Autómatas I.

Parcial II. Tarea II.

Gramáticas Libres de Contexto (CFG).

Juan Francisco Gallo Ramírez
5to *Semestre UAA*
I.C.I.

12

Ejercicio. *(Sección 1.2)*

12. Da una descripción sencilla del *lenguaje* generado por la *gramática* con producciones

$$S \to aA,$$
$$A \to bS,$$
$$S \to \lambda.$$

12. Give a simple description of the language generated by the grammar with productions

$$S \to aA,$$
$$A \to bS,$$
$$S \to \lambda.$$

Solución

Analizando un poco la gramática presentada, se puede observar que al construir cadenas empezando por el símbolo S siempre se seguirá un camino recursivo si es que no se elige la cadena vacía λ, por un lado, se define un camino concreto con la regla $S \to aA$, para después seguir necesariamente con la regla $A \to bS$, obtenido asi la producción abS a la espera de ser terminada con la regla $S \to \lambda$ o bien, seguir recursivamente generando cadenas ab arbitrariamente.

Entonces podemos definir el lenguaje generado por la gramática como:

$$\mathrm{L} = \{(ab)^n : n \geq 0\}$$

- **Descripción sencilla:**

La gramática genera cualquier repetición de la cadena ab incluyendo la cadena vacía.

13

Ejercicio. *(Sección 1.2)*

13. ¿Qué *lenguaje* genera la *gramática* con estas producciones?

$$S \to Aa,$$
$$A \to B,$$
$$B \to Aa.$$

13. What language does the grammar with these productions generate?

$$S \to Aa,$$
$$A \to B,$$
$$B \to Aa.$$

Solución

Si analizamos las reglas definidas en la gramática anterior, podemos darnos cuenta de que no hay un solo camino que logre concretar una cadena, es decir, las reglas son recursivas infinitamente debido a que no existe alguna regla de "paro" para determinar alguna cadena. Entonces si la gramática no puede definir alguna cadena, el lenguaje que genera es un conjunto vacío.

- **Lenguaje generado:**

$$\mathrm{L} = \emptyset$$

21

Ejercicio. *(Sección 1.2)*

21. ¿Son las dos *gramáticas* con producciones respectivas

$$S \to aSb|ab|\lambda,$$

y

$$S \to aAb|ab,$$
$$A \to aAb|\lambda$$

equivalentes? Supongamos que S es el símbolo de inicio en ambos casos.

21. Are the two grammars with respective productions

$$S \to aSb\,|ab|\,\lambda,$$

and

$$S \to aAb|ab,$$
$$A \to aAb|\lambda$$

equivalent? Assume that S is the start symbol in both cases.

Solución

Para dar solución al ejercicio y determinar si las dos gramáticas son equivalentes, basta con determinar una sola cadena que sea formada por una que no pueda construir la otra.

Teniendo esto en cuenta, se puede decir que las gramáticas **no son equivalentes**. Si bien es cierto la segunda gramática genera casi todo el lenguaje de la primera, no le es posible generar la cadena vacía como la primera gramática, que simplemente puede usar una de sus reglas la cual es $\boldsymbol{S} \rightarrow \lambda$ mientras que la segunda gramática está obligada a tener elementos en las reglas para el símbolo $\boldsymbol{S}$ por las reglas $\boldsymbol{S} \rightarrow a\boldsymbol{A}b|ab$.

- **Conclusión:**

Las expresiones presentadas **no son equivalentes**.

23

Ejercicio. *(Sección 1.2)*

23. Demuestre que las *gramáticas*

$$\boldsymbol{S} \rightarrow a\boldsymbol{S}b|b\boldsymbol{S}a|\boldsymbol{SS}|a$$

y

$$\boldsymbol{S} \rightarrow a\boldsymbol{S}b|b\boldsymbol{S}a|a$$

no son equivalentes.

23. Show that the grammars

$$S \rightarrow aSb|bSa|SS|a$$

and

$$S \rightarrow aSb|bSa|a$$

are not equivalent.

Solución

Al igual que en el ejercicio anterior, es posible determinar si las gramáticas son equivalentes si necesidad de establecer todo el lenguaje que generan las mismas sencillamente encontrando alguna cadena que sea producida por una gramática que la otra no puede generar.

Para este caso en concreto es bastante sencillo darse cuenta de que **no son equivalentes** observando que la primera gramática tiene la regla $\boldsymbol{S} \to \boldsymbol{SS}$, y que además tiene $\boldsymbol{S} \to a$. Con estas reglas es posible producir la cadena aa, con la siguiente derivación $\boldsymbol{S} \Rightarrow \boldsymbol{SS} \Rightarrow aa$.
Con la segunda gramática no es posible hacer dicha cadena, ya que las reglas obligan a tener al menos una letra b si se tienen dos letras a, o bien una única letra a.

- **Conclusión:**

Las expresiones presentadas **no son equivalentes**.

2

Ejercicio. *(Sección 5.1)*

2. Dibuja el *árbol de derivación* correspondiente a la derivación del **Ejemplo 5.1**.

2. Draw the derivation tree corresponding to the derivation in Example 5.1.

Example 5.1

The grammar $G = (\{S\}, \{a, b\}, S, P)$, with productions

$$S \to aSa,$$
$$S \to bSb,$$
$$S \to \lambda,$$

is context-free. A typical derivation in this grammar is

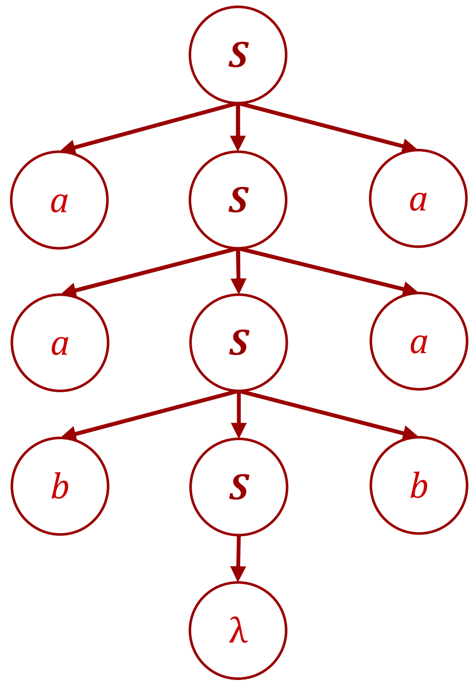
$$S \Rightarrow aSa \Rightarrow aaSaa \Rightarrow aabSbaa \Rightarrow aabbaa.$$

Solución

Sabemos que el árbol de derivación es una forma más de representar alguna derivación de cadenas de una gramática. Dado que en el ejercicio ya se nos otorga la derivación de la cadena $aabbaa$, y se nos muestra toda la derivación, solo basta con representar dicho proceso mediante el árbol correspondiente.

A continuación, se muestra el árbol obtenido.

- **Árbol de derivación:**



3 Ejercicio. *(Sección 5.1)*

3. Proporciona un *árbol de derivación* para $\boldsymbol{w} = abbbaabbaba$ para la gramática del **Ejemplo 5.2**. Utilice el *árbol de derivación* para encontrar una derivación situada más a la izquierda.

> 3. Give a derivation tree for $w = abbbaabbaba$ for the grammar in Example 5.2. Use the derivation tree to find a leftmost derivation.
>
> **Example 5.2**
>
> The grammar G, with productions
>
> $$S \to abB,$$
> $$A \to aaBb,$$
> $$B \to bbAa,$$
> $$A \to \lambda,$$

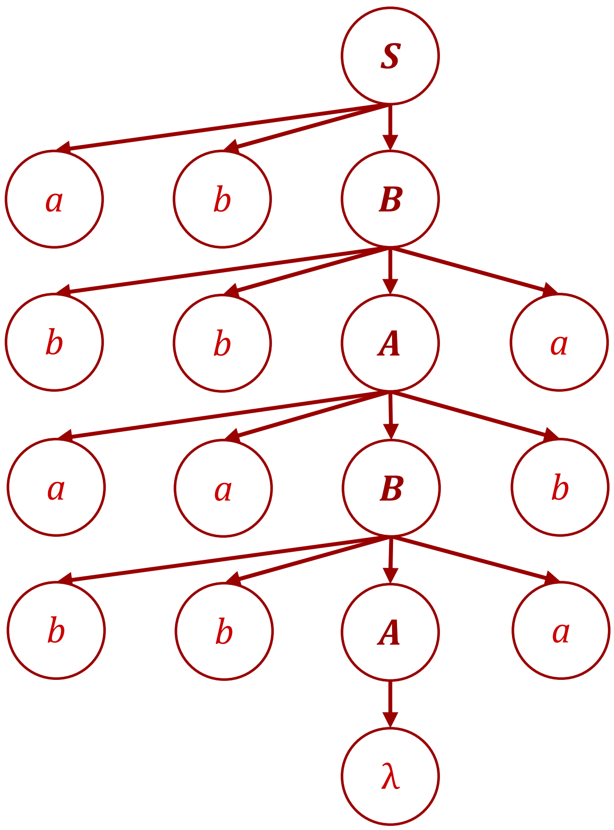
Solución

Al igual que en el ejercicio anterior, se nos pide el árbol de derivación para la cadena $\boldsymbol{w}$, para ello y para facilitar su elaboración, se procederá a realizar primero la derivación de la cadena y posteriormente el árbol de derivación correspondiente, contemplando que se nos pide que la derivación este más situada a la izquierda.

- **Derivación de $w = abbbaabbaba$:**

$$S \Rightarrow ab\boldsymbol{B} \Rightarrow abbb\boldsymbol{A}a \Rightarrow abbbaa\boldsymbol{B}ba \Rightarrow abbbaabb\boldsymbol{A}aba \Rightarrow abbbaabbaba$$

- **Árbol de derivación:**



19

Ejercicio. *(Sección 5.1)*

19. Muestra un *árbol de derivación* para la cadena $aabbbb$ con la gramática

$$S \rightarrow AB|\lambda,$$
$$A \rightarrow aB,$$
$$B \rightarrow Sb.$$

19. Show a derivation tree for the string $aabbbb$ with the grammar

$$S \rightarrow AB|\lambda,$$
$$A \rightarrow aB,$$
$$B \rightarrow Sb.$$

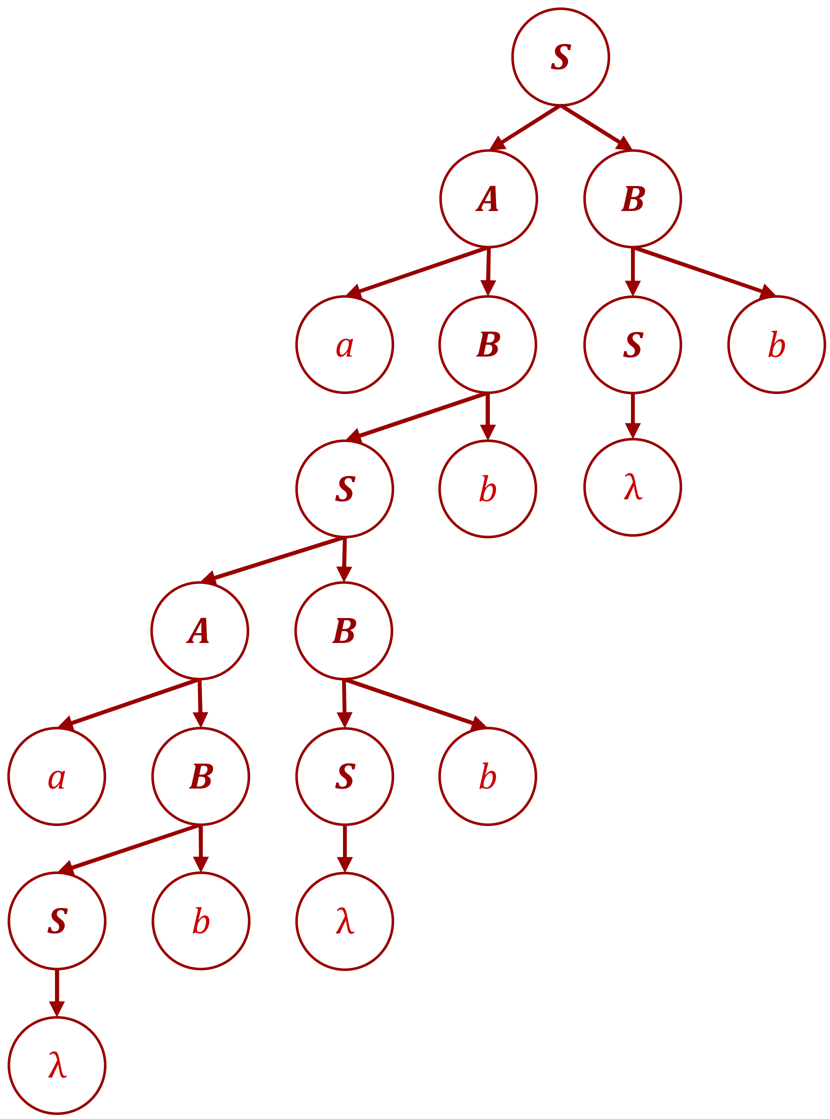
Solución

De igual forma que el ejercicio anterior, se realizará primeramente la derivación de la cadena indicada, y una vez obteniéndola, se procederá a realizar el árbol de derivación correspondiente.

- **Derivación de $aabbbb$:**

$$\boldsymbol{S} \Rightarrow \boldsymbol{AB} \Rightarrow a\boldsymbol{BS}b \Rightarrow a\boldsymbol{S}bb \Rightarrow a\boldsymbol{AB}bb \Rightarrow aa\boldsymbol{BS}bbb \Rightarrow aa\boldsymbol{S}bbbb \Rightarrow aabbbb$$

- **Árbol de derivación:**



20

Ejercicio. *(Sección 5.1)*

20. Considere la *gramática* con producciones

$$\boldsymbol{S} \to aa\boldsymbol{B},$$
$$\boldsymbol{A} \to b\boldsymbol{B}b|\lambda,$$
$$\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{A}a.$$

Muestre que la cadena $aabbabba$ no está en el *lenguaje* generado por esta *gramática*.

20. Consider the grammar with productions

$$S \to aaB,$$
$$A \to bBb|\lambda,$$
$$B \to Aa.$$

Show that the string *aabbabba* is not in the language generated by this grammar.

Solución

Para verificar que la cadena $aabbabba$ no está en el lenguaje que genera la gramática, se va a intentar formar la cadena con las reglas de la gramática hasta encontrar el punto en el que la cadena ya no puede ser terminada.

Construcción	Derivación
$aabbabba$	$\boldsymbol{S} \Rightarrow aa\boldsymbol{B}$
$aabbabba$	$aa\boldsymbol{B} \Rightarrow aa\boldsymbol{A}a$
$aabbabba$	$aa\boldsymbol{A}a \Rightarrow aab\boldsymbol{B}ba$
Genera: $aabbaaba$ Debía generar: $aabbabba$	$aab\boldsymbol{B}ba \Rightarrow aab\boldsymbol{A}aba$

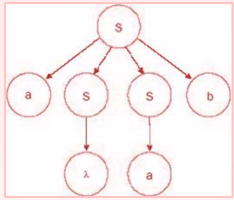
Para este punto, se ve cómo es que ya no genera la secuencia correcta de caracteres para completar correctamente la cadena, es decir, al generar un carácter incorrecto, y no haber alguna otra regla que pueda terminarla, se puede decir que se ha comprobado que la cadena no pertenece al lenguaje generado por la gramática.

- **Conclusión:**

La cadena **no está en el lenguaje de la gramática**.

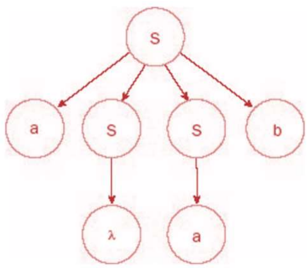
Ejercicio. *(Sección 5.1)*

21. Considere el *árbol de derivación* que se muestra a continuación.



Encuentre una *gramática* $\mathbf{G}$ para la cual este sea el *árbol de derivación* de la cadena aab. Luego, encuentre dos oraciones más de $\mathbf{L}(\mathbf{G})$. Encuentre una oración en $\mathbf{L}(\mathbf{G})$ que tenga un árbol de derivación de altura cinco o mayor.

21. Consider the derivation tree below.



Find a grammar G for which this is the derivation tree of the string aab. Then find two more sentences of $L(G)$. Find a sentence in $L(G)$ that has a derivation tree of height five or larger.

Solución

Para resolver todo lo que se nos pide en el ejercicio es necesario iniciar definiendo la gramática $\mathbf{G}$ para la cual el árbol anterior sea el árbol de derivación de la cadena aab.

- **Gramática G:**

$\mathbf{G} = (\{\boldsymbol{S}\}, \{a, b\}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{P})$

Donde $\mathbf{P}$ esta dado por:

$$\boldsymbol{S} \rightarrow a\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}b|a|\lambda$$

- **Dos oraciones de $\mathbf{L}(\mathbf{G})$:**
  1. Oración ab:

$$\boldsymbol{S} \Rightarrow a\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}b \Rightarrow ab$$

  2. Oración $aaab$:

$$\boldsymbol{S} \Rightarrow a\boldsymbol{S}\boldsymbol{S}b \Rightarrow aaab$$

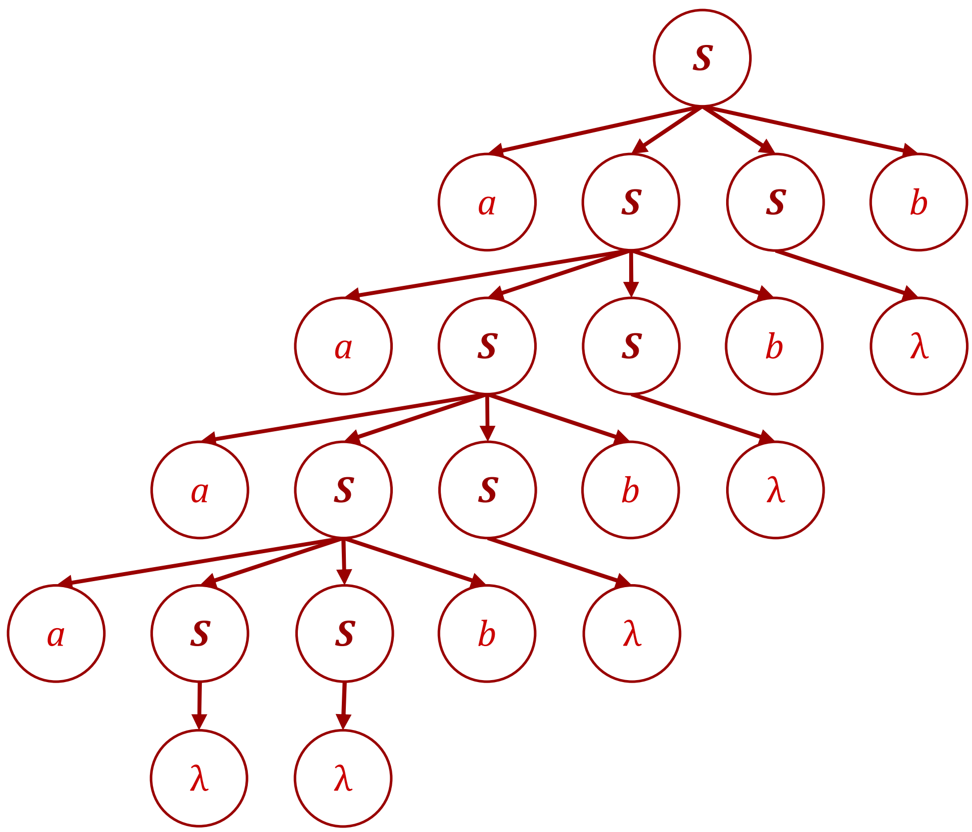
- **Oración con árbol de derivación de altura 5:**

Para facilitar encontrar el árbol de derivación de la oración, se encontrará primero una derivación que cumpla con la condición del ejercicio.

Entonces, para generar la oración $aaaabbbb$ existe la siguiente derivación:

$$\boldsymbol{S} \Rightarrow a\boldsymbol{SS}b \Rightarrow aa\boldsymbol{SS}bb \Rightarrow aaa\boldsymbol{SS}bbb \Rightarrow aaaa\boldsymbol{SS}bbbb \Rightarrow aaaabbbb$$

Cuyo árbol de derivación es el siguiente:



7 Ejercicio. *(Sección 5.1)*

7. Encuentra *gramáticas libres de contexto* para los siguientes *lenguajes* (con la condición $n \geq 0, m \geq 0$).

$$(a)\ \mathbf{L} = \{a^n b^m : n \leq m + 3\}$$
$$(b)\ \mathbf{L} = \{a^n b^m : n \neq m - 1\}$$

7. Find context-free grammars for the following languages (with $n \geq 0$, $m \geq 0$).

(a) $L = \{a^n b^m : n \leq m + 3\}$.

(b) $L = \{a^n b^m : n \neq m - 1\}$.

Solución

Para dar solución a los incisos del ejercicio, primero se hará un pequeño análisis de las cadenas que son aceptadas por cada lenguaje, y teniendo claro el conjunto de estas cadenas, se procederá a encontrar una gramática libre de contexto que genere dicho lenguaje.

a) $\mathbf{L} = \{a^n b^m : n \leq m + 3\}$

El lenguaje representado por el conjunto nos indica que en el lenguaje contiene las cadenas de a y b concatenadas donde la cantidad de letras a es menor o igual a la cantidad de letras b sumado 3, es decir, la cantidad de letras a puede ser menor a la cantidad de letras b, o bien mayor solo si la diferencia no excede a 3.

Gramática:

$\mathbf{G} = (\{\boldsymbol{S}\}, \{a, b\}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{P})$

Donde $\mathbf{P}$ esta dado por:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{S} \rightarrow \boldsymbol{AB} \\ \boldsymbol{A} \rightarrow a\boldsymbol{B} | aa\boldsymbol{B} | aaa\boldsymbol{B} | \lambda \\ \boldsymbol{B} \rightarrow a\boldsymbol{B}b | \boldsymbol{B}b | \lambda \end{gathered}$$

En la gramática se construyen primeramente las cantidades de letras a y después las de letras b, donde al construir el bloque de letras a, elegiremos la cantidad de exceso de letras a (si es que después se elige crear un bloque con letras a y b al mismo tiempo) donde no excederá a 3, o bien simplemente elegir no tener letras a. Por otra parte, al construir el bloque de letras b, se hará de tal manera que se agreguen en paralelo una letra a y una b, o bien, simplemente letras b, ya que de esta forma se cumple la condición del lenguaje y no la estará rompiendo.

b) $\mathbf{L} = \{a^n b^m : n \neq m - 1\}$

El lenguaje representado por el conjunto nos indica que en el lenguaje contiene las cadenas de a y b concatenadas donde la cantidad de letras a es distinta a la de letras b menos 1, es decir, la cantidad de letras b puede ser mayor a la de letras a solo si la diferencia es mayor a 1, o bien, puede ser igual o menor.

Gramática:

$\mathbf{G} = (\{\boldsymbol{S}\}, \{a, b\}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{P})$

Donde $\mathbf{P}$ esta dado por:

$$\begin{gathered} \boldsymbol{S} \rightarrow \boldsymbol{X}bb|\boldsymbol{Y} \\ \boldsymbol{X} \rightarrow a\boldsymbol{X}b|\boldsymbol{X}b|\lambda \\ \boldsymbol{Y} \rightarrow a\boldsymbol{Y}b|a\boldsymbol{Y}|\lambda \end{gathered}$$

En la gramática solo se puede elegir dos caminos, el primero es donde una vez tenido una cantidad de letras b mayor a 1 a la cantidad de letras a simplemente se agreguen letras en paralelo, o bien solo letras b ya que tendremos siempre la seguridad de que es mayor a la de letras a en 2; el segundo camino es agregar letras en paralelo si es que queremos que sea iguales las cantidades, o bien, solo letras a, y de igual forma, tendremos la seguridad de que la cantidad de letras b, no será mayor a la de a en 1.

13 Ejercicio. *(Sección 5.1)*

13. Sea $\mathbf{L} = \{a^n b^m : n \geq 0\}$.

(a) Muestra que $\mathbf{L}^2$es libre de contexto.

(c) Muestra que $\mathbf{L}^*$es libre de contexto.

13. Let $L = \{a^n b^n : n \geq 0\}$.

(a) Show that L^2 is context-free.

(b) Show that L^k is context-free for any given $k \geq 1$.

(c) Show that $\overline{L}$ and L^* are context-free.

Solución

El ejercicio nos pide identificar si dichos lenguajes son libres de contexto, para ello es necesario recordar que un lenguaje es libre de contexto si existe una gramática libre de contexto que logre representarlo.

A su vez, una gramática es libre de contexto si, además de la definición general de gramática, todas sus reglas o producciones sean de una sola variable del lado izquierdo. A continuación, se establecen dichas gramáticas y se describe si el lenguaje es libre de contexto.

a) Muestra que $\mathbf{L^2}$es libre de contexto.

Sabemos que $\mathbf{L^2}$ es equivalente a $\mathbf{L} * \mathbf{L}$, por lo tanto, basta con establecer una regla en la gramática que concatene una misma variable dos veces, y que dicha variable genere a $\mathbf{L}$.

Gramática:

$\mathbf{G} = (\{\boldsymbol{S}\}, \{a, b\}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{P})$

Donde $\mathbf{P}$ esta dado por:

$$\boldsymbol{S} \to \boldsymbol{LL}$$
$$\boldsymbol{L} \to a\boldsymbol{L}b|\lambda$$

Se ha encontrado una gramática libre de contexto que represente el lenguaje.

- **Conclusión:**

El lenguaje $\mathbf{L^2}$ **es libre de contexto**.

b) Muestra que $\mathbf{L^*}$es libre de contexto.

Sabemos que $\mathbf{L^*}$ es equivalente a $\mathbf{L} * \mathbf{L} * \mathbf{L} * \cdots$, por lo tanto, basta con establecer una regla en la gramática que concatene n veces una misma variable, y que la dicha variable genere a $\mathbf{L}$.

Gramática:

$\mathbf{G} = (\{\boldsymbol{S}\}, \{a, b\}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{P})$

Donde $\mathbf{P}$ esta dado por:

$$\boldsymbol{S} \to \boldsymbol{LS}|\lambda$$
$$\boldsymbol{L} \to a\boldsymbol{L}b|\lambda$$

Se ha encontrado una gramática libre de contexto que represente el lenguaje.

- **Conclusión:**

El lenguaje $\mathbf{L^*}$ **es libre de contexto**.