

# Processat Morfològic d'imatges

## Menú

### 1. Imatges binàries

- Introducció
- Erosions i dilatacions
- Transformada de distància
- Opening i closing
- Dilatació condicional
- Reconstrucció
- Aplicacions
- Esquelets

## Introducció

- La morfologia és una eina matemàtica que ens permet treballar amb estructures espaials. L'objectiu és l'anàlisi de les formes dels objectes
- Sorgeix a finals dels 70 (*Ecole des mines. Paris*)
- Es popularitza a partir de la publicació de:  
J. Serra. *Image Analysis and Mathematical Morphology*.  
Academic Press, 1982.
- Molt útil per a les aplicacions on la forma dels objectes és important.  
P ex: inspecció industrial, ocrs, geologia, imatges biològiques microscòpiques...
- L'enfoc clàssic del processat d'imatges és proper al càlcul matemàtic (concepte de funció imatge, operadors linials ...)
- L'enfoc morfològic es basa en àlgebra no linial i treballa amb conjunts de punts, la seva forma i connectivitat.

## Estructures de base

### PROCESSAT LINIAL

Estructura bàsica: Espai Vectorial

Conjunt de vectors  $V$  i conjunt d'escalars  $K$  tals que:

- 1)  $V$  és un grup commutatiu
- 2)  $K$  és un cos
- 3) Existeix una llei de producte extern entre escalars i vectors

### MORFOLOGIA MATEMÀTICA

Estructura bàsica: Reticle (lattice)

Conjunt  $L$  tal que:

- 1)  $L$  està dotat d'un ordenament parcial, és a dir una relació  $\leq$  amb:

$$A \leq A$$

$$A \leq B, B \leq A \Rightarrow A=B$$

$$A \leq B, B \leq C \Rightarrow A \leq C$$

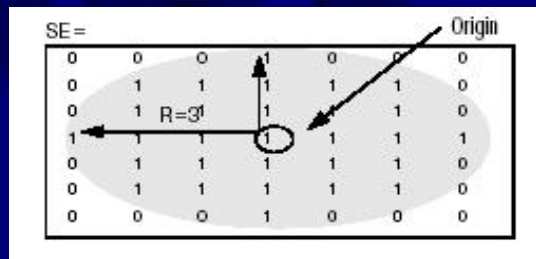
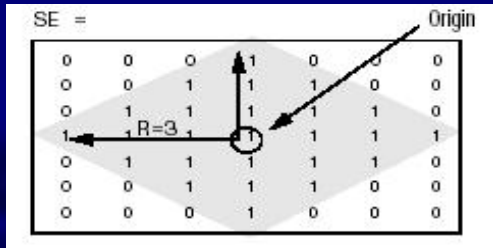
- 2) Per a cada família d'elements

$\{x_i\} \subset L$ , existeix en  $L$ :

Infim: La major fita inferior  $\bigvee \{x_i\}$

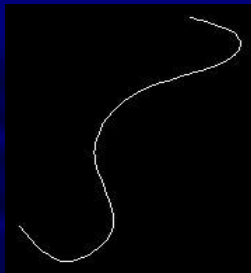
Suprem: La menor fita superior  $\bigwedge \{x_i\}$

## L'element estructurant



## Dilatació

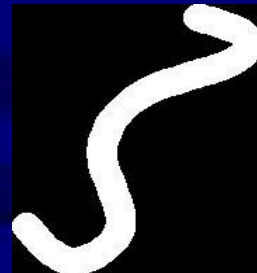
- Cal una imatge i un element estructurant



Imatge original



Element  
estructurant



Imatge dilatada

## Dilatació

$$1 \quad \delta_B(A) = \bigcup (B)_x, x \in A$$

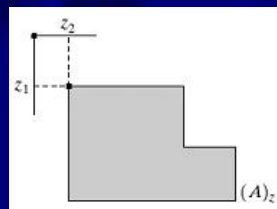
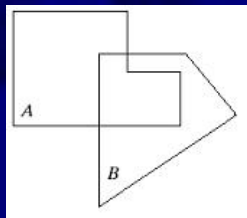
$$2 \quad \delta_B(A) = \bigcup (A)_x, x \in B$$

$$3 \quad \delta_B(A) = \{x \mid (\check{B})_x \cap A \neq \emptyset\}$$

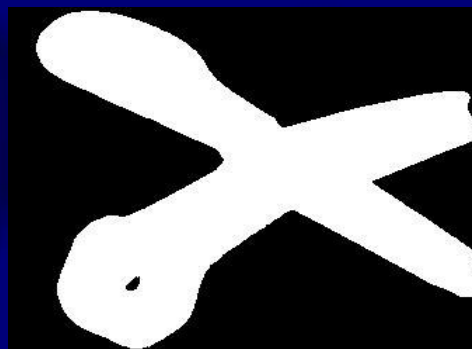
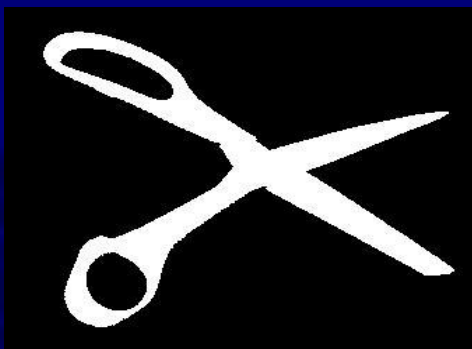
## Traslació

$$f_b(x) = f(x - b)$$

El valor de la imatge trasladada en un píxel  $x$ , és igual al valor de la imatge original en la posició trasladada pel vector oposat



## Dilatació

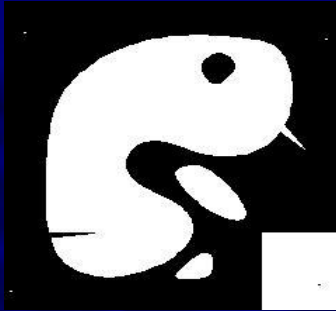


## Dilatació



## Erosió

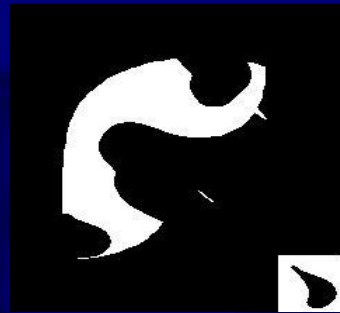
- Cal una imatge i un element estructurant



Imatge original



Element  
estructurant

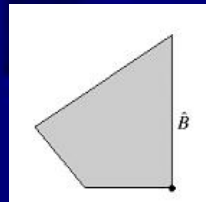
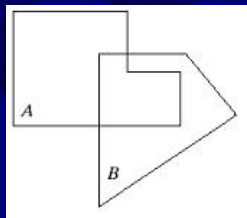


Imatge erosionada

## Reflexió

$$\check{A} = \{-a \mid a \in A\}$$

La reflexió d'un conjunt B es defineix com el seu simètric respecte de l'origen



## Erosió

$$1 \quad \varepsilon_B(f) = \nu(\delta_{\check{B}}(\nu(f)))$$

$$2 \quad \varepsilon_B(A) = \{x \mid (B)_x \subseteq A\}$$

## Erosió



EE



## Propietats d'erosió i dilatació

- Són duals una respecte de l'altra

$$B \quad C \quad B \quad C$$

- Són creixents

$$f \quad g \quad (f) \quad (g)$$

- Composició

$$B_2 \quad B_1 \quad ( \quad \bar{B}_2 B_1 )$$

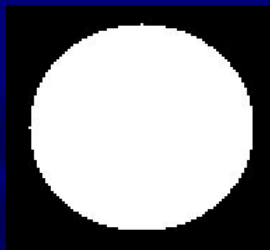
$$nB \quad (n) \quad B$$

- Relació d'ordre

$$B \quad B$$

## Transformada de distància

- El valor dels píxels de la imatge resultat representen la distància desde el píxel fins a la vora de la forma connexa a la que pertany



Imatge original



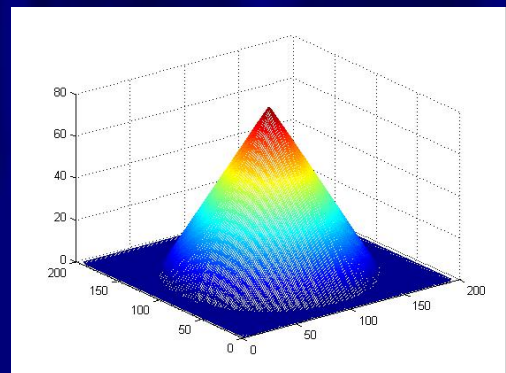
Mètrica euclídea



Mètrica C-8



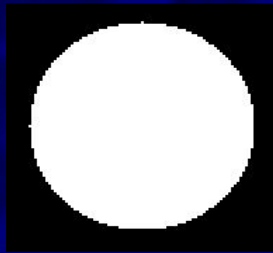
Mètrica C-4



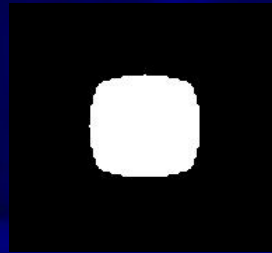


## Transformada de distància

- Combinada amb l'operació 'threshold' emula una erosió.
- L'exemple mostra el resultat de binaritzar (llindar=41) la imatge distància (mètrica C-4). És equivalent a erosionar amb un EE C-4 de radi 41



Imatge original



Imatge resultat

## Opening

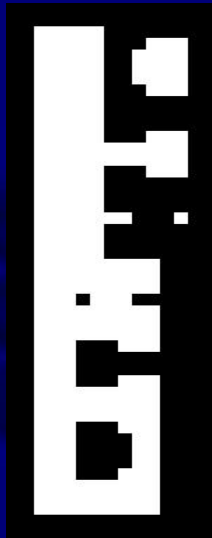
- Es pot expressar com la composició d'una erosió seguida d'una dilatació.

$${}_B(f) \quad \check{B} \quad {}_B(f)$$

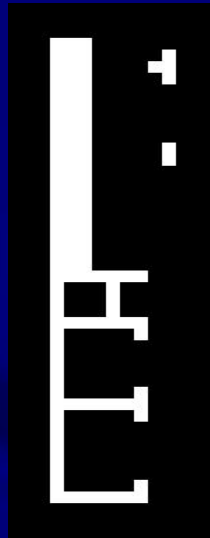
- O també directament a base d'operacions de conjunts:

$${}_B(X) \quad \bigcup_X B_X \quad | B_X \quad X$$

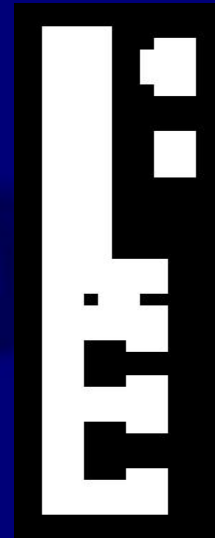
## Opening



Imatge original

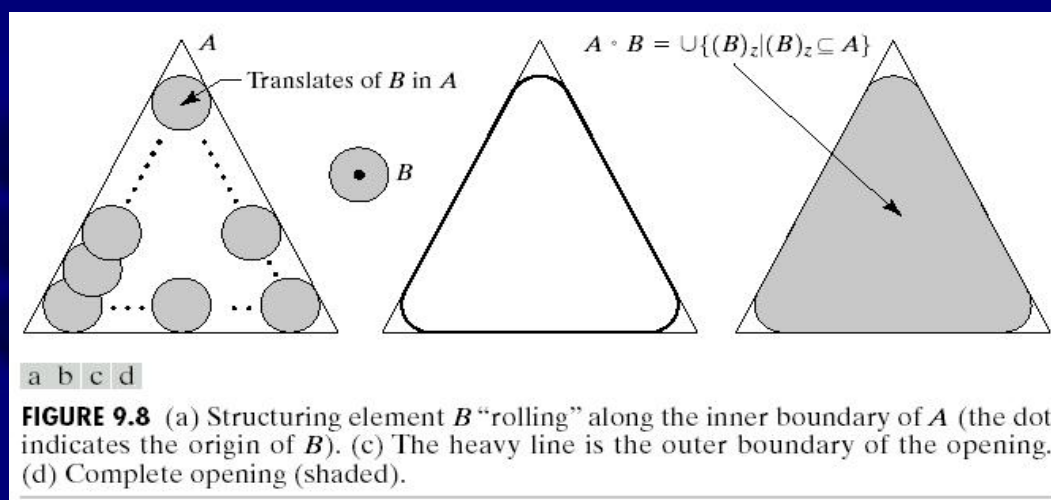


Imatge erosionada (EE  
3x3 quad.)



Imatge oberta  
(erode+dilate)

## Opening



## Closing

- Es pot expressar com la composició d'una dilatació seguida d'una erosió.

$${}_B(f) \quad \check{B} \quad {}_B(f)$$

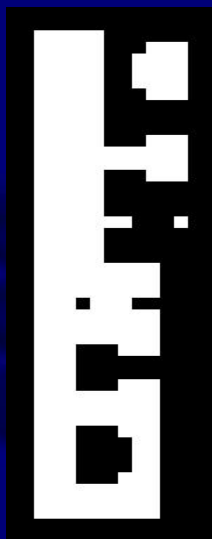
- O bé:

$${}_B(X) \quad \bigcap_X B_X^c \mid X \quad B_X^c$$

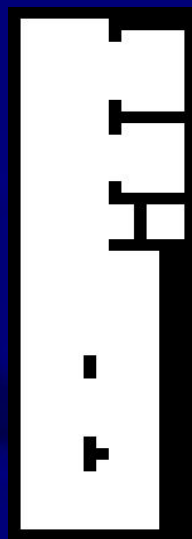
- O bé (dualitat amb l'open):

$${}_B(X) \quad \bigcup_X B_X \mid B_X \quad X^c{}^c$$

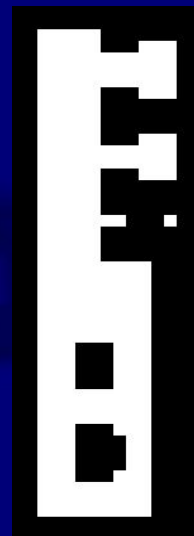
## Closing



Imatge original

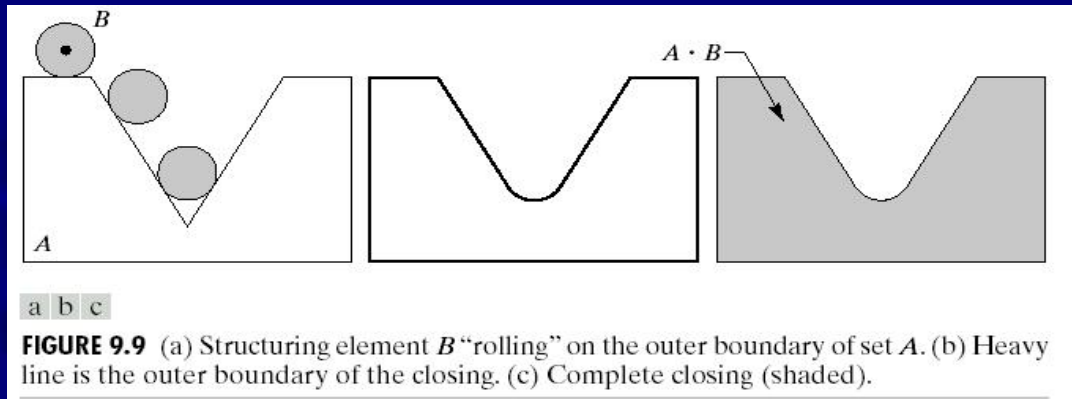


Imatge dilatada (EE  
3x3 quad.)



Imatge tancada  
(dilate+erode)

## Closing



## Propietats de l'open i el close

- Invariants a la translació del EE

- Idempotència  $C = C \circ C$  ;

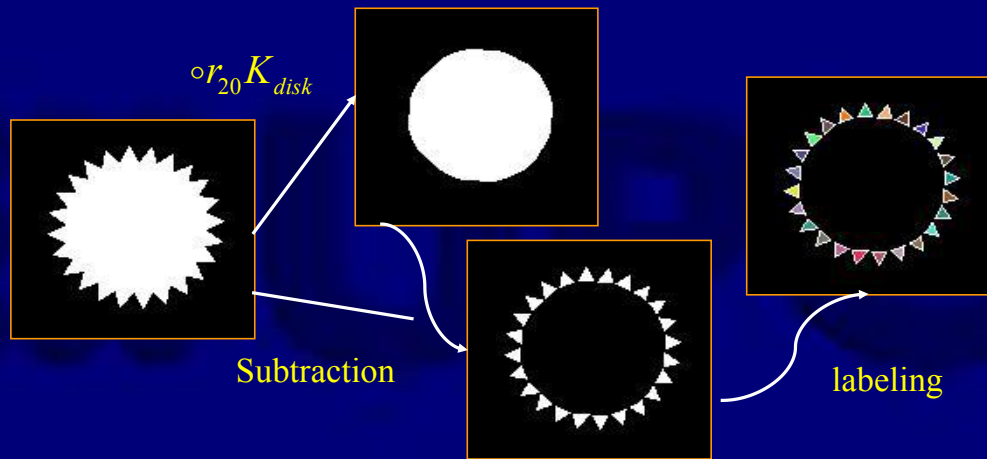
- Dualitat  $C_B = C_B^c$

- l'open és anti-extensiu i el close és extensiu  $C_B = id_B$

- Operadors creixents

$$f \leq g \implies f \circ B \leq g \circ B$$

## Deteció de les dents

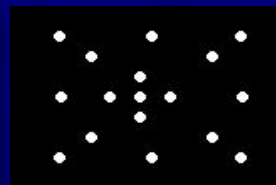


## Dilatació condicional

- Cal una imatge d'entrada (markers), una imatge condicionant i el EE
- El resultat ve donat per la intersecció entre la imatge d'entrada dilatada amb la imatge condicionant



Im. markers



Im. dilatada

00	00	00	00	00	00	00	00	00	00
00	01	02	03	04	03	02	01	00	00
00	02	04	06	08	06	04	02	00	00
00	03	06	09	12	09	06	03	00	00
00	04	08	12	16	12	08	04	00	00
00	03	06	09	12	09	06	03	00	00
00	02	04	06	08	06	04	02	00	00
00	01	02	03	04	03	02	01	00	00
00	00	00	00	00	00	00	00	00	00

Im. condició

1		4		1
	4		4	
		1		
4	1	1	1	4
		1		
	4		4	
1		4		1

Im. resultat

## Reconstrucció

- Cal una imatge d'entrada, una imatge de marques i el EE
- Es van aplicant dilatacions condicionals fins arribar a una imatge estable.

$$\begin{aligned}\delta_{B_c, G}(F) &= \delta_{B_c}(F) \wedge G \\ \delta_{B_c, G}^n(F) &= \underbrace{\delta_{B_c, G}(\delta_{B_c, G}(\cdots \delta_{B_c, G}(f \wedge g)))}_n \\ \gamma_{B_c, F}(G) &= \delta_{B_c, G}^\infty(F)\end{aligned}$$

## Reconstrucció

```
00 00 00 00 00 00 00 00 00
00 01 02 03 04 03 02 01 00
00 02 04 06 08 06 04 02 00
00 03 06 09 12 09 06 03 00
00 04 08 12 16 12 08 04 00
00 03 06 09 12 09 06 03 00
00 02 04 06 08 06 04 02 00
00 01 02 03 04 03 02 01 00
00 00 00 00 00 00 00 00 00
```

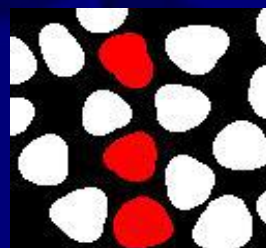
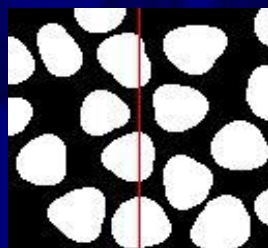
Im. original



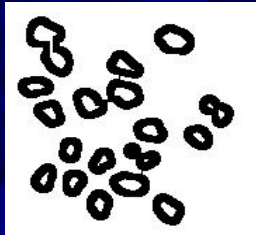
Im. marques

```
1   4   1
  4   1   4
    1   1
  4   1   4
    1   4
1   4   1
```

Im. resultat



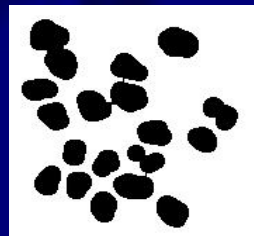
## Exemple: tancament de forats



Im. original

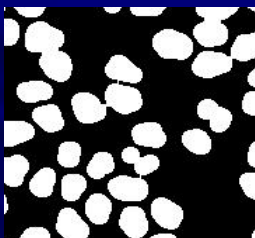


Im. marques

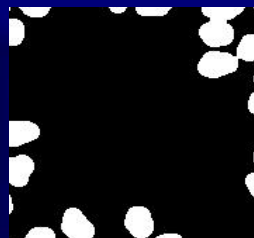


Im. resultat

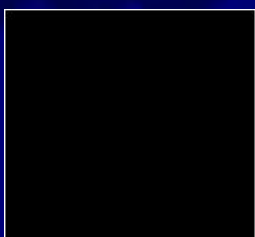
## Exemple: eliminació d'objectes a les vores



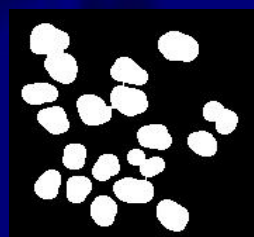
Im. original



Reconstrucció



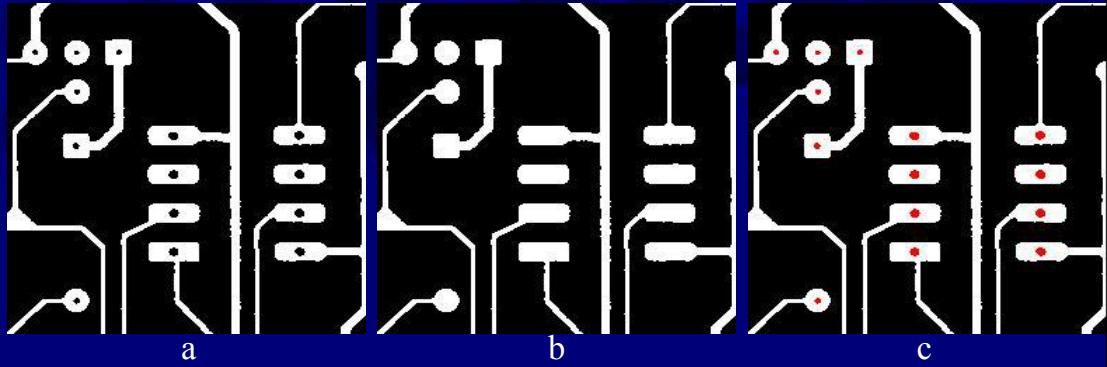
Im. marques



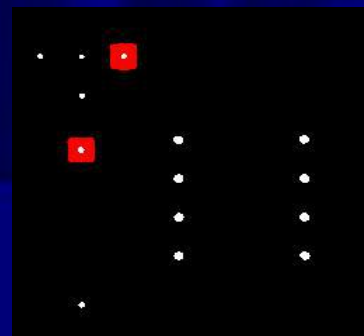
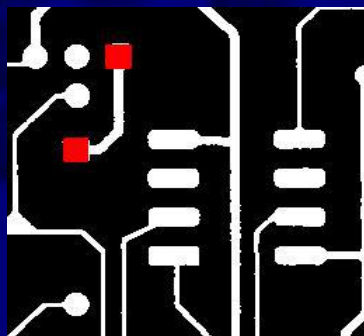
Im. resultat

## Aplicacions

Extracció de les diferents parts d'un circuit imprès

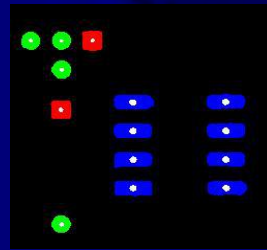
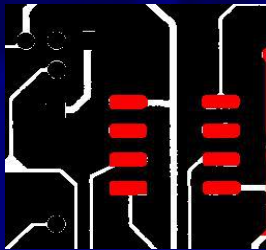
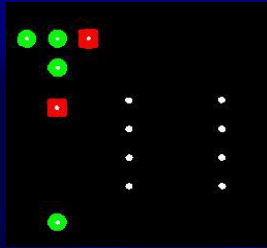
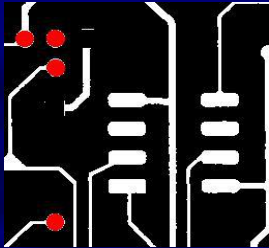


## Aplicacions

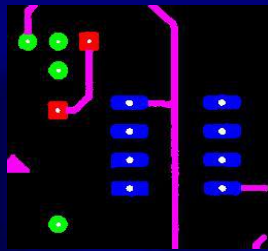
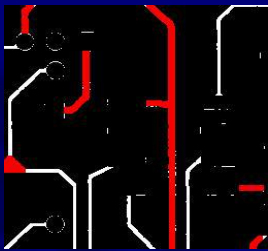




## Aplicacions

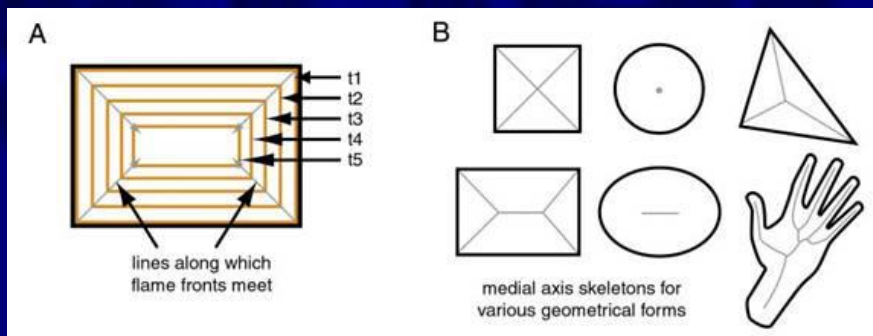


## Aplicacions



## Esquelets

- Consisteix en afinar l'objecte fins a obtenir un conjunt de línies, preservant la homotopia.
- Les línies resultants són l'esquelet o 'medial axis'
- Transformació idempotent, anti-extensiva i no creixent.
- L'analogia 'grassfire':

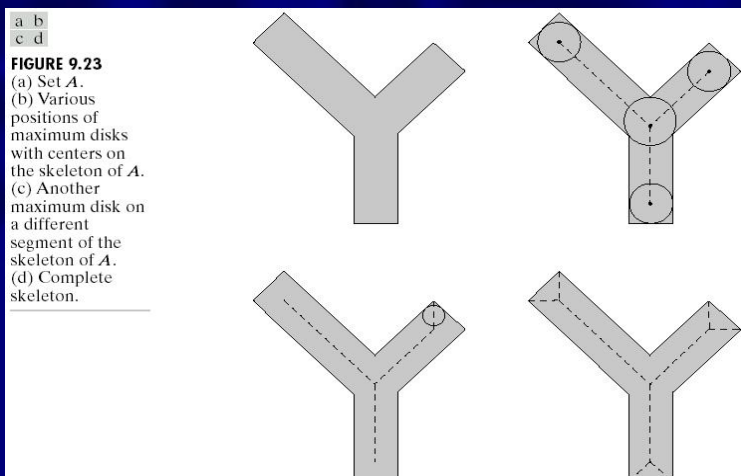


## Esquelets

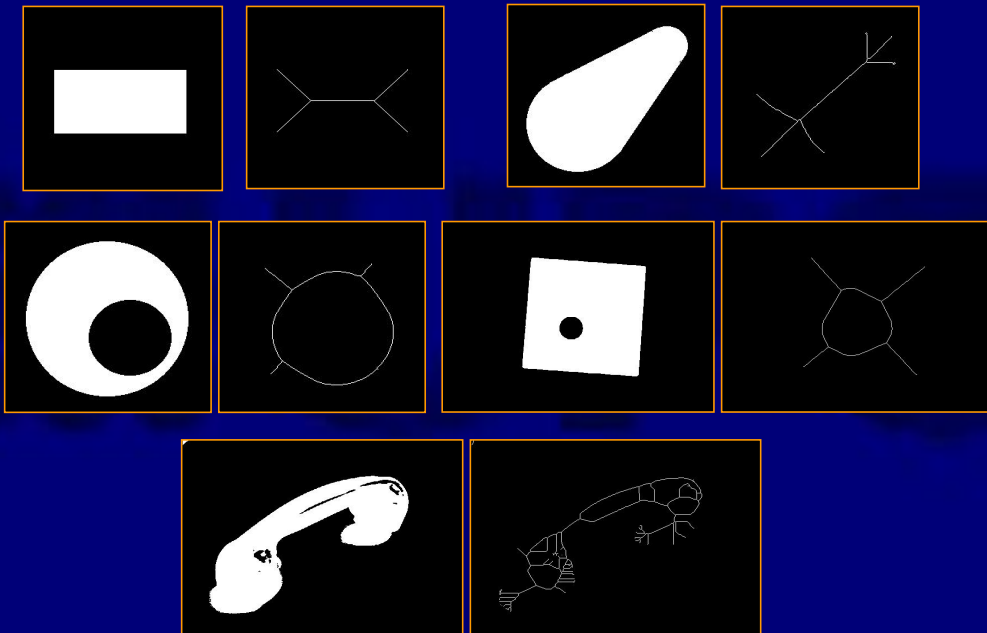
- Maximal disks

$$x \in SK(A)$$

$$y_1, y_2 \in A \mid y_1 \neq y_2 \wedge d(x, y_1) = d(x, y_2) = d(x, A)$$



## Esquelets. Sensibilitat a variacions del contorn



## SKIZ

- Skeleton by Influence Zones
- Zona d'influència : Conjunt de píxels d'una imatge binària que estan més propers a una component connexa que a la resta
- SKIZ: Vores de les zones d'influència



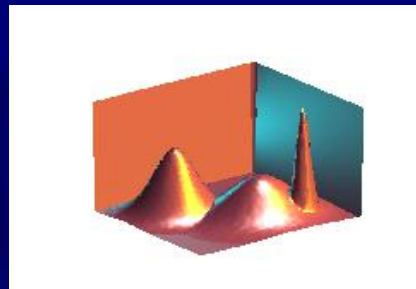
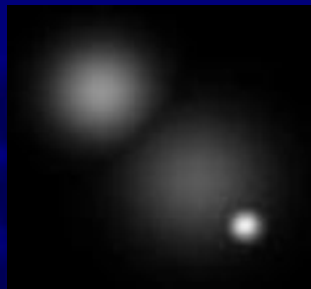
## Menú

### 2. Imatges multinivell

- Extensió a imatges multinivell
- Operadors bàsics sobre imatges multinivell
- Residus
  - Gradient morfològic
  - top-hat
- Reconstrucció multinivell.
- Segmentació morfològica: Watershed
- El problema de la sobresegmentació. Segmentació amb marques
- Màxims i mínims regionals

## Morfologia per a imatges multinivell

- És útil imaginar les imatges multinivell com models d'elevació del terreny. On el nivell de gris de cada píxel representa l'alçada.



- 2 models per extendre els operadors binaris per treballar amb imatges multinivell:
  - Descomposició per llindars
  - Umbra d'una funció

## Descomposició per llindars

- Una imatge multinivell es pot descomposar en varies imatges binàries (*cross sections*) binaritzant-la a cada nivell de gris.
- La *cross section* de nivell 't' ve donada pel conjunt de tots els píxels de valor major o igual que 't'.
- La imatge es pot reconstruir a partir de les cross sections.

$$F(t) = \{x | f(x) \geq t\}$$

$$f(x) = \text{Max}\{t | x \in F(t)\}$$

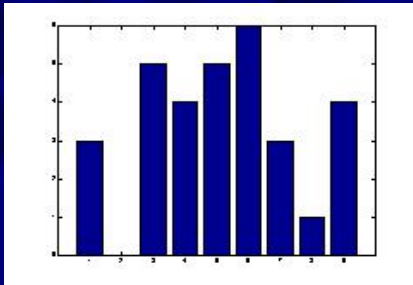


fig.a

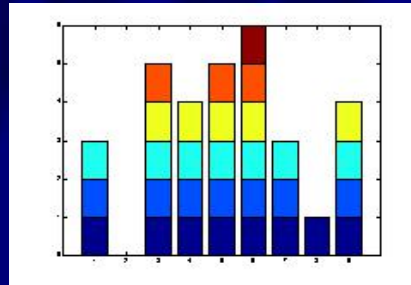
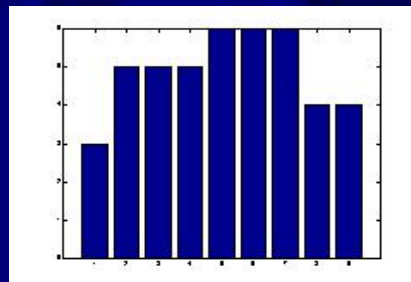
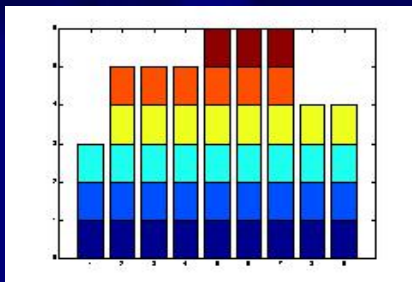
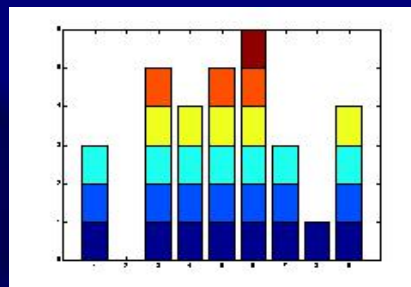
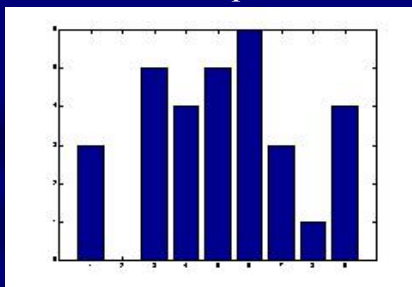


fig.b

## Descomposició per llindars

- Per dilatar una imatge multinivell, la descomposem en cross sections, les dilatam, i recomposem la imatge.

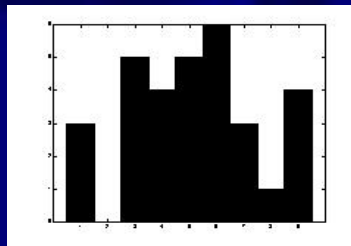


## Umbra d'una funció

- La umbra d'una funció  $f$ ,  $SG(f)$  és el conjunt de punts  $(x,t)$  que queden per sota la funció.  $SG(f) = \{(x,t) | 0 < t \leq f(x)\}$
- Per a recuperar la funció a partir de la umbra, busquem la top surface. El top d'un conjunt ve donat per:

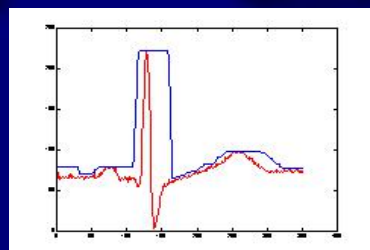
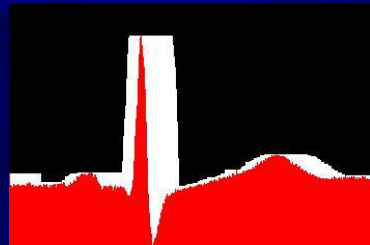
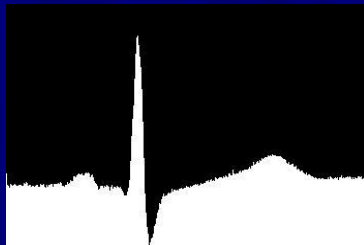
$$T(A)(x) = \begin{cases} \max\{t | (x,t) \in A\} & \text{if } (x,t) \in A \\ 0 & \text{if } (x,t) \notin A \end{cases}$$

- Cal afegir una dimensió més a la funció per a convertir-la en un conjunt. La figura ens mostra un senyal 1D representat com a imatge binària 2D



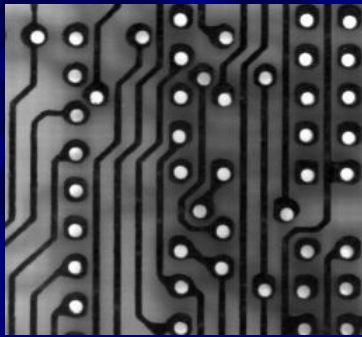
## Umbra d'una funció

- El dilate de la imatge multinivell és el top del dilate binari de la seva umbra.  $\delta_B(f) = T(\delta_B(SG(f)))$
- Representem la umbra d'un senyal ECG com imatge binària. El dilatem. Obtenim el top i el representem en un plot junt amb el senyal original:



## Dilatació multinivell

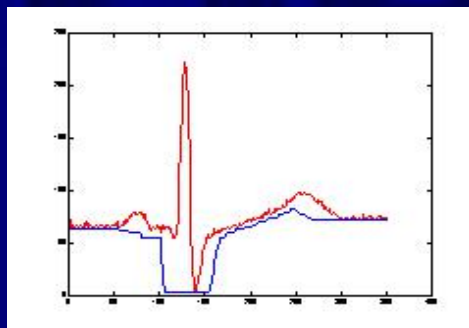
$$\delta_B(f)(x) = \max\{f(y) : y \in (\tilde{B} + x)\}$$



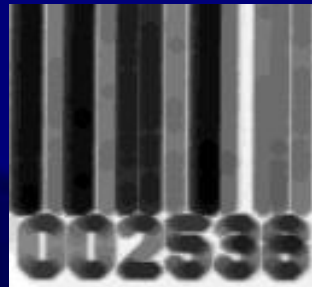
## Erosió multinivell

$$\varepsilon_B(f)(x) = \min\{f(y) : y \in (B + x)\}$$

- La imatge mostra el resultat de erosionar un senyal 1D usant un EE asimètric.

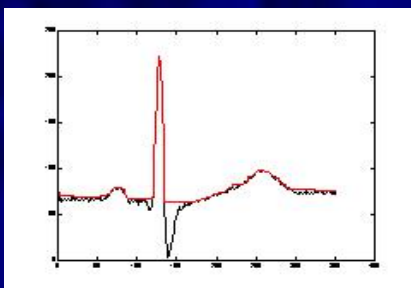


## Erosió multinivell

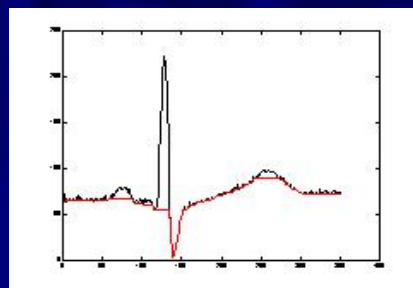


## Open i Close multinivell

- Es construeixen òbviament a partir del dilate i erode.
- Les imatge mostren el resultat de obrir i tancar un senyal 1D usant un EE de mida 30



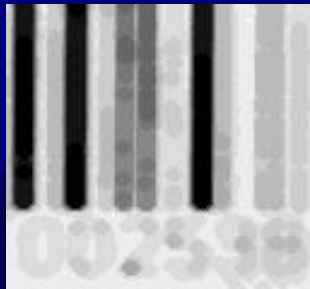
close



open



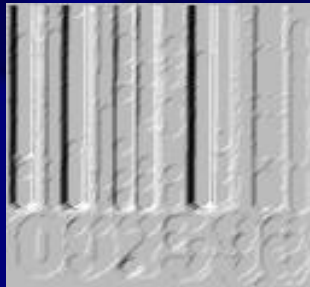
## Open i Close multinivell



close



open



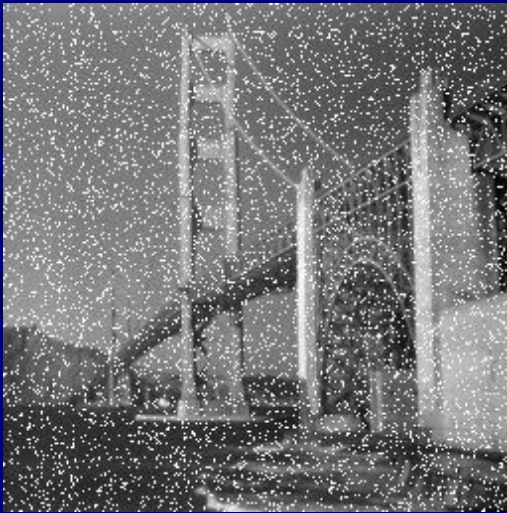
## Aplicacions de l'opening

Filtrat de soroll impulsional

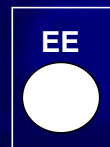
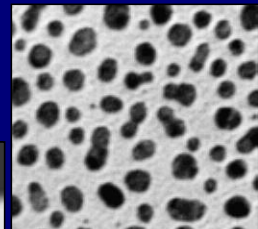


## Aplicacions de l'opening

Filtrat de soroll impulsional amb operador gaussià



## Closing multinivell



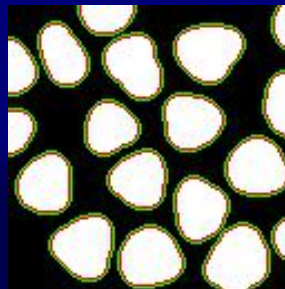
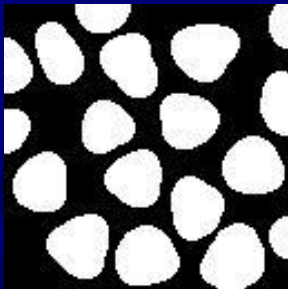
## Residus

- És la part de la imatge que ha estat eliminada al filtrar.
- Diferenciem dos grups: gradient morfològic i top-hat.
- Gradient morfològic:
  - intern (imatge – erosió)
  - extern (dilatació – imatge)
  - tos dos (dilatació – erosió)
  - Laplacà (gradient extern – gradient intern)
- Top hat:
  - open top-hat (imatge – opening)  $WTH(f) = f - (f)$
  - close top-hat (closing – imatge)  $BTH(f) = (f) - f$

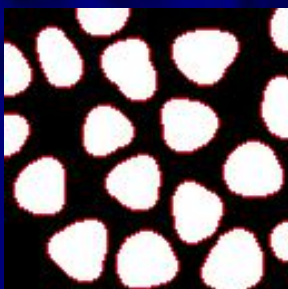
$$B \quad B \quad B$$

## Extracció de contorns

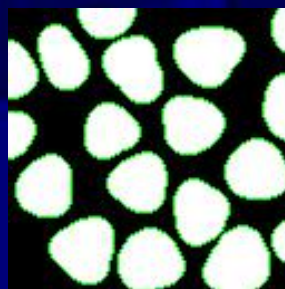
- Usarem el gradient morfològic



doble



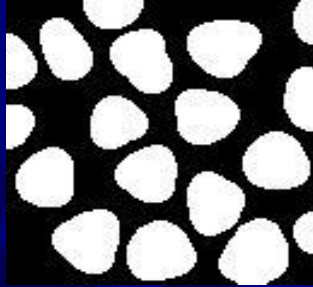
intern



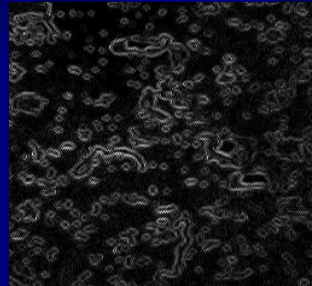
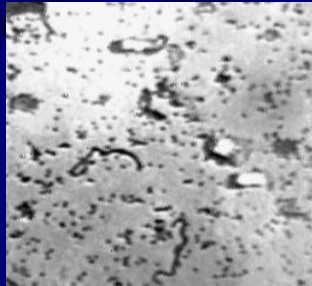
extern

## Extracció de contorns

- La mida del EE determina el gruix del contorn

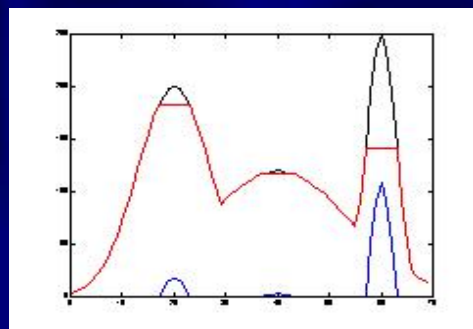
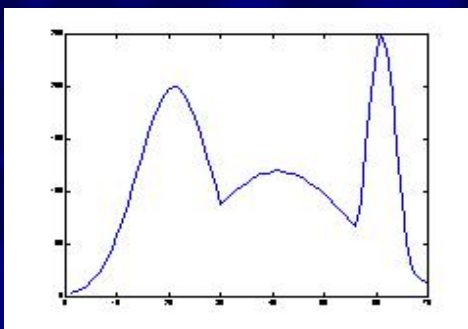


- Podem extreure gradients d'imatges multinivell:



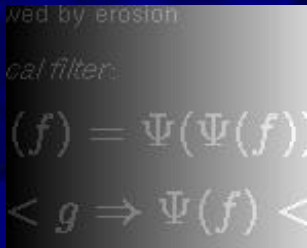
## Open top-hat

- Detectem pics més estrets que el EE.



## Open top-hat

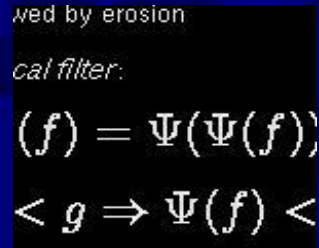
- La imatge original està corrompuda amb il·luminació no uniforme.
- Recuperem la imatge original amb un top-hat.
- Cal fer l'opening usant un EE més gruixut que les estructures de la imatge original



Original



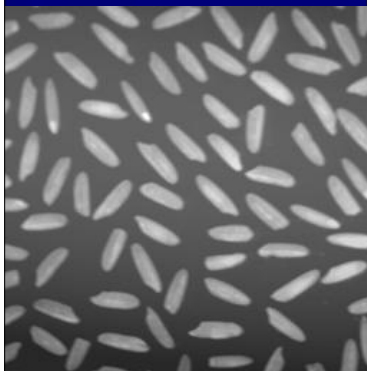
Open



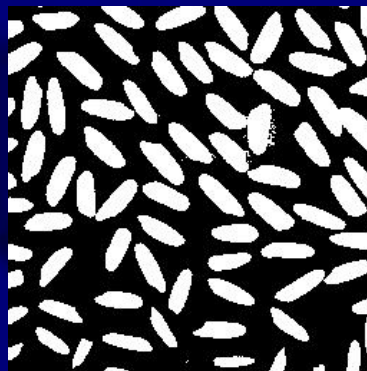
Top-hat

## Open top-hat

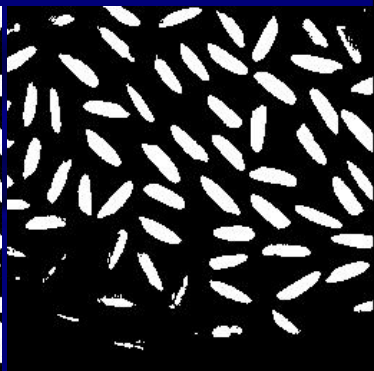
- Volem segmentar els grans d'arròs
- La imatge està corrompuda amb il·luminació no uniforme.



Original



binarització al 40%



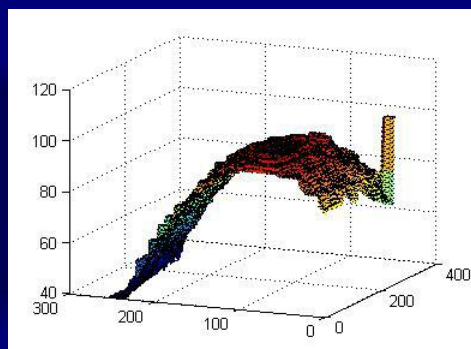
binarització al 60%



## Open top-hat

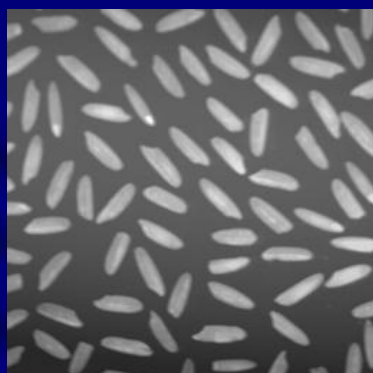


Opening

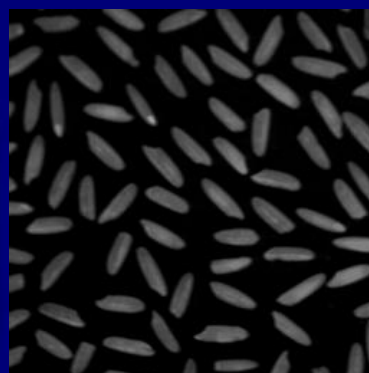


Representació 3D

## Open top-hat



Original



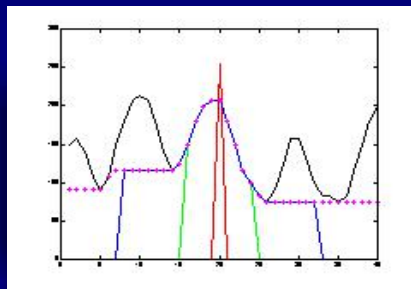
top hat

## Open top-hat



## Reconstrucció multinivell

- Es defineix igual que la binària: seqüència infinita de dilatacions del marker condicionades a la imatge original



-Reconstrucció per dilatació:

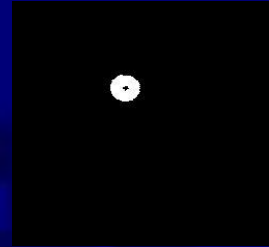
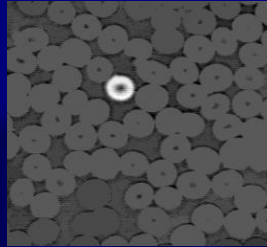
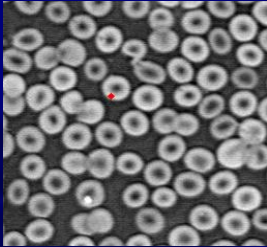
$$R_g(f) \quad g(f)$$

-Reconstrucció per erosió:

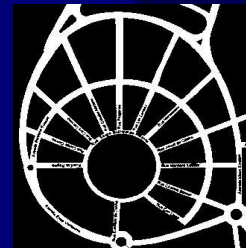
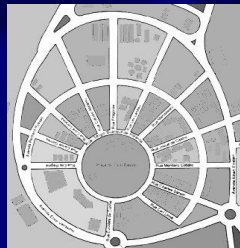
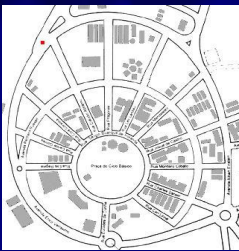
$$R_g(f) \quad g(f)$$

## Reconstrucció multinivell

- Segmentem una única cel.lula a partir d'un pixel de valor 255 (marker) situat sobre ella.

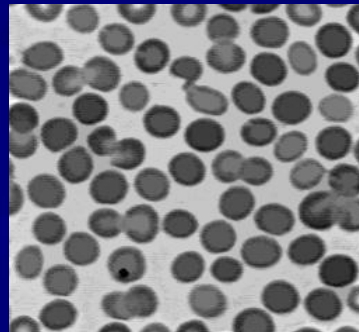
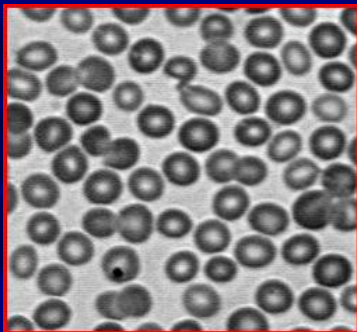


- Segmentem els carrers del mapa situant el marker sobre un dels carrers



## Exemple: eliminació de regions aïllades

- Eliminem el centre de les cel.lules de la imatge
- Creem un marc de imatge de valor 255 (marker)



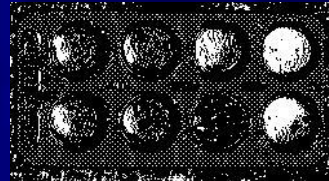


## Màxims i mínims regionals

- Un màxim (mínim) regional és una regió connexa on tots els píxels veïns tenen un valor estrictament menor (major).
- Les imatges reals tenen masses màxims i mínims regionals.
- Cal filtrar per a reduir el nombre de màxims i mínims.
- Els extrems regionals trobats solen ser bons markers per al watershed.



Original



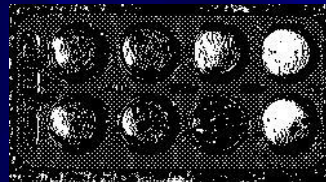
Extrems regionals

## Màxims i mínims regionals

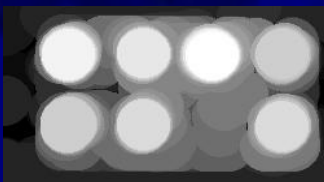
- Les tècniques de filtratge es basen en:
  - contrast: h-max, h-min
  - forma: Opening
  - mida: AreaOpening



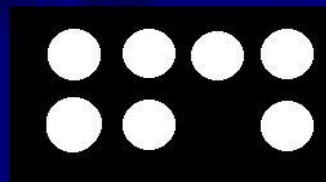
Original



Extrems regionals



Opening



Extrems regionals de la imatge filtrada

