Computació Numèrica

Àlgebra lineal numèrica.
(I) Valors propis.
(II) Valors singulars.

M. Àngela Grau Gotés

Departament de Matemàtica Aplicada II
Universitat Politècnica de Catalunya · BarcelonaTech.

10 de març de 2020

drets d'autor

"Donat el caràcter i la finalitat exclusivament docent i eminentment il·lustrativa de les explicacions a classe d'aquesta presentació, l'autor s'acull a l'article 32 de la Llei de propietat intel·lectual vigent respecte de l'ús parcial d'obres alienes com ara imatges, gràfics o altre material contingudes en les diferents diapositives"

Índex

MATLAB®

Funcions matricials

a) La <u>trasposada</u> d'una matriu `A`, s'obté per `A'`.
b) La <u>inversa</u> d'una matriu `A`, s'obté per `inv(A)`.
c) La <u>diagonal</u> d'una matriu `A`, s'obté per `diag(A)`.
d) El <u>determinant</u> d'una matriu `A`, s'obté per `det(A)`.
e) `rank(A)` és el <u>rang</u> d'una matriu `A`.
f) `norm(A)` és la <u>norma</u> d'una matriu `A`.
g) `norm(v)` és el <u>mòdul</u> d'un vector `v`.

Funcions predefinides

a) `A\b` , solució del sistema $Ax = b$.

b) `[L,U,P]=lu(A)` , factorització $PA = LU$.

c) `L=chol(A)` , factorització $A = LL'$.

d) `[Q,R]=qr(A)` , factorització $A = QR$.

e) `[V,D]=eig(A)` , vectors i valors propis.

f) `[S,V,D]=svd(A)` , descompossició en valors singulars.

g) Parts d'una matriu:

- superior `triu(A)` ,
- inferior `tril(A)` ,
- diagonal `diag(A)` .

Valors i vectors propis

Per practicar...

Mètode de les potències, valor propi de mòdul màxim. Algorisme.

1.- $x_0 = (\; , \; , \ldots , \;)^t$

2.- $z_k = Ax_k$

3.- $m_{k+1} = \|z_k\|_\infty$ $\leftarrow$ sempre positiu !!

4.- $x_{k+1} = \dfrac{1}{m_{k+1}} z_k$

5.- **criteri de parada** $\|x_{k+1} - x_k\|_\infty < \epsilon$

L'aproximació del valor propi és m_{k+1}
i la del vector propi és x_{k+1}.

Per practicar...

Mètode de les potències, valor propi de mòdul mínim. Algorisme.

1.- $x_0 = (\;,\; ,\ldots, \;)^t$

2.- Resoldre $Az_k = x_k$

3.- $m_{k+1} = \|z_k\|_\infty$ $\leftarrow$ sempre positiu !!

4.- $x_{k+1} = \dfrac{1}{m_{k+1}} z_k$

5.- **criteri de parada** $\|x_{k+1} - x_k\|_\infty < \epsilon$

L'aproximació del valor propi és $\dfrac{1}{m_{k+1}}$ i la del vector propi és x_{k+1}.

Calculeu, amb quatre xifres significatives, el valor propi dominant de la matriu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_{10} \approx \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pràctica 7

Calculeu els valor propis de mòdul màxim i mínim, així com els vectors propis corresponents de la matriu següent:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 12 & 3 & 5 \\ 3 & 13 & 0 & 7 \\ 2 & 11 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Quocient de Rayleigh

Modifiqueu a l'algoritme anterior amb

$$m_k = \frac{z_k^t \cdot x_k}{x_k^t \cdot x_k}$$

$$x_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_{10} \approx \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pràctica 8

Afegiu el criteri del quocient de Rayleigh als vostres scripts del mètode de la potència.

Calculeu els valor propis de mòdul màxim i mínim, així com els vectors propis corresponents de les matrius següents:

$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 12 & 16 & -15 \\ 12 & 388 & 309 & 185 \\ 16 & 309 & 312 & 80 \\ -15 & 185 & 80 & -600 \end{pmatrix}, \qquad b)\ \begin{pmatrix} 5 & 4 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

MÈTODES DE FACTORITZACIÓ

- Mètode QR de Francis (1961).

Utilitza la factorització de la matriu A en QR amb Q matriu ortogonal (o unitària) i R matriu triangular superior.

El mètode comença amb $A_1 = A$, s'obtenen

Q_k matriu ortogonal (o unitària) i

R_k matriu triangular superior

tals que $\mathbf{A_k = Q_k R_k}$ per expressar (1)

la matriu següent com $\mathbf{A_{k+1} = R_k Q_k}$. (2)

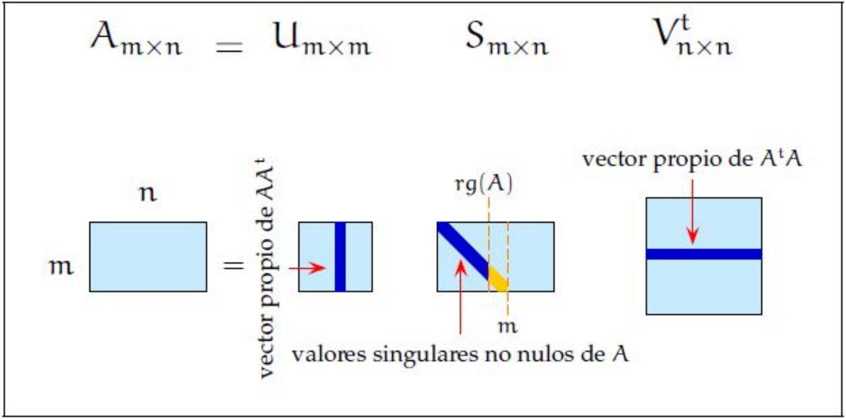
Pràctica 9

Determineu els valors propis de les matrius seguents pel mètode **QR**.

$$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 0 & 12 & 16 & -15 \\ 12 & 388 & 309 & 185 \\ 16 & 309 & 312 & 80 \\ -15 & 185 & 80 & -600 \end{pmatrix}$$

Valors Singulars - SVD

Descomposició en Valors Singulars



Matriu Pseudoinversa

Per A matriu MxN, la pseudoinversa A^+ matriu NxM tal que $AA^+A=A$ i $A^+AA^+=A^+$. De la descomposició en valors singulars, $A = U\Sigma V^T$, la pseudoinversa de $A^+ = V^T\Sigma^+U$ amb Σ^+ definit per

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & & & & \\ 0 & \ddots & 0 & & & \\ & 0 & \sigma_r & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \Sigma^+ = \begin{pmatrix} \sigma_1^{-1} & 0 & & & & \\ 0 & \ddots & 0 & & & \\ & 0 & \sigma_r^{-1} & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ddots & 0 \\ & & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- **SISTEMES lineals sobredeterminats.**

  Si A és $M \times N$ i $M \geq N$, b vector $M \times 1$, $Ax=b$ no té solució, llavors busquem x tal que Ax sigui "la millor" aproximació (pel mètode de mínims quadrats) de b: trobarem el vector x que minimitza la norma euclidiana del vector residu.

- **TEOREMA**
  Si x satisfà $A^T(b-Ax)=0$
  llavors, $\forall y$ $y \in \mathbb{R}^N$ es verifica: $\|b-Ax\|_2 \leq \|b-Ay\|_2$

  La matriu A^TA de $A^TAx=A^Tb$, és quadrada simètrica d'ordre N,

- **TEOREMA** A^TA és no singular $\Leftrightarrow$ rang(A)=N

- **TEOREMA** La solució mínima de $Ax=b$ és $x=A^+b$.

Pràctica 10

Descomposició en valors singulars

La taula següent ens dóna el nombre de bacteris per unitat de volum en funció del temps transcorregut:

Hores x	0	1	2	3	4	5	6
Bacteris y	32	47	65	92	132	190	275

Calculeu una corba del tipus $y = ab^x$ que aproximi aquest núvol de punts. Feu una predicció del nombre de bacteris al cap de 7 hores. Cal que feu us de la rutina `svd` del `Matlab` que dóna la descomposició en valors singulars.

Pràctica 11

Determineu una funció quadràtica que satisfaci al màxim (error quadràtic mínim) la taula següent:

X	8	10	12	16	20	40
Y	0.88	1.22	1.64	2.72	3.96	11.96

Feu una predicció per l'abscisa $x = 14$ i per $x = 40$.
Cal que feu us de la rutina `svd` del MATLAB® que dóna la descompossició en valors singulars.

Pràctica 12

Corba amb millor ajust

X	0.25	0.50	0.75	1.00	1.25	1.50	1.75
Y	0.40	0.50	0.90	1.28	1.60	1.66	2.02

Empreu una tècnica de mínims quadrats per ajustar la taula de dades a funcions del tipus:

1. $y = a_0 + a_1 x$. Determineu a_0 i a_1, doneu l'equació de la funció obtinguda i calculeu el vector residu en la solució.
2. $y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4$. Determineu a_0, a_1, a_2, a_3 i a_4, doneu l'equació de la funció obtinguda i calculeu el vector residu en la solució.
3. $y = a x^{\alpha}$. Determineu a i α, doneu l'equació de la funció obtinguda i calculeu el vector residu en la solució.
4. Quin dels tipus sembla el més adient. Per què?

Guies de MATLAB

- MathWorks Documentation Center, Matlab Users's Guide online
- MathWorks Documentation Center, Matlab Functions's Guide online
- MathWorks Documentation Center, Matlab Users's Guide in pdf
- MathWorks Documentation Center, Tutorials