组合数学第1讲

授课时间: 2017.9.5 授课教师: 孙晓明 记录人: 王华强 段江飞

1 计数原理

加法原理

完成一件事可以有n类方法, 在第一类方法中有m_1种不同的方法, 在完成一件事可以有n类方法, 在第一类方法中有m_1 种不同的方法, 在第二类办法中有m_2种不同的方法$\cdots$, 在第n类办法中有m_n种不同的方法,那么完成这件事的不同方法数为$N=m_1+m_2+m_3+\cdots+m_n$

乘法原理

令S是对象的有序对(a,b)的集合, 其中第一个对象a来自大小为p的一个集合, 而对于对象a 的每个选择, 对象b有q 种选择. 于是, S 的大小为$p\times q$:

$$|S|=p\times q$$

乘法原理的第二种实用形式是: 如果第一项任务有p个结果, 而不论第一项任务的结果如何, 第二项任务都有q个结果,那么, 这两项任务连续执行就有$p\times q$个结果.

例1

一名学生要修两门课程. 第一门课可以安排在上午3个小时中的任一小时, 第二门课则可以安排在下午4 个小时的任一小时. 该学生可能的课程安排数量是$3\times 4=12$.

2 排列与组合

排列

对n个不同的元素选出m个元素进行排列, 共有$n(n-1)\cdots(n-m+1)$种不同的排列方式. 记作:

$$P_{n,m}=n(n-1)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{(n-m)!}=n^{\underline{m}}$$

组合

从n个不同的元素中取出m个元素, 共有$n(n-1)\cdots(n-m+1)$种方法. 记作:

$$\binom{n}{m}=n(n-1)\cdots(n-m+1)=\frac{n!}{m!(n-m)!}=\frac{n^{\underline{m}}}{m!}$$

推广 $P_{n,m},\binom{n}{m}$不只适用于m,n是整数, 且$m\leq n$的情况, 还适用于n,m是实数, $m\geq n$的情况. 当$m\geq n$时, 从n个元素中取出m个显然是不可能的, 即$\binom{n}{m}=0$, 进行计算则是:

$$\binom{n}{m}=n(n-1)\cdots(n-n)\cdots(n-m+1)=0\quad(m>n)$$

当$n=-1$时这样计算可以得到:

$$\binom{-1}{m}=\frac{(-1)(-2)\cdots(-m)}{m!}=(-1)^m$$

当$n=\frac{1}{2}$时可以得到：

$$\binom{\frac{1}{2}}{n}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)\cdots(\frac{1}{2}-n+1)}{n!}=\frac{(-1)^{n-1}(2n-2)!}{2^{2n-1}n!(n-1)!}=\frac{(-1)^{n-1}\binom{2n-1}{n-1}}{2^{2n-1}n}$$

二项式定理 二项式定理最早由牛顿提出，又称牛顿二项式定理，它描述了二项式的幂的代数展开. 根据该定理，可以将两个数之和的整数次幂诸如$(x+y)^n$ 展开为类似ax^by^c 项之和的恒等式.二项式定理的形式可以用以下形式表示：

$$(x+y)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^{n-i}y^i$$

令$y=1$可以得到$(1+x)^n$的展开式，这是一个十分常用的展开式：

$$(1+x)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i=\sum_{i\geq 0}\binom{n}{i}x^i$$

当$n=-1$时，利用泰勒展开式也可以将$(1+x)^{-1}$进行展开

$$(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\cdots=\sum_{i\geq 0}(-1)^ix^i=\sum_{i\geq 0}\binom{-1}{i}x^i$$

前面我们提到$\binom{n}{m}$中的n,m可以推广到任意实数，二项式定理中的$\binom{n}{i}$中的n也可以任取，二项式定理同样可以推广到任意实数次幂，即广义二项式定理

$$(1+x)^a=\sum_{i\geq 0}\binom{a}{i}x^i \quad (|x|<1, a\in\mathbb{R})$$

例2

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+...+\binom{n}{n}=(1+1)^n=2^n$$

$$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+...+\binom{n}{n}=(1-1)^n=0$$

由此可以推出

$$\binom{n}{0}+\binom{n}{2}+...+\binom{n}{2*\lfloor n\rfloor}=2^{n-1}$$

$$\binom{n}{1}+\binom{n}{3}+...+\binom{n}{2*\lfloor n\rfloor}=2^{n-1}$$

例3 求:

$$\sum_{i\geq 0}\binom{n}{3i}$$

解 考虑1的三次单位根1, ω, ω_2 其中$\omega = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, $\omega_2 = e^{\frac{4\pi i}{3}}$, $\omega^3 = 1$ 于是可以展开$(1+\omega)^n, (1+\omega_2)^n, (1+1)^n$

$$(1+1)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \cdots \tag{1}$$

$$(1+\omega)^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}\omega^1 + \binom{n}{2}\omega^2 + \binom{n}{3}1 + \cdots \tag{2}$$

$$(1+\omega_2)^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}\omega_2^1 + \binom{n}{2}\omega_2^2 + \binom{n}{3} + \cdots \tag{3}$$

由$\omega^2 = \omega_2$, $\omega = \omega_2^2$, (3)可化成:

$$(1+\omega_2)^n = \binom{n}{0}1^n + \binom{n}{1}\omega^2 + \binom{n}{2}\omega^1 + \binom{n}{3} + \cdots \tag{4}$$

由$1+\omega+\omega^2 = 0$, (1), (2), (4),得

$$\sum_{i\geq 0}\binom{n}{3i} = \frac{(1+\omega)^n + (1+\omega_2)^n + (1+1)^n}{3}$$

练习: 化简上式

例4 求和$\sum_{i\geq 0} i\binom{n}{i} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} =$?

解 对$(1+x)^n = \sum_{i\geq 0}\binom{n}{i}x^i$求导得到

$$n(1+x)^{n-1} = \sum_{i\geq 0} i\binom{n}{i}x^{i-1} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2}x + \cdots + n\binom{n}{n}x^{n-1}$$

令$x = 1$得到

$$\sum_{i\geq 0} i\binom{n}{i} = \binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + \cdots + n\binom{n}{n} = n\cdot 2^{n-1}$$

3 Vandermonde formula

定理 1. $\underbrace{\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}}_{Vandermonde\quad formula}$

证明 $(1+x)^n(1+x)^m = (1+x)^{m+n} = (\sum_{i\geq 0}\binom{n}{i}x^i)(\sum_{j\geq 0}\binom{m}{j}x^j) = (\sum_{k\geq 0}\binom{n+m}{k}x^k)$
$\Rightarrow \sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\binom{m}{k-i} = \binom{n+m}{k}$

□

例5 令$m = n = k$可得

$$\binom{n}{0}^2 + \binom{n}{1}^2 + \cdots + \binom{n}{n}^2 = \binom{2n}{n}^2 = 2^{2n} - 2\sum_{i=0}^{n-1}\binom{2n}{i}$$

4 朱世杰恒等式

定理 2. 在杨辉三角中，各组合数有依据位置的关系
写成公式形式：

$$\binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \binom{k+2}{k} + ... + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k+1}$$

即朱世杰恒等式

5 组合数的多项式性质

考察

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

其可用组合数的性质证明如下：

证明 $\binom{k}{2}$可以写成二阶多项式,所以:

$$\sum \binom{k}{2} = \sum \frac{k(k+1)}{2} = \sum (\frac{k^2}{2} - \frac{k}{2}) \tag{5}$$

$$k = \binom{k}{1} \tag{6}$$

因而k^2可以写成$\binom{k}{2}$, $\binom{k}{1}$的线性组合, 对于不同的k求和, 得到如下结果:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = 2\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2} + \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} \tag{7}$$

□

例6 求: $1^3 + 2^3 + 3^3 + ... + n^3 = ?$

解 与指数为2的情况相似, 发现x^3也可写成某些组合数的线性组合:

$$x^2 = x(x-1) + x = 2\binom{x}{2} + \binom{x}{1}$$

$$x^3 = 6\binom{x}{3} + 6\binom{x}{2} + \binom{x}{1}$$

对于不同的x, 对上式中的每一项分别求和, 由朱世杰恒等式, 可以在i固定时,求得$\sum \binom{x}{i}$的值.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k^3 &= \sum_{k=1}^{n} (6\binom{k}{3} + 6\binom{k}{2} + \binom{k}{1}) \\
&= 6\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{3} + 6\sum_{k=1}^{n} \binom{k}{2} + \sum_{k=1}^{n} \binom{k}{1} \\
&= 6\binom{n+1}{4} + 6\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2}
\end{aligned} \tag{8}$$

思考: 对于任意的k, x^k是否可以写成$x^k = ?\binom{x}{k} + ... + ?\binom{x}{1}$的形式?

定理 3.

$$x^k = k!\binom{x}{k} + ?\binom{x}{k-1} + ... + ?\binom{x}{1}$$

其中

$$\binom{x}{k}, ..., \binom{x}{1}$$

是一组线性无关的基.

证明 由数学归纳法, 可以证明x^k可由$\binom{x}{k}, ..., \binom{x}{1}$线性表出.
令$a_k\binom{x}{k} + ... + a_1\binom{x}{1} = 0$. 在$k \le x$的情况下,$\binom{x}{k} \neq 0$.
令$x = 1$, 除$\binom{1}{1} = 1$, 其他的$\binom{1}{i} = 0, (1 < i \le k)$, 得出$a_1 = 0$.
令$x = 2$可以推出$a_2 + 2a_1 = 0$, 由$a_1 = 0$得出$a_2 = 0$.
依次令$x = 3, 4, \cdots, k$可以推出$a_1 = a_2 = \cdots = a_k = 0$, 即不存在一组不全为0的数使得
$a_k\binom{x}{k} + ... + a_1\binom{x}{1} = 0$, 线性无关得证.
显然, 对于任意的k, x^k可以写成$x^k = C_k\binom{x}{k} + ... + C_1\binom{x}{1}$的形式
x的k次方项只有$\binom{x}{k}$中有, 且系数为$\frac{1}{k!}$, 故$\binom{x}{k}$的系数$C_k = k!$.
$\binom{x}{k}$中多出来了$x^{k-1}, x^{k-2}, \cdots, x$ 项, 其中x^{k-1}项只有$\binom{x}{k-1}$中有, 因此二者的系数和应为0, 由此可推出C_{k-1}的值.
同理, 根据x^i项的系数关系可以得到C_i的值, 由此可以推出$C_k, C_{k-1} \cdots, C_1$的值. □
思考：见作业1