DIFFERENTIALRECHNUNG

Mathematische Brückenkurs

Dr. Joseph Rudzinski

Abteilung Theorie der Polymere, Max-Planck-Institut für Polymer Forschung

Wintersemester 2021/22

Die Ableitung

Definition

Seien $D \subset \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion. f nennt man im Punkte $x \in D$ differenzierbar, falls es mindestens eine Folge $(\xi_n) \in D \backslash x$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = x$ gibt und für jede solche Folge der Grenzwert

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(\xi_n) - f(x)}{\xi_n - x} = \lim_{\xi\to x} \frac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x}$$

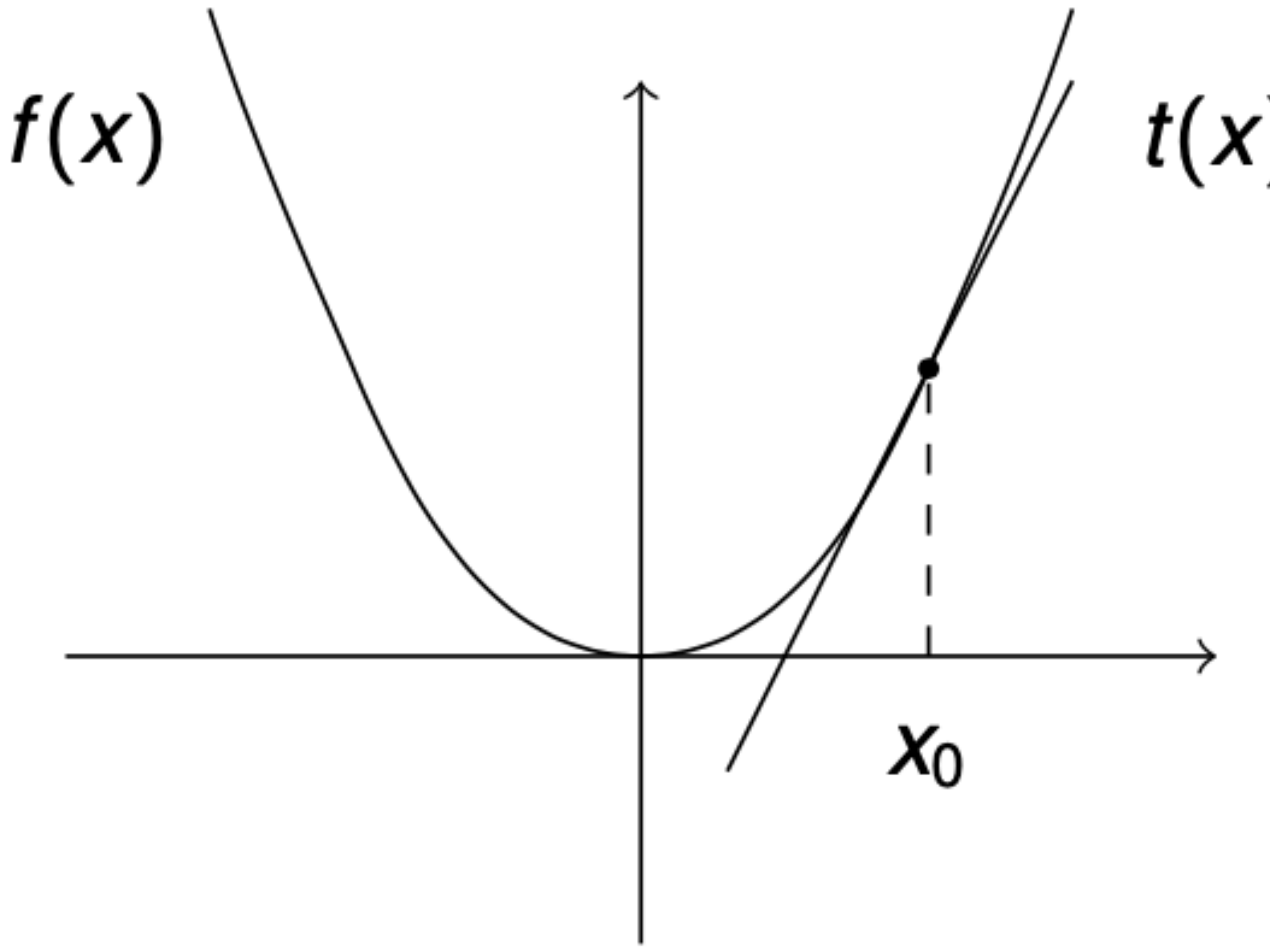
existiert.

Man schreibt auch $$f'(x) = \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} f(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{(x+h) - x}$$

DIFFERENTIALRECHNUNG

Geometrische Bedeutung der Abteilung

Die Abteilung $f'(x_0)$ gibt die Steigung der Tangente, im Punkte x_0 an:



$$t(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Quiz

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \sin(x) & x > 0 \end{cases}$$

ist im Punkte $x = 0$

(A) differenzierbar

(B) nicht differenzierbar

Quiz

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 1 & x \leq 0 \\ \cos(x) & x > 0 \end{cases}$$

ist im Punkte $x = 0$

(A) differenzierbar

(B) nicht differenzierbar

Sätze über Ableitungen

Satz

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ in $x \in D$ differenzierbare Funktionen und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen $f + g$ und λf in x differenzierbar und es gilt

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)\,, \qquad (\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)\,.$$

Produktregel

Mit den Voraussetzungen wie oben ist auch die Funktion $f \cdot g$ in x differenzierbar und es gilt

$$(f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)\,.$$

Beweis der Produktregel

$$(f \cdot g)'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left[f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x) \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + \lim_{h \to 0} g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= (f \cdot g)'(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

Die Produktregel

Beispiel

$$f(x) = \underbrace{x^2}_{f_1(x)} \ \underbrace{\sin(x)}_{f_2(x)}$$

$$f'(x) = \underbrace{x^2}_{f_1(x)} \cdot \underbrace{\cos(x)}_{f_2'(x)} + \underbrace{\sin(x)}_{f_2(x)} \cdot \underbrace{(2x)}_{f_1'(x)} = x^2 \cos(x) + 2x \ \sin(x)$$

Sätze über Ableitungen

Quotientenregel

Ist weiter $g(x) \neq 0, \forall\, x \in D,$ so ist auch die Funktion f/g in x differenzierbar und es gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{g(x)f'(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}\,.$$

Die Quotientenregel

Beispiel

$$f(x) = \frac{2x - 3}{x + 1}$$

$$f'(x) = \frac{(x+1)\cdot(2) - (2x-3)\cdot(1)}{(x+1)^2} = \frac{2x + 2 - 2x - 3}{(x+1)^2} = \frac{5}{(x+1)^2}$$

Sätze über Ableitungen

Kettenregel

Seien $f : D_1 \to W_1$ und $g : D_2 \to W_2$ Funktionen mit $W_1 \subset D_2$.
Falls f im Punkte $x \in D_1$ differenzierbar ist und g im Punkte $y = f(x) \in D_2$ differenzierbar ist, so ist die zusammengesetzte Funktion $g \circ f : D_1 \to W_2$ in x differenzierbar und es gilt

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(g \circ f)(x) = \frac{\mathrm{d}g(f(x))}{\mathrm{d}f(x)}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x}$$

Die Kettenregel

Beispiel

$$f(x) = \sin\left(3x^2 + 4x + 5\right)$$

$$f'(x) = \cos\left(3x^2 + 4x + 5\right) \cdot \frac{\mathrm{d}(3x^2 + 4x + 5)}{\mathrm{d}x} = \cos\left(3x^2 + 4x + 5\right) \cdot (6x + 4)$$

$$= (6x + 4) \cdot \cos\left(3x^2 + 4x + 5\right)$$

Sätze über Ableitungen

Abteilung der Umkehrfunktion

Sei $D \subset \mathbb{R}$ ein abgeschlossenes Intervall, $f : D \to W$ eine stetige, steng monotone Funktion und $f^{-1} : W \to D$ die Umkehrfunktion.

Ist f im Punkt $x \in D$ differenzierbar und ist $f'(x) \neq 0$, so ist f^{-1} im Punkt $y = f(x)$ differenzierbar und es gilt

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

Die Abteilung der Umkehrfunktion

Beispiel

Die Ableitung des Logarithmus erhält man mit Hilfe der Regel über Umkehrfunktion.

Wir beginnen mit der Exponentialfunktion: $f(x) = e^x, f'(x) = e^x$.
Die Umkehrfunktion ist der Logarithmus:

$$f^{-1}(y) = \ln(y)$$

Nun ist

$$\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} = \frac{1}{\exp(\ln(y))} = \frac{1}{y}$$

also $f(x) = \ln(x), \ f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

Abteilungen

Beispiel

Die Ableitung von Sinus und Kosinus erhält man aus der Darstellung

$$\sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\,, \qquad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

zu $f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)\,, \qquad f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x)$

Rechnung:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})\right] = \frac{1}{2i}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{ix} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}e^{-ix}\right)$$

$$= \frac{1}{2i}\left(ie^{ix} + ie^{-ix}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) = \cos(x)$$

Wichtige Ableitungen

Abteilung einiger Grundfunktionen :

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1} \qquad\qquad f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

Die Ableitung des Logarithmus erählt man mit Hilfe der Regel über Umkehrfunktionen:

$$f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$$

Die Ableitung von Sinus und Kosinus erählt man mit Hilfe der Darstellung der Exponentialfunktion :

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x)\,, \qquad f(x) = \cos(x) \Rightarrow f'(x) = -\sin(x)$$

Weitere Ableitungen

$$f(x) = \tan(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$f(x) = \arcsin(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$f(x) = \arctan(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1 + x^2}$$

$$f(x) = \sinh(x) \Rightarrow f'(x) = \cosh(x)$$

$$f(x) = \cosh(x) \Rightarrow f'(x) = \sinh(x)$$

$$f(x) = \tanh(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\cosh^2(x)}$$

$$f(x) = \operatorname{arsinh}(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$

$$f(x) = \operatorname{artanh}(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{1 - x^2}$$

Quiz

$$f(x) = 3x^3 - 4$$

$$f'(x) = \textbf{ ?}$$

(A) $\frac{3}{4}x^4 - 4x$

(B) $9x^2 - 4$

(C) $9x^2$

(D) $3x^2 - 4$

Quiz

$$f(x) = \sin(\cos(x))$$

$$f'(x) = \ ?$$

(A) $2\cos(\cos(2x))$

(B) $2\sin(2x) \cdot \cos(\cos(2x))$

(C) $-2\cos(2x) \cdot \cos(\sin(2x))$

(D) $-2\sin(2x) \cdot \cos(\cos(2x))$

Höhere Ableitungen

Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion. Ist $f' : D \to \mathbb{R}$ ebenfalls wieder differenzierbar, so bezeichnet man mit

$$f''(x) = \frac{\mathrm{d}^2 f(x)}{\mathrm{d}x^2} = (f')'(x)$$

die zweite Ableitung. Ist auch $f''(x)$ wieder differenzierbar, so erhält man durch Ableiten die dritte Ableitung $f'''(x)$. Allgemein schreiben wir

$$f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}^n f(x)}{\mathrm{d}x^n}$$

Unter der 0-ten Ableitung einer Funktion versteht man die Funktion selbst.

Höhere Ableitungen

Beispiel

$$f(x) = 3x^5 + 7x^4 + 2x^3 + x^2 - x + 5$$

$$f'(x) = 15x^4 + 28x^3 + 6x^2 + 2x - 1$$

$$f''(x) = 60x^3 + 84x^2 + 12x + 2$$

$$f'''(x) = 180x^2 + 168x + 12$$

$$f^{(4)}(x) = 360x + 168$$

$$f^{(5)}(x) = 360$$

$$f^{(6)}(x) = 0$$

Höhere Ableitungen

Beispiel

$$f(x) = \sin(x)$$

$$f'(x) = \cos(x)$$

$$f''(x) = -\sin(x)$$

$$f'''(x) = -\cos(x)$$

$$f^{(4)}(x) = \sin(x)$$

$$\vdots$$

Quiz

$$f(x) = e^{2x}$$

$$f^{(4)}(x) = \ ?$$

(A) e^{2x}

(B) $2e^{2x}$

(C) $16e^{2x}$

(D) $24e^{2x}$

Stetige Differenzierbarkeit

Definition

Eine Funktion $f(x)$ nennt man stetig differenzierbar, falls sie differenzierbar ist und die Abteilung $f'(x)$ stetig ist.

Definition

Eine Funktion $f(x)$ nennt man n-mal stetig differenzierbar, falls sie n-mal differenzierbar ist und die n-te Abteilung $f^{(n)}(x)$ stetig ist.

Stetige Differenzierbarkeit

Beispiel

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f **ist differenzierbar im Punkt** $x = 0$:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{h^2 \sin\left(\frac{1}{h} - 0\right)}{h} = 0$$

Somit

$$f'(x) = \begin{cases} 2x \sin\left(\frac{1}{x}\right) - \cos\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

f' **ist nicht stetig im Punkt** $x = 0$.

Taylorreihen

Motivation:

- Wir haben bereits die Reihendarstellung einiger Funktionen, wie z.B. der Exponentialfunktion, Sinus oder Kosinus kennengelernt.

- In diesem Abschnitt geht es um die systematisch Entwicklung von Funktionen in Potenzreihen.

Taylorentwicklung

Satz (Taylorsche Formel)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ und $f : I \to \mathbb{R}$ eine $(n+1)$-mal stetig differenzierbare Funktionen. Dann gilt für $a \in I$ und $x \in I$

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!} \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2!} \cdot (x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x-a)^n + R_{n+1}(x)$$

Für das Restglied gilt: Es gibt ein ξ zwischen a und x (d.h. $\xi \in [a,x]$ für $x > a$ bzw. $\xi \in [x,a]$ für $x < a$), so dass

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{n+1}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}\,.$$

Bemerkung: Dies ist eine Existenzaussage, ξ ist im allgemeinen schwer zu bestimmen.

Taylorentwicklung

- In der Praxis verwendet man die ersten n Terme der Taylorentwicklung, um eine Funktion zu approximieren und vernächlässt das Restglied.

- Das vernächlässtige Restglied liefert den Fehler dieser Abschätzung.

Taylorentwicklung

Beispiel

$$f(x) = \cos(x \cdot e^x) + \sin(x^2 \cdot e^{-x})$$

Taylorentwicklung um $x_0 = 0$:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 - 2x^3 - \frac{11}{24}x^4 - \frac{2}{3}x^5 + \mathcal{O}(x^6)$$

Taylorreihen

Definition

Sei nun $f : I \to \mathbb{R}$ eine beliebig oft differenzierbare Funktion und $a \in I$.

Wir definieren die Taylorreihe einer Funktion f um den Entwicklungspunkt a :

$$T_f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \cdot (x - a)^n$$

Taylorreihen

Bemerkungen:

- Der Konvergenzradius der Taylorreihe ist nicht notwendig > 0.

- Falls die Taylorreihe von f konvergiert, konvergiert sie nicht notwendigerweise gegen f.

- Die Taylorreihe konvergiert genau für diejenigen $x \in I$ gegen $f(x)$, für die das Restglied gegen Null konvergiert.

Taylorreihen

Beispiel

Wir geben ein Gegenbespiel zu Punkt 2 an: Wir betrachten die Taylorreihe der Funktion

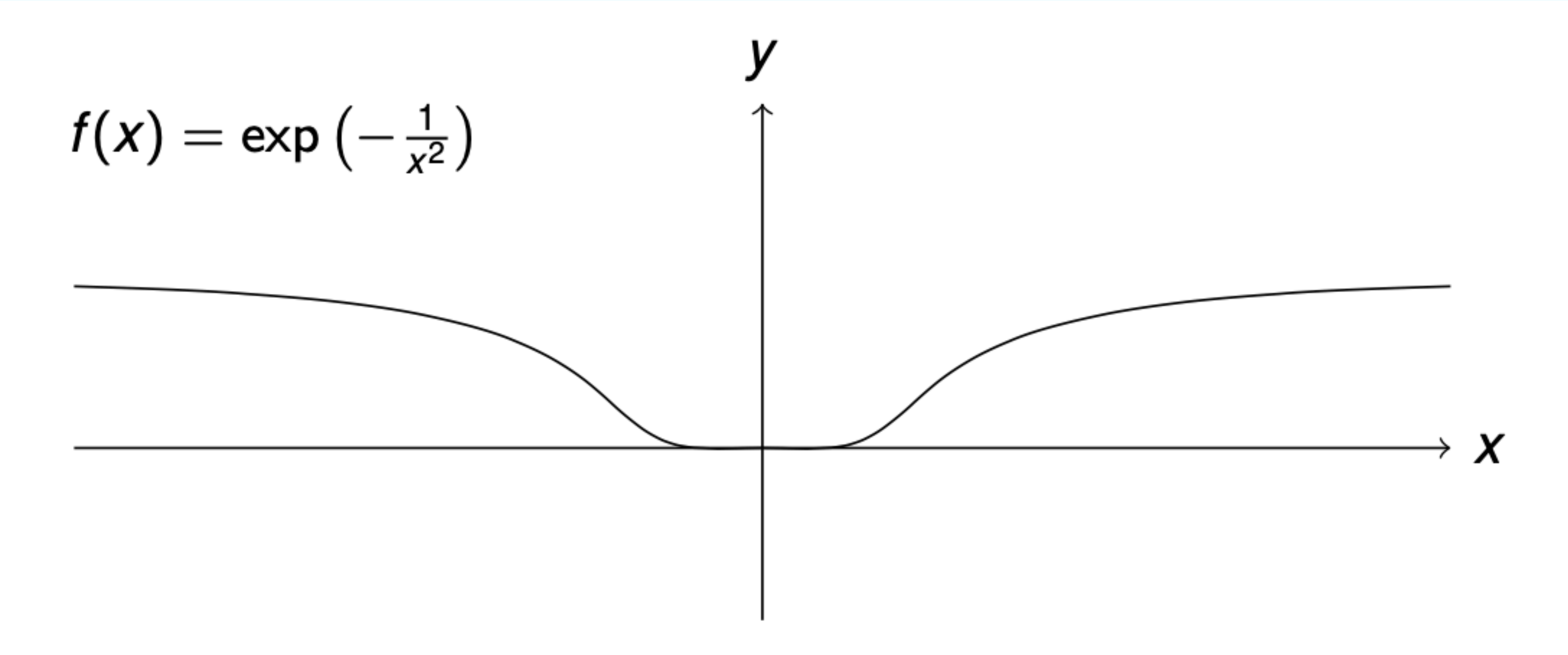
$$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

im Punkte $a = 0$. f ist beliebig oft differenzierbar und es gilt

$$f^{(n)}(0) = 0$$

Die Taylorreihe von f um den Nullpunkt ist also identisch Null.

Taylorreihen



Die erste Regel von l'Hospital

Satz

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ zwei in $x_0 \in D$ stetige Funktionen mit $f(x_0) = g(x_0) = 0$. Weiter seien f und g in einer Umgebung von x_0 differenzierbar. Existiert $\lim\limits_{x \to x_0} f'(x)/g'(x)$ so gilt:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Die erste Regel von l'Hospital

Beispiel

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x}{1} = \frac{1}{2}$$

Die zweite Regel von l'Hospital

Satz

Ist $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = \infty$ und $\lim_{x \to x_0} |g(x)| = \infty$ und existiert $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

so gilt ebenfalls

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Die zweite Regel von l'Hospital

Beispiel

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

Bemerkung: Die l'Hospitalischen Regeln gelten auch für $x_0 \to \pm\infty$.

Quiz

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x-4}{x^2+6x+5} = \ ?$$

(A) 0

(B) $\frac{1}{2}$

(C) $\frac{3}{2}$

(D) 3

Quiz

$$\lim_{x\to\infty} \frac{7x^3 + 5x^2 - 3x - 1}{x^3 - 20x^2 + x + 10} = \ ?$$

(A) 0

(B) -10

(C) 7

(D) 21