Equacions no lineals

1 Mètodes d'intervals encaixats, de la secant i de Newton.

1 Estudieu la funció $y = e^x + \ln x - 1$ i decidiu si té arrels reals.

2 a) Comproveu que l'equació

$$e^x = 2 - x\,, \tag{1}$$

té una única solució i doneu-ne una aproximació fent ús **fzero** de `Matlab`.

b) Aproximeu la solució de (1) amb 4 decimals exactes pel mètode de Newton.

c) Aproximeu la solució de (1) amb 4 decimals exactes pel el mètode de la secant.

d) Aproximeu la solució de (1) amb 4 decimals exactes pel mètode de bisecció.

e) Quin mètode necessita més iteracions? Quin menys? Comenta les diferències trobades.

3 Resoleu la equació $\sin(x) - \frac{x}{2}=0$ pel mètode de la secant, el mètode de la bisecció i pel mètode de la tangent amb 4 decimals d'exactitud. Quantes iteracions calen en cada cas?

4 Considerem la funció $y = \dfrac{e^x}{x}$.

a) Feu una gràfica aproximada de la funció per a $x > 0$.

b) En quin interval de longitud 1 l'àrea sota la gràfica és mínima?. Quant val aproximadament aquesta àrea?

2 Mètodes del punt fix.

5 L'equació $x^3 + 2x - 2 = 0$ es pot escriure com

$$\text{a)}\;\; x = 1 - \frac{1}{2}x^3\,, \qquad \text{b)}\;\; x = 2(x^2+2)^{-1}\,, \qquad \text{c)}\;\; x = (2-2x)^{1/3}\,.$$

Estudieu quines de les expressions anteriors donen lloc a un mètode convergent.

6 Raoneu per a cadascuna de les expressions següents si és o no adequada per a calcular aproximacions de $\sqrt[3]{2}$ utilitzant el mètode del punt fix a l'interval $[1, 2]$.

$$\text{a)}\;\; x_{n+1} = \frac{2}{x_n^2}, \quad \text{b)}\; x_{n+1} = \frac{2x_n^3+2}{3x_n^2}, \quad \text{c)}\; x_{n+1} = \frac{x_n^3}{60} - \frac{1}{30x_n^2}, \quad \text{d)}\; x_{n+1} = x_n^3 + x_n - 2.$$

Quants iterats caldria fer amb la més adequada per obtenir $\sqrt[3]{2}$ amb tres decimals exactes? Calculeu els tres primers iterats.

7 Es vol resoldre l'equació $x + \ln(x) = 0$, se sap que una arrel és al voltant de 0.5. Quina d'entre les fórmules següents escollirieu? Sabrieu donar una fórmula millor?

$$\text{a)}\; x_{n+1} = -\ln(x_n)\,, \quad \text{b)}\; x_{n+1} = e^{-x_n}\,, \quad \text{c)}\; x_{n+1} = \frac{x_n + e^{-x_n}}{2}\,,$$

8 Es vol determinar el mínim de la funció $y = e^{-x} + \dfrac{x^3}{3}$

a) Feu una gràfica aproximada de la funció i doneu un interval de longitud 1 que contingui el mínim.

b) Determineu dues possibles maneres d'aplicar el mètode del punt fix, indicant si són convergents i quina és la millor.

c) Feu tres iterats. Quants en caldria fer per aconseguir 5 decimals correctes?

9 Trobeu pel mètode de la iteració simple, i després accelerant la convergència mitjançant el mètode d'Aitken, les arrels de les equacions

$$\text{a) } x^2 - 1 = \sin x\,, \quad \text{b) } e^x = 5x + 10\,, \quad \text{c) } 10^x = 6x + 30\,.$$

3 D'examen.

10 Demostreu que $x = 4$ és solució de les tres equacions següents:

$$x_{n+1} = \frac{1}{4}(8x_n - x_n^2)\,, \quad x_{n+1} = \frac{1}{3}(x_n^2 - 4)\,, \quad x_{n+1} = \sqrt{3x_n + 4}\,.$$

Tots són convergents a la solució $x = 4$? Quin convergeix més ràpidament? Calculeu 6 iteracions de cada un dels mètodes, escollint x_0 adient.

11 Determinar les solucions de $\sin(x) - \dfrac{1}{2} = 0$ fent ús del mètode de Newton.

a) Calculeu els 10 primers iterats de Newton prenen $x^0 = 0.25$ i $x_0 = 1.75$. En quin cas la successió d'iterats x^n és convergent? Explica la teva resposta.

b) Observa que el mètode de Newton és un cas particular de mètode d'iteració del punt fix $x^{n+1} = g(x^n)$ on $g(x) = x - f(x)/f'(x)$. Explica el criteri de convergència dels mètodes del punt fix i comprova que $x_0 = 0.25$ és de l'interval de convergència i que $x_0 = 1.75$ no. Explica la teva resposta.

12 Per calcular l'arrel próxima a $x_0 = 2$ de la ecuació $\arctan(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$ es considera el sigüent mètodo iteratiu:

$$x_{n+1} = x_n - \lambda\left(\arctan(x_n) - \frac{2x_n}{x_n^2+1}\right)\,, \quad \lambda > 0\,.$$

Es demana:

a) Calcular l'aproximació, (mínim 10 decimals exactes) per $\lambda = 1.75$ y $x_0 = 2$. Quantes iteracions?

b) Calcular l'aproximació, (mínim 10 decimals exactes) para $\lambda = 2.9$ y $x_0 = 2$. Quantes iteracions?

c) Verifiqueu les hipotesis del **teorema "a priori"** i demostreu la convergència/divergència del mètode iteratiu a **l'arrel positiva** de **raíz** próxima a$x_0 = 2$ per $\lambda > 0$ qualsevol.

d) Comenta la concordança dels teus càlculs segons teorema de convergència (apartat c) con los resultados dels apartats a) i b).