

Computació Numèrica

Tema 4 - Interpolació polinomial

M. Àngela Grau Gotés

Departament de Matemàtiques
Universitat Politècnica de Catalunya · BarcelonaTech.

28 d'abril de 2020

“Donat el caràcter i la finalitat exclusivament docent i eminentment il·lustrativa de les explicacions a classe d'aquesta presentació, l'autor s'acull a l'article 32 de la Llei de propietat intel·lectual vigent respecte de l'ús parcial d'obres alienes com ara imatges, gràfics o altre material contingudes en les diferents diapositives”



© 2020 by M. Àngela Grau Gotés.

Licencia Creative Commons Atribución-NoComercial-SinDerivadas 4.0 Internacional.

Índex-Ajust de dades

- 1 Introducció
- 2 Interpolació polinòmica
 - Polinomi interpolador
 - Fórmules per calcular el polinomi interpolador
 - Fenòmen de Runge
 - Interpolació d'Hermite
- 3 Interpolació polinòmica a trossos
- 4 Ajust de dades
- 5 Referències

Introducció

La interpolació és un recurs de primer ordre dins del camp de l'aproximació de funcions.

- Per interpolació es pot substituir una funció d'expressió molt costosa (temps processador) d'avaluar per una altre més senzilla: polinomis, racionals,...
- Per interpolació es pot, a partir d'una taula de valors, $(x_i, f(x_i))_{i=0,\dots,n}$, obtenir valors aproximats de $f(x)$ per a $x \neq x_i \quad i = 0, \dots, n$
- Per interpolació es pot aproximar de funcions que no es poden obtenir per mètodes analítics.

Exemple

La taula de valors, reflexa la temperatura de congelació d'un anticongelant, una solució de glicerina (%) amb aigua.

%	C°
0	0
10	-1.6
20	-4.8
30	-9.5
40	-15.4
50	-21.9
60	-33.6
70	-37.8
80	-19.1
90	-1.6
100	17

Qüestio: Quin serà el punt de congelació per un anticongelant amb un 45% de glicerina?

Interpolació polinòmica

Interpolació polinòmica

Donats $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$, determinar

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,$$

un polinomi de grau n , que passi per tots els punts,

$$P(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n.$$

Les condicions, totes juntes, donen lloc a un sistema lineal de $n + 1$ equacions i de $n + 1$ incògnites: $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$. El determinant del sistema s'anomena determinant de Vandermonde.

Interpolació polinòmica

$$\begin{pmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_n \\ a_{n-1} \\ \vdots \\ a_1 \\ a_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x_0) \\ f(x_1) \\ \vdots \\ f(x_{n-1}) \\ f(x_n) \end{pmatrix}$$

Les condicions, totes juntes, donen lloc a un sistema lineal de $n + 1$ equacions i de $n + 1$ incògnites: $a_n, a_{n-1}, \dots, a_1, a_0$. El determinant del sistema s'anomena determinant de Vandermonde.

Existència i unicitat

Teorema

La solució del problema existeix i és única si tots els nodes x_i són diferents.

$$\begin{vmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \cdots & x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \cdots & x_1 & 1 \\ x_2^n & x_2^{n-1} & \cdots & x_2 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \cdots & x_n & 1 \end{vmatrix} = \prod_{i=0}^n \prod_{j=i+1}^n (x_i - x_j)$$

És un sistema lineal gran, costos de resoldre i amb possible inestabilitat numèrica, aquest mètode de resolució no és viable.

Error

Sigui $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció amb derivades fins a l'ordre $n + 1$ amb continuïtat, sigui $P_n(x)$ el polinomi interpolador de f en els nodes

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b.$$

Sigui $w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ i $\bar{x} \in [a, b]$, llavors existeix $c \in [a, b]$ tal que:

$$E(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} w(\bar{x})$$

Fórmules per calcular el polinomi interpolador

Fórmula de Lagrange

El mètode de la fórmula de Lagrange és una manera d'obtenir el polinomi interpolador dels $n + 1$ punts

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n).$$

En aquest mètode el polinomi interpolador s'escriu de la forma:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n y_k \cdot L_k(x), \quad L_k(x_j) = \delta_{kj}$$

Polinomis de Lagrange

Si $w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$, llavors

$$L_k(x) = \frac{w(x)}{w'(x_k)(x - x_k)}.$$

o equivalentment

$$L_k(x) = \frac{(x - x_0) \dots (x - x_{k-1})(x - x_{k+1}) \dots (x - x_n)}{(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{k-1})(x_k - x_{k+1}) \dots (x_k - x_n)}.$$

Exercici 1

x	1	2	4	5
$f(x)$	0	6	12	24

Obteniu el polinomi d'interpolació pel mètode de Lagrange per aquesta taula de dades, doneu un valor aproximat de $f(3)$.

Diferències Dividides

El mètode de Newton de diferències dividides és una altra forma d'obtenir el polinomi interpolador dels $n + 1$ punts $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots (x_n, f(x_n))$.

En aquest mètode el polinomi interpolador s'escriu de la forma:

$$P_n(x) = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots \\ \dots + c_n(x - x_0) \dots (x - x_{n-1}).$$

Diferències Dividides - Notació

Per $(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), \dots, (x_n, f(x_n))$, es defineixen

- 1 les **diferències dividides d'ordre 0** de la funció f , per cada $i = 0, 1, \dots, n$ es defineixen i noten per

$$f[x_i] = f(x_i).$$

- 2 les **diferències dividides d'ordre 1** de la funció f , per cada $i = 0, 1, \dots, n - 1$ es defineixen i noten per

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}.$$

Diferències Dividides - Notació

Partint de les diferències dividides d'ordre $k - 1$,

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}] \quad \text{i} \quad f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}]$$

es defineixen les **diferències dividides d'ordre k** corresponents a $x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}$ per

$$\frac{f[x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}.$$

i es noten per

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+k-1}, x_{i+k}]$$

Polinomi per diferències dividides

El polinomi interpolador de grau n s'escriu com:

$$\begin{aligned} P_n(x) = & f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + \\ & f[x_0, x_1, x_2](x - x_0)(x - x_1) + \\ & + \dots + \\ & f[x_0, x_1, \dots, x_n](x - x_0) \dots (x - x_{n-1}). \end{aligned}$$

i la fórmula de l'error de l'aproximació és

$$E(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} w(\bar{x})$$

Exercici 2

Trobeu el polinomi d'interpolació per la taula:

x	1	2	4	5
$f(x)$	0	6	12	24

emprant el mètode de les diferències dividides de Newton.

Fenòmen de Runge

Fenòmen de Runge

Construiu una taula per a la funció

$$f(x) = \frac{1}{1 + 25x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1,$$

en $x = -0.9 \div 0.9 (0.2)$.

Calculeu els polinomis interpoladors de grau 3, 6 i 9.
Representeu gràficament $f(x)$ i els polinomis obtinguts.
Avalueu l'error que es comet en $x = -1 \div 1, (0.2)$.
Què s'observa? (**Fenòmen de Runge**).

Fenòmen de Runge

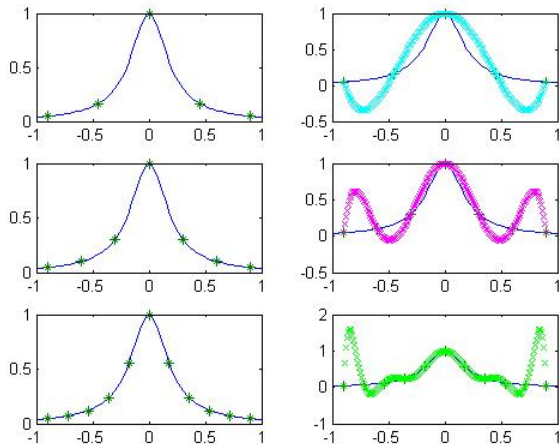


Figura: nodes equiespaiats

Elecció òptima de nodes

Elecció òptima de nodes

Sabem que la fórmula de l'error per la interpolació polinòmica és

$$E(\bar{x}) = f(\bar{x}) - P_n(\bar{x}) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} w(\bar{x})$$

on $w(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)$ i $\bar{x} \in [a, b]$.

Ens interessa escollir els punts de manera que s'obtingui el mínim error possible. Per aconseguir això utilitzarem els polinomis de Chebyshev.

Abscisses de Chebyshev

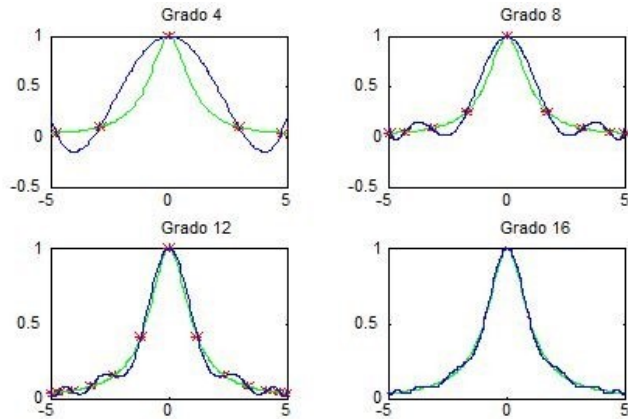


Figura: nodes de Chebyshev

Polinomis de Chebyshev

Els polinomis de Chebyshev de primer tipus són

$$T_n(x) = \cos(n \arccos(x)), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad n \geq 0.$$

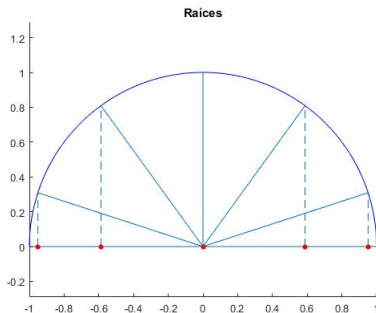
I per tant, $|T_n(x)| \leq 1$, $-1 \leq x \leq 1$.

La recurrència és:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x,$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 2.$$

Abscisses de Chebyshev



Els nodes de Chebyshev no són equiespaiats i tenen la propietat que $w(x)$ és mínim a l'interval $[-1, 1]$.

$$x \in [-1, 1] \Rightarrow z(x) := \frac{b-a}{2}x + \frac{a+b}{2}, \quad z \in [a, b].$$

Abscisses de Chebyshev

Les arrels del polinomi $T_n(x)$ són: (s'obtenen igualant $\cos(n\theta) = 0$)

$$x_k = \cos\left(\frac{(2k-1)\pi}{2n}\right), \quad k = 1, 2, \dots, n$$

valor mínim

En general $\max |w(x)| \geq \frac{1}{2^n}$ i si els punts x_i són les arrels del polinomi de Chebyshev de grau $n+1$ es verifica

$$\max |w(x)| = \frac{1}{2^n}$$

Interpolació d'Hermite

Interpolació d'Hermite

Obtenir un polinomi

$$H_m(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$$

de grau $m \leq 2n + 1$ que compleixi les condicions

$$H_m(x_j) = y_j, \quad H'_m(x_j) = y'_j$$

per la taula de dades

x	x_0	x_1	\cdots	x_n
y	y_0	y_1	\cdots	y_n
y'	y'_0	y'_1	\cdots	y'_n

Interpolació d'Hermite per diferències dividides

Pels nodes repetits, es considera $f[x_i, x_i] = f'(x_i) = y'_i$.

x_0	$f[x_0]$				
x_0	$f[x_0]$	$f[x_0, x_0]$			
x_1	$f[x_1]$	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_0, x_1]$		
x_1	$f[x_1]$	$f[x_1, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_1]$	$f[x_0, x_0, x_1, x_1]$	
x_2	$f[x_2]$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_1, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_1, x_2]$	$f[x_0, x_0, x_1, x_1, x_2]$
x_2	$f[x_2]$	$f[x_2, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_2]$	$f[x_1, x_1, x_2, x_2]$	$f[x_0, x_1, x_1, x_2, x_2]$

$$\begin{aligned}
 H_5(x) = & f[x_0] + f[x_0, x_0](x - x_0) + f[x_0, x_0, x_1](x - x_0)^2 \\
 & + f[x_0, x_0, x_1, x_1](x - x_0)^2(x - x_1) \\
 & + f[x_0, x_0, x_1, x_1, x_2](x - x_0)^2(x - x_1)^2 \\
 & + f[x_0, x_0, x_1, x_1, x_2, x_2](x - x_0)^2(x - x_1)^2(x - x_2).
 \end{aligned}$$

Interpolació d'Hermite - Error

Sigui $f : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una funció amb derivades fins a l'ordre $2n + 2$ amb continuïtat, sigui $H_{2n+1}(x)$ el polinomi interpolador de f en els nodes $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$.

Sigui $w^2(x) = (x - x_0)^2(x - x_1)^2 \dots (x - x_n)^2$ i $\bar{x} \in [a, b]$, llavors existeix $c \in [a, b]$ tal que:

$$f(\bar{x}) - H_{2n+1}(\bar{x}) = \frac{f^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!} w^2(\bar{x})$$

Exercici 3

Trobeu el polinomi d'interpolació per la taula:

x	-1	2
$f(x)$	-11	14
$f'(x)$	14	5

emprant el mètode de les diferències dividides de Newton.

Spline Cúbic d'Hermite

- Donats $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, la idea és interpolar cada subinterval $[x_i, x_{i+1}]$ format per cada parella de nodes per un polinomi de grau 3 especificat en la forma del polinomi interpolador d'Hermite.
- Consulteu l'apartat 3.3 del capítol 3 del llibre de Cleve Moler: Numerical Computing with MATLAB®.

“Splines”

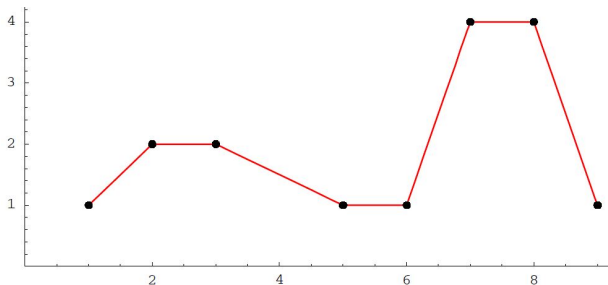
Interpolació polinomial a trossos

Interpolació polinomial a trossos

Spline

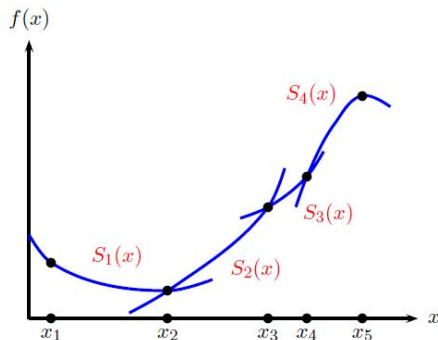
- Donats $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$, la idea és interpolar cada subinterval $[x_i, x_{i+1}]$ format per cada parella de nodes per un polinomi de grau baix.
- Una spline és una corba definida per polinomis de grau k amb continuïtat fins la derivada $k - 1$.

Spline Lineal



Una spline lineal és el cas més simple, els punts a interpolar es connecten per segments de recta; corba definida per polinomis de grau 1 amb continuïtat.

Spline Cúbic



Una spline cúbic és una corba definida per polinomis de grau 3 amb continuïtat fins la derivada 2 (segona).

Spline Cúbic

Les equacions d'una spline cúbic a l'interval $[x_i, x_{i+1}]$ per a $i = 0, 1, 2, 3, \dots (n-1)$ serien:

$$S_i(x) = a_i(x - x_i)^3 + b_i(x - x_i)^2 + c_i(x - x_i) + d_i.$$

Les condicions són:

- ❶ $S_i(x_i) = y_i, \quad i = 0 \div (n-1), \quad S_{n-1}(x_n) = y_n.$
- ❷ $S_{i+1}(x_{i+1}) = S_i(x_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots (n-2).$
- ❸ $S'_{i+1}(x_{i+1}) = S'_i(x_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots (n-2).$
- ❹ $S''_{i+1}(x_{i+1}) = S''_i(x_{i+1}), \quad i = 0, 1, \dots (n-2).$

Spline Cúbic

En total són $4n$ incògnites i $4n - 2$ condicions. Calen condicions addicionals, per exemple

$$S''_0(x_0) = S''_{n-1}(x_n) = 0, \text{ (spline cúbic natural)}$$

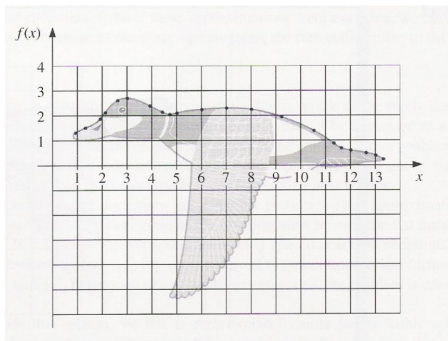
$$S'_0(x_0) = f'(x_0), \quad S'_{n-1}(x_n) = f'(x_n), \text{ (spline cúbic lligat)}$$

Les derivades es calculen fent servir fórmules de derivació aproximada. Diferents mètodes de càlcul d'aquestes derivades, dóna lloc a diferents algorismes.

Consulteu els apartats 3.3, 3.4 i 3.5 del capítol 3 del llibre de Cleve Moler: *Numerical Computing with MATLAB*®.

Ajust de corbes

Ajust de corbes



Consulteu l'apartat 3.5 del capítol 3 del llibre *Métodos Numéricos* de J. Douglas Faires & Richard Burden.

Ajust de corbes

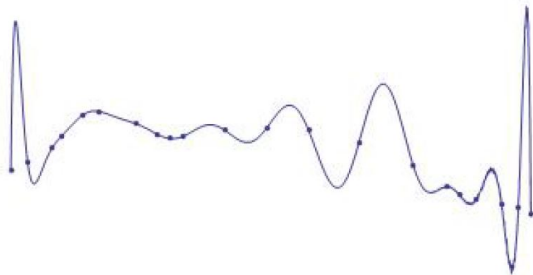


Figura: Polinomi interpolador

Ajust de corbes



Figura: spline cúbic

Ajust de corbes

Corbes de Bézier

La corba de Bézier és una corba paramètrica, que a partir d'uns punts de control permeten a l'usuari controlar les pendent en aquests punts i modelitzar a voluntat. La seva aplicació inicial era el disseny de carrosseries d'automòbils, vaixells, hèlix de vaixells, ...

Iniciadors, Pierre Bézier a Renault i Paul de Faget de Casteljau a Citroën.

Els polinomis de Bernstein són la base de les corbes de Bézier.

Splines

Paul de Faget de Casteljau 1930-

French mathematician/physicist

1958-1992: Citroën; unpublished work in **1958**



Pierre Bezier 1910-1999

1933-1975: engineer at Renault

1960: beginning of CAD/CAM work, Bezier curves



Isaac Jacob Schoenberg 1903-1990

Born in Romania (Landau's son-in-law). To USA in 1930.

Chicago, Harvard, Princeton, Swarthmore, Colby...

1941-1966: University of Pennsylvania

1943-1945: Army Ballistic Research Laboratory

1946: two papers on splines

1966-1973: U. of Wisconsin



Carl de Boor 1937-

Born in what became East Germany. To USA in 1959.

1960-1964: General Motors (grad student intern)

1962: first of many publications on splines

Purdue, Michigan...

1972- U. of Wisconsin



Desarrollo histórico de los splines y sus principales protagonistas. Trefethen [2005]

Corbes de Bézier

Les corbes de Bézier es poden connectar entre elles amb diverses continuïtats i ampliar-se per definir superfícies en 3D.

$$B(t) = (1 - t)P_0 + tP_1, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$B(t) = (1 - t)^2P_0 + 2t(t - 1)P_1 + t^2P_2, \quad 0 \leq t \leq 1$$

$$B(t) = (1 - t)^3P_0 + 3t(t - 1)^2P_1 + 3(t - 1)t^2P_2 + t^3P_3, \quad 0 \leq t \leq 1$$

Si voleu veure les imatges, teniu:

- Exemples de Corbes de Bézier de wikipedia.

B-spline

Una B-spline és una combinació lineal de splines *positives amb un suport compacte mínim*. El nom li va donar Isaac Jacob Schoenberg. Molts algoritmes, però numericament estable el de C. de Boor. Les B-spline són la generalització de les corbes de Bézier, que poden ser generalitzades per NURBS (Non-uniform rational B-splines).

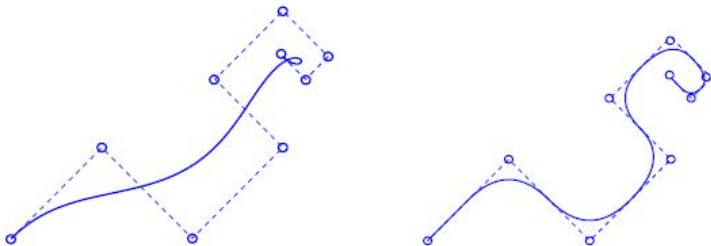


Figura: Corba de Bézier i B-spline per idèntics punts de control

Ajust de dades

Millor Aproximació

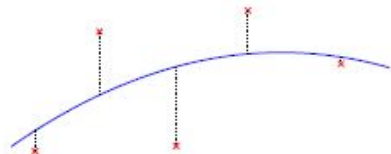
Quan a la taula de valors per a un mateix x_i tenim diversos valors de y_i el fet d'interpolar mitjançant polinomis no és possible, però podem construir una corba que s'ajusti el millor possible les dades disponibles, sense que la corba passi pels punts donats sino que "s'assembli" el més possible, per exemple minimitzant l'error quadràtic.

Mètode dels mínims quadrats

L'aproximació la fem amb una funció

$$g(x) = \sum_{i=0}^m c_i \phi_i(x), \quad m < n, .$$

i es minimitza la suma de les distàncies dels nodes a la corba.



$$E^2 = \sum_{k=1}^n (g(x_k) - y_k)^2 .$$

Mètode dels mínims quadrats

El problema general és aproximar un conjunt de dades

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m)$$





per un polinomi $y = P_n(x)$ o una funció $y = f(x)$.

Es defineix el vector de residus $r(x)$ de components $r_i(x) = y_i - f(x_i)$, quan dóna lloc a un sistema de m equacions i $n + 1$ incògnites, és un sistema sobredeterminat.

Mètode dels mínims quadrats

- Recta: $y = mx + b$.
- Paràbola: $y = ax^2 + bx + c$.
- Cúbica: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
- Potencial: $y = bx^m \Rightarrow \ln(y) = \ln(b) + m \ln(x)$.
- Exponencial: $y = be^{mx} \Rightarrow \ln(y) = \ln(b) + mx$.
- Logarítmica: $y = m \ln(x) + b$.
- Hiperbòlica: $y = \frac{1}{mx + b} \Rightarrow mx + b = \frac{1}{y}$.

Referències

-  Numerical Computing with MATLAB,
Libros de texto de Cleve Moler
-  Métodos Numéricos, J. Douglas Faires & Richard
Burden. Ed.Thomson 3era edición. 2004.
-  NCM Toolbox,
codis de matlab
-  E-notes, from Evgeny Demidov
An Interactive Introduction to Splines