Proyecto Final

Un enfoque práctico de Interpolación con programación.

BENEMÉRITA UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE AGUASCALIENTES

Departamento de Ciencias de la Computación

Asignatura:

"Programación Científica"

Profesor:

Dra. Aurora Torres Soto

Alumno:

Juan Francisco Gallo Ramírez

***ID:** 232872*

Luis Pablo Esparza Terrones

***ID:** 182563*

Ingeniería en Computación Inteligente

14 de junio de 2024

Introducción

En el marco de la asignatura de Programación Científica, perteneciente a la carrera de Ingeniería en Computación Inteligente, este proyecto tiene como principal objetivo aplicar de manera práctica las habilidades y conocimientos adquiridos a lo largo del curso. La tarea encomendada consiste en resolver un problema práctico mediante el uso de métodos y técnicas numéricas avanzadas.

A través de este proyecto, demostraremos nuestra capacidad para integrar conocimientos teóricos con habilidades prácticas en programación, análisis numérico y comunicación científica. El problema específico que abordamos implica desarrollar un modelo de interpolación para describir la velocidad de caída de un paracaidista en función del tiempo, utilizando un conjunto de datos experimentales que relacionan la velocidad y el tiempo.

La técnica seleccionada para la resolución de este problema es la interpolación, una metodología esencial en el análisis numérico que permite construir funciones que pasan exactamente por un conjunto de puntos dados. En particular, emplearemos los métodos de interpolación lineal y polinomial, con un énfasis en los métodos de Newton y Lagrange, los cuales son reconocidos por su precisión y utilidad en diversas aplicaciones científicas y de ingeniería.

Para ello, se decidió implementar un programa con tecnologías web, meramente por su facilidad de desarrollo y diseño, y sobre todo, alta compatibilidad con los dispositivos en donde se requiera utilizar, estas tecnologías son HTML para estructura de la interfaz, CSS para el diseño y JavaScript para el motor de cálculos y control de contenido.

En conclusión, este proyecto no solo aborda un problema específico de interpolación y modelado, sino que también nos proporciona una plataforma para aplicar una amplia gama de habilidades técnicas y analíticas. A través de esta experiencia, fortaleceremos nuestra competencia en el desarrollo de soluciones prácticas basadas en sólidos fundamentos teóricos, preparándonos para enfrentar desafíos más complejos en nuestro futuro profesional como ingenieros en computación inteligente.

Desarrollo

Como ya sabemos la interpolación polinomial es una técnica utilizada para estimar valores intermedios entre un conjunto de puntos conocidos. Es útil cuando se tiene una serie de puntos de datos y se desea encontrar un valor entre esos puntos. La idea central es determinar un polinomio que pase exactamente por los puntos dados.

El problema encomendado se puede resolver propiamente con interpolación, ya que este describe que la obtención de datos fue de forma experimental y que se quiere un modelo que describa el cambio de la velocidad dado el tiempo en dicho rango de valores.

Para la resolución del problema, es necesario utilizar los métodos de interpolación, y se nos pide utilizar interpolación de Newton e interpolación de Lagrange.

El problema en cuestión es:

- **Modelo de un objeto en caída libre**

  Un ingeniero debe determinar un modelo de interpolación que sea capaz de describir la velocidad de caída de un paracaidista en función del tiempo a partir de un grupo de valores sobre velocidad y tiempo obtenidos de manera experimental. Tome como ejemplo el siguiente juego de datos:

Tiempo, s	Velocidad medida v, cm/s
1	800
3	2310
5	3090
7	3940
13	4755

Como se puede analizar, la naturaleza del problema está basada en la segunda ley de Newton y movimiento de cuerpos en caída libre.

La segunda ley de Newton establece que la aceleración (a) de un objeto es directamente proporcional a la fuerza neta (F) que actúa sobre él e inversamente proporcional a su masa (m). La fórmula es:

$$F = ma$$

Mientras que el movimiento de cuerpos en caída libre describe que un cuerpo en caída libre es influenciado únicamente por la gravedad, sin resistencia del aire. La aceleración debida a la gravedad (g) es aproximadamente 9.81 m/s^2 en la superficie de la Tierra. La velocidad y la posición de un objeto en caída libre se pueden calcular usando las siguientes ecuaciones:

$$v = gt$$

$$h = \frac{1}{2}gt^2$$

Sin embargo , un enfoque realista será contemplar la resistencia de aire. Para un cuerpo de caída libre con resistencia del aire proporcional a la velocidad, la ecuación diferencial que describe el movimiento es:

$$m\frac{dv}{dt} = mg - kv$$

Con esto en cuenta, la solución de la ecuación diferencial será:

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

Una vez tomando en cuenta las características del problema, podemos resolver el problema por métodos de interpolación. Para la resolución del problema se utilizó los modelos de interpolación de Newton y de Lagrange, los cuales se describen a continuación.

El método de interpolación de Newton se basa en el uso de diferencias divididas y es especialmente útil cuando se añaden nuevos puntos, ya que permite actualizar el polinomio de manera incremental sin necesidad de recalcular todo desde el principio.

Para formar un polinomio de interpolación de Newton de n-ésimo grado se puede emplear la siguiente fórmula:

$$f_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \cdots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\cdots(x - x_n)$$

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = f[x_1, x_0]$$

$$b_2 = f[x_2, x_1, x_0]$$

$$\vdots$$

$$b_n = f[x_n, x_{n-1}, \cdots, x_1, x_0]$$

Mientras que el método de interpolación de Lagrange es simplemente una reformulación del polinomio de Newton que evita el cálculo de las diferencias divididas, y se representa de manera concisa como:

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} L_i(x) f(x_i)$$

$$L_i(x) = \prod_{j=0, j\neq i}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$$

Teniendo esto en cuenta fue que se desarrolló el algoritmo para calcular el polinomio de interpolación dado más de dos puntos, ya que solo es posible obtener un polinomio de interpolación si se cuenta con más de un punto. Dicho algoritmo se describirá más adelante.

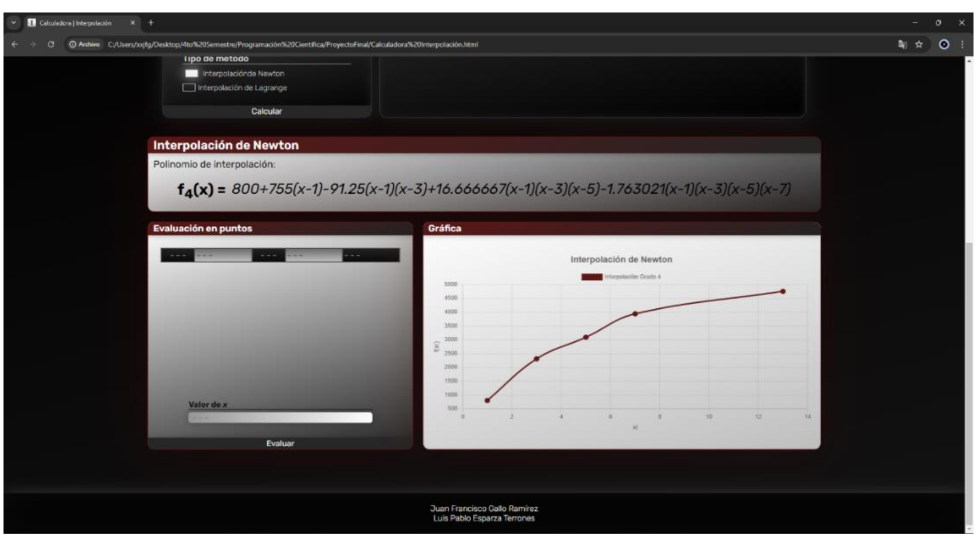
Solución del Problema

Primero es necesario capturar los datos del problema, a continuación, se muestra la captura de estos:

Ya teniendo los datos ingresados, solo es necesario elegir el grado del polinomio, en nuestro caso teniendo 5 datos, el mayor grado posible será 4, y será de esta forma ya que, entre mayor grado, mayor precisión.

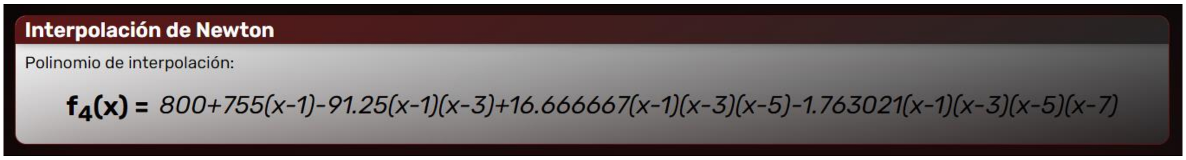
El programa permite obtener el polinomio por método de Newton o Lagrange, en nuestro caso lo obtendremos por los dos métodos:

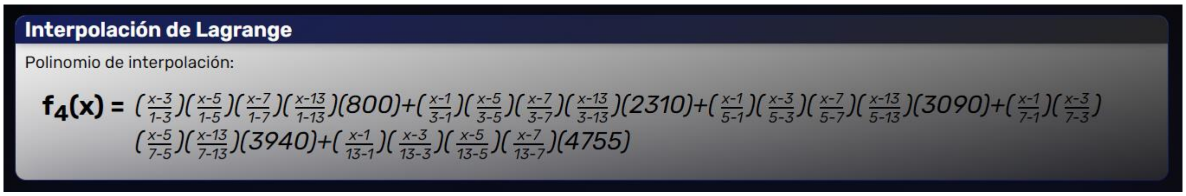
Método de Newton:



Método de Lagrange:

Entonces, los polinomios que describen la velocidad de caída de un paracaidista en función del tiempo a partir de un grupo de valores ingresados son:



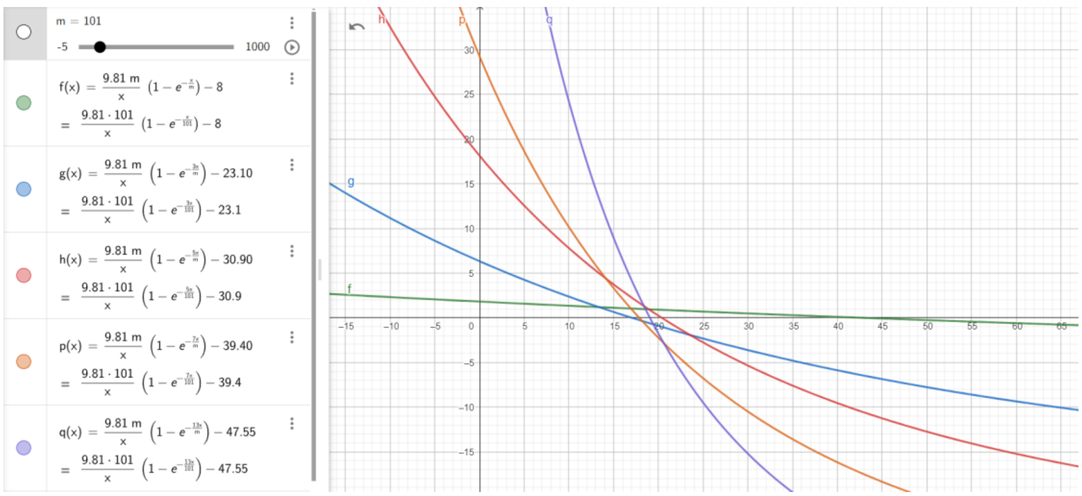


Comparativa

Ahora comparando el método de interpolación con el análisis hecho previamente de caída libre con resistencia al aire, se puede utilizar la fórmula:

$$v(t) = \frac{mg}{k}\left(1 - e^{-\frac{k}{m}t}\right)$$

Sin embargo, al no contar con la masa, ni con el coeficiente de resistencia, se procedió a graficar cada función de velocidad de cada punto medido igualadas a cero, y se probó con en un rango de 0 a 100 el cambio de masa, para asi determinar en que punto estas se cruzan en ***y=0*** para obtener el coeficiente, el cual sería el eje x; y la masa, el cual es variable para estos efectos de conseguir el coeficiente.



Sin embargo, pese a cambiar el valor de la masa notamos que no se cruzan entre sí en ningún punto en el eje x, lo que nos sugiere que el coeficiente es variable y no es igual para cada punto, por lo que es posible obtenerlo dado un punto, pero no es posible obtenerlo para determinar una función que describa el movimiento.

Entonces recurrimos a una alternativa el cual era ajustar a un polinomio, donde:

$$v(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$$

Los datos son:

$$v(1) = a(1)^4 + b(1)^3 + c(1)^2 + d(1) + e = 800$$

$$v(3) = a(3)^4 + b(3)^3 + c(3)^2 + d(3) + e = 2310$$

$$v(5) = a(5)^4 + b(5)^3 + c(5)^2 + d(5) + e = 3090$$

$$v(7) = a(7)^4 + b(7)^3 + c(7)^2 + d(7) + e = 3940$$

$$v(13) = a(13)^4 + b(13)^3 + c(13)^2 + d(13) + e = 4755$$

Y al resolver el sistema de ecuaciones de la matriz correspondiente formada por los coeficientes a, b, c, d y e obtenemos:

$$v(t) = -1.7630t^4 + 44.8750t^3 - 392.8698t^2 + 1813.6250t - 663.8672$$

Con dicha función podemos comparar los resultados entre el método de interpolación, el polinomio ajustado anteriormente y los experimentales:

Tiempo (s)	Valores con polinomio	Valor con interpolación	Valor verdadero (cm/s)
1	800	800	**800**
2	1722.6956	1722.6953125	**-**
3	2310.0016	2310	**2310**
4	2725.388	2725.3828125	**-**
5	3090.0128	3090	**3090**
6	3482.722	3482.6953125	**-**
7	3940.0496	3940	**3940**
10	5430.4028	5430.1953125	**-**
13	4755.5936	4755	**4755**

*Se muestra la celda en rojo donde no se tiene un valor experimental.

Los resultados muestran que tanto el método de interpolación como el ajuste polinómico logran una buena coincidencia con los datos experimentales dentro del rango especificado.

La interpolación es especialmente eficaz para valores dentro del rango conocido, mientras que el polinomio ajustado proporciona una aproximación cercana pero no exacta para valores "verdaderos".

Esto sugiere que la interpolación es más adecuada cuando se requiere estimar valores dentro de un conjunto limitado de datos, mientras que el ajuste polinómico puede ser útil para extender la aproximación más allá de esos límites, aunque con mayor margen de error.

Esto es solo una pequeña comparación usando aproximaciones en sí, la manera analítica de abordar la problemática parece ser compleja para desarrollar dada la naturaleza del problema.

Variante del Problema

Una variante del problema, y que fue un ejercicio visto en clase fue la de ajustar un polinomio de segundo grado para aproximación del ***ln(2***) usando los puntos:

x_i		$f(x_i)$		
x_1	1	$f(x_1)$	0	×
x_2	4	$f(x_2)$	1.386294	×
x_3	6	$f(x_3)$	1.791759	×

Una vez ingresado los datos nos arroja el siguiente polinomio de Newton:

Interpolación de Newton

Polinomio de interpolación:

$$f_2(x) = 0+0.462098(x-1)-0.051873(x-1)(x-4)$$

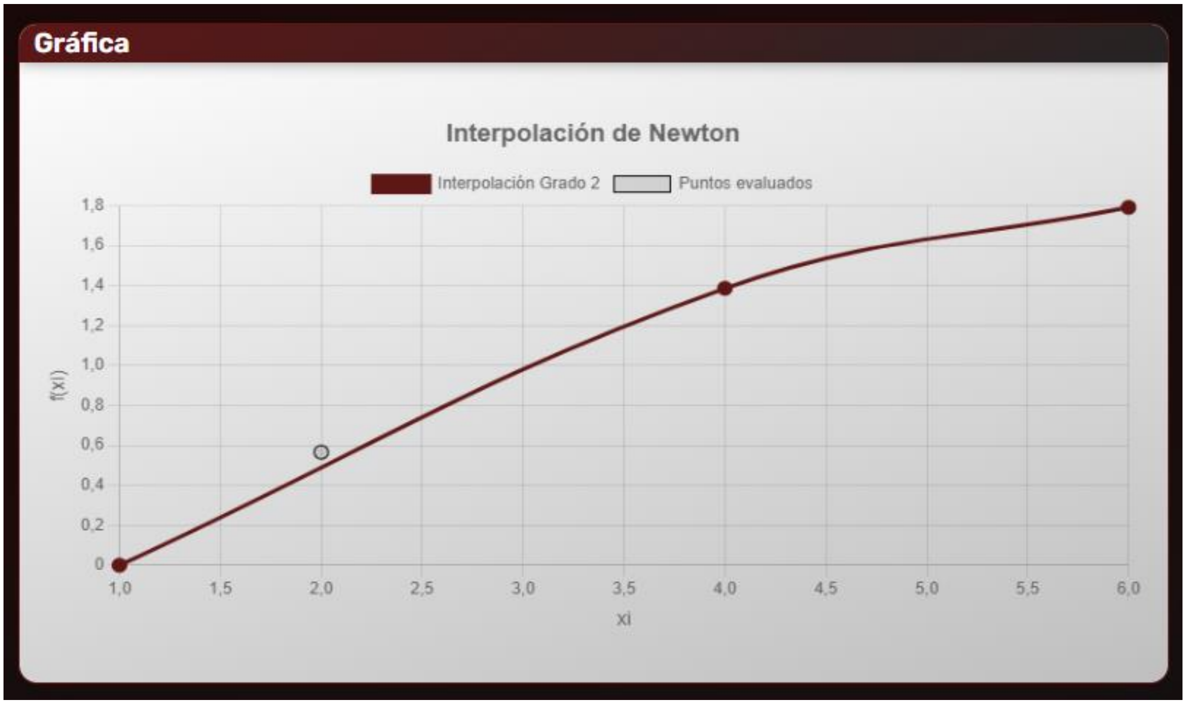
Y evaluando el número ***2*** en el mismo nos resulta: ***0.5658442***. Si tomamos en cuenta que ***ln(2) = 0.693147*** obtenemos un error porcentual de:

$$\varepsilon_t = \frac{v.verdadero - v.aproximado}{v.verdadero} \times 100\% = \frac{0.693147 - 0.5658442}{0.693147} \times 100 \approx \mathbf{18.37}\%$$

Evaluación en puntos

x_1	2	$f(x_1)$	0.5658442	×

Es evidente que si se hubieran agregado más puntos el error disminuiría, pero considerando que solo fueron 3, se podría decir que es una buena aproximación.



Descripción del Programa

El programa que se desarrolló tiene como finalidad obtener el polinomio de interpolación de Newton o de Lagrange dado un grupo de datos. Este programa realizar el cálculo con un algoritmo que sigue las fórmulas mencionadas en el principio del desarrollo en este documento.

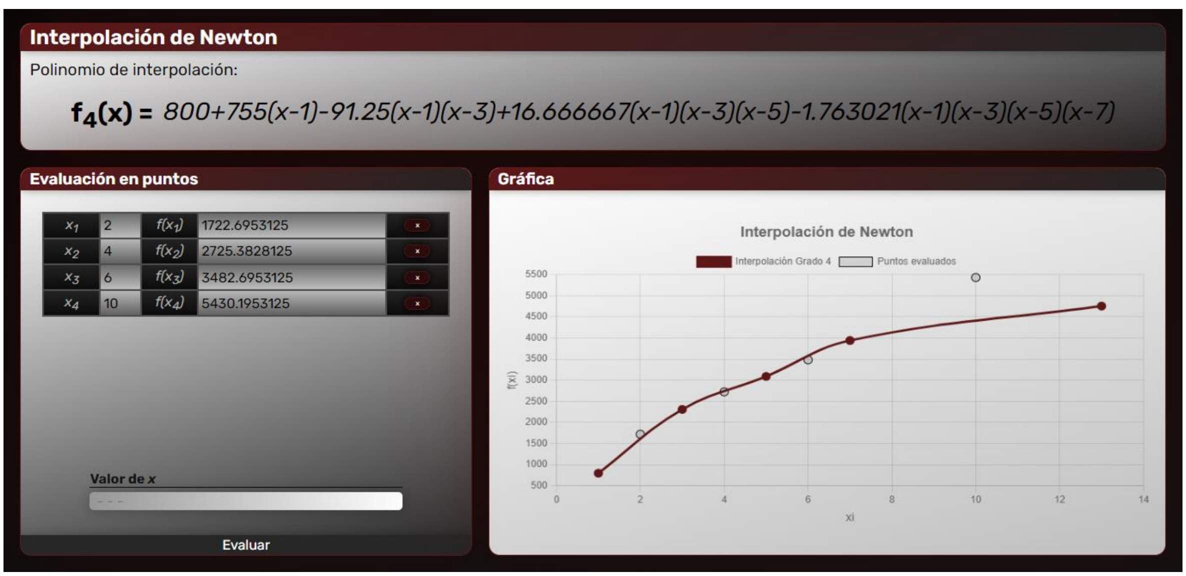
Adicional a ello, cuenta con una sección respectiva para mostrar la gráfica obtenida dado ese grupo de datos que forman el polinomio, así como la posibilidad de graficar y evaluar puntos de interés del usuario.

En la sección de "**Agregar Datos**" se observan dos campos numéricos de entrada, uno para el valor de x_i y otro para $f(x_i)$, y en la parte inferior de dicha sección, el botón para agregar los valores.

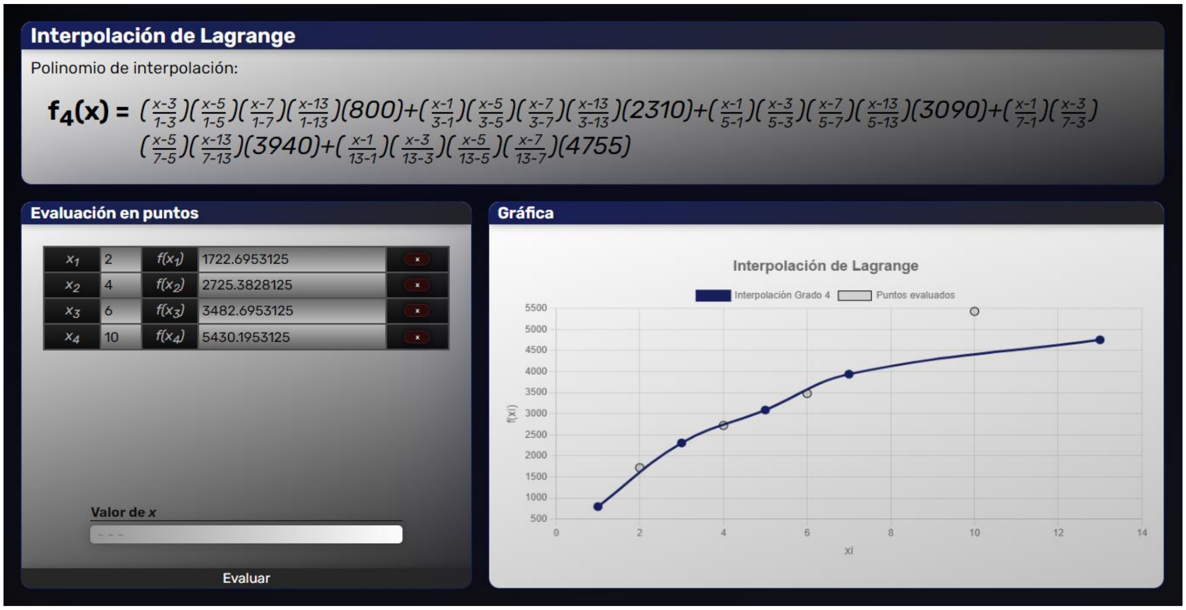
Cuando se agregan valores, estos aparecen en la sección de "**Datos Agregados**", seguido de un botón rojo para eliminar los valores si se desea.

En la última sección destinada a entradas de usuario "**Configuración del Modelo**" se muestran dos campos, uno para elegir el grado del polinomio a realizar (el cual esta validado para no provocar errores), y dos radio button para elegir por qué modelo hacer la interpolación.

Cuando se da click en el botón de calcular, se despliega el área de resultados, como se ve a continuación.



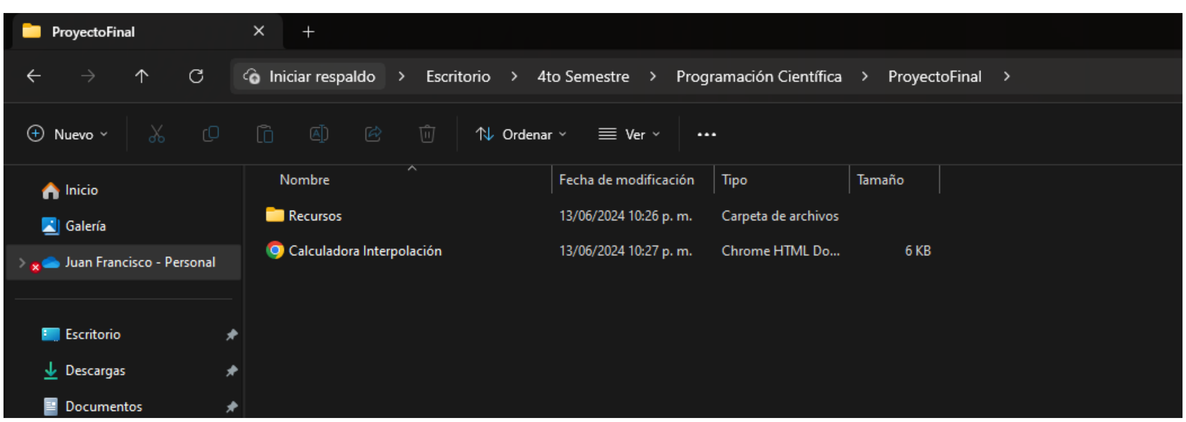
Inicialmente se muestra el polinomio calculado, seguido de un espacio destinado a ingresar datos para ser evaluados, donde dichos datos también se grafican en el espacio de la gráfica.



Como se puede observar en la imagen anterior, se muestra en color rojo (si se utilizó método de newton) o azul (si se utilizo método de Lagrange) los puntos con los que se construyó el polinomio, y en negro los puntos ingresados para evaluar.

Cómo Ejecutar el Programa

El programa es un archivo HTML, utilizando CSS y JavaScript, por lo que solo es necesario contar con un navegador con acceso a internet para cargar algunas librerías de gráficos, además de ser abierto únicamente en su carpeta debdo a que comparte ubicación con los demás archivos necesarios.



Conclusión

En el desarrollo del presente proyecto de programación científica, hemos logrado alcanzar resultados significativos y adquirir importantes habilidades técnicas y prácticas. A través de la aplicación de métodos avanzados de interpolación como Newton y Lagrange, hemos desarrollado modelos matemáticos precisos que se ajustan eficazmente a los datos experimentales disponibles. Este proceso no solo ha demostrado nuestra capacidad para integrar conocimientos teóricos con habilidades prácticas en programación científica, sino que también ha resaltado la importancia de la precisión y la robustez en el modelado numérico.

La implementación de una interfaz de usuario intuitiva utilizando tecnologías web complementó nuestro trabajo al facilitar la captura de datos, el cálculo de polinomios y la visualización de resultados de manera accesible. Esta integración de herramientas tecnológicas no solo mejoró la interacción con nuestros modelos, sino que también fortaleció nuestra capacidad para comunicar efectivamente los resultados del análisis numérico.

La validación de nuestros modelos frente a datos teóricos y experimentales conocidos confirmó la efectividad de los polinomios generados mediante interpolación para aproximar con precisión la velocidad de caída del paracaidista en diferentes intervalos de tiempo. Este éxito valida la utilidad práctica de los métodos de interpolación en la ingeniería y ciencia, subrayando su relevancia para futuros proyectos de modelado y análisis numérico.

En conclusión, este proyecto no solo cumplió con los objetivos académicos establecidos, sino que también nos preparó para enfrentar desafíos más complejos en nuestra carrera profesional. Nuestra experiencia en el manejo de datos experimentales, la implementación de algoritmos numéricos avanzados y la creación de interfaces de usuario funcionales nos posiciona favorablemente para abordar problemas futuros en ingeniería y ciencias computacionales con soluciones innovadoras y precisas

Bibliografía

Chapra, S., & Canale, R. (2006). *Métodos Numéricos para Ingenieros.* McGraw-Hill.

Halliday, D., Resnick, R., & Walker, J. (2010). *Fundamentals of Physics.* John Wiley & Sons.