.}{\Rightarrow} |a| \leq |a-b|+|b| \Rightarrow |a|-|b| \leq |a-b| = c$.
   Del mismo modo, $b = b-a+a \Rightarrow |b| \leq |b-a|+|a| \Rightarrow |b-a| = |a-b| \leq |b|-|a| \Rightarrow |a|-|b| \geq -|a-b| = -c$
   $$||a|-|b|| \leq c = |a-b|$$
2. $|a-b| = |a+(-b)| \leq |a|+|-b| = |a|+|b|$

Distancia entre dos números

Se puede expresar la distancia entre dos números como:

$$dist(a,b) = |a-b|$$

Propiedades

1. $\forall x, y \in \mathbb{R} : d(x,y) \geq 0$ y $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R} : d(x,y) = d(y,x)$
3. Propiedad triangular: $\forall x, y, z \in \mathbb{R} : d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

Demostración:

1. $d(x,y) = |x-y| \geq 0 : \forall x, y \in \mathbb{R}$
2. $d(x,y) = |x-y| = |y-x| = d(y,x)$
3. $d(x,y) = |x-y| = |x-z+z-y| \leq |x-z| + |z-y| = d(x,z) + d(z,y)$

Intervalos

Sean $a, b \in \mathbb{R} : a < b$, definimos:

1. Intervalo abierto: $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
2. Intervalo cerrado: $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
3. Intervalo semiabierto o semicerrado: $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ y viceversa.

Observación

El conjunto de los números reales se puede expresar como $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ y se suele representar en lo que conocemos como **Recta Real**.

Entornos

Se llama **entorno abierto** al conjunto de números a distancia menor que r de un número central a

$$E(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : dist(x, a) < r\} = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| < r\} = \{x \in \mathbb{R} : a - r < x < a + r\}$$

Se llama **entorno cerrado** al conjunto de números a distancia menor o igual que r de un número central a

$$\bar{E}(a, r) = \{x \in \mathbb{R} : dist(x, a) \leq r\} = \{x \in \mathbb{R} : |x - a| \leq r\} = \{x \in \mathbb{R} : a - r \leq x \leq a + r\}$$

NÚMEROS COMPLEJOS

Sean $\mathbb{C} = \{a, b \in \mathbb{R} : (a, b)\}$ donde (a, b) es un par ordenado y donde definimos ciertas operaciones:

Operaciones

Suma

Si tenemos que $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$, se define la suma como:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

Propiedades:

- Conmutativa: $(a, b) + (c, d) = (c, d) + (a, b) = (a + c, b + d)$
- Asociativa: $((a, b) + (c, d)) + (e, f) = (a, b) + ((c, d) + (e, f))$
- Elemento neutro: $(0, 0) \to (a, b) + (0, 0) = (a, b)$
- Elemento opuesto: $(-a, -b) \to (a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$

En resumen, $(\mathbb{C}, +)$ es un **grupo conmutativo**.

Producto por un escalar

Si tenemos que $(a, b) \in \mathbb{C}$ y $\lambda \in \mathbb{R}$, se define el producto por un escalar como:

$$\lambda(a, b) = (\lambda a, \lambda b)$$

Propiedades:

- Conmutativa: $\lambda(a, b) = (a, b)\lambda$
- Asociativa: $\lambda(\mu \cdot (a, b)) = (\lambda\mu)Cdot(a, b)$
- Elemento neutro: $1 \cdot (a, b) = (a, b)$
- Distributiva: $(\lambda + \mu)(a, b) = \lambda(a, b) + \mu(a, b)$
- Distributiva: $\lambda[(a, b) + (c, d)] = \lambda(a, b) + \lambda(c, d)$

Producto

Si tenemos que $(a,b),(c,d) \in \mathbb{C}$, se define el producto como:

$$(a,b)\cdot(c,d) = (ac - bd, ad + bc)$$

Propiedades:

- Conmutativa: $(a,b)\cdot(c,d) = (c,d)\cdot(a,b)$
- Asociativa: $((a,b)\cdot(c,d))\cdot(e,f) = (a,b)\cdot((c,d)\cdot(e,f))$
- Elemento neutro: $(1,0) \to (a,b)\cdot(1,0) = (a,b)$
- Elemento inverso: $(a,b)^{-1} \to (a,b) \neq 0 \Rightarrow \exists (a,b)^{-1} \in \mathbb{C} : (a,b)\cdot(a,b)^{-1} = (1,0)$
- Distributiva: $(a,b)[(c,d)\cdot(e,f)] = (a,b)\cdot(c,d) + (a,b)(e,f)$

En resumen, $(\mathbb{C},\cdot)$ es un **grupo conmutativo**. Y en general, $(\mathbb{C},+,\cdot)$ es un **cuerpo conmutativo**.

Observaciones

Identificamos un número real $x \in \mathbb{R}$ con el número complejo $(x,0) \in \mathbb{C}$.

$$f : \mathbb{R} \ni x \to (x,0) \in \mathbb{C}$$

Que constituye una muy buena identificación porque conserva el producto y la suma dentro de los reales.

Llamamos i al número complejo $(0,1) \in \mathbb{C}$ y se le conoce como **unidad imaginaria**. Pero se observa que $i^2 = (-1,0) \in \mathbb{R}$ por lo que podemos decir que si $i^2 = -1 \Rightarrow i = \sqrt{-1}$, siendo este la unidad fundamental de los números imaginarios.

Si tenemos un número complejo cualquiera $(a,b) \in \mathbb{C}$ lo podemos escribir como $(a,b) = (a,0) + (0,b) = a(1,0) + b(0,1)$ con lo cual cualquier número complejo puede expresarse como:

$$(a,b) = a + bi$$

Donde a constituye su parte real y b se llama parte imaginaria.

Definiciones

- Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$ se le llama módulo de z a:

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

- Sea $\theta = (0, 2\pi]$ entonces decimos que θ es el argumento[6] de $z \neq 0$ si:

$$cos(\theta) = \frac{a}{|z|}$$

$$sen(\theta) = \frac{b}{|z|}$$

- El conjugado $\bar{z}$ de z es el número complejo $\bar{z} = a - bi$
- Si $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{\theta \cdot i} = cos(\theta) + i \cdot sen(\theta)$
- Si $x \in \mathbb{R} : x = x + 0i \in \mathbb{C}$, el módulo de ese número real es su valor absoluto: $|x|$
- Si $z = a + bi \in \mathbb{C} \Rightarrow |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \Leftrightarrow a = 0 = b$

[6] Que constituye el ángulo del vector que representa al número complejo con el eje x del plano

Propiedades

1. Si $z = a + bi \in \mathbb{C}$, entonces: $z \cdot \bar{z} = |z|^2$
   En particular, $z \cdot (\frac{1}{|z|^2} \cdot \bar{z}) = 1$, siendo lo del paréntesis **su inverso**.
2. Si $\theta \in \mathbb{R} : |e^{i\theta}| = 1$
3. Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces: $e^{\alpha i} \cdot e^{\beta i} = e^{i(\alpha+\beta)}$
4. Si $z \in \mathbb{C}$, entonces: $z = |z|e^{i\theta}$ donde θ es un argumento de z **(Forma polar)**.
5. Si $z, \omega \in \mathbb{C}$ y escribimos ambos como: $z = |z|e^{i\alpha}$ y $\omega = |\omega|e^{i\beta}$, entonces: $z \cdot \omega = |z| \cdot |\omega| \cdot e^{i(\alpha+\beta)}$

<u>Demostración</u>:

1. $z \cdot \bar{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |z|^2$
2. ya está
3. Desarrollo directo:
$$e^{i\cdot\alpha} \cdot e^{i\cdot\beta} = (cos(\alpha) + i \cdot sen(\alpha))\,(cos(\beta) + i \cdot sen(\beta)) =$$
$$= (cos(\alpha)cos(\beta) - sen(\alpha)sen(\beta)) \cdot i\,(cos(\alpha)sen(\beta) + sen(\alpha)cos(\beta)) =$$
$$cos(\alpha + \beta) + i \cdot sen(\alpha + \beta) = e^{i\cdot(\alpha+\beta)}$$
4. El argumento de z verifica que $cos(\theta) = \frac{a}{|z|}$ y $sen(\theta) = \frac{b}{|z|}$, lo que verifica que $a = |z|cos(\theta)$ y $b = |z|sen(\theta)$, con lo cual: $z = a + bi = |z|(cos(\theta) + sen(\theta) \cdot i) = |z|e^{i\theta}$
5. $z = |z|e^{i\alpha}$ y $\omega = |\omega|e^{i\beta}$, entonces: $z \cdot \omega = |z|e^{i\alpha} \cdot |\omega|e^{i\beta} = |z| \cdot |\omega| \cdot e^{i(\alpha+\beta)}$

Definición: la exponencial compleja

Nos es más que definir un poco más concretamente una de las propiedades anteriores.

$$z = a + bi \in \mathbb{C} \Rightarrow e^z = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{bi} = e^a \cdot (cos(b) + i \cdot sen(b)) = e^a \cdot cos(b) + e^a \cdot i \cdot sen(b)$$

Concretamente cuando se trata de un número real: $b = 0$, luego:

$$e^a \cdot cos(b) + e^a \cdot i \cdot sen(b) = e^a$$

Formas de representación

En resumen a lo expresado anteriormente, hay 4 formas de representar un número complejo:

- Forma binomial: $a + bi$
- Forma trigonométrica: $|z|cos(\theta) + |z|sen(\theta)i$
- Forma polar: $|z|_\theta$
- Forma exponencial: $z = |z| \cdot e^{\theta\cdot i}$

Teorema Fundamental del Álgebra

Supongamos que tenemos un polinomio $P(z)$ con coeficientes complejos, decimos que el número $z_0 \in \mathbb{C}$ es raíz de $P(z)$ lo que es equivalente a decir que: $P(z) = (z - z_0)Q(z)$.

Decimos que z_0 es raíz de $P(z)$ con multiplicidad $m \in \mathbb{N} \Leftrightarrow P(z) = (z-z_0)^m Q(z)$, donde $Q(z_0) \neq 0$.

El teorema dice que si tenemos un polinomio cualquiera de coeficientes complejos, siempre existe una raíz al menos.

$$f(x) \in \mathbb{C}[x] \Rightarrow \exists z_0 \in \mathbb{C} : P(z_0) = 0$$

Como consecuencia de dicho Teorema, si tenemos un polinomio $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 : a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{C} \wedge a_n \neq 0$, entonces $P(z)$ tiene n raíces complejas (teniendo en cuenta su multiplicidad). Es decir, $\exists z_0, \cdots, z_k \in \mathbb{C}$ y $\exists m_0, \cdots, m_k \in \mathbb{N}$, tales que $\sum_{i=1}^{k}(m_i) = n$ y tales que:

$$P(z) = a_n(z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_k)^{m^k}$$

Raíces de números complejos

Sea $z \in \mathbb{C}$ y $n \in \mathbb{N}$ buscamos $\omega \in \mathbb{C} : \omega^n = z$. Con lo cual para poder buscarlo, sabemos que buscamos un omega tal que:

$$\omega = r \cdot e^{i\theta} \text{ donde } r = |\omega|, \theta = argumento$$

De aquí se sigue que:

$$\omega^n = r^n \cdot e^{in\theta} = z = |z| \cdot e^{i\alpha} \Rightarrow \begin{cases} r^n = z & \Rightarrow r = \sqrt[n]{z} \\ e^{in\theta} = e^{i\alpha} & \Rightarrow n\theta = \alpha \Rightarrow \theta = \frac{\alpha + 2\pi k}{n} \end{cases}$$

Donde $k = 0, 1, ..., n-1$

SUPREMOS E ÍNFIMOS

Sea $A \subset R : A \neq \emptyset$, decimos que[7]:

- $M \in R$ es cota superior del conjunto A $\Leftrightarrow \forall a \in A : a \leq M$.
- $m \in \mathbb{R}$ es una cota inferior de A $\Leftrightarrow \forall a \in A : m \leq a$.

Cuando un conjunto posee cota superior decimos que está acotado superiormente, y cuando pose inferior, inferiormente.

Sea $A \subset R : A \neq \emptyset$, decimos[8] que:

- $S \in \mathbb{R}$ es supremo de A $\Leftrightarrow S \leq M : \forall M \in \mathbb{R}$, siendo M una cota superior.
- $s \in \mathbb{R}$ es el ínfimo de A $\Leftrightarrow m \leq s : \forall m \in \mathbb{R}$, donde m es cota inferior de A.

Decimos S es el máximo de A si es supremo y $S \in A$ y del mismo modo decimos que s es el mínimo de A si es ínfimo y $s \in A$.

[7] En consecuencia, de esto se deduce que cualquier número superior a M es cota superior de A y cualquier número menor que m es cota inferior de A.

[8] El supremo es la menor de las cotas superiores y el ínfimo la mayor de las menores.

Propiedad del supremo

Si $A \subset \mathbb{R} : A \neq \emptyset$ y está acotado superiormente, entonces existe el supremo.

$$A \subset \mathbb{R} : A \neq \emptyset \text{ y acotado superiormente} \Rightarrow \exists S \in \mathbb{R} : S \text{ es supremo de A}$$

En los $\mathbb{Q}$ no es cierto y es la diferencia fundamental de este cuerpo con respecto a los $\mathbb{R}$, porque par el conjunto: $\{x \in \mathbb{Q} : x^2 > 2\}$, existe el supremo en $\mathbb{R}$, pero no en $\mathbb{Q}$.

Proposición: consecuencias de supremo

Sea $A \subset \mathbb{R} : A \neq \emptyset$, acotado superiormente, el número $S \in \mathbb{R}$ es supremo $\Leftrightarrow$:

1. Es único.
2. Es cota superior de A
3. $\forall y \in \mathbb{R} : y < S \Rightarrow \exists a \in \mathbb{A} : y < a \leq S$.
4. $\forall \varepsilon > 0 : \exists a \in A : S - \varepsilon < a \leq S$.

Demostraciones:

1. Demostramos la unicidad:
   Supongamos que $S_1 \neq S_2$ son ambos supremos de A, luego $S_1 < S_2$ o $S_1 > S_2$. Si suponemos[9] que $S_1 < S_2$, como S_1 es cota superior de A y S_2 es supremo, $S_2 \leq S_1$ #.
2. Es por definición
3. Demostramos la doble implicación:
   - "$\Rightarrow$":
     Sea $y \in \mathbb{R} : y < S$, supongamos que no existe:
     $$\forall a \in A : a \leq y \vee S < a \Rightarrow \text{como S es cota superior} \Rightarrow a \leq y \Rightarrow y \text{ es cota superior } \#$$
     Porque si y es cota superior, $S \leq y$ luego absurdo.
   - "$\Leftarrow$":
     Sea $M \in \mathbb{R}$ una cota superior de A, suponemos lo contrario a que $S \leq M$:
     Si $M < S \Rightarrow \exists a \in A : M < a \leq S$ #, porque si M es cota superior, no puede haber ningún elemento de A que sea mayor que él.
4. Supongamos que no: $\forall a \in A : a < S - \varepsilon \vee S < a$. Si $S < a \Rightarrow S$ no es supremo, por lo tanto # y si $S - \varepsilon > a : \forall a \in A \Rightarrow S - \varepsilon$ es supremo #

Proposición: consecuencia de ínfimo

Sea $A \subset \mathbb{R} : A \neq \emptyset$, acotado inferiormente, el número $s \in \mathbb{R}$ es ínfimo $\Leftrightarrow$:

1. Es único.
2. Es cota inferior de A
3. $\forall y \in \mathbb{R} : s < y \Rightarrow \exists a \in \mathbb{A} : s \leq a < y$.

[9] Al revés es igual

4. $\forall \varepsilon > 0 : \exists a \in A : s \leq a < s + \varepsilon$.
5. $A \neq \emptyset$ y acotado inferiormente$\Rightarrow \exists s \in \mathbb{R}$ ínfimo de A.

Demostraciones:

1. Demostramos la unicidad:

   Si $s_1 \neq s_2$ son ínfimos, entonces $s_1 < s_2$ o al revés pero la demostración es igual. Si $s_1 < s_2$ como s_2 es cota inferior y s_1 es ínfimo: $s_2 \leq s_1$ #

2. Demostramos la doble implicación:

   - "$\Rightarrow$":

     Sea $y \in \mathbb{R} : s < y$, si suponemos que no existe, entonces: $\forall a \in A : a < s \vee y \leq a \Rightarrow$ como s es cota inferior $\Rightarrow y \leq a \Rightarrow y$ es cota inferior de A $\Rightarrow y \leq s$ #.
   - "$\Leftarrow$":

     Sea $m \in \mathbb{R}$ una cota inferior de A, suponemos lo contrario a que $s \geq m$:

     Sea m cota inferior de A, si $s < m \Rightarrow \exists a \in A : s \leq a < m$ #, porque m es cota inferior.

3. Suponemos que:

   $$\exists m \in \mathbb{R} : m \leq a : \forall a \in A \Leftrightarrow -m \geq -a \Leftrightarrow -m \text{ es cota superior de B} = \{-a : a \in A\} \neq \emptyset$$

   $$\Rightarrow \exists S \text{ supremo de B} : -a \leq S \Rightarrow a \geq -S$$

   Aquí vemos que $-S$ es el ínfimo de A porque $-S$ es cota inferior de A y probamos que además es la mayor de las cotas inferiores, es decir, probamos $m \leq -S$:

   Sea m una cota inferior de A, $m \leq -S$, porque si no lo fuese: $-S < m \leq a \Rightarrow S > -m \geq -a \Rightarrow -m$ es cota superior de B, # porque S es el supremo de B.

Notación:

Sea $A \subset \mathbb{R} : A \neq \emptyset$, se denota al supremo de A como $sup(A)$ y se denota al ínfimo de A como $inf(A)$ y cuando no están acotados los conjuntos y por lo tanto no tiene supremo ni ínfimo pero se denota así: $sup(A) = +\infty$ y $inf(A) = -\infty$.

Teorema de la existencia de raíces

Sea $a \in \mathbb{R} : a > 0$ y $n \in \mathbb{N} : n \geq 2$ entonces $\exists! r > 0 : r^n = a$.

Demostración:

1. Demostramos primero la unicidad:

   Supongamos que hay 2: $r_1 \neq r_2$, podemos suponer entonces que: $r_1 < r_2 \Rightarrow r_1^n < r_2^n$ # porque $a < a$ es absurdo.

2. Demostramos la existencia:

   Definimos el conjunto $A = \{x > 0 : x^n \leq a\}$, demostramos que $A \neq \emptyset$

   $$\frac{a}{1+a} < a \text{ y del mismo modo: } \frac{a}{1+a} < 1 \Rightarrow \left(\frac{a}{1+a}\right)^n < \frac{a}{1+a} < a \Rightarrow \frac{a}{1+a} \in A$$

   Ahora vemos que A es acotado superiormente, para ello distinguimos dos casos:

   - $a \leq 1 \Rightarrow M = 1$ es una cota superior de A porque si no lo fuese:

     $$\exists x \in A : x > 1 \Rightarrow x^n > 1 \geq a \Rightarrow \ \#$$

- $a > 1 \Rightarrow M = a$ es cota superior de A, porque si no lo fuese:

$$\exists x \in A : x > a > 1 \Rightarrow x^n > a^n > a \Rightarrow \#$$

Al estar acotado superiormente, por la propiedad de supremo entonces: $\exists r = sup(A) > 0$.

3. Queda solo demostrar $r^n = a$, para ello suponemos que $r^n < a$ y que $r^n > a$ y en ambos casos debemos llegar a una contradicción.

   - Caso: $r^n < a \Rightarrow \exists h > 0 : (r+h)^n < a$, donde cogemos un $0 < h < 1$:

$$(r+h)^n = r^n + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} r^j h^{n-j} = r^n + h \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} r^j h^{n-j-1} \overset{h^x<1}{\leq} r^n + h \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} r^j =$$
$$= r^n + h\left[(r+1)^n - r^n\right]$$

[10]

Ahora buscamos un h que satisfaga:

$$r^n + h\left[(r+1)^n - r^n\right] < a \Rightarrow h < \frac{a - r^n}{(r+1)^n - r^n}$$

Luego puedo elegir un $0 < h < \frac{a-r^n}{(r+1)^n - r^n}$ y $h < 1$, porque entre dos positivos hay infinitos números.
Como existe dicho valor de h, llegamos a una contradicción porque que $(r+h)^n < a$ implica que $r + h \in A$, pero no puede ser porque r es el supremo del conjunto y $r + h > r > x \in A = r + h \Rightarrow \#$.

   - Caso: $r^n > a \Rightarrow \exists h > 0 : (r-h)^n > a$, tratamos ahora de demostrar por reducción al absurdo que $r - h$ es una cota superior, para llegar a una contradicción:

$$\exists x \in A : x > r - h \Rightarrow x^n \geq (r-h)^n \Rightarrow a \geq x^n \geq (r-h)^n > a$$

Para que dicha contradicción sea posible es necesario verificar que existe algún valor de h que verifica lo anterior, por lo que tomamos un $h : 0 < h < 1$, entonces:

$$(r-h)^n = r^n + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} r^j (-h)^{n-j} = r^n + h \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} r^j (-1)^{n-j} h^{n-j-1} \geq$$

$$\overset{\text{todos } -}{\geq} r^n - h \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} r^j h^{n-j-1} \overset{h=1 \text{ resta más}}{\geq} r^n - h \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} r^j = r^n - h\left[(r+1)^n - r^n\right]$$

Ahora buscamos un h que satisfaga lo anterior:

$$r^n - h\left[(r+1)^n - r^n\right] > a \Leftrightarrow r^n - a > h\left[(r+1)^n - r^n\right] \Leftrightarrow 0 < h < \frac{r^n - a}{(r+1)^n - r^n} \text{ donde } h \leq 1$$

Por lo que al poder encontrar un h que satisfaga dicha expresión llegamos a una contradicción porque que $(r-h)^n > a$ implica que $r - h$ es cota superior de A, pero no puede ser porque r es el supremo del conjunto y $r - h$ sería una cota superior, inferior al supremo r.

Supremos e ínfimos de subconjuntos

Si tenemos que $S \subset A$ siendo ambos conjuntos de números reales, entonces:

$$\sup S \leq \sup A$$

$$\inf S \geq \inf A$$

[10] $\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} r^j = [(r+1)^n - r^n]$, despejando el sumatorio de la expresión: $(r+h)^n = r^n + \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} r^j h^{n-j}$, cuando $h = 1$

Propiedad Arquimediana de $\mathbb{R}$

Sea $x > 0 \in \mathbb{R}$ entonces $\exists n \in \mathbb{N} : x < n$, es decir, $\mathbb{N}$ no está acotado superiormente.

Demostración:

Supongamos lo contrario, $\exists x > 0 \in \mathbb{R} : n \leq x : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists S = sup(\mathbb{N})$, entonces por ser supremo: $\exists m \in \mathbb{N} : S - 1 < m \leq S \Rightarrow S < m + 1$, pero como $m + 1 \in \mathbb{N}$ es absurdo.

Propiedad Arquimediana del producto

Sea $x > 1$, $y > 0$, entonces $\exists n \in \mathbb{N} : x^n > y$ y es más:

$$\forall y > 0, x > 1 : \exists! n \in \mathbb{N} : x^n < y \leq x^{n+1}$$

Demostración:

Supongamos que no:

$\exists y > 0, x > 1 : \forall n \in \mathbb{N} : y > x^n \Rightarrow \{x^n\}$ es acotado sup. $\Rightarrow \exists \sup = S \Rightarrow S - \varepsilon < x^m \leq S : \forall \varepsilon > 0 : \exists m \in \mathbb{N} \Rightarrow$

Si soy capaz de encontrar un epsilon que verifique que $x^m + \varepsilon < x^{m+1}$ entonces ya tendría una contradicción porque como $S < x^m + \varepsilon < x^{m+1}$ tendríamos una potencia que sería mayor que el supremo.

$$\Rightarrow S < x^m + \varepsilon < x^{m+1} \Rightarrow \varepsilon < x^{m+1}(x - 1)$$

Si escogemos un $\varepsilon < x - 1 \Rightarrow \varepsilon > 0$ entonces lo anterior se verifica, así que como sí que existe un ε positivo que cumple que $x^m + \varepsilon < x^{m+1}$ tenemos una contradicción.

Proposiciones

1. Si $x < 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists m \in \mathbb{Z} : m < x$, es decir, que $\mathbb{Z}$ no está acotado inferiormente.

   Demostración:
   $$x < 0 \Rightarrow -x > 0 \overset{P.A.}{\Rightarrow} \exists n \in \mathbb{N} : -x < n \Leftrightarrow x > -n \in \mathbb{Z}$$

2. Si $x, y \in \mathbb{R} : x, y > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : y < nx$.

   Demostración:
   $$\frac{y}{x} > 0 \overset{P.A.}{\Rightarrow} \exists n \in \mathbb{N} : \frac{y}{x} < n \Leftrightarrow y < nx$$

3. Si $x > 0 \Rightarrow \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < x$

   Demostración:
   $$\frac{1}{x} > 0 \overset{P.A.}{\Rightarrow} \exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{x} < n \Leftrightarrow x > \frac{1}{n}$$

4. Si $x > 0$, entonces $inf\{\frac{x}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 0$

   Demostración:
   $$0 \text{ es cota inferior de } \left\{\frac{x}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = A \Rightarrow 0 \leq \frac{x}{n} : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists inf(A) = s \geq 0$$

$$\text{Si } s > 0 \Rightarrow 0 < s \leq \frac{x}{n} \Leftrightarrow n \leq \frac{x}{s} \Rightarrow \text{ \# porque los naturales no tiene cota superior}$$

5. Si $x < 0$, entonces $sup\{\frac{x}{n} : n \in \mathbb{N}\} = 0$

   Demostración:

$$0 \text{ es cota superior de } \left\{\frac{x}{n} : n \in \mathbb{N}\right\} = A \Rightarrow 0 \geq \frac{x}{n} : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists sup(A) = S \leq 0$$

$$\text{Si } S < 0 \Rightarrow S \geq \frac{x}{n} \Rightarrow \frac{x}{S} \geq n : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \text{ \# porque los naturales no tiene cota superior}$$

6. Si $x > 0 \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists! n \in \mathbb{N} : n - 1 \leq x < n$, es decir, en otras palabras[11]:

$$[0, \infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n-1, n)$$

   Demostración:

   Si $x > 0$, sea $A = \{m \in \mathbb{N} : x < m\} \neq \emptyset$, entonces por la propiedad de Buen Orden, A tiene un primer elemento definido como $n \in A$, que implica que $x < n$

$$\begin{cases} n = 1 & \Rightarrow 0 \leq x < 1 = n \\ n \neq 1 & \Rightarrow n - 1 \notin A \Leftrightarrow n - 1 \leq x < n \end{cases}$$

   Ahora demostramos la unicidad:

$$k \in \mathbb{N} : k - 1 \leq x < k \Rightarrow \begin{cases} k - 1 \notin A \\ k \in A \end{cases} \Rightarrow k \text{ es el primer elemento} \Rightarrow k = n$$

   Ahora demostramos la doble inclusión para demostrar que la unión de esos intervalos es el otro:

   - "$\supset$"

$$\forall n \in \mathbb{N} : [n-1, n) \subset [0, \infty) \Leftrightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n-1, n) \subset [0, \infty)$$

   - "$\subset$"

$$x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \Rightarrow x \in [0, 1) \\ x > 0 & \Rightarrow \exists! n \in \mathbb{N} : [n-1, n) \end{cases} \Rightarrow x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [n-1, n)$$

   Por último hay que ver que son disjuntos dos a dos:

$$n, m \in \mathbb{N} : n \neq m \Rightarrow n < m \Rightarrow n + 1 \leq m \Rightarrow n \leq m - 1 \Rightarrow [n-1, n) \cap [m-1, m) \neq \emptyset$$

   Esto es así porque $x \in [n-1, n) \Rightarrow x < n$ y $x \in [m-1, m) \Rightarrow x \geq m + 1$, todo implica que $m - 1 < n$ #

7. Análogamente, si $x > 0$, entonces $\exists! n \in \mathbb{N} : n - 1 < x \leq n$, es decir, en otras palabras[12]:

$$(0, \infty) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (n-1, n]$$

   Demostración: análoga a la anterior.

[11] Y además dichos conjuntos son disjuntos dos a dos.
[12] Y además dichos conjuntos son disjuntos dos a dos.

8. Si $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists! m \in \mathbb{Z} : m-1 \leq x < m$, en otras palabras:
$$\mathbb{R} = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} [m-1, m)$$
Demostración:
$$x \geq 0 \Rightarrow \exists! n \in \mathbb{N} : n-1 \leq x < n$$
$x < 0 \Rightarrow -x > 0 \Rightarrow \exists! n \in \mathbb{N} : n-1 < -x \leq n \Leftrightarrow -n \leq x < -(n-1) \Leftrightarrow m-1 = -n \leq x < -n+1 = m$
El resto de la demostración es como en los puntos anteriores

9. Análogamente, si $x \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists! m \in \mathbb{Z} : m-1 < x \leq m$, en otras palabras:
$$\mathbb{R} = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} (m-1, m]$$
Demostración: igual que antes

10. Si $x > 0$ y $y \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists! m \in \mathbb{Z} : (m-1)x \leq y < mx$, es decir, en otras palabras:
$$\mathbb{R} = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} [(m-1)x, mx)$$
Demostración:
$$\frac{y}{x} \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists! m \in \mathbb{Z} : m-1 \leq \frac{y}{x} < m \Rightarrow (m-1)x \leq y < mx$$

11. Análogamente, si $x > 0$ y $y \in \mathbb{R} \Rightarrow \exists! m \in \mathbb{Z} : (m-1)x < y \leq mx$, es decir, en otras palabras:
$$\mathbb{R} = \bigcup_{m\in\mathbb{Z}} ((m-1)x, mx]$$

Con todo lo visto anteriormente podemos probar otro resultado muy significativo:

Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$

Sean $a, b \in \mathbb{R} : a < b$, entonces $\exists r \in \mathbb{Q} : a < r < b$, es decir, en otras palabras:
$$(a, b) \cap \mathbb{Q} \neq \emptyset$$
Y de hecho es que hay infinitos.

Demostración:

Llamamos a $h = b - a > 0$, por la propiedad arquimediana, $\exists n \in \mathbb{N} : \frac{1}{n} < h$ y además, $\exists m \in \mathbb{Z} : m \leq a \cdot n < m+1$. Entonces ocurre que:
$$a < \frac{m+1}{n} = \frac{m}{n} + \frac{1}{n} < a + h = b$$
Con lo cual el número racional que buscábamos es $r = \frac{m+1}{n}$.

Corolario: Densidad de los Irracionales en $\mathbb{R}$

Si $a, b \in \mathbb{R} : a < b \Rightarrow \exists x \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} : a < x < b$, en otras palabras:
$$(a, b) \cap (\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}) \neq \emptyset$$
Demostración:

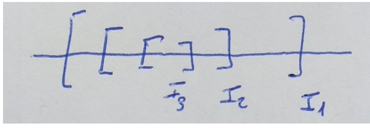
$$a < b \Rightarrow \frac{a}{\sqrt{2}} < \frac{b}{\sqrt{2}} \Rightarrow \exists r \in \mathbb{Q} : \frac{a}{\sqrt{2}} < r < \frac{b}{\sqrt{2}} \Rightarrow a < \sqrt{2}r < b$$
Y es fácil ver que $r \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

Principio de intervalos encajados de Cantor

Supongamos que tenemos una familia de intervalos cerrados, es decir:

$$F = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}} \text{ donde } I_n = [a_n, b_n]$$

Decimos que F es de intervalos encajados[13] $\Leftrightarrow n > m \Rightarrow I_n \subset I_m$, lo que es equivalente a decir que $I_{n+1} \subset I_n : \forall n \in \mathbb{N}$



El teorema dice que sea $F = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de intervalos cerrados y encajados:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \neq \emptyset \text{ y además } \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [\xi, \eta]$$

Donde $\xi = sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $\eta = inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$. Además de esta expresión se deduce que: $\xi \leq \eta$

Demostración:

Llamamos $A = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ y $B = \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$, veamos que $\forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq b_m$:

$$\text{Si } n \geq m \Rightarrow I_n \subset I_m \Leftrightarrow [a_n, b_n] \subset [a_m, b_m] \Rightarrow a_m \leq a_n \leq b_n \leq b_m$$

$$\text{Si } m > n \Rightarrow I_m \subset I_n \Rightarrow [a_m, b_m] \subset [a_n, b_n] \Rightarrow a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n$$

Lo que demuestra que cualesquiera que sean los intervalos elegidos, el extremos izquierdo de uno de ellos siempre es menor que el extremos derecho del del otro.

Esto quiere decir que: $\forall n \in \mathbb{N} : b_m$ es cota superior del conjunto A, por lo que $\exists \xi \in \mathbb{R} : \xi = sup(A)$, y además $\xi \leq b_m : \forall m \in \mathbb{N}$, pero esto mismo afirma que ξ es cota inferior de B, en consecuencia: $\exists \eta \in \mathbb{R} : \eta = inf(B)$ y además, $\xi \leq \eta$.

Veamos que: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [\xi, \eta] \neq \emptyset$:

- "$\subset$":

$$x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \Leftrightarrow a_n \leq x \leq b_n : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \begin{cases} x \text{ es cota superior de A} \Rightarrow x \geq \xi \\ x \text{ es cota inferior de B} \Rightarrow x \leq \eta \end{cases} \Rightarrow x \in [\xi, \eta]$$

- "$\supset$":

$$x \in [\xi, \eta] \Leftrightarrow a_n \leq \xi \leq x \leq \eta \leq b_n : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow a_n \leq x \leq b_n \Rightarrow x \in [a_n, b_n] = I_n : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n$$

[13] Uno está dentro del otro y así sucesivamente

Corolario

Sea $F = \{I_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una familia de intervalos cerrados y encajados, entonces[14]:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n \text{ es un único número} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : l(I_n) < \varepsilon$$

<u>Demostración</u>:

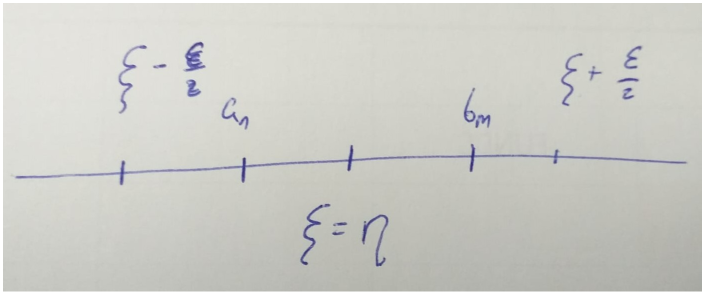
Por el teorema demostrado: $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = [\xi, \eta]$, por lo que es un único número $\Leftrightarrow \xi = \eta$:

- "$\Rightarrow$":

  $$\text{Sea } \varepsilon > 0 \wedge \xi = sup(A) \overset{Prop.Sup}{\Rightarrow} \xi - \frac{\varepsilon}{2} < a_n \leq \xi$$

  Pero como además, $\xi = \eta = inf(B)$:

  $$\exists m \in \mathbb{N} : \xi \leq b_m < \xi + \frac{\varepsilon}{2}$$



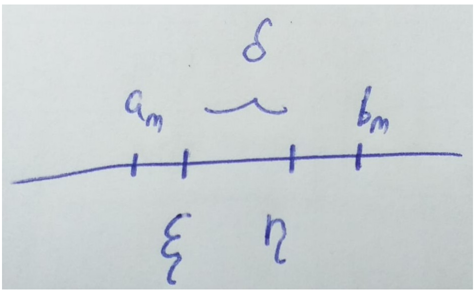
  - Ahora, si $n \geq m \Rightarrow I_n \subset I_m \Leftrightarrow a_m \leq a_n \leq b_n \leq b_m$, entonces:

    $$l(I_n) = b_n - a_n \leq b_m - a_n \leq \xi + \frac{\varepsilon}{2} - a_n < \xi + \frac{\varepsilon}{2} - \xi + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

  - Por último, si $n < m \Rightarrow I_m \subset I_n \Leftrightarrow a_n \leq a_m \leq b_m \leq b_n$, entonces:

    $$l(I_m) = b_m - a_m < \xi + \frac{\varepsilon}{2} - a_m \leq \xi + \frac{\varepsilon}{2} - a_n < \xi + \frac{\varepsilon}{2} - \xi + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

- "$\Leftarrow$": supongamos que $\xi < \eta$



  $$\xi < \eta \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : a_n \leq \xi < \eta \leq b_n \Rightarrow l(I_n) = b_n - a_n \geq \eta - a_n \geq \eta - \xi = \delta > 0 \Rightarrow \#$$

  Por que entonces decimos que los intervalos no son de la longitud que queramos porque tiene que ser mayores que un valor δ determinado.

[14] Si $I = [a, b]$, entonces su longitud es $l(I) = b - a$

Observaciones

- Si los intervalos no son cerrados, es mentira el teorema.
  Sea $I_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$ $n \in \mathbb{N}$, entonces $I_{n+1} \subset I_n$ porque:
  $$x \in I_{n+1} \Leftrightarrow 0 < x < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow x \in \left(0, \frac{1}{n}\right) = I_n$$
  Vemos que la intersección es vacía:
  $$x \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N} : 0 < x < \frac{1}{n} \Rightarrow \#$$
  Porque $n < \frac{1}{x}$ es absurdo porque los naturales no tienen cota superior.

Definición de la exponencial real

Se va a prescindir de las demostraciones de las operaciones con potencias y de los resultados para raíces porque se considera que son triviales y además se prescindirá de la demostración de los enunciados posteriormente descritos por la dificultad que revisten, pero se incluyen en estos apuntes por la importancia que revisten para resultados posteriores.

Para poder definir lo que significa tener un número elevado a otro número real se atiende a la siguiente definición: sea $a, x \in \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{Q}$:

$$x = \sup\{r \in \mathbb{Q} : r < x\} = \text{ínf}\{r \in \mathbb{Q} : r > x\}$$

Esto implica que entendamos la exponencial real como:

$$a^x = \sup\{a^r : r < x\} = \text{ínf}\{a^r : r > x\}$$

SUCESIONES Y SERIES

SUCESIONES

La sucesión de elementos de un conjunto es una lista numerada de elementos de un conjunto. Sea M un conjunto cualquiera, no vacío, una sucesión de elementos de M es una función:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N} &\quad \rightarrow \quad M \\ n &\quad \longmapsto \quad f(x) = x_n \end{aligned}$$

Si $M = \mathbb{R}$ entonces decimos que es una **sucesión numérica**. Como notación especial para hablar de una sucesión en M:

$$\{f(1), f(2), f(3), ...\} \Leftrightarrow \{x_1, x_2, x_3, ...\} = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Y además diremos para indicar que es de M, diremos:

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset M$$

Operaciones con sucesiones numéricas

Supongamos que tenemos dos sucesiones de números reales: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ definimos:

- **Suma**: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} + \{y_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_n + y_n\}_{n=1}^{\infty}$
- **Producto por un escalar**: Sea $a \in \mathbb{R} : a \cdot \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a \cdot x_n\}_{n=1}^{\infty}$
- **Producto de sucesiones**: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \cdot \{y_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_n \cdot y_n\}_{n=1}^{\infty}$
- **Cociente de sucesiones**: $\frac{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}{\{y_n\}_{n=1}^{\infty}} = \left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}_{n=1}^{\infty}$
  Como el resto de operaciones se reduce a operaciones de elementos, estas heredan las propiedades de los números reales como asociativa, distributiva, ... Además, si se observa detenidamente, estas forman un ESPACIO VECTORIAL.

Convergencia de sucesiones

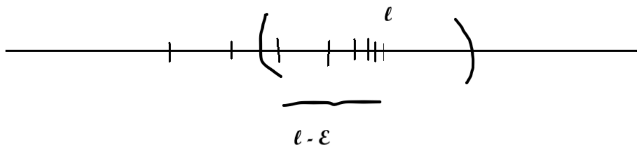
El conjunto de $\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ es un conjunto, pero podemos pensar en la sucesión: $\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty}$. Al ir dando valores a n vemos que se acercan cada vez a 0, a este concepto le llamamos **convergencia**.

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, decimos que esa sucesión **converge o tienen límite** en $l \in \mathbb{R}$:

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : x_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon) = E(l, \varepsilon) = |x_n - l| < \varepsilon$$

Es decir, que si tomamos un ε concreto, estoy cogiendo un intervalo y tiene que haber un número de esa “lista” a partir del cual el resto de números de la sucesión estén dentro de ese intervalo. Por notación escribiremos:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \qquad \begin{array}{ccc} x_n & \longrightarrow & l \\ n & \rightarrow & \infty \end{array}$$



Proposición: unicidad del límite

Si una sucesión tiene límite, este es único.

Demostración:

$$\exists l_1, l_2 : \lim_{n\to\infty} x_n = l_i$$

Como son dos números reales $l_1 < l_2$, tomamos $\varepsilon = \frac{l_2 - l_1}{2}$, con esto sabemos que $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n > n_0 : |x_n - l_1| < \varepsilon$ y también $\exists m_0 \in \mathbb{N} : \forall n > m_0 : |x_n - l_2| < \varepsilon \Rightarrow n \geq max\{n_0, m_0\} \Rightarrow x_n \in E(l_1, \varepsilon) = (l_1 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon) \wedge x_n \in E(l_2, \varepsilon) = (l_2 - \varepsilon, l_2 + \varepsilon)$, estos conjuntos deben ser disjuntos pensando en el dibujo mental, así se ve que: $l_1 + \varepsilon \leq l_2 - \varepsilon$ concretamente $=$ porque $2\varepsilon = l_2 - l_1 \Rightarrow \#$

Proposición: acotamiento de sucesiones convergentes

Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ tiene límite $\Rightarrow \exists M > 0 : \forall n \in \mathbb{N} : |x_n| \leq M$, es decir, es acotada.

Observación: $\Leftarrow$ no es cierto

Teniendo la sucesión $\{x_n = (-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$, supongamos que existe un l que cumple la definición:

$$\exists l \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |x_n - l| < \varepsilon$$

Si n es par, $|1 - l| < \varepsilon$; si n es impar, $|-1-l| < \varepsilon$. Tomamos $\varepsilon = \frac{1}{2}$, entonces $|1-l| < \frac{1}{2} \wedge |-1-l| < \frac{1}{2} \Rightarrow x \in (\frac{1}{2}, \frac{3}{2}) \cap (\frac{-3}{2}, \frac{-1}{2}) = \emptyset$

Demostración:

Sabemos que l es el límite de la sucesión así que sabemos que $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |x_n - l| < \varepsilon$. Tomamos $\varepsilon = 1$

$$\Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |x_n - l| < 1 \Rightarrow |x_n| - |l| \leq |x_n - l| < 1 \Rightarrow |x_n| \leq 1 + l : \forall n \geq n_0$$

Demostrado los valores de $n \geq n_0$, tenemos que demostrar que se cumple para $n = 1, 2, 3, ..., n_0 - 1$, que como es un conjunto finito podemos decir que uno de ellos es el mayor de todos y en consecuencia $\exists \tilde{M} > 0 : |x_n| \leq \tilde{M} : \forall n = 1, 2, ..., n_0 - 1$.

De este modo, nuestro número $M = max\{\tilde{M}, 1 + l\}$

Operaciones con sucesiones convergentes

Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ que convergen a x y a y respectivamente, entonces:

1. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} + \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $x + y$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n = x + y$$

2. Si $a \in \mathbb{R}$, entonces $a \cdot \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $a \cdot x$

$$\lim_{n\to\infty} a \cdot x_n = a \cdot \lim_{n\to\infty} x_n = a \cdot x$$

3. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \cdot \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $x \cdot y$

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n = x \cdot y$$

4. Si $x \neq 0 \Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq 0 : x_n \neq 0$ y entonces $\frac{\{y_n\}_{n=1}^{\infty}}{\{x_n\}_{n=1}^{\infty}}$ converge a $\frac{y}{x}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim_{n\to\infty} y_n}{\lim_{n\to\infty} x_n} = \frac{y}{x}$$

5. $\{|x_n|\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $|x|$

$$\lim_{n\to\infty} |x_n| = |\lim_{n\to\infty} x_n| = |x|$$

Demostraciones:

1. Queremos ver que para $\forall \varepsilon > 0 : |(x_n + y_n) - (x + y)| < \varepsilon$:

$$|(x_n + y_n) - (x + y)| = |x_n - x + y_n - y| \leq |x_n - x| + |y_n - y|$$

Para ello sabemos que como $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0^1 : \forall n \geq n_0^1 : |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ y que $\exists n_0^2 : \forall n \geq n_0^2 : |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2}$, pero hay que garantizar que esto ocurra eligiendo el elemento correcto:

$$n_0 = max\{n_0^1, n_0^2\} \Rightarrow \forall n \geq n_0 \wedge n \geq m_0 \Rightarrow |x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon$$

Porque $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |x_n - x| + |y_n - y| < \varepsilon$.

2. Suponiendo[15] $a \neq 0$ y sea $\varepsilon > 0$ queremos probar que $|ax_n - ax| < \varepsilon$:

$$|a \cdot x_n - a \cdot x| = |a \cdot (x_n - x)| = |a| \cdot |x_n - x|$$
$$\Rightarrow |a| \cdot |x_n - x| < |a| \cdot \frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon$$

Pero como sabemos que sea $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{|a|}$, entonces:

$$|a| \cdot |x_n - x| < |a| \cdot \frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon$$

3. Sea $\varepsilon > 0$, queremos probar que $|x_n y_n - xy| < \varepsilon$:

$$|x_n y_n - xy| = |x_n y_n - xy + x_n y - x_n y| = |x_n(y_n - y) + y(x_n - x)| \leq |x_n||y_n - y| + |y||x_n - x|$$

Por la proposición anterior como x_n es convergente, es acotada así que $\exists M > 0 : |x_n| \leq M : \forall n \in \mathbb{N}$, por lo que:

$$|x_n||y_n - y| + |y||x_n - x| < M|y_n - y| + |y||x_n - x|$$

De este modo como si $y = 0$, entonces:

$$\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{M} \Rightarrow M|y_n - y| + |y||x_n - x| = M|y_n - y| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

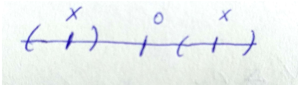
Si $y \neq 0$, entonces:
$\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists n_0^1 : \forall n \geq n_0^1 : |x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2|y|}$ y que $\exists n_0^2 : \forall n \geq n_0^2 : |y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2M} \Rightarrow n_0 = max\{n_0^1, n_0^2\} \Rightarrow \forall n \geq n_0 :$

$$M|y_n - y| + |y||x_n - x| < M\frac{\varepsilon}{2M} + |y|\frac{\varepsilon}{2|y|} = \varepsilon$$

[15] $a = 0 \Rightarrow 0 \cdot \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{0\}_{n=1}^{\infty} = 0$

4. Como hemos probado el producto, basta probar que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}$.

   Como $x \neq 0$:



$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |x_n - x| < \varepsilon$$

$$\text{Sea } \varepsilon = \frac{|x|}{2} \Rightarrow \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : |x_n - x| < \frac{|x|}{2}$$

$$\text{Vemos que } |x| - |x_n| \leq |x_n - x| < \frac{|x|}{2} \Rightarrow |x| - \frac{|x|}{2} \leq |x_n| : \forall n \geq n_0 \Leftrightarrow 0 < \frac{|x|}{2} \leq |x_n|$$

   Con esto queda probado que a partir de un cierto índice, los $|x_n|$ son distintos de 0, por lo que puedo decir que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}$ es correcto.

   Veamos ahora que $x_n \neq 0, \forall n \geq n_0 : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \frac{1}{x}$:

$$\text{Sea } \varepsilon > 0 \Rightarrow |\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x}| = |\frac{x - x_n}{x \cdot x_n}| = \frac{|x - x_n|}{|x||x_n|}$$

   Antes habíamos probado que $0 < \frac{|x|}{2} \leq |x_n| \Rightarrow \frac{1}{|x_n|} \leq \frac{2}{|x|}$. Con lo cual para $n \geq n_0$:

$$\frac{|x - x_n|}{|x||x_n|} \leq \frac{2|x - x_n|}{|x|^2}$$

   Ahora si $\varepsilon > 0 \Rightarrow \exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq N_0 : |x_n - x| < \frac{|x|^2}{2} \cdot \varepsilon$, con lo cual si tomamos como $n_0^1 = \{n_0, N_0\}$ se dan las dos condiciones por lo que:

$$n \geq n_0^1 \Rightarrow \frac{2|x - x_n|}{|x|^2} < \frac{2}{|x|^2} \cdot \frac{|x|^2}{2} \cdot \varepsilon = \varepsilon$$

5. Sea $\varepsilon > 0$ queremos medir $||x_n| - |x||$, pero sabemos que:

$$||x_n| - |x|| \leq |x_n - x| < \varepsilon$$

   Esto último porque sabemos que dado $\varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0$

Sucesiones Monótonas

Una sucesión de números de reales $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, se llama **monótona creciente**[16] si:

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n \leq x_{n+1} \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \uparrow$$

Una sucesión de números reales $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, se llama **monótona decreciente**[17] si:

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_{n+1} \leq x_n \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \downarrow$$

[16] Decimos que es estrictamente creciente si la desigualdad es estricta

[17] Decimos que es estrictamente decreciente si la desigualdad es estricta

Convergencia de sucesiones acotadas

Si la sucesión es monótona creciente y acotada superiormente entonces es convergente. Además converge al **supremo** de los números de la sucesión.

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \uparrow \wedge \text{ es acotada superiormente} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \{x_n\} = l = \sup\{x_n : \forall n \in \mathbb{N}\}$$

Si la sucesión es monótona decreciente y acotada inferiormente entonces es convergente. Además converge al **ínfimo** de los números de la sucesión.

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \uparrow \wedge \text{ es acotada inferiormente} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \{x_n\} = l = \inf\{x_n : \forall n \in \mathbb{N}\}$$

<u>Demostración</u>:

1. $$\text{Acotada superiormente} \Rightarrow \exists M \in \mathbb{R} : x_n \leq M : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists l = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$$
   Por ser supremo, si $\varepsilon > 0$, entonces $\exists n_0 \in N : l - \varepsilon < x_{n_0} \leq l$, así que:
   $$\forall n \geq n_0 \Rightarrow l - \varepsilon < x_{n_0} \leq x_n \leq l \Rightarrow x_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$
   No hay contradicción por que aunque nunca se encuentren más allá de l, lo escrito no es mentira y en consecuencia cumplen las premisas de convergencia.

2. $$\text{Por ser acotada inferiormente} \Rightarrow \exists m \in \mathbb{R} : m \leq x_n : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \exists l = \inf\{x_n : \forall n \in \mathbb{N}\}$$
   Por ser ínfimo, si $\varepsilon > 0$, entonces $\exists n_0 \in N : l \leq x_{n_0} < l + \varepsilon$, así que:
   $$\forall n \geq n_0 \Rightarrow l < x_n \leq x_{n_0} < l + \varepsilon \Rightarrow x_n \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$
   Del mismo modo que antes, se cumplen las premisas de convergencia sin mentir en ningún punto.

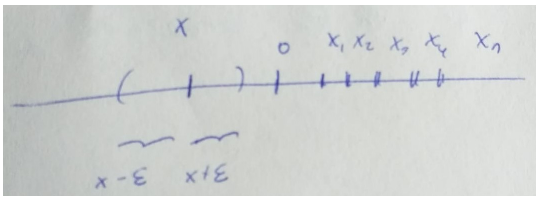
Convergencia y orden

Sean $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ convergentes a $x, y \in \mathbb{R}$ respectivamente, entonces:

1. Si $x_n \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \geq 0$
2. Si $x_n \leq y_n : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \leq y$
3. Si $\exists a, b \in \mathbb{R} : a \leq x_n \leq b \Rightarrow a \leq x \leq b : \forall n \in \mathbb{N}$
4. **Regla del sandwich**: si $x_n \leq y_n : \forall n \in \mathbb{N}$ y $x = y$, entonces para cualquier sucesión $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$: $x_n \leq z_n \leq y_n : \forall n \in \mathbb{N}$ se tiene que $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $x(= y)$.

<u>Demostración</u>:

1. Si $x < 0$, entonces $\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |x_n - x| < \varepsilon$, cogemos por tanto un epsilon tal que el extremo derecho sea negativo: $x + \varepsilon < 0$, con lo cual $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : x_n \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon) \Rightarrow x_n < x + \varepsilon < 0 \Rightarrow \#$



2. Sea $z_n = y_n - x_n \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N}$ por lo que z_n converge a $y - x \Rightarrow y - x \geq 0 \Leftrightarrow y \geq x$
3. Sea $z_n = x_n - a \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N}$, esta converge a $x - a \overset{1.}{\geq} 0$ y sea $w_n = b - x_n$, esta converge a $b - x \geq 0$, en consecuencia: $b \geq x \geq a \Rightarrow x \in [a, b]$
4. Definimos como $w_n = y_n - x_n \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N}$, como converge a $y - x \Rightarrow y - y = 0$, luego el límite es 0. Ahora medimos la distancia entre z_n y x_n:

$$0 \leq z_n - x_n \leq y_n - x_n \Rightarrow \{z_n - x_n\}_{n=1}^{\infty} \overset{\infty}{\to} 0 : \forall \varepsilon > 0$$

Esto puede hacerse porque estaba verificado que w_n tendía a cero: dado $\varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : w_n < \varepsilon \Rightarrow z_n - x_n < \varepsilon$. Con lo cual si tomamos:

$$z_n = (z_n - x_n) + x_n \Rightarrow \lim_{n \to \infty} z_n = \lim_{n \to \infty} (z_n - x_n) + \lim_{n \to \infty} x_n = 0 + x = x$$

Sucesiones que convergen en infinito

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ decimos que converge o que tiende a ∞ si para cualquier constante que cojamos hay un término a partir del cual todos los términos son más grandes que esa constante.

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : x_n \geq M$$

Decimos que la sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge o tiende a $-\infty$ cuando si para cualquier constante negativa que elijamos hay un índice a partir del cual todos los términos son más pequeños que esa constante.

$$\lim_{n \to \infty} x_n = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : x_n \leq -M$$

Proposición: sucesiones monótonas no acotadas

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$:

1. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \uparrow$ y no acotada superiormente $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = \infty$
2. Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \downarrow$ y no acotada inferiormente $\Rightarrow \lim_{n \to \infty} x_n = -\infty$

Observamos que si las sucesión tiende a infinito o menos infinito no es acotada superior o inferiormente.

Demostración:

1. Sea $M > 0$ como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es acotada superiormente, entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N} : M \leq x_{n_0}$. Si $n \geq n_0 \Rightarrow M \leq x_{n_0} \leq x_n$
2. Sea $M > 0$ como $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ no es acotada inferiormente, entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N} : -M \geq x_{n_0}$. Si $n \geq n_0 \Rightarrow -M \geq x_{n_0} \geq x_n$

Proposición

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, entonces:

1. Si $\lim_{n \to \infty} x_n = \pm\infty$, entonces $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{x_n} = 0$
2. Si $x_n > 0 : \forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n \to \infty} x_n = 0$, entonces $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{x_n} = \infty$

3. Si $x_n < 0 : \forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = -\infty$

Demostración:

1. Supongamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = \infty$ y sea $\varepsilon > 0$, tenemos que probar que $|\frac{1}{x_n} - 0| < \varepsilon$:

$$\text{Sea M} = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : x_n > \frac{1}{\varepsilon} = M \Rightarrow \frac{1}{x_n} < \varepsilon \Leftrightarrow |\frac{1}{x_n}| < \varepsilon$$

Supongamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$ y sea $\varepsilon > 0$, tenemos que probar que $|\frac{1}{x_n} - 0| < \varepsilon$:

$$\text{Sea M} = \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : x_n < \frac{-1}{\varepsilon} = -M \Rightarrow \frac{-1}{x_n} < \varepsilon \Leftrightarrow |\frac{1}{x_n}| < \varepsilon$$

2. Sea $M > 0$ queremos probar que $\frac{1}{x_n} > M$ de un índice en adelante:

$$\text{Sea } M > 0, \text{ tomamos } \varepsilon = \frac{1}{M} \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |x_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow |x_n| = x_n < \varepsilon = \frac{1}{M} \Rightarrow M < \frac{1}{x_n}$$

3. Sea $M > 0$, queremos probar que $\frac{1}{x_n} < -M$ de un índice en adelante:

$$\text{Sea } M > 0, \text{ tomamos } \varepsilon = \frac{1}{M} > 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |x_n - 0| < \varepsilon \Leftrightarrow |x_n| = -x_n < \varepsilon = \frac{1}{M} \Rightarrow \frac{1}{x_n} < -M$$

Corolario: operaciones con límites

Notación: se llama "$\mathbb{R}$ ampliado" a:

$$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\} \cup \{-\infty\}$$

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ y $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ que tienen límite x e y respectivamente tales que: $x, y \in \overline{\mathbb{R}}$, entonces:

1. $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$
2. Si $a \in \mathbb{R}$ $\lim_{n\to\infty}(a \cdot x_n) = a \cdot x$
3. $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = x \cdot y$
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$
5. Si $x_n \leq y_n : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \leq y$

Para ello entendemos las siguientes definiciones:

1. Si $x = \infty$, entonces $x + y = \infty$ si $y \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$
2. $a \cdot x = \infty$ si $a \in (0, \infty)$ y $a \cdot x = -\infty$ si $a \in (-\infty, 0)$
3. $xy = \infty$ si $y \in (0, \infty) \cup \{\infty\} \wedge xy = -\infty$ si $y \in (-\infty, 0) \cup \{-\infty\}$
4. $\frac{x}{y} = \infty$ si $y \in (0, \infty) \wedge \frac{x}{y} = -\infty$ si $y \in (-\infty, 0)$
5. Si $x = \infty$, entonces $y = \infty$

Es decir, quedan excluidas las situaciones $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{\infty}{0}$, que son conocidas como las **indeterminaciones**.

Criterio del cociente y de la raíz

Un buen criterio[18] para dilucidar si un límite es 0 o ∞ es el **criterio de la raíz** y el **criterio del cociente**:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty$$

Algunos ejemplos

Ej.: Sea $p > 0$, entonces $x_n = \frac{1}{n^p} : n \in \mathbb{N}$ veamos que $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^p} = 0$

$$1 \leq n < n+1 \Rightarrow n^p < (n+1)^p \Rightarrow x_{n+1} = \frac{1}{(n+1)^p} < \frac{1}{n^p} = x_n \Rightarrow \{x\}_{n=1}^{\infty} \downarrow$$

Desde luego se observa que el ínfimo de los elementos de la sucesión es 0, y como hemos demostrado que toda sucesión decreciente acotada inferiormente converge a su supremo, lo demostramos:

$$\text{Si } \exists\alpha : 0 < \alpha \leq \frac{1}{n^p} : \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow n^p \leq \frac{1}{\alpha} \Rightarrow n \leq (\frac{1}{\alpha})^{\frac{1}{p}} : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \#$$

Porque los naturales no pueden tener cota superior.

Ej.: Si $r \in \mathbb{R}$, entonces $x_n = r^n : n \in \mathbb{N}$

- Si $r = 0$:
$$x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$
- Si $r = 1$:
$$x_n = 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 1$$
- Si $0 < r < 1$
$$r^{n+1} < r^n \Leftrightarrow x_{n+1} < x_n : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \downarrow \overset{acot.inf.}{\Rightarrow} \exists \lim = \inf$$
Probamos que el ínfimo es 0 de nuevo:
$$\text{Si } \exists\alpha : 0 < \alpha \leq r^n : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \frac{1}{\alpha} \geq \frac{1}{r^n} = \left(\frac{1}{r}\right)^n : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \# \text{ porque } \frac{1}{r} > 1 \text{ y } \{x^n : x > 1 \wedge n \in \mathbb{N}\} \text{ no acot.}$$
- Si $r > 1$
$$r^{n+1} > r^n \Leftrightarrow x_{n+1} > x_n \Rightarrow \{x_n\} \uparrow \Rightarrow \{x_n\} \text{ no esta acotada sup.}$$
Porque si realmente lo estuviese entonces:
$$r^n \leq M : \forall n \in \mathbb{N} : r > 1 \Rightarrow \# \text{ por la propiedad arquimediana del producto} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} r^n = \infty$$
- Si $-1 < r < 0$:
$$0 < |r| < 1 \Rightarrow 0 \leq |r^n| = |r|^n \overset{\text{caso } 0<r<1}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} |r|^n = 0 \overset{ReglaSandwich}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} |r^n| = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} r^n = 0$$

[18] La demostración es sencilla por medio de la defínción de límite y se deja para el lector

- Si $r = -1$:

$$\text{No hay límite}$$

- Si $r < -1$:

$$\begin{cases} x_{2k} = r^{2k} = (r^2)^k \overset{n\to\infty}{\to} \infty \\ x_{2k+1} = r^{2k+1} = r^{2k} \cdot r \overset{n\to\infty}{\to} -\infty \end{cases} \quad \Rightarrow \nexists \lim$$

Ej: Sea $a > 0$, $x_n = \sqrt[n]{a}$, veamos que $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$:

- Si $a = 1$

$$\sqrt[n]{1} = 1 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \lim = 1$$

- Si $a > 1$

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \Rightarrow a^{\frac{1}{n+1}} < a^{\frac{1}{n}} \Leftrightarrow \sqrt[n+1]{a} < \sqrt[n]{a} \Leftrightarrow x_{n+1} < x_n \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \downarrow$$

Ahora basta con probar que el ínfimo de dicha sucesión es el 1 y por las proposiciones citadas, estaría demostrado que es su límite.

$\exists m : 1 < m \leq \sqrt[n]{a} : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \alpha^n \leq a \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \#$ por la prop. Arqui. Produc porque $\alpha > 1$

- Si $0 < a < 1$

$$\frac{1}{a} > 1 \Rightarrow \sqrt[n]{\frac{1}{a}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{a}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a}} = \frac{1}{1} = 1$$

Ej: $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$:

$$n \geq 1 \Rightarrow \sqrt[n]{n} \geq 1 \Rightarrow \sqrt[n]{n} = 1 + k_n : k_n > 0 \Rightarrow n = (1+k_n)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} k_n^j \geq 1 + \binom{n}{2} k_n^2 = 1 + \frac{n(n+1)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow n - 1 \geq \frac{n(n+1)}{2} \cdot k_n^2 \Leftrightarrow 0 \leq k_n^2 \leq \frac{2}{n} \overset{Regla Sandwich}{\Rightarrow} k_n^2 \overset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow k_n \overset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \sqrt[n]{n} = 1 + k_n \overset{n\to\infty}{\to} 1 + 0 = 1$$

Se observa que en la desigualdad a partir del sumatorio me he quedado solo con los sumandos de $j = 0$ y $j = 2$ por lo que se cumple la desigualdad mostrada.

Criterio de Stoltz

Supongamos que tenemos una sucesión de números reales, estrictamente creciente y que tiende a infinito: $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} : y_n < y_{n+1} : \lim_{n\to\infty} y_n = \infty$ y supongamos que tenemos otra sucesión cualquiera: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l \in \overline{\mathbb{R}}$$

Hemos de ver que el recíproco es falso:

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{(-1)^n}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0$$

Pero vemos que:

$$\frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = \frac{(-2)(-1)^n}{1} \Rightarrow \nexists \lim x_n$$

Ej.: Sea $x_n = n$ y $y_n = 2^n$, entonces:

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \frac{1}{2^{n+1}-2^n} = \frac{1}{2^n} \overset{n\to\infty}{\to} 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2^n} = 0$$

Demostración:

Sea $m, n \in \mathbb{N} : m < n$, entonces escribimos:

$$x_n = x_m + (x_n - x_m) = x_m + x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - x_m = x_m + \sum_{k=m+1}^{n} (x_k - x_{k-1})$$

Como $y_n \overset{n\to\infty}{\to} \infty$ podemos suponer que $y_n > 0 : \forall n$, con lo cual si dividimos entre y_n:

$$\frac{x_n}{y_n} = \frac{x_m}{y_n} + \frac{1}{y_n}\sum_{k=m+1}^{n}(x_k - x_{k-1}) = \frac{x_m}{y_n} + \frac{1}{y_n}\sum_{k=m+1}^{n}\frac{(x_k - x_{k-1})}{y_k - y_{k-1}} \cdot (y_k - y_{k-1})$$

- Supongamos ahora que $l \in \mathbb{R}$: hacemos lo mismo $x_n = l \cdot y_n$, con lo cual queda:

  $$l = \frac{l \cdot y_m}{y_n} + \frac{1}{y_n} + \sum_{k=m+1}^{n} (y_k - y_{k-1}) \cdot l$$

  Ahora vemos que:

  $$\frac{x_n}{y_n} - l = \frac{x_m - l\cdot y_m}{y_n} + \frac{1}{y_n}\sum_{k=m+1}^{n}\left(\frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} - l\right)\cdot (y_k - y_{k-1})$$

  Y si tomamos el valor absoluto:

  $$\left|\frac{x_n}{y_n} - l\right| \leq \left|\frac{x_m - l\cdot y_m}{y_n}\right| + \frac{1}{y_n}\sum_{k=m+1}^{n}\left|\frac{x_k - x_{k-1}}{y_k - y_{k-1}} - l\right|\cdot (y_k - y_{k-1})$$

  Dado $\varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq n_0$, entonces:

  $$\left|\frac{x_{k+1}-x_k}{y_{k+1}-y_k} - l\right| < \varepsilon \overset{m=n_0}{\Rightarrow} \forall n \geq n_0 : \left|\frac{x_n}{y_n} - l\right| \leq \left|\frac{x_{n_0} - ly_{n_0}}{y_n}\right| + \frac{1}{y_n}\sum_{k=n_0+1}^{n}(y_k - y_{k-1})\frac{\varepsilon}{2} =$$

  $$\left|\frac{x_{n_0} - ly_{n_0}}{y_n}\right| + \frac{\varepsilon}{2}\left(1 - \frac{y_{n_0}}{y_n}\right) \overset{1-\lambda<1}{\leq} \left|\frac{x_{n_0} - ly_{n_0}}{y_n}\right| + \frac{\varepsilon}{2} \overset{y_n\to\infty}{\Rightarrow} \exists n_1 \in \mathbb{N} : n \geq n_1 : \left|\frac{x_{n_0} - ly_{n_1}}{y_n}\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

  Ahora este n_1 podemos suponerlo $n_1 \geq n_0$ porque si no cogeríamos el más grande de ambos para que se verificasen ambas cosas, con lo cual:

  $$\left|\frac{x_{n_0} - ly_{n_0}}{y_n}\right| + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

- Supongamos ahora que $l = \infty$, entonces dado $M > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq n_0$, tenemos:

  $$\left|\frac{x_{k+1}-x_k}{y_{k+1}-y_k}\right| > 2M \overset{m=n_0}{\Rightarrow} \forall n \geq n_0 : \frac{x_n}{y_n} \geq \frac{x_{n_0}}{y_n} + 2M\frac{1}{y_n}\cdot \sum_{k=n_0+1}^{n}(y_k - y_{k-1}) = \frac{x_{n_0}}{y_n} + 2M\frac{1}{y_n}\cdot(y_n - y_{n_0}) =$$

  $$= 2M + \frac{x_{n_0} - 2My_{n_0}}{y_n} = 2M + \frac{x_{n_0}}{y_n} - 2M\frac{y_{n_0}}{y_n} \overset{y_n\to\infty}{\Rightarrow} \exists n_1 \in \mathbb{N} : n \geq n_1 : \frac{x_{n_0}}{y_n} - 2M\frac{y_{n_0}}{y_n} \geq -M \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow 2M + \frac{x_{n_0}}{y_n} - 2M\frac{y_{n_0}}{y_n} \geq M$$

- Supongamos ahora que $l = -\infty$, entonces la sucesión $\{-x_n\}_{n=1}^{\infty}$ verifica que:

$$\frac{-x_{n+1} - (-x_n)}{y_{n+1} - y_n} = \frac{-(x_{n+1} - x_n)}{y_{n+1} - y_n} \to \infty \Rightarrow \frac{-x_n}{y_n} \to \infty \Rightarrow \frac{x_n}{y_n} \to \infty$$

Ejemplo:

Sea $p > 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = 0$:

- Caso $\alpha \leq 0$:

$$\alpha \leq 0 \Rightarrow 0 \leq \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} = \frac{1}{(1+p)^n \cdot n^{-\alpha}} \leq \frac{1}{(1+p)^n} \to 0 \overset{ReglaSandwich}{\Rightarrow} SI$$

- Caso $\alpha > 0$: sea $k \in \mathbb{N}$ y $\alpha < k$, demostramos que: $\frac{n^k}{(1+p)^n} \to 0$ porque como $0 \leq \frac{n^\alpha}{(1+p)^n} \leq \frac{n^k}{(1+p)^n}$ por la regla del sandwich quedaría probado.
  Si elegimos un $n > k$:

$$(1+p)^n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} p^j \overset{j=k}{\geq} \binom{n}{k} p^k = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} p^k = \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}_{k \text{ términos}} \cdot \frac{p^k}{k!}$$

  Ahora si $n > 2k \Rightarrow -k > \frac{-n}{2}$, por lo que el factor más pequeño de los k factores que había antes que es $n-k+1$ vemos que es: $n - k + 1 \geq n - \frac{n}{2} + 1 \geq \frac{n}{2} \Rightarrow$

$$(1+p)^n \geq ... \geq \underbrace{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}_{k \text{ términos}} \cdot \frac{p^k}{k!} \geq \left(\frac{n}{2}\right)^k \cdot \frac{p^k}{k!} = n^k \cdot \frac{p^k}{2^k k!} = n^k \cdot C$$

$$\frac{n^\alpha}{(1+p)^n} \leq \frac{n^\alpha}{n^k \cdot C} = \frac{1}{n^{k-\alpha}} \to 0 \overset{ReglaSandwich}{\Rightarrow} SI$$

Subsucesiones

Si $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R$, definimos una subsucesión como $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, ..., x_{n_k}, ...\} : n_k < n_{k+1}$. Es decir, escojemos un conjunto de subíndices **ORDENADOS** de forma que la sucesión de subíndices escogidos sean estrictamente crecientes y formando de nuevo una sucesión más pequeña.

Ej.:

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{2, 4, 6, 8, 10, ...\} \to \{x_{n_k}\}_{n=1}^{\infty} = \{4, 8, 12, ...\}$$

Proposición

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a $l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a l $\forall$ subsucesión.

Demostración:

- "$\Leftarrow$": Casi obvio porque $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es una subsucesión de sí misma
- "$\Rightarrow$": Sea $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión, entonces:

$$\text{Sea } \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |x_n - l| < \varepsilon$$

  Como $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ es estrictamente creciente, entonces:

$$\exists k_0 : n_{k_0} \geq n_0 \Rightarrow \forall k \geq k_0 : n_k > n_{k_0} > n_0 \Rightarrow |x_{n_k} - l| < \varepsilon \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_{n_k} = l$$

Proposición

Supongamos que tenemos una sucesión de números reales $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$, entonces:

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} \text{ es NO acotada superiormente} \Leftrightarrow \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{R} : \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty$$

Y de forma análoga se cumple para acotadas inferiormente y $\lim = -\infty$.

<u>Demostración</u>:

- "$\Leftarrow$": si $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} : \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty$, entonces:

  $$\forall M > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall k \geq n_0 : x_{n_k} > M \Rightarrow \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ no acotada superiormente}$$

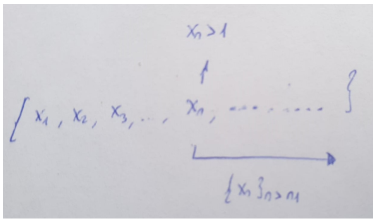
  Si lo fuese, entonces: $\exists K > 0 : x_n < K : \forall n \in \mathbb{N}$ y por tanto $K > x_{n_k} : \forall k \in \mathbb{N} \Rightarrow \#$.

- "$\Rightarrow$":

  Para entender lo que vamos a hacer, si no es acotada superiormente entonces tenemos que dado una $M > 0 : \exists n_0 : \forall n \geq n_0 : x_n > M$, por ejemplo vemos que para $M = 1, \exists n_1 : \forall n \geq n_1 : x_{n_1} > 1$, para $M = 2, \exists n_2 : \forall n \geq n_2 : x_{n_2} > 2$, ..., dado $M = k \in \mathbb{N}, \exists n_k : \forall n \geq n_k : x_{n_k} > k$. Es decir, en el fondo PARECE que estamos construyendo una subsucesión donde cada término es mayor que un natural, pero no es del todo correcto porque no nos aseguramos de que el conjunto de los subíndices que hemos escogido sean estrictamente crecientes.

  Sea $M = 1$, entonces:

  $$\exists n_1 \in \mathbb{N} : x_{n_1} > 1 \Rightarrow \{x_n\}_{n>n_1} \text{ no acotada sup.}$$

  Y este conjunto no estaría acotado porque si no toda la sucesión sería acotada superiormente y estamos suponiendo que no.

  Ahora, sea $M = 2$:

  $$\exists n_2 > n_1 : x_{n_2} > 2 \Rightarrow \{x_n\}_{n>n_2} \text{ no acotado sup.}$$

  Es decir, hemos buscado este n_2 dentro del intervalo que me quedaba más alla de x_{n_1}

  Ahora, sea $M = 3$:

  $$\exists n_3 > n_2 : x_{n_3} > 3 \Rightarrow \{x_n\}_{n>n_3} \text{ no acotado sup.}$$

  Por inducción se demuestra que $M = k \in \mathbb{N} : \exists n_k > n_{k-1} : x_{n_k} > k$. Por tanto, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \infty$ porque dado $M > 0 : \exists k_0 \in \mathbb{N} : k_0 > M \Rightarrow x_{n_{k_0}} > k_0 > M \overset{k \geq k_0}{\Rightarrow} x_{n_k} > k > k_0 \geq M$

Teorema de Bolzano-Weirstrass

Supongamos que tenemos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset R$ acotada, entonces $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergente.

<u>Demostración</u>:

Supongamos que $a \leq x_n \leq b : \forall n \in \mathbb{N}$, utilizamos la siguiente notación: si J es un intervalo y $n \in \mathbb{N}$, llamamos $I(J, n) = \{m \in \mathbb{N} : m > n : x_m \in J\}$, es decir, son los índices mayores que n de manera que x_m pertenece al conjunto.

En el fondo lo que vamos a hacer es partir el intervalo en dos, quedando dos posibles intervalos J. Entonces, en uno de esos dos, el conjunto $I(J,n)$ es infinito, es decir, hay infinitos índices. Y la construcción la vamos a hacer por inducción.

Sea $n_1 = 1$, para $J = [a, \frac{a+b}{2})$ o $J = (\frac{a+b}{2}, b]$ el conjunto $I(J,1)$ es infinito, porque si no el conjunto formado por los índices de ambas posibilidades sería finito y hay infinitos índices. Llamamos J_1 a ese intervalo y llamamos n_2 al primer elemento de $I(J_1, n_1)$, por lo que: $n_2 > n_1 = 1$.

Hacemos de nuevo lo mismo en J_1 tomándolo como nuevo intervalo del enunciado y dividiendo J_1 por su punto medio, quedando dos intervalos. En alguna de las dos mitades $I(J, n_2)$ es infinito. A esa mitad la llamamos J_2 y llamamos n_3 al primer elemento del conjunto $I(J_2, n_2)$ y por eso: $n_3 > n_2 > n_1 = 1$. Y de nuevo partimos J_2 por la mitad y seguimos...

Es decir, que por inducción construimos $\forall k \in \mathbb{N} : J_k \subset J_{k-1}$ donde $I(J_{k-1}, n_{k-1})$ es infinito y n_k es el primer elemento del mismo y por tanto $n_k > n_{k-1}$, por inducción se demuestra fácil.

Con ello hemos construido una familia de intervalos encajados $\{J_k\}_{k=1}^{\infty}$ y por el **teorema de intervalos encajados de Cantor** sabemos que $\bigcap_{k=1}^{\infty} J_k \neq \emptyset$ y de hecho es un único número: $\bigcap_{k=1}^{\infty} J_k = \{\varphi\}$ porque la longitud de J_k es $l(J_k) = \frac{b-a}{2^k} \xrightarrow{k\to\infty} 0$

Veamos que $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ converge a φ ya que $\varphi \in J_k : \forall k$ y por construcción, como n_k es el primer elemento de $I(J_{k-1}, n_{k-1})$, entonces:

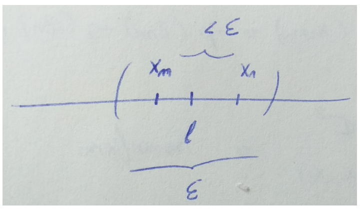
$$x_{n_k} \in J_{k-1} \wedge \varphi \in J_{k-1} \Rightarrow |x_{n_k} - \varphi| \leq \frac{b-a}{2^{k-1}} \Rightarrow \text{Sea } \varepsilon > 0 : \exists k_0, \forall k \geq k_0 : |x_{n_k} - \varphi| \leq \frac{b-a}{2^{k-1}} < \varepsilon$$

Sucesiones de Cauchy

Observación previa:

Si tenemos una sucesión de números reales $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ que converge a $l \in \mathbb{R}$, entonces $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}$. De este modo sabemos que $n, m \geq n_0$ entonces $|x_n - x_m| = |x_n - l + l - x_m| \leq |x_n - l| + |x_m - l| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Es decir, como ambos elementos de la sucesión están dentro del intervalo de centro el límite, la distancia entre ambos es menor que ese intervalo.



Sucesiones de Cauchy

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ una sucesión se dice que es de Cauchy si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 : |x_n - x_m| < \varepsilon$$

Y viendo lo anterior, acabamos de demostrar que una sucesión convergente es de Cauchy:

$$\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \xrightarrow{n\to\infty} l \Rightarrow \text{ es de Cauchy}$$

Completitud de $\mathbb{R}$

Observación previa:

Si una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ es de Cauchy, entonces es acotada[19].

Demostración:

Tomamos $\varepsilon = 1 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 : |x_n - x_m| < 1$. En particular, $m = n_0$ y $n \geq n_0$:

$$|x_n| - |x_{n_0}| \leq |x_n - x_{n_0}| < 1 \Rightarrow |x_n| \leq |x_{n_0}| + 1$$

Es decir, que todos los índices mayores de n_0 están acotados por el valor $|x_{n_0}| + 1$. Ahora hay que ver los índices que no están comprendidos en la cantidad anterior: $\{|x_1|, \cdots, |x_{n_0-1}|\}$, pero como este es un conjunto finito, también está acotado por lo que escogiendo el máximo de ambas cotas, acota a todos los elementos de la sucesión.

Completitud de $\mathbb{R}$

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ una sucesión[20] de Cauchy, entonces $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente.

Demostración:

Como la sucesión es de Cauchy, es acotada y entonces tiene una subsucesión convergente por el Teorema de Bolzano-Wiestrass, es decir, $\exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergente a $l \in \mathbb{R}$. Esto implica que: dado $\varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} : k \geq k_0 : |x_{n_k} - l| < \varepsilon$.

Veamos ahora que $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a l:

Dado $\varepsilon > 0, \exists k_0 \in \mathbb{N} : k \geq k_0 : |x_{n_k} - l| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ y como es de Cauchy $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall m, n \geq n_0 : |x_n - x_m| < \dfrac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \exists k > k_0 : n_k \geq n_0$$

Porque si no todos los subíncides posteriores a k_0 de la subsucesión estarían acotados y entonces no serían estrictamente crecientes. Entonces, si $n \geq n_0$, medimos esta distancia:

$$|x_n - l| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - l| \leq \underbrace{|x_n - x_{n_k}|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{|x_{n_k} - l|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} < \varepsilon$$

Porque como $k \geq k_0 \Rightarrow |x_{n_k} - l| < \frac{\varepsilon}{2}$ y como $n, n_k \geq n_0 \Rightarrow |x_n - x_{n_k}| < \frac{\varepsilon}{2}$

Por tanto, dado un $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} : k \geq k_0 \Rightarrow n \geq n_0 : |x_n - l| < \varepsilon$

Límite inferior y superior de una sucesión

Sea $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión acotada y denotamos $N \in \mathbb{N}$, entonces llamamos:

$$a_N = \inf\{x_n : n \geq \mathbb{N}\} \Rightarrow \{a_N\} \uparrow$$

$$b_N = \sup\{x_n : n \geq \mathbb{N}\} \Rightarrow \{b_N\} \downarrow$$

Es fácil ver la monotonía de ambas, pero el siguiente resultado es esencial:

$$\forall n \in \mathbb{N} : a_1 \leq a_N \leq b_N \leq b_1$$

Lo que implica que al ser sucesiones monótonas y ser acotadas, el límite de ambas existen y es precisamente lo que llamamos **límite inferior y superior de una sucesión**:

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} a_N$$

$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} b_N$$

[19] Pero el recíproco no es cierto!!!, puede ser acotada pero no convergente

[20] Este resultado es falso en los números $\mathbb{Q}$

Proposición

Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge si y sólo si su límite superior e inferior coinciden y ambos son el límite de la sucesión.

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \Leftrightarrow \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = l$$

Demostración:

- "$\Leftarrow$":

$$\forall N \in \mathbb{N} : a_N \leq x_N \leq b_N \Rightarrow a_N \xrightarrow{n\to\infty} l \leq x_N \leq n_N \xrightarrow{n\to\infty} l \Rightarrow x_N \xrightarrow{n\to\infty} l$$

- "$\Rightarrow$":

  Sea $l = \lim x_n$, entonces:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |x_n - l| < \varepsilon \Rightarrow l-\varepsilon < x_n < l+\varepsilon \Rightarrow l-\varepsilon \leq a_{n_0} \leq b_{n_0} \leq l+\varepsilon \overset{N\geq n_0}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow l-\varepsilon \leq a_{n_0} \leq a_N \leq b_N \leq b_{n_0} \leq l+\varepsilon \Rightarrow l-\varepsilon \leq a_{n_0} \leq a_N \leq l \leq b_N \leq b_{n_0} \leq l+\varepsilon \Rightarrow \begin{cases} |a_N - l| < \varepsilon \\ |b_N - l| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_N = l = \lim_{n\to\infty} b_N$$

Proposición

Si un número es mayor que el límite superior de una sucesión, entonces (salvo una cantidad finita de índices) se tiene que $x_n < s$.

Demostración:

Si tenemos que $\lim\{b_n\}\downarrow = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |b_n - l| < \varepsilon$ y en este caso podemos decir que $b_n - l < \varepsilon$. Ahora si vemos que $s > l$, entonces si escogemos $\varepsilon = |s-l| = s-l$, entonces por la defininción de límite debe ocurrir que $b_n - l < s - l \Rightarrow b_n < s$ a partir de un cierto n_0.

Proposición

Para cualquier subsucesión de x_n si converge su límite se encuentra entre ambos límites superior e inferior.

$$\exists x_{n_k} \xrightarrow{n\to\infty} x_0 \Rightarrow \liminf x_n \leq x_0 \leq \limsup x_n$$

Demostración:

$$\forall k \in \mathbb{N} : a_{n_k} \leq x_{n_k} \leq b_{n_k} \Rightarrow a \leq x_0 \leq b$$

Proposición

Para cualquier sucesión existe una subsucesión que converge al límite inferior y otra subsucesión que converge al límite superior.

$$\exists \{x_{n_k}\}, \{x_{n_q}\} \subset \{x_n\} : x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} \liminf x_n \text{ y } x_{n_q} \xrightarrow{q\to\infty} \limsup x_n$$

Con ello queda probado que si $L = \{x_0 \in \mathbb{R} : \exists \{x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} x_0\}\}$, entonces podemos redefinir ambos límites como:

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \inf L$$
$$\limsup_{n\to\infty} x_n = \sup L$$

Demostración:

Puede parecer que ya está demostrado en la propia definición de las sucesiones a_N y b_N, pero en estos casos los índices no están ordenados, por lo que no son subsucesiones. Si suponemos que a es el límite de inferior, entonces sea $\varepsilon_1 = 1$ ocurre que $\exists n_1 \in \mathbb{N} : a_1 \leq x_{n_1} < a + 1$ y por inducción podemos construir la siguiente sucesión: sea $\varepsilon_k = \frac{1}{k} : \exists n_k > n_k - 1 : a_{n_{k-1}} \leq x_{n_k} \leq a_{n_{k-1}} + \varepsilon_k$, por lo que se construye $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ de manera que $a_{n_{k-1}} \leq x_{n_k} \leq a_{n_{k-1}} + \frac{1}{k}$ que vemos que por la regla del sandwich tiende a lo dicho.

Límites en el exponente

Paso al exponente

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión que converge a x y $a > 0$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ y } a > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x$$

Demostración:

Veamos primero que si $\{x_n\}$ es monótona, entonces esto ocurre:

$$\{x_n\} \uparrow \Rightarrow a^{x_n} < a^{x_{n+1}} < a^x \Rightarrow \{a^{x_n}\} \uparrow$$

Además como $a^x > a^{x_n} : \forall n \in \mathbb{N}$, entonces está acotada, por lo que existe el supremo y además este es el límite de dicha sucesión. En consecuencia, por ser cota superior $a^x \geq \xi$ donde $\xi = \sup\{a^{x_n}\}$. Por la definición que se dió de exponencial real, el supremo de a^{x_n} es a^x por ser $x_n \in \mathbb{R}$.

Visto el caso de una función monótona, para una función cualquiera se tiene que como $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \Rightarrow a_N \xrightarrow{n\to\infty} x \xleftarrow{n\to\infty} b_N$ siendo ambos los límites superiores e inferiores descritos en el apartado anterior, así que como $\{b_N\} \downarrow$ y $\{a_N\} \uparrow$:

$$a_N \leq x_N \leq b_N \Rightarrow a^{a_N} \xrightarrow{n\to\infty} a^x \leq a^{x_N} \leq a^{b_N} \xrightarrow{n\to\infty} a^x \Rightarrow a^{x_N} \xrightarrow{N\to\infty} a^x$$

Raíces de base variable

Sea $x_n \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, si $r \in \mathbb{Q}$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x : \forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq 0 \text{ y } r \in \mathbb{Q} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n^r = x^r$$

Demostración:

Comenzamos con el mismo razonamiento que para la demostración anterior, si $\{x_n\} \uparrow$ que converge a x y $m \in \mathbb{N}$, entonces:

$$x_n \leq x_{n+1} \leq x \Rightarrow \sqrt[m]{x_n} \leq \sqrt[m]{x_{n+1}} \leq \sqrt[m]{x} \Rightarrow \{\sqrt[m]{x_n}\} \uparrow$$

Como es creciente y está acotada por $\sqrt[m]{x}$, su supremo existe y es el límite de dicha sucesión, en consecuencia, por ser cota superior $\xi \leq \sqrt[m]{x}$ donde $\xi = \sup\{\sqrt[m]{x_n}\}$. Veamos que el caso "$<$" no es posible:

$$\sqrt[m]{x_n} \leq \xi < \sqrt[m]{x} \Rightarrow x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \leq \xi^m < x \xrightarrow{n\to\infty} x \Rightarrow \xi^m \xrightarrow{n\to\infty} x \Rightarrow \xi^m = x \Rightarrow \xi = \sqrt[m]{x}$$

En consecuencia, como $\{a_N\} \uparrow$ y $\{b_N\} \downarrow$, podemos acotar a cualquier sucesión convergente por esas dos y así demostrarlo para $\{x_n\}$ cualquiera que converja a x.

$$a_N \leq x_N \leq b_N \Rightarrow \sqrt[m]{a_N} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[m]{x} \leq \sqrt[m]{x_n} \leq \sqrt[m]{b_N} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[m]{x} \Rightarrow \sqrt[m]{x_N} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt[m]{x}$$

De ello se puede deducir, contando con la demostración anterior que si $m \in \mathbb{Q}$ entonces se cumple la proposición dada (contando con lo demostrado en la proposición anterior a este apartado).

Exponencial de base variable

Esta proposición aúna las dos anteriores, diciendo que si $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ y $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$, entonces:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0 \text{ y } \lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n^{x_n} = a^x$$

<u>Demostración</u>:

Para esta demostración necesitamos elaborar un poco el terreno la demostración final. Primero de todo tenemos que si $\lim_{n\to\infty} a_n = a \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n^x = a^x$, cuya demostración utilizando las técnicas y resultados anteriores es trivial. Es fácil demostrar, teniendo en cuenta la definición de exponencial real que se dió, que si $x > 0 \Rightarrow a^x = \sup\{b^x : b < a\} = \inf\{c^x : a < c\}$ y del mismo modo que si $x < 0 \Rightarrow a^x = \inf\{b^x : b < a\} = \sup\{c^x : a < c\}$. Del mismo modo, es sencillo demostrar por casos que si $\{x_n\}$ es monótona convergente a x y a_n es monótona convergente a a, entonces $\lim_{n\to\infty} a_n^{x_n} = a^x$ con lo que basándonos en estos resultados tenemos que contando como z_N la sucesión que tiende al límite inferior y y_N la del superior:

$$z_N \leq a_N \leq y_N \Rightarrow z_N^{z'_n} \leq a_N^{z'_n} \leq a_N^{x_n} \leq a_N^{y'_n} \leq y_N^{y'_n} \Rightarrow z_N^{z'_n} \xrightarrow{n\to|\infty} a^x \leq a_N^{x_N} \leq y_N^{y'_n} \xrightarrow{n\to|\infty} a^x \Rightarrow a_N^{x_N} \xrightarrow{n\to|\infty} a^x$$

SERIES NUMÉRICAS

Este concepto está relacionado con la suma de infinitos números. Es necesario introducir (como en la mayoría de conceptos que tratan el infinito) el concepto de límite porque tal y como hemos definido la operación de la suma solo podemos sumar una cantidad finita de números, tan grande como queramos, pero al fin y al cabo finita, es decir:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + \cdots + x_n$$

Como nosotros necesitamos que esta cantidad sea infinita, basta con calcular la suma hasta n y después pasar al límite, porque si que sabemos calcular el límite de sucesiones y cada x_n sería la suma hasta n de la expresión.

Dada una sucesión de números reales $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ vamos a definir **la serie** asociada a la sucesión, que denotaremos por $\sum_{i=1}^{\infty} x_i$, como una nueva sucesión, pero de las sumas parciales, es decir:

$$\{s_n\}_{n=1}^{\infty} : s_n = x_1 + x_2 + \ldots x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Por tanto, formalmente hablando no vamos a decir que la suma infinita converge a nada, sino que vamos a decir que:

$$\exists \lim_{n\to\infty} s_n = \exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k$$

Observaciones

Las series pueden "empezar" en $n = 0$, $n = 2$ o $n = \gamma$ porque al fin y al cabo si la serie converge, empezar un poco más adelante no es tan importante puesto que la suma hasta ese índice de comienzo será finita y como la que hemos escogido será convergente, la suma de ambas cantidades será finita, luego la sucesión desde el índice inicial es convergente en consecuencia.

Ejemplo:

Tomamos la sucesión $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$ de forma que:

$$s_n = \frac{1}{2^0} + \frac{1}{2^1} + \ldots + \frac{1}{2^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$$

Calculamos ahora la suma finita hasta n para conocer el término general de la sucesión s_n:

$$s_n = \frac{a}{2^0} + \frac{a}{2^1} + \ldots + \frac{a}{2^n} = \frac{1 - \frac{a}{2^n} \cdot \frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)$$

Luego en definitiva tenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} 2\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) = 2$$

Criterios de convergencia

En ocasiones será sencillo incluso calcular el valor concreto del límite de convergencia de una serie, pero en general puede ser muy complicado y enrevesado. En su lugar, optaremos por determinar cuando una serie es o no convergente para que en caso de requerirlo perdamos nuestro tiempo en calcular el límite en caso de que exista (puesto que existen métodos matemáticos para aproximar o vislumbrar dicho límite).

Teorema

Si la serie es convergente, entonces la sucesión de los términos de la sucesión tiende a 0.

$$\sum^{\infty} x_n \text{ es convergente} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

Lo que no quiere decir que la sucesión de sumas parciales tienda a 0, ni que el recíproco sea cierto.

Demostración:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ convergente } \Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} s_n = L : s_n = x_1 + x_2 + \ldots x_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

De este modo, si tomamos estas dos sucesiones se verifica que:

$$\begin{cases} s_n \to L \\ s_{n-1} \to L \end{cases} \Rightarrow x_n = s_n - s_{n-1} \xrightarrow{n\to\infty} L - L = 0$$

Ejemplos:

1. $\sum n = 1 + 2 + 3 + \ldots$ no converge pues su $x_n = n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} +\infty \neq 0 \Rightarrow \sum n$ es divergente

2. $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n, s_n = 1-1+1-1+\ldots+(-1)^n = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ impar} \\ 1 \text{ si } n \text{ par} \end{cases} \Rightarrow$ no es convergente

Contraejemplo para el recíproco:

Tomamos de ejemplo la serie $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ llamada la serie armónica. Esta serie verifica que:

$$s_n = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots\frac{1}{n} \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : s_n > 0$$

$$\{s_n\}_{n=1}^{\infty} \uparrow \Rightarrow 0 < s_n < s_{n+1} : \forall n \in \mathbb{N}$$

Cuando desarrollamos los sucesivos términos tenemos las siguientes desigualdades:

$$\begin{cases} s_1 = 1 \\ s_2 = 1+\frac{1}{2} \\ s_3 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3} \\ s_4 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} > \frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4} = 1 \\ \vdots \\ s_8 = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8} > 1+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} = 1+\frac{1}{2} \\ \vdots \\ s_{16} = 1+\frac{1}{2}+\ldots\frac{1}{16} > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \\ \vdots \\ s_{2^5} = s_{2^4}+\frac{1}{2^4+1}+\ldots\frac{1}{2^4+2^4} > 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} \end{cases}$$

Luego no es descabellado pensar que la posible regla de inducción fuese:

$$s_{2^n} > 1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2} = 1+\frac{n-2}{2}$$

Procedemos ahora a demostrarlo por inducción:

$$s_{2^{n+1}} = s_{2^n}+\frac{1}{2^n+1}+\ldots+\frac{1}{2^n+2^n} \overset{HI}{>} 1+\frac{n-2}{2}+\frac{1}{2^{n+1}}+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}} = 1+\frac{n-2}{2}+\frac{2^n}{2^{n+1}} = 1+\frac{n-1}{2}$$

Por tanto:

$$\lim_{n\to\infty} s_{2^n} = +\infty$$

Pero $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ es monótona creciente $\Rightarrow \forall k, \exists n : s_k > s_{2^n}$, por tanto, $\lim_{n\to\infty} s_n = +\infty$; luego $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n}$ es divergente.

Criterio de Cauchy

Decimos que $\sum^{\infty} x_n$ es convergente si y solo si se cumple el criterio de Cauchy para las sumas parciales porque al fin y al cabo son sucesiones en esencia.

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N : |s_n - s_m| < \varepsilon$$

Pero en este caso esto quiere decir que:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq N : \left|\sum_{m+1}^{n} x_k\right| < \varepsilon$$

Corolario:

Una consecuencia importante de este criterio es que es posible que tengamos a veces series con números positivos y negativos, para resolver ese problema tenemos que:

$$\sum_{1}^{\infty}|x_n| \text{ converge} \Rightarrow \sum_{i}^{\infty} x_n \text{ converge}$$

Pero el recíproco no es cierto.

Demostración:

Si la serie en valor absoluto converge, entonces

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n > m > N \Rightarrow |\sum_{m+1}^{n} |x_k| < \varepsilon$$

Pero es fácil ver la siguiente desigualdad:

$$\left|\sum_{m+1}^{n} x_k\right| \leq \sum_{m+1}^{n} |x_k| < \varepsilon \overset{Cauchy}{\Rightarrow} \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ es convergente}$$

Como contraejemplo ejemplo para el recíproco se tiene la serie armónica alternada: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ que converge a $\ln(2)$, pero $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ que es la serie armónica diverge.

Criterio de comparación

Si tenemos dos sucesiones de forma que $0 \leq x_n \leq y_n : \forall n \geq K$, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ converge}$$

Y de modo análogo se tiene que si

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ diverge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} y_n \text{ diverge}$$

Demostración:

Si la serie es convergente, entonces ocurre que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M \in \mathbb{N} : n \geq m \geq M \Rightarrow \sum_{m+1}^{n} y_k < \varepsilon$$

Por tanto, si escogemos $M' = \text{mín}\{M, K\}$ entonces para $n > m \geq M'$ ocurre que:

$$0 \leq \sum_{m+1}^{n} x_n \leq \sum_{m+1}^{n} y_n < \varepsilon \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ es convergente}$$

Criterio de comparación en el límite

Supongamos que tenemos dos sucesiones que verifican $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ de forma que: $x_n, y_n \geq 0 : \forall n \geq n_0$ y cuyo límite existe:

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$$

Entonces ocurre que:

- $0 < r < \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} y_n \text{ converge}$$

- $r = 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} y_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ converge}$$

- $r = \infty$

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ converge} \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} y_n \text{ converge}$$

Demostración:

Suponiendo que el límite es $r \neq 0$, entonces por la definición se verifica que:

$$\varepsilon = \frac{1}{2}r > 0 \Rightarrow \exists K' \in \mathbb{N} : n \geq K' \Rightarrow |\frac{x_n}{y_n} - r| < \frac{1}{2}r : n \geq K' \Leftrightarrow \frac{1}{2}r < \frac{x_n}{y_n} < \frac{3}{2}r : n \geq K'$$

Si tomamos $\tilde{K} = \text{máx}\{K, K'\}$, entonces:

$$n \geq \tilde{K} \Rightarrow 0 < \frac{1}{2}ry_n < x_n < \frac{3}{2}ry_n$$

Supongamos en primer lugar que Σy_n es convergente, entonces:

$$\sum \frac{3}{2}y_n \text{ convergente} \overset{\text{Comparación}}{\Rightarrow} \sum x_n \text{ converge}$$

Por otro lado, si $\sum x_n$ converge, entonces:

$$\sum x_n \text{ convergente} \overset{\text{Comparación}}{\Rightarrow} \sum \frac{1}{2}y_n \text{ converge} \Rightarrow \sum y_n \text{ converge}$$

Supongamos ahora que $r = 0$, entonces:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists K' : n \geq K' \Rightarrow |\frac{x_n}{y_n}| < \varepsilon$$

De nuevo, tomando $\tilde{K} = \text{máx}\{K, K'\}$ y $n \geq \tilde{K}$, entonces:

$$0 < \frac{x_n}{y_n} < \varepsilon \Rightarrow 0 < x_n < \varepsilon y_n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum y_n \text{ converge } \Rightarrow \Sigma x_n \text{ converge}$$

Convergencia absoluta y condicional

Diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge absolutamente o es absolutamente convergente si la serie de los valores absolutos es convergente, es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ absolutamente convergente} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \text{ converge}$$

Diremos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge condicionalmente o es condicionalmente convergente si no es absolutamente convergente, es decir:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ condicionalmente convergente} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n| \text{ diverge pero } \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ converge}$$

Criterios de convergencia absoluta

- **Criterio de la raíz**:

  Supongamos que tenemos una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, entonces:

  - Si $\exists r \in (0,1) : \forall n \geq K : |x_n|^{\frac{1}{n}} \leq r$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ abs. convergente.
  - Si $\exists K \in \mathbb{N} : \forall n \geq K : |x_n|^{\frac{1}{n}} \geq 1$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ divergente.

  En la práctica, utilizamos su corolario para poder determinar la convergencia en las series:

$$\exists r \in \mathbb{R} : r = \lim_{n\to\infty} |x_n|^{\frac{1}{n}} \begin{cases} 0 \leq r < 1 & \Rightarrow \sum x_n \text{ abs convergente} \\ r > 1 & \Rightarrow \sum x_n \text{ divergente} \\ r = 1 & \Rightarrow ??? \end{cases}$$

- **Criterio del cociente**:

  Supongamos que tenemos una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n : x_n \neq 0 : \forall n \in \mathbb{N}$ de forma que:

  - $\exists r \in \mathbb{R} : 0 < r < 1 : \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq r : \forall n \geq K \Rightarrow \sum x_n$ converge absolutamente
  - $\exists r \in \mathbb{R} : \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \geq r : \forall n \geq K \Rightarrow \sum x_n$ diverge

  En la práctica, utilizamos su corolario para poder determinar la convergencia en las series:

$$\exists r \in \mathbb{R} : r = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \Rightarrow \begin{cases} 0 < r < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ es convergente} \\ r > 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ es divergente} \\ r = 1 \Rightarrow ??? \end{cases}$$

<u>Demostración</u>:

- Criterio de la raíz:

  El primer punto del criterio es equivalente a decir que $|x_n| \leq r^n : \forall n \geq K$, pero ocurre que:

$$0 \leq r < 1 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} r^n \text{ es convergente} \overset{\text{Comparación}}{\Rightarrow} \Sigma|x_n| \text{ es convergente}$$

  El segundo punto es trivial, porque:

$$|x_n|^{\frac{1}{n}} \geq 1 : \forall n \geq K \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n| \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ es divergente}$$

- Criterio del Cociente:

  Para empezar, si consideramos el primer punto tenemos que $|x_{n+1}| \leq r|x_n| : \forall n \geq K$, luego vemos que para los sucesivos términos:

$$\begin{cases} |x_{k+1}| \leq r|x_k| \\ |x_{k+2}| \leq r|x_{k+1}| \leq r^2|x_k| \\ \vdots \\ |x_{k+m}| \leq r^m|x_k| : \forall m = 0, 1, 2, \ldots \end{cases}$$

  Luego podemos reescribir que:

$$|x_{k+m}| \leq r^{k+m} \underbrace{\frac{|x_k|}{r^k}}_{a} : \forall m = 0, 1, 2, \ldots$$

Y si consideramos la sucesión a partir del término $k - esimo$ tenemos que:

$$|x_n| \leq ar^n : \forall n \geq k$$

Pero $\sum_{n=1}^{\infty} ar^n$ es convergente, y por el criterio de comparación $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|$ es convergente
Si consideramos ahora el segundo punto tenemos que $|x_{n+1}| \geq |x_n| : \forall n \geq K$, luego entonces:

$$\Rightarrow |x_n| \geq |x_k| : \forall n \geq K : x_n \not\to 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ diverge}$$

Criterio de la integral

Supongamos que tenemos $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ que verifica que $f(x) \geq 0$, que f es decreciente y que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Entonces decimos que:

$$\int_0^{\infty} f(x)\ dx \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ converge}$$

La demostración y explicación de este resultado se encuentra en el tema dedicado a las integrales, concretamente en la sección de integrales impropias.

Criterio de Leibnitz

Supongamos que tenemos una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ que verifica:

- $x_n > 0$
- $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \downarrow$
- $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$

Entonces se cumple que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n \text{ es convergente}$$

<u>Demostración</u>:

Sea $s_n = x_1 - x_2 + \ldots + (-1)^{n+1} x_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} x_k$. Vamos a tomar la sucesión de los pares:

$$s_{2n} = \underbrace{x_1 - x_2}_{\geq 0} + \underbrace{x_3 - x_4}_{\geq 0} + \ldots + \underbrace{x_{2n-1} - x_{2n}}_{\geq 0} \geq 0$$

Además, también se verifica que:

$$s_{2n+2} = s_{2n} + \underbrace{x_{2n+1} - x_{2n+2}}_{\geq 0} \geq s_{2n} \Rightarrow \{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty} \uparrow$$

Incluso es acotada:

$$s_{2n} = x_1 \underbrace{- x_2 + x_3}_{\leq 0} \underbrace{- x_4 + x_5}_{\leq 0} - \underbrace{\ldots + x_{2n-1}}_{\leq 0} - x_{2n} \leq x_1 - x_{2n} \leq x_1$$

Como es una sucesión acotada y creciente:

$$\exists L = \lim_{n\to\infty} s_{2n}$$

Ahora vamos a ver las sucesión de los impares:

$$s_{2n+1} = \underbrace{x_1 - x_2}_{\geq 0} + \underbrace{x_3 - x_4}_{\geq 0} + \ldots + \underbrace{x_{2n-1} - x_{2n}}_{\geq 0} + x_{2n+1} \geq 0$$

Del mismo modo:

$$s_{2n+3} = s_{2n+1} \underbrace{-x_{2n+2} + x_{2n+3}}_{\leq 0} \leq s_{2n+1} \Rightarrow \{s_{2n+1}\}_{n=1}^{\infty} \downarrow$$

Y también ocurre que:

$$s_{2n+1} \geq 0 \Rightarrow \exists L' = \lim_{n\to\infty} s_{2n+1}$$

En consecuencia, probamos ahora que ambos límites coinciden:

$$s_{2n} = s_{2n-1} - x_{2n} \Rightarrow L = L' + 0 \Rightarrow L = L'$$

Por tanto, ahora podemos concluir que entonces el límite de la serie es el propio L porque al ser límite de la subsucesión de los términos pares e impares ocurre:

$$\begin{cases} \varepsilon > 0, \exists N : \forall n \geq N \Rightarrow |s_{2n} - L| < \varepsilon \\ \varepsilon > 0, \exists N' : \forall n \geq N' \Rightarrow |s_{2n+1} - L| < \varepsilon \end{cases}$$

Si escogemos como constante $\bar{N} = \max\{N, N'\}$, entonces se tiene que cumple ambas definiciones simultáneamente:

$$n \geq \bar{N} \Rightarrow \begin{cases} |s_{2n} - L| < \varepsilon & n = 2k \\ |s_{2n+1} - L| < \varepsilon & n = 2k+1 \end{cases} \Rightarrow \forall k \geq \bar{N} : |s_k - L| < \varepsilon$$

Criterio de Condensación de Cauchy

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \downarrow$ una sucesión decreciente de términos estrictamente positivos de forma que $x_n \to 0$. Si s_n es la suma parcial de los primeros n términos de la sucesión, entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n \text{ converge } \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n} \text{ converge}$$

<u>Demostración</u>

Sea $s_n = x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, tomamos por ejemplo s_{16}:

$$s_{16} = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + \ldots + x_{16}$$

Acotamos la suma parcial superiormente:

$$s_{16} = x_1 + \underbrace{x_2 + x_3}_{\leq x_2 + x_2} + \underbrace{x_4 + x_5 + x_6 + x_7}_{\leq 4x_4} + \underbrace{x_8 + \ldots +}_{\leq 8x_8} x_{16} \leq x_1 + 2x_2 + 2^2 x_{2^2} + 2^3 x_{2^3} + x_{2^4}$$

Luego por inducción podemos concluir que:

$$s_{2^n} \leq x_1 + 2x_2 + 2^2 x_{2^2} + \ldots + 2^{n-1} x_{2^{n-1}} + x_{2^n}$$

Acotamos la suma parcial inferiormente:

$$s_{16} = x_1 + x_2 + \underbrace{x_3 + x_4}_{\geq 2x_4} + \underbrace{x_5 + x_6 + x_7 + x_8}_{\geq 4x_8} + \underbrace{x_9 + \ldots + x_{16}}_{\geq 8x_{16}} \geq x_1 + x_2 + 2x_{2^2} + 2^2 x_3 x_{2^3} + 2^3 x_{2^4} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}2x_{2^2} + \frac{1}{2}2^2x_3x_{2^3} + \frac{1}{2}2^3x_{2^4} = \frac{1}{2}(x_1 + 2x_2 + 2^2x_{2^2} + +2^3x_3x_{2^3} + +2^4x_{2^4})$$

Así que tenemos acotada por arriba y por abajo la subsucesión de los términos que son potencia de 2:

$$\frac{1}{2}(x_1 + 2x_2 + 2^2x_{2^2} + +2^3x_3x_{2^3} + +2^4x_{2^4}) \leq s_{2^4} \leq x_1 + 2x_2 + 2^2x_{2^2} + +2^3x_3x_{2^3} + +2^4x_{2^4}$$

Demostrado para todos por inducción se tiene que:

$$\frac{1}{2}(x_1 + 2x_2 + 2^2x_{2^2} + \ldots + 2^nx_{2^n}) \leq s_{2^n} \leq x_1 + 2x_2 + 2^2x_{2^2} + \ldots + 2^nx_{2^n}$$

Si consideramos la serie $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n x_{2^n}$, entonces la subsucesión de $\{s_n\}$ formada por los términos x_{2^n} está acotada por esta serie. De este modo, si esta converge, entonces la subsucesión $\{s_{2^n}\}$ está acotada y, por tanto, la sucesión $\{s_n\}$ converge. De forma análoga, si la sucesión $\{s_n\}$ converge, entonces la subsucesión $\{s_{2^n}\}$ converge y como esta acota a la serie que habíamos definido multiplicada por un medio, entonces la serie converge.

Aplicacion:

Este criterio resulta muy útil para decidir la convergencia de sucesiones en las que intervengan logaritmos, pues al tener $\ln(n)$ y sustituir $\ln(2^k)$ podemos sacar k fuera para que nos quede una expresión más sencilla.

FUNCIONES CONTINUAS

CONCEPTO DE LÍMITE

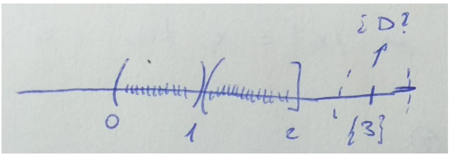
Definición: puntos de acumulación y aislados

Punto de acumulación

Sea $D \subset \mathbb{R}$ decimos que $x_0 \in \mathbb{R}$ es un **punto de acumulación de D** $\Leftrightarrow \forall \delta > 0 : \exists d \in D : d \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\{x_0\}$, es decir, si para todo entorno hay otros puntos de D; en otras palabras:

$$D \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \backslash \{x_0\}) \neq \emptyset$$

Ej.: $D = (0, 1) \cup (1, 2] \cup \{3\}$, si dejamos puesto el propio número diríamos que este punto es punto de acumulación y vemos claramente por el dibujo que no es cierto.



Por notación el conjunto de puntos de acumulación de D es D'.

Punto aislado

Si $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ y no es un punto de acumulación, entonces decimos que es un **punto aislado** de D:

$$\exists \delta > 0 : D \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \backslash \{x_0\}) = \emptyset$$

Es decir, en el ejemplo de arriba, 3 es un punto aislado. Todos los puntos de D **o son de acumulación o son aislados**.

Proposición

Sea $D \subset \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces x_0 es un punto de aumulación de D $\Leftrightarrow \exists \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D : \lim_{n \to \infty} x_n = x_0$ de manera que $x_n \neq x_0 : \forall n \in \mathbb{N}$.

Demostración:

- "$\Rightarrow$":

Como sabemos que es un punto de acumulación, entonces tomamos $\delta = \frac{1}{n} : \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $D \cap \left((x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})\backslash\{x_0\}\right) \neq \emptyset$. Esto implica que:

$$\exists x_n \in D : x_n \in \left(x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right) : x_n \neq x_0 \Rightarrow 0 \overset{x_n \neq x_0}{<} |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \overset{ReglaSandwich}{\Rightarrow} \lim_{n\to\infty} |x_n - x_0| = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} (x_n - x_0) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

- "$\Leftarrow$":

  Como sabemos que existe dicha sucesión entonces sabemos que siendo $\delta > 0$, entonces $\exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |x_n - x_0| < \delta \Leftrightarrow x_n \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ y podemos decir además que como $x_n \neq x_0$, entonces:

$$x_n \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash\{x_0\} \overset{x_n \in D}{\Rightarrow} D \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash\{x_0\}) \neq \emptyset$$

Límite de una función en un punto

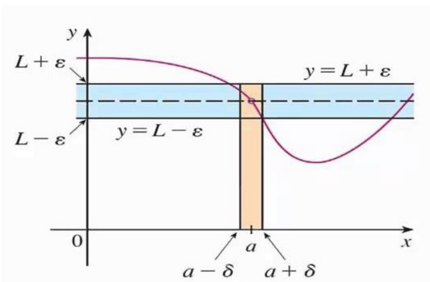
Observación previa:

El concepto intuitivo que queremos expresar es que si tenemos $D \subset R : D \neq \emptyset$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces queremos formalizar que si $x_0 \in \mathbb{R}$ y $x \in D$ y $x \sim x_0$, entonces $f(x) \sim l : l \in \mathbb{R}$.El número x_0 es un punto de acumulación[21] para que siempre tenga cerca números del conjunto.

Concepto de límite:

Sea $D \subset \mathbb{R} : D \neq \emptyset$, $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y x_0 un punto de acumulación de D, entonces decimos que $l \in \mathbb{R}$ es el límite de $f(x)$ cuando x tiende a x_0 si y solo si:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in D \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash\{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$



En otras palabras, queremos decir que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in D, 0 \overset{x \neq x_0}{<} |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Proposición

Sea $D \subset \mathbb{R}$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y x_0 un punto de acumulación de D, entonces:

1. $\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D : x_n \neq x_0 : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} l$
2. $\exists \lim_{n\to x_0} f(x)$, entonces es único.

Demostración:

[21] Es notable decir que NO tiene por qué estar en D

1. Comprobamos que se dan ambas implicaciones:

   - "$\Rightarrow$":
     Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ y $x_n \neq x_0 : \forall n \in \mathbb{N}$ y tal que $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$, veamos que $f(x_n) \xrightarrow{x_n\to\infty} l$:
     Como sabemos que l es el límite, entonces:

     $$\text{Sea } \varepsilon > 0, \text{ entonces } \exists \delta > 0 : x \in D \cap ((x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)\backslash\{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon) \Rightarrow$$

     $$\Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : x_n \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \overset{x_n \neq x_0}{\Rightarrow} x_n \in (x_0-\delta, x_0+\delta)\backslash\{x_0\} \overset{x_n \in D}{\Rightarrow}$$
     $$\Rightarrow x_n \in D \cap ((x_0-\delta, x_0+\delta)\backslash\{x_0\}) \Rightarrow f(x_n) \in (l-\varepsilon, l+\varepsilon) \Leftrightarrow |f(x_n) - l| < \varepsilon$$

   - "$\Leftarrow$": supongamos que l no es el límite:

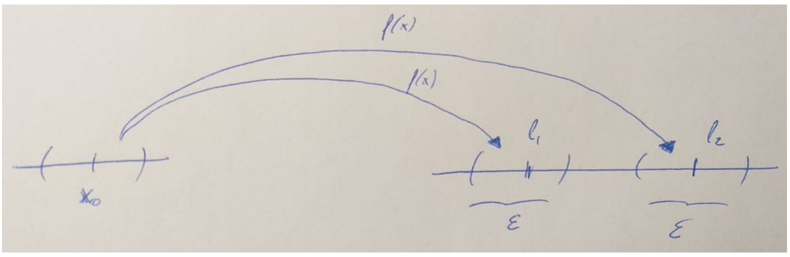
     $$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0 : \exists x \in D \cap ((x_0-\delta, x_0+\delta)\backslash\{x_0\}) : f(x) \notin (l-\varepsilon, l+\varepsilon) \Leftrightarrow |f(x) - l| > \varepsilon$$

     Entonces tomamos ahora $\delta = \frac{1}{n}$, entonces:

     $$\forall n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in D \cap \left((x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n})\backslash\{x_0\} \right) : |f(x_n) - l| > \varepsilon$$

     Entonces los números anteriores forman una sucesión que: $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D : x_n \neq x_0 :$ $\forall n \in \mathbb{N} : |x_n - x_0| < \frac{1}{n} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, pero $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty} \overset{n\to\infty}{\not\to} l \Rightarrow \#$

2. Supongamos que hay dos l_1 y l_2 que son distintos, por lo que $l_1 < l_2$, entonces:

   En el fondo no estamos haciendo más que demostrar que si dichos entornos son disjuntos no se puede cumplir porque las funciones no pueden asignar dos imágenes al mismo punto del dominio.
   Tomamos $\varepsilon = \frac{l_2 - l_1}{2}$, lo que implica que:

   $$\exists \delta_1 > 0 : x \in D \cap ((x_0-\delta_1, x_0+\delta_1)\backslash\{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in (l_1-\varepsilon, l_1+\varepsilon)$$

   $$\exists \delta_2 > 0 : x \in D \cap ((x_0-\delta_2, x_0+\delta_2)\backslash\{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in (l_2-\varepsilon, l_2+\varepsilon)$$

   Si tomamos $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces:

   $$x \in D \cap ((x_0-\delta, x_0+\delta)\backslash\{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in (l_1-\varepsilon, l_1+\varepsilon) \cap (l_2-\varepsilon, l_2+\varepsilon)$$

   Y es fácil probar que: $(l_1-\varepsilon, l_1+\varepsilon) \cap (l_2-\varepsilon, l_2+\varepsilon) \neq \emptyset$

Propiedades de los límites

Sea $D \subset \mathbb{R}$ y $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y x_0 un punto de acumulación de D. Si suponemos que $\lim_{x\to x_0} f(x) = l$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = m$, entonces:

1. $\lim_{x\to x_0}(g(x) + f(x)) = m + l$
2. $\lim_{x\to x_0}(a \cdot f(x)) = a \cdot l$
3. $\lim_{x\to x_0}(f(x) \cdot g(x)) = l \cdot m$

4. Si $m \neq 0$, entonces: $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$

Demostración:

1. Dado $\varepsilon > 0$, tenemos que encontrar un δ de manera que $|f(x) + g(x) - (l+m)| < \varepsilon$:

$$|f(x) + g(x) - (l+m)| = |f(x) - l + g(x) - m| \leq |f(x) - l| + |g(x) - m|$$

Por saber como hipótesis que los límites de ambas funciones son l y m, entonces:

$$\text{Dado } \varepsilon > 0 : \begin{cases} \exists \delta_1 > 0 : x \in D \cap ((x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1) \backslash \{x_0\}) \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists \delta_2 > 0 : x \in D \cap ((x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2) \backslash \{x_0\}) \Rightarrow |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Luego si tomamos como $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$ se tiene que se verifican ambas cosas:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| + |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2. Queremos probar que dado $\varepsilon > 0$ queremos encontrar un δ que cumpla que $|af(x) - al| < \varepsilon$:

$$|af(x) - al| = |a| \cdot |f(x) - l|$$

Como sabemos que l es el límite de $f(x)$, entonces

$$\text{Dado } \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{|a|}$$

Luego se tiene que:

$$\text{Dado } \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |a| \cdot |f(x) - l| < |a| \cdot \frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon$$

3. Sea $\varepsilon > 0$, queremos buscar un $\delta > 0$ de manera que $|f(x)g(x) - lm| < \varepsilon$:

$$|f(x)g(x) - lm| \overset{\pm f(x)m}{=} |f(x)\,(g(x) - m) + (f(x) - l)\,m| \leq |f(x)| \cdot |g(x) - m| + |m| \cdot |f(x) - l|$$

Como $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$:

$$\text{Dado } \varepsilon_0 = 1 : \exists \delta_0 : \begin{cases} 0 < |x - x_0| < \delta_0 \\ x \in D \end{cases} \Rightarrow |f(x) - l| < 1 \Rightarrow |f(x)| < |l| + 1 = M$$

Luego se tiene:

$$|f(x)| \cdot |g(x) - m| + |m| \cdot |f(x) - l| \leq M \cdot |g(x) - m| + |m| \cdot |f(x) - l|$$

Ahora tenemos dos casos:

- $m \neq 0$:
  Entonces, como l y m son ambos límites de sendas funciones:

$$\begin{cases} \exists \delta_1 > 0 : x \in D \wedge 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2|m|} \\ \exists \delta_2 > 0 : x \in D \wedge 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{2M} \end{cases}$$

Por lo tanto, sea $\delta = min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : x \in D \wedge |x - x_0| < \delta \Rightarrow M \cdot |g(x) - m| + |m| \cdot |f(x) - l| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2} + |m| \cdot \frac{\varepsilon}{2|m|} = \varepsilon$$

- $m = 0$:

$$M \cdot |g(x) - m| + |m| \cdot |f(x) - l| = M \cdot |g(x) - m|$$

Por lo que como m es límite:

$$\text{Dado } \varepsilon > 0 : \exists \delta_1 > 0 : \begin{cases} x \in D \\ 0 < |x - x_0| < \delta_1 \end{cases} \Rightarrow |g(x) - m| < \frac{\varepsilon}{M}$$

Por lo tanto, sea $\delta = min\{\delta_0, \delta_1\}$:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : x \in D \land 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow M \cdot |g(x) - m| < M \cdot \frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$$

4. Como $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}$, basta con probar que $\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{m}$. Para ello queremos probar que dado un $\varepsilon > 0$, entonces $\exists \delta > 0$ de manera que $\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{m} \right| < \varepsilon$:

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{m} \right| = \left| \frac{m - g(x)}{g(x) \cdot m} \right| = \frac{|g(x) - m|}{|g(x)| \cdot |m|}$$

Como $m \neq 0$, tomamos $\varepsilon_0 = \frac{|m|}{2}$, por lo tanto:

$$\exists \delta_0 > 0 : \begin{cases} x \in D \\ 0 < |x - x_0| < \delta_0 \end{cases} \Rightarrow |g(x) - m| < \frac{|m|}{2} \Leftrightarrow |m| - |g(x)| \leq |g(x) - m| < \frac{|m|}{2} \Rightarrow \frac{|m|}{2} < |g(x)| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{|g(x)|} < \frac{2}{|m|}$$

Con lo cual, dado $\varepsilon > 0 : \exists \delta_1 > 0 : \begin{cases} x \in D \\ 0 < |x - x_0| < \delta_1 \end{cases} \Rightarrow |g(x) - m| < \frac{\varepsilon \cdot |m|^2}{2}$, por tanto, sea $\delta = min\{\delta_0, \delta_1\}$:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \begin{cases} x \in D \\ 0 < |x - x_0| < \delta \end{cases} \Rightarrow \frac{|g(x) - m|}{|g(x)| \cdot |m|} < \frac{2}{|m|^2} \cdot |g(x) - m| < \frac{2}{|m|^2} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \cdot |m|^2 = \varepsilon$$

Definición formal de límite

Sea $D \subset \mathbb{R}$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$:

1. Si $x_0 \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación de D, decimos que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 : \exists \delta > 0 : x \in D \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \backslash \{x_0\}) \Rightarrow f(x) \geq M$$

2. Si $x_0 \in \mathbb{R}$ es un punto de acumulación de D, decimos que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 : \exists \delta > 0 : x \in D \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \backslash \{x_0\}) \Rightarrow f(x) < -M$$

3. Si $D = (a, \infty)$ y $a, l \in \mathbb{R}$ decimos que:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists M > 0 : x > M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

4. Si $D = (-\infty, a)$ y $a, l \in \mathbb{R}$ decimos que:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists M > 0 : x < -M \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

5. Si $D = (a, \infty)$, decimos que:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 : \exists k > 0 : x > k \Rightarrow f(x) > M$$

6. Si $D = (a, \infty)$, decimos que:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 : \exists k > 0 : x > k \Rightarrow f(x) < -M$$

7. Si $D = (-\infty, a)$, decimos que:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 : \exists k > 0 : x < -k \Rightarrow f(x) > M$$

8. Si $D = (-\infty, a)$, decimos que:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 : \exists k > 0 : x < -k \Rightarrow f(x) < -M$$

Hemos redefinido por tanto la definición de límite para R ampliado.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \text{ con } x_0, l \in \overline{R}$$

Proposición

Sea $x_0, l \in \overline{\mathbb{R}}$, entonces:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D : x_n \xrightarrow{n \to \infty} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} l$$

Observación

Si $x_0, l, m \in \overline{\mathbb{R}}$ y también $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ y $\lim_{x \to x_0} g(x) = m$, entonces las reglas de cálculo[22] de límites siguen siendo válidas, excepto que $\infty - \infty$, $\frac{\infty}{\infty}$, $0 \cdot \infty$ y $\frac{0}{0}$ son **indeterminaciones**.

CONCEPTO DE FUNCIÓN CONTINUA

Continuidad de una función

Sea $D \subset \mathbb{R}$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in D$, entonces decimos que:

$$f \text{ es continua en } x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$$

Para decir que es continua en un conjunto, entonces decimos que:

$$f \text{ es continua en } A \Leftrightarrow f \text{ es continua en } x_0 : \forall x_0 \in A$$

Es decir, ahora no excluimos del intervalo al propio x_0 de la condición.

[22] Suma de límites, producto, diferencia...

Proposición

Sea $D \subset \mathbb{R}$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y sea $x_0 \in D$ un punto de acumulación de D, entonces:

1. f es continua en $x_0 \Leftrightarrow \text{lím}_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$
2. f es continua en $x_0 \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D : x_n \xrightarrow{n \to \infty} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} f(x_0)$

Demostración:

1.
   - "$\Rightarrow$": inmediato porque si todos los números de ese entorno van a parar a x_0, entonces esos mismos puntos menos x_0 van a parar a $f(x_0)$, luego cumple la definición de límite.
   - "$\Leftarrow$":

     $$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : x \in D \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \backslash \{x_0\}) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

     Es decir, partiendo de que es el límite se cumple que todos los números en el intervalo cumplen la definición de función continua menos el x_0, por lo tanto vamos a ver que ocurre en ese caso:

     $$x = x_0 \Rightarrow |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon \Rightarrow \text{ también lo verifica}$$

2. Es también inmediata porque ya demostramos que para la definición de límite se cumplía lo de las sucesiones convergentes al mismo, pero añadíamos que la condición era que $x \neq x_0$ por lo que si tomamos la sucesión con $x = x_0$ entonces es fácil ver que se verifica la convergencia de sucesiones hacia $f(x_0)$.

Observación

En la caracterización de continuidad que acabamos de hacer hemos pedido dos cosas, que $x_0 \in D$ y que sea punto de acumulación, pero si $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in D$ y NO es un punto de acumulación, entonces según la definición que hemos dado $f(x_0)$ SIEMPRE ES CONTINUA[23].

Proposición

Sea $D \subset \mathbb{R}$ y $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in D$ un punto de acumulación de D, entonces:

1. f, g continuas en $x_0 \Rightarrow f + g, a \cdot f, f \cdot g, \frac{f}{g}$ siempre son continuas[24] en x_0
2. El conjunto de funciones continuas en D, que se expresa como $C(D)$, es un espacio[25] vectorial.
3. Los polinomios, es decir, $f(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i : x \in D \wedge a_i \in \mathbb{R}$ son siempre funciones continuas.

Demostración:

1. Sale de las propiedades de los límites:

   $$\lim_{x \to x_0} (f(x)g(x)) = \lim_{x \to x_0} f(x) \cdot \lim_{x \to x_0} g(x) \Rightarrow f \cdot g \text{ continua en} D$$

   El resto igual

[23] En el fondo porque para cualquier intervalo de radio ε cuyo centro es su propia imagen, siempre hay puntos que vayan de un intervalo a otro porque él es el centro de su propio intervalo de radio δ

[24] Siendo $g(x) \neq 0$ y $a \in \mathbb{R}$

[25] Como consecuencia del punto anterior

2. Si $f, g \in C(D) \Rightarrow f + g \in C(D) \wedge a \cdot f \in C(D) : \forall a \in \mathbb{R}$ La comprobación es trivial.

3. Basta con probar que $f_0(x) = 1$ y $f_1(x) = x$ son continuas.

$$f_0(x) = 1 \wedge x_0 \in D : \text{ Dado } \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_0(x) - f_0(x_0)| = 0 < \varepsilon$$

$$f_1(x) = x \wedge x_0 \in D : \text{ Dado } \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_1(x) - f_1(x_0)| = |x - x_0| < \varepsilon \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \delta = \varepsilon \text{ lo cumple}$$

Y con lo probado antes de que todas las funciones continuas si se suman o se multiplican dan funciones continuas, queda probado que todos los polinomios son continuos.

Proposición

Sea $D, E \subset \mathbb{R}$ y $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que $f(D) \subset E$, entonces:

1. Si $x_0 \in D$ y f es continua en x_0 y g es continua en $f(x_0)$ (que $\in E$), entonces:

$$g \circ f : D \longrightarrow \mathbb{R} \text{ continua en } x_0$$

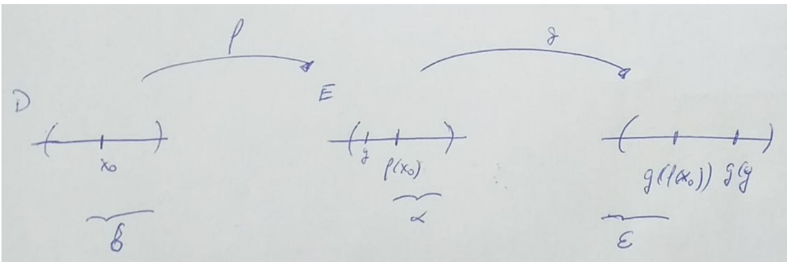
2. Si f es continua en D y g en E, entonces $g \circ f$ continua en D

<u>Demostración</u>:

1. Sea $\varepsilon > 0$, tenemos que encontrar un $\delta > 0$ de manera que todos los elementos de D en el intervalo de δ vayan a parar al de ε:

$$g \text{ continua en } f(x_0) \Rightarrow \exists \alpha > 0 : \forall y \in E : |y - f(x_0)| < \alpha \Leftrightarrow |g(y) - g(f(x_0)| < \varepsilon$$

$$f \text{ continua en } x_0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : x \in D \wedge |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \alpha$$



Por lo que tenemos que:

$$x \in D \wedge |x - x_0| < \delta \Rightarrow |\underbrace{f(x)}_{\in E} - f(x_0)| < \alpha \Leftrightarrow |y - f(x_0)| < \alpha \Rightarrow |g(f(x)) - g(f(x_0))| < \varepsilon$$

2. Es la demostración de 1. pero aplicada a todo $x_0 \in D$, es decir, ocurre la 1. pero en todos los puntos de D.

3. Podemos hacer la demostración del apartado 1 pero por sucesiones:

Sea $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D : x_n \xrightarrow{n \to \infty} x_0 \overset{f \text{ cont.}}{\Rightarrow} f(x_n) \xrightarrow{n \to \infty} f(x_0) \overset{g \text{ cont.}}{\Rightarrow} g(f(x_n)) \xrightarrow{n \to \infty} g(f(x_0)) \Rightarrow$

$$\Rightarrow g \circ f \text{ cont. en } x_0$$

Proposición

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva (en consecuencia, biyectiva sobre el conjunto $f(I)$ porque es suprayectiva sobre su imagen), entonces:

$$\exists f^{-1} : f(I) \longrightarrow I \text{ y es continua}$$

Demostración:

- Supongamos primero que el intervalo es cerrado y acotado: $I = [a, b]$ y sea $y_0 \in f(I) = D$, escogemos una sucesión convergente a un número de la imagen, entonces: sea $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$: $y_n \xrightarrow{n\to\infty} y_0$. Veamos que $f^{-1}(y_n) \xrightarrow{n\to\infty} f^{-1}(y_0)$:

  $$\text{Sea } x_n = f^{-1}(y_n) \text{ y } x_0 = f^{-1}(y_0) \Rightarrow \{x_n\} \subset I \text{ y } x_0 \in I$$

  Por el **Teorema de Bolzano-Wierstrass**, entonces $\{x_n\}$ tiene subsucesiones convergentes. Cojamos una cualquiera, sea $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ una subsucesión que converge a $l \in [a, b]$, entonces $x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} l$ y como f es continua, entonces $f(x_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} f(l)$, por lo tanto:

  $$\underbrace{f(x_{n_k})}_{y_{n_k}} \xrightarrow{k\to\infty} f(l) \Leftrightarrow y_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} \underbrace{f(l)}_{y_0} \Rightarrow \underbrace{y_0}_{f(x_0)} = f(l) \Leftrightarrow y_0 = f(x_0) = f(l) \overset{Biyec.}{\Rightarrow} x_0 = l$$

  Veamos que efectivamente $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$, hemos demostrado que cualquier subsucesión convergente de $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a x_0, pero no hemos demostrado que todas converjan. Supongamos que hay una que no converge:

  $$\exists \delta > 0 \wedge \exists \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \subset I : |x_{n_k} - x_0| > \delta$$

  Es decir, hay términos de la sucesión que no se acercan a x_0, pero como la subsucesión está acotada por pertenecer a I, entonces por el teorema de **Bolzano-Wierstrass** posee alguna subsucesión convergente y, por lo demostrado antes, esa subsucesión de la subsucesión converge a x_0:

  $$\Rightarrow \{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \text{ posee subsucesion convergente} \Rightarrow \text{converge a } x_0 \Rightarrow \#$$

  Esto es cierto porque si la subsucesión convergente, aunque sea subsucesión de la subsucesión también lo es de la sucesión inicial, por lo que cumple lo demostrado antes para la subsucesiones convergentes. Además al probar esto, ese hecho contradice la premisa de no ser convergente a x_0

- Si I es un intervalo cualquiera, sea $y_0 \in f(I)$ y sea $x_0 = f^{-1}(y_0)$ podemos encontrar SIEMPRE $a, b \in \mathbb{R} : x_0 \in [a, b] \in I$ y entonces podemos volver al caso anterior.

Límites laterales

Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces:

1. Si $x_0 \in (a, b]$, entonces el número $l \in \mathbb{R}$ es el límite por la izquierda de f en x_0 si y sólo si:

   $$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

2. Si $x_0 \in [a, b)$, entonces el número $l \in \mathbb{R}$ es el límite por la derecha de f en x_0 si y sólo si:

   $$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

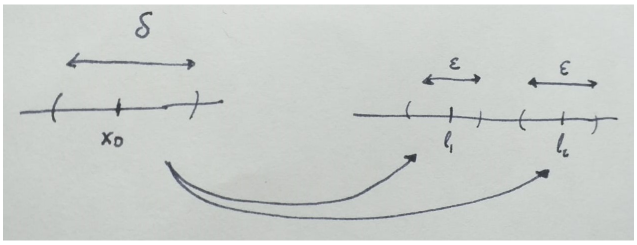
Proposición

Sea $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$, entonces:

1. $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=l \Leftrightarrow \forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(a,b): x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 : x_n<x_0 : \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow f(x_n)\xrightarrow{n\to\infty} l$
2. $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=l \Leftrightarrow \forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(a,b): x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 : x_n>x_0 : \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow f(x_n)\xrightarrow{n\to\infty} l$
3. $f(x_0^-)$ y $f(x_0^+)$ si existen son únicos.

Demostración:

1. - "$\Rightarrow$":
     Sea $\{x_n\}\subset(a,b): x_n\xrightarrow{n\to\infty} x_0 : x_n<x_0 : \forall n\in\mathbb{N}$. Sabemos porque es límite que dado $\varepsilon>0,\exists\delta>0 : x\in(x_0-\delta,x_0)\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$, pero como sabemos que la sucesión converge a x_0, entonces dado $\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N}:\forall n\geq n_0 : x_n\in(x_0-\delta,x_0)\Rightarrow |f(x_n)-l|<\varepsilon$
   - "$\Leftarrow$":
     Si l no es $f(x_0^-)\Rightarrow\exists\varepsilon>0:\forall\delta>0:\exists x\in(x_0-\delta,x_0):|f(x)-l|\geq\varepsilon$. Vamos a construir una sucesión que se acerca por la izquierda y cuyas imágenes no convergen a l para todo ε.
     $$\delta=\frac{1}{n}:n\in\mathbb{N}\Rightarrow\forall\delta=\frac{1}{n}:\exists x_n\in\left(x_0-\frac{1}{n},x_0\right):|f(x_n)-l|\geq\varepsilon$$
     Vemos que tenemos una sucesión de manera que $x_n\xrightarrow{n\to\infty}x_0$ porque cuando $n\to\infty\Rightarrow |x_0-\frac{1}{n}|<\varepsilon$, es decir, cuanto más grande es n, más cerca del límite están los números de la sucesión, pero sus imágenes no convergen a l por haberla escogido así: $f(x_n)\not\xrightarrow{n\to\infty}l$, luego #.
2. Análogo a la anterior
3. La misma demostración que para la unicidad del límite, se trata de coger un ε de manera que los entornos de l_1 y l_2 sean disjuntos.



Proposición: condiciones de continuidad

Sea $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ y $x_0\in(a,b)$, entonces:

1. $\exists\lim_{x\to x_0} f(x)=l\Leftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0^+)=l$
2. f es continua en $x_0\Leftrightarrow f(x_0^-)=f(x_0^+)=f(x_0)$

Demostración:

1. - "$\Rightarrow$":
     $$\forall\varepsilon>0:\exists\delta>0:x\in(x_0-\delta,x_0+\delta)\backslash\{x_0\}\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$$
     Y ya está porque si los números de ese intervalo lo cumplen, entonces los números del intervalo $(x_0-\delta,x_0)$ y $(x_0,x_0+\delta)$ también.

- "$\Leftarrow$":
$$\forall \varepsilon > 0 \begin{cases} \exists \delta_1 > 0 : x \in (x_0 - \delta_1, x_0) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \\ \exists \delta_2 > 0 : x \in (x_0, x_0 + \delta_2) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon \end{cases}$$
Sea $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$, entonces:
$$x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \backslash \{x_0\} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

2. Demostrado porque para ser continua el límite tiene que ser igual a $f(x_0)$ y para que exista el límite tiene que ser igual a él los límites laterales.

Discontinuidades

Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ y $x_0 \in (a, b)$, si f no es continua en x_0, entonces:

- $\exists f(x_0^+), f(x_0^-)$
  - **Discontinuidad evitable**: $f(x_0^-) = f(x_0^+)$, pero distintos a $f(x_0)$
  - **Discontinuidad de salto**: $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$
- **Discontinuidad esencial**: $\nexists f(x_0^-)$ o $\nexists f(x_0^+)$

Límites laterales en el infinito

Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces decimos:

- Si $x_0 \in (a, b]$ decimos que:
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 : \exists \delta > 0 : x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f(x) \geq M$$
- Si $x_0 \in (a, b]$ decimos que:
$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 : \exists \delta > 0 : x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow f(x) < -M$$
- Si $x_0 \in [a, b)$ decimos que:
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 : \exists \delta > 0 : x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \geq M$$
- Si $x_0 \in [a, b)$ decimos que:
$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0 : \exists \delta > 0 : x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) < -M$$

Proposición

Sea $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$, entonces decimos:

- Si $x_0 \in (a, b)$ decimos que:
$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0^-} f(x) = \infty \wedge \lim_{x \to x_0^+} f(x) = \infty$$

- Si $x_0 \in (a,b)$ decimos que:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty \wedge \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$$

- Si $x_0 \in (a,b]$ decimos que:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (a,b) : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 : x_n < x_0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

- Si $x_0 \in (a,b]$ decimos que:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (a,b) : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 : x_n < x_0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$$

- Si $x_0 \in [a,b)$ decimos que:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (a,b) : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 : x_n > x_0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

- Si $x_0 \in [a,b)$ decimos que:

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (a,b) : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 : x_n > x_0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$$

Propiedades de Funciones Continuas

Teorema de Wierstrass

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, entonces:

- La función es acotada, es decir:

$$\exists M > 0 : \forall x \in [a,b] : |f(x)| \leq M$$

- Existen dos puntos, de manera que la imagen de uno de ellos es el ínfimo de las imágenes y que el otro es el supremo de las mismas:

$$\exists c, d \in [a,b] : \begin{cases} f(c) = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\} \\ f(d) = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} \end{cases}$$

Se puede anotar como observación que cuando la función no es continua esto es falso y del mismo modo cuando el intervalo es abierto no ocurre.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ donde } x \in [-1,1] \Rightarrow \text{ no acotada}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases} \text{ donde } x \in (0,1) \Rightarrow \text{ no alcanza su máximo y su mínimo}$$

<u>Demostración</u>

1. Supongamos que no es acotada superiormente (y el inferiormente es análogo):

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in [a,b] : f(x_n) > n$$

   Entonces tenemos que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset [a,b]$ y por el teorema de Bolzano-Wiestrass: $\exists\{x_{n_k}\}$ convergente (a x_0) y como f es continua entonces $f(x_n)$ converge a $f(x_0)$, por lo probado en teoremas anteriores, y teníamos que $f(x_{n_k}) > n_k$ que converge a infinito, luego $\#$.

2. Como está acotado, su supremo existe: $S = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\}$ y su ínfimo $I = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\}$, entonces[26] como es supremo:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists x_n \in [a,b] : S - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq S$$

Esto forma una sucesión de números. Como sabemos que $\{x_n\} \subset [a,b]$, entonces por el Teorema de Bolzano-Wierstrass, tenemos que $\exists \{x_{n_k}\}$ que converge (a d) por lo que tenemos que $f(x_{n_k})$ converge a $f(d)$ y como $f(x_n)$ converge a S, entonces $f(d) = S$.

Teorema de Bolzano

Si tenemos una función continua tal que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, si la función toma signos distintos en los extremos del intervalo, entonces existe un valor dentro de ese intervalo donde la función toma el valor nulo, es decir:

$$f(a) < 0 \text{ y } f(b) > 0 \Rightarrow \exists c \in (a,b) : f(c) = 0$$

Demostración:

Supongamos que $f(a) < 0$ y $f(b) > 0$, entonces sea $A = \{t \in [a,b] : f(t) < 0\}$ tenemos que $a \in A$ y b es cota superior de A y, en consecuencia, existe el supremo que llamaremos $\exists \sup(A) = c$. Entonces existe una sucesión de puntos de A que converge a su supremo porque $\forall n \in \mathbb{N} : \exists t_n \in A : c - \frac{1}{n} < t_n \leq c$, es decir, $\exists \{t_n\} \subset A : t_n \xrightarrow{n\to\infty} c$. Como f es continua, entonces $f(t_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(c) \Rightarrow f(c) \leq 0)$ y ahora probamos que $f(c) = 0$.

Si $f(c) < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in (c-\delta, c+\delta) : f(x) < 0 \Rightarrow (c-\delta, c+\delta) \subset A$, lo que contradice que $c = \sup A \Rightarrow \# \Rightarrow f(c) = 0 \Rightarrow c \in (a,b)$ porque $f(a) \neq 0$ y $f(b) \neq 0$.

Teorema del valor intermedio

Si tenemos una función continua tal que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y llamamos $A = f(a)$ y $B = f(b)$, si C es un número intermedio entre A y B, entonces existe un $c \in (a,b) : f(c) = C$, es decir, que si la función alcanza dos valores, entonces alcanza todos los intermedios.

Demostración:

Llamamos $g(x) = f(x) - C$ de manera que $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ y es continua. Es fácil ver que:

$$\begin{cases} g(a) = f(a) - C = A - C \\ g(b) = f(b) - C = B - C \end{cases} \Rightarrow \text{ signos distintos } \overset{Bolzano}{\Rightarrow} \exists c \in (a,b) : g(c) = 0$$

Proposición

Si tenemos una función continua tal que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ entonces $f([a,b])$ es un intervalo cerrado y acotado. Además, será el intervalo formado por el ínfimo de las imágenes y por el supremo de las imágenes, como hemos visto en el Teorema de Wierstrass.

Demostración:

Por el teorema de Wiestrass, hemos visto que:

$$\exists c, d \in [a,b] : \begin{cases} f(c) = \inf\{f(x) : x \in [a,b]\} \\ f(d) = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} \end{cases}$$

[26] Hacemos la del supremo porque la del ínfimo es análoga

En particular, $\forall x \in [a,b]$ tenemos que:

$$f(c) \leq f(x) \leq f(d) \Rightarrow f([a,b]) \subset [f(c), f(d)]$$

Veamos ahora " $\supset$":

Sea $y \in [f(c), f(d)]$ suponiendo que es distinto de $f(c)$ y $f(d)$ como $f : [c,d] \to \mathbb{R}$ continua por el teorema de valores intermedios, entonces $\exists x \in [c,d] : f(x) = y \Rightarrow y \in f([c,d]) \subset f([a,b])$.

Proposición

Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, si $f : I \to |\mathbb{R}$ y es continua, entonces $f(I)$ es un intervalo.

Demostración:

Sea $\alpha, \beta \in f(I)$, veamos que $[\alpha, \beta] \subset f(I) \Rightarrow f(I)$ es un intervalo: Teniendo en cuenta lo primero podemos asegurar que $\exists a, b \in I : \alpha = f(a) \wedge \beta = f(b)$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $a < b \Rightarrow [a,b] \subset I$ y como $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces si $y \in [\alpha, \beta]$ tenemos que $\exists c \in [a,b] \subset I : f(c) = y \in f(I)$.

Propiedades de funciones monótonas

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, decimos[27] que:

- Es **monótona creciente** si:

$$\forall x, y \in [a,b] : x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

- Es **monótona decreciente** si:

$$\forall x, y \in [a,b] : x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

Teorema

Supongamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es monótona creciente[28], entonces:

$$\forall x \in (a,b) : \exists f(x^-) \text{ y } f(x^+) : f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+)$$

Además se verifica que:

$$\begin{cases} f(x^-) = \sup\{f(t) : t < x\} \\ f(x^+) = \text{ínf}\{f(t) : t > x\} \end{cases}$$

Pero es que además:

$$\forall x, y \in (a,b) : x < y \Rightarrow f(x^+) \leq f(y^-)$$

Como observación, el teorema se mantiene en $x = a$ y $x = b$ contando con que no existe el límite por la izquierda y por la derecha respectivamente. En consecuencia, podemos decir que las funciones monótonas solo tienen discontinuidades de salto.

Demostración:

Sea $x \in (a,b)$, $A_x = \{f(t) : t < x\}$ y $B_x = \{f(t) : t > x\}$ donde $t \in [a,b]$. Como f es monótona creciente:

$$\begin{cases} \text{Si } t < x \quad f(t) \leq f(x) \Rightarrow f(x) \text{ es cota superior de } A_x \\ \text{Si } x < t \quad f(x) \leq f(t) \Rightarrow f(x) \text{ es cota inferior de } B_x \end{cases} \Rightarrow \exists \xi = \sup A_x \text{ y } \exists \eta = \text{ínf } B_x$$

[27] Le añadimos el sobrenombre de **estricta** si la desigualdad es estricta

[28] Con las decrecientes ocurre de forma análoga.

Veamos ahora que $\xi = f(x^-)$:

$$\text{Sea } \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists t_1 < x : \xi - \varepsilon < f(t_1) \leq \xi$$

Pero como la función es monótona creciente entonces si escogemos un t, de manera que $t_1 < t < x \Rightarrow \xi - \varepsilon < f(t_1) < f(t) < \xi$.

En síntonía con lo anterior, sea $\delta = x - t_1 > 0$ tenemos que si $t \in (x - \delta, x) \Rightarrow f(t) \in (\xi - \varepsilon, \xi) \subset (\xi - \varepsilon, \xi + \varepsilon)$ que es precisamente la definición de límite por la izquierda, con lo que queda probado que $\xi = f(x^-)$.

Ahora probamos que $\eta = f(x^+)$:

$$\text{Sea } \varepsilon > 0 \Rightarrow \exists t_2 > x : \eta < f(t_2) \leq \eta + \varepsilon$$

Del mismo modo, sea $\delta = t_2 - x$, si escogemos un t de manera que $x < t < t_2 \Rightarrow \eta \leq f(t) \leq f(t_2) < \eta + \varepsilon \Rightarrow t \in (x, x + \delta) \Rightarrow f(t) \in (\eta, \eta + \varepsilon) \subset (\eta - \varepsilon, \eta + \varepsilon)$ que es precisamente la definición de límite por la derecha, con lo que queda probado que $\eta = f(x^+)$.

Si $x < y$, entonces sea $t : x < t < y$. Sabemos que $f(x^+) \leq f(t)$ y como también $f(t) \leq f(y^-)$, entonces tenemos que $f(x^+) \leq f(t) \leq f(y^-)$.

Teorema

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es monótona, entonces el conjunto de discontinuidades es, a lo sumo, **numerable**.

Demostración:

Supongamos que f es creciente[29]. Llamamos $D = \{x \in (a, b) : f \text{ es discontinua}\}$, sabemos también que f es discontinua $\Leftrightarrow f(x^-) < f(x^+)$, entonces $\forall x \in D : \exists q_x \in \mathbb{Q} : f(x^-) < q_x < f(x^+)$. Entonces tenemos $s : D \to \mathbb{Q}$ donde a cada $x \to q_x$. Veamos que esta aplicación es inyectiva, por que sabemos que una función es siempre suprayectiva sobre su imagen y demostrar la inyectividad supone poder establecer una biyección con los naturales. Si $x_1 < x_2 \Rightarrow s(x_1) = q_{x_1} < f(x_1^+) \leq f(x_2^-) < q_{x_2} = s(x_2)$, por lo que es numerable.

Proposición

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, entonces:

1. f es inyectiva $\Leftrightarrow f$ es estrictamente monótona.
2. f es inyectiva $\Rightarrow f$ es biyectiva sobre su imagen (que es un intervalo cerrado y acotado) y f^{-1} es continua, estrictamente monótona (y biyectiva).

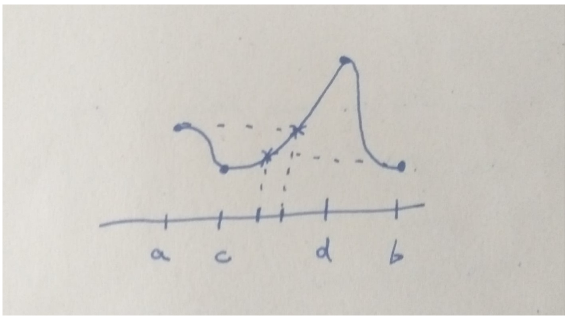
Demostración:

1. Vemos la doble implicación:
   - "$\Leftarrow$":

     $$\forall x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \vee f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2) \Rightarrow f \text{ inyectiva}$$

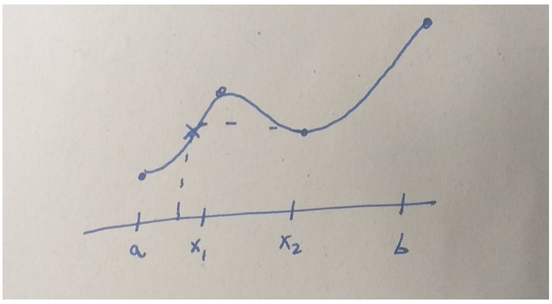
   - "$\Rightarrow$": Sea f continua e inyectiva, como $f([a, b]) = [f(c), f(d)]$ donde $f(c) = \inf\{f(t) : t \in [a, b]\}$ y $f(d) = \sup\{f(t) : t \in [a, b]\}$. Además como f es inyectiva, $f(c) \neq f(d)$ porque si fuese iguales la función sería constante lo cual es absurdo, esto implica que $f(c) < f(d) \Rightarrow c \neq d$.
     Supongamos que $c < d$, vamos a ver que necesariamente $c = a$, $d = b$ y que f es estrictamente creciente.

[29] Con las decrecientes pasa lo mismo



Supongamos que no, es decir, $a < c \Rightarrow f(c) < f(a) < f(d)$. Por el teorema de valores intermedios algún punto entre c y d tomará el valor de $f(a)$, por lo que $\exists t \in (c, d)$: $f(t) = f(a) \Rightarrow$ no es inyectiva luego $\#$.

Supongamos que $d < b$, vamos a ver que necesariamente $d = b$ y que f es estrictamente creciente. Supongamos que no, es decir, $d < b \Rightarrow f(c) < f(b) < f(d)$. Por el teorema de valores intermedios algún punto entre c y d tomará el valor de f(b), con lo cual $\exists t \in (a, b) : f(t) = f(b) \Rightarrow \#$ porque la hipótesis es que era inyectiva. Por lo que $a = c$ y $d = b$.



Con lo cual y viendo el dibujo, sabiendo que $a = c$ y que $b = d$, entonces veamos que es estrictamente creciente: supongamos que no $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ y $f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq a$ porque es el ínfimo de las imágenes y además también $x_2 \neq b$ por el mismo motivo. Con lo cual, $f(a) < f(x_2) < f(x_1)$. En consecuencia, por el teorema de valores intermedios en $[a, x_1] : \exists t \in (a, x_1) : f(t) = f(x_2) \Rightarrow \#$ porque es inyectiva, con lo cual: $f(x_1) < f(x_2)$ y es estricta la desigualdad porque si fuese igual, no se cumpliría la inyectividad.

Si tenemos el otro caso, en el que $c > d$, vamos a probar que $a = d$ y $c = b$ y que f es estrictamente decreciente. Si $a < d$, entonces $f(c) < f(a) < f(d)$, entonces por el teorema de valores intermedios $\exists t \in (d, c) : f(t) = f(a) \Rightarrow \#$. Si $c < b$, entonces de la misma manera ocurre por el teorema de valores intermedios que $f(c) < f(b) < f(d) \Rightarrow \exists t \in (c, d) : f(t) = f(b) \Rightarrow \#$.

Con lo cual, sabiendo que $a = d$ y que $b = c$, entonces veamos que es estrictamente decreciente: supongamos que no $a \leq x_1 < x_2 \leq b$ y $f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow x_1 \neq a$ porque es el supremo de las imágenes y además también $x_2 \neq b$ por el mismo motivo. Con lo cual, $f(b) < f(x_1) < f(x_2)$. En consecuencia, por el teorema de valores intermedios en $[x_2, b] : \exists t \in (x_2, b) : f(t) = f(x_1) \Rightarrow \#$ porque es inyectiva, con lo cual: $f(x_1) > f(x_2)$ y es estricta la desigualdad porque si fuese igual, no se cumpliría la inyectividad.

2. Como lo anterior ya está demostrado, solo falta demostrar que la inversa también es estrictamente monótona. Sabemos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es estrictamente monótona. Ahora para hacer un caso[30] suponemos que f es estrictamente creciente. Si $x_1, x_2 \in [a, b] : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$, si $y_1, y_2 \in f([a, b]) = [f(c), f(d)]$ y además $y_1 < y_2$, entonces sabemos por ser inyectiva que $\exists! x_1, x_2 \in [a, b] : f(x_1) = y_1 < f(x_2) = y_2 \Rightarrow x_1 < x_2$ porque si fuese $x_1 > x_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \Rightarrow f^{-1}$ es estrictamente creciente.

[30] El caso decreciente es análogo

Continuidad uniforme

Observación previa:

La definicion de continuidad vista es: supongamos que tenemos $f : D \to \mathbb{R}$ donde $D \subset \mathbb{R}$ de manera que f es continua en D, es decir:

$$\forall x \in D : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : x, y \in D : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Esto quiere decir que una vez fijo el x, para cualquier ε escogido, siempre podemos encontrar un δ de manera que se cumpla lo que sigue.

Continuidad uniforme:

Decimos que f es uniformemente continua en D si:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, y \in D : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

En este caso queremos decir que escogido un ε cualquiera, siempre podemos encontrar un δ de manera que para todos los x e y que estén a distancia menor que delta cumplen lo que sigue, que aunque parece igual, es notablemente distinto.

Dos observaciones importantes:

1. Si f es uniformemente continua en D, también es continua en D.
2. El recíproco es falso:

Ejemplo: $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^2$ es continua pero no uniformemente continua. Esto es así porque sea $\varepsilon = 1$, $\delta > 0$ y $x, x + \delta$ entonces tenemos que: $|f(x) - f(x + \delta)| = |x^2| - (x + \delta)^2 = \delta|\delta + 2x|$. Si dado el delta yo escojo un x de manera que $\delta + 2x > \frac{1}{\delta}$, entonces $\delta|\delta + 2x| > 1$, por lo que no es uniformemente continua porque hemos encontrado un x que no satisface la propiedad.

Teorema

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua, es uniformemente continua en un intervalo cerrado y acotado.

Demostración:

Supongamos que f no es uniformemente continua, entonces $\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 : \exists x, y \in [a, b] : |x - y| < \delta$ y $|f(x) - f(y)| \geq \varepsilon$. Para $\delta = \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}$, entonces $\exists x_n, y_n \in [a, b] : |x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ y $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$. Pero entonces tenemos $\{x_n\} \in [a, b]$ y por el teorema de Bolzano-Wierstrass, $\exists \{x_{n_k}\}$ subsucesión convergente a $l \in [a, b]$ de manera que $|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow |x_{n_k} - y_{n_k}| \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow y_{n_k} = x_{n_k} + (y_{n_k} - x_{n_k}) \overset{n\to\infty}{\Leftrightarrow} y_{n_k} \to l + 0 = l$

Pero por otro lado, las imágenes están lejos porque como f es continua, entonces $f(x_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} f(l)$ y $f(y_{n_k}) \xrightarrow{k\to\infty} f(l)$, pero tenemos que $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq 0$ y es absurdo porque cuando se tiende a infinito tenemos que $|l - l| = 0 < \varepsilon \Rightarrow \#$

Continuidad de funciones elementales

Regla del Sandwich para funciones

Si tenemos que $D \subset \mathbb{R}$, x_0 es un punto de acumulación, $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ y ocurre que para $\delta_0 > 0$ vemos que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, si $\lim_{x\to x_0} f(x) = m = \lim_{x\to x_0} h(x)$, entonces se tiene que:

$$f(x) \xrightarrow{x\to x_0} m \leq g(x) \leq h(x) \xrightarrow{x\to x_0} m \Rightarrow g(x) \xrightarrow{x\to x_0} m$$

Demostración:

Considerando que ambas funciones "tapa" tienden a m tenemos que:

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists\delta_1 > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - m| < \varepsilon$$

$$\forall\varepsilon > 0 : \exists\delta_2 > 0 : 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |h(x) - m| < \varepsilon$$

Luego si dado un $\varepsilon > 0$, cogemos $\delta = \min\{\delta_0, \delta_1, \delta_2\}$ tenemos que:

$$m - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < m + \varepsilon \Rightarrow |g(x) - m| < \varepsilon$$

Continuidad de funciones exponenciales

Sean $f : D \to (0, \infty)$ y $g : D \to \mathbb{R}$, se tiene que la función $h : D \to \mathbb{R}$:

$$h(x) = f(x)^{g(x)} : x \in D \text{ es continua}$$

Demostración:

Para demostrar esta proposición vamos a demostrar pequeños resultados intermedios:

$$f(x) = a^x \text{ es continua} \Leftrightarrow \forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to} f(x)$$

Como vimos en el tema de sucesiones, el límite se puede pasar al exponente así que se tiene que: $f(x_n) = a^x_n \xrightarrow{n\to\infty} a^x \Rightarrow f$ es continua. Por el teorema que dice que la composición de funciones continuas es continua, se tiene que: $f(x) = a^{g(x)}$ es continua.

Del mismo modo, tenemos que $f(x) = x^a$ es continua porque por el mismo razonamiento: $f(x_n) = x^a_n \xrightarrow{n\to\infty} x^a$, luego se cumple. En consecuencia, tenemos que por la composición: $f(x) = g(x)^a$ es continua.

Basta con ver que al ser estas dos funciones continuas, la composición de ambas: $h(x) = f(x)^{g(x)}$ es continua.

Continuidad del seno y del coseno

El coseno y el seno son funciones continuas.

Continuidad de los logaritmos

Definimos el logaritmo[31] como la función inversa a la exponencial, su imagen va de los positivos a los reales.

$$\begin{array}{rcl} log_a x : (0, \infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a^x & \longmapsto & x \end{array}$$

[31]Cuando la base del logaritmo es el número e decimos que es un *logaritmo neperiano*

Además observamos las siguientes propiedades:

- $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$
- $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$
- $\log_a x^b = b \cdot \log_a x$
- $\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$
- $\log_a a = 1$
- $\log_a 0 \to -\infty$

Demostración:

Como ya demostramos que $f(x) = a^x$, era continua, monótona e inyectiva y también estaba demostrado que toda función es sobreyectiva sobre su imagen, vemos que la inversa existe: a esta es a la que denominamos *logaritmo*. Veamos que su dominio es $(0, \infty)$:

Si $a > 1$, entonces $\lim_n \to \infty a^n = \infty$ y $\lim_n \to \infty a^- n = 0$, por lo que la imagen siempre es positiva. Como $\mathbb{R}$ es un intervalo, sabemos que la imagen de un intervalo por una función continua es de nuevo un intervalo lo que implica que $f(\mathbb{R}) \subset (0, \infty)$ y como las imágenes de antes tendían a 0 y a ∞ necesariamente la imagen es $(0, \infty)$. El caso de que $0 < a < 1$ es análogo. En consecuencia, imagen de a^x es el dominio de la función inversa.

Para las propiedades, tal y como hemos definido el logaritmo este representa el exponente al que debe elevarse la base para que pueda ser x, con lo cual $a^{\log_a x} = x$ así que:

$$a^{\log_a xy} = xy = a^{log_a x} \cdot a^{log_a y} = a^{\log_a x + \log_a y} \Rightarrow \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

El resto de propiedades se demuestran de forma análoga.

CÁLCULO DIFERENCIAL

DEFINICIÓN DE DERIVADA

Definición y derivabilidad

Una función $f : I \to \mathbb{R}$ donde I es un intervalo y c es un punto del intervalo, se dice derivable o diferenciable en c si $\exists L \in \mathbb{R}$ que verifica que:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < \varepsilon$$

En este caso[32] decimos que L es la derivada de f en c y escribimos $f'(c) = L$.

Esta afirmación es equivalente a decir lo siguiente: si definimos la función $\varphi(x) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$ donde $x \in I \backslash \{c\}$ entonces tenemos que:

f es derivable en $c \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to c} \varphi(x) = L \Leftrightarrow \exists \lim\limits_{x\to c} \varphi(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |x-c| < \delta \Rightarrow |\varphi(x)-L| < \varepsilon$

Es fácil ver que la parte de la derecha es la propia definición de derivada que se ha dado, pero esta caracterización es importante porque hemos visto y trabajado el demostrar la existencia o no de un límite y el cálculo de estos, por lo que en ocasiones puede facilitarnos el trabajo en vez de usar la definición.

Ejemplo:

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^2$, luego hay que estudiar $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \frac{x^2-c^2}{x-c} = x + c$, luego tenemos que $\lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = 2c$.

Veamos el mismo ejemplo con la definición, nuestro candidato es $f'(c) = 2c$, la pregunta es si dado $\varepsilon > 0$, puedo encontrar un δ de manera que se cumpla al definición?, veamos:

$$\left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - 2c \right| = \left| \frac{x^2 - c^2}{x - c} - 2c \right| = |x + c - 2c| = |x - c| < \delta \Rightarrow \delta < \varepsilon$$

Luego bastaría con escoger un delta de manera que este sea menor que el epsilon dado.

Proposición

Si f es derivable en c, entonces la derivada es única.

Demostración:

[32]Cabe destacar que c puede ser un extremo del intervalo y que además c debe pertenecer al dominio porque debemos poder calcular $f(c)$.

f es derivable en $c \Leftrightarrow \exists \lim_{x \to c} \varphi(x)$, pero sabemos que el límite es único, en consecuencia, la derivada debe ser un único valor.

Función derivada

Si $f : I \to \mathbb{R}$ es derivable en todo I, podemos definir la función derivada que llamaremos $f' : I \to \mathbb{R}$ de manera que $c \to f'(c)$.

Ejemplo:

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$ como hemos visto antes.

Teorema

Si f es derivable en c, entonces f es continua en c.

Sin embargo, en general el recíproco no es cierto, es decir, existe funciones continuas que no son derivables en algún punto de su dominio.

Ej.:

Sea $f(x) = |x|$ tenemos que f es continua en $x = 0$ porque es continua en $\mathbb{R}$. Veamos que no es derivable en 0 ¿$\exists \lim_{x \to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$?:

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{|x|}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{|x|}{x} = -1$$

Luego no es derivable

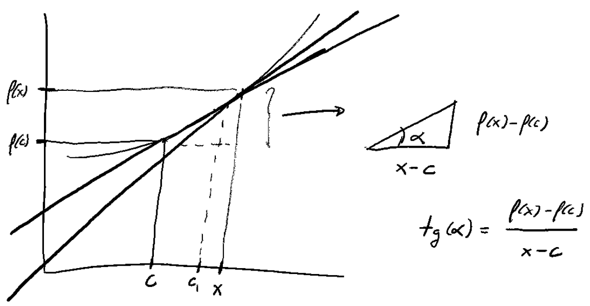
Demostración:

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, $c \in I$, $\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) \in \mathbb{R}$, vemos que si $x \neq c$, entonces $f(x) - f(c) = \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \cdot (x - c)$, pero sabemos que $\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c)$ y que además $\lim_{x \to c} x - c = 0$. Esto implica que

$$\exists \lim_{x \to c} (f(x) - f(c)) = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \cdot \lim_{x \to c} (x - c) = f'(c) \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \to c} f(x) = f(c) \Rightarrow f(x) \text{ continua en } c$$

Interpretación geométrica de la derivada

Supongamos que tenemos una función $f : I \to \mathbb{R}$ y $c \in I$, vemos que la existencia de la derivada quiere decir que existe este cociente incremental $\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$.



Es fácil ver el triángulo que marcamos en el dibujo y entender entonces el concepto geométrico[33] que se quiere explicar, realmente lo que analizamos es la **tangente** de dicho ángulo, es decir, es la pendiente de la recta tangente a la curva en ese punto.

Operaciones y derivabilidad

Teorema

Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$, $c \in I$ y f, g derivables en c, se tiene que:

1. La función $f + g : I \to \mathbb{R}$ es derivable en c y:
$$(f+g)'(c) = f'(c) + g'(c)$$
2. La función[34] $\alpha \cdot f : I \to \mathbb{R}$ es derivable en c y:
$$(\alpha \cdot f)'(c) = \alpha \cdot f'(c)$$
3. La función[35] $f \cdot g : I \to \mathbb{R}$ es derivable en c y:
$$(f \cdot g)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$$
4. La función $\frac{f}{g} : I \to \mathbb{R}$ es derivable en c y:
$$\left(\frac{f(c)}{g(c)}\right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g(c)^2}$$

Demostración:

Los dos primeros aparatados son muy sencillos.

3.

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)g(x) - f(c)g(c)}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{(f(x) - f(c))g(c) + f(c)g(x) - f(c)g(c)}{x - c} =$$
$$= \lim_{x \to c} \frac{(f(x) - f(c))g(c) + f(c)(g(x) - g(c))}{x - c} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} g(c) + f(c) \frac{g(x) - g(c)}{x - c} =$$
$$= f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$$

4. Completamente análoga utilizando el truco usado en la 3.

Corolario

Si tenemos que $f_1, f_2, ..., f_n : I \to \mathbb{R}$ son funciones derivables en $c \in I$, entonces se tiene que:

1. $(f_1 + ... + f_n)'(c) = f_1'(c) + ... + f_n'(c)$
2. $(f_1 \cdot ... \cdot f_n)'(c) = f_1'(c) f_2(c) \cdot ... \cdot f_n(c) + ... + f_1(c) \cdot ... \cdot f_{n-1}(c) \cdot f_n'(c)$

[33] A pesar de darse esta explicación geométrica, en ningún caso intervendrá en cualesquiera de las demostraciones posteriores puesto que prevalece la definición de derivada dada

[34] $\alpha \in \mathbb{R}$

[35] $g(c) \neq 0$

Demostración:

1. Trivial por la demostración de la suma simple

2. Supongamos cierta la proposición para n, lo demostramos para $n+1$:

$$(f_1 \cdot f_2 \cdot ... \cdot f_n \cdot f_{n+1})' = (g \cdot f_{n+1})' = g'(c) f_{n+1}(c) + g(c) f'_{n+1}(c) =$$
$$= (f'_1(c) \cdot f_2(c) \cdot ... \cdot f_n(c) + ... + f_1(c) \cdot f_2(c) \cdot ... \cdot f'_n(c))\, f_{n+1}(c) + (f_1(c) \cdot ... \cdot f_n(c)) f'_{n+1} =$$
$$= f'_1(c) \cdot f_2(c) \cdot ... \cdot f_n(c) \cdot f_{n+1}(c) + ... + f_1(c) \cdot f_2(c) \cdot ... \cdot f'_n(c) f_{n+1}(c) + f_1(c) \cdot ... \cdot f_n(c) f'_{n+1}$$

Ej.:

Si tenemos $f(x) = x^n = x \cdot x \cdots x$, entonces tenemos que por el corolario tenemos que: $f'(x) = 1 \cdot x \cdot ... \cdot x + ... + x \cdot ... \cdot x \cdot 1 = \underbrace{x^{n-1} + x^{n-1} + ... + x^{n-1}}_{n \text{ veces}} = n \cdot x^{n-1}$

Con lo cual, podemos verlo en un caso general diciendo que $g(x) = f(x)^n$, por lo que $g'(c) = n \cdot f'(c) \cdot f(c)^{n-1}$.

Lema de Caratheodery

Dada $f : I \to \mathbb{R}$ es derivable en $c \in I \Leftrightarrow \exists \varphi : I \to \mathbb{R}$ continua en c de manera que $f(x) - f(c) = \varphi(x)(x-c) : \forall x \in I$. Y en ese caso $f'(c) = \varphi(c)$

Demostración:

- $\Rightarrow$:

  Si f es derivable en c, entonces $\varphi = \begin{cases} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} & x \neq c \\ f'(c) & x = c \end{cases}$. Vemos que φ es continua en c puesto que $\lim_{x \to c} \varphi(x) = \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = f'(c) = \varphi(c)$. Además se tiene que $f(x) - f(c) = \varphi(x)(x-c)$ cuando $x \neq c$, pero vemos que si $x = c$, entonces $f(x) - f(c) = \varphi(x)(x-c) \Leftrightarrow 0 = \varphi(x) \cdot 0$, luego ocurre siempre.

- $\Leftarrow$:

  Si tenemos que $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continua en c y $f(x) - f(c) = \varphi(x)(x-c) : x \in I$, entonces $x \neq c \Rightarrow \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \varphi(x)$ y como $\lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \lim_{x \to c} \varphi(x) = \varphi(c)$, como el límite existe entonces f es derivable en c y $f'(c) = \varphi(c)$.

Regla de la Cadena

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, $c \in I : f$ derivable en c, siendo $f(I) \subset J$ y que $g : J \to \mathbb{R}$ es una función derivable en $d = f(c)$. Entonces la composición $g \circ f(x)$ es derivable en c y decimos que:

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c)$$

Demostración:

Por el lema que acabamos de probar $f : I \to \mathbb{R}$ es derivable en c si existe una función $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continua en c y se verifica que $f(x) - f(c) = \varphi(x)(x-c) : x \in I$ y del mismo modo $g : I \to \mathbb{R}$ es derivable en d si existe una función $\psi : J \to \mathbb{R}$ continua en d de manera que se cumple que $g(z) - g(d) = \psi(z)(z-d) : z \in J$.

En particular, si $z = f(x) : x \in I$, entonces podemos decir que

$$g(f(x)) - g(d) = \psi(f(x))(f(x) - \underbrace{d}_{f(c)})$$

Pero aplicando la otra condición tenemos que:

$$g(f(x)) - g(d) = \psi(f(x))\varphi(x)(x-c)$$

Por tanto, si llamamos $\chi(x) = \psi((f(x))\varphi(x) : x \in I$, tenemos que $(g \circ f)(x) - (g \circ f)(c) = \chi(x)(x-c)$, por lo que solo queda probar que esta función es continua en c, puesto que por el lema anterior, si fuese continua entonces sería derivable en c.

Como esta función es producto de dos, entonces es continua si ambos factores son continuos. Sabemos que φ es continua en c, f es continua en c porque es derivable en c y ψ es continua en d se tiene que: $\psi \circ f$ es continua en c por composición de funciones continuas. Del mismo modo, por ser producto de funciones continuas se tiene que $(\psi \circ f) \cdot \varphi$ es continua en c y esto último determina que $g \circ f$ es derivable en c y además $(g \circ f)'(c) = \chi(x) = \psi((f(c))\varphi(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c)$.

Derivada de la función inversa

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ donde I es un intervalo y además f es continua e inyectiva, entonces se tiene que:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Por ser inyectiva y continua, entonces debe ser estrictamente monótona y por ser inyectiva es biyectiva sobre su imagen, por lo que puedo definir[36] $g(y) : J \to I$. Si escojo $c \in I$ y suponemos que f es derivable de manera que $f'(c) \neq 0$ entonces $g(y)$ es derivable en $d = f(c)$ y además $g'(d) = \frac{1}{f'(c)}$, como $g = f^{-1}$, entonces se tiene la afirmación del principio.

<u>Demostración</u>:

Si f es derivable en c, por el lema anterior se tiene que $\exists \varphi : I \to \mathbb{R} : f(x) - f(c) = \varphi(x)(x-c) : \forall x \in I$.

Primero vemos que $\varphi(x) \neq 0$ porque :

$$\begin{cases} x \neq c \text{ y } \varphi = 0 & \Rightarrow f(x) - f(c) = 0 \Rightarrow f(x) = f(c) \Rightarrow \# \text{ pq f inyectiva} \\ x \neq c \text{ y } \varphi(c) = f'(c) \neq 0 & \Rightarrow x - c = \frac{1}{\varphi(x)} \cdot (f(x) - f(c)) : \forall x \in I \end{cases}$$

El segundo caso es cierto en particular para $x = g(y) : y \in J$ por lo que si sustituimos $g(y)$ tenemos que:

$$g(y) - g(d) = \frac{1}{\varphi(g(y))} \cdot (f(g(y) - f(g(d))) = \frac{1}{\varphi(g(y))} \cdot (y-d)$$

Como g es continua porque f lo es y además φ es continua en $g(d) = c$, entonces $\varphi \circ g$ es continua y por el lema de Caratheory se tiene que g es derivable en d y además

$$g'(d) = \frac{1}{\varphi(g(d))} = \frac{1}{f'(g(d))}$$

Una buena forma de recordarlo es que:

$$f^{-1} \circ f = id \Leftrightarrow g(f(x)) = x \Leftrightarrow g'(f(x)) \cdot f'(x) = 1 \Rightarrow g'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$$

Si $y = f(x)$ entonces:

$$g'(y) = \frac{1}{f'(g(y))}$$

Ej.:

[36] En lo que sigue de demostración se denotará $f(I)$ por el intervalo J

Sea $y = x^m : x > 0$ tenemos una función definida de forma que $y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, por lo que hemos demostrado se tiene que $g(y) = \sqrt[m]{y}$, luego sabemos que $g'(y) = \frac{1}{f'(x))}$ pero como quiero expresar las cosas en términos de y, sabemos que $y = x^m$, luego se tiene que $g(y) = \frac{1}{mx^{m-1}} = \frac{1}{\frac{1}{m}y^{\frac{1}{m}-1}} = \frac{1}{\frac{1}{m}\sqrt[m-1]{y}}$

Sea $y = sen(x)$, sabemos que $y' = cos(x)$ y la función inversa del seno se llama el $x = arcsen(y)$, de forma que según lo visto: $(arcsen(y))' = \frac{1}{(sen(x))'} = \frac{1}{cos(x)}$, entonces si $y = sen(x)$ y también tenemos $cos(x) = \sqrt{1 - sen^2(x)}$, luego sustituyendo en lo anterior:

$$(arcsen(y))' = \frac{1}{\sqrt{1 - y^2}}$$

CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Teorema del valor medio

Extremos relativos y relativos estrictos

Decimos[37] que $f : I \to \mathbb{R}$ tiene un **máximo relativo** en $c \in I$ si $\exists \delta > 0 : \forall x \in I : |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(c)$.

Decimos que $f : I \to \mathbb{R}$ tiene un **mínimo relativo** en $c \in I$ si $\exists \delta > 0 : \forall x \in I : |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) \geq f(c)$.

Punto interior

Si I es un conjuntos de $\mathbb{R}$ entonces $c \in \mathring{I}$ (punto interior de I) si $\exists \delta_0 > 0 : (c - \delta_0, c + \delta_0) \subset I$. En particular, si I es un intervalo $I = [a, b]$, entonces $(a, b) \in \mathring{I}$.

Teorema

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ y supongamos que f tiene un extremo relativo en $c \in \mathring{I}$. Si f es derivable en c, entonces $f'(c) = 0$.

<u>Demostración</u>:

Si f es derivable en c, entonces $\exists \lim_{x \to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \Rightarrow \exists \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} = \exists \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c}$. Supongamos que c es un máximo[38], entonces $\exists \delta_0 > 0 : |x - c| < \delta_0 \Rightarrow f(x) \leq f(c)$, por lo tanto tenemos que

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \begin{cases} \leq 0 & \text{si } c < x < c + \delta_0 \Rightarrow \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0 \\ \geq 0 & \text{si } c - \delta_0 < x < c \Rightarrow \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = 0$$

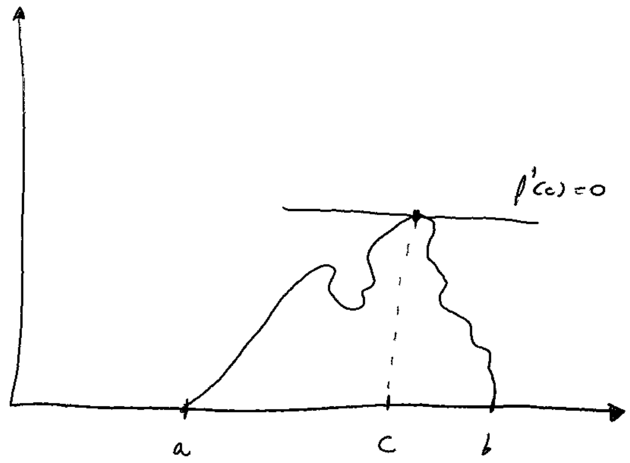
Teorema de Rolle

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si el valor en los dos extremos es 0, existe algún punto del intervalo donde la derivada se anula.

$$f(a) = f(b) = 0 \Rightarrow \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$$

[37] Lo llamamos estricto si la desigualdad $f(x) \geq$ ó $\leq f(c)$ es estricta, en ambos casos **Y SE CAMBIA LA CONDICIÓN A** $0 < |x - c| < \delta$

[38] Con el mínimo se hace exactamente igual



Demostración:

Puede ser que la función sea constante 0, cuyo caso no estudiaremos por la trivialidad de su veracidad.

En caso contrario, $\exists x_0 \in (a,b) : f(x_0) \neq 0$. En primer lugar, supongamos que $f(x_0) > 0 \Rightarrow 0 < f(x_0) \leq \text{máx}\, f(x) : x \in [a,b]$ y como f es continua, entonces el máximo se alcanza por lo que $\exists c \in [a,b] : f(c) = \text{máx}\, f(x) > 0 \Rightarrow c \in (a,b) : c \in \mathring{I} \Rightarrow f'(c) = 0$ por ser máximo relativo.

El caso menor es análogo.

Teorema del valor medio

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b). Entonces ocurre:

$$\exists c \in (a,b) : f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Se observa que imponiendo las condiciones particulares del teorema de Rolle, este último engloba al anterior.

A grandes rasgos viene a decir que existe un punto en el intervalo cuya recta tangente es precisamente una recta paralela a la que atraviesa $f(a)$ y $f(b)$.

Demostración:

Definimos la siguiente función $\psi(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a) - (f(x) - f(a))$. Vemos que reordenando las cosas tenemos:

$$\psi(x) = \underbrace{\frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (x-a) + f(a)}_{polinomio} - f(x)$$

Como ψ es suma de funciones continuas y derivables, es continua y derivable. Además vemos que $\psi(a) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (a-a) + f(a) - f(a) = 0$ y que $\psi(b) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \cdot (b-a) + f(a) - f(b) = 0$ por lo que nos encontramos en las condiciones del teorema de Rolle, es decir:

$$\exists c \in (a,b) : \psi'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{b-a} - f'(c) = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Crecimiento y decrecimiento de funciones

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ es creciente[39] en I si $\forall x_1, x_2 \in I : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$. Como anotación diremos que es estrictamente creciente si ocurre que: $f(x_1) < f(x_2)$.

Teorema

Es fácil observar que si f es creciente, entonces $\frac{f(x_2)-f(x_1}{x_2-x_1} \geq 0$ y si es estrictamente creciente tenemos que $\frac{f(x_2)-f(x_1}{x_2-x_1} > 0$.

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua y derivable en $\mathring{I}$, entonces:

1. f es creciente $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 : \forall x \in \mathring{I}$
2. f es decreciente $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0 : \forall x \in \mathring{I}$

Demostración:

1. - $\Rightarrow$
     Supongamos que f es creciente. Sea $c \in \mathring{I}$, entonces $\exists \delta > 0 : (c-\delta, c+\delta) \subset I$. Podemos ver que $\frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0 : \forall x \in I : x \neq c$ porque si es negativo denominador y numerador son negativos (en cuyo caso el cociente es positivo) y porque si son positivos ya ocurre trivialmente, así que ocurre que $f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$
   - $\Leftarrow$
     Supongamos que $f'(x) \geq 0 : \forall x \in \mathring{I}$. Sean $x_1 < x_2 : x_1, x_2 \in I$. Sabemos que f es continua en I por lo que es continua en $[x_1, x_2])$ y además f es derivable en I por lo que es derivable en (x_1, x_2). Por el teorema del valor medio se tiene que $\exists c \in (x_1, x_2) : f'(c) = \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$ y vemos que por hipótesis $f'(c) \geq 0$
2. Completamente análoga al punto 1.

Corolario

De modo intuitivo se deduce que si $f : I \to \mathbb{R}$ continua en I y derivable en $\mathring{I}$:

$$f'(x) > 0 : \forall x \in \mathring{I} \Rightarrow f \text{ estrictamente creciente}$$

$$f'(x) < 0 : \forall x \in \mathring{I} \Rightarrow f \text{ estrictamente decreciente}$$

PERO EL RECÍPROCO ES COMPLETAMENTE FALSO, por ejemplo, $f(x) = x^3$

Demostración:

Si $x_1 < x_2$ como hemos hecho en la demostración del teorema anterior, aplicamos el teorema del valor medio a f en $[x_1, x_2]$. Del mismo modo, el apartado 2 es totalmente análogo.

Observación

Podríamos llegar a pensar que sea $f : I \to \mathbb{R}$ continua en I y derivable en $\mathring{I}$ se tiene que si en un punto la derivada es estrictamente positiva implica que en los alrededores de ese punto la función es creciente, es decir:

$$f'(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : f'(x) \geq 0$$

[39] Es extensible dicha afirmación a decrecientes cambiando los signos convenientemente.

Lo que queremos decir es que si x está muy cerca de x_0 entonces su derivada tiene que ser positiva, es decir:

$$0 < f'(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \Rightarrow \begin{cases} f(x) > f(x_0) & \text{si } x > x_0 \\ f(x) < f(x_0) & \text{si } x < x_0) \end{cases}$$

Pero esto es completamente falso puesto que existen funciones que a pesar de ser derivables, continuas y en un punto crecientes, no se puede especificar ningún intervalo alrededor de ese punto que mantenga el crecimiento.

<u>Contrajemplo</u>:

Sea $f : \begin{cases} x + 2x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$. Vemos que es continua en $x \neq 0$ por composición de funciones continuas, pero ¿es continua en 0?:

$$\lim_{x \to 0} x + 2x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Vemos que

$$\left| x + 2x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \right| \leq x + 2x^2 \xrightarrow{x \to 0} 0 \Rightarrow x + 2x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow{x \to 0} 0$$

Ahora nos preguntamos ¿f es derivable?, vemos fuera de $x = 0$ como es composición de funciones derivables es derivable y concretamente es:

$$f'(x) = 1 + 4x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) + 2x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\left(\frac{-1}{x^2}\right) = 1 + 4x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

Veamos ahora la derivada en 0:

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{x + 2x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}{x} = \lim_{x \to 0} \left(1 + 2x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right) = 1 + 0 = 1$$

Con lo cual, $f'(x) = \begin{cases} 1 + 4x \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) - 2\cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$. Por lo tanto tenemos que a pesar de que la derivada en 0 es positiva, ocurre que para cualquier intervalo que escojamos alrededor de 0 existen puntos donde la función crece y decrece, porque puedo escoger sucesiones que convergen a 0 pero cuya derivada es negativa y otras cuya derivada es positiva, por lo que no puedo afirmar nada sobre un intervalo alrededor de 0.

Proposición

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ es derivable en x_0 y $f'(x_0) > 0$, entonces sabemos que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0. x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

Y en particular[40]:

$$\begin{cases} x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap I & \Rightarrow f(x) > f(x_0) \\ x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap I & \Rightarrow f(x) < f(x_0) \end{cases}$$

Es decir, que si la derivada en un punto es positiva, entonces la función queda por debajo de ese punto a su izquierda y queda por encima a su derecha, que es muy distinto a la afirmación que hemos dicho que es falsa.

[40]Ocurre de modo análogo cuando $f'(x_0) < 0$

Demostración:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)>0\Rightarrow \varepsilon>0:\exists\delta>0:0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|<\varepsilon$$

Tomamos $\varepsilon=\frac{f'(x_0)}{2}>0$, luego:

$$\exists\delta>0:0<|x-x_0|<\delta\Rightarrow\left|\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)\right|<\frac{f'(x_0)}{2}\Rightarrow\frac{-f'(x_0)}{2}<\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-f'(x_0)<\frac{f'(x_0)}{2}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0<\frac{f'(x_0)}{2}<\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<\frac{3}{2}f'(x_0)$$

Teorema

Sea $f:I\to\mathbb{R}$ una función continua en $c\in\mathring{I}$ y derivable en $(c,c+\delta)$ y $(c-\delta,c)$.

$$f'(x)\geq 0:x\in(c,c+\delta)\text{ y }f'(x)\leq 0:x\in(c-\delta,c)\Rightarrow c\text{ mínimo relativo}$$

$$f'(x)\leq 0:x\in(c,c+\delta)\text{ y }f'(x)\geq 0:x\in(c-\delta,c)\Rightarrow c\text{ máximo relativo}$$

Cabe destacar que no se pide en ningún momento para aplicar este criterio que c sea derivable.

Demostración:

Sea $x\in(c,c+\delta)$, por el teorema del valor medio tenemos que:

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(z):z\in(c,x)\subset(c,c+\delta)\Rightarrow\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\geq 0\Rightarrow f(x)\geq f(c)$$

De modo análogo, se tiene que sea $x\in(c-\delta,c)$, por el teorema del valor medio tenemos que:

$$\frac{f(x)-f(c)}{x-c}=f'(z):z\in(x,c)\subset(c-\delta,c)\Rightarrow\frac{f(x)-f(c)}{x-c}\leq 0\Rightarrow f(x)\geq f(c)$$

Lo que en conjunto implica que sea cual sea x de ese intervalo, $f(x)\geq f(c)$, luego c es un mínimo relativo.

La demostración del máximo es completamente análoga.

Teorema de Darboux

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ de manera que f es derivable en $[a,b]$. La derivada toma todos los valores intermedios entre $f'(a)$ y $f'(b)$.

$$\forall k\in\mathbb{R}:f'(a)<k<f'(b)\text{ o }f'(a)>k>f'(b)\Rightarrow\exists c\in(a,b):f'(c)=k$$

Como observación si f' fuese continua este teorema es trivial por el teorema del valor intermedio aplicado a $f'(x)$, pero sin embargo el teorema no pide la condición de continuidad de la misma.

Una consecuencia muy interesante de este teorema es que la función derivada puede no ser continua, pero en ningún caso puede tener saltos. Como concepto intuitivo, podemos decir que la discontinuidad posible que tienen es que oscile demasiado (como ocurre con $\operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$).

Demostración:

Supongamos $f'(a)<k<f'(b)$ y llamamos $g(x)=kx-f(x)$ y por ser diferencia de funciones continuas y derivables, entonces lo es en $[a,b]$. Entonces tenemos que $\exists c\in[a,b]:g(c)=\max g(x):x\in[a,b]$ por el Teorema de Wiestrass. Veamos que:

$$g'(a)=k-f'(a)\overset{k>f'(a)}{\Rightarrow}g'(a)>0\Rightarrow\exists\delta>0:x\in(a,a+\delta)\Rightarrow g(x)>g(a)$$

Del mismo modo:

$$g'(b) = k - f'(b) < 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 : x \in (b-\delta, b) \Rightarrow g(x) > g(b)$$

Luego $c \neq a$ y $c \neq b$, por lo que $c \in (a,b)$ y $g'(c) = 0 \Rightarrow 0 = g'(c) = k - f'(c) \Rightarrow f'(c) = k$

El otro caso es completamente análogo a lo anterior.

Aplicaciones del Teorema del valor Medio

Aproximaciones

Vamos a aproximar, por ejemplo, la raíz de 105. Sabemos que $\sqrt{100} = 10$ y que $\sqrt{121} = 11$ luego el número que buscamos debe estar entre 10 y 11. Entonces sea $f(x) = \sqrt{x}$ aplicamos el teorema del valor medio entre 100 y 105:

$$\exists c \in (100, 105) : f'(c) = \frac{f(105) - f(100)}{105 - 100} = \frac{\sqrt{105} - \sqrt{100}}{5}$$

Y también sabemos que $f'(c) = \frac{1}{2\sqrt{c}}$, luego se tiene que $\sqrt{105} = 10 + 5f'(c)$. Si como hipótesis teníamos que $10 < c < 11$ es fácil llegar a que $\underbrace{10 + \frac{5}{22}}_{\simeq 10{,}227} < \sqrt{105} < \underbrace{10 + \frac{1}{4}}_{\simeq 10{,}25}$.

Desigualdades

Vamos a probar que $e^x \geq 1 + x : \forall x \in \mathbb{R}$. Es evidente que $1 = e^0$ así que tomamos $f(x) = e^x$ luego por el teorema del valor medio se tiene que:

- $x > 0$

$$\exists c \in (0, x) : e^c = f'(c) = \frac{e^x - e^0}{x - 0} \Rightarrow e^x - 1 = xe^c \overset{c>0}{\Rightarrow} e^x - 1 = xe^c > x \Rightarrow e^x > 1 + x$$

- $x > 0$

$$\exists c \in (x, 0) : e^c = f'(c)\frac{e^x - e^0}{x - 0} \Rightarrow e^x - 1 = xe^c$$

  Como $0 < e^c < 1$ y $x < 0$, entonces $xe^x > x \Rightarrow e^x > 1 + x$

- $x = 0$

$$e^0 = 1 + 0$$

Regla de L'Hopital

Por qué en algunos casos uno se espera que esos dos límites coincidan:

Ej.:

Supongamos que $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ de manera que $f(a) = 0 = g(a)$ y supongamos que $g'(a) \neq 0$. Si yo quiero calcular:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} \Rightarrow \lim_{x \to a} \frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}$$

Ahora si imponemos que f y g sean derivables en a se tiene que:

$$= \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

L'Hôpital 1

Sea $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ donde $-\infty \leq a < b \leq \infty$, f y g derivables en (a, b) con $g'(x) \neq 0 : \forall x \in (a, b)$. Supongamos que $\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} g(x) = 0$, si existe el $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$ entonces $\lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

Demostración

Se basa en el siguiente resultado:

Teorema del valor medio de Cauchy

Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas en $[a, b]$ y derivables en (a, b). Supongamos que $g'(x) \neq 0 : \forall x \in (a, b)$, entonces $\exists c \in (a, b) : \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Es fácil ver que si cogemos $g(x) = x$ recuperamos el enunciado que hemos visto del Teorema del valor Medio.

Demostración:

Sea $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida como $F(x) = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x) - g(a)) \cdot (f(x) - f(a))$. De nuevo vemos que por ser suma de funciones continuas y derivables, F es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) y además $(g(x) - g(a)) \neq 0$ porque por el teorema de valor medio ocurriría que $g(b) = g(a) \Rightarrow \exists c \in (a, b) : g'(c) = 0 \Rightarrow \#$ porque hemos dicho que $g'(x) \neq 0$.

Además ahora tenemos que $F(b) = F(a) = 0$, por lo que por el Teorema de Rolle tenemos que $\exists c \in (a, b) : F'(c) = 0 \Rightarrow \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Volviendo a la demostración inicial, vamos a ver el caso en que $L \in \mathbb{R}$. Por la definición de límite tenemos que:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists c \in (a, b) : x \in (a, c) \Rightarrow \left| \frac{f'(x)}{g'(x)} - L \right| \Leftrightarrow L - \varepsilon < \frac{f'(x)}{g'(x)} < L + \varepsilon$$

Vamos a escoger $a < \alpha < \beta < c$, entonces vemos que $f, g : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ y cumplen las hipótesis del Teorema visto antes, así que:

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} = \frac{f'(u)}{g'(u)} : u \in (\alpha, \beta)$$

FALTA ALGUNA COSILLA DE EXPLICACIÓN

Entonces si $a < \alpha < \beta < c$, se tiene que:

$$L - \varepsilon < \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} < L + \varepsilon$$

Vamos a fijar β y vamos a acercar α cada vez más a a, por lo tanto podemos pasar al límite cuando $\alpha \to a$:

$$\frac{f(\beta) - f(\alpha)}{g(\beta) - g(\alpha)} \xrightarrow{\alpha\to a^+} \frac{f(\beta)}{g(\beta)}$$

FALTA EXPLICACIONES IMPORTANTES DE MOVER PARÁMETROS

Como $L - \varepsilon < \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)} < L + \varepsilon$ cuando $\alpha \to a^+$ tenemos que:

$$L - \varepsilon \leq \frac{f(\beta)}{g(\beta)} \leq L + \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{f(\beta)}{g(\beta)} - L \right| < \varepsilon : \forall a < \beta, c$$

Luego precisamente esto es la definición de límite:

$$\lim_{\beta\to a^+} \frac{f(\beta)}{g(\beta)}$$

Para cambiar la demostración para que sea $L \in \overline{\mathbb{R}}$ entonces:

CAMBIA COSAS QUE NO HE VISTO.

L'Hôpital 2

Sea $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivables en (a, b), supongamos que $g'(x) \neq 0 : \forall x \in (a, b)$ y $\lim_{x\to a^+} g(x) = \pm\infty$, entonces:

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

<u>Demostración</u>:

La demostración es muy parecido a lo anterior y se deja para mirar en los libros en caso de no saber hacerla.

Ejemplos de aplicación del Teorema de L'Hôpital

Supongamos que $\lim_{x\to\infty} e^{-x} \cdot x^2$, es fácil ver que nos queda una indeterminación de tipo $\frac{\infty}{\infty}$ porque se puede reescribir $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x}$. Como se cumplen las hipótesis de L'Hopital podemos hacer:

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x} \cdot x^2 = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{e^x} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{e^x} \overset{\text{L'Hôpital}}{=} \lim_{x\to\infty} \frac{2}{e^x} = 0$$

Supongamos que $\lim_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{x}$ que de nuevo nos queda la indeterminación de $\frac{\infty}{\infty}$, como se cumplen las hipótesis digo:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ln(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

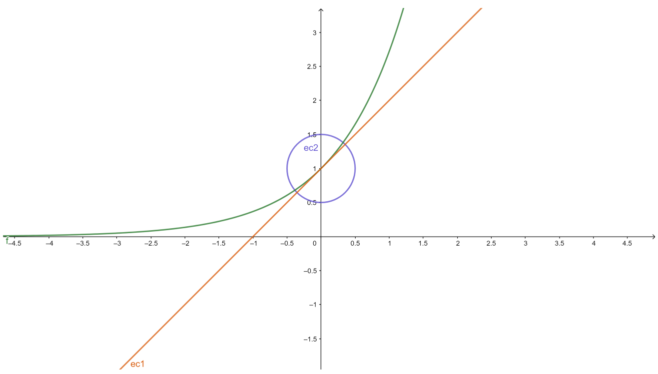
Veamos el caso $\lim_{x\to\infty} e^{-\alpha\cdot x} \cdot x^n$, la pregunta es saber si habrá valores de α o de n para los que pasen cosas distintas (¿quién gana?):

$$\lim_{x\to\infty} e^{-\alpha x} x^n = \lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^{\alpha x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{n \cdot x^n}{\alpha e^{\alpha x}} = \cdots = \lim_{x\to\infty} \frac{n!}{\alpha^n e^{\alpha x}} = 0$$

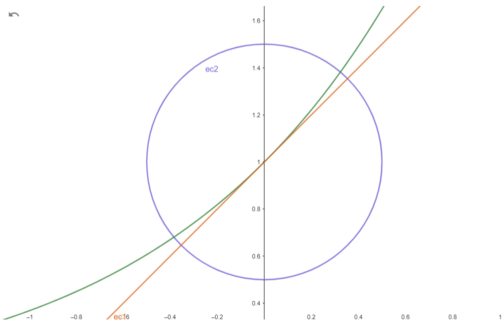
Teorema de Taylor

Polinomio de Taylor

Supongamos que tenemos una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vemos que la recta tangente es la recta que mejor aproxima a la función en un punto:



Si ampliamos vemos que de todas las rectas posibles que atraviesa ese punto es la que más "se parece" a la función que tenemos.



Entonces nos surge la duda de cuál será el polinomio de grado 2 que mejor aproxime a f, y en general, cuál será el polinomio de grado n que mejor aproxima a la función f.

Veamos en primer lugar el polinomio de grado 2 de manera que en $p(x_0) = f(x_0)$ y que verifica que $p'(x_0) = f'(x_0)$ y $p''(x_0) = f''(x_0)$:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)^2$$

Entonces ahora vemos que:

$$\begin{cases} p(x_0) = b_0 + 0 + 0 = b_0 = f(x_0) & \Rightarrow b_0 = f(x_0) \\ p'(x_0) = b_1 + 2b_2(x_0 - x_0) = b_1 = f'(x_0) & \Rightarrow b_1 = f'(x_0) \\ p''(x_0) = 2b_2 = f''(x_0) & \Rightarrow b_2 = \frac{f''(x_0)}{2} \end{cases}$$

Luego el polinomio queda como $p(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2$

Podríamos preguntarnos lo mismo con grado 3 y con grado 4, pero cabe para ver el caso general, concluimos que el único polinomio de grado n tal que $p_n(x_0) = f(x_0)$, $p_n'(x_0) = f'(x_0)$, ..., $p_n^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0)$ es precisamente:

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}(x - x_0)^3 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

<u>Demostración</u>:

Basta con probar que las sucesivas derivadas del polinomio que hemos construido van coincidiendo con lo que se espera de ellas y de este modo quedaría probado.

Teorema de Taylor

Vamos a considerar $I = [a, b]$, que la función $f : I \to \mathbb{R}$ verifica que $f, f', f'', ..., f^{(n)}$ existen y son continuas en I y además que $f^{(n+1)}$ existe en el intervalo abierto (a, b). Entonces si $x_0 \in [a, b]$ se tiene que:

$$\forall x \in I : f(x) = p_n(x; x_0) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}}_{\text{Resto de Lagrange}}$$

[41]

Donde $p_n = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$, $R_n = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$ y donde $c \in (x, x_0) \cup (x_0, x)$ y es fácil ver que entonces c depende de x_0, x, n, f.

[41] Es el error que existe entre la aproximación del polinomio de Taylor y la función requerida

Como observación, si escogemos $n = 0$ entonces quedaría como $f(x) = p_n + R_n = f(x_0) + f'(c)(x - x_0) \Rightarrow \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(c)$ que es justamente el Teorema del Valor Medio, así que podemos considerar que este teorema es como una generalización del teorema del Valor Medio.

<u>Demostración</u>:

Definimos la función $F(t)$ con $t \in I$ de la siguiente forma:

$$F(t) = f(x) - \left[f(t) + f'(t)(x-t) + \frac{f''(t)}{2}(x-t)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(x-x_0)^n\right] = f(x) - p_n(x;t)$$

Vemos entonces que ocurre que $F(x) = f(x) - f(x) = 0$, que $F(x_0) = f(x_0) - p_n(x;x_0)$ y que además es continua y derivable. Veamos su derivada:

$$F'(t) = -\left[\cancel{f'(t)} + \cancel{f''(t)(x-t)} \cancel{- f'(t)} + \frac{f'''(t)}{\cancel{2!}}\cancel{(x-t)^2} + \frac{f''(t)}{\cancel{2!}}\cancel{2(x-t)(-1)} + \cancel{\cdots} + \frac{f^{(n-1)}(t)}{n!}(x-t)^n\right]$$

$$= -\frac{f^{(n-1)}(t)}{n!}(x-t)^n$$

Se va todo con todo porque es como una suma telescópica, cada término se anula con el siguiente al siguiente menos el último que se queda sin pareja para irse.

Ahora vamos a definir otra función que llamaremos $G(t) = (x-t)^{n+1}$ y ahora vamos a aplicar el Teorema del valor medio de Cauchy porque G es derivable y su derivada es distinta de 0 en cualquier valor de t:

$$\exists c \in (x_0, x) \vee (x, x_0) : \frac{F(x) - F(x_0)}{G(x) - G(x_0)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} \Rightarrow \frac{F(x_0)}{G(x_0)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} \Rightarrow F(x_0) = G(x_0)\frac{F'(c)}{G'(c)} =$$

$$= (x-x_0)^{n+1} \cdot \frac{-f^{(n+1)}(c)(x-c)^n}{-1 \cdot n!(n+1)(x-c)^n} \Rightarrow f(x) - p_n(x;x_0) = R_n$$

Aplicaciones del Teorema de Taylor

Veamos el caso de $f(x) = e^x$, ocurre que $f'(x) = e^x$ y en particular $\forall n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(x) = e^x$, si tomamos $x_0 = 0$, entonces $f(0) = 1 = f'(0) = f''(0) = \cdots = f^{(n)}(0)$ y el polinomio de taylor queda como:

$$e^x = \underbrace{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n}_{p_n(x;0)} + \underbrace{\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}}_{R_n(x;0)}$$

¿Pero para qué sirve esto? Pues vamos a aproximar el número e:

$$x = 1 \Rightarrow e = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}$$

Ahora como c depende de n dando valores vamos a obtener sucesivas aproximaciones cada vez más refinadas:

$$0 < e - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!}) = \frac{e^c}{(n+1)!} \leq \frac{e}{(n+1)!} \leq \frac{3}{(n+1)!}$$

Con lo cual despejando e y ya que lo tenemos acotado, podemos dar valores de n cada vez más grandes para que quede más acotado.

Ej.: ¿Qué valor tiene que tomar n para aproximar e con un error menor que 10^5?

$$\frac{3}{(n+1)!} < 10^5 \Rightarrow n > 8$$

Proposición

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ donde I es un intervalo y $x_0 \in \mathring{I}$. Supongamos además que $\exists f, f', f'', ..., f^{(n)}$ y son continuas en un entorno de x_0, es decir, en $(x_0-\delta, x_0+\delta)$. Si $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ y $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, entonces:

- n es par y $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ es mínimo relativo estricto
- n es par y $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ es máximo relativo estricto
- n es impar, entonces el punto no es ni máximo ni mínimo

Demostración:

Por el Teorema de Taylor:

$$f(x) = p_{n-1}(x; x_0) + R_{n-1}(x; x_0) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-x_0)^n$$

Por las hipótesis de que todas las derivadas menos la enésima son nulas tenemos que:

$$\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) : f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n$$

Lo importante es pensar ahora que ocurre realmente cuando la x se asemeja mucho a la x_0. Como $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, entonces si $f^{(n)}(x_0) > 0$ como $f^{(n)}$ es continua en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, entonces $\exists \delta' < \delta : \forall x \in (x_0 - \delta', x_0 + \delta') : f^{(n)}(x) > 0$.

Entonces para $0 < |x - x_0| < \delta'$, entonces puedo escoger el $c \in (x_0 - \delta', x_0 + \delta') \Rightarrow f^{(n)}(c) > 0$, de forma similar ocurre que $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow f^{(n)}(c) < 0$ así que volviendo a $f(x)$:

- n par y $f^{(n)}(x_0) > 0$ para $x \in (x_0 - \delta', x_0 + \delta')$.

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n}_{>0} \Rightarrow f(x) > f(x_0) \Rightarrow x_0 \text{ mínimo}$$

- n par y $f^{(n)}(x_0) < 0$ para $x \in (x_0 - \delta', x_0 + \delta')$

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n}_{<0} \Rightarrow f(x) < f(x_0) \Rightarrow x_0 \text{ máximo}$$

- n impar

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f^{(n)}}{n!}(x - x_0)^n}_{???}$$

  Como ahora $f^{(n)}(c)$ es fijo el término que no podemos determinar el signo que toma lo demás y en consecuencia no puede ser máximo ni mínimo.

Proposición

El polinomio de Taylor aproxima a la función mejor que cualquier otro polinomio.

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ y que $f, f'', ..., f^{(n)}, f^{(n+1)}$ son continuas. Siendo $x_0 \in \mathring{I}$, si $p_n(x; x_0)$ es el polinomio de Taylor, de grado n, centrado en x_0 y llamamos $Q_n(x)$ otro polinomio de grado $\leq n$ vamos a probar que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{|f(x) - p_n(x; x_0)|}{|f(x) - Q_n(x)|} = 0$$

Porque eso indicaría que el numerador se parece más rápido a $f(x)$ que el denominador.

Demostración:

$$f(x) - p_n(x;x_0) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

Como en particular es continua en un entorno de x_0, lo anterior va a estar acotado. Fijamos un $\delta_0 > 0 : [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \in I$ y si $M_{n+1} = \text{máx}\,|f^{(n+1)}(x)|$ donde $|x - x_0| < \delta$. Es decir, que llamo M_{n+1} a la máxima derivada del orden $n+1$ de las x en ese entorno alrededor de x_0.

Por tanto:

$$x \in [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \Rightarrow c \in [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \Rightarrow |f^{(n+1)}(c)| \leq M_{n+1}$$

Y en consecuencia:

$$x \in [x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0] \Rightarrow |f(x) - p_n(x;x_0)| \leq \underbrace{\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}}_{cte}|x-x_0|^{n+1}$$

Por otro lado, si $p_n(x;x_0) = p_0 + p_1(x-x_0) + \cdots + p_n(x-x_0)^n$ y $Q_n(x) = q_0 + q_1(x-x_0) + \cdots + q_n(x-x_0)^n$ como deben ser distintos:

$$Q_n \neq p_n \Rightarrow \exists i_0 \in \{0, ..., n\} : p_{i_0} \neq q_{i_0} \wedge p_i = q_i : \forall i < i_0$$

Por tanto:

$$p_n(x;x_0) - Q_n(x) = (p_{i_0} - q_{i_0})(x-x_0)^{i_0} + (p_{i_0+1} - q_{i_0+1})(x-x_0)^{i_0+1} + \cdots + (p_n - q_n)(x-x_0)^n \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_n(x;x_0) - Q_n(x) = (p_{i_0} - q_{i_0})(x-x_0)^{i_0}\left(1 + \frac{p_{i_0+1} - q_{i_0+1}}{p_{i_0} - q_{i_0}}(x-x_0) + \cdots + \frac{p_n - q_n}{p_{i_0} - q_{i_0}}(x-x_0)^{n-i_0}\right)$$

Como todos los términos de dentro del paréntesis excepto el uno van a 0, entonces podemos escoger un delta de manera que sean más pequeños que $\frac{1}{2}$:

$$\delta_1 < \delta_0 : |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow \left|\frac{p_{i_0+1} - q_{i_0+1}}{p_{i_0} - q_{i_0}}(x-x_0) + \cdots + \frac{p_n - q_n}{p_{i_0} - q_{i_0}}(x-x_0)^{n-i_0}\right| \leq \frac{1}{2}$$

Entonces para tratar de acotarlo:

$$|x-x_0| < \delta_1 \Rightarrow |p_n(x;x_0) - Q_n(x)| = |p_{i_0} - q_{i_0}||x-x_0|^{i_0}\underbrace{|1 + \cdots|}_{\geq \frac{1}{2}} \geq \frac{|p_{i_0} - q_{i_0}|}{2}|x-x_0|^{i_0}$$

Entonces para los $|x - x_0| < \delta_1$ tenemos dos estimaciones, queremos ver esto:

$$|x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow \frac{|f(x) - p_n(x;x_0)|}{|f(x) - Q_n(x)|}$$

Por un lado:

$$|f(x) - Q_n(x)| = |f(x) - Q_n(x) + p_n(x;x_0) - p_n(x;x_0)| \geq |p_n(x;x_0) - Q_n(x)| - |f(x) - p_n(x;x_0)| \geq$$

$$\geq \frac{|p_{i_0} - q_{i_0}|}{2}|x-x_0|^{i_0} - \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$$

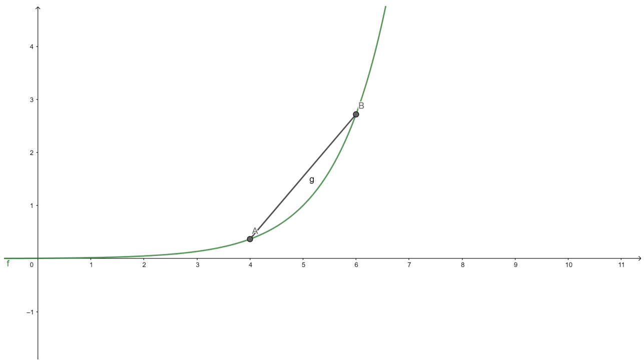
Y esto último es siempre positivo porque cuando $x \to x_0$ el término $n+1$ se hace pequeño mucho más rápido que el término i_0 (la demostración es sacar factor común). Pues con numerador y denominador acotado puedo escribir que:

$$= \frac{|f(x) - p_n(x;x_0)|}{|f(x) - Q_n(x)|} \leq \frac{\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}}{|x-x_0|^{i_0}\left(\frac{|p_{i_0}-q_{i_0}|}{2} - \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x-x_0|^{n-i_0+1}\right)} = \frac{\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x-x_0|^{n-i_0+1}}{\frac{|p_{i_0}-q_{i_0}|}{2} - \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|x-x_0|^{n-i_0+1}}$$

Y es trivial ver que cuando $x \to x_0$ el denominador tiende a una constante y el numerador tiende a 0, luego el resultado de pasar al límite es 0 por la regla del sandwich (porque ese cociente es positivo).

Convexidad y concavidad

De forma intuitiva, decimos que una función es convexa cuando tiene la forma de "una sonrisa" y ocurre que siempre que uno dos puntos de la función en un intervalo I la gráfica de la función queda por arriba o por debajo de la recta.



Como definición formal, decimos que una función $f : I \to \mathbb{R}$ se dice que es convexa si para cualquier par de puntos de I que escojamos y para todo[42] $t \in (0, 1)$ se tiene que:

$$\forall x_0, x_1 \in I : \forall t \in (0,1) : f(tx_0 + (1-t)x_1) \leq f(x_0) + (1-t)f(x_1)$$

Interpretación:

Si tenemos $x_0, x_1 \in I$, supongamos $x_0 < x_1$, sin pérdida de generalidad, y $t \in (0, 1)$. Veamos que siempre $tx_0 + (1-t)x_1 \in (x_0, x_1)$:

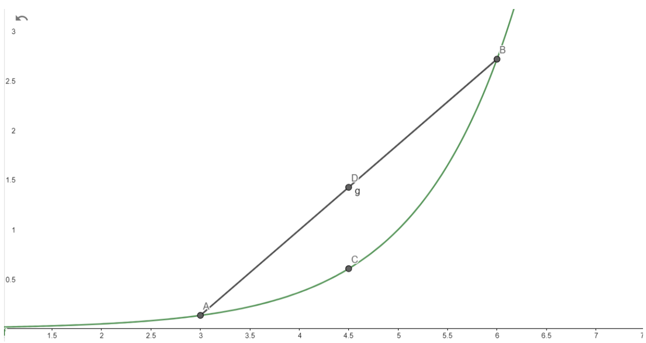
$$tx_0+(1-t)x_1 = x_0 - x_0 + tx_0 + (1-t)x_1 = x_0 + \underbrace{(1-t)(x_1-x_0)}_{>0} \Rightarrow x_0 \leq tx_0 + (1-t)x_1 \leq \underbrace{x_0 + (x_1 - x_0)}_{=x_1}$$

Además cabe destacar que cualquier punto entre ambos puntos se puede escribir de esta forma tomando un cierto valor de t:

$$z \in (x_0, x_1) \Rightarrow z = x_0 + \frac{z - x_0}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0) = x_0 + \frac{z - x_1 + x_1 - x_0}{x_1 - x_0}(x_1 - x_0) =$$

$$= x_0 + (1 - \underbrace{\frac{x_1 - z}{x_1 - x_0}}_{=t})(x_1 - x_0) = x_0 + (1-t)(x_1 - x_0)$$

A la expresión $tx_0 + (1-t)x_1 : t \in (0,1)$ se le denomina combinación lineal convexa de x_1 y x_2.



En el fondo lo que decimos es que la proyección del punto sobre la recta siempre está por encima de la imagen cuando nos encontramos en un intervalo de convexidad.

[42] Para los valores de $t = 0$ y $t = 1$ la desigualdad es trivial

Teorema

Supongamos que $f : I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo abierto, es una función con dos derivadas en I, entonces f es convexa en I si y sólo si $f''(x) > 0 : \forall x \in I$.

Vamos a ver por qué debe ocurrir de forma intuitiva, que $f''(x) > 0$ entonces $f'(x)$ es creciente en ese intervalo y vimos que la interpretación geométrica de la derivada era la pendiente de la recta tangente a la curva en un punto; por lo que las rectas tangentes van siendo cada vez más pronunciadas y eso es lo que es la idea de convexidad.

Demostración:

- $\Leftarrow$:

  Para poder demostrarlo vamos a demostrar este resultado:

  $$f(tx_0 + (1-t)x_1) \leq tf(x_0) + (1-t)f(x_1)$$

  Fijamos x_0 y x_1 de I y $t \in (0,1)$. Sea $z = tx_0 + (1-t)x_1$ vamos a hacer un desarrollo de Taylor de orden 1 centrado en z:

  $$f(x) = f(z) + f'(z)(x-z) + \frac{f''(c)}{2}(x-z)^2$$

  Luego tenemos que:

  $$\begin{cases} f(x_0) = f(z) + f'(z)(x_0 - z) + \frac{f''(c_0)}{2}(x_0-z)^2 \\ f(x_1) = f(z) + f'(z)(x_1 - z) + \frac{f''(c_1)}{2}(x_1-z)^2 \end{cases}$$

  En ambos casos el resto de Lagrange es positivo y, en consecuencia, como se cumple que es positivo para todos los $c \in (x_0, z)$ o $c \in (z, x_1)$. Por tanto ahora tenemos:

  $$\begin{cases} f(x_0) \geq f(z) + f'(z)(x_0 - z) \\ f(x_1) \geq f(z) + f'(z)(x_1 - z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} tf(x_0) \geq tf(z) + tf'(z)(x_0 - z) \\ (1-t)f(x_1) \geq (1-t)f(z) + (1-t)f'(z)(x_1 - z) \end{cases} \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow tf(x_0)+(1-t)f(x_1) \geq f(z)+f'(z)(\underbrace{tx_0 + (1-t)x_1 - z}_{=0}) \Rightarrow tf(x_0)+(1-t)f(x_1) \geq f(tx_0+(1-t)x_1)$$

- $\Rightarrow$:

  Supongamos que f es convexa y $a \in I$, lo que vamos a ver es:

  $$f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)}{h^2}$$

  Esto lo asumimos como cierto. Veamos ahora que como a es el punto medio de $a+h$ y $a-h$ para cualquier h, entonces se puede expresar como combinación lineal convexa de ambos puntos:

  $$a = \frac{1}{2}(a-h)+\frac{1}{2}(a+h) \overset{Convexa}{\Rightarrow} f(a) \leq \frac{1}{2}f(a-h)+\frac{1}{2}f(a+h) \Leftrightarrow \frac{1}{2}f(a-h)+\frac{1}{2}f(a+h)-2f(a) \geq 0 \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow \frac{\frac{1}{2}f(a-h) + \frac{1}{2}f(a+h) - 2f(a)}{h^2} \geq 0 \Rightarrow f''(a) = \lim > 0$$

  Falta solo demostrar la parte que hemos usado de $f''(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-2f(a)+f(a-h)}{h^2}$. Si definimos $\psi(h) = f(a+h) - 2f(a) + f(a-h)$ entonces vemos que es continua y derivable porque las que la componen lo son. Ahora calculamos, aplicando L'Hopital, el límite:

  $$\lim_{h \to 0} \frac{\psi(h)}{h^2} = \lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a-h)}{2h} = \cancel{\lim_{h \to 0} \frac{f''(a+h) - f''(a-h)}{2}}$$

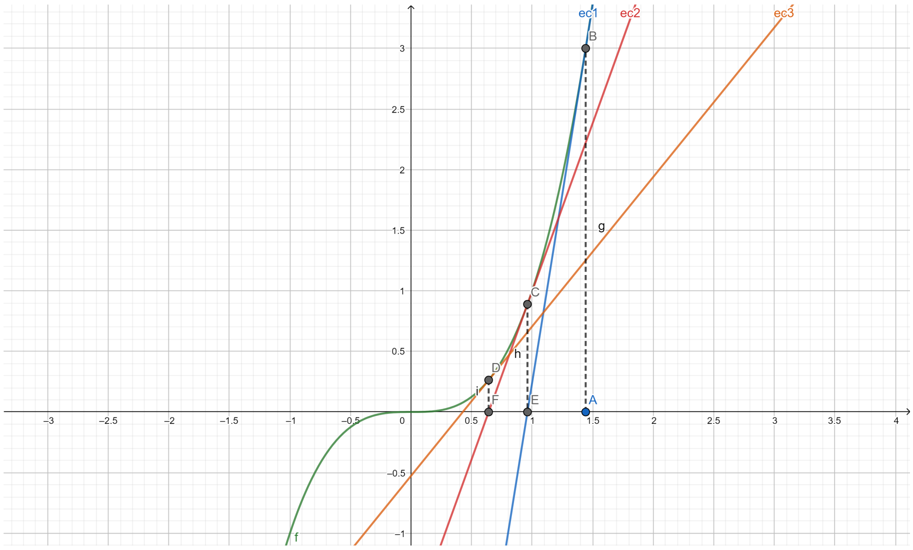
  Pero esto no puede hacerse porque no podemos asumir que la segunda derivada sea continua, en su caso vamos a proceder a hacer esto:

  $$\lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a) + f'(a) - f'(a-h)}{2h} = \frac{1}{2}\left(\lim_{h \to 0} \frac{f'(a+h) - f'(a)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f'(a) - f'(a-h)}{h}\right) =$$

  $$= \frac{1}{2}\left(f''(a) + f''(a)\right) = f''(a)$$

Método de Newton para calcular raíces de f(x)

Si calculamos la recta tangente a la función en un punto cercano a una raíz, vemos que esta corta cerca de la raíz. Si hacemos lo mismo con los sucesivos puntos de corte de cada una de las tangentes, los puntos de corte cada vez se aproximan más a la raíz que buscamos aproximar.



Indudablemente, este método puede fallar si no nos encontramos suficientemente cerca de la raíz porque puede ocurrir que uno de los cortes caiga justo en un punto cuya derivada es 0 y en ese caso la recta tangente no cortaría al eje en ningún punto.

Para ver la relación entre un punto y el siguiente, estudiamos la recta tangente: $y - f(x') = f'(x')(x - x')$ y x'' es tal que $(x'', 0)$ está en la recta así que:

$$0 - f(x') = f'(x')(x'' - x') \Leftrightarrow \frac{-f(x')}{f'(x')} = x'' - x'$$

Es decir, tenemos una sucesión de puntos para realizar las sucesivas iteraciones del algoritmo y que cada vez están más cerca de la raíz:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de manera que:

- $f(a) \cdot f(b) < 0$ (signos distintos)
- $|f'(x)| \geq m > 0$
- $|f''(x)| \leq M : \forall x \in [a, b]$

Existe una única raíz y un entorno alrededor de ella de manera que si cogemos el primer punto en ese entorno, la sucesión está acotada en el entorno y converge a la raíz:

$$\exists r! \in (a, b) : f(r) = 0 \text{ y } \exists \delta > 0 : [r - \delta, r + \delta] \subset [a, b]$$

$$x_0 \in [r - \delta, r + \delta] \Rightarrow \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [r - \delta, r + \delta] \text{ y } |x_{n+1} - r| \leq \underbrace{K}_{=\frac{M}{2m}} |x_n - r|^2 \text{ y } x_n \xrightarrow{n \to \infty} r$$

Demostración:

Lo primero, por el Teorema de Bolzano se cumple que $\exists r \in (a,b) : f(r) = 0$, además $f'(x) \neq 0 : \forall x \in [a,b]$ por suponer que la derivada es mayor que m y entonces por el Teorema de Rolle, la raíz es única.

Sea $x' \in (a,b)$ vamos a hacer el desarrollo de Taylor centrado en x':

$$f(z) = f(x') + f(x')(z - x') + \frac{f''(c)}{2}(z - x')^2$$

Entonces tenemos ahora que si $z = r$, ocurre que:

$$0 = f(x') + f'(x')(r - x') + \frac{f''(c)}{2}(r - x')^2 \Leftrightarrow -\frac{f(x')}{f'(x')} + x' - r = \frac{1}{2} \cdot \frac{f''(c)}{f'(x')}(r - x')^2$$

$$\underbrace{x' - \frac{f(x')}{f'(x')}}_{=x''} - r = \frac{1}{2}\frac{f''(c)}{f'(x')}(x' - r)^2 \Rightarrow |x'' - r| = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{f''(c)}{f'(x')}\right| |x' - r|^2 \leq \underbrace{\frac{M}{2m}}_{=K} |x' - r|^2$$

Sea $\delta > 0 : [r - \delta, r + \delta] \subset (a,b)$ y $K \cdot \delta < 1$. Entonces si $x' \in [r - \delta, r + \delta] \Rightarrow |x'' - r| \leq K \underbrace{|x' - r|}_{\leq \delta} \cdot |x' - r| \leq |x' - r|$. Lo que quiere decir que la distancia de x'' a r es menor que la que había con respecto a x' y, en consecuencia, $x'' \in [r - \delta, r + \delta]$.

Y esto me permite ahora definir por inducción la sucesión de manera que:

$$x_0 \in [r - \delta, r + \delta] \Rightarrow x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} : \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [r - \delta, r + \delta]$$

Y por último veamos que la sucesión converge a la raíz:

$$|x_{n+1} - r| \leq K|x_n - r|^2 = K|x_n - r| \cdot |x_n - r| \leq K\delta \cdot |x_n - r|$$

Es fácil ver que como $K\delta < 1$ las sucesivas distancias se van haciendo más pequeñas de manera que cada vez está todo más junto, luego:

$$|x_1 - r| \leq K\delta |x_0 - r|$$

$$|x_2 - r| \leq K\delta \cdot |x_1 - r| \leq (K\delta)^2 |x_0 - r|$$

$$|x_n - r| \leq (K\delta)^n |x_0 - r| \Rightarrow x_n - r \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Rightarrow x_n \xrightarrow{n\to\infty} r$$

Además la convergencia de esta sucesión es muy rápida, llamemos al error de la aproximación $e_n = |x_n - r|$, luego $e_{n+1} \leq Ke_n^2 \Rightarrow Ke_{n+1} \leq (Ke_n)^2$ luego si suponemos que en la primera iteración el error es de 10^{-1}, tenemos:

$$Ke_1 = 10^{-1} \Rightarrow Ke_2 = 10^{-2} \Rightarrow Ke_3 = 10^{-4} \Rightarrow Ke_4 = 10^{-8}$$

Ejemplos

Veamos por ejemplo el método para calcular la raíz $\sqrt{2}$ de la función $f(x) = x^2 - 2$.

Es notable que $f(1) < 0$ y $f(2) > 0$, que $\forall x \in [1,2] : f'(x) \geq 2$ y $f''(x) = 2$ luego estamos en las condiciones del Teorema:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}$$

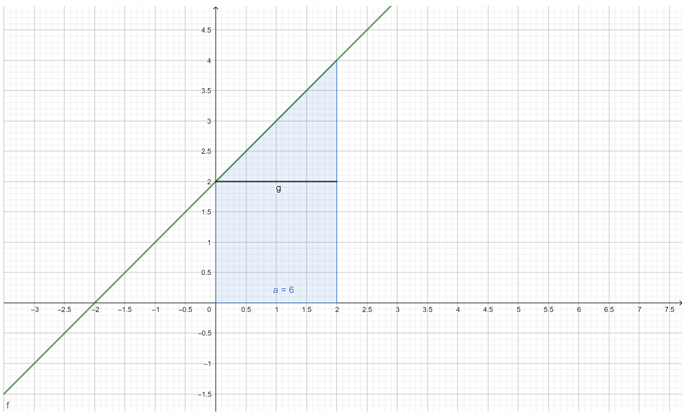
Comenzamos con $x_1 = 1$, entonces $x_2 = \frac{3}{2}$, $x_3 = \frac{17}{12}$ y así podemos seguir aproximando hasta conseguir el error deseado.

CÁLCULO INTEGRAL

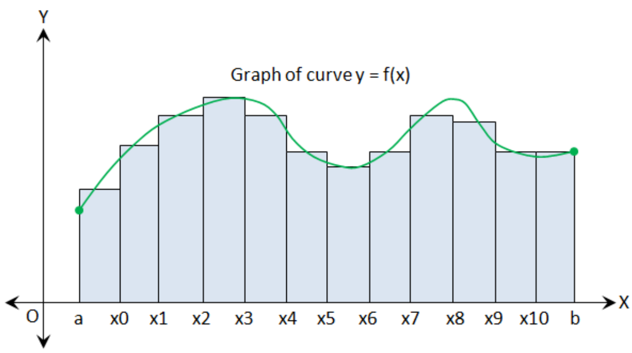
Prólogo

Si bien la derivación abordaba las rectas tangentes a funciones y poseen múltiples aplicaciones en la física, ingeniería, ... las integrales resuelven un problema fundamental como es el cálculo de áreas, es decir, conocer el área bajo la curva de una función.

Cuando las cosas son rectas, poseemos métodos geométricos (como la triangularización) para poder dividir el problema en otros más pequeños que sí se resolver y luego unir todas las áreas.



El problema viene cuando encontramos funciones que no son rectas, sino que describen curvas y entonces no somos capaces de poder aplicar estos métodos. Una forma de aproximar este tipo de áreas es dividir el eje x en segmentos y hallar el rectángulo de cada uno de los segmentos. Sumándolas todas tenemos una aproximación más o menos buena cuanto en función de la pequeñez de esos segmentos.



Como cada vez que disminuyo la base de los rectángulos, la aproximación es mejor, entonces la suma de las áreas converge a su valor real cuando la longitud del segmento tiende a 0. Con lo cual, si dividimos en infinitos trozos haciendo rectángulos con esos trozos entonces tenemos el área bajo la curva.

DEFINICIÓN DE INTEGRAL

Integral de Riemann

Pasando un poco a la definición más formal, tenemos que dado el intervalo $[a, b] = I$, una **partición** viene dada por:

$$\wp = \{x_0 = a < x - 1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$$

$$DIBUJO$$

Y definimos[43] la **norma de la partición** como:

$$||\wp|| = \max\{x_i - x_{i-1}\}$$

En particular, la **partición uniforme o equiespaciada** se define como una partición donde todos los puntos tienen la misma separación:

$$\wp = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\} : x_i = a + i \cdot \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{=||\wp||}$$

Definimos pues ahora una **partición marcada o etiquetada** denotada por $\mathring{\wp}$ como una partición $\wp$ y unos puntos $\forall i = 1, ..., n : \exists! t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ (uno por intervalo) a los que llamaremos marcas.

Suma de Riemann e Integral

Suma de Riemann

Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y una partición marcada $\mathring{\wp} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\} : \exists! t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, entonces definimos la suma de Riemann de f en $\mathring{P}$ como:

$$S(f, \mathring{\wp}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

Es decir, en este caso estamos cogiendo los rectángulos cuya base son los segmentos que hemos definido y cuya altura es la imagen de la marca, por lo que es una aproximación del área explicada en el Prólogo.

Integral de Riemann

Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice que es integrable en el sentido de Riemann que denotamos como $f \in R[a, b]$ si $\exists L \in \mathbb{R}$:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \mathring{\wp} : ||\wp|| < \delta : |S(f, \mathring{\wp}) - L| < \varepsilon$$

En definitiva, lo que decimos es que si en esa suma de Riemann, hacemos que n sea muy grande para que la norma sea muy pequeña, entonces su distancia al número L es muy pequeña.

Vamos a denotar por $R[a, b]$ que son Riemann integrables en $[a, b]$.

[43] Por lo que hay n intervalos.

Teorema

Si $\exists L \in \mathbb{R}$, entonces $\exists! L \in \mathbb{R}$, es decir, este valor es único. A este número le llamaremos la **integral de f entre a y b** y lo denotaremos por:

$$\int_a^b f(x)dx$$

Si nos fijamos el símbolo $\int$ viene de una "s" alargada de la palabra suma y el símbolo dx viene de Δx que es $(x_i - x_{i-1})$ pero con la connotación de que este incremento es casi nulo, **diferencial**.

Demostración:

Supongamos que existen dos L y L' que verifican la definición, por lo que:

$$\begin{cases} \varepsilon > 0 : \exists\delta : ||\mathring{\wp}|| < \delta \Rightarrow |S(f, \mathring{\wp}) - L| < \varepsilon \\ \varepsilon > 0 : \exists\delta' : ||\mathring{\wp}|| < \delta' \Rightarrow |S(f, \mathring{\wp}) - L'| < \varepsilon \end{cases}$$

Luego tomando una partición de forma que $||\wp|| < \text{mín}\{\delta, \delta'\}$ tenemos que:

$$\begin{cases} |S(f, \mathring{\wp}) - L| < \varepsilon \\ |S(f, \mathring{\wp}) - L'| < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow |L-L'| = |L-S(f,\mathring{\wp})+S(f,\mathring{\wp})-L'| \leq |L-S(f,\mathring{\wp})|+|S(f,\mathring{\wp})-L'| < 2\varepsilon \Rightarrow L = L'$$

Ejemplos

Supongamos que $f(x) = k \in \mathbb{R}$ definida en $[a, b]$. Tenemos pues que si definimos una partición marcada de la forma que lo hemos estado haciendo antes, entonces:

$$S(f, \mathring{\wp}) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(t_i)}_{=k}(x_i - x_{i-1}) = k\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = k \cdot (b - a)$$

Con lo cual esta tiene que ser la integral porque si elijo $L = k(b - a) \Rightarrow S(f, \mathring{\wp}) - L = 0 < \varepsilon : \forall\varepsilon$.

Con otro ejemplo, supongamos que $f(x) = x$ definida en $[0, 1]$. Vemos que si tomamos la partición de forma que las marcas sean el punto medio $t_i = \frac{x_i+x_{i-1}}{2}$, entonces se tiene que:

$$S(f, \mathring{\wp}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i-x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} t_i(x_i-x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i + x_{i-1}}{2}(x_i-x_{i-1}) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_i^2-x_{i-1}^2) = \frac{x_n^2 - x_0^2}{2} = \frac{1}{2}$$

Pero en este caso no hemos probado todavía que la integral sea este valor porque hemos impuesto que las marcas sean unas concretas, sin embargo, sí prueba que la integral, de existir, debe ser $L = \frac{1}{2}$ porque como se debe cumplir para todas, para la que hemos hallado este es su valor.

Ahora si escogemos $\mathring{\wp}$ una partición marcada cualquiera vamos a calcular la suma de Riemann y probar que está cerca de $\frac{1}{2}$:

$$S(f, \wp) - \frac{1}{2} = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - x_{i-1}}{2}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{2}\right)(x_i - x_{i-1})$$

Tomando ahora valores absolutos:

$$\left|S(f, \wp) - \frac{1}{2}\right| = \left|\sum_{i=1}^{n}\left(t_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{2}\right)(x_i - x_{i-1})\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\left|t_i - \frac{x_i - x_{i-1}}{2}\right|(x_i - x_{i-1}) \leq$$

$$\leq \sum_{i=1}^{n} \delta(x_i - x_{i-1}) = \delta\sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1}) = \delta$$

Por lo tanto, volviendo a la definición:

$$\delta = \varepsilon > 0 \Rightarrow \forall\varepsilon > 0 : \exists\delta > 0 : ||\wp|| < \delta \Rightarrow |S(f, \wp) - \frac{1}{2}| < \delta = \varepsilon$$

Criterios de Integrabilidad

Teorema

Si $g \in R[a,b]$ y $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función que coincide con g excepto en una cantidad finita de puntos que llamaremos $\{c_0, \cdots, c_n\}$, entonces $f \in R[a,b]$ y además:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

Demostración:

La demostración basta hacerla para un punto puesto que luego por inducción podemos extenderlo a n puntos.

Supongamos que $\forall x \in [a,b] \backslash \{c\} : f(x) = g(x)$. Sea $\mathring{\wp} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\} : \exists! t_i \in [x_i, x_{i-1}]$ que serán las marcas. Vamos a analizar como puede afectar el punto c a la suma de Riemann, hay dos posibles casos: que c se encuentre en uno de los intervalo o que sea el extremo de uno de los intervalos. En el primer caso solo afecta a uno de los intervalo de la suma de Riemann y en el segundo puede llegar afectar a 2 si fuese marca de ambos intervalos. Entonces poniéndonos en el peor de los casos, que afectase a dos, vemos que:

$$S(f, \mathring{\wp}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

Distinguimos los sumandos "raros" de los demás:

$$= \sum_{i=1}^{i_0-1} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) + f(t_{i_0})(x_{i_0} - x_{i_0-1}) + f(t_{i_0+1})(x_{i_0+1} - x_{i_0}) + \sum_{i=i_0+2}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

Como en todos los intervalos menos en los afectados por c la f y la g coinciden, ocurre que $f(t_i) = g(t_i)$ en todos esos intervalos "normales", así que podemos escribirlo en función de $S(g, \mathring{\wp})$ pero en los términos "raros" tendremos que restar $g(t_\lambda)$ porque lo sumamos en el primer término:

$$= \underbrace{\sum_{i=1}^{n} g(t_i)(x_i - x_{i-1})}_{=S(g,\mathring{\wp})} + (f(t_{i_0}) - g(t_{i_0}))(x_{i_0} - x_{i_0-1}) + (f(t_{i_0+1}) - g(t_{i_0+1}))(x_{i_0+1} - x_{i_0}) \Rightarrow$$

Restamos $L = \int_a^b g$ a ambos lados de la igualdad:

$$\Rightarrow S(f, \mathring{\wp}) - L = S(g, \mathring{\wp}) - L + (f(t_{i_0}) - g(t_{i_0}))(x_{i_0} - x_{i_0-1}) + (f(t_{i_0+1}) - g(t_{i_0+1}))(x_{i_0+1} - x_{i_0}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |S(f, \mathring{\wp}) - L| \leq |S(g, \mathring{\wp}) - L| + |f(c) - g(c)| \cdot ||\mathring{\wp}|| + |f(c) - g(c)| \cdot ||\mathring{\wp}||$$

Entonces, dado $\varepsilon > 0 : \exists \delta_1 > 0 : ||\mathring{\wp}|| < \delta_1 \Rightarrow |S(g, \mathring{\wp}) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. Del mismo modo, con el mismo $\varepsilon > 0$ escogemos un $\delta_2 = \frac{\varepsilon}{4|f(c)-g(c)|} > 0$. En consecuencia, $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\}$ conlleva que:

$$||\mathring{\wp}|| < \delta \Rightarrow |S(f, \mathring{\wp}) - L| \leq \frac{\varepsilon}{2} + 2|f(c) - g(c)| \cdot \frac{\varepsilon}{4|f(c) - g(c)|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Así que ya queda demostrado para un único punto.

Después por inducción tenemos que si tenemos $g \in R[a,b]$ y $f \in R[a,b] \backslash \{c_1, c_2\}$, entonces construimos $h \in R[a,b] \backslash \{c_1\}$. Por o probado $\int_a^b g = \int_a^b h = \int_a^b f$. Así que el argumento por inducción se ve claro.

Teorema

Sea $f \in [a,b] \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \begin{cases} \alpha & x \in [a,c) \\ \beta & x \in [c,b] \end{cases}$, entonces $f \in R[a,b]$ y ocurre:

$$\int_a^b f = \alpha(c-a) + \beta(b-c)$$

Lo que viene a explicar, aunque no sea de forma general, este teorema es que las discontinuidades de salto están permitidas.

<u>Demostración</u>:

Sea $\mathring{\wp}$ una partición marcada de forma que $\mathring{\wp} = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$. De nuevo el punto c puede quedar en el interior o en uno de los extremos de los intervalos de la partición. Veamos que:

$$S(f, \mathring{\wp}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{i_0-1} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) + f(t_{i_0})(x_{i_0} - x_{i_0-1}) + f(t_{i_0+1})(x_{i_0+1} - x_{i_0}) + \sum_{i=i_0+2}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{i_0-1} \alpha(x_i - x_{i-1}) + \underbrace{f(t_{i_0})(x_{i_0} - x_{i_0-1}) + f(t_{i_0+1})(x_{i_0+1} - x_{i_0})}_{=\varphi} + \sum_{i=i_0+2}^{n} \beta(x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \alpha(x_{i_0-1} - a) + \varphi + \beta(b - x_{i_0+1}) \Rightarrow$$

Ahora vamos a restar nuestro candidato a integral y vamos a medir esa distancia:

$$|S(f, \mathring{\wp}) - L| = |\alpha(x_{i_0-1} - a) + \varphi + \beta(b - x_{i_0+1}) - \alpha(c-a) - \beta(b-c)| =$$

$$= \left| \alpha \underbrace{(x_{i_0} - c)}_{\leq 2||\mathring{\wp}||} + \beta \underbrace{(c - x_{i_0-1})}_{\leq 2||\mathring{\wp}||} + \varphi \right| \leq \alpha \cdot 2||\mathring{\wp}|| + \beta \cdot 2||\mathring{\wp}|| + (|f(t_{i_0})| + |f(t_{i_0-1})|)\, ||\mathring{\wp}|| \leq$$

Los términos α y β están acotados por el máximo entre ambos y los $f(t_\lambda)$ son o α o β por lo que si acotamos los 3 por encima tenemos que:

$$\leq 6 \max\{|\alpha|, |\beta|\} ||\wp||$$

Por lo tanto:

$$\forall \varepsilon > 0 : \delta = \frac{\varepsilon}{6 \max\{|\alpha|, |\beta|\}} : ||\wp|| < \delta \Rightarrow |S(f, \wp) - L| \leq 6 \max\{|\alpha|, |\beta|\} ||\wp|| \leq 6 \max\{|\alpha|, |\beta|\} \frac{\varepsilon}{6 \max\{|\alpha|, |\beta|\}} = \varepsilon$$

Teorema: acotamiento de la integrabilidad

Toda función $f \in R[a,b]$ es acotada, es decir:

$$\exists M > 0 : \forall x \in [a,b] : |f(x)| \leq M$$

Es decir, que la veracidad de este resultado implica que las funciones con discontinuidades de salto infinito o esenciales, no son integrables.

<u>Demostración</u>

Por ser integrable se tiene que:

$$\exists L \in \mathbb{R} : \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : ||\mathring{\wp}|| < \delta \Rightarrow |S(f, \mathring{\wp}) - L| < \varepsilon$$

Antes de nada, como se cumple para todo ε, vamos a fijar $\varepsilon = 1$ y, en consecuencia, δ quedará fijo, convirtiéndose ambos en constantes.

Para demostrarlo, vamos a escoger una partición conveniente de forma que nos sea fácil calcular las cosas. Primero, nuestra partición va a cumplir que sea $n \in \mathbb{N} : ||\mathring{\wp}|| = \frac{b-a}{n} < \delta$ y en consecuencia cada punto de la partición es $x_i = a + i \cdot \frac{b-a}{n} : i = 0, 1, ..., n$. Del mismo modo, dado $x \in [a, b]$ entonces $\exists i_0 : x \in [x_{i_0-1}, x_{i_0}]$, y de esta forma vamos a escoger las marcas de la partición de la siguiente forma $\wp_x = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ donde $t_i = x_i$ para $i \neq i_0$ pero $t_{i_0} = x$ y de forma que $||\mathring{\wp}_x|| = \frac{b-a}{n} < \delta$. Con esta partición veamos que:

$$S(f, \mathring{\wp}_x) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i \neq i_0} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) + f(x)(x_{i_0} - x_{i_0-1}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{n}{b-a} \cdot \left[S(f, \wp_x) - \sum_{i \neq i_0} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \right] \Rightarrow |f(x)| \leq \frac{n}{b-a} \cdot \left[|S(f, \wp_x)| + \sum_{i \neq i_0} |f(x_i)| \cdot \frac{b-a}{n} \right] \leq *$$

La suma de Rieman se puede acotar porque:

$$|S(f, \mathring{\wp}_x)| = |S(f, \wp_x) - L + L| \leq \underbrace{|S(f, \wp_x) - L|}_{\varepsilon = 1} + |L| < 1 + |L|$$

Con lo cual, si meto el término de i_0 de nuevo en el sumatorio, obviamente eso tiene que ser más grande que no meterlo, con lo que la desigualdad queda:

$$* \leq \frac{n}{b-a} \left[1 + |L| + \sum_{i=1}^{n} |f(x_i)| \frac{b-a}{n} \right] = M$$

Es decir, todo lo que queda al final es un único valor constante que no de depende de nada, con lo cual lo podemos llamar M y queda demostrado.

Operaciones con integrales

Si $f, g \in R[a, b]$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces ocurre:

1. $kf \in R[a, b] \Rightarrow \int_a^b kf = k \int_a^b f$
2. $f + g \in R[a, b] \Rightarrow \int_a^b (f + g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
3. $\forall x \in [a, b] : f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$

Demostración:

1. Si $\mathring{\wp}$ es una partición marcada entonces ocurre que $S(kf, \wp) = \sum_{i=1}^{n} (kf)(t_i)(x_i - x_{i-1}) = k \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) = kS(f, \wp)$
2. Es fácil ver que $S(f + g, \wp) = S(f, \wp) + S(g, \wp)$. A su vez, como f y g son integrables tenemos que:

$$\varepsilon > 0 : \begin{cases} \delta_1 > 0 : ||\wp|| < \delta_1 \Rightarrow \left| S(f, \wp) - \int_a^b f \right| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \delta_2 > 0 : ||\wp|| < \delta_2 \Rightarrow \left| S(g, \wp) - \int_a^b g \right| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Ahora si escogemos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ si $||\wp|| < \delta$ entonces se tiene que:

$$\left| S(f + g, \wp) - \int_a^b f - \int_a^b g \right| = \left| S(f, \wp) + S(g, \wp) - \int_a^b f - \int_a^b g \right| \leq \left| S(f, \wp) - \int_a^b f \right| \left| S(g, \wp) - \int_a^b g \right| < \varepsilon$$

3. También es sencillo ver que $S(f, \mathring{\wp}) \leq S(g, \mathring{\wp})$:

$$\varepsilon > 0 : \begin{cases} \delta_1 > 0 : ||\wp|| < \delta_1 \Rightarrow \left|S(f, \wp) - \int_a^b f\right| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \delta_2 > 0 : ||\wp|| < \delta_2 \Rightarrow \left|S(g, \wp) - \int_a^b g\right| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Ahora si escogemos $\delta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ si $||\wp|| < \delta$ entonces se tiene en particular que:

$$\begin{cases} \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} < S(f, \mathring{\wp}) < \int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2} \\ \int_a^b g - \frac{\varepsilon}{2} < S(g, \mathring{\wp}) < \int_a^b g + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Rightarrow \int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2} < S(f, \mathring{\wp}) \leq S(g, \mathring{\wp}) < \int_a^b g + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g + \varepsilon \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$$

Función escalera

Función característica

Si tenemos un subconjunto $A \subset I = [a, b]$, definimos la **función característica** como:

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

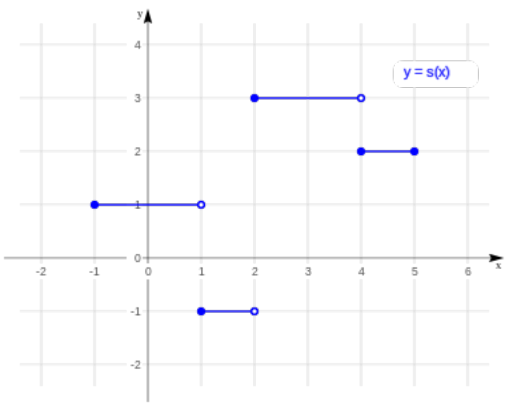
Es sencillo ver que si $c \in (a, b)$, entonces $\chi_{[c,b]} \in R[a, b]$ porque es una función de las que probamos que tenían saltos, pero eran integrables y además:

$$\int_a^b \chi_{[c,b]}(x)dx = b - c$$

Función escalera

Dado $I = [a, b]$ y $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b$ vamos a denominar $I_i = [c_{i-1}, c_i]$ por lo que podemos afirmar que $I = \cup_{i=1}^n I_i$ de forma que $I_i \cap I_j = \emptyset : i \neq j$. Llamamos entonces una función escalera $\alpha(x)$ a:

$$\alpha(x) = \begin{cases} \alpha_1 & I_1 \\ \alpha_2 & I_2 \\ \vdots \\ \alpha_n & I_n \end{cases}$$



De hecho podemos escribir:

$$\alpha(x) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i \chi_{I_i}(x) = \int_a^b \alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i (c_i - c_{i-1})$$

Y además ocurre que $\alpha(x) \in R[a,b]$ porque las funciones características son integrables, los α son constantes y además a pesar de que puede haber intervalos con ambos extremos abiertos o no cerrados por ambos lados, como cuando una función se diferencia de otra sigue siendo integrable con la misma integral, entonces aún así sigue siendo integrable.

Criterio de Cauchy

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ entonces $f \in R[a,b]$ si y sólo si:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \eta > 0 : ||\mathring{\wp}|| \text{ y } ||\mathring{\mathcal{Q}}|| < \eta \Rightarrow \left| S(f, \mathring{\wp}) - S(f, \mathring{\mathcal{Q}}) \right| < \varepsilon$$

Lo que otorga un criterio muy potente **que no requiere de tener candidato a integral** para poder afirmar que es integrable o no.

Demostración:

- $\Rightarrow$:

$$f \in R[a,b] \Rightarrow \varepsilon > 0 : \begin{cases} \exists \delta > 0 : ||\mathring{\wp}|| < \delta \Rightarrow |S(f, \mathring{\wp}) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \\ \exists \delta' > 0 : ||\mathring{\mathcal{Q}}|| < \delta' : |S(f, \mathring{\mathcal{Q}}) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

  Tomando como $\eta = \min\{\delta, \delta'\}$:

$$\Rightarrow |S(f, \mathring{\wp}) - S(f, \mathring{\mathcal{Q}})| = |S(f, \mathring{\wp}) - L + L - S(f, \mathring{\mathcal{Q}})| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}$$

- $\Leftarrow$:

  En primer lugar, necesitamos un candidato a L, por lo que vamos a obtenerlo. Sea $\mathring{\wp}_n$ una partición marcada equiespaciada con $t_i = x_i$. Ocurre que $||\mathring{\wp}_n|| = \frac{b-a}{n}$. Sea $s_n = S(f, \mathring{\wp}_n) \Rightarrow \{s_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ una sucesión y vamos a probar que esta sucesión es de Cauchy porque el posible límite al que converja, tendrá que ser necesariamente nuestro candidato a integral:

  Dado $\varepsilon > 0$ podemos escoger un $n_0 \in \mathbb{N}$ de forma que $n_0 > \frac{b-a}{\eta}$ siendo η el asociado a ε, con lo cual de esta forma la norma de P_{n_0} va a ser menor que η y para cualquier P_n con $n \geq n_0$ también se va a verificar esto. Por tanto, puedo afirmar:

$$n, m \geq n_0 \Rightarrow \frac{b-a}{n}, \frac{b-a}{m} < \eta \Rightarrow ||\mathring{\wp}_n||, ||\mathring{\wp}_m|| < \eta \Rightarrow |s_n - s_m| = |S(f, \mathring{\wp}_n) - S(f, \mathring{\wp}_m)| < \varepsilon$$

  Lo que implica que la sucesión $\{s_n\}$ es de Cauchy, así que $\exists L = \lim_{n\to\infty} s_n$ y este debe ser mi candidato a integral.

  Es decir, que por un lado ocurre que:

$$\varepsilon > 0 : \exists \eta > 0 : |S(f, \mathring{\wp}) - S(f, \mathring{\mathcal{Q}})| < \frac{\varepsilon}{2}$$

  Por otro lado, sea $n_0 \in \mathbb{N} : \frac{b-a}{n_0} < \eta$. La partición concreta que habíamos definido $\mathring{\wp}_{n_0}$ verifica que $||\mathring{\wp}_{n_0}|| < \frac{b-a}{n_0} < \eta$. Además como $\lim_{n\to\infty} s_n = L \Rightarrow \exists n_1 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_1 \Rightarrow |s_n - L| < \frac{\varepsilon}{2}$. Con lo cual tomando el mayor de los dos se tiene que $\tilde{n} = \max\{n_0, n_1\}$ ocurre:

$$||\wp_{\tilde{n}}|| < \eta$$

  Y también se verifica:

$$|s_{\tilde{n}} - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

  Con lo cual ocurre que:

$$|S(f,\wp) - L| = |S(f,\wp) - S(f,\wp_{\tilde{n}}) + S(f,\wp_{\tilde{n}}) - L| \leq |S(f,\wp) - S(f,\wp_{\tilde{n}})| + |s_n - L| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

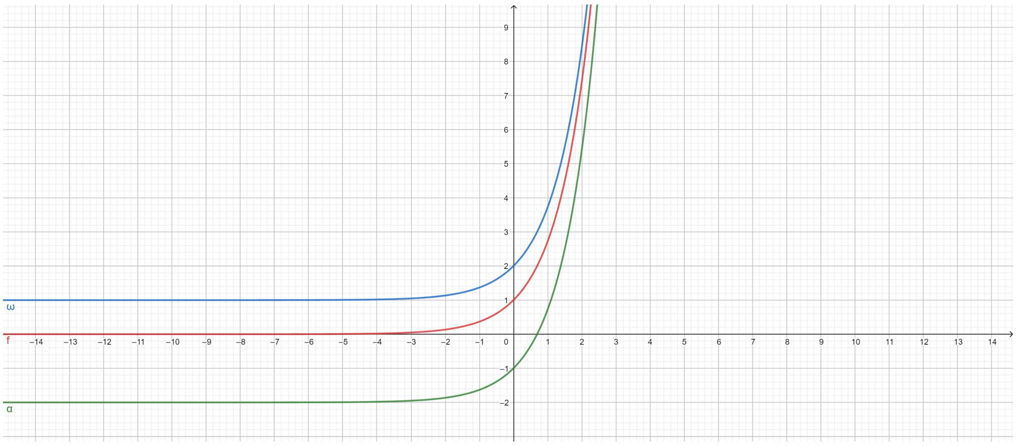
Criterio del Sandwich para integrabilidad

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ entonces $f \in R[a, b]$ si y sólo si:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \alpha_\varepsilon, \omega_\varepsilon : [a, b] \to \mathbb{R} : \alpha_\varepsilon, \omega_\varepsilon \in R[a, b] : \alpha_\varepsilon \leq f(x) \leq \omega_\varepsilon(x) : \forall x \in [a, b]$$

Además tenemos que ambas funciones auxiliares deben verificar que:

$$\int_a^b \omega_\varepsilon(x) - \alpha_\varepsilon(x)dx < \varepsilon$$



Para poder demostrar la integrabilidad de funciones más patológicas se suele usar este teorema y una muy buena práctica para poder acotarla como queramos puede ser utilizar las funciones escalera que definimos para que cuadre todo como queramos.

Demostración:

- $\Rightarrow$:

  Si $f \in R[a, b]$ basta con tomar $\alpha_\varepsilon = \omega_\varepsilon = f$ para cualquier ε por lo que se deduce que trivialmente se verifican las premisas

- $\Leftarrow$:

  Tenemos que $\alpha_\varepsilon \in R[a, b]$, entonces:

  $$\varepsilon > 0 : \exists \delta_1 > 0 : ||\mathring{\wp}|| < \delta_1 \Rightarrow \left| S(f, \mathring{\wp}) - \int_a^b \alpha_\varepsilon \right| < \varepsilon$$

  Del mismo modo, como $\omega_\varepsilon \in R[a, b]$, entonces:

  $$\varepsilon > 0 : \exists \delta_2 > 0 : ||\mathring{\wp}|| < \delta_2 \Rightarrow \left| S(f, \mathring{\wp}) - \int_a^b \omega_\varepsilon \right| < \varepsilon$$

  Denominamos $\eta = \text{mín}\{\delta_1, \delta_2\} > 0$ y definimos $\mathring{\wp}$ y $\mathring{\mathcal{Q}}$ dos particiones marcadas de forma que $||\mathring{\wp}||, ||\mathring{\mathcal{Q}}|| < \eta$ se tiene que por un lado:

  $$\int_a^b \alpha_\varepsilon - \varepsilon < S(\alpha_\varepsilon, \mathring{\wp}) < \int_a^b \alpha_\varepsilon + \varepsilon$$

  Y por otro:

  $$\int_a^b \omega\varepsilon - \varepsilon < S(\omega\varepsilon, \mathring{\wp}) < \int_a^b \omega_\varepsilon + \varepsilon$$

Asímismo, como $\alpha_\varepsilon < f(x) < \omega_\varepsilon$, entonces:

$$S(\alpha_\varepsilon, \mathring{\wp}) < S(f, \mathring{\wp}) < S(\omega_\varepsilon, \mathring{\wp}) \Rightarrow \int_a^b \alpha_\varepsilon - \varepsilon < S(\alpha_\varepsilon, \mathring{\wp}) < S(f, \mathring{\wp}) < S(\omega_\varepsilon, \mathring{\wp}) < \int_a^b \omega_\varepsilon + \varepsilon$$

De la misma forma se pueden aplicar estos razonamientos a $\mathring{\mathcal{Q}}$ por lo que se tiene que:

$$\int_a^b \alpha_\varepsilon - \varepsilon < S(\alpha_\varepsilon, \mathring{\mathcal{Q}}) < S(f, \mathring{\mathcal{Q}}) < S(\omega_\varepsilon, \mathring{\mathcal{Q}}) < \int_a^b \omega_\varepsilon + \varepsilon$$

Por tanto ahora por el Criterio de Cauchy se tiene que si multiplicamos una de las desigualdades por -1 y después sumamos obtenemos:

$$-\int_a^b (\omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon) - 2\varepsilon \leq S(f, \mathring{\wp}) - S(f, \mathring{\mathcal{Q}}) \leq \int_a^b (\omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon) + 2\varepsilon$$

Y como por hipótesis teníamos la relación entre la integral de la diferencia de α_ε y ω_ε entonces:

$$-3\varepsilon \leq -\int_a^b (\omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon) - 2\varepsilon \leq S(f, \mathring{\wp}) - S(f, \mathring{\mathcal{Q}}) \leq \int_a^b \omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon + 2\varepsilon < 3\varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| S(f, \mathring{\wp}) - S(f, \mathring{\mathcal{Q}}) \right| < 3\varepsilon$$

Luego por el Criterio de Cauchy es integrable

Criterios de no integrabilidad

Son unas condiciones suficientes para afirmar que una función no es integrable:

- Si existe una sucesión de particiones marcadas $\mathring{\wp}_n$ de forma que $||\mathring{\wp}_n|| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ y $S(f, \mathring{\wp}_n) \not\to l$, entonces $f \notin R[a, b]$

  Demostración:

  Por el criterio de Cauchy, la sucesión de número reales $s_n = S(f, \mathring{\wp}_n)$ es una sucesión de Cauchy y por lo tanto es convergente y la afirmación que hemos dado contradice dichos postulados.

- Si existen dos sucesiones de particiones marcadas $\mathring{\wp}_n$ y $\mathring{\mathcal{Q}}_\backslash$ de forma que $S(f, \mathring{\wp}) \xrightarrow{n\to\infty} L_1$ y $S(f, \mathring{\mathcal{Q}}) \xrightarrow{n\to\infty} L_2$ pero $L_1 \neq L_2$.

  Demostración:

  Del mismo modo, se contradicen las hipótesis del Criterio de Cauchy ya que la sucesión no puede tener dos límites distintos por la unicidad del límite.

Teorema

Si definimos:

- $R[a, b]$ como el conjunto de funciones integrables de Riemann.
- $C[a, b]$ como el conjunto de funciones continuas.
- $C^1[a, b]$ como el conjunto de funciones continuas y cuya derivada también es continua.
- $C^k[a, b]$ como el conjunto de funciones continuas y cuyas derivadas hasta la $k-$-ésima son continuas.
- $B[a, b]$ como al conjunto de funciones acotadas.

- $M[a,b]$ como el conjunto de funciones monótonas.

Hemos visto que $R[a,b] \subset B[a,b]$, del mismo modo ocurre que $C^k[a,b] \subset C^1[a,b] \subset C[a,b]$. Pues vamos a ver que:

$$C[a,b] \subset R[a,b]$$

Es decir, que **las funciones continuas son integrables**. Y también que:

$$M[a,b] \subset R[a,b]$$

Es decir, que **las funciones monótonas son integrables**.

Demostración:

Sea $f \in C[a,b]$, como $[a,b]$ es cerrado y acotado, entonces f es uniformemente continua en $[a,b]$, luego:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Por lo tanto, si escogemos $\frac{\varepsilon}{b-a}$ entonces:

$$\exists \delta : |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

Podemos ahora escoger $n_0 \in \mathbb{N} : \frac{b-a}{n_0} < \delta$ y con ese número vamos a hacer una partición uniforme en la que cada punto de la partición viene definido por: $c_i = a + i\frac{b-a}{n_0}$ con $i = 0, 1, \cdots, n_0$.

Ahora, dado un $[c_{i-1}, c_i]$ vamos a denotar:

$$\begin{cases} f_i = \text{mín}\{f(x) : x \in [c_{i-1}, c_i]\} \\ f^i = \text{máx}\{f(x) : x \in [c_{i-1}, c_i]\} \end{cases}$$

Por tanto si $x \in [c_{i-1}, c_i]$, se tiene que $f_i \leq f(x) \leq f^i$ por definición y existen ambos valores porque por ser continuas se alcanza el máximo y el mínimo.

FALTA EXPLICACIÓN CON DIBUJO

De este modo, escogemos[44]

$$\alpha_\varepsilon = \begin{cases} f_i & x \in [c_{i-1}, c_i) : i = 0, 1, \cdots, n_0 - 1 \\ f_{n_0} & x \in [c_{n_0-1}, c_{n_0}] \end{cases}$$

Y de forma análoga tomamos:

$$\omega_\varepsilon = \begin{cases} f^i & x \in [c_{i-1}, c_i) : i = 0, 1, \cdots, n_0 - 1 \\ f^{n_0} & x \in [c_{n_0-1}, c_{n_0}] \end{cases}$$

Estas dos funcione son del tipo que hemos definido como "función escalera" por lo que ya sabemos que son integrables.

No es difícil ver que por como están construidas, ambas funciones anteriores verifican que: $\forall x \in [a,b] : \alpha_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \omega_\varepsilon$, solo falta ver que la integral de la diferencia es pequeña para que quede demostrado por el Teorema del Sandwich:

$$\int_a^b \alpha_\varepsilon(x)dx = \sum_{i=1}^{n_0} f_i \cdot (c_i - c_{i-1})$$

$$\int_a^b \omega_\varepsilon(x)dx = \sum_{i=1}^{n_0} f^i \cdot (c_i - c_{i-1})$$

[44] Partimos esta función en dos trozos para asegurarnos de que los intervalos donde escogemos las cosas sean disjuntos y de este modo no halla problemas (por eso distinguimos el último)

$$\int_a^b \omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n_0} (f^i - f_i)(c_i - c_{i-1})$$

Como cada f_i es el máximo valor que toma la función en algún punto del intervalo, puedo expresarlo como $f(u_i)$, es decir, el valor de la función en ese punto y con f_i ocurre de modo análogo:

$$f^i = \text{máx}\{f(x) : x \in [c_{i-1}, c_i]\} = f(u_i) \text{ para cierto } u_i \in [c_{i-1}, c_i]$$

$$f_i = \text{mín}\{f(x) : x \in [c_{i-1}, c_i]\} = f(v_i) \text{ para cierto } v_i \in [c_{i-1}, c_i]$$

Luego ocurre con ambos que:

$$f^i - f_i = |f^i - f_i| = |f(u_i) - f(v_i)| \overset{|u_i - v_i| \leq \frac{b-a}{n_0} < \delta}{<} \frac{\varepsilon}{b-a} : \forall i = 1, 2, \cdots, n_0$$

Eso ocurre así porque como es uniformemente continua, si $|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

En consecuencia, se tiene que:

$$\int_a^b \omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon = \sum_{i=1}^{n_0} (f^i - f_i)(c_i - c_{i-1}) \leq \frac{\varepsilon}{b-a} \underbrace{\sum_{i=1}^{n_0} (c_i - c_{i-1})}_{=b-a} = \varepsilon$$

Demostración de que las monótonas también los son:

Sea f monótona creciente (el caso decreciente es análogo), es decir, $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$, definimos la partición uniforme $\wp = \{a = c_0 < c_1 < \cdots < c_n = b\}$.

De este modo, construimos de nuevo:

$$\alpha_\varepsilon = \begin{cases} f(c_{i-1}) & x \in [c_{i-1}, c_i) : i = 1, ..., n_0 - 1 \\ f(c_{n_0 - 1}) & x \in [c_{n_0 - 1}, c_{n_0}] \end{cases}$$

$$\omega_\varepsilon = \begin{cases} f(c_i) & x \in [c_{i-1}, c_i) : i = 1, ..., n_0 - 1 \\ f(c_{n_0}) & x \in [c_{n_0 - 1}, c_{n_0}] \end{cases}$$

Es decir, en este caso estamos tomando siempre el valor de la función en el punto de la derecha o de la izquierda en cada una de cada uno de los intervalos.

Se verifica trivialmente entonces se cumple que $\forall x \in [a, b] : \alpha(x) \leq f(x) \leq \omega(x)$. Vemos entonces de nuevo, la integral de la diferencia:

$$\int_a^b \alpha_\varepsilon(x)dx = \sum_{i=1}^{n_0} f(c_{i-1}) \cdot (c_i - c_{i-1}) = \frac{b-a}{n_0} \cdot (f(c_0) + \cdots + f(c_{n_0 - 1}))$$

$$\int_a^b \omega_\varepsilon(x)dx = \sum_{i=1}^{n_0} f(c_i) \cdot (c_i - c_{i-1}) = \frac{b-a}{n_0} \cdot (f(c_1) + \cdots + f(c_{n_0}))$$

$$\int_a^b \omega_\varepsilon - \alpha_\varepsilon = \frac{b-a}{n_0} (f(c_0) + f(c_{n_0})) = \frac{b-a}{n_0} \cdot (f(b) - f(a))$$

Con lo cual como esa diferencia es constante y ese valor es menor que delta, puedo tomar un delta lo suficientemente pequeño como para que no importe esa constante.

Propiedad de aditividad de la integral

Sea $[a, b]$ un intervalo y $c \in [a, b]$, entonces:

$$f \in \mathcal{R}[a, b] \Leftrightarrow f|_{[a,c]} \in \mathcal{R}[a, c] y f|_{[c,b]} \in \mathcal{R}[c, b]$$

Y además se tiene que:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Es decir, que escogido un intervalo $[a, b]$ si escogemos un punto c intermedio, entonces dividir la integral del segmento completo en la suma de las integrales de cada uno de los trozos.

<u>Demostración</u>:

- $\Rightarrow$:

  Supongamos que $f \in R[a, b]$, entonces se tiene que por el Criterio de Cauchy:

  $$\forall \varepsilon > 0 : \exists \eta > 0 : \forall \mathring{P}, \mathring{Q} : ||\mathring{P}||, ||\mathring{Q}|| < \eta \Rightarrow |S(f, \mathring{P}) - S(f, \mathring{Q})| < \varepsilon$$

  Vamos a definir dos particiones en el trozo que nos interesa

  $$\varepsilon > 0 : \text{sea } \eta > 0 \text{ el de } [a, b] \text{ y sean } \mathring{P}_1, \mathring{Q}_1 \text{ de } [a, c] : ||\mathring{P}_1||, ||\mathring{Q}_1|| < \eta$$

  y vamos a definir una única complementaria en el otro trozo

  $$\mathring{R} = \{c = r_0 < \cdots < r_n = b\} \text{de } [c, b] : t_i \in [r_{i-1}, r_i]$$

  De forma que uniendo la complementaria con una de las dos que hemos construido se tenga una partición del segmento total:

  $$\begin{cases} \mathring{P}_1 \cup \mathring{R} = \mathring{P} \\ \mathring{Q}_1 \cup \mathring{R} \cup \mathring{Q} \end{cases} \Rightarrow ||\mathring{P}||, ||\mathring{Q}|| < \eta$$

  Por un lado tenemos entonces que si nos referimos a la suma de Riemann del conjunto:

  $$S(f, \mathring{P}) = S(f, \mathring{P}_1) + S(f, \mathring{R})$$

  $$S(f, \mathring{Q}) = S(f, \mathring{Q}_1) + S(f, \mathring{R})$$

  Por tanto, como la función es integrable en el intervalo completo al ser iguales ambas cosas, la diferencia de ambas particiones de uno de los intervalos también es menor que ε:

  $$|S(f, \dot{P}_1) - S(f, \dot{Q}_1)| = |S(f, \mathring{P}_1) + S(f, \mathring{R}) - S(f, \mathring{Q}_1) - S(f, \mathring{R})| = |S(f, \mathring{P}) - S(f, \mathring{Q})| < \varepsilon$$

- $\Leftarrow$:

  LA DEJA PARA NOSOTROS.

Propiedades

1. Si $f \in R[a, b]$ y tenemos que $a < c < d < b$, entonces $f \in R[c, d]$ donde además:

   $$\int_c^d f = \int_a^d f - \int_a^c f$$

2. Si tenemos una partición $\mathring{P} = \{a = c_0 < \cdots < c_n = b\}$ en el intervalo $[a, b]$, entonces se tiene que:

   $$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{c_{i-1}}^{c_i} f \right)$$

3. Si $f \in R[a, b]$ y tenemos que $\alpha, \beta \in [a, b] : \alpha < \beta$, entonces tenemos que:

   $$\int_\beta^\alpha f = -\int_\alpha^\beta f$$

4. La integral en un punto es nula:
$$\int_{\alpha}^{\alpha} f = 0$$

Demostraciones:

1. Por el Teorema anterior podemos demostrar que $f \in R[a, d]$, escogiendo ahora un punto intermedio entre a y d que llamaremos c, por el Teorema anterior tenemos de nuevo que $f \in R[c, d]$.
2. Lo tenemos demostrado para uno solo, por lo que podemos aplicar inducción para extenderlo al número **finito** de veces que queramos.
3. Por definición
4. Trivial

Teorema

Si $f \in R[a, b]$ y $\alpha, \beta, \gamma \in [a, b]$ cualesquiera, entonces:
$$\int_{\alpha}^{\beta} f + \int_{\beta}^{\gamma} f = \int_{\alpha}^{\gamma} f$$
Es notable destacar que no hemos impuesto ningún tipo de orden entre estos número para realizar dicha afirmación.

Demostración:

Este resultado que acabamos de ver es equivalente a decir:
$$\int_{\alpha}^{\beta} f + \int_{\beta}^{\gamma} f + \int_{\gamma}^{\alpha} f = 0$$
Por lo que vamos a tratar de demostrar esto

Denotamos por $L(\alpha, \beta, \gamma) = \int_{\alpha}^{\beta} f + \int_{\beta}^{\gamma} f + \int_{\gamma}^{\alpha} f$ y vamos a distinguir casos:

- Si alguna de las parejas coincide, es decir, $\alpha = \beta$ o $\alpha = \gamma$ o $\beta = \gamma$, entonces este resultado es trivial.
- Si los tres son distintos y remarcamos que NO sabemos el orden:
$$L(\alpha, \beta, \gamma) = L(\beta, \gamma, \alpha) = L(\gamma, \alpha, \beta)$$
Como estas permutaciones son las mismas, vamos a estudiar las otras 3 posibles permutaciones distintas:
$$L(\beta, \alpha, \gamma) = \int_{\beta}^{\alpha} f + \int_{\alpha}^{\gamma} f + \int_{\gamma}^{\beta} = -\int_{\alpha}^{\beta} f - \int_{\gamma}^{\alpha} f - \int_{\beta}^{\gamma} f = -\int_{\alpha}^{\beta} f - \int_{\beta}^{\gamma} f - \int_{\gamma}^{\alpha} f = -L(\alpha, \beta, \gamma)$$
Pero de nuevo, si realizo permutaciones circulares sobre este resultado, entonces ocurre que:
$$L(\beta, \alpha, \gamma) = L(\alpha, \gamma, \beta) = L(\gamma, \beta, \alpha)$$
Es decir, que tres coinciden y las otras tres también coinciden y unas son las otras pero cambiando el signo, por tanto, si demostramos que una de ellas es 0, todas lo serán.
$$L(\beta, \alpha, \gamma) = L(\beta, \gamma, \alpha) = L(\gamma, \alpha, \beta) = -L(\beta, \alpha, \gamma) = -L(\alpha, \gamma, \beta) = -L(\gamma, \beta, \alpha)$$
Aunque no sabemos el orden, en alguna de las permutaciones se tendrá el orden que poseen los números elegido y esa demostración ya hemos visto que es cierta, por tanto, siendo uno 0, todos los demás son 0.
$$\alpha < \beta < \gamma \Rightarrow L(\alpha < \beta < \gamma) = 0 \Rightarrow L(\beta, \alpha, \gamma) = \cdots = -L(\gamma, \beta, \alpha) = 0$$

Teorema Fundamental del Cálculo

La integrabilidad permite determinar si merece la pena gastar el tiempo en calcular o no una integral, pero ¿quién es la derivada? En ocasiones, el cálculo de este valor por medio de la definición se vuelve sumamente complejo y no es práctico a la hora de llevarlo a cabo.

Una de las claves del desarrollo matemático moderno ha sido el enunciado de este Teorema porque es la llave que conecta la derivación con la integración y que otorga un pilar sobre el que apoyarse para poder calcular la integral de infinitud de funciones de forma sencilla.

Regla de Barrow

Sea $f \in R[a,b]$, supongamos que $\exists F : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) de forma que $F'(x) = f(x) : \forall x \in \mathbb{R}$, entonces se tiene que:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Es decir, el cálculo de integrales se reduce ahora a un cálculo de antiderivadas.

Demostración:

Sea $\mathcal{P} = \{x_0 = a < \cdots < x_n = b\}$ una partición uniforme de $[a,b]$ de forma que $x_i = a + \frac{i}{n}(b-a), i = 1, ..., n$. Antes de escoger las marcas veamos que:

$$F \in \mathcal{C}[x_{i-1}, x_i] \text{ derivable en } (x_{i-1}, x_i)$$

Por el Teorema del Valor medio tenemos que:

$$\exists c_i \in (x_{i-1}, x_1) : \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = F'(c_i) = f(c_i)$$

Y justamente estas van a ser las marcas de nuestra partición:

$$\mathring{\mathcal{P}}_n = \{a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b : t_i = c_i\}$$

En consecuencia, al calcular la suma de Riemann tenemos que:

$$S(f, \mathring{\mathcal{P}}_n) = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{f(c_i)(x_i - x_{i-1})}_{F(x_i) - F(x_{i-1})} = \sum_{i=1}^{n} (F(x_i) - F(x_{i-1})) = F(x_1) - F(x_0) + F(x_2) - F(x_1) + ... + F(x_n) - F(x_{n-1}) =$$

$$= F(x_n) - F(x_0) = F(b) - F(a)$$

Pero como $f \in \mathcal{R}[a,b]$, entonces:

$$\lim_{x\to\infty} S(f, \mathring{\mathcal{P}}_n) = \int_a^b f \Rightarrow \int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Porque como $S(f, \mathring{\mathcal{P}}_n) = F(b) - F(a)$ es fijo, entonces al converger a la integral, necesariamente el valor constante es la integral. $\square$

Corolario

Supongamos que $f \in R[a,b]$ y $\exists F \in C[a,b] : F'(x) = f(x) : \forall x \in [a,b] \backslash E$ donde E es un conjunto finito de puntos, de forma que se tiene:

$$\int_a^b f = F(b) - F(a)$$

Es decir, que tras extraer una cantidad finita de puntos sigue siendo cierta la regla de Barrow y la integral es la misma.

Demostración:

Aplicamos la regla de Barrow en $[c_{i-1}, c_i] : i = 1, 2, ..., n+1$:

Se puede aplicar esto porque F es continua y entonces lo es en cada pequeño intervalo. Además como coincide en todos los puntos dentro de ese pequeño intervalo tenemos: $F \in \mathcal{C}[c_i, c_{i-1}]$: $F'(x) = f(x) : \forall x \in (c_i, c_{i-1})$, luego podemos decir que:

$$\int_{c_{i-1}}^{c_i} f = F(c_i) - F(c_{i-1})$$

Por la aditividad de la integral podemos decir que:

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n+1} \int_{c_{i-1}}^{c_i} f = \sum_{i=1}^{n+1} F(c_i) - F(c_{i-1}) = F(c_{n+1}) - F(c_0) = F(b) - F(a)$$

Teorema Fundamental del Cálculo

Si $f \in R[a, b]$, definimos la función $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ como:

$$F(z) = \int_a^z f$$

Que denominaremos **integral indefinida con base a**, es decir, que definimos una nueva función que es la integral desde el punto base hasta otro punto z, por tanto es sencillo ver que si muevo z el valor cambia luego está bien definida.

Teorema:

$F \in C[a, b]$ y de hecho es una función Lipschizt[45] con constante de Lipschizt $M = \sup\{|f(x)|\} : x \in [a, b]$ y este supremo existe porque por ser integrable sabemos que está acotada y por tanto posee supremo.

Que sea Lipschiztiana implica que:

$$|F(z) - F(w)| \leq M|z - w| : z, w \in [a, b]$$

Demostración: Sean $z, w \in [a, b]$ dos puntos distintos, supongamos en primer lugar que $a \leq w < z \leq b$, entonces:

$$\begin{cases} F(z) = \int_a^z f \\ F(w) = \int_a^w f \end{cases} \Rightarrow F(z) - F(w) = \int_a^z f - \int_a^w f = \int_a^z f + \int_w^a f = \int_w^z f$$

Entonces:

$$|F(z) - F(w)| = \left| \int_w^z f \right|$$

Pero como sabemos que la función f está acotada por ser integrable:

$$-M \leq f(x) \leq M \Rightarrow$$

Y además por la monotonía de la integral:

$$\underbrace{\int_w^z -M}_{-M(z-w)} \leq \int_w^z f \leq \underbrace{\int_w^z M}_{M(z-w)}$$

Luego:

$$|F(z) - F(w)| = \left| \int_w^z f \right| \leq M|z - w|$$

[45] Suelen denotarse por $C^{0,1}[a, b]$

Ahora si suponemos que $a \leq z < w \leq b$ el razonamiento es completamente simétrico cambiando los roles de z y w en lo que hemos hecho antes, por tanto, lo que queda es que:

$$|F(z) - F(w)| \leq M|z - w|$$

Pero esto es lo mismo que lo de antes, por lo que queda porbado que F es una función Lipstchiziana y por tanto $F \in C[a, b]$.

<u>Teorema Fundamental del Cálculo</u>:

Sea $f \in R[a, b]$ y supongamos que f es continua en $c \in [a, b]$, entonces la función F es derivable en c y además:

$$F'(c) = f(c)$$

Entre las consecuencias más importantes de este teorema tenemos que:

$$F(z) = \int_a^z f \Rightarrow \frac{d}{dz}\left(\int_a^z f\right)(c) = f(c)$$

Además si $f \in C[a, b]$, entonces F es derivable en $[a, b]$ y se tiene que $F'(z) = f(z)$ para todo z en el intervalo y por eso podemos afirmar que:

$$\frac{d}{dz}\int_a^z f = f(z)$$

Es decir, que derivada de la función integral es la propia función por lo que son operaciones inversas.

<u>Demostración</u>:

Sabemos que f es continua en c, lo que quiere decir que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \text{si } \underset{x \in [a,b]}{|x - c|} < \delta \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon \Leftrightarrow f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon$$

Para probar que F es derivable y que la derivada en c es $f(c)$, vamos a demostrar que:

$$|z - c| < \delta \Rightarrow \left|\frac{F(z) - F(c)}{z - c} - f(c)\right| < \varepsilon :$$

Veamos que:

$$F(z) - F(c) = \int_a^z f - \int_a^c f = \int_c^z f$$

Vamos a suponer en primer lugar que $c < z < c + \delta$, como $f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon$ y la integral conserva estas desigualdades tenemos que:

$$(f(c) - \varepsilon)(z - c) = \int_c^z (f(c) - \varepsilon) < \underbrace{\int_c^z f(x)dx}_{F(z)-F(c)} < \int_c^z (f(c) + \varepsilon) = (f(c) + \varepsilon)(z - c) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(c) - \varepsilon < \frac{F(z) - F(c)}{z - c} < f(c) + \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < \frac{F(z) - F(c)}{z - c} - f(c) < +\varepsilon \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|\frac{F(z) - F(c)}{z - c} - f(c)\right| < \varepsilon : c < z < c + \delta$$

Y el razonamiento para $c - \delta < z < c$ es completamente análogo y queda demostrado por tanto que la derivada de la integral es la función de la que partíamos.

CÁLCULO DE INTEGRALES

Métodos de integración

Cambio de variable

Supongamos que tenemos una función $f : I \to \mathbb{R}$ y una función $\varphi : J \to \mathbb{R}$ de forma que $f \in C^0(I, \mathbb{R})$ y $\varphi \in C^1(J, \mathbb{R})$ de modo que $\varphi(J) \subset I$. Si $\alpha, \beta \in J$ entonces:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$$

Demostración:

Lo primero de todo, es sencillo ver que lo que estamos diciendo está bien definido porque el producto de estas funciones es continuo por las características que tienen y hemos demostrado que las funciones continuas son integrables.

Definimos la función $F(u) = \int_{\varphi(\alpha)}^u f(x)dx : \forall u \in I$, de este modo sabemos que $F'(u) = f(u)$ con lo cual, F es una primitiva de f porque es la integral indefinida de base $\varphi(\alpha)$ tal y como la denotamos.

Consideramos ahora esta función:

$$H(t) = F(\varphi(t)) = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(t)} f(x)dx : \forall t \in J$$

De este modo vemos que por la Regla de la Cadena:

$$H'(t) = F'(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

Si empleamos la Regla de Barrow, entonces:

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = H(\beta) - H(\alpha) = F(\varphi(\beta)) - \underbrace{F(\varphi(\alpha))}_{=0} = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$$

Ejemplos:

En la práctica, este tipo de resultado se usa del siguiente modo. Supongamos que queremos calcular:

$$\int_0^2 2tsen(t^2)dt$$

Consideramos:

$$\begin{cases} \varphi(t) = t^2 \\ \alpha = 0, \ \beta = 2 \\ f(x) = sen(x) \end{cases}$$

Por tanto por el Teorema de Cambio de Variable tenemos que:

$$\int_0^2 2tsen(t^2)dt = \int_0^4 sen(x)dx = cos(0) - cos(4) = 1 - cos(4)$$

También es útil para el cálculo de primitivas de funciones. Por ejemplo, supongamos que queremos calcular la primitiva de

$$f(t) = t \cdot e^{t^2}$$

No existe una única primitiva, por lo que podemos denotar la familia de todas estas como:

$$\int f(x)dx$$

Entonces para calcular esta primitiva, basta con aplicar el cambio de variable visto considerando que $t^2 = x \Rightarrow 2tdt = dx$ se tiene:

$$\int te^{t^2}dt = \int e^x \frac{1}{2}dx = \frac{1}{2}e^x + C \Rightarrow F(t) = \frac{1}{2}e^{t^2} + C$$

Integración por partes

Sean $F, G \in C^1(I, \mathbb{R})$, $f = F'$ y $g = G'$, entonces si $\alpha, \beta \in I$ se tiene que:

$$\int_\alpha^\beta f(x)G(x)dx = F(\beta)G(\beta) - F(\alpha)G(\alpha) - \int_\alpha^\beta F(x)g(x)dx$$

Demostración:

Vamos a considerar la función $H(x) = F(x)G(x)$, es sencillo ver que por la Regla del Producto tenemos que:

$$H'(x) = F'(x)G(x) + F(x)G'(x)$$

De este modo, la integral en ambos lados debe ser la misma, es decir:

$$\int_\alpha^\beta H'(x)\ dx = \int_\alpha^\beta f(x)G(x)dx + \int_\alpha^\beta F(x)g(x)dx$$

Por un lado tenemos que:

$$\int_\alpha^\beta H'(x)dx = H(\beta) - H(\alpha) = [FG]_\alpha^\beta$$

Con lo cual despejando $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)G(x)dx$:

$$\int_\alpha^\beta f(x)G(x)dx = [FG]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta F(x)g(x)dx \Rightarrow \int_\alpha^\beta F'(x)G(x)dx = [FG]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta F(x)G'(x)dx$$

Lo más representativo es que esta igualdad es aprovechable por ambos lados puesto que en ocasiones será más sencillos despejar una o despejar la otra para poder hacer el cálculo que deseemos.

Demostración:

Si queremos calcular $\int_0^\pi x\,\mathrm{sen}(x)dx =$, considerando como:

$$\begin{cases} F'(x) = \mathrm{sen}(x) \\ F(x) - \cos(x) \\ G(x) = x \\ G'(x) = 1 \end{cases}$$

Entonces se tiene que:

$$\int_0^\pi x\,\mathrm{sen}(x)dx = [-x\cos(x)]_0^\pi - \int_0^\pi -\cos(x)dx = \pi + \int_0^\pi \cos(x)dx = \pi + \mathrm{sen}(x)]_0^\pi = \pi$$

También podemos emplearlo para el cálculo de primitivas

$$\int_1^2 \ln(x)dx = \begin{bmatrix} u = \ln(x) \Rightarrow du = \frac{1}{x}dx \\ v = x \Rightarrow dv = 1dx \end{bmatrix} = [x\ln(x)]_1^2 - \int_1^2 x\frac{1}{x}dx = 2\ln(2) - 1$$

Criterio de Lebesque de Integración

Hemos visto que las funciones continuas son integrables y las que no lo son, en función del número y tipo de discontinuidades que posean pueden serlo o no. Este criterio otorga una herramienta muy potente para poder caracterizar una función integrable Rieman.

Conjunto de Medida Nulo

El concepto de medida es complejo y bastante extenso por lo que no ahondaremos mucho en él. A priori para nosotros, la medida de un intervalo (a, b) es el real $b - a$, pero lo que realmente nos interesa es la noción de medida de un conjunto, concretamente la medida nula de un conjunto, es decir, cuando decimos que un conjunto "no mide nada".

Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se dice que es de medida nula si se tiene que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \text{cantidad numerable de intervalos } (a_k, b_k) : \forall k = 1, 2, \cdots : \begin{cases} A \subset \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \\ \sum\limits_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \varepsilon \end{cases}$$

En base a esta definición podemos detectar los siguientes conjuntos que poseen medida nula:

- **Un punto** posee medida nula

$$\{a\} \subset \{a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\} \Rightarrow medida(\{a\}) \leq medida\left(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varepsilon$$

- Una **cantidad finita de puntos** posee medida nula

$$A = \{a_1, a_2, ..., a_n\} \Rightarrow A \subset \bigcup_{i=1}^{N} \left(a_i - \frac{\varepsilon}{2N}, a_i + \frac{\varepsilon}{2N}\right)$$

$$\sum_{1}^{N} \frac{\varepsilon}{N} = \varepsilon$$

- Una **cantidad numerable de puntos** posee medida nula

  Supongamos que tenemos una cantidad numerable de puntos $\{a_i\}_{i=1}^{\infty}$. Sea $\varepsilon > 0$, entonces podemos meter cada punto en un intervalo que sea $I_i = \left(a_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}, a_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right)$ cuya medida es concretamente $\frac{\varepsilon}{2^i}$.

  De este modo se verifica que:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} a_i \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots\right) = \varepsilon$$

Criterio de Lebesque

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y denotamos por $D(f)$ al conjunto de puntos de discontinuidad de la función, entonces:

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow D(f) \text{ es de medida nula}$$

La demostración es muy compleja y no se requiere en este curso.

Proposiciones

- Si $D \subset C$ y C es de medida nula, entonces D es de medida nula.
- Si tenemos $C_1, ..., C_n$ una cantidad finita de conjuntos de medida nula, entonces:

$$\bigcup_{i=1}^{n} C_i \text{ es de medida nula}$$

- Si tenemos una cantidad numerable de conjuntos de medida nula, entonces la medida de la unión de todos es nula.

$$\{C_n\}_{n=1}^{\infty} \text{ de medida nula } \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \text{ es de medida nula}$$

Proposición: integrabilidad de la composición

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de forma que $f \in R[a, b]$ y $\varphi : [c, d] \to \mathbb{R}$ continua con $f[a, b] \subset [c, d]$, entonces:

$$\varphi \circ f : [a, b] \to \mathbb{R} \Rightarrow \varphi \circ f \in R[a, b]$$

Demostración:

Si f es continua en c, como φ es continua, $\varphi \circ f$ es continua en c. Dicho de otro modo, la composición solo puede ser discontinua donde lo es f:

$$[a, b] \setminus D_f \subset [a, b] \setminus D_{\varphi \circ f} \Leftrightarrow D_{\varphi \circ f} \subset D_f$$

Por tanto, al ser $f \in R[a, b]$, D_f es de medida nula y, en consecuencia, $D_{\varphi \circ f}$ es de medida nula. Si demostramos que es acotada, por el criterio de Lebesque entonces es integrable. Ver que es acotada es sencillo, puesto que $f \in R[a, b]$ es acotada por ser integrable y φ es también es acotada por ser continua, por tanto, la composición de ambas si que está acotada.

Ejemplos:

Supongamos que $f \in R[a, b]$:

- ¿$|f(x)| \in R[a, b]$ es integrable?

  La respuesta es que sí porque es la función f compuesta con la función $g(x) = |x|$ que sabemos que es continua.

- ¿$f^a(x)$ donde $a \in \mathbb{R}$ es integrable?

  La respuesta vuelve a ser afirmativa por ser la exponencial continua

- ¿$f, g \in R[a, b]$ $f \cdot g$ es integrable?

  Sí, porque $f + g \in R[a, b]$, del mismo modo $(f + g)^2 \in R[a, b]$ y en consecuencia sabemos que $\frac{1}{4}(f + g)^2 - \frac{1}{4}(f - g)^2 = f \cdot g \in R[a, b]$

- ¿La parte positiva $f^+(x) = \varphi(f(x))$ donde $\varphi(x) = \begin{cases} x & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$?

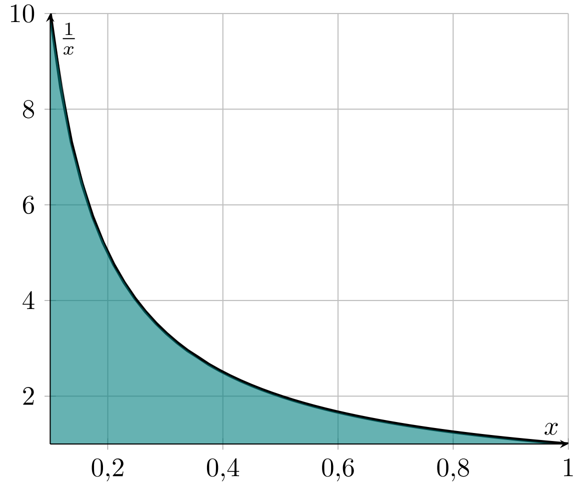
  Por supuesto que sí porque φ es una función continua.

- ¿La función valor máximo $M(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ que denotamos por $M(x) = \frac{f+g}{2} + \frac{|f-g|}{2}$?

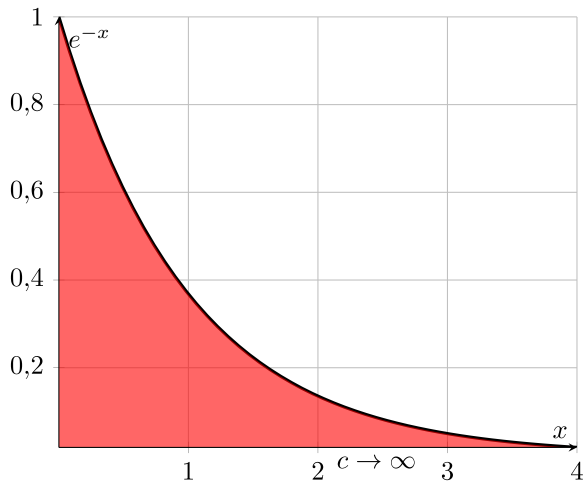
  Sí lo es porque la suma es integrable y la diferencia también que junto con el valor absoluto ya hemos dicho que sí.

Integrales Impropias

Puede surgir el problema de querer calcular este área que es finita, pero está definida en un intervalo que no es acotado:



Como la definición que hemos dado de integral de Riemann no permite que la suma de los intervalos sea una cantidad infinita, lo lógico para resolver este tipo de problemas es calcular la integral hasta cierto punto c y después enviar a c a infinito pasando al límite, cosa que si nos permiten las reglas generales del cálculo:



$$\int_0^{\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{c\to\infty} \int_0^{c} e^{-x}\,dx = \lim_{c\to\infty} 1 - e^{-c} = 1$$

En cierto modo, estamos calculando áreas de regiones infinitas y por estar fuera de la definición propiamente dicha de integral se las conoce como integrales impropias.

Integrales impropias de 1ª especie

Dada $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ de forma que $f \in R[a,b] : \forall b > a$, diremos que la **integral impropia** converge si existe y es finito:

$$\exists \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

De esta forma podemos definir la integral impropia como:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Pero hay que destacar que a esta integral no se le pueden aplicar muchos de los criterios o normas que hemos determinado puesto que no es una integral al uso de las que hemos visto.

Ejemplos

Tomamos por ejemplo la función $f(x) = \frac{1}{x^p}$ de forma que para hallar $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ calculamos:

$$\int_1^b \frac{dx}{x^p} = \int_1^b x^{-p}\ dx = \begin{cases} [\ln(x)]_1^b & \text{si } p = 1 \\ \left[\dfrac{x^{-p+1}}{-p+1}\right]_1^b & \text{si } p \neq 1 \end{cases}$$

Para el caso $p \neq 1$, tenemos que:

$$\frac{b^{-p+1}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \Rightarrow \begin{cases} 1-p > 0 \Rightarrow b^{1-p} \underset{b\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty \Rightarrow \displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \infty \\ 1-p < 0 \Rightarrow b^{1-p} \underset{b\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \displaystyle\lim_{b\to\infty}\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1} \end{cases}$$

Por el contrario, para el caso $p = 1$, tenemos que:

$$\ln(b) - \ln(1) = \ln(b) \underset{b\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

Y, en consecuencia, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ es covergente $\Leftrightarrow p > 1$ y además $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{1}{p-1}$.

Criterio de Cauchy para integrales impropias

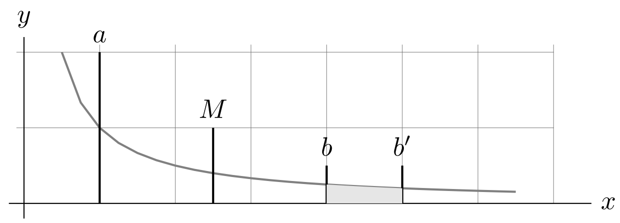
Es importante tratar de dar un criterio para saber si una integral impropia es o no convergente sin conocer el límite de convergencia puesto que en ocasiones será muy complejo. Si tratamos la integral como una expresión de la que queremos hallar el límite:

$$\exists \lim_{b\to+\infty} \underbrace{\int_a^b f(x)\ dx}_{=I_b} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists M \geq a: \text{ si } b' > b \geq M \Rightarrow |I_{b'} - I_b| < \varepsilon$$

Por tanto, si el Criterio de Cauchy lo aplicamos a las integrales se tiene que:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx \text{ es convergente } \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists M \geq a: \text{ si } b' > b \geq M \Rightarrow \left|\int_b^{b'} f(x)dx\right| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |I_{b'} - I_b| = |\int_a^{b'} f(x)\ dx - \int_a^b f(x)\ dx| = |\int_b^{b'} f(x)\ dx|$$



Es decir, en el fondo lo que estamos diciendo es que podemos coger dos puntos lo suficientemente grandes de forma que el área bajo la curva entre ambos sea cada vez más pequeña.

Corolario:

Este resultado tiene consecuencias muy importantes, como que:

$$\int_a^\infty f \text{ es convergente} \Leftrightarrow \int_{a'}^\infty f(x)\,dx : a' > a \text{ es convergente} \Leftrightarrow \int_{a'}^\infty f(x)\,dx : \forall a' > a \text{ es convergente}$$

Por tanto, la convergencia o divergencia de la integral impropia no depende de lo que le ocurra a la función en el intervalo $[a, a']$ (a pesar de poder ser tan grande como queramos) porque al fin y al cabo esta cantidad será finita, lo verdaderamente importante es ver que ocurre con la función cerca de ∞.

Criterios de comparación de integrales impropias

Supongamos que tenemos dos funciones $f, g : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ donde $f, g \in R[a, b] : \forall b > a$ y $0 \leq f(x) \leq g(x)$, entonces:

$$\int_a^\infty g(x)\,dx \text{ convergente } \Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ convergente}$$

Demostración:

$$\int_a^{+\infty} g(x)\,dx \text{ es convergente } \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M \geq a : \text{ si } b' > b \geq M \Rightarrow \left| \int_b^{b'} g(x)\,dx \right| < \varepsilon$$

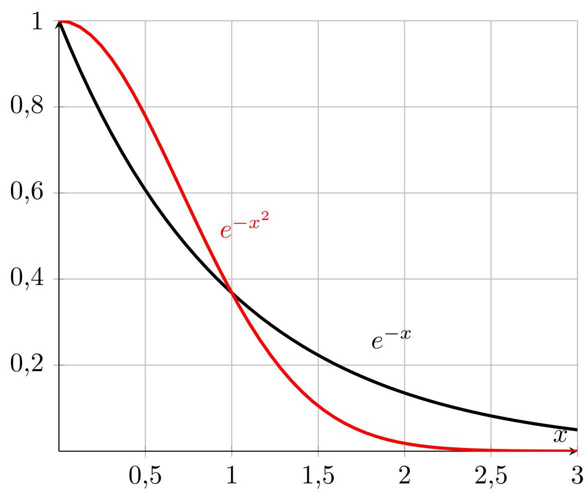
Por tanto, para los mismos ε, M, b, b' se tiene que:

$$f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx \leq \int_a^\infty g(x)\,dx < \varepsilon \Rightarrow \int_a^\infty f(x)\,dx \text{ es convergente}$$

Ejemplos:

Tomamos como función $f(x) = e^{-x^2}$ de forma que queremos calcular $\int_0^\infty e^{-x^2}$. Podemos usar entonces otra función para "acotarla" por arriba y que sepamos que su integral es convergente:

$$\begin{cases} e^{-x^2} \leq e^{-x} \text{ si } x \geq 1 \\ e^{-x^2} \geq e^{-x} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$



En primer lugar, por lo probado antes:

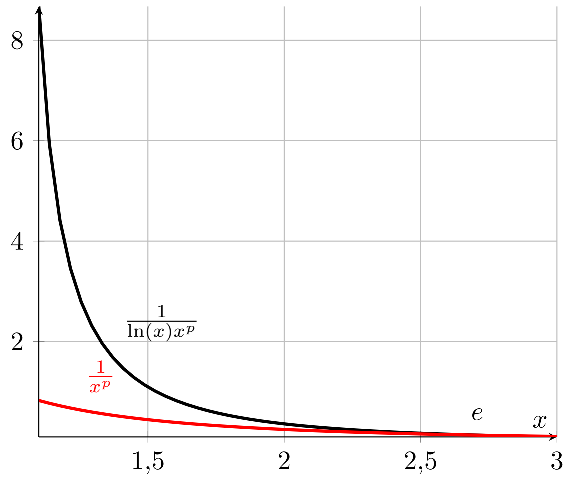
$$\int_0^\infty e^{-x^2} \text{ converge} \Leftrightarrow \int_1^\infty e^{-x^2} \text{ converge}$$

Del mismo modo, y por el teorema que se acaba de ver, se tiene que:

$$0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x} : \forall x \geq 1 \Rightarrow \int_1^\infty e^{-x} \text{ converge} \Rightarrow \int_1^\infty e^{-x^2} \text{ converge} \Rightarrow \int_0^\infty e^{-x^2} \text{ converge}$$

Tomamos ahora $f(x) = \frac{1}{\ln(x)x^p}$ de forma que queremos calcular $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln(x)x^p}$. Acotamos de nuevo por una función que sabemos convergente:

$$\frac{1}{\ln(x)x^p} < \frac{1}{x^p} : \forall x \geq e$$



Del mismo modo, vuelve a ocurrir:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln(x)x^p} \text{ converge } \Leftrightarrow \int_e^{+\infty} \frac{dx}{\ln(x)x^p} \text{ converge}$$

Así que se tiene que:

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ converge} \Rightarrow \int_e^{+\infty} \frac{dx}{\ln(x)x^p} \text{ converge} \Rightarrow \int_2^{+\infty} \frac{dx}{\ln(x)x^p} \text{ converge}$$

Teorema de comparación en el límite

Hemos visto anteriormente que si $0 \leq f(x) \leq g(x) : \forall x \in (a, \infty)$, entonces la convergencia de la integral de $g(x)$ implica la convergencia de la integral de $f(x)$, pero vimos que, en realidad, podíamos relajar condiciones como que $f(x) \leq g(x) : \forall x \in (a', \infty) : a' > a$. El objetivo de este teorema es mejorar dicho criterio para prescindir de todas aquellas premisas que no son tan necesarias, debilitando las condiciones del Teorema.

Suponemos que $f, g \in [a, \infty) \to \mathbb{R}$ de forma que $f, g \in R[a, b] : \forall b > a$ y que cumplen $f(x), g(x) \geq 0$. Si se verifica que:

$$\exists \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in (0, \infty) \cup \{\infty\}$$

Entonces se tiene que:

- $0 < L < \infty$

  $$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx \text{ es convergente} \Leftrightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\ dx \text{ es convergente}$$

  Esto quiere decir que intuitivamente existe una constante que relaciona como se comportan ambas funciones cuando tienden a infinito.

- $L = 0$
$$\int_a^{+\infty} g(x)\ dx \text{ es convergente} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\ dx \text{ es convergente}$$
Lo que indica lo que vimos, que $g(x)$ acota a f y entonces si la integral impropia de $g(x)$ converge, entonces la de $f(x)$ también.
- $L = \infty$
$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx \text{ es convergente} \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\ dx \text{ es convergente}$$
El mismo caso que vimos, pero cambiando la función que es acotada.

Demostración:

Vamos a hacer la primera demostración y las otras se dejan a nuestra cuenta.

Supongamos que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L : 0 < L < +\infty \Rightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists M \geq a :\ \text{si } x \geq M \Rightarrow \left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \varepsilon$$

Ahora tomamos $\varepsilon = \frac{L}{2} > 0$, entonces se tiene que:

$$\varepsilon = \frac{L}{2} > 0, \exists M \geq a :\ \text{si } x \geq M \Rightarrow -\frac{L}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} - L < \frac{L}{2} \Rightarrow \frac{L}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3L}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{L}{2} \cdot g(x) < f(x) < \frac{3L}{2} \cdot g(x) : x \geq M$$

Conociendo esta desigualdad, tenemos entonces que:

- $\Rightarrow$:
$$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx \text{ es convergente} \Rightarrow \int_M^{+\infty} f(x)\,dx \text{ es convergente} \Rightarrow \int_M^{+\infty} \frac{L}{2} \cdot g(x)\,dx \text{ es convergente} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_M^{+\infty} g(x)\ dx \text{ es convergente} \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\ dx \text{ es convergente}$$
- $\Leftarrow$
$$\int_a^{+\infty} g(x)\ dx \text{ convergente} \Rightarrow \int_M^{+\infty} g(x)\ dx \text{ convergente} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \int_M^{+\infty} \frac{2}{3L} f(x)\ dx \text{ convergente} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\ dx \text{ convergente}$$

Ejemplo

Supongamos que la función $f(x) = xe^{-x^2+2x}$ de forma que el objetivo sea calcular:

$$\int_0^{\infty} xe^{-x^2+2x}\ dx$$

Tomamos la función $g(x) = e^{-x}$ y ahora vamos a calcular el cociente de ambas:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{xe^{-x^2+2x}}{e^{-x}} = \frac{x}{e^{x^2-3x}}$$

Y por L'Hôpital se tiene que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

Luego entonces ocurre que:

$$\int_0^{+\infty} g(x)\ dx \text{ converge} \Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x)\ dx \text{ converge}$$

Integrales Impropias de 2ª especie

Puede ocurrir que el área que queremos hallar no es que esté en un intervalo que es infinito sino que esté en intervalo en el que las imágenes no son acotadas y se plantea el mismo problema que teníamos en las impropias de primera especie, por tanto, es razonable pensar que la solución es la misma.

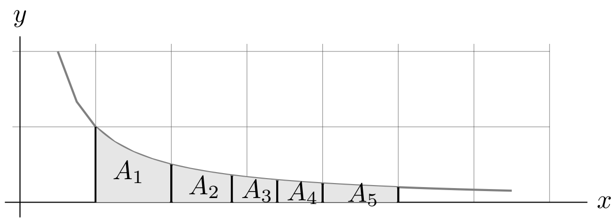
Los criterios de comparación y comparación en el límite que se han dado anteriormente funcionan también para integrales de 2ª especie.

Criterio de convergencia entre series e integrales

Supongamos que tenemos $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ que verifica que $f(x) \geq 0$, que f es decreciente y que $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. Entonces decimos que:

$$\int_0^{\infty} f(x)\ dx \text{ converge} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ converge}$$

El siguiente dibujo pone de manifiesto lo que el teorema viene a decir: las series numéricas, que podemos simplificar en concepto a suma infinita de ciertos números, están muy relacionadas con la suma de las áreas de los trozos en los que hemos partido $f(x)$ puesto que vuelve a ser el problema de hallar una suma infinita de números.

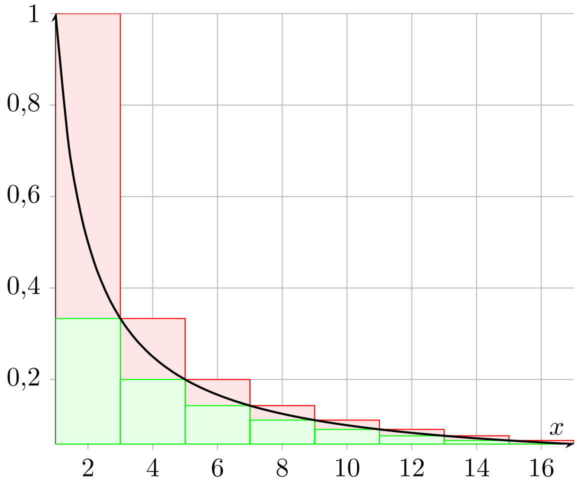


<u>Demostración</u>

- $\boxed{\Rightarrow}$
  Sabemos que:
  $$\int_0^{+\infty} f(x)\ dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)\ dx$$
  Si $x \in [n-1, n] \Rightarrow f(n) \leq f(x) \leq f(n-1)$ porque f es decreciente, luego ocurre que:
  $$\underbrace{\int_{n-1}^{n} f(n)}_{=f(n)} \leq \int_{n-1}^{n} f(x) \leq \underbrace{\int_{n-1}^{n} f(n-1)}_{=f(n-1)} : \forall n = 1, 2, 3, \ldots$$
  Podemos observar que entonces se verifica que:
  $$\begin{cases} f(1) \leq \displaystyle\int_0^1 f(x) \leq f(0) \\ f(2) \leq \displaystyle\int_1^2 f(x) \leq f(1) \\ \vdots \\ f(n) \leq \displaystyle\int_{n-1}^{n} f(x) \leq f(n-1) \end{cases}$$

$$f(1) + f(2) + \ldots + f(n) \leq \int_0^n f(x)\ dx \leq f(0) + f(1) + \ldots + f(n-1) \Rightarrow$$

Es decir, geométricamente estamos sumando los cuadrados "pequeñitos" que son menores que la integral y, por otro lado, estamos sumando los cuadrados "grandes" que son mayores que la integral.



Si ahora suponemos que lo que es convergente es la integral, tenemos que:

$$\int_0^{+\infty} f(x)\ dx \text{ es convergente } \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \int_0^n f(x)\ dx = L$$

De este modo, recuperando la desigualdad de antes vemos que:

$$\underbrace{f(1) + f(2) + \ldots + f(n)}_{s_n} \leq \int_0^n f(x)\ dx \leq L$$

Por tanto, como s_n es creciente y está acotada superiormente, tenemos que es convergente, es decir:

$$\exists \lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

- $\boxed{\Leftarrow}$

Supongamos ahora que $\exists \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(k)$

$$\int_0^n f(x)\ dx \leq f(0) + f(1) + \ldots + f(n-1) = f(0) + s_{n-1}$$

Si consideramos ahora la sucesión $\{f(0) + s_{n-1}\} \xrightarrow{n\to\infty} f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} f(n)$

Vemos entonces que $\left\{\int_0^n f(x)dx\right\}_{n=1}^{\infty}$ es acotada y creciente porque:

$$\int_0^n f(x)\ dx \leq \int_0^{n+1} f(x)\ dx = \int_0^n f(x)\ dx + \int_n^{n+1} f(x)\ dx$$

Por tanto, se tiene que:

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \int_0^n f(x)dx = L$$

A pesar de que podría parecer que la demostración ha concluido, la integral impropia no es solo entre 0 y n sino que es entre 0 y un b arbitrario:

Para que la integral impropia exista, tenemos que probar que $\exists \lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)\ dx$. Por ello vemos que $\int_0^b f(x)dx$ es creciente en b, además:

$$b \leq n \Rightarrow \int_0^b f(x)\ dx \leq \int_0^n f(x)\ dx \leq L$$

Y entonces, como es creciente y acotada es convergente a un límite:

$$\Rightarrow \exists \lim_{b\to\infty} \int_0^b f(x)dx$$

Observación

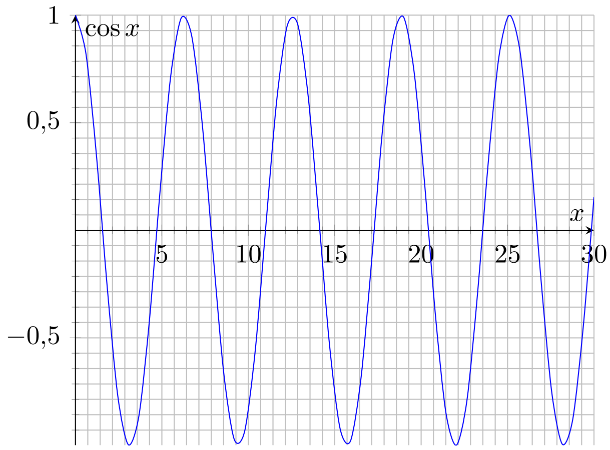
Como la sucesión $\int_0^n f(x)\ dx$ acota a $\int_0^b f(x)\ dx$ y esta última es creciente, la convergencia de la primera implica la convergencia de la segunda, pero si no se verificasen esas condiciones no podríamos afirmar nada, por este motivo la demostración no finalizaba con demostrar que $\int_0^n f(x)\ dx$ convergía. Es decir:

$$\exists \lim_{b\to\infty} h(b) \Rightarrow \exists \lim_{x_n\to\infty} h(x_n)$$

Pero el recíproco necesita condiciones extra.

Por ejemplo:

$$h(x) = \cos(2\pi x) \Rightarrow \begin{cases} \nexists \lim_{x\to\infty} cos(2\pi x) \\ \exists \lim_{n\to\infty} cos(2\pi n) \end{cases}$$



Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ (serie armónica)}$$

Esta serie se relaciona con las integrales de esta forma:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\ dx \text{ converge} \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{1}{x}\ dx \text{ converge}$$

Pero sabemos que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x}$ no converge, luego la serie armónica no converge $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge

Ejemplo:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ (serie de Basilea)}$$

Con esta serie por el teorema visto sabemos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \text{ converge} \Leftrightarrow \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p} \text{ converge}$$

Y sabemos que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^p}$ converge si $p > 1$ luego podemos concluir que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ converge .

Integral de Darboux

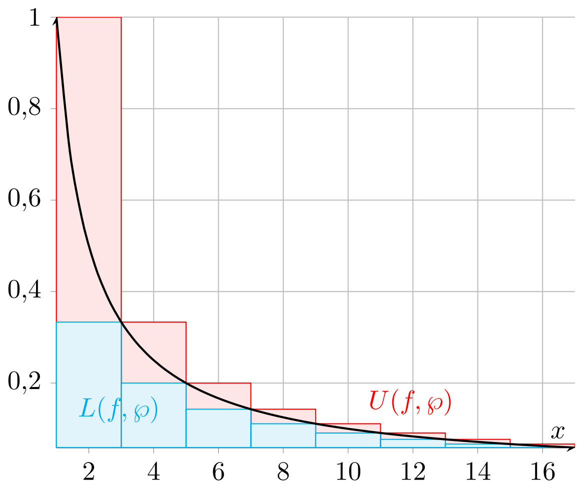
La integral de Darboux es una interpretación alternativa de la integral de Riemann que permite construir de forma distinta el concepto que se ha desarrollado en los puntos anteriores y para la cual se aplican todos los teoremas y razonamientos vistos anteriormente.

Supongamos que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es acotada, de esta forma podemos definir:

$$\begin{cases} m_i = \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \end{cases} \quad m_i \leq f(x) \leq M_i : \forall x \in [x_{i-1}, x_i]$$

Tomamos la partición $P = \{a = x_0 < \cdots < x_n = b\}$ y definimos las siguientes sumas de Riemann:

$$\begin{cases} L(f, \wp) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\ U(f, \wp) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \end{cases}$$



Dada una partición $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ diremos que la partición $Q = \{a = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = b\}$ es un refinamiento de P si $P \subset Q$, es decir, $\forall x_i \in P \Rightarrow x_i \in Q$.

Es decir, lo que estamos haciendo es dividir en fragmentos más finos (que incluyen los puntos de la partición anterior) el intervalo del que queremos hallar la integral.

De este modo, vemos que se verifican las siguientes propiedades:

- $L(f, P) \leq U(f, P)$ de forma trivial
- $P \subset \bar{P} \Rightarrow L(f, P) \leq L(f, \bar{P}) \leq U(f, \bar{P}) \leq U(f, P)$ porque el ínfimo solo aumenta y el supremo solo disminuye en los refinamientos sucesivos.

Es decir, los refinamientos sucesivos hacen que las sumas de Riemann cada vez se junten más y por las propiedades anteriores podemos definir:

$$\begin{cases} L(f) = \sup\{L(f, P) : P \text{ partición}\} \\ U(f) = \text{ínf}\{U(f, P) : P \text{ partición}\} \end{cases}$$

Por tanto, siempre se tiene que:

$$L(f) \leq U(f)$$

Por tanto, diremos que $f \in R[a, b]$ en el sentido de Darboux si $L(f) = U(f)$ que además ocurre que $L(f) = U(f) = \int_a^b f(x)\, dx$.

Teorema

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ acotada, entonces se verifica:

$$f \in R[a, b] \Leftrightarrow L(f) = U(f)$$

Es decir, que la interpretación de Darboux y la de Riemann son completamente equivalentes y si una función es integrable debe acogerse a ambas por igual. Por tanto, también ocurre que:

$$\int_a^b f(x)\ dx = L(f) = U(f)$$

<u>Demostración</u>:

- "$\Leftarrow$"

  Supongamos que $L(f) = U(f)$. Sabemos por la definición dada que:

  $$\begin{cases} L(f) = \sup\{L(f, \wp) : \wp \text{ partición}\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \tilde{\wp} : L(f) - \frac{\varepsilon}{2} \leq L(f, \tilde{\wp}) \\ U(f) = \text{ínf}\{U(f, \wp) : \wp \text{ partición}\} \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \bar{\wp} : U(f, \bar{\wp}) < U(f) + \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

  Sea $P = \tilde{\wp} \cup \bar{\wp}$ una nueva partición, esta es un refinamiento de $\tilde{\wp}$ y $\bar{\wp}$. Ahora podemos ver por las propiedades definidas antes para los refinamientos:

  $$L(f) - \frac{\varepsilon}{2} < L(f, \tilde{\wp}) \leq L(f, P) \leq U(f, P) \leq U(f, \bar{\wp}) < U(f) + \frac{\varepsilon}{2}$$

  Por tanto, tal y como hemos definido $L(f) = U(f)$ tenemos que:

  $$I(f[a, b]) - \frac{\varepsilon}{2} < L(f, \wp) \leq U(f, \wp) < I(f, [a, b]) + \frac{\varepsilon}{2}$$

  Ahora si aplicamos el Teorema del Sandwich:

  $$\begin{cases} \alpha_\varepsilon(x) = m_i : x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \omega_\varepsilon(x) = M_i : x \in [x_{i-1}, x_i] \end{cases} \quad : \forall i \in \mathbb{N} : x_i \in P$$

  Tal y como las hemos definido, α_ε y ω_ε son funciones escalera que acotan a $f(x)$, luego:

  $$\alpha_\varepsilon(x) \leq f(x) \leq \omega_\varepsilon(x)$$

  Por lo que basta probar que la integral de la distancia entre ambas es tan pequeña como queramos:

  $$\int_a^b \alpha_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1}) = L(f, \wp)$$

  $$\int_a^b \omega_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}) = U(f, \wp)$$

  $$\int_a^b \omega_\varepsilon(x) - \alpha_\varepsilon(x)\ dx \leq \int_a^b \varepsilon = \varepsilon(b - a)$$

  Y por el Teorema del Sándwich $f \in \mathcal{R}[a, b]$

- "$\Rightarrow$"

  Suponemos en este caso que f es integrable en el sentido de Riemann. Eso quiere decir que:

  $$\exists L : \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : ||\mathring{P}|| < \delta \Rightarrow |S(f, \mathring{P}) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Supongamos entonces $\mathring{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots x_n = b\}$ una partición que cumple que $||\mathring{P}|| < \delta$ y vamos a calcular las sumas superiores e inferiores de Riemann:

$$\begin{cases} L(f,p) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\ U(f,p) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) \end{cases} \quad \text{donde} \begin{cases} m_i = \text{ínf}\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \\ M_i = \sup\{f(x) : x \in [x_{i-1}, x_i]\} \end{cases}$$

En primer lugar, tenemos que m_i, por la definición de ínfimo, cumple que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists t_i \in [x_i - x_{i-1}] : m_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} > f(t_i)$$

Y de forma análoga, por definición de supremo:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \bar{t_i} : f(\bar{t_i}) > M_i - \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$$

Por tanto, ahora generamos dos particiones a partir de la habíamos denotado antes de forma que las marcas de una sean t_i y que las marcas de la otra sean $\bar{t_i}$:

$$\begin{cases} \mathring{P} = \{a = x_0 < x_1 < \dots x_n = b : t_i \in [x_i - x_{i-1}]\} \\ \mathring{\bar{P}} = \{a = x_0 < x_1 < \dots x_n = b : \bar{t_i} \in [x_i - x_{i-1}]\} \end{cases}$$

De este modo, las sumas de Riemann de cada partición se corresponden con:

$$S(f, \mathring{P}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} \left(m_i + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \right) (x_i - x_{i-1}) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{b-a} = L(f, P) + \frac{\varepsilon}{2}$$

Y de modo análogo se tiene que:

$$S(f, \mathring{\bar{P}}) = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{t_i})(x_i - x_{i-1}) \geq \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}) - \frac{\varepsilon}{2} = U(f, \mathring{\bar{P}}) - \frac{\varepsilon}{2}$$

En consecuencia, ocurre que:

$$-\frac{\varepsilon}{2} < S(f, \mathring{P}) - L < \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow L - \frac{\varepsilon}{2} < S(f, \mathring{P}) < L + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L - \frac{\varepsilon}{2} < S(f, \mathring{P}) < L(f, \mathring{P}) + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow L - \varepsilon < L(f, \mathring{P}) \leq L(f)$$

Y para la partición $\mathring{\bar{P}}$ ocurre de forma análoga:

$$L - \frac{\varepsilon}{2} < S(f, \mathring{\bar{P}}) < L + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow U(f, \mathring{\bar{P}}) - \frac{\varepsilon}{2} \leq S(f, \mathring{\bar{P}}) < L + \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow U(f) \leq U(f, \mathring{\bar{P}}) < L + \frac{\varepsilon}{2}$$

Así que en conjunto tengo que:

$$L - \varepsilon \leq L(f) \leq U(f) \leq L + \varepsilon$$

Como esto es cierto para todo $\varepsilon > 0$, entonces se tiene que:

$$U(f) - L(f) = 0 \Rightarrow U(f) = L(f)$$

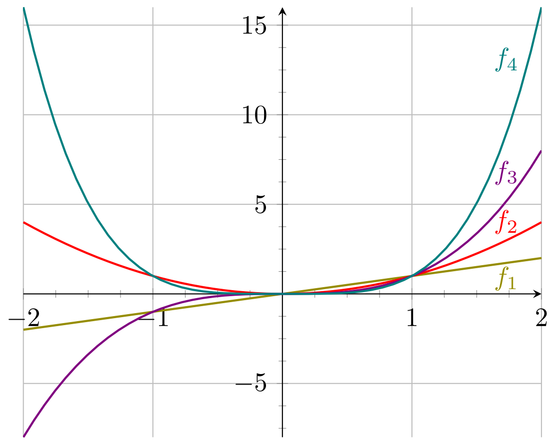
Y además se verifica:

$$L - \varepsilon \leq L(f) = U(f) \leq L + \varepsilon \Rightarrow U(f) = L(f) = L$$

SUCESIONES Y SERIES DE FUNCIONES

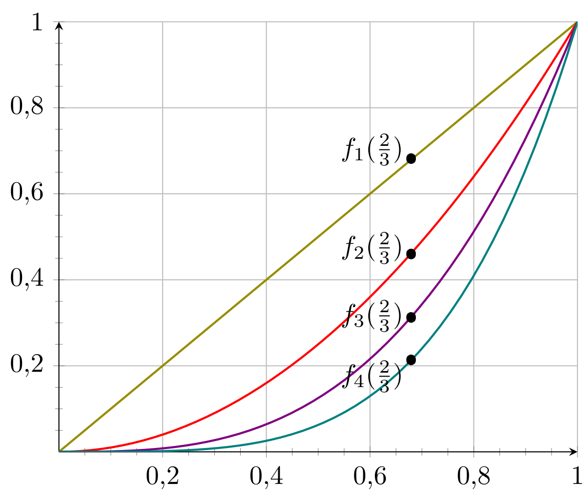
Hasta ahora hemos considerado las sucesiones y series de números y también hemos discutido cuestiones referidas a funciones que en ocasiones estaban pendientes de un parámetro. Este capítulo aúna ambos temas en un único objeto matemático: **las sucesiones de funciones**.

Consideremos por ejemplo la sucesión $f_n(x) = x^n$, para los distintos valores de n vamos a tener polinomios de grado distinto:



Si fijamos ahora un valor de x concreto, como por ejemplo $x_0 = \frac{2}{3}$, entonces es sencillo ver que las sucesivas imágenes de x_0 cuando va aumentando n van convergiendo a 0. Luego podemos decir que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n\left(\frac{2}{3}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = 0$$



De hecho no es difícil ver que la sucesión de funciones tiene el siguiente comportamiento:

$$\begin{cases} \forall x \in [0,1) & \Rightarrow \text{lím}_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \\ x = 1 & \Rightarrow \text{lím}_{n\to\infty} f_n(x) = 1 \\ \forall x \in (1,\infty) & \Rightarrow \text{lím}_{n\to\infty} f_n(x) = \infty \\ \forall x \in (-1,0] & \Rightarrow \text{lím}_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \\ x = -1 & \Rightarrow \text{lím}_{n\to\infty} f_n(x) = \nexists \\ \forall x \in (-\infty,-1) & \Rightarrow \text{lím}_{n\to\infty} f_n(x) = \nexists \end{cases}$$

Para ver la abstracción que trae consigo este tema y la de posibilidades que puede tener para otras áreas de las matemáticas, gracias a esta sucesión de funciones yo podría definir otra función que sería la función que define el límite de la sucesión en función del valor de x seleccionado:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-1,1) \\ 1 & x = 1 \end{cases} \Rightarrow f_n(x) \xrightarrow{n\to\infty} f(x)$$

SUCESIONES DE FUNCIONES

Definición y conceptos básicos

Convergencia puntual

Dada una sucesión de funciones $f_n : A \to \mathbb{R}$ donde $A \subset \mathbb{R}$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$ (no necesariamente un intervalo), diremos que la sucesión de funciones $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **converge puntualmente** a una función $f : A_0 \to \mathbb{R}$ donde $A_0 \subseteq A$ es un subconjunto de A si:

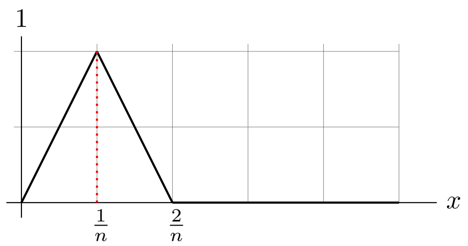
$$x \in A_0 : \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

Ejemplos:

Para las funciones que se han definido en el preámbulo de este capítulo, $f_n(x) = x^n$ converge puntualmente a $f(x)$ en A_0.

Por ejemplo, sea $x \in [0,1], n \geq 2$, entonces:

$$f_n(x) = \begin{cases} nx & \text{si } x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 2 - nx & \text{si } x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & \text{si } \frac{2}{n} \leq x \leq 1 \end{cases}$$



- Si $x = 0$

$$f_n(x) = 0 : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

- Si $0 < x \leq 1$

Veamos que por ejemplo si $x = \frac{1}{2}$, entonces:

$$\begin{cases} f_2(\frac{1}{2}) = 1 \\ f_3(\frac{1}{2}) = 2 - 3\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ f_4(\frac{1}{2}) = 0 \\ f_5(\frac{1}{2}) = 0 \\ f_6(\frac{1}{2}) = 0 \end{cases} \Rightarrow f_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0 : \forall n \geq 4 \Rightarrow f_n\left(\frac{1}{2}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

Con lo cual, de forma más general, dado $x \in (0, 1]$:

$$\exists N \in \mathbb{N} : N > \frac{2}{x} \Leftrightarrow \frac{2}{N} < x \Rightarrow \forall n \geq N : \frac{2}{n} \leq \frac{2}{N} < x \Rightarrow f_n(x) = 0 : \forall n \geq N \Rightarrow \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$$

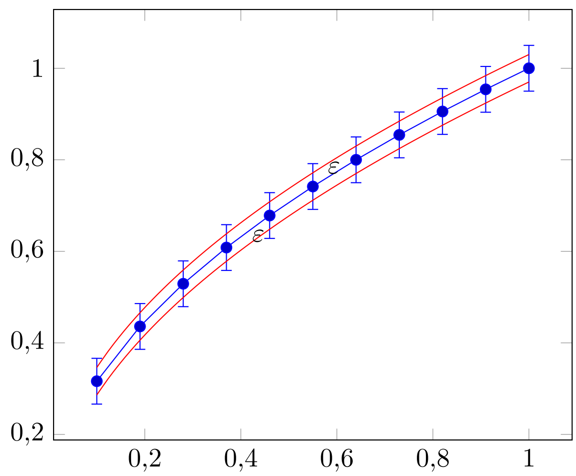
Es decir, $\forall x \in [0, 1] : f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, por tanto, en general $f(x) = 0 : \forall x \in [0, 1]$.

Convergencia uniforme

Diremos que la sucesión de funciones $f_n : A \to \mathbb{R}$ converge uniformemente en A_0 a la función $f : A_0 \to \mathbb{R}$ (que denotaremos por $f_n \rightrightarrows f$) si:

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall n \geq N : \forall x \in A_0$$

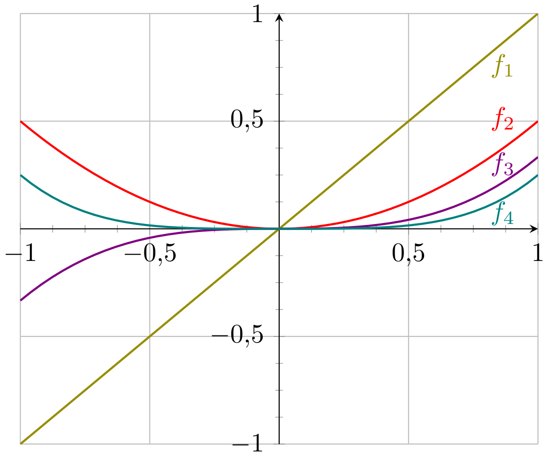
La diferencia notable con respecto a la convergencia puntual es que en este caso no es un único punto el que converge a partir de un cierto n, sino que son todos los puntos los que cada vez se asemejan más a la función a partir de un cierto n.



Es decir, que podemos meter todas las funciones de la sucesión a partir de un n dentro de ese intervalo tubular ε alrededor de la función límite.

<u>Ejemplos:</u>

Tomamos $g_n(x) = \frac{x^n}{n} : x \in [-1, 1]$:



Tal y como hemos tomado el intervalo, tenemos que $x \in [-1, 1] \Rightarrow |x| \leq 1$, luego:

$$|g_n(x)| = \left|\frac{x^n}{n}\right| = \frac{|x|^n}{n} \leq \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow g_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

La diferencia fundamental con respecto al otro ejemplo es que a partir de un cierto n yo siempre puedo meter a la sucesión de funciones en un entorno alrededor de la función $f(x)$ a la que converge, es decir:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} : n_0 > \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow |\frac{x^n}{n}| \leq \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon \text{ si } n \geq n_0$$

Mientras que en la otra sucesión de funciones para cualquier n siempre voy a tener puntos cuyo valor sea 1, por lo que no puede verificarse esta condición tan fuerte.

Teorema

Si la sucesión de funciones converge uniformemente en A_0, entonces converge puntualmente en A_0.

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \Rightarrow f_n(x) \to f(x)$$

Demostración:

Es trivial por las definiciones que se han dado, ya que al converger uniformemente, entonces se verifica la desigualdad para todo x y si lo fijamos obtenemos la definición de convergencia puntual.

Norma del Supremo

Dada $f : A_0 \to \mathbb{R}$ acotada, definimos la **norma del supremo**, también conocida como norma infinito, a la cantidad:

$$||f||_{A_0} = \sup_{x\in A_0} \{|f(x)|\}$$

De esta forma, si observamos la siguiente equivalencia en la convergencia uniforme:

$$f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 : \exists N \in \mathbb{N} : |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon,\ \forall n \geq N : \forall x \in A_0 \Leftrightarrow \sup\{|f_n(x) - f(x)|\} < \varepsilon \Leftrightarrow$$

Podemos redefinir el concepto de convergencia uniforme conforme a la siguiente definición:

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \Rightarrow ||f_n - f||_{A_0} < \varepsilon : \forall n \geq N : \forall x \in A_0$$

Criterios y propiedades

Criterio de Cauchy

Sea $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ una sucesión de funciones acotadas en un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, entonces esta converge uniformemente a una cierta función $f : A_0 \to \mathbb{R}$ si ocurre que:

$$f_n \rightrightarrows f \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists K \in \mathbb{N} : n, m \geq K \Rightarrow ||f_n - f_m||_{A_0} < \varepsilon$$

Luego de nuevo tenemos un criterio para determinar la convergencia uniforme sin necesidad de saber esa función a la converge f_n.

Demostración:

- "$\Rightarrow$"

  Supongamos que $f_n \rightrightarrows f$ uniformemente en A_0, entonces:

  $$\forall \varepsilon > 0, \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \forall n \geq N \Rightarrow ||f_n - f||_{A_0} < \frac{\varepsilon}{2}$$

  Es decir, que esto es lo mismo que:

  $$\sup_{x \in A_0} |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \Leftrightarrow |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} : \forall x \in A_0$$

  De este modo, sean $n, m \geq N(\varepsilon)$ y sea $x \in A_0$, entonces ocurre que:

  $$|f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \Rightarrow$$

  $$\Rightarrow \sup_{x \in A_0} |f_n(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon \Rightarrow ||f_n - f_m|| < \varepsilon$$

- "$\Leftarrow$"

  Supongamos que $\{f_n\}$ que satisface el Criterio de Cauchy. Si $x \in A_0$ entonces la sucesión $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ es de Cauchy porque:

  $$\varepsilon > 0, \text{ sea } K(\varepsilon) \in \mathbb{N} : n, m \geq K(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \leq \sup_{z \in A_0} |f_n(z) - f_m(z)| = ||f_n - f_m||_{A_0} \leq \varepsilon$$

  De este modo, si la sucesión es de Cauchy, es convergente, luego:

  $$\exists \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$$

  Hemos construido $f : A_0 \to \mathbb{R}$ que a cada punto le asocia su límite, por tanto hemos demostrado que hay convergencia puntual y tenemos candidata a convergencia uniforme. Vamos a probar ahora que $f_n \rightrightarrows f$:

  $$\text{Dado } \varepsilon > 0, \exists K(\varepsilon) : n, m \geq K(\varepsilon) \Rightarrow ||f_n - f_m||_{A_0} \leq \varepsilon \text{ por ser de Cauchy}$$

  Fijamos $n \geq N(\varepsilon)$ y escogemos $x \in A_0$ arbitrario, entonces sea $\gamma_m = |f_n(x) - f_m(x)| \in \mathbb{R}$ se tiene que:

  $$\begin{cases} \lim_{m \to \infty} \gamma_m = |f_n(x) - f(x)| \\ 0 \leq \gamma_m \leq \varepsilon \end{cases} \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon : \forall x \in A_0$$

  Por tanto, $f_n \rightrightarrows f$ uniformemente en A_0

Criterio de no Convergencia Uniforme

Si una sucesión de funciones no converge uniformemente, entonces podemos decir que:

$$f_n \not\rightrightarrows f \Leftrightarrow \exists \varepsilon_0 > 0 : \exists \{f_{n_k}\}_{k=1}^{\infty} \ \wedge \ \exists x_{n_k} A_0 : |f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| > \varepsilon_0$$

Demostración:

La definición de convergencia uniforme:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N : ||f_n - f||_{A_0} < \varepsilon \Leftrightarrow \sup_{x \in A_0} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

La negación de esta definición:

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall N \in \mathbb{N}, \exists n \geq N \text{ y } x_n : |f_n(x_n) - f(x_n)| > \varepsilon_0$$

Sea $N = 1 \Rightarrow \exists n_1$ y $x_{n_1} : |f_{n_1}(x_{n_1}) - f(x_{n_1})| > \varepsilon_0$. Si tomamos $N = n_1, \exists n_2 > n_1$ y $x_{n_2} \in A_0 : |f_{n_2}(x_{n_2}) - f(x_{n_2})| > \varepsilon_0$, luego por inducción:

$$\exists f_{n_k} \text{ y } x_{n_k} \in A : |f_{n_k}(x_{n_k}) - f(x_{n_k})| > \varepsilon_0$$

Lo que es equivalente a la negación que hemos puesto.

Ejemplo:

Tomemos como ejemplo la sucesión $f_n(x) = \frac{x}{x+n}$ tomando $x \in [0, \infty)$. Por un lado, es sencillo ver que la convergencia puntual es 0, puesto que si fijamos x obtenemos que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{x+n} = 0$$

Sin embargo, vemos que para un n fijo, $\lim_{x\to\infty} f_n(x) = 1$, lo que quiere decir que siempre a partir de un cierto x la función se acerca lo suficiente a 1; luego no parece plausible la convergencia uniforme porque para cualquier n por muy grande que sea siempre existirán x de forma que la función esté cerca de 1 y no de 0. ¿Como demostramos esto? Tomemos la sucesión $x_n = n$, de este modo, $f_n(x_n) = \frac{1}{2}$, luego:

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon \Rightarrow \frac{1}{2} \geq \varepsilon$$

Así que ya vemos que no converge uniformemente en $[0, \infty)$, sin embargo, ¿podemos considerar $A_0 \subset [0, \infty)$ de forma que sí converja uniformemente?

Sea $M > 0$ fijo, y sea $A_0 = [0, M]$ vamos a demostrar la convergencia uniforme en $[0, M)$. Si consideramos este intervalo nos deshacemos del problema que imposibilitaba la convergencia uniforme puesto que al no dejar que la función llegue hasta infinito no se verifica la propiedad del límite de que había x cuya imagen era muy cercana a 1, es decir, sigue ocurriendo lo mismo de antes pero al acotar el intervalo sobre el que lo estudiamos, dado un n existen x suficientemente grandes cuya imagen es cercana a uno, pero ahora estas x están fuera del intervalo $[0, M]$ por lo que no cuentan.

En primer lugar, es trivial de nuevo que la función converge puntualmente a 0:

$$f_n(x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 : x \in [0, M]$$

Veamos ahora la convergencia uniforme, para ello primero calculamos este supremo:

$$\sup_{x\in[0,M]} |f_n(x)| = \sup_{x\in[0,M]} \frac{x}{x+n}$$

Como $f_n'(x) = \frac{n}{(x+n)^2} > 0$ entonces f_n es creciente, luego el supremo se alcanza en el extremo derecho del intervalo, así que:

$$|f_n(x)| \leq \frac{M}{M+n}$$

De este modo, se tiene que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{M}{M+n} = 0 \Rightarrow \varepsilon > 0, \exists N(\varepsilon) : 0 < \frac{M}{M+n} < \varepsilon : n \geq N(\varepsilon)$$

Luego, por la definición que se ha dado de convergencia uniforme con respecto a la norma del supremo:

$$||f_n - f||_{[0,M]} \overset{f\equiv 0}{=} ||f_n||_{[0,M]} = \sup_{x\in[0,M]} \left| \frac{x}{x+n} \right| = \frac{M}{M+n} < \varepsilon : n \geq N(\varepsilon)$$

$$\Rightarrow f_n \rightrightarrows 0 \text{ en } [0, M]$$

Teorema

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones continuas en $A \subset \mathbb{R}$ que converge uniformemente a $f : A \to \mathbb{R}$, entonces f es continua en A, es decir:

$$f_n \rightrightarrows f \ \wedge \ f_n \text{ continua en } A : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow f \text{ continua en } A$$

Demostración:

Si $f_n \rightrightarrows f$ uniformemente, entonces:

$$\varepsilon > 0, \exists N : \forall n \geq N \Rightarrow ||f_n - f||_A < \frac{\varepsilon}{3}$$

Sea $x \in A$ un punto cualquiera, como f_N es continua en A, entonces:

$$\exists \delta > 0 : |y - x| < \delta \Rightarrow |f_N(y) - f_N(x)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

De este modo, ocurre que:

$$|f(y) - f(x)| = |f(y) - f_N(y) + f_N(y) - f_N(x) + f_N(x) - f(x)| \leq$$

$$\leq |f(y) - f_N(y)| + |f_N(y) - f_N(x)| + |f_N(x) - f(x)| \leq ||f - f_N||_A + |f_N(y) - f_N(x)| + ||f_n - f||_A \leq$$

$$\leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon : \text{ si } |y - x| < \delta \Rightarrow \text{ f es continua en } x$$

Como x es arbitrario, entonces f es continua en A.

Teorema

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en un intervalo acotado J. Supongamos que f_n es derivable $\forall n = 1, 2, \ldots$ en J y:

- $\exists x_0 \in J : \{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ es convergente
- La sucesión de funciones $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ convergen uniformemente a una función $g : J \to \mathbb{R}$

Entonces, la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a una función $f : J \to \mathbb{R}$ que es derivable y $f'(x) = g(x)$.

Es decir, en realidad lo que estamos queriendo decir es que podemos pasar el límite dentro de la derivada:

$$\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{d}{dx} f_n\right)$$

Demostración:

Vamos a aplicar el Criterio de Cauchy para la convergencia uniforme:

$$\gamma_{nm} = f_n - f_m$$

Si tomamos $x_0, x \in J$, entonces se tiene que γ_{nm} continua en $[x_0, x]$ o $[x, x_0]$ y además derivable en los abiertos, luego por el Teorema del Valor Medio:

$$\frac{\gamma_{nm}(x) - \gamma_{nm}(x_0)}{x - x_0} = \gamma'_{nm}(\xi) : \xi \in (x_0, x) \text{ o } (x, x_0) \Rightarrow \gamma_{nm}(x) = \gamma_{nm}(x_0) + (x - x_0)\gamma'_{nm}(\xi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_n(x) - f_m(x) = f_n(x_0) - f_m(x_0) + (x - x_0)(f'_n(\xi) - f'_m(\xi)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + |x - x_0||f'_n(\xi) - f'_m(\xi)| \leq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + (b-a)||f'_n - f'_m||_J$$

Por un lado, como por hipótesis esta sucesión es convergente en x_0, entonces es de Cauchy, por lo que podemos acotar el primer término de la suma y como las derivadas convergen, el segundo término también está acotado. Como esto ocurre para todo x, si tomamos $\sup\limits_{x \in J}$ tenemos que:

$$||f_n - f_m||_J = \sup_{x \in J}|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x_0) - f_m(x_0)| + (b-a)||f'_n - f'_m||_J < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \varepsilon$$

Justificación: $\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n, m \geq N \Rightarrow |f_n(x_0) - f_m(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ y $||f'_n - f'_m||_J < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$.

Luego $\{f_n\}$converge uniformemente a una funciónf.

Vamos a probar que f es derivable en $x \in J$. Por el teorema del valor medio teníamos que:

$$\gamma_{nm}(y) - \gamma_{nm}(x) = \gamma'_{nm}(\xi)(y - x) : y \in J \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f_n(y) - f_m(y) - (f_n(x) - f_m(x)) = \gamma'_{nm}(\xi)(y - x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} - \frac{f_m(y) - f_m(x)}{y - x} = \gamma'_{nm}(\xi) = f'_n(\xi) - f'_m(\xi)$$

Dado $\varepsilon > 0$, sea $N \in \mathbb{N} : n, m \geq N \Rightarrow ||f'_n - f'_m|| < \varepsilon$, entonces se tiene que:

$$\left|\frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} - \frac{f_m(y) - f_m(x)}{y - x}\right| < \varepsilon : n, m \geq N$$

Fijamos $n \geq N$ y hacemos $m \to +\infty$:

$$f_m(x) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} f(x), f_m(y) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} f(y) \Rightarrow \left|\frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} - \frac{f(y) - f(x)}{y - x}\right| \leq \varepsilon$$

Por tanto, sabiendo que la diferencia de esas dos cosas es menor que épsilon, vamos a tratar de demostrar que $\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x} - g(x)\right| < \varepsilon$ porque entonces $g(x) = f'(x)$:

$$\left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - g(x)\right| \leq \left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - \frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x}\right| + \left|\frac{f_n(y) - f_n(x)}{y - x} - f'_n(x)\right| + |f'_n(x) - g(x)| \leq$$

Por la convergencia uniforme de las derivadas, se tiene que $\exists N' : \forall n \geq N' \Rightarrow ||f'_n - g||_J < \varepsilon$. Por tanto, escogiendo $K = \text{máx}\{N, N'\}$. Tomamos $n = K$ y ocurre que:

$$\leq \varepsilon + \left|\frac{f_K(y) - f_K(x)}{y - x} - f'_K(x)\right| + \varepsilon : \forall x, y : x \neq y$$

Como f_K es derivable, entonces:

$$\varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : \text{ si } 0 < |y - x| < \delta \Rightarrow \left|\frac{f_K(y) - f_K(x)}{y - x} - f'_K(x)\right| < \varepsilon$$

Si $0 < |y - x| < \delta$

$$\Rightarrow \left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - g(x)\right| < 3\varepsilon$$

Por tanto, f es derivable y $f'(x) = g(x)$, que podemos expresar también como $(\text{lím} f_n)' = \text{lím}(f'_n)$.

Teorema

Si $f_n \in R[a,b]$ y $f_n \rightrightarrows f$ en $[a,b]$, entonces la función límite f es integrable Riemann y la integral de la sucesión es la integral de la función límite.

$$\forall n \in \mathbb{N} : f_n \in R[a,b] \ \wedge \ f_n \rightrightarrows f \Rightarrow f \in R[a,b] \ \wedge \int_a^b f_n \to \int_a^b f$$

Es decir, en realidad lo que estamos queriendo decir es que:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_a^b f_n \ dx \right) = \int_a^b \left(\lim_{n\to\infty} f_n \right) \ dx$$

<u>Demostración</u>:

Como $f_n \rightrightarrows f$, se satisface el Criterio de Cauchy de convergencia uniforme:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : n, m \geq N \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon : \forall x \in [a,b]$$

Por la monotonía de la integral:

$$-\varepsilon < f_n(x) - f_m(x) < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\varepsilon(b-a) < \int_a^b (f_n(x) - f_m(x))dx < \varepsilon(b-a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\varepsilon(b-a) < \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f_m(x)dx < \varepsilon(b-a) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f_m(x)dx \right| < \varepsilon(b-a) : n, m \geq N \Rightarrow$$

Que es lo mismo que decir que la sucesión $\{\int_a^b f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}$ es de Cauchy, luego es convergente[46]:

$$\exists L = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n$$

Como $f_n \rightrightarrows f$, entonces por la caracterización de la norma del supremo:

$$||f_n - f||_{[a,b]} < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < f_n(x) - f(x) < \varepsilon : \forall x \in [a,b], n \geq N$$

En particular, si fijamos $n = N$:

$$-\varepsilon < f_N(x) - f(x) < \varepsilon : \forall x \in [a,b]$$

Sea $\delta > 0 :$ si $||\mathring{\wp}|| < \delta \Rightarrow |S(f_N, \mathring{\wp}) - \int_a^b f_N| < \varepsilon$ de este modo tenemos que:

$$S(f, \mathring{\wp}) - L = S(f, \mathring{\wp}) - S(f_N, \mathring{\wp}) + S(f_N, \mathring{\wp}) - \int_a^b f_N + \int_a^b f_N - L$$

Tomando el valor absoluto:

$$|S(f, \mathring{\wp}) - L| \leq |S(f, \mathring{\wp}) - S(f_N, \mathring{\wp})| + \left| S(f_N, \mathring{\wp}) - \int_a^b f_N \right| + \left| \int_a^b f_N - L \right|$$

Tal y como hemos elegido N se verifica que $||f_n - f||_{[a,b]} < \varepsilon$ y también que $|\int_a^b f_n - \int_a^b f_m| < \varepsilon :$ $n, m \geq N$. Por tanto, fijando N se tiene que:

$$\left| \int_a^b f_N - \underbrace{\int_a^b f_m}_{\to L} \right| < \varepsilon : m \geq N \Rightarrow \left| \int_a^b f_N - L \right| \leq \varepsilon$$

[46] Y este L será nuestro candidato a integral.

De esta manera, tenemos todos los términos acotados excepto $|S(f,\mathring{\wp}) - S(f_N,\mathring{\wp})|$, veamos que también está acotado:

$$|S(f,\mathring{\wp}) - S(f_N,\mathring{\wp})| = \left|\sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^{n} f_N(t_i)(x_i - x_{i-1})\right| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(t_i) - f_N(t_i)|(x_i - x_{i-1}) \leq \varepsilon(b-a)$$

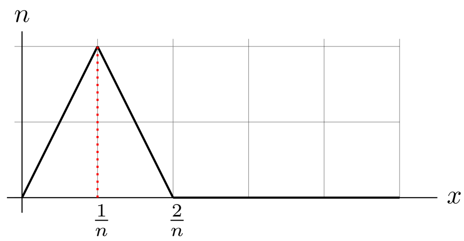
En consecuencia, para el conjunto se tiene que:

$$|S(f,\mathring{\wp}) - L| \leq \varepsilon(b-a) + \varepsilon + \varepsilon = \varepsilon(2+b+a)$$

Observación

La convergencia uniforme es una condición imprescindible para poder aplicar este teorema, por ejemplo sea:

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ -n^2(x-2n) & x \in [\frac{1}{n}, \frac{2}{n}] \\ 0 & x \geq \frac{2}{n} \end{cases}$$



La convergencia puntual a la función $f(x) = 0$ es trivial, pero vemos que $\int_0^1 f_n = 1 : \forall n \in \mathbb{N} \neq 0 = \int_0^1 f(x)$, es decir, el área del triángulo es constantemente 1 que es distinto del área que tiene la función límite.

Teorema

Sea $f_n \in R[a,b] : \forall n \in \mathbb{N}$ y $f_n(x) \to f(x) : \forall x \in [a,b]$ de forma que $f \in R[a,b]$. Si $\exists M > 0 : |f_n(x)| \leq M : \forall x \in [a,b] \ \wedge \ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces si podemos afirmar que:

$$\int_a^b f_n \to \int_a^b f$$

Demostración:

No disponemos de las herramientas suficientes en este curso para poder demostrar este teorema (que se verá mucho más adelante).

Teorema de Dini

Sea $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ una sucesión de funciones continuas que convergen monótonamente y puntualmente a una función continua $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, entonces la convergencia es uniforme.

Demostración:

Vamos a suponer que la sucesión es monótona decreciente, esto implica que:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \leq f_n(x) : \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [a,b]$$

Ahora, vamos a definir una nueva función $g_n(x) = f_n(x) - f(x)$ de forma que $g_n : I \to \mathbb{R}$ y además $g_n(x) \geq 0$. También, es trivial ver que esta función es:

- Continua
- Decreciente
- $g_n \to 0$ puntualmente

Se trata de probar ahora que $g_n(x) \rightrightarrows 0$ para luego poder afirmarlo de $f_n(x)$, es decir, tenemos que probar que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : |g_n(x)| < \varepsilon : n \geq N \Leftrightarrow g_n(x) < \varepsilon \Leftrightarrow g_N(x) < \varepsilon$$

Porque como g_n es positiva podemos quitar los valores absolutos y como g_n es decreciente, si lo probamos para el primer N los demás estarán por debajo.

Ahora pues, por reducción al absurdo, vamos a probar que existe un N que hace que este conjunto sea vacío:

$$\text{Fijado } \varepsilon > 0, \text{ sea } K_n = \{x \in [a, b] : g_n(x) \geq \varepsilon\}$$

Sabemos que como $g_n \geq g_{n+1}$, entonces $K_{n+1} \subseteq K_n$, luego tenemos una familia de conjuntos encajados. Supongamos que $K_n \neq \emptyset : \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\exists x_n \in K_n : \forall n \in \mathbb{N}$, luego hemos construido una sucesión de puntos $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [a, b]$ y por el Teorema de Bolzano-Wierstrass esta sucesión tiene una subsucesión $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ convergente a un número que llamaremos x.

Sea ahora $r \in \mathbb{N}$, como $n_k \to \infty$, entonces:

$$r : \exists n_{k_0} \in \mathbb{N} : n_{k_0} \geq r \Rightarrow g_r(y) \geq g_{n_{k_0}}(y) \geq g_{n_k}(y) : \forall y \in [a, b]$$

También vemos que:

$$x_{n_k} \in K_{n_k} \subset K_{n_{k_0}} \Rightarrow g_{n_{k_0}} \geq \varepsilon : \forall k \geq k_0$$

Como $g_{n_{k_0}}$ es continua y $x_{n_k} \to x$, entonces:

$$g_{n_{k_0}}(x) = \lim_{k \to \infty} g_{n_{k_0}}(x_{n_k}) \geq \varepsilon \Rightarrow g_r(x) \geq g_{n_{k_0}}(x) \geq \varepsilon \Rightarrow x \in K_r : \forall r \in \mathbb{N}$$

Lo cual es absurdo porque sabemos que $g_n(x)$ converge puntualmente a 0.

SERIES DE FUNCIONES

Si tenemos $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en $A \subset \mathbb{R}$, podemos definir la serie asociada como la sucesión de sumas parciales, es decir:

$$\{s_n\}_{n=1}^{\infty} = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) : s_n(x) = f_0(x) + f_1(x) + \ldots + f_n(x) = \sum_{n=1}^{n} f_n(x)$$

Convergencia y propiedades

Tipos de convergencia

En función del tipo de convergencia que tenga, diremos que la serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge:

- **Puntualmente** en A si $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge puntualmente A.
- **Uniformemente** en A si $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge uniformemente A.
- **Absolutamente** en A si $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ converge puntualmente en A.

- **Absolutamente y uniformemente** en A si $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n(x)|$ converge uniformemente en A.

Ejemplo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n : f_n(x) = x^n$$

- Si $|x| < 1$

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |x|^n = \frac{1}{1-|x|} \Rightarrow \forall x \in (-1,1) \text{ convergencia absoluta}$$

- Si $x = 1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} 1^n$ diverge
- Si $x = -1 \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ diverge
- Si $|x| > 1 \Rightarrow |x|^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} x^n$ diverge

Teorema

Si $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continuas en A y $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en A a una función $S(x)$, entonces S es continua en A.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(x) = S(x) \text{ (uniformemente)} \Rightarrow S(x) \text{ cont.}$$

Demostración:

Si f_n es continua en $A : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \{s_n\}_{n=0}^{\infty}$ es una sucesión de funciones continua. Como $s_n \rightrightarrows s$ en $A \Rightarrow S(x)$ es una función continua en A.

Teorema

Sea $f_n : I \to \mathbb{R}$ donde I es un intervalo acotado tal que:

- $\exists x_0 \in I : \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x_0)$ es convergente
- $\sum_{n=0}^{\infty} f_n'(x)$ converge uniformemente en I a una función $g : I \to \mathbb{R}$

Entonces, la serie $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ converge uniformemente en I a una función $S : I \to \mathbb{R}$ de forma que $S'(x) = g(x)$, es decir:

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx} f_n$$

Demostración:

Se deduce trivialmente de la demostración que se hizo para sucesiones, puesto que basta solo estudiar ese teorema para la sucesión $\{s_n\}$ que es la que caracteriza la serie.

Teorema

Sea $f_n \in \mathcal{R}[a,b] : \forall n \in \mathbb{N}$ y $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente a $S : [a,b] \to \mathbb{R}$, entonces $S \in \mathcal{R}[a,b]$ y $\int_a^b S = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n$, es decir:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n \right) \, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b f_n \, dx$$

Demostración:

Se deduce trivialmente de la demostración que se hizo para sucesiones, puesto que basta solo estudiar ese teorema para la sucesión $\{s_n\}$ que es la que caracteriza la serie.

Criterio de Convergencia Uniforme de Cauchy para series

El criterio para sucesiones de funciones $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ afirmaba que:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : n, m \geq N \Rightarrow ||f_n - f||_A < \varepsilon$$

Si sustituimos f_n por $S_n = \sum_{k=0}^{n} f_k$ y suponemos $m < n$, entonces:

$$||S_n - S_m||_A = \left|\left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k \right|\right|_A < \varepsilon \Leftrightarrow \left| \sum_{k=m+1}^{n} f_k(x) \right| < \varepsilon : \forall x \in A$$

Luego, dada una serie $\sum f_n(x)$, esta converge absoluta y uniformemente en A si y solo si:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : n, m \geq N \text{ y } m < n \Rightarrow \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| < \varepsilon : \forall x \in A$$

Además, a modo de observación, como $|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)|$, entonces si $\sum f_n(x)$ converge absoluta y uniformemente en A se tiene que $\sum f_n(x)$ converge uniformemente en A.

Criterio M de Weierstrass

Sea $\{f_n\}_{n=0}^{\infty}$ una sucesión de funciones definidas en A que verifica:

$$\forall n \in \mathbb{N} : \exists M_n \in \mathbb{R}, \ M_n \geq 0 : |f_n(x)| \leq M_n : \forall x \in A$$

Entonces si $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ es convergente se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ converge absolutamente y uniformemente en A.

Demostración

Por el Criterio de Cauchy:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N : n > m \geq N \Rightarrow \sum_{k=m+1}^{n} M_k < \varepsilon$$

Pero como $|f_k(x)| \leq M_k : \forall k \in \mathbb{N}$ y $\forall x \in A$, entonces:

$$\sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \leq \sum_{k=m+1}^{n} M_k < \varepsilon : \forall x \in A \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ converge absoluta y uniformemente en A}$$

Series de Potencias

Una serie de potencias centrada en x_0 es la serie de funciones:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

De hecho, es posible considerarla centrada en 0 porque a efectos prácticos para estudiar la convergencia el cambio de variable $y = x - x_0$ posibilita que estudiemos la convergencia sobre la nueva variable:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Lo cual nos permite simplificar la notación a $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Radio de convergencia

Sea $\rho = \lim\sup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} \in [0, +\infty) \cup \{+\infty\}$ y definimos el radio de convergencia de la serie de potencias como:

$$R = \begin{cases} \frac{1}{\rho} & 0 < \rho < \infty \\ +\infty & \rho = 0 \\ 0 & \rho = +\infty \end{cases}$$

Y más tarde veremos que este valor es el que determina el intervalos sobre el que es convergente la serie de potencias.

Teorema de Cauchy - Hadamard

La serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ es absolutamente convergente en $(-R, R)$ y es divergente fuera de ese intervalo, sin embargo, los extremos no quedan determinados; hay que estudiarlos.

Además, si $[a, b]$ es un intervalo cerrado y acotado tal que $[a, b] \subset (-R, R)$, entonces, la serie de potencias converge absoluta y uniformemente en $[a, b]$

Demostración:

Vamos a demostrar primero que es absolutamente convergente en $(-R, R)$, para ello supongamos $R \in (0, +\infty)$. De este modo, escogemos $x \in (-R, R) : |x| < R$ por lo que se tiene que $\exists c \in (0, 1) : |x| < cR$. Por tanto observamos que:

$$\lim\sup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \rho = \frac{1}{R} < \frac{c}{|x|}$$

Esta relación implica que a partir de un cierto n, todos los términos van a estar por debajo de esta cota (por estar acotado el límite superior y por la definición del mismo), luego:

$$\exists n_0 : \forall n \geq n_0 \Rightarrow |a_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{c}{|x|} \Leftrightarrow |a_n|^{\frac{1}{n}} |x| < c \Leftrightarrow |a_n||x|^n < c^n : n \geq n_0, c \in (0, 1)$$

Pero $\sum_{n=0}^{\infty} c^n$ es convergente para $c \in (0, 1)$, por tanto, por el principio de comparación se tiene que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x|^n \text{ es convergente } \Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ es absolutamente convergente}$$

Vamos a demostrar ahora que si $[a, b]$ es un intervalo cerrado y acotado tal que $[a, b] \subset (-R, R)$, entonces, la serie de potencias converge absoluta y uniformemente en $[a, b]$.

Si $[a,b] \subset (-R,R) : -R < a < b < R$, de este modo:

$$\exists A \in \mathbb{R} : 0 < A < R : -R < -A < a < b < A < R$$

Por tanto, $[a,b] \subset [-A,A] = \{|x| \leq A\}$, entonces dado ese A, tenemos que:

$$\exists c \in (0,1) : A < cR \Leftrightarrow |a_n||A|^n < c^n : n \geq n_0$$

Por tanto, si $|x| \leq A$ tenemos acotado ese término porque $|a_n||x|^n < |a_n||A|^n < c^n : n \geq n_0$, de este modo vemos que:

$$|a_n||x|^n \leq |a_n|A^n = M_n : n = 0, 1, \ldots, n_0 - 1$$

$$|a_n||x|^n \leq c^n = M_n : n = n_0, n_0 + 1, \ldots$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ converge trivialmente por ser $c < 1$ y en consecuencia, por el Criterio M de Weierstrass, se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ converge absoluta e uniformemente en $[-A,A]$, y por tanto en $[a,b]$.

Por último, vamos a demostrar que diverge fuera de $(-R,R)$.

Si $|x| > R$ entonces se tiene que $\rho = \frac{1}{R} > \frac{1}{|x|}$. Por ser ρ límite superior hay una subsucesión convergente a ρ, luego $\exists n_k \to \infty : |a_{n_k}|^{\frac{1}{n_k}} > \frac{1}{|x|}$ porque tiene que estar suficientemente cerca de ρ, luego:

$$|a_{n_k}||x|^{n_k} > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |a_n||x|^n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n \text{ no converge}$$

<u>**Ejemplo**</u>:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$$

Está claro que $a_n = \frac{1}{n}$, de este modo $\rho = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$; luego $R = \frac{1}{\rho} = 1$.

Por el Teorema de Cauchy-Hadamard, la serie converge absoluta y uniformemente en $(-R,R)$. Estudiamos ahora los extremos:

- Si $x = 1 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ es la serie armónica, que sabemos que es divergente
- Si $x = -1 : \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ es la serie armónica alternada, que sabemos que es condicionalmente convergente

Corolario

- El radio de convergencia de $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ no depende de los primeros términos de la sucesión, es decir, si tenemos $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{a}_n x^n$ tales que $a_n = \tilde{a}_n : \forall n \geq n_0$, entonces el radio de convergencia es el mismo para ambas series.
- Supongamos b_n una sucesión con $\lim_{n\to\infty} |b_n|^{\frac{1}{n}} = 1$, entonces ocurre que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot b_n x^n$ tienen el mismo radio de convergencia, puesto que el ρ es el mismo para ambas.
- La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y la serie $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ tienen el mismo radio de convergencia.

<u>Demostración</u>

La demostración de este corolario se basa en la definición de $\rho = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$

- Como $a_n = \tilde{a}_n : \forall n \geq n_0 \Rightarrow \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} |\tilde{a}_n|^{\frac{1}{n}}$, y por tanto los radios de convergencia son iguales.

- De modo análogo, los límites superiores coinciden: $\limsup_{n\to\infty} |a_n b_n|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} |b_n|^{\frac{1}{n}} \overset{\lim_{n\to\infty} |b_n|^{\frac{1}{n}}=1}{=} \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$.

- Tenemos la primera serie que es $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tal que $\rho = \limsup_{n\to\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}}$ y la segunda la podemos expresar como $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = a_1 + a_2 \cdot 2 \cdot x + \ldots + a_{n+1} \cdot (n+1) \cdot x^n + \ldots = \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+1}(k+1)x^k$. De esta manera ocurre que:

$$\tilde{\rho} = \limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}(n+1)|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} \underbrace{(n+1)^{\frac{1}{n}}}_{\to 1} \cdot |a_{n+1}|^{\frac{1}{n}} = \limsup_{n\to\infty} |a_{n+1}|^{\frac{1}{n}} = \left[|a_{n+1}|^{\frac{1}{n+1}}\right]^{\frac{n+1}{n}} = \rho$$

Teorema

Sea $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con radio de convergencia $R > 0$. Entonces, si $[a, b] \subset (-R, R)$, tenemos:

- La serie converge absolutamente en $(-R, R)$ a una función $f(x)$ definida como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n : x \in (-R, R)$$

  Además, la convergencia es uniforme en $[a, b]$, $f(x)$ es continua en $(-R, R)$ y $f \in \mathcal{R}[a, b]$.

- La función f es derivable de todos los órdenes en $(-R, R)$ y quedan definidas como:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} \qquad f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)\ldots(n-k+1)x^{n-k} : \forall k \in \mathbb{N}$$

  Además, la serie de las derivadas tiene el mismo radio de convergencia que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

- Si $z \in (-R, R)$, entonces podemos definir la siguiente función:

$$\int_0^z f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

  La función definida tiene el mismo radio de convergencia que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

<u>Demostración</u>

1. Las primeras condiciones de convergencia y tipo de convergencia ya han sido probadas en el Teorema de Cauchy - Hamard, por tanto, solo es necesario probar la continuidad de la función a la que converge.

   Sea $c \in (-R, R) \Rightarrow c \in [a, b] : [a, b] \subset (-R, R)$ para algún a y b reales. Como la serie converge uniformemente en $[a, b]$ y $a_n x^n$ son funciones continuas , en consecuencia, f es continua en $[a, b]$ y, por tanto, en c.

   Sin embargo, es notable destacar que f puede no ser continua en R o $-R$. Por ejemplo: $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$, entonces queda definido $\rho = \limsup_{n\to\infty} |1|^{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow R = 1$. La función límite queda como $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, que no es continua en $x = 1$.

2. Sea $c \in (-R,R)$ de nuevo puedo meterlo dentro de un intervalo acotado $c \in (a,b) : [a,b] \subset (-R,R)$. Sabemos que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1}$ converge uniformemente en $[a,b]$ y $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ converge en un $x_0 \in (-R,R)$. Por tanto, por los resultados de convergencia uniforme y derivabilidad se tiene que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge uniformemente a } f(x) \text{ y } f'(c) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n c^{n-1}$$

   Por inducción, f es derivable de todos los órdenes en $(-R,R)$ y $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} a_n n(n-1)\dots(n-k+1)x^{n-k}$.

3. Sea $z \in (-R,R) \Rightarrow z \in [a,b]$, se tiene por el resultado de convergencia e integrabilidad:

$$\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n dx = \lim_{n\to\infty} \int_0^z \sum_{k=0}^{n} a_k x^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{z^{k+1}}{k+1}$$

   De modo análogo, z no puede ser $-R$ o R. Por ejemplo, $\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} x^n \neq \int_0^1 \frac{1}{1-x}$.

<u>**Advertencias**</u>:

- No podemos asegurar que la serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ con radio de convergencia R converja uniformemente en $(-R,R)$.

  Por ejemplo, si tomamos $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ cuyo radio de convergencia es $R=1$. Además, por ser una serie geométrica, sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} : |x| < 1$ Sabemos que la serie converge absolutamente en $(-1,1)$, pero no converge uniformemente en $(-1,1)$ porque:

$$\sup_{x\in(-1,1)} |s_n(x) - \frac{1}{1-x}| = +\infty \Rightarrow s_n \text{ no converge uniformemente en } (-1,1)$$

- Del mismo modo, si $z \in (-1,1)$, lo que se ha afirmado para integrales no es cierto en los límites:

$$\int_0^z \sum_{n=0}^{\infty} x^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n+1}}{n+1}$$

  Porque no podemos integrar entre 0 y 1:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1-x} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{1-x} = +\infty$$

Luego la conclusión es que hay que tener cuidado con aplicar estos teoremas en los límites del intervalo de convergencia.

Proposición

Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tiene radio de convergencia R y en $x = R$ o $x = -R$ la serie converge absolutamente, entonces la serie de potencias converge uniformemente en $[-R,R]$.

Si la convergencia en R o $-R$ es condicional, entonces el teorema no es cierto. Por ejemplo, tomamos

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n} : \rho = 1 = R \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \to & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \text{ cond. conver.} \\ x = 1 \to & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} \text{ diverge} \end{cases} \Rightarrow \text{ no conv. unifor. } \in [-1,1]$$

<u>Demostración</u>

Supongamos que tenemos que la serie converge absolutamente en $x = R$, entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n R^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n| R^n \Leftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-R)^n \text{ converg abs}$$

Luego si converge absolutamente en uno de los extremos, automáticamente también lo hace en el otro.

Sea $|x| \leq R$, entonces $|a_n x^n| \leq |a_n| R^n = M_n$. Aplicando el criterio M de Weierstrass, tenemos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ converge absolutamente en } [-R, R]$$

Proposición

Sean $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ que tienen radio de convergencia $R_a, R_b > 0$. Si $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ para $x \in (-\delta, \delta) : \delta > 0$, entonces:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x) \text{ y } \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = f(x) : |x| < \delta \Rightarrow a_n = b_n : \forall n = 0, 1, \ldots$$

Demostración:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \begin{cases} a_0 = f(0) = b_0 \\ a_1 = f'(0) = b_1 \\ 2a_2 = f''(0) = 2b_2 \\ \vdots \\ k! a_k = f^{(k)}(0) = k! b_k \end{cases}$$

Por inducción se tiene que $a_n = b_n$.

Series de Taylor

Hemos probado que la aplicación que a cada conjunto de serie de potencias le aplica una función definida en un entorno de 0 es inyectiva. Sin embargo, una buena pregunta es ¿si tenemos una función $f(x)$, existirá una serie de potencias $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ tal que $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n : |x| < \delta$?

Tal y como hemos visto en la proposición anterior, ocurre que:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \Rightarrow f(0) = a_0, f'(0) = a_1, \ldots, f^{(k)}(0) = k! a_k \Rightarrow a_n = \frac{f^{(n)}}{n!} \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!} x^n$$

En consecuencia, dada f con infinitas derivadas definimos como **serie de Taylor** al polinomio de Taylor centrado en 0, pero de grado infinito:

$$f(x) \rightsquigarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!} x^n$$

Para poder afirmar que existe esta relación entre ambas expresiones es necesario que estudiemos que ocurre con el resto de Lagrange cuando $n \to \infty$, es decir:

$$R_n(x;0) \xrightarrow{n \to \infty} 0 \Rightarrow P_n(x;0) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!} x^n \xrightarrow{n \to \infty} f(x)$$

Para ver esto, vemos que:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}}{k!} x^k + \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

Si $\sup\limits_{x \in [-\delta, \delta]} |R_n(x;0)| = \sup\limits_{x \in [-\delta, \delta]} \left| \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| \xrightarrow{n \to \infty} 0 \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}}{k!} x^k \rightrightarrows f(x)[-\delta, \delta] \Rightarrow f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}}{n!} x^n : |x| \leq \delta$

Luego basta con estudiar en cada caso la convergencia a 0 del Resto de Lagrange para poder afirmar que esa serie de Taylor converge a la función $f(x)$.

Ejemplo:

Veamos que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ converge a la función $f(x) = \frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1}$. Para ello calculamos $P_n(x,0)$:

$$\begin{cases} f'(x) = (-1)(1-x)^{-2}(-1) = (-1)(1-x)^{-2} \\ f''(x) = (-2)(1-x)^{-3}(-1) = 2(1-x)^{-3} \\ f'''(x) = 2(-3)(1-x)^{-4}(-1) = 3!(1-x)^{-4} \\ \vdots \\ f^{(k)} = k!(1-x)^{-k-1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(0) = 1 \\ f'(0) = 1 \\ f''(0) = 2 \\ f'''(0) = 3! \\ \vdots \\ f^{(k)(0)} = k! \end{cases}$$

Luego podemos escribir:

$$P_n(x,0) = f(0) + f'(0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = 1 + x + \frac{2!}{2!}x^2 + \ldots \frac{n!}{n!}x^n = 1 + x + \ldots + x^n$$

Por el Teorema de Taylor:

$$f(x) - \sum_{k=0}^{n} x^k = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1} : \xi \in (0,x) \text{ o } (x,0) \Rightarrow \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} x^k \right| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}|x|^{n+1} : |\xi| < |x|$$

Ahora tenemos que tratar de controlar ese Resto de Lagrange para poder probarlo:

$$f^{n+1}(\xi) = (n+1)!(1-\xi)^{-(n+2)} \Rightarrow |f^{n+1}|(\xi) = (n+1)!|(1-\xi)|^{-(n+2)} \leq (n+1)!(1-|x|)^{-(n+2)}$$

Esto último es porque $1 - |\xi| \leq 1 - |x|$ y elevando y multiplicando ya lo tenemos. De esta forma, hemos acotado ese término de la siguiente forma:

$$|R_n(x,0)| \leq \frac{(n+1)!(1-|x|)^{-(n+2)}}{(n+1)!}|x|^{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{(1-|x|)^{n+2}} = \left(\frac{|x|}{1-|x|}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1-x}$$

Por tanto, lo único que necesitamos ahora es que $\left(\frac{|x|}{1-|x|}\right)^{n+1}$ esto tienda a cero puesto que lo otro es constante. Es sencillo ver pues que:

$$\left(\frac{|x|}{1-|x|}\right)^{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0 \Leftrightarrow \frac{|x|}{1-|x|} < 1 \Leftrightarrow |x| < \frac{1}{2}$$

Es decir, si consideramos $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ y el conjunto $[-\alpha, \alpha]$, entonces:

$$\sup_{|x|\leq\alpha} \left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} x^n \right| \leq \left(\frac{\alpha}{1-\alpha}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{1-\alpha} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Por tanto, se tiene que $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} : |x| \leq \alpha$.

Definición de exponencial, seno y coseno

En este tema se va a dar una definición alternativa a la que se dió de función exponencial y logarítmica. Además, se va a definir de forma analítica las funciones trigonométricas conocidas y todo ello en términos de series de potencias.

Exponencial y Logarítmica

Exponencial

En la parte de propiedades de los números reales, definimos lo que significa $a^r : r \in \mathbb{Q}$, luego hasta ahí no hay problema. Lo complicado viene al introducir el concepto de exponente real, que en su momento definimos como:

$$\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow a^\alpha = \sup\{a^q : q \in \mathbb{Q},\ q < \alpha\}$$

Para redefinir esta exponencial real, introducimos la siguiente serie de potencias:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Como $a_n = \frac{1}{n!}$, vemos que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 \Rightarrow R = +\infty$$

Es decir, converge absolutamente en cada $x \in \mathbb{R}$ y converge uniformemente en cada intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$ a una función concreta que vamos a denominar:

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Vamos a probar ahora que esta función es la exponencial, para ello probamos que:

1. E tiene derivadas de todos los órdenes
2. $E(0) = 1$
3. $E'(x) = E(x) : \forall x \in \mathbb{R}$

Demostración:

1. Si demostramos la 3 queda probada
2. Trivial por sustituir en la serie $x = 0$
3. $E'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\frac{x^n}{n!})' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n \cdot x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \overset{n-1=k}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = E(x)$

Además, vamos a ver que:

1. $E^{(k)} = E(x)$
2. $E(x) \geq 1 + x : \forall x > 0$
3. $E(x)$ es la única función que verifica $E(0) = 1$ y $E'(x) = E(x)$ simultáneamente

Demostración:

1. Trivial por inducción sobre la propiedad probada antes
2. Sea $x > 0 : E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = \lim_{n\to\infty}(1 + x + \underbrace{\frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!}}_{\geq 0}) \geq \lim_{n\to\infty}(1 + x) = 1 + x$

3. Supongamos que $\exists E_1(x), E_2(x)$ verificando ambas, entonces definimos $F(x) = E_1(x) - E_2(x)$ y tenemos que probar que $\forall x \in \mathbb{R} : F(x) = 0$:

$$F(0) = E_1(0) - E_2(0) = 1 - 1 = 0$$

$$\begin{cases} F'(x) = E_1'(x) - E_2'(x) = E_1 - E_2 = F(x) \\ F''(x) = (F')' = F' = F(x) \\ \vdots \\ F^{(k)}(x) = F(x) : \forall x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Aplicamos el Teorema de Taylor:

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + \ldots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n(x, 0)$$

Pero el valor para cualquier $F^{(k)}(0) = 0$, al igual que $F(0)$, luego:

$$F(x) = 0 + R_n(x, 0)$$

Así que si ese Resto de Lagrange va a 0, ya está probado:

$$|R_n(x,0)| = \left|\frac{F^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right| |x|^{n+1} = \frac{|F(\xi)|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \leq \sup_{|z| \leq |x|} |F(z)| \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}M \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

De modo análogo, probamos que:

1. $E(x) \neq 0 : \forall x \in \mathbb{R}$
2. $\forall x, y \in \mathbb{R} : E(x+y) = E(x)E(y)$, es decir, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+y)^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!}\right)$
3. Si $r \in \mathbb{Q} : E(r) = e^r$

<u>Demostración</u>:

1. Supongamos que $\exists x_0 : E(x_0) = 0$, entonces:

$$E(x_0) = E'(x_0) = \ldots = E^{(k)}(x_0) = 0 : \forall k = 0, 1, 2, \ldots$$

De este modo, el desarrollo de Taylor centrado en x_0 quedaría como:

$$E(x) = \underbrace{\cancel{P_n(x, x_0)}}_{=0} + R_n(x, x_0) = \frac{E^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

Por tanto, si escogemos ahora $x = 0$, ocurre que:

$$1 = E(0) = \left|\frac{E(\xi)}{(n+1)!} \cdot (-x_0)^{n+1}\right| \leq \sup_{|\xi| \leq |x_0|} |E(\xi)| \cdot \frac{|x_0|^{n+1}}{(n+1)!} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \#$$

2. Fijamos $y \in \mathbb{R}$ y definimos la función $G(x) = \frac{E(x+y)}{E(y)}$ y vemos que verifica que:

$$\begin{cases} G(0) = \frac{E(y)}{E(y)} = 1 \\ G'(x) = \frac{1}{E(y)}E'(x+y) = \frac{E(x+y)}{E(y)} = G(x \end{cases})$$

Pero habíamos probado que la única función que verfica que $G'(x) = G(x)$ y $G(0) = 1$ es la función $E(x)$, luego:

$$\frac{E(x+y)}{E(y)} = E(x) \Rightarrow E(x+y) = E(x)E(y)$$

3. Por inducción en el apartado anterior, podemos concluir que:

$$E(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) = E(x_1) \cdot E(x_2) \cdot \ldots \cdot E(x_n)$$

En particular, si tenemos un número natural:

$$E(n) = E(\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ veces}}) = (E(1))^n = e^n$$

Para verlo para los racionales, escojamos primero un $m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$e = E(1) = E\underbrace{\left(\frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m}\right)}_{\text{m veces}} = \left(E(\frac{1}{m})\right)^m \Rightarrow E(\frac{1}{m}) = e^{\frac{1}{m}}$$

Por tanto, si tenemos un número racional cualquiera:

$$E\left(\frac{n}{m}\right) = E\underbrace{\left(\frac{1}{m} + \ldots + \frac{1}{m}\right)}_{\text{n veces}} = \left(E(\frac{1}{m})\right)^n = (e^{\frac{1}{m}})^n = e^{\frac{n}{m}}$$

Falta solo distinguir cuando este número es negativo, luego veamos que:

$$E(x) \cdot E(-x) = E(x + (-x)) = E(0) = 1 \Rightarrow E(-x) = \frac{1}{E(x)} \Rightarrow E\left(-\frac{n}{m}\right) = \frac{1}{E(\frac{n}{m})} = \frac{1}{e^{\frac{n}{m}}} = e^{\frac{-n}{m}}$$

En consecuencia, para terminar de definir esta función exponencial, basta con definir su valor para los reales, que diremos que es:

$$r \in \mathbb{R} : e^r \overset{\text{def}}{=} E(r)$$

Por continuidad, $e^{\alpha} = \sup\{e^r : r \in \mathbb{Q}, r < \alpha\} = E(\alpha)$, luego coincide con la definición por axioma del supremo que se dió.

De este modo, queda definida la función exponencial como:

$$E(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

Además, verifica las siguientes propiedades:

- $\forall x \in \mathbb{R} : E(x) > 0$
- $\lim_{n \to +\infty} E(x) = +\infty$
- $\lim_{n \to \infty} E(x) = 0$

<u>Demostración</u>:

- Como $E(0) = 1$ y hemos probado que $E(x) \neq 0$, al ser $E(x)$ continua se tiene por Bolzano que $E(x) > 0 : \forall x$
- Como hemos probado que $E(x) > 1 + x : x > 0$ entonces se tiene que $\lim_{x \to +\infty} E(x) = +\infty$
- Sabemos que $E(-x) = \frac{1}{E(x)} \Rightarrow \frac{1}{E(x)} \underset{x \to \infty}{\longrightarrow} 0$, luego entonces tenemos que $\lim_{x \to -\infty} E(x) = \lim_{x \to +\infty} E(-x) = 0$

<u>Función logaritmo</u>

Como $E(x) = e^x$ es monótona creciente, es biyectiva sobre los positivos, luego podemos definir su función inversa como $L : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ inversa de E que se denomina función logaritmo.

Podemos además dar las siguientes propiedades:

- $L'(x) = \frac{1}{x} : x > 0$
- $L(xy) = L(x) + L(y) : x, y > 0$
- $L(1) = 0$ y $L(e) = 1$
- $L(x^r) = r \cdot L(x) : r \in \mathbb{Q}$, $\lim_{x\to\infty} L(x) = +\infty$, $\lim_{x\to 0^+} L(x) = -\infty$

Demostración:

- Como es la inversa de $E(x)$, podemos derivarla en términos de la misma, luego:

$$L'(x) = \frac{1}{E'(L(x))} = \frac{1}{E(L(x))} = \frac{1}{x}$$

- Sean $u = L(x), v = L(y) \Rightarrow E(u) = x, E(v) = y$, entonces:

$$E(u+v) = E(u) \cdot E(v) = xy \Rightarrow L(x) + L(y) = u + v = L(xy)$$

- Directamente de la definición.
- Si $n \in \mathbb{N}$, sabiendo que $L(xy) = L(x) + L(y)$, entonces:

$$L(x^n) = L(x \cdot x \cdot \ldots \cdot) = nL(x)$$

  Si $r = \frac{1}{m}$, entonces:

$$mL(x^{\frac{1}{m}}) = L(x^{\frac{1}{m}}) + \ldots + L(x^{\frac{1}{m}}) = L(x^{\frac{1}{m}} \cdot \ldots \cdot x^{\frac{1}{m}}) = L(x) \Rightarrow L(x^{\frac{1}{m}}) = \frac{1}{m}L(x)$$

  Por tanto, si escogemos un $r \in \mathbb{Q}$, tenemos que:

$$L(x^{\frac{n}{m}}) = L(\underbrace{x^{\frac{1}{m}} \cdot \ldots \cdot x^{\frac{1}{m}}}_{n \text{ veces}}) = nL(x^{\frac{1}{m}}) = \frac{n}{m}L(x)$$

  Falta solo definir que ocurre cuando este número es negativo:

$$0 = L(1) = L(x \cdot x^{-1}) = L(x) + L(x^{-1}) \Rightarrow L(x^{-1}) = -L(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(x^{\frac{-n}{m}}) = L((x^{-1})^{\frac{n}{m}}) = \frac{n}{m}L(x^-1) = -\frac{n}{m}L(x)$$

Exponencial de base arbitraria

Podemos definir ahora la exponencial para cualquier base en términos de la que ya hemos definido como:

$$a^b \overset{\text{def}}{=} e^{b\log(a)}$$

Y vemos que esto tiene sentido como definición porque

$$a = E(L(a)) = e^{\log(a)}$$

Luego si definimos la función en términos de la otra:

$$a^x = e^{x\log(a)} : \forall a > 0$$

Es importante tener clara esta definición, puesto que en ocasiones es útil para poder comprender las funciones que manejamos y como tratar con ellas:

$$f(x) = x^x = e^{x\log(x)} \Rightarrow f'(x) = e^{x\log(x)}[\log(x) + 1] = x^x[\log(x) + 1]$$

Apéndice de síntesis

A

INTRODUCCIÓN A CONJUNTOS Y FUNCIONES

Definición A.1 (Inyectividad) *Una función es* ***inyectiva*** *si y solo si a elementos distintos, sus imágenes son distintas.*

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Definición A.2 (Suprayectividad) *Una función es* ***suprayectiva*** *si y solo todo elemento del conjunto de llegada es imagen de alguien del de partida.*

$$\forall b \in B : \exists a \in A : f(a) = b$$

Definición A.3 (Biyetividad) *Una función es* ***biyectiva*** *si y solo si es inyectiva y suprayectiva.*

Proposición A.1 *Si una función es inyectiva, existe una función cuyo dominio es el codominio de la inyectiva y cuyo codominio es el dominio de la inyectiva que es suprayectiva. Viceversa ocurre igual.*

$$f : A \longrightarrow B \ \textit{inyectiva} \Rightarrow \exists g : B \longrightarrow A \ \textit{suprayectiva}$$

Definición A.4 (Numerabilidad) *Decimos que un conjunto es numerable cuando podemos establecer una biyección con los naturales.*

$$\exists f : \mathbb{N} \longrightarrow A \ \textit{biyectiva} \Leftrightarrow NUMERABLE$$

Teorema A.1 (Unión numerable) *Se dice que la unión numerable de conjuntos numerables es numerable.*

$$\forall n \in \mathbb{N} : A_n \ \textit{numerable} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$$

Proposición A.2 (Numerabilidad de $\mathbb{Q}$) *Como podemos expresar los racionales como el producto cartesiano de los naturales, tenemos que son numerables*

$$\exists f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \ \textit{biyectiva}$$

Teorema A.2 (Schröder-Berstein) *Sean A y B dos conjuntos, si existe una función inyectiva y otra suprayectiva entonces existe la biyectiva.*

$$\exists f : A \to B \ \textit{inyectiva} \wedge \exists g : A \to B \ \textit{suprayectiva} \Rightarrow \exists h : A \to B \ \textit{biyectiva}$$

Proposición A.3 *Sea A, B, C conjuntos y $f : A \to B$, $g : B \to C$, la composición tiene el dominio de f y el codominio de g.*

$$gof(a) = g\left(f(a)\right), \forall a \in A \Rightarrow gof : A \to C$$

Definición A.5 (Conjuntos de Partes) *Decimos que $P(A)$ es el conjunto de las partes de A y está formado por todos los subconjuntos de A.*

Teorema A.3 (de Castor) *Sea A un conjunto cualquiera no existe ninguna función suprayectiva que vaya de A a P(A).*

$$\exists f : A \longrightarrow P(A) \ \textit{suprayectiva}$$

Teorema A.4 (Principio de Inducción) *Si un conjunto S cumple que el 1 pertenece a el y demuestras que la pertenencia de n implica la pertenencia de $n+1$, entonces $S = N$.*

$$(1 \in S) \wedge (n \in S \Rightarrow n+1 \in S) \Rightarrow S = \mathbb{N}$$

B

CONJUNTOS DE NÚMEROS

B.1 PROPIEDADES ALGEBRAICAS DE $\mathbb{R}$

B.2 SUPREMOS E ÍNFIMOS

Definición B.1 (Cota) *Decimos que un número es cota superior de un conjunto cuando es mayor que todos sus elementos. Para cota inferior análogo.*

$$M \text{ es cota de } A \Leftrightarrow \forall a \in A : M \geq a$$

Definición B.2 (Conjunto acotado) *Decimos que un conjunto está acotado inferior o superiormente cuando existe una cota inferior o superior del mismo. Si existen ambas cosas decimos que está acotado.*

Definición B.3 (Supremo e ínfimo) *Decimos que un número es supremo de un conjunto cuando es la menor de las cotas superiores e ínfimo cuando es la mayor de las inferiores.*

$$S \in \mathbb{R} : \sup(A) = S \Leftrightarrow \forall M \in \mathbb{R} : S \leq M \text{ donde } M \text{ es cota superior}$$

$$s \in \mathbb{R} : \inf(A) = s \Leftrightarrow \forall m \in \mathbb{R} : m \leq s \text{ donde } m \text{ es cota inferior}$$

Definición B.4 (Máximo y mínimo) *Decimos que un número es máximo cuando es supremo y pertenece al conjunto y de igual forma con el mínimo.*

Teorema B.1 (Propiedad del supremo) *Si un conjunto está acotado entonces existe el supremo*

$$A \text{ acotado} \Rightarrow \exists S \in \mathbb{R} : \sup(A) = S$$

Corolario B.1.1 (Consecuencias de supremo[1]) *Un número S es supremo si y solo si es único, es cota superior, siempre hay un elemento del conjunto a cualquier distancia de él por debajo y para cualquier número menor que él existe un elemento del conjunto.*

$$\begin{aligned} sup(A) = S \quad &\Leftrightarrow \quad \exists! S : \sup(A) = S \\ &\Leftrightarrow \quad \forall a \in A : S \geq a, \forall y < S : \exists a \in A : y < a < S \\ &\Leftrightarrow \quad \forall \varepsilon > 0 : \exists a \in A : S - \varepsilon < a \leq S \end{aligned}$$

Teorema B.2 (Existencia de raíces) *Existen las raíces enésimas de cualquier número real*

$$a \in \mathbb{R} : a > 0 \ y \ n \in \mathbb{N} : n \geq 2 \Rightarrow \exists! r > 0 : r^n = a$$

Proposición B.1 *Si un conjunto está contenido en otro, el supremo y el ínfimo del mayor son exteriores a los del menor.*

$$S \subset A \Rightarrow \sup(S) \leq \sup(A) \wedge \inf(S) \geq \inf(A)$$

Teorema B.3 (Propiedad Arquimediana de $\mathbb{R}$) *Los números naturales no están acotados superiormente.*

$$\nexists m \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{N} : y > n$$

Corolario B.3.1 (Propiedad Arquimediana del Producto) *Las potencias de un número mayor que 1 no están acotadas superiormente.*

$$\nexists y \in \mathbb{R}, x > 1 : \forall n \in \mathbb{N} : x^n < y$$

Además podemos decir que:

$$\exists n! \in \mathbb{N} : x^n \leq y < x^{n+1}$$

Corolario B.3.2 ($\mathbb{Z}$ no está acotado) *Del mismo modo, los números enteros no están acotados.*

$$\exists m, M \in \mathbb{R} : \forall n \in \mathbb{Z} : m < n < M$$

Corolario B.3.3 *Podemos escribir todo número real entre dos números enteros.*

$$\exists! m \in \mathbb{Z} : \forall y \in \mathbb{R} : m - 1 \leq y < m \vee m < y \leq m - 1$$

Lo que implica que:

$$\mathbb{R} = \bigcup_{m \in \mathbb{Z}} [m - 1, m)$$

Teorema B.4 (Densidad de $\mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$) *Entre dos números reales cualesquiera existen infinitos números racionales.*

$$\forall x, y \in \mathbb{R} : \exists q \in \mathbb{Q} : x < q < y$$

De hecho, existen infinitos números reales entre ellos.

Corolario B.4.1 (Densidad de $\mathbb{I}$ en $\mathbb{R}$) *Del mismo modo, entre dos reales existe siempre un irracional y de hecho son infinitos los que existen.*

$$\forall a, b \in \mathbb{R} : \exists t \in \mathbb{I} : a < t < b$$

Teorema B.5 (Intervalos Encajados de Cantor) *Si tenemos una familia de intervalos cerrados y encajados, la intersección es NO vacía y además corresponde a un intervalo donde el extremo inferior es el supremo de los extremos inferiores de la familia de intervalos y donde el extremo suprior es el ínfimo de los extremos superiores de dicha familia.*

$$F = \{I_n\}_{n \in \mathbb{N}} \ \textit{fam. interv. cerr. y encj.} \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n \neq \emptyset \ \textit{y además} \ \bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n = [\xi, \eta]$$

$$\xi = sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \ y \ \eta = inf\{b_n : n \in \mathbb{N}\}$$

Si los intervalos NO son cerrados, entonces es mentira.

Corolario B.5.1 *Si además para cualquier distancia que escojamos siempre existe un intervalo cuya longitud sea menor que ella, entonces la intersección es de hecho un único punto, es decir, los extremos descritos antes coinciden.*

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} I_n = \eta = \xi \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 : \exists n \in \mathbb{N} : l(I_n) < \varepsilon$$

Definición B.5 (Exponencial Real) *Para poder definir lo que significa tener un número elevado a otro número real se atiende a la siguiente definición: sea $a, x \in \mathbb{R}$ y $r \in \mathbb{Q}$:*

$$x = \sup\{r \in \mathbb{Q} : r < x\} = \text{ínf}\{r \in \mathbb{Q} : r > x\}$$

Esto implica que entendamos la exponencial real como:

$$a^x = \sup\{a^r : r < x\} = \text{ínf}\{a^r : r > x\}$$

C

SUCESIONES Y SERIES

C.1 SUCESIONES

Definición C.1 *Decimos que una sucesión es una lista ordenada de elementos, es decir, podemos expresarla como función que a cada natural (índice) le asigna un elemento (miembro de la sucesión). TIENEN ESTRUCTURA DE ESPACIO VECTORIAL.*

Definición C.2 (Convergencia) *Decimos que una sucesión es* ***convergente a su límite*** *cuando para cualquier entorno que escojamos alrededor de su límite, podemos encontrar un índice a partir del cual todos los demás elementos de la sucesión están dentro de dicho intervalo.*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : |x_n - l| < \varepsilon$$

Proposición C.1 (Unicidad del límite) *El límite, si existe es único.*

Proposición C.2 (Acotamiento de sucesiones convergentes) *Si una sucesión posee límite, entonces es acotada*

Proposición C.3 (Operaciones con los límites) *Las operaciones con los límites de sucesiones conocidas como suma, resta, producto y cociente son los usuales.*

1. $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = x + y$
2. *Si* $a \in \mathbb{R}$ $\lim_{n\to\infty}(a \cdot x_n) = a \cdot x$
3. $\lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n) = x \cdot y$
4. $\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{x}{y}$
5. *Si* $x_n \leq y_n : \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow x \leq y$

Definición C.3 (Sucesiones Monótonas) *Decimos que una sucesión es monótona creciente o decreciente si los términos se hacen cada vez más grandes o pequeños sucesivamente.*

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n < x_{n+1} \Rightarrow \{x_n\} \uparrow$$

$$\forall n \in \mathbb{N} : x_n > x_{n+1} \Rightarrow \{x_n\} \downarrow$$

Proposición C.4 (Convergencia de sucesiones acotadas) *Si una sucesión es monótona creciente y acotada superiormente, entonces es convergente a su supremo y ocurre de forma análoga con las decrecientes y el ínfimo.*

$$\{x_n\} \uparrow \ y \ acotada \ superiormente \Rightarrow x_n \xrightarrow{n\to\infty} x = sup(x_n)$$

Proposición C.5 (Regla del Sandwich) *Si tenemos dos sucesiones convergentes $\{x_n\}$ y $\{y_n\}$ a x e y, entonces:*

- $\forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq 0 \Rightarrow x \geq 0$
- $\forall n \in \mathbb{N} : y_n > x_n \Rightarrow y > x$
- $\forall n \in \mathbb{N} : a < x_n < b \Rightarrow a < x < b$
- ***Regla del Sandwich**: si x_n converge a φ e y_n converge a φ, si tenemos que $x_n < z_n < y_n$, entonces z_n converge a φ.*

Definición C.4 (Convergencia al infinito) *Se dice que una sucesión converge al infinito (o al menos infinito) si para cualquier constante que escojamos siempre encontramos términos mayores (o menores).*

$$\forall M > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : x_n \geq M$$

$$\forall M > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n \geq n_0 : x_n \leq -M$$

Proposición C.6 (Sucesiones monótonas no acotadas) *Si una sucesión es monótona creciente y no está acotada superiormente, entonces converge a infinito. Ocurre de modo análogo con las decrecientes.*

$$\{x_n\} \uparrow \ y \ no \ acotada \ superiormente \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = \infty$$

Proposición C.7 (Operaciones con limites infinitos) *Se dan las siguientes proposiciones:*

- *Si* $\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$
- *Si* $x_n > 0 : \forall n \in \mathbb{N} \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = \infty$
- *Si* $x_n < 0 : \forall n \in \mathbb{N} \wedge \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = -\infty$

Proposición C.8 (Criterio del cociente y de la raíz) *Para determinar si una sucesión diverge o converge a 0 podemos utilizar los siguientes criterios:*

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} < 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x_n|} > 1 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} |x_n| = \infty$$

Definición C.5 (Indeterminaciones) *Podemos decir que las operaciones con límites ampliados son las habituales, a excepción de las llamadas indeterminaciones:*

- $\infty - \infty$

- $\infty \cdot 0$
- $\frac{\infty}{\infty}$
- $\frac{0}{0}$

Teorema C.1 (Criterio de Stolz) *Si tenemos una sucesion $\{y_n\} \uparrow$ que converge a ∞ y otra sucesión cualquiera, entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n} = l \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = l$$

Definición C.6 (Subsucesión) *Cualquier sucesión cuyos elementos sea una **lista ordenada de índices** de una sucesión dada, es una subsucesión de la misma. De donde se entiende que la propia sucesión es subsucesión de la misma.*

Proposición C.9 (Criterio de convergencia) *Una sucesión converge a su límite si y sólo si toda subsucesión converge a dicho límite.*

$$x_n \xrightarrow{n\to\infty} l \Leftrightarrow \forall x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} l$$

Proposición C.10 (Criterio de acotamiento) *Si una sucesión no está acotada superiormente, entonces existe una subsucesión que converge a infinito. Y ocurre de forma análoga con las no acotadas inferiormente.*

$$\{x_n\} \textit{ no acotada superiormente} \Rightarrow \exists x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} \infty$$

Teorema C.2 (Bolzano-Wierstrass) *Si tenemos una sucesión acotada (por arriba y por abajo), entonces existe una subsucesión convergente cuyo límite se encuentra dentro de dichas cotas.*

Definición C.7 (Sucesiones de Cauchy) *Una sucesión es de Cauchy si para cualquier distancia que yo escoja, encontramos un elemento a partir del cual, todos los demás están a distancia menor que la escogida.*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists n_0 \in \mathbb{N} : \forall n, m \geq n_0 : |x_m - x_n| < \varepsilon$$

Teorema C.3 (Completitud de $\mathbb{R}$) *Si una sucesión es de Cauchy, entonces es convergente.*

Proposición C.11 (Preámbulo Completitud de $\mathbb{R}$) *Si una sucesión es de Cauchy, entonces es acotada.*

Definición C.8 (Limite superior e inferior) *Sea $\{x_n\} \subset \mathbb{R}$ una sucesión acotada y denotamos $N \in \mathbb{N}$, entonces llamamos:*

$$a_N = \inf\{x_n : n \geq \mathbb{N}\} \Rightarrow \{a_N\} \uparrow \qquad b_N = \sup\{x_n : n \geq \mathbb{N}\} \Rightarrow \{b_N\} \downarrow$$

*Lo que implica que al ser sucesiones monótonas y ser acotadas, el límite de ambas existen y es precisamente lo que llamamos **límite inferior y superior de una sucesión**:*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} a_N \qquad \limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} b_N$$

Proposición C.12 (Criterio de convergencia) *Una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge si y sólo si su límite superior e inferior coinciden y ambos son el límite de la sucesión.*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \Leftrightarrow \liminf_{n\to\infty} x_n = \limsup_{n\to\infty} x_n = l$$

Proposición C.13 *Si un número es mayor que el límite superior de una sucesión, entonces (salvo una cantidad finita de índices) se tiene que* $x_n < s$.

Proposición C.14 (Convergencia de subsucesiones) *Para cualquier subsucesión de* x_n *si converge, su límite se encuentra entre ambos límites superior e inferior.*

$$\exists x_{n_k} \xrightarrow{n\to\infty} x_0 \Rightarrow \liminf_{n\to\infty} x_n \leq x_0 \leq \limsup_{n\to\infty} x_n$$

Proposición C.15 (Subsucesiones convergentes a los límites inferior y superior) *Para cualquier sucesión existe una subsucesión que converge al límite inferior y otra subsucesión que converge al límite superior.*

$$\exists \{x_{n_k}\}, \{x_{n_q}\} \subset \{x_n\} : x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} \liminf x_n \ y \ x_{n_q} \xrightarrow{q\to\infty} \limsup x_n$$

Con ello queda probado que si $L = \{x_0 \in \mathbb{R} : \exists \{x_{n_k} \xrightarrow{k\to\infty} x_0\}\}$, *entonces podemos redefinir ambos límites como:*

$$\liminf_{n\to\infty} x_n = \inf L \qquad\qquad \limsup_{n\to\infty} x_n = \sup L$$

Proposición C.16 (Paso del límite al exponente) *Sea* $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *una sucesión que converge a* x *y* $a > 0$, *entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \ y \ a > 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a^{x_n} = a^x$$

Proposición C.17 (Límite en raíces) *Sea* $x_n \geq 0 : \forall n \in \mathbb{N}$ *y* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$, *si* $r \in \mathbb{Q}$, *entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x : \forall n \in \mathbb{N} : x_n \geq 0 \ y \ r \in \mathbb{Q} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} x_n^r = x^r$$

Proposición C.18 (Exponencial de base variable) *Esta proposición aúna las dos anteriores, diciendo que si* $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ *y* $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$, *entonces:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0 \ y \ \lim_{n\to\infty} x_n = x \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n^{x_n} = a^x$$

C.2 SERIES

D

FUNCIONES CONTINUAS

Definición D.1 (Punto de Acumulación) *Sea $D \subset \mathbb{R}$ decimos que $x_0 \in \mathbb{R}$ es un* ***punto de acumulación de D*** *si y solo si para cualquier entorno alrededor de él (sin contar con él), la intersección con el dominio es no vacía.*

$$x_0 \text{ punto de acumulación} \Leftrightarrow \forall\delta > 0 : D \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash\{x_0\}) \neq \emptyset$$

Definición D.2 (Punto Aislado) *Si $D \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in D$ y no es un punto de acumulación, entonces decimos que es un* ***punto aislado*** *de D:*

$$x_0 \text{ punto de aislado} \Leftrightarrow \exists\delta > 0 : D \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash\{x_0\}) = \emptyset$$

Proposición D.1 *Todos los puntos del dominio D o son de acumulación o son aislados.*

Proposición D.2 *Un punto del dominio es de acumulación si y sólo si existe una subsucesión en el dominio convergente a él, de manera que esta no sea aquella cuyos sucesivos términos son el propio número, es decir, sea $D \subset \mathbb{R}$ y $x_0 \in \mathbb{R}$, entonces:*

$$x_0 \text{ punto de aumulación } \Leftrightarrow \exists\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D : \lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \text{ y } x_n \neq x_0 : \forall n \in \mathbb{N}$$

Definición D.3 (Concepto de límite) *Sea $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$ y x_0 punto de acumulación, entonces decimos que l es el límite de la función en x_0 si y solo si para cualquier intervalo que cojamos alrededor de x_0, existe un intervalo alrededor de l de manera que las imágenes de los x pertenecientes al intervalo de x_0 pertenecen a dicho intervalo alrededor de l, es decir:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 : x \in D \cap ((x_0 - \delta, x_0 + \delta)\backslash\{x_0\}) \Rightarrow f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$

En otras palabras:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0, x \in D : 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Proposición D.3 (Definición de límite con sucesiones) *Un número l es el límite de una función $f : D \to \mathbb{R}$ en el punto de acumulación x_0 si y solo si existe una sucesión convergente a x_0 cuyas imágenes por f converjan a l, es decir:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = l \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D : x_n \neq x_0 : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} l$$

También es válida la proposición para el caso de que el límite pertenezca a $\overline{\mathbb{R}}$ como posteriormente se desarrolla.

Proposición D.4 *Si existe el límite, este es único.*

Proposición D.5 (Operaciones con límites) *Las operaciones con los límites son las usuales y siguen las mismas pautas que las comentadas en sucesiones.*

1. $\lim_{x\to x_0}(g(x)+f(x)) = m+l$
2. $\lim_{x\to x_0}(a\cdot f(x)) = a\cdot l$
3. $\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = l\cdot m$
4. *Si* $m\neq 0$, *entonces:* $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{l}{m}$

Definición D.4 (Definición formal de límite) *Sea* $D\subset\mathbb{R}$ *y* $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$*:*

1. *Si* $x_0\in\mathbb{R}$ *es un punto de acumulación de D, decimos que:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M>0 : \exists\delta>0 : x\in D\cap((x_0-\delta, x_0+\delta)\backslash\{x_0\}) \Rightarrow f(x)\geq M$$

2. *Si* $x_0\in\mathbb{R}$ *es un punto de acumulación de D, decimos que:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M>0 : \exists\delta>0 : x\in D\cap((x_0-\delta, x_0+\delta)\backslash\{x_0\}) \Rightarrow f(x) < -M$$

3. *Si* $D=(a,\infty)$ *y* $a,l\in\mathbb{R}$ *decimos que:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 : \exists M>0 : x>M \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$

4. *Si* $D=(-\infty,a)$ *y* $a,l\in\mathbb{R}$ *decimos que:*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0 : \exists M>0 : x<-M \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon$$

5. *Si* $D=(a,\infty)$, *decimos que:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M>0 : \exists k>0 : x>k \Rightarrow f(x)>M$$

6. *Si* $D=(a,\infty)$, *decimos que:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M>0 : \exists k>0 : x>k \Rightarrow f(x)<-M$$

7. *Si* $D=(-\infty,a)$, *decimos que:*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M>0 : \exists k>0 : x<-k \Rightarrow f(x)>M$$

8. *Si* $D=(-\infty,a)$, *decimos que:*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M>0 : \exists k>0 : x<-k \Rightarrow f(x)<-M$$

Definición D.5 (Indeterminaciones) *Podemos decir que las operaciones con límites ampliados son las habituales, a excepción de las llamadas indeterminaciones:*

- $\infty-\infty$
- $\infty\cdot 0$
- $\frac{\infty}{\infty}$

- $\frac{0}{0}$

Definición D.6 (Continuidad de una función) *Sea $D \in \mathbb{R}$ y $f : D \to \mathbb{R}$ una función, decimos que es continua si:*

$$f \text{ continua en } x_0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : x \in D \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \Rightarrow f(x) \in (f(x_0) - \varepsilon, f(x_0) + \varepsilon)$$

La función es continua en un conjunto si es continua en todos los puntos de ese conjunto.

$$f \text{ continua en } A \Leftrightarrow \forall x_0 \in A : f \text{ es continua en } x_0$$

Proposición D.6 (Consecuencias de la continuidad) *En las mismas condiciones que en la continuidad, si x_0 es un punto de acumulación:*

- *f es continua en $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty} f(x) = f(x_0)$*
- *f es continua en $x_0 \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} f(x_0)$*

Proposición D.7 *Las funciones siempre son continuas en sus puntos aislados.*

Proposición D.8 *Sean $f, g : D \to \mathbb{R}$ funciones continuas en x_0 y x_0 un punto de acumulación:*

- ***Las operaciones elementales conservan la continuidad**: $f + g$, $a \cdot f : a \in \mathbb{R}$, $f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$ siempre es una función continua.*
- *El conjunto de las funciones continuas en D se denota como $C(D)$ y tiene estructura de espacio vectorial.*
- ***Los polinomios son siempre funciones continuas**.*

Proposición D.9 (Continuidad de la composición) *Sea $f : D \to \mathbb{R}$ y $g : E \to \mathbb{R}$ donde $f(D) \subset E$, entonces si f es continua en D y g en E se tiene que:*

$$g \circ f \text{ continua en } D$$

Proposición D.10 (Continuidad de la inversa) *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva (en consecuencia, biyectiva sobre su imagen), entonces se tiene que:*

$$\exists f^{-1} : f(I) \to I \text{ donde } f^{-1} \text{ es continua}$$

Definición D.7 (Límites laterales) *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$, denotamos como límite lateral a:*

$$f(x_0^-) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \delta > 0 : x \in (x_0 - \delta, x_0) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

$$f(x_0^+) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \delta > 0 : x \in (x_0, x_0 + \delta) \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Proposición D.11 (Caracterización del límite lateral) *Sea $f : (a, b) \to \mathbb{R}$:*

$$f(x_0^-) = \lim_{x\to x_0^-} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (a, b) : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 : x_n < x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} l$$

$$f(x_0^+) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (a, b) : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 : x_n > x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} l$$

Proposición D.12 (Condiciones de continuidad) *Sea $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ y $x_0\in(a,b)$:*

$$\exists \lim_{x\to x_0} f(x) \Leftrightarrow f(x_0^+) = f(x_0^-)$$

$$f \text{ es continua en } x_0 \Leftrightarrow f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$$

Definición D.8 (Discontinuidades) *Sea $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ y $x_0\in(a,b)$ si $f(x)$ no es continua, entonces:*

- $\exists f(x_0^+), f(x_0^-)$
  - ***Discontinuidad evitable****: $f(x_0^-) = f(x_0^+)$, pero distintos a $f(x_0)$*
  - ***Discontinuidad de salto****: $f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$*
- ***Discontinuidad esencial:*** $\nexists f(x_0^-)$ *o* $\nexists f(x_0^+)$

Definición D.9 (Límites laterales en el infinito) *Sea $f:(a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$, entonces decimos:*

- *Si $x_0\in(a,b)$ decimos que:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty \wedge \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty$$

- *Si $x_0\in(a,b)$ decimos que:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty \wedge \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$$

- *Si $x_0\in(a,b]$ decimos que:*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (a,b) : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 : x_n < x_0 : \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

- *Si $x_0\in(a,b]$ decimos que:*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (a,b) : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 : x_n < x_0 : \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$$

- *Si $x_0\in[a,b)$ decimos que:*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (a,b) : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 : x_n > x_0 : \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} \infty$$

- *Si $x_0\in[a,b)$ decimos que:*

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset (a,b) : x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0 : x_n > x_0 : \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n\to\infty} -\infty$$

Y se siguen cumpliendo las condiciones de existencia del límite y caracterización por sucesiones.

Teorema D.1 (Teorema de Wierstrass) *Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ continua, entonces:*

- *La función es acotada, es decir:*

$$\exists M > 0 : \forall x\in[a,b] : |f(x)| \leq M$$

- *Existen dos puntos, de manera que la imagen de uno de ellos es el ínfimo de las imágenes y que el otro es el supremo de las mismas:*

$$\exists c, d \in [a,b] : \begin{cases} f(c) = \text{ínf}\{f(x) : x \in [a,b]\} \\ f(d) = \sup\{f(x) : x \in [a,b]\} \end{cases}$$

Se puede anotar como observación que cuando la función no es continua esto es falso y del mismo modo cuando el intervalo es abierto no ocurre.

Teorema D.2 (Teorema de Bolzano) *Si tenemos una función continua tal que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y la función toma signos distintos en los extremos del intervalo, entonces existe un valor dentro de ese intervalo donde la función toma el valor nulo, es decir:*

$$f(a) < 0 \ y \ f(b) > 0 \Rightarrow \exists c \in (a,b) : f(c) = 0$$

Teorema D.3 (Teorema de Darboux) *Si tenemos una función continua tal que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ y llamamos $A = f(a)$ y $B = f(b)$, si C es un número intermedio entre A y B, entonces existe un $c \in (a,b) : f(c) = C$, es decir, que si la función alcanza dos valores, entonces alcanza todos los intermedios.*

Proposición D.13 (Imagen de un intervalo cerrado) *Si tenemos una función continua tal que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ entonces $f([a,b])$ es un intervalo cerrado y acotado. Además, será el intervalo formado por el ínfimo de las imágenes y por el supremo de las imágenes, como hemos visto en el Teorema de Wierstrass.*

Proposición D.14 *Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo, si $f : I \to |\mathbb{R}$ y es continua, entonces $f(I)$ es un intervalo.*

Definición D.10 (Función monótona) *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, decimos que:*

- *Es* ***monótona creciente*** *si:*

$$\forall x, y \in [a,b] : x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

- *Es* ***monótona decreciente*** *si:*

$$\forall x, y \in [a,b] : x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$$

Teorema D.4 (Consecuencias de la monotonía) *Supongamos que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es monótona creciente, entonces:*

$$\forall x \in (a,b) : \exists f(x^-) \ y \ f(x^+) : f(x^-) \leq f(x) \leq f(x^+)$$

Además se verifica que:

$$\begin{cases} f(x^-) = \sup\{f(t) : t < x\} \\ f(x^+) = \text{ínf}\{f(t) : t > x\} \end{cases}$$

Pero es que además:

$$\forall x, y \in (a,b) : x < y \Rightarrow f(x^+) \leq f(y^-)$$

Como observación, el teorema se mantiene en $x = a$ y $x = b$ contando con que no existe el límite por la izquierda y por la derecha respectivamente. En consecuencia, podemos decir que las funciones monótonas solo tienen discontinuidades de salto.

Teorema D.5 (Numerabilidad de las discontinuidades) *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es monótona, entonces el conjunto de discontinuidades es, a lo sumo,* ***numerable****.*

Proposición D.15 (Condiciones de inyectividad) *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua, entonces:*

1. *f es inyectiva $\Leftrightarrow$ f es estrictamente monótona.*
2. *f es inyectiva $\Rightarrow$ f es biyectiva sobre su imagen (que es un intervalo cerrado y acotado) y f^{-1} es continua, estrictamente monótona (y biyectiva).*

Definición D.11 (Continuidad uniforme) *Decimos que f es uniformemente continua en D si:*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall x, y \in D : |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

En este caso queremos decir que escogido un ε cualquiera, siempre podemos encontrar un δ de manera que para todos los x e y que estén a distancia menor que delta cumplen lo que sigue, que aunque parece igual, es notablemente distinto a la definición de continuidad a secas.

Teorema D.6 *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces es uniformemente continua en un intervalo cerrado y acotado.*

Proposición D.16 (Regla del Sandwich) *Si tenemos que $D \subset \mathbb{R}$, x_0 es un punto de acumulación, $f, g, h : D \to \mathbb{R}$ y ocurre que para $\delta_0 > 0$ vemos que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$, si $\lim_{x \to x_0} f(x) = m = \lim_{x \to x_0} h(x)$, entonces se tiene que:*

$$f(x) \xrightarrow{x \to x_0} m \leq g(x) \leq h(x) \xrightarrow{x \to x_0} m \Rightarrow g(x) \xrightarrow{x \to x_0} m$$

Proposición D.17 (Continuidad de la exponencial) *Sean $f : D \to (0, \infty)$ y $g : D \to \mathbb{R}$, se tiene que la función $h : D \to \mathbb{R}$:*

$$h(x) = f(x)^{g(x)} : x \in D \text{ es continua}$$

Proposición D.18 (Continuidad del seno y del coseno) *Las funciones $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ son continuas.*

Definición D.12 (Logaritmos) *Definimos el logaritmo[1] como la función inversa a la exponencial, su imagen va de los positivos a los reales.*

$$\begin{array}{rcl} log_a x : (0, \infty) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ a^x & \longmapsto & x \end{array}$$

[1]Cuando la base del logaritmo es el número e decimos que es un *logaritmo neperiano*

E

CÁLCULO DIFERENCIAL

Definición E.1 (Derivada) *Una función $f : I \to \mathbb{R}$ donde I es un intervalo y c es un punto del intervalo, se dice derivable o diferenciable en c si $\exists L \in \mathbb{R}$ que verifica que:*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : 0 < |x - c| < \delta \Rightarrow \left| \frac{f(x) - f(c)}{x - c} - L \right| < \varepsilon$$

En este caso[1] *decimos que L es la derivada de f en c y escribimos $f'(c) = L$.*

Proposición E.1 (Unicidad de la derivada) *Si f es derivable en c, entonces la derivada es única.*

Proposición E.2 (Continuidad de la derivabilidad) *Si f es derivable en c, entonces f es continua en c.*

Teorema E.1 (Operaciones con derivadas) *Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$, $c \in I$ y f, g derivables en c, se tiene que:*

1. *La función $f + g : I \to \mathbb{R}$ es derivable en c y:*

$$(f + g)'(c) = f'(c) + g'(c)$$

2. *La función*[2] *$\alpha \cdot f : I \to \mathbb{R}$ es derivable en c y:*

$$(\alpha \cdot f)'(c) = \alpha \cdot f'(c)$$

3. *La función*[3] *$f \cdot g : I \to \mathbb{R}$ es derivable en c y:*

$$(f \cdot g)'(c) = f'(c)g(c) + f(c)g'(c)$$

4. *La función $\frac{f}{g} : I \to \mathbb{R}$ es derivable en c y:*

$$\left(\frac{f(c)}{g(c)} \right)'(c) = \frac{f'(c)g(c) - f(c)g'(c)}{g(c)^2}$$

[1] Cabe destacar que c puede ser un extremo del intervalo y que además c debe pertenecer al dominio porque debemos poder calcular $f(c)$.

[2] $\alpha \in \mathbb{R}$

[3] $g(c) \neq 0$

Proposición E.3 (Regla de la Cadena) *Sea $f : I \to \mathbb{R}$, $c \in I : f$ derivable en c, siendo $f(I) \subset J$ y que $g : J \to \mathbb{R}$ es una función derivable en $d = f(c)$. Entonces la composición $g \circ f(x)$ es derivable en c y decimos que:*

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c)$$

Proposición E.4 (Derivada de la función inversa) *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ donde I es un intervalo y además f es continua e inyectiva, entonces se tiene que:*

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)}$$

Definición E.2 (Extremos relativos) *Decimos[4] que $f : I \to \mathbb{R}$ tiene un* ***máximo relativo*** *en $c \in I$ si $\exists \delta > 0 : \forall x \in I : |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) \leq f(c)$.*

Decimos que $f : I \to \mathbb{R}$ tiene un ***mínimo relativo*** *en $c \in I$ si $\exists \delta > 0 : \forall x \in I : |x - c| < \delta \Rightarrow f(x) \geq f(c)$.*

Definición E.3 (Punto interior) *Si I es un conjuntos de $\mathbb{R}$ entonces $c \in \mathring{I}$ (punto interior de I) si $\exists \delta_0 > 0 : (c - \delta_0, c + \delta_0) \subset I$. En particular, si I es un intervalo $I = [a, b]$, entonces $(a, b) \in \mathring{I}$.*

Proposición E.5 *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ y supongamos que f tiene un extremo relativo en $c \in \mathring{I}$. Si f es derivable en c, entonces $f'(c) = 0$.*

Teorema E.2 (de Rolle) *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Si el valor en los dos extremos es 0, existe algún punto del intervalo donde la derivada se anula.*

$$f(a) = f(b) = 0 \Rightarrow \exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$$

Teorema E.3 (del Valor Medio) *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b). Entonces ocurre:*

$$\exists c \in (a, b) : f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Se observa que imponiendo las condiciones particulares del teorema de Rolle, este último engloba al anterior.

Proposición E.6 (Crecimiento y decrecimiento) *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua y derivable en $\mathring{I}$, entonces:*

1. *f es creciente $\Leftrightarrow f'(x) \geq 0 : \forall x \in \mathring{I}$*
2. *f es decreciente $\Leftrightarrow f'(x) \leq 0 : \forall x \in \mathring{I}$*

Proposición E.7 *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ es derivable en x_0 y $f'(x_0) > 0$, entonces sabemos que:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) > 0 \Rightarrow \exists \delta > 0 . x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap I \Rightarrow \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$$

Y en particular[5]:

$$\begin{cases} x \in (x_0, x_0 + \delta) \cap I & \Rightarrow f(x) > f(x_0) \\ x \in (x_0 - \delta, x_0) \cap I & \Rightarrow f(x) < f(x_0) \end{cases}$$

Es decir, que si la derivada en un punto es positiva, entonces la función queda por debajo de ese punto a su izquierda y queda por encima a su derecha.

[4]Lo llamamos estricto si la desigualdad $f(x) \geq$ ó $\leq f(c)$ es estricta, en ambos casos **Y SE CAMBIA LA CONDICIÓN A** $0 < |x - c| < \delta$

[5]Ocurre de modo análogo cuando $f'(x_0) < 0$

Proposición E.8 (Caracterización de los extremos) *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función continua en $c \in \mathring{I}$ y derivable en $(c, c+\delta)$ y $(c-\delta, c)$.*

$$f'(x) \geq 0 : x \in (c, c+\delta) \text{ y } f'(x) \leq 0 : x \in (c-\delta, c) \Rightarrow c \text{ mínimo relativo}$$

$$f'(x) \leq 0 : x \in (c, c+\delta) \text{ y } f'(x) \geq 0 : x \in (c-\delta, c) \Rightarrow c \text{ máximo relativo}$$

Cabe destacar que no se pide en ningún momento para aplicar este criterio que c sea derivable.

Teorema E.4 (de Darboux) *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de manera que f es derivable en $[a, b]$. La derivada toma todos los valores intermedios entre $f'(a)$ y $f'(b)$.*

$$\forall k \in \mathbb{R} : f'(a) < k < f'(b) \text{ o } f'(a) > k > f'(b) \Rightarrow \exists c \in (a, b) : f'(c) = k$$

Teorema E.5 (L'Hôpital 1) *Sea $f, g : (a, b) \to \mathbb{R}$ donde $-\infty \leq a < b \leq \infty$, f y g derivables en (a, b) con $g'(x) \neq 0 : \forall x \in (a, b)$. Supongamos que $\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} g(x) = 0$, si existe el $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$ entonces $\lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$*

Teorema E.6 (de L'Hôpital 2) *Sea $-\infty \leq a < b \leq \infty$, $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ derivables en (a, b), supongamos que $g'(x) \neq 0 : \forall x \in (a, b)$ y $\lim_{x \to a^+} g(x) = \pm\infty$, entonces:*

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \overline{\mathbb{R}}$$

Teorema E.7 (de Taylor) *Vamos a considerar $I = [a, b]$, que la función $f : I \to \mathbb{R}$ verifica que $f, f', f'', ..., f^{(n)}$ existen y son continuas en I y además que $f^{(n+1)}$ existe en el intervalo abierto (a, b). Entonces si $x_0 \in [a, b]$ se tiene que:*

$$\forall x \in I : f(x) = p_n(x; x_0) + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}}_{\text{Resto de Lagrange}}$$

Proposición E.9 (Caracterización de extremos) *Sea $f : I \to \mathbb{R}$ donde I es un intervalo y $x_0 \in \mathring{I}$. Supongamos además que $\exists f, f', f'', ..., f^{(n)}$ y son continuas en un entorno de x_0, es decir, en $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Si $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n-1)}(x_0) = 0$ y $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, entonces:*

- *n es par y $f^{(n)}(x_0) > 0 \Rightarrow x_0$ es mínimo relativo estricto*
- *n es par y $f^{(n)}(x_0) < 0 \Rightarrow x_0$ es máximo relativo estricto*
- *n es impar, entonces el punto no es ni máximo ni mínimo*

Definición E.4 (Convexidad) *Como definición formal, decimos que una función $f : I \to \mathbb{R}$ se dice que es convexa si para cualquier par de puntos de I que escojamos y para todo[6] $t \in (0, 1)$ se tiene que:*

$$\forall x_0, x_1 \in I : \forall t \in (0, 1) : f(tx_0 + (1-t)x_1) \leq f(x_0) + (1-t)f(x_1)$$

Proposición E.10 (Caracterización de convexidad) *Supongamos que $f : I \to \mathbb{R}$, donde I es un intervalo abierto, es una función con dos derivadas en I, entonces f es convexa en I si y sólo si $f''(x) > 0 : \forall x \in I$.*

Teorema E.8 (Aproximaciones de Newton) *Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de manera que:*

[6] Para los valores de $t = 0$ y $t = 1$ la desigualdad es trivial

- $f(a) \cdot f(b) < 0$ *(signos distintos)*
- $|f'(x)| \geq m > 0$
- $|f''(x)| \leq M : \forall x \in [a, b]$

Tomando la sucesión de aproximación como:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

Existe una única raíz y un entorno alrededor de ella de manera que si cogemos el primer punto en ese entorno, la sucesión está acotada en el entorno y converge a la raíz:

$$\exists r! \in (a, b) : f(r) = 0 \text{ } y \text{ } \exists \delta > 0 : [r - \delta, r + \delta] \subset [a, b]$$

$$x_0 \in [r - \delta, r + \delta] \Rightarrow \{x_n\}_{n=0}^{\infty} \subset [r - \delta, r + \delta] \text{ } y \text{ } |x_{n+1} - r| \leq \underbrace{K}_{=\frac{M}{2m}} |x_n - r|^2 \text{ } y \text{ } x_n \xrightarrow{n \to \infty} r$$

F

CÁLCULO INTEGRAL

Definición F.1 (Concepto de partición) *Dado un intervalo $[a, b] = I$, una* ***partición*** *viene dada por:*

$$\wp = \{x_0 = a < x - 1 < x_2 < \cdots < x_n = b\}$$

$$DIBUJO$$

Y definimos[1] *la* ***norma de la partición*** *como:*

$$||\wp|| = \max\{x_i - x_{i-1}\}$$

En particular, la ***partición uniforme o equiespaciada*** *se define como una partición donde todos los puntos tienen la misma separación:*

$$\wp = \{x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b\} : x_i = a + i \cdot \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{=||\wp||}$$

Definimos pues ahora una ***partición marcada o etiquetada*** *denotada por $\mathring{\wp}$ como una partición $\wp$ y unos puntos $\forall i = 1, ..., n : \exists! t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ (uno por intervalo) a los que llamaremos marcas.*

Definición F.2 (Suma de Riemann) *Dada una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ y una partición marcada $\mathring{\wp} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\} : \exists! t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, entonces definimos la suma de Riemann de f en $\mathring{P}$ como:*

$$S(f, \mathring{\wp}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$$

Definición F.3 (Integral de Riemann) *Una función $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ se dice que es integrable en el sentido de Riemann que denotamos como $f \in R[a, b]$ si $\exists L \in \mathbb{R}$:*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta > 0 : \forall \mathring{\wp} : ||\wp|| < \delta : |S(f, \mathring{\wp}) - L| < \varepsilon$$

Proposición F.1 (Unicidad de la integral) *Si $\exists L \in \mathbb{R}$, entonces $\exists! L \in \mathbb{R}$, es decir, este valor es único.*

Teorema F.1 (Integrabilidad de discontinuidad evitable) *Si $g \in R[a, b]$ y $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función que coincide con g excepto en una cantidad finita de puntos que llamaremos $\{c_0, \cdots, c_n\}$, entonces $f \in R[a, b]$ y además:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx$$

[1] Por lo que hay n intervalos.

Teorema F.2 (Integrabilidad de las discontinuidades de salto) *Sea $f \in [a,b] \to \mathbb{R}$ la función $f(x) = \begin{cases} \alpha & x \in [a,c) \\ \beta & x \in [c,b] \end{cases}$, entonces $f \in R[a,b]$ y ocurre:*

$$\int_a^b f = \alpha(c-a) + \beta(b-c)$$

Teorema F.3 (Acotamiento de la integrabilidad) *Toda función $f \in R[a,b]$ es acotada, es decir:*

$$\exists M > 0 : \forall x \in [a,b] : |f(x)| \leq M$$

Teorema F.4 (Operaciones con integrales) *Si $f, g \in R[a,b]$ y $k \in \mathbb{R}$, entonces ocurre:*

1. $kf \in R[a,b] \Rightarrow \int_a^b kf = k \int_a^b f$
2. $f + g \in R[a,b] \Rightarrow \int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$
3. $\forall x \in [a,b] : f(x) \leq g(x) \Rightarrow \int_a^b f \leq \int_a^b g$

Teorema F.5 (Criterio de Cauchy) *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ entonces $f \in R[a,b]$ si y sólo si:*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \eta > 0 : ||\mathring{\wp}|| \text{ y } ||\mathring{\mathcal{Q}}|| < \eta \Rightarrow \left| S(f, \mathring{\wp}) - S(f, \mathring{\mathcal{Q}}) \right| < \varepsilon$$

Teorema F.6 (Del Sandwich) *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ entonces $f \in R[a,b]$ si y sólo si:*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists \alpha_\varepsilon, \omega_\varepsilon : [a,b] \to \mathbb{R} : \alpha_\varepsilon, \omega_\varepsilon \in R[a,b] : \alpha_\varepsilon \leq f(x) \leq \omega_\varepsilon(x) : \forall x \in [a,b]$$

Además tenemos que ambas funciones auxiliares deben verificar que:

$$\int_a^b \omega_\varepsilon(x) - \alpha_\varepsilon(x) dx < \varepsilon$$

Teorema F.7 (Criterios de no integrabilidad) *Tenemos dos criterios principales:*

- *Si existe una sucesión de particiones marcadas $\mathring{\wp}_n$ de forma que $||\mathring{\wp}_n|| \xrightarrow{n \to \infty} 0$ y $S(f, \mathring{\wp}_n) \not\longrightarrow l$, entonces $f \notin R[a,b]$*
- *Si existen dos sucesiones de particiones marcadas $\mathring{\wp}_n$ y $\mathring{\mathcal{Q}}_\setminus$ de forma que $S(f, \mathring{\wp}) \xrightarrow{n \to \infty} L_1$ y $S(f, \mathring{\mathcal{Q}}) \xrightarrow{n \to \infty} L_2$ pero $L_1 \neq L_2$.*

Proposición F.2 (Integrabilidad de la continuidad y la monotonía) *Las funciones continuas son integrables:*

$$C[a,b] \subset R[a,b]$$

Las funciones monótonas son integrables

$$M[a,b] \subset R[a,b]$$

Teorema F.8 (Aditividad de la integral) *Sea $[a,b]$ un intervalo y $c \in [a,b]$, entonces:*

$$f \in \mathcal{R}[a,b] \Leftrightarrow f|_{[a,c]} \in \mathcal{R}[a,c] y f|_{[c,b]} \in \mathcal{R}[c,b]$$

Y además se tiene que:

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$$

Proposición F.3 (Propiedades de la integral) *1. Si $f \in R[a,b]$ y tenemos que $a < c < d < b$, entonces $f \in R[c,d]$ donde además:*

$$\int_c^d f = \int_a^d f - \int_a^c f$$

2. Si tenemos una partición $\mathring{P} = \{a = c_0 < \cdots < c_n = b\}$ en el intervalo $[a,b]$, entonces se tiene que:

$$\int_a^b f = \sum_{i=1}^{n} \left(\int_{c_{i-1}}^{c_i} f \right)$$

3. Si $f \in R[a,b]$ y tenemos que $\alpha, \beta \in [a,b] : \alpha < \beta$, entonces tenemos que:

$$\int_\beta^\alpha f = -\int_\alpha^\beta f$$

4. La integral en un punto es nula:

$$\int_\alpha^\alpha f = 0$$

Proposición F.4 *Si $f \in R[a,b]$ y $\alpha, \beta, \gamma \in [a,b]$ cualesquiera, entonces:*

$$\int_\alpha^\beta f + \int_\beta^\gamma f = \int_\alpha^\gamma f$$

Teorema F.9 (Regla de Barrow) *Sea $f \in R[a,b]$, supongamos que $\exists F : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) de forma que $F'(x) = f(x) : \forall x \in \mathbb{R}$, entonces se tiene que:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Teorema F.10 (Fundamental del Cálculo) *Si $f \in R[a,b]$, definimos la función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ como:*

$$F(z) = \int_a^z f$$

Teorema F.11 (Cambio de Variable) *Supongamos que tenemos una función $f : I \to \mathbb{R}$ y una función $\varphi : J \to \mathbb{R}$ de forma que $f \in C^0(I, \mathbb{R})$ y $\varphi \in C^1(J, \mathbb{R})$ de modo que $\varphi(J) \subset I$. Si $\alpha, \beta \in J$ entonces:*

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)dt = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(x)dx$$

Teorema F.12 (Integración por Partes) *Sean $F, G \in C^1(I, \mathbb{R})$, $f = F'$ y $g = G'$, entonces si $\alpha, \beta \in I$ se tiene que:*

$$\int_\alpha^\beta f(x)G(x)dx = F(\beta)G(\beta) - F(\alpha)G(\alpha) - \int_\alpha^\beta F(x)g(x)dx$$

Definición F.4 (Conjunto de Medida Nula) *Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ se dice que es de medida nula si se tiene que:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \text{cantidad numerable de intervalos } (a_k, b_k) : \forall k = 1, 2, \cdots : \begin{cases} A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} (a_k, b_k) \\ \sum_{k=1}^{\infty} (b_k - a_k) < \varepsilon \end{cases}$$

Teorema F.13 (Criterio de Lebesque) *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y denotamos por $D(f)$ al conjunto de puntos de discontinuidad de la función, entonces:*

$$f \in R[a,b] \Leftrightarrow D(f) \text{ es de medida nula}$$

Teorema F.14 (Integrabilidad de la composición) *Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ de forma que $f \in R[a,b]$ y $\varphi : [c,d] \to \mathbb{R}$ continua con $f[a,b] \subset [c,d]$, entonces:*

$$\varphi \circ f : [a,b] \to \mathbb{R} \Rightarrow \varphi \circ f \in R[a,b]$$

Definición F.5 (Integral Impropia 1ª especie) *Dada $f : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ de forma que $f \in R[a,b] : \forall b > a$, diremos que la **integral impropia** converge si existe y es finito:*

$$\exists \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

De esta forma podemos definir la integral impropia como:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx$$

Teorema F.15 (Criterio de Cauchy) *Si tratamos la integral como una expresión de la que queremos hallar el límite:*

$$\exists \lim_{b\to+\infty} \underbrace{\int_a^b f(x)\ dx}_{=I_b} \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists M \geq a : \ si\ b' > b \geq M \Rightarrow |I_{b'} - I_b| < \varepsilon$$

Por tanto, si el Criterio de Cauchy lo aplicamos a las integrales se tiene que:

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx \text{ es convergente } \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists M \geq a : \ si\ b' > b \geq M \Rightarrow \left| \int_b^{b'} f(x)dx \right| < \varepsilon \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |I_{b'} - I_b| = |\int_a^{b'} f(x)\ dx - \int_a^b f(x)\ dx| = |\int_b^{b'} f(x)\ dx|$$

Proposición F.5 (Criterio de comparación) *Supongamos que tenemos dos funciones $f,g : [a,\infty) \to \mathbb{R}$ donde $f,g \in R[a,b] : \forall b > a$ y $0 \leq f(x) \leq g(x)$, entonces:*

$$\int_a^\infty g(x)\ dx \text{ convergente } \Rightarrow \int_a^\infty f(x)\ dx \text{ convergente}$$

Teorema F.16 (De comparación en el límite) *Suponemos que $f,g \in [a,\infty) \to \mathbb{R}$ de forma que $f,g \in R[a,b] : \forall b > a$ y que cumplen $f(x), g(x) \geq 0$. Si se verifica que:*

$$\exists \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L \in (0,\infty) \cup \{\infty\}$$

Entonces se tiene que:

- $0 < L < \infty$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx \text{ es convergente} \Leftrightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\ dx \text{ es convergente}$$

- $L = 0$

$$\int_a^{+\infty} g(x)\ dx \text{ es convergente} \Rightarrow \int_a^{+\infty} f(x)\ dx \text{ es convergente}$$

- $L = \infty$

$$\int_a^{+\infty} f(x)\ dx \ \textit{es convergente} \Rightarrow \int_a^{+\infty} g(x)\ dx \ \textit{es convergente}$$

Teorema F.17 (Criterio de la serie) *Supongamos que tenemos* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *que verifica que* $f(x) \geq 0$, *que* f *es decreciente y que* $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$. *Entonces decimos que:*

$$\int_0^{\infty} f(x)\ dx \ \textit{converge} \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \ \textit{converge}$$

G

SUCESIONES Y SERIES DE FUNCIONES