组合数学第1讲

授课时间: 2017.9.5 授课教师: 孙晓明 记录人: 王华强 段江飞

1 计数原理

加法原理 完成一件事可以有n类方法, 在第一类方法中有m_1种不同的方法, 在完成一件事可以有n类方法, 在第一类方法中有m_1 种不同的方法, 在第二类办法中有m_2种不同的方法$\cdots$, 在第n类办法中有m_n种不同的方法,那么完成这件事的不同方法数为$N = m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_n$

乘法原理 令S是对象的有序对(a, b)的集合, 其中第一个对象a来自大小为p的一个集合, 而对于对象a 的每个选择, 对象b有q 种选择. 于是, S 的大小为$p \times q$:

$$|S| = p \times q$$

乘法原理的第二种实用形式是: 如果第一项任务有p个结果, 而不论第一项任务的结果如何, 第二项任务都有q个结果,那么, 这两项任务连续执行就有$p \times q$个结果.

例1 一名学生要修两门课程. 第一门课可以安排在上午3个小时中的任一小时, 第二门课则可以安排在下午4 个小时的任一小时. 该学生可能的课程安排数量是$3 \times 4 = 12$.

2 排列与组合

排列 对n个不同的元素选出m个元素进行排列, 共有$n(n-1)\cdots(n-m+1)$种不同的排列方式. 记作:

$$P_{n,m} = n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!} = n^{\underline{m}}$$

组合 从n个不同的元素中取出m个元素, 共有$n(n-1)\cdots(n-m+1)$种方法. 记作:

$$\binom{n}{m} = n(n-1)\cdots(n-m+1) = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n^{\underline{m}}}{m!}$$

推广 $P_{n,m}, \binom{n}{m}$不只适用于m, n是整数, 且$m \leq n$的情况, 还适用于n, m是实数, $m \geq n$的情况. 当$m \geq n$时, 从n个元素中取出m个显然是不可能的, 即$\binom{n}{m} = 0$, 进行计算则是:

$$\binom{n}{m} = n(n-1)\cdots(n-n)\cdots(n-m+1) = 0 \quad (m > n)$$

当$n = -1$时这样计算可以得到:

$$\binom{-1}{m} = \frac{(-1)(-2)\cdots(-m)}{m!} = (-1)^m$$

当$n = \frac{1}{2}$时可以得到:

$$\binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!} = \frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!} = \frac{(-1)^{n-1}\binom{2n-1}{n-1}}{2^{2n-1}n}$$

二项式定理 二项式定理最早由牛顿提出, 又称牛顿二项式定理, 它描述了二项式的幂的代数展开. 根据该定理, 可以将两个数之和的整数次幂诸如$(x+y)^n$ 展开为类似ax^by^c 项之和的恒等式.二项式定理的形式可以用以下形式表示:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^{n-i} y^i$$

令$y=1$可以得到$(1+x)^n$的展开式, 这是一个十分常用的展开式:

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i = \sum_{i\geq 0} \binom{n}{i} x^i$$

当$n=-1$时, 利用泰勒展开式也可以将$(1+x)^{-1}$进行展开

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \sum_{i\geq 0} (-1)^i x^i = \sum_{i\geq 0} \binom{-1}{i} x^i$$

前面我们提到$\binom{n}{m}$中的n, m可以推广到任意实数, 二项式定理中的$\binom{n}{i}$中的n也可以任取, 二项式定理同样可以推广到任意实数次幂, 即广义二项式定理

$$(1+x)^a = \sum_{i\geq 0} \binom{a}{i} x^i \quad (|x|<1, a\in\mathbb{R})$$

例2

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n} = (1+1)^n = 2^n$$

$$\binom{n}{0} - \binom{n}{1} + ... + \binom{n}{n} = (1-1)^n = 0$$

由此可以推出

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + ... + \binom{n}{2*\lfloor n \rfloor} = 2^{n-1}$$

$$\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + ... + \binom{n}{2*\lfloor n \rfloor} = 2^{n-1}$$

例3 求:

$$\sum_{i\geq 0} \binom{n}{3i}$$

解 考虑1的三次单位根1, ω, ω_2, 其中$\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $\omega_2 = e^{\frac{4\pi i}{3}}$, $\omega^3 = 1$ 于是可以展开$(1+\omega)^n, (1+\omega_2)^n, (1+1)^n$

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots \tag{1}$$

$$(1+\omega)^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}\omega^1 + \binom{n}{2}\omega^2 + \binom{n}{3}1 + \cdots \tag{2}$$

$$(1+\omega_2)^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}\omega_2^1 + \binom{n}{2}\omega_2^2 + \binom{n}{3} + \cdots \tag{3}$$

由$\omega^2=\omega_2$, $\omega=\omega_2^2$, (3)可化成:

$$(1+\omega_2)^n=\binom{n}{0}1^n+\binom{n}{1}\omega^2+\binom{n}{2}\omega^1+\binom{n}{3}+\cdots \tag{4}$$

由$1+\omega+\omega^2=0$, (1), (2), (4),得

$$\sum_{i\geq 0}\binom{n}{3i}=\frac{(1+\omega)^n+(1+\omega_2)^n+(1+1)^n}{3}$$

例4 求和$\sum_{i\geq 0} i\binom{n}{i}=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\cdots+n\binom{n}{n}$

解 对$(1+x)^n=\sum_{i\geq 0}\binom{n}{i}x^i$求导得到

$$n(1+x)^{n-1}=\sum_{i\geq 0} i\binom{n}{i}x^{i-1}=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}x+\cdots+n\binom{n}{n}x^{n-1}$$

令$x=1$得到

$$\sum_{i\geq 0} i\binom{n}{i}=\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+\cdots+n\binom{n}{n}=n\cdot 2^{n-1}$$

3 Vandermonde Formula

定理 1. *$VandermondeFormula$ 形式如下*

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k}$$

证明

$$(1+x)^n(1+x)^m=(1+x)^{m+n}$$

对$(1+x)^n$, $(1+x)^m$, $(1+x)^{m+n}$ 分别利用二项式定理得到

$$(1+x)^n(1+x)^m=(\sum_{i\geq 0}\binom{n}{i}x^i)(\sum_{j\geq 0}\binom{m}{j}x^j)$$
$$(1+x)^{m+n}=\sum_{k\geq 0}\binom{n+m}{k}x^k$$

考虑x^k的系数, 分别用两种方法求出

$$\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i}=\binom{n+m}{k}$$

□

例5 令$m=n=k$可得

$$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}^2=2^{2n}-2\sum_{i=0}^{n-1}\binom{2n}{i}$$

4 朱世杰恒等式

定理 2. 在杨辉三角中，各组合数有依据位置的关系写成公式形式：

$$\binom{k}{k}+\binom{k+1}{k}+\binom{k+2}{k}+...+\binom{n}{k}=\binom{n+1}{k+1}$$

即朱世杰恒等式

5 组合数的多项式性质

考察

$$1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

其可用组合数的性质证明如下：

证明 $\binom{k}{2}$可以写成二阶多项式,所以:

$$\sum\binom{k}{2}=\sum\frac{k(k+1)}{2}=\sum(\frac{k^2}{2}-\frac{k}{2}) \tag{5}$$

$$k=\binom{k}{1} \tag{6}$$

因而k^2可以写成$\binom{k}{2}$, $\binom{k}{1}$的线性组合, 对于不同的k求和, 得到如下结果:

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=2\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{2}+\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1} \tag{7}$$

□

例6 求: $1^3+2^3+3^3+...+n^3$

解 与指数为2的情况相似, 发现x^3也可写成某些组合数的线性组合:

$$x^2=x(x-1)+x=2\binom{x}{2}+\binom{x}{1}$$

$$x^3=6\binom{x}{3}+6\binom{x}{2}+\binom{x}{1}$$

对于不同的x, 对上式中的每一项分别求和, 由朱世杰恒等式, 可以在i固定时,求得$\sum\binom{x}{i}$的值.

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}k^3&=\sum_{k=1}^{n}(6\binom{k}{3}+6\binom{k}{2}+\binom{k}{1})\\&=6\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{3}+6\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{2}+\sum_{k=1}^{n}\binom{k}{1}\\&=6\binom{n+1}{4}+6\binom{n+1}{3}+\binom{n+1}{2}\end{aligned} \tag{8}$$

思考: 对于任意的k, x^k是否可以写成$x^k=?\binom{x}{k}+...+?\binom{x}{1}$的形式?

定理 3.

$$x^k = k!\binom{x}{k}+?\binom{x}{k-1}+...+?\binom{x}{1}$$

其中

$$\binom{x}{k},\binom{x}{k-1},...,\binom{x}{1}$$

是一组线性无关的基.

证明 首先证明$\binom{x}{k},\binom{x}{k-1},...,\binom{x}{1}$的线性无关性.
若$\binom{x}{k},\binom{x}{k-1},...,\binom{x}{1}$的线性相关, 则存在不全为零的$a_k,a_{k-1},a_{k-2},...,a_1$使得

$$a_k\binom{x}{k}+a_{k-1}\binom{x}{k-1}+...+a_2\binom{x}{2}+a_1\binom{x}{1}=0$$

令$x=1$, 得到

$$a_k\binom{1}{k}+a_{k-1}\binom{1}{k-1}+...+a_2\binom{1}{2}+a_1\binom{1}{1}=0$$

由$\binom{1}{k},\binom{1}{k-1},...,\binom{1}{2}$全部为0, $\binom{1}{1}=1$, 得到

$$a_1=0$$

令$x=2$, 得到

$$a_k\binom{2}{k}+a_{k-1}\binom{2}{k-1}+...+a_2\binom{2}{2}+a_1\binom{2}{1}=0$$

由$\binom{2}{k},\binom{2}{k-1},...,\binom{2}{3}$全部为0, $\binom{2}{2}=1,\binom{2}{1}=2$, 得到

$$a_2+2a_1=0$$

由$a_1=0$的得到

$$a_2=0$$

依次令$x=3,4,\cdots,k$可以推出

$$a_1=a_2=\cdots=a_k=0$$

即不存在一组不全为0的数使得

$$a_k\binom{x}{k}+a_{k-1}\binom{x}{k-1}+...+a_2\binom{x}{2}+a_1\binom{x}{1}=0$$

与假设矛盾, 因此$\binom{x}{k},\binom{x}{k-1},...,\binom{x}{1}$线性无关得证. 接下来用数学归纳法证明$x^k$可以由$\binom{x}{k},\binom{x}{k-1},...,\binom{x}{1}$线性表出. 当$k=1$时

$$x=\binom{x}{1}$$

假设$k=n-1$时x^{n-1}可以由$\binom{x}{n-1},\binom{x}{n-2},...,\binom{x}{1}$线性表出

$$x^{n-1}=c_{n-1}\binom{x}{n-1}+c_{n-2}\binom{x}{n-2}+\cdots+c_1\binom{x}{1}$$

当$k=n$时,

$$\binom{x}{n}=\frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}=\frac{x^n}{n!}+d_{n-1}x^{n-1}+d_{n-2}x^{n-2}+\cdots+d_1x$$

所以, x^n可以表示为

$$x^n=n!\binom{x}{n}+n!d_{n-1}x^{n-1}+n!d_{n-2}x^{n-2}+\cdots+n!d_1x$$

根据假设, $x^{n-1},x^{n-2},\cdots,x$都可以用$\binom{x}{n-1},\binom{x}{n-2},...,\binom{x}{1}$线性表出, 所以$x^n$可用$\binom{x}{n},\binom{x}{n-1},...,\binom{x}{1}$线性表出,且$\binom{x}{n}$的线性系数为$n!$. □

我们可以求出x^k写成$x^k=C_k\binom{x}{k}+...+C_1\binom{x}{1}$的形式时的系数$C_k,C_{k-1},\cdots,C_1$.在定理的证明过程中我们已经得到$C_k=k!$, 即

$$x^k=k!\binom{x}{k}+...+C_1\binom{x}{1}$$

由组合数

$$\binom{x}{k}=\frac{x(x-1)\cdots(x-k+1)}{k!}$$

在等号的右侧中多出来了$x^{k-1},x^{k-2},\cdots,x$ 项, 其中我们发现x^{k-1}项只存在$\binom{x}{k-1}$的展开式中, 因此二者的系数之和应为0, 由此可以推出C_{k-1}的值.

同理, 根据x^i项的系数和$\binom{x}{i}$的展开式中x^i的关系可以得到C_i的值, 进而由此可以推出$C_k,C_{k-1}\cdots,C_1$的值.