DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Mathematische Brückenkurs

Dr. Joseph Rudzinski

Abteilung Theorie der Polymere, Max-Planck-Institut für Polymer Forschung

Wintersemester 2021/22

Einführung

Es sei $f(x)$ eine unbekannte Funktion der Variablen x.
Nehmen wir weiter an, es sei bekannt, dass $f(x)$ die Gleichung

$$f(x)^2 - x \cdot f(x) - 1 = 0$$

erfüllt.

Dies ist eine algebraische Gleichung für $f(x)$.
Durch Auflösung nach $f(x)$ finden wir

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(x \pm \sqrt{x^2 + 4}\right)$$

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Einführung

In den Naturwissenschaft tritt oft der Fall auf, dass wir eine Gleichung bestimmen können, die die unbekannte Funktion $f(x)$ und deren Ableitung $f'(x)$ enthält.

Beispiel

$$f'(x) - x \cdot f(x) = 0$$

Eine solche Gleichung nennt man eine Differentialgleicung.

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Einführung

- Die Theorie der Differentialgleichungen geht weit über den Inhalt des mathematischen Brückenkurses hinaus.
- In den Naturwissenschaften treten einige wenige Differentialgleichungen relativ oft auf.
- In dieser Vorlesung: Einstieg in die Differentialgleichungen mittels wichtiger Beispiele und elementarer Lösungsmethoden.

Klassifizierung

- Tritt nur die Ableitung nach einer Variablen auf, spricht man von einer gewöhnlichen Differentialgleichung.

- Hängt dagegen die gesuchte Funktion von mehreren Variablen ab, und treten Ableitungen nach verschiedenen Variablen auf, so spricht man von einer partialen Differentialgleichung.

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

Gewöhnliche Differentialgleichungen

- Tritt neben der unbekannten Funktion f nur die erste Abteilung f' auf, so spricht man von einer Differentialgleichung erster Ordnung.

- Ist die höchste auftretende Ableitung $f^{(n)}$, so spricht man von einer Differentialgleichung n-ter Ordnung.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Definition

Sei D eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ und

$$G : D \to \mathbb{R}\,,$$
$$(x, y) \to G(x, y)$$

eine stetige Funktion. Dann nennt man

$$y' = G(x, y)$$

eine Differentialgleichung erster Ordnung.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Unter einer Lösung versteht man eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert differenzierbare Funktion

$$f \; : \; I \to \mathbb{R} \, ,$$

mit folgenden Eigenschaften:

- Der Graph von f ist in D enthalten, d.h.

$$\Gamma_f = \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} : y = f(x)\} \subset D$$

- Es gilt

$$f'(x) = G(x, f(x))$$

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Beispiel

$G(x, y) = -\lambda y$ führt auf die Differentialgleichung

$$f'(x) = -\lambda f(x)$$

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Definition

Sei D eine Teilmenge von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ und

$$G \ : \ D \to \mathbb{R}\,,$$

$$(x, \overrightarrow{y}) \to G(x, \overrightarrow{y})$$

eine stetige Funktion. Dann nennt man

$$y^{(n)} = G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

eine Differentialgleichung n-ter Ordnung.

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Unter einer Lösung versteht man eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ definiert differenzierbare Funktion

$$f \ : \ I \to \mathbb{R} \, ,$$

mit folgenden Eigenschaften:

- Die Menge $\{(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \in I \times \mathbb{R}^n : y_j = f^{(j)}(x), 0 \leq j < 0\}$ ist in D enthalten .
- Es gilt

$$f^{(n)}(x) = G(x, f(x), f'(x), \ldots, f^{(n-1)}(x))$$

Gewöhnliche Differentialgleichungen

Beispiel

$G(x, y_0, y_1) = -\omega^2 y_0$ führt auf die Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$f''(x) = -\omega^2 f(x)$$

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

- Die Sätze über die Existenz und die Eindeutigkeit von Lösungen einer Differentialgleichung setzen voraus, dass die Funktion G lokal eine Lipschitz-Bedingung erfühlt.

Lipschitz-Bedingung

Definition

Sei D eine Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ und

$$G \ : \ D \to \mathbb{R}\,,$$
$$(x, y) \to G(x, y)$$

Eine Funktion. Man sagt, G genügt in D einer Lipschitz-Bedingung mit der Lipschitz-Konstanten $L \geq 0$, falls für alle $(x, y), (x, z) \in D$ gilt

$$|\, G(x, y) - G(x, z) \,| \leq L \,|\, y - z \,|$$

Eindeutigkeit von Lösungen

Satz

Wir setzen voraus, dass die Funktion G in D lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Seien $f(x)$ und $g(x)$ zwei Lösungen der Differentialgleichung

$$y^{(n)} = G(x, \overrightarrow{y})$$

über einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Gilt dann

$$f^{(j)}(x_0) = g^{(j)}(x_0) \quad \forall 0 \leq j < n$$

für ein $x_0 \in I$, so folgt

$$f(x) = g(x) \quad \forall x \in I.$$

Existenz von Lösungen

Satz (Picard-Lindelöf)

Sei D offen und $G : D \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die lokal einer Lipschitz-Bedingung genügt. Dann gibt es zu jedem $\left(x_0, \tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_{(n-1)}\right) \in D$ ein $\epsilon > 0$ und eine Lösung

$$f \; : \; [x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon] \to \mathbb{R}$$

der Differentialgleichung $y^{(n)} = G(x, \overrightarrow{y})$ mit der Anfangsbedingung

$$f^{(j)}(x_0) = \tilde{y}_j \quad 0 \leq j < n \, .$$

Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen

Zusammenfassung

Die Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung n-ter Ordnung wird eindeutig durch n Anfangsbedingungen

$$f(x_0), f'(x_0), \ \ldots, f^{(n-1)}(x_0)$$

bestimmt.

Exponentielles Wachstum / Exponentieller Zerfall

Beispiel

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$f'(x) = -\lambda f(x)$$

Gesucht ist eine Lösung zur Anfangsbedingung

$$f(0) = C\,.$$

Exponentielles Wachstum / Exponentieller Zerfall

Wir betrachten die Funktion

$$f(x) = Ce^{-\lambda x}$$

Es ist

$$f'(x) = -\lambda C e^{-\lambda x} = -\lambda f(x)$$

Für die Anfangsbedingung gilt

$$f(0) = C\,.$$

Quiz

Eine Lösung der Differentialgleichung

$$f'(x) = 2f(x)$$

zur Anfangsbedingung $f(0) = 2$ ist

(A) $f(x) = 2e^x$

(B) $f(x) = e^{2x}$

(C) $f(x) = 2e^{2x}$

(D) $f(x) = 2e^{-2x}$

Exponentielles Wachstum

Beispiel

Annahme: Eine mit einem Virus infizierte Person steckt im Mittal pro Tag 1.3 nicht-infizierte Personen an.

Zu Beginn der Zählung seien $10\,000$ Personen infiziert.

Wie viele Personen sind nach 10 Tagen infiziert?

Exponentielles Wachstum

Es sei $f(t)$ die Anzahl der infizierten Personen am Tag t.
Die Anzahl der Neuinfizierten pro Tag ist proportional zur Anzahl der bereits infizierten Personen, daher haben wir die Differentialgleichung

$$f'(t) = \kappa f(t)$$

deren Lösung durch

$$f(t) = Ce^{\kappa t}$$

gegeben ist.

Exponentielles Wachstum

Wir bestimmen die Konstante C aus der Anfangsbedingung

$$f(0) = 10\,000 \Rightarrow C = 10\,000$$

Wir bestimmen die Konstante κ aus der Veränderung pro Tag:

Nach einem Tag haben wir $23\,000$ Infizierte
($13\,000$ nue Infizierte plus $10\,000$ bereits Infizierte):

$$f(1) = 23\,000 \Rightarrow 10\,000\, e^{\kappa} = 23\,000 \Rightarrow \kappa = \ln(2.3)$$

Somit $$f(t) = 10\,000 \cdot \exp(t \ln 2.3) = 10\,000 \cdot \exp(\ln 2.3^{t}) = 10\,000 \cdot (2.3)^{t}$$

$$f(10) \approx 41 \cdot 10^{6}$$

Exponentielles Wachstum

Bemerkungen:

- Wir haben angenommen, dass eine infizierte Person ansteckend bleibt.

- Wir haben Sättigungseffekte vernachlässigt: Sind alle Personen infiziert, können keine neuen Personen mehr infiziert werden.

Der harmonische Oszillator

Beispiel

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$f''(t) = -\,\omega^2 f(t)$$

Gesucht ist eine Lösung zu den Anfangsbedingungen

$$f(0) = x_0\,, \quad f'(0) = v_0\,.$$

Der harmonische Oszillator

Wir betrachten die Funktion

$$f(t) = A_1 \sin(\omega t) + A_2 \cos(\omega t)$$

Es ist

$$f'(t) = \omega A_1 \cos(\omega t) - \omega A_2 \sin(\omega t)$$

$$f''(t) = -\omega^2 A_1 \sin(\omega t) - \omega^2 A_2 \cos(\omega t) = -\omega^2 f(t)$$

Für die Anfangsbedingung gilt

$$x_0 = f(0) = A_1 \sin(0) + A_2 \cos(0) = A_2$$

$$v_0 = f'(0) = \omega A_1 \cos(0) - \omega A_2 \sin(0) = \omega A_1$$

Der harmonische Oszillator

Somit lautet die Lösung

$$f(t) = x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)$$

Der harmonische Oszillator

Wir können auch die Funktion

$$f(t) = c_1 e^{i\omega t} + c_2 e^{-i\omega t}$$

betrachten. Es ist

$$f'(t) = i\omega c_1 e^{i\omega t} - i\omega c_2 e^{-i\omega t}$$

$$f''(t) = -\omega^2 c_1 e^{i\omega t} - \omega^2 c_2 e^{-i\omega t} = -\omega^2 f(t)$$

Aufgrund von

$$\cos(\omega t) = \frac{1}{2}\left(e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}\right), \quad \sin(\omega t) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}\right)$$

ist dies äquivalent zur vorherigen Lösung.

Der harmonische Oszillator

Beispiel

Für ein Federpendel ist die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung:

$$F = -Dx\,,$$

wobei D die Federkonstante angibt.

$$F = ma\,,$$

wobei a die Beschleunigung angibt. Die beschleunigung ist die zweite Ableitung des Ortes nach der Zeit.

Der harmonische Oszillator

Für die Auslenkung $x(t)$ erhalten wir die Differentialgleichung

$$x''(t) = -\frac{D}{m}x(t)\,.$$

Dies ist die Differentialgleichung eine harmonischen Oszillatores mit der Lösung

$$x(t) = x_0\cos(\omega t) + \frac{v_0}{\omega}\sin(\omega t)\,, \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

Quiz

Eine Lösung der Differentialgleichung

$$f'(x) = \omega^2 f(x)$$

zu den Anfangsbedingungen $f(0) = 2,\ f'(0) = 0$ ist

(A) $f(x) = 2\cos(\omega x)$

(B) $f(x) = 2\cos(\omega x) + \dfrac{2}{\omega}\sin(\omega x)$

(C) $f(x) = \cos(2\omega x)$

(D) $f(x) = 2\cosh(\omega x)$

$$\frac{\mathrm{d}\cosh(x)}{\mathrm{d}x} = \sinh(x)$$

Elementare Lösungsmethode

Wir betrachten eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung:

$$y' = G(x, y)\,.$$

Elementare Lösungsmethode

Hängt die Funktion G nur von x, aber nicht von y ab, so hat man

$$f'(x) = G(x)\,,$$

Und man erhält eine Lösung durch Integration:

$$f(x) = c + \int_{x_0}^{x} G(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Differentialgleichungen mit separierten Variablen

Als nächstes betrachten wir den Fall, dass die Funktion G factorisiert:

$$G(x, y) = h(x)\, k(y)\,,$$

In diesem Fall spricht man von einer Differentialgleichung mit separarierten Variablen.

Differentialgleichungen mit separierten Variablen

Wir wollen annehmen, dass

$$h : I \to \mathbb{R}\,, \quad k : J \to \mathbb{R}$$

stetige Funktionen auf offenen Intervallen $I, J \subset \mathbb{R}$ sind.

Weiter sei $k(y) \neq 0$ für alle $y \in J$. Sei nun $(x_0, y_0) \in I \times J$. Wir setzen

$$H(x) = \int_{x_0}^{x} h(t)\,\mathrm{d}t\,, \quad K(y) = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{k(t)}\,\mathrm{d}t$$

Differentialgleichungen mit separierten Variablen

Es sei $I' \subset I$ ein Intervall mit $x_0 \in I'$ und $H(I') \subset K(J)$. Dann existiert genau eine Lösung $f : I' \subset \mathbb{R}$ mit

$$f(x_0) = y_0 \,.$$

Diese Lösung erfüllt die Beziehung

$$K(f(x)) = H(x) \,.$$

Differentialgleichungen mit separierten Variablen

Beispiel

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = 2xe^{-y}$$

und suchen eine Lösung zu der Anfangsbedingungen $f(0) = c$. Die Variablen sind klarerweise getrennt. Für dieses Beispiel können wir

$$h(x) = 2x\,, \quad k(y) = e^{-y}$$

setzen.

Differentialgleichungen mit separierten Variablen

Wir erhalten

$$H(x) = 2\int_0^x t\,\mathrm{d}t = x^2\,,$$

$$K(y) = \int_c^y \frac{1}{e^{-t}}\,\mathrm{d}t = e^y - e^c\,.$$

Somit

$$e^{f(x)} - e^c = x^2\,.$$

Umgeformt ergibt sich

$$f(x) = \ln\left(e^c + x^2\right)\,.$$

Differentialgleichungen mit separierten Variablen

Beispiel

Als zweites Beispiel betrachten wir die Differentialgleichung

$$y' = y^2 \,.$$

Gesucht ist eine Lösung zu der Anfangsbedingungen $y(0) = 1.$

Differentialgleichungen mit separierten Variablen

Wir haben $$\frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \mathrm{d}x\,,$$

und somit liefert die Integration $$-\frac{1}{y} = x + c\,.$$

Durch Auflösen nach y erhält man $$y = -\,\frac{1}{x+c}\,.$$

Die Anfangsbedingungen $y(0) = 1$ liefert $c = -\,1$,
somit lautet die Lösung
$$y = \frac{1}{1-x}\,.$$

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN

DIFFERENTIALGLEICHUNGEN