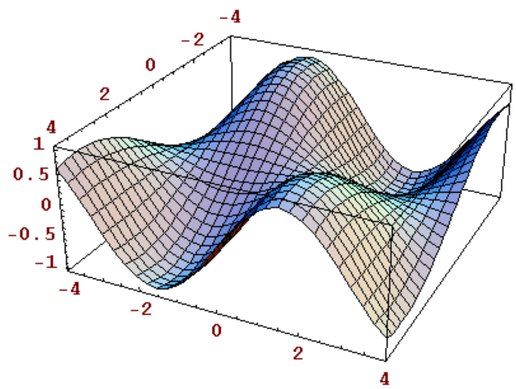


Funciones de varias variables

"Resumen de videos y gráfica en GeoGebra"

Departamento de Ciencias de la Computación

Asignatura:

"Lenguajes Inteligentes"

Profesor:

Eunice Esther Ponce de León Senti

Fecha:

11 de octubre de 2024

Alumnos:

Juan Francisco Gallo Ramírez

ID: 23287

Ingeniería en Computación Inteligente

5to Semestre

Descripción de videos

- **Primer video:**

En este video se aborda el tema de las funciones de varias variables, comenzando por sus aplicaciones en situaciones cotidianas, como el ingreso de la venta de productos, la producción en función de horas de trabajo y capital, y el índice de temperatura y humedad. Se define formalmente una función de varias variables como aquella cuyo dominio es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ y cuyo contradominio son los números reales.

Se explica que el dominio de una función está formado por todos los puntos en los que está definida, y se denota como (F). Luego se presenta un ejemplo concreto con la función $F(x, y) = 3x^2 - 4y - 1$, evaluando esta función en varios puntos del dominio para ilustrar cómo transforma pares de valores en números reales.

Finalmente, se concluye que el dominio de esta función es todo el plano bidimensional $\mathbb{R}^2$y se determina que su rango también es todo $\mathbb{R}$ al considerar un caso particular donde $x = 0$, demostrando que se obtienen todos los números reales a partir de la función.

- **Segundo video:**

Este video trata sobre el dominio y el rango de una función de dos variables, específicamente la función $f(x, y) = ln(3 - x^2)$. El presentador explica que, como el logaritmo natural solo está definido para valores positivos, el argumento $3 - x^2$ debe ser estrictamente mayor que 0. De esta manera, la primera condición para el dominio es que $3 > x^2$, lo cual implica que y debe ser mayor que $\frac{x^2}{3}$.

Luego, grafica la curva $y = x^2 \div 3$, que divide el plano en dos regiones: una por encima de la curva y otra por debajo. Usando un punto de prueba, demuestra que la región válida para el dominio es la que está por encima de la parábola, ya que los puntos en esta región cumplen con la condición de que $y > \frac{x^2}{3}$.

Finalmente, concluye que el dominio de la función consiste en todos los puntos por encima de la parábola $y = \frac{x^2}{3}$, y que el rango de la función es todo el conjunto de los números reales $(\mathbb{R})$ debido a las propiedades del logaritmo natural. El video termina adelantando que en el siguiente se abordará el dominio de otra función.

- ## Tercer video:

En el video se estudia el dominio de la función $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$. El análisis comienza identificando los problemas potenciales de la función. Primero, para que la raíz cuadrada sea un número real, el argumento dentro de la raíz, $4 - x^2 - y^2$, debe ser mayor o igual a 0. Sin embargo, dado que la raíz está en el denominador, no puede ser igual a 0, por lo que la condición correcta es $4 - x^2 - y^2 > 0$, lo que implica que $x^2 + y^2 < 4$. Esto describe una región circular en el plano con radio 2 y centro en el origen.

Para graficar el dominio, se traza la circunferencia $x^2 + y^2 = 4$, que divide el plano en dos regiones: una dentro y otra fuera de la circunferencia. El dominio de la función corresponde a los puntos dentro de esta circunferencia, excluyendo los que se encuentran en la misma, ya que no se permite que el denominador sea cero. Así, el dominio incluye todos los puntos dentro de la circunferencia de radio 2, pero no en el borde.

Finalmente, el presentador sugiere ejercicios adicionales sobre otras funciones para que el espectador practique cómo describir y graficar dominios similares, haciendo énfasis en la importancia de comprender las restricciones impuestas por raíces y denominadores.

- ## Cuarto video:

El contenido se centra en el uso de GeoGebra para la representación gráfica de funciones, lo que resulta especialmente útil dado que se trata de un curso con un fuerte enfoque geométrico. En esta sesión, se aborda el dominio de funciones de varias variables, específicamente una función que representa la temperatura en grados centígrados en una región del plano, expresada como $T(x,y) = \frac{1}{4x^2+25y^2-9}$.

Para encontrar la temperatura en los puntos de interés $(0{,}0)$, $(1{,}2)$ y $(-3{,}1)$, se sustituyen los valores de x y y en la función. Al evaluar $T(0,0)$, se obtiene $-\frac{1}{9}$; para $T(1,2)$, el resultado es $\frac{1}{95}$; y para $T(-3,1)$, se halla $\frac{1}{52}$. A continuación, se analiza el dominio de la función, destacando que el denominador no puede ser igual a cero, lo que lleva a la condición $4x^2 + 25y^2 - 9 \neq 0$.

Para graficar el dominio, se considera la expresión $4x^2 + 25y^2 = 9$, que representa una elipse en el plano. Se determinan las intersecciones de la elipse con los ejes x y y, encontrando puntos clave en la gráfica. Finalmente, se concluye que el dominio de la función incluye todos los puntos que no pertenecen a la elipse, ya que los puntos sobre la elipse hacen que el denominador sea cero, lo cual no es permitido. Así, el dominio se clasifica como un conjunto abierto, ya que no incluye la frontera de la elipse.

- **Quinto video:**

El video de Geo Matt se centra en la explicación de cómo graficar curvas y superficies de nivel utilizando GeoGebra, comenzando con la configuración inicial del programa para una mejor visualización. Se recomienda a los usuarios ajustar la presentación y el tamaño de letra para facilitar el seguimiento. Luego, se introduce la definición de curvas y superficies de nivel, explicando que una función f de un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ a $\mathbb{R}$ puede ser representada mediante un conjunto de puntos donde $f(x) = c$. Para funciones de dos variables, se generan curvas de nivel, y para funciones de tres variables, se generan superficies de nivel.

Se demuestra el uso de GeoGebra al graficar un paraboloide circular. El presentador muestra cómo fijar el valor de z para obtener diferentes curvas de nivel, las cuales se representan como circunferencias centradas en el origen, con radios que dependen del valor de c. Utilizando el comando "secuencia", se genera una lista de curvas de nivel para la función, y se añade un deslizador que permite visualizar dinámicamente cómo cambian las curvas a medida que se ajusta el valor de c.

Posteriormente, el video presenta un segundo ejemplo con un paraboloide hiperbólico. Se sigue un proceso similar, creando un deslizador para el valor de c y graficando las curvas de nivel correspondientes. Además, se explica cómo mostrar las curvas de nivel sobre la superficie de la función utilizando el comando "interseca", permitiendo visualizar la intersección entre el plano y la superficie.

Finalmente, el presentador aborda funciones de tres variables y cómo graficar superficies de nivel. Se establece un deslizador para el valor de c y se utiliza el comando "secuencia" para representar las distintas superficies generadas. Se exploran ejemplos adicionales, como el caso de los hiperboloides de dos hojas, y se concluye el video invitando a los espectadores a dejar comentarios y suscribirse para recibir actualizaciones sobre nuevos contenidos.

- **Sexto video:**

El curso de cálculo vectorial con GeoGebra da la bienvenida a los participantes y les recuerda suscribirse al canal, donde pueden encontrar una variedad de vídeos sobre temas como derivadas parciales, integrales dobles, campos vectoriales y funciones de varias variables. En el vídeo de hoy, se abordará cómo utilizar trayectorias para determinar la existencia o no de un límite en funciones de dos variables.

Se explica que, en el plano bidimensional, existen infinitas trayectorias para aproximarse a un punto (x_0, y_0). Cada trayectoria es una curva que pasa por ese punto, y se introduce un teorema que establece que, si el límite de una función a lo largo de una trayectoria no existe, entonces el límite general también no existe. Además, si el límite a lo largo de dos trayectorias diferentes da resultados distintos, se puede concluir que el límite de la función no existe. Sin embargo, si se encuentra que todos los límites a lo largo de todas las trayectorias son iguales, se puede afirmar que el límite de la función existe.

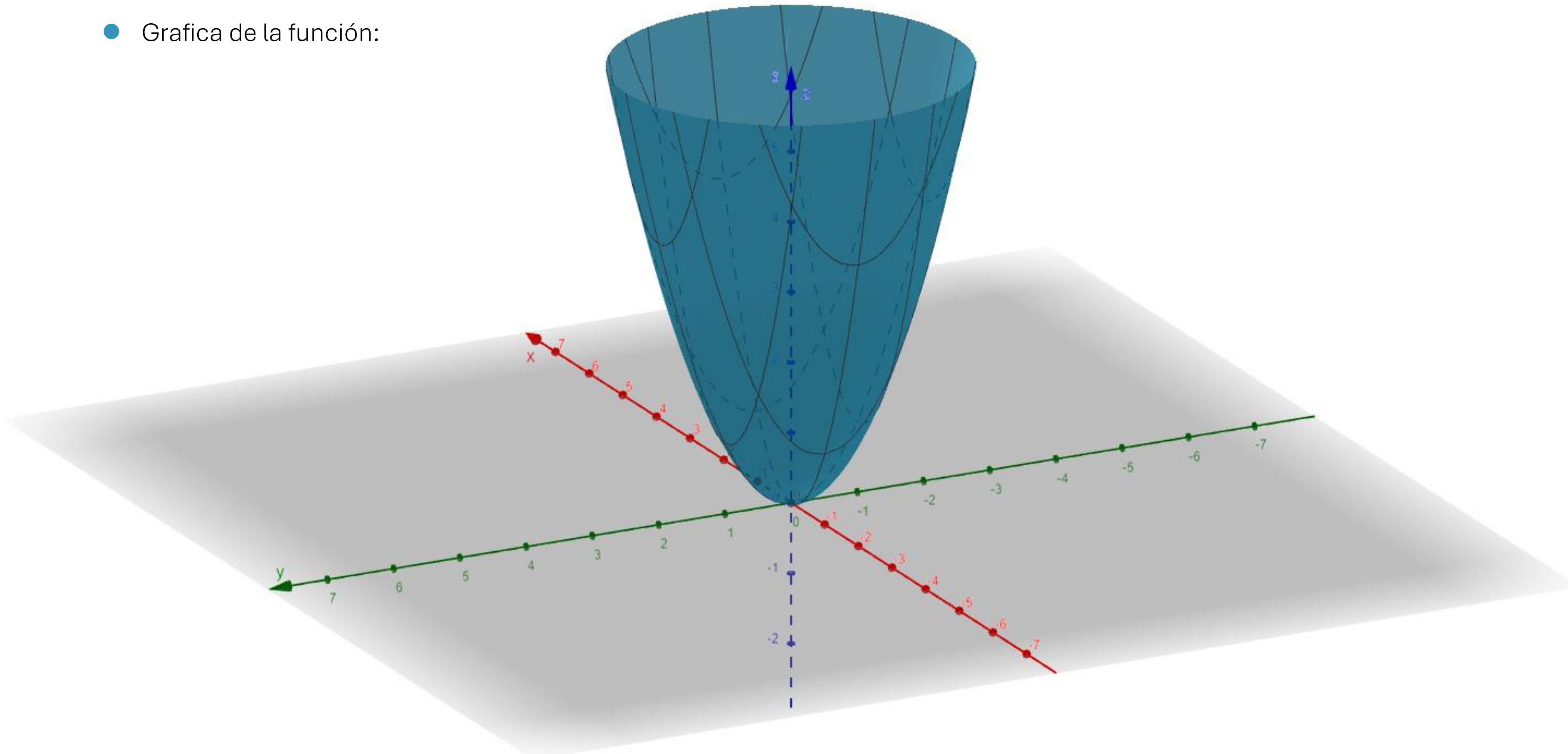
El ejemplo presentado se centra en la función $f(x, y) = \frac{\sin(x)}{x^2+y^2}$. Al evaluar el límite en el punto $(0, 0)$, se obtiene una indeterminación de tipo $0/0$. A través de diferentes trayectorias, como los ejes x e y, se encuentra que el límite tiende a cero, pero esto no es suficiente para concluir que el límite de la función existe. Al aproximarse al punto $(0, 0)$ a lo largo de la recta $y = x$, el límite da como resultado $\frac{1}{2}$. Dado que se obtienen diferentes valores a lo largo de distintas trayectorias, se concluye que el límite de la función no existe.

Finalmente, se invita a los participantes a realizar ejercicios en casa para verificar la existencia de límites a lo largo de diferentes trayectorias y se menciona que se presentarán más ejemplos en futuros vídeos.

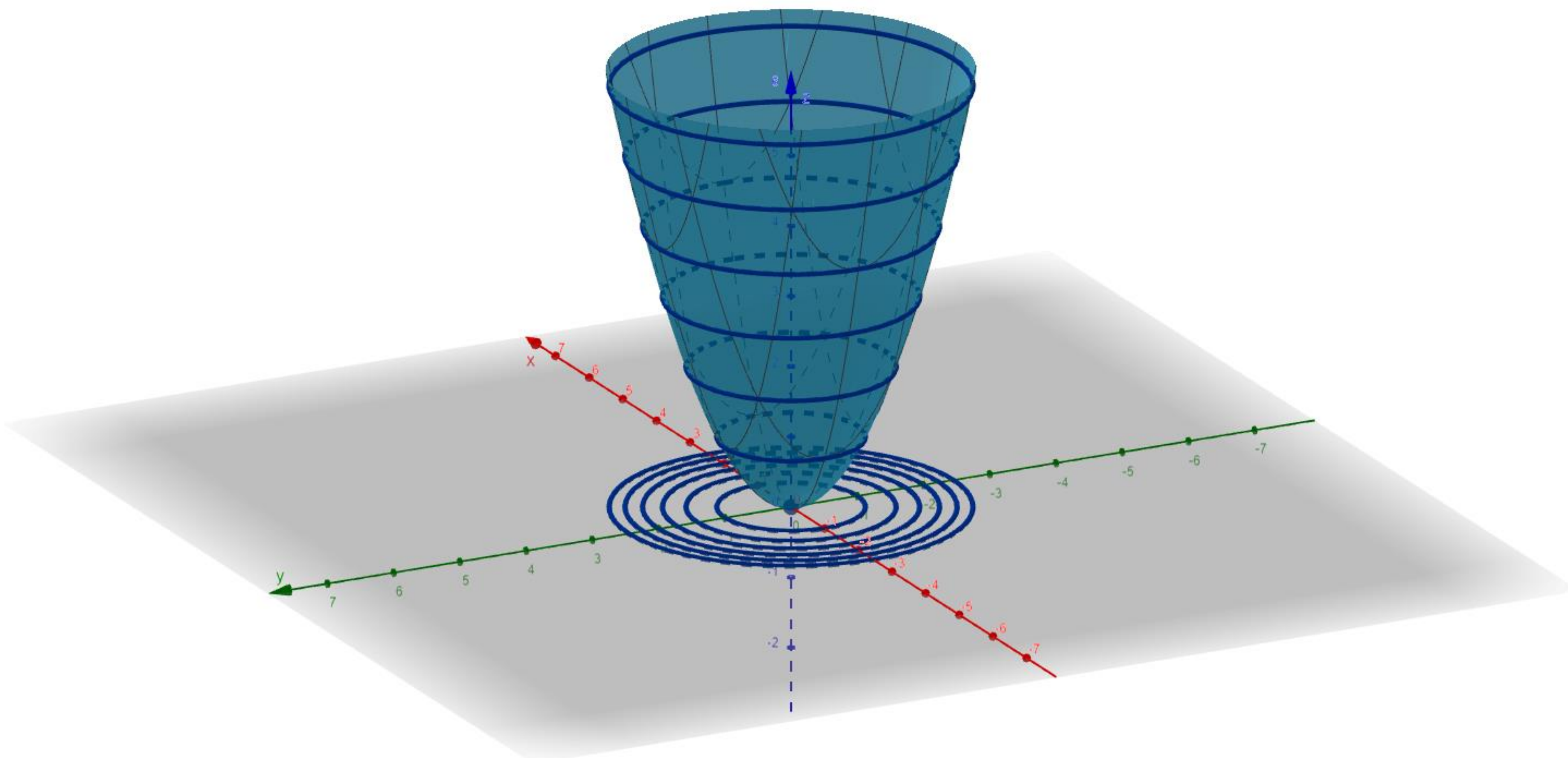
Desarrollo de funciones en GeoGebra

$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

- Grafica de la función:

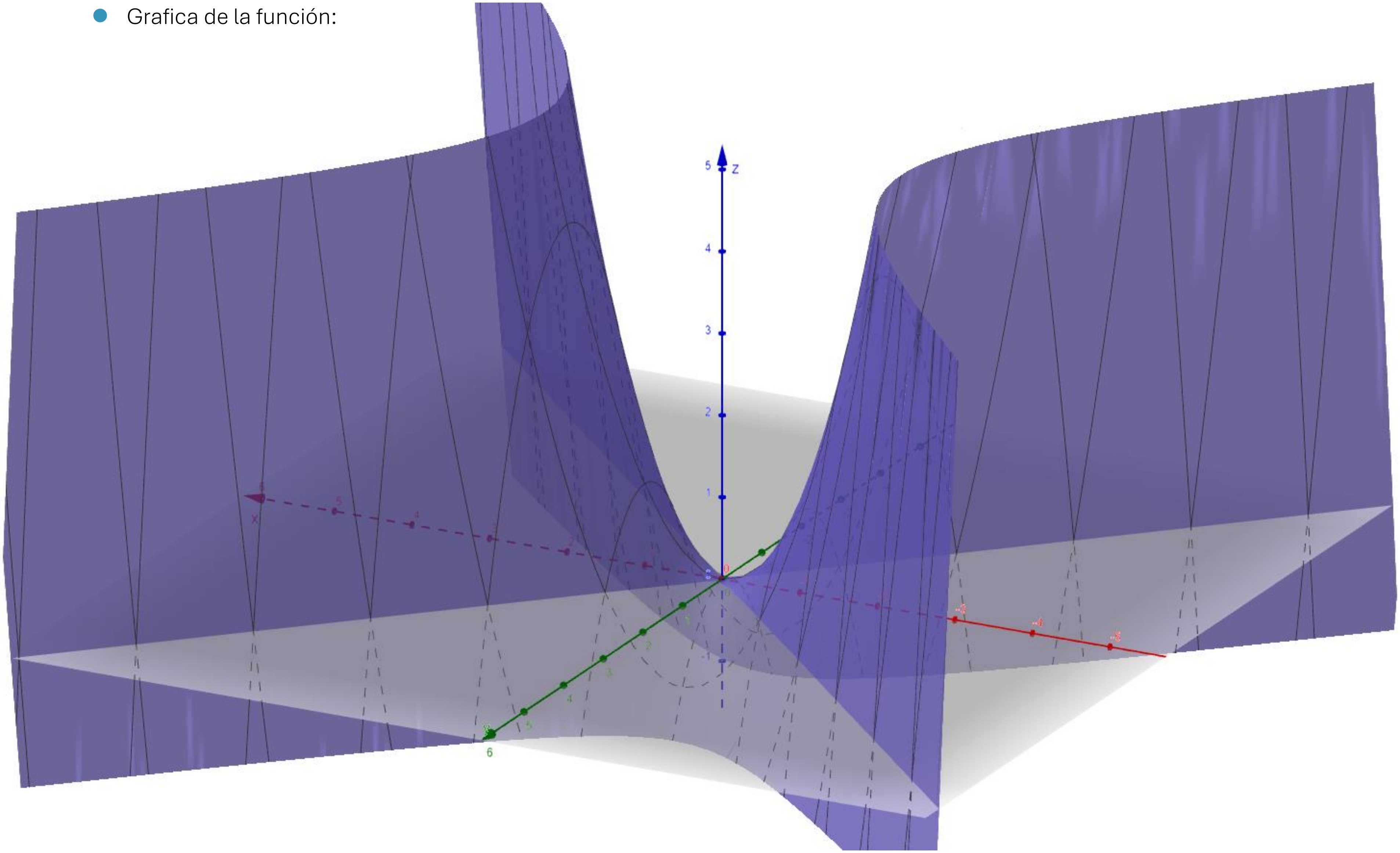


- Curvas y superficies de nivel:



$$g(x, y) = x^2 - y^2$$

- Grafica de la función:



- Curvas y superficies de nivel: