Computació Numèrica

Equacions No Lineals
Algorismes (II)

M. Àngela Grau Gotés

Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya · BarcelonaTech.

16 de març de 2020

drets d'autor

"Donat el caràcter i la finalitat exclusivament docent i eminentment il·lustrativa de les explicacions a classe d'aquesta presentació, l'autor s'acull a l'article 32 de la Llei de propietat intel·lectual vigent respecte de l'ús parcial d'obres alienes com ara imatges, gràfics o altre material contingudes en les diferents diapositives"

Índex

El manual de referència és
http://www.mathworks.es/es/help/matlab/

MATLAB®

Recordem . . .

Com definir funcions en MATLAB®

Funcions definides en un fitxer, vegeu
http://www.mathworks.es/es/help/matlab/ref/function

$$function\ [output_{args}] = untitled(input_{args})$$

$\%\ UNTITLED\ \ Summary\ \ of\ \ this\ \ function\ \ goes\ \ here$

$\%\ Detailed\ \ explanation\ \ goes\ \ here$

...

...

end

Funcions definides en la finestra de comandes.

$$>> x = [0 : 0.01 : 2];$$
$$>> f = @(x)x + \ln(x + 1);$$
$$>> plot(x, f(x))$$

Aprenem . . .

fzero

Les equacions d'una variable es resolen fent ús de **fzero**:

$$>> f = @(x)x + \ln(x+1);$$

$$>> arrel = \textbf{fzero}(f, 1.2)$$

Per ajuda des de MATLAB® feu *doc fzero*.

Mètodes iteratius

Paràmetres de control de convergència

$$tol_x = |x_{n+1} - x_n|$$

$$tol_f = |f(x_{n+1})|$$

Criteri d'aturada principal:

Donats $\eta_x > 0$ i $\eta_f > 0$ $\quad tol_x < \eta_x$ i $tol_f < \eta_f$

Criteri d'aturada secundari:

Donats $\eta_x > 0$ i $\eta_f > 0$ $\quad tol_x < \eta_x$ o $tol_f < \eta_f$

Procediment Escriure $f(x) = 0$ com $x = g(x)$ establir un esquema iteratiu del tipus

$$x_n = g(x_{n-1})\,, \;\; n > 0.$$

Algorisme

1 $x_1 = a$,

2 Per a $n = 1, 2, \ldots,$ fer:

$$x_{n+1} = g(x_n)\,, \;\; n \geq 1\,,$$

mentre que n no superi el nombre màxim d'iteracions o fins que es compleixi el criteri d'aturada: $|x_{n+1} - x_n| < tol_x$ i $|f(x_{n+1})| < tol_f$.

Pràctica 16

Mètode del punt fix o Mètode de la iteració simple

Escriure una funció de MATLAB® que trobi una solució de l'equació $f(x) = 0$ pel mètode de la iteració simple. Els arguments d'entrada han de ser el valor inicial x_1, la funció g, les cotes max_{iter} tol_x i tol_f. El valor de sortida α, l'aproximació de l'arrel buscada. La funció ha d'escriure per pantalla una taula de resultats intermitjos: per cada iteració del métode ha de mostrar el valor x_{n+1}, el valor $|x_{n+1} - x_n|$ i el valor de la funció $|f(x_{n+1})|$ per observar l'acompliment dels criteris d'aturada.

$$\alpha = \texttt{itera(g,}x_1\texttt{,}max_{iter}\texttt{,}tol_f\texttt{,}tol_x\texttt{)}$$

Procediment Escriure $f(x) = 0$ com $x = g(x)$ establir un esquema iteratiu del tipus

$$x_n = g(x_{n-1})\,,\ \ n > 0.$$

Teorema: Si $|g'(\alpha)| \leq k < 1$

$$|x_{n+1} - \alpha| \leq k|x_n - \alpha| \leq \cdots \leq k^{n+1}|x_0 - \alpha|\,.$$

Si l'aritmètica és exacte, $\bar{x}_{n+1} = g(\bar{x}_n)$,

Fita superior error

$$|\bar{x}_{n+1} - \alpha| < \frac{k^{n+1}}{1-k}|\bar{x}_1 - \bar{x}_0|\,.$$

Pràctica 17

Convergència "a priori"

Escriure `live script` de MATLAB® que

- analitzi la convergència "a priori" del mètode de la iteració simple $x_{n+1} = g(x_{n+1})$ per a l'equació $f(x) = 0$ i obtingui un interval maximal de convergència.
- obtenir el nombre d'iteracions per acomplir els criteris d'aturada.

Acceleració de la convergència

Mètode Δ^2 d'Aitken

$$x'_{n+2} = \frac{x_{n+2}x_n - {x_{n+1}}^2}{x_{n2} - 2x_{n+1} + x_n} = x_{n+2} - \frac{(\Delta x_{n+1})^2}{\Delta^2 x_n}$$

Llavors $x'_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$ més ràpidament, en el sentit que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x'_n - \alpha|}{|x_n - \alpha|} = 0\,.$$

Mètode de Steffensen

A partir d'un procés $x_{k+1} = g(x_k)$ de primer ordre, i unes iteracions, x_0, x_1 i x_2, calculem x'_2, i continuem $x_3 = g(x'_2)$ i $x_4 = g(x_3)$ i tornem a aplicar el procés a la terna x'_2, x_3 i x_4.

Exercicis

Exercici 3

Comproveu que l'equació

$$x^6 = x + 1\,, \tag{1}$$

té una solució a l'interval $[0, 2]$.

a) Calculeu el valor aproximat de l'arrel fent ús **fzero** de MATLAB® .

b) Feu 3 o més iteracions del mètode de bisecció fins que l'interval inicial tingui longitud inferior a 0.25 ($l < 1/4$).

c) Calculeu 5 iterats dels mètodes iteratius

$$\textbf{(f1)}\ x_{n+1} = x_n^6 - 1\,, \quad \textbf{(f2)}\ x_{n+1} = \sqrt[6]{x_n + 1}\,,$$

prenent x_0 l'aproximació del mètode de la bisecció.

d) Quin mètode és convergent? Quin és divergent? Per què? Feu ús del teorema de convergència pels dos mètodes. Comenta les diferències trobades.

Autoavaluació

Exercici 3.- Ompliu la taula següent

n	$x_{n+1} = x_n^6 - 1$	$\lvert f(x_{n+1})\rvert$	$x_{n+1} = \sqrt[6]{x_n + 1}$	$\lvert f(x_{n+1})\rvert$
0				
1				
2				
3				
4				
5				

Exercici 4

Comproveu que l'equació

$$x + \ln x = 0\,, \tag{2}$$

té una solució prop de 0.5.

a) Calculeu el valor aproximat de l'arrel fent ús **fzero** de MATLAB® .

b) Aproximeu la solució de (2) amb $tol_x = tol_f < 0.0005$ fent ús del mètode iteratiu $x_{n+1} = -\ln x_n$.

c) Aproximeu la solució de (2) amb $tol_x = tol_f < 0.0005$ fent ús del mètode iteratiu $x_{n+1} = \exp(-x_n)$.

d) Aproximeu la solució de (2) amb $tol_x = tol_f < 0.0005$ fent ús del mètode iteratiu $x_{n+1} = \dfrac{x_n + e^{-x_n}}{2}$.

e) Quin mètode és convergent? Quin és divergent? Per què? Feu ús del teorema de convergència pels tres mètodes. Comenta les diferències trobades.

Autoavaluació

Exercici 4.- Ompliu la taula següent

n	$x_{n+1} = -\ln x_n$	$x_{n+1} = \exp(-x_n)$	$x_{n+1} = \dfrac{x_n + e^{-x_n}}{2}$
0			
1			
2			
3			
4			
$\vdots$			

Pràctica 18

Apliqueu el mètode d'Aitken per millorar l'ordre de convergència de les successions de l'exercici 4:

$$\mathbf{4.c)}\; x_{n+1} = e^{-x_n}\,,$$

$$\mathbf{4.d)}\; x_{n+1} = \frac{x_n + e^{-x_n}}{2}\,.$$

Autoavaluació

Pràctica 18.- Ompliu la taula següent

n	$x_{n+1} = e^{-x_n}$	Aitken	$x_{n+1} = \dfrac{x_n + e^{-x_n}}{2}$	Aitken
0				
1				
2				
3				
4				
$\vdots$				
9				

Guies de MATLAB

- MathWorks Documentation Center,
  Matlab Users's Guide online
- MathWorks Documentation Center,
  Matlab Functions's Guide online
- MathWorks Documentation Center,
  Matlab Users's Guide in pdf
- MathWorks Documentation Center,
  Tutorials