VEKTOREN

Mathematische Brückenkurs

Dr. Joseph Rudzinski

Abteilung Theorie der Polymere, Max-Planck-Institut für Polymer Forschung

Wintersemester 2021/22

VEKTOREN

Aus der Schulmathematik sind die Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ bekannt. Vektoren aus dem $\mathbb{R}^2$ können durch zwei reelle Zahlen x und y beschreiben werden

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Vektoren aus dem $\mathbb{R}^3$ können durch drei reelle Zahlen $x, y,$ und z

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

VEKTOREN

Wir können das Konzept in zwei Richtungen erweitern:

- Wir lassen anderen Dimensionen zu und beschränken uns nicht mehr auf Vektorräume der Dimension 2 und 3.
  Bespiel: $\mathbb{R}^n$

- Wir lassen andere Grundkörper zu, z.B. die komplexen Zahlen, $\mathbb{C}$.
  Bespiel: $\mathbb{C}^n$

Vektorräume

Sei K ein Körper und $(V, +)$ eine kommutative Gruppe. Weiter sei zusätzliche Verknüpfung gegeben, die man skalare Multiplikation nennt:

$$K \times V \to V$$

$$(k, \overrightarrow{v}) \to k \cdot \overrightarrow{v}$$

Vektorräume

Definition eines Vektorraumes

V ist ein K-Vektorraum falls gilt:

- **(V1)** $(K, +, \cdot)$ ist ein Körper.
- **(V2)** $(V, +)$ ist ein kommutative Gruppe.
- **(V3)** Es gelten die Distributivgesetze:

$$k \cdot (\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = (k \cdot \overrightarrow{v_1}) + (k \cdot \overrightarrow{v_2})$$

$$(k_1 + k_2) \cdot \overrightarrow{v} = (k_1 \cdot \overrightarrow{v}) + (k_2 \cdot \overrightarrow{v})$$

(Fortsetzung nächste Folie)

Vektorräume

Definition eines Vektorraumes (Fortsetzung)

- (V4) Es gilt das Assoziativgesetz:

$$k_1 \cdot (k_2 \cdot \overrightarrow{v}) = (k_1 \cdot k_2) \cdot \overrightarrow{v}$$

- (V5) Für die Eins gilt:

$$1 \cdot \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$$

Bemerkung: Bei $(k_1 \cdot k_2)$ ist die Multiplikation im Körper gemeint.

Vektorräume

Als Grundkörper treten in den Naturwissenschaften fast immer $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ auf. Beispiele für Vektorräume sind der $\mathbb{R}^n$ (mit Grundkörper $\mathbb{R}$) und $\mathbb{C}^n$ (mit Grundkörper $\mathbb{C}$).

$$\mathbb{R}^n = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R} \right\} \qquad \mathbb{C}^n = \left\{ \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \mid z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C} \right\}$$

Dualer Vektorraum

Man schreibt die Elemente aus dem Vektorraum als Spaltenvektoren, so zum Beispiel:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Ebenso ist die Schreibweise als Zeilenvektor gebräuchlich:

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^{3*}$$

V^* bezeichnet den zu V dualen Vektorraum (falls V alle Spaltenvektoren enthält, so enthält V^* die Zeilenvektoren).

Transposition

Man bezeichnet mit $\vec{v}^\top$ den zu $\vec{v}$ transponierten Vektor (d.h. aus einem Spaltenvektor wird ein Zeilenvektor, und aus einem Zeilenvektor wird ein Spaltenvektor):

$$(x_1, x_2, \ \ldots, x_n)^\top = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Addition und skalier Multiplikation

Bei der Summe zweier Vektoren werden die Vektoren komponentenweise addiert:

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\\7\\9\end{pmatrix}.$$

Bei der skalare Multiplikation wird jede Komponente mit dem Skalar multipliziert:

$$3\cdot\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}12\\15\\18\end{pmatrix}.$$

Quiz

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$2\overrightarrow{v_1} + 3\overrightarrow{v_2} = \textbf{?}$$

(A) $\begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}$ **(B)** $\begin{pmatrix} 6 \\ 8 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 9 \\ 6 \end{pmatrix}$ **(D)** $\begin{pmatrix} 9 \\ 13 \end{pmatrix}$

Quiz

$$\vec{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 2i \\ 2i \end{pmatrix}, \qquad\qquad i\vec{v_1} - \frac{1}{2}\vec{v_2} = ?$$

(A) $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **(B)** $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1+i \\ 1+i \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 2i \\ 2i \end{pmatrix}$ **(D)** $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Einheitsvektoren

Definition

Vektoren, die in fast allen Komponenten eine Null haben, bis auf eine Komponente, in der sie eine Eins haben, spielen einewichtige Rolle. Hat so ein Vektor in der i-ten Komponente eine Eins

$$\vec{e_i} = \left(\underbrace{0, 0, \ldots, 0}_{i-1}, 1, 0, \ldots, 0 \right)^\top$$

so bezeichnet man diesen Vektor als den i-ten Einheitsvektor.

Lineare Unabhängigkeit

Definition

Seien n Vektoren $\vec{v_1}, \vec{v_2}, \ldots, \vec{v_n}$ gegeben. Folgt aus

$$a_1\vec{v_1} + a_2\vec{v_2} + \cdots + a_n\vec{v_n} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$$

so nennt man die Vektoren linear unabhängig. Anderfalls nennt man sie linear abhängig.

Basis und Dimension

Definition

Sei V ein Vektorraum. Die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren in V nennt man die Dimension des Vektorraumes.

Eine Menge linearer unabhängiger Vektoren, die maximal ist, nennt man eine Basis von V.

Beispiel

$\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ haben die Dimension n. Eine Basis von $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ ist z.B.

$$\{\vec{e_1}, \vec{e_2}, \ldots, \vec{e_n}\}$$

Man nennt diese Basis die Standardbasis.

Standardbasis

Beispiel

Standardbasis des $\mathbb{R}^4$:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Quiz

Die Standardbasis des $\mathbb{C}^2$ ist

(A) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(B) $\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right\}$

(C) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix} \right\}$

(D) $\left\{ \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -i \end{pmatrix} \right\}$

Das euklidische Standardskalarprodukt

Wir betrachten zunächst den $\mathbb{R}^n$. Seien $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$. Die Komponentendarstellung der beiden Vektoren bezüglich der Standardbasis sei:

$$\overrightarrow{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Wir definieren das euklidische Standardskalarprodukt zwischen zwei Vektoren als die Abbildung

$$V \times V \to \mathbb{R}, \quad \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

Euklidische Skalarprodukte

Definition

Ein euklidische Skalarprodukt eines reellen Vektorraumes ist eine positiv definit symmetrische Bilinearform $V \times V \to \mathbb{R}$:

- Linear in der ersten Komponente: $(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = (\vec{x} \cdot \vec{z}) + (\vec{y} \cdot \vec{z})$
- Linear in der zweiten Komponente: $\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{y}) + (\vec{x} \cdot \vec{z})$
- Symmetrisch: $\vec{x} \cdot \vec{y} = \vec{y} \cdot \vec{x}$
- Positiv definit: $\vec{x} \cdot \vec{x} > 0,$ falls $\vec{x} \neq 0$

Euklidische Skalarprodukte

- Ein reeller Vektorraum mit einem euklidischen Skalarprodukt bezeichnet man als einen euklidischen Vektorraum.

- Die Bezeichnung "euklidisch" bezieht sich inbesondere auf Forderung nach positiver Definitheit.

- In der Physik treten auch Skalarprodukte auf, bei denen die Forderung nach positiv Definitheit aufgegeben wird.
  Ein Beispiel hierfür ist das Skalarprodukt in Minkowskiraum.

Euklidische Skalarprodukte

Beispiel

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = 1\cdot 4 + 2\cdot 5 + 3\cdot 6 = 4 + 10 + 18 = 32$$

Quiz

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{pmatrix} = \ ?$$

(A) 1

(B) 2

(C) 32

(D) 42

Das unitäre Standardskalarprodukt

Wir betrachten nun $\mathbb{C}^n$.

Seien $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{C}$.

In diesem Fall definieren wir das unitäre Standardskalarprodukt als

$$V \times V \to \mathbb{C}\,,$$

$$\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y} = x_1^* y_1 + x_2^* y_2 + \cdots + x_n^* y_n$$

Unitäre Skalarprodukte

Definition

Ein unitäre Skalarprodukt eines komplexen Vektorraumes ist eine positiv definit Hermitische Form $V \times V \to \mathbb{C}$:

- Semilinear in der ersten Komponente:

$$(\vec{x} + \vec{y}) \cdot \vec{z} = (\vec{x} \cdot \vec{z}) + (\vec{y} \cdot \vec{z}), \qquad (\lambda \cdot \vec{x}) \cdot \vec{y} = \lambda^* \cdot (\vec{x} \cdot \vec{y})$$

- Linear in der zweiten Komponente:

$$\vec{x} \cdot (\vec{y} + \vec{z}) = (\vec{x} \cdot \vec{y}) + (\vec{x} \cdot \vec{z}), \qquad \vec{x} \cdot (\lambda \cdot \vec{y}) = \lambda \cdot (\vec{x} \cdot \vec{y})$$

- Hermitisch: $\vec{x} \cdot \vec{y} = (\vec{y} \cdot \vec{x})^*$
- Positiv definit: $\vec{x} \cdot \vec{x} > 0,$ falls $\vec{x} \neq 0$

Unitäre Skalarprodukte

Beispiel

$$\begin{pmatrix} i \\ 2 \\ 3i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4i \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} = i^* \cdot (4i) + 2^* \cdot 5 + (3i)^* \cdot 6$$

$$= (-i) \cdot (4i) + 2 \cdot 5 + (-3i) \cdot 6$$

$$= 4 + 10 - 18i = 14 - 18i$$

VEKTOREN

Quiz

$$\begin{pmatrix} 1+i \\ i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1+i \\ i \end{pmatrix} = \ ?$$

(A) $1+3i$

(B) 2

(C) 3

(D) $-1+2i$

Betrag eines Vektors

Definition

Man bezeichnet mit

$$|\vec{x}| = \sqrt{\vec{x} \cdot \vec{x}}$$

die Länge oder den Betrag von $\vec{x}$.

Winkel zweier Vektoren und Orthoginarität

Sei $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. Der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist gegeben durch

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = |\, x \,|\,|\, y \,| \cos \varphi$$

also

$$\varphi = \arccos \frac{\vec{x} \cdot \vec{y}}{|\, \vec{x} \,|\,|\, \vec{y} \,|}$$

Zwei Vektoren stehen senkrecht aufeinander $(\varphi = 90^\circ)$, falls

$$\vec{x} \cdot \vec{y} = 0$$

Das Kreuzprodukt

Sei V der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ oder $\mathbb{C}^3$.

In einem dreidimensionalen Vektorraum ist zusätzlich das Kreuzprodukt als eine Abbildung

$$V \times V \to V,$$
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 y_3 - x_3 y_2 \\ x_3 y_1 - x_1 y_3 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

definiert.

Wichtig: Das Kreuzprodukt gibt es nur im drei Dimension!

Das Kreuzprodukt

Beispiel

$$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\cdot 6 - 3\cdot 5\\3\cdot 4 - 1\cdot 6\\1\cdot 5 - 2\cdot 4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\6\\-3\end{pmatrix}$$

Eigenschaften des Kreuzproduktes

- Das Kreuzprodukt ist anti-symmetrisch:

$$\vec{x} \times \vec{y} = -\,\vec{y} \times \vec{x}\,.$$

- Der Vektor $\vec{x} \times \vec{y}$ steht senkrecht auf $\vec{x}$ und $\vec{y}$:

$$\vec{x} \cdot (\vec{x} \times \vec{y}) = 0\,,$$

$$\vec{y} \cdot (\vec{x} \times \vec{y}) = 0\,.$$

- Für den Betrag von $\vec{x} \times \vec{y}$ gilt:

$$|\,\vec{x} \times \vec{y}\,| = |\,\vec{x}\,|\,|\,\vec{y}\,|\sin\varphi\,,$$

wobei φ der Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{y}$ ist.

Antisymmetrischer Tensor

Sei $\vec{z} = \vec{x} \times \vec{y}$. Für die Komponenten von $\vec{z}$ gilt:

$$z_i = \sum_{j=i}^{3} \sum_{k=i}^{3} \epsilon_{ijk} x_j y_k$$

Hier wurde der antisymmetrische Tensor (oder Levi-Civiti-Tensor) ϵ_{ijk} verwendet.

Definition (antisymmetrischer Tensor)

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} +1 & \text{für } (i,j,k) \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,3) \\ -1 & \text{für } (i,j,k) \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,3) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Permutationen

Definition

Eine Permutation $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ nennt man gerade, wenn man sie durch eine gerade Anzahl von paarweise Vertauschungen aus $(1, 2, \ldots, n)$ erzeugen kann. Benötigt man eine ungerade Anzahl von Vertauschungen, so nennt man die Permutation ungerade.

Beispiel

$(3, 2, 1, 5, 4)$ ist eine gerade Permutation (vertausche $1 \leftrightarrow 3$ und $4 \leftrightarrow 5$).

$(1, 5, 3, 4, 2)$ ist eine ungerade Permutation (vertausche $2 \leftrightarrow 5$).

Kronecker-Delta-Symbol

Definition (Kronecker-Delta-Symbol)

$$\delta_{ij} = \begin{cases} +1 & \text{für } i = j \\ 0 & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

Quiz

$$\epsilon_{132} = \ ?$$

(A) -1

(B) 0

(C) 1

(D) 6

Bemerkungen

Unitäre Skalarprodukt: Sei $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{C}^n$. Im Allgemeinen

$$\overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y}$$

Es ist

$$\overrightarrow{y} \cdot \overrightarrow{x} = (\overrightarrow{x} \cdot \overrightarrow{y})^*$$

Kreuzprodukt: Sei $\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \in \mathbb{R}^n$. Im Allgemeinen

$$\overrightarrow{y} \times \overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}$$

Es ist

$$\overrightarrow{y} \times \overrightarrow{x} = -\overrightarrow{x} \times \overrightarrow{y}$$

VEKTOREN

VEKTOREN

VEKTOREN