

LLIURAMENT 4

EXERCICIS

M. Àngela Grau Gotés

1 de maig de 2020

Resum

Data límit d'entrega: 19 de maig de 2020 a les 15h. pel campus virtual.

Opció A : Exercici I, Exercici II-A, Exercici III-A i Exercici IV-A.

Opció B : Exercici I, Exercici II-B, Exercici III-B i Exercici IV-B.

Opció C : Exercici I, Exercici II-C, Exercici III-C i Exercici IV-C.

Opció D : Exercici I, Exercici II-D, Exercici III-D i Exercici IV-D.

Normes

Sobre els lliuraments (si no es diu el contrari a classe):

- Escriviu un **LIVE SCRIPT** de MATLAB® que contingui, per cada exercici o apartat:
 1. Enunciat.
 2. Estratègies emprades: precisió, criteri, iteracions, etc.
 3. Codi de MATLAB®
 4. Resultats (taula, gràfic, etc)
 5. Conclusions i comentaris.
- En cas de no acabar, cal descriure els problemes tinguts.
- Cal entregar el document live script i el mateix document en format html.

Puntuació

Cada ítem es púnqua en l'escala 0 – 1 – 2 – 3 – 4 – 5 éssent 0 sense fer i 5 fet amb excel·lència.

1. Al campus virtual la nota es reflexarà sobre 50 punts.
2. Sense el codi de MATLAB® emprat per l'exercici, l'entrega es qualificarà amb 0.
3. En cas de còpia l'entrega es qualificarà amb 0 i no podreu fer ús del mètode d'avaluació contínua.

Dates

Data límit d'entrega: 19 de maig de 2020 a les 15h. pel campus virtual.

Abans del dia i hora indicats heu de penjar a la intranet de l'assignatura dos fitxers, un **live script** i el mateix document guardat **html**. El nom del fitxer ha d'ésser

- **NIUB_L2_opcio_XX.mlx**
- **NIUB_L2_opcio_XX.HTML**

No s'accepten pràctiques fora campus virtual. No s'accepten pràctiques amb retard. No s'accepten pràctiques SENSE els fitxers d'instruccions de Matlab.

M. Àngela Grau Gotés
Professora responsable de l'assignatura

ENUNCIATS

Exercici I Integració numèrica: Àrea dins una regió tancada

Doneu una aproximació de l'àrea de la regió delimitada per la vostra mà.

Referència: <http://www.mathworks.es/moler/chapters.html>

1. Obteniu una imatge de la vostra mà. Seguiu les indicacions de l'exercici 3.4 de la pàgina 20 del capítol 3, "Interpolation" de Cleve Moler.

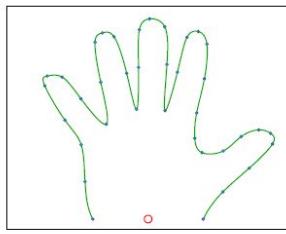


Figure 3.11. A hand.

Figura 1:

2. Obteniu per interpolació 2D la corba que delimita la imatge de la vostra mà seguint els indicacions de l'exercici 3.4 i l'exercici 3.5 de les pàgines 20 – 21 – 22. Responeu les preguntes que us formulen en els dos exercicis.
3. Què tan gran és la teva mà? Calcula l'àrea que ocupa la teva mà. Segueix les indicacions i respon les preguntes de l'exercici 6.23 de les pàgines 19 – 20 del capítol 6 "Quadrature" de Cleve Moler.

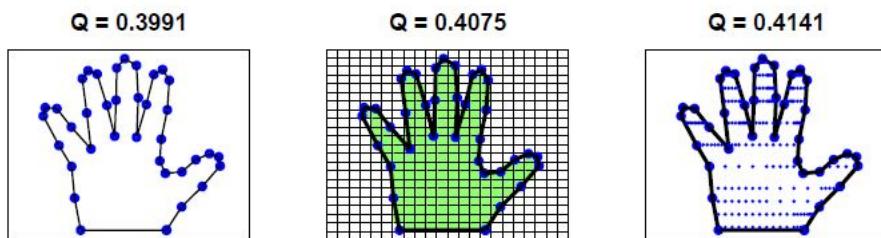


Figure 6.5. The area of a hand.

Figura 2: Moler - chapter 6 - exercici 6.23

Exercici II Opció A

Les dades de la taula següent estan relacionats amb l'esperança de vida al nèixer dels ciutadans de *Grècia*:

any	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
Grècia	72.3	73.6	75.1	77.0	77.6	77.9	79.2	80.4

Es demana:

Numèricament és millor que considereu la taula inicial amb abscisses $0, 1, \dots, 7.$, o que centreu les dades. Altrement els resultats no són correctes!!

- (2.a) Useu el polinomi interpolador de grau 7 (escalat) per estimar l'esperança de vida el 1970, 1992, 2007. Compareu els valors obtinguts, amb les xifres oficials.
- (2.b) Useu un *spline natural* per estimar l'esperança de vida el 1970, 1992, 2007. Compareu els valors obtinguts, amb les xifres oficials.
- (2.c) Busqueu un polinomi de grau més petit que 5 per mínims quadrats. Justifiqueu l'elecció mostrant una cota de l'error d'aquest i de la resta amb els que heu provat. Compareu els valors obtinguts, amb les xifres oficials per cada pais.
- (2.d) Extrapoleu un valor per l'any 1970 i un per l'any 2015 pels tres models obtinguts. Recordant les dades oficials, i els resultats obtinguts els models estudiats són vàlids per estimar amb precisió l'esperança de vida per l'any 1970? I per l'any 2015?
- (2.e) Feu una gràfica on apareguin les dades (representats per una rodona) i les totes solucions trobades.

Taula amb les dades per comparar

any	1970	1992	2007	2015
Grècia	70.9	77.4	79.4	81.6

Exercici III Opció A

La derivada de la funció $f(x) = \arctan\left(\frac{x}{5}\right)$ en $x = \sqrt{5}$ pren el valor $f'(\sqrt{5}) = 1/6$.

- (3.a) Aproximeu $f'(\sqrt{5})$ fent ús de la fórmula d'ordre $\mathcal{O}(h^2)$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h},$$

per a $h_k = 2^{-k}$ i $k = 1, 2 \dots 5$. Calculeu l'error absolut per cada una de les aproximacions obtingudes.

- (3.b) Feu ús de la tècnica d'Extrapolació de Richardson d'ordre $\mathcal{O}(h^2)$ per obtenir una aproximació de $f'(\sqrt{5})$ amb més decimals correctes Calculeu l'error absolut per cada una de les aproximacions obtingudes.
- (3.c) Presenteu els resultats dels dos apartats previs en una mateixa taula (T1).
- (3.d) Representeu les xifres decimals correctes en una gràfica, amb $k = 1, 2 \dots 5$ a l'eix d'abscises. Quantes xifres decimals correctes s'obtenen en cada cas? Argumenta la teva resposta.

Exercici IV **Opció A**

El logaritme neperiana potserà calculat fent ús de la fórmula

$$\ln(x-1) = \int_2^x \frac{1}{x-1} dx, \quad x > 2. \quad (\text{IV-1})$$

- (4.a) Useu la regla composta de Trapezis per a determinar $\ln(2)$ a partir de l'expressió (IV-1) i $h = 2^{-k}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Presenteu els resultats en taules.
- (4.b) Apliqueu el mètode de Romberg a les aproximacions per trapezis de l'apartat (4.a) per millorar l'aproximació de $\ln(2)$ obtinguda. Presenteu els resultats en taules.
- (4.c) Useu una tècnica de simulació (Mètode de MonteCarlo) per a determinar $\ln(2)$ preneu mostres de mida 10^{-k} , $k \geq 3, 4, 5, 6, \dots$. Presenteu els resultats que s'obtenen taules.
- (4.d) Useu $\ln(x)$ de MATLAB[®] per obtenir el valor de $\ln(2)$ amb 15 xifres decimals correctes, calculeu l'error absolut i l'error relatiu de les aproximació dels apartats (4.a), (4.b) i (4.c). Quantes xifres significatives correctes s'han obtingut? Explica els teus càlculs.
- (4.e) Com s'ha de prendre la mostra de gran per obtenir la mateixa exactitud que amb la fórmula dels trapezis? Podem obtenir la mateixa exactitud que amb la fórmula de Simpson (segona columna de Romberg)? Argumenta la teva resposta

Exercici II Opció B

Les dades de la taula següent estan relacionats amb l'esperança de vida al nèixer dels ciutadans de Belize:

<i>any</i>	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
<i>Belize</i>	67.7	69.6	71.1	69.6	68.4	69.0	69.8	70.3

Es demana:

Numèricament és millor que considereu la taula inicial amb abscisses $0, 1, \dots, 7.$, o que centreu les dades. Altrement els resultats no són correctes!!

- (2.a) Useu el polinomi interpolador de grau 7 (escalat) per estimar l'esperança de vida el 1970, 1992, 2007. Compareu els valors obtinguts, amb les xifres oficials.
- (2.b) Useu un *spline natural* per estimar l'esperança de vida el 1970, 1992, 2007. Compareu els valors obtinguts, amb les xifres oficials.
- (2.c) Busqueu un polinomi de grau més petit que 5 per mínims quadrats. Justifiqueu l'elecció mostrant una cota de l'error d'aquest i de la resta amb els que heu provat. Compareu els valors obtinguts, amb les xifres oficials per cada pais.
- (2.d) Extrapoleu un valor per l'any 1970 i un per l'any 2015 pels tres models obtinguts. Recordant les dades oficials, i els resultats obtinguts els models estudiats són vàlids per estimar amb precisió l'esperança de vida per l'any 1970? I per l'any 2015?
- (2.e) Feu una gràfica on apareguin les dades (representats per una rodona) i les tres solucions trobades.

Taula amb les dades per comparar

<i>any</i>	1970	1992	2007	2015
<i>Belize</i>	65.5	70.7	69.5	70.3

Exercici III Opció B

La derivada de la funció $f(x) = \sin(x^2)$ en $x = \sqrt{2}$ pren el valor $f'(\sqrt{2}) = 2\sqrt{2} \cos(2)$.

- (3.a) Aproximeu $f'(\sqrt{2})$ fent ús de la fórmula d'ordre $\mathcal{O}(h^2)$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{h},$$

per a $h_k = 2^{-k}$ i $k = 1, 2 \dots 5$. Calculeu l'error absolut per cada una de les aproximacions obtingudes.

- (3.b) Feu ús de la tècnica d'Extrapolació de Richardson d'ordre $\mathcal{O}(h^2)$ per obtenir una aproximació de $f'(\sqrt{2})$ amb més decimals correctes Calculeu l'error absolut per cada una de les aproximacions obtingudes.
- (3.c) Presenteu els resultats dels dos apartats previs en una mateixa taula (T1).
- (3.d) Representeu les xifres decimals correctes en una gràfica, amb $k = 1, 2 \dots 5$ a l'eix d'abscises. Quantes xifres decimals correctes s'obtenen en cada cas? Argumenta la teva resposta.

Exercici IV Opció B

El nombre π potser calculat fent ús de la fórmula

$$\arctan\left(\frac{x}{2}\right) = \int_0^x \frac{2}{4+t^2} dt, \quad x > 0. \quad (\text{IV-2})$$

- (4.a) Useu la regla composta de Trapezis per a determinar π a partir de l'expressió (IV-2) i $h = 2^{-k}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Presenteu els resultats en taules.
- (4.b) Apliqueu el mètode de Romberg a les aproximacions per trapezis de l'apartat (4.a) per millorar l'aproximació de π obtinguda. Presenteu els resultats en taules.
- (4.c) Useu una tècnica de simulació (Mètode de MonteCarlo) per a determinar π preneu mostres de mida 10^{-k} , $k \geq 3, 4, 5, 6, \dots$. Presenteu els resultats que s'obtenen taules.
- (4.d) Useu $\arctan(x)$ de MATLAB[®] per obtenir el valor de π amb 15 xifres decimals correctes, calculeu l'error absolut i l'error relatiu de les aproximació dels apartats (4.a), (4.b) i (4.c). Quantes xifres significatives correctes s'han obtingut? Explica els teus càlculs.
- (4.e) Com s'ha de pendre la mostra de gran per obtenir la mateixa exactitud que amb la fórmula dels trapezis? Podem obtenir la mateixa exactitud que amb la fórmula de Simpson (segona columna de Romberg)? Argumenta la teva resposta

Recordeu que $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

Exercici II **Opció C**

Les dades de la taula següent estan relacionats amb l'esperança de vida al nèixer dels ciutadans de *Espanya*:

any	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
Espanya	73.3	75.3	76.2	76.8	78.0	79.0	80.2	81.6

Es demana:

Numèricament és millor que considereu la taula inicial amb abscisses $0, 1, \dots, 7.$, o que centreu les dades. Altrement els resultats no són correctes!!

- (2.a) Useu el polinomi interpolador de grau 7 (escalat) per estimar l'esperança de vida el 1970, 1992, 2007. Compareu els valors obtinguts, amb les xifres oficials.
- (2.b) Useu un *spline natural* per estimar l'esperança de vida el 1970, 1992, 2007. Compareu els valors obtinguts, amb les xifres oficials.
- (2.c) Busqueu un polinomi de grau més petit que 5 per mínims quadrats. Justifiqueu l'elecció mostrant una cota de l'error d'aquest i de la resta amb els que heu provat. Compareu els valors obtinguts, amb les xifres oficials per cada pais.
- (2.d) Extrapoleu un valor per l'any 1970 i un per l'any 2015 pels tres models obtinguts. Recordant les dades oficials, i els resultats obtinguts els models estudiats són vàlids per estimar amb precisió l'esperança de vida per l'any 1970? I per l'any 2015?
- (2.e) Feu una gràfica on apareguin les dades (representats per una rodona) i les tres solucions trobades.

Taula amb les dades per comparar

any	1970	1992	2007	2015
Espanya	72.0	77.4	80.9	83.4

Exercici III **Opció C**

La derivada de la funció $f(x) = \arctan(x)$ en $x = \sqrt{2}$ pren el valor $f'(\sqrt{2}) = 1/3$. Considereu les dues fòrmules d'aproximació de la derivada primera següents:

- (3.a) Aproximeu $f'(\sqrt{2})$ fent ús de la fórmula d'ordre $\mathcal{O}(h)$

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h},$$

per a $h_k = 2^{-k}$ i $k = 1, 2 \dots 6$. Calculeu l'error absolut per cada una de les aproximacions obtingudes.

- (3.b) Feu ús de la tècnica d'Extrapolació de Richardson d'ordre $\mathcal{O}(h)$ per obtenir una aproximació de $f'(\sqrt{2})$ amb més decimals correctes Calculeu l'error absolut per cada una de les aproximacions obtingudes.
- (3.c) Presenteu els resultats dels dos apartats previs en una mateixa taula (T1).
- (3.d) Representeu les xifres decimals correctes en una gràfica, amb $k = 1, 2 \dots 6$ a l'eix d'abscises. Quantes xifres decimals correctes s'obtenen en cada cas? Argumenta la teva resposta.

Exercici IV **Opció C**

El logaritme neperiana potserà calculat fent ús de la fórmula

$$\ln(x-1) = \int_2^x \frac{1}{x-1} dx, \quad x > 2. \quad (\text{IV-3})$$

- (4.a) Useu la regla composta de Trapezis per a determinar $\ln(2)$ a partir de l'expressió (IV-3) i $h = 2^{-k}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Presenteu els resultats en taules.
- (4.b) Apliqueu el mètode de Romberg a les aproximacions per trapezis de l'apartat (4.a) per millorar l'aproximació de $\ln(2)$ obtinguda. Presenteu els resultats en taules.
- (4.c) Useu una tècnica de simulació (Mètode de MonteCarlo) per a determinar $\ln(2)$ preneu mostres de mida 10^{-k} , $k \geq 3, 4, 5, 6, \dots$. Presenteu els resultats que s'obtenen taules.
- (4.d) Useu $\ln(x)$ de MATLAB[®] per obtenir el valor de $\ln(2)$ amb 15 xifres decimals correctes, calculeu l'error absolut i l'error relatiu de les aproximació dels apartats (4.a), (4.b) i (4.c). Quantes xifres significatives correctes s'han obtingut? Explica els teus càlculs.
- (4.e) Com s'ha de pendre la mostra de gran per obtenir la mateixa exactitud que amb la fórmula dels trapezis? Podem obtenir la mateixa exactitud que amb la fórmula de Simpson (segona columna de Romberg)? Argumenta la teva resposta

Exercici II Opció D

Les dades de la taula següent estan relacionats amb l'esperança de vida al nèixer dels ciutadans de *República Centreafricana*:

	any	1975	1980	1985	1990	1995	2000	2005	2010
<i>República Centreafricana</i>		45.9	48.9	49.8	48.7	46.2	43.9	44.4	47.5

Es demana:

Numèricament és millor que considereu la taula inicial amb abscisses $0, 1, \dots, 7.$, o que centreu les dades. Altrement els resultats no són correctes!!

- (2.a) Useu el polinomi interpolador de grau 7 (escalat) per estimar l'esperança de vida el 1970, 1992, 2007. Compareu els valors obtinguts, amb les xifres oficials.
- (2.b) Useu un *spline natural* per estimar l'esperança de vida el 1970, 1992, 2007. Compareu els valors obtinguts, amb les xifres oficials.
- (2.c) Busqueu un polinomi de grau més petit que 5 per mínims quadrats. Justifiqueu l'elecció mostrant una cota de l'error d'aquest i de la resta amb els que heu provat. Compareu els valors obtinguts, amb les xifres oficials per cada país.
- (2.d) Extrapoleu un valor per l'any 1970 i un per l'any 2015 pels tres models obtinguts. Recordant les dades oficials, i els resultats obtinguts els models estudiats són vàlids per estimar amb precisió l'esperança de vida per l'any 1970? I per l'any 2015?
- (2.e) Feu una gràfica on apareguin les dades (representats per una rodona) i les tres solucions trobades.

Taula amb les dades per comparar

	any	1970	1992	2007	2015
<i>República Centreafricana</i>		41.9	47.8	45.5	51.4

Exercici III Opció D

La derivada de la funció $f(x) = \ln(x^2)$ en $x = 2$ pren el valor $f'(2) = 1$.

- (3.a) Aproximeu $f'(2)$ fent ús de la fórmula d'ordre $\mathcal{O}(h)$

$$\frac{f(x_0) - f(x_0 - h)}{h},$$

per a $h_k = 4^{-k}$ i $k = 1, 2 \dots 6$. Calculeu l'error absolut per cada una de les aproximacions obtingudes.

- (3.b) Feu ús de la tècnica d'Extrapolació de Richardson $\mathcal{O}(h)$ per obtenir una aproximació de $f'(2)$ amb més decimals correctes Calculeu l'error absolut per cada una de les aproximacions obtingudes.
- (3.c) Presenteu els resultats dels dos apartats previs en una mateixa taula (T1).
- (3.d) Representeu les xifres decimals correctes en una gràfica, amb $k = 1, 2 \dots 6$ a l'eix d'abscises. Quantes xifres decimals correctes s'obtenen en cada cas? Argumenta la teva resposta.

Exercici IV Opció D

El nombre π potser calculat fent ús de la fórmula

$$\arctan\left(\frac{x}{2}\right) = \int_0^x \frac{2}{4+t^2} dt, \quad x > 0. \quad (\text{IV-4})$$

- (4.a) Useu la regla composta de Trapezis per a determinar π a partir de l'expressió (IV-4) i $h = 2^{-k}$, $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Presenteu els resultats en taules.
- (4.b) Apliqueu el mètode de Romberg a les aproximacions per trapezis de l'apartat (4.a) per millorar l'aproximació de π obtinguda. Presenteu els resultats en taules.
- (4.c) Useu una tècnica de simulació (Mètode de MonteCarlo) per a determinar π preneu mostres de mida 10^{-k} , $k \geq 3, 4, 5, 6, \dots$. Presenteu els resultats que s'obtenen taules.
- (4.d) Useu $\arctan(x)$ de MATLAB[®] per obtenir el valor de π amb 15 xifres decimals correctes, calculeu l'error absolut i l'error relatiu de les aproximació dels apartats (4.a), (4.b) i (4.c). Quantes xifres significatives correctes s'han obtingut? Explica els teus càlculs.
- (4.e) Com s'ha de pendre la mostra de gran per obtenir la mateixa exactitud que amb la fórmula dels trapezis? Podem obtenir la mateixa exactitud que amb la fórmula de Simpson (segona columna de Romberg)? Argumenta la teva resposta

Recordeu que $\arctan(1) = \frac{\pi}{4}$

Referències

- [1] Abramowitz, M. and Stegun, I.A. *Handbook of Mathematical Functions*. Ed. Dover.
- [2] Grau, Miquel i Noguera, Miquel. *Càlcul Numèric*. Edicions U.P.C. 1993
- [3] Forsythe, G.E.; Malcom, M.A.; Moler, C. B. : *Computer Methods for Mathematical Computations*. Prentice Hall. 1977
- [4] Moler, Cleve, *Numerical Computing with MATLAB*. Electronic edition: The MathWorks, Inc., Natick, MA, 2004.
<http://www.mathworks.es/moler/chapters.html>
- [5] Help online de Matlab.