Wavelets

Fernando Martínez
fernando.martinez@upc.edu

Departament de Matemàtica • Universitat Politècnica de Catalunya

13 de mayo de 2020

Ejemplo

Ejemplo

Supongamos 8 píxeles con valores $(1,2,3,5,6,9,10,15)$, *detalle máximo.*

- *Si nos alejamos* $(\frac{1+2}{2}, \frac{3+5}{2}, \frac{6+9}{2}, \frac{10+15}{2}; \frac{1-2}{2}, \frac{3-5}{2}, \frac{6-9}{2}, \frac{10-15}{2})$
$$(\frac{3}{2}, \frac{8}{2}, \frac{15}{2}, \frac{25}{2}; \frac{-1}{2}, \frac{-2}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{-5}{2})$$
- *Si nos volvemos a alejar* $(\frac{\frac{3}{2}+\frac{8}{2}}{2}, \frac{\frac{15}{2}+\frac{25}{2}}{2}; \frac{\frac{3}{2}-\frac{8}{2}}{2}, \frac{\frac{15}{2}-\frac{25}{2}}{2};; \frac{-1}{2}, \frac{-2}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{-5}{2})$
$$(\frac{11}{4}, \frac{40}{4}; \frac{-5}{4}, \frac{-10}{4};; \frac{-1}{2}, \frac{-2}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{-5}{2})$$
- *Si nos alejamos definitivamente*
$$(\frac{51}{8}; \frac{-29}{8};; \frac{-5}{4}, \frac{-10}{4};;; \frac{-1}{2}, \frac{-2}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{-5}{2})$$

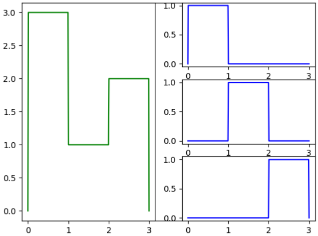
Transformada de Haar

Sea $f(t) = \begin{cases} 3 & 0 \leq t < 1 \\ 1 & 1 \leq t < 2 \\ 2 & 3 \leq t < 3 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

Si definimos (*scaling function*) $\phi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$

$$\phi_k^0(t) = \phi(t-k) = \begin{cases} 1 & k \leq t < k+1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

$$f(t) = \sum_k a_k \phi_k^0(t) = 3\phi_0^0(t) + \phi_1^0(t) + 2\phi_2^0(t)$$



Con las funciones $\phi_k^0(t)$ podemos construir el espacio de las funciones constantes a trozos[1] de longitud $\dfrac{1}{2^0} = 1$.

Llamaremos V_0 a este espacio.

Si tenemos una función constante a trozos de longitud $\frac{1}{2^1}$ (perteneciente a V_1), podemos expresarla como:

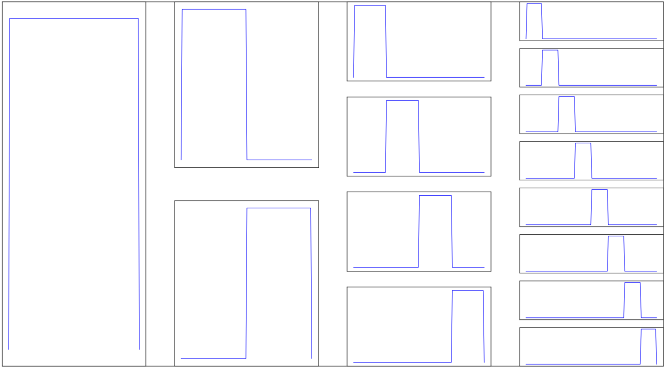
$$f(t) = \sum_k a_k \phi_k^1(t) \qquad \text{con } \phi_k^1(t) \propto \phi(2t-k)$$

$$\phi_0^1(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{resto} \end{cases} \qquad \phi_1^1(t) = \begin{cases} 1 & \frac{1}{2} \le t < 1 \\ 0 & \text{resto} \end{cases}$$

Si V_j es el espacio de funciones constantes a trozos de longitud $\frac{1}{2^j}$

$$f(t) = \sum_k a_k \phi_k^j(t) \qquad \text{con } \phi_k^j(t) \propto \phi(2^j t-k)$$

[1] Para lo que nos interesa, $k \in \mathbb{Z}$ y las funciones son constantes en los intervalos $[k, k+1)$.



$\phi_k^0(t),\ k=0.$ $\phi_k^1(t),\ k=0,1.$ $\phi_k^2(t),\ k=0,...,3.$ $\phi_k^3(t),\ k=0,...,7$

Ejemplo

$$f(t) = \begin{cases} 5 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 3 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases}$$

$$f(t) = 5\phi_0^1(t) + 3\phi_1^1(t)$$

Ejemplo

$$f(t) = \begin{cases} 4 & 0 \leq t < \frac{1}{4} \\ 2 & \frac{1}{4} \leq t < \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases}$$

$$f(t) = 4\phi_0^2(t) + 2\phi_1^2(t) + \phi_2^2(t) + \phi_3^2(t) = 4\phi_0^2(t) + 2\phi_1^2(t) + \phi_2^1(t)$$

I) $\phi(t) = \phi_0^1(t) + \phi_1^1(t) \equiv \sum_k h_k \phi_k^1(t)$, i.e.

$$\phi(t) = \sum_k h_k \phi(2t-k) \quad \text{Multi Resolution Analysis Equation (MRA)} \tag{1}$$

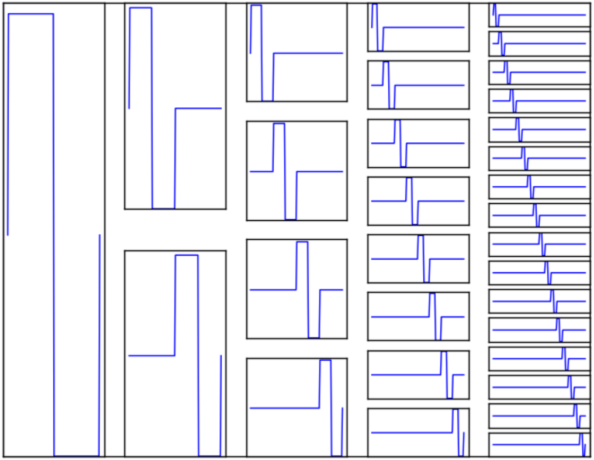
II) $V_0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_j \subset \cdots$
$V_1 = V_0 \oplus W_0$
$V_2 = V_1 \oplus W_1 = V_0 \oplus W_0 \oplus W_1$
$\ldots$
$V_{j+1} = V_j \oplus W_j = V_0 \oplus W_0 \oplus \cdots \oplus W_j$

III) $\phi_0^1(t) = \frac{1}{2}\left[\phi(t) + \psi(t)\right]$, $\qquad \phi_1^1(t) = \frac{1}{2}\left[\phi(t) - \psi(t)\right]$
siendo

$$\psi(t) = \begin{cases} 1 & 0 \le t < \frac{1}{2} \\ -1 & \frac{1}{2} \le t < 1 \end{cases} \qquad \textit{mother wavelet}$$

IV) Podemos definir

$$\psi_k^j(t) \propto \psi(2^j - k)$$



$\psi_k^0(t)$ $\psi_k^1(t)$ $\psi_k^2(t)$ $\psi_k^3(t)$ $\psi_k^4(t)$

Ejemplo

$$f(t) = \begin{cases} 5 & 0 \leq t < \frac{1}{2} \\ 3 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases}$$

$$f(t) = \overbrace{5\phi_0^1(t) + 3\phi_1^1(t)}^{V_1} = \overbrace{4\phi(t)}^{V_0} + \overbrace{\psi(t)}^{W_0}$$

Baja resolución: $4 (V_0)$
Alta resolución (detalle): 5,3 (V_1)

Ejemplo

$$f(t) = \begin{cases} 4 & 0 \leq t < \frac{1}{4} \\ 2 & \frac{1}{4} \leq t < \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \leq t < 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} f(t) &= \overbrace{4\phi_0^2(t) + 2\phi_1^2(t) + \phi_2^2(t) + \phi_3^2(t)}^{V_2} \\ &= \overbrace{3\phi_0^1(t) + \phi_1^1(t)}^{V_1} + \overbrace{\psi_0^1(t)}^{W_1} \\ &= \overbrace{2\phi_0^0(t)}^{V_0} + \overbrace{\psi_0^0(t)}^{W_0} + \overbrace{\psi_0^1(t)}^{W_1} \end{aligned}$$

Baja resolución: 2 (V_0)
Media resolución: 3,1 (V_1)
Alta resolución (detalle): 4,2,1,1 (V_2)

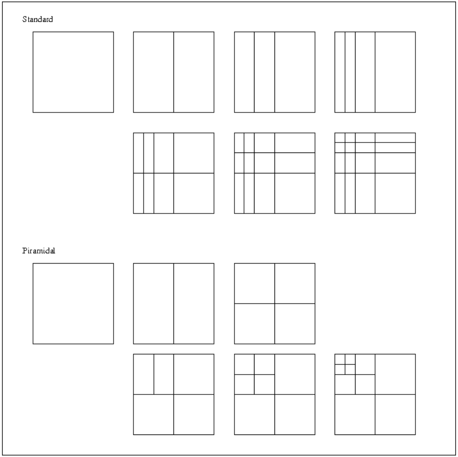
Ejemplo

Supongamos 8 píxeles con valores $(1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15)$, *detalle máximo*.

- $V_3 : (1, 2, 3, 5, 6, 9, 10, 15)$
- $V_2 \oplus W_2 : (\frac{3}{2}, \frac{8}{2}, \frac{15}{2}, \frac{25}{2}) \oplus (\frac{-1}{2}, \frac{-2}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{-5}{2})$
- $V_1 \oplus W_1 \oplus W_2 : (\frac{11}{4}, \frac{40}{4}) \oplus (\frac{-5}{4}, \frac{-10}{4}) \oplus (\frac{-1}{2}, \frac{-2}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{-5}{2})$
- $V_0 \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2 : (\frac{51}{8}) \oplus (\frac{-29}{8}) \oplus (\frac{-5}{4}, \frac{-10}{4}) \oplus (\frac{-1}{2}, \frac{-2}{2}, \frac{-3}{2}, \frac{-5}{2})$

En el caso 2D hay varias formas de aplicar la transformación

- Standard: Primero aplicamos a columnas y después a filas
- Piramidal: Aplicamos a columnas y filas alternadamente



Wavelets

Definición *Scaling function* $\phi(t)$: función tal que si

$$f(t) = \sum_k a_k \phi(t-k) \equiv \sum_k a_k \phi_k^0(t), \qquad \phi_k^0(t) = \phi(t-k)$$

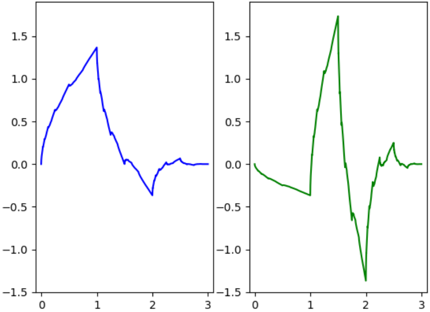
entonces

$$f(t) = \sum_k b_k^j \phi_k^j(t), \qquad \phi_k^j(t) = \sqrt{2^j}\phi(2^j t - k).$$

Ecuación MRA

Si $V_0 = \langle\{\phi_k^0(t)\}\rangle$, $V_j = \langle\{\phi_k^j(t)\}\rangle$, $V_0 \subset V_1 \subset \cdots$. De esta inclusión tenemos la ecuación MRA:

$$\phi(t) = \sum_k h_k \sqrt{2}\, \phi(2t-k) \tag{2}$$



Daubechis 4: $h_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$, $h_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$, $h_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$, $h_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$

Al igual que hemos hecho antes, podemos escribir $V_1 = V_0 \oplus W_0$ y si $g(t) \in V_1$ entonces:

$$g(t) = \sum_k a_k \phi_k^1(t) = \sum_k c_k \phi_k^0(t) + \sum_k d_k \psi_k^0(t),$$

$$\phi_k^1(t) \in V_1, \qquad \phi_k^0(t) \in V_0, \quad \psi_k^0(t) \in W_0$$

Ahora $\psi_k^j(t) = \sqrt{2^j}\psi(2^j t - k)$ siendo $\psi(t)$ la *mother wavelet*:

1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t)dt = 0$

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(t)|dt < \infty$

3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^2}{\omega} d\omega < \infty, \qquad \Psi(\omega)$ transformada de Fourier de $\psi(t)$.

Como $\psi(t) \in W_0 \subset V_1$ tendremos

$$\psi(t) = \sum_k w_k \phi_k^1(t) = \sum_k w_k \sqrt{2}\ \phi_k(2t - k) \tag{3}$$

Por lo tanto $\phi(t)$ y $\psi(t)$ están relacionadas por (3).
Veamos algunas condiciones para los coeficientes h_k y w_k.

I) Si integramos (2):

$$\sum_k h_k = \sqrt{2} \tag{C.1}$$

II) Si imponemos $\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t-k)\phi(t-r)dt = \delta_{kr}$ (ortogonalidad):

$$\sum_k h_k^2 = 1 \tag{C.2}$$

III) De la condición de ortogonalidad $\delta_{m0} = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t)\phi(t-m)dt$,

$$\sum_k h_k h_{k-2m} = \delta_{m0} \tag{C.3}$$

Las wavelets que cumplen C.3, pero no necesariamente C.2, reciben el nombre de wavelets biortogonales.

Ejemplo

N=2

C.1 $h_0 + h_1 = \sqrt{2}$

C.2 $h_0^2 + h_1^2 = 1$

C.3 No tiene sentido ya que si $m = 1$ entonces $k - 2m < 0$.

Por lo tanto $h_0 = h_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}$, (Haar).

Ejemplo

N=3

C.1 $h_0 + h_1 + h_2 = \sqrt{2}$

C.2 $h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 = 1$

C.3 $m = 1$ entonces $h_2 \cdot h_0 = 0$. Por lo tanto $h_0 = 0$ o $h_2 = 0$, caso anterior.

Ejemplo

N=4

C.1 $h_0 + h_1 + h_2 + h_3 = \sqrt{2}$

C.2 $h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 1$

C.3 $m = 1$ entonces $h_3 \cdot h_1 + h_2 \cdot h_0 = 0.$

Multiples soluciones.

Daubechis 4: $h_0 = \dfrac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$, $h_1 = \dfrac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$, $h_2 = \dfrac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$, $h_3 = \dfrac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$.

Ejemplo

N=6

C.1 $h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 = \sqrt{2}$

C.2 $h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_4^2 + h_5^2 = 1$

C.3 Para $m = 1$: $h_5 \cdot h_3 + h_4 \cdot h_2 + h_3 \cdot h_1 + h_2 \cdot h_0 = 0.$

Para $m = 2$: $h_5 \cdot h_1 + h_4 \cdot h_0 = 0.$

Multiples soluciones.

I) Si integramos (3):

$$\sum_k \omega_k = 0$$

II) Ortogonalidad:

$$w_k = \pm(-1)^k h_{N-k}$$

III)

$$\sum_k h_k w_{N-k} = 0$$

Con $N = 4$ la DWT quedaría $\vec{y} = \mathbf{W}\vec{x}$

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ w_0 & w_1 & w_2 & w_3 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & w_0 & w_1 & w_2 & w_3 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & w_0 & w_1 & w_2 & w_3 \\ h_2 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & h_0 & h_1 \\ w_2 & w_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & w_0 & w_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{W}^T = \begin{pmatrix} h_0 & w_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & h_2 & w_2 \\ h_1 & w_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & h_3 & w_3 \\ h_2 & w_2 & h_0 & w_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ h_3 & w_3 & h_1 & w_1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_2 & w_2 & h_0 & w_0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_3 & w_3 & h_1 & w_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix}$$

Teniendo en cuenta $w_0 = h_3$, $w_1 = -h_2$, $w_2 = h_1$, $w_3 = -h_0$,

$$
\mathbf{W}^T = \begin{pmatrix}
h_0 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & h_2 & h_1 \\
w_2 & w_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & w_0 & w_3 \\
h_2 & h_1 & h_0 & h_3 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
w_0 & w_3 & w_2 & w_1 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & h_2 & h_1 & h_0 & h_3 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & w_0 & w_3 & w_2 & w1 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & h_2 & h_1 & h_0 & h_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & w_0 & w_3 & w_2 & w_1 \\
h_0 & h_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & h_2 & h_1 \\
w_2 & w_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 & 0 & 0 & w_0 & w_3
\end{pmatrix}
$$