

# Computació Numèrica

## Tema 3 - Interpolació polinomial

M. Àngela Grau Gotés

Departament de Matemàtiques  
Universitat Politècnica de Catalunya · BarcelonaTech.

24 d'abril de 2020

“Donat el caràcter i la finalitat exclusivament docent i eminentment il·lustrativa de les explicacions a classe d'aquesta presentació, l'autor s'acull a l'article 32 de la Llei de propietat intel·lectual vigent respecte de l'ús parcial d'obres alienes com ara imatges, gràfics o altre material contingudes en les diferents diapositives”



© 2020 by M. Àngela Grau Gotés.

Licència Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional.

# Índex-Ajust de dades

- 1 Introducció
- 2 Polinomi de Taylor
  - Polinomi de Taylor
  - Funcions elementals
  - Propietats bàsiques
- 3 Interpolació polinòmica
  - La fórmula de Lagrange
  - Mètode de les diferències dividides
  - Fenòmen de Runge
- 4 Interpolació polinòmica a trossos
- 5 Ajust de dades
  - Referències

# Introducció

La interpolació és un recurs de primer ordre dins del camp de l'aproximació de funcions.

- Per interpolació es pot substituir una funció d'expressió molt costosa (temps processador) d'avaluar per una altre més senzilla: polinomis, racionals,...
- Per interpolació es pot, a partir d'una taula de valors,  $(x_i, f(x_i))_{i=0,\dots,n}$ , obtenir valors aproximats de  $f(x)$  per a  $x \neq x_i \quad i = 0, \dots, n$
- Per interpolació es pot aproximar de funcions que no es poden obtenir per mètodes analítics.

# Exemple

La taula de valors, reflexa la temperatura de congelació d'un anticongelant, una solució de glicerina (%) amb aigua.

%	C°
0	0
10	-1.6
20	-4.8
30	-9.5
40	-15.4
50	-21.9
60	-33.6
70	-37.8
80	-19.1
90	-1.6
100	17

**Qüestio:** Quin serà el punt de congelació per un anticongelant amb un 45% de glicerina?

# Polinomi de Taylor

# Polinomi de Taylor

## Objectiu

Substituir la funció  $y = f(x)$  per un polinomi  $p(x)$  en processos de càlcul.

## Com pot ser aquest polinomi?

Quan es parla de polinomi de Taylor s'entén que el polinomi coincideix amb la funció i alguna derivada de la funció en un punt.

# El problema

## Polinomi de Taylor

Sigui  $y = f(x)$  una funció real de variable real amb derivades fins a ordre  $n$  en el punt  $x_0 = a$ . Es vol un polinomi de grau  $n$ ,

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - a) + a_2(x - a)^2 + \cdots + a_n(x - a)^n$$

tal que

$$p_n(a) = f(a),$$

$$p'_n(a) = f'(a),$$

$$p''_n(a) = f''(a),$$

$$\vdots$$

$$p_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a).$$

# La solució

## Polinomi de Taylor

Els coeficients del polinomi queden determinats per:

$$a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}, \quad k = 0 \dots n.$$

## Expressió completa grau $n$

$$p_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

# Polinomi de Taylor

## Pregunta

Tota funció és pot aproximar per un polinomi de Taylor de grau  $n$  en  $x_0 = a$ ?

Si, sempre que la funció sigui  $n$  vegades derivable en un entorn de  $x_0 = a$ ,  $\mathcal{I} = (a - \epsilon, a + \epsilon)$ .

# Polinomi de Taylor

S'anomena **Polinomi de Taylor de la funció  $f(x)$  d'ordre  $n$  i centrat en  $x_0 = a$**  al polinomi solució del problema anterior, es a dir:

$$T_n(f, a)(x) = f(a) + f'(a)(x - a) \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n.$$

Si  $a = 0$  també es coneixen per polinomis de McLaurin.

La diferència

$$f(x) - T_n(f, a)(x)$$

s'anomena **resta, residu** o terme complementari i es nota per

$$R_n(f, a)(x).$$

# Polinomi de Taylor

## en particular:

La **recta tangent** a la corba  $y = f(x)$  en  $x_0 = a$  és el polinomi de Taylor d'ordre 1

$$z = f(a) + f'(a)(x - a).$$

La **paràbola tangent** a la corba  $y = f(x)$  en  $x_0 = a$  és el polinomi de Taylor d'ordre 2

$$z = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2.$$

# Exemple 1

Polinomis de Taylor de  $f(x) = e^x$  en  $x_0 = 0$ .

$$f(x) = e^x, \quad f(0) = 1, \quad T_0(x) = 1,$$

$$f'(x) = e^x, \quad f'(0) = 1, \quad T_1(x) = 1 + x,$$

$$f''(x) = e^x, \quad f''(0) = 1, \quad T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2},$$

$$f'''(x) = e^x, \quad f'''(0) = 1, \quad T_3(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!}.$$

Per aquesta funció es té  $f^{(n)}(x) = e^x$ ,  $n > 0$  llavors

$$T_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

# Funcions elementals

Polinomis de Taylor en  $x_0 = 0$

Altres polinomis són

$$f(x) = \sin x, \quad T_n(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1},$$

$$f(x) = \cos x, \quad T_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n},$$

$$f(x) = \ln(1+x), \quad T_n(x) = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1},$$

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad T_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n.$$

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad T_n(x) = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n.$$

# Operacions aritmètiques

Si  $T(x)$  i  $R(x)$  són els polinomis de Taylor de grau  $n$  de  $f$  i  $g$  en  $x_0 = a$ , aleshores

- 1  $T(x) \pm R(x)$  és el polinomi de Taylor de grau  $n$  de  $f \pm g$  en  $x_0 = a$ .
- 2 El polinomi de Taylor de grau  $n$  de  $f \cdot g$  en  $x_0 = a$  és la part de grau  $n$  del producte  $T(x) \cdot R(x)$ .
- 3 El polinomi de Taylor de grau  $n$  de  $f/g$  en  $x_0 = a$  s'obté dividint  $T(x)/R(x)$ , ordenats en ordre decreixent del grau, fins a grau  $n$

penseu en

$$f(x) = \sin(x) + \cos(x) \quad f(x) = \sin(x) \cdot \cos(x), \quad f(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}.$$

# Dues propietats fonamentals

Si  $T(x)$  és el polinomi de Taylor de grau  $n$  de  $f$  en  $x_0 = a$  i  $R(x)$  és el polinomi de Taylor de grau  $n$  de  $g$  en  $x_0 = f(a)$ , aleshores

## Propietat 1

$T'(x)$  és el polinomi de Taylor de  $f'(x)$  en  $x_0 = a$

## Propietat 2

El polinomi de Taylor de grau  $n$  de  $g \circ f$  en  $x_0 = a$  s'obté de pendre els termes fins a grau  $n$  del polinomi  $R(T(x))$ .

penseu en

$$f(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f(x) = e^{x^2}, \quad f(x) = \frac{1}{1+x^2}, \quad f(x) = \frac{2}{3-x}.$$

# Interpolació polinòmica

# Interpolació polinòmica

Donats  $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$ , determinar

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

un polinomi de grau  $n$ , que passi per tots els punts,

$$P(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

Les condicions, totes juntes, donen lloc a un sistema lineal de  $n + 1$  equacions i de  $n + 1$  incògnites:  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ . El determinant del sistema s'anomena determinant de Vandermonde.

# Interpolació polinòmica

$$\begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

Les condicions, totes juntes, donen lloc a un sistema lineal de  $n + 1$  equacions i de  $n + 1$  incògnites:  $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$ . El determinant del sistema s'anomena determinant de Vandermonde.

# Existència i unicitat

## Teorema

La solució del problema existeix i és única si tots els nodes  $x_i$  són diferents.

$$\begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^n \prod_{j=i+1}^n (x_i - x_j)$$

És un sistema lineal gran, costos de resoldre i amb possible inestabilitat numèrica, aquest mètode de resolució no és viable.

# Error

Sigui  $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  una funció amb derivades fins a l'ordre  $n + 1$  amb continuïtat, sigui  $P_n(x)$  el polinomi interpolador de  $f$  en els nodes

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Sigui  $w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$  i  $\bar{x} \in [a, b]$ , llavors existeix  $c \in [a, b]$  tal que:

$$E(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} w(\bar{x})$$

# Fórmules per calcular el polinomi interpolador

# Fórmula de Lagrange

El mètode de la fórmula de Lagrange és una manera d'obtenir el polinomi interpolador dels  $n + 1$  punts

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n).$$

En aquest mètode el polinomi interpolador s'escriu de la forma:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \cdot L_k(x), \quad L_k(x_j) = \delta_{kj}$$

# Polinomis de Lagrange

Si  $w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ , llavors

$$L_k(x) = \frac{w(x)}{w'(x_k)(x - x_k)}.$$

o equivalentment

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}.$$

# Exercici 1

$x$	1	2	4	5
$f(x)$	0	6	12	24

Obteniu el polinomi d'interpolació pel mètode de Lagrange per aquesta taula de dades, doneu un valor aproximat de  $f(3)$ .

# Diferències Dividides

El mètode de Newton de diferències dividides és una altra forma d'obtenir el polinomi interpolador dels  $n + 1$  punts  $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$ .

En aquest mètode el polinomi interpolador s'escriu de la forma:

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ \dots + c_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}).$$

# Diferències Dividides - Notació

Per  $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$ , es defineixen

- 1 les **diferències dividides d'ordre 0** de la funció  $f$ , per cada  $i = 0, 1, \dots, n$  es defineixen i noten per

$$f[x_i] = f(x_i).$$

- 2 les **diferències dividides d'ordre 1** de la funció  $f$ , per cada  $i = 0, 1, \dots, n - 1$  es defineixen i noten per

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}.$$

# Diferències Dividides - Notació

Partint de les diferències dividides d'ordre  $k - 1$ ,

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}] \quad \text{i} \quad f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}]$$

es defineixen les **diferències dividides d'ordre  $k$**  corresponents a  $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}$  per

$$\frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}.$$

i es noten per

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}]$$

# Polinomi per diferències dividides

El polinomi interpolador de grau  $n$  s'escriu com:

$$\begin{aligned} P_n(x) = & f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \\ & f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \\ & + \dots + \\ & f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

i la fórmula de l'error de l'aproximació és

$$E(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} w(\bar{x})$$

## Exercici 2

Trobeu el polinomi d'interpolació per la taula:

$x$	1	2	4	5
$f(x)$	0	6	12	24

emprant el mètode de les diferències dividides de Newton.

# Fenòmen de Runge

# Fenòmen de Runge

Construiu una taula per a la funció

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

en  $x = -0.9 \div 0.9 (0.2)$ .

Calculeu els polinomis interpoladors de grau 3, 6 i 9.  
Representeu gràficament  $f(x)$  i els polinomis obtinguts.  
Avalueu l'error que es comet en  $x = -1 \div 1, (0.2)$ .  
Què s'observa? (**Fenòmen de Runge**).

# Fenòmen de Runge

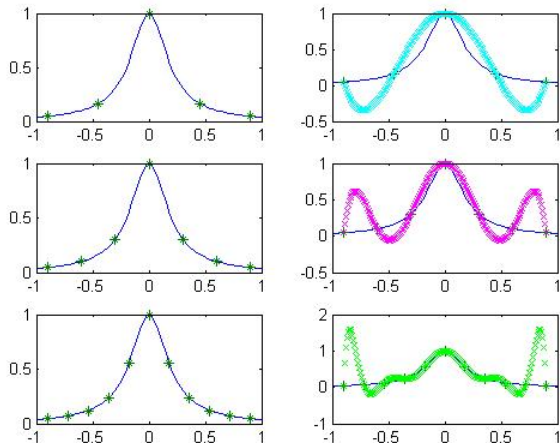


Figura: nodes equiespaiats

# Interpolació d'Hermite

# Interpolació d'Hermite

Obtenir un polinomi

$$H_m(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$$

de grau  $m \leq 2n + 1$  que compleixi les condicions

$$H_m(x_j) = y_j, \quad H'_m(x_j) = y'_j$$

per la taula de dades

$x$	$x_0$	$x_1$	$\cdots$	$x_n$
$y$	$y_0$	$y_1$	$\cdots$	$y_n$
$y'$	$y'_0$	$y'_1$	$\cdots$	$y'_n$

# Interpolació d'Hermite per diferències dividides

Pels nodes repetits, es considera  $f[x_i, x_i] = f'(x_i) = y'_i$ .

$x_0$	$f[x_0]$				
$x_0$	$f[x_0]$	$f[x_0, x_0]$			
$x_1$	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_0, x_1]$		
$x_1$	$f[x_1]$	$f[x_1, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_1]$	$f[x_0, x_0, x_1, x_1]$	
$x_2$	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_1, x_2]$	$f[x_0, x_0, x_1, x_1, x_2]$
$x_2$	$f[x_2]$	$f[x_2, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_2]$	$f[x_1, x_1, x_2, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_1, x_2, x_2]$

$$\begin{aligned}H_5(x) = & f[x_0] + f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 \\& + f[x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^2(x - x_1) \\& + f[x_0, x_0, x_1, x_1, x_2](x - x_0)^2(x - x_1)^2 \\& + f[x_0, x_0, x_1, x_1, x_2, x_2](x - x_0)^2(x - x_1)^2(x - x_2).\end{aligned}$$

# Interpolació d'Hermite - Error

Sigui  $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$  una funció amb derivades fins a l'ordre  $2n + 2$  amb continuïtat, sigui  $H_{2n+1}(x)$  el polinomi interpolador de  $f$  en els nodes  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .

Sigui  $w^2(x) = (x - x_0)^2(x - x_1)^2 \dots (x - x_n)^2$  i  $\bar{x} \in [a, b]$ , llavors existeix  $c \in [a, b]$  tal que:

$$f(\bar{x}) - H_{2n+1}(\bar{x}) = \frac{f^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!} w^2(\bar{x})$$

# Exercici 3

Trobeu el polinomi d'interpolació per la taula:

$x$	$-1$	$2$
$f(x)$	$-11$	$14$
$f'(x)$	$14$	$5$

emprant el mètode de les diferències dividides de Newton.

# Elecció òptima de nodes

# Elecció òptima de nodes

Sabem que la fórmula de l'error per la interpolació polinòmica és

$$E(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} w(\bar{x})$$

on  $w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$  i  $\bar{x} \in [a, b]$ .

Ens interessa escollir els punts de manera que s'obtingui el mínim error possible. Per aconseguir això utilitzarem els polinomis de Chebyshev.

# Abscisses de Chebyshev

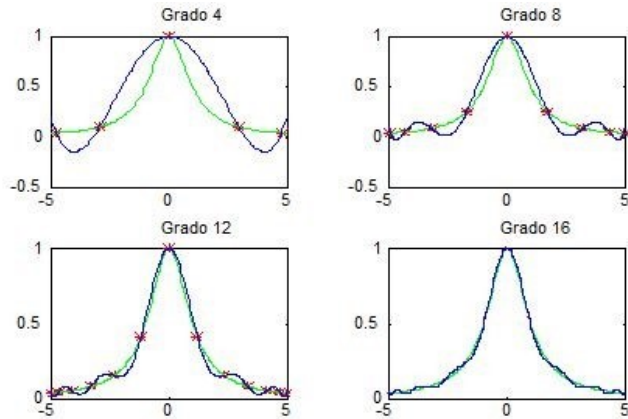


Figura: nodes de Chebyshev

# Polinomis de Chebyshev

Els polinomis de Chebyshev de primer tipus són

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad n \geq 0.$$

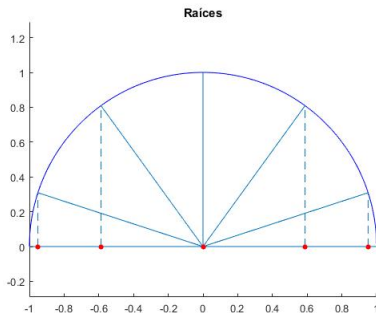
I per tant,  $|T_n(x)| \leq 1$ ,  $-1 \leq x \leq 1$ .

La recurrència és:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x,$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 2.$$

# Abscisses de Chebyshev



Els nodes de Chebyshev no són equiespaiats i tenen la propietat que  $w(x)$  és mínim a l'interval  $[-1, 1]$ .

$$x \in [-1, 1] \Rightarrow z(x) := \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}, \quad z \in [a, b].$$

# Abscisses de Chebyshev

Les arrels del polinomi  $T_n(x)$  són: (s'obtenen igualant  $\cos(n\theta) = 0$ )

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

## valor mínim

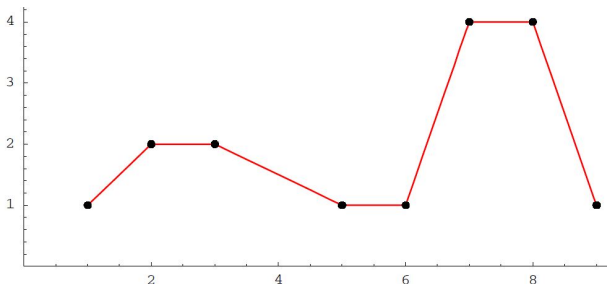
En general  $\max |w(x)| \geq \frac{1}{2^n}$  i si els punts  $x_i$  són les arrels del polinomi de Chebyshev de grau  $n+1$  es verifica

$$\max |w(x)| = \frac{1}{2^n}$$

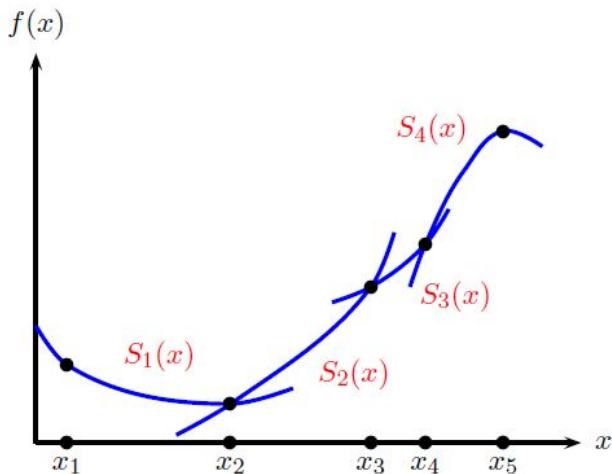
# “Splines”

Interpolació polinomial a trossos

# Spline Linear



# Spline Cúbic



# Spline Cúbic

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i \quad i = 0 \div (n - 1)$$

Les condicions són

$$① \quad S_i(x_i) = f(x_i), \quad i = 0 \div (n - 1), \quad S_{n-1}(x_n) = f(x_n).$$

$$② \quad S_{i+1}(x_{i+1}) = S_i(x_{i+1}), \quad i = 0 \div (n - 2).$$

$$③ \quad S'_{i+1}(x_{i+1}) = S'_i(x_{i+1}), \quad i = 0 \div (n - 2).$$

$$④ \quad S''_{i+1}(x_{i+1}) = S''_i(x_{i+1}), \quad i = 0 \div (n - 2).$$

En total són  $4n$  incògnites i  $4n - 2$  condicions. Calen condicions addicionals, per exemple

$$S''_0(x_0) = S''_{n-1}(x_n) = 0, \text{ (spline cúbic natural)}$$

$$S'_0(x_0) = f'(x_0), \quad S'_{n-1}(x_n) = f'(x_n), \text{ (spline cúbic lligat),}$$

# Spline Cúbic

$$\begin{bmatrix}
 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\
 h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & 0 & \dots & & 0 \\
 0 & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & 0 & & \vdots \\
 \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots \\
 \vdots & & & 0 & h_{n-2} & 2(h_{n-2} + h_{n-1}) & h_{n-1} & 0 \\
 0 & & \dots & \dots & 0 & h_{n-1} & 2(h_{n-1} + h_n) & h_n \\
 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 b_1 \\
 b_2 \\
 b_3 \\
 \vdots \\
 b_{n-1} \\
 b_n \\
 b_{n+1}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 0 \\
 \frac{3}{h_2}(f_3 - f_2) - \frac{3}{h_1}(f_2 - f_1) \\
 \frac{3}{h_3}(f_4 - f_3) - \frac{3}{h_2}(f_3 - f_2) \\
 \vdots \\
 \frac{3}{h_{n-1}}(f_n - f_{n-1}) - \frac{3}{h_{n-2}}(f_{n-1} - f_{n-2}) \\
 \frac{3}{h_n}(f_{n+1} - f_n) - \frac{3}{h_{n-1}}(f_n - f_{n-1}) \\
 0
 \end{bmatrix}$$

# Splines

**Paul de Faget de Casteljau** 1930-

French mathematician/physicist

1958-1992: Citroën; unpublished work in **1958**



**Pierre Bezier** 1910-1999

1933-1975: engineer at Renault

**1960**: beginning of CAD/CAM work, Bezier curves



**Isaac Jacob Schoenberg** 1903-1990

Born in Romania (Landau's son-in-law). To USA in 1930.

Chicago, Harvard, Princeton, Swarthmore, Colby...

1941-1966: University of Pennsylvania

1943-1945: Army Ballistic Research Laboratory

**1946**: two papers on splines

1966-1973: U. of Wisconsin



**Carl de Boor** 1937-

Born in what became East Germany. To USA in 1959.

1960-1964: General Motors (grad student intern)

**1962**: first of many publications on splines

Purdue, Michigan...

1972- U. of Wisconsin



Desarrollo histórico de los splines y sus principales protagonistas. Trefethen [2005]

# Corbes de Bézier

$$B(t) = (1 - t)P_0 + tP_1, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$B(t) = (1 - t)^2P_0 + 2t(t - 1)P_1 + t^2P_2, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$B(t) = (1 - t)^3P_0 + 3t(t - 1)^2P_1 + 3(t - 1)t^2P_2 + t^3P_3, \quad 0 \leq t \leq 1$$

# Bézier - B-spline

$$B(t) = (1 - t)P_0 + tP_1, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$B(t) = (1 - t)^2P_0 + 2t(t - 1)P_1 + t^2P_2, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$B(t) = (1 - t)^3P_0 + 3t(t - 1)^2P_1 + 3(t - 1)t^2P_2 + t^3P_3, \quad 0 \leq t \leq 1$$

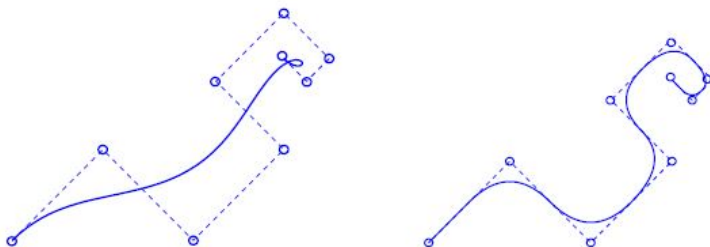
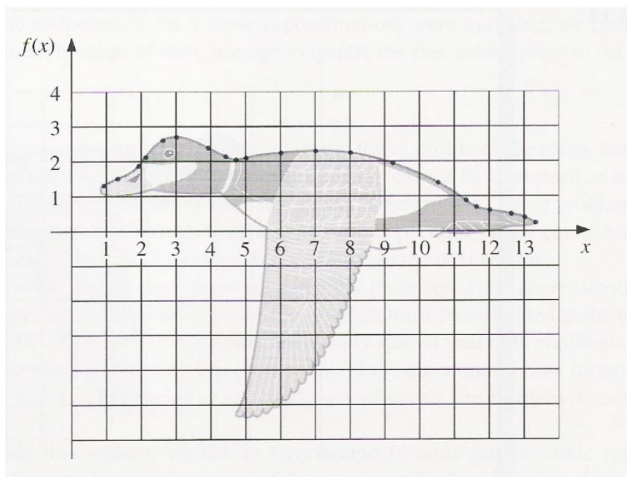


Figura: Corba de Bézier i B-spline per idèntics punts de control

# Ajust de corbes



# Ajust de corbes

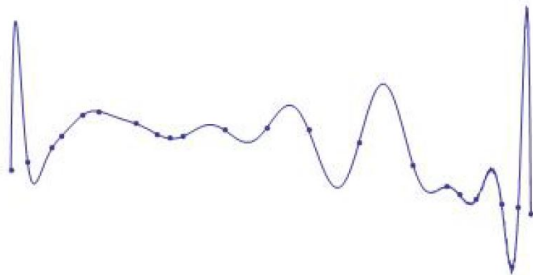


Figura: Polinomi interpolador

# Ajust de corbes



Figura: spline cúbic

# Ajust de dades

# Millor Aproximació

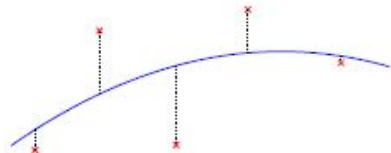
Quan a la taula de valors per a un mateix  $x_i$  tenim diversos valors de  $y_i$  el fet d'interpolar mitjançant polinomis no és possible, però podem construir una corba que s'ajusti el millor possible les dades disponibles, sense que la corba passi pels punts donats sino que "s'assembli" el més possible, per exemple minimitzan l'error quadràtic.

# Mètode dels mínims quadrats

L'aproximació la fem amb una funció

$$g(x) = \sum_{i=0}^m c_i \phi_i(x), \quad m < n, .$$

i es minimitza la suma de les distàncies dels nodes a la corba.



$$E^2 = \sum_{k=1}^n (g(x_k) - y_k)^2 .$$

# Mètode dels mínims quadrats

El problema general d'aproximar un conjunt de dades

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$$

per un polinomi



$$P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

on  $n < m - 1$  dóna lloc a un sistema de  $m$  equacions i  $n + 1$  incògnites, un sistema sobredeterminat.

# Mètode dels mínims quadrats

- Recta:  $y = mx + b$ .
- Paràbola:  $y = ax^2 + bx + c$ .
- Cúbica:  $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ .
- Potencial:  $y = bx^m \Rightarrow \ln(y) = \ln(b) + m \ln(x)$ .
- Exponencial:  $y = be^{mx} \Rightarrow \ln(y) = \ln(b) + mx$ .
- Logarítmica:  $y = m \ln(x) + b$ .
- Hiperbòlica:  $y = \frac{1}{mx + b} \Rightarrow mx + b = \frac{1}{y}$ .

# Referències

-  Numerical Computing with MATLAB,  
Libros de texto de Cleve Moler
-  NCM Toolbox,  
codis de matlab