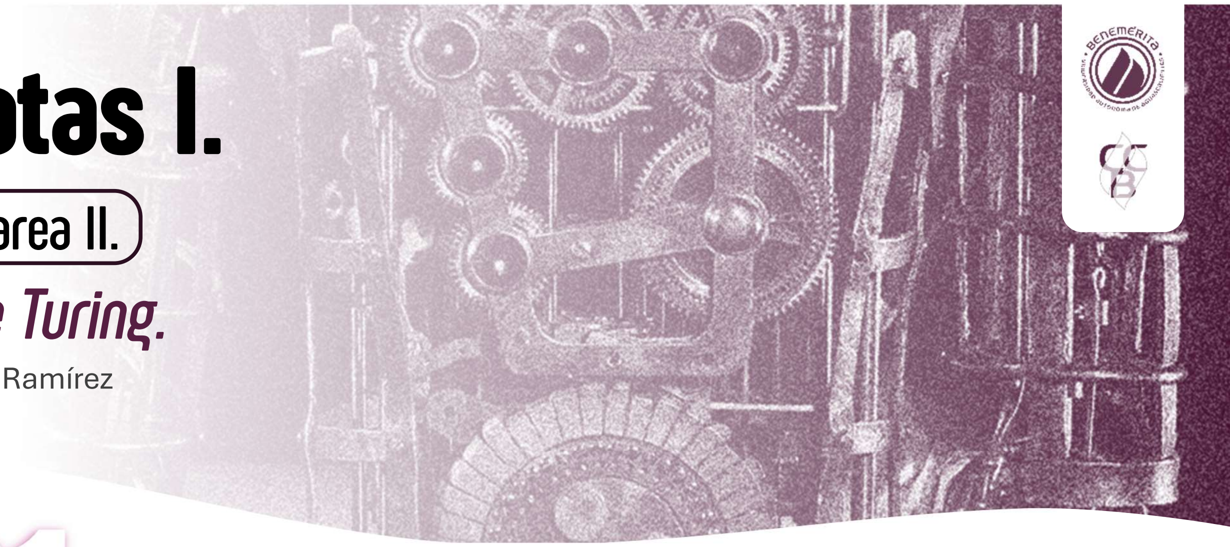


Autómatas I.

Parcial III. Tarea II.

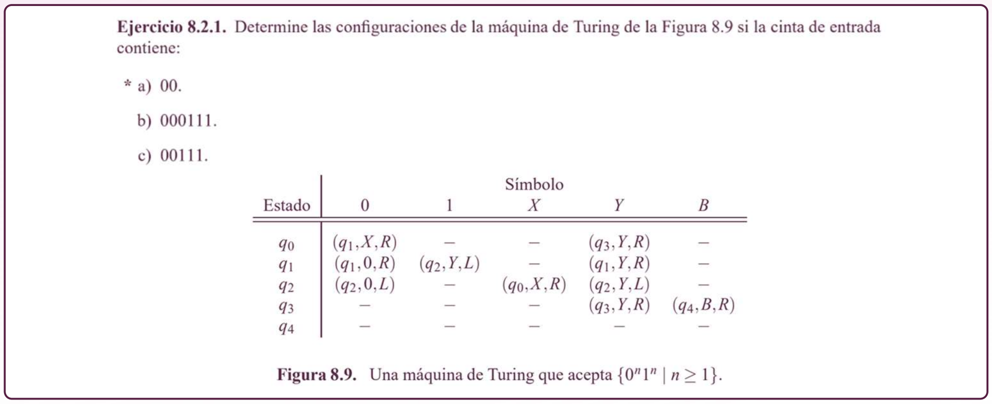
Máquinas de Turing.

Juan Francisco Gallo Ramírez
***5to** Semestre UAA*
I.C.I.

821

Ejercicio. *(Sección 8.2)*

8.2.1. Se muestra la imagen del ejercicio (recordando tomar q_0 como inicial y q_4 como final y cambiar el inciso **b)** por 0011):



Ejercicio 8.2.1. Determine las configuraciones de la máquina de Turing de la Figura 8.9 si la cinta de entrada contiene:

* a) 00.
b) 000111.
c) 00111.

	Símbolo				
Estado	0	1	X	Y	B
q_0	(q_1,X,R)	–	–	(q_3,Y,R)	–
q_1	$(q_1,0,R)$	(q_2,Y,L)	–	(q_1,Y,R)	–
q_2	$(q_2,0,L)$	–	(q_0,X,R)	(q_2,Y,L)	–
q_3	–	–	–	(q_3,Y,R)	(q_4,B,R)
q_4	–	–	–	–	–

Figura 8.9. Una máquina de Turing que acepta $\{0^n1^n \mid n \geq 1\}$.

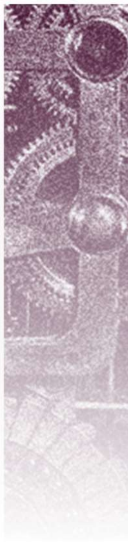
Solución

Para determinar las configuraciones de la máquina de la **Figura 8.9** para las cadenas propuestas se usará la notación vista en clase donde se describe el estado en el que se encuentra, asi como el carácter a procesar por cada elemento de la cadena.

a) 00

$$\boldsymbol{q_0}00 \vdash X\boldsymbol{q_1}0 \vdash X0\boldsymbol{q_1}\square$$

La cadena es **rechazada**.



b) 0011

$$\boldsymbol{q_0}0011 \vdash X\boldsymbol{q_1}011 \vdash X0\boldsymbol{q_1}11 \vdash X\boldsymbol{q_2}0Y1 \vdash \boldsymbol{q_2}X0Y1$$
$$\vdash X\boldsymbol{q_0}0Y1 \vdash XX\boldsymbol{q_1}Y1 \vdash XXY\boldsymbol{q_1}1 \vdash XX\boldsymbol{q_2}YY \vdash X\boldsymbol{q_2}XYY$$
$$\vdash XX\boldsymbol{q_0}YY \vdash XXY\boldsymbol{q_3}Y \vdash XXYY\boldsymbol{q_3}\square \vdash XXYY\square\boldsymbol{q_4}\square$$

La cadena es **aceptada**.

c) 00111

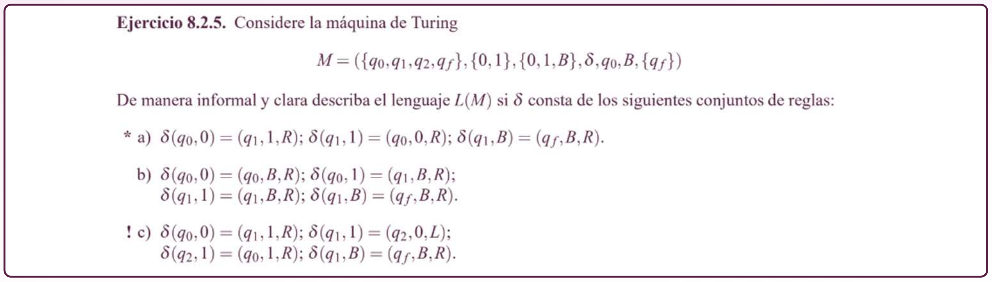
$$\boldsymbol{q_0}00111 \vdash X\boldsymbol{q_1}0111 \vdash X0\boldsymbol{q_1}111 \vdash X\boldsymbol{q_2}0Y11 \vdash \boldsymbol{q_2}X0Y11$$
$$\vdash X\boldsymbol{q_0}0Y11 \vdash XX\boldsymbol{q_1}Y11 \vdash XXY\boldsymbol{q_1}11 \vdash XX\boldsymbol{q_2}YY1 \vdash X\boldsymbol{q_2}XYY1$$
$$\vdash XX\boldsymbol{q_0}YY1 \vdash XXY\boldsymbol{q_3}Y1 \vdash XXYY\boldsymbol{q_3}1$$

La cadena es **rechazada**.

825

Ejercicio. *(Sección 8.2)*

8.2.5. Se muestra la imagen del ejercicio:



Ejercicio 8.2.5. Considere la máquina de Turing

$$M = (\{q_0, q_1, q_2, q_f\}, \{0,1\}, \{0,1,B\}, \delta, q_0, B, \{q_f\})$$

De manera informal y clara describa el lenguaje $L(M)$ si δ consta de los siguientes conjuntos de reglas:

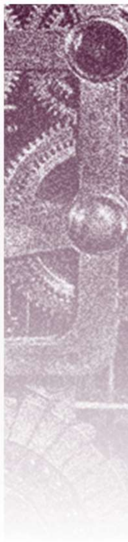
* a) $\delta(q_0,0) = (q_1,1,R)$; $\delta(q_1,1) = (q_0,0,R)$; $\delta(q_1,B) = (q_f,B,R)$.

b) $\delta(q_0,0) = (q_0,B,R)$; $\delta(q_0,1) = (q_1,B,R)$;
$\delta(q_1,1) = (q_1,B,R)$; $\delta(q_1,B) = (q_f,B,R)$.

! c) $\delta(q_0,0) = (q_1,1,R)$; $\delta(q_1,1) = (q_2,0,L)$;
$\delta(q_2,1) = (q_0,1,R)$; $\delta(q_1,B) = (q_f,B,R)$.

Solución

Para dar solución al ejercicio, se hará un pequeño análisis de que cadenas son aceptadas por cada máquina, ya que de esta forma nos estamos centrando en la estructura general de las cadenas que pueden ser aceptadas por dicha máquina y por lo tanto el *lenguaje*.



a) $\boldsymbol{\delta}(q_0, 0) = (q_1, 1, R);\ \boldsymbol{\delta}(q_1, 1) = (q_0, 0, R);\ \boldsymbol{\delta}(q_1, \square) = \left(q_f, \square, R\right).$

Primeramente podemos percatarnos que el estado inicial q_0 solo tiene una transición definida para el número 0, por lo que la cadena debería empezar por ese carácter.

Después en q_1, y posterior a haber leído un 0 antes, solo hay una transición definida para el número 1, por lo que hasta ahora sabemos que la cadena debe tener una secuencia de 01.

Finalmente vemos que después de q_1, regresamos al estado q_0, y en consecuencia tenemos que volver a leer un numero 0, para después un número 1, y asi sucesivamente, hasta que al estar en q_1 (por haber leído un 0), se lea un blank, lo que indica el final de la cadena llevándonos a q_f estado final.

Entonces el lenguaje aceptado es:

$$\mathrm{L} = \{\{01\}^n 0 : n \geq 0\}$$

- **Descripción sencilla:**

Cualquier cantidad de repeticiones de 01 con un 0 como sufijo.

b) $\boldsymbol{\delta}(q_0, 0) = (q_0, \square, R);\ \boldsymbol{\delta}(q_0, 1) = (q_1, \square, R);$
$\boldsymbol{\delta}(q_1, 1) = (q_1, \square, R);\ \boldsymbol{\delta}(q_1, \square) = \left(q_f, \square, R\right);$

Al comenzar a leer la cadena en q_0, nos damos cuenta de que se pueden tomar dos caminos, el primero es leer un 0 y permanecer en ese mismo estado indefinidamente, leyendo números 0 hasta encontrar un número 1; el otro camino es directamente leer un número 1 y pasar al estado q_1, esto porque una vez en q_1 no podremos regresar a q_0 y por lo tanto ya no se podrá leer un número 0. Esto nos sugiere que la cadena puede tener como prefijo cualquier cantidad de números 0, incluido el no tener ninguno.

Posteriormente en q_1, solo podremos leer el número 1 indefinidamente hasta encontrar un blank, y por lo tanto el final de la cadena, llevándonos a q_f estado final.

Entonces el lenguaje aceptado es:

$$\mathrm{L} = \{0^n 1^m : n \geq 0, m > 0\}$$

- **Descripción sencilla:**

Cualquier cantidad de repeticiones de 0 con al menos una repetición del 1.

c) $\boldsymbol{\delta}(q_0, 0) = (q_1, 1, R);\ \boldsymbol{\delta}(q_1, 1) = (q_2, 0, L);$
$\boldsymbol{\delta}(q_2, 1) = (q_0, 1, R);\ \boldsymbol{\delta}(q_1, \square) = (q_f, \square, R);$

Al iniciar a leer la cadena, siempre deberemos tener un número 0, ya que solo hay una transición definida para ese número en q_0; posteriormente al pasar a q_1, deberemos tener un número 1, o bien acabar la cadena e ir a q_f estado final, lo que nos sugiere que el numero 0 por si solo es aceptado por el lenguaje.

En q_1 al leer un número 1, retrocedernos un carácter y pasaremos a q_2, donde siempre leeremos el numero 1 si se ha iniciado la cadena con un numero 0 (ya que el 0 es cambiado por 1 en q_0), y avanzaremos al carácter siguiente en el estado q_0, que de igual forma siempre leerá un número 0 (ya que el 1 se cambió por un 0 en q_1) y este “bucle” de retroceder y avanzar y cambiar 1 por 0 y viceversa en simultaneo continuará siempre que haya un número 1 después del primer carácter de la cadena siendo un 0 hasta terminar la cadena con un blank, e ir al estado final q_f.

Entonces el lenguaje aceptado es:

$$\mathrm{L} = \{01^n : n \geq 0\}$$

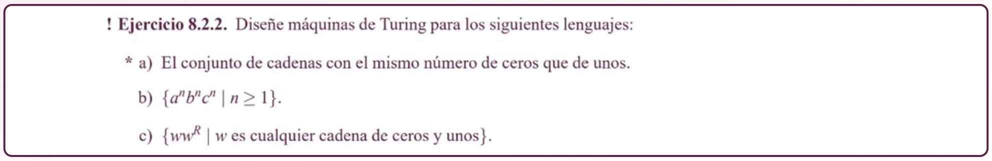
- **Descripción sencilla:**

Cualquier cantidad de repeticiones de 1 con un solo 0 como prefijo.

822

Ejercicio. *(Sección 8.2)*

8.2.2. Se muestra la imagen del ejercicio:



! Ejercicio 8.2.2. Diseñe máquinas de Turing para los siguientes lenguajes:

* a) El conjunto de cadenas con el mismo número de ceros que de unos.

b) $\{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$.

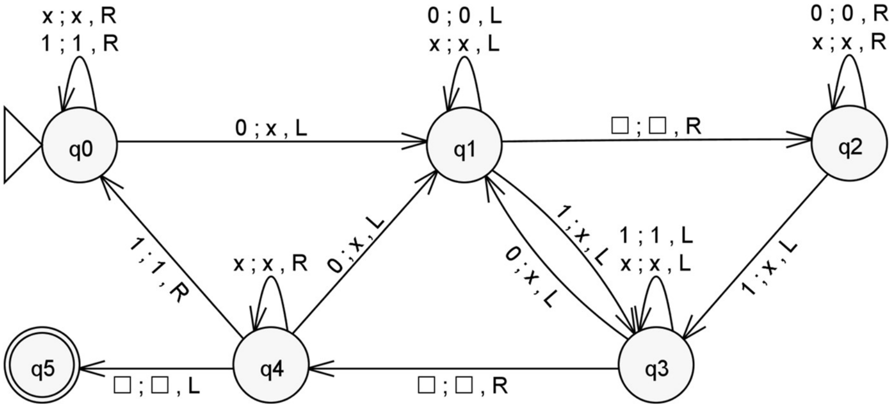
c) $\{ww^R \mid w$ es cualquier cadena de ceros y unos$\}$.

Solución

Para dar solución al ejercicio, se realizaron los respectivos grafos de transición que representan los *lenguajes* anteriores.

a) El conjunto de cadenas con el mismo número de ceros que de unos.

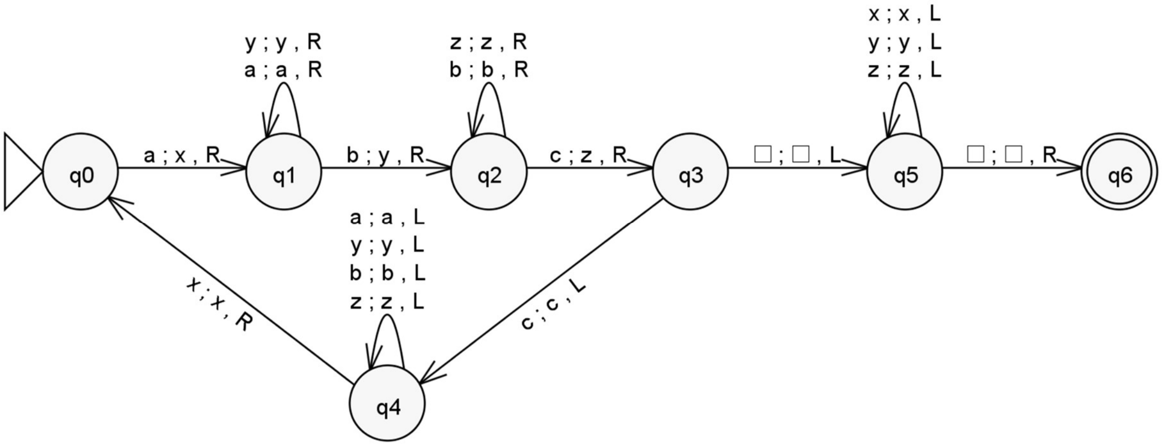
$$\boldsymbol{M} = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}, \{0,1\}, \{0,1,x,\square\}, \delta, q_0, \square, \{q_5\})$$



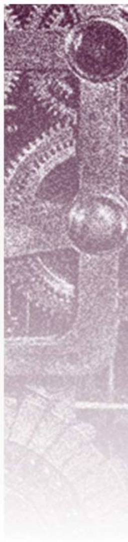
La idea de la máquina anterior está basada en recorrer toda la cadena hasta encontrar un número 0, y regresar al inicio para ahora buscar un número 1. Existen estados donde al regresar de encontrar alguno de los dos números y encontrar su correspondiente (si se regresa de encontrar un 0 y se encuentra un 1 o viceversa) se procede a “brincarse” estados para asi optimizar el proceso de búsqueda. Se considera completo el proceso cuando desde un extremo se recorre toda la cadena con solo caracteres x, lo que nos indica que no hay caracteres que procesar, y como se procesaban conjuntos de un número 1 y un número 0, se considera que las cantidades son iguales.

b) $\{a^n b^n c^n : n \geq 1\}$.

$$\boldsymbol{M} = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, x, y, z, \square\}, \delta, q_0, \square, \{q_6\})$$



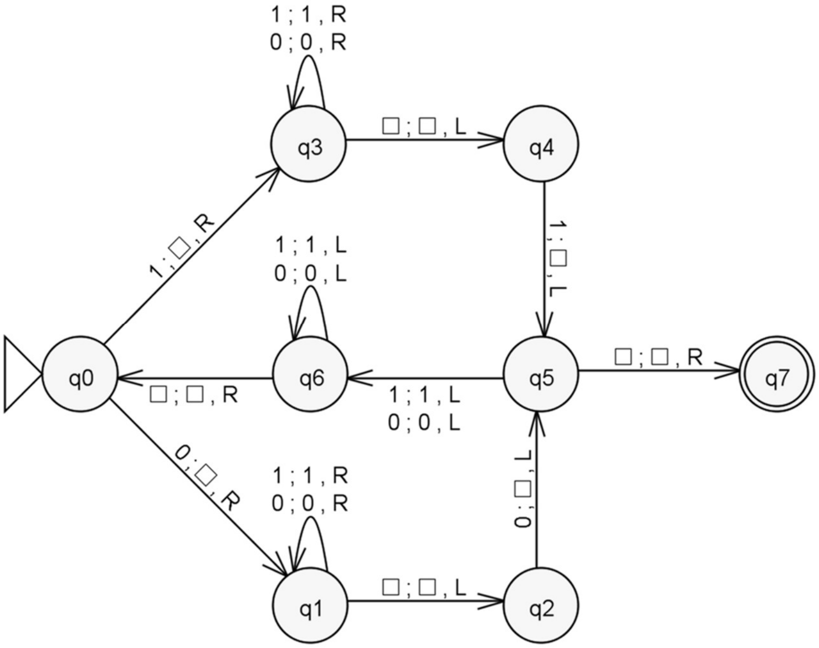
Similar al autómata anterior, se recorre la cinta por “ciclos”, donde primero se busca una letra a, al encontrarse se cambia por una x y se busca ahora una letra b, se reemplaza por una y y finalmente se busca una letra c para reemplazarse por una z; si aún hay letras



c por procesar se recorre la cadena al inicio y se repite el ciclo (rechazaría la cadena si ya no encontrase letras a o b pese a que aún queda al menos una c). Cuando se encuentra un blank después de procesar la última c, se recorre la cadena solo buscando caracteres x, y y z que representarían las transformaciones en proporciones iguales de las letras a, b y c; y si se logra llegar al extremo, se acepta la cadena indicando que hay mismas cantidades de letras a, b y c.

c) $\{\boldsymbol{ww^R} : \boldsymbol{w} \text{ es cualquier cadena de ceros y unos}\}$.

$$\boldsymbol{M} = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7\}, \{0,1\}, \{0,1,\square\}, \delta, q_0, \square, \{q_7\})$$



La idea de esta máquina básicamente consiste en ir descartando extremos de la cadena si son del mismo carácter, es decir, si se inicia con un número 1, se reemplaza con un blank y se recorre la cadena hasta el final esperando un número 1, para reemplazarlo por un blank igualmente y de esta forma definir un “ciclo”; este proceso aplica también con el número 0, es por ello que existen dos caminos posibles desde q_0. La cadena es aceptada cuando después de recorrer ambos extremos y “acortando” la cadena cíclicamente, al querer ir de regreso al inicio de la cadena nos damos cuenta que el carácter inmediato es un blank, indicando que se han eliminado de manera uniforme los extremos, y por lo tanto, encontrado una cadena concatenada con su reverso.