ZAHLEN

Mathematische Brückenkurs

Joseph Rudzinski

Abteilung Theorie der Polymere, Max-Planck-Institut für Polymer Forschung

Wintersemester 2021/22

ABSCHNITT 1 - DIE NATÜRLICHEN ZAHLEN

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$: Die natürlichen Zahlen.

Die Axiome von Peano für die natürlichen Zahlen:

- (P1) Die Zahl 1 ist eine natürliche Zahl.
- (P2) Falls n eine natürlichen Zahl, so ist die nachfolgende Zahl $n + 1$ ebenfalls eine natürlichen Zahl.
- (P3) Die natürlichen Zahlen sind die minimale Menge, welche die ersten beiden Axiome erfüllt.

- $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$: Die natürlichen Zahlen mit der Null.

ABSCHNITT 1 - DIE NATÜRLICHEN ZAHLEN

Sei $a, b \in \mathbb{N}$:

- Addition : $a + b \in \mathbb{N}$

- Aber : $a - b$ ist im Allgemeine keine natülichen Zahl.
  Gegenbeispiel : $a = 1$ und $b = 3$

- Multiplikation : $a \cdot b \in \mathbb{N}$
  Aber : a/b ist im Allgemein keine natürliche Zahl .
  Gegenbeispiel : $a = 1$ und $b = 3$

Der Induktionsbeweis

Man ist of in der Situation eine Aussage der Form $f(n) = g(n)$ **für alle** $n \in \mathbb{N}$ beweisen zu müssen.

Der Induktionsbeweis verläuft in zwei Teilen:

- Induktionsanfang: Im ersten Teil zeigt man zünachst, dass die Behauptung für $n = 1$ richtig ist.

- Induktionsschritt: Im zweiten Teil nimmt man an, dass die Behauptung für $n - 1$ richtig ist und zeigt, dass sie dann auch für n richtig ist.

Der Induktionsbeweis

Man sieht leicht, dass dies die allgemeine Aussage beweist:

- Für $n = 1$ wird die Aussage im ersten Teil bewiesen.
- Für $n = 2$ können wir dann verwenden, dass die Aussage für $n = 1$ richtig ist.

  Somit liegt die Voraussetzung für den zweiten Teil vor und es folgt aufgrund des zweiten Teils die Richtigkeit für $n = 2$.
- Diese Argumentation läss sich nun fortsetzen:
  Da die Aussage für $n = 2$ richtig ist, müss sie aufgrund die Zweiten Teils auch für $n = 3$ richtig sein, usw...

Der Induktionsbeweis

Beispiel

Für jede natürliche Zahl n ist die folgende Behauptung zu zeigen:

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$$

Der Induktionsbeweis

$$\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}$$

Induktionsanfang

Für $n = 1$ haben wir

linke Seite: $\sum_{j=1}^{1} j = 1$

rechte Seite: $\frac{1(1+1)}{2} = 1$

Der Induktionsbeweis

Induktionsschritt

Wir dürfen nun annehmen, dass die Behauptung für $n-1$ richtig ist, und müssen zeigen, dass sie dann auch für n gilt. In unserem Fall:

$$\sum_{j=1}^{n} j = \sum_{j=1}^{n-1} j + n = \frac{(n-1)\cdot((n-1)+1)}{2} + n = \frac{(n-1)\cdot n}{2} + \frac{2n}{2}$$

$$= \frac{n^2 - n + 2n}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

Gruppen

Definition einer Gruppe

Sei G eine nicht-leere Menge mit einer Verknüpfung $\circ$, d.h. eine Abbildung $\circ : G \times G \to G$. Das Paar $(G, \circ)$ ist eine Gruppe, falls:

- (G1) $\circ$ ist assoziativ: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$
- (G2) $\exists\ e$ ein links-neutrales Element, sodass: $(e \circ a) = a, \forall\ a \in G$
- (G3) Zu jedem $a \in G$ gibt es ein links-inverses Elemet a^{-1}, sodass $= a^{-1} \circ a = e$

Gruppen

- Eine Gruppe $(G, \circ)$ nennt man kommutativ oder Abelsch, falls $a \circ b = b \circ a$
- In einer Gruppe ist das links-neutrale Element identisch mit dem recht-neutralen Element.
- Ebenso sind links- und rechts inverses Elemente identisch.

ABSCHNITT 2 - DIE GANZEN ZAHLEN

Die ganzen Zahlen $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$ bilden bezüglich der Addition eine Gruppe.

- Assoziativgesetz: Bespiel - $3 + (5 + 7) = (3 + 5) + 7$
- Die Null ist das links-neutrale Element: Bespiel - $0 + 7 = 7$
- Das links-inverse Element zu a ist $-a$: Bespiel - $(-7) + 7 = 0$
- Die Gruppe ist kommutativ: Bespiel - $5 + 7 = 7 + 5$

Ringen

Definition eines Rings

Ein Ring ist eine nicht-leere Menge R mit zwei Verknüpfungen, die üblicherweise als $+$ und $\cdot$ geschrieben werden, sodass:

- $(R1)$ $(R, +)$ ist eine kommutative Gruppe.
- $(R2)$ $(R, \cdot)$ ist assoziativ: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
- $(R3)$ Es gelten die Distributivgesetze:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \qquad (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

Die ganzen Zahlen bilden ein Ring.

- Assoziativgesetz: Bespiel - $3 \cdot (5 \cdot 7) = (3 \cdot 5) \cdot 7$

- Distributivgesetze:

$$3 \cdot (5 + 7) = (3 \cdot 5) + (3 \cdot 7) \qquad (3 + 5) \cdot 7 = (3 \cdot 7) + (5 \cdot 7)$$

Die rationalen Zahlen $$\mathbb{Q} = \left\{ r \mid r = \frac{p}{q},\ p, q \in \mathbb{Z},\ q \neq 0 \right\}$$

$\mathbb{Q}$ sind bezüglich der Division abgeschlossen.
Sie bilden einen Körper.

Körper

Definition eines Körpers

Ein Körper ist eine nicht-leere Menge K mit zwei Verknüpfungen, $+$ und $\cdot$, sodass:

- $(K1)$ $(K, +)$ ist eine kommutative Gruppe.
- $(K2)$ $(K \setminus \{0\}$ ist eine kommutative Gruppe.
- $(K3)$ Es gelten die Distributivgesetze:

$$a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c) \qquad (a + b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c)$$

Bruchrechnen

- **Kürzen/Erweitern:**

$$\frac{c \cdot p_1}{c \cdot q_1} = \frac{p_1}{q_1}$$

- **Multiplikation:**

$$\frac{p_1}{q_1} \cdot \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot p_2}{q_1 \cdot q_2}$$

- **Division:**

$$\frac{p_1}{q_1} : \frac{p_2}{q_2} = \frac{\frac{p_1}{q_1}}{\frac{p_2}{q_2}} = \frac{p_1 \cdot q_2}{q_1 \cdot p_2}$$

Bruchrechnen

- Addition: $$\frac{p_1}{q_1} + \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1}{q_1 \cdot q_2}$$

- Subtraktion: $$\frac{p_1}{q_1} - \frac{p_2}{q_2} = \frac{p_1 \cdot q_2 - p_2 \cdot q_1}{q_1 \cdot q_2}$$

Beispiele

- Kürzen/Erweitern: $$\frac{15}{9} = \frac{3 \cdot 5}{3 \cdot 3} = \frac{5}{3}$$

- Addition: $$\frac{3}{5} + \frac{2}{3} = \frac{3 \cdot 3}{3 \cdot 5} + \frac{2 \cdot 5}{3 \cdot 5} = \frac{9}{15} + \frac{10}{15} = \frac{9 + 10}{15} = \frac{19}{15}$$

- Division: $$\frac{\frac{2}{3}}{\frac{5}{7}} = \frac{2 \cdot 7}{3 \cdot 5} = \frac{14}{15}$$

Potenzen

Für Potenzen schreiben wir $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ mal}}$

Rechnen mit Potenzen:

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n \qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

Beispiele

- Gleicher Exponent:

$$2^2 \cdot 3^2 = 4 \cdot 9 = 36$$

$$2^2 \cdot 3^2 = (2 \cdot 3)^2 = 6^2 = 36$$

- Gleiche Basis:

$$2^2 \cdot 2^3 = 4 \cdot 8 = 32$$

$$2^2 \cdot 2^3 = 2^{(2+3)} = 2^5 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 4 \cdot 2 = 16 \cdot 2 = 32$$

- Potenz einer Potenz:

$$(2^2)^3 = 4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 16 \cdot 4 = 64$$

$$(2^2)^3 = 2^{(2 \cdot 3)} = 2^6 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 16 \cdot 4 = 64$$

Quiz

$$\frac{x^{-1}x^3x^5}{x^2x^7} = ?$$

(A) 0

(B) 1

(C) x^2

(D) $\dfrac{1}{x^2}$

Quiz - Solution

$$\frac{x^{-1}x^3x^5}{x^2x^7} = ?$$

(A) 0

(B) 1

(C) x^2

(D) $\boxed{\frac{1}{x^2}}$

$$= \frac{x^{(-1+3+5)}}{x^{(2+7)}} = \frac{x^7}{x^9} = x^{(7-9)} = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$$

Die bionomischen Formeln

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$(a+b)\cdot(a-b) = a^2 - b^2$$

$$(a+b)\cdot(a-b) = a\cdot a - a\cdot b + b\cdot a - b\cdot b$$

$$= a^2 - ab + ab - b^2$$

$$= a^2 - b^2$$

ABSCHNITT 4 - DIE REELLEN ZAHLEN

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bilden einen Körper.

- Alle rationalen Zahlen sind in den reellen Zahlen enthalten.
- $\mathbb{R}$ enthält Zahlen, die nicht rational sind. Diese nennt man irrational.
  - $\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl. $\sqrt{2}$ ist Lösung der Gleichung $x^2 = 2$.
  - Zahlen, welche Lösung einer algebraischen Gleichung sind, nennt man algebraisch.
  - $\mathbb{R}$ enthält auch irrationale Zahlen, die keine Lösung einer algebraischen Gleichung sind. Solche Zahlen nennt man transzendental, z.B., die Kreiszahl π oder die Eulersche Konstante e.

Cauchy-Folgen

Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen nennt man Cauchy-Folge, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, sodass

$$| a_n - a - m | < \epsilon, \forall n, m \geq N$$

Vollständigkeitsaxiom: Jede Cauchy-Folge konvergiert.

Anordnungseigenschaften

Die reellen Zahlen sind angeordnet:

Anordnungsaxiome

Es sind gewisse Elemente als positiv ausgezeichnet $(x > 0)$, sodass die folgenden Axiome erfüllt sind:

- $(O1)$ Es gilt genau eine der Beziehungen $x < 0, x = 0, x > 0$.
- $(O2)$ Aus $x > 0$ und $y > 0$ folgt $x + y > 0$.
- $(O3)$ Aus $x > 0$ und $y > 0$ folgt $x \cdot y > 0$.

Anordnungseigenschaften

Man nennt eine Ordnung archimedisch, falls zu jedem $x > 0$ und $y > 0$ ein natürliche Zahl n existiert, sodass $n \cdot x > y$

Axiomatisch lassen sich die reellen Zahlen als ein Körper, der archimedisch angeordnet ist und in dem jede Cauchy-Folge konvergiert, charakterisieren.

Lineare Gleichungen

Es seien $a \neq 0$ und b gegebene reelle Zahlen und x ist unbekannt.

Man nennt $ax + b = 0$ eine lineare Gleichung für x.

Die Gleichung hat die Lösung $x = -\dfrac{b}{a}$.

ABSCHNITT 4 - DIE REELLEN ZAHLEN

Quadratische Gleichungen (abc-Formel)

Es seien $a \neq 0$, b, und c gegebene reelle Zahlen und x eine Unbekannte.

Man nennt $ax^2 + b + c = 0$ eine quadratische Gleichung für x.

Falls $D = b^2 - 4ac \geq 0$, so hat die Gleichung die Lösungen:

$$x_{+/-} = \frac{1}{2a}\left(-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}\right)$$

Quadratische Gleichungen (pq-Formel)

Da $a \neq 0$, können wir durch a teilen

$$ax^2 + b + c = 0 \qquad x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

Setzen wir $p = b/a$ und $q = c/a$ so ergibt sich

$$x^2 + px + q = 0$$

Falls $D = p^2 - 4q \geq 0$ so hat die Gleichung die Lösungen:

$$x_{+/-} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

Wir betrachten Zahlen der Form

$$a + b\sqrt{3}\,, \quad a, b \in \mathbb{Q}$$

Wir bezeichnen die Menge dieser Zahlen als

$$\mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \left\{ a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q} \right\}$$

Beispiel:

$$\frac{1}{3} + \frac{7}{8}\sqrt{3} \in \mathbb{Q}[\sqrt{3}] \qquad \sqrt{7} \notin \mathbb{Q}[\sqrt{3}]$$

ABSCHNITT 5 - DIE RATIONALEN ZAHLEN

Satz

$\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ ist ein Körper.

- **Addition:** $\left(a_1 + b_1\sqrt{3}\right) + \left(a_2 + b_2\sqrt{3}\right) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b2)\sqrt{3}$

- **Multiplikation:** $\left(a_1 + b_1\sqrt{3}\right) \cdot \left(a_2 + b_2\sqrt{3}\right) = (a_1 + a_2) + (b_1 + b2)\sqrt{3}$

$$= a_1a_2 + a_1b_2\sqrt{3} + b_1a_2\sqrt{3} + b_1b_2(\sqrt{3})^2$$

$$= a_1a_2 + a_1b_2\sqrt{3} + b_1a_2\sqrt{3} + 3b_1b_2$$

$$= (a_1a_2 + 3b_1b_2) + (a_1b_2 + b_1a_2)\sqrt{3}$$

Neutrale Elemente

- **Addition:** $$0 + \left(a + b\sqrt{3}\right) = \left(0 + 0 \cdot \sqrt{3}\right) + \left(a + b\sqrt{3}\right) = \left(a + b\sqrt{3}\right)$$

- **Multiplikation:** $$1 \cdot \left(a + b\sqrt{3}\right) = \left(1 + 0 \cdot \sqrt{3}\right) \cdot \left(a + b\sqrt{3}\right) = \left(a + b\sqrt{3}\right)$$

Inverse Elemente

- **Addition:** $-\left(a+b\sqrt{3}\right)+\left(a+b\sqrt{3}\right)=-a-b\sqrt{3}+a+b\sqrt{3}=0$

- **Multiplikation** $(a,b)\neq(0{,}0)$:

$$\frac{1}{a+b\sqrt{3}}\cdot\left(a+b\sqrt{3}\right)=1$$

$$\frac{1}{a+b\sqrt{3}}=\frac{(a-b\sqrt{3})}{(a+b\sqrt{3})\cdot(a-b\sqrt{3})}=\frac{a-b\sqrt{3}}{a^2-3b^2}=\frac{a}{a^2-3b^2}-\frac{b}{a^2-3b^2}\sqrt{3}$$

Beispiel

Das zu $1+\sqrt{3}$ bezüglich der Multiplikation inverse Element ist

$$\frac{1}{1+\sqrt{3}} = \frac{1-\sqrt{3}}{\left(1+\sqrt{3}\right)\left(1-\sqrt{3}\right)} = \frac{1-\sqrt{3}}{1-3} = -\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{3}\right) = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}$$

Probe: $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{3}\right)\cdot\left(1+\sqrt{3}\right)$

$$= -\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{3}+\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\right)^2 = -\frac{1}{2}+\frac{3}{2} = 1$$

ABSCHNITT 5 - DIE RATIONALEN ZAHLEN

Bemerkung

Bei den Grundrechenarten mit Zahlen der Form $a + b\sqrt{3}$ ist der wesentliche Trick

$$\left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

Setzen wir $w = \sqrt{3}$ und betrachten Zahlen $a + bw$, so lautet der wesentliche Trick

$$w^2 = 3$$

Morgen beschäftigen uns mit der komplexe Zahlen, und benutzen

$$i^2 = -1$$