Cuantización

Fernando Martínez
fernando.martinez@upc.edu

Departament de Matemàtica • Universitat Politècnica de Catalunya

21 de abril de 2020

Cuantización

Ejemplo

Imagen de grises 8 bits [0,256), codificamos con 2 bits:

$$\underset{00}{[0 \;\; 32 \;\; 64)}\underset{01}{[64 \;\; 96 \;\; 128)}\underset{10}{[128 \;\; 160 \;\; 192)}\underset{11}{[192 \;\; 224 \;\; 256)}$$

Original

Uniforme: 2 bits por píxel

Cuantización escalar

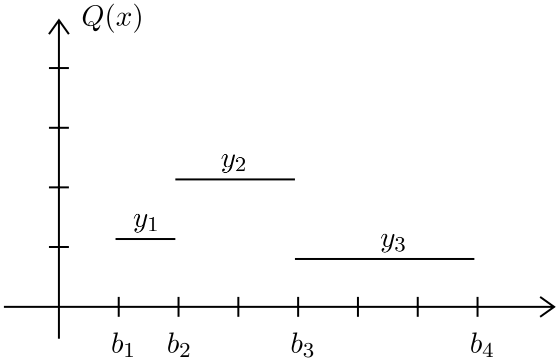

Figura: Función de cuantización $Q(x)$.

$\{b_i\}_{i=0,\ldots,M}$ *límites de decisión*, $\{y_i\}_{i=1,\ldots,M}$ *niveles de reconstrucción*,

$$Q(x) = y_i \text{ si } b_{i-1} \leq x < b_i$$

Cuantización escalar: Problema general (I)

Problema: Modelizamos nuestras entradas con una variable aleatoria X con densidad de probabilidad $f(x)$.
Deseamos cuantizar una fuente dando los *límites de decisión* $\{b_i\}_{i=0,...,M}$ y los *niveles de reconstrucción* $\{y_i\}_{i=1,...,M}$ que determinan la función de cuantización $Q(x) = y_i$ si $b_{i-1} \leq x < b_i$.
Definimos[1]:

$$\sigma^2 \equiv \int_{-\infty}^{\infty} [x - Q(x)]^2 f(x)dx = \sum_{i=1}^{M} \int_{b_{i-1}}^{b_i} [x - Q(x)]^2 f(x)dx \qquad (1)$$

$\mathcal{C}$ código con M palabra de longitudes $\{l_1, ..., l_M\}$. Si $\tilde{l} = \sum_{i=1}^{M} l_i p(y_i)$, $p(y_i) = \int_{b_{i-1}}^{b_i} f(x)dx$, entonces

$$\tilde{l} = \sum_{i=1}^{M} \int_{b_{i-1}}^{b_i} l_i f(x)dx \qquad (2)$$

[1] Hay otras *distancias* o *errores*, σ, que usan $|x - Q(x)|$, $\sup |x - Q(x)|$...

Cuantización escalar: Problema general (II)

Problema A Dado $\epsilon > 0$, una cota al *error*, hallar los límites de decisión $\{b_i\}$, los niveles de reconstrucción $\{y_i\}$ y las longitudes de las palabras del código $\{l_i\}$ que minimizan (2) y satisfacen $\sigma < \epsilon$

Problema B Dado $\epsilon > 0$, una cota a la longitud media, hallar los límites de decisión $\{b_i\}$, los niveles de reconstrucción $\{y_i\}$ y las longitudes de las palabras del código $\{l_i\}$ que minimizan (1) y satisfacen $\tilde{l} < \epsilon$.

Cuantización escalar uniforme

Todos los intervalos son de la misma longitud, salvo tal vez los extremos:

$$x \in [-X_{\max}, X_{\max}], \quad b_i - b_{i-1} = \Delta, \quad \Delta = \frac{2\,X_{\max}}{M}$$

Distribución uniforme $f(x) = \frac{1}{2\,X_{\max}}$
Minimizar σ: $y_i = \frac{b_i + b_{i-1}}{2}$, $y_i - y_{i-1} = \Delta$ niveles de reconstrucción equiespaciados.
Al ser una distribución uniforme podemos utilizar un código de bloque de palabras de longitud n si $M = 2^n$:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^{M} \int_{(i-1)\Delta}^{i\Delta} \left[x - \frac{2\,i-1}{2}\Delta\right]^2 \frac{1}{2\,X_{\max}} dx = \frac{\Delta^2}{12} = \frac{1}{3}\frac{X_{\max}^2}{M^2}.$$

Duplicar el número de intervalos disminuye el error a la mitad. En códigos de bloques, aumentar en 1 bit el tamaño de las palabras reduce el error a la mitad.

Cuantización escalar uniforme adaptativa

Aunque $\Delta = b_i - b_{i-1}$ es constante, puede variar con el *tiempo* dependiendo de los valores que va tomando la variable aleatoria.

FAQ Forward Adaptative Quantization: Se leen bloques de N datos y se realiza la cuantización en base a ellos.

BAQ Backward Adaptative Quantization: Se actualiza Δ a medida que se van leyendo los datos.

Ejemplo

FAQ: De una imagen se leen bloques de 8×8 píxeles, se calcula su máximo y su mínimo y se cuantiza en dicho rango $[\text{mín}, \text{máx}]$ (se han de guardar dichos valores al codificar).

Ejemplo

BAQ. Jayant Quantizer: se varía Δ según si los datos van cayendo en los niveles *internos* o *externos*; si es en los *internos* se disminuye Δ, si es en los *externos* se aumenta Δ.

Cuantización escalar no uniforme (I)

Volvamos al caso general consideremos los problemas:

(A) Fijamos $\{b_i\}$, minimizar σ^2 respecto $\{y_i\}$. Se ha de cumplir:

$$y_i = \frac{\int_{b_{i-1}}^{b_i} x\, f(x)\, dx}{\int_{b_{i-1}}^{b_i} f(x)\, dx}$$

y_i *centro de masas* del intervalo.

(B) Fijamos $\{y_i\}$, minimizar σ^2 respecto $\{b_i\}$. Se ha de cumplir:

$$b_i = \frac{y_i + y_{i+1}}{2}$$

Los límites de decisión son el punto medio de los niveles de reconstrucción.

Cuantización escalar no uniforme (I)

El problema general es hallar $\{b_i\}$ e $\{y_i\}$.

1. Fijemos los valores iniciales de $\{y_i\}$. Por **(B)** podemos calcular la primera aproximación de los valores $\{b_i\}$. Ahora usamos **(A)** para actualizar los valores $\{y_i\}$ y así sucesivamente.
2. Supongamos que deseamos hallar $b_0 = 0$, b_1, b_2,..., y_1, y_2,... Demos un valor tentativo a y_1[2], resolvemos numéricamente **(A)** $y_1 = \frac{\int_{b_0}^{b_1} x\, f(x)\, dx}{\int_{b_0}^{b_1} f(x)\, dx}$ siendo y_1 la incógnita. Usando **(B)** obtenemos b_1, ahora podemos calcular y_2 resolviendo numéricamente **(A)**...

[2] El resultado dependerá del valor tomado

Cuantización vectorial (I)

Tener un diccionario compuesto por vectores $\{\overrightarrow{y_i}\}$ y codificar nuestros vectores según indica el diccionario.

Ejemplo

Códigos correctores de errores:

$(0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$ 0000

$(0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0) \longrightarrow (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$ 0000

$(1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0) \longrightarrow (0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0)$ 0000

$(0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1) \longrightarrow (1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1)$ 1001

$(0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1) \longrightarrow (0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1)$ 0101

$(0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0) \longrightarrow (0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0)$ 0010

$(0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1) \longrightarrow (0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1\ 1)$ 0001

$(0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0) \longrightarrow (1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0)$ 1000

$(0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1)$ 0101

$(1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0)$ 1010

Cuantización vectorial (II)

K-means – Linde-Buzo-Gray (LGB)

1.) Inicializamos un conjunto de vectores de reconstrucción $\{\overrightarrow{y_i}^{(1)}\}$, $k = 1$, $D^{(0)} = 0$, ϵ lindar.

2.) Hallamos las regiones de cuantización

$$V_i^{(k)} = \left\{\overrightarrow{x},\ d(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y_i}^{(k)}) < d(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y_j}^{(k)})\ \forall j \neq i\right\}$$

3.) Calculamos la distorsión

$$D^{(k)} = \sum_{i=1}^{M} \int_{V_i^{(k)}} \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y_i}^{(k)}\| f(\overrightarrow{x})\, d\overrightarrow{x}$$

4.) Si $\dfrac{D^{(k)} - D^{(k-1)}}{D^{(k)}} < \epsilon$ entonces `stop`.

5.) $K = k + 1$, calculamos los nuevos valores de $\{\overrightarrow{y_i}^{(k)}\}$, que son los centroides de $\left\{V_i^{(k)}\right\}$ y volvemos a 2.

Cuantización vectorial (III)

Observaciones:

I) Cuando se usa para clasificar objetos se utiliza un conjunto para entrenar y otro de test.

II) No siempre converge a la solución óptima

III) Depende de la elección inicial de $\{\overrightarrow{y_i}^{(1)}\}$.
Una forma de elegirlos es empezar con un vector que sea el centroide. A continuación se perturba para obtener dos vectores, se aplica el algoritmo, los nuevos centroides se vuelven a "dividirz así hasta obtener el número de vectores deseado.

IV) Depende de las definiciones de $d(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ y $\|\overrightarrow{x}\|$ y de cómo se actualiza.

Cuantización de métodos predictivos (I)

Ejemplo

Original	0	1,2	2,4	4,9	7,1	6,3	4,8	3,4	0,9	-0,9	-2,4	-4,1
Diferencias		1,2	1,2	2,5	2,2	-0,8	-1,5	-1,4	-2,5	-1,8	-1,5	-1,7
Cuantizado		1,5	1,5	2,5	2,5	-0,5	-1,5	-1,5	-2,5	-1,5	-1,5	-1,5
Recuperado		1,5	3	5,5	8	7,5	6	4,5	2	0,5	-1	-2,5
Error		0,3	0,6	0,6	0,9	1,2	1,2	1,1	1,1	1,4	1,4	1,6

Límites: ...-3,-2,-1,0,1,2,3...

Niveles -3,5, -2,5, -1,5, -0,5, 0,5, 1,5, 2,5, 3,5...

El error va creciendo poco a poco.

Cuantización de métodos predictivos (II)

$\{x_n\}$ la secuencia original
$\{d_n\}$ la secuencia de diferencias, $d_n = x_n - x_{n-1}$
$\{\hat{d}_n\}$ la secuencia de diferencias cuantizadas, $\hat{d}_n = Q(d_n) = d_n + e_n$
$\{\hat{x}_n\}$ la secuencia reconstruida
Calculemos $\hat{x}_n = \hat{x}_{n-1} + \hat{d}_n$, tomando $\hat{x}_0 = x_0$:

$$\begin{aligned}
\hat{x}_1 &= \hat{x}_0 + \hat{d}_1 = x_0 + d_1 + e_1 = x_0 + (x_1 - x_0) + e_1 = x_1 + e_1 \\
\hat{x}_2 &= \hat{x}_1 + \hat{d}_2 = (x_1 + e_1) + (d_2 + e_2) = \\
&= x_1 + (x_2 - x_1) + e_1 + e_2 = x_2 + e_1 + e_2 \\
&\dots \\
\hat{x}_k &= x_k + \sum_{i=1}^{k} e_i
\end{aligned}$$

Como la media del e_i será 0, se puede pensar que el error se cancelará a medida que recuperamos más elementos de la secuencia pero en la práctica no acostumbra a ser así (paseo aleatorio o del borracho).

Cuantización de métodos predictivos (III)

Para evitar este problema la secuencia de diferencias se construye

$$d_n = x_n - \hat{x}_{n-1}$$

Ejemplo

Original	0	1,2	2,4	4,9	7,1	6,3	4,8	3,4	0,9	-0,9	-2,4	-4,1
Diferencias		1,2	0,9	2,9	2,6	-0,7	-1,7	-1,6	-2,6	-1.9	-1,9	-2,1
Cuantizado		1,5	0,5	2,5	2,5	-0,5	-1,5	-1,5	-2,5	-1,5	-1,5	-2,5
Recuperado		1,5	2	4,5	7	6,5	5	3,5	1	-0.5	-2	-4,5
Error		0,3	-0,4	-0,4	-0,1	0,2	0,2	0,1	0,1	0,4	0.4	-0.4

Límites: ...-3,-2,-1,0,1,2,3...

Niveles -3,5, -2,5, -1,5, -0,5, 0,5, 1,5, 2,5, 3,5...

El error es el error producido en la cuantización.

Cuantización de métodos predictivos (IV)

$\{x_n\}$ la secuencia original
$\{d_n\}$ la secuencia de diferencias, $d_n = x_n - \hat{\mathbf{x}}_{\mathbf{n-1}}$
$\{\hat{d}_n\}$ la secuencia de diferencias cuantizadas, $\hat{d}_n = Q(d_n) = d_n + e_n$
$\{\hat{x}_n\}$ la secuencia reconstruida

$$\hat{x}_0 = x_0$$
$$\hat{x}_1 = \hat{x}_0 + \hat{d}_1 = \hat{x}_0 + d_1 + e_1 = \hat{x}_0 + (x_1 - \hat{x}_0) + e_1 = x_1 + e_1$$
$$\hat{x}_2 = \hat{x}_1 + \hat{d}_2 = \hat{x}_1 + (d_2 + e_2) = \hat{x}_1 + (x_2 - \hat{x}_1) + e_2 = x_2 + e_2$$
...
$$\hat{x}_k = x_k + e_k$$

Cuantización de métodos predictivos (V)

En este proceso estamos asumiendo que el siguiente valor es igual al anterior y codificamos la diferencia:

$$p_n = f(\hat{x}_{n-1}) = \hat{x}_{n-1}, \quad d_n = x_n - p_n, \quad \hat{d}_n = Q(d_n) \quad \hat{x}_n = p_n + \hat{d}_n$$

En general podemos suponer:

$$p_n = f(\hat{x}_{n-1}, \hat{x}_{n-2}, ..., \hat{x}_{n-N})$$

f depende de $\hat{x}_i$ (no de x_i) porque el decodificador sólo tiene acceso a $\hat{x}_i$

Ejemplo

El valor de un píxel Θ se puede predecir a partir de los valores A, B, C,... ya leídos,

B	C	D
A	Θ	

- filtro lineal (media ponderada de los píxeles),
- filtro no lineal (mediana, moda, máximo, mínimo...)