

Teoría Clásica de Campos Mostraremos la conexión entre teoría clásica de campos y relatividad

especial.

Una representación matricial corresponde al Grupo de matrices 2×2 ortogonales de determinante 1

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix},$$

donde

$$R^{-1}(\theta) = R^T(\theta) = R(-\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \det[R(\theta)] = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1.$$

Éste es un grupo continuo. Por lo tanto se puede generar a partir de transformaciones infinitesimales. Para ello, considere el generador del Grupo de Rotaciones en dos dimensiones

$$(\tau)_{ab} = -i\epsilon_{ab}, \tag{1}$$

tal que

$$\epsilon_{ac}\epsilon_{cb} = -\delta_{ab}.$$

Entonces

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

Definimos una representación matricial del Grupo de las rotaciones como

$$\begin{aligned} R(\theta) &= \exp(i\tau\theta) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta\tau)^n}{n!}. \end{aligned} \quad (3)$$

Con esta definición $R(\theta)$ es ortogonal ya que

$$\begin{aligned} R^T(\theta) &= \exp(i\tau^T\theta) \\ &= \exp(-i\tau\theta) \\ &= R^{-1}(\theta), \end{aligned} \quad (4)$$

y además

$$\det[R(\theta)] = \det[\exp(i\tau\theta)] = \exp[i\operatorname{Tr}(\tau)] = e^0 = 1. \quad (5)$$

Para realizar la expansión de Taylor en la ec. (3), podemos usar la matriz de traza nula y hermítica en ec. (2) y generalizar sus potencias para n entero

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau^{2n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces

$$\begin{aligned} R(\theta) &= \exp(i\theta\tau) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta\tau)^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (i)^{2n} \frac{(\theta\tau)^{2n}}{2n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (i)^{2n+1} \frac{(\theta\tau)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\theta^{2n}}{2n!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{n=0}^{\infty} i(-1)^n \frac{\theta^{2n+1}}{(2n+1)!} \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 \\ 0 & \cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sin \theta \\ -\sin \theta & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (6)$$

Este grupo es Abelian, ya que

$$R(\theta_1)R(\theta_2) = R(\theta_2)R(\theta_1) \quad (7)$$

si \mathbf{x} es un vector en SO(2)

$$\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}' = R\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}^T \rightarrow \mathbf{x}'^T = \mathbf{x}^T R^T, \quad (8)$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'^T \mathbf{x}' = \mathbf{x}^T R^T R \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} \equiv \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}. \quad (9)$$

En mecánica clásica el Lagrangiano es una función de escalares y por lo tanto un vector debe aparecer en forma de producto escalar, como en el caso de la energía cinética que es proporcional a $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$

Sea ψ un *vector* en el espacio U(1), en el sentido que puede sufrir transformaciones de cambio de fase del tipo

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \psi' = U(\theta)\psi = e^{i\theta Y} \psi \\ \psi^* &\rightarrow \psi'^* = \psi^* U^*(\theta) = \psi^* e^{-i\theta Y} .\end{aligned}\tag{10}$$

Podemos definir el producto escalar como

$$\psi \cdot \psi \equiv \psi^* \psi \rightarrow \psi'^* \psi' = \psi^* U^*(\theta) U(\theta) \psi = \psi^* \psi = \psi \cdot \psi .\tag{11}$$

$$(L^i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk} . \quad (12)$$

Explícitamente

$$L^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad L^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad L^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Estos generadores satisfacen el álgebra (suma sobre índices repetidos)

$$[L^i, L^j] = i\epsilon_{ijk} L^k . \quad (13)$$

donde, haciendo los mismos pasos que para $SO(2)$ en (6),

$$R(\theta_1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ 0 & -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{pmatrix}, \quad R(\theta_2) = \begin{pmatrix} \cos \theta_2 & 0 & -\sin \theta_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta_2 & 0 & \cos \theta_2 \end{pmatrix} \quad R(\theta_3) = \begin{pmatrix} \cos \theta_3 & \sin \theta_3 & 0 \\ -\sin \theta_3 & \cos \theta_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

$$\begin{aligned}
 R(\boldsymbol{\theta}) &= R(\theta_1)R(\theta_2)R(\theta_3) \\
 &= \begin{pmatrix} c_1 c_2 - c_3 s_1 s_2 & c_1 c_2 + c_3 c_1 s_2 & s_3 s_2 \\ -c_1 s_2 - c_3 s_1 s_2 & -s_1 s_2 + c_3 c_1 c_2 & s_3 c_2 \\ s_3 s_1 & -s_3 c_1 & c_3 \end{pmatrix}, \tag{15}
 \end{aligned}$$

donde $c_i = \cos \theta_i$, $s_i = \sin \theta_i$.

Claramente, el Grupo SO(3) es no Abelian, es decir

$$R(\boldsymbol{\theta}_1)R(\boldsymbol{\theta}_2) \neq R(\boldsymbol{\theta}_2)R(\boldsymbol{\theta}_1)$$

El producto escalar bajo $SO(3)$ es invariante:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}'^T \mathbf{x}' = \mathbf{x}^T R^T R \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} . \quad (16)$$

$$\left[\frac{\tau^i}{2}, \frac{\tau^j}{2} \right] = i \epsilon_{ijk} \frac{\tau^k}{2} \quad (17)$$

donde τ^i

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (18)$$

dividas por dos, corresponden a los generadores del Grupo. Las constantes de estructura del Grupo corresponden a ϵ_{ijk} . Como los generadores no conmutan, $SU(2)$ es un Grupo de Lie no Abelian. Definiendo los generadores de $SU(2)$ como

$$T^i = \frac{\tau_i}{2}, \quad (19)$$

Un elemento del Grupo puede escribirse como

$$U(\boldsymbol{\theta}) = e^{iT^i\theta_i} \approx 1 + iT^i\theta_i = 1 + i\frac{\tau^i}{2}\theta_i. \quad (20)$$

Como antes, θ_i son los parámetros de la transformación. Usando las propiedades T_i , podemos mostrar que la representación matricial 2×2 , $U(\boldsymbol{\theta})$, satisface

① Unitariedad: $U^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = U^\dagger(\boldsymbol{\theta})$. En efecto

$$\begin{aligned} U^\dagger(\boldsymbol{\theta})U(\boldsymbol{\theta}) &= e^{-iT^{i\dagger}\theta_i} e^{iT^i\theta_i} \\ &= e^{-iT^i\theta_i} e^{iT^i\theta_i} \\ &= e^0 \\ &= \mathbf{1}, \end{aligned}$$

la identidad 2×2 .

- ② Especial (Special): Usando la formula de Jacobi para la exponencial de una matriz, A , $e^A = e^{\text{Tr} A}$, tenemos que

$$\begin{aligned}\det[U(\boldsymbol{\theta})] &= \det \left\{ \exp \left[i \text{Tr} (T^i) \theta_i \right] \right\} \\ &= e^0 \\ &= 1.\end{aligned}$$

De esta manera T_i genera el grupo de matrices 2×2 unitarias y de determinante 1: $SU(2)$.



$$S \in SO(3)$$

$$J = L + S$$

$$L \in SO(3)$$



$$S \in SU(2)$$

Figura: momento angular total para la tierra y un electrón no relativista. Créditos

<https://www.flaticon.com/authors/smashicons> y Wikipedia

Los objetos más simples que pueden sufrir transformaciones SU(2), corresponden a vectores columnas de dos objetos complejos, como dos funciones de ondas, donde cada función de onda puede tener una de dos posibilidades de carga (una carga más que en U(1))

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix}, \quad \psi^\dagger = (\psi_1^* \quad \psi_2^*). \quad (21)$$

La transformación de este *doblete* bajo SU(2) es

$$\begin{aligned} \psi &\rightarrow \psi' = U(\theta)\psi \\ \psi^\dagger &\rightarrow \psi'^\dagger = \psi^\dagger U^\dagger(\theta). \end{aligned} \quad (22)$$

Sean Ψ y Υ , dobletes $SU(2)$. Hemos definido el producto escalar $SU(2)$ de la forma $\Psi^\dagger \Upsilon$, por ejemplo. Pero hay otra forma de construir el producto escalar para $SU(2)$. Más específicamente, tenemos

$$\Psi = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_2 \end{pmatrix}, \quad \Upsilon = \begin{pmatrix} \Upsilon_1 \\ \Upsilon_2 \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Podemos definir un producto que es invariante bajo $SU(2)$ como el producto escalar bajo la “métrica” de $SU(2)$ (suma sobre índices repetidos)

$$\begin{aligned} \epsilon^{ab} \Psi_a \Upsilon_b &\rightarrow \epsilon_{ab} \Psi'_a \Upsilon'_b = \epsilon_{ab} U_{ac} U_{bd} \Psi_c \Upsilon_d \\ &= (U_{11} U_{22} - U_{12} U_{21}) (\Psi_1 \Upsilon_2 - \Psi_2 \Upsilon_1) \\ &= \epsilon^{ab} (\det \mathbf{U}) \Psi_a \Upsilon_b \\ &= \epsilon^{ab} \Psi_a \Upsilon_b. \end{aligned} \quad (24)$$

Es claro además que

$$\epsilon^{ab} \Psi_a \Upsilon_b = \Psi_1 \Upsilon_2 - \Psi_2 \Upsilon_1. \quad (25)$$

Con el contenido de campos de Ψ , siempre es posible definir el doblete adjunto de $SU(2)$ como

$$\tilde{\Psi} \equiv \begin{pmatrix} \Psi_2^* \\ -\Psi_1^* \end{pmatrix} \quad (26)$$

En tal caso es posible escribir el producto escalar $SU(2)$ es una forma matricial, la cual muestra una invarianza más evidente

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi} \cdot \Upsilon &\equiv \epsilon^{ab} \tilde{\Psi}_a \Upsilon_b = \tilde{\Psi}_1 \Upsilon_2 - \tilde{\Psi}_2 \Upsilon_1 \\ &= \Psi_2^* \Upsilon_2 - (-\Psi_1^*) \Upsilon_1 \\ &= \Psi_2^* \Upsilon_2 + \Psi_1^* \Upsilon_1 \\ &= \Psi_2^* \Upsilon_2 + \Psi_1^* \Upsilon_1 \\ &= \delta^{ac} \Psi_a^* \Upsilon_c \\ &= \Psi^\dagger \Upsilon. \end{aligned} \quad (27)$$

Por lo tanto, el producto escalar entre dos dobletes de $SU(2)$ se puede escribir en cualquiera de las dos formas

$$\tilde{\Psi} \cdot \Upsilon, \quad \text{or} \quad \Psi^\dagger \Upsilon. \quad (28)$$

En adelante, usaremos la primera forma.

Usando la correspondiente identidad para los delta de Kronecker

$$\begin{aligned}\epsilon^{ab}\tilde{\Psi}_a\Upsilon_b &= \delta^{ac}\Psi_a^*\Upsilon_c \\ &= \epsilon^{ad}\epsilon^{cd}\Psi_a^*\Upsilon_c,\end{aligned}\tag{29}$$

y con el intercambio $a \leftrightarrow d$, tenemos que

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi}_a\left(\epsilon^{ab}\Upsilon_b\right) &= \epsilon^{da}\epsilon^{ca}\Psi_d^*\Upsilon_c \\ &= \epsilon^{ad}\epsilon^{ac}\Psi_d^*\Upsilon_c \\ &= \epsilon^{ad}\Psi_d^*\left(\epsilon^{ac}\Upsilon_c\right).\end{aligned}\tag{30}$$

Por consiguiente

$$\tilde{\Psi}_a = \epsilon^{ad}\Psi_d^*.\tag{31}$$

En forma matricial, tenemos

$$\begin{aligned}\tilde{\Psi} &= \begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1^* \\ \Psi_2^* \end{pmatrix} \\ &= i \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Psi_1^* \\ \Psi_2^* \end{pmatrix} \\ &= i\tau_2 \Psi^* .\end{aligned}\tag{32}$$

En general, si $N^2 - 1$ generadores Λ_a , satisfacen el álgebra

$$[\Lambda_a, \Lambda_b] = f_{abc} \Lambda_c, \quad (33)$$

con

$$\Lambda^\dagger = \Lambda, \quad \text{Tr}(\Lambda) = 0, \quad (34)$$

entonces las matrices $N \times N$

$$U(\theta) = \exp(i\Lambda_a \theta_a) \quad (35)$$

son unitarias y de determinante 1, y constituyen la representación fundamental de $SU(N)$.

Los objetos más simples que pueden sufrir transformaciones $SU(N)$, corresponden a vectores columnas de N objetos complejos, como N funciones de ondas por ejemplo, donde cada función de onda puede tener una de N posibilidades de carga ($N - 1$ cargas más que en $U(1)$)

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \vdots \\ \psi_N \end{pmatrix}, \quad \Psi^\dagger = (\psi_1^* \quad \psi_2^* \quad \cdots \quad \psi_N^*). \quad (36)$$

La transformación de este *multiplete* bajo $SU(N)$ es

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow \Psi' = U(\theta)\Psi \\ \Psi^\dagger &\rightarrow \Psi'^\dagger = \Psi^\dagger U^\dagger(\theta), \end{aligned} \quad (37)$$

donde

$$\theta = (\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{N^2-1}). \quad (38)$$

La definición del producto escalar es

$$\Psi \cdot \Psi \equiv \Psi^\dagger \Psi. \quad (39)$$

La representación adjunta para $SU(N)$ esta definida por

$$\left[\tilde{\Lambda}_a \right]_{bc} = -if_{abc} . \quad (40)$$

Los seis generadores independientes del Grupo de Lorentz $SO(1, 3)$ se pueden definir a partir del tensor antisimétrico

$$(J^{\mu\nu})_{\alpha\beta} = i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\rho\sigma\alpha\beta}, \quad (41)$$

donde se usa la convención de suma sobre índices repetidos que estén contraídos (uno como superíndice y el otro como subíndice): $\mu, \nu, \alpha, \beta = 0, 1, 2, 3$, aún en el caso de que sean índices latinos: $i, j, k = 1, 2, 3$.

Los seis generadores independientes satisfacen el álgebra del grupo $SO(1, 3)$

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho}J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho}J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma}J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma}J^{\nu\rho}), \quad (42)$$

donde

$$\{g^{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (43)$$

denota la forma matricial del tensor $g^{\mu\nu}$.

Cualquier representación matricial de esta álgebra debe obedecer las mismas reglas de conmutación.

De las las matrices 4×4

$$(J^{\mu\nu})_{\alpha\beta} = i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\rho\sigma\alpha\beta}, \quad (44)$$

nos interesan realmente las componentes definidas como

$$(J^{\mu\nu})^{\alpha}_{\beta} \equiv g^{\gamma\alpha} (J^{\mu\nu})_{\gamma\beta} = i\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\rho\sigma\gamma\beta}g^{\gamma\alpha}, \quad (45)$$

Teniendo en cuenta la identidad

$$\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon_{\rho\sigma\alpha\beta} = \delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\nu}_{\alpha}, \quad (46)$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} (J^{\mu\nu})_{\alpha\beta} &= i(\delta^{\mu}_{\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\nu}_{\alpha}) \\ (J^{\mu\nu})^{\alpha}_{\beta} &= ig^{\gamma\alpha}(\delta^{\mu}_{\gamma}\delta^{\nu}_{\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}\delta^{\nu}_{\gamma}) \\ &= i(g^{\mu\alpha}\delta^{\nu}_{\beta} - \delta^{\mu}_{\beta}g^{\nu\alpha}) \end{aligned} \quad (47)$$

donde μ y ν rotulan cual de las dieciséis matrices se desea, mientras que α y β rotulan las componentes de las matrices. Estas matrices satisfacen la relaciones de conmutación (42).

Usando la ec. (47)

$$(J^{0i})^\alpha{}_\beta = i (g^{0\alpha} \delta^i{}_\beta - \delta^0{}_\beta g^{i\alpha}). \quad (48)$$

Las únicas componentes diferente de cero son

$$(J^{0i})^0{}_i = i g^{00} \delta^i{}_i = i, \quad (J^{0i})^i{}_0 = -i \delta^0{}_0 g^{ii} = i. \quad (49)$$

Entonces

$$\{J^{01}\} = \begin{pmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \{J^{02}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \{J^{03}\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\omega_{10} = -\omega_{01} = \xi_1, \quad \omega_{20} = -\omega_{02} = \xi_2, \quad \omega_{30} = -\omega_{03} = \xi_3. \quad (50)$$

Definimos

$$K^i \equiv J^{i0} = -J^{0i}. \quad (51)$$

Además

$$(J^{ij})^{\alpha}{}_{\beta} = i (g^{i\alpha} \delta^j_{\beta} - \delta^i_{\beta} g^{j\alpha}) . \quad (52)$$

Las únicas componentes diferente cero son

$$(J^{ij})^l{}_m = i (g^{il} \delta^j_m - \delta^i_m g^{jl}) . \quad (53)$$

Definiendo

$$L_i \equiv \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} J^{jk} , \quad (54)$$

tenemos en términos de componentes que

$$\begin{aligned} (L_i)^l{}_m &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} (J^{jk})^l{}_m \\ &= \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} (g^{jl} \delta^k_m - \delta^j_m g^{kl}) \\ &= \frac{i}{2} (\epsilon_{ijk} g^{jl} \delta^k_m - \epsilon_{ijk} \delta^j_m g^{kl}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(\epsilon_i^l{}_m - \epsilon_{im}^l \right) \\
&= i \epsilon_i^l{}_m \\
(L_i)^l{}_m &= -i \epsilon_{ilm},
\end{aligned} \tag{55}$$

donde, L_i son los generadores de $SO(3)$ en ec. (12), escritos como matrices 4×4 con la primera fila y la primera columna nulas.

Tomando en cuenta además que, incluyendo la definición en la ec. (50):

$$\omega_{i0} \equiv \xi_i, \qquad \theta^i \equiv \frac{1}{2} \epsilon^{ijk} \omega_{jk} \tag{56}$$

podemos invertir las expresiones anteriores, ecs (54) y (56), para obtener

$$\begin{aligned}
\epsilon^{ilm} L_i &= \frac{1}{2} \epsilon^{ilm} \epsilon_{ijk} J^{jk}, \\
&= \frac{1}{2} \left(\delta_j^l \delta_k^m - \delta_k^l \delta_j^m \right) J^{jk}, \\
&= \frac{1}{2} \left(J^{lm} - J^{ml} \right), \\
\epsilon_{ilm} \theta^i &= \frac{1}{2} \epsilon_{ilm} \epsilon^{ijk} \omega_{jk} \\
&= \frac{1}{2} \left(\delta_l^j \delta_m^k - \delta_l^k \delta_m^j \right) \omega_{jk} \\
&= \frac{1}{2} (\omega_{lm} - \omega_{ml})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} (J^{lm} + J^{lm}) , & &= \frac{1}{2} (\omega_{lm} + \omega_{lm}) \\
\epsilon^{ilm} L_i = J^{lm} . , & & \epsilon_{ilm} \theta^i = \omega_{lm} . & (57)
\end{aligned}$$

De este modo, podemos escribir

$$\begin{aligned}
\omega_{ij} J^{ij} &= \epsilon_{ijk} \theta^k \epsilon^{ijl} L_l \\
&= \epsilon_{ijk} \epsilon^{ijl} \theta^k L_l \\
&= 2 \delta_k^l \theta^k L_l \\
&= 2 \theta^k L_k \\
\omega_{ij} J^{ij} &= 2 \theta_k L^k . & (58)
\end{aligned}$$

Mientras que para la suma completa tenemos

$$\begin{aligned}
\omega_{\mu\nu} J^{\mu\nu} &= \omega_{0\nu} J^{0\nu} + \omega_{i\nu} J^{i\nu} , & \mu = 0, i \\
&= \omega_{0i} J^{0i} + \omega_{i0} J^{i0} + \omega_{ij} J^{ij} , & \nu = 0, j \\
&= \omega_{0i} J^{0i} + \omega_{0i} J^{0i} + \omega_{ij} J^{ij}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2\omega_{0i}J^{0i} + \omega_{ij}J^{ij} \\
&= 2\omega_{0k}J^{0k} + \omega_{ij}J^{ij} && 0i \rightarrow 0k \\
\omega_{\mu\nu}J^{\mu\nu} &= 2\xi_k K^k + 2\theta_k L^k, && \text{sum upon } k.
\end{aligned} \tag{59}$$

Teorema: La representación 4×4 del Grupo de Lorentz se puede obtener de la exponenciación de los generadores matriciales 4×4 $J^{\mu\nu}$ y los parámetros $\omega_{\mu\nu}$

$$\Lambda = \exp \left(-i\omega_{\mu\nu} \frac{J^{\mu\nu}}{2} \right), \tag{60}$$

Las componentes están definidas como $\Lambda^\alpha{}_\beta$, y $(J^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta$. A continuación vamos a usar la notación de subir el índice con la métrica

$$\xi^i \equiv g^{ij}\xi_j = g^{ji}\xi_i = -\xi_i.$$

Además, de la ec. (59)

$$\Lambda = \exp \left(-i\omega_{\mu\nu} \frac{J^{\mu\nu}}{2} \right)$$

$$\begin{aligned}
&= \exp(-i\xi_i K^i - i\theta_i L^i) \\
&= \exp\left[i \sum_i (\xi^i K^i - i\theta^i L^i)\right] \\
&= \exp(i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{K} + i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}) .
\end{aligned} \tag{61}$$

Ya hemos desarrollado la parte de $SO(3)$ correspondiente a los generadores L_i . Cada L_i genera una matriz de rotación ortogonal como en las ecs. (14). A continuación mostraremos el tipo de matriz que genera un boost ξ_i asociado a un generador K^i .

Recordemos que

$$\begin{aligned}
\cosh \xi &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{2n}}{2n!} \approx 1 + \mathcal{O}(\xi^2) \\
\sinh \xi &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!} \approx \xi + \mathcal{O}(\xi^2),
\end{aligned} \tag{62}$$

Un boost infinitesimal a lo largo de x es

$$\{\Lambda^\mu{}_\nu\}_{x\text{-boost}} = \exp(i\xi K^1) \approx \begin{pmatrix} 1 & \xi & 0 & 0 \\ \xi & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (63)$$

donde el generador de boost es

$$K^1 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (64)$$

Para realizar la expansión de Taylor, definimos la submatriz

$$K^0 = \mathbf{1}_{2 \times 2}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}, \quad K^2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad K^3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

$$K^n = (-1)^n \mathbf{1}_{2 \times 2}, \quad K^{2n+1} = (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces, para la subestructura 2×2

$$\begin{aligned}
 \Lambda_{2 \times 2} = \exp(i\xi K) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\xi K)^n}{n!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (i)^{2n} \frac{(\xi K)^{2n}}{2n!} + \sum_{n=0}^{\infty} (i)^{2n+1} \frac{(\xi K)^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\xi^{2n}}{2n!} (-1)^n \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{n=0}^{\infty} i(-1)^n \frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!} (-1)^n \begin{pmatrix} 0 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{2n}}{2n!} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\xi^{2n+1}}{(2n+1)!} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cosh \xi & 0 \\ 0 & \cosh \xi \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & \sinh \xi \\ \sinh \xi & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cosh \xi & \sinh \xi \\ \sinh \xi & \cosh \xi \end{pmatrix}, \tag{65}
 \end{aligned}$$

de modo que

$$\begin{aligned} \{\Lambda(\xi_1)^\mu{}_\nu\} &= \begin{pmatrix} \cosh \xi_1 & \sinh \xi_1 & 0 & 0 \\ \sinh \xi_1 & \cosh \xi_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, & \{\Lambda(\xi_2)^\mu{}_\nu\} &= \begin{pmatrix} \cosh \xi_2 & 0 & \sinh \xi_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \sinh \xi_2 & 0 & \cosh \xi_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \\ \{\Lambda(\xi_3)^\mu{}_\nu\} &= \begin{pmatrix} \cosh \xi_3 & 0 & 0 & \sinh \xi_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \xi_3 & 0 & 0 & \cosh \xi_3 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (66)$$

Similarmente, una rotación por un ángulo infinitesimal $\theta = \theta_3$ alrededor del plano xy (o sobre el eje z)

$$\{\Lambda^\mu{}_\nu\}_{xy\text{-rotation}} \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \theta & 0 \\ 0 & -\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (67)$$

Que como hemos visto, puede obtenerse a partir de los generadores del Grupo de rotaciones $SO(3)$, generalizados a matrices 4×4

$$\{L_i\} \equiv \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & & \\ 0 & L_{3 \times 3}^i & & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad (68)$$

$$L_{3 \times 3}^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_{3 \times 3}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$L_{3 \times 3}^3 = \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

.

Aquí nos enfocaremos en la representaciones más simples no triviales del Grupo de Lorentz. Estas corresponde a las representaciones no equivalentes 2×2 : $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, \frac{1}{2})$ del grupo $SL(2, C)$ con elementos

$$S(\Lambda)_{(\frac{1}{2}, 0)} = \exp \left(-i \omega_{\mu\nu} \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2} \right)$$

donde los seis generadores independientes están dados por

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4} (\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu) . \quad (69)$$

satisfacen el álgebra de Lorentz, eq (42), tal que

$$\sigma^\mu = (\sigma^0 \quad \boldsymbol{\sigma}) , \quad \bar{\sigma}^\mu = (\sigma^0 \quad \bar{\boldsymbol{\sigma}}) , \quad (70)$$

con

$$\begin{aligned} \sigma^0 &= \mathbf{1}_{2 \times 2}, & \boldsymbol{\sigma} \rightarrow \sigma^i &= (\sigma^1, \sigma^2, \sigma^3) \\ \bar{\sigma}^0 &= \mathbf{1}_{2 \times 2}, & \bar{\boldsymbol{\sigma}} \rightarrow \bar{\sigma}^i &= (-\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3) \end{aligned} \quad (71)$$

que incluyen las tres matrices de Pauli (18), con álgebra (17)

$$\omega_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} = -i\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{\sigma}.$$

Aquí hemos usado la notación de subir el índice con la métrica

$$\xi^i \equiv g^{ij}\xi_j = g^{ii}\xi_i = -\xi_i.$$

Por consiguiente

$$i\omega_{\mu\nu}\frac{\sigma^{\mu\nu}}{2} = \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}.$$

Comparando con la expresión general (61)

$$-i\omega_{\mu\nu}\frac{J^{\mu\nu}}{2} = i\boldsymbol{\xi} \cdot \boldsymbol{K} + i\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{L},$$

tenemos que los generadores para la representación $(\frac{1}{2}, 0)$ del subgrupo $SL(2, C)$ son

$$\boldsymbol{K}_{2 \times 2} = -i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}, \quad \boldsymbol{L}_{2 \times 2} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}.$$

La ecuación (69) se puede escribir en términos de los seis generadores independientes correspondientes a los boosts y las rotaciones

$$S(\Lambda)_{(\frac{1}{2}, 0)} \equiv S(\Lambda) = \exp \left(\boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right), \quad (72)$$

La otra representación independiente es

$$\begin{aligned} [S(\Lambda)]^* = S(\Lambda)_{(0, \frac{1}{2})} &\equiv S^*(\Lambda) = \exp \left(\boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right)^* \\ &= \exp \left(\boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}^*}{2} - i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}^*}{2} \right). \end{aligned} \quad (73)$$

Las componentes de $S(\Lambda)$ serán denotadas como $[S(\Lambda)]_{\alpha}^{\beta}$. En tal caso, $S^*(\Lambda)$ es otra representación diferente 2×2 de $SL(2, C)$. Ésta se denota con $(0, \frac{1}{2})$, y con el fin de enfatizar la diferencia, sus componentes se denotan con índices acentuados con puntos $\dot{\alpha}, \dot{\beta}, \dots$. De modo que sus componentes serán denotadas como $[S^*(\Lambda)]_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}}$.

La componentes de las matrices de Pauli se definen como $\sigma_{\alpha\dot{\beta}}^{\mu}$ y $\bar{\sigma}^{\mu\dot{\alpha}\beta}$, tal que

$$\begin{aligned} (\sigma^{\mu\nu})_{\alpha}{}^{\beta} &\equiv \frac{i}{4} \left(\sigma_{\alpha\dot{\gamma}}^{\mu} \bar{\sigma}^{\nu\dot{\gamma}\beta} - \sigma_{\alpha\dot{\gamma}}^{\nu} \bar{\sigma}^{\mu\dot{\gamma}\beta} \right) \\ &= \frac{i}{4} [\sigma^{\mu} \bar{\sigma}^{\nu} - \sigma^{\nu} \bar{\sigma}^{\mu}]_{\alpha}{}^{\beta}. \end{aligned}$$

Por ejemplo, de la ec. (??)

$$(\sigma^{01})_{\alpha}{}^{\beta} = \left[-\frac{i}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right]_{\alpha}{}^{\beta},$$

de modo que

$$(\sigma^{01})_1{}^1 = (\sigma^{01})_2{}^2 = 0, \quad (\sigma^{01})_1{}^2 = (\sigma^{01})_2{}^1 = -\frac{i}{2}.$$

En resumen, las tres posibles representaciones del algebra de Lorentz

$$[J^{\mu\nu}, J^{\rho\sigma}] = i(g^{\nu\rho} J^{\mu\sigma} - g^{\mu\rho} J^{\nu\sigma} - g^{\nu\sigma} J^{\mu\rho} + g^{\mu\sigma} J^{\nu\rho})$$

$$\{g^{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (74)$$

son el conjunto de 16 matrices 4×4 , $J^{\mu\nu}$, el conjuntos de 16 matrices 2×2 , $\sigma^{\mu\nu}$ y el conjunto con los 16 conjugados:

$$(J^{\mu\nu})^\alpha{}_\beta = i(g^{\mu\alpha}\delta^\nu{}_\beta - \delta^\mu{}_\beta g^{\nu\alpha}), \quad \sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu), \quad \sigma^{*\mu\nu} = -\frac{i}{4}(\sigma^\mu \bar{\sigma}^\nu - \sigma^\nu \bar{\sigma}^\mu)^*,$$

$$\sigma^\mu = (\sigma^0, \boldsymbol{\sigma}), \quad \bar{\sigma}^\mu = (\sigma^0, -\boldsymbol{\sigma}),$$

$$\Lambda^\alpha{}_\beta = \left[\exp\left(-i\omega_{\mu\nu} \frac{J^{\mu\nu}}{2}\right) \right]^\alpha{}_\beta, \quad S_\alpha{}^\beta = \left[\exp\left(-i\omega_{\mu\nu} \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2}\right) \right]_\alpha{}^\beta, \quad S^*_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} = \left[\exp\left(i\omega_{\mu\nu} \frac{\sigma^{*\mu\nu}}{2}\right) \right]_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}.$$

con $\boldsymbol{\sigma}$ el vector de matrices de Pauli.

En 2018 se presentó el borrador de la resolución, efectiva a partir del 20 de mayo de 2019, en la cual la humanidad adopta como base el sistema natural de unidades.

Lo que esto significa es que de ahora en adelante los valores de estas constantes tendrán un valor exacto para siempre:

$$\Delta\nu_{\text{Cs}} = 9\,192\,631\,770 \text{ Hz},$$

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s},$$

$$h = 6.626\,070\,15 \times 10^{-34} \text{ Js},$$

$$e = 1.602\,176\,634 \times 10^{-19} \text{ C},$$

$$k = 1.380\,649 \times 10^{-23} \text{ J/K},$$

$$N_{\text{A}} = 6.022\,140\,76 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}.$$

El error se pasa a la medida de la correspondiente cantidad SI.

Teniendo en cuenta que $1 \text{ eV} = 1.602\,176\,565(35) \times 10^{-19} \text{ J}$,

$$\begin{aligned} 10^{-9} \text{ GeV} &= 1.602\,176\,565(35) \times 10^{-19} \text{ J} \\ 1 \text{ GeV} &= 1.602\,176\,565(35) \times 10^{-10} \text{ J} \end{aligned} \quad (75)$$

De la masa en reposo del protón, por ejemplo,

$$\begin{aligned} m_p c^2 &= 1.672\,621\,777(74) \times 10^{-27} \text{ kg} \times (299\,792\,458 \text{ ms}^{-1})^2 \\ &= 1.503\,277\,5 \times 10^{-10} \text{ J} \frac{1 \text{ GeV}}{1.602\,176\,565(35) \times 10^{-10} \text{ J}} \\ &= 938.272\,046(21000000) \text{ MeV}/c^2, \end{aligned}$$

podemos obtener la equivalencia entre masa y energía en unidades naturales: $c = 1$

$$\begin{aligned} m_p &= 938.272\,046(21) \text{ MeV} \\ &\approx 1 \text{ GeV}. \end{aligned} \quad (76)$$

de modo que

$$1 \text{ kg} = 5.609\,589\,12(42) \times 10^{26} \text{ GeV} . \quad (77)$$

Example

Calcule la energía cinética de un mosquito de 2 mg, moviéndose a 1.45 Km/h

$$v = 1.45 \text{ km/h} \frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}} \frac{1\,000 \text{ m}}{1 \text{ km}} = 0.4 \text{ m/s} \quad (78)$$

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} m v^2 = 0.5 \times 2 \times 10^{-6} \text{ kg} (0.4 \text{ m/s})^2 \\ &= 1.6 \times 10^{-7} \text{ J} \\ &= 1 \text{ TeV} . \end{aligned} \quad (79)$$

Teniendo en cuenta que [?]

$$c = 299\,792\,450 \text{ m s}^{-1} \quad (\text{exact}) , \quad (80)$$

podemos obtener la relación entre longitud y energía a partir de

$$\begin{aligned}
 \hbar c &= 1.054\,571\,68(53) \times 10^{-34} \text{ J s} \times 299\,792\,450 \text{ m s}^{-1} \\
 &\approx 3.161\,526\,28 \times 10^{-26} \text{ J m} \\
 &\approx 3.161\,526\,28 \times 10^{-26} \text{ J} \frac{1 \text{ GeV}}{1.602\,176\,487 \times 10^{-10} \text{ J}} \text{ m} \\
 &= 1.973\,269\,631(49) \times 10^{-16} \text{ GeV m}.
 \end{aligned} \tag{81}$$

Entonces $\hbar c = 0.1973\,269\,631(49) \text{ GeV fm}$.

podemos obtener la relación entre el tiempo y la energía de

$$\hbar \equiv \frac{h}{2\pi} = 1.054\,571\,68(53) \times 10^{-34} \text{ J s} = 6.582\,118\,99(16) \times 10^{-25} \text{ GeV s}, \tag{82}$$

Similarmente para la relación entre temperatura y energía, tenemos de la constante de Boltzman

$$k = 1.380\,6504(24) \times 10^{-23} \text{ J K}^{-1} = 8.617\,343(15) \times 10^{-14} \text{ GeV K}^{-1}. \tag{83}$$

Los factores de conversión del sistema MKS a MPU están dados en la Tabla 1 después de hacer $\hbar = c = k = 1$

$6.582\,118\,99(16) \times 10^{-25} \text{ s}$	$\hbar \text{ GeV}^{-1}$
$1.973\,269\,631(49) \times 10^{-16} \text{ m}$	$\hbar c \text{ GeV}^{-1}$
1 kg	$5.609\,589\,12(42) \times 10^{26} \text{ GeV}/c^2$
1 K	$8.617\,343(15) \times 10^{-14} /k \text{ GeV}$
$299\,792\,450 \text{ m s}^{-1}$	c
m kg	$2.842\,278\,859 \times 10^{-16} \hbar c^{-1}$

Tabla: SI \leftrightarrow MPU

En la Tabla 1 las unidades sin factores se han puesto en el lado donde resultan más cómodos para describir el mundo subatómico. De esta manera las distancias y los tiempos del mundo subatómicos son más simples en MPU, mientras que la masa y la temperatura son más simples en el sistema SI. Usando *wolfram alpha* es posible cambiar entre estos dos sistemas de unidades. Por ejemplo

- <http://www.wolframalpha.com/input/?i=6.58211899E-25+GeV/hbar+to+s>
- https://www.wolframalpha.com/input/?i=1E-15+m+to+hbar*c/GeV

De la constante de Fuerza electrostática $K = 1/(4\pi\epsilon_0)$, podemos obtener el valor de la constante de estructura fina electromagnética $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c)$

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \approx \frac{1}{4\pi \times 8.854 \times 10^{-12}} \text{C}^{-2}\text{Nm}^2 = \frac{1}{4\pi \times 8.854 \times 10^{-12}} \text{C}^{-2}\text{Kg m}^3\text{s}^{-2} \\
 &\approx \frac{1}{4\pi \times 8.854 \times 10^{-12}} \text{C}^{-2} \times 5.6096 \times 10^{26} \text{GeV} \times (5.068 \times 10^{15} \text{GeV}^{-1})^3 \\
 &\quad \times (1.519 \times 10^{-24} \text{GeV}^{-1})^{-2} \times \frac{(\hbar c)^3 \hbar^{-2}}{c^2} \\
 &\approx 2.84 \times 10^{35} \text{C}^{-2} \hbar c \\
 &\approx 2.84 \times 10^{35} \text{C}^{-2} \times \left(\frac{1.602 \times 10^{-19} \text{C}}{e^2} \right)^2 \hbar c \\
 &= \frac{7.296 \times 10^{-3}}{e^2} \hbar c
 \end{aligned}$$

Definimos la cantidad adimensional α , como

$$\alpha \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \approx 7.296 \times 10^{-3} \approx \frac{1}{137}$$

conocida como la constante de estructura fina, que no puede tomar un valor numérico diferente sin importar el sistema de unidades que se use. De modo que no se puede tener un sistema de unidades que normalice todas las constantes físicas presentes en α . Sólo 3 de las cuatro constantes e , \hbar , ϵ_0 y c pueden ser normalizadas, y la otra queda dependiendo del valor de α .

El propósito de las unidades naturales es simplificar las expresiones algebraicas que aparecen en las leyes físicas.

El sistema de unidades naturales que usaremos es el de las Unidades de Planck Modificadas (MPU)

$$G_N = 1, \quad \hbar = 1, \quad c = 1, \quad \epsilon_0 = 1, \quad k = 1, \quad (84)$$

de modo que

$$e = \sqrt{4\pi\alpha}, \quad \text{or} \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi}. \quad (85)$$

Example

Calcule la energía potencial de Coulomb para una par de protones (o electrones) separados una distancia $l = \hbar c / \text{GeV} = 0.1973\,269\,631\text{ fm}$

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{Ke^2}{l} = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0(\hbar c)\text{ GeV}^{-1}} \\
 &= \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\text{ GeV}.
 \end{aligned}
 \tag{86}$$

Como V tiene unidades de energía, de la ec. (86) resulta de nuevo α .

Las transformaciones de Lorentz se definen como las transformaciones que dejan invariante al producto escalar en el espacio de Minkowski definido como

$$x \cdot x = x^2 = g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x^{02} - x^i x^i = x^{02} - \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \quad (87)$$

donde $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$, $i = 1, 2, 3$ y se asume suma sobre índices repetidos. Finalmente la métrica usada se define como

$$\{g_{\mu\nu}\} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (88)$$

donde $\{g_{\mu\nu}\}$ denota la forma matricial del tensor $g_{\mu\nu}$.

El producto de dos cuadvectores se define en forma similar como

$$x \cdot y = g_{\mu\nu} x^\mu y^\nu = x^0 y^0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \quad (89)$$

El inverso de la métrica es

$$\{g^{\mu\nu}\} \equiv \{g_{\mu\nu}\}^{-1} = \{g_{\mu\nu}\} \quad (90)$$

tal que

$$g^{\mu\alpha} g_{\alpha\nu} = \delta_{\nu}^{\mu}. \quad (91)$$

Bajo una transformación de Lorentz.

$$x^{\mu} \rightarrow x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\nu} x^{\nu}. \quad (92)$$

La invarianza del producto escalar en ec. (89)

$$x' \cdot y' = x \cdot y. \quad (93)$$

implica que

$$\begin{aligned} x \cdot y \rightarrow x' \cdot y' &= g_{\mu\nu} x'^{\mu} y'^{\nu} \\ &= g_{\mu\nu} \Lambda^{\mu}_{\alpha} x^{\alpha} \Lambda^{\nu}_{\beta} y^{\beta} \\ &= \Lambda^{\mu}_{\alpha} g_{\mu\nu} \Lambda^{\nu}_{\beta} x^{\alpha} y^{\beta}. \end{aligned} \quad (94)$$

Por consiguiente, la condición para que el producto escalar en el espacio de Minkowski definido por la métrica $g_{\mu\nu}$, sea invariante bajo transformaciones de Lorentz es

$$\Lambda^\mu{}_\alpha g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta x^\alpha y^\beta = g_{\alpha\beta} x^\alpha y^\beta, \quad (95)$$

y por consiguiente

$$g_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu{}_\alpha g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta, \quad (96)$$

o, reorganizando los índices mudos

$$g_{\mu\nu} = (\Lambda^T)_\mu{}^\alpha g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta{}_\nu \quad \text{or} \quad \{g_{\mu\nu}\} = \{\Lambda_\mu{}^\alpha\}^T \{g_{\alpha\beta}\} \{\Lambda^\beta{}_\nu\}. \quad (97)$$

En notación matricial

$$g = \Lambda^T g \Lambda, \quad (98)$$

que define el conjunto de matrices Λ que forma el Grupo de Lorentz $SO(1, 3)$ estudiado en la sec. ??.

Introducimos ahora un cuadrivector que lleva intrínsecamente el índice abajo

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = (\partial_0, \nabla). \quad (99)$$

Las propiedades de transformación para ∂_μ se pueden obtener a partir de la ec. (92)

$$\begin{aligned} (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha x'^\alpha &= (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha \Lambda^\alpha{}_\nu x^\nu \\ &= \delta^\mu{}_\nu x^\nu \\ &= x^\mu, \end{aligned} \quad (100)$$

$$\frac{1}{x'^\nu} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \frac{1}{x^\mu}, \quad (101)$$

o

$$\frac{1}{x'^\mu} = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \frac{1}{x^\nu}, \quad (102)$$

de modo que la transformación de Lorentz para $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$, es

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x'^\mu} &= (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu} \\ \partial'_\mu &= (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu.\end{aligned}\tag{103}$$

Imponiendo la invarianza sobre el producto escalar

$$\partial^2 = g^{\mu\nu} \partial_\mu \partial_\nu,\tag{104}$$

y repitiendo los pasos que dieron lugar a la ec. (94) pero para la métrica contravariante

$$g^{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha g^{\alpha\beta} (\Lambda^{-1})^\nu{}_\beta,\tag{105}$$

Como una forma de acortar las operaciones, podemos definir que la métrica permita bajar los índices

$$x_\nu \equiv g_{\mu\nu} x^\mu,\tag{106}$$

y de igual manera imponemos que la métrica inversa suba los índices

$$x^\mu = g^{\mu\nu} x_\nu.\tag{107}$$

de la ec. (97) tenemos que

$$\begin{aligned} g^{\rho\mu} g_{\mu\nu} &= g^{\rho\mu} \Lambda^\alpha{}_\mu g_{\alpha\beta} \Lambda^\beta{}_\nu \\ \delta^\rho{}_\nu &= \Lambda^\rho{}_\beta \Lambda^\beta{}_\nu, \end{aligned} \quad (108)$$

o

$$\Lambda_\alpha{}^\mu \Lambda^\alpha{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu. \quad (109)$$

Ya que

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha \Lambda^\alpha{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu \quad (110)$$

el inverso de Λ es

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha = \Lambda_\alpha{}^\mu, \quad (111)$$

o

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \Lambda_\nu{}^\mu, \quad (112)$$

Usando ec. (112), tenemos que

$$\begin{aligned} g^{\mu\nu} &= (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha g^{\alpha\beta} (\Lambda^{-1})^\nu{}_\beta \\ &= \Lambda_\alpha{}^\mu g^{\alpha\beta} \Lambda_\beta{}^\nu. \end{aligned} \tag{113}$$

Example

Invarianza de Lorentz

$$\begin{aligned}
 x \cdot y &= g_{\mu\nu} x^\mu x^\nu = x_\mu y^\mu \rightarrow x'_\mu y'^\mu = \Lambda_\mu^\nu x_\nu \Lambda^\mu_\rho y^\rho \\
 &= \Lambda_\mu^\nu x_\nu \Lambda^\mu_\rho y^\rho \\
 &= (\Lambda^{-1})^\nu_\mu \Lambda^\mu_\rho x_\nu y^\rho \\
 &= \delta^\nu_\rho x_\nu y^\rho \\
 &= x_\nu y^\nu .
 \end{aligned}$$

Entonces, el producto escalar se puede escribir como

$$x_\mu y^\mu = x^0 y^0 - x^1 y^1 - x^2 y^2 - x^3 y^3 = x^0 y^0 - \sum_i x^i y^i = x^0 y^0 - \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} . \quad (114)$$

Como un ejemplo de Transformación de Lorentz consideremos el cambio de un sistema en reposo a un sistema inercial con velocidad a lo largo del eje x , v

$$\begin{aligned}
 \{x^\mu\} &= \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t + vx}{\sqrt{1 - v^2}} \\ \frac{x + vt}{\sqrt{1 - v^2}} \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \gamma & v\gamma & 0 & 0 \\ v\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \cosh \xi & \sinh \xi & 0 & 0 \\ \sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\
 &= \{\Lambda^\mu{}_\nu\} \{x^\nu\}, \tag{115}
 \end{aligned}$$

donde

$$\cosh \xi = \gamma \quad \sinh \xi = v\gamma, \quad \text{and} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (116)$$

y, por ejemplo:

$$t \cosh \xi + x \sinh \xi = \gamma(t + vx) = \frac{t + vx}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (117)$$

Podemos ver que las transformaciones de Lorentz para un boost en x , dan lugar a una de las matrices de boost que definen el grupo de Lorentz, $SO(1, 3)$, dadas en la ec. (66). En efecto, el $\Lambda^\mu{}_\nu$ definido en la ec. (115) satisface la condición en ec. (97),

$$\begin{aligned} \Lambda^T g \Lambda &= \begin{pmatrix} \cosh \xi & \sinh \xi & 0 & 0 \\ \sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \xi & \sinh \xi & 0 & 0 \\ \sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh \xi & -\sinh \xi & 0 & 0 \\ \sinh \xi & -\cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh \xi & \sinh \xi & 0 & 0 \\ \sinh \xi & \cosh \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \cosh^2 \xi - \sinh^2 \xi & \cosh \xi \sinh \xi - \cosh \xi \sinh \xi & 0 & 0 \\ \cosh \xi \sinh \xi - \cosh \xi \sinh \xi & \sinh^2 \xi - \cosh^2 \xi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\
&= g
\end{aligned} \tag{118}$$

Denotaremos los cuadvectores con índices arriba como

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (x^0, \mathbf{x}) \quad (119)$$

Entonces el correspondiente cuadvector con índices abajo, usando la ec. (106), es

$$x_\mu = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (x^0, -x^1, -x^2, -x^3) = (x^0, -\mathbf{x}). \quad (120)$$

Con esta notación, el producto escalar de cuadvectores puede expresarse como el producto escalar de los dos vectores de cuatro componente x^μ y x_μ .

$$x^\mu = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (t, x, y, z) = (t, \mathbf{x}) \quad (121)$$

$$p^\mu = (p^0, p^1, p^2, p^3) = (E, p_x, p_y, p_z) = (E, \mathbf{p}) \quad (122)$$

De la relatividad especial tenemos que

$$\begin{aligned} E &= \gamma m \\ \mathbf{p} &= \gamma m \mathbf{v} . \end{aligned} \quad (123)$$

Por lo tanto, ya que $v^2 = \mathbf{v}^2 = |\mathbf{v}|^2$

$$E^2 - \mathbf{p}^2 = \gamma^2 m^2 (1 - v^2) = m^2 . \quad (124)$$

El invariante de Lorentz asociado a p^μ corresponde a la ecuación de momento energía una vez se identifica la masa de una partícula con su cuatrimomentum

$$p^2 = p_\mu p^\mu = m^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 \quad (125)$$

Para esta ecuación se suele definir dos casos límites.

- *Límite no relativista*: Para $\mathbf{p} = 0$, es decir cuando la partícula está en reposo se reduce a la famosa ecuación, (con $c^2 = 1$)

$$E = m. \quad (126)$$

- *Límite relativista*: Para $\mathbf{p}^2 \gg m^2$, la ecuación $E^2 = \mathbf{p}^2 + m^2$ se reduce a

$$E = |\mathbf{p}|. \quad (127)$$

Por lo tanto para una partícula de masa cero, su energía total da cuenta de su cantidad de movimiento.

Del cálculo vectorial

$$\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) = (\partial_0, \nabla) \quad (128)$$

Este cuadvivector tiene intrínsecamente el índice abajo. La correspondiente derivada con índice superior es

$$\begin{aligned} \partial^\mu &\equiv \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \left(\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = \left(\frac{\partial}{\partial x^0}, -\frac{\partial}{\partial x^1}, -\frac{\partial}{\partial x^2}, -\frac{\partial}{\partial x^3} \right) \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= (\partial_0, -\nabla) = (\partial^0, -\nabla). \end{aligned} \quad (129)$$

Por consiguiente:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \quad (130)$$

Entonces, para un cuadvivector J^μ

$$\partial_\mu J^\mu = \frac{\partial J^0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} \quad (131)$$

Esta expresión es conocida como la ecuación de continuidad $\partial_\mu J^\mu = 0$, y al provenir de un producto escalar entre dos cuadvivectores resulta ser un invariante de Lorentz. El operador cuadrático es, usando la ec. (87)

$$\square \equiv \partial_\mu \partial^\mu = \partial^0 \partial^0 - \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (132)$$

Por consiguiente la ecuación de onda para un campo $\phi(t, x, y, z)$ con velocidad de propagación $c^2 = 1$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 \right) \phi = 0, \quad (133)$$

es también invariante de Lorentz

Los operadores de energía y momentum de la mecánica cuántica también forma un cuadrivector

$$\hat{p}^\mu = (\hat{p}^0, \hat{\mathbf{p}}) = (\hat{H}, \hat{\mathbf{p}}) \quad (134)$$

con \hat{H} , y $\hat{\mathbf{p}}$ dados en la ec. (??). Entonces

$$\hat{p}^\mu = i\partial^\mu = i(\partial^0, \partial^i) = i\left(\frac{\partial}{\partial t}, -\nabla\right) \quad (135)$$

Por lo tanto, una posible ecuación mecánico cuántico relativista se puede obtener a partir de interpretar la ecuación de conservación de energía-momentum en términos de operadores

$$\begin{aligned} (\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu - m^2) \phi &= 0 \\ (-\partial_\mu \partial^\mu - m^2) \phi &= 0 \\ (\partial_\mu \partial^\mu + m^2) \phi &= 0, \end{aligned} \quad (136)$$

Que es conocida como la ecuación de Klein-Gordon para un campo ϕ de masa m . A diferencia de la ecuación de Schrödinger, esta ecuación no puede interpretarse directamente en términos de mecánica

cuántica porque no tiene asociada una probabilidad positivo-definida debido a la segunda derivada con respecto al tiempo:

$$\begin{aligned}
 &(\partial_0 \partial^0 + \partial_i \partial^i + m^2) \phi = 0 \\
 &\left(\partial_0 \partial^0 - \sum_i \partial_i \partial_i + m^2 \right) \phi = 0 \\
 &\left(\partial_0 \partial^0 - \sum_i \partial_i \partial_i + m^2 \right) \phi = 0 \\
 &\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 + m^2 \right) \phi.
 \end{aligned} \tag{137}$$

La interpretación correcta se debe hacer en el marco de la Teoría Cuántica de Campos donde se cuantiza ϕ y su variable canónica conjugada (a definir posteriormente) en lugar de cuantizar x y p_x .

Del electromagnetismo tenemos entonces que

$$J^\mu = (J^0, \mathbf{J}) = (\rho, \mathbf{J}) \quad (138)$$

$$A^\mu = (A^0, \mathbf{A}) = (\phi, \mathbf{A}) \quad (139)$$

Example

Calcule la fracción de la velocidad a la que puede ser acelerado un protón en el LHC. Recuperando los factores de c

$$E = \gamma mc^2 \qquad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

Elevando al cuadrado

$$\begin{aligned} E^2(1 - \beta^2) &= m^2 c^4 \\ 1 - \beta^2 &= \frac{m^2 c^4}{E^2} . \end{aligned} \tag{140}$$

Despejando β , obtenemos

$$\beta = \frac{v}{c} = \sqrt{1 - \frac{m^2 c^4}{E^2}}$$

$$m_p = 938.272013(23)\text{MeV}/c^2, \text{ and } E = 7\text{ TeV}$$

$$v = 0.999999991\, c$$

Example

La amplitud de decaimiento del muón es

$$\Gamma_{\mu} = \left(\frac{G_F}{\sqrt{2}} \right)^2 \frac{m_{\mu}^5}{96\pi^3} I(x) , \quad (144)$$

con $x = m_e/m_{\mu}$, e $I(x) = 1 - 8x^2 - 24x^4 \ln(x) + 8x^6 - x^8$. Entonces

$$\Gamma_{\mu} = 3.00867837568648 \times 10^{-19} \text{ GeV} \quad (145)$$

El tiempo de vida media del muón se define como

$$\begin{aligned} \tau_{\mu} &= \frac{1}{\Gamma_{\mu}} = 3.32371850737231 \times 10^{18} \text{ GeV}^{-1} \\ &= 3.32371850737231 \times 10^{18} \times 6.58211899 \times 10^{-25} \text{ s} \\ &= 2.19703(4) \times 10^{-6} \text{ s}. \end{aligned} \quad (146)$$

La longitud de decaimiento se define como

$$L_{\mu} = \frac{1}{\Gamma_{\mu}} = c \tau_{\mu} \approx 658.65 \text{ m}. \quad (147)$$

Hasta ahora hemos definido la representación $[S(\Lambda)]_{\alpha}^{\beta}$ del subgrupo de Lorentz $(\frac{1}{2}, 0)$ y su correspondiente conjugado en el subgrupo $(0, \frac{1}{2})$. Para definir el producto escalar en este subespacio debemos introducir un objeto de dos componentes $\alpha = 1, 2$ que transforma bajo esta representación el cual recibe el nombre de *espinor de Weyl* [?, ?]. Sea entonces el espinor de Weyl, ξ_{α} , tal que

$$\begin{aligned}\xi_{\alpha} &\rightarrow \xi'_{\alpha} = [S(\Lambda)]_{\alpha}^{\beta} \xi_{\beta} \\ \xi_{\dot{\alpha}}^{*} &\rightarrow \xi'^{*}_{\dot{\alpha}} = [S^{*}(\Lambda)]_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \xi_{\dot{\beta}}^{*},\end{aligned}$$

donde $\dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2}$. Los correspondientes espinores conjugados, o simplemente anti-espinores de Weyl, pertenecen a la representación $(0, \frac{1}{2})$ y hemos definido

$$\xi_{\dot{\alpha}}^{*} \equiv (\xi_{\alpha})^{*} . \quad (150)$$

En efecto

$$\xi_{\dot{\alpha}}^{*} \equiv (\xi_{\alpha})^{*} \rightarrow (\xi'_{\alpha})^{*} = \left\{ [S(\Lambda)]_{\alpha}^{\beta} \right\}^{*} (\xi_{\beta})^{*} = [S^{*}(\Lambda)]_{\dot{\alpha}}^{\dot{\beta}} \xi_{\dot{\beta}}^{*} . \quad (151)$$

Hemos visto que usando las convenciones adecuadas podemos ahorrarnos la escritura de la métrica en la definición de producto escalar. Para ello es necesario definir la transformación inversa asociada a espinores con índices arriba. Como hicimos con el caso de la cuadriderivada, vamos a introducir un espinor que tenga su índice intrínsecamente superior y que transforme con la representación inversa de $(\frac{1}{2}, 0)$

$$\eta^\alpha \rightarrow \eta'^\alpha = \eta^\beta [S^{-1}(\Lambda)]_\beta{}^\alpha.$$

Sacando el conjugado

$$(\eta^\alpha)^* \rightarrow (\eta'^\alpha)^* = \left\{ [S^{-1}(\Lambda)]_\beta{}^\alpha \right\}^* (\eta^\beta)^*. \quad (152)$$

y definiendo

$$\eta^{*\dot{\alpha}} \equiv (\xi^\alpha)^*. \quad (153)$$

tenemos que

$$\eta^{*\dot{\alpha}} \rightarrow \eta'^{*\dot{\alpha}} = \left[(S^{-1})^* \right]_{\dot{\beta}}{}^{\dot{\alpha}} \eta^{*\dot{\beta}} = \left[(S^{-1})^\dagger \right]^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \eta^{*\dot{\beta}},$$

En efecto, $(S^{-1})^\dagger$ es una representación independiente del subgrupo de Lorentz $(0, \frac{1}{2})$ que es generada por el siguiente conjunto de 6 generadores independientes que también satisfacen el álgebra de Lorentz

$$\bar{\sigma}^{\mu\nu} = -\frac{i}{4} (\bar{\sigma}^\mu \sigma^\nu - \bar{\sigma}^\nu \sigma^\mu),$$

tal que

$$(S^{-1})^\dagger_{(0, \frac{1}{2})} = \exp \left(-i\omega_{\mu\nu} \frac{\bar{\sigma}^{\mu\nu}}{2} \right)$$

Ejercicio: Para esta representación, encuentre los generadores de boosts y rotaciones: \mathbf{L} y \mathbf{K} .

Para evitar hacer uso explícito de la métrica en cada una de las dos representaciones de $SL(2, C)$, definimos el producto escalar directamente entre índices contraídos con la condición de que sea entre espinores o anti-espinores de Weyl que pertenezcan a la misma representación de $SL(2, C)$ y que tengan un orden *diagonal*, ${}^\alpha{}_\alpha$, para los espinores y un orden *anti-diagonal*, ${}_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\alpha}}$, para los anti-espinores, a saber

$$\begin{aligned} \eta \cdot \xi &\equiv \eta^\alpha \cdot \xi_\alpha, & \xi \cdot \xi &\equiv \xi^\alpha \xi_\alpha, & \eta \cdot \eta &\equiv \eta^\alpha \eta_\alpha, \\ \xi^* \cdot \eta^* &\equiv \xi_{\dot{\alpha}}^* \cdot \eta^{*\dot{\alpha}}, & \xi^* \cdot \xi^* &\equiv \xi_{\dot{\alpha}}^* \cdot \xi^{*\dot{\alpha}}, & \eta^* \cdot \eta^* &\equiv \eta_{\dot{\alpha}}^* \cdot \eta^{*\dot{\alpha}}. \end{aligned} \quad (154)$$

Con las definiciones y convenciones anteriores la invarianza de cada uno de estos productos escalares queda garantizada, por ejemplo

$$\eta \cdot \xi \equiv \eta^\alpha \cdot \xi_\alpha = \dots$$

Note que un producto escalar entre un espinor conjugado con otro sin conjugar no tiene sentido pues pertenecen a espacios diferentes.

Tenemos los siguientes objetos que transforman bajo las representaciones del Grupo de Lorentz

$\phi \rightarrow \phi' = \phi$	Scalar field,
$A^\mu \rightarrow A'^\mu = \Lambda^\mu_\nu A^\nu$	Vector field,
$\partial_\mu \rightarrow \partial'_\mu = \partial_\nu (\Lambda^{-1})^\nu_\mu$	Cuadridivergencia,
$\xi_\alpha \rightarrow \xi'_\alpha = [S(\Lambda)]_\alpha^\beta \xi_\beta$	Left-handed spinor field + *,
$\eta^\alpha \rightarrow \eta'^\alpha = \eta^\beta [S^{-1}(\Lambda)]^\alpha_\beta$	Left-handed anti-spinor field + *, .

(155)

Nombre	Símbolo	SU(N)
N -plete escalar	Ψ	$U\Psi$
anti- N -plete escalar	Ψ^\dagger	$\Psi^\dagger U^\dagger$

Tabla: Productos escalares: $\Psi^\dagger\Psi$,

Nombre	Símbolo	Lorentz
fotón	A^μ	$\Lambda^\mu{}_\nu A^\nu$
derivada	∂_μ	$\partial_\nu (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu$

$$A^\nu A_\nu = g_{\nu\beta} A^\nu A^\beta, \quad \partial_\mu \partial^\mu = g^{\mu\alpha} \partial_\mu \partial_\alpha$$

donde, $g_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu{}_\alpha g_{\mu\nu} \Lambda^\nu{}_\beta$, $g^{\mu\nu} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha g^{\alpha\beta} (\Lambda^{-1})^\nu{}_\beta$.

Nombre	Símbolo	Lorentz	$U(1)$
e_L : electrón izquierdo	ξ_α	$[S]_\alpha{}^\beta \xi_\beta$	$e^{i\theta} \xi_\alpha$
$(e_R)^\dagger$: positrón izquierdo	η^α	$\eta^\beta [S^{-1}]_\beta{}^\alpha$	$\eta^\alpha e^{-i\theta}$
$(e_L)^\dagger$: positrón derecho	$(\xi_\alpha)^\dagger = \xi_{\dot{\alpha}}$	$\xi_{\dot{\beta}} [S^\dagger]^\beta{}_{\dot{\alpha}}$	$\xi_{\dot{\alpha}} e^{-i\theta}$
e_R : electrón derecho	$(\eta^\alpha)^\dagger = \eta^{\dagger\dot{\alpha}}$	$[(S^{-1})^\dagger]^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \eta^{\dagger\dot{\beta}}$	$e^{i\theta} \eta^{\dagger\dot{\alpha}}$

Tabla: Definición de transformaciones de Lorentz

Productos escalares

- Escalares de Majorana: $\xi^\alpha \xi_\alpha, \eta_{\dot{\alpha}}^\dagger \eta^{\dagger \dot{\alpha}}$
- Escalar de Dirac: $\eta^\alpha \xi_\alpha + \xi_{\dot{\alpha}}^\dagger \eta^{\dagger \dot{\alpha}}$
- Escalar subgrupo $SL(2, C)$ pero vector bajo $SO(1, 3)$: $S^\dagger \bar{\sigma}^\mu S = \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu$: Esta identidad aparece en la combinación de productos escalares $i \xi_{\dot{\alpha}} \bar{\sigma}^{\mu \dot{\alpha} \alpha} \partial_\mu \xi_\alpha$, como se vera posteriormente en detalle.

Campos	Lorentz	$SU(2)_L$	$U(1)_Y$	$U(1)_{B-L}$
L_1, L_2	ξ_α	2	$-1/2$	l
$(e_R^-)^\dagger$	η_1^α	1	1	$-e$
$(\nu_R)^\dagger$	η_2^α	1	0	$-\nu$
H	-	2	$1/2$	h
σ_1^-	-	1	-1	σ_1
σ_2^-	-	1	-1	σ_2
S	-	1	0	s

Tabla: Fermiones y escalares. El signo en la primera columna denota la carga eléctrica

Evite

$$(\nu_R)^\dagger L \cdot H, \quad y \quad \nu_R \nu_R. \quad (156)$$

Permita

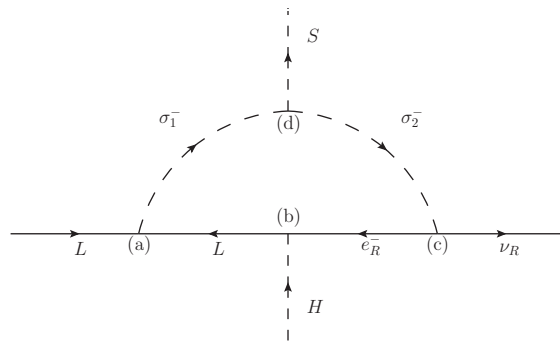
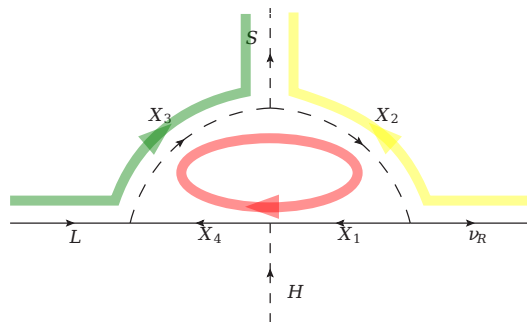


Figura: Verde: L , amarillo: ν_R , rojo: X_4

Para $U(1)_Y$:

$$\begin{aligned}
 \text{(a) :} & \quad -\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = -1 \\
 \text{(b) :} & \quad \frac{1}{2} - 1 = -\frac{1}{2} \\
 \text{(c) :} & \quad -1 = -1 + 0 \\
 \text{(d) :} & \quad -1 = -1 + 0.
 \end{aligned} \tag{157}$$

Para $U(1)_{B-L}$

$$\begin{aligned}
 \text{(a) :} & \quad l + l = \sigma_1 \\
 \text{(b) :} & \quad e + h = l \\
 \text{(c) :} & \quad \sigma_2 = \nu + e \\
 \text{(d) :} & \quad \sigma_1 = \sigma_2 + s.
 \end{aligned} \tag{158}$$

Combinado con $SU(2)_L$ y Lorentz

$$\text{(a) : } L_i \cdot L_j \sigma_1^*$$

$$\begin{aligned}
(b) : & (e_R)^\dagger \tilde{H} \cdot L \\
(c) : & \nu_R e_R^- \sigma_2^+ \\
(d) : & \sigma_1^+ \sigma_2^- S.
\end{aligned} \tag{159}$$

La condiciones de consistencia para $U(1)_{B-L}$ son

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= 2l \\
e &= l - h \\
\sigma_2 &= \nu + l - h \\
s &= \sigma_1 - \sigma_2 = 2l - \nu - l + h = l - \nu.
\end{aligned} \tag{160}$$

Con $l = -1$ y $h = 0$

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= -2 \\
e &= -1 \\
\sigma_2 &= \nu - 1 \\
s &= -1 - \nu.
\end{aligned} \tag{161}$$

Para evitar

$$(\nu_R)^\dagger L \cdot H, \quad \nu_R \nu_R, \quad (162)$$

requerimos que

$$-\nu - 1 + 0 \neq 0, \quad 2\nu \neq 0. \quad (163)$$

de modo que

$$\nu \neq -1, 0. \quad (164)$$

A modo de ejemplo, para $\nu = -4$, entonces $s = 3$ y $\sigma_2 = -5$ con $\sigma_1 = -2$, $l = e = -1$ y $h = 0$.

- Demuestre que el producto escalar $SU(2)$ entre L_i iguales es cero ($i = 1, 2$)
- Establezca las condiciones para que $\sigma_1^- = \sigma_2^-$.

Considere una cuerda de longitud L formando un círculo de radio R . Es conveniente considerar un conjunto de N partículas de masa m a lo largo de la circunferencia, unidas por resortes de longitud l y constante elástica k . Los modos vibracionales de la cuerda a lo largo de la circunferencia se obtienen en límite de $N \rightarrow \infty$ y $l \rightarrow 0$

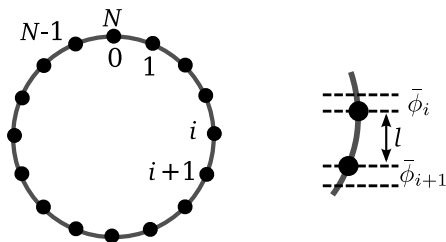


Figura: Modelo Cuerda

De acuerdo a la figura 3, si $\bar{\phi}_i = \bar{\phi}(z_i, t)$ es el desplazamiento de la i -ésima masa desde su posición de equilibrio, entonces el Lagrangiano del sistema de N partículas y resortes es:

$$L = \frac{1}{2}m \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{\partial \bar{\phi}_i}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2}k \sum_{i=0}^{N-1} (\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i)^2, \quad (165)$$

$$= \frac{1}{2}m \sum_{i=0}^{N-1} \left(\dot{\bar{\phi}}_i \right)^2 - \frac{1}{2}k \sum_{i=0}^{N-1} (\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i)^2, \quad (166)$$

donde $\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i$ es el desplazamiento relativo entre un par de resortes. Si μ es la densidad de la cuerda, T la tensión y v la velocidad, entonces

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{m}{l} \\ T &= kl \\ v^2 &= \frac{T}{\mu}. \end{aligned} \quad (167)$$

(167) En el límite $l \rightarrow 0$ y $N \rightarrow \infty$, tenemos

$$\bar{\phi}_i = \bar{\phi}(z_i, t) \rightarrow \bar{\phi}(z, t), \quad (168)$$

que representa la función de campo del desplazamiento de una masa infinitesimal de su posición de equilibrio. Entonces

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \frac{m}{l} l \left(\dot{\bar{\phi}}_i \right)^2 - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (kl) l \left(\frac{\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i}{l} \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} \mu \left(\dot{\bar{\phi}}_i \right)^2 l - \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} T \left(\frac{\bar{\phi}_{i+1} - \bar{\phi}_i}{l} \right)^2 l. \end{aligned} \quad (169)$$

En el límite continuo $\sum(\cdots) l \rightarrow \int(\cdots) dz$, entonces

$$L = \int_0^L \frac{1}{2} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} \right)^2 - T \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right)^2 \right] dz = \int_0^L \mathcal{L} dz, \quad (170)$$

con

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial t} \right)^2 - T \left(\frac{\partial \bar{\phi}}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (171)$$

y

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \int_0^{2\pi R} \mathcal{L} (\partial \bar{\phi} / \partial t, \partial \bar{\phi} / \partial z) \, dt \, dz. \quad (172)$$

Definiendo

$$\phi = \sqrt{T} \bar{\phi}, \quad (173)$$

tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\partial \phi / \partial t, \partial \phi / \partial z) &= \frac{1}{2} \left[\frac{\mu}{T} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{T}{T} \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right], \end{aligned} \quad (174)$$

La generalización de la densidad Lagrangiana a tres dimensiones esta dada por

$$\mathcal{L}(\partial\phi/\partial t, \partial\phi/\partial x, \partial\phi/\partial y, \partial\phi/\partial z) = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{v^2} \left(\frac{\partial\phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} \right)^2 \right], \quad (175)$$

O en forma más compacta, cambiando a un sistema de unidades en el cual $v = 1$:

$$\mathcal{L}(\partial_\mu\phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu\phi \partial^\mu\phi. \quad (176)$$

Note que para una onda mecánica con velocidad de propagación v , la ecuación anterior se usa sólo a modo de notación. Sólo cuando la velocidad de propagación es la velocidad de la luz la densidad Lagrangiana contiene una producto escalar bien definido, el cual es invariante bajo transformaciones de Lorentz. En este caso el producto escalar corresponde al módulo al cuadrado del cuadrivector $\partial_\mu\phi$.

De hecho ∂_μ hace las veces de la coordena generalizada \dot{q} en el Lagrangiano convencional. La coordenada generaliza q para a ser ϕ de modo que en general se espera que la densidad Lagrangiana también dependa en ϕ

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi. \quad (177)$$

En tres dimensiones, la densidad Lagrangiana debe ser ahora integrada en un volumen, V , para obtener la Lagrangiana

$$L = \int_V \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d x d y d z, \quad (178)$$

Como L tiene unidades de Energía, en el sistema de unidades naturales las coordenadas tienen unidades de inverso de Energía y por consiguiente la densidad Lagrangiana debe tener unidades de Energía a la cuarta. Finalmente, ya que la cuatridivergencia $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$, tiene unidades de Energía, de la ec. (177) podemos concluir entonces que el campo ϕ , tiene unidades de Energía:

$$[\mathcal{L}] = E^4 \text{ and } [\partial_\mu] = E \rightarrow [\phi] = E. \quad (179)$$

La Acción para el campo es entonces

$$S[\phi, \partial_\mu] = \int_{t_1}^{t_2} L(\phi, \partial_\mu \phi) dt dx dy dz = \int_R \mathcal{L}(\phi, \partial_\mu \phi) d^4 x, \quad (180)$$

donde los corchete en S significan que la Acción es un *funcional* de las coordenadas generalizadas ϕ, ∂_μ , $d^4 x$ es el cuadvolumen diferencial y R es el cuadvolumen en el cual se integra la densidad Lagrangiana para obtener la Acción.

Estamos interesados en los cambios que sufre la Acción cuando se transforman los campos. Por ejemplo, bajo una transformación de cambio de fase

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\theta} \psi, \quad (181)$$

si consideremos una transformación de fase pequeña

$$\begin{aligned} \psi \rightarrow \psi' &\approx (1 + i\theta)\psi \\ &= \psi + i\theta\psi. \end{aligned} \quad (182)$$

Podemos definir el cambio en el campo como

$$\delta\psi \equiv \psi' - \psi = (i\psi)\theta \quad \rightarrow \quad \delta\psi^* \equiv \psi'^* - \psi^* = (-i\psi^*)\theta, \quad (183)$$

de modo que el cambio en el campo es lineal en el parámetro de la transformación θ .

De otro lado, cuando se escriben las ecuaciones de Maxwell en términos del cuadvivector de potencial $A^\mu(x)$, veremos que éstas resultan invariantes bajo la transformación

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &\rightarrow A'^\mu(x) = A^\mu(x) + \partial^\mu \theta(x) \\ \delta A^\mu(x) &\equiv A'^\mu(x) - A^\mu(x) = \partial^\mu \theta(x). \end{aligned} \quad (184)$$

donde $\theta(x)$ es una función arbitraria que se conoce como parámetro de la transformación. En este caso el cambio del campo va con la cuadriderivada del parámetro de la transformación.

La Acción debe ser también invariante bajo este tipo de transformación, es decir, para el cambio en la Acción

$$\delta S = 0. \quad (185)$$

Para N campos asociados a un parámetro de transformación θ , la dependencia explícita e implícita de la densidad Lagrangiana da lugar al funcional de Acción

$$S[\phi_i, \partial_\mu \phi_i; x] = \int_R d^4 x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i; x) \quad (186)$$

El problema variacional de Noether, que es diferente al principio de Hamilton, puede ser establecido en los siguientes términos

¿Cuales son las condiciones generales que se deben satisfacer para que una dada variación en la variables explícitas e implícitas permitan que la Acción pueda quedar invariante, y de aquí $\delta S = 0$, donde δS puede o no contener un término de frontera?

Definiendo el cambio interno en el campo como en (??)

$$\delta \phi_i(x) = \phi'_i(x) - \phi_i(x), \quad (187)$$

y el cambio en x bajo una transformación de Lorentz infinitesimal como

$$x \rightarrow x' = x + \delta x \quad (188)$$

tenemos que la variación en las variables dependientes e independientes de la Acción son

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_R d^4 x' \mathcal{L}(\phi'_i, \partial_\mu \phi'_i; x') - \int_R d^4 x \mathcal{L}(\phi_i(x), \partial_\mu \phi_i(x); x) \\ &= \int_R \frac{\partial x'}{\partial x} d^4 x \mathcal{L}(\phi_i + \delta \phi_i, \partial_\mu(\phi_i + \delta \phi_i); x + \delta x) - \int_R d^4 x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i; x)\end{aligned}\quad (189)$$

Derivando (188), y reemplazando

$$\frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\mu} = 1 + \partial_\mu (\delta x^\mu), \quad (190)$$

en la expresión anterior, tenemos que

$$\begin{aligned}\delta S &= \int_R [1 + \partial_\mu (\delta x^\mu)] d^4 x \left\{ \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i; x) + \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta \phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial_\mu (\delta \phi_i) \right] + (\partial_\mu \mathcal{L}) \delta x^\mu \right\} \\ &\quad - \int_R d^4 x \mathcal{L}(\phi_i, \partial_\mu \phi_i; x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_R d^4x [\partial_\mu (\delta x^\mu)] \mathcal{L} + \int_R d^4x \left\{ \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta \phi_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial_\mu (\delta \phi_i) \right] + (\partial_\mu \mathcal{L}) \delta x^\mu \right\} + \mathcal{O}(\delta^2) \\
&\approx \int_R d^4x \partial_\mu (\mathcal{L} \delta x^\mu) + \int_R d^4x \sum_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \delta \phi_i + \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta \phi_i \right] - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right] \delta \phi_i \right\}, \quad (191)
\end{aligned}$$

y reordenando los términos con derivada total

$$\delta S = \int_R d^4x \partial_\mu \left[\mathcal{L} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta \phi_i \right] + \int_R d^4x \sum_i \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right] \right\} \delta \phi_i, \quad (192)$$

La condición $\delta S = 0$ implica que

$$\int_R d^4x \sum_i \mathcal{E}_i \delta\phi_i = \int_R d^4x \partial_\mu B^\mu, \quad (193)$$

donde

$$\mathcal{E}_i = \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \quad B^\mu = \mathcal{L} \delta x^\mu + \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \delta \phi_i. \quad (194)$$

El teorema de Gauss establece que

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{A} d^3x = \int_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S}. \quad (195)$$

Generalizado a cuatro dimensiones, tenemos

$$\int_R d^4x \partial_\mu \eta^\mu = \int_\sigma d\sigma_\mu \eta^\mu, \quad (196)$$

donde \mathcal{R} es el volumen en cuatro dimensiones (4D) y σ la correspondiente hipersuperficie en tres dimensiones.

Obtenemos entonces las ecuaciones de Euler-Lagrange para cada campo ϕ_i

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} = 0 \quad (197)$$

La misma condición de nulidad de los campos en la frontera permite establecer que una densidad Lagrangiana modificada con una deriva total

$$\mathcal{L}' = \mathcal{L} + \partial_\mu(\eta^\mu(x)) \quad (198)$$

donde $\eta^\mu(x)$ es cualquier función de los campos de la densidad Lagrangiana original que también sea cero sobre la frontera, da lugar a la Acción

$$\begin{aligned} S' &= \int_R d^4x \mathcal{L}' = \int_R d^4x \mathcal{L} + \int_R d^4x \partial_\mu \eta^\mu \\ &= \int_R d^4x \mathcal{L} + \int_\sigma \eta^\mu d\sigma_\mu \\ &= S, \end{aligned} \quad (199)$$

para una hipersuperficie suficientemente grande. De modo que dos densidades lagrangianas que difieran solo en derivadas totales dan lugar a la misma Acción.

densidad Lagrangiana de una onda propagandose a una velocidad v , eq. (??),

$$\mathcal{L}(\partial_\mu \phi) = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = \frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi, \quad (200)$$

Teniendo en cuenta que σ es un índice modo, podemos escribir la ecuación de onda en la forma conocida:

$$\begin{aligned}\partial_\mu \partial^\mu \phi &= 0 \\ \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \nabla^2 \phi &= 0.\end{aligned}\tag{201}$$

Ejercicio:

- 1 Demuestre que los terminos con derivada de la densidad Lagrangiana para un campo escalar complejo

$$\phi \equiv \frac{\phi_1 + i\phi_2}{\sqrt{2}} \quad \rightarrow \quad \phi^* = \frac{\phi_1 - i\phi_2}{\sqrt{2}}, \quad (202)$$

que sea invariante bajo el Grupo $U(1)$ de sus cambios de fase (181), se puede escribir de forma única como

$$\mathcal{L}(\partial_\mu \phi, \partial_\mu \phi^*) = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_1 \partial^\mu \phi_1 + \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_2 \partial^\mu \phi_2, \quad (203)$$

es decir, como la suma de la densidad Lagrangiana para dos campos reales independientes.

- 2 Cambiando a las variables generalizadas $\phi_1 \rightarrow \phi$, $\phi_2 \rightarrow \phi^*$, encuentre las ecuaciones de Euler Lagrange para ϕ y ϕ^*

Las transformaciones que bajo algunas condiciones dejan invariante a la acción, van a estar relacionadas con cargas conservadas. A continuación definiremos con un ejemplo conocido que es una carga conservada.

Para entender el significado físico de la ecuación de continuidad consideremos una cuadri-corriente asociada por ejemplo a la densidad de carga y corriente eléctricas. Expandiendo la ecuación de continuidad en sus componentes espaciales y temporales tenemos que

$$\begin{aligned}\partial_\mu j^\mu &= 0 \\ \partial_0 j^0 + \partial_i j^i &= 0, && \text{suma sobre } i \\ \frac{\partial j^0}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{j} &= 0.\end{aligned}\tag{204}$$

Integrando sobre el volumen y aplicando el teorema de Gauss

$$\int_V d^3x \frac{\partial j^0}{\partial t} + \int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0.\tag{205}$$

Si interpretamos j^0 como la densidad, ρ , de una cierta carga Q , tal que

$$Q = \int_V d^3x j^0 = \int_V d^3x \rho, \quad (206)$$

entonces, si escogemos S como una superficie suficientemente grande para contener toda la distribución de carga Q en su interior, tendremos que la integral sobre la superficie se anula

$$\int_S \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S} = 0, \quad (207)$$

y por consiguiente

$$\begin{aligned} \int_V d^3x \frac{\partial j^0}{\partial t} &= \frac{d}{dt} \int_V d^3x \rho \\ &= \frac{dQ}{dt} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (208)$$

Es decir, que la carga es independiente del tiempo, y por lo tanto se conserva.

Un desplazamiento infinitesimal, que equivale a repetir un experimento en laboratorio desplazado en el tiempo o en el espacio, puede parametrizarse sin pérdida de generalidad como

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu. \quad (209)$$

Para visualizar más fácilmente la situación para un campo escalar, supongamos de momento que δx^μ corresponde traslación espacio-temporal.

Tenemos

$$\phi'(x') = \phi'(x + \delta x) \quad (210)$$

$$\approx \phi'(x) + \frac{\partial \phi'(x)}{\partial x^\mu} \delta x^\mu \quad (211)$$

$$= [\phi(x) + \delta \phi(x)] + \frac{\partial}{\partial x^\mu} [\phi(x) + \delta \phi(x)] \delta x^\mu \quad (212)$$

$$\approx \phi(x) + \delta \phi(x) + \frac{\partial \phi(x)}{\partial x^\mu} \delta x^\mu, \quad (213)$$

donde, por simplicidad, ϕ es un campo real. Entonces,

$$\Delta\phi(x) \equiv \phi'(x') - \phi(x) = \delta\phi(x) + \frac{\partial\phi(x)}{\partial x^\mu} \delta x^\mu. \quad (214)$$

Para una traslación, $\Delta\phi(x) = 0$, ver figura 4. De modo que

$$\delta\phi = -(\partial_\mu\phi)\delta x^\mu, \quad (215)$$

y la transformación del campo ϕ como consecuencia de la traslación es

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(x) - \delta\phi(x) = \phi(x) + (\partial_\mu\phi(x))\delta x^\mu. \quad (216)$$

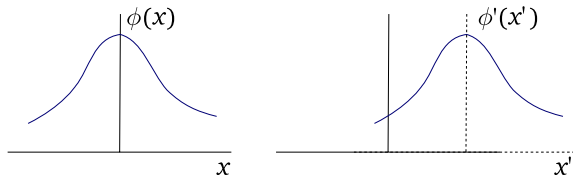


Figura: Traslación de función y coordenadas en una dimensión: $\phi(x) = \phi'(x')$

Consideremos el caso en el cual el campo es sólo afectado en su dependencia espacio-temporal. Como ocurre para una la transformación externa de traslación global discutida en la Sección ?? . Allí, un desplazamiento constante

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu, \quad (217)$$

ocasiona un cambio en un campo escalar de Lorentz dado por la ec. (215)

$$\delta \phi_i = -(\partial_\nu \phi_i) \delta x^\nu. \quad (218)$$

De acuerdo al Teorema 1 de Noether, los cuatro posibles parámetros de desplazamiento deben dar lugar a cuatro ecuaciones de continuidad para (suma sobre índices repetidos)

$$\begin{aligned} B^\mu &= \mathcal{L} \delta x^\mu + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta \phi_i \\ &= \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \delta x^\nu - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} (\partial_\nu \phi_i) \delta x^\nu \\ &= - \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} (\partial_\nu \phi_i) - \delta^\mu_\nu \mathcal{L} \right] \delta x^\nu \end{aligned}$$

$$= -T_{\nu}^{\mu} \delta x^{\nu}, \quad (219)$$

donde, hemos definido

$$T_{\nu}^{\mu} \equiv \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \phi_i)} \partial_{\nu} \phi_i - \delta_{\nu}^{\mu} \mathcal{L} \quad (220)$$

si los campos ϕ_i satisfacen la ecuaciones de Euler-Lagrange, $\mathcal{E}_i = 0$, tenemos que

$$\partial_{\mu} (T_{\nu}^{\mu} \delta x^{\nu}) = 0. \quad (221)$$

Si δx^{ν} es constante, como se espera en el caso de sistemas inerciales, se satisfacen las cuatro ecuaciones de continuidad (una para cada ν)

$$\partial_{\mu} T_{\nu}^{\mu} = 0. \quad (222)$$

El tensor T_{ν}^{μ} proviene de asumir la homogeneidad del espacio y el tiempo y es llamado el tensor de momentum-energía. La densidad Hamiltonina se obtiene de T_0^0

$$\mathcal{H} = T_0^0 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \dot{\phi} - \mathcal{L} \quad (223)$$

$$= \pi(x) \frac{\partial \phi(x)}{\partial t} - \mathcal{L}. \quad (224)$$

Comparando con la expresión correspondiente en la formulación Lagrangiana de la Mecánica Clásica, tenemos que si $\phi(x)$ es la variable canónica, la variable canónica conjugada es $\pi(x)$

$$\pi(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial \phi(x)/\partial t)}. \quad (225)$$

El teorema de Noether en este caso establece que la invarianza de la Acción bajo traslaciones temporales da lugar a la ecuación de continuidad (131) para $\nu = 0$

$$\partial_\mu T_0^\mu = 0 \quad (226)$$

cuya carga conservada corresponde a la energía

$$H = \int_V d^3x T_0^0 = \int_V d^3x \mathcal{H}. \quad (227)$$

De igual forma la invarianza bajo traslaciones espaciales de lugar a ecuaciones de continuidad para cada componente $\nu = i$ ($i = 1, 2, 3$)

$$\partial_\mu T_i^\mu = 0, \quad (228)$$

cuyas densidad de cargas conservadas, T_i^0 , que en forma vectorial escribiremos como \mathbf{T}^0 , dan lugar a la conservación del momentum

$$\mathbf{P} = \int_V d^3x \mathbf{T}^0. \quad (229)$$

Generalizando a un campo complejo

$$T_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} (\partial_\nu \phi) + (\partial_\nu \phi^*) \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi^*)} - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} \quad (230)$$

Teorema 1: Si la acción S es invariante bajo un grupo continuo de simetrías globales que dependen suavemente de ρ parámetros independientes $\theta_\alpha = \text{cte}$ ($\alpha = 1, 2, \dots, \rho$), tal que $\delta\phi_i = a_{\alpha i}\theta^\alpha$, y los campos satisfacen las ecuaciones de Euler Lagrange, entonces existen las ρ relaciones

$$\partial_\mu j_\alpha^\mu = 0, \quad (231)$$

donde

$$j_\alpha^\mu \equiv B^\mu / \theta_\alpha = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} a_{\alpha i} \quad (232)$$

Y genera exactamente el mismo término de corriente conservada que en el caso del simetrías continuas locales internas.

Tanto la transformación del campo ϕ como la del A^μ se pueden escribir en términos de una transformación en términos del parámetro infinitesimal local $\theta(x)$ y su derivada como

$$\delta\phi_i = a_i(\phi_i, \partial_\mu\phi_i)\theta(x) + b_i^\nu(\phi_i, \partial_\mu\phi_i)\partial_\nu\theta(x), \quad \text{para } \phi_i = \phi, \phi^*, A^\mu. \quad (233)$$

$$\begin{aligned}
\sum_i \int d^4x \mathcal{E}_i \delta \phi_i &= \sum_i \int d^4x \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \delta \phi_i \right] \\
\sum_i \int d^4x \mathcal{E}_i (a_i \theta + b_i^\mu \partial_\mu \theta) &= \sum_i \int d^4x \partial_\mu \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right] (a_i \theta + b_i^\nu \partial_\nu \theta) \right\} \\
\sum_i \int d^4x \mathcal{E}_i a_i \theta + \sum_i \int d^4x \mathcal{E}_i b_i^\mu \partial_\mu \theta &= \sum_i \int d^4x \partial_\mu \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right] (a_i \theta + b_i^\nu \partial_\nu \theta) \right\}. \quad (234)
\end{aligned}$$

Extrayendo la derivada total del término de lado izquierdo

$$\begin{aligned}
\sum_i \int d^4x \mathcal{E}_i a_i \theta + \sum_i \int d^4x [\partial_\mu (\mathcal{E}_i b_i^\mu \theta) - \partial_\mu (\mathcal{E}_i b_i^\mu) \theta] &= \sum_i \int d^4x \partial_\mu \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right] (a_i \theta + b_i^\nu \partial_\nu \theta) \right\} \\
\sum_i \int d^4x \mathcal{E}_i a_i \theta - \sum_i \int d^4x [\partial_\mu (\mathcal{E}_i b_i^\mu)] \theta &= \sum_i \int d^4x \partial_\mu \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right] (a_i \theta + b_i^\nu \partial_\nu \theta) - \mathcal{E}_i b_i^\mu \theta \right\} \\
\sum_i \int d^4x [\mathcal{E}_i a_i - \partial_\mu (\mathcal{E}_i b_i^\mu)] \theta &= \sum_i \int d^4x \partial_\mu \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right] (a_i \theta + b_i^\nu \partial_\nu \theta) - \mathcal{E}_i b_i^\mu \theta \right\}. \quad (235)
\end{aligned}$$

Por consiguiente, si escogemos (sin pérdida de generalidad) un parámetro de transformación gauge $\theta(x)$ que se desvanezca en la frontera

$$\sum_i \int d^4x [\mathcal{E}_i a_i - \partial_\mu (\mathcal{E}_i b_i^\mu)] \theta = 0. \quad (236)$$

Teorema 2 Si la acción S es invariante bajo un Grupo gauge continuo, entonces existen ρ relaciones

$$\sum_i \mathcal{E}_i a_{\alpha i} = \sum_i \partial_\mu (\mathcal{E}_i b_{\alpha i}^\mu) \quad (237)$$

Si no imponemos que los campos satisfagan las ecuaciones de Euler-Lagrange, podemos formular:

Teorema 1 generalizado: Para un conjunto de α parametros constantes θ_α , existen α relaciones

$$\sum_i \mathcal{E}_i a_i = -\partial_\mu j^\mu. \quad (238)$$

Demostración: Ya que $\theta = \text{cte}$, de modo que $b_i^\mu = 0$, la ec. (235) se reduce a

$$\begin{aligned} \sum_i \int d^4x [\mathcal{E}_i a_i] \theta &= \sum_i \int d^4x \partial_\mu \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right] a_i \theta \right\} \\ &= \int d^4x \partial_\mu \left\{ \sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \right] a_i \right\} \theta, \end{aligned}$$

de modo que, usando (??)

$$\sum_i \mathcal{E}_i a_i = \partial_\mu j^\mu. \quad (239)$$

En el caso de un campo de materia complejo, invariante bajo una simetría local $U(1)$ con parámetro $\theta(x)$, tenemos que $\phi_1 \rightarrow \phi$, $\phi_2 \rightarrow \phi^*$, de modo que $a_2 = a_1^*$ y $b_1 = b_2 = 0$. Entonces, el Teorema 2 de Noether aplicado a los campos ϕ y ϕ^* queda

$$\sum_i \mathcal{E}_i a_i = \sum_i \partial_\mu (\mathcal{E}_i b_i^\mu) = 0. \quad (240)$$

De modo que

$$\begin{aligned} \sum_i \mathcal{E}_i a_i &= \sum_i \left\{ \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} \right\} a_i \\ &= \sum_i \left\{ \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \right] a_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} a_i \right\} \\ &= \sum_i \left\{ \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} a_i \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} \partial_\mu a_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} a_i \right\}. \end{aligned} \quad (241)$$

Teniendo en cuenta que como veremos más adelante en el capítulo ??, sec. ??, para un campo complejo

$$\sum_i \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} \partial_\mu a_i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} a_i \right] = 0 \quad (242)$$

Entonces,

$$\sum_i \mathcal{E}_i a_i = \partial_\mu j^\mu, \quad (243)$$

donde

$$j^\mu = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi_i)} a_i. \quad (244)$$

Además, debido a la ec. (240),

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \quad (245)$$

Este resultado particular para campos complejos se mantiene en general para el conjunto de campos que dependan sólo del parámetro y no de la derivada del parámetro, es decir, el conjunto de campos de materia con $b_i^\mu = 0$: ver Teorema 3 de [?]. Note que la corriente conservada para el campo de materia asociada a una transformación local coincide con la corriente conservada para una transformación global dada en la ec. (239).

Sin embargo, la conservación de la carga en este caso no requiere imponer que $\mathcal{E}_i = 0$. Por lo tanto el caso de la conservación de carga *impropia* se puede considerar más fundamental e inviolable. Esto nos permite formular el *principio gauge* como la necesidad de establecer Lagrangianos que respetan las simetría internas a nivel local.

Escalares

Se mostrará como la invarianza de la Acción bajo transformaciones es el punto de partida en la

construcción de densidades Lagrangianas únicas.

En esta sección vamos a conectar la discusión sobre el Lagrangiano de las vibraciones de la cuerda con las transformaciones de Lorentz de la relatividad especial. Dicho Lagrangiano tiene hasta ahora la siguiente dependencia funcional $\mathcal{L}(\partial_\mu\phi)$.

En la formulación de la teoría clásica de campos debemos asegurarnos de que todos los términos posibles permitidos por la simetrías asociadas al campo estén presentes en la densidad Lagrangiana. De inmediato surge la pregunta: ¿Qué posibles términos de la forma $\partial_\mu\phi$ podrían estar presentes en el Lagrangiano?. Antes de responder esta pregunta, abordemos el problema algo más general donde la densidad Lagrangiana también depende del campo como mismo

$$\mathcal{L}(\phi, \partial_\mu\phi).$$

En la ecuación (175), teníamos un Lagrangiano en función de $\partial_\mu\phi$, y haciendo $v \rightarrow c = 1$, tenemos

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(\partial_\mu\phi) &= \frac{1}{2} \left[\partial_0\phi \partial_0\phi - \sum_i \partial_i\phi \partial_i\phi \right] \\ &= \frac{1}{2} [\partial_0\phi \partial^0\phi + \partial_i\phi \partial^i\phi]\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2} \partial_{\mu} \phi \partial^{\mu} \phi . \quad (246)$$

donde se ha usado la convención de suma para índices repetidos. Note que para que la velocidad de propagación sea independiente del sistema de coordenadas se requiere su identificación con la velocidad de la luz. De modo que si queremos interpretar los términos de la densidad Lagrangiana como objetos invariantes, necesariamente se tiene que hacer en el contexto de la relatividad especial.

El campo escalar está definido por sus propiedades bajo transformaciones de Lorentz. Vamos a estudiar el comportamiento de un campo escalar bajo una transformación general de Lorentz:

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad (247)$$

Por definición, el campo escalar no cambia bajo la transformación de Lorentz, es decir, su forma funcional queda inalterada. Por consiguiente el campo escalar debe satisfacer que

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x') = \phi(x), \quad (248)$$

como se ilustró en la Fig. 4. La prima en ϕ representa el cambio intrínseco en el campo ϕ como consecuencia de la transformación.

Usando la ec. (247), tenemos que

$$\phi'(x') = \phi(\Lambda^{-1}x'). \quad (249)$$

Esto es, el campo transformado, evaluado en el punto transformado, da el mismo valor que el campo evaluado en el punto antes de la transformación.

Por consiguiente, para un punto del espacio tiempo arbitrario tenemos que el campo escalar transforma bajo una transformación de Lorentz como

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x) . \quad (250)$$

Para comprobar la invarianza de Lorentz de la Acción para el campo escalar, necesitamos las propiedades de transformación para ∂_μ dada por la ec. (254)

$$\begin{aligned}(\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha x'^\alpha &= (\Lambda^{-1})^\mu{}_\alpha \Lambda^\alpha{}_\nu x^\nu \\ &= \delta^\mu{}_\nu x^\nu \\ &= x^\mu ,\end{aligned}\tag{251}$$

$$\frac{1}{x'^\nu} = (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu \frac{1}{x^\mu} ,\tag{252}$$

o

$$\frac{1}{x'^\mu} = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \frac{1}{x^\nu} ,\tag{253}$$

de modo que la transformación de Lorentz para $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$, es

$$\frac{\partial}{\partial x'^\mu} = (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \frac{\partial}{\partial x^\nu}$$

$$\partial'_{\mu} = (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} \partial_{\nu}, \quad (254)$$

Podemos ahora demostrar que la Acción obtenida del Lagrangiano en la ec.(246) es invariante bajo transformaciones de Lorentz haciendo uso de la ec. (113). Para hacer la demostración más general, podemos agregar una función general que solo dependa del campo ϕ pero no de sus derivadas, $V(\phi)$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\phi(x), \partial_{\mu}\phi(x)) &\rightarrow \mathcal{L}' = \frac{1}{2} \partial'_{\mu}\phi'(x) \partial'^{\mu}\phi'(x) - V(\phi'), \\ &= (\Lambda^{-1})^{\nu}_{\mu} g^{\mu\rho} (\Lambda^{-1})^{\sigma}_{\rho} \partial_{\nu}\phi(\Lambda^{-1}x) \partial_{\sigma}\phi(\Lambda^{-1}x) - V(\phi') \\ &= g^{\nu\sigma} \partial_{\nu}\phi(\Lambda^{-1}x) \partial_{\sigma}\phi(\Lambda^{-1}x) - V(\phi(\Lambda^{-1}x)) \\ &= \partial_{\nu}\phi(\Lambda^{-1}x) \partial^{\nu}\phi(\Lambda^{-1}x) - V(\phi(\Lambda^{-1}x)) \\ &= \mathcal{L}(\phi(\Lambda^{-1}x), \partial_{\mu}\phi(\Lambda^{-1}x)). \end{aligned} \quad (255)$$

Ya que la Acción involucra la integración sobre todos los puntos, esta es invariante bajo transformaciones de Lorentz. Explícitamente

$$S \rightarrow S' = \int d^4x \mathcal{L} \quad (256)$$

Note que en unidades naturales

$$[S] = [\hbar] = 1, \quad (257)$$

y ya que $[d^4x] = E^{-4}$, entonces

$$[\mathcal{L}] = E^4. \quad (258)$$

Como $[\partial_\mu] = E$, entonces

$$[\phi] = E. \quad (259)$$

- ❶ La dimensión de los campos y derivadas en cada término de la correspondiente densidad lagrangiana debe ser menor o igual a cuatro.
- ❷ La densidad Lagrangiana no debe contener derivadas altas (máximo dos derivadas)
- ❸ Los campos fundamentales se deben anular a espacio infinito.

Con estas restricciones es suficiente mantener los primeros cuatro términos de la expansión de Taylor de $V(\phi)$ (el término constante se puede remover redefiniendo el estado de mínima energía)

$$V(\phi) = a\phi + b\phi^2 + c\phi^3 + d\phi^4, \quad (260)$$

La invarianza de la Acción bajo términos con derivadas totales excluye términos del tipo

$$\phi \partial_\mu \partial^\mu \phi. \quad (261)$$

De modo que la densidad Lagrangiana más general posible para un campo escalar real es

$$\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - (a\phi + b\phi^2 + c\phi^3 + d\phi^4). \quad (262)$$

La ecuación de movimiento es

$$(\partial_\mu \partial^\mu + 2b) \phi = J(\phi), \quad (263)$$

donde

$$J(\phi) = - (a + 3c\phi^3 + 4d\phi^4), \quad (264)$$

es el término de fuente. En ausencia de fuentes el campo ϕ se propaga libremente a través de la ecuación

$$(\partial_\mu \partial^\mu + 2b) \phi = 0. \quad (265)$$

A continuación procedemos a encontrar una interpretación física al coeficiente $2b$

En ese caso la Acción, y la correspondiente densidad Lagrangiana son únicas y están dadas por una función polinómica de $\phi^* \phi$

$$\mathcal{L} = \partial_\mu \phi^* \partial^\mu \phi - m^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2 . \quad (266)$$

Términos de orden superior se pueden obtener a partir de esa Lagrangiana única y por eso no se consideran.

Considere los campos espinoriales, que se transforma como

$$\psi_{\alpha}(x) \rightarrow \psi'_{\alpha}(x) = [S(\Lambda)]_{\alpha}^{\beta} \psi_{\beta}(\Lambda^{-1}x), \quad (267)$$

donde $S(\Lambda)$ es la representación espinorial $(\frac{1}{2}, 0)$ del grupo de Lorentz.

Si interpretamos $(\psi_\beta)^\dagger$ como las componentes de un nuevo vector fila transformando bajo la representación $(0, \frac{1}{2})$, $S^*(\Lambda)$, con componentes con puntos

$$\psi_{\dot{\alpha}}^\dagger \equiv (\psi_\alpha)^\dagger \quad (268)$$

entonces tenemos que

$$\psi_{\dot{\alpha}}^\dagger \rightarrow \psi'^\dagger_{\dot{\alpha}} = \psi_{\dot{\beta}}^\dagger [S^\dagger]^{\dot{\beta}}_{\dot{\alpha}}. \quad (269)$$

In summary we have the following Lorentz's transformation properties for the fields

$$\begin{aligned}
 \phi(x) &\rightarrow \phi'(x) = \phi(\Lambda^{-1}x) && \text{Scalar field,} \\
 A^\mu(x) &\rightarrow A'^\mu(x) = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x) && \text{Vector field,} \\
 \psi_\alpha(x) &\rightarrow \psi'_\alpha(x) = [S(\Lambda)]_\alpha{}^\beta \psi_\beta(\Lambda^{-1}x) && \text{Left-handed spinor field,} \\
 \psi^\dagger_{\dot{\alpha}}(x) &\rightarrow \psi'^\dagger_{\dot{\alpha}}(x) = \psi^\dagger_{\dot{\beta}}(\Lambda^{-1}x) \left[S^\dagger(\Lambda) \right]_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}} && \text{Right-handed anti-spinor field, ,}
 \end{aligned} \tag{270}$$

Hay otras dos representaciones adicionales del grupo de Lorentz: $(S^{-1})^T$ and $(S^{-1})^\dagger$, pero estas son equivalentes a las representaciones $(\frac{1}{2}, 0)$ y $(0, \frac{1}{2})$ respectivamente. Los espinores que transforman bajo estas representaciones tienen los índices arriba, ψ^α and $\psi^{\dagger\dot{\alpha}}$, con las leyes de transformación

$$\begin{aligned}\psi^\alpha &\rightarrow \psi'^\alpha = \left[(S^{-1})^T \right]^\alpha_\beta \psi^\beta \\ \psi^{\dagger\dot{\alpha}} &\rightarrow \psi'^{\dagger\dot{\alpha}} = \psi^{\dagger\dot{\beta}} \left[(S^{-1})^\dagger \right]^\dot{\alpha}_{\dot{\beta}},\end{aligned}\tag{271}$$

donde

$$\psi^{\dagger\dot{\alpha}} \equiv (\psi^\alpha)^\dagger\tag{272}$$

Al interpretar ψ and ψ^\dagger como espinores de dos componentes en este espacio interno, hemos definido el producto escalar usando la convención índices contraídos *descendiendo* e índices con puntos contrídos *ascendiendo*

$$\alpha_\alpha \quad \text{and} \quad \dot{\alpha}^{\dot{\alpha}}.\tag{273}$$

De esta forma podemos definir el producto escalar entre dos espinores como

$$\begin{aligned}
 \psi\psi &\equiv \psi^\alpha\psi_\alpha \rightarrow \psi'^\alpha\psi'_\alpha = \left[(S^{-1})^T \right]^\alpha_\beta \psi^\beta S_\alpha^\gamma \psi_\gamma \\
 &= (S^{-1})^\alpha_\beta S_\alpha^\gamma \psi^\beta \psi_\gamma \\
 &= \delta^\gamma_\beta \psi^\beta \psi_\gamma \\
 &= \psi^\beta \psi_\beta .
 \end{aligned} \tag{274}$$

and similarmente el producto escalar de dos anti-espinores como

$$\begin{aligned}
 \psi^\dagger\psi^\dagger &\equiv \psi^\dagger_{\dot{\alpha}}\psi^{\dagger\dot{\alpha}} \rightarrow \psi'^{\dagger}_{\dot{\alpha}}\psi'^{\dagger\dot{\alpha}} \\
 &= \psi^\dagger_{\dot{\alpha}}\psi^{\dagger\dot{\alpha}} .
 \end{aligned} \tag{275}$$

We could need a new representation acting in and internal space upon a two-component field ψ_a ($a = 1, 2$). An Action with a Lagrangian term linear in the derivatives, could be Lorentz invariant if, taking into account the convention in eq. (273) and the dotted-undotted structure of the tensor in this internal space, we have that if a^μ is to be a 2th rank tensor of the internal space, it must have components, e.g, $(a^\mu)^{\dot{\alpha}\beta}$. Therefore, a posible Lorentz invariant with a single derivative could be

$$\psi^\dagger(x) a^\mu \partial_\mu \psi(x) \rightarrow \psi'^\dagger(x) a^\mu \partial'_\mu \psi'(x) = \psi'^\dagger_{\dot{\alpha}}(\Lambda^{-1}x) a^{\mu\dot{\alpha}\gamma} (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu \partial_\rho \psi'_\gamma(\Lambda^{-1}x), \quad (276)$$

with the first letters of the Greek alphabet are used to denote the indices of the internal Lorentz space, and the others the external one. Para suavizar la notación, vamos a ignorar en adelante la dependencia en las coordenadas transformadas las cuales serán integradas en el cálculo de la Acción

$$\psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi \rightarrow \psi'^\dagger(x) a^\mu \partial_\mu \psi' = S_{\dot{\alpha}}^{*\dot{\beta}} \psi^\dagger_{\dot{\beta}} a^{\mu\dot{\alpha}\gamma} (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu \partial_\rho \left(S_\gamma{}^\delta \psi_\delta \right). \quad (277)$$

Como los parámetros de la transformación, ξ_i y θ_i , en la ec. (311) están en el espacio interno de Lorentz, del conjunto de cuatro matrices constantes σ^μ no cambia bajo una transformación de Lorentz asociada a cambios de las coordenadas externas

$$\psi^\dagger a^\mu \partial_\mu \psi \rightarrow \psi'^\dagger(x) a^\mu \partial_\mu \psi' = \psi^\dagger_{\dot{\beta}} (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu S^{\dagger\dot{\beta}}{}_{\dot{\alpha}} a^{\mu\dot{\alpha}\gamma} S_\gamma{}^\delta \partial_\rho \psi_\delta$$

$$\begin{aligned}
&= \psi^\dagger (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu (S^\dagger a^\mu S) \partial_\rho \psi \\
&= \psi^\dagger a^\rho \partial_\rho \psi,
\end{aligned} \tag{278}$$

De este modo, el término permanece invariante si la siguiente condición se satisface

$$(\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu S^\dagger a^\mu S = a^\rho, \tag{279}$$

o

$$\begin{aligned}
(\Lambda)^\nu{}_\rho (\Lambda^{-1})^\rho{}_\mu S^\dagger a^\mu S &= (\Lambda)^\nu{}_\rho a^\rho, \\
\delta^\nu{}_\mu S^\dagger a^\mu S &= (\Lambda)^\nu{}_\rho a^\rho \\
S^\dagger a^\nu S &= (\Lambda)^\nu{}_\rho a^\rho,
\end{aligned} \tag{280}$$

La solución para esta identidad es única y puede expresarse en términos de las matrices 2×2 de Pauli más la identidad

$$\begin{aligned}
a^\mu &= \bar{\sigma}^\mu = (\mathbf{1}_{2 \times 2}, \bar{\boldsymbol{\sigma}}) \\
&= (\sigma^0, \bar{\boldsymbol{\sigma}}),
\end{aligned} \tag{281}$$

donde

$$\sigma^0 = \mathbf{1} \qquad \bar{\sigma} = -\sigma = (-\sigma^1, -\sigma^2, -\sigma^3) \ . \qquad (282)$$

Por consiguiente, el Lagrangiano más general posible para espinores de dos componentes contiene al menos

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &\supset \frac{i}{2} \psi_{\dot{\alpha}}^{\dagger} (\bar{\sigma}^{\mu})^{\dot{\alpha}\alpha} \partial_{\mu} \psi_{\alpha} - m \psi^{\alpha} \psi_{\alpha} \\ &\supset \frac{i}{2} \psi^{\dagger} \bar{\sigma}^{\mu} \partial_{\mu} \psi - m \psi \psi .\end{aligned}\tag{283}$$

Los coeficientes $i/2$ y m se han escogido para que las ecuaciones de Euler-Lagrange den lugar a las ecuaciones de movimiento apropiadas. Para garantizar que la Acción sea un real, debemos imponer que $\mathcal{L}^{\dagger} = \mathcal{L}$. La forma más simple de Lograrlo es simplemente adicionar el hermítico conjugado de cada uno de los términos (h.c de las siglas en inglés). De modo que el Lagrangiano más general posible para espinores de dos componentes es

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{i}{2} \psi^{\dagger} \bar{\sigma}^{\mu} \partial_{\mu} \psi - m \psi \psi + \text{h.c} \\ &= \frac{i}{2} \psi^{\dagger} \bar{\sigma}^{\mu} \partial_{\mu} \psi - m \psi \psi + \left(\frac{i}{2} \psi^{\dagger} \bar{\sigma}^{\mu} \partial_{\mu} \psi \right)^{\dagger} - m (\psi \psi)^{\dagger} ,\end{aligned}$$

Entonces

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu \psi^\dagger \bar{\sigma}^{\mu\dagger} \psi - m (\psi\psi + \psi^\dagger \psi^\dagger)$$

Ya que, de la hermiticidad de las matrices de Pauli

$$\bar{\sigma}^{\mu\dagger} = \bar{\sigma}^\mu . \quad (284)$$

De modo que

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2} \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - \frac{i}{2} \partial_\mu (\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi) + \frac{i}{2} \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - m (\psi\psi + \psi^\dagger \psi^\dagger) . \quad (285)$$

Descartando la derivada total que no altera la Acción, podemos obtener la forma final de la densidad Lagrangiana para un campo espinorial de dos componentes

$$\mathcal{L} = i \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi - m (\psi\psi + \psi^\dagger \psi^\dagger) . \quad (286)$$

Teniendo en cuenta de nuevo que la Acción es adimensional, que implica $[\mathcal{L}] = E^4$, y considerando además que σ^μ son matrices constantes adimensionales, entonces

$$[\psi] = E^{3/2} \quad \rightarrow \quad [m] = E.$$

Si al campo ψ se la asocia además una carga conservada asociada a una simetría continua tipo $U(1)$, tal que

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{-i\alpha} \psi, \quad (287)$$

podemos imponer que el Lagrangiano sea invariante bajo cambios de fase ψ . En tal caso, el término con coeficiente m debe de ser cero y la densidad Lagrangiana se simplifica a

$$\mathcal{L} = i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi. \quad (288)$$

The previous Lagrangian which is invariant under

$$\psi \rightarrow \psi' = e^{i\alpha} \psi, \quad (289)$$

is the most general one if ψ have any conserved charge, and will be the one the will use in the subsequent discussions.

En general

$$\begin{aligned}
 J^\mu &\propto \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right] \delta \psi + \delta \psi^\dagger \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi^\dagger)} \right] \\
 &\propto i \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu (-i \alpha \psi) \\
 &\propto i \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu (-i \alpha \psi) \\
 &= \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi
 \end{aligned} \tag{290}$$

y

$$J^\mu = \psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \psi . \tag{291}$$

La densidad de corriente es

$$J^0 \propto \psi^\dagger \sigma^0 \psi = \psi^\dagger \psi . \tag{292}$$

Que podemos interpretar como una densidad de probabilidad. Por consiguiente, la ecuación de movimiento se puede interpretar directamente como una ecuación de una función de onda de la mecánica cuántica.

Para el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = i\psi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \psi,$$

calcular T^μ_ν y a partir de las densidades of carga conservadas demostrar que

$$\begin{aligned}\langle \hat{H}_W \rangle &= \int_V d^3x \psi^\dagger \hat{H}_W \psi \\ \langle \hat{\mathbf{p}} \rangle &= \int_V d^3x \psi^\dagger \hat{\mathbf{p}} \psi.\end{aligned}$$

donde $\hat{H}_W = -\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}$ y $\hat{\mathbf{p}} = -i\nabla$

Usando $\sigma^0 = \mathbf{1}$,

$$\begin{aligned}T^0_0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} \partial_0 \psi + \partial_0 \psi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi^\dagger)} - \mathcal{L} \\ &= i\psi^\dagger \partial_0 \psi - \mathcal{L} \\ &= -i\psi^\dagger \bar{\sigma}^i \partial_i \psi\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\psi^\dagger \sigma^i (-i\partial_i) \psi \\
&= -\psi^\dagger (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}}) \psi, \\
&= \psi^\dagger \hat{H}_W \psi,
\end{aligned} \tag{293}$$

donde hemos definido el Hamiltoniano de Weyl como

$$\hat{H}_W = -\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{p}} \tag{294}$$

Que corresponde a la proyección del espín en la dirección de movimiento. El signo menos justifica la definición de ψ_α como un espinor de Weyl izquierdo. Como la ecuación de Schrödinger es de validez general, tenemos entonces que

$$i \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H}_W \psi \tag{295}$$

y, como en mecánica clásica usual

$$\langle \hat{H}_W \rangle = \int \psi^\dagger \hat{H}_W \psi d^3x. \tag{296}$$

Note que esta relación no es posible para el Hamiltoniano de Weyl con término de masa.
Además

$$\begin{aligned}
 T_i^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi)} \partial_i \psi + \partial_i \psi^\dagger \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \psi^\dagger)} \\
 &= i \psi^\dagger \partial_i \psi \\
 &= -\psi^\dagger (-i \partial_i) \psi
 \end{aligned} \tag{297}$$

de modo que

$$\langle \hat{\mathbf{p}} \rangle = \int \psi^\dagger \hat{\mathbf{p}} \psi d^3x \tag{298}$$

La ec. (??) puede escribirse como

$$\left(i \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right) \psi = 0. \quad (299)$$

El campo ψ también debe satisfacer la ecuación de Klein-Gordon. Podemos derivar dicha ecuación aplicando el operador

$$\left(-i \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right)$$

De modo que, teniendo en cuenta que $\partial \hat{H} / \partial t = 0$,

$$\begin{aligned} &\left(-i \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right) \left(i \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right) \psi = 0 \\ &\left(-i \frac{\partial}{\partial t} - \hat{H}\right) \left(i \frac{\partial \psi}{\partial t} - \hat{H} \psi\right) = 0 \\ &\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + i \left(\frac{\partial \hat{H}}{\partial t}\right) \psi + i \hat{H} \frac{\partial \psi}{\partial t} - i \hat{H} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \hat{H}^2 \psi = 0 \\ &\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \hat{H}^2\right) \psi = 0. \end{aligned} \quad (300)$$

De la ec. (??), y usando la condición en ec. (??), tenemos

$$\hat{H}^2 = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p}). \quad (301)$$

Sea A una matriz y θ un escalar. Entonces tenemos la identidad

$$(\mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta})^2 = \sum_i A^{i2} \theta^{i2} + \sum_{i < j} \{A^i, A^j\} \theta^i \theta^j \quad (302)$$

Entonces

$$\hat{H}^2 = \sigma_i^2 p_i^2 + \sum_{i < j} \{\sigma_i, \sigma_j\} p_i p_j \quad (303)$$

(suma sobre índices repetidos). Si

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= \mathbf{1} \\ \{\sigma_i, \sigma_j\} &= 0 \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (304)$$

que se puede resumir en

$$\{\sigma^i, \sigma^j\} = 2\delta_{ij} \mathbf{1}. \quad (305)$$

todo consistente con las propiedades de las matrices de Pauli en (??). De modo que

$$\hat{H}^2 = -\nabla^2, \quad (306)$$

y reemplazando en la ec. (300) llegamos a la ecuación de Klein-Gordon para ψ

$$\begin{aligned}\left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2\right)\psi &= 0 \\ \square\psi &= 0\end{aligned}\tag{307}$$

To show that $S(\Lambda)$ is in fact a Lorentz transformation, it is convenient to write this in covariant form. If we define

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{4} [\sigma^\mu, \bar{\sigma}^\nu] . \quad (308)$$

We can obtain the proper boost and rotations generators:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \sigma^{0i} = -i \frac{\sigma}{2} \\ L_i &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \sigma^{jk} = -4 \frac{i}{8} \epsilon_{ijk} \left[\frac{\sigma^j}{2}, \frac{\sigma^k}{2} \right] \\ &= -\frac{i}{2} \epsilon_{ijk} i \epsilon^{jkl} \frac{\sigma_l}{2} \\ &= \frac{1}{2} \delta_i^l \sigma_l \\ &= \frac{1}{2} \sigma_i . \end{aligned}$$

It is worth noticing that in fact $\sigma^{\mu\nu}$ satisfy the Lorentz algebra, and therefore are the generators of the Lorentz group elements:

$$\begin{aligned} S(\Lambda) &= \exp \left(-i\omega_{\mu\nu} \frac{\sigma^{\mu\nu}}{2} \right) \\ &\approx 1 - \frac{i}{2} \omega_{\mu\nu} \sigma^{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (309)$$

Necesitamos satisfacer la siguiente condición

$$S^\dagger \bar{\sigma}^\mu S = \Lambda^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu \quad (310)$$

Ahora

$$S(\Lambda)_{(\frac{1}{2},0)} \equiv S(\Lambda) = \exp \left(\boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right) , \quad (311)$$

y expandiendo (310)

$$\left(\mathbf{1} + \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right) \bar{\sigma}^\mu \left(\mathbf{1} + \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \right) = [\mathbf{1} + i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{K} + i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}]^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu$$

$$\left(\bar{\sigma}^{\mu} + \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \bar{\sigma}^{\mu} - i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \bar{\sigma}^{\mu}\right) \left(\mathbf{1} + \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) = [\mathbf{1} + i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{K} + i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}]^{\mu}_{\nu} \bar{\sigma}^{\nu}.$$

Hasta primer orden en los parametros ξ^i y θ^i ,

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{\mu} + \boldsymbol{\xi} \cdot \left(\bar{\sigma}^{\mu} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) + i\boldsymbol{\theta} \cdot \left(\bar{\sigma}^{\mu} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}\right) + \boldsymbol{\xi} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \bar{\sigma}^{\mu} - i\boldsymbol{\theta} \cdot \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \bar{\sigma}^{\mu} &= \delta^{\mu}_{\nu} \bar{\sigma}^{\nu} + i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{K}^{\mu}_{\nu} \bar{\sigma}^{\nu} + i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}^{\mu}_{\nu} \bar{\sigma}^{\nu} \\ \bar{\sigma}^{\mu} + \boldsymbol{\xi} \cdot \left(\bar{\sigma}^{\mu} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \bar{\sigma}^{\mu}\right) + i\boldsymbol{\theta} \cdot \left(\bar{\sigma}^{\mu} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \bar{\sigma}^{\mu}\right) &= \delta^{\mu}_{\nu} \bar{\sigma}^{\nu} + i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{K}^{\mu}_{\nu} \bar{\sigma}^{\nu} + i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}^{\mu}_{\nu} \bar{\sigma}^{\nu} \\ \boldsymbol{\xi} \cdot \left(\bar{\sigma}^{\mu} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \bar{\sigma}^{\mu}\right) + i\boldsymbol{\theta} \cdot \left(\bar{\sigma}^{\mu} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \bar{\sigma}^{\mu}\right) &= i\boldsymbol{\xi} \cdot \mathbf{K}^{\mu}_{\nu} \bar{\sigma}^{\nu} + i\boldsymbol{\theta} \cdot \mathbf{L}^{\mu}_{\nu} \bar{\sigma}^{\nu}. \end{aligned}$$

Igualando coeficientes

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^{\mu} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} + \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \bar{\sigma}^{\mu} &= i\mathbf{K}^{\mu}_{\nu} \bar{\sigma}^{\nu} \\ \bar{\sigma}^{\mu} \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} - \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2} \bar{\sigma}^{\mu} &= \mathbf{L}^{\mu}_{\nu} \bar{\sigma}^{\nu} \end{aligned}$$

La primera ecuación es

$$\bar{\sigma}^{\mu} \frac{\sigma^i}{2} + \frac{\sigma^i}{2} \bar{\sigma}^{\mu} = i[K^i]^{\mu}_{\nu} \bar{\sigma}^{\nu}$$

$$\begin{aligned}
&= i [J^{0i}]^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu \\
&= i [J^{0i}]^\mu{}_\nu \bar{\sigma}^\nu \\
&= - (g^{0\mu} \delta_\nu^i - \delta_\nu^0 g^{i\mu}) \bar{\sigma}^\nu \\
&= - (g^{0\mu} \bar{\sigma}^i - g^{i\mu} \bar{\sigma}^0) ,
\end{aligned}$$

para $\mu = 0$

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}^0 \frac{\sigma^i}{2} + \frac{\sigma^i}{2} \bar{\sigma}^0 &= - \bar{\sigma}^i \\
\sigma^i &= \sigma^i .
\end{aligned}$$

Para $\mu = j$

$$\begin{aligned}
-\sigma^j \frac{\sigma^i}{2} - \frac{\sigma^i}{2} \sigma^j &= + g^{ij} \sigma^0 \\
-\delta^{ij} \mathbf{1} &= -\delta^{ij} \mathbf{1} .
\end{aligned}$$

La segunda ecuación es

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}^{\mu} \frac{\sigma^i}{2} - \frac{\sigma^i}{2} \bar{\sigma}^{\mu} &= (L^i)^{\mu}_{\nu} \bar{\sigma}^{\nu} \\
 &= - (L_i)^{\mu}_{\nu} \bar{\sigma}^{\nu} \\
 &= - \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \left(J^{jk} \right)^{\mu}_{\nu} \bar{\sigma}^{\nu} \\
 &= - \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} \left(g^{j\mu} \delta_{\nu}^k - \delta_{\nu}^j g^{k\mu} \right) \bar{\sigma}^{\nu} \\
 &= - \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} \left(g^{j\mu} \bar{\sigma}^k - g^{k\mu} \bar{\sigma}^j \right) \\
 &= \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} \left(g^{j\mu} \sigma^k - g^{k\mu} \sigma^j \right) .
 \end{aligned}$$

Para $\mu = 0$

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}^0 \frac{\sigma^i}{2} - \frac{\sigma^i}{2} \bar{\sigma}^0 &= \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} \left(g^{j0} \sigma^k - g^{k0} \sigma^j \right) \\
 &= 0 .
 \end{aligned}$$

Para $\mu = l$

$$\begin{aligned}
 \bar{\sigma}^l \frac{\sigma^i}{2} - \frac{\sigma^i}{2} \bar{\sigma}^l &= \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} \left(g^{jl} \sigma^k - g^{kl} \sigma^j \right) \\
 \frac{\sigma^i}{2} \sigma^l - \sigma^l \frac{\sigma^i}{2} &= \frac{i}{2} \epsilon_{ijk} \left(-\delta^{jl} \sigma^k + \delta^{kl} \sigma^j \right) \\
 2 \frac{\sigma^i}{2} \frac{\sigma^l}{2} - 2 \frac{\sigma^l}{2} \frac{\sigma^i}{2} &= \frac{i}{2} \left(-\epsilon_{ilk} \sigma^k + \epsilon_{ijl} \sigma^j \right) \\
 2 \left[\frac{\sigma^i}{2}, \frac{\sigma^l}{2} \right] &= \frac{i}{2} \left(\epsilon_{lik} \sigma^k + \epsilon_{lik} \sigma^k \right) \\
 2i \epsilon_{lik} \frac{\sigma^k}{2} &= \frac{i}{2} \left(2 \epsilon_{lik} \sigma^k \right) \\
 i \epsilon_{lik} \sigma^k &= i \epsilon_{lik} \sigma^k .
 \end{aligned}$$

Para el campo de dos componentes derecho $\eta^{\dagger\dot{\alpha}}$ ($\dot{\alpha} = \dot{1}, \dot{2}$), el término invariante de Lorentz con derivada de primer orden debería ser

$$\begin{aligned}
 \eta a^\mu \partial_\mu \eta^\dagger &\rightarrow \eta' (a^\mu) \partial'_\mu \eta'^{\dagger} = \eta'^{\alpha} (a^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \partial_\nu \eta'^{\dagger\dot{\alpha}} \\
 &= \left[(S^{-1})^T \right]^\alpha{}_\beta \eta^\beta (a^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \left[(S^{-1})^\dagger \right]^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \partial_\nu \eta^{\dagger\dot{\alpha}} \\
 &= (\Lambda^{-1})^\nu{}_\mu \left[(S^{-1}) \right]^\alpha{}_\beta (a^\mu)_{\alpha\dot{\alpha}} \left[(S^{-1})^\dagger \right]^{\dot{\alpha}}{}_{\dot{\beta}} \eta^\beta \partial_\nu \eta^{\dagger\dot{\alpha}} .
 \end{aligned} \tag{312}$$

siempre y cuando la siguiente propiedad se satisfaga

$$S^{-1} a^\mu (S^{-1})^\dagger = (\Lambda)^\mu{}_\nu a^\nu . \tag{313}$$

De hecho, la única solución se puede expresar en términos de las matrices 2×2

$$a^\mu = \sigma^\mu = (\sigma^0, \boldsymbol{\sigma}) , \tag{314}$$

y siguiendo un método similar al anterior, podemos arribar a la densidad Lagrangiana más general para un espinor derecho de dos componentes

$$\mathcal{L} = i\eta\sigma^\mu\partial_\mu\eta^\dagger - m\left(\eta\eta + \eta^\dagger\eta^\dagger\right). \quad (315)$$

El cálculo del tensor de momento energía en este caso, nos permite definir el Hamiltoniano de Weyl para un espinor de Weyl derecho como

$$\hat{H}_W = \sigma \cdot \hat{\mathbf{p}}, \quad (316)$$

que corresponde, en efecto, a la proyección del espín en la dirección de movimiento. El signo positivo justifica la definición de $\eta^{\dot{\alpha}}$ como un espinor de Weyl derecho.

Para describir completamente un electrón, que conserva carga eléctrica bajo $U(1)$, necesitamos todas las componentes detalladas en la Tabla 5

Nombre	Símbolo	Lorentz	$U(1)$
e_L : electrón izquierdo	ξ_α	$[S]_\alpha{}^\beta$	$e^{i\theta}$
$(e_L)^\dagger = e_R^\dagger$: positrón derecho	$(\xi_\alpha)^\dagger = \xi_{\dot{\alpha}}$	$[S^*]_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}$	$e^{-i\theta}$
e_R : electrón derecho	$(\eta^\alpha)^\dagger = \eta^{\dagger\dot{\alpha}}$	$[(S^{-1})^\dagger]_{\dot{\alpha}}{}^{\dot{\beta}}$	$e^{i\theta}$
$(e_R)^\dagger = e_L^\dagger$: positrón izquierdo	η^α	$[(S^{-1})^T]_{\alpha}{}^{\beta}$	$e^{-i\theta}$

Tabla: Componentes del electrón

Podemos especificar el Lagrangiano completo para el electrón invariante bajo $U(1)$ sin pérdida de generalidad, usando los dos fermiones izquierdos de cargas opuestas, ξ_α y η^α :

$$\xi \rightarrow \xi' = e^{i\theta} \xi \qquad \eta \rightarrow \eta' = e^{-i\theta} \eta \qquad (317)$$

como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\xi_\alpha^\dagger \bar{\sigma}^\mu{}^{\dot{\alpha}\alpha} \partial_\mu \xi_\alpha + i\eta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \eta^{\dagger\dot{\alpha}} - m \left(\eta^\alpha \xi_\alpha + \xi_\alpha^\dagger \eta^{\dagger\dot{\alpha}} \right) \\ &= i\xi_\alpha^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi + i\eta \sigma^\mu \partial_\mu \eta^\dagger - m \left(\eta \xi + \xi^\dagger \eta^\dagger \right). \end{aligned} \qquad (318)$$

Definiendo el *espinor de Dirac* y su hermítico conjugado como

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} e_L \\ e_R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \eta^{\dagger\dot{\alpha}} \end{pmatrix} \qquad \Psi^\dagger = \left((\xi_\alpha)^\dagger \quad (\eta^{\dagger\dot{\alpha}})^\dagger \right) = \left(\xi_\alpha^\dagger \quad \eta^\alpha \right) \qquad (319)$$

y usando (??), tenemos en primer lugar que

$$\begin{pmatrix} \xi_\alpha^\dagger & \eta^\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \eta^{\dagger\dot{\alpha}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta^\alpha & \xi_\alpha^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \eta^{\dagger\dot{\alpha}} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \eta^\alpha \xi_\alpha + \xi_{\dot{\alpha}}^\dagger \eta^{\dagger \dot{\alpha}} \\
&= \eta \xi + \xi^\dagger \eta^\dagger,
\end{aligned} \tag{320}$$

mientras que para los términos cinéticos

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \xi_{\dot{\alpha}}^\dagger & \eta^\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \\ \bar{\sigma}^{\mu \dot{\alpha}\alpha} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\mu \xi_\alpha \\ \partial_\mu \eta^{\dagger \dot{\alpha}} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \xi_{\dot{\alpha}}^\dagger & \eta^\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}^{\mu \dot{\alpha}\alpha} & 0 \\ 0 & \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_\mu \xi_\alpha \\ \partial_\mu \eta^{\dagger \dot{\alpha}} \end{pmatrix} \\
&= \xi_{\dot{\alpha}}^\dagger \bar{\sigma}^{\mu \dot{\alpha}\alpha} \partial_\mu \xi_\alpha + \eta^\alpha \sigma_{\alpha\dot{\alpha}}^\mu \partial_\mu \eta^{\dagger \dot{\alpha}} \\
&= \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi + \eta \sigma^\mu \partial_\mu \eta^\dagger.
\end{aligned} \tag{321}$$

Definiendo las matrices de Dirac (en la representación quirral) como

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix}, \tag{322}$$

las cuales satisfacen el algebra

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1}. \tag{323}$$

tememos en particular que,

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \quad (324)$$

tal que

$$(\gamma^0)^2 = \mathbf{1}_{4 \times 4}. \quad (325)$$

Usando (319), (320) y (321)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi + i\eta \sigma^\mu \partial_\mu \eta^\dagger - m(\eta \xi + \xi^\dagger \eta^\dagger) \\ &= i\Psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\Psi^\dagger \gamma^0 \Psi. \end{aligned} \quad (326)$$

Definiendo finalmente el *espinor de Dirac adjunto*

$$\bar{\Psi} = \Psi^\dagger \gamma^0, \quad (327)$$

podemos escribir finalmente el Lagrangiano para espinores de Dirac como

$$\mathcal{L} = i\bar{\Psi} \gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi} \Psi. \quad (328)$$

La ecuación de Dirac se obtiene facilmente de la ecuación de Euler Lagrange para el espinor adjunto $\bar{\Psi}$

$$\begin{aligned}\partial_{\mu} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_{\mu} \bar{\Psi})} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\Psi}} &= 0 \\ - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Psi} &= 0 \\ (i\gamma^{\mu} \partial_{\mu} - m) \Psi &= 0.\end{aligned}\tag{329}$$

Escrito en la forma de la ecuación de Scrodinger general, da lugar al Hamiltoniando de Dirac

$$\begin{aligned}i\gamma^0 \partial_0 \Psi &= [\gamma^i (-i\partial_i) + m] \Psi \\ i(\gamma^0)^2 \partial_0 \Psi &= \gamma^0 \left(\sum_i \gamma^i \hat{p}^i + m \right) \Psi \\ i \frac{\partial}{\partial t} \Psi &= \gamma^0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{p}} + m) \Psi \\ i \frac{\partial}{\partial t} \Psi &= \hat{H}_D \Psi,\end{aligned}\tag{330}$$

donde

$$\hat{H}_D = \gamma^0 (\boldsymbol{\gamma} \cdot \hat{\mathbf{p}} + m) \quad (331)$$

Campos vectoriales

Las ecuaciones de Maxwell son invariantes bajo la *transformación gauge local* obtenida en la ec. (??)

$$\begin{aligned} A^\mu(x) &\rightarrow A'^\mu = A^\mu(x) - \partial^\mu \theta(x) \\ \delta A^\mu(x) &= -\partial^\mu \theta(x) \end{aligned} \quad (332)$$

que cuando fue descubierta parecía ser una simple curiosidad matemática de dichas ecuaciones.

$$\mathcal{L}(\partial_\mu A_\nu, A_\nu, \phi_i) = \mathcal{L}_{\text{EM}}(\partial_\mu A_\nu) + \mathcal{L}_{\text{int}}(A_\nu, \phi_i). \quad (333)$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial}{\partial A_\nu} \mathcal{L}(\partial_\mu A_\nu, A_\nu, \phi_i) = \frac{\partial}{\partial A_\nu} \mathcal{L}_{\text{int}}(A_\nu, \phi_i). \quad (334)$$

Podemos definir la derivada de \mathcal{L}_{int} (la cual se determinará en capítulos posteriores) y que depende de los campos extras, como

$$j^\nu \propto \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu}, \quad \text{with} \quad j^\nu \equiv - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu}, \quad (335)$$

$$\partial_\nu \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{EM}}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right] = 0. \quad (336)$$

Como $\partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu$ corresponde a un tensor simétrico, la identidad anterior se puede interpretar como la necesidad de introducir el tensor antisimétrico

$$F^{\nu\mu} \propto \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)}, \quad \text{with:} \quad F^{\nu\mu} \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)}, \quad (337)$$

tal que

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\nu\mu} = \partial_\mu \partial_\nu F^{\nu\mu} = 0. \quad (338)$$

$$\mathcal{L}_{\text{EM}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}, \quad (339)$$

A partir de este Lagrangiana, podemos demostrar en efecto que

$$F^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{EM}}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)}, \quad (340)$$

Podemos coprobar que si

$$\begin{aligned} F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} &= (\partial^\rho A^\sigma - \partial^\sigma A^\rho)(\partial_\rho A_\sigma - \partial_\sigma A_\rho) \\ &= \partial^\rho A^\sigma \partial_\rho A_\sigma - \partial^\rho A^\sigma \partial_\sigma A_\rho - \partial^\sigma A^\rho \partial_\rho A_\sigma + \partial^\sigma A^\rho \partial_\sigma A_\rho \\ &= g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta}(\partial_\alpha A_\beta \partial_\rho A_\sigma - \partial_\alpha A_\beta \partial_\sigma A_\rho - \partial_\beta A_\alpha \partial_\rho A_\sigma + \partial_\beta A_\alpha \partial_\sigma A_\rho). \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} F^{\rho\sigma}F_{\rho\sigma} = g^{\rho\alpha}g^{\sigma\beta}(\delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}\partial_\rho A_\sigma + \partial_\alpha A_\beta \delta_{\rho\mu}\delta_{\sigma\nu} - \delta_{\alpha\mu}\delta_{\beta\nu}\partial_\sigma A_\rho - \partial_\alpha A_\beta \delta_{\sigma\mu}\delta_{\rho\nu})$$

$$\begin{aligned}
& -\delta_{\beta\mu}\delta_{\alpha\nu}\partial_\rho A_\sigma - \partial_\beta A_\alpha\delta_{\rho\mu}\delta_{\sigma\nu} + \delta_{\beta\mu}\delta_{\alpha\nu}\partial_\sigma A_\rho + \partial_\beta A_\alpha\delta_{\sigma\mu}\delta_{\rho\nu}). \\
& = g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu}\partial_\rho A_\sigma + g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\partial_\alpha A_\beta - g^{\rho\mu}g^{\sigma\nu}\partial_\sigma A_\rho - g^{\nu\alpha}g^{\mu\beta}\partial_\alpha A_\beta \\
& \quad - g^{\rho\nu}g^{\sigma\mu}\partial_\rho A_\sigma - g^{\mu\alpha}g^{\nu\beta}\partial_\beta A_\alpha + g^{\rho\nu}g^{\sigma\mu}\partial_\sigma A_\rho + g^{\nu\alpha}g^{\mu\beta}\partial_\beta A_\alpha \\
& = \partial^\mu A^\nu + \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu A^\mu - \partial^\nu A^\mu + \partial^\mu A^\nu + \partial^\mu A^\nu \\
& = 4(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma} = 4F^{\mu\nu}. \quad (341)$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{EM}}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = -F^{\mu\nu} = F^{\nu\mu}, \quad (342)$$

El Lagrangiano en ec. (339) admite un término adicional:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - j^\nu A_\nu, \quad (343)$$

siempre y cuando $j^\nu(x)$ sea una corriente vectorial conservada:

$$j^\nu(x) \rightarrow j'^\nu(x) = \Lambda^\nu{}_\mu j^\mu(\Lambda^{-1}x), \quad \partial_\nu j^\nu(x) = 0. \quad (344)$$

De hecho, usando la ec. (352), tenemos que para la transformación interna del campo A^ν , eq. (??)

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{L} = \mathcal{L}' - \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F'^{\mu\nu}F'_{\mu\nu} - j^\nu A'_\nu + \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + j^\nu A_\nu \\ &= -j^\nu A_\nu + j^\nu \partial_\nu \theta(x) + j^\nu A_\nu \\ &= j^\nu \partial_\nu \theta(x) \\ &= \partial_\nu (j^\nu \chi) - (\partial_\nu j^\nu) \theta(x). \end{aligned} \quad (345)$$

Como el cambio en la Acción no es afectado por la derivada total, entonces

$$\delta S = \int d^4x [\partial_\nu (j^\nu \chi) - (\partial_\nu j^\nu) \theta(x)]$$

$$= - \int d^4 x (\partial_\nu j^\nu) \theta(x). \quad (346)$$

Para tener $\delta S = 0$, y cómo $\theta(x)$ es arbitrario, necesitamos asumir que $\partial_\nu j^\nu = 0$, tal que j^ν es una corriente conservada. Sin embargo, veremos que esta es una condición auto consistente en la teoría completa.

En resumen, si la corriente electromagnética, j^ν se conserva, entonces la Acción es invariante bajo la transformación gauge local (332).

Por lo tanto, el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - j^\nu A_\nu, \quad (347)$$

es el más general que da lugar a una Acción invariante de Lorentz e invariante gauge local.

Usando la ec. (341), tenemos

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu} &= 0 \\
 -\frac{1}{4} \partial_\mu \left[\frac{\partial}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} (F^{\rho\sigma} F_{\rho\sigma}) \right] + j^\rho \frac{\partial A_\rho}{\partial A_\nu} &= 0 \\
 -\partial_\mu F^{\mu\nu} + j^\rho \delta_\rho^\nu &= 0 \\
 \partial_\mu F^{\mu\nu} &= j^\nu .
 \end{aligned} \tag{348}$$

Para completar la demostración de que la Acción invariante de Lorentz e invariante gauge local, expresada en términos del Lagrangiano (347), da lugar a la Teoría Electromagnética, debemos mostrar que las 4 ecuaciones de Maxwell se pueden escribir en la *forma covariante*

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad \partial_\mu F^{\mu\nu} = j^\nu . \tag{349}$$

Regresando a las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (350)$$

tomando la derivada con respecto a ν en ambos lados tenemos

$$\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} = \partial_\nu J^\nu. \quad (351)$$

De la parte izquierda de ésta ecuación tenemos

$$\begin{aligned} \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} + \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu}) \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_\nu F^{\nu\mu}) && \text{intercambiando índices mudos} \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} + \partial_\nu \partial_\mu F^{\nu\mu}) && \text{conmutando derivadas} \\ &= \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu} - \partial_\nu \partial_\mu F^{\mu\nu}) && \text{usando antisimetría de } F^{\mu\nu} \\ &= 0, \end{aligned}$$

Por consiguiente, la cuadricorriente J^μ es conservada:

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (352)$$

Además, las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu, \quad (353)$$

se pueden expandir para $\nu = 0$ y $\nu = k$.

Para $\nu = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \partial_\mu F^{\mu 0} &= J^0 \\ \partial_i F^{i0} &= J^0 \\ \frac{\partial}{\partial x^i} F^{i0} &= J^0 \\ \frac{\partial E^i}{\partial x^i} &= J^0, \end{aligned} \quad (354)$$

y por consiguiente

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho. \quad (355)$$

mientras que para $\nu = k$ tenemos

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu F^{\mu k} &= J^k \\
 \partial_i F^{ik} + \partial_0 F^{0k} &= J^k \\
 -\partial_i F^{ki} - \partial_0 F^{k0} &= J^k \\
 -\frac{\partial(\epsilon_{ikj} B^j)}{\partial x^i} - \frac{\partial E^k}{\partial t} &= J^k \\
 \epsilon_{ijk} \frac{\partial B^j}{\partial x^i} - \frac{\partial E^k}{\partial t} &= J^k \\
 (\nabla \times \mathbf{B})^k - \frac{\partial E^k}{\partial t} &= J^k..
 \end{aligned} \tag{356}$$

y por consiguiente

$$\nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}. \tag{357}$$

De esta forma, la expresión

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu \quad \text{where} \quad F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu, \quad (358)$$

es completamente equivalente al conjunto completo de ecuaciones de Maxwell:

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (359)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho, \quad \nabla \times \mathbf{B} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J}. \quad (360)$$

Si queremos que la Acción refleje las simetrías de las ecuaciones de Maxwell debemos mantener sólo los términos del Lagrangiano para A^μ en (387) que sean invariantes hasta una derivada total. Bajo una transformación gauge, cada uno de los términos

$$-\frac{1}{4}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2 A^\mu A_\mu + \lambda_1 \partial_\mu A^\mu A_\nu A^\nu + \lambda_2 A^\mu A_\mu A^\nu A_\nu + \lambda_3 F^{\mu\nu} A_\mu A_\nu + \lambda_4 G^{\mu\nu} A_\mu A_\nu + K_\nu(x) A^\nu A_\mu A^\mu$$

dan lugar a un $\delta\mathcal{L} \neq \partial_\mu(\text{algo})$ y la Acción no es invariante bajo la transformación gauge.

Necesitamos la expresión para $F_{\mu\nu}$,

$$F_{\mu\nu} = g_{\mu\rho}g_{\nu\eta}F^{\rho\eta} \Rightarrow \begin{cases} F_{0i} = F_{0\nu} = g_{00}g_{ij}F^{0j} = -F^{0i} & \text{para } \mu = 0 \\ F_{ij} = F_{i\nu} = g_{ik}g_{jl}F^{kl} = F^{ij} & \text{para } \mu = i \end{cases} \quad (361)$$

De la ec. (??), se tiene

$$\begin{aligned} T_{\nu}^{\mu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_{\mu}A_{\lambda})}(\partial_{\nu}A_{\lambda}) - \delta_{\nu}^{\mu}\mathcal{L} \\ &= -F^{\mu\lambda}(\partial_{\nu}A_{\lambda}) - \delta_{\nu}^{\mu}\mathcal{L} \end{aligned} \quad (362)$$

La energía del campo, corresponde a la componente T_0^0 :

$$\begin{aligned} T_0^0 &= -F^{0\lambda}(\partial_0A_{\lambda}) - \mathcal{L} \\ &= -F^{0\lambda}(\partial_0A_{\lambda}) + \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + J^{\mu}A_{\mu} \end{aligned}$$

Usando las ecuaciones (??), (??), (361)

$$\begin{aligned}
T_0^0 &= -F^{0\lambda}(\partial_0 A_\lambda) + \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + J^\mu A_\mu \\
&= -F^{0\mu}(\partial_0 A_\mu) + \frac{1}{4}\overbrace{F^{\mu 0}F_{\mu 0}}^{\nu=0} + \frac{1}{4}\overbrace{F^{\mu i}F_{\mu i}}^{\nu=i} + J^\mu A_\mu \\
&= -F^{0\mu}\partial_\mu A_0 - F^{\mu 0}F_{\mu 0} + \frac{1}{4}F^{\mu 0}F_{\mu 0} + \frac{1}{4}F^{\mu i}F_{\mu i} + J^\mu A_\mu .
\end{aligned} \tag{363}$$

Tenemos dos partes

$$\begin{aligned}
-F^{\mu 0}F_{\mu 0} + \frac{1}{4}F^{\mu 0}F_{\mu 0} + \frac{1}{4}F^{\mu i}F_{\mu i} &= -F^{i0}F_{i0} + \frac{1}{4}F^{i0}F_{i0} + \frac{1}{4}\overbrace{F^{0i}F_{0i}}^{\mu=0} + \frac{1}{4}\overbrace{F^{ji}F_{ji}}^{\mu=j} \\
&= -F^{i0}F_{i0} + \frac{1}{4}F^{i0}F_{i0} + \frac{1}{4}F^{i0}F_{i0} + \frac{1}{4}F^{ji}F_{ji} \\
&= -\frac{1}{2}F^{i0}F_{i0} + \frac{1}{4}F^{ji}F_{ji} .
\end{aligned} \tag{364}$$

Además

$$\begin{aligned}
 -F^{0\mu}\partial_\mu A_0 + J^\mu A_\mu &= -\partial_\mu(A_0 F^{0\mu}) + A_0\partial_\mu F^{0\mu} + J^\mu A_\mu \\
 &= -\partial_\mu(A_0 F^{0\mu}) - A_0\partial_\mu F^{\mu 0} + J^\mu A_\mu \\
 &= -\partial_\mu(A_0 F^{0\mu}) - A_0 J^0 + J^\mu A_\mu \\
 &= -\partial_i(A_0 F^{0i}) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}.
 \end{aligned} \tag{365}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 T_0^0 &= -\partial_i(A_0 F^{0i}) - \frac{1}{2}F^{i0}F_{i0} + \frac{1}{4}F^{ji}F_{ji} - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \\
 &= -\partial_i(A_0 F^{0i}) + \frac{1}{2}F^{i0}F^{i0} + \frac{1}{4}F^{ji}F^{ji} - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}, \quad \text{suma también sobre } i, j \\
 &= \frac{1}{2}E^i E^i + \frac{1}{4}\epsilon_{ijk}B^k \epsilon_{ijl}B^l + \partial_i(A_0 E^i) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}, \quad \text{suma también sobre } i, j \\
 &= \frac{1}{2}\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\delta_{kl}B^k B^l + \nabla \cdot (A^0 \mathbf{E}) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A} \\
 &= \frac{1}{2}\mathbf{E}^2 + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 + \nabla \cdot (A^0 \mathbf{E}) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{A}
 \end{aligned} \tag{366}$$

Entonces, en ausencia de corrientes

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 + \nabla \cdot (A^0 \mathbf{E}). \quad (367)$$

Similarmente la densidad Lagrangiano puede escribirse como

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\mathbf{E}^2 - \mathbf{B}^2) \quad (368)$$

En vista a la ec. (363), ya que la densidad Lagrangiana está definida hasta una derivada total, como $\nabla \cdot (A^0 \mathbf{E}) = \partial_\mu (A_0 F^{\mu 0})$, la densidad Hamiltoniana también estará definida hasta una derivada total. De hecho, el Hamiltoniano es

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2} \int_V d^3x (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2) + \int_V d^3x \nabla \cdot (A^0 \mathbf{E}) \\ &= \frac{1}{2} \int_V d^3x (\mathbf{E}^2 + \mathbf{B}^2), \end{aligned} \quad (369)$$

y corresponde a la expresión conocida para la energía del campo electromagnético. Hemos usado el hecho que en ausencia de corrientes todo lo que entra a un volumen debe salir y por consiguiente las integrales sobre el volumen de la divergencia de cualquier vector es cero.

Similarmente el momentum total del campo, en ausencia de corrientes, corresponde al vector de Pointing:

$$\begin{aligned}
 T_i^0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_0 A_\nu)} \partial_i A_\nu \\
 &= -F^{0\nu} \partial_i A_\nu \\
 &= -F^{0j} (\partial_i A_j - \partial_j A_i) - F^{0j} \partial_j A_i \\
 &= -F^{0j} F_{ij} - F^{0j} \partial_j A_i \\
 &= -F^{0j} F^{ij} - \partial_j (F^{0j} A_i) + (\partial_j F^{0j}) A_i \\
 &= E^j \epsilon_{jik} B^k + \partial_j (E^j A_i) + (J^0) A_i \\
 &= -(\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i - \nabla \cdot (A^i \mathbf{E}) - \rho A^i
 \end{aligned} \tag{370}$$

En ausencia de cargas y corrientes

$$\begin{aligned} P^i &= - \int_V d^3x T_i^0 = \int_V d^3x (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i + \int_V d^3x \nabla \cdot (A^i \mathbf{E}) \\ \mathbf{P} &= \int_V d^3x (\mathbf{E} \times \mathbf{B}). \end{aligned} \tag{371}$$

Para obtener una solución definitiva a las ecuaciones del campo electromagnético, se debe remover la arbitrariedad asociada con la libertad gauge de la ec. (??). De este modo los campos quedan especificados unívocamente en todas partes. De hecho, de las cuatro componentes del campo A^μ , solo dos son independientes y corresponden a los estados de polarización de las ondas electromagnéticas [?] (Capítulo 2). A éste proceso se le denomina fijar el gauge, y consiste en imponer restricciones sobre los campos que fijan la función χ y remueven la libertad gauge. Nosotros usaremos el Gauge de Lorentz, definido por la condición

$$\partial_\mu A^\mu = 0 \quad (372)$$

Si inicialmente $\partial_\mu A^\mu \neq 0$, se realiza una transformación gauge tal que $\partial_\mu A'^\mu = 0$. De acuerdo a la ec. (??), esto da lugar a la ecuación de onda inhomogénea

$$\square \chi = \partial_\mu A^\mu$$

que puede solucionarse mediante las técnicas usuales.

Es importante resaltar que la física queda inafectada por la escogencia del gauge. El resultado final para cualquier observable físico debe ser independiente del gauge usado para calcularlo.

Las ecuaciones de Maxwell (??) pueden escribirse como

$$\begin{aligned}
 \partial_\mu F^{\mu\nu} &= J^\nu \\
 \partial_\mu (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) &= J^\nu \\
 \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\nu A^\mu &= J^\nu \\
 \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu (\partial_\mu A^\mu) &= J^\nu.
 \end{aligned} \tag{373}$$

Apliquemos ahora el gauge de Lorentz, ec. (372) a las ecuaciones inhomogéneas de Maxwell (373)

$$\square A^\nu = \partial_\mu \partial^\mu A^\nu = J^\nu. \tag{374}$$

De este modo, cada componente del campo A^μ satisface la ecuación de onda (??), o la ecuación de Klein-Gordon (??) para masa cero. En ausencia de corrientes el campo A^μ puede ser expandido en ondas planas con dos grados independientes de polarización [?], de forma similar a como se hizo en la sección ?? para el campo ϕ . Una vez cuantizada la teoría, A^μ corresponde al fotón, y solo queda con dos grados de libertad independientes que corresponden a los modos transversales de la onda electromagnética [?] (capítulo 2).

La ec. (347), with $J^\mu = 0$, en el Gauge de Lorentz puede escribirse como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\
 &= -\frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu)(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \\
 &= -\frac{1}{4}(\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu A^\nu \partial_\nu A_\mu - \partial^\nu A^\mu \partial_\mu A_\nu + \partial^\nu A^\mu \partial_\nu A_\mu) \\
 &= -\frac{1}{4}[\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu (A^\nu \partial_\nu A_\mu) + A^\nu \partial_\nu (\partial^\mu A_\mu) - \partial^\nu (A^\mu \partial_\mu A_\nu) + A^\mu \partial_\mu (\partial^\nu A_\nu) + \underbrace{\partial^\nu A^\mu \partial_\nu A_\mu}_{\mu \leftrightarrow \nu}] \\
 &= -\frac{1}{4}[2\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu - \partial^\mu (2A^\nu \partial_\nu A_\mu)] \\
 &= -\frac{1}{2}\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu
 \end{aligned} \tag{375}$$

Incluyendo el término con corrientes, y usando el hecho de que un signo global no afecta las ecuaciones de movimiento, tenemos

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu A^\nu \partial_\mu A_\nu + J_\mu A^\mu \tag{376}$$

Consideraremos ahora el efecto de adicionar un término de masa a la teoría de Maxwell. Los campos vectoriales masivos juegan un papel importante en física. Campos como W^μ , Z^μ que median las interacciones débiles son ejemplos de campos de este tipo. Las implicaciones de una masa finita para el fotón pueden inferirse de un conjunto de postulados que hacen de las ecuaciones de Proca la única generalización posible de las ecuaciones de Maxwell [?].

Teniendo en cuenta sólo el término de masa en la ec. (347)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}m^2A^\mu A_\mu - J^\mu A_\mu. \quad (377)$$

Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange, tenemos

$$-\frac{1}{4}\partial_\mu \left[\frac{\partial}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} F^{\rho\eta} F_{\rho\eta} \right] - \frac{\partial}{\partial A_\nu} \left(\frac{1}{2}m^2 A^\rho A_\rho - J^\rho A_\rho \right) = 0$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} + m^2 A^\nu = J^\nu. \quad (378)$$

Tomando la cuadridivergencia a ambos lados de la ecuación y usando la ec. (373), tenemos

$$\partial_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\nu \partial^\nu \partial_\mu A^\mu + m^2 \partial_\nu A^\nu = \partial_\nu J^\nu$$

$$\begin{aligned}\partial_\nu \partial_\mu \partial^\mu A^\nu - \partial_\mu \partial^\mu \partial_\nu A^\nu + m^2 \partial_\nu A^\nu &= \partial_\nu J^\nu \\ m^2 \partial_\nu A^\nu &= \partial_\nu J^\nu\end{aligned}\tag{379}$$

De este modo, en ausencia de corrientes, la ecuaciones de Proca dan lugar a la condición de Lorentz. De otro lado, si asumimos que la corriente se conserva, la condición de Lorentz también aparece. Por consiguiente, si la masa de campo vectorial es diferente de cero, la condición de Lorentz, ec. (372), emerge como una restricción adicional que debe ser siempre tomada en cuenta. De este modo la libertad gauge de las ecuaciones de Maxwell se pierde completamente en la ecuaciones de Proca, que sin pérdida de generalidad se pueden reescribir, usando la condición de Proca

$$\partial_\mu A^\mu = 0 ,\tag{380}$$

y las ecs. (373), (378), como:

$$(\square + m^2)A^\nu = J^\nu\tag{381}$$

En ausencia de corrientes, cada una de las componentes del campo vectorial satisface la ecuación de Klein-Gordon (??). Por consiguiente m corresponde a la masa del campo vectorial A^μ .

Aplicando la condición de Lorentz a la ec. (377), obtenemos el Lagrangiano de la Ecuación de Proca (381)

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A^\nu \partial^\mu A_\nu + \frac{1}{2}m^2 A^\nu A_\nu - J^\nu A_\nu, \quad (382)$$

donde hemos reabsorbido un signo global que no afecta las ecuaciones de movimiento. El primer término que incluye sólo derivadas de los campos es llamado *término cinético* y dependen sólo del espín de las partículas. El término cuadrático en los campos corresponde al *término de masa*, y el último corresponde a la interacción del campo con una corriente. Cuando un Lagrangiano contiene sólo términos cinéticos y de masa diremos que el campo que da lugar al Lagrangiano es libre de interacciones, o simplemente que es un *campo libre*. Las otras partes del Lagrangiano serán llamadas *Lagrangiano de Interacción*. De este modo podemos reescribir el Lagrangiano (382) como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{int}},$$

donde,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{free}} &= -\frac{1}{2}\partial_\mu A^\nu \partial^\mu A_\nu + \frac{1}{2}m^2 A^\nu A_\nu \\ \mathcal{L}_{\text{int}} &= -J^\nu A_\nu. \end{aligned} \quad (383)$$

Debido a que la teoría masiva ya no es invariante gauge, la condición de Lorentz aparece automáticamente como la única restricción apropiada sobre el campo vectorial.

Una vez se toma en cuenta la condición de Lorentz el campo masivo libre puede expandirse en ondas planas con tres grados de libertad independientes de polarización. Dos de estos corresponden a los dos estados transversos que aparecen en las ondas electromagnéticas (A^1 , A^2), y el tercero (A^3) corresponde a un estado longitudinal en la dirección del momento de la partícula [?].

Aunque hemos hecho el análisis de la ecuación de Proca permitiendo un término de masa para el fotón, las implicaciones experimentales de una teoría de este tipo dan lugar a restricciones muy fuertes sobre la masa del fotón[?]. El límite actual sobre la masa del fotón es $m < 6 \times 10^{-17}$ eV (1.1×10^{-52} Kg) [?]. Debido al principio gauge local, desde el punto teórico se espera que la masa del fotón sea exactamente cero. En general, los campos vectoriales pueden ser generados a partir de otras cargas no electromagnéticas y pueden ser masivos. El reto durante varias décadas fue entender como la masa de los campos vectoriales de la interacción débil podría hacerse compatible con el principio gauge local.

Además, el Lagrangiano libre se puede reescribir como la suma de cuatro lagrangianos independientes para cada campo $\phi = A^0, A^i$:

$$\mathcal{L}_{\text{free}} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A^\nu \partial^\mu A_\nu + \frac{1}{2}m^2 A^\nu A_\nu$$

$$= -\frac{1}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi + \frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{2}\partial_\mu\mathbf{A} \cdot \partial^\mu\mathbf{A} - \frac{1}{2}m^2\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}. \quad (384)$$

Ya estamos en capacidad de responder la siguiente pregunta: ¿Cual es el Lagrangiano más general posible para el campo de cuatro componentes $A^\mu(x)$ compatible con la invarianza de Lorentz
Las correspondientes transformaciones son

$$A^\mu(x) \rightarrow A'^\mu(x') = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu(\Lambda^{-1}x). \quad (385)$$

Además, tenemos la ec.(??):

$$A^\mu \rightarrow A'^\mu = A^\mu - \partial^\mu \chi(x). \quad (386)$$

Definiendo

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu$$

$$G^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu + \partial^\nu A^\mu$$

El Lagrangiano que da lugar a una Acción invariante de Lorentz para el cuadrivector A^μ es, hasta derivadas totales y potencias en los campos de hasta dimensión 4:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu} - \frac{1}{2}F^{\mu\nu}G_{\mu\nu} \\ & - J^\mu A_\mu + \frac{1}{2}m^2 A^\mu A_\mu + \lambda_1 \partial_\nu A^\nu(x) A_\mu(x) A^\mu(x) + \lambda_2 A^\mu A_\mu A^\nu A_\nu \\ & + \lambda_3 F^{\mu\nu}(x) A_\mu(x) A_\nu(x) + \lambda_4 G^{\mu\nu}(x) A_\mu(x) A_\nu + \dots\end{aligned}\tag{387}$$

Principio gauge local

Hemos introducido ya todos los ingredientes necesarios para entender a nivel cualitativo el modelo estándar de las partículas elementales. Para permitir simetrías internas más generales que el simple cambio de fase es necesario usar siempre el hermítico conjugado, en lugar de sólo el conjugado. Con esta notación un conjunto de f fermiones (izquierdos) que conservan localmente n cargas, deben interactuar a través de $a = n^2 - 1$ bosones gauge. Si además alguno de ellos es masivo, debemos introducir por lo menos un campo escalar. Un Lagrangiano para tal sistema debe tener la forma genérica

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & i\psi_f^\dagger \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu \psi^f - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} \\
 & + (\mathcal{D}_\mu \phi)^\dagger \mathcal{D}^\mu \phi - \mu^2 \phi^\dagger \phi - \lambda (\phi^\dagger \phi)^2 \\
 & + h^{fg} (\psi_f \psi_g \phi + \text{h.c.})
 \end{aligned} \tag{388}$$

A continuación veremos cual es la forma explícita de la derivada covariante para cada una de las

interacciones fundamentales.

Para hacer el Lagrangiano en ec. (328) invariante gauge local bajo $U(1)_Q$, procedemos de la forma usual. El campo transforma como¹

$$\begin{aligned}\psi &\rightarrow \psi' = e^{iQ\theta(x)} \psi \\ \bar{\psi} &\rightarrow \bar{\psi}' = \bar{\psi} e^{-iQ\theta(x)},\end{aligned}\tag{389}$$

donde Q es el generador de carga eléctrica en unidades de la carga del electrón.

La derivada covariante se define de manera que transforma de la misma forma que el campo, introduciendo el campo gauge A^μ

$$\partial_\mu \rightarrow \mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ieQA_\mu,\tag{390}$$

tal que

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu \theta(x).\tag{391}$$

donde e es la carga eléctrica del electrón. De esta forma, si ψ_e es el campo que representa al electrón

$$Q\psi_e = -e\psi_e.\tag{392}$$

En efecto

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\mu \psi &\rightarrow (\mathcal{D}_\mu \psi)' = \mathcal{D}'_\mu \psi' \\ &= e^{iQ\theta(x)} \mathcal{D}_\mu \psi ,\end{aligned}\tag{393}$$

como corresponde a una derivada covariante. Para mayor generalidad de los resultados, definimos un elemento de $U(1)_Q$ como

$$U(\theta) = e^{iQ\theta(x)} .\tag{394}$$

Repetimos a continuación el análisis hecho en la Sección ?? pero haciendo referencia sólo a los resultados. Para los detalles se recomienda ir a dicha Sección. De este modo, la derivada covariante se puede definir como

$$\mathcal{D}_\mu \psi \rightarrow (\mathcal{D}_\mu \psi)' = U(\mathcal{D}_\mu \psi) .\tag{395}$$

Para encontrar las propiedades de la derivada covariante en este contexto general, necesitamos evaluar cual es la transformación de la derivada covariante como tal, es decir

$$(\mathcal{D}_\mu \psi)' = \mathcal{D}'_\mu \psi' = U(\mathcal{D}_\mu \psi)$$

$$\mathcal{D}'_{\mu}(U\psi) = U(\mathcal{D}_{\mu}\psi) . \quad (396)$$

Si mantenemos en mente que $\mathcal{D}'_{\mu}U$ es todavía un operador, tenemos que

$$\begin{aligned} \mathcal{D}'_{\mu}U &= U\mathcal{D}_{\mu} \\ \mathcal{D}'_{\mu} &= U\mathcal{D}_{\mu}U^{-1} . \end{aligned} \quad (397)$$

Es decir, para comprobar esta identidad, debemos aplicar el nuevo operador sobre algún campo. Para mantener la generalidad del resultado evitaremos usar la propiedad conmutativa del algún grupo particular. Al aplicar la derivada covariante en un campo, en interpretándola como un operador, tenemos que

$$\mathcal{D}'_{\mu}\psi = U\mathcal{D}_{\mu}(U^{-1}\psi) ,$$

da lugar a la propiedad

$$\partial_{\mu}\psi - ieQA'_{\mu}\psi = \partial_{\mu}\psi + U(\partial_{\mu}U^{-1})\psi - ieQUA_{\mu}U^{-1}\psi . \quad (398)$$

Después de cancelar el término $\partial_\mu \psi$ en ambos lados, y factorizando el campo ψ , tenemos que

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = UA_\mu U^{-1} + \frac{i}{eQ} U (\partial_\mu U^{-1}) . \quad (399)$$

Esta expresión es completamente general y será usada posteriormente en el contexto de grupos más complicados. En el caso particular de un Grupo Abelianiano $U(1)$, tenemos simplemente que

$$A_\mu \rightarrow A'_\mu = A_\mu - \frac{1}{e} \partial_\mu \theta(x) . \quad (400)$$

El Lagrangiano de Dirac invariante gauge local se obtiene reemplazando la derivada normal por la derivada covariante. Para el campo electrónico $Q = -1$

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi} (i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m) \psi + \mathcal{L}(\partial_\mu A_\nu) \\ &= \bar{\psi} [i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieQA_\mu) - m] \psi - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \\ &= i\bar{\psi} \gamma^\mu \partial_\mu \psi - e\bar{\psi} \gamma^\mu \psi A_\mu - m\bar{\psi} \psi + -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} . \end{aligned} \quad (401)$$

Este Lagrangia da lugar a una Acción que define una teoría completa correspondiente a la electrodinámica cuántica (QED de sus siglas en ingles)

Retomando los resultados para las corrientes conservadas de la Sección ??, aplicamos el segundo teorema de Noether, para una transformación $\psi \rightarrow \psi' = e^{iq\theta(x)} \psi$, donde $q = \text{cte}$

$$\begin{aligned}\phi_1 : \psi, & \quad a_1 = iq\psi, & \quad b_1 = 0 \\ \phi_2 : \psi^*, & \quad a_2 = -iq\psi^*, & \quad b_2 = 0 \\ \phi_3 : A^\mu, & \quad a_3 = 0, & \quad b_3 = -\delta^\mu_\nu,\end{aligned}\tag{402}$$

establezca el segundo teorema de Noether

$$\begin{aligned}\sum_i \mathcal{E}_i a_i &= \sum_i \partial_\mu (\mathcal{E}_i b_i^\mu) \\ \mathcal{E}_1 a_1 + \mathcal{E}_2 a_2 &= \partial_\mu (\mathcal{E}_3 b_3^\mu).\end{aligned}\tag{403}$$

Usando las ecuaciones de Euler-Lagranga para cada uno de los campos, tenemos

$$\left\{ \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} \right\} a_1 + a_2 \left\{ \cancel{\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})} \right]} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} \right\} = \partial_\mu \left[\cancel{\partial_\nu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right]} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \right]$$

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \right] a_1 - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} a_1 - a_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = -\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\mu} \right). \quad (404)$$

aplicando la regla de la cadena, y usando la definición de j^μ dada en la ec. (335)

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} a_1 \right] - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \partial_\mu a_1 - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} a_1 - a_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = \partial_\mu j^\mu. \quad (405)$$

Para establecer el segundo teorema de Noether para la electrodinámica cuántica, debemos establecer la identidad general (242), que en este caso se reduce

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \partial_\mu a_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} a_1 + a_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} = 0. \quad (406)$$

De hecho

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} \partial_\mu a_1 + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi} a_1 + a_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \bar{\psi}} \\ &= i\bar{\psi} \gamma^\mu (iq \partial_\mu \psi) - e\bar{\psi} \gamma^\mu (iq \psi) A_\mu - m\bar{\psi} (iq \psi) \\ & \quad + (-iq\bar{\psi}) (i\gamma^\mu \partial_\mu \psi) + (-iq\bar{\psi}) (-e\gamma^\mu \psi A_\mu) + (-iq\bar{\psi}) (-m\psi) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\bar{q}\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi + \bar{q}\psi\gamma^\mu\partial_\mu\psi - ieq\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu + ieq\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - iqm\bar{\psi}\psi + iqm\bar{\psi}\psi \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{407}$$

de modo que

$$\partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} a_1 \right] = \partial_\mu j^\mu. \tag{408}$$

Tenemos entonces que la cuadricorriente para la QED es

$$j^\mu = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} a_i, \tag{409}$$

donde habíamos establecido, ver ec. (344), que j^μ debe ser una cuadricorriente conservada

$$\partial_\mu j^\mu = 0. \tag{410}$$

El cálculo general de la corriente a partir de la identidad (242), es

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} a_1 + a_2 \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \bar{\psi})}$$

$$= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} a_1 . \quad (411)$$

Consistente con la demostración previa.

Como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \psi)} = i \bar{\psi} \gamma^\mu , \quad (412)$$

usando el a_1 de la ec. (402), tenemos que

$$j^\mu = -e \bar{\psi} \gamma^\mu Q \psi , \quad (413)$$

que corresponde a la cuadri-corriente electromagnética conservada localmente de la electrodinámica cuántica.

El segundo teorema de Noether para la QED es perfectamente consistente con el campo de radiación. Por ejemplo, la identidad resultante

$$\partial_\mu \partial_\rho \left[\frac{\mathcal{L}}{\partial (\partial \partial_\rho A_\mu)} \right] = 0 , \quad (414)$$

se puede interpretar como la necesidad de introducir el tensor antisimétrico

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\nu A_\mu)}, \quad (415)$$

tal que

$$\partial_\mu \partial_\nu F^{\mu\nu} = 0. \quad (416)$$

Para obtener una forma para $F_{\mu\nu}$, es conveniente imponer que la densidad Lagrangiana asociada sólo a las nuevas contribuciones de los campos A_ν y sus derivadas $\partial_\mu A_\nu$, denotada como $\mathcal{L}(\partial_\mu A_\nu)$, sean invariantes bajo la transformación gauge local del campo A_μ en (??). Esto implica que $\mathcal{L}(\partial_\mu A_\nu)$ solo puede depender de las derivadas de los campos, y por consiguiente $F^{\mu\nu}$ debe ser una combinación antisimétrica de las derivadas de los campos

$$F_{\mu\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (417)$$

Con esta definición, bajo la transformación (??)

$$F_{\mu\nu} \rightarrow F'_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}. \quad (418)$$

Por consiguiente, el único término posible que a la vez es invariante de Lorentz e invariante gauge local es

$$\mathcal{L}(\partial_\mu A_\nu) = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}. \quad (419)$$

El Lagrangiano correspondiente a la interacción de un fermión y el campo electromagnético corresponde al Lagrangiano de Dirac con la derivada normal reemplazada por la derivada covariante, y el correspondiente término cinético invariante gauge y de Lorentz asociado al nuevo campo introducido en la derivada covariante: A^μ . Este campo es necesario para compensar los cambios en la energía y momentum que sufre el electrón como consecuencia de imponer la invarianza de la Acción bajo un cambio de fase local

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \quad (420)$$

y es invariante bajo transformaciones locales $U(1)_Q$. Desarrollando la expresión anterior, tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \bar{\psi}[i\gamma^\mu(\partial_\mu - ieQA_\mu) - m]\psi - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\ &= \bar{\psi}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi + eQ\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (421)$$

Este Lagrangiano da lugar a la Acción de la teoría conocida como Electrodinámica Cuántica (QED de sus siglas en inglés). Para el Lagrangiano de un espinor Weyl izquierdo ξ_α , el término de masa esta prohibido por la invarianza gaige, y cambiando $\bar{\psi}\gamma^\mu \rightarrow \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu$, siguiendo los mismos pasos llegaríamos a

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu \xi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ &= i\xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \xi + eQ \xi^\dagger \bar{\sigma}^\mu \xi A_\mu - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}.\end{aligned}\tag{422}$$

Aplicando las ecuaciones de Euler-Lagrange para $\bar{\psi}$, tenemos

$$\begin{aligned}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi + eQ\gamma^\mu A_\mu \psi &= 0 \\ (i\gamma^\mu \partial_\mu - i^2 eQ\gamma^\mu A_\mu - m)\psi &= 0 \\ [i\gamma^\mu (\partial_\mu - ieQA_\mu) - m]\psi &= 0 \\ (i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\psi &= 0.\end{aligned}\tag{423}$$

Que corresponde a la ecuación de Dirac en presencia del campo electromagnético. Mientras que para el campo A^μ , tenemos

$$-\frac{1}{4}\partial_\mu \left[\frac{F^{\rho\eta} F_{\rho\eta}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} \right] - eQ\bar{\psi}\gamma^\rho\psi \frac{\partial A_\rho}{\partial A_\nu} = 0$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = -eQ\bar{\psi}\gamma^\nu\psi \quad (424)$$

Definimos entonces la corriente electromagnética generada por el fermión como

$$j^\mu = -e\bar{\psi}\gamma^\mu Q\psi$$

$$= e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi, \quad (425)$$

donde hemos interpretado a Q como el operador de carga eléctrica con autovalor -1 para el electrón:

$$Q\psi = -1\psi. \quad (426)$$

De nuevo, la aparición de la interacción electromagnética es una consecuencia de la invarianza gauge local.

¹A partir de ahora se usará ψ (minúscula) para denotar un fermión de Dirac.

De esta manera podemos reescribir el Lagrangiano en términos de un Lagrangiano libre y otro de interacción

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{int}} , \quad (427)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{free}} &= i\bar{\psi} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m) \psi - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \\ \mathcal{L}_{\text{int}} &= eQ\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu . \end{aligned} \quad (428)$$

Para la QED sólo hay un término de interacción que es suficiente para explicar todos los fenómenos electromagnéticos y su interacción con la materia. Este esta representado por el diagrama de Feynman mostrado en la Figura 5

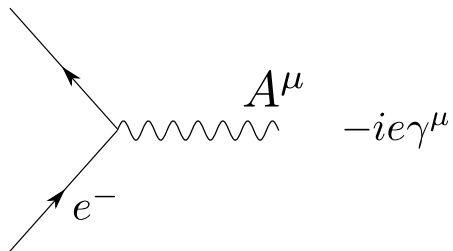


Figura: Feynman rule for QED

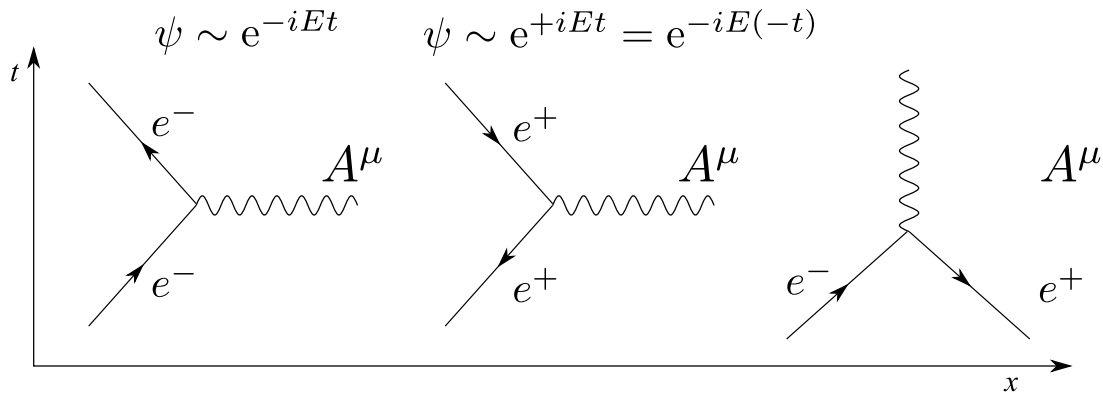


Figura: Configurations of Feynman rule for QED. The defined positive energy particles (antiparticles) travel in the same (opposite) direction that time.

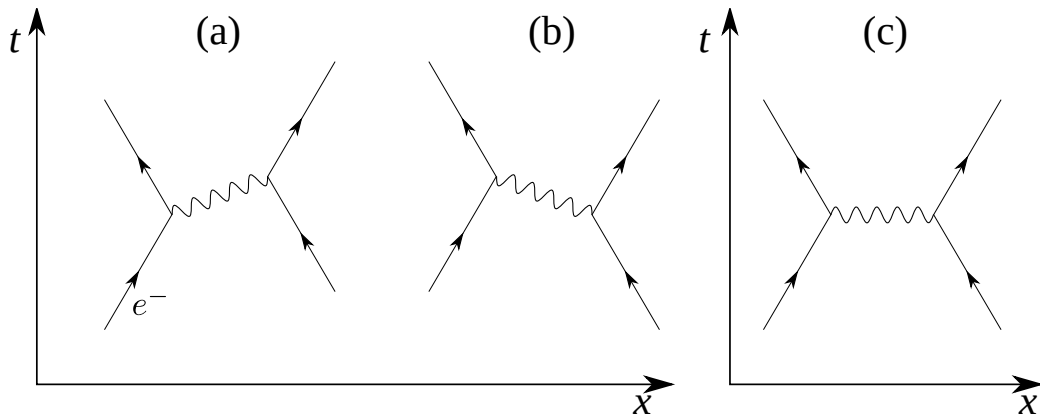


Figura: Electromagnetic repulsion. The diagrams (a) and (b) are summarized in the diagram (c)

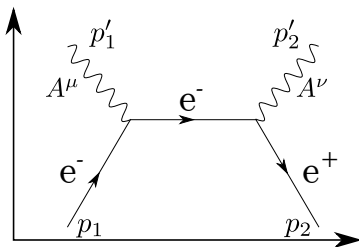


Figura: Momentum conservation force annihilation into two photons

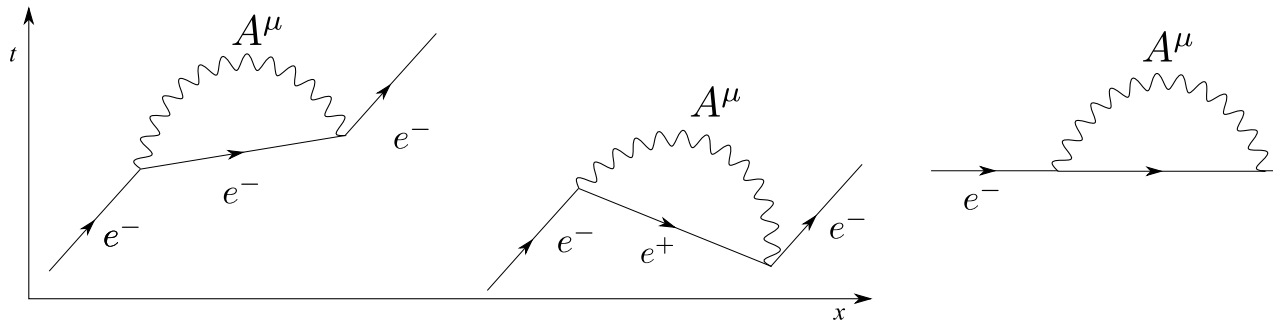


Figura: Electron self-energy

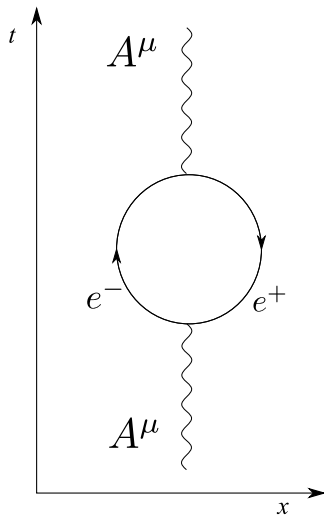


Figura: Vacuum polarization

El límite no relativista de dicho Hamiltoniano es obtenido en la Apéndice ???. El resultado es

$$\hat{H}\psi = \left[\frac{1}{2m}(i\nabla + q\mathbf{A})^2 + qA_0 - \left(\frac{q\boldsymbol{\sigma}}{2m} \right) \cdot \mathbf{B} \right] \psi. \quad (429)$$

Definimos entonces el momento magnético intrínseco como ($q = -e$)

$$\begin{aligned}
 \mu_e &= -\frac{e\sigma}{2m} \\
 &= -2 \left(\frac{e}{2m} \right) \frac{\sigma}{2} \\
 &= -2 \left(\frac{e\hbar}{2m} \right) \frac{\sigma}{2} \\
 &= -g_e \left(\frac{e\hbar}{2m} \right) \frac{\sigma}{2}
 \end{aligned}
 \tag{430}$$

donde hemos recuperado el factor \hbar y definido el *factor-g* [?], $g_e = 2$. Se define el momento magnético anómalo del electrón como

$$a_e = \frac{g_e - 2}{2} \tag{431}$$

de modo que $a_e = 0$. Sin embargo experimentalmente $a_e \sim 10^{-3}$

$$a_e = 0.001\,159\,652\,1859(38) \tag{432}$$

Algunas de las cientos de miles de contribuciones, se ilustran en la figura 11, tomada de la referencia [?]

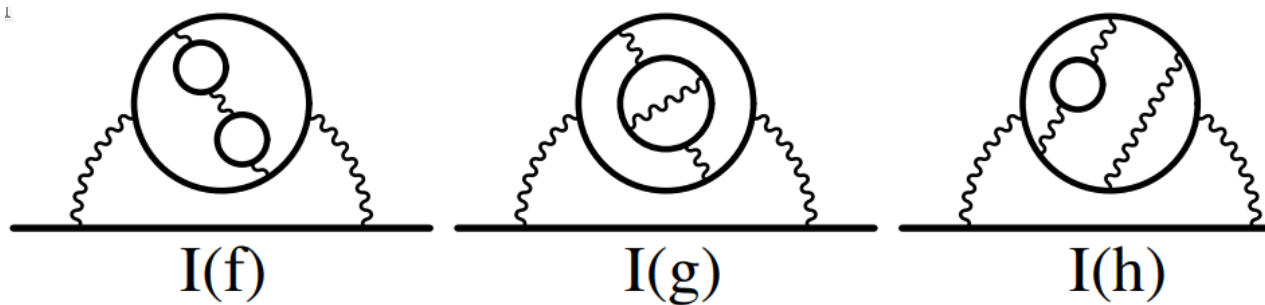


Figura: Some five-loop correction from [?]

$$\begin{aligned}
\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu &= \xi^\dagger\bar{\sigma}^\mu\xi A_\mu + \eta\sigma^\mu\eta^\dagger A_\mu \\
&= (e_L)^\dagger\bar{\sigma}^\mu e_L A_\mu + (e_R)^\dagger\sigma^\mu e_R A_\mu,
\end{aligned}
\tag{433}$$

de modo que el fotón se acopla por igual a los campos izquierdos que a los derechos. El Lagrangiano de la QED en términos de espinores de Weyl es:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= i(e_L)^\dagger\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu e_L A_\mu + i(e_R)^\dagger\sigma^\mu\partial_\mu e_R - m \left[(e_R)^\dagger e_L + (e_L)^\dagger e_R \right] - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} \\
&\quad + eQ \left[(e_L)^\dagger\bar{\sigma}^\mu e_L + (e_R)^\dagger\sigma^\mu e_R \right] A_\mu
\end{aligned}
\tag{434}$$

$$\sigma(e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-) \quad (435)$$

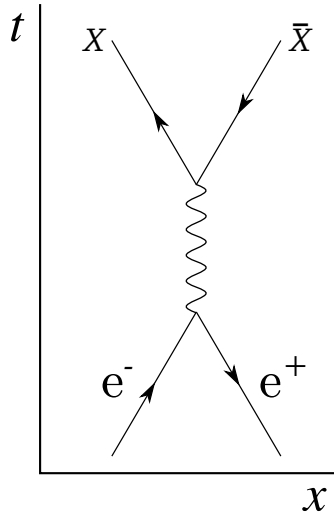


Figura: Diagrama de Feynman para la aniquilación electrón-positron y la subsecuente creación de un par partícula-antipartícula de acuerdo a la energía disponible

Leptons

Name	Symbol	Antiparticle	Charge (e)	Mass (MeV/c ²)
Electron	e^-	e^+	-1	0.511
Electron neutrino	ν_e	$\bar{\nu}_e$	0	< 0.000 0022
Muon	μ^-	μ^+	-1	105.7
Muon neutrino	ν_μ	$\bar{\nu}_\mu$	0	< 0.170
Tau	τ^-	τ^+	-1	1,777
Tau neutrino	ν_τ	$\bar{\nu}_\tau$	0	< 15.5

Figura: Leptones de: http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_particles

Quarks

Name ♦	Symbol ♦	Antiparticle ♦	Charge (e) ♦	Mass (MeV/c ²) ♦
up	u	\bar{u}	$+\frac{2}{3}$	1.5-3.3
down	d	\bar{d}	$-\frac{1}{3}$	3.5-6.0
charm	c	\bar{c}	$+\frac{2}{3}$	1,160-1,340
strange	s	\bar{s}	$-\frac{1}{3}$	70-130
top	t	\bar{t}	$+\frac{2}{3}$	169,100-173,300
bottom	b	\bar{b}	$-\frac{1}{3}$	4,130-4,370

Figura: Quarks de: http://en.wikipedia.org/wiki/List_of_particles

Particle name	Symbol ⇅	Quark content ⇅	Rest mass (MeV/c^2) ⇅
proton ^[8]	p, p^+ , N^+	uud	$938.272\,046(21)^{[a]}$
neutron ^[9]	n, n^0 , N^0	udd	$939.565\,379(21)^{[a]}$
Delta ^[29]	$\Delta^{++}(1232)$	uuu	1232 ± 2
Delta ^[29]	$\Delta^+(1232)$	uud	1232 ± 2
Delta ^[29]	$\Delta^0(1232)$	udd	1232 ± 2
Delta ^[29]	$\Delta^-(1232)$	ddd	1232 ± 2

Particle name	Particle symbol ⇄	Antiparticle symbol ⇄	Quark content	Rest mass (MeV/c ²) ⇄
Pion ^[11]	π^+	π^-	$u\bar{d}$	$139.570\,18 \pm 0.000\,35$
Pion ^[12]	π^0	Self	$\frac{u\bar{u}-d\bar{d}}{\sqrt{2}}$ [a]	134.9766 ± 0.0006

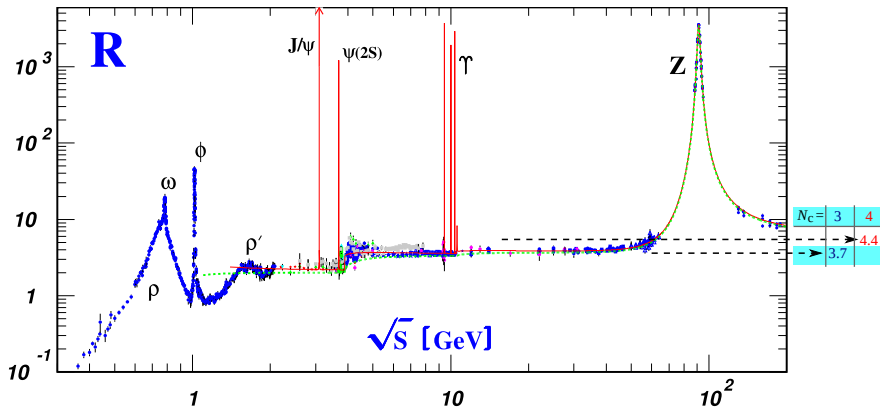
Figura: Algunos bariones y mesones de la primera generación de quarks

Una lista completa de bariones está en: https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_baryons²

Una lista completa de mesones está en: https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_mesons³

²http://pdg.lbl.gov/2019/tables/contents_tables_baryons.html

³http://pdg.lbl.gov/2019/tables/contents_tables_mesons.html

Figura: Datos para R

Si queremos que el color sea una carga conservada como la carga eléctrica, ésta debe ser la consecuencia de una simetría gauge local. Para tener tres cargas diferentes la posibilidad más simple es imponer la simetría $SU(3)_c$, tal que tengamos un vector compuesto de 3 espinores de Dirac en el espacio de color:

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_r \\ \psi_b \\ \psi_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_r \\ q_b \\ q_g \end{pmatrix} \quad q = u, d, c, s, t, b. \quad (436)$$

La transformación gauge local bajo $SU(3)$ es

$$\Psi \rightarrow \Psi' = \exp \left(i\theta_a(x) \frac{\lambda^a}{2} \right) \Psi. \quad (437)$$

donde $a = 1, \dots, 8$, $\lambda_a/2$ son los ocho generadores de $SU(3)$ y $\theta_a(x)$ son los parámetros de la transformación global. Los generadores de $SU(3)$

$$\Lambda^a \equiv \frac{\lambda^a}{2}, \quad (438)$$

satisfacen el álgebra

$$\left[\frac{\lambda^a}{2}, \frac{\lambda^b}{2} \right] = if^{abc} \frac{\lambda^c}{2}, \quad (439)$$

donde f^{abc} son las constantes de estructura fina de $SU(3)$.

$$\mathcal{L}_{\text{local}} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu\mathcal{D}_\mu\Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \mathcal{L}(G_a^\nu, \partial_\mu G_a^\nu) . \quad (440)$$

donde

$$\begin{aligned} \Psi &\rightarrow \Psi' = U(x)\Psi \\ \mathcal{D}_\mu\Psi &\rightarrow (\mathcal{D}_\mu\Psi)' = U(x)\mathcal{D}_\mu\Psi, \end{aligned} \quad (441)$$

con la matriz 3×3

$$U(x) = \exp\left[i\theta_a(x)\frac{\lambda^a}{2}\right], \quad (442)$$

y

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ig_s\frac{\lambda_a}{2}G_\mu^a \equiv \partial_\mu - ig_s G_\mu \quad (443)$$

donde hemos definido la matriz 3×3 G_μ , como

$$(G_\mu)_{\alpha\beta} = \left(\frac{\lambda_a}{2}\right)_{\alpha\beta} G_\mu^a \quad (444)$$

Como U es unitaria, la transformación de los campos gauge puede escribirse como

$$G^\mu \rightarrow (G^\mu)' = U G^\mu U^\dagger - \frac{i}{g_s} (\partial^\mu U) U^\dagger. \quad (445)$$

Entonces

$$\begin{aligned} \Lambda^a G'^\mu_a &\approx (1 + i\theta_b \Lambda^b) \Lambda^c G^\mu_c (1 - i\theta_d \Lambda^d) - \frac{i}{g_s} [i(\partial^\mu \theta_e) \Lambda^e (1 - i\theta_f \Lambda^f)] \\ &= (\Lambda^c + i\theta_b \Lambda^b \Lambda^c) (1 - i\theta_d \Lambda^d) G^\mu_c - \frac{i}{g_s} [i(\partial^\mu \theta_e) \Lambda^e (1 - i\theta_f \Lambda^f)] \\ &\approx [\Lambda^c - i\theta_d \Lambda^c \Lambda^d + i\theta_b \Lambda^b \Lambda^c] G^\mu_c + \frac{1}{g_s} \Lambda^e \partial^\mu \theta_e \\ &= [\Lambda^c - i\theta_b (\Lambda^c \Lambda^b - \Lambda^b \Lambda^c)] G^\mu_c + \frac{1}{g_s} \Lambda^e \partial^\mu \theta_e \\ &= \Lambda^a G^\mu_a - i(f^{acb} \Lambda^a) G^\mu_c \theta_b + \frac{1}{g_s} \Lambda^a \partial^\mu \theta_a \\ &= \Lambda^a \left(G^\mu_a + \frac{1}{g_s} \partial^\mu \theta_a + f^{acb} G^\mu_c \theta_b \right), \end{aligned} \quad (446)$$

de donde

$$G_a^\mu \rightarrow G'^\mu_a \approx G_a^\mu + \frac{1}{g_s} \partial^\mu \theta_a + f_a^{bc} G_b^\mu \theta_c, \quad (447)$$

que se reduce al caso Abelian cuando las constantes de estructura son cero. Como era de esperarse cada campo gauge tiene asociado un parámetro de transformación gauge $\theta_a(x)$.

QED	QCD	Diferencia
$\bar{\psi}(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\psi + \mathcal{L}(A_\nu, \partial A_\nu)$	$\bar{\Psi}(i\gamma^\mu \mathcal{D}_\mu - m)\Psi + \mathcal{L}(G_\nu, \partial G_\nu)$	$1 \times 1 \rightarrow 3 \times 3: (\mathcal{D}_\mu)$
$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ieA_\mu$	$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu - ig_s G_\mu$	$1 \times 1 \rightarrow 3 \times 3: (A_\mu \rightarrow G_\mu)$
$A_\mu \rightarrow \hat{Q}A_\mu$	$G_\mu = \Lambda_a G_\mu^a, \quad a = 1, \dots, 8$	$1 \times 1 \rightarrow 3 \times 3: (\hat{Q} \rightarrow \Lambda_a)$
A_μ	G_μ^1, \dots, G_μ^8	$1 \rightarrow 8$ (Gauge fields)
$A^\mu \rightarrow A'^\mu = UA^\mu U^* - \frac{i}{e}(\partial^\mu U)U^*$	$G^\mu \rightarrow G'^\mu = UG^\mu U^\dagger - \frac{i}{g_s}(\partial^\mu U)U^\dagger$	$1 \times 1 \rightarrow 3 \times 3: (U)$
$U = \exp(i\hat{Q}\theta)$	$U = \exp(i\Lambda_a \theta^a)$	$1 \rightarrow 8: (\theta \rightarrow \theta_1, \dots, \theta_8)$
$A^\mu \rightarrow A'^\mu_a \approx A^\mu + \frac{1}{e}\partial^\mu \theta$	$G_a^\mu \rightarrow G'^\mu_a \approx G_a^\mu + \frac{1}{g_s}\partial^\mu \theta_a + f_a^{bc} G_b^\mu \theta_c$	radiación → radiación-materia
$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx 1/137$	$\alpha_s = \frac{g_s^2}{4\pi} > 1$	perturbativa → no perturbativa

Tabla: Comparación entre la QED y la QCD

Note entonces que en el lenguaje de los teoremas de Noether, el campo G_a^μ transforma como un campo material y un campo de radiación a la vez, es decir, su transformación depende tanto del parámetro como de la derivada del parámetro. Por consiguiente, es conveniente definir la derivada covariante del campo G_a^ν . Para ello se debe introducir la representación adjunta de $SU(N)$.

La representación adjunta de $SU(3)$, consiste en las 8 matrices 8×8

$$\left[\tilde{\Lambda}^a\right]_{bc} = -if^a_{bc} . \quad (448)$$

Ejemplo: Definiendo Σ_i como las matrices 3×3 generadores de $SU(2)$ en la representación adjunta

$$(\Sigma_i)_{jk} = -i\epsilon_{ijk} , \quad (449)$$

hemos comprobado en la ec. (??) que

$$\begin{aligned} [\Sigma_i, \Sigma_j] &= i\epsilon_{ijk} \Sigma_k \\ [\Sigma_i, \Sigma_j]_{lm} &= i\epsilon_{ijk} (\Sigma_k)_{lm} . \end{aligned} \quad (450)$$

Ejercicio: Demostar que la representación adjunta satisface el álgebra de $SU(3)$.

La derivada covariante en la representación adjunta es

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\mu &= \mathbf{1}\partial_\mu - ig_s \mathbb{G}_\mu \\ &= \mathbf{1}\partial_\mu - ig_s \tilde{\Lambda}_a G_\mu^a,\end{aligned}\tag{451}$$

donde

$$\mathbb{G}_\mu \equiv \tilde{\Lambda}_a G_\mu^a,\tag{452}$$

es ahora una matriz 8×8 de campos de gluones en la representación adjunta. En componentes

$$\begin{aligned}[\mathcal{D}_\mu]_c^b &= \delta_c^b \partial_\mu - ig_s \left[\tilde{\Lambda}_a G_\mu^a \right]_c^b \\ &= \delta_c^b \partial_\mu - g_s f_a^{bc} G_\mu^a.\end{aligned}\tag{453}$$

Esta derivada se puede aplicar a la matriz de campo de gluones:

$$\mathcal{D}_\mu \mathbb{G}_\nu = (\mathbf{1}\partial_\mu - ig_s \mathbb{G}_\mu) \mathbb{G}_\nu\tag{454}$$

o en componentes

$$\begin{aligned}
 [\mathcal{D}_\mu]_b^a [\mathbb{G}_\nu]_c^b &= (\delta_b^a \partial_\mu - ig_s [\mathbb{G}_\mu]_b^a) [\mathbb{G}_\nu]_c^b \\
 &= \left(\delta_b^a \partial_\mu - ig_s \left[\tilde{\Lambda}_c \right]_b^a G_\mu^c \right) \left[\tilde{\Lambda}_d \right]_c^b G_\nu^d .
 \end{aligned}
 \tag{455}$$

entonces

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_\mu \mathbb{G}_\nu &\rightarrow (\mathcal{D}_\mu \mathbb{G}_\nu)' = \tilde{U} [(\partial_\mu - ig_s \mathbb{G}_\mu) \mathbb{G}_\nu] \tilde{U}^\dagger + \tilde{U} \left[\mathbb{G}_\nu \partial_\mu + \mathbb{G}_\mu \partial_\nu + \frac{i}{g_s} \partial_\mu \partial_\nu \right] \tilde{U}^\dagger \\ &= \tilde{U} (\mathcal{D}_\mu \mathbb{G}_\nu) \tilde{U}^\dagger + \tilde{U} \left[\mathbb{G}_\nu \partial_\mu + \mathbb{G}_\mu \partial_\nu + \frac{i}{g_s} \partial_\mu \partial_\nu \right] \tilde{U}^\dagger.\end{aligned}\quad (456)$$

Por consiguiente, la “derivada covariante” de la matriz del campo de gluones no transforma como la la matriz del campo de gluones. Una discusión al respecto se puede encontrar en [?].

Note que si definimos la matriz de tensores de campos de gluones como

$$\mathbb{G}_{\mu\nu} \equiv \mathcal{D}_\mu \mathbb{G}_\nu - \mathcal{D}_\nu \mathbb{G}_\mu \quad (457)$$

entonces,

$$\mathbb{G}_{\mu\nu} \rightarrow \mathbb{G}'_{\mu\nu} = (\mathcal{D}_\mu \mathbb{G}_\nu)' - (\mathcal{D}_\nu \mathbb{G}_\mu)' , \quad (458)$$

y usando (456) da lugar a

$$\mathbb{G}_{\mu\nu} \rightarrow \mathbb{G}'_{\mu\nu} = \tilde{U} \left\{ (\mathcal{D}_\mu \mathbb{G}_\nu) + \left[\mathbb{G}_\nu \partial_\mu + \mathbb{G}_\mu \partial_\nu + \frac{i}{g_s} \partial_\mu \partial_\nu \right] - (\mathcal{D}_\nu \mathbb{G}_\mu) - \left[\mathbb{G}_\mu \partial_\nu - \mathbb{G}_\nu \partial_\mu - \frac{i}{g_s} \partial_\nu \partial_\mu \right] \right\} \tilde{U}^\dagger$$

$$\begin{aligned}
&= \tilde{U} [\mathcal{D}_\mu \mathbb{G}_\nu - \mathcal{D}_\nu \mathbb{G}_\mu] \tilde{U}^\dagger \\
&= \tilde{U} \mathbb{G}_{\mu\nu} \tilde{U}^\dagger.
\end{aligned} \tag{459}$$

Esto es justo lo que se espera de la transformación de un tensor para un grupo de simetría continuo. Como hemos visto en el caso electromagnético, para demostrar la invarianza del Lagrangiano electromagnético en la ec. (??), es necesario que en efecto el tensor electromagnético transforme como un tensor en el espacio de Lorentz:

$$F_{\mu\nu}(x) \rightarrow F'_{\mu\nu}(x) = \Lambda_\mu^\alpha F_{\alpha\beta} (\Lambda^{-1}x) (\Lambda^{-1})^\beta{}_\nu. \tag{460}$$

Sin embargo, para el tensor electromagnético la transformación bajo $U(1)_Q$ es trivial. Retornado a la definición la matriz de tensores de campos gauge para una teoría no Abelianas $SU(3)$, si imponemos que la derivada covariante de $\mathbb{G}_{\mu\nu}$ transforme como $\mathbb{G}_{\mu\nu}^4$

$$\mathcal{D}_\mu \mathbb{G}^{\mu\nu} \rightarrow (\mathcal{D}_\mu \mathbb{G}^{\mu\nu})' = \tilde{U} (\mathcal{D}_\mu \mathbb{G}^{\mu\nu}) \tilde{U}^\dagger, \tag{461}$$

entonces

$$\mathcal{D}'_\mu \mathbb{G}'^{\mu\nu} = \tilde{U} \mathcal{D}_\mu \mathbb{G}^{\mu\nu} \tilde{U}^\dagger$$

$$\begin{aligned}
&= \tilde{U} \mathcal{D}_\mu \tilde{U}^\dagger \tilde{U} \mathbb{G}^{\mu\nu} \tilde{U}^\dagger \\
&= \tilde{U} \mathcal{D}_\mu \tilde{U}^\dagger \mathbb{G}'^{\mu\nu},
\end{aligned} \tag{462}$$

y obtenemos que

$$\mathcal{D}^\mu \rightarrow \mathcal{D}'^\mu = \tilde{U} \mathcal{D}^\mu \tilde{U}^\dagger. \tag{463}$$

Como se hizo antes, de esta propiedad se puede obtener la transformación de la matriz de gluones pero ahora en la representación adjunta:

$$\mathbb{G}^\mu \rightarrow \mathbb{G}'^\mu = -\frac{i}{g_s} (\partial^\mu \tilde{U}) \tilde{U}^{-1} + \tilde{U} \mathbb{G}^\mu \tilde{U}^{-1}. \tag{464}$$

De modo que es consistente asumir que la transformación de la matriz de campo \mathbb{G}^μ es independiente de la representación, como se hizo explícitamente en (??).

Tenemos entonces que

$$\begin{aligned}
\mathbb{G}_{\mu\nu} &\equiv \mathcal{D}_\mu \mathbb{G}_\nu - \mathcal{D}_\nu \mathbb{G}_\mu \\
&= (\mathbf{1} \partial_\mu - i g_s \mathbb{G}_\mu) \mathbb{G}_\nu - (\mathbf{1} \partial_\nu - i g_s \mathbb{G}_\nu) \mathbb{G}_\mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \partial_\mu \mathbb{G}_\nu - \partial_\nu \mathbb{G}_\mu - ig_s (\mathbb{G}_\mu \mathbb{G}_\nu - \mathbb{G}_\nu \mathbb{G}_\mu) \\
&= \partial_\mu \mathbb{G}_\nu - \partial_\nu \mathbb{G}_\mu - ig_s [\mathbb{G}_\mu, \mathbb{G}_\nu].
\end{aligned} \tag{465}$$

Note que en el caso Abelian, la matriz del único tensor es 1×1 y por lo tanto el conmutador es cero, recobrando la definición usual del tensor de campo electromagnético.

Es conveniente definir los *tensores cromodinámicos*, $G_a^{\mu\nu}$, tal que su combinación lineal con los generadores de $SU(3)$ generen la matriz de tensores de campos de gluones:

$$\mathbb{G}^{\mu\nu} = \tilde{\Lambda}^a G_a^{\mu\nu} \tag{466}$$

De esta manera

$$\begin{aligned}
\tilde{\Lambda}_a G_{\mu\nu}^a &= \tilde{\Lambda}_a (\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) - ig_s [\tilde{\Lambda}_b, \tilde{\Lambda}_c] G_\mu^b G_\nu^c \\
&= \tilde{\Lambda}_a (\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) - ig_s (if^a_{bc} \tilde{\Lambda}_a) G_\mu^b G_\nu^c \\
&= \tilde{\Lambda}_a (\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^a_{bc} G_\mu^b G_\nu^c).
\end{aligned} \tag{467}$$

Entonces

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a + g_s f^a_{bc} G_\mu^b G_\nu^c \\ &= \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s f^a_{bc} G_\mu^b G_\nu^c, \end{aligned} \quad (468)$$

donde hemos definido la parte Abelian de los tensores cromodinámicos como

$$\tilde{G}_{\mu\nu}^a = \partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a. \quad (469)$$

En conclusión, hemos visto que la matrix de tensores de gluones (466) debe transformar en la representación adjunta de SU(3) como

$$\mathbb{G}^{\mu\nu} \rightarrow \mathbb{G}'^{\mu\nu} = \tilde{U} \mathbb{G}^{\mu\nu} \tilde{U}^{-1} \quad (470)$$

y que dicha transformación es consistente con la transformación de la matriz de campos de gluones

$$\mathbb{G}^\mu \rightarrow \mathbb{G}'^\mu = \tilde{U} \mathbb{G}^\mu \tilde{U}^{-1} - \frac{i}{g_s} \left(\partial_\mu \tilde{U} \right) \tilde{U}^{-1}. \quad (471)$$

Para poder obtener un invariante bajo transformaciones gauge a partir del producto $G^{\mu\nu}G_{\mu\nu}$, debemos utilizar la traza

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}(G^{\mu\nu}G_{\mu\nu}) &\rightarrow \text{Tr}(G'^{\mu\nu}G'_{\mu\nu}) = \text{Tr}\left(\tilde{U}G^{\mu\nu}\tilde{U}^{-1}\tilde{U}G_{\mu\nu}\tilde{U}^{-1}\right) \\
 &= \text{Tr}\left(\tilde{U}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu}\tilde{U}^{-1}\right) \\
 &= \text{Tr}\left(\tilde{U}^{-1}\tilde{U}G^{\mu\nu}G_{\mu\nu}\right) \\
 &= \text{Tr}(G^{\mu\nu}G_{\mu\nu}) .
 \end{aligned} \tag{472}$$

Como las propiedades de Traza son independientes de la representación, a partir de este momento omitiremos la virgulilla para la representación adjunta y usaremos el mismo símbolo $G_{\mu\nu}$ para representar la matriz de tensores cromodinámicos tanto en su representación adjunta como en su representación fundamental. Teniendo en cuenta la normalización de las matrices de SU(3)

$$\text{Tr}(\Lambda^a\Lambda^b) = \frac{1}{2}\delta^{ab} , \tag{473}$$

tenemos (suma sobre índices repetidos de $SU(3)$)

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}(G^{\mu\nu} G_{\mu\nu}) &\rightarrow \text{Tr}(G'^{\mu\nu} G'_{\mu\nu}) = \text{Tr}(\Lambda^a G_a^{\mu\nu} \Lambda^b G_{\mu\nu}^b) \\
 &= \text{Tr}(\Lambda^a \Lambda^b) G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^b \\
 &= \frac{1}{2} \delta^{ab} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^b \\
 &= \frac{1}{2} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a.
 \end{aligned} \tag{474}$$

Haciendo explícitamente la traza tenemos (suma sobre índices a, b, c, \dots repetidos aunque no estén contraídos)

$$\begin{aligned}
 G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a &= \left(\tilde{G}_a^{\mu\nu} + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \right) \left(\tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s f_{ade} G_\mu^d G_\nu^e \right) \\
 &= \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s f_{ade} \tilde{G}_a^{\mu\nu} G_\mu^d G_\nu^e + g_s f^{abc} \tilde{G}_{\mu\nu}^a G_b^\mu G_c^\nu + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \\
 &= \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s f^{abc} \tilde{G}_a^{\mu\nu} G_\mu^b G_\nu^c + g_s f^{abc} \tilde{G}_{\mu\nu}^a G_b^\mu G_c^\nu + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \\
 &= \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s f^{abc} \tilde{G}_a^{\mu\nu} G_\mu^b G_\nu^c + g_s f^{abc} \tilde{G}_{\mu\nu}^a G_\mu^b G_\nu^c + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e
 \end{aligned}$$

$$= \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a + 2g_s f^{abc} \tilde{G}_a^{\mu\nu} G_\mu^b G_\nu^c + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \quad (475)$$

⁴o asumiendo simplemente que la propiedades de la derivada covariante no dependen de la representación

Expandiendo el Lagrangiano en ec. (440), tenemos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} &= i\bar{\Psi}\gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig_s \frac{\lambda_a}{2} G_\mu^a \right) \Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \frac{1}{2} \text{Tr} (G^{\mu\nu} G_{\mu\nu}) \\
 &= i\bar{\Psi}\gamma^\mu \left(\partial_\mu - ig_s \frac{\lambda_a}{2} G_\mu^a \right) \Psi - m\bar{\Psi}\Psi - \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a \\
 &= i\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi + g_s \bar{\Psi}\gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} G_\mu^a \Psi - \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a \\
 &= i\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi + g_s \bar{\Psi}\gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \Psi G_\mu^a - \frac{1}{4} \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a \\
 &\quad - \frac{1}{4} \left(2g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \right) \\
 &= \mathcal{L}_{\text{free}} + \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{SI}} ,
 \end{aligned} \tag{476}$$

donde

$$\mathcal{L}_{\text{free}} = i\bar{\Psi}\gamma^\mu \partial_\mu \Psi - m\bar{\Psi}\Psi$$

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = g_s \bar{\Psi} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \Psi G_\mu^a - \frac{1}{4} \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a$$

$$\mathcal{L}_{\text{SI}} = -\frac{1}{4} \left(2g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \right). \quad (477)$$

Hemos dividido el Lagrangiano en tres partes

- El Lagrangiano libre de Dirac
- Una parte gauge que puede escribirse como un Lagrangiano electromagnético:

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4} (\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu) (\partial_\mu G_\nu^a - \partial_\nu G_\mu^a) - J_a^\nu G_\nu^a, \quad (478)$$

donde

$$J_a^\mu = -g_s \bar{\Psi} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \Psi, \quad (479)$$

es la nueva corriente conservada de interacción fuerte que surge como consecuencia de la invarianza gauge local $SU(3)$; y

- Una parte de auto-interacciones gauge:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{SI}} &= -\frac{g_s}{2} f^{abc} \tilde{G}_{\mu\nu}^a G_b^\mu G_c^\nu - \frac{g_s^2}{4} f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \\
 &= -\frac{g_s}{2} f^{abc} (\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu) G_\mu^b G_\nu^c - \frac{g_s^2}{4} f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e.
 \end{aligned} \tag{480}$$

que no aparece en el caso Abeliano.

El Lagrangiano de interacción es:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g_s \bar{\Psi} \gamma^\mu \frac{\lambda_a}{2} \Psi G_\mu^a - \frac{g_s}{2} f^{abc} (\partial^\mu G_a^\nu - \partial^\nu G_a^\mu) G_\mu^b G_\nu^c - \frac{g_s^2}{4} f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e. \tag{481}$$

From [?] (pag 136):

The quarks have an additional type of polarization that is not related to geometry. The idiot physicists, unable to come up with any wonderful Greek words anymore, call this type of polarization by the unfortunate name of “color”, which has nothing to do with color in the normal sense. At a particular time, a quark can be in one of three conditions, or “colors”—R, G, or B (can you guess what they stand for?). A quark’s “color” can be changed when the quark emits or absorbs a gluon. The gluons come in eight different types, according to the “colors” they can couple with. For example, if a red quark changes to green, it emits a red-antigreen gluon—a gluon that takes the red from quark and gives it green (“antigreen” means the gluon is carrying green in the opposite direction). This gluon could be absorbed by a green quark, which changes to red (see Fig. 17). There are eight different possible gluons, such as red-antired, red-antiblue, red-antigreen, and so on (you’d think there’d be nine, but for technical reasons, one is missing)⁵. The theory is not very complicated. The complete rule of gluons is: gluons couple with things having “color”—it just requires a little bookkeeping to keep track of where the “colors go”. There is, however, an interesting possibility created by this rule: gluons can couple with other gluons (see Fig. 18).

⁵Ver ec. 482.

$$\begin{pmatrix} r\bar{r} & r\bar{b} & r\bar{g} \\ b\bar{r} & b\bar{b} & b\bar{g} \\ g\bar{r} & g\bar{b} & g\bar{g} \end{pmatrix}, \quad \text{with } r\bar{r} + b\bar{b} + g\bar{g} = 0. \quad (482)$$

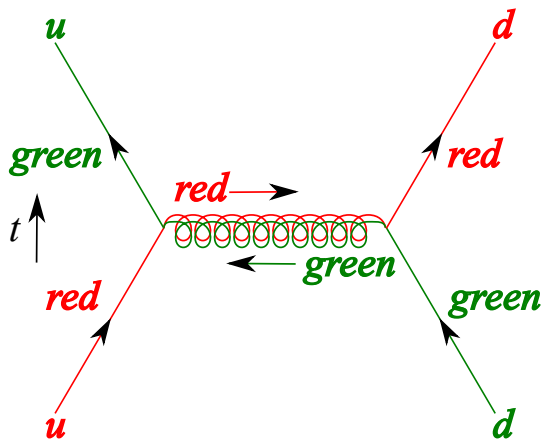


Figura: Quark-gluón interaction

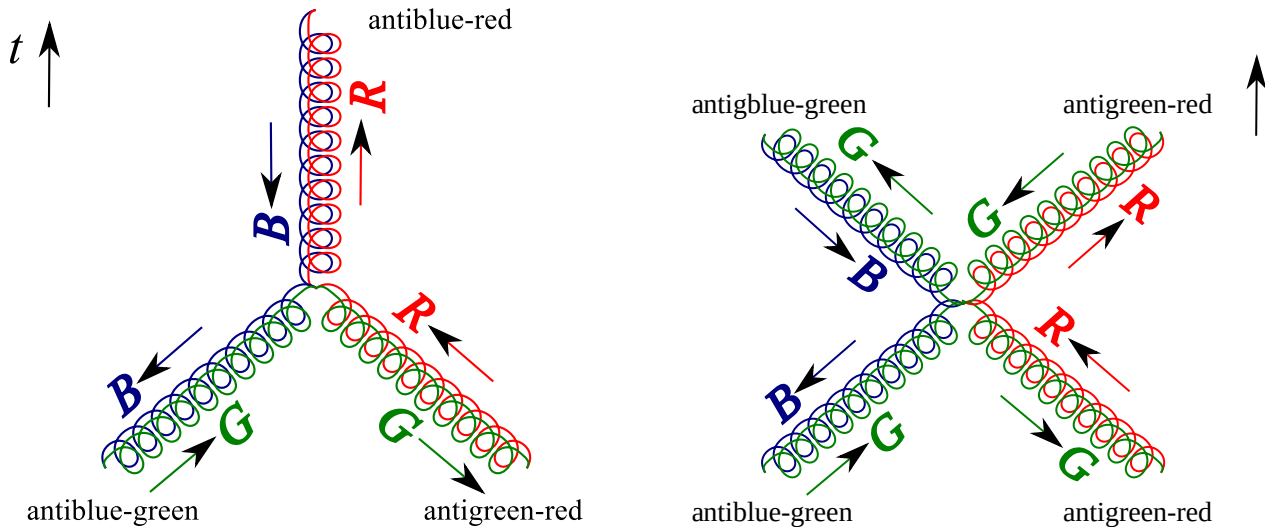


Figura: Triple-gluon and quartic-gluon self-interactions. The anticolors are the colors running back in time.

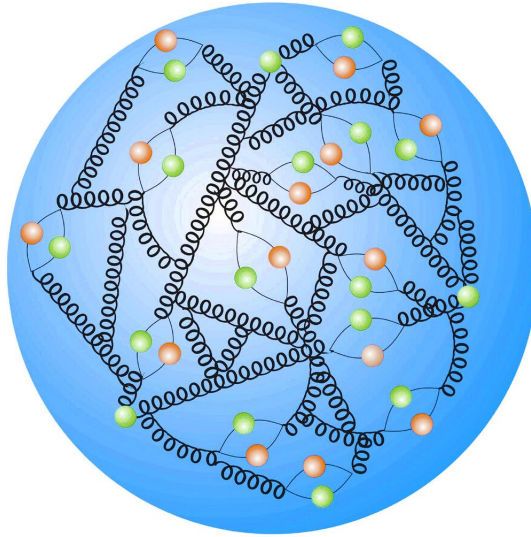


Figura: En la estructura interna del protón, además de los tres quarks de valencia representados en la figura como las tres partículas verdes aisladas, también están los gluones y los pares quark-antiquark. Estos últimos representados como las partículas naranja. Fuente: desy.de

por lo tanto

$$\mathcal{D}_\mu \mathbf{G}^{\mu\nu} = -g_s \bar{\Psi} \gamma^\nu \mathbf{\Lambda} \Psi, \quad (483)$$

donde $\mathbf{G}^{\mu\nu}$ y $\mathbf{\Lambda}$ son vectores en el espacio $SU(3)$. Además, hemos definido la derivada covariante en la representación adjunta como matrix 8×8

$$\mathcal{D}_\mu = \mathbf{1} \partial_\mu - i g_s \tilde{\Lambda}_a G_\mu^a \quad (484)$$

Tenemos entonces 4 ecuaciones tipo ecuaciones Maxwell para cada gluón, G_μ^a , por lo que en total hay 32 ecuaciones tipo Maxwell acopladas.

La ec.(??) puede reescribirse como:

$$\partial_\mu G_a^{\mu\nu} = -g_s \left[f_{abc} G_\mu^b G_c^{\mu\nu} + \bar{\Psi} \gamma^\nu \frac{\lambda_a}{2} \Psi \right] \quad (485)$$

y usando el hecho que $\partial_\mu \partial_\nu = \partial_\nu \partial_\mu$:

$$\partial_\nu \partial_\mu G_a^{\mu\nu} = \partial_\nu \partial_\mu \tilde{G}^{\mu\nu} + g_s \partial_\nu \partial_\mu (f_{abc} G_b^\mu G_c^\nu)$$

$$\begin{aligned}
&= 0 + \frac{1}{2} \left[g_s \partial_\nu \partial_\mu (f_{abc} G_b^\mu G_b^\nu) + g_s \partial_\nu \partial_\mu (f_{abc} G_b^\mu G_c^\nu) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[g_s \partial_\nu \partial_\mu (f_{abc} G_b^\mu G_b^\nu) + g_s \partial_\mu \partial_\nu (f_{abc} G_b^\mu G_c^\nu) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[g_s \partial_\nu \partial_\mu (f_{abc} G_b^\mu G_b^\nu) + g_s \partial_\nu \partial_\mu (f_{acb} G_c^\nu G_b^\mu) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[g_s \partial_\nu \partial_\mu (f_{abc} G_b^\mu G_b^\nu) - g_s \partial_\mu \partial_\nu (f_{abc} G_b^\mu G_c^\nu) \right] \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{486}$$

como en el caso Abelian, tenemos la corriente conservada

$$\partial_\nu j^\nu = 0, \tag{487}$$

donde

$$j_a^\nu = - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial G_\nu^a}, \tag{488}$$

tal que

$$j_a^\nu = g_s \left[f_{abc} G_\mu^b G_c^{\mu\nu} + \bar{\Psi} \gamma^\nu \frac{\lambda_a}{2} \Psi \right] . \quad (489)$$

El primer término corresponde a las autointeracciones y el segundo a la corriente de color generada por los quarks.

Campos de radiación masivos

Hasta ahora los campos de radiación como el fotón o los gluones son de masa cero y median interacciones de rango infinito. En este capítulo exploraremos cual es el posible efecto de un campo que medie interacciones masivo y la posibilidad de describirlo en el contexto de una teoría gauge

local.

La interacción entre un protón y un neutrón fue determinada experimentalmente por Tomonaga en 1934 [?]

$$V(r) = A \frac{e^{-r/\Lambda}}{r}, \quad (490)$$

con

$$\Lambda \approx 1/(7 \times 10^{12} \text{ cm}^{-1}) = 1.43 \times 10^{-13} \text{ cm} = 1.43 \times 10^{-15} \text{ m}. \quad (491)$$

Consideremos el principio de incertidumbre

$$\begin{aligned}\Delta x \Delta p &\geq \frac{\hbar}{2} \\ \Delta t \Delta E &\geq \frac{\hbar}{2}.\end{aligned}\tag{492}$$

La segunda relación de incertidumbre aplicada a la ecuación de Klein-Gordon [?], brinda un nuevo entendimiento de la relación entre el rango y la masa en ec. (490). Δt es el tiempo que el sistema cuántico interactúa con el aparato de medida y $\Delta E = \hbar/(2\Delta t)$ es el error mínimo que se obtiene en la medida de la energía, tal que $E = E_0 \pm \Delta E$. Es decir, para medir la energía con una precisión ΔE , uno necesita un tiempo mayor que $\hbar/(2\Delta E)$.

Si $\Delta E < mc^2$ eso quiere decir que podemos medir la cantidad mc^2 con alguna certeza. Es decir que una partícula de masa m se puede llegar a observar. Si $\Delta E > mc^2$ entonces una partícula de masa m puede existir durante un tiempo Δt . A tal partícula se le llama virtual porque no es observable. El momentum de una partícula de número de onda k es $p = \hbar k$, de modo que la incertidumbre en el momentum para una partícula relativista es

$$\Delta p = \hbar \Delta k \approx \hbar \frac{\Delta \omega}{c} = \frac{\Delta E}{c} \quad (493)$$

fotón virtual de frecuencia muy baja puede existir durante un tiempo casi infinito.

Sin embargo, para una partícula de masa m . La violación de energía para producir esta debe ser de al menos mc^2 , o $\Delta E > mc^2$. Por el principio de incertidumbre la máxima distancia que puede recorrer es $\Lambda = c\Delta t$

$$\begin{aligned}
 \Lambda &\geq \frac{\hbar c}{2\Delta E} \\
 &\geq \frac{c\hbar}{2mc^2} \\
 &\geq \frac{\hbar}{2mc} \\
 &\geq \frac{1}{2m} \quad \text{Natural Units.}
 \end{aligned} \tag{494}$$

De la componente escalar de la ecuación de Proca, (382), obtenemos la ecuación de Klein–Gordon para un campo escalar real $\phi = A^0$,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \rho \phi \quad (495)$$

Donde ρ es la densidad de carga que actúa como fuente del campo ϕ .

el Lagrangiano en ec. (495) da lugar a las ecuaciones de Klein-Gordon en presencia de una densidad de carga

$$(\square + m^2)\phi = \rho \quad (496)$$

De acuerdo a la ec. (383), tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{free}} &= \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial_\mu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \\ \mathcal{L}_{\text{int}} &= \rho \phi \end{aligned} \quad (497)$$

Consideremos el caso más simple de una fuente puntual para el campo ϕ :

$$\rho(\mathbf{x}) = g\delta(\mathbf{x}) \quad (498)$$

donde g es una constante. Entonces ρ es independiente del tiempo y genera un campo (un potencial) independiente del tiempo. Entonces, como:

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = 0,$$

tenemos

$$(-\nabla^2 + m^2)\phi(\mathbf{x}) = g\delta(\mathbf{x}) \quad (499)$$

Para resolver la ecuación diferencial es más conveniente transformar $\phi(\mathbf{x})$ al espacio de momentos. Su transformada de Fourier es

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{\phi}(\mathbf{k}). \quad (500)$$

La transformada inversa es

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3x e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \phi(\mathbf{x}). \quad (501)$$

Ademas tenemos la propiedad

$$\delta(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}. \quad (502)$$

Reemplazando ec. (500) en (499), tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int d^3k (\mathbf{k}^2 + m^2) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \tilde{\phi}(\mathbf{k}) &= g\delta(\mathbf{x}) \\ &= \frac{g}{(2\pi)^3} \int d^3k e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} \\ (\mathbf{k}^2 + m^2) \tilde{\phi}(\mathbf{k}) &= \frac{g}{(2\pi)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Entonces

$$\tilde{\phi}(\mathbf{k}) = \frac{g}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\mathbf{k}^2 + m^2}. \quad (503)$$

tenemos que

$$\phi(\mathbf{x}) = \frac{g}{4\pi} \frac{e^{-mr}}{r}, \quad (504)$$

donde $r \equiv |\mathbf{x}|$.

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x}) &= \frac{g}{4\pi} \frac{e^{-m|\mathbf{x}|}}{|\mathbf{x}|} \\
&= \frac{1}{4\pi} \int d^3x' g \delta(\mathbf{x}') \frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \\
&= \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \rho(\mathbf{x}') \frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}
\end{aligned} \tag{505}$$

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \phi(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int d^3x' \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}') \frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \tag{506}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_{\text{int}} &= \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{int}}}{\partial(\partial\phi/\partial t)} \frac{\partial\phi}{\partial t} - \mathcal{L}_{\text{int}} \\
&= -\mathcal{L}_{\text{int}} \\
&= -\frac{1}{4\pi} \int d^3x' \rho(\mathbf{x})\rho(\mathbf{x}') \frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}
\end{aligned} \tag{507}$$

$$H_{\text{int}} = -\frac{1}{4\pi} \int d^3x d^3x' \rho(\mathbf{x}) \rho(\mathbf{x}') \frac{e^{-m|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \quad (508)$$

El Hamiltoniano de interacción en ec. (508) representa la interacción entre dos nucleones mediante el intercambio de un mesón.

Comparando con la ec. (490) tenemos

$$m \approx \frac{1}{\Lambda} \quad (509)$$

que es compatible con la ec. (494). Usando el valor medido de Λ en la ec. (491)

$$\begin{aligned} m &\approx \frac{1}{1.43 \times 10^{-15} m} \frac{1.973 \times 10^{-16} m}{\text{GeV}^{-1}} \\ &\approx 138 \text{ MeV} \end{aligned} \quad (510)$$

La masa del pión π^0 , es $m_{\pi^0} = 134.8766(6) \text{ MeV}$.

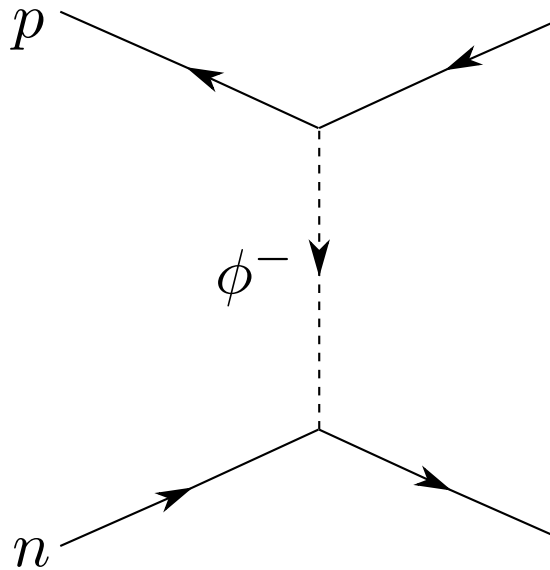
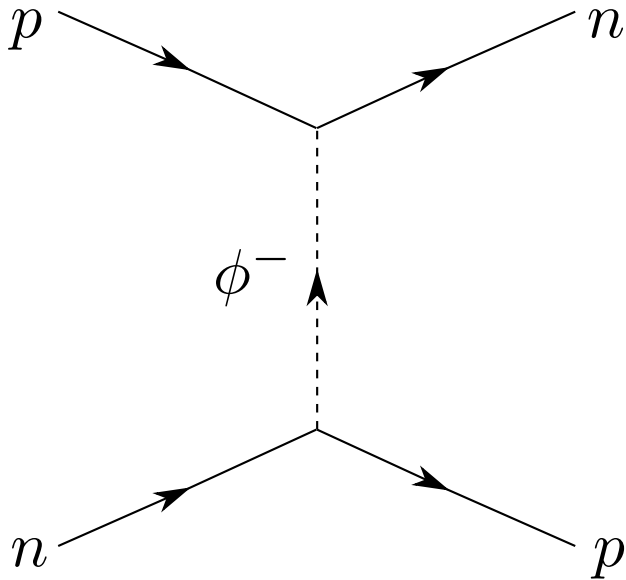


Figura: Intercambio de Yukawa de un sólo ϕ

En el espacio de momentos, la cantidad relevante que representa el intercambio de piones, es la que aparece en la ec. (??) y se conoce como el *propagador*:

$$\text{propagador: } \frac{1}{\mathbf{k}^2 - m^2} \quad (511)$$

En el caso electromagnético tendremos simplemente

$$1/\mathbf{k}^2. \quad (512)$$

Escribamos el Lagrangiano para una partícula escalar real de masa m como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - V(\phi) \quad (513)$$

con

$$V(\phi) = \frac{1}{2} \mu^2 \phi^2. \quad (514)$$

Este Lagrangiano es simétrico bajo la transformación discreta $\phi \rightarrow -\phi$.

Cuando $\mu^2 > 0$, el campo tiene excitaciones alrededor del mínimo del potencial que cuestan energía y dicho término se interpreta como la masa de la partícula. Ver figura 21. En Teoría Cuántica de Campos al estado de mínima energía se le llama el vacío y las excitaciones alrededor del vacío corresponden a las partículas.

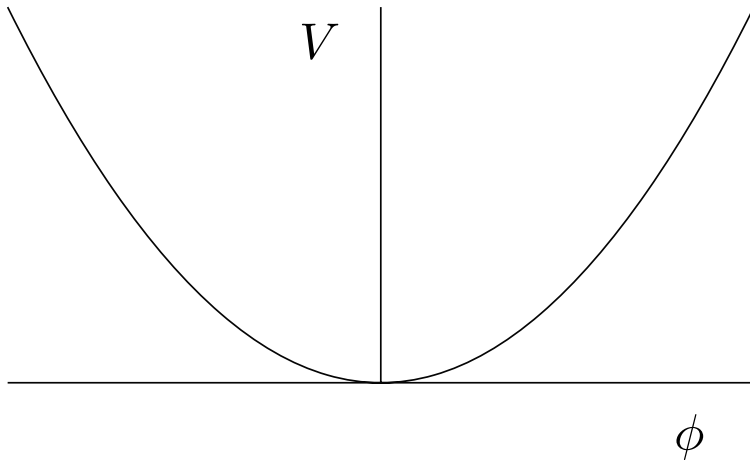


Figura: $V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2$ con $\mu^2 > 0$

Consideremos ahora el potencial

$$V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4 \quad \mu^2 < 0, \lambda > 0 \quad (515)$$

que mantiene la simetría bajo la transformación discreta $\phi \rightarrow -\phi$. $\lambda > 0$ garantiza la aparición de los dos mínimos que se muestran en la figura 22. Si la energía es suficientemente alta como se muestra en la figura 22, las excitaciones son simétricas con respecto al máximo del potencial y el término en μ^2 no puede interpretarse como masa para la partícula escalar.

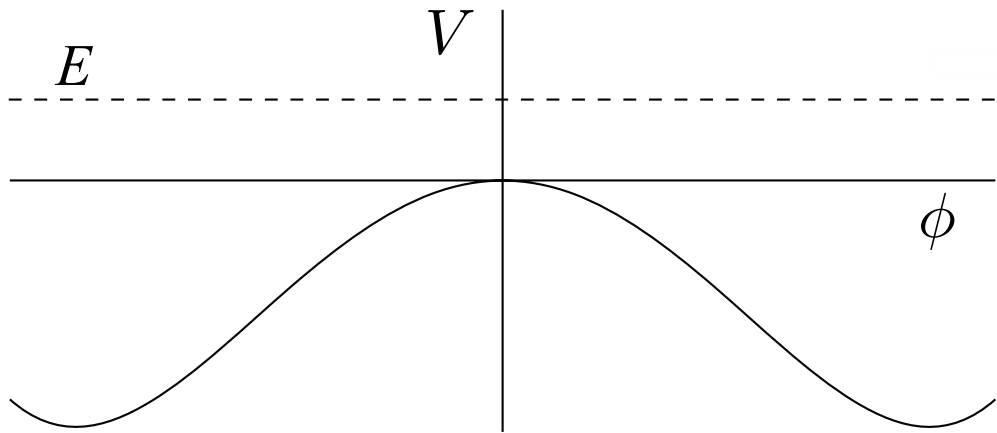


Figura: $V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4$ con $\mu^2 < 0$, y $\lambda > 0$. Simetría exacta

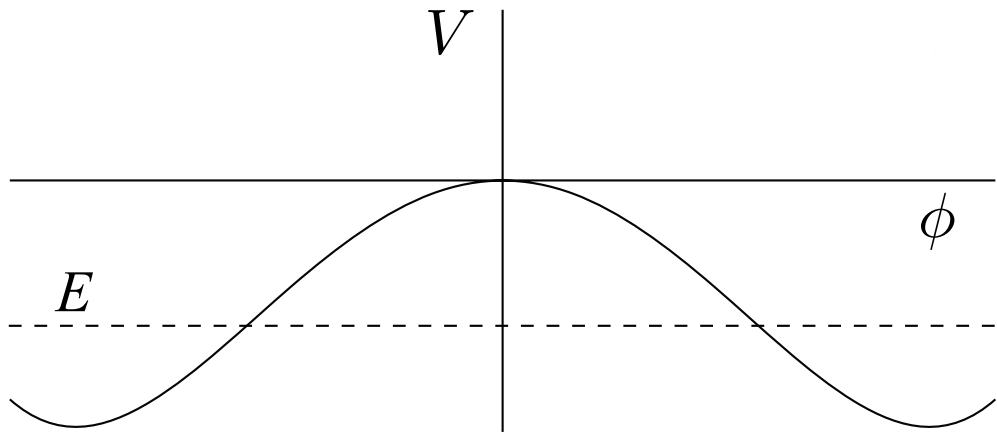


Figura: $V(\phi) = \frac{1}{2}\mu^2\phi^2 + \frac{1}{4}\lambda\phi^4$ con $\mu^2 < 0$, y $\lambda > 0$. Simetría espontáneamente rota.

Para analizar cuantitativamente el espectro de partículas es necesario expandir el campo alrededor del mínimo y determinar las excitaciones. Establezcamos en primer lugar los mínimos del potencial. La $\partial V/\partial\phi = 0$ da lugar a

$$\mu^2\phi + \lambda\phi^3 = 0 \quad (516)$$

$$\phi(\mu^2 + \lambda\phi^2) = 0, \quad (517)$$

con extremos $\phi_{\text{max}} = 0$, y

$$\phi_{\text{min}} \equiv \langle\phi\rangle \equiv v = \pm\sqrt{\frac{-\mu^2}{\lambda}}. \quad (518)$$

De hecho

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\phi^2} = \mu^2 + 3\lambda\phi^2. \quad (519)$$

Otro método es usar las ecuaciones de mínimo $-\mu^2 = \lambda v^2$, para eliminar un parámetro del potencial:

$$\begin{aligned}
 V(\phi) &= -\frac{1}{2}\lambda v^2 \phi^2 + \frac{1}{4}\lambda \phi^4 \\
 &= -\frac{1}{2}\lambda v^2 (H^2 + 2vH + v^2) + \frac{1}{4}\lambda [H^4 + 4vH^3 + 6H^2v^2 + 4v^3H + v^4] \\
 &= \lambda v^2 H^2 + \lambda v H^3 + \frac{1}{4}\lambda H^4 + \text{constant} \\
 &= \lambda v^2 H^2 \left[1 + 2\frac{H}{2v} + \left(\frac{H}{2v}\right)^2 \right] + \text{constant} \\
 &= \frac{1}{2} (2\lambda v^2) H^2 \left(1 + \frac{H}{2v} \right)^2 + \text{constant}.
 \end{aligned} \tag{520}$$

Podemos escribir el potencial en términos del nuevo campo como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_H &= \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - V(H) = \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2} m_H^2 H^2 \left(\frac{H}{2v} + 1 \right)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2} m_H^2 H^2 - \frac{1}{2} \frac{m_H^2}{v} H^3 - \frac{1}{8} \frac{m_H^2}{v^2} H^4.
 \end{aligned} \tag{521}$$

donde

$$m_H^2 = 2 |\mu^2| = 2\lambda v^2, \quad (522)$$

es la masa del campo de Higgs después de rompimiento espontáneo de simetría.

Consideremos ahora un campo escalar complejo sin término de masa, pero con potencial:

$$\mathcal{L} = \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - V(\phi) \quad (523)$$

$$V(\phi) = \mu^2 \phi^* \phi + \lambda (\phi^* \phi)^2 \quad \mu^2 < 0, \lambda > 0 \quad (524)$$

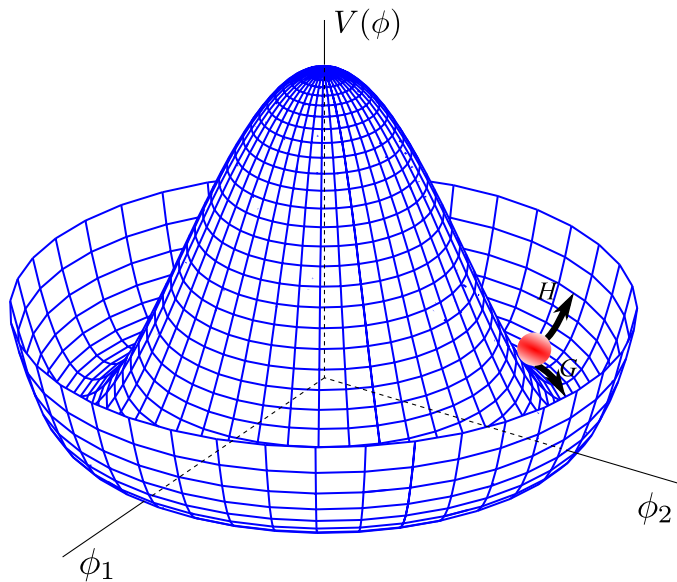


Figura: Potential for complex scalar field

La ruptura espontánea de simetría (RES) se puede parametrizar convenientemente en este caso en coordenadas polares:

$$\phi(x) = \frac{\eta(x)}{\sqrt{2}} e^{i\bar{G}(x)}, \quad (525)$$

donde el factor de $\sqrt{2}$ se ha puesto para obtener la normalizaciones apropiadas para la Acción, y $\bar{G}(x)$ es una función adimensional del espacio tiempo. Expandiendo la ec. (523)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \partial^\mu \phi^* \partial_\mu \phi - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 \\ &= \frac{1}{2} (\partial^\mu \eta - i\eta \partial^\mu \bar{G})^* (\partial_\mu \eta + i\eta \partial_\mu \bar{G}) - \frac{1}{2} \mu^2 \eta^2 - \frac{1}{4} \eta^4 \\ &= \frac{1}{2} \partial^\mu \eta \partial_\mu \eta + \frac{1}{2} \eta^2 \partial^\mu \bar{G} \partial_\mu \bar{G} - \frac{1}{2} \mu^2 \eta^2 - \frac{1}{4} \eta^4. \end{aligned} \quad (526)$$

Como $\eta^2 = \phi_1^2 + \phi_2^2$, el módulo del campo complejo, podemos expandirlo alrededor del campo que oscila en mínimo en el modo que sube por las paredes, como se describió en la fig. 24. Hacemos entonces el cambio de variables

$$\eta(x) = H(x) + v, \quad (527)$$

tal que $|\eta_{\min}| = v$. Reemplazando en el Lagrangiano anterior tenemos que

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H + \frac{1}{2} \partial^\mu G \partial_\mu G + \frac{H}{v} \partial^\mu G \partial_\mu G + \frac{H^2}{v^2} \partial^\mu G \partial_\mu G - \frac{1}{2} \mu^2 (H + v)^2 - \frac{1}{4} \lambda (H + v)^4 \\ &= \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H + \frac{1}{2} \partial^\mu G \partial_\mu G + \frac{H}{v} \partial^\mu G \partial_\mu G + \frac{H^2}{v^2} \partial^\mu G \partial_\mu G - \frac{1}{2} m_H^2 H^2 - \frac{1}{2} \frac{m_H^2}{v} H^3 - \frac{1}{8} \frac{m_H^2}{v^2} H^4,\end{aligned}\quad (528)$$

donde hemos definido el bosón de Goldstone sin masa como

$$G(x) = v \bar{G}(x), \quad (529)$$

y m_H está dado por la ec. (522).

Como era de esperarse, obtenemos un modo masivo H cuyas oscilaciones cuestan energía, y un modo G sin masa que se mueve sobre el mínimo. La prueba de la simetría de fase global espontáneamente rota estaría en el término de interacción

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = \frac{H}{v} \partial^\mu G \partial_\mu G, \quad (530)$$

que predice que el campo H debe decaer a dos campos G sin masa. Sin embargo, este tipo de procesos aún no se han observado en la naturaleza.

En el caso de la Acción invariante gauge local bajo el Grupo $U(1)$, tenemos el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = (\mathcal{D}^\mu \phi)^* \mathcal{D}_\mu \phi - \mu^2 \phi^* \phi - \lambda (\phi^* \phi)^2 - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \quad \mu^2 < 0 \text{ and } \lambda > 0. \quad (531)$$

donde

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + iqA_\mu. \quad (532)$$

Este es el Lagrangiano más general posible para un campo escalar complejo y el campo A_μ que deja la Acción invariante de Lorentz e invariante bajo la transformación gauge $U(1)$

$$\phi(x) \rightarrow \phi'(x) = e^{i\theta(x)} \phi(x), \quad (533)$$

En el caso de la superconductividad electromagnética, ϕ representaría al campo escalar asociado al par de Cooper con carga eléctrica -2 . Claramente el Lagrangiana en la ec. (531) es invariante local bajo tal $U(1)$ de carga eléctrica.

Como ϕ es un campo complejo, podemos escribirlo en coordenadas polares con un campo real asociado a la magnitud del campo complejo y otro a la fase

$$\phi(x) = \frac{\eta(x)}{\sqrt{2}} e^{i\bar{G}(x)}$$

Expandiendo el campo $\eta(x)$ alrededor del mínimo: $\eta(x) = (H(x) + v)$, tenemos

$$\phi(x) = e^{i\bar{G}(x)} \left(\frac{H(x) + v}{\sqrt{2}} \right).$$

La libertad gauge nos permite en un momento determinado escoger la fase $\theta(x)$ de la ec. (533) sin que ese alteren los observables de la teoría. Para el campo en coordenadas polares tenemos que

$$\phi \rightarrow \phi' = e^{i\theta(x)} e^{i\bar{G}(x)} \left(\frac{H(x) + v}{\sqrt{2}} \right)$$

Haciendo $\theta(x) = -\bar{G}(x)$,

$$\begin{aligned} \phi \rightarrow \phi' &= e^{-i\bar{G}(x) + i\bar{G}(x)} \left(\frac{H(x) + v}{\sqrt{2}} \right) = \frac{H(x) + v}{\sqrt{2}} \\ A_\mu \rightarrow A'_\mu &= A_\mu - \frac{1}{q} \partial_\mu \theta(x). \end{aligned} \tag{534}$$

$$\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}' = [(\mathcal{D}^\mu)' \phi']^* (\mathcal{D}_\mu)' \phi' - \mu^2 (\phi^*)' \phi' - \lambda [(\phi^*)' \phi']^2 - \frac{1}{4} (F^{\mu\nu} F_{\mu\nu})'$$

$$= \frac{1}{2} [\partial^\mu H + igA'^\mu(H + v)] [\partial_\mu H - igA'_\mu(H + v)] - \frac{1}{2}\mu^2(H + v)^2 - \frac{1}{4}\lambda(H + v)^4 - \frac{1}{4}(F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}) \quad (535)$$

En adelante omitiremos las primas, aunque debe estar claro que se esta trabajando en el gauge específico de la ec. (534). Entonces

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\partial^\mu H\partial_\mu H - \frac{1}{2}\mu^2(H + v)^2 - \frac{1}{4}\lambda(H + v)^4 + \frac{1}{2}g^2 A^\mu A_\mu (H + v)^2 - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}. \quad (536)$$

Usando la ec. (521)

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_H + \mathcal{L}_{A^\mu} + \frac{1}{2}g^2 A^\mu A_\mu H^2 + g^2 v A^\mu A_\mu H, \quad (537)$$

donde \mathcal{L}_H esta dado por la ec. (521) y

$$\mathcal{L}_{A^\mu} = -\frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} + \frac{1}{2}g^2 v^2 A^\mu A_\mu. \quad (538)$$

Teniendo en cuenta la ec. (??) para el Lagrangiano de Proca, vemos que como consecuencia de la ruptura espontánea de simetría el campo gauge ha adquirido una masa

$$m_A = gv. \quad (539)$$

Por lo tanto, y sin pérdida de generaliad, podemos escribir el Lagrangiano de Proca resultante como

$$\mathcal{L}_{A^\mu} = -\frac{1}{2}\partial_\mu A_\nu \partial^\mu A^\nu + \frac{1}{2}m_A^2 A^\nu A_\nu. \quad (540)$$

donde hemos usado la condición de Proca, eq. (380): $\partial_\nu A^\nu = 0$.

El mecanismo completo mediante el cual, a partir de un Lagrangiano invariante gauge local, los bosones gauge adquieren masa se llama *mecanismo de Brout–Englert–Higgs* [?, ?]. La partícula escalar que adquiere masa se llama Higgs, mientras que el bosón de Goldstone es absorbido por campo gauge como modo longitudinal.

El número de grados de libertad independientes en el Lagrangiano original en la ec. (531) es cuatro. Correspondientes a los dos grados de libertad del bosón gauge no masivo y los dos del campo escalar complejo. En el Lagrangiano final en la ec. (537) no aparece el bosón de Goldstone. Sin embargo esto no es un problema porque dicho Lagrangiano también tiene cuatro grados de libertad correspondientes a los tres grados de libertad del bosón gauge masivo y al grado de libertad del bosón de Higgs.

Para construir la teoría gauge no Abelian $SU(2)$ para campos escalares con ruptura espontánea de simetría (RES), usaremos los mismos métodos desarrollados para $SU(3)$ de la Sección ?? con los siguientes cambios de notación

$$\begin{aligned} G_\mu^a &\rightarrow W_\mu^i, & i = 1, 2, 3 \\ G_{\mu\nu}^a &\rightarrow W_{\mu\nu}^i. \end{aligned} \quad (541)$$

Consideremos un doblete escalar bajo $SU(2)$ compuesto de dos escalares complejos

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad \phi_1, \phi_2 \in \mathbb{C}, \quad (542)$$

con un Lagrangiano gauge local

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\Phi - \frac{1}{4} W_{\mu\nu}^i W_i^{\mu\nu}, \quad (543)$$

donde

$$\mathcal{L}_\Phi = (\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger \mathcal{D}^\mu \Phi - \mu^2 (\Phi^\dagger \Phi) - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2, \quad \text{con } \mu^2 < 0, \lambda > 0, \quad (544)$$

con

$$\mathcal{D}_\mu = \mathbf{1} \partial_\mu - i g T_i W_\mu^i, \quad T_i = \frac{\tau_i}{2}, \quad (545)$$

y τ_i son las matrices de Pauli que satisfacen el algebra de SU(2)

$$\left[\frac{\tau_i}{2}, \frac{\tau_j}{2} \right] = i \epsilon^{ijk} \frac{\tau_k}{2}. \quad (546)$$

Las condiciones sobre los parámetros del potencial escalar garantizan un rompimiento espontáneo de la simetría. Los cuatro grados de libertad de Φ , pueden escribirse en forma polar con la parte real neutra desplazada para generar la ruptura espontánea de la simetría SU(2)

$$\Phi = e^{i G_j T^j} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} (H(x) + v) \end{pmatrix} \quad (547)$$

$$(548)$$

Para $SU(2)$ tenemos tres generadores y tres bosones gauge. De acuerdo a la parametrización en ec. (576) esperamos que aparezcan tres bosones de Goldstone y un campo de Higgs con masa, de manera que todos los campos gauge adquirirán masa. Se espera entonces que el espectro consista de un bosón de Higgs y tres bosones gauge masivos.

Podemos hacer una transformación gauge similar a la de la ec. (??) sobre el campo Φ , tal que

$$\begin{aligned}\Phi \rightarrow \Phi' &= e^{i\theta_i(x)T_i} e^{iG_i(x)T_i} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}[H(x) + v] \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}[H(x) + v] \end{pmatrix}\end{aligned}\tag{549}$$

que define el *gauge unitario*: $\theta_i(x) = -G_i(x)$. En adelante sin embargo omitiremos las primas sobre los campos transformados Φ' y $W'_{\mu\nu}$.

hemos definido

$$W_{\mu}^{+} \equiv \frac{W_{\mu}^1 + iW_{\mu}^2}{\sqrt{2}} \qquad W_{\mu}^{-} = (W_{\mu}^{+})^{*} = \frac{W_{\mu}^1 - iW_{\mu}^2}{\sqrt{2}}. \quad (550)$$

\mathcal{D}_{μ} corresponde a la matrix 2×2

$$\mathcal{D}_{\mu} = \begin{pmatrix} \partial_{\mu} - \frac{i}{2}gW_{\mu}^3 & -\frac{i}{\sqrt{2}}gW_{\mu}^{+} \\ -\frac{i}{\sqrt{2}}gW_{\mu}^{-} & \partial_{\mu} + \frac{i}{2}gW_{\mu}^3 \end{pmatrix}. \quad (551)$$

Tenemos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_W &= (\mathcal{D}_\mu \Phi)^\dagger \mathcal{D}^\mu \Phi - \mu^2 \Phi^\dagger \Phi - \lambda (\Phi^\dagger \Phi)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - V(H) \\
 &\quad + \frac{1}{4} g^2 W^{\mu-} W_\mu^+ H^2 + \frac{1}{2} g^2 v W^{\mu-} W_\mu^+ H + \frac{1}{8} g^2 W_3^\mu W_\mu^3 H^2 + \frac{1}{4} g^2 v W_3^\mu W_\mu^3 H \\
 &\quad + m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{2} m_3^2 W_3^\mu W_\mu^3,
 \end{aligned} \tag{552}$$

donde:

- Masas gauge:

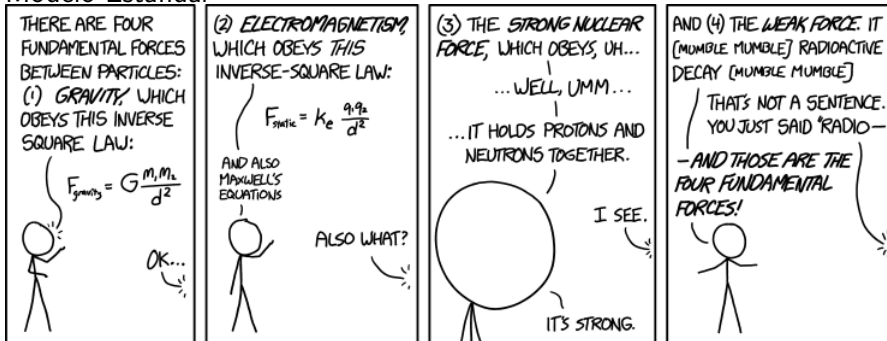
$$m_W = m_3 = \frac{gv}{2}. \tag{553}$$

Note que todas las masas son degeneradas.

- Masa del Higgs

$$m_H^2 = -2\mu^2 = 2\lambda v^2. \tag{554}$$

Modelo Estándar



- Of these four forces, there's one we don't really understand.
- Is it the weak force or the strong?
- It's gravity.

<http://xkcd.com/1489/>

La materia conocida esta constituida de un conjunto de *fermiones de Dirac* elementales definidos en la Tabla 7

Tipo	Nombre	Simbolo	Carga
leptones	electrón	e	-1
	neutrino	ν	0
quarks	quark up	u_1, u_2, u_3	$2/3$
	quark down	d_1, d_2, d_3	$-1/3$

Tabla: Fermiones elementales: The symbol represent both the particle, e.g. e^- , as the antiparticle, e.g. e^+ . The electric charge is given in units of the electron charge e

donde podemos definir los tripletes de color de quarks como

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \quad d = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{pmatrix} \quad (555)$$

Este conjunto de partículas está bien definido para interacciones que conservan paridad como la interacción electromagnética o la fuerte. Para introducir las interacciones débiles usaremos más bien espinores de Weyl

Las interacciones débiles son las responsables, entre otros fenómenos, del decaimiento de neutrones libres en un protón, un electron y un anti-neutrino electrónico. En nuestro entendimiento actual, se asume que dicho decaimiento esta medidado por un bosón vectorial masivo y cargado llamado W_{μ}^{-} con su correspondiente antipartícula W_{μ}^{+} . El caracter másivo da cuenta del corto alcance de la interacción comparado con el rango infinito de la interacción electromagnética mediada por un fotón sin masa A_{μ} . En la primera parte del decaimiento, el neutrón decae al proton y un W_{μ}^{-} virtual, el cual a su vez decae en un anti-neutrino derecho y un electrón izquierdo como se muestra en la figura 25.

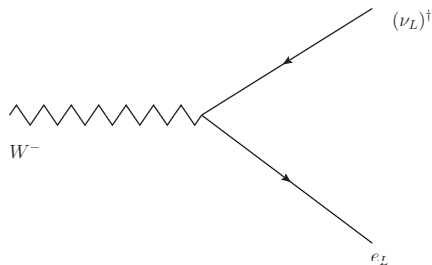


Figura: Decaimiento del W_{μ}^{-} .

Dicho decaimiento debe involucrar un término de interacción del tipo

$$\mathcal{L}_W \propto (\nu_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu e_L W_\mu^+. \quad (556)$$

Este tipo de interacción significa que en el contexto de las interacciones débiles un e_L debe ser completamente equivalente a un campo ν_L . Es decir, el Lagrangiano debe ser invariante bajo una transformación $SU(2)_L$ de esos campos. A las energías normales, a las que se encuentra por ejemplo un neutrón dentro de un núcleo de Uranio, dicha simetría permanece oculta pues un electrón izquierdo y un neutrino izquierdo son campos completamente diferentes. La diferencia entre no sólo está en sus respectivas cargas eléctricas sino también masas, pues la masa del neutrino es mucho más pequeña que la del electrón.

Para poder explicar dicha interacción en el contexto de una simetría gauge local $SU(2)_L$, debemos asumir que dicha simetría es explícita en alguna otra escala de energía donde en efecto e_L sea completamente equivalente a ν_L .

Debemos asumir entonces que ambos campos tienen una misma hipercarga, asociada a una nueva simetría Abelian U(1)_Y que sea la precursora de la simetría Abelian de carga eléctrica U(1)_Q. En tal caso, podríamos esperar que la corriente electromagnética apropiada pueda obtenerse a partir del

Grupo semisimple $SU(2)_L \times U(1)_Y$. Además, la respectiva masa para W_μ^- se podría obtener a partir del mecanismo de Higgs.

La simetría $SU(2)_L$ entre las partes izquierdas del neutrino y el electrón, y entre las partes izquierdas de los quarks up y down, se establece definiendo los dobletes:

$$L \equiv \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix} \quad Q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}, \quad (557)$$

De otro lado, La invarianza bajo $U(1)_Y$ requiere que

$$\begin{aligned} Y_L &= Y_{\nu_L} = Y_{e_L} \\ Y_Q &= Y_{u_L} = Y_{d_L}. \end{aligned} \quad (558)$$

El generador de carga eléctrica \hat{Q} , se va obtener a partir de una combinación lineal del generador diagonal de $SU(2)_L$, T_3 , y del generador de hipercarga, \hat{Y} .

Para considerar las interacciones débiles en conjunto con las interacciones electromagnéticas y fuertes, es conveniente definir los campos de la primera generación en términos de los espinores (ξ_α) y anti-espinors (η^α) de Weyl izquierdos, de acuerdo a las convenciones de la Tabla 5. El contenido de partículas con sus propiedades de transformación bajo el Grupo semisimple

$SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ está dado en la Tabla 8, donde el $\mathbf{3}$ o el $\bar{\mathbf{3}}$ de $SU(3)_c$ quieren decir que, además, para cada quark

$$u_L = \begin{pmatrix} u_{L1} \\ u_{L2} \\ u_{L3} \end{pmatrix} \quad (u_R)^\dagger = \left((u_R)_1^\dagger \quad (u_R)_2^\dagger \quad (u_R)_3^\dagger \right), \quad (559)$$

etc.

Nombre	Símbolo	$(SU(3)_c, SU(2)_L, U(1)_Y)$
$\Xi_{1\alpha}$: Doblete leptónico	$L = \begin{pmatrix} \nu_L \\ e_L \end{pmatrix}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, Y_L)$
$\Xi_{2\alpha}$: Doblete de quarks	$Q = \begin{pmatrix} u_L \\ d_L \end{pmatrix}$	$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, Y_Q)$
η_1^α : positrón izquierdo	$(e_R)^\dagger$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, Y_E)$
η_2^α : anti-up izquierdo	$(u_R)^\dagger$	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, Y_U)$
η_3^α : anti-down izquierdo	$(d_R)^\dagger$	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, Y_D)$

Tabla: Spinores de Weyl izquierdos para la primera generación del modelo estándar

Bajo la simetría $SU(2)_L$, los campos transforman como:

$$\begin{aligned}
 L &\rightarrow L' = \exp(iT^i\theta_i)L \approx (1 + iT^i\theta_i)L \\
 Q &\rightarrow Q' = \exp(iT^i\theta_i)Q \approx (1 + iT^i\theta_i)Q \\
 e_R &\rightarrow e'_R = e_R \\
 u_R &\rightarrow u'_R = u_R \\
 d_R &\rightarrow d'_R = d_R.
 \end{aligned} \tag{560}$$

donde

$$T^i = \frac{\tau^i}{2}, \tag{561}$$

y τ^i son las matrices de Pauli dadas en la ec. (18).

Los términos de masa de Dirac, usando las convenciones de la Tabla 8 no son invariantes bajo la simetría $SU(2)_L$ porque no hay forma de escribir términos escalares usando combinaciones los campos Ξ y η . De la ec. (318), y usando la definición para los dobletes adjuntos de $SU(2)_L$ en la ec. (??), el Lagrangiano más general posible para los campos de la Tabla 8 compatibles con las simetría de Lorentz y el grupo global $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ es

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \sum_{i=1}^2 i\epsilon_{ab} \tilde{\Xi}_i^a \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \Xi_i^b + \sum_{i=1}^3 i\eta_i \sigma^\mu \partial_\mu \eta_i^\dagger \\
&= \sum_{i=1}^2 i\tilde{\Xi}_i \cdot \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \Xi_i + \sum_{i=1}^3 i\eta_i \sigma^\mu \partial_\mu \eta_i^\dagger \\
&= i\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu L + i\tilde{Q} \cdot \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu Q + i(e_R)^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu e_R + i(u_R)^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu u_R + i(d_R)^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu d_R \\
&= i(\nu_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \nu_L + i(e_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu e_L + i(u_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu u_L + i(d_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu d_L \\
&\quad + i(e_R)^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu e_R + i(u_R)^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu u_R + i(d_R)^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu d_R,
\end{aligned} \tag{562}$$

donde

$$\tilde{L} = \begin{pmatrix} (e_L)^\dagger \\ -(\nu_L)^\dagger \end{pmatrix}, \quad \tilde{Q} = \begin{pmatrix} (d_L)^\dagger \\ -(u_L)^\dagger \end{pmatrix}, \quad (563)$$

de modo que

$$\begin{aligned} i\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu L &= i \epsilon_{ab} \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu L \\ &= i \tilde{L}^1 \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu L^2 - i \left(-\tilde{L}^2 \right) \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu L^1 \\ &= i (e_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu e_L + i (\nu_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \nu_L \end{aligned}$$

y lo mismo para Q .

Para obtener la interacciones del modelo estándar, reemplazamos las derivadas normales por derivadas covariantes.

Proponemos entonces el Lagrangiano

$$\mathcal{L} = i\tilde{Q} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu Q + i\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu L + i(e_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R + i(d_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu d_R + i(u_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu u_R$$

$$-\frac{1}{4}G_a^{\mu\nu}G_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4}W_i^{\mu\nu}W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4}B^{\mu\nu}B_{\mu\nu}, \quad (564)$$

donde

$$\mathcal{D}^\mu \equiv \partial^\mu - ig_s \frac{\lambda^a}{2} G_a^\mu - ig \frac{\tau^i}{2} W_i^\mu - ig_1 Y B^\mu. \quad (565)$$

y además

$$\begin{aligned} \Lambda^a &\equiv \frac{\lambda^a}{2}, \quad a = 1, 2, \dots, 8 && 8 \text{ generadores de } SU(3)_c \\ T^i &\equiv \frac{\tau^i}{2}, \quad i = 1, 2, 3 && 3 \text{ generadores de } SU(2)_L \\ Y &&& \text{generador de } U(1)_Y, \end{aligned}$$

A este nivel, tanto los 15 fermiones de Weyl (cada quark izquierdo y derecho viene en tres colores), como los 12 bosones gauge, *tienen masa nula*. Necesitamos entonces un mecanismo de ruptura espontánea de simetría para generar por lo menos masas para los tres bosones gauge asociados a la interacción débil, el cual será abordado en la Sección ??.

Todas las partículas en este lagrangiano son no masivas. Esto funciona sólo para los gluones y uno de los bosones gauge abelianos, pero no es realista para los bosones gauge cargados. Para solucionar este problema se postula la existencia de un nuevo doblete escalar complejo (y su correspondiente adjunto de SU(2)) con cuatro grados de libertad:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_1 + i\phi_2 \\ \phi_3 + i\phi_4 \end{pmatrix}, \quad \tilde{\Phi} = \begin{pmatrix} (\phi^0)^* \\ -\phi^- \end{pmatrix}. \quad (566)$$

El “ \pm ” y el superíndice 0, se ponen de forma conveniente para obtener expresiones consistentes. Es claro que $(\phi^+)^* = \phi^-$.

Es posible ahora construir invariantes SU(2) con las siguientes combinaciones de campos similares al del término de masa de Dirac en (318)

$$\begin{aligned} -\eta_1 \Xi_1 \cdot \tilde{\Phi} - \left(\eta_1 \Xi_1 \cdot \tilde{\Phi} \right)^\dagger &= -\eta_1 \Xi_1 \cdot \tilde{\Phi} - \text{h.c} \\ &= -\eta_1^b \epsilon_{ab} \Xi_1^a \cdot \tilde{\Phi}^b - \text{h.c} \\ &= -(e_R)^\dagger \epsilon_{ab} L^a \tilde{\Phi}^b - \text{h.c} \\ &= (e_R)^\dagger L^1 \tilde{\Phi}^2 + (e_R)^\dagger L^1 \tilde{\Phi}^2 + \text{h.c} \end{aligned}$$

$$= (e_R^-)^\dagger \nu_L \phi^- + (e_R^-)^\dagger e_L^- \phi^0 + \text{h.c.}, \quad (567)$$

donde h.c, denota el hermítico conjugado de cada término (para garantizar que el Lagrangiano sea real) y hemos puesto la carga del electrón para hacer explícita la conservación de la carga eléctrica. Note que

$$(e_R)^\dagger \epsilon_{ab} L^a \tilde{\Phi}^b = (e_R)^\dagger L \cdot \tilde{\Phi}. \quad (568)$$

El Lagrangiano completo involucrando estos campos es

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L} = & i\tilde{Q} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu Q + i\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu L + i(e_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R + i(d_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu d_R + i(u_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu u_R \\
 & - \frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\
 & + \widetilde{(\mathcal{D}_\mu \Phi)} \cdot \mathcal{D}^\mu \Phi - \mu^2 \tilde{\Phi} \cdot \Phi - \lambda (\tilde{\Phi} \cdot \Phi)^2 \\
 & - \left[h_e (e_R)^\dagger L \cdot \tilde{\Phi}_b + h_d (d_R)^\dagger Q \cdot \tilde{\Phi} + h_u (u_R)^\dagger Q \cdot \Phi + \text{h.c.} \right] \\
 = & \mathcal{L}_{\text{fermion}} + \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{WBH} - \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} .
 \end{aligned} \tag{569}$$

donde $\mu^2 < 0$, y $\lambda > 0$,

$$\tilde{\Phi} = i\tau_2 \Phi^* = \begin{pmatrix} \phi^{0*} \\ -\phi^- \end{pmatrix}, \quad \Phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}. \tag{570}$$

Resumiendo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{fermion}} &= i\tilde{Q} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu Q + i\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu L \\
&\quad + i(e_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R + i(d_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu d_R + i(u_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu u_R \\
\mathcal{L}_{WBH} &= (\widetilde{\mathcal{D}_\mu \Phi}) \cdot \mathcal{D}^\mu \Phi - \mu^2 \tilde{\Phi} \cdot \Phi - \lambda (\tilde{\Phi} \cdot \Phi)^2 \\
\mathcal{L}_{\text{gauge}} &= -\frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\
-\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} &= h_e (e_R)^\dagger L \cdot \tilde{\Phi}_b + h_d (d_R)^\dagger Q \cdot \tilde{\Phi} + h_u (u_R)^\dagger Q \cdot \Phi + \text{h.c}
\end{aligned} \tag{571}$$

Para el potencial escalar usaremos la forma más conveniente del producto matricial para el invariante de $SU(2)_L$ por que no hay ambigüedad con el conjugado de un campo escalar.

Para los campos del Lagrangiano, debemos asegurarnos de que todos los términos invariantes gauge locales y renormalizables sean considerados. De hecho, términos de interacción entre fermiones y el campo escalar, correspondiente a una interacción de Yukawa, son invariantes bajo transformaciones $SU(3)_c \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ si

$$\begin{aligned}
Y_L + Y_{\tilde{\Phi}} - Q_e &= 0 \\
Y_Q + Y_{\tilde{\Phi}} - Q_d &= 0 \\
Y_Q + Y_{\Phi} - Y_u &= Y_Q - Y_{\tilde{\Phi}} - Q_u = 0,
\end{aligned}$$

donde hemos fijado $Y_{\tilde{\Phi}} = -Y_{\Phi}$. Solucionado para las hipercargas de los dobletes tenemos

$$\begin{aligned}
Y_L &= \frac{1}{2} (-Q_d + 2Q_e + Q_u) = -\frac{1}{2} \\
Y_Q &= \frac{1}{2} (Q_d + Q_u) = \frac{1}{6} \\
Y_{\tilde{\Phi}} = -Y_{\Phi} &= \frac{1}{2} (Q_d - Q_u) = -\frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{572}$$

De este modo, es consistente interpretar los superíndices de ϕ^+ y ϕ^0 en la ec. (566) como las cargas eléctricas de las componentes del doblete de Higgs, Φ . El hecho de que la información necesaria y suficiente para determinar las hipercargas requiera el sector completo de quarks y leptones es un indicio de la autoconsistencia sólo al nivel de la simetría completa asociada con las tres interacciones subatómicas que definen el modelo estándar de las interacciones fundamentales.

Comenzaremos analizando una versión simplificada del Lagrangiano con sólo los leptones de la primera de generación,

$$\mathcal{L}^{\text{lepton}} = \mathcal{L}_{\text{fermion}}^{\text{lepton}} + \mathcal{L}_{WBH} + \mathcal{L}_{\text{gauge}} - \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^{\text{lepton}}, \quad (573)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{fermion}}^{\text{lepton}} &= i\widetilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu L + i(e_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R \\ \mathcal{L}_{WBH} &= \widetilde{(\mathcal{D}_\mu \Phi)} \cdot \mathcal{D}^\mu \Phi - \mu^2 \widetilde{\Phi} \cdot \Phi - \lambda (\widetilde{\Phi} \cdot \Phi)^2 \\ \mathcal{L}_{\text{gauge}} &= -\frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\ -\mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^{\text{lepton}} &= h_e (e_R)^\dagger L \cdot \widetilde{\Phi}_b + \text{h.c} \end{aligned} \quad (574)$$

y sin pérdida de generalidad para las partes del Lagrangiano $\mathcal{L}_{\text{gauge}}$ y \mathcal{L}_{WBH} que no involucran fermiones.

Para obtener la interacción requerida de los W^\pm con el ν_L y e_L dada en la ec (??) y genera el fotón con las propiedades adecuadas resumidas en la ec. (??), el modelo gauge local $SU(2)_L \times U(1)_Y$ predice entonces la existencia de nuevas interacciones con un nuevo bosón gauge Z_μ dadas por

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{ZL} &= \frac{e}{2c_W s_W} \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \left[\tau_3 - 2s_W^2 \hat{Q} \right] L Z_\mu + \frac{e}{2c_W s_W} (e_R)^\dagger \sigma^\mu \left[0 - 2s_W^2 \hat{Q} \right] e_R Z_\mu \\
 &= \frac{e}{2c_W s_W} \left\{ (\nu_L)^* \bar{\sigma}^\mu \nu_L + (e_L)^* \bar{\sigma}^\mu \left[-1 + 2s_W^2 \right] e_L + 2s_W^2 (e_R)^\dagger \sigma^\mu e_R \right\} Z_\mu \\
 &= \frac{e}{2c_W s_W} \left\{ (\nu_L)^* \bar{\sigma}^\mu \nu_L - (e_L)^* \bar{\sigma}^\mu e_L + 2s_W^2 \left[(e_L)^* \bar{\sigma}^\mu e_L + (e_R)^\dagger \sigma^\mu e_R \right] \right\} Z_\mu. \quad (575)
 \end{aligned}$$

Retornando al doblete de Higgs del modelo estándar en la ec. (??), los cuatro grados de libertad de Φ , pueden escribirse en forma polar con la parte real neutra desplazada para generar la ruptura espontánea de la simetría $SU(2)_L \times U(1)_Y$. De este modo, y sin pérdida de generalidad

$$\Phi = e^{iG_j(x)T^j} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}[H(x) + v] \end{pmatrix}. \quad (576)$$

Para $SU(2)_L \times U(1)_Y$ tenemos cuatro generadores y cuatro bosones gauge. De acuerdo a la parametrización en ec. (576) esperamos que aparezcan tres bosones de Goldstone y un campo de Higgs con masa, de manera que quedará un generador no roto correspondiente a una simetría remanente del vacío $U(1)_Q$

$$SU(2)_L \times U(1)_Y \xrightarrow{\langle \tilde{\Phi} \rangle} U(1)_Q. \quad (577)$$

Se espera entonces que el espectro consista de un bosón de Higgs, tres bosones gauge masivos, y un bosón gauge sin masa.

Podemos hacer una transformación gauge similar a la de la ec. (??) sobre el campo $\tilde{\Phi}$, tal que

$$\Phi \rightarrow \Phi' = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(H(x) + v) \end{pmatrix}, \quad (578)$$

que define el *gauge unitario*. En adelante sin embargo omitiremos las primas sobre los campos transformados Φ' y $W'_{\mu\nu}$.

Comenzaremos analizando la parte escalar del Lagrangiano del Modelo dada en la ec. (571) en el gauge unitario

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{WBH} &= \widetilde{(\mathcal{D}_\mu \Phi)} \cdot \mathcal{D}^\mu \Phi - \mu^2 \tilde{\Phi} \cdot \Phi - \lambda (\tilde{\Phi} \cdot \Phi)^2 \\ &= \frac{1}{2} \left[\mathcal{D}^\mu \begin{pmatrix} 0 \\ H(x) + v \end{pmatrix} \right] \cdot \mathcal{D}_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ H(x) + v \end{pmatrix} - V(H),\end{aligned}\quad (579)$$

donde $V(H)$ dado en la ec. (521), incluye el término de masa para el bosón de Higgs (522):

$$m_H^2 = 2 |\mu^2| = 2\lambda v^2 \quad (580)$$

De la ec. (??)

$$W_\mu = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} W_3 & \frac{1}{\sqrt{2}} W_\mu^+ \\ \frac{1}{\sqrt{2}} W_\mu^- & -\frac{1}{2} W_\mu^3 \end{pmatrix}. \quad (581)$$

\mathcal{D}_μ corresponde a la matrix 2×2 , dada en la ec. (551), con el reemplazo

$$\mp \frac{i}{2} g_2 W_\mu^3 \rightarrow -i \left(\pm \frac{1}{2} g_2 W_\mu^3 + g_1 Y B_\mu \right) \quad (582)$$

$$\mathcal{D}_\mu = \begin{pmatrix} \partial_\mu - i \left(\frac{1}{2} g_2 W_\mu^3 + g_1 Y B_\mu \right) & -\frac{i}{\sqrt{2}} g_2 W_\mu^+ \\ -\frac{i}{\sqrt{2}} g_2 W_\mu^- & \partial_\mu - i \left(-\frac{1}{2} g_2 W_\mu^3 + g_1 Y B_\mu \right) \end{pmatrix}. \quad (583)$$

Entonces

$$\mathcal{D}_\mu \begin{pmatrix} 0 \\ H(x) + v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{i}{\sqrt{2}} g W_\mu^+ (H + v) \\ \partial_\mu H - i \left(-\frac{1}{2} g W_\mu^3 + g_1 Y_{\tilde{\Phi}} B_\mu \right) (H + v) \end{pmatrix}. \quad (584)$$

El correspondiente productor escalar $SU(2)_L$ es:

$$\mathcal{L}_{WBH} = \frac{1}{2} \left(\overbrace{\partial^\mu H - i \left(-\frac{1}{2} g W_3^\mu + g_1 Y_{\tilde{\Phi}} B^\mu \right) (H + v)}^{\sim} \right) \cdot \left(\partial_\mu H - i \left(-\frac{1}{2} g W_\mu^3 + g_1 Y_{\tilde{\Phi}} B_\mu \right) (H + v) \right) - V(H)$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left(\begin{array}{c} \partial^\mu H + i \left(-\frac{1}{2} g W_3^\mu + g_1 Y_{\tilde{\Phi}} B^\mu \right) (H + v) \\ \frac{i}{\sqrt{2}} g W^{\mu-} (H + v) \end{array} \right) \cdot \left(\begin{array}{c} -\frac{i}{\sqrt{2}} g W_\mu^+ (H + v) \\ \partial_\mu H - i \left(-\frac{1}{2} g W_\mu^3 + g_1 Y_{\tilde{\Phi}} B_\mu \right) (H + v) \end{array} \right) - V(H) \\
&= \frac{1}{4} g^2 W^{\mu-} W_\mu^+ (H + v)^2 - V(H) \\
&\quad + \frac{1}{2} \left[\partial^\mu H + i \left(-\frac{1}{2} g W_3^\mu + g_1 Y_{\tilde{\Phi}} B^\mu \right) (H + v) \right] \times \\
&\quad \left[\partial_\mu H - i \left(-\frac{1}{2} g W_\mu^3 + g_1 Y_{\tilde{\Phi}} B_\mu \right) (H + v) \right] \\
&= -V(H) + \frac{1}{4} g^2 W^{\mu-} W_\mu^+ (H + v)^2 + \\
&\quad + \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} g W_3^\mu + g_1 Y_{\tilde{\Phi}} B^\mu \right)^2 (H + v)^2 \tag{585}
\end{aligned}$$

donde la última línea corresponde a la magnitud del “número” complejo:

$$\left[\partial_\mu H - i \left(-\frac{1}{2} g W_\mu^3 + g_1 Y_{\tilde{\Phi}} B_\mu \right) (H + v) \right] \tag{586}$$

Entonces

$$\mathcal{L}_{WBH} = \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - V(H) + \frac{g^2 v^2}{4} W^{\mu-} W_\mu^+ \left(\frac{H}{v} + 1 \right)^2 + \mathcal{L}_{ZAH}, \quad (587)$$

donde

$$\mathcal{L}_{ZAH} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} g^2 W_3^\mu W_\mu^3 - \frac{1}{2} g g_1 Y_{\tilde{\Phi}} W_3^\mu B_\mu - \frac{1}{2} g g_1 Y_{\tilde{\Phi}} W_3^\mu B_\mu + g_1^2 Y_{\tilde{\Phi}}^2 B^\mu B_\mu \right) (H + v)^2. \quad (588)$$

Haciendo $Y_{\tilde{\Phi}} = 1/2$ como en la ec. (572),

$$\mathcal{L}_{ZAH} = \frac{1}{2} \frac{v^2}{4} \begin{pmatrix} W_3^\mu & B^\mu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_2^2 & -g_2 g_1 \\ -g_2 g_1 & g_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} W_3^\mu \\ B_\mu \end{pmatrix} \left(\frac{H}{v} + 1 \right)^2. \quad (589)$$

Sea

$$V = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{g_2^2 + g_1^2}} \begin{pmatrix} g_2 & g_1 \\ -g_1 & g_2 \end{pmatrix}, \quad (590)$$

con $\tan \theta_W = g_1/g$, tal que $g \sin \theta_W = g_1 \cos \theta_W$, como en la ec. (??). De esta forma podremos comprobar si la misma condición que hace que los neutrinos no se acoplen con el fotón, garantiza el campo neutro H tampoco se acopla directamente con el fotón.

Note que V es una matrix ortogonal que satisface $VV^T = V^T V = \mathbf{1}$. Si (ver ec. (??)),

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = V \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} \quad \text{ó} \quad \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} = V^T \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \quad (591)$$

entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{ZAH} &= \frac{1}{2} \frac{v^2}{4} (W^{3\mu} \ B^\mu) VV^T \begin{pmatrix} g^2 & -g_2 g_1 \\ -g_2 g_1 & g_1^2 \end{pmatrix} VV^T \begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} \left(\frac{H}{v} + 1 \right)^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{v^2}{4} (Z^\mu \ A^\mu) \left[V^T \begin{pmatrix} g_2^2 & -g_2 g_1 \\ -g_2 g_1 & g_1^2 \end{pmatrix} V \right] \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix} \left(\frac{H}{v} + 1 \right)^2 \end{aligned} \quad (592)$$

$$V^T \begin{pmatrix} g_2^2 & -g_2 g_1 \\ -g_2 g_1 & g_1^2 \end{pmatrix} V = \frac{1}{g_2^2 + g_1^2} \begin{pmatrix} g_2^3 + g g_1^2 & -g_2^2 g_1 - g_1^3 \\ +g_2^2 g_1 - g_2^2 g_1 & -g_2 g_1^2 + g_2 g_1^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_2 & g_1 \\ -g_1 & g_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{g_2^2 + g_1^2} \begin{pmatrix} g_2^3 + g_2 g_1^2 & -g_2^2 g_1 - g_1^3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_2 & g_1 \\ -g_1 & g_2 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{g_2^2 + g_1^2} \begin{pmatrix} g_2^4 + g_2^2 g_1^2 + g_2^2 g_1^2 + g_1^4 & g_2^3 g_1 + g_2 g_1^3 - g_2^3 g_1 - g_2 g_1^3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} g_2^2 + g_1^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{593}
\end{aligned}$$

De este modo

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{ZAH} &= \frac{1}{2} \frac{v^2}{4} (g_2^2 + g_1^2) Z^\mu Z_\mu \left(\frac{H}{v} + 1 \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{g_2 v}{2} \right)^2 (1 + \tan^2 \theta_W) Z^\mu Z_\mu \left(\frac{H}{v} + 1 \right)^2 \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{g_2 v}{2 \cos \theta_W} \right)^2 Z^\mu Z_\mu \left(\frac{H}{v} + 1 \right)^2. \tag{594}
\end{aligned}$$

Retornando a la ec. (587), tenemos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{WBH} &= \widetilde{(\mathcal{D}_\mu \Phi)} \cdot \mathcal{D}^\mu \Phi - \mu^2 \tilde{\Phi} \cdot \Phi - \lambda (\tilde{\Phi} \cdot \Phi)^2 \\
 &= \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - V(H) \\
 &\quad + \frac{1}{2} m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ \left(\frac{H}{v} + 1 \right)^2 + \frac{1}{2} m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ \left(\frac{H}{v} + 1 \right)^2 + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu \left(\frac{H}{v} + 1 \right)^2,
 \end{aligned} \tag{595}$$

donde el termino 1 en la expansión binomial $(H/v + 1)^2$ corresponde al término de masa en cada caso:

- Masas gauge:

$$m_W = \frac{g_2 v}{2} \quad m_Z = \frac{g_2 v}{2 \cos \theta_W}, \tag{596}$$

y

$$m_Z = \frac{m_W}{\cos \theta_W}. \tag{597}$$

- Ver eq. (521)

$$\begin{aligned} V(H) &= \frac{1}{2} m_H^2 H^2 + \lambda v H^3 + \frac{1}{4} \lambda H^4 \\ &= \frac{1}{2} m_H^2 H^2 \left(\frac{H}{2v} + 1 \right)^2, \end{aligned} \quad (598)$$

con

$$m_H^2 = -2\mu^2 = 2\lambda v^2, \quad (599)$$

además:

-

$$\begin{pmatrix} W_\mu^3 \\ B_\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_W & \sin \theta_W \\ -\sin \theta_W & \cos \theta_W \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_\mu \\ A_\mu \end{pmatrix}, \quad (600)$$

tal que

$$g_2 \sin \theta_W = g_1 \cos \theta_W. \quad (601)$$

El Lagrangiano gauge

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4} G_a^{\mu\nu} G_{\mu\nu}^a - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu}, \quad (602)$$

Se debe expresar en la base de Z_μ, A_μ . Los detalles están en

<https://www.overleaf.com/read/pxkqqdhrqyrk>

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{gauge}} = & -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z^{\mu\nu} Z_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (F_W^\dagger)^{\mu\nu} (F_W)_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a \\ & - ie \cot \theta_W \left[(F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ Z_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- Z_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ Z^{\mu\nu} \right] \\ & - ie \left[(F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ A_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- A_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ F^{\mu\nu} \right] \\ & - \frac{e^2}{2 \sin^2 \theta_W} \left[(W_\mu^+ W^{\mu-})^2 - W_\mu^+ W^{\mu+} W_\nu^- W^{\nu-} \right] \\ & - e^2 \cot^2 \theta_W (W_\mu^+ W^{\mu-} Z_\nu Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- Z^\nu) \\ & - e^2 \cot^2 \theta_W (2 W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu Z^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- A^\nu) \\ & - e^2 (W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu A^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- A^\nu), \end{aligned} \quad (603)$$

donde

$$F^{\mu\nu} = \partial^\mu A^\nu_a - \partial^\nu A^\mu_a,$$

$$Z^{\mu\nu} = \partial^\mu Z^\nu_a - \partial^\nu Z^\mu_a,$$

$$(F_W)_{\mu\nu} = \partial_\mu W_\nu^+ - \partial_\nu W_\mu^+ \quad (604)$$

En el gauge unitario

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{Yukawa}}^{\text{lepton}} &= h_e (e_R)^\dagger \epsilon^{ab} L_a \tilde{\Phi}_b + \text{h.c} \\
 &= \frac{h_e}{\sqrt{2}} \left[(e_L)^\dagger e_R + (e_R)^\dagger e_L \right] [H(x) + v] \\
 &= \frac{h_e v}{\sqrt{2}} \left[(e_L)^\dagger e_R + (e_R)^\dagger e_L \right] \left[\frac{H(x)}{v} + 1 \right].
 \end{aligned} \tag{605}$$

Note que de forma autoconsistente

$$-Y_R + Y_L - Y_\Phi = -Q_e + Y_L - Y_\Phi = 1 - 1/2 - 1/2 = 0. \tag{606}$$

Definiendo

$$m_e = \frac{h_e v}{\sqrt{2}} \tag{607}$$

tenemos

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = m_e (e_L)^\dagger e_R + \frac{m_e}{v} (e_L)^\dagger e_R H + \text{h.c.} \tag{608}$$

Definiendo los fermiones de Dirac, términos de espinores de Weyl como

$$e = \begin{pmatrix} e_L \\ e_R \end{pmatrix}, \quad (609)$$

y usando la ec. (??), podemos escribir

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= m_e \bar{e} e \left[\frac{H(x)}{v} + 1 \right] \\ &= m_e \bar{e} e + \frac{m_e}{v} \bar{e} e H \end{aligned}$$

Vemos entonces que si la masa de los fermiones no es fundamental sino emergente, necesariamente se predice la existencia de interacciones entre fermiones y el Higgs que son proporcionales a la masa del fermión que recibe la masa desde la RES.

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}^{\text{lepton}} = & i \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu L + i (e_R)^* \sigma^\mu \partial_\mu e_R + m_e \left[(e_L)^\dagger e_R + \text{h.c.} \right] \left(\frac{H}{v} + 1 \right) \\
& - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z^{\mu\nu} Z_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (F_W^\dagger)^{\mu\nu} (F_W)_{\mu\nu} \\
& + \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2} m_H^2 H^2 \left(\frac{H}{2v} + 1 \right)^2 \\
& + \left(m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu \right) \left(\frac{H}{v} + 1 \right)^2 \\
& + e (e_L)^* \cdot \bar{\sigma}^\mu e_L A_\mu + e (e_R)^* \sigma^\mu e_R A_\mu \\
& + \frac{e}{2 \cos \theta_W \sin \theta_W} \left\{ (\nu_L)^* \bar{\sigma}^\mu \nu_L - (e_L)^* \bar{\sigma}^\mu e_L + 2 \sin^2 \theta_W [(e_L)^* \bar{\sigma}^\mu e_L + (e_R)^* \sigma^\mu e_R] \right\} Z_\mu \\
& + \frac{g_2}{\sqrt{2}} [(\nu_L)^* \bar{\sigma}^\mu e_L W_\mu^+ + \text{h.c.}] \\
& - ie \cot \theta_W \left[(F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ Z_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- Z_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ Z^{\mu\nu} \right] \\
& - ie \left[(F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ A_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- A_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ F^{\mu\nu} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{e^2}{2 \sin^2 \theta_W} \left[(W_\mu^+ W^{\mu-})^2 - W_\mu^+ W^{\mu+} W_\nu^- W^{\nu-} \right] \\
 & - e^2 \cot^2 \theta_W (W_\mu^+ W^{\mu-} Z_\nu Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- Z^\nu) \\
 & - e^2 \cot^2 \theta_W (2 W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu Z^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- A^\nu) \\
 & - e^2 (W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu A^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- A^\nu).
 \end{aligned} \tag{610}$$

Entonces

$$\gamma_5 = \begin{pmatrix} -\mathbf{1} & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \quad (611)$$

Con esto podemos definir los proyectores

$$P_L = \frac{\mathbf{1}_{4 \times 4} - \gamma_5}{2} \quad P_R = \frac{\mathbf{1}_{4 \times 4} + \gamma_5}{2}. \quad (612)$$

En adelante se dejará implícito el carácter 4×4 de la identidad.

Sea Ψ un espinor de Dirac construido a partir de dos espinores de Weyl

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}. \quad (613)$$

Tenemos las siguientes propiedades

$$P_L \Psi = \frac{1 - \gamma_5}{2} \Psi \quad P_R \Psi = \frac{1 + \gamma_5}{2} \Psi$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_R \end{pmatrix},
\end{aligned} \tag{614}$$

Además, as matrices $P_{L,R}$ tienen las propiedades

$$\begin{aligned}
P_L + P_R &= 1 & P_{L,R}^2 &= P_{L,R} P_{L,R} = P_{L,R} \\
P_L P_R &= 0 & P_{L,R}^\dagger &= P_{L,R}.
\end{aligned} \tag{615}$$

Usando la ec. (??)

$$P_{L,R} \gamma^\mu = \frac{1 \mp \gamma_5}{2} \gamma^\mu = \gamma^\mu \frac{1 \pm \gamma_5}{2} = \gamma^\mu P_{R,L} \tag{616}$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned}
\overline{\Psi}_{L,R} &= (\Psi_{L,R})^\dagger \gamma^0 \\
&= (P_{L,R} \Psi)^\dagger \gamma^0
\end{aligned}$$

$$= \psi^\dagger P_{L,R} \gamma^0, \quad (617)$$

y usando (616)

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}_{L,R} &= \psi^\dagger \gamma^0 P_{R,L} \\ &= \overline{\Psi} P_{R,L}. \end{aligned} \quad (618)$$

De modo que

$$\begin{aligned} \overline{\Psi}_L \gamma^\mu \Psi_L &= \overline{\Psi} P_R \gamma^\mu P_L \Psi = \overline{\Psi} \gamma^\mu P_L^2 \Psi = \overline{\Psi} \gamma^\mu P_L \Psi = \psi^\dagger \gamma^0 \gamma^\mu P_L \Psi \\ &= \begin{pmatrix} \psi_L^\dagger & \psi_R^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \overline{\sigma}^\mu & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \psi_L^\dagger & \psi_R^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \overline{\sigma}^\mu \psi_L \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \psi_L^\dagger & \psi_R^\dagger \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{\sigma}^\mu \psi_L \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \psi_L^\dagger \overline{\sigma}^\mu \psi_L. \end{aligned} \quad (619)$$

Similarmente

$$\overline{\Psi}_R \gamma^\mu \Psi_R = \overline{\Psi} \gamma^\mu P_R \Psi = \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R. \quad (620)$$

Podemos extender ahora los resultados de la ec. (??) para corrientes escalares y vectoriales. En términos de los campos de Weyl una corriente escalar (S), pseudoscalar (P), vectorial (V), axial (A), V-A y V+A de espinos Dirac, se pueden escribir respectivamente como

$$\begin{aligned}
 \text{S:} \quad & \overline{\Psi} \Psi = (\psi_R)^\dagger \psi_L + (\psi_L)^\dagger \psi_R \\
 \text{P:} \quad & \overline{\Psi} \gamma_5 \Psi = (\psi_L)^\dagger \psi_R - (\psi_R)^\dagger \psi_L \\
 \text{V:} \quad & \overline{\Psi} \gamma^\mu \Psi = \psi_L^\dagger \overline{\sigma}^\mu \psi_L + \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R \\
 \text{A:} \quad & \overline{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 \Psi = \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R - \psi_L^\dagger \overline{\sigma}^\mu \psi_L \\
 \text{V-A:} \quad & \overline{\Psi} \gamma^\mu P_L \Psi = \psi_L^\dagger \overline{\sigma}^\mu \psi_L \\
 \text{V+A:} \quad & \overline{\Psi} \gamma^\mu P_R \Psi = \psi_R^\dagger \sigma^\mu \psi_R.
 \end{aligned} \quad (621)$$

Para escribir el Lagrangiano en términos de espinores de 4 componentes, debemos reescribir los acoplamientos fermiónicos del Lagrangiano en (610). Entonces

$$\begin{aligned}
 \overline{\nu}_L \gamma^\mu e_L W_\mu^+ &= \overline{\nu} P_R \gamma^\mu P_L e W_\mu^+ \\
 &= \overline{\nu} \gamma^\mu P_L^2 e W_\mu^+ \\
 &= \overline{\nu} \gamma^\mu P_L e W_\mu^+ \\
 &= \frac{1}{2} \overline{\nu} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) e W_\mu^+, \tag{622}
 \end{aligned}$$

y además la parte \mathcal{L}_{ZL} dada en la ec. (575). Para poder tener las corrientes en términos de la ec. (621), debemos sumar y restar $\frac{1}{2} (e_R)^\dagger \sigma^\mu e_R$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{ZL} = \frac{e}{2c_W s_W} \bigg\{ &(\nu_L)^* \bar{\sigma}^\mu \nu_L \\
 &+ \frac{1}{2} \left[(e_R)^\dagger \sigma^\mu e_R - (e_L)^* \bar{\sigma}^\mu e_L \right] + \left(-\frac{1}{2} + 2s_W^2 \right) \left[(e_L)^* \bar{\sigma}^\mu e_L + (e_R)^\dagger \sigma^\mu e_R \right] \bigg\} Z_\mu \tag{623}
 \end{aligned}$$

Claramente la corriente de neutrinos es del tipo V-A, pero la corriente de electrones tiene dos contribuciones: una tipo A con coeficiente $1/2$ y una tipo V con coeficiente $-1/2 + 2 \sin^2 \theta_W$, como se muestra en la Tabla 9. Entonces

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{ZL} &= \frac{e}{2c_W s_W} \left\{ \bar{\nu} \gamma^\mu P_L \nu + \frac{1}{2} \bar{e} \gamma^\mu \gamma_5 e + \left(-\frac{1}{2} + 2s_W^2 \right) \bar{e} \gamma^\mu e \right\} Z_\mu \\
 &= \frac{e}{2c_W s_W} \left\{ \bar{\nu} \gamma^\mu \frac{(1 - \gamma_5)}{2} \nu + \bar{e} \gamma^\mu \left[\left(-\frac{1}{2} + 2s_W^2 \right) + \frac{1}{2} \gamma_5 \right] e \right\} Z_\mu \\
 &= \frac{e}{2c_W s_W} \left\{ \bar{\nu} \gamma^\mu \frac{(1 - \gamma_5)}{2} \nu + \bar{e} \gamma^\mu \left[\frac{(-1 + 4s_W^2) + \gamma_5}{2} \right] e \right\} Z_\mu, \tag{624}
 \end{aligned}$$

Las otras corrientes del modelo con leptones son la corriente tipo S generada por el Higgs, la tipo V generada por el fotón y la V-A generada por los bosones gauge cargados W_μ^\pm .

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{1 \text{ gen}} = & i\bar{\nu}\gamma^\mu\partial_\mu\nu + \bar{e}(i\gamma^\mu\partial_\mu - m_e)e + \frac{m_e}{v}\bar{e}eH \\
 & - \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \frac{1}{4}Z^{\mu\nu}Z_{\mu\nu} - \frac{1}{2}(F_W^\dagger)^{\mu\nu}(F_W)_{\mu\nu} \\
 & + \frac{1}{2}\partial^\mu H\partial_\mu H - \frac{1}{2}m_H^2 H^2 \left(\frac{H}{2v} + 1\right)^2 \\
 & + \left(m_W^2 W^{\mu-}W_\mu^+ + \frac{1}{2}m_Z^2 Z^\mu Z_\mu\right) \left(\frac{H}{v} + 1\right)^2 \\
 & + e\bar{e}\gamma^\mu e A_\mu \\
 & + \frac{e}{2\cos\theta_W\sin\theta_W} \left\{ \bar{\nu}\gamma^\mu \frac{(1-\gamma_5)}{2} \nu + \bar{e}\gamma^\mu \left[\frac{(-1+4s_W^2)}{2} + \gamma_5 \right] e \right\} Z_\mu \\
 & + \frac{g_2}{2\sqrt{2}} [\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)eW_\mu^+ + \text{h.c.}] \\
 & - ie\cot\theta_W \left[(F_W^\dagger)^{\mu\nu}W_\mu^+Z_\nu - (F_W)^{\mu\nu}W_\mu^-Z_\nu + W_\mu^-W_\nu^+Z^{\mu\nu} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -ie \left[(F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ A_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- A_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ F^{\mu\nu} \right] \\
& - \frac{e^2}{2 \sin^2 \theta_W} \left[(W_\mu^+ W^{\mu-})^2 - W_\mu^+ W^{\mu+} W_\nu^- W^{\nu-} \right] \\
& - e^2 \cot^2 \theta_W (W_\mu^+ W^{\mu-} Z_\nu Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- Z^\nu) \\
& - e^2 \cot^2 \theta_W (2 W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu Z^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- A^\nu) \\
& - e^2 (W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu A^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- A^\nu) .
\end{aligned} \tag{625}$$

De la ec. (564) tenemos

$$\mathcal{L}_{\text{fermion}} = i\tilde{Q} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu Q + i\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu L + i(e_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R + i(d_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu d_R + i(u_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu u_R. \quad (626)$$

Donde,

$$\begin{aligned} \tilde{Q} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu Q &= \epsilon_{ab} \tilde{Q}^a \bar{\sigma}^\mu (\mathcal{D}_\mu Q)^b \\ \tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu L &= \epsilon_{ab} \tilde{L}^a \bar{\sigma}^\mu (\mathcal{D}_\mu L)^b. \end{aligned} \quad (627)$$

Note que las partes derechas involucran necesesariamente una simetría $U(1)_Y$ de la que debemos obtener la interacción electromagnética entre fermiones derechos. Por eso la implementación la simetría $SU(2)_L$ debe hacerse en el contexto del Grupo Gauge semisimple $SU(2)_L \times U(1)_Y$.

Generalizando para los otros campos, tenemos

$$\mathcal{L}_{AZL} \rightarrow \sum_{F=Q,L,e_R,d_R,u_R} \left\{ \frac{e}{2c_W s_W} \tilde{F} \cdot \bar{\sigma}^\mu [\tau_3 - 2s_W^2 Q_F] F Z_\mu + e \tilde{F} \cdot \bar{\sigma}^\mu Q_F F A_\mu \right\}, \quad (628)$$

con

$$\tilde{F} \cdot \bar{\sigma}^\mu \rightarrow F^\dagger \sigma^\mu \quad \text{for } F = e_R, d_R, u_R. \quad (629)$$

Generalizando para todos los campos:

$$\mathcal{L}_{WL} \rightarrow \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left[\nu_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu e_L W_\mu^+ + u_L^\dagger \bar{\sigma}^\mu d_L W_\mu^+ + \text{h.c.} \right]. \quad (630)$$

Usando los acoplamientos gauge de los quarks con los gluones (477), de los fermiones con el W_μ^\pm (630) y con Z_μ y A_μ (628) para expandir $\mathcal{L}_{\text{fermion}}$ en (626), tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{fermion}} &= i\tilde{Q} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu Q + i\tilde{L} \cdot \bar{\sigma}^\mu \mathcal{D}_\mu L + i(e_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R + i(d_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu d_R + i(u_R)^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu u_R \\ &= i(u_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu u_L + i(u_R)^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu u_R + i(d_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu d_L + i(d_R)^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu d_R \\ &\quad + i(e_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu e_L + i(e_R)^\dagger \sigma^\mu \partial_\mu e_R + i(\nu_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu \nu_L \\ &\quad + g_s \left((u_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \frac{\lambda^a}{2} u_L + (u_R)^\dagger \sigma^\mu \frac{\lambda^a}{2} u_R + (d_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \frac{\lambda^a}{2} d_L + (d_R)^\dagger \sigma^\mu \frac{\lambda^a}{2} d_R \right) G_\mu^a \\ &\quad + \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left[(\nu_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu e_L W_\mu^+ + (u_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu d_L W_\mu^+ + \text{h.c.} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{F=Q,L,e_R,d_R,u_R} \frac{e}{2c_W s_W} \tilde{F} \cdot \bar{\sigma}^\mu \left[\tau_3 - 2s_W^2 \hat{Q}_L \right] F Z_\mu \\
& + e \left[(e_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \hat{Q}_e e_L + (e_R)^\dagger \sigma^\mu \hat{Q}_e e_R \right. \\
& \quad \left. + (u_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \hat{Q}_u u_L + (u_R)^\dagger \sigma^\mu \hat{Q}_u u_R + (d_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu \hat{Q}_d d_L + (d_R)^\dagger \sigma^\mu \hat{Q}_d d_R \right] A_\mu. \quad (631)
\end{aligned}$$

En el gauge unitario

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} &= h_e (e_R)^\dagger \epsilon^{ab} L_a \tilde{\Phi}_b + h_d (d_R)^\dagger \epsilon^{ab} Q_a \tilde{\Phi}_b + h_u (u_R)^\dagger \epsilon_{ab} Q_a \Phi_b + \text{h.c} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[h_e ((e_L)^\dagger e_R + (e_R)^\dagger e_L) + h_d ((d_L)^\dagger d_R + (d_R)^\dagger d_L) + h_u ((u_L)^\dagger u_R + (u_R)^\dagger u_L) \right] \times \\
 &\quad [H(x) + v] .
 \end{aligned} \tag{632}$$

Definiendo

$$m_f = \frac{h_f v}{\sqrt{2}} \tag{633}$$

tenemos

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = m_e (e_L)^\dagger e_R + m_d (d_L)^\dagger d_R + m_u (u_L)^\dagger u_R + \frac{m_e}{v} (e_L)^\dagger e_R H + \frac{m_d}{v} (d_L)^\dagger d_R H + \frac{m_u}{v} (u_L)^\dagger u_R H + \text{h.c.} \tag{634}$$

Definiendo los fermiones de Dirac, términos de espinores de Weyl como

$$e = \begin{pmatrix} e_L \\ e_R \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} d_L \\ d_R \end{pmatrix}, \quad u = \begin{pmatrix} u_L \\ u_R \end{pmatrix} \quad (635)$$

y usando la ec. (??), podemos escribir

$$\mathcal{L} = \frac{v}{\sqrt{2}} (h_e \bar{e}e + h_d \bar{d}d + h_u \bar{u}u) \left[\frac{H(x)}{v} + 1 \right].$$

Definiendo

$$m_f = \frac{h_f v}{\sqrt{2}} \quad (636)$$

tenemos

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = m_e \bar{e}e + m_d \bar{d}d + m_u \bar{u}u + \frac{m_e}{v} \bar{e}eH + \frac{m_d}{v} \bar{d}dH + \frac{m_u}{v} \bar{u}uH. \quad (637)$$

Vemos entonces que si la masa de los fermiones no es fundamental sino emergente, necesariamente se predice la existencia de interacciones entre fermiones y el Higgs!

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{1 \text{ gen}} = & \sum_f i \tilde{f} \cdot \bar{\sigma}^\mu \partial_\mu f + \sum_{g=e,u,d} m_g \left[(g_L)^\dagger g_R + \text{h.c} \right] \\
 & - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z^{\mu\nu} Z_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (F_W^\dagger)^{\mu\nu} (F_W)_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a \\
 & + \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2} m_H^2 H^2 \left(1 + \frac{H}{v} + \frac{H^2}{4v^2} \right) \\
 & + \left(m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu \right) \left(1 + 2 \frac{H}{v} + \frac{H^2}{v^2} \right) \\
 & + g_s \sum_q \tilde{q} \cdot \bar{\sigma}^\mu \left(\frac{\lambda_a}{2} \right) q G_\mu^a + e \sum_f \tilde{f} \cdot \bar{\sigma}^\mu Q_f f A_\mu \\
 & + \frac{e}{2 \cos \theta_W \sin \theta_W} \sum_f \tilde{f} \cdot \bar{\sigma}^\mu \left[t_f - 2 s_W^2 Q_f \right] f Z_\mu \\
 & + \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left[\sum_{f=\nu,u} (f_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu f_L' W_\mu^+ + \text{h.c} \right] + \sum_{g=e,u,d} \frac{m_g}{v} \left[(g_L)^\dagger g_R + \text{h.c} \right] H
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -ie \cot \theta_W \left[(F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ Z_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- Z_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ Z^{\mu\nu} \right] \\
& -ie \left[(F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ A_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- A_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ F^{\mu\nu} \right] \\
& - \frac{e^2}{2 \sin^2 \theta_W} \left[(W_\mu^+ W^{\mu-})^2 - W_\mu^+ W^{\mu+} W_\nu^- W^{\nu-} \right] \\
& - e^2 \cot^2 \theta_W (W_\mu^+ W^{\mu-} Z_\nu Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- Z^\nu) \\
& - e^2 \cot^2 \theta_W (2 W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu Z^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- A^\nu) \\
& - e^2 (W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu A^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- A^\nu) \\
& - \frac{1}{4} \left(g_s \tilde{G}_a^{\mu\nu} f_{ade} G_\mu^d G_\nu^e + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \right). \tag{638}
\end{aligned}$$

	u	d	ν_e	e
$2v_f$	$1 - \frac{8}{3} \sin^2 \theta_W$	$-1 + \frac{4}{3} \sin^2 \theta_W$	1	$-1 + 4 \sin^2 \theta_W$
$2a_f$	1	-1	1	-1

Tabla: Acoplamientos de corrientes neutras

Recopilando los resultados para \mathcal{L}_{WBH} (595), \mathcal{L}_{Yukawa} (637), $\mathcal{L}_{fermion}$ (??), y \mathcal{L}_{gauge} (603), tenemos para $f = \nu_e, e, u, d$; $q = u, d$ [con $f' = e$ (d) para $f = \nu_e$ (u)], podemos escribir en notación de Dirac:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{1 \text{ gen}} = & \sum_f \bar{f} (i\gamma^\mu \partial_\mu - m_f) f \\
 & - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z^{\mu\nu} Z_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (F_W^\dagger)^{\mu\nu} (F_W)_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a \\
 & + \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2} m_H^2 H^2 \left(1 + \frac{H}{v} + \frac{H^2}{4v^2} \right) \\
 & + \left(m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu \right) \left(1 + 2\frac{H}{v} + \frac{H^2}{v^2} \right) \\
 & + g_s \sum_q \bar{q} \gamma^\mu \left(\frac{\lambda_a}{2} \right) q G_\mu^a + e \sum_f \bar{f} \gamma^\mu Q_f f A_\mu \\
 & + \frac{e}{2 \cos \theta_W \sin \theta_W} \sum_f \bar{f} \gamma^\mu (v_f - a_f \gamma_5) f Z_\mu
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{g_2}{2\sqrt{2}} \left[\sum_{f=\nu_e, u} \bar{f} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) f' W_\mu^+ + \text{h.c} \right] + \sum_f \frac{m_f}{v} \bar{f} f H \\
& - ie \cot \theta_W \left[(F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ Z_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- Z_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ Z^{\mu\nu} \right] \\
& - ie \left[(F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ A_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- A_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ F^{\mu\nu} \right] \\
& - \frac{e^2}{2 \sin^2 \theta_W} \left[(W_\mu^+ W^{\mu-})^2 - W_\mu^+ W^{\mu+} W_\nu^- W^{\nu-} \right] \\
& - e^2 \cot^2 \theta_W (W_\mu^+ W^{\mu-} Z_\nu Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- Z^\nu) \\
& - e^2 \cot^2 \theta_W (2 W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu Z^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- A^\nu) \\
& - e^2 (W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu A^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- A^\nu) \\
& - \frac{1}{4} \left(g_s \tilde{G}_a^{\mu\nu} f_{ade} G_\mu^d G_\nu^e + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \right) .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_i^\alpha &= \begin{pmatrix} u_L^{i\alpha} \\ d_L^{i\alpha} \end{pmatrix} : & Q_1^\alpha &= \begin{pmatrix} u_L^\alpha \\ d_L^\alpha \end{pmatrix}, & Q_2^\alpha &= \begin{pmatrix} c_L^\alpha \\ s_L^\alpha \end{pmatrix}, & u_R^i &: u_R, c_R, \\
& & & & & & d_R^i &: d_R, s_R.
\end{aligned} \tag{639}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{Yuk}}^{ud} &= \left[m_u (u_R)^\dagger u_L + m_c (c_R)^\dagger c_L + M_{11}^d (d_R)^\dagger d'_L + M_{12}^d (d_R)^\dagger s'_L + M_{21}^d (s_R)^\dagger d'_L + M_{22}^d (s_R)^\dagger s'_L \right] \times \\
&\quad \left(\frac{H}{v} + 1 \right) \\
&= \left\{ m_u (u_R)^\dagger u_L + m_c (c_R)^\dagger c_L + \begin{bmatrix} (d_R)^\dagger & (s_R)^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11}^d & M_{12}^d \\ M_{21}^d & M_{22}^d \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d'_L \\ s'_L \end{pmatrix} \right\} \left(\frac{H}{v} + 1 \right). \quad (640)
\end{aligned}$$

Definimos entonces la matriz de masa del sector down para dos familias como

$$M = \begin{bmatrix} M_{11}^d & M_{12}^d \\ M_{21}^d & M_{22}^d \end{bmatrix}. \quad (641)$$

Una matriz general es más simple de diagonalizar que una matriz simétrica, pues es suficiente usar una única multiplicación matricial con una matriz de rotación⁶

$$V_c = \begin{bmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{bmatrix}, \quad (642)$$

bien sea a izquierda o a derecha, es decir, la otra matriz que en el caso simétrico corresponde a la transpuesta de la matriz de rotación, en el caso general se puede escoger como la identidad. Si escogemos multiplicar a izquierda, no se generarían mezclas en ningún otro sector de Lagrangiano. Por lo tanto escogeremos el caso más interesante de multiplicación a derecha, es decir

$$M \cdot V = \begin{bmatrix} M_{11}^d & M_{12}^d \\ M_{21}^d & M_{22}^d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_d & 0 \\ 0 & m_s \end{bmatrix}. \quad (643)$$

El problema se puede invertir, de manera que podemos determinar las entradas de la matriz en términos de los autovalores m_d , m_s y el ángulo de mezcla de Cabibbo θ_c

$$M = \begin{bmatrix} M_{11}^d & M_{12}^d \\ M_{21}^d & M_{22}^d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_d \cos \theta_c & -m_d \sin \theta_c \\ m_s \sin \theta_c & m_s \cos \theta_c \end{bmatrix}. \quad (644)$$

Haciendo explícitamente la rotación de la base de interacción a la base de autoestados de masa

$$\begin{bmatrix} d'_L \\ s'_L \end{bmatrix} = V_c \begin{bmatrix} d_L \\ s_L \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_c & \sin \theta_c \\ -\sin \theta_c & \cos \theta_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_L \\ s_L \end{bmatrix}, \quad (645)$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{Yuk}^{ud} &= \left\{ m_u (u_R)^\dagger u_L + m_c (c_R)^\dagger c_L + \begin{bmatrix} (d_R)^\dagger & (s_R)^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{11}^d & M_{12}^d \\ M_{21}^d & M_{22}^d \end{bmatrix} V_c V_c^T \begin{pmatrix} d'_L \\ s'_L \end{pmatrix} \right\} \left(\frac{H}{v} + 1 \right) \\
 &= \left\{ m_u (u_R)^\dagger u_L + m_c (c_R)^\dagger c_L + \begin{bmatrix} (d_R)^\dagger & (s_R)^\dagger \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m_d & 0 \\ 0 & m_s \end{bmatrix} \begin{pmatrix} d_L \\ s_L \end{pmatrix} \right\} \left(\frac{H}{v} + 1 \right) \\
 &= \left[m_u (u_R)^\dagger u_L + m_c (c_R)^\dagger c_L + m_d (d_R)^\dagger d_L + m_s (s_R)^\dagger s_L \right] \left(\frac{H}{v} + 1 \right). \tag{646}
 \end{aligned}$$

El único sector afectado por la rotación (ver la demostración general más adelante en la Sección ??) es el de las corrientes cargadas

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_{WQ} &= \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left[(u_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu d'_L W_\mu^+ + (c_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu s'_L W_\mu^+ + \text{h.c.} \right] \\
 &= \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left\{ \begin{bmatrix} (u_L)^\dagger & (c_L)^\dagger \end{bmatrix} \bar{\sigma}^\mu \begin{bmatrix} d'_L \\ s'_L \end{bmatrix} W_\mu^+ + \text{h.c.} \right\} \\
 &= \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left\{ \begin{bmatrix} (u_L)^\dagger & (c_L)^\dagger \end{bmatrix} \bar{\sigma}^\mu V_c \begin{bmatrix} d_L \\ s_L \end{bmatrix} W_\mu^+ + \text{h.c.} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left\{ \begin{bmatrix} (u_L)^\dagger & (c_L)^\dagger \end{bmatrix} \bar{\sigma}^\mu \begin{bmatrix} \cos \theta_c d_L + \sin \theta_c s_L \\ -\sin \theta_c d_L + \cos \theta_c s_L \end{bmatrix} W_\mu^+ + \text{h.c.} \right\} \\
&= \frac{g_2}{\sqrt{2}} \left\{ \left[\cos \theta_c (u_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu d_L + \sin \theta_c (u_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu s_L - \sin \theta_c (c_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu d_L + \cos \theta_c (c_L)^\dagger \bar{\sigma}^\mu s_L \right] W_\mu^+ + \text{h.c.} \right\}
\end{aligned} \tag{647}$$

De hecho, la constante de Fermi asociada al decaimiento débil del quark down, G_β , también es conocida y resulta ser diferente a la constante de Fermi asociada al decaimiento del muón, G_F . Sin embargo, la posibilidad de la mezcla nos permite mantener una única constante de Fermi tal que

$$G_\beta = G_F V_{c11} = G_F \cos \theta_c . \tag{648}$$

Esta expresión será discutida más en detalle en la sección de fenomenología ??.

La explicación que hemos presentado de porque la constante G_β asociada al decaimiento del protón es menor que la correspondiente constante G_F asociada al decaimiento del muon recibe el nombre de mecanismo GIM []. Este mecanismo predice las transiciones integeneracionales $s \rightarrow u W_\mu^-$ y $c \rightarrow d W_\mu^-$ las cuales se han medido con las probabilidades esperadas.

Es de anotar que usar una segunda matriz de rotación diferente a la identidad no afecta el resultado, como demostraremos a continuación en la Sección ?? para el caso de tres generaciones.

⁶donde θ_c es el ángulo de Cabibbo []

El Modelo Estándar está compuesto de las siguientes tres familias de fermiones $i = 1, 2, 3$. A cada familia se le asigna una carga de *sabor* diferente

$$\begin{aligned}
 L_i &= \begin{pmatrix} \nu_L^i \\ e_L^i \end{pmatrix} : & L_1 &= \begin{pmatrix} \nu_L^e \\ e_L \end{pmatrix} & L_2 &= \begin{pmatrix} \nu_L^\mu \\ \mu_L \end{pmatrix} & L_3 &= \begin{pmatrix} \nu_L^\tau \\ \tau_L \end{pmatrix} & e_R^i &: e_R, \mu_R, \tau_R \\
 Q_i^\alpha &= \begin{pmatrix} u_L^{i\alpha} \\ d_L^{i\alpha} \end{pmatrix} : & Q_1^\alpha &= \begin{pmatrix} u_L^\alpha \\ d_L^\alpha \end{pmatrix} & Q_2^\alpha &= \begin{pmatrix} c_L^\alpha \\ s_L^\alpha \end{pmatrix} & Q_3^\alpha &= \begin{pmatrix} t_L^\alpha \\ b_L^\alpha \end{pmatrix} & u_R^i &: u_R, c_R, t_R \\
 & & & & & & & & d_R^i &: d_R, s_R, b_R. \quad (649)
 \end{aligned}$$

Con

$$Y_{L_i} = -\frac{1}{2} \quad Y_{Q_i} = \frac{1}{6} \quad Y_{e_R^i} = -1 \quad Y_{u_R^i} = \frac{2}{3} \quad Y_{d_R^i} = -\frac{1}{3}. \quad (650)$$

De los procesos entre familias, es decir de cambio de sabor, sabemos que

- No se han observado procesos de corrientes neutras que cambian sabor.
- Los bosones gauge cargados W_μ^\pm decaen siempre a leptones de la misma generación y con la misma intensidad.

Proponemos entonces el Lagrangiano

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & i\tilde{Q}'_i \bar{\sigma}^\mu \cdot \mathcal{D}_\mu Q'^i + i\tilde{L}'_i \bar{\sigma}^\mu \cdot \mathcal{D}_\mu L'^i + i(e'_R)_i^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu e_R'^i + i(d'_R)_i^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu d_R'^i + i(u'_R)_i^\dagger \sigma^\mu \mathcal{D}_\mu u_R'^i \\
& - \sum_{ij} \left(h_{ij}^E (e'_R)_i^\dagger L'_j \cdot \tilde{\Phi} + h_{ij}^D (d'_R)_i^\dagger Q'_j \cdot \tilde{\Phi} + h_{ij}^U (u'_R)_i^\dagger Q'_j \cdot \Phi + \text{h.c} \right) \\
& - \frac{1}{4} W_i^{\mu\nu} W_{\mu\nu}^i - \frac{1}{4} B^{\mu\nu} B_{\mu\nu} \\
& + \left(\widetilde{\mathcal{D}_\mu \Phi} \right) \cdot \mathcal{D}^\mu \Phi - \mu^2 \tilde{\Phi} \cdot \Phi - \lambda \left(\tilde{\Phi} \cdot \Phi \right)^2 .
\end{aligned} \tag{651}$$

Para aclarar la notación, obviando de momento la definición definitiva de h_{ij} y las primas sobre los campos, consideremos el Lagrangiano de Yukawa para el sector down

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} \supset & h_{ij}^D (d'_R)_i^\dagger Q'_j \cdot \tilde{\Phi} + \text{h.c} \\
\supset & - h_{ij}^D d_{Ri}^\dagger \epsilon_{ab} \tilde{\Phi}^a Q_j^b + \text{h.c} \\
\supset & - h_{ij}^D \epsilon_{ab} d_{Ri}^{\dagger\alpha} \tilde{\Phi}^a Q_{j\alpha}^b + \text{h.c} \\
\supset & - h_{ij}^D \epsilon_{ab} (d_{R\gamma}^\dagger)_i^\alpha \tilde{\Phi}^a Q_{j\alpha}^{b\gamma} + \text{h.c} ,
\end{aligned} \tag{652}$$

donde i, a, γ, α son índices en los espacios de familia, $SU(2)_L$, $SU(3)_c$ y de Weyl, respectivamente. Por ejemplo el primer termino de la sumatoria

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \supset & h_{11}^D (d_{R1}^\dagger)_1^\alpha \gamma_0^{\eta\rho} \tilde{\Phi}^1 Q_{1\alpha}^{21} + \dots \\ & \supset h_{11}^D \overline{d_R^r} \phi^{0*} d_L^r + \dots\end{aligned}\quad (653)$$

corresponde a la interacción de Yukawa del quark down rojo (r) con un campo escalar complejo neutro en carga eléctrica pero de isospín débil 1/2. En forma compacta la primera expresión en la ec. (652) puede escribirse como (en el gauge unitario)

$$\begin{aligned}\mathcal{L} \supset & (\mathbf{d}'_R)^\dagger \mathbf{h}^D \mathbf{Q}' \cdot \tilde{\Phi} + \text{h.c} \\ \supset & (\mathbf{d}'_R)^\dagger \mathbf{h}^D \left(\frac{H(x) + v}{\sqrt{2}} \right) \mathbf{d}'_L + \text{h.c} \\ \supset & (\mathbf{d}'_R)^\dagger \frac{\mathbf{h}^D}{\sqrt{2}} H(x) \mathbf{d}'_L + (\mathbf{d}'_R)^\dagger \frac{\mathbf{h}^D v}{\sqrt{2}} \mathbf{d}'_L + \text{h.c} \\ \supset & (\mathbf{d}'_R)^\dagger \frac{\mathbf{h}^D}{\sqrt{2}} H(x) \mathbf{d}'_L + (\mathbf{d}'_R)^\dagger \mathbf{M}^D \mathbf{d}'_L + \text{h.c} .\end{aligned}\quad (654)$$

La matrix 3×3 \mathbf{M}^D es en general una matriz compleja no diagonal, la cual se debe diagonalizar con una transformación biunitaria (de similitud). Retornado a la ec. (651), tenemos que para definir apropiadamente la masa de los quarks, rotamos de los autoestados de interacción a los autoestados de masa con la matrices unitarias

$$d_{R,Lj}' = (V_{R,L}^D)_{jk} d_{R,Lk} \quad (d_{R,L}^{\prime\dagger})_j = (d_{R,L}^{\prime\dagger})_k (V_{R,L}^{D\dagger})_{kj} \quad (655)$$

Tal que

$$(V_{R,L}^{D\dagger})_{ij} (V_{R,L}^D)_{jk} = \delta_{ik} \quad (V_R^{D\dagger})_{ki} M_{ij}^D (V_L^D)_{jl} = m_k^D \delta_{kl} \quad (656)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_R^{D\dagger} (\mathbf{M}^D \mathbf{M}^{D\dagger}) \mathbf{V}_R^D &= (\mathbf{V}_R^{D\dagger} \mathbf{M}^D \mathbf{V}_L^D) (\mathbf{V}_L^{D\dagger} \mathbf{M}^{D\dagger} \mathbf{V}_R^D) \\ &= \mathbf{M}_{\text{diag}}^D \mathbf{M}_{\text{diag}}^{D\dagger}, \end{aligned} \quad (657)$$

donde $\mathbf{M}_{\text{diag}}^D = \text{diag}(m_1^D, m_2^D, m_3^D)$,

$$\mathbf{M}_{\text{diag}}^D = \mathbf{V}_R^{D\dagger} \mathbf{M}^D \mathbf{V}_L^D. \quad (658)$$

Similarmente

$$\mathbf{V}_L^{D\dagger} \left(\mathbf{M}^{D\dagger} \mathbf{M}^D \right) \mathbf{V}_L^D = \mathbf{M}_{\text{diag}}^{D\dagger} \mathbf{M}_{\text{diag}}^D, \quad (659)$$

Con definiciones similares para los campos u_i y e_i .

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} &\supset (d'_R)_i^\dagger M_{ij}^D d'_{Lj} \\ &= (d_R)_k^\dagger (V_R^{D\dagger})_{ki} M_{ij}^D (V_L^D)_{jl} d_{Ll} \\ &= (d_R)_k^\dagger m_k^D \delta_{kl} d_{Ll} \\ &= m_k^D (d_R)_k^\dagger d_{Lk} \end{aligned} \quad (660)$$

Para las diferentes combinaciones de términos de corrientes

$$\begin{aligned} (u'_L)_i^\dagger \bar{\sigma}^\mu d'_{Li} &= (u_L)_k^\dagger \bar{\sigma}^\mu (V_L^{U\dagger})_{ki} (V_L^D)_{il} d_{Ll} \\ &= V_{kl} (u_L)_k^\dagger \bar{\sigma}^\mu d_{Ll} \\ (\nu'_L)_i^\dagger \bar{\sigma}^\mu e'_{Li} &= (\nu'_L)_i^\dagger \bar{\sigma}^\mu (V_L^E)_{ij} e_{Lj} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (\nu'_L)_i^\dagger (V_L^E)_{ij} \bar{\sigma}^\mu e_{Lj} \\
&= (\nu_L)_j^\dagger \bar{\sigma}^\mu e_{Lj}
\end{aligned} \tag{661}$$

Donde hemos definido la matriz de Cabibbo–Kobayashi–Maskawa (CKM) como

$$\begin{aligned}
V_{\text{CKM}} &= V_L^{U\dagger} V_L^D \\
V_{\text{CKM}}^\dagger V_{\text{CKM}} &= V_L^{D\dagger} V_L^U V_L^{U\dagger} V_L^D = \mathbf{1} \Rightarrow \sum_j V_{ij}^\dagger V_{jk} = \delta_{ik} \Rightarrow \sum_j V_{ji}^* V_{jk} = \delta_{ik} \Rightarrow \sum_j |V_{ji}|^2 = \sum_j |V_{ij}|^2 = 1
\end{aligned} \tag{662}$$

y los autoestados débiles de los neutrinos como

$$\nu_{Li}' = (V_L^{E\dagger})_{ij} \nu_{Lj} \tag{663}$$

Con esta definición, las corrientes débiles cargadas para los leptones siguen siendo universales. Similarmente

$$(\nu'_L)_i^\dagger \bar{\sigma}^\mu \nu_{Li}' = u_{Lk}^\dagger \bar{\sigma}^\mu (V_L^{U\dagger})_{ki} (V_L^U)_{il} u_{Ll}$$

$$\begin{aligned}
&= \delta_{kl} (u_L)_k^\dagger \bar{\sigma}^\mu u_{Ll} \\
&= (u_L)_k^\dagger \bar{\sigma}^\mu u_{Lk}
\end{aligned} \tag{664}$$

De modo que todas las corrientes neutras permanecen universales después de la redefinición de los campos fermiónicos. A éste resultado, basado en la unitariedad de las transformaciones biunitarias se le llama *Mecanismo GIM*. En muchas extensiones del Modelo Estándar las matrices que transforman los fermiones a sus autoestados de masa no son unitarias y dan lugar a corrientes débiles neutras que cambian sabor (FCNC de sus siglas en inglés).

Teniendo en cuenta estos resultados podemos escribir finalmente el Lagrangiano completo del Modelo Estándar en la Gauge Unitario, para los fermiones de Dirac:

$$f = \nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau, e, \mu, \tau, u, c, t, d, s, b; \quad q = u, c, t, d, s, b; \quad l = e, \mu, \tau \tag{665}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{\text{SM}} = & \sum_f i \bar{f} (\gamma^\mu \partial_\mu - m_f) f \\
& - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{1}{4} Z^{\mu\nu} Z_{\mu\nu} - \frac{1}{2} (F_W^\dagger)^{\mu\nu} (F_W)_{\mu\nu} - \frac{1}{4} \tilde{G}_a^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \partial^\mu H \partial_\mu H - \frac{1}{2} m_H^2 H^2 \left(1 + \frac{H}{v} + \frac{H^2}{4v^2} \right) \\
& + \left(m_W^2 W^{\mu-} W_\mu^+ + \frac{1}{2} m_Z^2 Z^\mu Z_\mu \right) \left(1 + 2 \frac{H}{v} + \frac{H^2}{v^2} \right) \\
& + g_s \sum_q \bar{q} \gamma^\mu \left(\frac{\lambda_a}{2} \right) q G_\mu^a + e \sum_f \bar{f} \gamma^\mu Q_f f A_\mu \\
& + \frac{e}{2 \cos \theta_W \sin \theta_W} \sum_f \bar{f} \gamma^\mu (v_f - a_f \gamma_5) f Z_\mu \\
& + \frac{g_2}{2\sqrt{2}} \left[\sum_{l=e}^{\tau} \bar{\nu}_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) l W_\mu^+ + \sum_{ij} V_{CKM}^{ij} \bar{u}_i \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d_j W_\mu^+ + \text{h.c.} \right] + \sum_f \frac{m_f}{v} \bar{f} f H \\
& - ie \left[(F_W^\dagger)^{\mu\nu} W_\mu^+ A_\nu - (F_W)^{\mu\nu} W_\mu^- A_\nu + W_\mu^- W_\nu^+ F^{\mu\nu} \right] \\
& - \frac{e^2}{2 \sin^2 \theta_W} \left[(W_\mu^+ W^{\mu-})^2 - W_\mu^+ W^{\mu+} W_\nu^- W^{\nu-} \right] - e^2 \cot^2 \theta_W (W_\mu^+ W^{\mu-} Z_\nu Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- Z^\nu \\
& - e^2 \cot^2 \theta_W (2 W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu Z^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- Z^\nu - W_\mu^+ Z^\mu W_\nu^- A^\nu)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - e^2 \left(W_\mu^+ W^{\mu-} A_\nu A^\nu - W_\mu^+ A^\mu W_\nu^- A^\nu \right) \\
& - \frac{1}{4} \left(g_s \tilde{G}_a^{\mu\nu} f_{ade} G_\mu^d G_\nu^e + g_s f^{abc} G_b^\mu G_c^\nu \tilde{G}_{\mu\nu}^a + g_s^2 f^{abc} f_{ade} G_b^\mu G_c^\nu G_\mu^d G_\nu^e \right) .
\end{aligned} \tag{666}$$

donde $m_{\nu_l} = 0$.

El Lagrangiano del Modelo contiene los parámetros $g_s, g, \sin \theta_W, v, m_H$. Alternativamente uno puede escoger como parámetros, en lugar de $g, \sin \theta_W, v$ [?]

$$\begin{aligned} G_F &= 1.166\,371(6) \times 10^{-5} \text{ GeV}^{-2} \\ \alpha^{-1} &= 137.035\,999\,679(94) \\ m_Z &= 91.1876(20) \text{ GeV} \\ \alpha_s(m_Z) &= 0.1176(20). \end{aligned} \tag{667}$$

donde $\alpha_i = g_i^2/(4\pi)$ con $\alpha_3 = \alpha_s$ ($g_3 = g_s$) y $\alpha = e^2/(4\pi)$. Esto tiene la ventaja de usar las cuatro cantidades experimentales mejor medidas.

Para relacionar la constante de Fermi, G_F , con los parámetros del Lagrangiano del Modelo Estándar (ME), consideremos el decaimiento del muón como un proceso en el cual el muón decae directamente a tres fermiones a través de la interacción de contacto ilustrada en la figura 26. Entonces dicho proceso estaría explicado por un Lagrangiano no fundamental

$$\mathcal{L}_\mu = \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \mu] [\bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_e], \tag{668}$$

donde G_F tiene las dimensiones de uno sobre masa al cuadrado.

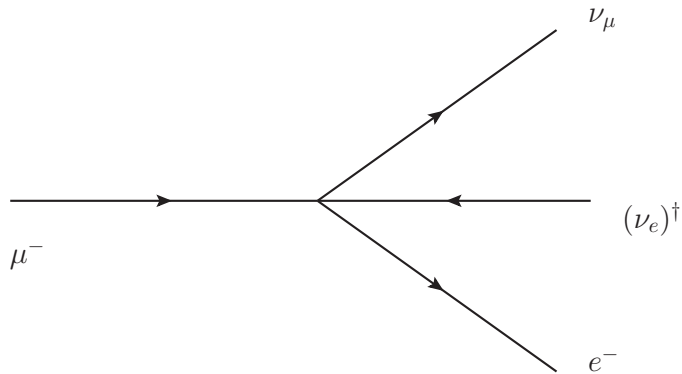


Figura: Decaimiento del muón a tres cuerpos

Construyendo la misma interacción a partir del Lagrangiano del ME

$$\mathcal{L} = \frac{g_2^2}{8} [\bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \mu] [W_\mu^+ W_\nu^-] [\bar{e} \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \nu_e] . \quad (669)$$

Por lo tanto la contracción apropiada de $[W_\mu^+ W_\nu^-]$ debe generar el coeficiente inverso de masa al cuadrado:

$$[W_\mu^+ W_\nu^-] \rightarrow \frac{1}{m_W^2} . \quad (670)$$

Una deducción más rigurosa se realizará en la Sección ?? . Por lo tanto

$$\begin{aligned} \frac{G_F}{\sqrt{2}} &= \frac{g^2}{8m_W^2} \\ &= \frac{e^2}{8m_W^2 \sin^2 \theta_W} \\ &= \frac{4\pi e^2}{8(4\pi)m_W^2 \sin^2 \theta_W} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\pi\alpha}{2m_W^2 \sin^2 \theta_W} \\
m_W^2 \sin^2 \theta_W &= \frac{\sqrt{2}\pi\alpha}{2G_F} \\
m_W^2 \sin^2 \theta_W &= \frac{\pi\alpha}{\sqrt{2}G_F} .
\end{aligned} \tag{671}$$

Además, de la ec. (597)

$$\begin{aligned}
\cos^2 \theta_W &= \frac{m_W^2}{m_Z^2} \\
1 - \sin^2 \theta_W &= \frac{m_W^2}{m_Z^2} \\
\sin^2 \theta_W &= 1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2} .
\end{aligned} \tag{672}$$

De esta forma tenemos las relaciones

$$\sin^2 \theta_W = 1 - \frac{m_W^2}{m_Z^2}, \quad m_W^2 \sin^2 \theta_W = \frac{\pi \alpha}{\sqrt{2} G_F}, \quad (673)$$

que permiten determinar que

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_W &\approx 0.21 \\ m_W &\approx 81 \text{ GeV}. \end{aligned} \quad (674)$$

El uso de $\alpha(M_Z) \approx 1/128$, permite tener en cuenta algunas correcciones cuánticas dando lugar a

$$\begin{aligned} \sin^2 \theta_W &\approx 0.23 \\ m_W &\approx 80 \text{ GeV} \end{aligned} \quad (675)$$

Los valores medidos son $\sin^2 \theta_W = 0.23149(13)$, $m_W = 80.398(25) \text{ GeV}$, y pueden ser reproducidos por el modelo estándar una vez se tienen en cuenta correcciones perturbativas inducidas por partículas virtuales.

El acelerador e^+e^- LEP, que funcionó desde 1998 hasta el 2000 [?], operó a energías suficientes para producir millones de Z . Combinado con otros resultados experimentales, se pudo verificar todo el Lagrangiano del Modelo Estándar hasta un nivel del 1 por mil. Con excepción de las interacciones asociadas con el Higgs.

La universalidad de los decaimientos del Z está soportada por los resultados experimentales siguientes donde sólo se muestran los decaimientos leptónicos del Z diferentes de cero [?]

$$\begin{aligned} \Gamma(Z \rightarrow e^+e^-) &= 83.92(12) \text{ MeV} & \Gamma(Z \rightarrow \mu^+\mu^-) &= 83.99(18) \text{ MeV} & \Gamma(Z \rightarrow \tau^+\tau^-) &= 84.08(22) \text{ MeV} \\ \text{Br}(Z \rightarrow e^+e^-) &= 3.363(4) \% & \text{Br}(Z \rightarrow \mu^+\mu^-) &= 3.366(7) \% & \text{Br}(Z \rightarrow \tau^+\tau^-) &= 3.370(8) \% \end{aligned}$$

(676)

Mientras que para el W^\pm , en %, [?]

$$\text{Br}(W^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-) = 10.71(16), \quad \text{Br}(W^- \rightarrow \bar{\nu}_\mu \mu^-) = 10.63(15), \quad \text{Br}(W^- \rightarrow \bar{\nu}_\tau \tau^-) = 11.38(21).$$

(677)

La diferencia de $\bar{\nu}_\tau \tau$ respecto a los otros representa un efecto alrededor de 2σ . La universalidad de los acoplamientos leptónicos de W puede comprobarse también indirectamente a través de los decaimientos débiles mediados por corrientes cargadas. Los datos actuales verifican la universalidad

de los acoplamientos de corrientes cargadas leptónicas al nivel del 0.2 % [?]. Sin necesidad de entrar en detalles de los cálculos de las amplitudes de decaimiento, podemos usar el hecho de que ellas son proporcionales a los acoplamientos al cuadrado correspondiente, de modo que un cociente entre amplitudes de decaimiento es igual, en primera aproximación, a los cocientes de los acoplamientos al cuadrado. Tendremos en cuenta además que el Branching es la amplitud de decaimiento a un canal específico dividido por la suma de las amplitudes de decaimiento a todos los canales posibles. Para los decaimientos del Z el Modelo Estándar predice, además de la ausencia de eventos del tipo $Z \rightarrow e^+ \mu^-$, que para un cierto $l = e, \mu, \tau$, o $q = d, s, b$

$$\begin{aligned}
 \frac{\text{Br}(Z \rightarrow l^+ l^-)}{\text{Br}(Z \rightarrow \bar{q} q)} &\approx \frac{(|v_l|^2 + |a_l|^2)}{N_c (|v_q|^2 + |a_q|^2)} \\
 &= \frac{\left[\left(-\frac{1}{2} + 2 \sin^2 \theta_W \right)^2 + \frac{1}{4} \right]}{N_c \left[\left(-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} \sin^2 \theta_W \right)^2 + \frac{1}{4} \right]} \\
 &\approx \frac{0.776}{N_c} = \begin{cases} 0.338 & N_c = 2 \\ 0.225 & N_c = 3 \\ 0.169 & N_c = 4 \end{cases} \quad (678)
 \end{aligned}$$

Para ser comparado con el resultado experimental de por ejemplo

$$\frac{\text{Br}(Z \rightarrow e^+ e^-)}{\text{Br}(Z \rightarrow \bar{b} b)} = \frac{3.363(4)}{15.12(5)} \approx 0.222 \quad (679)$$

que de nuevo da lugar al $N_c = 3$, que seguiremos tomando en adelante.

Los Branchings de decaimiento en la ec. (677) y ec. (676) pueden ser calculados sin entrar en detalles del cálculo de las amplitudes. Teniendo en cuenta que el canal $Z \rightarrow \bar{t} t$ esta cerrado

$$\begin{aligned} \text{Br}(Z \rightarrow e^+ e^-) &= \frac{\Gamma(Z \rightarrow e^+ e^-)}{\Gamma_{\text{total}}} \\ &= \frac{(|v_e|^2 + |a_e|^2)}{\sum_l [(|v_l|^2 + |a_l|^2) + (|v_{\nu_l}|^2 + |a_{\nu_l}|^2)] + N_c [\sum_{i=1}^2 (|v_{u_i}|^2 + |a_{u_i}|^2) + \sum_{i=1}^3 (|v_{d_i}|^2 + |a_{d_i}|^2)]} \\ &= \frac{(|v_e|^2 + |a_e|^2)}{3[(|v_e|^2 + |a_e|^2) + (|v_{\nu_e}|^2 + |a_{\nu_e}|^2)] + 3[2(|v_u|^2 + |a_u|^2) + 3(|v_d|^2 + |a_d|^2)]} \\ &= \frac{(|v_e|^2 + |a_e|^2)}{21|a_e|^2 + 3[|v_e|^2 + |v_{\nu_e}|^2] + 3[2|v_u|^2 + 3|v_d|^2]} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-1 + 4s^2\theta_W)^2 + 1}{21 + 3[(-1 + 4s^2\theta_W)^2 + 1] + 3[2(1 - \frac{8}{3}s^2\theta_W)^2 + 3(-1 + \frac{4}{3}s^2\theta_W)^2]} \\
&= \frac{2 - 8s^2\theta_W + 16s^4\theta_W}{42 - 80s^2\theta_W + \frac{320}{3}s^4\theta_W} \\
&\approx 3.43 \%
\end{aligned} \tag{680}$$

Para W^\pm tenemos por ejemplo

$$\text{Br}(W^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-) = \frac{\Gamma(W^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-)}{\Gamma_{\text{total}}} \tag{681}$$

donde, teniendo en cuenta que los canales a top están cerrados, y usando la condición de unitariedad de la matriz CKM en ec. (662), tenemos

$$\begin{aligned}
\Gamma_{\text{total}} &= \sum_l \Gamma(W^- \rightarrow \bar{\nu}_l l^-) + N_c \sum_i [\Gamma(W^- \rightarrow \bar{u}_1 d_i) + \Gamma(W^- \rightarrow \bar{u}_2 d_i)] \\
&= \Gamma(W^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-) \{3 + N_c \sum_i [|V_{1i}|^2 + |V_{2i}|^2]\}
\end{aligned}$$

$$= \Gamma(W^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-)(3 + 2N_c) \quad (682)$$

entonces

$$\text{Br}(W^- \rightarrow \bar{\nu}_e e^-) = \frac{1}{3 + 2N_c} = 11.1\% \quad (683)$$

Una mejor predicción de dichos resultados en el contexto del Modelo Estándar requiere tener en cuenta las correcciones radiativas.

El ME también tiene una predicción concreta para la amplitud del Z a neutrinos, Γ_{inv} :

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma_{\text{inv}}}{\Gamma_l} &= \frac{\sum_l \Gamma(Z \rightarrow \bar{\nu}_l \nu_l)}{\Gamma(Z \rightarrow e^+ e^-)} \\ &= \frac{N_\nu \Gamma(Z \rightarrow \bar{\nu}_e \nu_e)}{\Gamma(Z \rightarrow e^+ e^-)} \\ &\approx \frac{N_\nu (|v_{\nu_e}|^2 + |a_{\nu_e}|^2)}{|v_e|^2 + |a_e|^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{2N_\nu}{(-1 + 4 \sin^2 \theta_W)^2 + 1} \\
&= \frac{N_\nu}{1 - 4 \sin^2 \theta_W + 8 \sin^4 \theta_W} \\
&\approx \begin{cases} 5.865 & N_\nu = 3 \\ 7.819 & N_\nu = 4 \end{cases}, \tag{684}
\end{aligned}$$

mientras que el valor medido experimentalmente para esta cantidad $5.942(16)$ [?], es una evidencia muy fuerte de que sólo existen tres neutrinos livianos.

De la corrientes cargadas para leptones tenemos

$$\mathcal{L}_{cc} \supset \frac{g_2}{2\sqrt{2}} \left[\sum_l \bar{\nu}_l \gamma^\mu (1 - \gamma_5) l W_\mu^+ + \bar{l} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \nu_l W_\mu^- \right] \quad (685)$$

Esto da lugar a los posibles diagramas para decaimientos de leptones a bosones virtuales, y bosones a leptones mostrados en la figura 27. Las flechas representan el flujo de número leptónico. La flecha de tiempo es de izquierda a derecha. Al lado izquierdo del vértice entran partículas y salen antipartículas. Mientras que al lado derecho entran antipartículas y salen partículas.

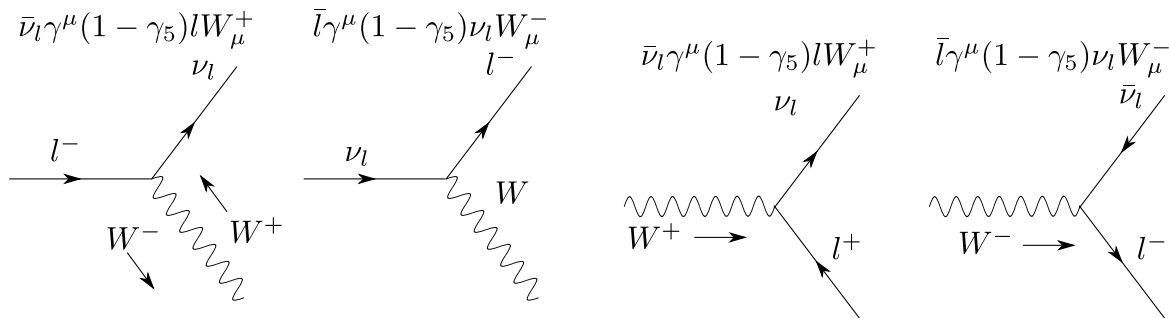


Figura: Diagramas de Feynman para las corrientes cargadas

Del primer y cuarto diagrama obtenemos el diagrama de Feynman para el decaimiento $\mu^- \rightarrow \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$, mostrado en la figura 28

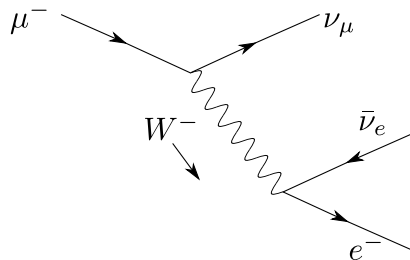


Figura: diagrama de Feynman para el decaimiento $\mu^- \rightarrow \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$

El propagador para el bosón W de momentum q resulta ser

$$\tilde{D}_{\mu\nu} = \frac{1}{q^2 - m_W^2} \left(g_{\mu\nu} - \frac{q_\mu q_\nu}{m_W^2} \right). \quad (686)$$

Para los propósitos actuales la obtención de este resultado no es necesaria, el punto importante es que cuando los momentum de las partículas iniciales y finales son mucho más pequeñas que m_W , esto se reduce a

$$\tilde{D}_{\mu\nu} = -\frac{g_{\mu\nu}}{m_W^2}. \quad (687)$$

Este resultado se entiende fácilmente cuando se compara con el propagador de una partículas escalar masiva $1/(q^2 - M^2) \rightarrow -1/M^2$. Las componentes espaciales de W_μ con $\mu = 1, 2, 3$, a bajas energías tienen el mismo propagador que el de una partícula escalar, mientras W_0 , tiene el signo opuesto.

El Lagrangiano efectivo para el decaimiento del muón, $\mu^- \rightarrow \nu_\mu e^- \bar{\nu}_e$ es entonces

$$\mathcal{L} = \frac{g_2^2}{8} [\bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \mu] \frac{g_{\mu\nu}}{m_W^2} [\bar{e} \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \nu_e]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{g_2^2}{8m_W^2} [\bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \mu] [\bar{e} \gamma^\nu (1 - \gamma_5) \nu_e] \\
&= \frac{G_F}{\sqrt{2}} [\bar{\nu}_\mu \gamma^\mu (1 - \gamma_5) \mu] [\bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_e] ,
\end{aligned} \tag{688}$$

donde

$$\begin{aligned}
\frac{G_F}{\sqrt{2}} &= \frac{g_2^2}{8m_W^2} \\
&= \frac{g_2^2 4}{8g^2 v^2} \\
&= \frac{1}{2v^2} ,
\end{aligned} \tag{689}$$

y

$$\begin{aligned}
v &= \left(\sqrt{2} G_F \right)^{-1/2} = 246.2 \text{ GeV} \\
&\approx 2.9 \times 10^{15} \text{ K}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\approx 4.9 \times 10^{-14} \text{ m} \\ &\approx 1.6 \times 10^{-22} \text{ s}. \end{aligned} \quad (690)$$

De otro lado, para el decaimiento β , $n \rightarrow p e^- \bar{\nu}_e$, de acuerdo a la figura 29, tenemos

$$\mathcal{L} = \frac{G_\beta}{\sqrt{2}} [\bar{p} \gamma^\mu (1 - 1.26 \gamma_5) n] [\bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_e]. \quad (691)$$

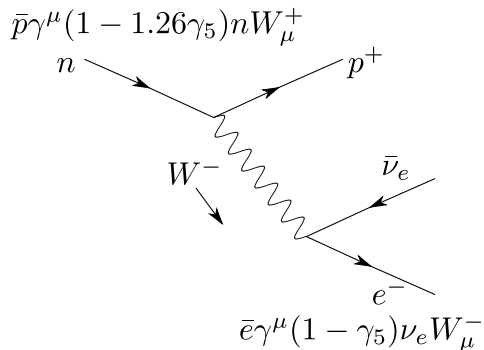


Figura: Decaimiento del neutrón.

con G_F dado en la ec. (667) y $G_\beta = 1.10 \times 10^{-5} \text{ GeV}^2$. La corriente hadrónica tiene la forma $V-A$. El factor 1.26 puede entenderse como debido a las correcciones a nivel hadrónico de una corriente que es de la forma $V-A$ a nivel del quarks, como en la ec. (??). A nivel de quarks el decaimiento del neutrón (udd) al protón (uud) corresponde al decaimiento de uno de los quarks down del neutrón $d \rightarrow ue^- \bar{\nu}_e$

$$\mathcal{L} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} V_{11} [\bar{u} \gamma^\mu (1 - \gamma_5) d] [\bar{e} \gamma_\mu (1 - \gamma_5) \nu_e] . \quad (692)$$

De modo que $G_\beta = G_F V_{11} = G_F \cos \theta_C$, donde θ_C es el ángulo de Cabbibo. Una vez se tienen en cuenta correcciones electrodébiles se obtiene el valor $|V_{11}| = 0.97418(27)[?]$. Las magnitudes de los elementos de la matriz CKM (??) son [?]

$$V_{\text{CKM}} \approx \begin{pmatrix} 0.97419 & 0.2257 & 0.0359 \\ 0.2256 & 0.97334 & 0.0415 \\ 0.00874 & 0.0407 & 0.999133 \end{pmatrix} \sim \mathbf{1} \quad (693)$$