FEHLERRECHNUNG

Mathematische Brückenkurs

Dr. Joseph Rudzinski

Abteilung Theorie der Polymere, Max-Planck-Institut für Polymer Forschung

Wintersemester 2021/22

FEHLERRECHNUNG

Motivation

Eine Person A mißt eine bestimmte Größe experimentell. Sie führt diese Messung öfters durch. Aufgrund der experimentellen Messungenauigkeit ergeben sich leicht unterschiedliche Werte.

Messung	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Ergebnis	2.6	2.3	2.5	2.3	2.6	2.4	2.2	2.3	2.4	2.5	2.6	2.8	2.7

Wir definieren den Mittelwert einer Messreihe mit n Messpunkten als

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} x_j$$

Für die obige Messreihe ergibt sich $\bar{x} = 2.48$.

FEHLERRECHNUNG

Motivation

Eine Person B bestimmt die gleiche Größe ebenfalls experimentell. Person B verwendet allerdings eine schlectere Messapparatur und Messwerte:

Messung	1	2	3	4
Ergebnis	0.3	5.2	3.1	1.4

Der Mittelwert ergibt sich $\bar{x} = 2.48$.

Motivation

- Im zweiten Fall streuen die einzelnen Messungen wesentlich stärker als im ersten Fall.
- Es ist daher offensichtlich, dass das Ergebnis von Person A vertauenswürdiger als das Ergebnis von Person B ist.
- Wir wollen nun diese Aussage quantitativ machen und suchen ein Mass für die Streuung der Messpunkte.

Stochastik

Definition

Ω : Ergebnismenge eines Zufallsexperiments

Zufallsfunktion : Funktion $X : \Omega \to \mathbb{R}$

Wahrscheinlichketsfunktion einer Zufallsgröße X :

$$W : x \to P(\omega \,|\, X(\omega) = x)$$

Erwartungswert einer Zufallsgröße: Nimmt die Zufallsgröße X die Werte $x_1, x_2, \ldots, x_n$ an, so bezeichnet man mit

$$\mu(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j W(x_j)$$ den Erwartungswert von X.

Stochastik

Satz

Entsprechen die einzelnen Messungen einzelnen unabhängigen Realisierungen eines Zufallsexperiments, so ist der Mittelwert $\bar{x}$ eine Schätzung für $\mu(x)$.

Varianz und Standardabweichung

Definition

Die Varianz einer Zufallsgröße ist definiert durch

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{j=1}^{n} \left(x_j - \mu\right)^2 W(x_j)$$

Definition

Die Standardabweichung einer Zufallsgröße ist definiert durch

$$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}\,.$$

Schätzfunktion für die Varianz

Kennen wir den Erwartungswert μ einer Zufallsgröße und machen n Messungen x_j, so ist

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(x_j-\mu\right)^2$$

eine Schätzfunktion für die Varianz.

Im Allgemein ist μ aber nicht bekannt und man verwendet $\bar{x}$ als Schätzung für μ . In diesem Fall ist

$$S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(x_j-\bar{x}\right)^2$$

eine Schätzfunktion für die Varianz der Zufallsgröße X.

Sätze über die Varianz

Sei $c \in \mathbb{R}$ und seien $X_1, X_2, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsgrößen. Dann gilt

$$\mathrm{Var}(cX) = c^2\,\mathrm{Var}(X)$$

$$\mathrm{Var}(X_1 + X_2 + \cdots + X_n) = \mathrm{Var}(X_1) + \mathrm{Var}(X_2) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n)$$

Insbesondere gilt:

$$\mathrm{Var}\left(\frac{1}{n}\underbrace{(X + X + \cdots + X)}_{n\,\mathrm{mal}}\right) = \frac{1}{n^2}(\mathrm{Var}(X) + \mathrm{Var}(X) + \cdots + \mathrm{Var}(X))$$

$$= \frac{1}{n}\mathrm{Var}(X)$$

Varianz des Mittelwertes

Es interessiert in erster Linie nicht die Varianz der einzelnen Messungen $\mathrm{Var}(X)$, sondern die Varianz des Mittelwertes $\mathrm{Var}(\bar{X})$.
Bei n Messungen gilt:

$$\mathrm{Var}(\bar{X}) = \frac{1}{n}\mathrm{Var}(X)$$

Somit erhält man als Schätzung für die Varianz des Mittelwertes

$$S_{\bar{X}}^2 = \frac{1}{n}S^2 = \frac{1}{n(n-1)}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2 .$$

Für die Standardabweichung erhält man $\sigma_{\bar{X}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x})^2}$.

Beispiel

Somit findet man für die beiden oben aufgeführten Messreihen:

$$\text{Messreihe } 1: \quad \sigma_{\bar{X}} = 0.05\,,$$
$$\text{Messreihe } 2: \quad \sigma_{\bar{X}} = 1.07\,.$$

Es ist üblich mit dem Mittelwert auch immer die Standardabweichung anzugeben, also

$$\text{Messreihe } 1: \quad x = 2.48 \pm 0.05\,,$$
$$\text{Messreihe } 2: \quad x = 2.48 \pm 1.07\,.$$

Die Normalverteilung

Zur Interpretation der Standardabweichung betrachten wir zunächst kontinuierliche Zufallsgrößen. Die Wahrscheinlichkeitsdichte funktion $p(x)$ für eine kontinuierliche Zufallsgöße beschreibt

$$P(a < X \leq b) = \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Definition: Man nennt eine kontinuierliche Zufallsgröße normalverteilt, falls sie die Wahrscheinlichkeitsdichtefunktion

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sigma}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right)$$

besitzt. Der Erwartungswert dieser dieser normalverteilten Zufallsgröße ist μ, die Standardabweichung ist σ.

Die Normalverteilung

Für eine normalverteilte Zufallsgöße gilt:

$$P(\mu - \sigma < X \leq \mu + \sigma) \approx 68.27\,\% \,,$$

$$P(\mu - 2\sigma < X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95.45\,\% \,,$$

$$P(\mu - 3\sigma < X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99.73\,\% \,.$$

Quiz

Ein Experiment misst eine Größe O und berichtet $O = 5.94 \pm 0.02$.

Dies bedeutet:

(A) Der wahre Wert der Observablen O ist 5.94.

(B) Der wahre Wert der Observablen O liegt im Intervall $[5.92{,}5.96]$.

(C) Die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Wert der Observablen O im Intervall $[5.92{,}5.96]$ liegt, beträgt $99.7\,\%$.

(D) Die Wahrscheinlichkeit, dass der wahre Wert der Observablen O im Intervall $[5.92{,}5.96]$ liegt, beträgt $68.3\,\%$, falls der Messwert einer Normalverteilung folgt.

FEHLERRECHNUNG

Problemstellung

Gesucht wird eine Größe $f = f(x, y)$ die von zwei weiteren Größen x und y abhängt.

Die funktion f wird als bekannt vorausgesetzt, die Größen x und y werden durch eine Messung mit Fehlern $x \pm \Delta x$ und $y \pm \Delta y$ bestimmt.

Gesucht ist nun der Fehler für die Größe f.

Fehlerfortpflanzung

Für die Größe f beginnen wir mit der Taylorentwicklung

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) = f(x,y) + \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\Delta y + \cdots$$

Wir nehmen an, dass wir n Messungen für die Größen x und y haben, die einzelnen Messwerte seien mit x_j und y_j bezeichnet. Somit haben wir auch n Ergebnisse für f. Für die Abweichung eines Einzelergebnisses vom Mittelwert gilt für kleine Abweichungen

$$f_j - \bar{f} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (x_j - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (y_j - \bar{y}) + \cdots$$

FEHLERRECHNUNG

Fehlerfortpflanzung

$$f_j - \bar{f} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot (x_j - \bar{x}) + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot (y_j - \bar{y}) + \cdots$$

Somit gilt für die Varianz:

$$\begin{aligned} \sigma_f^2 &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (f_j - \bar{f})^2 \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left[(x_j - \bar{x})^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + (y_j - \bar{y})^2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + 2 \cdot (x_j - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y}) \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} \right] \end{aligned}$$

Kovarianz

Wir definieren die Kovarianz als

$$\mathrm{Cov}(x,y) = \sigma_{xy} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\infty} (x_j - \bar{x}) \cdot (y_j - \bar{y})$$

Somit haben wir

$$\sigma_f^2 \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (f_j - \bar{f})^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 + 2\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\sigma_{xy}^2$$

Unkorrelierte Zufallsgrößen

Falls x und z unkorreliert sind, gilt $\sigma_{xy} = 0$ und somit

$$\sigma_f^2 \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} (f_j - \bar{f})^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2 \,,$$

bzw.

$$\sigma_f \;=\; \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 \sigma_x^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 \sigma_y^2} \,.$$

Beispiel: Addition

$f = x + y$. In diesem Fall haben wir

$$\sigma_f = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}$$

man sagt, die (absoluten) Fehler addieren sich quadratisch.

Beispiel: Addition

Beispiel

$$f = x + y\,, \quad \sigma_f = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}\,.$$

Es sei $x = 15 \pm 3$ und $y = 17 \pm 4$.

$$\bar{f} = \bar{x} + \bar{y} = 15 + 17 = 32\,,$$

$$\sigma_f = \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5\,.$$

Somit

$$f = 32 \pm 5\,.$$

Beispiel: Multiplikation

$f = x \cdot y$. In diesem Fall findet man

$$\sigma_f = \sqrt{y^2\sigma_x^2 + x^2\sigma_y^2}$$

oder anders geschrieben

$$\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$$

Bei einem Produkt addieren sich die relativen Fehler quadratisch.

Beispiel: Multiplikation

Beispiel

$$f = x \cdot y\,, \quad \frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$$

Es sei $x = 2 \pm 0.06$ und $y = 5 \pm 0.2$. Es ist

$$f = 2 \cdot 5 = 10\,, \qquad \sigma_f = 10 \cdot \sqrt{\left(\frac{6}{200}\right)^2 + \left(\frac{2}{50}\right)^2} = \frac{10}{\sqrt{400}} = \frac{1}{2}\,.$$

Somit

$$f = 10 \pm 0.5\,.$$

FEHLERRECHNUNG

Beispiel: Subtraktion

$f = x - y$. Hier findet man wie bei einer Summe

$$\sigma_f \;=\; \sqrt{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}\;.$$

Quiz

Es sei $x = 17 \pm 4$ und $y = 15 \pm 3$, sowie

$$f = x - y\,.$$

(A) $f = 2 \pm 1$

(B) $f = 2 \pm \sqrt{7}$

(C) $f = 2 \pm 4$

(D) $f = 2 \pm 5$

FEHLERRECHNUNG

Beispiel: Division

$f = \frac{x}{y}$. In diesem Fall findet man

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{1}{y^2}\sigma_x^2 + \frac{x^2}{y^4}\sigma_y^2}\,.$$

Schreibt man dies mit Hilfe der relativen Fehler erhält man wie beim Produkt

$$\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$$

Beispiel: Division

Beispiel

$$f = \frac{x}{y}, \quad \frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + \left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$$

Es sei $x = 2 \pm 0.06$ und $y = 5 \pm 0.2$. Es ist

$$f = \frac{2}{5} = 0.4\,, \qquad \sigma_f = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{\left(\frac{6}{200}\right)^2 + \left(\frac{2}{50}\right)^2} = \frac{2}{5\sqrt{400}} = \frac{1}{50}\,.$$

Somit

$$f = 0.4 \pm 0.02\,.$$

Beispiel: Potenzen

Zum Abschluss betrachten wir noch $f = x^a y^b$. Man erhält

$$\sigma_f = \sqrt{(ax^{a-1}y^b)^2\sigma_x^2 + (bx^a y^{b-1})^2\sigma_y^2}$$

Auch hier empfiehlt es sich wieder, die Formel in relativen Fehler zu schreiben:

$$\frac{\sigma_f}{f} = \sqrt{a^2\left(\frac{\sigma_x}{x}\right)^2 + b^2\left(\frac{\sigma_y}{y}\right)^2}$$

Anwendungsbeispiel

Wir hatten zuvor den Fall betrachtet, dass eine Größe durch zwei Messreihen experimentell bestimmt wird:

$$\text{Messreihe } 1: \quad x = 2.48 \pm 0.05\,,$$
$$\text{Messreihe } 2: \quad x = 2.48 \pm 1.07\,.$$

Es stellt sich nun die Frage, wie man diese Ergebnisse miteinander kombiniert.

FEHLERRECHNUNG

Kombination und Messungen

Etwas allgemeiner seien für eine Größe x n Messungen x_j mit Fehlern σ_j gegeben.

Dann setzt man

$$x = \frac{\frac{1}{\sigma_1^2}x_1 + \frac{1}{\sigma_2^2}x_2 + \cdots + \frac{1}{\sigma_n^2}x_n}{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \cdots + \frac{1}{\sigma_n^2}}, \qquad \sigma = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} + \cdots + \frac{1}{\sigma_n^2}}},$$

Anwendungsbeispiel

Für das Beispiel hat man

$$x_1 = 2.48\,, \quad \sigma_1 = 0.05\,,$$
$$x_2 = 2.48\,, \quad \sigma_2 = 1.07\,,$$

Man findet somit

$$x = 2.48\,, \quad \sigma_2 = 0.04995\,.$$

Die zweite Messreihe liefert keine wesentlichen Beitrag zur Verbesserung des Fehlers.

FEHLERRECHNUNG

FEHLERRECHNUNG

FEHLERRECHNUNG

FEHLERRECHNUNG

FEHLERRECHNUNG

Beachten Sie die folgenden nütliche Formeln:

$$\bar{x} = \int \mathrm{d}x \, x \, p(x) \qquad \int_a^b \mathrm{d}x \, f(x) = - \int_b^a \mathrm{d}x \, f(x)$$

$$\int_a^b \mathrm{d}x \, f(x) = \int_a^c \mathrm{d}x \, f(x) + \int_c^b \mathrm{d}x \, f(x) \, , \; c \in [a, b]$$

$$\int_0^\infty \mathrm{d}x \; \exp - x^2 = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

$$\rho = \frac{m}{V} \, , \; V = \pi r^2 l \, , d = 2r$$