

---

# **FEHLERRECHNUNG**

## **Mathematische Brückenkurs**

**Dr. Joseph Rudzinski**

**Abteilung Theorie der Polymere, Max-Planck-Institut für Polymer Forschung**

**Wintersemester 2021/22**

# FEHLERRECHNUNG

## Motivation

Eine Person  $A$  mißt eine bestimmte Größe experimentell. Sie führt diese Messung öfters durch. Aufgrund der experimentellen Messungenauigkeit ergeben sich leicht unterschiedliche Werte.

Messung	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Ergebnis	2.6	2.3	2.5	2.3	2.6	2.4	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.8	2.7

Wir definieren den **Mittelwert einer Messreihe** mit  $n$  Messpunkten als

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j$$

Für die obige Messreihe ergibt sich  $\bar{x} = 2.48$ .

# FEHLERRECHNUNG

---

## Motivation

Eine Person  $B$  bestimmt die gleiche Größe ebenfalls experimentell. Person  $B$  verwendet allerdings eine schlechtere Messapparatur und Messwerte:

Messung	1	2	3	4
Ergebnis	0.3	5.2	3.1	1.4

Der Mittelwert ergibt sich  $\bar{x} = 2.48$ .

# FEHLERRECHNUNG

---

## Motivation

- ✱ Im zweiten Fall streuen die einzelnen Messungen wesentlich stärker als im ersten Fall.
- ✱ Es ist daher offensichtlich, dass das Ergebnis von Person  $A$  vertrauenswürdiger als das Ergebnis von Person  $B$  ist.
- ✱ Wir wollen nun diese Aussage quantitativ machen und suchen ein Mass für die Streuung der Messpunkte.

## Stochastik

### Definition

$\Omega$  : Ergebnismenge eines Zufallsexperiments

Zufallsfunktion : Funktion  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Wahrscheinlichkeitsfunktion einer Zufallsgröße  $X$  :

$$W : x \rightarrow P(\omega \mid X(\omega) = x)$$

**Erwartungswert einer Zufallsgröße:** Nimmt die Zufallsgröße  $X$  die Werte  $x_1, x_2, \dots, x_n$  an, so bezeichnet man mit

$$\mu(x) = \sum_{j=1}^n x_j W(x_j) \text{ den Erwartungswert von } X.$$

## Stochastik

### Satz

Entsprechen die einzelnen Messungen einzelnen unabhängigen Realisierungen eines Zufallsexperiments, so ist der Mittelwert  $\bar{x}$  eine Schätzung für  $\mu(x)$ .

## Varianz und Standardabweichung

### Definition

Die Varianz einer Zufallsgröße ist definiert durch

$$\text{Var}(X) = \sum_{j=1}^n \left( x_j - \mu \right)^2 W(x_j)$$

### Definition

Die Standardabweichung einer Zufallsgröße ist definiert durch

$$\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)} .$$

# FEHLERRECHNUNG

---

## Schätzfunktion für die Varianz

Kennen wir den Erwartungswert  $\mu$  einer Zufallsgröße und machen  $n$  Messungen  $x_j$ , so ist

$$\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left( x_j - \mu \right)^2$$

eine Schätzfunktion für die Varianz.

Im Allgemeinen ist  $\mu$  aber nicht bekannt und man verwendet  $\bar{x}$  als Schätzung für  $\mu$ . In diesem Fall ist

$$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^n \left( x_j - \bar{x} \right)^2$$

eine Schätzfunktion für die Varianz der Zufallsgröße  $X$ .



## Sätze über die Varianz

Sei  $c \in \mathbb{R}$  und seien  $X_1, X_2, \dots, X_n$  unabhängige Zufallsgrößen. Dann gilt

$$\text{Var}(cX) = c^2 \text{Var}(X)$$

$$\text{Var}(X_1 + X_2 + \dots + X_n) = \text{Var}(X_1) + \text{Var}(X_2) + \dots + \text{Var}(X_n)$$

Insbesondere gilt:

$$\begin{aligned} \text{Var} \left( \frac{1}{n} \underbrace{(X + X + \dots + X)}_{n\text{mal}} \right) &= \frac{1}{n^2} (\text{Var}(X) + \text{Var}(X) + \dots + \text{Var}(X)) \\ &= \frac{1}{n} \text{Var}(X) \end{aligned}$$

# FEHLERRECHNUNG

---

## Varianz des Mittelwertes

Es interessiert in erster Linie nicht die Varianz der einzelnen Messungen  $\text{Var}(X)$ , sondern die Varianz des Mittelwertes  $\text{Var}(\bar{X})$ .

Bei  $n$  Messungen gilt:

$$\text{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{n} \text{Var}(X)$$

Somit erhält man als Schätzung für die Varianz des Mittelwertes

$$S_{\bar{X}}^2 = \frac{1}{n} S^2 = \frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2.$$

Für die Standardabweichung erhält man

$$\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^n (x_j - \bar{x})^2}.$$

## Beispiel

Somit findet man für die beiden oben aufgeführten Messreihen:

$$\text{Messreihe 1 : } \sigma_{\bar{X}} = 0.05 ,$$

$$\text{Messreihe 2 : } \sigma_{\bar{X}} = 1.07 .$$

Es ist üblich mit dem Mittelwert auch immer die Standardabweichung anzugeben, also

$$\text{Messreihe 1 : } x = 2.48 \pm 0.05 ,$$

$$\text{Messreihe 2 : } x = 2.48 \pm 1.07 .$$

## Die Normalverteilung

Zur Interpretation der Standardabweichung betrachten wir zunächst **kontinuierliche Zufallsgrößen**. Die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion  $p(x)$  für eine kontinuierliche Zufallsgröße beschreibt

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b p(x) \, dx.$$

Definition: Man nennt eine kontinuierliche Zufallsgröße **normalverteilt**, falls sie die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x - \mu)^2}{\sigma^2}\right)$$

besitzt. Der Erwartungswert dieser Zufallsgröße ist  $\mu$ , die Standardabweichung ist  $\sigma$ .

## Die Normalverteilung

Für eine normalverteilte Zufallsgröße gilt:

$$P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) \approx 68.27 \% ,$$

$$P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95.45 \% ,$$

$$P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99.73 \% .$$

## Quiz

Ein Experiment misst eine Größe  $O$  und berichtet  $O = 5.94 \pm 0.02$ .

Dies bedeutet:

- (A) Der wahre Wert der Observablen  $O$  ist 5.94.
- (B) Der wahre Wert der Observablen  $O$  liegt im Intervall  $[5.92, 5.96]$ .
- (C) Die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Wert der Observablen  $O$  im Intervall  $[5.92, 5.96]$  liegt, beträgt 99.7 %.
- (D) Die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Wert der Observablen  $O$  im Intervall  $[5.92, 5.96]$  liegt, beträgt 68.3 %, falls der Messwert einer Normalverteilung folgt.

# FEHLERRECHNUNG

---

## Problemstellung

Gesucht wird eine Größe  $f = f(x, y)$  die von zwei weiteren Größen  $x$  und  $y$  abhängt.

Die funktion  $f$  wird als bekannt vorausgesetzt, die Größen  $x$  und  $y$  werden durch eine Messung mit Fehlern  $x \pm \Delta x$  und  $y \pm \Delta y$  bestimmt.

Gesucht ist nun der Fehler für die Größe  $f$ .



## Fehlerfortpflanzung

Für die Größe  $f$  beginnen wir mit der Taylorentwicklung

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \Delta y + \dots$$

Wir nehmen an, dass wir  $n$  Messungen für die Größen  $x$  und  $y$  haben, die einzelnen Messwerte seien mit  $x_j$  und  $y_j$  bezeichnet. Somit haben wir auch  $n$  Ergebnisse für  $f$ . Für die Abweichung eines Einzelergebnisses vom Mittelwert gilt für kleine Abweichungen

$$f_j - \bar{f} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (x_j - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (y_j - \bar{y}) + \dots$$



## Fehlerfortpflanzung

$$f_j - \bar{f} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (x_j - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (y_j - \bar{y}) + \dots$$

Somit gilt für die Varianz:

$$\begin{aligned} \sigma_f^2 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (f_j - \bar{f})^2 \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \left[ (x_j - \bar{x})^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + (y_j - \bar{y})^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + 2 \cdot (x_j - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y}) \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right] \end{aligned}$$

## Kovarianz

Wir definieren die **Kovarianz** als

$$\text{Cov}(x, y) = \sigma_{xy} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\infty} (x_j - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y})$$

Somit haben wir

$$\sigma_f^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (f_j - \bar{f})^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2 + 2 \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right) \sigma_{xy}$$

## Unkorrelierte Zufallsgrößen

Falls  $x$  und  $z$  unkorreliert sind, gilt  $\sigma_{xy} = 0$  und somit

$$\sigma_f^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (f_j - \bar{f})^2 = \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2,$$

bzw.

$$\sigma_f = \sqrt{\left( \frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 \sigma_x^2 + \left( \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \sigma_y^2}.$$

## Beispiel: Addition

$f = x + y$ . In diesem Fall haben wir

$$\sigma_f = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

man sagt, die (absoluten) Fehler addieren sich quadratisch.

## Beispiel: Addition

### Beispiel

$$f = x + y, \quad \sigma_f = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}.$$

Es sei  $x = 15 \pm 3$  und  $y = 17 \pm 4$ .

$$\bar{f} = \bar{x} + \bar{y} = 15 + 17 = 32,$$

$$\sigma_f = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5.$$

Somit

$$f = 32 \pm 5.$$

## Beispiel: Multiplikation

$f = x \cdot y$ . In diesem Fall findet man

$$\sigma_f = \sqrt{y^2 \sigma_x^2 + x^2 \sigma_y^2}$$

oder anders geschrieben

$$\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$$

Bei einem Produkt addieren sich die relativen Fehler quadratisch.

## Beispiel: Multiplikation

### Beispiel

$$f = x \cdot y, \quad \frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$$

Es sei  $x = 2 \pm 0.06$  und  $y = 5 \pm 0.2$ . Es ist

$$f = 2 \cdot 5 = 10, \quad \sigma_f = 10 \cdot \sqrt{\left(\frac{6}{200}\right)^2 + \left(\frac{2}{50}\right)^2} = \frac{10}{\sqrt{400}} = \frac{1}{2}.$$

Somit

$$f = 10 \pm 0.5.$$

## Beispiel: Subtraktion

$f = x - y$ . Hier findet man wie bei einer Summe

$$\sigma_f = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}.$$



## Quiz

Es sei  $x = 17 \pm 4$  und  $y = 15 \pm 3$ , sowie

$$f = x - y.$$

(A)  $f = 2 \pm 1$

(B)  $f = 2 \pm \sqrt{7}$

(C)  $f = 2 \pm 4$

(D)  $f = 2 \pm 5$

## Beispiel: Division

$f = \frac{x}{y}$ . In diesem Fall findet man

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{1}{y^2} \sigma_x^2 + \frac{x^2}{y^4} \sigma_y^2}.$$

Schreibt man dies mit Hilfe der relativen Fehler erhält man wie beim Produkt

$$\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$$

## Beispiel: Division

### Beispiel

$$f = \frac{x}{y}, \quad \frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$$

Es sei  $x = 2 \pm 0.06$  und  $y = 5 \pm 0.2$ . Es ist

$$f = \frac{2}{5} = 0.4, \quad \sigma_f = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{\left(\frac{6}{200}\right)^2 + \left(\frac{2}{50}\right)^2} = \frac{2}{5\sqrt{400}} = \frac{1}{50}.$$

Somit

$$f = 0.4 \pm 0.02.$$

## Beispiel: Potenzen

Zum Abschluss betrachten wir noch  $f = x^a y^b$ . Man erhält

$$\sigma_f = \sqrt{(ax^{a-1}y^b)^2 \sigma_x^2 + (bx^a y^{b-1})^2 \sigma_y^2}$$

Auch hier empfiehlt es sich wieder, die Formel in relativen Fehler zu schreiben:

$$\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{a^2 \left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + b^2 \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$$

## Anwendungsbeispiel

Wir hatten zuvor den Fall betrachtet, dass eine Größe durch zwei Messreihen experimentell bestimmt wird:

$$\text{Messreihe 1 : } x = 2.48 \pm 0.05 ,$$

$$\text{Messreihe 2 : } x = 2.48 \pm 1.07 .$$

Es stellt sich nun die Frage, wie man diese Ergebnisse miteinander kombiniert.

# FEHLERRECHNUNG

## Kombination und Messungen

Etwas allgemeiner seien für eine Größe  $x$   $n$  Messungen  $x_j$  mit Fehlern  $\sigma_j$  gegeben.

Dann setzt man

$$x = \frac{\frac{1}{\sigma_1^2 x_1 + \sigma_2^2 x_2 + \dots + \sigma_n^2 x_n}}{\frac{1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2}}, \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \dots + \sigma_n^2}},$$

## Anwendungsbeispiel

Für das Beispiel hat man

$$x_1 = 2.48, \quad \sigma_1 = 0.05,$$

$$x_2 = 2.48, \quad \sigma_2 = 1.07,$$

Man findet somit

$$x = 2.48, \quad \sigma_2 = 0.04995.$$

Die zweite Messreihe liefert keine wesentlichen Beitrag zur Verbesserung des Fehlers.

# FEHLERRECHNUNG

---



# FEHLERRECHNUNG

---

# FEHLERRECHNUNG

---

# FEHLERRECHNUNG

---

Beachten Sie die folgenden nützliche Formeln:

$$\bar{x} = \int dx \, x \, p(x) \qquad \int_a^b dx \, f(x) = - \int_b^a dx \, f(x)$$

$$\int_a^b dx \, f(x) = \int_a^c dx \, f(x) + \int_c^b dx \, f(x), \quad c \in [a, b]$$

$$\int_0^\infty dx \, \exp -x^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\rho = \frac{m}{V}, \quad V = \pi r^2 l, \quad d = 2r$$