

组合数学第1讲

授课时间: 2017.1.1 授课教师: 孙晓明

记录人: BY: 王华强段江飞

1 1.加法原理

2 2.乘法原理

3 3.排列与组合

一些符号

$$P_{n,m} = n(n-1) \cdots (n-m+1)$$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

$$\binom{n}{m} = 0 (m > n)$$

原有概念的推广

$$\binom{-1}{n} = \frac{(-1)(-2) \cdots (-n)}{n!} = (-1)^n$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1) \cdots (\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!} = \frac{(-1)^{n-1}\binom{2n-1}{n-1}}{2^{2n-1}n}$$

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} x^i = \sum_{i \geq 0} \binom{n}{i} x^i$$

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{i \geq 0} (-1)^i x^i = \sum_{i \geq 0} \binom{-1}{i} x^i$$

推广

$$(1+x)^a = \sum_{i \geq 0} \binom{a}{i} x^i \quad (|x| < 1)$$

(a任意)

3.1 应用1

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} = (1-1)^n = 0$$

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{2 * \lfloor n/2 \rfloor} = 2^{n-1}$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \dots + \binom{n}{2 * \lfloor n/2 \rfloor + 1} = 2^{n-1}$$

3.2 应用2

$$\sum_{i \geq 0} \binom{n}{3i}$$

考虑1的三次单位根 ω_1, ω_2

其中

$$\omega_1 = e^{\pi * 2i/3} \quad \omega_2 = e^{\pi * 4i/3}$$

$$\omega_1^3 = 1$$

于是可以展开 $(1+\omega)^n, (1+\omega^2)^n, (1+1)^n$

由 $(1+\omega+\omega^2=0)$ 得

$$\sum_{i \geq 0} \binom{n}{3i} = \frac{(1+\omega)^n + (1+\omega^2)^n + (1+1)^n}{3}$$

练习: 化简上式

4 4.Vandermonde恒等式

4.1 1. 求和 $\sum_{i \geq 0} i \binom{n}{i} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \dots + n\binom{n}{n} = ?$

对 $(1+x)^n = \sum_{i \geq 0} \binom{n}{i} x^i$ 求导得到

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{i \geq 0} i \binom{n}{i} x^{i-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + \dots + n\binom{n}{n}x^{n-1}$$

令 $x=1$ 得到

$$\sum_{i \geq 0} i \binom{n}{i} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \dots + n\binom{n}{n} = n \cdot 2^{n-1}$$

4.2 2. $(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{m+n}$

$$(\sum_{i \geq 0} \binom{n}{i} x^i) (\sum_{j \geq 0} \binom{m}{j} x^j) = (\sum_{k \geq 0} \binom{n+m}{k} x^k) \Rightarrow \underbrace{\sum_{i=0}^k \binom{n}{i} \binom{m}{k-i}}_{\text{Vandermonde formula}} = \binom{n+m}{k} \text{ 令 } m = n = k \text{ 可}$$

得

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n} = 2^{2n} - 2 \sum_{i=0}^{n-1} \binom{2n}{i}$$

在杨辉三角中，有以下关系

![[Pascaltri]](inkedyhsj.gif) !- img not modified -!

写成公式形式：

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + \dots + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

5 5.组合数的多项式性质

考察

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n * (n+1) * (2n+1)}{6}$$

其可用组合数的性质证明如下：

$$\sum \binom{k}{2} = \sum \frac{k(k+1)}{2} = \sum (k^2/2 - k/2)$$

(1)

$$\sum_{k=1}^n k^2 = 2 \sum_{k=1}^n \binom{k}{2} + \sum_{k=1}^n k$$

(2)

练习： $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = ?$

Tips:

$$x^2 = x(x-1) + x = 2\binom{x}{2} + \binom{x}{1}$$

(1)

$$x^3 = 6\binom{x}{3} + 2\binom{x}{2} + \binom{x}{1}$$

(2)

$$x^k = ?\binom{x}{n} + \dots + ?\binom{x}{1}$$

(3)

可以发现

$$\binom{x}{n}, \dots, \binom{x}{1}$$

(4)

是一组线性无关的基.

思考：见作业1