

Parcial III

Juan Esteban Murcia

11 de Abril del 2019

1. Introducción

En el estudio de ecuaciones diferenciales ordinarias, surgen problemas (en este caso problemas de valor inicial) a los cuales no se les puede obtener una solución de manera analítica, por esta razón nacen lo que se conoce como los metodos numéricos, cuyo objetivo es encontrar un valor y_f de la función deseada, $y(x)$ dados las condiciones de la ecuación diferencial, y un punto inicial.

Para la realización de este trabajo se usaran los métodos numéricos para la solución de una ecuación diferencial de primer orden, es decir de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

Específicamente se usarán los métodos de Euler, Euler mejorado y Runge-Kutta.

Todos los códigos empleados para la realización de este informe se encuentran en el repositorio https://github.com/JEMN20001/Dif_Equ

2. Metodos

2.1. Euler

El método de Euler, así llamado en honor al matemático Leonhard Euler (1707-1783) plantea lo siguiente:

Se sabe que

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

Ahora bien, se puede afirmar que

$$\frac{dy}{dx} \approx \frac{y(x+h) - y(x)}{h}$$

para valores de h cercanos a 0, por lo que remplazando en (1), se llega a la conclusión que

$$y(x+h) \approx y(x) + h * f(x, y(x)) \quad (2)$$

por lo que dado un punto inicial (x_0, y_0) y la ecuación $y' = f(x, y)$ podemos calcular un punto $(x_f, y(x_f))$ de manera aproximada, utilizando (2).

2.2. Euler mejorado

El método de Euler mejorado, usa el mismo razonamiento que el método de Euler, modificando (2) de la siguiente manera

$$y(x+h) \approx y(x) + \frac{h}{2}(f(x, y(x)) + f(x+h, y(x) + hf(x, y(x)))) \quad (3)$$

que simplemente es un promedio del método de euler

2.3. Runge-Kutta

Finalmente, el método de Runge-Kutta es un método más sofisticado, el plantea las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x, y(x)) \\ K_2 &= f(x + \frac{h}{2}, y(x) + \frac{hK_1}{2}) \\ K_3 &= f(x + \frac{h}{2}, y(x) + \frac{hK_2}{2}) \\ K_4 &= f(x + h, y(x) + hK_3) \end{aligned}$$

Y concluye que

$$y(x+h) \approx y(x) + \frac{h}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \quad (4)$$

3. Comparación

Para la revisión de estos tres métodos se hizo uso de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = 1 - t + 4y \quad y(0) = 1 \quad (5)$$

, la cual tiene solución analítica

$$y(x) = \frac{4t + 19e^{4t} - 3}{16}$$

Con el uso de MATLAB se realizó una comparación de esta ecuación con distintos valores de t y h , los valores obtenidos se encuentran en la Tabla 1

	Euler	Euler	Euler m	Euler m	R-K	R-K	R-K	Exacto
t	h=0.01	h=0.001	h=0.025	h=0.01	h=0.2	h=0.1	h=0.05	
0	1	1	1	1	1	1	1	1
0.1	1.5953	1.6079	1.6079	1.6089		1.6089	1.6090	1.6090
0.2	2.4645	2.5011	2.5021	2.5048	2.5016	2.505	2.5053	2.5053
0.3	3.7390	3.8207	3.8228	3.8289		3.8294	3.8301	3.8301
0.4	5.6137	5.7755	5.7797	5.7918	5.7776	5.7928	5.7941	5.7942
0.5	8.3767	8.6771	8.6849	8.7075		8.7093	8.7118	8.7120
1	60.0371	64.3826	64.4979	64.8301	64.4416	64.8581	64.8949	64.8978
1.5	426.4082	473.5598	474.8340	479.5159		478.8193	479.2267	479.2592
2	3029.3	3484.2	3496.7	3532.9	3490.6	3535.9	3539.9	3540.2

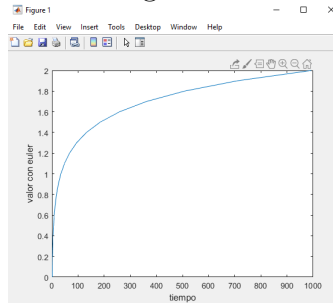
Tabla 1: Comparación de los Métodos

4. Puntos

4.1. Graficar una Solucion

A continuación se presenta una gráfica de la solución de la ecuación (5) en el intervalo $[0,2]$, generado con el método de Euler

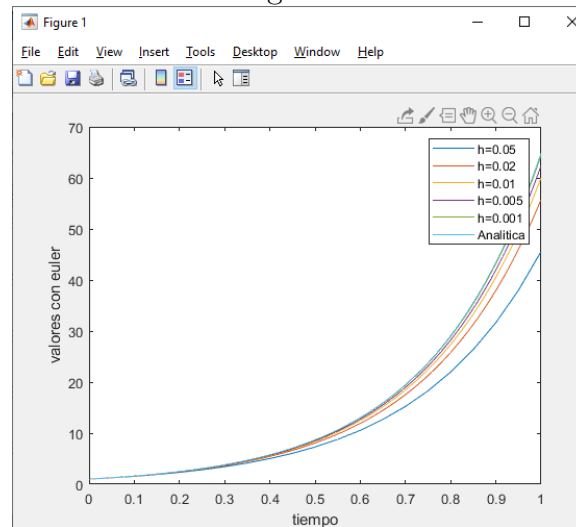
Figura 1:



4.2. Comparar Soluciones

La figura 2 representa las gráficas de la solución de (5) para distintos h , y la gráfica de la solución analítica

Figura 2:



4.3. Calculo de Errores

Teniendo en cuenta que la ecuación cuenta con una solución analítica, podemos calcular el error como $Err(t) = |y(t) - w(t)|$ donde y es la solución analítica, y w es el valor obtenido con el método de euler

t	h=0.1	h=0.05	h = 0.01
0.5	2.3878	1.4218	0.3353
1	30.4863	19.3094	4.8607
1.5	294.3346	197.1873	52.8510
2	2546.3	1794.5	510.8722

Tabla 2: Tabla con los Errores

4.4. Euler

Se tiene la ecuación

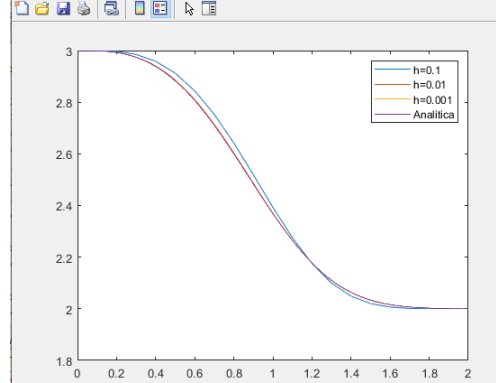
$$\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2 \quad y(0) = 3$$

se quiere comprobar que la solución al sistema es

$$y = 2 + e^{-x^3} \tag{6}$$

Usando MATLAB, se graficaron las soluciones obtenidas con el método de euler para distintos h , y se graficó la función (6).

Figura 3:



además se calcularon varios errores presentes en la Tabla 3

t	h=0.1	h=0.001	h = 0.0001
0.5	0.0299	0.0031	$3,0606 \times 10^{-4}$
1	0.0249	0.0022	$2,2097 \times 10^{-4}$
1.5	0.0140	0.0012	$1,1856 \times 10^{-4}$
2	$3,3593 \times 10^{-4}$	$7,2081 \times 10^{-5}$	$7,6048 \times 10^{-6}$

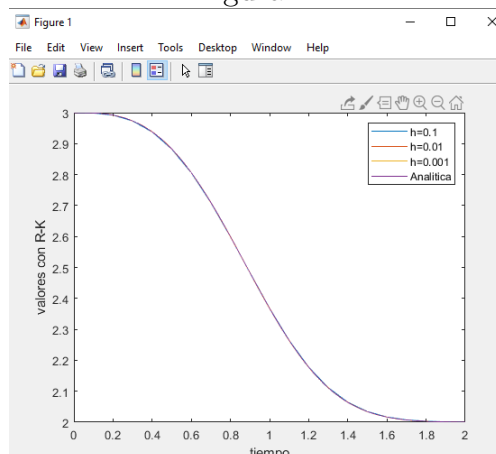
Tabla 3: Tabla con los Errores con Euler

Por lo que podemos concluir que la ecuación(6) es la solución del problema inicial.

4.5. Runge-Kutta

Con la misma ecuación del punto anterior, pero usando el método de Runge-Kutta, se obtuvieron los siguientes resultados

Figura 4:



También se calcularon los errores

t	h=0.1	h=0.001	h = 0.0001
0.5	$1,5800 \times 10^{-7}$	$8,6153 \times 10^{-13}$	$8,8818 \times 10^{-16}$
1	$6,0669 \times 10^{-6}$	$6,7516 \times 10^{-10}$	$6,4837 \times 10^{-14}$
1.5	$8,2371 \times 10^{-5}$	$5,6887 \times 10^{-9}$	$5,4978 \times 10^{-13}$
2	$3,0019 \times 10^{-5}$	$1,3747 \times 10^{-9}$	$1,2790 \times 10^{-13}$

Tabla 4: Tabla con los Errores con R-K

4.6. Ven Der Pol

Dada la ecuación

$$u'' - \mu(1 - u^2)u' + u = 0, \quad u(0) = 1, u'(0) = 0 \quad (7)$$

Se puede hacer un cambio de variables

$$x = u$$

$$y = u'$$

para llegar a un sistema de ecuaciones de primer orden de la forma

$$(x', y') = (y, -x + \mu(1 - x^2)y), \quad (x_0, y_0) = (1, 0)$$

y adaptando el método de Runge-Kutta, podemos calcular el valor aproximado en un momento t .

Tomando $\mu = 0,2$ y con 2 valores distintos para h se obtuvieron las gráficas

Figura 5:

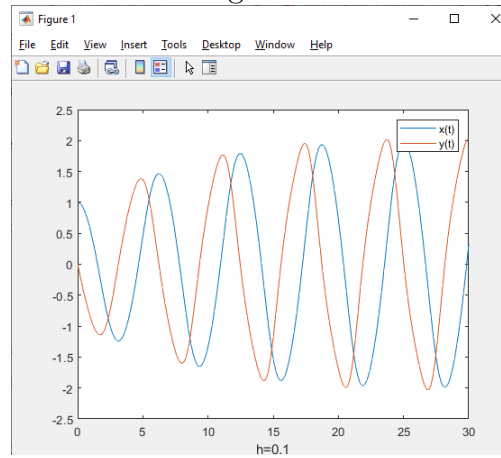
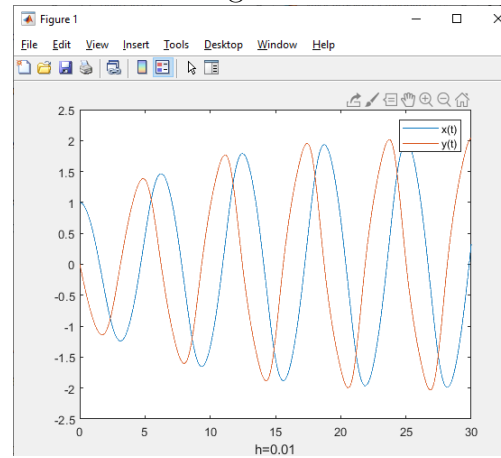
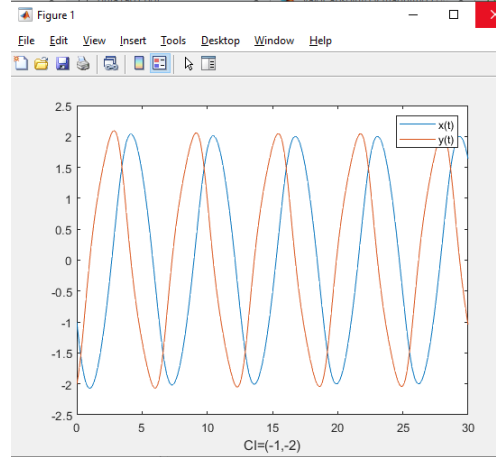


Figura 6:



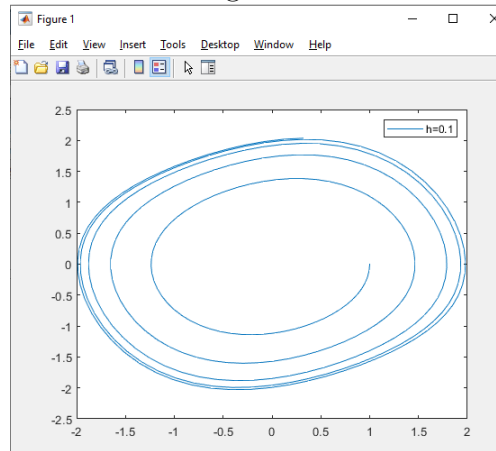
Variando las condiciones iniciales a (a,b) (en este caso $(-1,-2)$) se puede observar que la gráfica de $x(t)$ se desplaza a unidades en la dirección correspondiente, y $y(t)$ se desplaza b unidades en la dirección correspondiente (la cual está dada por el signo de a y de b), esto se puede observar en la figura (7)

Figura 7:



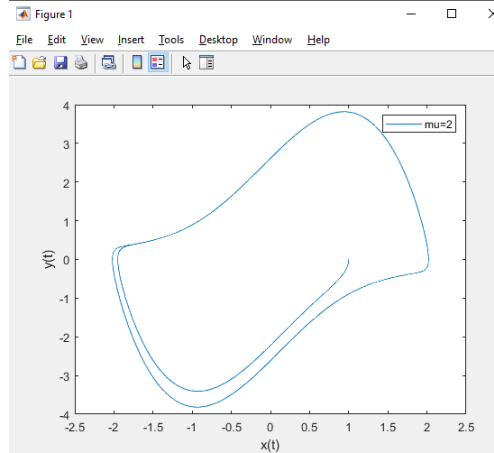
Si se gráfica $y(t)$ con respecto a $x(t)$ se obtiene la gráfica de la figura 8

Figura 8:



Finalmente modificando los valores de μ podemos observar que la gráfica de y con respecto a x se estrecha o se agranda, adicionandole a medida que μ crece se forma una nueva forma alrededor del origen, este es el gráfico para $\mu = 2$

Figura 9:



5. Conclusiones

Con respecto a los 3 metodos presentados en este informe, es evidente que el método de Runge-Kutta es el que más se acerca a la solución real, esto se puede observar en las distintas tablas de errores presentadas en este informe.

Con respecto al problema de Van Der Pol hay mucho que analizar, por ejemplo la importancia del parametro μ el cual determina el ciclo que va a seguir la gráfica $y(t)$ con respecto a $x(t)$. El valor inicial, el cual determina el punto en el que se inicia el ciclo, y esto es importante para poder modelar bien el sistema que se va a estudiar.

Esto nos permite concluir que el uso de ecuaciones diferenciales ordinarias nos ayuda a modelar y/o estudiarsistemas complejos, de una manera relativamente sencilla, lo que es esencial en el área de las matemáticas aplicadas