

## Übungsblatt 9

---

### Aufgabe 1: Stammfunktionen Teil 1

Gegeben sind jeweils eine Funktion  $f(x)$  mit zugehöriger Stammfunktion  $F(x)$  in ihrer allgemeinen Form. Weisen Sie jeweils durch explizite Rechnung nach, dass  $F(x)$  die Stammfunktion von  $f(x)$  ist und bestimmen Sie – falls vorhanden – die unbekannten Parameter.

(a)  $f(x) = 18x^{17}$ ,  $F(x) = x^n$

(b)  $f(x) = \sin^2 x$ ,  $F(x) = \frac{1}{2}(x - \sin x \cdot \cos x)$

(c)  $f(x) = \sqrt[n]{x}$ ,  $F(x) = \frac{n}{n+1}(\sqrt[n]{x})^{n+1}$

(d) Bonus:  $f(x) = x^3 \ln x$ ,  $F(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left( \ln x - \frac{1}{n+1} \right)$

## Übungsblatt 9

---

### Aufgabe 2: Stammfunktionen Teil 2

Bestimmen Sie die Stammfunktion  $F(x)$  zu  $f(x)$ , die die angegebenen Randbedingungen erfüllt:

(a)  $f(x) = 3x$  mit  $F(1) = 2$

(b)  $f(x) = 2x + 3$  mit  $F(1) = 0$

(c)  $f(x) = \cos x$  mit  $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 5$

(d)  $f(x) = 6x^2 + 5x$  mit  $F(1) = 0$

### Aufgabe 3: Unbestimmte Integrale

Berechnen Sie die Stammfunktionen folgender unbestimmter Integrale:

(a)  $\int x^4 \, dx$

(b)  $\int e^{2x} \, dx$

## Übungsblatt 9

---

(c)  $\int \sin 5x \, dx$

(d)  $\int \tan x \, dx$

(e)  $\int x e^{2x} \, dx$

(f)  $\int t \cos(t^2 + 1) \, dt$

(g) Bonus:  $\int \frac{x}{x^2 - 1} \, dx$

## Übungsblatt 9

---

### Aufgabe 4: Bestimmte Integrale

Berechnen Sie:

(a)  $\int_0^{\pi/2} 3 \cos x \, dx$

(b)  $\int_3^0 x^2 \, dx$

(c)  $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 3 \cos t \, dt$

(d)  $\int_0^1 (5x - 4)^3 \, dx$

(e)  $\int_{-1}^1 x^2 \sqrt{2x^3 + 4} \, dx$

(f) Bonus:  $\int_{-17}^{+17} x \cdot (9x^6 + 2x^2)^{18} dx =$

## Übungsblatt 9

---

### Aufgabe 5: Uneigentliche Integrale

Berechnen Sie:

(a)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$

(b)  $\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$

### Aufgabe 6: Bonus: Anwendungsbeispiel

Im Gravitationsfeld eines Himmelskörpers der Masse  $M$  ist die Gravitationskraft  $F$ , die auf einen Körper der Masse  $m$  wirkt, der sich im Abstand  $x$  vom Mittelpunkt des Himmelskörpers befindet, gegeben durch  $F = G \frac{Mm}{x^2}$  mit der Gravitationskonstante  $G$ .

Damit ist die Arbeit, um die Masse  $m$  gegen die Anziehungskraft  $F$  um ein kleines Stück  $dx$  vom Himmelskörper weg zu bewegen:

$$dW = F dx = G \frac{Mm}{x^2} dx.$$

Berechnen Sie die Arbeit, die erforderlich ist, um den Körper von der Entfernung  $x_0$  komplett aus dem Gravitationsfeld zu entfernen ( $x_1 \rightarrow \infty$ ).