Compresión de imágenes

Fernando Martínez
fernando.martinez@upc.edu

Departament de Matemàtica • Universitat Politècnica de Catalunya

6 de mayo de 2020

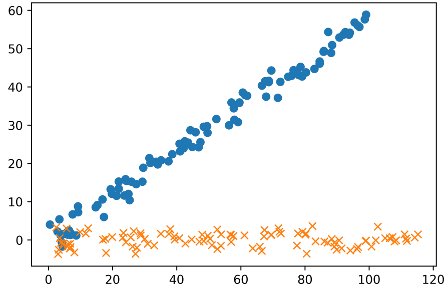
Transformaciones (ejemplos I)

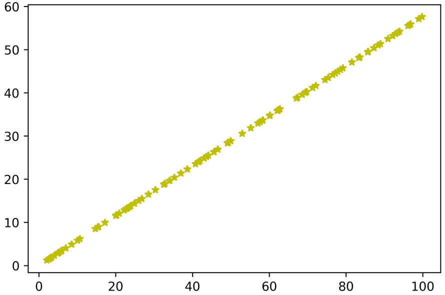
Ejemplo

- Multiplicar *XCVI* por *XII*: *XCVI=96*, *XII=12*, *96·12=1152*, *1152=MCLII*
- Burrows-Wheeler

Ejemplo

Nube de puntos→ Rotación α → cuantización → Rotación $-\alpha$.

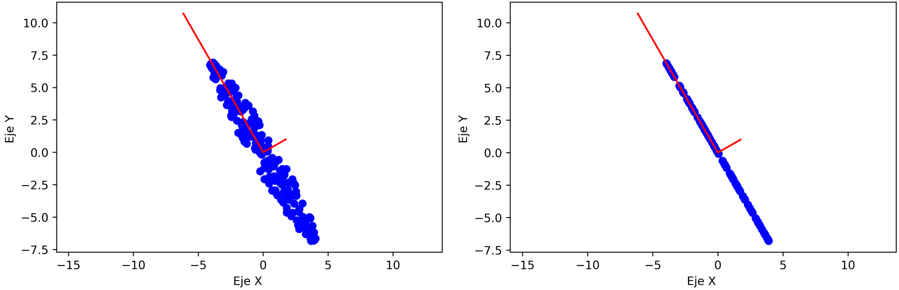




Transformaciones (ejemplos II)

Ejemplo

Nube de puntos→ Tranformación → cuantización → Transformación inversa.



Transformaciones lineales ortogonales

Transformaciones lineales invertibles:

$$\vec{y} = A\vec{x} \qquad y_i = \sum_j a_{ij} x_j$$

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{y} \equiv B\vec{y} \qquad x_i = \sum_j b_{ij} y_j$$

Transformaciones lineales ortogonales: $A^{-1} = A^T$,

$$y_i = \sum_j a_{ij} x_j \qquad x_i = \sum_j a_{ji} y_j$$

Las transformaciones ortogonales conservan la norma (energía)

$$\vec{y}^T \cdot \vec{y} = (A\vec{x})^T \cdot A\vec{x} = \vec{x}^T A^T \cdot A\vec{x} = \vec{x}^T \cdot \vec{x}$$

Transformaciones lineales ortogonales: Ejemplo 1

Ejemplo

$$G_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}, \qquad G^{-1} = G^T$$

$$G_{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \qquad \vec{y} = G_{\frac{\pi}{4}} \vec{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}a \\ 0 \end{pmatrix}$$

Si $\vec{x}$ tiene la energía repartida equitativamente entre las componentes, la transformación la concentra en la primera componente:modificar la segunda componente transformada no afecta significativamente a la *energía* y, por lo tanto, el error sería pequeño:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} a-\epsilon \\ a+\epsilon \end{pmatrix}, \quad \vec{y} = G_{\frac{\pi}{4}} \vec{x} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}a \\ \sqrt{2}\epsilon \end{pmatrix}.$$

Transformaciones lineales ortogonales: Ejemplo 2 (I)

Ejemplo

$$W = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad W^{-1} = W^T = W$$

Si:

$\vec{x} = \begin{pmatrix} a, & a, & a, & a, \end{pmatrix}^T$, $\vec{y} = W\vec{x} = \begin{pmatrix} 2a, & 0, & 0, & 0 \end{pmatrix}^T$
$\vec{x} = \begin{pmatrix} a, & a, & -a, & -a, \end{pmatrix}^T$, $\vec{y} = W\vec{x} = \begin{pmatrix} 0, & 2a, & 0, & 0 \end{pmatrix}^T$
$\vec{x} = \begin{pmatrix} a, & -a, & -a, & a, \end{pmatrix}^T$, $\vec{y} = W\vec{x} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 2a, & 0 \end{pmatrix}^T$
$\vec{x} = \begin{pmatrix} a, & -a, & a, & -a, \end{pmatrix}^T$, $\vec{y} = W\vec{x} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 0, & 2a \end{pmatrix}^T$

Si $\vec{x}$ tiene la energía repartida equitativamente entre las componentes, la transformación la concentra en la primera componente. Si hay un salto brusco a *mitad* concentra la energía en la segunda componente...

Transformaciones lineales ortogonales: Ejemplo 2 (II)

Ejemplo (continuación)

Si

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 10 \\ 8 \end{pmatrix} = 8 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

$$\vec{y} = W\vec{x} = \begin{pmatrix} 16 \\ -2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} = 16 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{3}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Transformaciones lineales

En el caso de imágenes se acostumbra a trabajar con bloques que son matrices

$$Y_{kl} = \sum_i \sum_j a_{klij} X_{ij}$$

Las transformaciones lineales con las que se trabaja son separables: se aplica primero una transformación a las filas y después otra (usualmente la misma) a las columnas:

$$Y_{kl} = \sum_i \sum_j A_{ki} B_{lj} X_{ij} = \sum_i \sum_j A_{ki} A_{jl} X_{ij} = \sum_i \sum_j A_{ki} X_{ij} A_{jl},$$

matricialmente:

$$Y = AXA^T, \quad X = A^T Y A \qquad (A^{-1} = A^T \text{ortogonal}).$$

Discrete Walsh-Hadamard Transform (DWHT)

Se definen las matrices auxiliares $\tilde{H}_1 = (1)$, $\tilde{H}_{2N} = \begin{pmatrix} \tilde{H}_N & \tilde{H}_N \\ \tilde{H}_N & -\tilde{H}_N \end{pmatrix}$

$$\tilde{H}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \ \tilde{H}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{H}_8 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

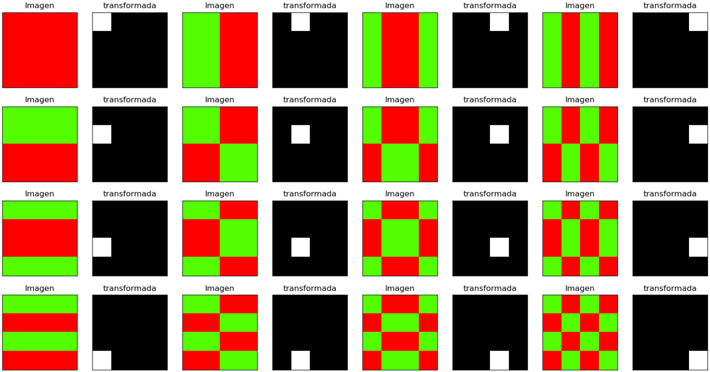
Discrete Walsh-Hadamard Transform (DWHT)

Se multiplican por $\frac{1}{\sqrt{N}}$ (así conseguiremos $HH^T = I$) y se reordenan las filas según el número de cambios de signo:

$$H_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \; H_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$H_8 = \frac{1}{\sqrt{8}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Discrete Walsh-Hadamard Transform (DWHT)



$$N = 4$$

Discrete Walsh-Hadamard Transform (DWHT)

Las *imágenes* I_i son *base*: cualquier imagen I se puede escribir como combinación lineal de los elementos de la base $I = \sum_i \lambda_i I_i$.
La transformación es lineal: $A \cdot I = \sum_i \lambda_i A \cdot I_i$.

$A \cdot I_i$ es una matriz cuyos elementos son todos 0 excepto el que ocupa la *posición* i que vale 1. Por lo tanto:

$$A \cdot I = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & ... \\ ... & ... & ... \\ ... & ... & \lambda_r \end{pmatrix}$$

λ_1 recibe el nombre de componente principal, es la que tiene mayor *influencia* en la imagen y acostumbra a tener el mayor valor (es la media de la imagen), a medida que nos *alejamos* de λ_1 menos *influencia* en la imagen y podemos prescindir de ellas.

Discrete Cosine Transform (DCT)

Dada una función periódica de periodo T, $f(t) = f(t + kT)$, $k \in \mathbb{Z}$ podemos escribir:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1} a_n \cos(\frac{2\pi}{T} n\, t) + \sum_{n=1} b_n \sin(\frac{2\pi}{T} n\, t)$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(\frac{2\pi}{T} n\, t) dt$$
$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(\frac{2\pi}{T} n\, t) dt$$

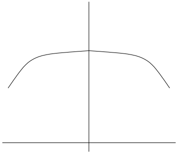
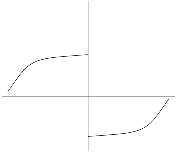
Si T es el periodo, $\nu \equiv \frac{1}{T}$ es la frecuencia y $\omega \equiv \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu$ es la frecuencia angular:

I) $\int_0^T \cos(n\,\omega\, t) \cos(k\,\omega\, t) dt = \int_0^T \sin(n\,\omega\, t) \sin(k\,\omega\, t) dt = \frac{T}{2} \delta_{kn}$

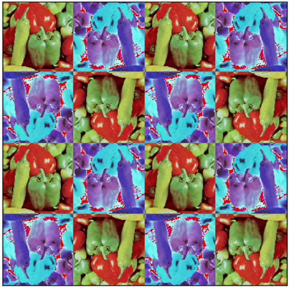
II) $\int_0^T \cos(n\,\omega\, t) \sin(k\,\omega\, t) dt = 0$

Discrete Cosine Transform (DCT)

Dada una función definida en el intervalo $[0, T/2]$ la podemos extender a toda la recta real

- de forma simétrica ($b_n = 0$), 
- de forma antisimétrica ($a_n = 0$), 
- de cualquier otra forma.

Discrete Cosine Transform (DCT)



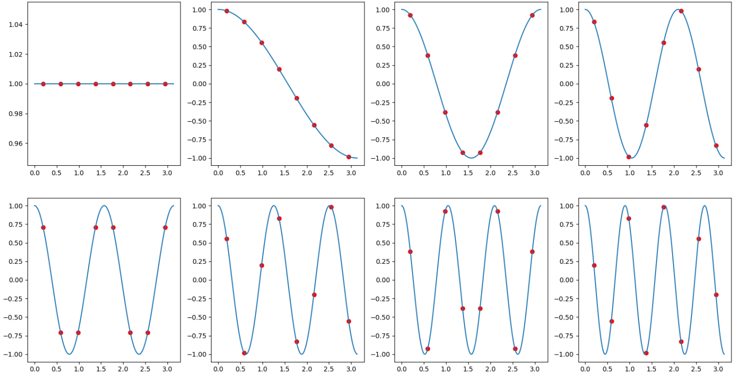
Teorema de Nyquist

Teorema

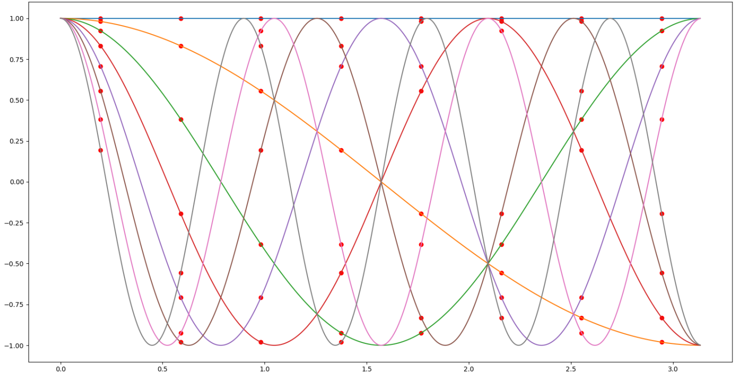
Es posible reconstruir una señal periódica continua si se muestrea a una tasa mayor que el doble de su frecuencia máxima.

En la práctica la frecuencia máxima vendrá dada por el número de muestras (*samples*) N ya que hacemos una extensión simétrica $T = 2N$ (DCT)

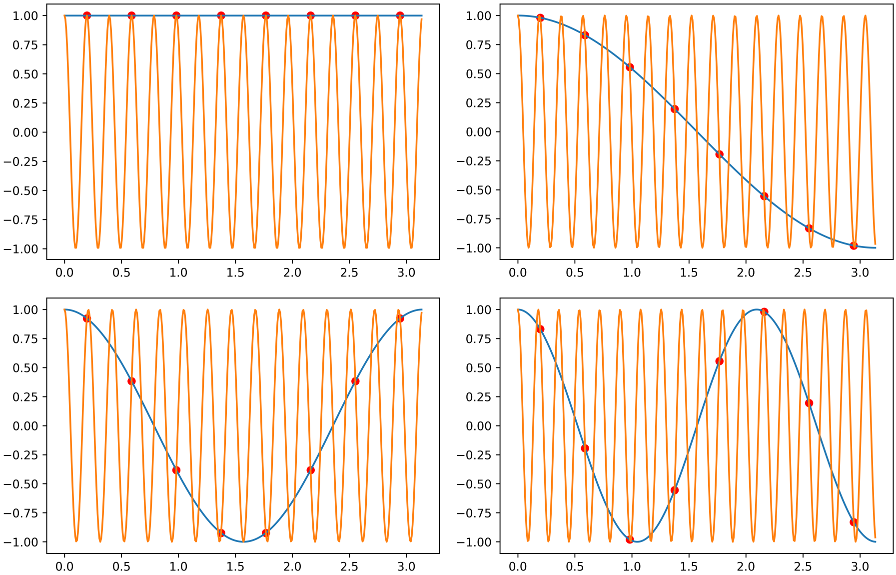
Teorema de Nyquist



Teorema de Nyquist



Teorema de Nyquist



Discrete Cosine Transform (DCT)

Un vector $\vec{x}$ de N componentes puede representar una señal periódica simétrica de frecuencia máxima N.

$$\vec{x} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n \vec{\Theta}^{(n)}, \Theta_i^{(n)} = c_n \cos\left(\frac{2\pi}{2N} n(i + \frac{1}{2})\right),\ c_0 = \frac{1}{2\sqrt{2}}, c_n = \frac{1}{2}\ n \neq 0$$

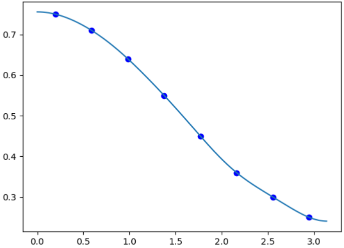
$$\begin{aligned}
&\vec{\Theta}^{(0)} = \frac{1}{2\sqrt{2}}[1, ..., 1] \\
&\vec{\Theta}^{(1)} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2N}\right), \cos\left(\frac{3\pi}{2N}\right), \cos\left(\frac{5\pi}{2N}\right), ..., \cos\left(\frac{\pi}{N}(N-1+\frac{1}{2})\right)\right] \\
&\vec{\Theta}^{(2)} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{N}\right), \cos\left(\frac{3\pi}{N}\right), \cos\left(\frac{5\pi}{N}\right), ..., \cos\left(\frac{\pi}{N}2(N-1+\frac{1}{2})\right)\right] \\
&... \\
&\vec{\Theta}^{(N-1)} = \frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi(N-1)}{N}\right), \cos\left(\frac{3\pi(N-1)}{2N}\right), ..., \cos\left(\frac{\pi}{N}(N-1)(N-1+\frac{1}{2})\right)\right]
\end{aligned}$$

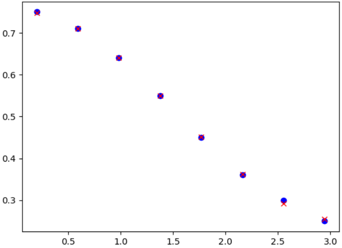
Ejemplo DCT (I)

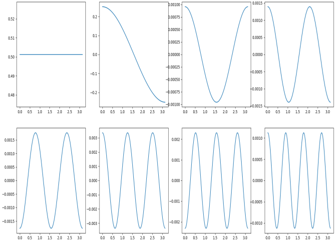
Ejemplo

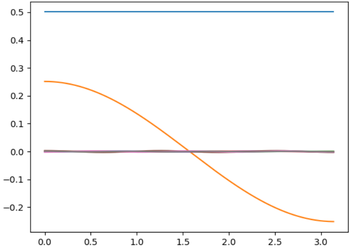
- Dominio espacial:
  $\vec{x} = [0{,}75,\ 0{,}71,\ 0{,}64,\ 0{,}55,\ 0{,}45,\ 0{,}36,\ 0{,}3,\ 0{,}25]$
- Dominio frecuencias:
  $\vec{a} = [1{,}418,\ 0{,}503,\ 0, 00191,\ 0{,}00279,\ -0{,}00354,\ 0{,}00672,\ -0{,}00462,\ 0{,}00225]$
- Dominio frecuencias:
  $\vec{a}' = [1{,}418,\ 0{,}503,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0]$
- Dominio espacial:
  $\vec{x}' = [0{,}748,\ 0{,}710,\ 0{,}641,\ 0{,}550,\ 0{,}452,\ 0{,}361,\ 0{,}292,\ 0{,}254]$
- Energia perdida: 0.005 %

Ejemplo DCT (II)









Discrete Cosine Transform (DCT) 1D

Una manera de calcular ***una***[1] DCT-1D de $\vec{x} = (x_0, x_1, ..., x_{N-1})$ es:

$$a_i = \sqrt{\frac{2}{N}} c_i \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cos\left(\frac{(2k+1)i\pi}{2N}\right)$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad c_i = 1,\ i \neq 0$$

La inversa, dadas las amplitudes a_i, es:

$$x_k = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{i=0}^{N-1} c_i\, a_i \cos\left(\frac{(2k+1)i\pi}{2N}\right)$$

[1] Hay otras definiciones de DCT, dependiendo de cómo se toman los puntos.

Discrete Cosine Transform (DCT) 2D

En el caso 2D, la DCT que se utiliza en JPEG es:

$$\omega_{ij} = \frac{1}{\sqrt{2N}} c_i c_j \sum_{x=0}^{N-1} \sum_{y=0}^{N-1} P_{xy} \cos\left(\frac{(2x+1)i\pi}{2N}\right) \cos\left(\frac{(2y+1)j\pi}{2N}\right)$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad c_i = 1, \ i \neq 0$$

siendo P una imagen de $N \times N$ píxeles y P_{xy} el valor del píxel correspondiente. La inversa es:

$$P_{xy} = \frac{1}{\sqrt{2N}} \sum_{i=0}^{N-1} \sum_{j=0}^{N-1} c_i c_j \omega_{ij} \cos\left(\frac{(2x+1)i\pi}{2N}\right) \cos\left(\frac{(2y+1)j\pi}{2N}\right)$$

Discrete Cosine Transform (DCT) 2D

Matricialmente se puede escribir:

$$\omega = C\,P\,C^T$$

$$C = (C_{ij}) \qquad C_{0j} = \frac{1}{\sqrt{N}}, \quad C_{ij} = \sqrt{\frac{2}{N}}\cos\left(\frac{(2j+1)i\pi}{2N}\right)$$

Lo usual es aplicar la DCT a bloques 8×8 de la imagen. En este caso al calcular $C\,P$ cada elemento de la matriz requiere 8 productos, en total $8\cdot 8\times 8$ para el bloque. Multiplicar por C^T necesita los mismos productos. En total $2\cdot 8^3$ multiplicaciones. Para una imagen $n\times n$ son necesarios $\frac{n}{8}\frac{n}{8}2\cdot 8^3 = 16n^2$ productos. (Aplicar la DCT a toda la imagen: $2n^3$)

Se puede reducir el número de productos escribiendo $C = C_1 C_2 \cdots C_7$ siendo C_1 matrices con pocos elementos no nulos y siendo éstos en su mayoría ± 1.[2]

[2] Ver página 323 de la 4ª edición del Salomon.

Discrete Sine Transform (DST)

Notemos que $\sin(x)$ es una función impar i.e. $f(0) = 0$.
Por lo tanto la DST no tiene coeficiente DC (siempre vale 0).

$$a_i = \sum_{k=0}^{N} x_k \sin\left(\frac{\pi}{N+1}(k+1)(i+1)\right)$$

Discrete Sine Transform (DST)

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
x &= (1,1,1,1,1,1,1,1)\\
DST(x) &= (5{,}67,\ 0,\ 1{,}73,\ 0, 0{,}84\ , 0,\ 0{,}36,\ 0)\\
DCT(x) &= (8,0,0,0,0,0,0,0)
\end{aligned}
$$

Ejemplo

$$
\begin{aligned}
x &= (0,\ 0{,}87,\ 1{,}47,\ 1{,}985,\ 2{,}5,\ 1{,}866,\ 0{,}643,\ 0{,}002)\\
DST(x) &= (8{,}28,\ -0{,}297,\ -2{,}57,\ 0{,}750,\ -0{,}522,\ -0{,}644,\ -0{,}137,\ 0{,}0176)\\
DCT(x) &= (3{,}30,\ -0{,}0668,\ -2{,}42,\ 0{,}314,\ -0{,}128,\ -0{,}365,\ -0{,}0157,\ 0{,}0247)
\end{aligned}
$$

JPEG (Joint Photographic Experts Group)

I) Transformación $RGB \to YC_bC_r$, en el caso de imágenes de color:

$$Y = 0{,}299\,R + 0{,}587\,G + 0{,}114\,B$$
$$C_b = -0{,}1687\,R - 0{,}3313\,G + 0{,}5\,B + 128$$
$$C_r = 0{,}5\,R - 0{,}4187\,G - 0{,}0813\,B + 128$$

$$R = Y + 1{,}402\,(C_r - 128)$$
$$G = Y - 0{,}71414\,(C_r - 128) - 0{,}34414\,(C_b - 128)$$
$$B = Y + 1{,}772\,(C_b - 128)$$

II) Para cada componente, se divide la imagen en bloques 8×8. (Si el número de filas o columnas no es multiplo de 8, se replica la última fila/columna.)

III) A cada bloque se le aplica la DCT, pero previamente se le resta 128 a cada elemento del bloque para que el coeficiente DC se reduzca su valor en $128 \cdot 64 = 8192$ en promedio.

JPEG (Joint Photographic Experts Group)

iv) Se cuantizan los valores obtenidos, con las matrices de cuantización. Los estándares usan una para la componente Y, luminancia, y otras para las componentes C_b y C_r, crominancias, pero se pueden utilizar otras que se han de incluir.

$$Q_L = \begin{pmatrix} 16 & 11 & 10 & 16 & 24 & 40 & 51 & 61 \\ 12 & 12 & 14 & 19 & 26 & 58 & 60 & 55 \\ 14 & 13 & 16 & 24 & 40 & 57 & 69 & 56 \\ 14 & 17 & 22 & 29 & 51 & 87 & 80 & 62 \\ 18 & 22 & 37 & 56 & 68 & 109 & 103 & 77 \\ 24 & 35 & 55 & 64 & 81 & 104 & 113 & 92 \\ 49 & 64 & 78 & 87 & 103 & 121 & 120 & 101 \\ 72 & 92 & 95 & 98 & 112 & 100 & 103 & 99 \end{pmatrix}$$

$$Q_C = \begin{pmatrix} 17 & 18 & 24 & 47 & 99 & 99 & 99 & 99 \\ 18 & 21 & 26 & 66 & 99 & 99 & 99 & 99 \\ 24 & 26 & 56 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 \\ 47 & 66 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 \\ 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 \\ 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 \\ 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 \\ 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 & 99 \end{pmatrix}$$

v) Se tratan los coeficientes DC y AC por separado. Todos los DC se codifican juntos (sus diferencias); los 63 AC se codifican juntos.

JPEG (DC)

0:	0										0
1:	-1	1									10
2:	-3	-2	2	3							110
3:	-7	-6	-5	-4	4	5	6	7			1110
4:	-15	-14	...	-9	-8	8	9	10	...	15	11110
5:	-31	-30	-29	...	-17	-16	16	17	...	31	111110
6:	-63	-62	-61	...	-33	-32	32	33	...	63	1111110
7:	-127	-126	-125	...	-65	-64	64	65	...	127	11111110
⋮				⋮							
14:	-16383	-16382	-16381	...	-8193	-8192	8192	8193	...	16383	111111111111110
15:	-32767	-32766	-32765	...	-16385	-16384	16384	16385	...	32767	1111111111111110
16:	32768										1111111111111111

Figura: Código de Huffman para los coeficientes DC y sus diferencias

JPEG (DC)

Ejemplo

DC: 1118, 1114, 1119... $\longmapsto$ 1118, -4, 5

1118 está en la fila 11, columna 930 de la tabla 1, codificamos

$$\overbrace{11111111110}^{\text{fila } 11} \quad \overbrace{01110100010}^{\text{columna 930 con 11bits}}$$

-4 está en la fila 3, columna 3 de la tabla, codificamos

$$\overbrace{1110}^{\text{fila } 3} \quad \overbrace{011}^{\text{columna 3 con 3 bits}}$$

5 está en la fila 3, columna 5 de la tabla, codificamos

$$\overbrace{1110}^{\text{fila } 3} \quad \overbrace{011}^{\text{columna 5 con 3 bits}}$$

JPEG (AC)

Para cada bloque se codifican los 63 coeficientes AC con una combinación de RLE y Huffman.
Los 63 coeficientes AC formarán una lista que contenga unos pocos elementos no nulos, por ejemplo $2, 0, -2, \overbrace{0..,0}^{13\text{ ceros}}, -1, 0, ...$
Se codifica de la siguiente forma, para cada valor $x \neq 0$:

1. z representa el número de ceros que preceden a x,
2. se busca x en la tabla 1, sea R su fila y C su columna,
3. Con R y z, se usa la tabla 2 para elegir una entrada E
4. E se concatena con el valor de C usando R bits.

JPEG (AC)

Z	R 1 6	 2 7	 3 8	 4 9	 5 A
0	00 1111000	01 11111000	100 1111110110	1011 1111111110000010	11010 1111111110000011
1	1100 1111111110000100	11011 1111111110000101	11110001 1111111110000110	111110110 1111111110000111	11111110110 1111111110001000
2	11100 111111110001010	11111001 111111110001011	1111110111 111111110001100	111111110100 111111110001101	111111110001001 111111110001110
3	111010 1111111110010001	111110111 1111111110010010	111111110101 1111111110010011	1111111110001111 1111111110010100	1111111110010000 1111111110010101
4	111011 1111111110011001	1111111000 1111111110011010	1111111110010110 1111111110011011	1111111110010111 1111111110011100	1111111110011000 1111111110011101
5	1111010 1111111110100001	11111110111 1111111110100010	1111111110011110 1111111110100011	1111111110011111 1111111110100100	1111111110100000 1111111110100101
6	1111011 1111111110101001	111111110110 1111111110101010	1111111110100110 1111111110101011	1111111110100111 1111111110101100	1111111110101000 1111111110101101
7	11111010 1111111110110001	111111110111 1111111110110010	1111111110101110 1111111110110011	1111111110101111 1111111110110100	1111111110110000 1111111110110101
8	111111000 1111111110111001	111111111000000 1111111110111010	1111111110110110 1111111110111011	1111111110110111 1111111110111100	1111111110111000 1111111110111101
9	111111001 1111111111000010	1111111110111110 1111111111000011	1111111110111111 1111111111000100	1111111111000000 1111111111000101	1111111111000001 1111111111000110
A	111111010 1111111111001011	1111111111000111 1111111111001100	1111111111001000 1111111111001101	1111111111001001 1111111111001110	1111111111001010 1111111111001111
B	1111111001 1111111111010100	1111111111010000 1111111111010101	1111111111010001 1111111111010110	1111111111010010 1111111111010111	1111111111010011 1111111111011000
C	1111111010 1111111111011101	1111111111011001 1111111111011110	1111111111011010 1111111111011111	1111111111011011 1111111111100000	1111111111011100 1111111111100001
D	11111111000 1111111111100110	1111111111100010 1111111111100111	1111111111100011 1111111111101000	1111111111100100 1111111111101001	1111111111100101 1111111111101010
E	1111111111101011 1111111111110000	1111111111101100 1111111111110001	1111111111101101 1111111111110010	1111111111101110 1111111111110011	1111111111101111 1111111111110100
F	11111111001 1111111111111001	1111111111110101 1111111111111010	1111111111110110 1111111111111011	1111111111110111 1111111111111101	1111111111111000 1111111111111110

Figura: Código de Huffman para los coeficientes DC de la luminancia.

JPEG: ejemplo AC (I)

Ejemplo

$$2, 0, -2, \overbrace{0..,0}^{13\ ceros}, -1, 0, ...$$

- $z = 0$, $x = 2$: $R = 2$, $C = 2$
  $R = 2$, $z = 0 \to 01$
  $C = 2$ con $R = 2$ bits $\to 10$
  `0110`
- $z = 1$, $x = -2$: $R = 2$, $C = 1$
  $R = 2$, $z = 1 \to 11011$
  $C = 1$ con $R = 2$ bits $\to 01$
  `1101101`

JPEG: ejemplo AC (II)

Ejemplo

$$2, 0, -2, \overbrace{0..,0}^{13\ ceros}, -1, 0, ...$$

- $z = 13$, $x = -1$: $R = 1$, $C = 0$
  $R = 1$, $z = 13 \rightarrow 11111110000$
  $C = 0$ con $R = 1$ bits $\rightarrow 0$
  `111111100000`

Como ya no hay más términos no nulos se envía `EOB`: `1010`.
Si hay más de 15 ceros consecutivos se envía `11111111001` para indicar 15 ceros y se procede con lo restante.
Resumiendo: `0110 1101101 111111100000 1010`

27 bits para los 63 coeficientes AC.

JPEG: ejemplo AC (III)

Los 63 coeficientes AC se ordenan en zig-zag para conseguir que el número de ceros consecutivos aumente:

$$\begin{pmatrix} -24 & 2 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to 2, 3, -1, 2, -4, 0, 0, 2, \overbrace{0..,0}^{11\, ceros}, -1, 0, ...$$