Computació Numèrica

Equacions No Lineals
Algorismes (I)

M. Àngela Grau Gotés

Departament de Matemàtica Aplicada II
Universitat Politècnica de Catalunya · BarcelonaTech.

16 de març de 2020

drets d'autor

"Donat el caràcter i la finalitat exclusivament docent i eminentment il·lustrativa de les explicacions a classe d'aquesta presentació, l'autor s'acull a l'article 32 de la Llei de propietat intel·lectual vigent respecte de l'ús parcial d'obres alienes com ara imatges, gràfics o altre material contingudes en les diferents diapositives"

Índex

1. Sessió 6.
   - Matlab
   - Mètodes de resolució
     - Pràctica 12: Mètode de la bisecció
     - Pràctica 13: Mètode de Newton
     - Pràctica 14: Mètode de la secant
   - Exercicis
     - Pràctica 15: Mètode de la regula falsi
2. Referències

El manual de referència és http://www.mathworks.es/es/help/matlab/

MATLAB®

Recordem ...

Com definir funcions en MATLAB®

Funcions definides en un fitxer, vegeu

http://www.mathworks.es/es/help/matlab/ref/function

$$function\ [output_{args}] = untitled(input_{args})$$

% *UNTITLED Summary of this function goes here*

% *Detailed explanation goes here*

...

...

end

Funcions definides en la finestra de comandes.

$>> x = [0 : 0.01 : 2];$

$>> f = @(x)x + \ln(x + 1);$

Aprenem . . .

fzero

Les equacions d'una variable es resolen fent ús de **fzero**:

$$>> f = @(x)x + \ln(x+1);$$

$$>> arrel = \textbf{fzero}(f, 1.2)$$

Per ajuda des de MATLAB® feu *doc fzero*.

Mètodes iteratius

Mètode de la bisecció

Algorisme

1 Si $f(a)f(b) < 0$, pendre $a_0 = a$, $b_0 = b$,

2 Per a $n = 0, 1, \ldots,$ fer: $\alpha_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ i

Si $f(a_n)f(\alpha_{n+1}) < 0$, pendre $a_{n+1} = a_n$, $b_{n+1} = \alpha_{n+1}$, altrament, pendre $a_{n+1} = \alpha_{n+1}$, $b_{n+1} = b_n$.

Anàlisi de l'error: Donat $\eta > 0$

$$|\alpha_{n+1} - \alpha| \leq |b_{n+1} - a_{n+1}| < \frac{|b - a|}{2^{n+1}} < \eta$$

Mètode de la bisecció

Codificació de Llibre de C. Moler

$$
\begin{aligned}
& a = 1; b = 2; k = 1; \\
& while\ ((b-a) > eps) \\
& \quad x = (a+b)/2; \\
& \quad if\ \ sign(f(x)) == sign(f(b)) \\
& \quad b = x; \\
& else \\
& \quad a = x; \\
& end \\
& k = k+1; \\
& end
\end{aligned}
$$

Pràctica 12

Mètode de la bisecció

Escriure una funció de MATLAB® que trobi una solució de l'equació $f(x) = 0$ pel mètode de la bisecció. Els arguments d'entrada han de ser l'interval inicial $[a, b]$, la funció f i les cotes max_{iter} i η. El valor de sortida α, l'aproximació de l'arrel buscada. La funció ha d'escriure per pantalla una taula de resultats intermitjos: per cada iteració del métode ha de mostrar l'interval $[a_n, b_n]$, el punt mig α_{n+1} i els valors de la funció per observar el compliment del Teorema de Bolzano.

$$\alpha = \texttt{biseccion(f,a,b,}\eta\texttt{,}max_{iter}\texttt{)}$$

Paràmetres de control de convergència

$$tol_x = |x_{n+1} - x_n|$$
$$tol_f = |f(x_{n+1})|$$

Criteri d'aturada principal:
Donats $\eta_x > 0$ i $\eta_f > 0$ $\quad tol_x < \eta_x \quad$ i $\quad tol_f < \eta_f$

Criteri d'aturada secundari:
Donats $\eta_x > 0$ i $\eta_f > 0$ $\quad tol_x < \eta_x \quad$ o $\quad tol_f < \eta_f$

Mètode de Newton

Mètode de Newton-Raphson o mètode de la tangent

Algorisme

1 $x_0 = a$,

2 Per a $n = 0, 1, \ldots,$ fer:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

mentre que n no superi el nombre màxim d'iteracions o fins que es compleixi el criteri d'aturada: $|x_{n+1} - x_n| < tol_x$ i $|f(x_{n+1})| < tol_f$.

Pràctica 13

Mètode de la tangent

Escriure una funció de MATLAB® que trobi una solució de l'equació $f(x) = 0$ pel mètode de la tangent. Els arguments d'entrada han de ser el valor inicial x_0, les funcions f i df, les cotes max_{iter}, tol_x i tol_f. El valor de sortida α, l'aproximació de l'arrel buscada. La funció ha d'escriure per pantalla una taula de resultats intermitjos: per cada iteració del métode ha de mostrar el valor x_{n+1}, el valor $|x_{n+1} - x_n|$ i el valor de la funció $|f(x_{n+1})|$ per observar l'acompliment dels criteris d'aturada.

$$\alpha \; \texttt{=} \; \texttt{newton(f,df,}x_0\texttt{,}max_{iter}\texttt{,}tol_f\texttt{,}tol_x\texttt{)}$$

Mètode de la secant

Algorisme

1 $x_1 = a$, $x_2 = b$,

2 Per a $n = 2, 3, \dots,$ fer:

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\frac{(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

o equivalent

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}f(x_n) - x_n f(x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}$$

mentre que n no superi el nombre màxim d'iteracions o

Pràctica 14

Mètode de la secant

Escriure una funció de MATLAB® que trobi una solució de l'equació $f(x) = 0$ pel mètode de la secant. Els arguments d'entrada han de ser els valors inicials x_1 i x_2, la funció f, les cotes max_{iter}, tol_x i tol_f. El valor de sortida α, l'aproximació de l'arrel buscada. La funció ha d'escriure per pantalla una taula de resultats intermitjos: per cada iteració del métode ha de mostrar wl valor x_{n+1}, el valor $|x_{n+1} - x_n|$ i el valor de la funció $|f(x_{n+1})|$ per observar l'acompliment dels criteris d'aturada.

$$\alpha = \texttt{secante}(\texttt{f}, x_1, x_2, max_{iter}, tol_f, tol_x)$$

Exercicis

Exercici 1

Comproveu que l'equació

$$x^6 = x + 1\,, \tag{1}$$

té una solució a l'interval $[0, 2]$.

a) Calculeu 5 iterats del mètode de Newton per l'equació (1).

b) Calculeu 5 iterats del mètode de la secant per l'equació (1).

c) Calculeu 5 iterats pel mètode de bisecció per l'equació (1).

d) Calculeu el valor aproximat fent ús **fzero** de MATLAB® . Quin mètode dona una millor aproximació? Quin pitjor? Comenta les diferències trobades.

Exercici 2

Comproveu que l'equació

$$e^x = 2 - x \,, \tag{2}$$

té una única solució.

a) Aproximeu la solució de (2) amb 3 decimals exactes pel mètode de Newton.

b) Aproximeu la solució de (2) amb 3 decimals exactes pel el mètode de la secant.

c) Aproximeu la solució de (2) amb 3 decimals exactes pel mètode de bisecció.

d) Calculeu el valor aproximat fent ús **fzero** de MATLAB® . Quin mètode necessita més iteracions? Quin menys? Comenta les diferències trobades.

Pràctica 15

Mètode de la regula falsi

Escriure una funció de MATLAB® que trobi una solució de l'equació $f(x) = 0$ pel mètode de la regula falsi. Els arguments d'entrada han de ser l'interval inicial $[a, b]$, la funció f les cotes max_{iter} i tol_f. El valor de sortida α, l'aproximació de l'arrel buscada. La funció ha d'escriure per pantalla una taula de resultats intermitjos: per cada iteració del método ha de mostrar l'interval $[a_n, b_n]$, el valor x_{n+1} i el valor de la funció $f(x_{n+1})$ per observar l'acompliment dels criteris d'aturada i el compliment del Teorema de Bolzano.

$$\alpha = \texttt{regulafalsi(f,a,b,}max_{iter}\texttt{,}tol_f\texttt{)}$$

Exercici 3

Sea t la probabilidad de que un jugador A gane un punto independientemente de qué jugador tenga el servicio en un partido de tenis mesa, entonces la probabilidad de que un jugador A derrote a un jugador B por 21 a 0 en un partido de tenis de mesa es:

$$P = \left(\frac{1+t}{2}\right)\left(\frac{t}{1-t+t^2}\right)^{21} \quad 0 \leq t \leq 1\,.$$

Se pide: Determinar t^*, el primer valor de t, a partir del cual el jugador A derrotará al jugador B por 21 a 0 al menos la mitad de las veces que jueguen ($P = 0.50$).

(3.a) Primero determina $[a_0, b_0]$ un intervalo inicial en las condiciones del Teorema de Bolzano de longitud $l = b_0 - a_0 = 0.1$ que contenga la raíz.

(3.b) Segundo, determina t^* con una precisión de tres decimales correctos, por el método de la regula falsi y condición inicial los extremos del intervalo de longitud $l = 0.1$ del apartado anterior.

Guies de MATLAB

- MathWorks Documentation Center,
  Matlab Users's Guide online
- MathWorks Documentation Center,
  Matlab Functions's Guide online
- MathWorks Documentation Center,
  Matlab Users's Guide in pdf
- MathWorks Documentation Center,
  Tutorials