

Procesamiento Digital de Imágenes

Transformaciones de Intensidad y Filtrado Espacial

Proc. Digital de Imágenes

1

Transformaciones de Intensidad

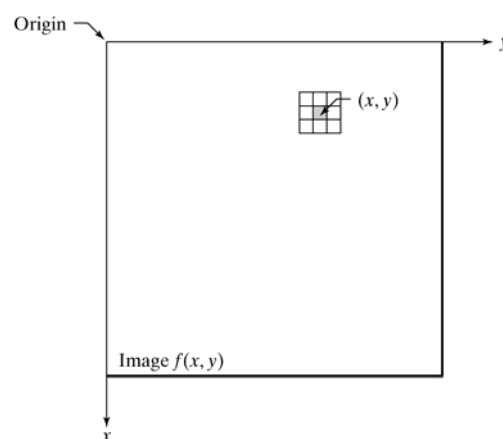


FIGURE 3.1 A neighborhood of size 3×3 about a point (x, y) in an image.

$f(x, y)$ pixel en imagen original

$$g(x, y) = T[f(x, y)]$$

T operador en f definido en un entorno de (x, y)

Proc. Digital de Imágenes

2

Transformaciones de Intensidad

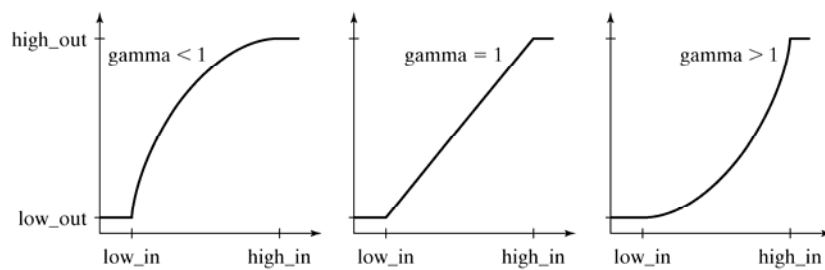


FIGURE 3.2 The various mappings available in function `imadjust`.

Función Matlab: `imadjust`

```
g=imadjust(f, [low_in high_in],[low_out high_out], gamma)
```

$\gamma < 1$ más brillante

$\gamma = 1$ lineal

$\gamma > 1$ más oscura

Transformaciones de Intensidad

Tres diferentes transformaciones de intensidad para resaltar la región de interés (ROI), usando `imadjust`.

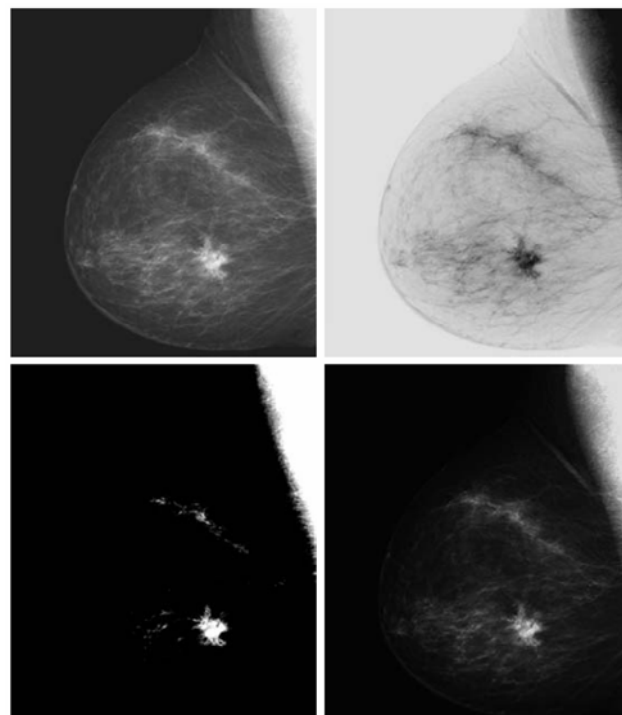


FIGURE 3.3 (a) Original digital mammogram. (b) Negative image. (c) Result of expanding the intensity range $[0.5, 0.75]$. (d) Result of enhancing the image with $\gamma = 2$. (Original image courtesy of G. E. Medical Systems.)

Transformaciones de Intensidad

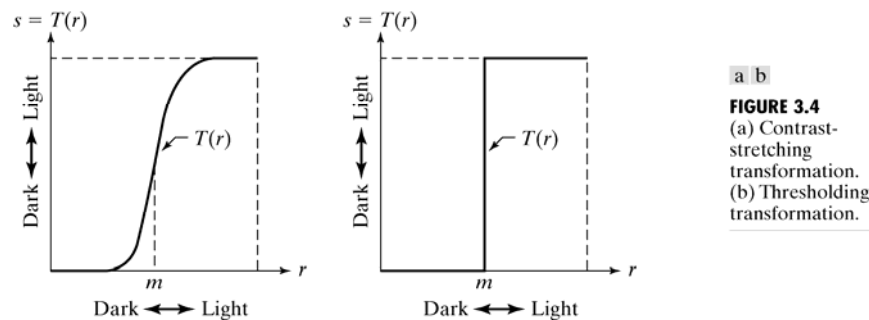


FIGURE 3.4
(a) Contrast-stretching transformation.
(b) Thresholding transformation.

Transformación Logarítmica (**compresión del rango dinámico**)

$$g = c * \log(1 + \text{double}(f)) \quad , \quad c \text{ constante}$$

Transformación de estrechado de contraste

$$s = T(r) = \frac{1}{1 + (m/r)^E}$$

$$g = 1. / (1 + (m. / (\text{double}(f) + \text{eps})) . ^E)$$

Proc. Digital de Imágenes

5

Transformaciones de Intensidad

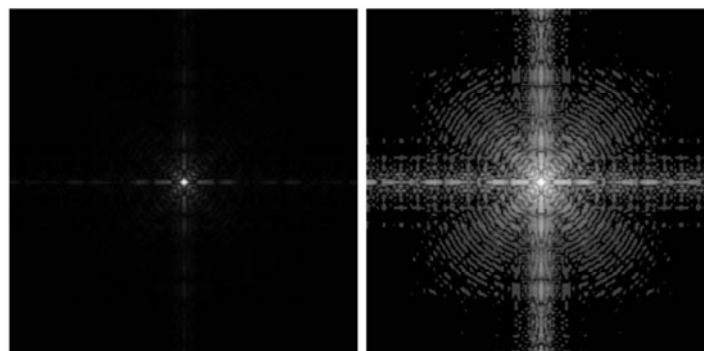


FIGURE 3.5 (a) A Fourier spectrum.
(b) Result obtained by performing a log transformation.

Los valores de la Transformada de Fourier suelen tener un gran rango dinámico $[0 \ 10^6]$ por lo que si se grafican en escala lineal se pierden los detalles visuales de los valores pequeños del espectro (Fig. 3.5(a)). Si se aplica la transformación \log , un rango dinámico del orden de 10^6 se reduce a aproximadamente 14, que es más manejable (Fig. 3.5(b)).

Proc. Digital de Imágenes

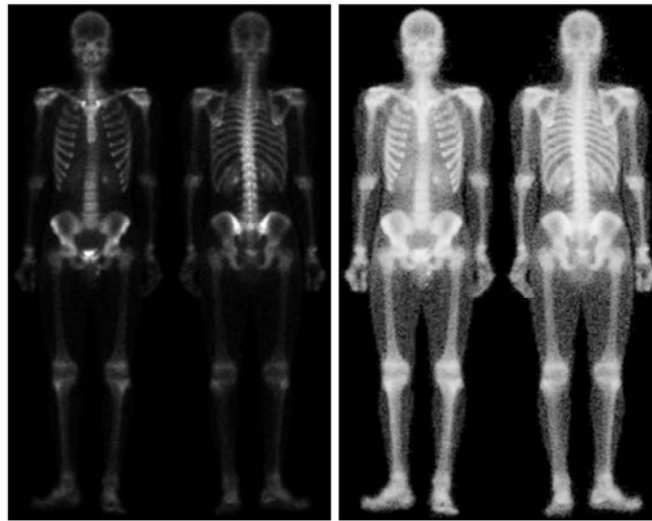
6

Transformaciones de Intensidad

Se mejora la imagen haciendo estrechado de contraste con

$$m = \text{mean2}(f)$$

$$E = 0.9$$



a b
FIGURE 3.6 (a) Bone scan image. (b) Image enhanced using a contrast-stretching transformation. (Original image courtesy of G. E. Medical Systems.)

$$g = 1 ./ (1 + (m ./ (\text{double}(f) + \text{eps})) .^E)$$

Transformaciones de Intensidad Histograma de una imagen

Histograma de una imagen

$$h(r_k) = n_k \quad k = 1, 2, \dots, L$$

donde r_k es el k -ésimo nivel de intensidad en el intervalo $[0, G]$ y n_k es el número de píxeles de la imagen cuyo nivel de intensidad es r_k

Histograma normalizado

$$p(r_k) = \frac{h(r_k)}{n} = \frac{n_k}{n}$$

n : número total de píxeles de la imagen

Transformaciones de Intensidad

Histograma de una imagen

Vemos que $p(r_k)$ es una estima de la probabilidad de ocurrencia del nivel de intensidad r_k .

Función Matlab: `imhist`

```
>> h = imhist(f, b);
```

`f`: imagen de entrada

`b`: nro. de bins usado para formar el histograma, por defecto es `b = 256`.

```
>> p = imhist(f,b)/numel(f);
```

Histograma
normalizado

Transformaciones de Intensidad

Histograma de una imagen

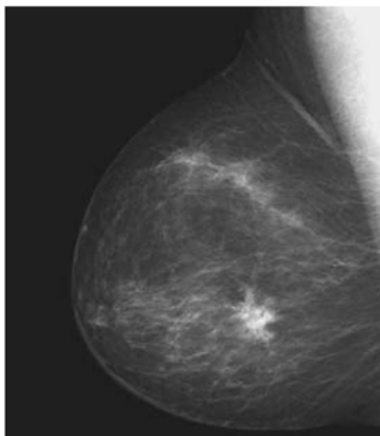
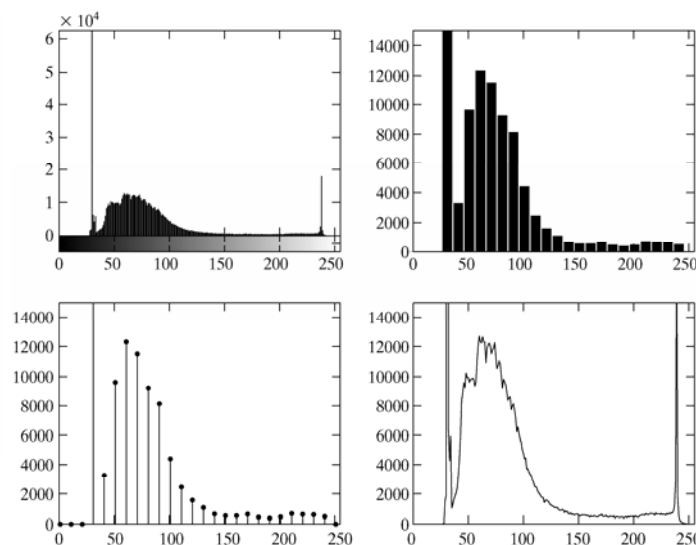


Imagen de
mamografía de
Fig. 3.3(a)



a b
c d

FIGURE 3.7
Various ways to
plot an image
histogram.
(a) `imhist`,
(b) `bar`,
(c) `stem`,
(d) `plot`.

Transformaciones de Intensidad

Atributos de plot, stem

Symbol	Color	Symbol	Line Style	Symbol	Marker
k	Black	—	Solid	+	Plus sign
w	White	--	Dashed	o	Circle
r	Red	:	Dotted	*	Asterisk
g	Green	—.	Dash-dot	.	Point
b	Blue	none	No line	x	Cross
c	Cyan			s	Square
y	Yellow			d	Diamond
m	Magenta			none	No marker

TABLE 3.1

Attributes for functions stem and plot. The none attribute is applicable only to function plot, and must be specified individually. See the syntax for function plot below.

Transformaciones de Intensidad

Ecuación de histograma

Ecuación de histograma

Asuma que los niveles de intensidad de una imagen son continuos y que están normalizados en el rango $[0, 1]$, y denotemos con $p_r(r)$ a la función de densidad de probabilidad (PDF) de los niveles de intensidad de una imagen. Llevemos a cabo la siguiente transformación

$$s = T(r) = \int_0^r p_r(w)dw$$

Puede probarse que la función de densidad de probabilidad de los niveles de intensidad de la imagen de salida es **uniforme**, es decir

Transformaciones de Intensidad

Ecualización de histograma

$$p_s(s) = \begin{cases} 1 & 0 \leq s \leq 1 \\ 0 & \text{c.o.c.} \end{cases}$$

Es decir, la transformación genera una imagen cuyos niveles de intensidad son igualmente probables, y cubren el rango completo [0 1]. El resultado es una imagen con mayor contraste. Note que $p_s(s)$ no es más que la función de distribución acumulada (CDF).

Para el caso de cantidades discretas, la transformación de ecualización resulta:

Transformaciones de Intensidad

Ecualización de histograma

$$s_k = T(r_k) = \sum_{j=1}^k p_r(r_j) = \sum_{j=1}^k \frac{n_j}{n}$$

donde s_k es el valor de intensidad de la imagen transformada correspondiente al valor r_k en la imagen de entrada.

Función Matlab: `histeq`

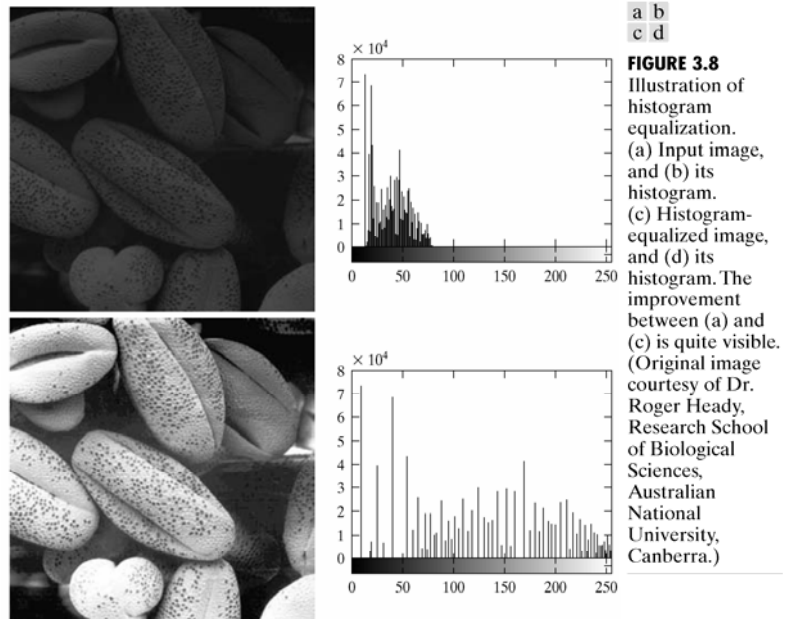
```
>> g = histeq(f,nlev);
```

`f`: imagen de entrada
`g`: imagen de salida
`nlev`: nro. de niveles de intensidad de la imagen de salida (default `nlev=64`)

Transformaciones de Intensidad

Ecuación de histograma

```
>>imshow(f)
>>figure, imhist(f)
>>ylim('auto')
>>g=histeq(f,256);
>>figure, imshow(g)
>>figure, imhist(g)
>>ylim('auto')
```



Transformaciones de Intensidad

Ecuación de histograma

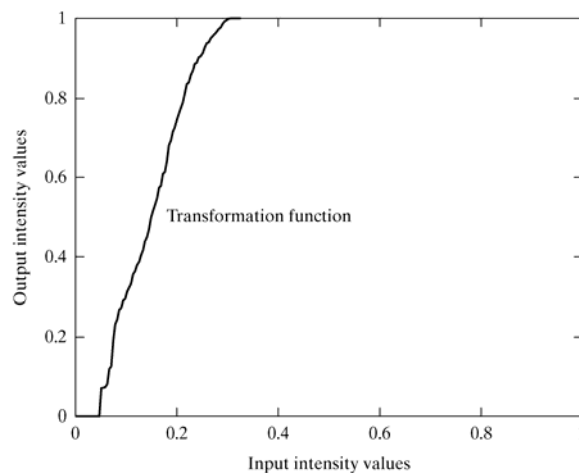


FIGURE 3.9
Transformation function used to map the intensity values from the input image in Fig. 3.8(a) to the values of the output image in Fig. 3.8(c).

```
>>hnorm=imhist(f)./numel(f);
>>cdf=cumsum(hnorm);
>>x=linspace(0,1,256);
>>plot(x,cdf)
```


Transformaciones de Intensidad Ajuste (Especificación) de histograma

Sabemos que la transformación

$$s = T(r) = \int_0^r p_r(w)dw$$

resulta en niveles de intensidad, s , que tienen una función de densidad de probabilidad $p_s(s)$ uniforme. Lo que queremos es generar una imagen procesada, con niveles de intensidad z , que tenga un histograma especificado. Sea $p_z(z)$ la función de densidad de probabilidad deseada, entonces el objetivo es hallar la transformación $H(z)$ tal que

$$s = H(z) = \int_0^z p_z(w)dw$$

Transformaciones de Intensidad Ajuste (Especificación) de histograma

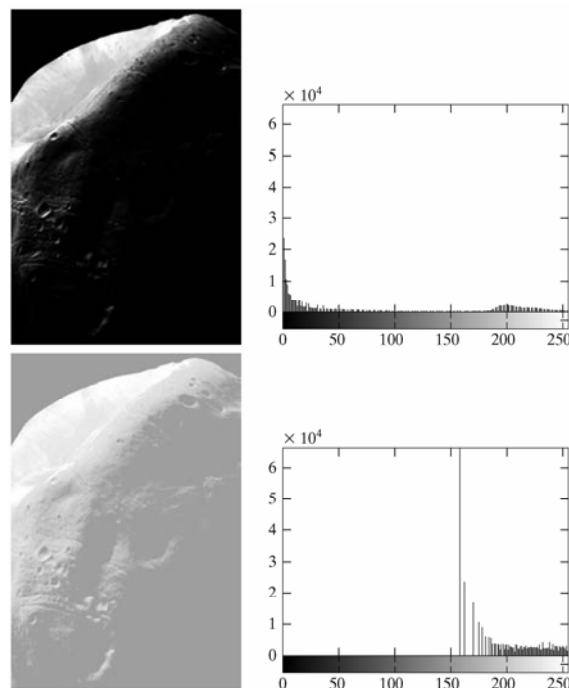
De la ecuación anterior vemos que

$$z = H^{-1}(s) = H^{-1}(T(r))$$

Podemos hallar $T(r)$ con el método de ecualización de histograma visto anteriormente, por lo que podremos hallar los niveles de intensidad transformados z , cuya PDF es la especificada $p_z(z)$, siempre que podamos encontrar H^{-1} . Para el caso discreto H^{-1} existe siempre que $p_z(z)$ sea un histograma válido (área unitaria y todos sus valores no negativos).

`g = histeq(f,hspec)` `hspec`: vector fila con los valores de histograma deseado

Transformaciones de Intensidad Ajuste (Especificación) de histograma

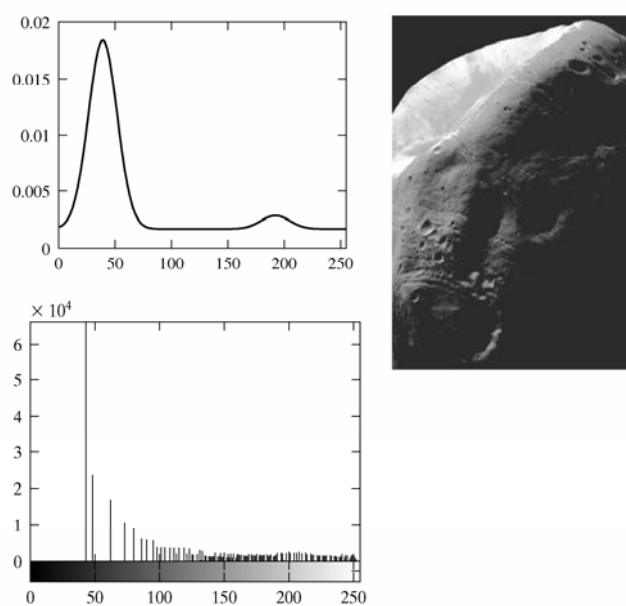


a b
c d

FIGURE 3.10

(a) Image of the Mars moon Phobos.
(b) Histogram.
(c) Histogram-equalized image.
(d) Histogram of (c).
(Original image courtesy of NASA).

Transformaciones de Intensidad Especificación de histograma



a b
c

FIGURE 3.11

(a) Specified histogram.
(b) Result of enhancement by histogram matching.
(c) Histogram of (b).

Filtrado Espacial

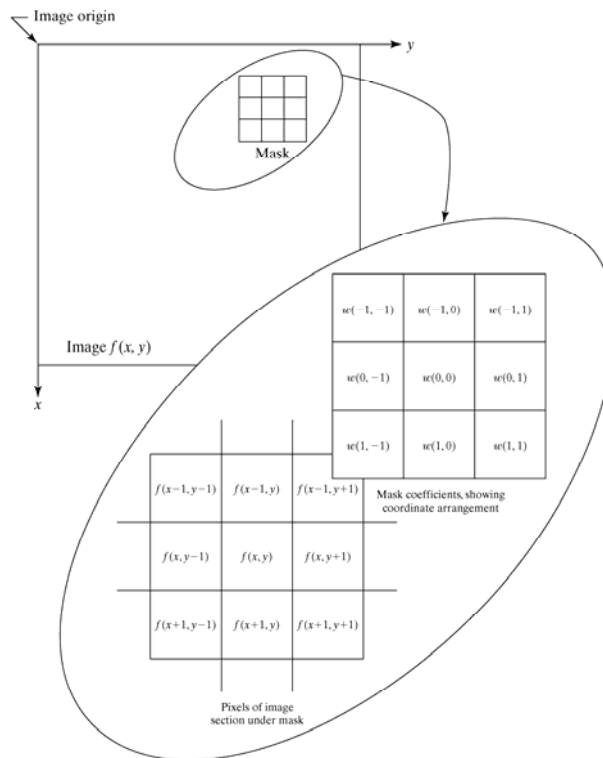


FIGURE 3.12 The mechanics of linear spatial filtering. The magnified drawing shows a 3×3 mask and the corresponding image neighborhood directly under it. The neighborhood is shown displaced out from under the mask for ease of readability.

Filtrado Espacial Lineal

Para el caso de **filtrado espacial lineal** con una máscara de 3×3 , el nivel de gris de cada pixel de la imagen filtrada, $g(x,y)$, se computa como:

$$g(x, y) = f(x, y)w(0,0) + f(x-1, y-1)w(-1,-1) + f(x-1, y)w(-1,0) + f(x-1, y+1)w(-1,1) + f(x, y-1)w(0,-1) + f(x, y+1)w(0,1) + f(x+1, y-1)w(1,-1) + f(x+1, y)w(1,0) + f(x+1, y+1)w(1,1)$$

La máscara se desplaza a lo largo de la imagen, esto equivale a hacer la convolución entre la máscara y la imagen.

Filtrado Espacial Lineal

Función Matlab: `imfilter`

`g=imfilter(f,w,filtering_mode, boundary_opts, size_opts)`

`f`: imagen original

`w`: máscara del filtro

`filtering_mode`: especifica si el filtrado se realiza por correlación ('corr') o por convolución ('conv')

`boundary_options`: se refiere a como se completan los bordes (**padding**)

`size_options`: puede ser 'full' en donde la imagen filtrada es del mismo tamaño que la imagen extendida (padding), o 'same' en donde la imagen filtrada es del mismo tamaño que la imagen original.

Filtrado Espacial Lineal

Correlación y Convolución en 1D

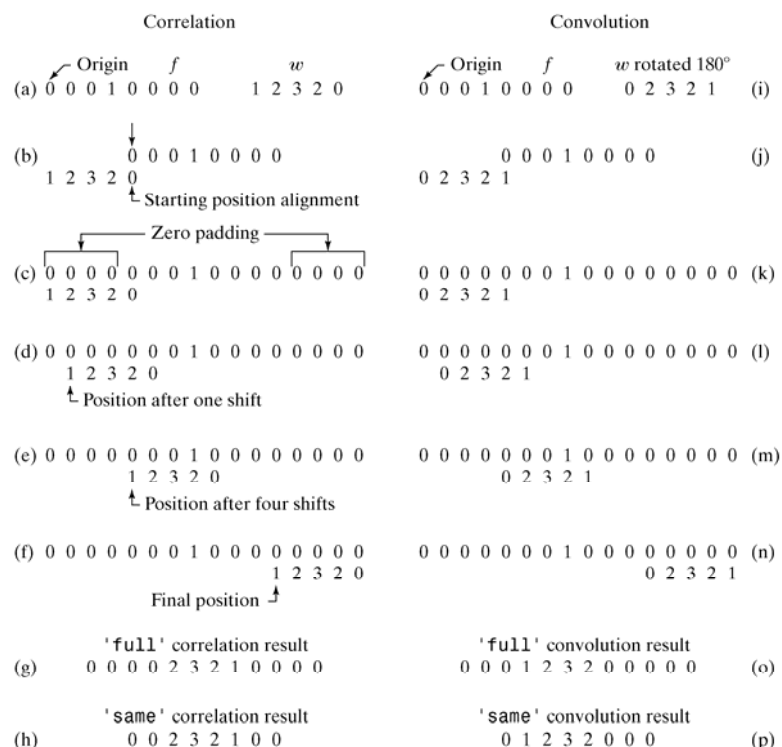


FIGURE 3.13 Illustration of one-dimensional correlation and convolution.

Filtrado Espacial Lineal

Correlación y Convolución en 2D

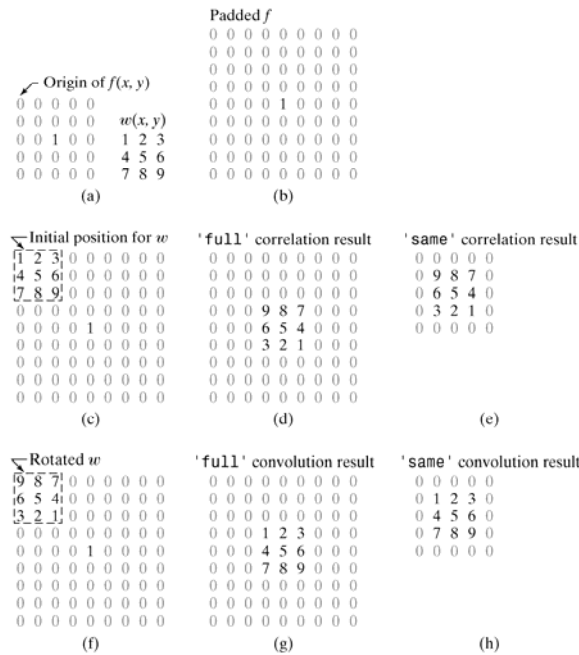


FIGURE 3.14
Illustration of
two-dimensional
correlation and
convolution. The
0s are shown in
gray to simplify
viewing.

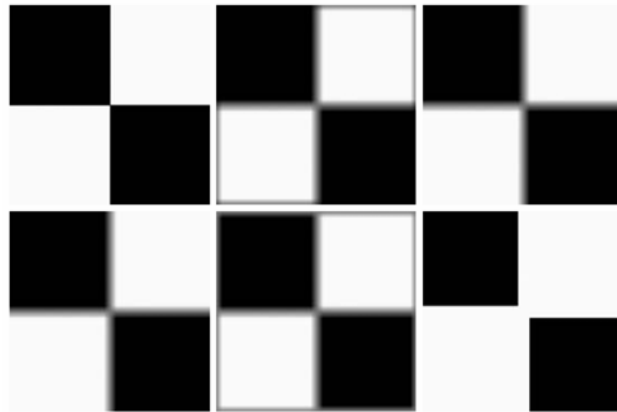
Filtrado Espacial Lineal

Options	Description
Filtering Mode	
'corr'	Filtering is done using correlation (see Figs. 3.13 and 3.14). This is the default.
'conv'	Filtering is done using convolution (see Figs. 3.13 and 3.14).
Boundary Options	
P	The boundaries of the input image are extended by padding with a value, P (written without quotes). This is the default, with value 0.
'replicate'	The size of the image is extended by replicating the values in its outer border.
'symmetric'	The size of the image is extended by mirror-reflecting it across its border.
'circular'	The size of the image is extended by treating the image as one period a 2-D periodic function.
Size Options	
'full'	The output is of the same size as the extended (padded) image (see Figs. 3.13 and 3.14).
'same'	The output is of the same size as the input. This is achieved by limiting the excursions of the center of the filter mask to points contained in the original image (see Figs. 3.13 and 3.14). This is the default.

TABLE 3.2
Options for
function
imfilter.

Filtrado Espacial Lineal

f: 512x512 double



a b c
d e f

FIGURE 3.15

(a) Original image. (b) Result of using `imfilter` with default zero padding. (c) Result with the 'replicate' option. (d) Result with the 'symmetric' option. (e) Result with the 'circular' option. (f) Result of converting the original image to class `uint8` and then filtering with the 'replicate' option. A filter of size 31×31 with all 1s was used throughout.

```
>>w=ones(31);
>>gd=imfilter(f,w);
>>imshow(gd,[])
```

Como el filtro es simétrico, para realizar la convolución se puede usar la opción por defecto de correlación de `imfilter`

Filtrado Espacial Lineal

Options	Description
Method	
'symmetric'	The size of the image is extended by mirror-reflecting it across its border.
'replicate'	The size of the image is extended by replicating the values in its outer border.
'circular'	The size of the image is extended by treating the image as one period of a 2-D periodic function.
Direction	
'pre'	Pad before the first element of each dimension.
'post'	Pad after the last element of each dimension.
'both'	Pad before the first element and after the last element of each dimension. This is the default.

TABLE 3.3
Options for
function
`padarray`.

Filtrado Espacial Lineal

Type	Syntax and Parameters
'average'	<code>fspecial('average', [r c])</code> . A rectangular averaging filter of size $r \times c$. The default is 3×3 . A single number instead of $[r c]$ specifies a square filter.
'disk'	<code>fspecial('disk', r)</code> . A circular averaging filter (within a square of size $2r + 1$) with radius r . The default radius is 5.
'gaussian'	<code>fspecial('gaussian', [r c], sig)</code> . A Gaussian lowpass filter of size $r \times c$ and standard deviation sig (positive). The defaults are 3×3 and 0.5. A single number instead of $[r c]$ specifies a square filter.
'laplacian'	<code>fspecial('laplacian', alpha)</code> . A 3×3 Laplacian filter whose shape is specified by $alpha$, a number in the range $[0, 1]$. The default value for $alpha$ is 0.5.
'log'	<code>fspecial('log', [r c], sig)</code> . Laplacian of a Gaussian (LoG) filter of size $r \times c$ and standard deviation sig (positive). The defaults are 5×5 and 0.5. A single number instead of $[r c]$ specifies a square filter.
'motion'	<code>fspecial('motion', len, theta)</code> . Outputs a filter that, when convolved with an image, approximates linear motion (of a camera with respect to the image) of len pixels. The direction of motion is $theta$, measured in degrees, counterclockwise from the horizontal. The defaults are 9 and 0, which represents a motion of 9 pixels in the horizontal direction.
'prewitt'	<code>fspecial('prewitt')</code> . Outputs a 3×3 Prewitt mask, wv , that approximates a vertical gradient. A mask for the horizontal gradient is obtained by transposing the result: $wh = wv'$.
'sobel'	<code>fspecial('sobel')</code> . Outputs a 3×3 Sobel mask, sv , that approximates a vertical gradient. A mask for the horizontal gradient is obtained by transposing the result: $sh = sv'$.
'unsharp'	<code>fspecial('unsharp', alpha)</code> . Outputs a 3×3 unsharp filter. Parameter $alpha$ controls the shape; it must be greater than 0 and less than or equal to 1.0; the default is 0.2.

TABLE 3.4
Spatial filters supported by function `fspecial`.

Filtrado Espacial Lineal

Filtro Pasabajos: los coeficientes de la máscara (filtro) deben ser todos positivos. El caso más simple es con todos los coeficientes iguales a 1. Para evitar que los valores de nivel de gris se vayan fuera del rango, se divide por la suma de los coeficientes del filtro.

$$\frac{1}{9} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Filtro de Promediación

Filtrado Espacial Lineal

El efecto del filtro es agregar borrosidad y la pérdida de detalles de la imagen. Usualmente se utiliza en una etapa de pre-procesamiento para eliminar pequeños detalles previo a la segmentación de objetos (más grandes) en la imagen.

Filtrado Espacial Lineal

Filtro Pasa altos: los coeficientes del filtro deben ser positivos cerca del centro y negativos en la periferia. Por ejemplo para una máscara de 3 x 3, un filtro pasa altos típico es el de más abajo. Notar que la suma de los coeficientes es nula, de manera que cuando se encuentra sobre una zona de nivel de gris constante, la salida de la máscara es nula, o muy pequeña.

$$\frac{1}{9} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & 8 & -1 \\ \hline -1 & -1 & -1 \\ \hline \end{array}$$

Filtrado Espacial Lineal

Notar que el filtro **pasa altos** elimina los componentes de frecuencia cero, por lo que el valor medio de niveles de gris de la imagen se reduce a cero, reduciendo de esta forma el contraste global de la imagen, pero resaltando los bordes.

Filtro High Boost: Una imagen filtrada pasa alto puede ser calculada como la diferencia entre la imagen original y una versión que ha pasado por un filtro pasabajo, es decir:

$$\text{Pasa Alto} = \text{Original} - \text{Pasa Bajo}$$

Si ahora multiplicamos a la imagen original por un factor de amplificación A, se obtiene un **filtro high boost**, o de énfasis de las altas frecuencias, *i.e.*

Filtrado Espacial Lineal

$$\text{High Boost} = A \times \text{Original} - \text{Pasa Bajo}$$

$$= (A - 1) \times \text{Original} + \text{Original} - \text{Pasa Bajo}$$

$$= (A - 1) \times \text{Original} + \text{Pasa Alto}$$

Un valor $A = 1$, da el filtro pasa alto normal. Cuando $A > 1$, parte de la imagen original se añade al resultado del filtro pasa alto, lo que devuelve parcialmente las bajas frecuencias. El resultado es que la imagen high boost se parece más a la original con un grado de mejora de los bordes, que depende del valor de A.

Filtrado Espacial Lineal

Una máscara 3 x 3 para filtrado high boost, se muestra a continuación:

$$\frac{1}{9} \times \begin{array}{|c|c|c|} \hline -1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & w & -1 \\ \hline -1 & -1 & -1 \\ \hline \end{array}$$

donde $w = 9A - 1$, con $A \geq 1$

Filtrado Espacial Lineal

Filtros derivadores: destacan los bordes, donde el gradiente de intensidad es grande. El método más común de calcular la derivada es a través del gradiente. La magnitud del **gradiente** de una función $f(x,y)$ viene dada por

$$\nabla f = \left[\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \right]^{1/2}$$

El gradiente en el pixel $z_5 = f(x, y)$ puede aproximarse por

$$\nabla f = \left| (z_7 + z_8 + z_9) - (z_1 + z_2 + z_3) \right| + \\ + \left| (z_3 + z_6 + z_9) - (z_1 + z_4 + z_7) \right|$$

**Aproximación
de Prewitt**

Filtrado Espacial Lineal

z_1	z_2	z_3
z_4	z_5	z_6
z_7	z_8	z_9

Región de la imagen

$$z_5 = f(x, y)$$

-1	-1	-1
0	0	0
1	1	1

-1	0	1
-1	0	1
-1	0	1

Operadores de Prewitt

Filtrado Espacial Lineal

z_1	z_2	z_3
z_4	z_5	z_6
z_7	z_8	z_9

Región de la imagen

$$z_5 = f(x, y)$$

-1	-2	-1
0	0	0
1	2	1

-1	0	1
-2	0	2
-1	0	1

Operadores de Sobel

Filtrado Espacial Lineal

Filtro Laplaciano: Otra forma de enfatizar los bordes de una imagen en usando un filtro Laplaciano. El **Laplaciano** de una imagen $f(x,y)$ se define como:

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Las derivadas segundas pueden aproximarse digitalmente por:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \approx f(x+1, y) + f(x-1, y) - 2f(x, y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \approx f(x, y+1) + f(x, y-1) - 2f(x, y)$$

Proc. Digital de Imágenes

39

Filtrado Espacial Lineal

La correspondiente aproximación digital del Laplaciano resulta entonces

$$\nabla^2 f(x, y) \approx f(x+1, y) + f(x-1, y) + f(x, y+1) + f(x, y-1) - 4f(x, y)$$

que corresponde a la máscara espacial

0	1	0
1	-4	1
0	1	0

Máscara de filtro
Laplaciano

Proc. Digital de Imágenes

40

Filtrado Espacial Lineal

Una aproximación digital alternativa del Laplaciano, que tiene en cuenta los elementos diagonales, puede implementarse con la siguiente máscara

1	1	1
1	-8	1
1	1	1

Máscara alternativa
del filtro Laplaciano

Filtrado Espacial Lineal

El mejoramiento de una imagen usando el Laplaciano se basa en la siguiente ecuación

$$g(x, y) = f(x, y) + c \nabla^2 f(x, y)$$

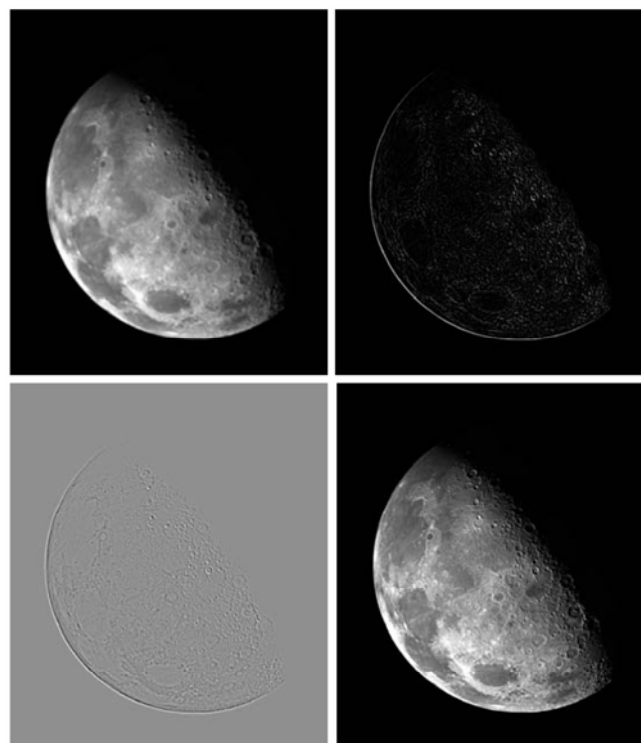
donde $f(x, y)$ es la imagen original, $g(x, y)$ es la imagen mejorada, y c es 1 si el coeficiente central de la máscara es positivo, o -1 si es negativo. Como el Laplaciano es un operador derivada, enfatiza los bordes pero lleva las áreas de intensidad constante a cero. Al sumar la imagen original se restablecen los niveles de gris de la imagen (ver filtros high boost).

Filtrado Espacial Lineal

La función `fspecial('laplacian',alpha)` implementa una versión más general de la máscara Laplaciana, que permite un control fino de los resultados de mejora en la imagen.

$\frac{\alpha}{1+\alpha}$	$\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$	$\frac{\alpha}{1+\alpha}$
$\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$	$\frac{-4}{1+\alpha}$	$\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$
$\frac{\alpha}{1+\alpha}$	$\frac{1-\alpha}{1+\alpha}$	$\frac{\alpha}{1+\alpha}$

Filtrado Espacial Lineal



a b
c d

FIGURE 3.16

(a) Image of the North Pole of the moon.
(b) Laplacian filtered image, using `uint8` formats.
(c) Laplacian filtered image obtained using `double` formats.
(d) Enhanced result, obtained by subtracting (c) from (a). (Original image courtesy of NASA.)

Filtrado Espacial Lineal



a
b c

FIGURE 3.17 (a) Image of the North Pole of the moon. (b) Image enhanced using the Laplacian filter 'laplacian', which has a -4 in the center. (c) Image enhanced using a Laplacian filter with a -8 in the center.

Filtrado Espacial No Lineal

Los filtros no lineales también operan en entornos de un pixel, pero, en general su operación está basada directamente en los valores de intensidad de los pixeles del entorno. No se asignan coeficientes a una máscara y se realiza la convolución con la imagen.

Filtro de mediana: el nivel de gris de cada pixel es reemplazado por la mediana de los niveles de gris del entorno del pixel, en vez de por el promedio. Este filtrado es efectivo cuando el patrón de ruido es de tipo impulsivo y se quieren preservar los bordes. Es un **filtro no lineal**.

Filtrado Espacial No Lineal

Función Matlab: `medfilt2`

```
g = medfilt2(f,[m n],padopt)
```

[m n] define el entorno de dimensiones m x n sobre el que calcula la mediana, y `padopt` especifica una de las tres posibles opciones de padding de los bordes: 'zeros', opción por defecto, 'symmetric', y 'indexed'.

```
>>fn=imnoise(f,'salt&pepper',0.2);  
>>gm=medfilt2(fn);  
>>gms=medfilt2(fn,'symmetric');
```

Filtrado Espacial No Lineal

