Autómatas I.

Parcial II. Tarea I.

Expresiones Regulares (Segunda sección).

Juan Francisco Gallo Ramírez

***5to** Semestre UAA*

I.C.I.

4

Ejercicio.

4. Encuentra una *expresión regular* para el conjunto $\{a^n b^m : n \geq 3, m \text{ es par}\}$.

4. Find a regular expression for the set $\{a^n b^m \colon n \geq 3, m \text{ is even}\}$.

Solución

Para encontrar la *expresión regular* del conjunto establecido, se realizó un pequeño análisis de las partes que representan dicho conjunto.

Tenemos primeramente que las cadenas que forman parte de dicho conjunto solo contienen letras **a** y letras **b**, donde la primera parte de la cadena consta de letras **a**, cuya cantidad es mayor o igual a 3 (3, 4, 5, 6, 7, ...), y la segunda y última parte de la cadena consta de letras **b**, con una cantidad par (0, 2, 4, 6, 8, ...). Entonces en expresión de conjuntos nos queda la siguiente expresión:

$$aaa\{a\}^*\{bb\}^*$$

La cantidad de letras **a** siempre será mayor o igual a 3, y la cantidad de letras **b** siempre será par ya que estamos generando parejas de letras **b**.

- **Expresión regular:**

La expresión regular equivalente a la notación de conjuntos anterior es:

$$aaaa^*(bb)^*$$

Ejercicio.

5. Encuentra una *expresión regular* para el conjunto $\{a^n b^m : (n+m) \text{ es par}\}$.

5. Find a regular expression for the set $\{a^n b^m : (n+m) \text{ is even}\}$.

Solución

Encontrando la *expresión regular* del conjunto establecido, se realizó un pequeño análisis de las partes que representan dicho conjunto.

Tenemos primeramente que las cadenas que forman parte de dicho conjunto solo contienen letras **a** y letras **b**, y que la suma de la cantidad de éstas tiene que resultar en un número par (0, 2, 4, 6, 8, ...).

Algo que nos facilita la abstracción del problema para encontrar la solución es saber que la suma de dos números pares siempre resultará en un número **par**, adicionalmente la suma de dos números impares también lo harán; en cambio, la suma de un número par y un impar resulta en un número impar, por lo que este último caso no es de interés para la solución problema.

Entonces basta con concatenar una cantidad de números pares o impares para **a** y para **b**. La expresión en notación de conjuntos nos queda:

$$\{aa\}^*\{bb\}^* \cup a\{aa\}^*b\{bb\}^*$$

$$\{\{aa\}^*, a\{aa\}^*b\}\{bb\}^*$$

Habrá una serie de casos donde la cantidad de letras **a** y **b** será par, por lo que su suma será par; y otra serie de casos donde la cantidad de letras **a** y **b** será impar, resultando la suma un número par.

- **Expresión regular:**

La expresión regular equivalente a la notación de conjuntos anterior es:

$$((aa)^* + a(aa)^*b)(bb)^*$$

6 Ejercicio.

6. Da *expresiones regulares* para los siguientes lenguajes.

(a) $L_1 = \{\mathrm{a}^n\mathrm{b}^m : n \geq 4, m \leq 3\}$.

(b) $L_2 = \{\mathrm{a}^n\mathrm{b}^m : n < 4, m \leq 3\}$.

(c) El complemento L_1.

(d) El complemento L_2.

> 6. Give regular expressions for the following languages.
>
> (a) $L_1 = \{a^n b^m : n \geq 4, m \leq 3\}$.
>
> (b) $L_2 = \{a^n b^m : n < 4, m \leq 3\}$.
>
> (c) The complement of L_1.
>
> (d) The complement of L_2.

Solución

(a) $L_1 = \{\mathrm{a}^n\mathrm{b}^m : n \geq 4, m \leq 3\}$.

En la elaboración de la *expresión regular* del conjunto establecido, se realizó un pequeño análisis de las partes que representan dicho conjunto.

Tenemos que las cadenas que forman parte de dicho conjunto solo contienen letras **a** y letras **b**, y que hay una cantidad igual o mayor a 4 de letras **a** (4, 5, 6, 7, 8, ...) seguido de una cantidad igual o menor a 3 de letras **b** (0, 1, 2, 3). Entonces en expresión de conjuntos nos queda la siguiente expresión:

$$\mathrm{aaaa}\{\mathrm{a}\}^*\{\lambda, \mathrm{b}, \mathrm{bb}, \mathrm{bbb}\}$$

Habrá cadenas que comiencen con al menos 4 letras **a** seguido de a lo más 3 letras **b**.

- **Expresión regular:**

La expresión regular equivalente a la notación de conjuntos anterior es:

$$\mathrm{aaaaa}^*(\lambda + \mathrm{b} + \mathrm{bb} + \mathrm{bbb})$$

(b) $L_1 = \{\mathrm{a}^n\mathrm{b}^m : n < 4, m \leq 3\}$.

Al igual que en el inciso anterior, se realizó un pequeño análisis de las partes que representan dicho conjunto.

Tenemos que las cadenas que forman parte de dicho conjunto solo contienen letras **a** y letras **b**, y que hay una cantidad menor a 4 de letras **a** (0, 1, 2, 3) seguido de una cantidad igual o menor a 3 de letras **b** (0, 1, 2, 3). Entonces en expresión de conjuntos nos queda la siguiente expresión:

$$\{\lambda, \mathrm{a}, \mathrm{aa}, \mathrm{aaa}\}\{\lambda, \mathrm{b}, \mathrm{bb}, \mathrm{bbb}\}$$

Habrá cadenas que comiencen con a lo más 3 letras **a** seguido de a lo más 3 letras **b**.

- **Expresión regular:**

La expresión regular equivalente a la notación de conjuntos anterior es:

$$(\lambda + \mathrm{a} + \mathrm{aa} + \mathrm{aaa})(\lambda + \mathrm{b} + \mathrm{bb} + \mathrm{bbb})$$

(c) El complemento L_1.

Para el análisis del complemento de L_1, fue preciso darnos cuenta de que al tener L_1 dos condiciones para identificar sus cadenas solo es cuestión de representar aquellas cadenas que no cumplan con una u otra condición. Se trata de hacer una especie de negación del conjunto, dando así que si dicho conjunto solo contiene letras **a** y letras **b**, y que hay una cantidad igual o mayor a 4 de letras **a** (4, 5, 6, 7, 8, ...) seguido de una cantidad igual o menor a 3 de letras **b** (0, 1, 2, 3), entonces el complemento tendrá cadenas donde haya una cantidad menor a 4 de letras **a** (0, 1, 2, 3) o una cantidad mayor a 3 de letras **b** (4, 5, 6, 7, 8, ...), además de que también están contenidas las cadenas de L_1 con un sufijo cualquiera siempre que rompa con esa secuencia de letras **a** y **b**, al igual que para las demás cadenas.

La expresión en notación de conjuntos queda:

$$\{\lambda, \mathrm{a}, \mathrm{aa}, \mathrm{aaa}\}\{\lambda, \mathrm{b}\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^*\} \cup \{\mathrm{a}\}^*\mathrm{bbbb}\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^* \cup \mathrm{aaaa}\{\mathrm{a}\}^*\{\mathrm{ba}, \mathrm{bba}, \mathrm{bbba}\}\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^*$$

$$\{\lambda, \mathrm{a}, \mathrm{aa}, \mathrm{aaa}\}\{\lambda, \mathrm{b}\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^*\} \cup \big\{\{\mathrm{a}\}^*\mathrm{bbbb}, \mathrm{aaaa}\{\mathrm{a}\}^*\{\mathrm{ba}, \mathrm{bba}, \mathrm{bbba}\}\big\}\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^*$$

- **Expresión regular:**

La expresión regular equivalente a la notación de conjuntos anterior es:

$$(\lambda + \mathrm{a} + \mathrm{aa} + \mathrm{aaa})(\lambda + \mathrm{b}(\mathrm{a} + \mathrm{b})^*) + \big(\mathrm{a}^*\mathrm{bbbb} + \mathrm{aaaaa}^*(\mathrm{ba} + \mathrm{bba} + \mathrm{bbba})\big)(\mathrm{a} + \mathrm{b})^*$$

(d) El complemento L_2.

Al igual que el inciso anterior, para el análisis del complemento de L_2, es necesario darnos cuenta de que al tener L_2 dos condiciones para identificar sus cadenas solo es cuestión de representar aquellas cadenas que no cumplan con una u otra condición. Como se mencionó anteriormente, es como hacer una especie de negación del conjunto, dando así que si dicho conjunto que solo contiene letras **a** y letras **b**, y que hay una cantidad menor a 4 de letras **a** (0, 1, 2, 3, 4) seguido de una cantidad igual o menor a 3 de letras **b** (0, 1, 2, 3), entonces el complemento tendrá cadenas donde haya una cantidad igual o mayor a 4 de letras **a** (4, 5, 6, 7, 8, ...) o una cantidad mayor a 3 de letras **b** (4, 5, 6, 7, 8, ...), además de que también están contenidas las cadenas de L_2 con un sufijo cualquiera siempre que rompa con esa secuencia de letras **a** y **b**, al igual que para las demás cadenas.

La expresión en notación de conjuntos queda:

$$\mathrm{aaaa}\{\mathrm{a},\mathrm{b}\}^* \cup \{\mathrm{a}\}^*\mathrm{bbbb}\{\mathrm{a},\mathrm{b}\}^* \cup \{\lambda,\mathrm{a},\mathrm{aa},\mathrm{aaa}\}\{\mathrm{ba},\mathrm{bba},\mathrm{bbba}\}\{\mathrm{a},\mathrm{b}\}^*$$

$$\big\{\mathrm{aaaa},\{\mathrm{a}\}^*\mathrm{bbbb},\{\lambda,\mathrm{a},\mathrm{aa},\mathrm{aaa}\}\{\mathrm{ba},\mathrm{bba},\mathrm{bbba}\}\big\}\{\mathrm{a},\mathrm{b}\}^*$$

- **Expresión regular:**

La expresión regular equivalente a la notación de conjuntos anterior es:

$$\big(\mathrm{aaaa}+\mathrm{a}^*\mathrm{bbbb}+(\lambda+\mathrm{a}+\mathrm{aa}+\mathrm{aaa})(\mathrm{ba}+\mathrm{bba}+\mathrm{bbba})\big)(\mathrm{a}+\mathrm{b})^*$$

10 Ejercicio.

10. Da una *expresión regular* para la expresión $L=\{\mathrm{a}^n\mathrm{b}^m : n\geq 1, m\geq 1, nm\geq 3\}$.

10. Give a regular expression for $L = \{a^n b^m \colon n \geq 1, m \geq 1, nm \geq 3\}$.

Solución

Obteniendo la *expresión regular* del conjunto establecido, se realizó un pequeño análisis de las partes que representan dicho conjunto.

Tenemos primeramente que las cadenas que forman parte de dicho conjunto solo contienen letras **a** y letras **b**, y la cantidad de letras **a** es mayor o igual a 1 (1, 2, 3, 4, 5, ...)

al igual que la cantidad de letras **b**. Al multiplicar dichas cantidades, nos tiene que resultar en un numero igual o mayor a 3 (3, 4, 5, 6, 7, ...). Sabemos que para que al multiplicar dos números nos resultan mayores o iguales a 3 no debemos multiplicar $1 * 1$ ni $2 * 1$, cualquier otra combinación fuera de las anteriores será mayor o igual a 3, como $1 * 3$ y $2 * 2$, partiendo de ese hecho tenemos la siguiente expresión en notación de conjuntos:

$$\mathrm{a}\{\mathrm{a}\}^{*}\mathrm{bbb}\{\mathrm{b}\}^{*} \cup \mathrm{aa}\{\mathrm{a}\}^{*}\mathrm{bb}\{\mathrm{b}\}^{*} \cup \mathrm{aaa}\{\mathrm{a}\}^{*}\mathrm{b}\{\mathrm{b}\}^{*}$$

$$\{\mathrm{a}\{\mathrm{a}\}^{*}\mathrm{bb}, \mathrm{aa}\{\mathrm{a}\}^{*}\mathrm{b}, \mathrm{aaa}\{\mathrm{a}\}^{*}\}\mathrm{b}\{\mathrm{b}\}^{*}$$

De esta forma se asegura que solo habrá ciertas combinaciones de cantidades para cada letra.

- **Expresión regular:**

La expresión regular equivalente a la notación de conjuntos anterior es:

$$(\mathrm{aa^{*}bb} + \mathrm{aaa^{*}b} + \mathrm{aaaa^{*}})\mathrm{bb^{*}}$$

13 Ejercicio.

13. Encuentra una *expresión regular* para $\mathrm{L} = \{vwv : vw \in \{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^{*}, |v| = 2\}$.

13. Find a regular expression for $L = \{vwv: v, w \in \{a, b\}^{*}, |v| = 2\}$.

Solución

En la elaboración de la *expresión regular* del conjunto establecido, se realizó un pequeño análisis de las partes que representan dicho conjunto.

El factor importante en el conjunto es que la cardinalidad de **v** es exactamente igual a 2 y se sabe que pertenece al conjunto estrella de los elementos **a** y **b**. Además, es importante considerar que **v** es parte del prefijo, pero también como sufijo de **w**, por lo que tiene que ser igual tanto al inicio como al final de **w**. Partiendo de ese hecho tenemos la siguiente expresión en notación de conjuntos:

$$\mathrm{aa}\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^{*}\mathrm{aa} \cup \mathrm{ab}\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^{*}\mathrm{ab} \cup \mathrm{ba}\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^{*}\mathrm{ba} \cup \mathrm{bb}\{\mathrm{a}, \mathrm{b}\}^{*}\mathrm{bb}$$

De esta forma, estamos forzando a construir cadenas con las combinaciones con cardinalidad de 2.

- **Expresión regular:**

La expresión regular equivalente a la notación de conjuntos anterior es:

$$aa(a+b)^*aa + ab(a+b)^*ab + ba(a+b)^*ba + bb(a+b)^*bb$$

14

Ejercicio.

14. Encuentra una *expresión regular* para $L = \{vwv : vw \in \{a,b\}^*, |v| \leq 3\}$.

14. Find a regular expression for $L = \{vwv: v, w \in \{a, b\}^*, |v| \leq 3\}$.

Solución

En este ejercicio, buscando la *expresión regular* del conjunto establecido, se realizó un pequeño análisis de las partes que representan dicho conjunto.

Este ejercicio es parecido al anterior, solo que lugar de encontrar las combinaciones de **v** para cuando su cardinalidad es igual a 2, ahora es necesario hacerlo para cuando la cardinalidad es 0, 1, 2 y 3, partiendo de ese hecho tenemos la siguiente expresión en notación de conjuntos:

$$\{a,b\}^* \cup$$

$$a\{a,b\}^*a \cup b\{a,b\}^*b \cup$$

$$aa\{a,b\}^*aa \cup ab\{a,b\}^*ab \cup ba\{a,b\}^*ba \cup bb\{a,b\}^*bb \cup$$

$$aaa\{a,b\}^*aaa \cup aab\{a,b\}^*aab \cup aba\{a,b\}^*aba \cup abb\{a,b\}^*abb \cup$$

$$bbb\{a,b\}^*bbb \cup bba\{a,b\}^*bba \cup bab\{a,b\}^*bab \cup baa\{a,b\}^*baa$$

De esta forma, estamos forzando a construir cadenas con las combinaciones con cardinalidad de igual o menor a 3.

- **Expresión regular:**

La expresión regular equivalente a la notación de conjuntos anterior es:

$$(a+b)^* +$$

$$a(a+b)^*a + b(a+b)^*b +$$

$$aa(a+b)^*aa + ab(a+b)^*ab + ba(a+b)^*ba + bb(a+b)^*bb +$$

$$aaa(a+b)^*aaa + aab(a+b)^*aab + aba(a+b)^*aba + abb(a+b)^*abb +$$

$$bbb(a+b)^*bbb + bba(a+b)^*bba + bab(a+b)^*bab + baa(a+b)^*baa$$

15

Ejercicio.

15. Encuentra una *expresión regular* para
$L = \{w \in \{a, b\}^* : w \text{ tiene exactamente un par de ceros concecutivos}\}$.

15. Find a regular expression for

$L = \{w \in \{0,1\}^* : w \text{ has exactly one pair of consecutive zeros}\}$

Solución

Para la *expresión regular* del conjunto establecido, se realizó un pequeño análisis de las partes que representan dicho conjunto.

Se sabe que debe obligatoriamente contener una cadena de **00**, a su vez, como prefijo puede tener combinaciones de números siempre que no terminen en **0**, en cambio, para el sufijo, puede tener combinaciones de números siempre que no comiencen en **0**, esto porque harían que el par de **0** se vuelva una terna. Partiendo de ese hecho tenemos la siguiente expresión en notación de conjuntos:

$$\{1,01\}^*00\{10,1\}^*$$

- **Expresión regular:**

La expresión regular equivalente a la notación de conjuntos anterior es:

$$(1+01)^*00(10+1)^*$$