FOLGEN UND REIHEN

Mathematische Brückenkurs

Dr. Joseph Rudzinski

Abteilung Theorie der Polymere, Max-Planck-Institut für Polymer Forschung

Wintersemester 2021/22

Definition

Unter einer Folge (a_n) reeller Zahlen vesteht man eine Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

Jedem $n \in \mathbb{N}$ wird also ein $a_n \in \mathbb{R}$ zugeordnet.

Beispiel

$a_n = \dfrac{1}{n^2}$ definiert eine Folge.

Explizit: $a_1 = 1, a_2 = \dfrac{1}{4}, a_3 = \dfrac{1}{9}, a_4 = \dfrac{1}{16}, a_5 = \dfrac{1}{25}, \ \ldots$

Konvergente Folgen

Definition

Eine Folge (a_n) heißt konvergent gegen $a \in \mathbb{R}$, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ eine naürliche Zahl N gibt, so dass

$$| a_n - a | < \epsilon, \quad \forall n > N \, .$$

In diesem Fall schreibt man

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a$$

In anderen Worten liegen für eine konvergente Folge ab einem bestimmen N alle Folgenglieder im Intervall $]a - \epsilon, a + \epsilon[$.

Divergente Folgen

Definition

Eine Folge nennt man divergent, wenn sie gegen keine reellen Zahl konvergiert.

Beispiel

$$a_n = n$$

$$b_n = \begin{cases} 1 & n \text{ gerade} \\ -1 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

Beschränkte Folgen

Definition

Eine Folge heißt nach oben (bzw. unten) beschränkt, falls es ein $c \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $a_n \leq c$ (bzw. $a_n \geq c$) für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge heißt beschränkt, wenn sie nach oben und unten beschränkt sind.

- Jede konvergente Folge ist beschränkt.
- Die Umkehrung gilt nicht, eine beschränkte Folge ist nicht notwendiger Weise konvergent, siehe obiges Beispiel mit der Folge (b_n).

Rechenregeln für konvergente Folge

Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen mit der Grenzwerten

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a\,, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b\,.$$

Dann sind auch die Folgen $(a_n + b_n), (a_n - b_n), (\lambda a_n), (a_n b_n)$ konvergent ($\lambda \in \mathbb{R}$) und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = a + b \qquad \lim_{n\to\infty} (\lambda a_n) = \lambda a$$

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = a - b \qquad \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a \cdot b$$

Rechenregeln für konvergente Folge

Ist weiter $b \neq 0$, so gibt es ein $N \in \mathbb{N}$, so dass $b_n \neq 0\,, \forall\, n \geq N$ und wir können die Folge

$$\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_{n \geq N}$$

betrachten. Es gilt

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{a}{b}$$

Rechenregeln für konvergente Folge

Satz

Seien (a_n) und (b_n) zwei konvergente Folgen mit $a_n \leq b_n \, \forall \, n$.
Dann gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} a_n \leq \lim_{n\to\infty} b_n$$

Bemerkung: Aus $a_n < b_n$ folgt nicht

$$\lim_{n\to\infty} a_n < \lim_{n\to\infty} b_n$$

wie das Beispiel $a_n = 0, b_n = \dfrac{1}{n}$ zeigt.

Cauchy-Folgen

Wir hatten bereits bei der axiomatische Charakterisierung der reellen Zahlen den Begriff einer Cauchy-Folge eingeführt, den wir uns nochmal in Erinnerung rufen:

Definition

Eine Folge (a_n) reellen Zahlen nennt man Cauchy-Folge, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass

$$|a_n - a_m| < \epsilon, \quad \forall n, m \geq N$$

Satz

Ist eine Folge (a_n) reellen Zahlen konvergent, so ist es auch eine Cauchy-Folge.

Vollständigkeitsaxiom

Die Umkehrung dieses Satzes postuliert nennt man als Axiom.

Vollständigkeitsaxiom

In $\mathbb{R}$ ist jede Cauchy-Folge konvergent.

Wir hatten dies bei der axiomatischen Charakterisierung der reellen Zahlen bereits erwähnt.

Somit gilt in $\mathbb{R}$, dass eine Folge (a_n) reeller Zahlen genau dann konvergent ist, falls sie eine Cauchy-Folge ist.

Vollständigkeitsaxiom (Fortsetzung)

Der Vorteil der Definition einer Cauchy-Folge gegenüber der Definition des Begriffes Konvergenz besteht darin, dass sich erstere nur auf einzelne Folgenglieder bezieht und keinen Bezug auf einen (eventuellen) Grenzwert nimmt.

Quiz

Die Folge

$$a_n = \cos\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

ist

(A) divergent

(B) konvergent mit Grenzwert 0

(C) konvergent mit Grenzwert $\frac{1}{2}\sqrt{2}$

(D) konvergent mit Grenzwert 1

FOLGEN UND REIHEN

Sei (a_n) eine Folge reeller Zahlen. Man betrachtet nun die Folge (s_n) der Partialsummen

$$s_n = \sum_{j=1}^{n} a_j$$

Als unendlich Reihe bezeichnet man nun die Folge dieser Partialsummen. Man schreibt

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j$$

Eine unendliche Reihe heißt konvergent, wenn die Folge der Partialsummen konvergiert.

Absolute Konvergenz

Definition

Eine unendliche Reihe heißt absolut konvergent, falls die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} | a_j |$$

konvergent ist.

Satz

Eine absolut konvergente Reihe konvergiert auch im gewöhnlichen Sinne.

Konvergenzkriterien

Satz

Eine notwendige (aber nicht hinreicheinde) Bedingung für die Konvergenz einer Reihe ist, dass

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Konvergenzkriterium von Cauchy

Die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ konvergiert genau dann, wenn zu jedem $\epsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, so dass

$$\left|\sum_{j=m}^{n} a_j\right| < \epsilon, \quad \forall n \geq m \geq N.$$

Konvergenzkriterien

Satz

Eine Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ mit $a_j \geq 0$ konvergiert genau dann, wenn die Folge der Partialsummen beschränkt ist.

Konvergenzkriterium von Leibniz für alternierende Reihen

Sie (a_n) monoton fallende Folge nicht-negativer Zahlen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} (-1)^j a_j$$

Konvergenzkriterien

Majorantenkriterium

Sei $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ eine konvergente Reihe mit lauter nicht-negativer Gliedern und (a_n) eine Folge mit $|a_n| \leq c_n$. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j$$

absolut. Mann nennt $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ eine **Majorante** von $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$.

Konvergenzkriterien

Quotientenkriterium

Sei $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ eine Reihe mit $a_n \neq 0$ für alle n und x eine reeller Zahl $0 < x < 1$, so dass

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leq x, \quad \forall\, n \geq N$$

Dann konvergiert die Reihe absolut.

Beispiel

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$$

Es ist

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{x^n}{n!}}\right| = \frac{|x|}{n+1} < 1, \quad \text{für } n > |x|$$

Die Reihe ist nach dem Quotientenkriterium konvergent.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = \exp(x) - 1\,, \quad \textbf{bzw.} \quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!} = \exp(x)$$

Beispiel

Es sei $|x| < 1.$

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j}$$

Es ist $$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)}}{\frac{x^n}{n}} \right| = \frac{n}{n+1} |x| \leq |x| < 1$$

Die Reihe ist nach dem Quotientenkriterium konvergent.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x^j}{j} = -\ln(1-x)$$

Beispiel

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j}$$

Die Reihe ist alternierend und $a_n = 1/n$ ist eine monoton fallende Folge nicht-negativer Zahlen.

Die Reihe ist nach dem Leibnizkriterium für alternierende Reihen konvergent.

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(-1)^j}{j} = -\ln 2$$

Beispiel

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}$$

Die Reihe wird als harmonische Reihe bezeichnet.

Diese Reihe ist divergent. Für die Partialsummen gilt

$$\begin{aligned}
S_n &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{n} \\
&\geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \cdots + \frac{1}{n} \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \qquad + \frac{1}{2} + \qquad\qquad + \cdots + \frac{1}{n}
\end{aligned}$$

Cauchy-Produkt von Reihen

Seien $\sum_{j=1}^{\infty} a_j$ und $\sum_{j=1}^{\infty} b_j$ zwei absolut konvergente Reihen. Für $n \in \mathbb{N}$ setzen wir

$$c_n = \sum_{j=1}^{n-1} a_j \cdot b_{n-j}$$

Dann ist auch die Reihe $\sum_{j=1}^{\infty} c_j$ absolut konvergent und es gilt

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j = \left(\sum_{j=1}^{\infty} a_j \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{\infty} b_j \right)$$

Cauchy-Produkt von Reihen (Fortsetzung)

Bemerkung: Die absolute Konvergenz ist wesentlich für die Gültigkeit des Satzes! Im Allgemeinen gilt, dass Umordnungen innerhalb einer Reihe nur erlaubt sind, falls die Reihe absolut konvergiert.

Wichtige Reihen

$$\exp x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j!}$$

$$-\ln(1-x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^j}{j}, \quad |x| < 1$$

$$\sin x = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

$$\sinh x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!}$$

$$\cosh x = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j}}{(2j)!}$$

Sinus und Kosinus

$$\sin x = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

$$= \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{5040} + \cdots$$

$$\cos x = \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!}$$

$$= \frac{x^0}{0!} - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{720} + \cdots$$

Bemerkungen

- $\sinh$ und $\cosh$ bezeichnet man als Sinus Hyperbolicus bzw. Kosinus Hyperbolicus.
- Mit Ausnahme der Reihe für $\ln(1-x)$ konvergieren all Reihen absolut für alle Werte von x. Man sagt die Reihen haben einen unendlichen Konvergenzradius.
- Die Reihe für $\ln(1-x)$ konvergiert absolut für $|x|$. Somit hat diese Reihe den Konvergenzradius 1.
- Man spricht von einem Konvergenzradius, da die obigen Reihen auch definiert sind, wenn man die reellen Variable x durch eine komplexe Variable z ersetzt.

Quiz

$$\sum_{j=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} = \text{?}$$

(A) $\frac{1}{2}\cos(x)$

(B) $\cos\left(\frac{x}{2}\right)$

(C) $\cosh\left(\frac{x}{2}\right)$

(D) $\cos\left(\frac{1}{2}\sqrt{2}x\right)$

Die Formel von Euler

Wir betrachten $\exp(ix)$:

$$\exp(ix) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{i^j x^j}{j!} = \sum_{j=0}^{\infty} i^{2j} \frac{x^{2j}}{(2j)!} + \sum_{j=0}^{\infty} i^{2j+1} \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j}}{(2j)!} + i \sum_{j=0}^{\infty} (-1)^j \frac{x^{2j+1}}{(2j+1)!} = \cos x + i \sin x$$

Die Reihendarstellung liefert also einen einfachen Beweis der Formel:

$$\exp(ix) = \cos x + i \sin x$$

Die Formel von Euler (Fortsetzung)

Ebenso findet man

$$\exp x = \cosh x + \sinh x$$

Man beachte, dass für die Umordnung der Reihen die absolut Konvergenz notwendig ist.

Trigometrische und hyperbolische Funktionen

Mann kann die trigometrischen und die hyperbolischen Funktionen auch durch die Exponentialfunktion ausdrücken:

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}) \qquad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

$$\cosh x = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) \qquad \sinh x = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})$$

Additionstheoreme

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha)\,\cos(\beta) + \cos(\alpha)\,\sin(\beta)$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\,\cos(\beta) - \sin(\alpha)\,\sin(\beta)$$

Leichter zu merken:

$$e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}\,e^{i\beta}$$

Additionstheoreme

Es ist

$$
\begin{aligned}
e^{i(\alpha+\beta)} &= \cos(\alpha+\beta) + i\sin(\alpha+\beta) \\
e^{i\alpha} &= \cos(\alpha) + i\sin(\alpha) \\
e^{i\beta} &= \cos(\beta) + i\sin(\beta)
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
e^{i\alpha}\, e^{i\beta} &= [\cos(\alpha) + i\sin(\alpha)]\,[\cos(\beta) + i\sin(\beta)] \\
&= \cos(\alpha)\ \cos(\beta) + i\cos(\alpha)\ \sin(\beta) + i\sin(\alpha)\ \cos(\beta) + i^2\sin(\alpha)\ \sin(\beta) \\
&= [\cos(\alpha)\ \cos(\beta) - \sin(\alpha)\ \sin(\beta)] + i\,[\cos(\alpha)\ \sin(\beta) + \sin(\alpha)\ \cos(\beta)]
\end{aligned}
$$

Additionstheoreme

Somit folgt aus $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}\, e^{i\beta}$

$$\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)$$

$$= [\cos(\alpha)\ \cos(\beta) - \sin(\alpha)\ \sin(\beta)] + i\,[\cos(\alpha)\ \sin(\beta) + \sin(\alpha)\ \cos(\beta)]$$

Nimmt man nun den Real- bzw. Imaginärteil dieser Gleichung, so erhält man die Additionstheoreme für Kosinus und Sinus.