Computació Numèrica

Part 2.0 - Vectors, Matrius i Normes

M. Àngela Grau Gotés

Departament de Matemàtica Aplicada II
Universitat Politècnica de Catalunya · BarcelonaTech.

17 de febrer de 2020

Drets d'autor

"Donat el caràcter i la finalitat exclusivament docent i eminentment il·lustrativa de les explicacions a classe d'aquesta presentació, l'autor s'acull a l'article 32 de la Llei de propietat intel·lectual vigent respecte de l'ús parcial d'obres alienes com ara imatges, gràfics o altre material contingudes en les diferents diapositives"

Índex

Àlgebra Lineal Numèrica

L'objectiu principal del tema és l'estudi de mètodes computacionals bàsics per a l'àlgebra lineal.

- Resolució de sistemes lineals no homogenis.
  - Mètodes directes: eliminació gaussiana, mètode de Gauss-Jordan, descompossició LU, factorització QR.
  - Mètodes iteratius: Jacobi, Gauss-Seidel i sobrerelaxació
  - Mínims quadrats.
- Càlcul de vectors i valors propis.
  - Mètodes de la potència.
  - Mètode QR.
  - Valors singulars.

Notació

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow A = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}} .$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow u = (u_1, u_2, \dots, u_n)^t = (u_i)^t_{1 \le i \le n} .$$

Producte escalar de vectors

El producte escalar és una aplicació de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, que notarem per $\langle \cdot, \cdot \rangle$, que verifica les propietats següents:

$$1)\ \langle u, u \rangle \geq 0\,,\ \ (\langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0)$$

$$2)\ \langle u, v \rangle \leq \langle v, u \rangle\ ,$$

$$3)\ \langle u, \alpha v + w \rangle = \alpha \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle\ .$$

Val la desigualtat de Cauchy-Schwarz

$$4)\ |\,\langle u, v \rangle\,|^2 \leq \langle u, u \rangle \langle v, v \rangle\ .$$

Normes vectorials

Norma d'un vector

Una norma és una aplicació de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$, que notarem per $||\cdot||$, que verifica les propietats següents:

$$1)\ ||u|| \geq 0\,,\ \ (||u|| = 0 \Leftrightarrow u = 0)$$

$$2)\ ||ku|| \leq |k|\,||u||\,,$$

$$3)\ ||u+v|| \leq ||u|| + ||v||\,.$$

Si per a dos vectors de u i v de $\mathbb{R}^n$, definim el producte escalar com $\langle u, v\rangle = u_1v_1 + \cdots + u_nv_n$, llavors també es verifica la propietat multiplicativa

$$4)\ \ |\langle u, v\rangle| \leq ||u||_2 \cdot ||v||_2\,, \qquad ||u||_2 = \langle u, u\rangle^{\frac{1}{2}}.$$

Normes vectorials

Si $u = (u_1\,, \cdots\,, u_n)$ és un vector qualsevol de $\mathbb{R}^n$

- **Norma-1** $\quad ||u||_1 = \sum_{i=1}^{n} |u_i|\,.$
- **Norma-2** $\quad ||u||_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} u_i^2}\,.$
- **Norma infinit** $\quad ||u||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} |u_i|\,.$

Les normes $||u||_1$, $||u||_2$ i $||u||_\infty$ són equivalents, vol dir que per $c_{qp}\,, C_{qp} > 0$ adients, $\quad c_{qp}||u||_p \leq ||u||_q \leq C_{qp}||u||_p\,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$

Convergència de successions

Una successió $\left\{\mathbf{x}^{(k)}\right\}_{k=1,\ldots,\infty}$ de vectors de $\mathbb{R}^n$ es diu que convergeix a $\mathbf{x}$ si, donat un ϵ existeix un n tal que

$$||\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}|| < \epsilon \qquad k > n$$

i s'escriu $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}$.

Convergència per components: $\lim\limits_{k\to\infty} \mathbf{x}_i^{(k)} = \mathbf{x}_i$

Normes matricials

Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ és una matriu qualsevol de $\mathbb{R}^{n \times n}$

Norma d'una matriu

Una norma és una aplicació del conjunt de totes les matrius reals $\mathbb{R}^{m \times n}$ en $\mathbb{R}$, que notarem per $|| \cdot ||$, que verifica les propietats següents:

$$1)\ ||A|| \geq 0\,,\ \ (||A|| = 0 \Leftrightarrow A = 0)$$
$$2)\ ||kA|| \leq |k|\,||A||\,,$$
$$3)\ ||A + B|| \leq ||A|| + ||B||\,.$$

Adicionalment la condició de **multiplicativa**

$$4)\ ||A \cdot B|| \leq ||A|| \cdot ||B||\,.$$

Normes matricials

Donada una matriu, A i un vector x qualsevol, Ax és el vector transformat, cal que es compleixi la condició de **consistència**

$$||Ax|| \leq ||A|| \cdot ||x||$$

Així definim,

$$||A|| = \max_{x, x \neq 0} \frac{||Ax||}{||x||} = max \{||Ax|| \; : \; ||x|| = 1\}$$

de tal manera que a cada norma vectorial se li associa, una norma matricial compatible.

Normes matricials

Si $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ és una matriu qualsevol de $\mathbb{R}^{n \times n}$

- **Norma-1** $\quad ||A||_1 = \max\limits_j \sum\limits_{i=1}^{n} |a_{ij}|\,.$
- **Norma-2** $\quad ||A||_2 = \max\limits_i \sqrt{\lambda_i}\,, \quad \lambda_i$ vap de $A^t A$
- **Norma infinit** $\quad ||A||_\infty = \max\limits_i \sum\limits_{j=1}^{n} |a_{ij}|\,.$
- **Norma de Frobenius** $\quad ||A||_2 = \sqrt{\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2} = \sqrt{tr(A^t A)}.$

Tipus de matrius.

Una matriu $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ es diu

- Ortogonal si $A^t = A^{-1}$ o $A^t A = A A^t = I_{n\,n}$.
- Simètrica si $A^t = A$.
- Tridiagonal si $a_{ij} = 0$ si $|i - j| > 1$.
- Definida positiva si $x^t A x > 0$, $\forall x \neq 0$.
- Estrictament diagonal dominant si $|a_{ii}| > \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} |a_{ij}|$.
- Diagonal dominant si $|a_{ii}| \geq \sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ i \neq j}} |a_{ij}|$.

Transformacions ortogonals

Per una matriu A de $\mathbb{R}^{n\times n}$ verifica

$$\langle x, Ay\rangle = \langle A^t x, y\rangle \,, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^n$$

Les matrius ortogonals Q, conserven el producte escalar i la norma euclídea; es a dir

$$\langle Qx, Qy\rangle = \langle x, y\rangle \,, \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^n$$

$$||Qx||_2 = ||x||_2, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

En aquest cas diem que les normes $||A||_2$ i $||x||_2$ són invariants per tranformacions ortogonals.

Matrius convergents

Una matriu $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ quadrada es diu **convergent** si les potències de la matriu tenen les components amb límit zero,

$$\lim_{k\to\infty} (A^k)_{ij} = 0.$$

Una matriu A és **convergent** si i només si, $\rho(A) < 1$.

Exemple

$$A = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad A = \begin{pmatrix} 1/2^k & 0 \\ k/2^{k+1} & 1/2^k \end{pmatrix}$$

Radi espectral

Es defineix el **radi espectral** de una matriu A, i es nota per $\rho(A)$ com el màxim dels mòduls del valors propis de la matriu,

$$\rho(A) = \max_i \{|\lambda_i| \,:\, Av_i = \lambda_i v_i\}$$

Geomètricament representa el radi del cercle mínim que conté a tots els valors propis de la matriu A.

Teorema

El radi espectral d'una matriu és una **fita inferior** de totes les normes multiplicatives de la matriu,

$$\rho(A) \leq ||A||_r \quad r = \{1, 2, \infty\}$$

Nombre de condició

Sigui A una matriu, i $\|\cdot\|$ qualsevol norma multiplicativa,

Nombre de condició

$$\mathcal{K}(A) = \begin{cases} \|A\|\|A^{-1}\|\,, & det(A) \neq 0 \\ \infty\,, & altrament \end{cases}$$

Propietats

- $\mathcal{K}(A) \geq 1, \quad \mathcal{K}(I) = 1.$
- Si $B = zA$, per $z \neq 0$ real, llavors $\mathcal{K}(B) = \mathcal{K}(A)$.
- $\mathcal{K}(AB) \leq \mathcal{K}(A)\,\mathcal{K}(B)$.
- $\mathcal{K}_2(AB) = \sigma_n/\sigma_1\,.$
- $\mathcal{K}(A) = \mathcal{K}(AU) = \mathcal{K}(UA)$ per U matriu unitària.