VEKTORANALYSIS

Mathematische Brückenkurs

Dr. Joseph Rudzinski

Abteilung Theorie der Polymere, Max-Planck-Institut für Polymer Forschung

Wintersemester 2021/22

Motivation

- Eine gewöhnliche Funktion ist beispielsweise eine Abbildung

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\,, \quad x \to f(x)$$

- Eine Funktion mehrerer Variablen ist beispielsweise eine Abbildung

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,, \quad (x_1,\ \ldots, x_n) \to f(x_1,\ \ldots, x_n)$$

- Wir betrachten nun den allgemeinen Fall und lassen nun auch einen höherdimensionalen Wertebereich zu, beispielsweise

$$\vec{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m\,, \quad (x_1,\ \ldots, x_n) \to \vec{f}(x_1,\ \ldots, x_n)$$

Definition

Wir betrachten eine Abbildung, in dem der Definitionsbereich U eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^n$ und der Wertebereich W eine Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ ist

$$\vec{f} : U \to W, \quad (x_1, \ldots, x_n) \to \vec{f}(x_1, \ldots, x_n)$$

Man bezeichnet $\vec{f}$ als ein **Vektorfeld**.

Jedem Punkt $(x_1, \ldots, x_n) \in U$ wird ein Vektor $\vec{f} \in \mathbb{R}^m$ zugeordnet.

Vektorfelder

Schreiben wir $\vec{f}$ in Komponenten

$$\vec{f}(x_1, \ \ldots, x_n) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, \ \ldots, x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1, \ \ldots, x_n) \end{pmatrix}$$

so haben wir m Abbildungen

$$f_j : U \to \mathbb{R}\,, \quad (x_1, \ \ldots, x_n) \to f_j(x_1, \ \ldots, x_n)$$

Wir schreiben im folgenden $\overrightarrow{x} = (x_1, \ \ldots, x_n)\,.$

Beispiele

- **Elektrische Felder**: Jedem Ortsvektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ wird ein Feld $\vec{E}(\vec{x})$ zugeordnet, dass das elektrische Feld an diesem Ort angibt.

- **Magnetische Felder**: Jedem Ortsvektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ wird ein Feld $\vec{B}(\vec{x})$ zugeordnet, dass das magnetische Feld an diesem Ort angibt.

- **Strömungsfelder**: Jedem Ortsvektor $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ wird ein Feld $\vec{v}(\vec{x})$ zugeordnet, dass die Geschwindigkeit des Mediums an diesem Ort angibt. (Dies kann eine strömende Flüssigkeit sein, oder der Wind in der Atmosphäre.)

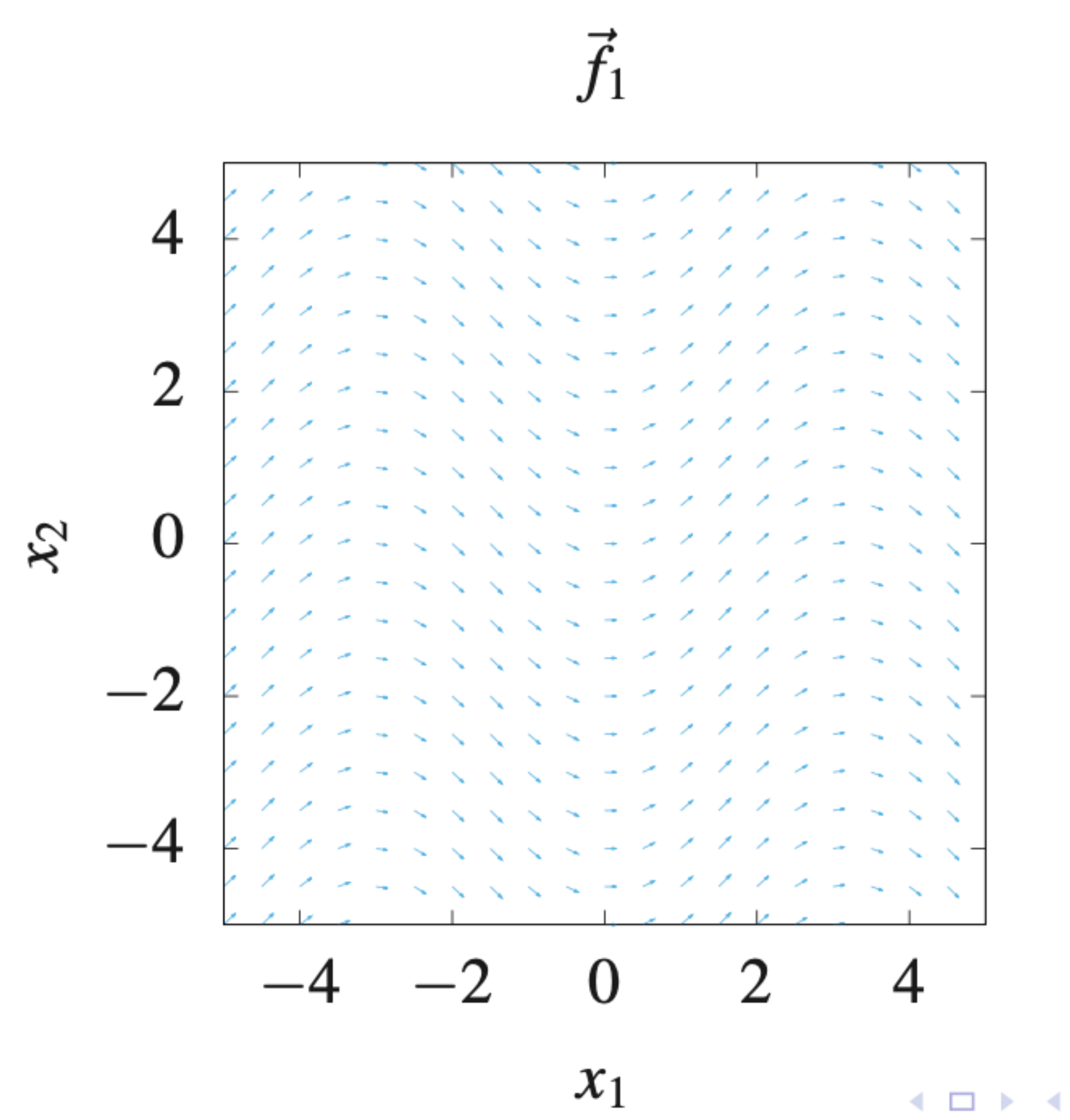
Beispiel

Wir betrachten drei Beispiele für Vektorfelder:

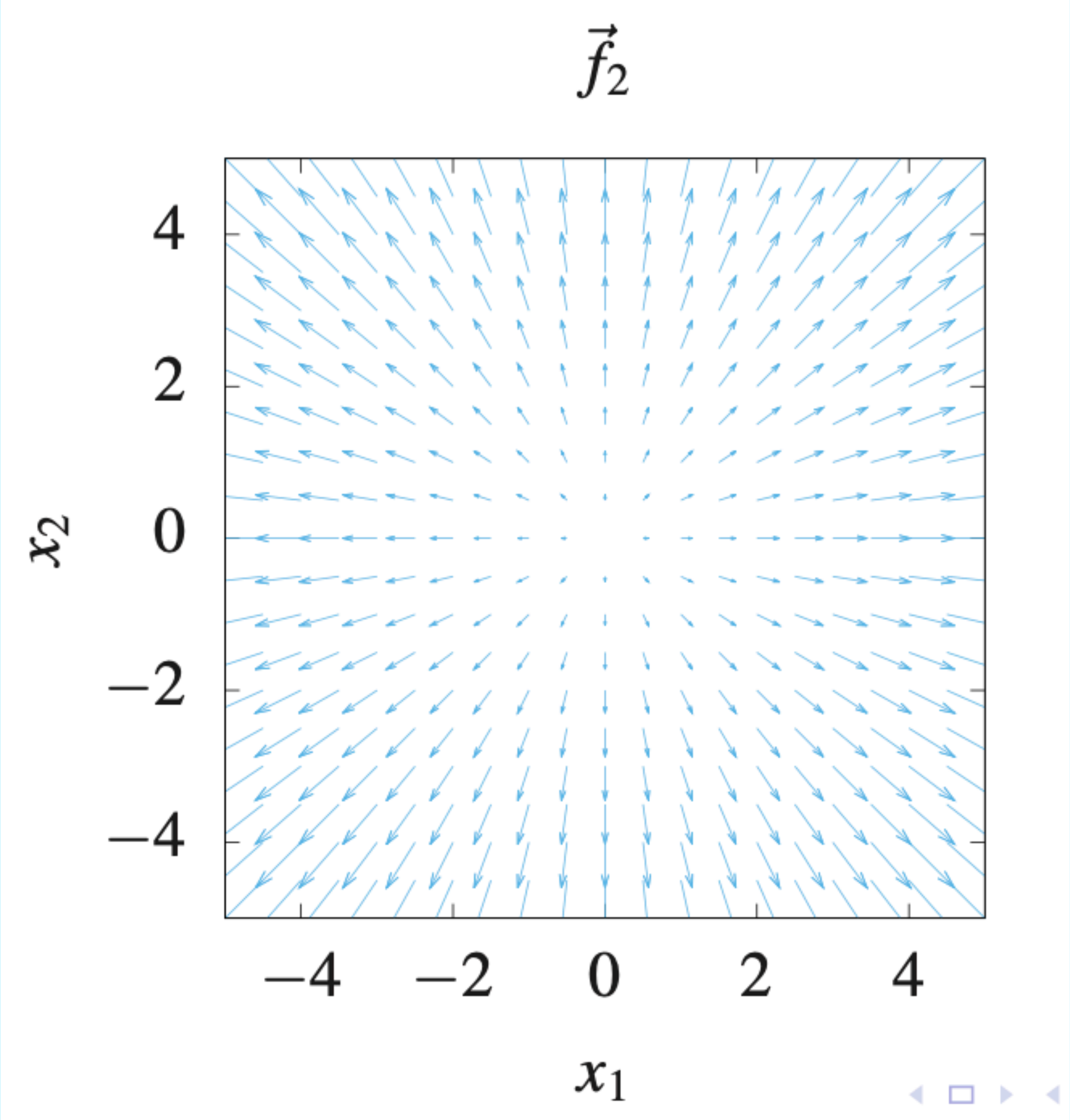
$$\overrightarrow{f_1} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \overrightarrow{f_1}(\overrightarrow{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin(x_1) \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{f_2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \overrightarrow{f_2}(\overrightarrow{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{f_3} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad \overrightarrow{f_3}(\overrightarrow{x}) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

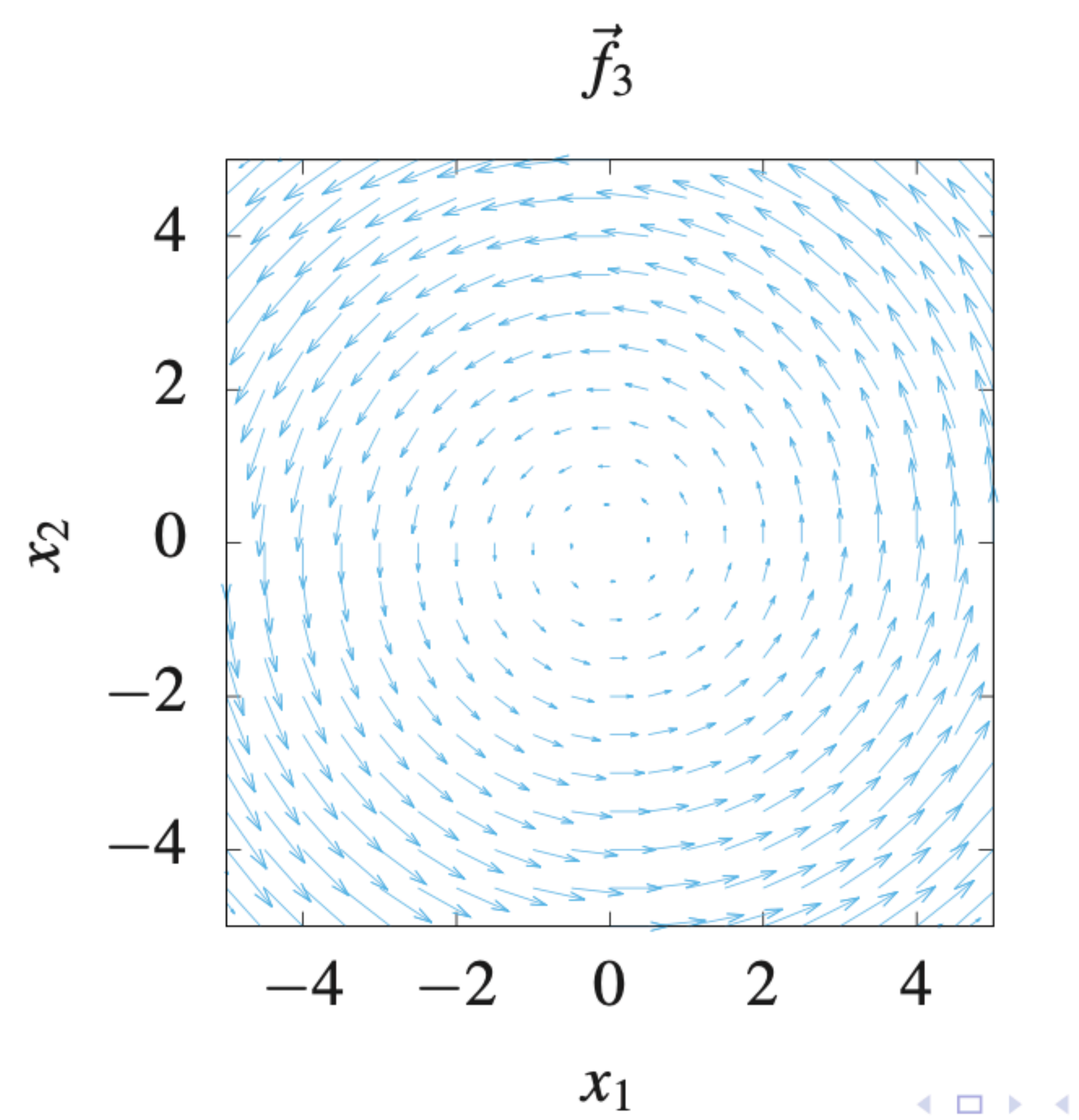
$$\vec{f_1}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} 1 \\ \sin(x_1) \end{pmatrix}$$



$$\overrightarrow{f_2}(\overrightarrow{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$



$$\overrightarrow{f_3}(\overrightarrow{x}) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$$



Die totale Ableitung

Definition

Wir bezeichnen eine Abbildung $\vec{f} : U \to \mathbb{R}^m$ als im Punkte $\vec{x_0} \in U$ total differenzierbar, falls es eine lineare Abbildung

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, \quad \vec{x} \to A\vec{x},$$

gibt, so dass in einer Umgebung von $\vec{x_0}$ gilt:

$$\vec{f}(\vec{x_0} + \vec{\xi}) = \vec{f}(\vec{x_0}) + A\vec{\xi} + o\left(| \vec{\xi} | \right).$$

A ist eine von $\vec{x}$ unabhängige $m \times n$-Matrix.

VEKTORANALYSIS

Die totale Ableitung

- Die kleine "o"-Schreibweise bedeutet, dass das Restglied durch eine Funktion $\vec{\varphi}(\vec{\xi})$ gegeben ist, für die gilt

$$\lim_{|\vec{\xi}|\to 0} \frac{\vec{\varphi}(\vec{\xi})}{|\vec{\xi}|} = \vec{0}$$

  Das Restglied verschwindet also schneller als der lineare Term für $|\vec{\xi}| \to 0$.

- Die Bedingung an die totale Differenzierbarkeit bedeutet also, dass sich die Abbildung in einer hinreichend kleinen Umgebung von $\vec{x_0}$ durch eine Konstante $\vec{f}(\vec{x_0})$ und einen linearen Term $A\,\vec{\xi}$ beschreiben lässt.

Die Jacobi-Matrix

Neben der totalen Differenzierbarkeit haben wir natürlich noch die partiellen Ableitungen der i-ten Komponente f_i nach der j-ten Koordinate:

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \lim_{h\to 0} \frac{f_i(x_1, \ldots, x_j + h, \ldots, x_n) - f_i(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_n)}{h},$$

Diese partiellen Ableitungen definieren eine $m \times n$ Matrix J_{ij}

$$J_{ij}(\vec{x}) = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}, \quad 1 \le i \le m, \quad 1 \le j \le n,$$

die man als Jacobi-Matrix oder Funktional-Matrix bezeichnet. Auch die Bezeichnung Differential wird verwendet, und man findet die Notation

$$D\vec{f}(\vec{x}) = J(\vec{x}).$$

Die totale Ableitung

Für den Zussamenhang zwischen totaler Differenzierbarkeit und partieller Differenzierbarkeit haben wir die folgenden Satz:

Satz

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $\vec{f}: U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung, die im Punkte $\vec{x_0} \in U$ total differenzierbar sei, d.h.

$$\vec{f}(\vec{x_0} + \vec{\xi}) = \vec{f}(\vec{x_0}) + \mathbf{A}\,\vec{\xi} + o\left(\,||\,\vec{\xi}\,||\,\right) .$$

Dann ist $\vec{f}$ im Punkte $\vec{x_0}$ stetig und alle Komponenten $f_j : U \to \mathbb{R}$ von $\vec{f}$ sind im Punkte $\vec{x_0}$ partiell differenzierbar und es gilt

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x_0}) = A_{ij}$$

Die totale Ableitung

Satz

Sei wieder $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Teilmenge und $\vec{f} : U \to \mathbb{R}^m$ eine Abbildung. Es sei weiter vorausgesetzt, dass die Abbildung $\vec{f}$ im Punkte $\vec{x_0} \in U$ stetig partiell differenzierbar ist, d.h. alle partiellen Ableitungen

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x_0})$$

existiert und sind stetig. Dann ist $\vec{f}$ in $\vec{x_0}$ total differenzierbar.

Die totale Ableitung

Wir haben also die folgenden Implikation:

stetig partiell differenzierbar

$\Rightarrow$ total differenzierbar

$\Rightarrow$ partiell differenzierbar

Die Umkehrungen gelten im Allgemeinen nicht.

Der Gradient

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $\varphi : U \to \mathbb{R}^m$ eine partiell differenzierbare Funktion von n Variablen.

Definition

Die partiellen Ableitungen von φ definieren ein Vektorfeld, welches man als den Gradienten von φ bezeichnet:

$$\text{grad } \varphi : U \to \mathbb{R} \qquad \text{grad } \varphi(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi(\vec{x})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi(\vec{x})}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Der Gradient einer skalaren Funktion ist also ein Vektorfeld, dass in der j-ten Komponente die j-te partielle Abteilung enthält.

Der Nabla-Operator

Definition

Der Nabla-Operator $\vec{\nabla}$ ist definiert als

$$\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des Nabla-Operators lässt sich der Gradient auch wie folgt schreiben:

$$\operatorname{grad} \varphi = \vec{\nabla} \varphi$$

Der Nabla-Operator

- $\vec{\nabla}$ ist ein Operator, die auf eine Größe, wie zum Bespiel eine Funktion, die abgeleitet werden kann, wirkt. Mann sollte diese Größe daher immer mitangeben.

- Mathematische Beziehungen, in den die Größe auf die ein Operator wirkt fehlt, machen nur Sinn, wenn sie für alle möglichen Größen des Problems (wie zum Bespiel für alle Testfunktionen) gelten.

Der Nabla-Operator

Beispiel

Wir betrachten die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$$

$$\varphi(\overrightarrow{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$$

Wir erhalten für den Gradienten

$$\operatorname{grad} \varphi(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{\nabla}\, \varphi(\overrightarrow{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(x_1^2)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(x_2^2)}{\partial x_2} \\ \frac{\partial(x_3^2)}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$

Minima und Maxima

- Wir hatten bereits gesehen, dass eine notwendige Bedingung für das Vorliegen eines lokalen Maximums bzw. eines lokales Minimums im Punkte $\overrightarrow{x_0}$ das Verschwinden aller Partiellen Ableitungen in diesem Punkt ist.

- Das Verschwinden aller partiellen Ableitungen ist gleichbedeutend mit der Aussage

$$\overrightarrow{\nabla}\varphi(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{0} \ ,$$

d.h. der Gradient ist verschwindet.

Quiz

$$\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \qquad\qquad \varphi(\overrightarrow{x}) = x_1 x_2$$

$$\overrightarrow{\nabla} \varphi(\overrightarrow{x}) = x_1 x_2 = \textbf{?}$$

(A) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **(B)** $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ **(D)** $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$

Die Divergenz

Definition

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $\vec{f}: U \to \mathbb{R}^n$ eine partiell differenzierbares Vektorfeld. Wir definieren die Divergenz dieses Vektorfeldes als eine skalare Funktion der n Variablen

$$\operatorname{div} \vec{f}(\vec{x}) : U \to \mathbb{R} \qquad \text{die durch} \qquad \operatorname{div} \vec{f}(\vec{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j(\vec{x})}{\partial x_j}$$

gegeben ist. Mit Hilfe des Nabla-Operators schreibt man auch oft

$$\operatorname{div} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\vec{x}) \,.$$

Die Divergenz

Beispiel

Wir betrachten das Vecktorfeld

$$\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \qquad \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_2 \\ 3x_2 - x_1 \\ 5x_3 + 7x_2 \end{pmatrix}$$

Wir erhalten für die Divergenz

$$\operatorname{div} \vec{f}(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\vec{x}) = \frac{\partial(x_1^2 + x_2)}{\partial x_1} + \frac{\partial(3x_2 - x_1)}{\partial x_2} + \frac{\partial(5x_3 + 7x_2)}{\partial x_3} = 2x_1 + 3 + 5.$$

Die Divergenz

Beispiel

Es ist auch interessant die Divergenz der drei eingangs gezeigten Vektorfelder zu berechnen. Man findet:

$$\operatorname{div} \overrightarrow{f_1}(\overrightarrow{x_1}) = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{f_1}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_1} 1 + \frac{\partial}{\partial x_2} \sin(x_1) = 0$$

$$\operatorname{div} \overrightarrow{f_2}(\overrightarrow{x_1}) = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{f_2}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial}{\partial x_2} x_2 = 2$$

$$\operatorname{div} \overrightarrow{f_3}(\overrightarrow{x_1}) = \overrightarrow{\nabla} \cdot \overrightarrow{f_3}(\vec{x}) = \frac{\partial}{\partial x_1}(-x_2) + \frac{\partial}{\partial x_2} x_1 = 0$$

Die Divergenz

Beispiel (Fortsetzung)

Von diesen drei Beispielen hat nur $\overrightarrow{f_2}$ eine nicht-verschwindende Divergenz.

Die Divergenz beschreibt die Quellen und Senken eines Vektorfeldes.

Quiz

$$\vec{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \qquad \vec{f}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ 3x_1 x_2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\vec{x}) = ?$$

(A) 4

(B) $3x_1 + x^2$

(C) $x_1 + 3x_2$

(D) $4x_1 x_2$

Der Laplace-Operator

Wir betrachten noch die folgende Kombination von Gradient und Divergenz:

Sei $U \subset \mathbb{R}^n$ eine offene Menge und $\varphi : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion von n Variablen.

Wir wenden erst den Gradienten auf φ an, und dann die Divergenz auf das resultierende Vektorfeld. Wir erhalten somit wieder eine skalare Funktion:

Definition

$$\Delta\, \varphi : U \to \mathbb{R}\,, \qquad \Delta\, \varphi(\overrightarrow{x}) = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi(\overrightarrow{x}) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi(\overrightarrow{X})}{\partial x_j^2}$$

Der Laplace-Operator

Mit Hilfe des Nabla-Operators können wir wieder schreiben:

$$\Delta\, \varphi(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}\, \varphi(\vec{x})$$

Wir bezeichnen mit

Definition

$$\Delta\, \varphi : U \to \mathbb{R}\,,$$

$$\Delta = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

den Laplace-Operator.

Der Laplace-Operator

Beispiel

Wir betrachten die Funktion

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}\,, \qquad\qquad \varphi(\overrightarrow{x}) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\,.$$

Wir hatten bereits den Gradienten berechnet:

$$\overrightarrow{\nabla}\varphi(\overrightarrow{x}) = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix}$$

Der Laplace-Operator

Beispiel

Die Anwendung des Laplace-Operators ergibt

$$\Delta\,\varphi(\vec{x}) = \vec{\nabla} \cdot \begin{pmatrix} 2x_1 \\ 2x_2 \\ 2x_3 \end{pmatrix} = \frac{\partial(2x_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(2x_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(2x_3)}{\partial x_3} = 2 + 2 + 2 = 6$$

Vektorfelder in drei Dimensionen

Wir betrachten noch den Spezialfall von Vektorfeldern in drei Dimensionen:

$$\overrightarrow{A} \;:\; \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,.$$

Die Rotation

Definition

Hier können wir noch eine weitere Operation einführen, die man Rotation bezeichnet und wie folgt definiert ist:

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{A} \ : \ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,$$

$$\operatorname{rot} \overrightarrow{A}(\overrightarrow{x}) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial A_3(\overrightarrow{x})}{\partial x_2} - \dfrac{\partial A_2(\overrightarrow{x})}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial A_1(\overrightarrow{x})}{\partial x_3} - \dfrac{\partial A_3(\overrightarrow{x})}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial A_2(\overrightarrow{x})}{\partial x_1} - \dfrac{\partial A_1(\overrightarrow{x})}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

Die Rotation

Mit Hilfe des Nabla-Operators und des Kreuzproduktes lässt sich dies auch schreiben als

$$\mathrm{rot}\,\overrightarrow{A}(\overrightarrow{x}) \;=\; \overrightarrow{\nabla} \times \overrightarrow{A}(\overrightarrow{x})\,.$$

Die Rotation

Beispiel

Sei

$$\vec{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \vec{A}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$\operatorname{rot} \vec{A}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial A_3(\vec{x})}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2(\vec{x})}{\partial x_3} \\ \frac{\partial A_1(\vec{x})}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3(\vec{x})}{\partial x_1} \\ \frac{\partial A_2(\vec{x})}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1(\vec{x})}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial(0)}{\partial x_2} - \frac{\partial(x_1)}{\partial x_3} \\ \frac{\partial(-x_2)}{\partial x_3} - \frac{\partial(0)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(x_1)}{\partial x_1} - \frac{\partial(-x_2)}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 - 0 \\ 0 - 0 \\ 1 - (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Die Rotation

Beispiel

Kehren wir nocheinmal zu den eingangs diskutierten Vektorfeldern zurück.

Diese Vektorfelder sind Abbildungen von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}^2$, daher ist die Operation der Rotation nicht unmittelbar darauf anwendbar.

Wir können aber trotzdem für ein Vektorfeld $\vec{f} = (f_1, f_2)$ die anti-symmetrische Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} f_1$$

betrachten.

Die Rotation

Beispiel

Wir finden:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_{12} - \frac{\partial}{\partial x_2} f_{11} = \frac{\partial}{\partial x_1} \sin(x_1) - \frac{\partial}{\partial x_2} 1 = \cos(x_1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_{22} - \frac{\partial}{\partial x_2} f_{21} = \frac{\partial}{\partial x_1} x_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} x_1 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} f_{32} - \frac{\partial}{\partial x_2} f_{31} = \frac{\partial}{\partial x_1} x_1 - \frac{\partial}{\partial x_2} (-x_2) = 2$$

Die Rotation beschreibt die Wirbel eines Vektorfeldes.

Rotation eines Gradientenfeldes

Satz

Sei $U \to \mathbb{R}^3$ eine offene Menge und $\varphi : U \to \mathbb{R}$ eine zweimal stetig partiell differenzierbare Funktion. Dann

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \overrightarrow{0}\,, \qquad \overrightarrow{\nabla} \times (\overrightarrow{\nabla}\varphi) = \overrightarrow{0}\,.$$

Beweis

Wir betrachten die erste Komponente von $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi$:

$$\frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial}{\partial x_3}\varphi - \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial}{\partial x_2}\varphi = 0$$

Ein Gradientenfeld ist also rotationsfrei.

Divergenz eines Rotationsfeldes

Satz

Sei $U \to \mathbb{R}^3$ eine offene Menge und $\vec{f} : U \to \mathbb{R}^3$ eine zweimal stetig partiell differenzierbares Vektorfeld. Dann

$$\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{f} = 0\,, \qquad \vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{f}) = 0\,.$$

Divergenz eines Rotationsfeldes

Beweis

$$
\begin{aligned}
&\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{f}) \\
&= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial}{\partial x_2} f_3 - \frac{\partial}{\partial x_3} f_2\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial}{\partial x_3} f_1 - \frac{\partial}{\partial x_1} f_3\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} f_2 - \frac{\partial}{\partial x_2} f_1\right) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Ein Rotationsfeld ist also divergenzfrei.

Viel Erfolg in Ihrem Studium!