

SOC3070 Análisis de Datos Categóricos

Tarea corta 2, respuestas

Ponderación: 6% de la nota final del curso.

En esta pregunta aplicarán propiedades de probabilidades condicionales para calcular alguna cantidades de interés para el test de hipótesis. Supon que te encuentras en la siguiente situación:

- Tienes una hipótesis de interés (o Hipótesis alternativa, H_1), y una hipótesis nula (H_0)
- No tienes conocimiento previo sobre la plausibilidad de tu hipótesis de interés, de modo que le asignas un 50% de probabilidad de ser cierta: $\mathbb{P}(H_1 \text{ verdadera}) = 0.5$. Esto implica que también la hipótesis nula tiene la misma probabilidad de ser cierta: $\mathbb{P}(H_0 \text{ verdadera}) = 0.5$
- Como es estándar, usas un test estadístico que tienen un “Statistical Power” de 80%, definido como:

$$\text{power} = \mathbb{P}(\text{rechazar } H_0 \mid H_1 \text{ verdadera}) = 0.8$$

(virtud de aceptar un resultado verdadero)

- Como es estándar, trabajas con un nivel de significación estadística del 5% ($\alpha = 0.05$), definido como:

$$\alpha = \mathbb{P}(\text{rechazar } H_0 \mid H_1 \text{ falsa}) = 0.05$$

(error de aceptar un resultado falso)

Pregunta

Supón que tu análisis sugiere que puedes rechazar H_0 . Ahora, debes calcular las siguientes cantidades de interés:

- 1) La probabilidad de obtener un “**positivo verdadero**”, definida como:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(H_1 \text{ verdadera} \mid \text{rechazar } H_0) &= \frac{\mathbb{P}(\text{rechazar } H_0 \mid H_1 \text{ verdadera})\mathbb{P}(H_1 \text{ verdadera})}{\mathbb{P}(\text{rechazar } H_0)} \\ &= \frac{\mathbb{P}(\text{rechazar } H_0 \mid H_1 \text{ verdadera})\mathbb{P}(H_1 \text{ verdadera})}{\mathbb{P}(\text{rechaza } H_0 \mid H_1 \text{ verdadera})\mathbb{P}(H_1 \text{ verdadera}) + \mathbb{P}(\text{rechaza } H_0 \mid H_1 \text{ falsa})\mathbb{P}(H_1 \text{ falsa})} \\ &= \frac{\text{power} \times 0.5}{\text{power} \times 0.5 + \alpha \times 0.5} = \frac{\text{power}}{\text{power} + \alpha} \\ &= \frac{0.8}{0.8 + 0.05} = 0.94\end{aligned}$$

- 2) La probabilidad de obtener un “**falso positivo**”, definida como:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(H_1 \text{ falsa} \mid \text{rechazar } H_0) &= \frac{\mathbb{P}(\text{rechazar } H_0 \mid H_1 \text{ falsa})\mathbb{P}(H_1 \text{ falsa})}{\mathbb{P}(\text{rechazar } H_0)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(\text{rechazar } H_0 \mid H_1 \text{ falsa})\mathbb{P}(H_1 \text{ falsa})}{\mathbb{P}(\text{rechaza } H_0 \mid H_1 \text{ verdadera})\mathbb{P}(H_1 \text{ verdadera}) + \mathbb{P}(\text{rechaza } H_0 \mid H_1 \text{ falsa})\mathbb{P}(H_1 \text{ falsa})} \\
&= \frac{\alpha \times 0.5}{\text{power} \times 0.5 + \alpha \times 0.5} = \frac{\alpha}{\text{power} + \alpha} \\
&= \frac{0.05}{0.8 + 0.05} = 0.06
\end{aligned}$$

Pista Usando la ley de “probabilidad total” sabemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\text{rechazar } H_0) &= \mathbb{P}(\text{rechazar } H_0, H_1 \text{ verdadera}) + \mathbb{P}(\text{rechazar } H_0, H_1 \text{ falsa}) \\
&= \mathbb{P}(\text{rechaza } H_0 \mid H_1 \text{ verdadera})\mathbb{P}(H_1 \text{ verdadera}) + \mathbb{P}(\text{rechaza } H_0 \mid H_1 \text{ falsa})\mathbb{P}(H_1 \text{ falsa})
\end{aligned}$$