Gödel, Escher, Bach: Un Eterno y Grácil Bucle

Gödel, Escher, Bach: An Eternal and Graceful Loop

Autor 1:Jhon Edinson David Zuñiga Mosquera
Ingenieria en sistemas y computacion, Universidad Tecnologica de Pereira, Pereira, Colombia
Correo-e: jhon.zuniga@utp.edu.co

***Resumen*— GEB se divide en dos partes, aunque las constantes autorreferencias hacen complicado establecer una distinción clara. La primera de ellas, a la cual el autor llama GEB, trata acerca de los fundamentos de los sistemas lógicos formales. La segunda, EGB, se mete de lleno en la cuestión de cómo analizar formalmente la mente humana y hasta dónde se puede explorar esa idea.**

El teorema de Gödel se fundamenta en lo siguiente: los números siguen unas reglas que podemos caracterizar con teoremas, y estos teoremas siguen una estructura que podemos analizar con meta-teoremas. Los teoremas, a su vez, son expresables en términos de números, y al aplicar a los teoremas (pensados como números) los mismos métodos que aplicamos como números, podemos observar que habrá enunciados indecidibles, es decir, que no se puede saber si son correctos o no. En particular, Gödel demostró que en el caso de la aritmética la afirmación "esta teoría *es* consistente consigo misma" es indecidible.

https://estudiarfisica.com/2018/10/20/godel-escher-bach-un-eterno-y-gracil-bucle-douglas-hofstadter/

***Palabras clave*— Términos- Aritmetica, teorema, análisis, enunciados.**

***Abstract*— GEB is divided into two parts, although constant self-references make it difficult to make a clear distinction. The first one, which the author calls GEB, deals with the foundations of formal logical systems. The second, EGB, gets fully into the question of how to formally analyze the human mind and how far that idea can be explored.**

GEB is divided into two parts, although constant self-references make it difficult to make a clear distinction. The first one, which the author calls GEB, deals with the foundations of formal logical systems. The second, EGB, gets fully into the question of how to formally analyze the human mind and how far that idea can be explored.

***Key Word* —About- Arithmetic, theorem, analysis, statements.**

I. INTRODUCCIÓN

Este libro siendo del tipo divulgativo clásico nos introduce de forma amena conceptos acerca del teorema de incompletitud de Kurt Gödel, las anti intuitivas imágenes de M.C. Escher y las complejas composiciones de Johann Sebastian Bach. Por supuesto, estaba completamente equivocado. Y esta es una de esas ocasiones en las que uno se alegra de estarlo, pues GEB es más bien una excelente guía introductoria a la teoría de la consciencia.

Es una obra de arte escrita por un sabio. Versa sobre los misterios del pensamiento e incluye, ella misma, sus propios misterios. Por ello su traducción ha supuesto también una larga, azarosa y laboriosa aventura que el propio autor ha vivido y que relata en un prólogo especialmente escrito para esta versión española.

Un libro que, a pesar de su título, aborda principalmente los procesos microscópicos del cerebro, y muy poco la manera en que los pensamientos humanos resultan del confuso entremezclamiento. El trabajo de Hubel y Wiesel sobre sistemas visuales aparece aquí muy bien contemplado

II. INDICE

RECOMENDACIONES

Todo lenguaje, todo sistema formal, todo programa de ordenador, todo proceso de pensamiento, llegan, tarde o temprano, a la situación límite de la autorreferencia : de querer expresarse sobre sí mismos. Surge entonces la emoción del infinito, como dos espejos enfrentados y obligados a reflejarse mutua e indefinidamente.

REFERENCIAS

— Hofstadter, Douglas R. (1987). Gödel, Escher, Bach: un eterno y grácil bucle. Traducido por Alejandro López Rousseau y Mario Arnaldo Usabiaga Bandizzi. Tusquets Editores. ISBN 84-7223-459-2. Archivado desde el original el 7 de diciembre de 2007. Consultado el 27 de abril de 2007.

—Hofstadter, Douglas R. (1979). Godel, Escher, Bach: una eterna trenza dorada. traducido por Mario Arnaldo Usabiaga Bandizzi. México: Conacyt. ISBN 968-823-118-5.

— Hofstadter, D. R. (2013). Yo soy un extraño bucle [I Am a Strange Loop]. Luis Enrique de Juan, trad. Colección Fábula. 512 pp. México: Tusquets Editores ISBN 9786074214314

III. CONTENIDO

Este libro se centra en la interaccion de los logros del lógico Kurt Godel, el artista Maurits Cornelis Escher y del compositor Johann Sebastian. Bach. Como el autor indica: “Me di cuenta de que Godel, Escher y Bach eran solamente sombras dirigidas en diversas direcciones de cierta esencia sólida central. Intenté reconstruir el objeto central, y llegué con este libro." Hofstadter se pregunta: "¿Siguen las palabras y las ideas reglas formales o no?" En el prefacio de la edición del vigésimo aniversario, Hofstadter lamenta que su libro haya sido malinterpretado como una mezcolanza de cosas ingeniosas sin un tema central. Señaló: "GEB es una tentativa muy personal de decir cómo es que los seres animados pueden surgir a partir de la materia inanimada. ¿Qué es un "uno mismo", y cómo puede surgir un "uno mismo" de cosas tan faltas de ser tales como una piedra o un charco?”.

Bach

Johann Sebastian Bach fue el miembro más importante de una de las familias de músicos más destacadas de la historia, con más de 35 compositores famosos. Tuvo una gran fama como organista y clavecinista en toda Europa por su gran técnica y capacidad de improvisar música al teclado. Además del órgano y del clavecín, tocaba el violín y la viola da gamba. Su fecunda obra es considerada la cumbre de la música barroca; destaca en ella su profundidad intelectual, su perfección técnica y su belleza artística, además de la síntesis de los diversos estilos nacionales de su época y del pasado. Bach es considerado el último gran maestro del arte del contrapunto,1 y fuente de inspiración e influencia para posteriores compositores y músicos, desde Wolfgang Amadeus Mozart pasando por Ludwig van Beethoven, Félix Mendelssohn, Robert Schumann, Franz Liszt, Johannes Brahms, Richard Wagner, Richard Strauss y Gustav Mahler hasta músicos más recientes como Arnold Schönberg, Anton Webern, Paul Hindemith, Ígor Stravinski, Heitor Villa-Lobos o Astor Piazzolla, entre muchos otros.

En la obra de Bach se puede dividir en tres grandes períodos bien diferenciados, marcados por las influencias y la asimilación de los estilos de su época, el desarrollo, búsqueda y evolución de su estilo personal, y los puestos profesionales que desempeñó.

El primer período, el de aprendizaje y estudio, va desde 1700 hasta 1713, estando ya en Weimar; en él escribió música para teclado y cantatas sacras, y formó su estilo, que sintetizó toda la tradición de la música clásica europea precedente: la polifonía clásica fijada en tiempos de Giovanni Pierluigi da Palestrina; el primer Barroco de Girolamo Frescobaldi; la música francesa del siglo xvii d. C.; y la de autores alemanes e italianos de su época como Dietrich Buxtehude, Johann Pachelbel y Antonio Vivaldi. De este último copió y adaptó obras desde su juventud: así lo hizo en Weimar, cuando, gracias al duque, pudo versionar algunas de sus obras en sus Conciertos BWV 592-597 y BWV 972-987). Bach también se interesaba en compositores contemporáneos, a quienes estudiaba y con muchos de los cuales mantuvo una relación personal directa. Entre ellos se encontraban Jan Dismas Zelenka, Johann Mattheson, Georg Philipp Telemann, Reinhard Keiser y Georg Friedrich Händel.

El segundo período, ya de plena madurez, empieza en 1713, en Weimar, y acaba en 1740, afincado ya en Leipzig. Bach dominaba los dos estilos principales de su época, el francés y el italiano (progresiones armónicas ya plenamente tonales, claridad melódica y dinamismo rítmico), y, de hecho, su producción estuvo muy influida por el concierto italiano y la suite francesa. Sintetizó en sus obras elementos de ambos junto a rasgos autóctonos alemanes como el complejo contrapunto y textura interna y el coral, del que hace amplio uso en sus obras religiosas. Resulta de todo ello un estilo fácilmente reconocible, moderno pero de claras raíces en el pasado. En Leipzig y Köthen, ya forjado su estilo personal, adquiere un profundo dominio técnico. Es así como hizo amplio uso de la técnica y formas alemanas del órgano (tocatas, preludios, fugas, corales), francesas del clave (suites, oberturas) e italianas del violín (conciertos, sonatas, sinfonías).

El último período de su música va desde la publicación de Klavier-Übung III, en 1739, hasta su muerte en 1750. En esta etapa compuso el El arte de la fuga. Durante los últimos años de su vida —dominados ya en Alemania por la estética de la Ilustración— su obra fue considerada anticuada, árida, difícil y saturada de adornos. En este período escribió obras instrumentales singularmente densas, como haría más adelante Beethoven, y su estilo personal se volvió más contrapuntístico, con apenas una leve influencia de la nueva música galante o estilo preclásico naciente en aquellos momentos, que se caracterizaba por su carácter homofónico y apenas utilizaba el cargado contrapunto que Bach usaba. Así, en 1737, Johann Adolph Scheibe, crítico musical de la nueva mentalidad ilustrada, criticó duramente la música de Bach: «Espera que instrumentistas y cantantes hagan lo mismo que él cuando toca el clavecín».

Después de Bach, algunas formas musicales, como las pasiones, las cantatas sacras, las tocatas y las fugas, fueron cayendo en desuso para los grandes compositores.65 Tras su muerte, la música tomó una dirección en la que su obra no tuvo cabida; él es el punto final respecto a una forma de entender la música que se remontaba a la Edad Media, cuando tenían más importancia la polifonía que la armonía o el timbre. Pero Bach también fue innovador y abrió caminos para la música del futuro: por ejemplo, fue el primer gran maestro del concierto para teclado. De hecho, el quinto Concierto de Brandeburgo, BWV 1050 (1719), en el cual el teclado adquiere un papel solista que hasta entonces nunca había tenido, puede considerarse el primer concierto escrito para teclado, que continuó en la serie de conciertos BWV 1052-1065 (1735)

Escher

Maurits C. Escher conocido por sus grabados xilográficos, sus grabados al mezzotinto y dibujos, que consisten en figuras imposibles, teselados y mundos imaginarios. Su obra experimenta con diversos métodos de representar (en dibujos de 2 ó 3 dimensiones) espacios paradójicos que desafían a los modos habituales de representación.

En 1919 y bajo presión paterna, empieza los estudios de arquitectura en la Escuela de Arquitectura y Artes Decorativas de Haarlem, estudios que abandonó poco después para pasar como discípulo de un profesor de artes gráficas, Samuel Jessurun de Mesquita. Adquirió unos buenos conocimientos básicos de dibujo, y destacó sobremanera en la técnica del grabado en madera o xilografía, que llegó a dominar con gran maestría.

Entre 1922 y 1935 se traslada a Italia donde realiza diversos bocetos y grabados principalmente de temas paisajistas. Abandona Italia debido al clima político de aquellas fechas, trasladándose a Suiza, y pasó algunos años allí, cuyo clima le resultó muy desagradable y poco inspirador. Añora el sur de Italia y lo frecuenta repetidas veces. También viaja a España, y en particular a Granada. Visita dos veces la Alhambra, la segunda vez de forma más detenida, copiando numerosos motivos ornamentales. Lo que aprendió allí contemplando los intrincados detalles decorativos fundados en repetidos patrones matemáticos por paredes y techos tuvo una profunda influencia en la obra de Escher, especialmente en la relacionada con la partición regular del plano y el uso de patrones que rellenan el horror vacui del espacio sin dejar ningún hueco.

En 1941 se muda a Baarn, Países Bajos, después de una estancia difícil en Bélgica durante la Segunda Guerra Mundial. Parece que debido al habitual mal tiempo de esa región, donde los días soleados se consideran una bendición, es por lo que abandona los motivos paisajísticos como modelos y se centra más en su propia mente, encontrando en ella una potentísima fuente de inspiración. Hasta 1951 vivió básicamente dependiendo económicamente de sus padres. A partir de entonces fue cuando comenzó a vender sus grabados y obtener un buen dinero por ellos. Esto le permitió vivir sus últimos años con una economía personal excelente. Generalmente hacía copias de las litografías y grabados por encargo. También hizo por encargo diseños de sellos, portadas de libros, y algunas esculturas en marfil y madera. En cierto modo le resulta gratificante y a la vez fácil, y se admiraba de tener en su taller una especie de «máquina de fabricar billetes» reproduciendo sus propias obras. Normalmente no usaba elementos de obras anteriores en las nuevas, excepto en los encargos especiales. Hacía, por ejemplo, esculturas en madera basadas en algunos de sus dibujos, y para algunas peticiones especiales reciclaba parte de las ideas y elementos de obras anteriores. Quizás por ello en este período su producción sea tan fructífera y regular, y solo se verá interrumpida por la operación que sufrió en 1962, consecuencia de su debilitada salud. En 1969, con 71 años, realiza su grabado Serpientes donde demuestra sus facultades a pesar de su avanzada edad.

En 1970 se traslada a la Casa Rosa Spier de Laren, al norte de los Países Bajos, donde los artistas podían tener estudio propio. Murió dos años más tarde, en Hilversum, el 27 de marzo de 1972 a la edad de 73 años, y fue enterrado en el cementerio de Baarn.

Como artista, M. C. Escher resulta difícil de clasificar. Se han hecho múltiples interpretaciones de sus obras, pero la realidad es que Escher no tenía grandes pretensiones ni mensajes que transmitir, sino que básicamente plasmaba lo que le gustaba. No basaba su trabajo en los sentimientos, como otros artistas, sino simplemente en situaciones, soluciones a problemas, juegos visuales y guiños al espectador. Visiones, en ocasiones, que le sobrevenían por las noches, que pasaban por su imaginación y que creía merecedoras de ser plasmadas en sus cuadros.

Los expertos coinciden, y es bastante evidente examinando la mayor parte de sus obras, en que una de sus principales características es la dualidad y la búsqueda del equilibrio, la utilización del blanco y el negro, la simetría, el infinito frente a lo limitado, el que todo objeto representado tenga su contrapartida.

El análisis de sus obras, tal y como definió Bruno Ernst, uno de sus biógrafos y amigo personal, permite clasificarlas básicamente en tres temas y diversas categorías:

- *La estructura del espacio* – Incluyendo paisajes, compenetración de mundo y cuerpos matemáticos.
- *La estructura de la superficie* – Metamorfosis, ciclos y aproximaciones al infinito.
- *La proyección del espacio tridimensional en el plano* – Representación pictórica tradicional, perspectiva y figuras imposibles.

La forma de pensar especial de Escher y los ricos gráficos han tenido una influencia continua en las matemáticas y el arte, así como en la cultura popular.

Gódel

Kurt Friedrich Gödel, se le considera uno de los lógicos más importantes de todos los tiempos. Su trabajo ha tenido un impacto inmenso en el pensamiento científico y filosófico del siglo XX. Al igual que otros pensadores —como Gottlob Frege, Bertrand Russell, A. N. Whitehead y David Hilbert—, Gödel intentó emplear la lógica y la teoría de conjuntos para comprender los fundamentos de la matemática. Se le conoce sobre todo por sus dos teoremas de la incompletitud, publicados en 1931, un año después de finalizar su doctorado en la Universidad de Viena. El más célebre establece que para todo sistema axiomático recursivo auto-consistente lo suficientemente poderoso como para describir la aritmética de los números naturales (la aritmética de Peano), existen proposiciones verdaderas sobre los naturales que no pueden demostrarse a partir de los axiomas. Para demostrar este teorema, desarrolló una técnica denominada ahora numeración de Gödel, que codifica expresiones formales como números naturales.

También demostró que la hipótesis del continuo no puede refutarse desde los axiomas aceptados de la teoría de conjuntos, si dichos axiomas son consistentes. Realizó importantes contribuciones a la teoría de la demostración al esclarecer las conexiones entre la lógica clásica, la lógica intuicionista y la lógica modal.

El Teorema de Incompletitud de Gödel.

En 1931 Gödel, con 25 años, publicó en una revista científica alemana un artículo que fue leído y entendido solamente por unos pocos matemáticos. Llevaba el impresionante título "Sobre proposiciones formalmente indecidibles de Pricipia Mathematica y sistemas relacionados" (Principia Mathematica es el famoso libro escrito conjuntamente por Bertrand Russell (1872-1970) y Alfred N. Whitehead (1861-1949)).

Todo sistema axiomático contiene postulados o axiomas (proposiciones aceptadas como verdaderas sin necesidad de demostración) de las que se deducen, con ayuda de la lógica, otras proposiciones llamadas teoremas.

El sueño de todo matemático es probar que su ciencia es consistente y completa.

Consistente quiere decir que nunca se deducirán dos teoremas que estén en contradicción, que no se puede deducir la verdad y la falsedad de una misma proposición.

Y que el sistema sea completo significa que toda proposición que haya sido o pueda ser pensada sea susceptible, con las armas de deducción del sistema, de ser probada o refutada su veracidad.

Un sueño del que nos despertó cruelmente en 1931 Kurt Gödel, al demostrar que si se toma un sistema de axiomas lo suficientemente amplio - que contenga los axiomas de la aritmética como mínimo - siempre existirán proposiciones cuya certeza o falsedad será imposible demostrar, es decir serán proposiciones indecidibles. Aunque la proposición se cumpla en todos los casos observados, no nos garantiza que no falle en un próximo caso.

El Teorema de Gödel también implica, para desencanto de muchos, que las computadoras nunca podrán ser programadas para contestar toda pregunta matemática.

Cuando una proposición sea indecidible, podríamos incorporarla - la proposición o su negación - como un nuevo axioma (y ya no necesito demostración alguna) y asunto resuelto. ¡ Pero habrá otra proposición indecidible en el nuevo sistema axiomático¡

Esto de incorporar proposiciones indecidibles como nuevos axiomas ya se ha hecho en dos notables casos:

(1) El famoso postulado de Euclides. ".Por un punto exterior a una recta pasa una, y sólo una, paralela a ella". Su incorporación como axioma (lo que hizo Euclides) dio lugar a la Geometría Euclídea, la incorporación de sus negaciones dio lugar a las Geometrías No-Euclídeas (nombre creado por Gauss)

(2) La Hipótesis del Continuo, otro postulado indecidible, aceptado como axioma por Georg Cantor da lugar a la Teoría de Conjuntos Cantoriana. Y su negación a la Teoría de Conjuntos No-Cantoriana.

(1) EL 5o POSTULADO DE EUCLIDES Y GEOMETRÍAS NO-EUCLÍDEAS.

La civilización griega clásica que dio origen a la Geometría Euclídea fue destruida por Alejandro Magno y reconstruida, según nuevas directrices en Egipto. Alejandro trasladó el centro de su imperio de Atenas a la ciudad que él inmodestamente llamó Alejandría, y proclamó como su objetivo el de fusionar las civilizaciones griega y del Oriente Próximo. Este objetivo fue hábilmente ejecutado por sus sucesores, los Ptolomeos, que gobernaron Egipto desde el año 323 A.C. hasta que el último miembro de la familia, Cleopatra, fue seducida por los romanos. Bajo la influencia de las civilizaciones del Oriente Próximo, especialmente la egipcia y la persa, la cultura de la civilización greco-alejandrina se orientó más bien con mentalidad ingenieril y práctica. Los matemáticos respondieron a los nuevos intereses.

El texto matemático más universal que se conoce data del Siglo II A.C. y fue escrita en Alejandría, ciudad situada en el delta del Nilo. EUCLIDES , científico helénico, el primer axiomatizador de la matemática y , entre otros cargos, maestro de Ptolomeo, rey de Egipto, es el firmante del texto que, con el nombre de ELEMENTOS, dio la vuelta al mundo en siglos sucesivos. Se cuentan por centenares las ediciones y traducciones que hasta hoy se han publicado de los 13 libros (o capítulos) que componen el texto. Redescubiertos y venerados por los árabes, los Elementos se convirtieron en la Biblia científica de la baja Edad Media primero y en el punto de partida de los revolucionarios pensadores renacentistas después.

Los 9 libros que dedica Euclides a la geometría se basan en una serie de proposiciones dogmáticas-llamadas axiomas o postulados-, y a partir de ellos se elabora toda una doctrina.

El 5o Postulado de Euclides, en el Libro I de los Elementos, tiene un enunciado equivalente a lo siguiente: "Por un punto exterior a una recta pasa una, y sólo una, paralela a ella". El propio Euclides y centenares de sus sucesores se esforzaron estérilmente en demostrarlo a partir del resto de los axiomas de la geometría; a todos les parecía que no era un axioma sino un teorema, deducible por tanto de los axiomas. Todos los intentos fracasaron.

Según cuenta Proclo (Proclus de Bizancio, 410-485) en sus "Comentarios sobre el primer libre de Euclides", uno de los primeros intentos lo hizo Posidonius (Siglo I A.C.): dada una línea recta y una distancia "d", uniendo todos los puntos que se hallan a la distancia "d" de la recta, creía Posidonius tener una paralela, pero.....¿la unión de esos puntos es una línea recta?

Euclides, al no poder demostrarlo como teorema lo adoptó como axioma y la geometría resultante se llamaría Geometría Euclídea.

Pero Karl F. GAUSS (alemán, llamado "el príncipe de las matemáticas", 1777-1855), Nicolai LOBACHEVSKI (ruso y Rector de la Universidad de Kazan, 1792-1856) y Janos BOLYAI (húngaro,1802-1860), en trabajos de investigación independientes, postularon que por un punto exterior a una recta puede trazarse al menos dos paralelas (resulta que, de ser posible trazar dos, puede trazarse infinitas), dando lugar a una Geometría No-Euclídea.

G.F. Bernhard RIEMANN (alemán, fue discípulo de Gauss, 1826-1866) postuló que por un punto exterior no pasa paralela alguna, dando lugar a otra Geometría No-Euclídea (también llamada "de Riemann").

Las tres geometrías llevan a propiedades y conclusiones muy distintas, tales como la suma de los ángulos interiores de un triángulo:

En la Geometría Euclídea la suma es siempre 180°.

En la Geometría de Gauss-Lobachevski- Bolyai, la suma es menor que 180° y además es variable, para triángulos pequeños como los que podemos ver en la geografía terrestre esa suma es muy poco menos que 180° y la diferencia no es detectable dentro de las imperfecciones de nuestros instrumentos de medida, pero para triángulos mucho mayores esa diferencia sería evidente.

En la Geometría de Riemann, la suma es mayor que 180°, igualmente poco es el exceso para triángulos pequeños, pero cuanto mayor es el triángulo , mayor también será el exceso sobre 180°.

No tardó en demostrarse (el italiano E.Beltrami en 1868 y el alemán F.Klein en 1871) que si alguna de las dos nuevas geometrías llega a presentar una contradicción, también se presentaría una contradicción en la Geometría Euclídea. Las Geometrías No-Euclídeas serían , por tanto, consistentes, pero esa consistencia es relativa pues reposa sobre la consistencia de la Geometría Euclídea, pero queda por probar realmente que la Geometría Euclídea es consistente. Bien es verdad que llevamos más de 2000 años probando teoremas geométricos sin que jamás hayamos podido probar, a la vez, un teorema y su contrario. Es tranquilizante aunque no definitivo.

Tal vez el lector está pensando que las Geometrías No-Euclídeas son sólo especulaciones intelectuales sin posibilidad de aplicación práctica, pero le interesará saber que la Geometría de Riemann encontró, en 1915, una insospechada aplicación en la teoría de la Relatividad General de Einstein y una de sus consecuencias fue la bomba atómica de cuya estruendosa realidad nadie puede dudar.

Einstein desechó la Geometría Euclídea y adoptó para la geometría del Universo a la Geometría No-Euclídea de Riemann que desde entonces fue integrada en los cálculos astronómicos.

(2) LA HIPÓTESIS DEL CONTINUO.

Georg F. CANTOR (ruso-alemán, 1845-1918) es el creador de la célebre Teoría de Conjuntos. Sus ideas estaban claramente muy por delante de su tiempo y levantaron grandes controversias. Descubrió que más allá del infinito de los Números Naturales (N)—a cuyo cardinal (cardinal de un conjunto es el N° de sus elementos) llamó aleph-sub-cero (aleph es la Ia letra del alfabeto hebreo)—existen no solamente infinitos superiores sino un número infinito de ellos (infinitos alephs).

Los principales matemáticos del mundo se dividieron en dos bandos, Henri Poincaré llamó al "cantorismo" una enfermedad, y Hermann Weyl se refería a la jerarquía de los alephs establecida por Cantor como "niebla en la niebla".

Del otro lado David Hilbert (el mayor matemático de la Ia mitad del Siglo XX) dijo: "Del paraíso que Cantor ha creado para nosotros, nadie nos echará", y Bertrand Russell elogió en cierta ocasión el descubrimiento de Cantor diciendo que es "probablemente el más importante que la época puede ostentar".

Actualmente la enorme mayoría de los matemáticos perdieron el miedo a los alephs, y las demostraciones mediante las cuales Cantor estableció sus "terribles dinastías" (como las llamó el escritor argentino Jorge Luís Borges en un cuento de claro trasfondo matemático que se titula "El Aleph") son universalmente reconocidas entre las más brillantes y bellas de la historia de la matemática.

Cantor demostró que el conjunto de los números pares, el conjunto de los números impares y el de los números primos, no obstante ser subconjuntos de N (los naturales), son también conjuntos infinitos de jerarquía aleph-sub-cero (igual que N). También demostró que los enteros (Z) positivos y negativos, los números racionales (Q) o fracciones, a pesar de contener a N son de infinitud igual en jerarquía que N (es decir tienen cardinalidad aleph-sub-cero). Las demostraciones de Cantor se basan en establecer una correspondencia biunívoca (biyectiva) entre conjunto y conjunto, y si esto es posible son conjuntos coordinables, equivalentes o equipotentes y tienen el mismo aleph.

El menor de los alephs (el primer infinito) es aleph-sub-cero y de los conjuntos infinitos de esa jerarquía se dice que son numerables (o enumerables).

Demostró luego que el conjunto de los números reales (R) o sea la recta real completa, tiene un cardinal infinito superior a aleph-sub-cero (R es "más infinito" que N); para su demostración Cantor se valió del ingenioso recurso de hacer corresponder a cada punto de la recta real unN° natural y mostrar que los elementos de N (1,2,3,4,.....) no alcanzan para enumerar a los reales. Llamó "c" (por "el continuo", término con el que se designaba a la recta real) al cardinal de R, de modo que "c" es mayor que aleph-sub-cero. También demostró que el cardinal de un segmento (a,b) es "c" a pesar de que (a,b) es subconjunto de R.

En este punto es posible que se le ocurra al lector una pregunta: ¿existirá un conjunto infinito cuya cardinalidad sea intermedia entre aleph-sub-cero y "c"?, es decir ¿existirá en un segmento rectilíneo algún conjunto infinito de puntos que no sea equivalente al segmento entero y tampoco sea equivalente al conjunto N?

Tal pregunta ya se le ocurrió a Cantor, que no logró hallar ningún conjunto con tales características. Cantor conjeturó que tal conjunto no existía, a esta conjetura se dio en llamarla HIPÓTESIS DEL CONTINUO dando lugar a una Teoría de Conjuntos Cantoriana (o estándar). David Hilbert en el 2° Congreso Internacional de Matemáticas de París, en 1900, propuso 23 problemas no resueltos y cuyas resoluciones, consideraba Hilbert, serían avances importantes en las distintas ramas de la matemática; colocaba a la H. del Continuo en el 1er lugar de los 23 problemas.

Kurt Gödel en 1938-1940 demostró que no existe peligro en tomar la H. del Continuo como un axioma de la Teoría de Conjuntos sin que aparezca contradicción alguna, no era una demostración de la H. del Continuo, sino tan sólo una demostración de que tal hipótesis no puede ser refutada

Pero en 1963 Paul J. COHEN (estadounidense, 1934-2007), a los 29 años, dio el definitivo carpetazo a la cuestión probando que si se suponía que la H. del Continuo fuese falsa, tampoco se llegaba a ninguna contradicción.

Por lo tanto, no puede probarse que sea válida ni que sea falsa. Uno puede hacer con ella lo que quiera, razonar con ella o sin ella, o incluso contra ella dando lugar a una Teoría de Conjuntos No-Cantoriana (no estándar). Nunca incurrirá en contradicción, aunque, eso sí, edificará matemáticas distintas.

En 1964 Cohen fue galardonado con la Medalla Fields, premio máximo para los matemáticos que suple la no existencia de Premio Nobel para ellos.

¿Qué podrían tener en común Kurt Gödel, M. C. Escher y Johann Sebastian Bach? Vemos la respuesta simbolizada en la fotografía de la página opuesta y en la sobrecubierta del libro. En cada una de ellas se ven dos bloques de madera flotando en el espacio, iluminados de forma que las sombras que proyectan sobre las tres paredes que concurren en un rincón de la sala dibujen las iniciales de los apellidos Gödel, Escher y Bach. Más exactamente, el bloque superior proyecta «GEB», encabezamiento de la primera mitad del libro, y el inferior, «EGB», título de la segunda mitad. Podríamos imaginar que las letras G, E, B son marcas de identificación de tres cabos que se van trenzando al permutar reiteradamente pares de letras. Para completar el ciclo desde GEB hasta GEB (pasando por EGB) se requieren seis pasos.

El Dr. Hofstadter (se doctoró en física por la Universidad de Oregón) llama «tripletas» a estos bloques, condensación de «triple letra». Según él mismo explica, la idea se le ocurrió de repente. Su intención inicial era preparar una monografía sobre el teorema de Gödel, pero sus ideas fueron progresivamente cobrando mayores vuelos, incluyendo a Escher y Bach, hasta que finalmente llegó a la conclusión de que las obras de estos hombres no eran sino «sombras proyectadas en distintas direcciones por cierta esencia sólida y central». Se propuso entonces «reconstruir el objeto central», y con ello vio la luz este libro.