FUNKTIONEN

Mathematische Brückenkurs

Dr. Joseph Rudzinski

Abteilung Theorie der Polymere, Max-Planck-Institut für Polymer Forschung

Wintersemester 2021/22

Definition

Seien D und W Teilmengen von $\mathbb{R}$. Unter einer reellwertigen Funktion auf D versteht man eine Abbildung

$$f : D \to W, \quad x \to y = f(x)$$

Man nennt D den Definitionsbereich und W den Wertebereich Funktion.

Eine Funktion f ordnet jedem $x \in D$ ein $y \in W$ zu.

Umkehrfunktion

Definition

Gibt es zu jedem $y \in W$ genau ein $x \in D$ mit $y = f(x)$, so ist die Funktion f umkehrbar. In diesem Fall bezeichnet man mit f^{-1} die Umkehrfunktion:

$$f^{-1} : W \to D\,, \quad y \to x = f^{-1}(y)$$

Umkehrfunktion

Beispiel

Es sei $D = \mathbb{R}_0^+$ und $W = \mathbb{R}_0^+$ sowie

$$f : D \to W\,, \quad x \to x^2$$

Dann lautet die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : W \to D\,, \quad y \to \sqrt{y}$$

Grenzwerte von Funktionen

Definition

Man sagt eine Funktion hat im Punkte a den Grenzwert c, falls es mindestens eine Folge $(x_n) \in D$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ gibt. Gilt dann für jede Folge $(x_n) \in D$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, dass

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$$

so bezeichnet man c als den Grenzwert der Funktion $f(x)$ im Punkte a.

In diesem Fall schreibt man: $\lim_{x\to a} f(x) = c$.

Grenzwerte von Funktionen

Satz

Die obige Bedingung ist äquivalent zu der Forderung, dass es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|f(x) - c| < \epsilon\,, \quad \forall\, |x - a| < \delta \quad \text{und} \quad x \in D$$

Bemerkung: Es wird nicht vorausgesetzt, dass $a \in D$ liegt. Die Definition macht auch Sinn, falls D ein offenes Intervall ist und der Grenzwert an den Intervallgrenzen betrachtet wird.

Stetigkeit

Definition

Sei nun $a \in D$. Man bezeichnet eine Funktion als stetig im Punkte a falls

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

gilt.

Definition

Man bezeichnet eine Funktion als in einem Intervall stetig, falls sie in jedem Punkt des Intervalls stetig ist.

Die Heaviside-Funktion

Beispiel

Wir betrachten die Heaviside-Funktion, definiert durch

$$\Theta(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

Für diese Funktion gilt $\Theta(0) = 0$, aber

$$\lim_{x \to 0+} \Theta(x) = 1$$

Die Heaviside-Funktion ist im Punkte 0 nicht stetig.

Stetige Funktionen

Beispiel

Beispiele von Funktionen, die auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind, sind Polynomfunktionen, $\exp(x)$, $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\sinh(x)$, $\cosh(x)$.

Sätze über stetige Funktionen

Satz

Seien $f, g : D \to \mathbb{R}$ Funktionen, die in a stetig sind und sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann sind auch die Funktionen

$$f + g : D \to \mathbb{R}$$
$$\lambda \cdot f : D \to \mathbb{R}$$
$$f \cdot g : D \to \mathbb{R}$$

im Punkte a stetig. Ist ferner $g(a) \neq 0$, so ist auch die Funktionen

$$\frac{f}{g} : D' \to \mathbb{R}$$

in a stetig, wobei $D' = \{x \in D \,|\, g(x) \neq 0\}$.

Gleichmäßige Stetigkeit

Definition

Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt in D Gleichmäßig stetig, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \,, \quad \forall \, |x - y| < \delta \,.$$

- Jede Funktion, die auf D gleichmässig stetig ist, ist auch in jedem Punkte aus D stetig im herkömmlichen Sinne. Die Umkehrung gilt jedoch nicht.

Gleichmäßige Stetigkeit (Fortsetzung)

- Ist eine Funktion in jedem Punkte $x \in D$ stetig im herkömmlichen Sinne, so genügt es für ein vorgegebenes ϵ für jedem Punkt ein δ_x zu finden. Dieses δ_x darf mit x variieren. Für die gleichmässige Stetigkeit wird dagegen gefordert, dass δ von x abhängig ist.

Quiz

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \sin(x) & x > 0 \end{cases}$$

ist im Punkte $x = 0$

(A) stetig

(B) nicht stetig

Quiz

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} & x \leq 0 \\ \cos(x) & x > 0 \end{cases}$$

ist im Punkte $x = 0$

(A) stetig

(B) nicht stetig

Quiz

Die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} - e^{-x} & x \leq 0 \\ \frac{1}{2} + e^{x} & x > 0 \end{cases}$$

ist im Punkte $x = 0$

(A) stetig

(B) nicht stetig

Rationale Funktionen

Definition

Seien $p(x)$ und $q(x)$ Polynomfunktionen. Unter einer rationalen Funktion versteht man eine Funktion

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} \, .$$

Der Definitionsbereich einer rationalen Funktion ist gegeben durch $D = \{x \in \mathbb{R}, q(x) \neq 0\}$.

Eine rationale Funktion ist in ihrem Definitionsbereich stetig.

Partialbruchzerlegung

Rationale Funktionen können in Partialbrücke zerlegt werden. Ist

$$p(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + p_1 x_1 + p_0$$

$$q(x) = q_m x^m + q_{m-1} x^{m-1} + \cdots + q_1 x_1 + q_0$$

und ist ausserdem die Faktorisierung des Nennerpolynoms bekannt

$$q(x) = c \prod_{j=1}^{r} (x - x_j)^{\lambda_j},$$

wobei λ_j die Multiziplität der Nullstelle x_j angibt, so lässt sich die rationale Funktion schreiben als

$$R(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = P(x) + \sum_{j=1}^{r} \sum_{k=1}^{\lambda_j} \frac{a_{jk}}{(x - x_j)^k}$$

wobei $P(x)$ ein Polynom vom Grad $\deg p(x) - \deg q(x)$ ist und $a_{jk} \in \mathbb{R}$.

Partialbruchzerlegung

Berechnung von $P(x)$ und der Konstanten a_{jk} :

$P(x)$ bestimmt sich durch Polynomdivision mit Rest.

Wir betrachten als Beispiel die rationale Funktion

$$\frac{x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 3x + 18}{(x-2)^2 (x+2)}$$

Für das Nennerpolynom haben wir

$$(x-2)^2 (x+2) = x^3 - 2x^2 - 4x + 8$$

Polynomdivision

Polynomdivision mit Rest liefert

$$
\begin{array}{l}
\quad x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 3x + 18 \;:\; x^3 - 2x^2 - 4x + 8 = x + 5 + \dfrac{(2x^2 + 9x - 22)}{(x^3 - 2x^2 - 4x + 8)} \\
-(x^4 - 2x^3 - 4x^2 + 8x) \\
\text{- -} \\
\qquad\quad 5x^3 - 8x^2 - 11x + 18 \\
\quad -(5x^3 - 10x^2 - 20x + 40) \\
\text{- -} \\
\qquad\qquad\qquad 2x^2 + 9x - 22
\end{array}
$$

Somit ist $P(x) = x + 5.$

Partialbruchzerlegung

Für den Rest verwendet man den Ansatz

$$\frac{2x^2 + 9x - 22}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8} = \frac{a_{12}}{(x-2)^2} + \frac{a_{11}}{(x-2)} + \frac{a_{21}}{(x+2)}$$

Man bringt die rechte Seite auf den Hauptnenner

$$\frac{a_{12}}{(x-2)^2} + \frac{a_{11}}{(x-2)} + \frac{a_{21}}{(x+2)} = \frac{(a_{11} + a_{21})x^2 + (a_{12} - 4a_{21})x + (2a_{12} - 4a_{11} + 4a_{21})}{x^3 - 2x^2 - 4x + 8}$$

Koeffizientenvergleich liefert ein lineares Gleichungssystem:

$$a_{11} + a_{21} = 2$$
$$a_{12} - 4a_{21} = 9$$
$$2a_{12} - 4a_{11} + 4a_{21} = -22$$

Partialbruchzerlegung

Durch Lösen des linearen Gleichungssystem findet man:

$$a_{12} = 1\,, \quad a_{11} = 4\,, \quad a_{21} = -\,2$$

Somit erhalten wir das Ergebnis:

$$\frac{x^4 + 3x^3 - 12x^2 - 3x + 18}{(x-2)^2(x+2)} = x + 5 + \frac{1}{(x-2)^2} + \frac{4}{(x-2)} - \frac{2}{(x+2)}$$

Trick

Die Koeffizienten der Partialbrüche mit der höchsten Potenz einer Nullstelle lassen sich einfacher bestimmen, indem man im Ansatzmit $(x - x_j)^{\lambda_j}$ multipliziert und dann $x = x_j$ setzt .

In unserem Beispiel lassen sich so a_{12} und a_{21} bestimmen:

$$a_{12} = \frac{2x^2 + 9x - 22}{(x-2)^2(x+2)}(x-2)^2\bigg|_{x=2} = \frac{2x^2 + 9x - 22}{(x+2)}\bigg|_{x=2} = \frac{8 + 18 - 22}{4} = 1$$

$$a_{21} = \frac{2x^2 + 9x - 22}{(x-2)^2(x+2)}(x+2)\bigg|_{x=-2} = \frac{2x^2 + 9x - 22}{(x-2)^2}\bigg|_{x=-2} = \frac{8 - 18 - 22}{16} = -2$$

Trigonometrische Funktionen

Neben den Winkelfunktionen Sinus und Kosinus

$$\cos(x) = \frac{1}{2}\left(e^{ix} + e^{-ix}\right) \,, \quad \sin(x) = \frac{1}{2i}\left(e^{ix} - e^{-ix}\right) \,,$$

gibt es weitere trigonometrische Funktionen:

$$\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \,, \quad \text{Tangens} \qquad \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} \,, \quad \text{Sekans}$$

$$\cot(x) = \frac{\cos(x)}{\sin(x)} \,, \quad \text{Kotangens} \qquad \csc(x) = \frac{1}{\sin(x)} \,, \quad \text{Kosekans}$$

Umkehrfunktionen

Die Umkehrfunktionen werden mit $\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$, etc. bezeichnet:

$$\arcsin(x) = \sin^{-1}(x)\,, \quad \text{Arkussinus}$$

$$\arccos(x) = \cos^{-1}(x)\,, \quad \text{Arkuskosinus}$$

$$\arctan(x) = \tan^{-1}(x)\,, \quad \text{Arkustangens}$$

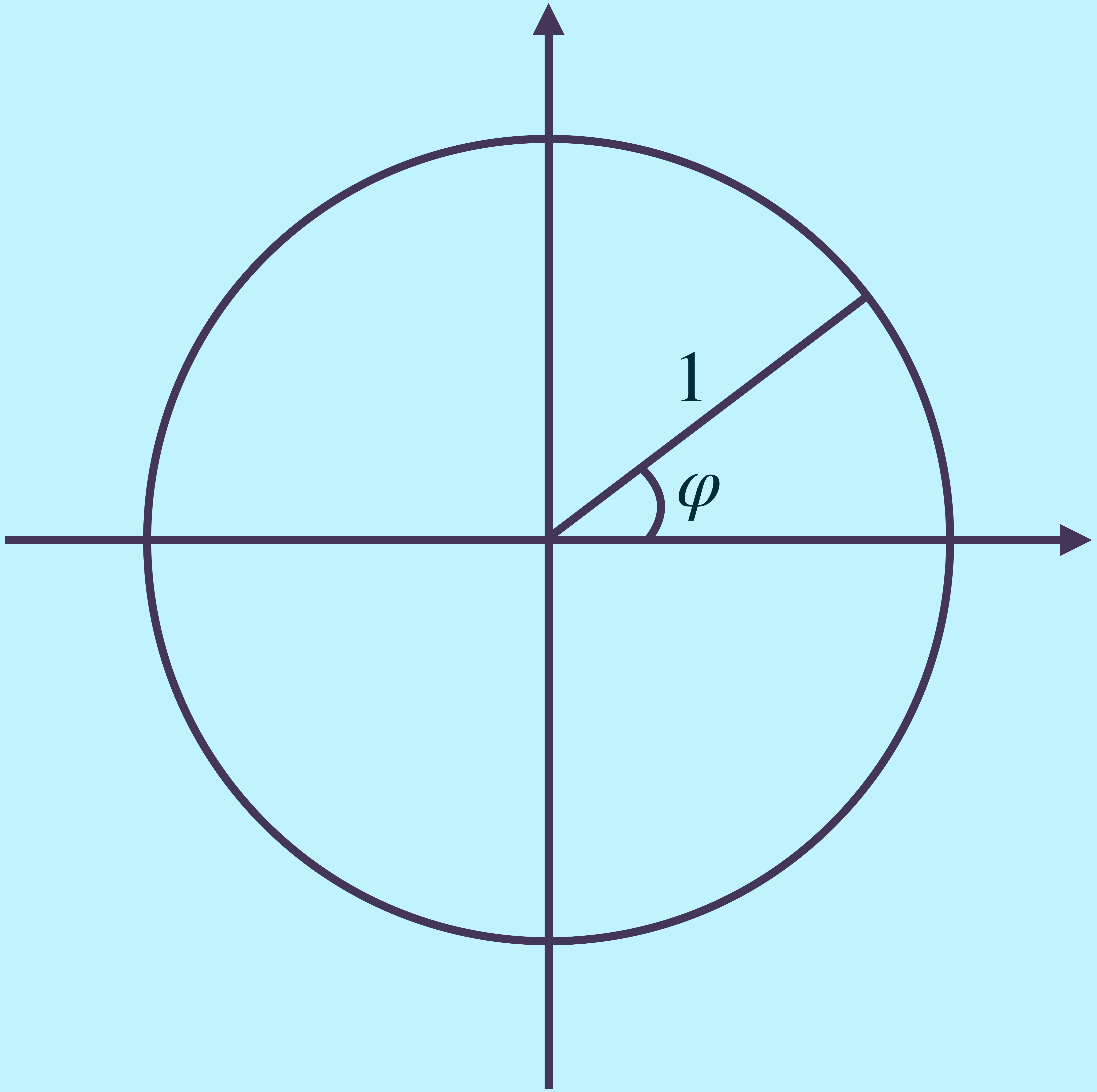
Die Umkehrfunktionen lassen sich durch den Logarithmus ausdrücken:

$$\arccos(x) = \frac{1}{i}\ln\left(x + i\sqrt{1-x^2}\right)$$

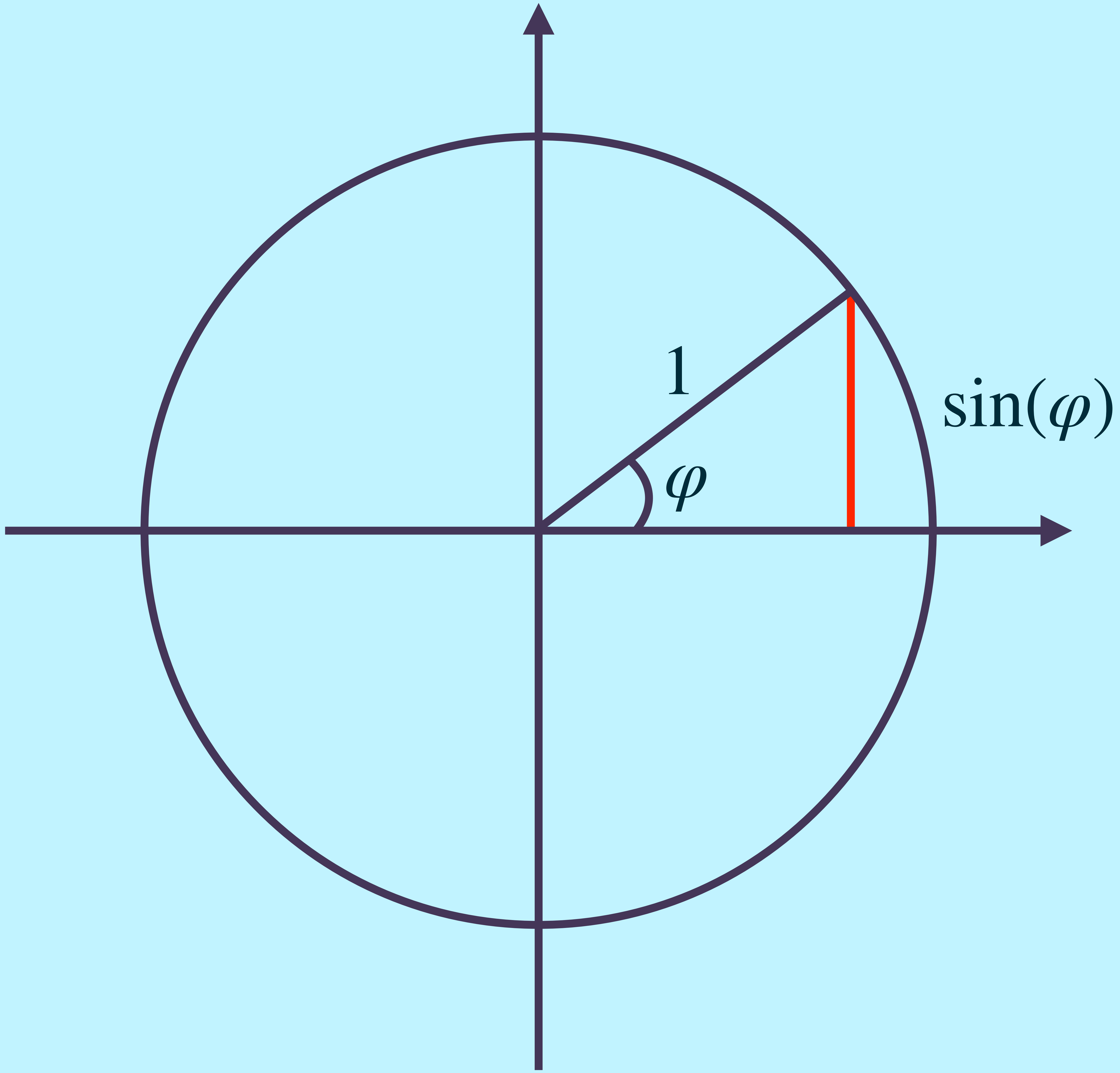
$$\arcsin(x) = \frac{1}{i}\ln\left(ix + \sqrt{1-x^2}\right)$$

$$\arctan(x) = \frac{1}{2i}\ln\left(\frac{1+ix}{1-ix}\right)$$

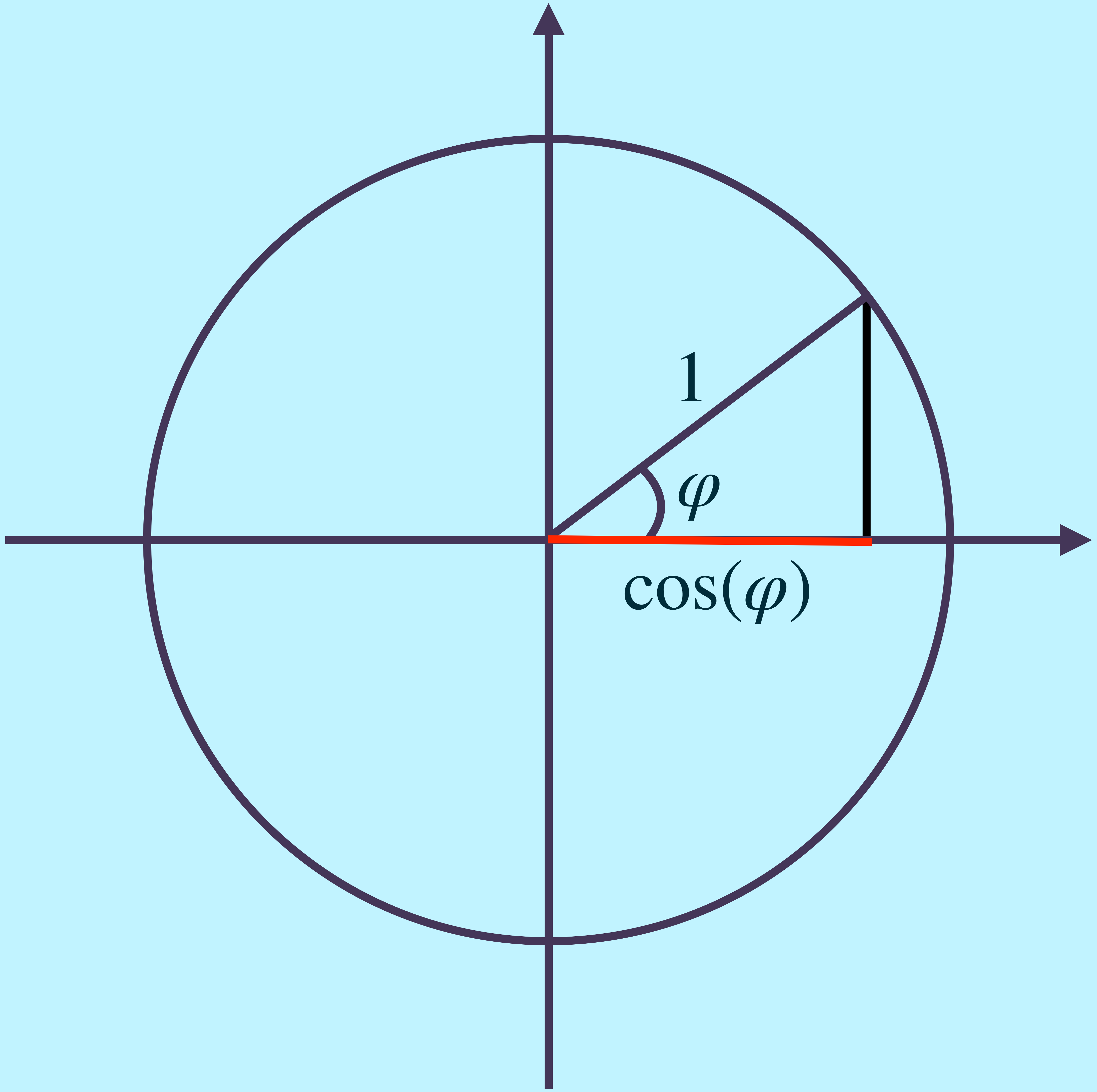
Geometrie



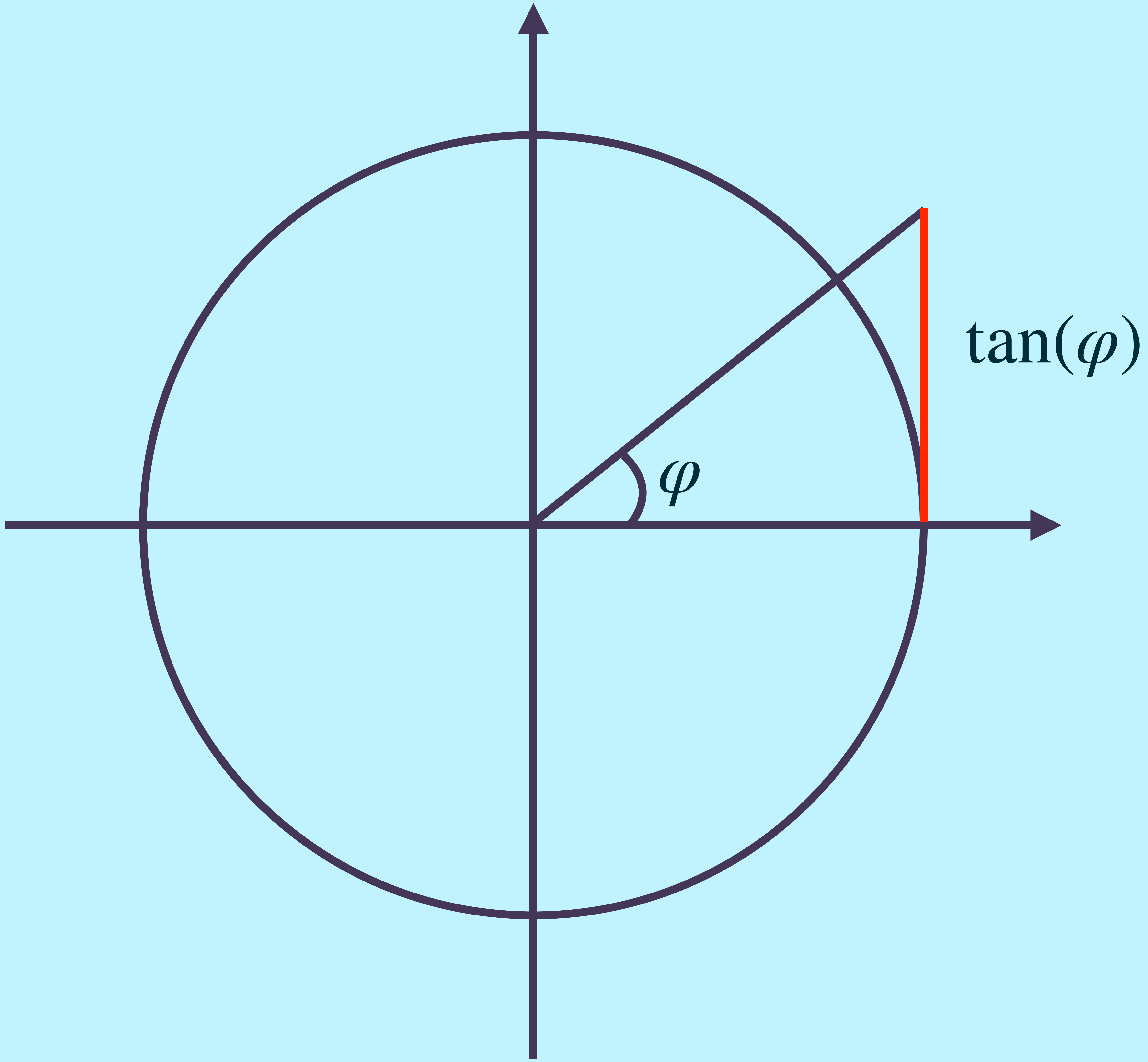
Geometrie



Geometrie

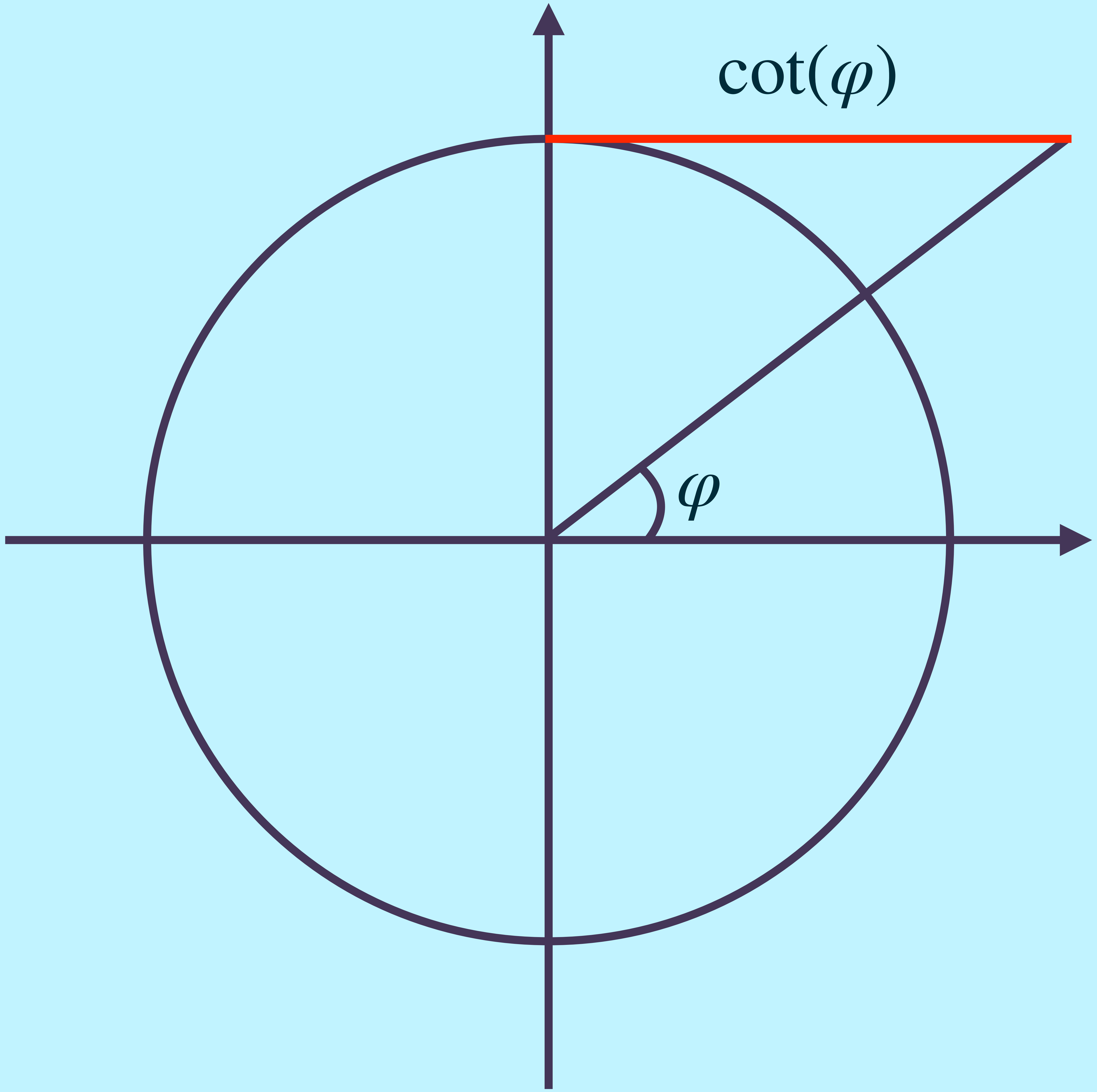


Geometrie

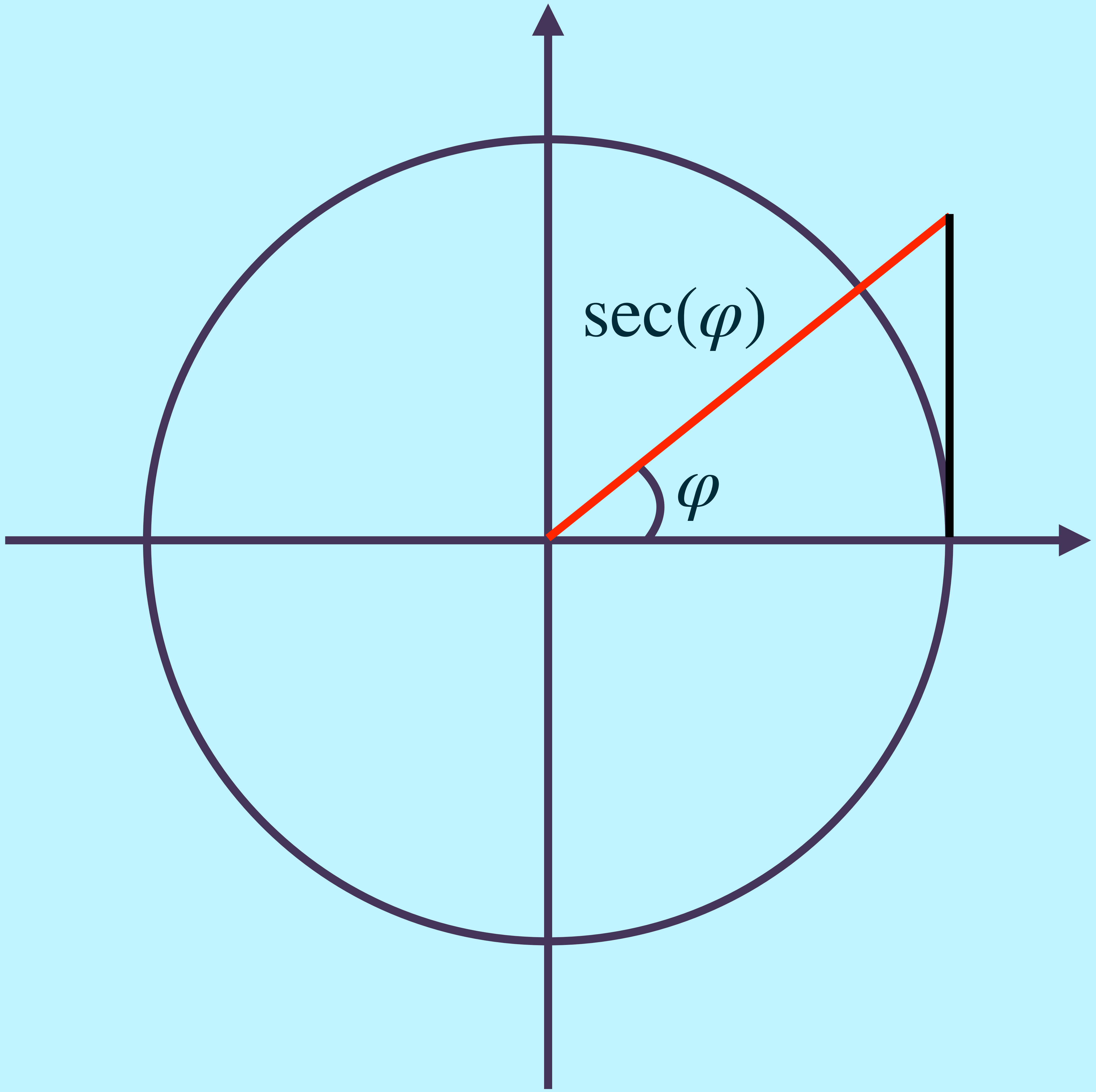


FUNKTIONEN

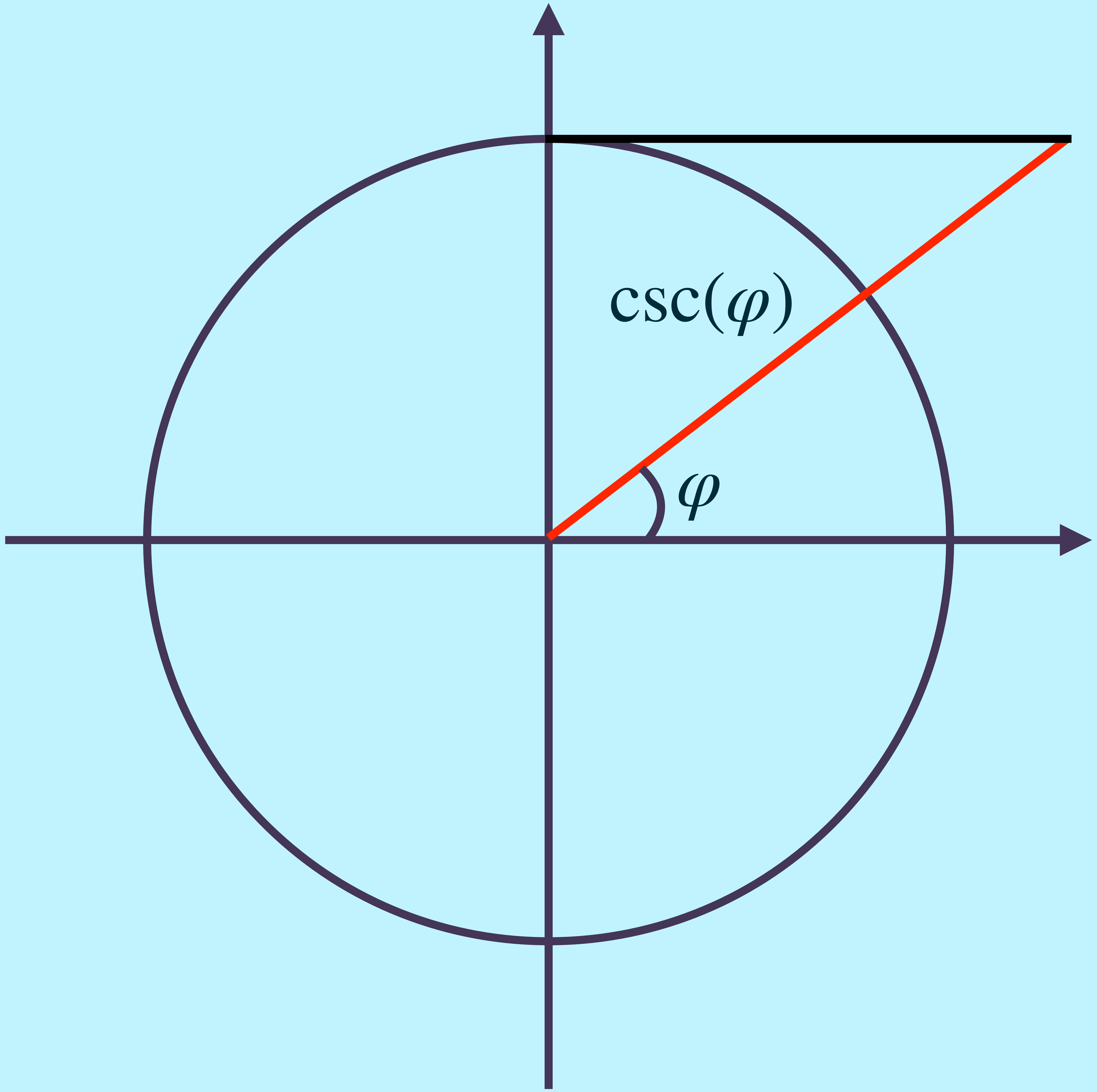
Geometrie



Geometrie



Geometrie



Hyperbolische Funktionen

Neben den bereits eingeführten hyperbolischen Funktionen

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} + e^{-x}\right) \, , \quad \sinh(x) = \frac{1}{2}\left(e^{x} - e^{-x}\right) \, ,$$

definiert man auch

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)}$$

Bemerkung: Für $\sinh$ und $\cosh$ gilt

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = 1$$

Umkehrfunktionen

Die inversen Funktionen werden als Areafunktionen bezeichnet:

$$\operatorname{arsinh}(x) = \sinh^{-1}(x)\,, \quad \text{Areasinus Hyperbolicus}$$

$$\operatorname{arcosh}(x) = \cosh^{-1}(x)\,, \quad \text{Areakosinus Hyperbolicus}$$

$$\operatorname{artanh}(x) = \tanh^{-1}(x)\,, \quad \text{Areatangens Hyperbolicus}$$

Die Umkehrfunktionen lassen sich ebenfalls durch den Logarithmus ausdrücken:

$$\operatorname{arcosh} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$$

$$\operatorname{arsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$$\operatorname{artanh}(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

FUNKTIONEN

Zusammenhang zwischen trigonomichen und hyperbolischen Funktionen

$$\sin(x) = \frac{1}{i}\sinh(ix)$$

$$\arcsin(x) = \frac{1}{i}\operatorname{arsinh}(ix)$$

$$\cos(x) = \cosh(ix)$$

$$\arccos(x) = \frac{1}{i}\operatorname{arcosh}(x)$$

$$\tan(x) = \frac{1}{i}\tanh(x)$$

$$\arctan(x) = \frac{1}{i}\operatorname{arctanh}(ix)$$

Quiz

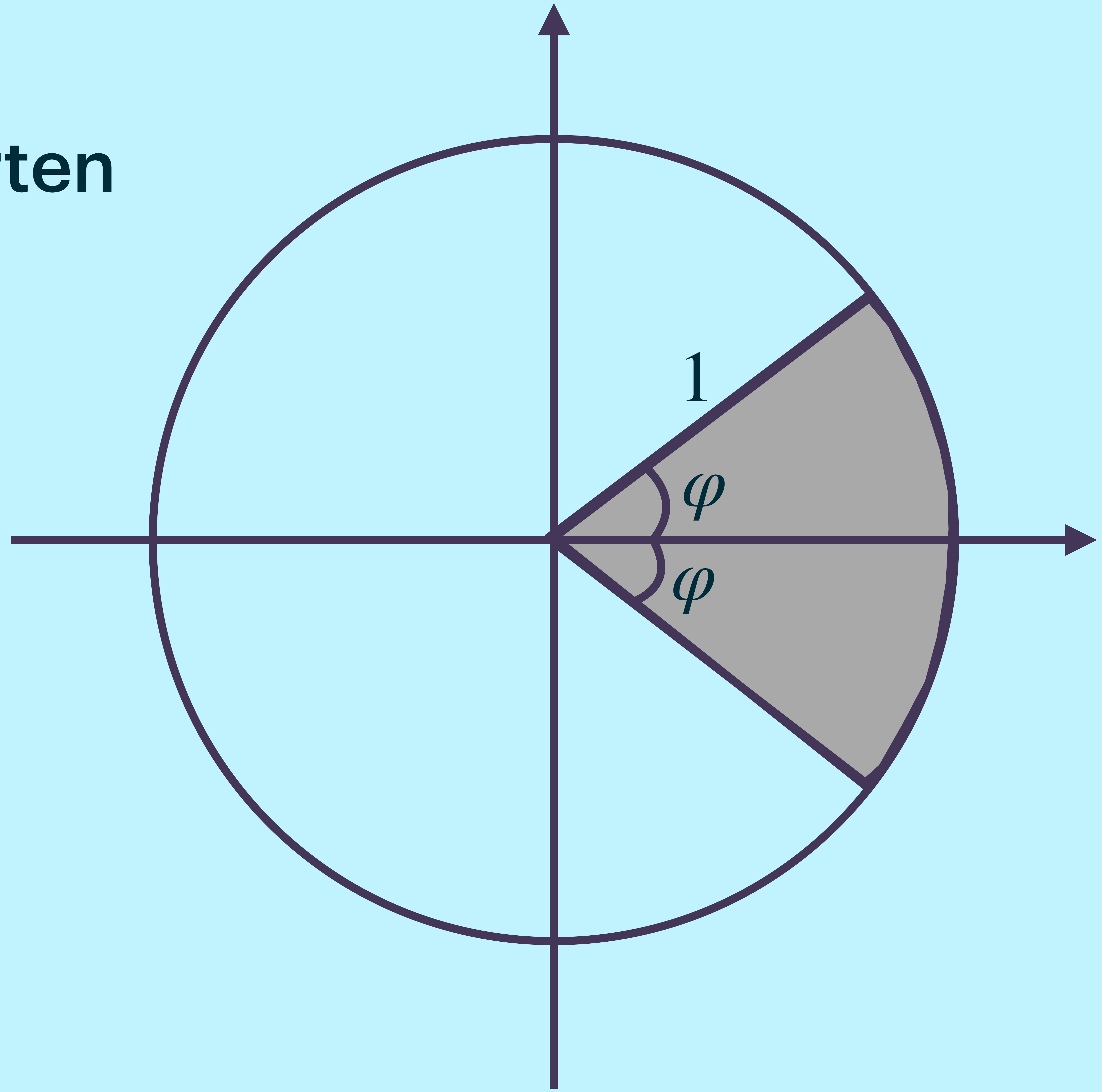
Die Flächeninhalt der schraffierten Fläche ist

(A) $\dfrac{1}{6}$

(B) φ

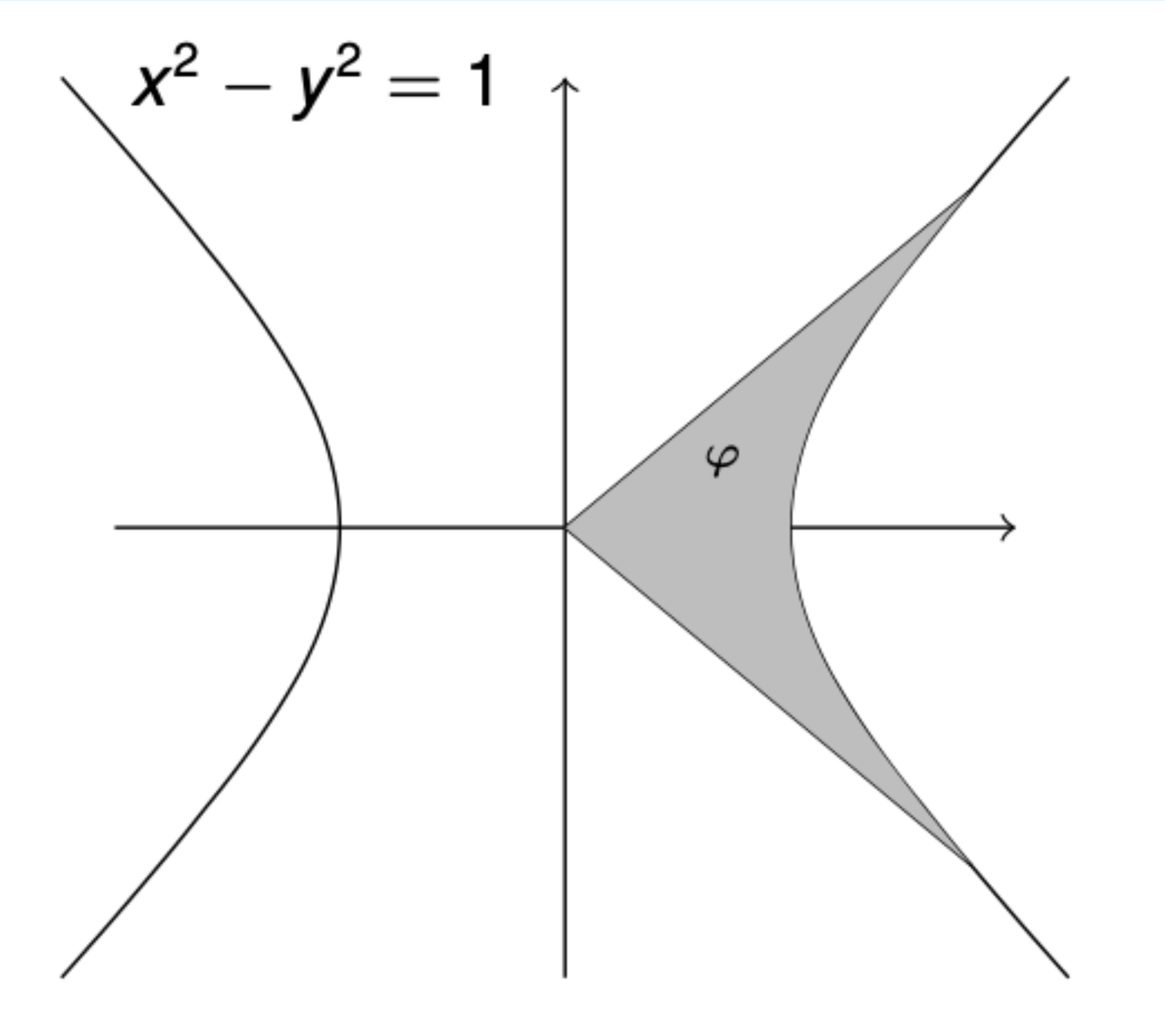
(C) 2φ

(D) $\sin(\varphi)\,\cos(\varphi)$

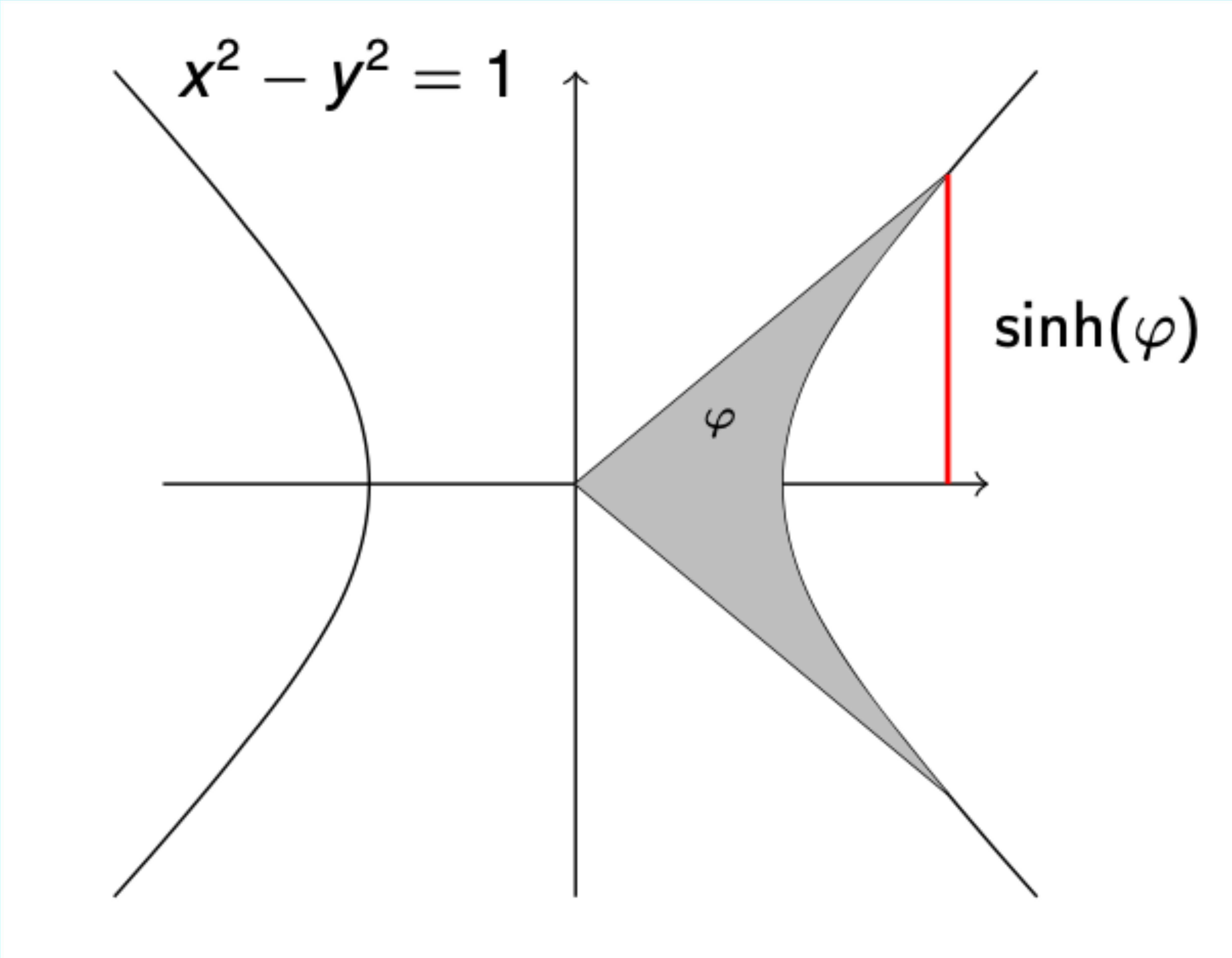


FUNKTIONEN

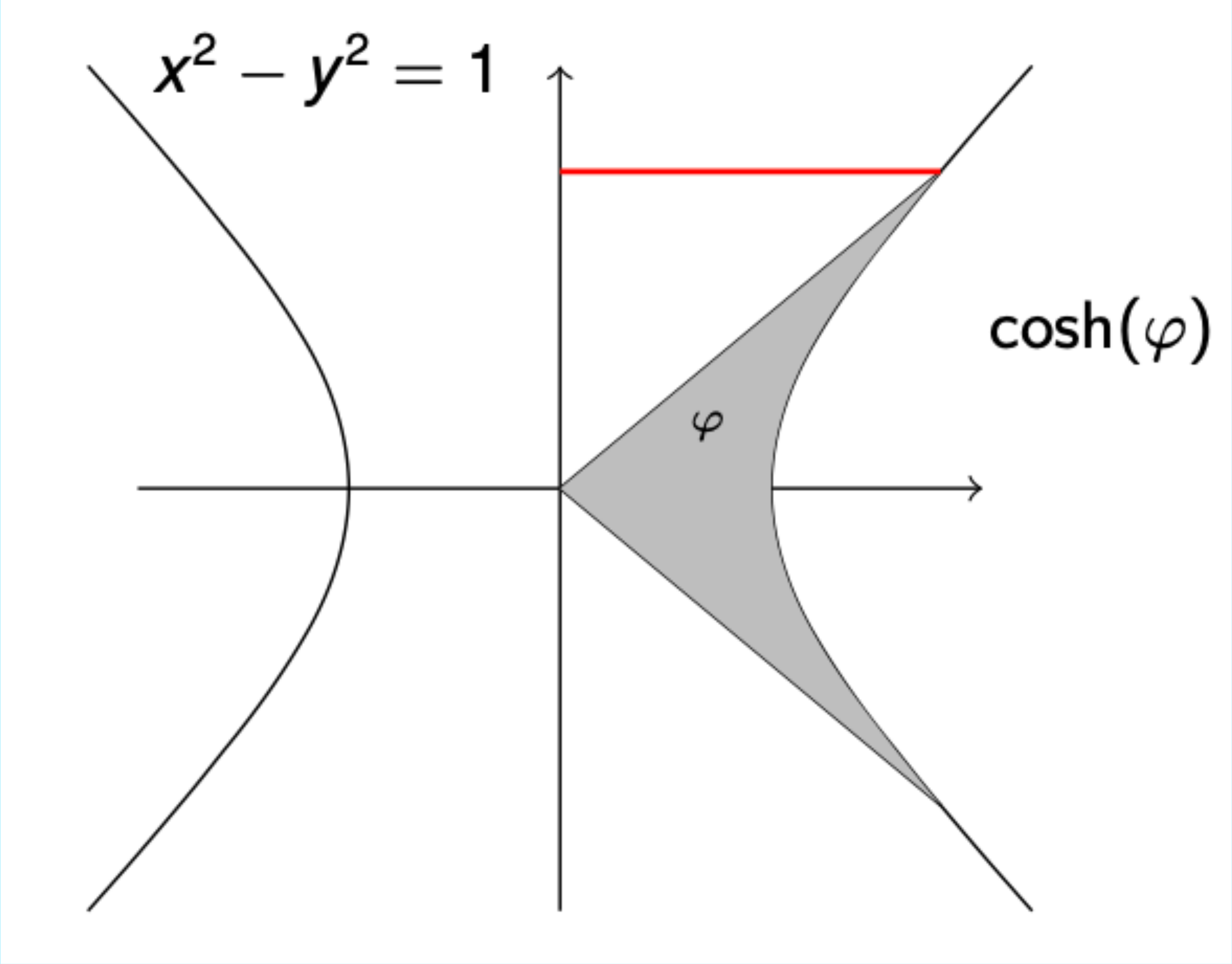
Hyperbolische Geometrie



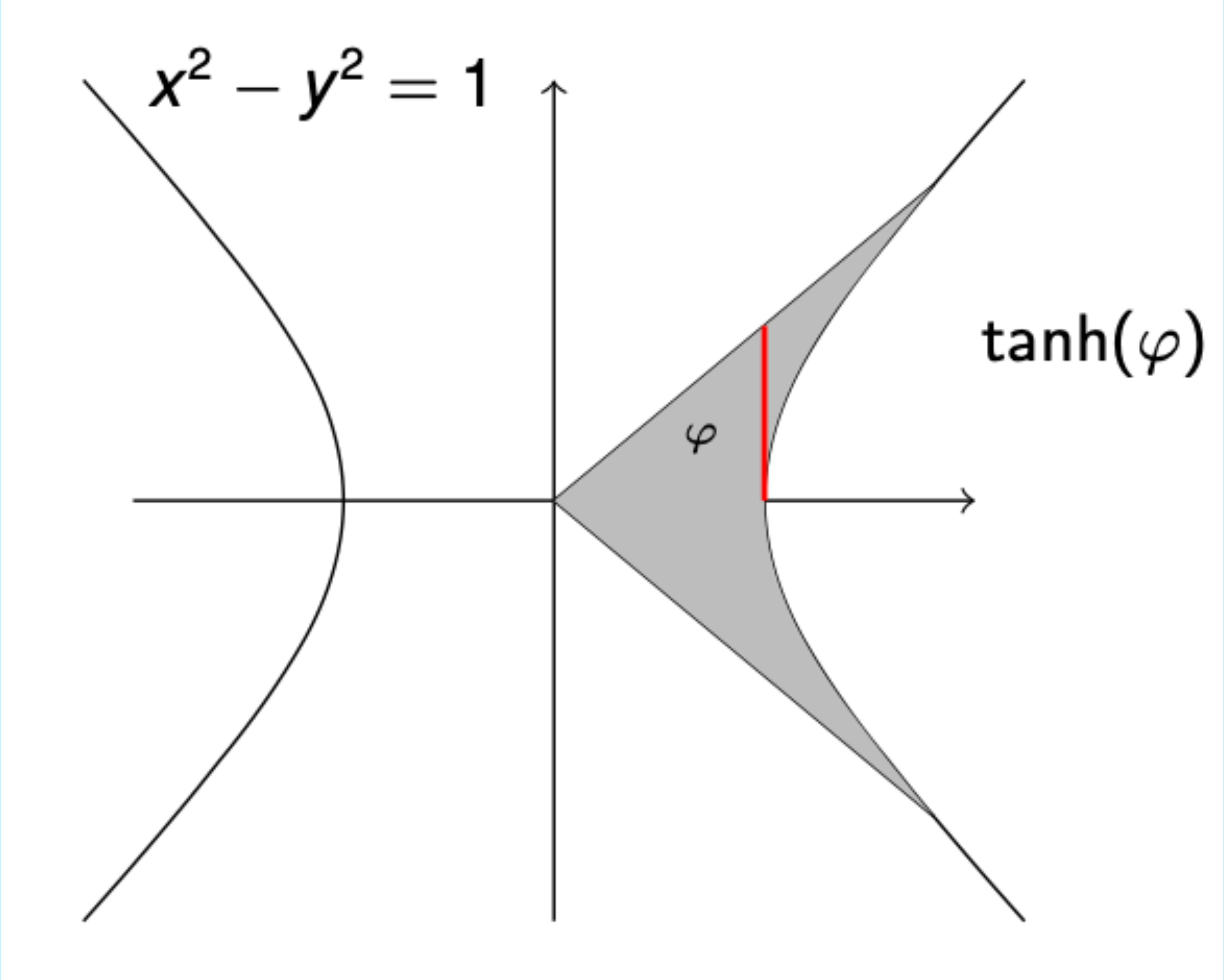
Hyperbolische Geometrie



Hyperbolische Geometrie



Hyperbolische Geometrie



FUNKTIONEN

FUNKTIONEN