LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

Mathematische Brückenkurs

Dr. Joseph Rudzinski

Abteilung Theorie der Polymere, Max-Planck-Institut für Polymer Forschung

Wintersemester 2021/22

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

- Lineare Gleichungssysteme treten in den Naturwissenschaften relativ oft auf, viele Problemstellungen lassen sich auf lineare Gleichungssysteme zurückführen.
- Lineare Gleichungssysteme sind systematisch lösbar.
- Der Gauß'sche Eliminationsalgorithmus ist eine systematische Lösungsmethode.

Definition

Unter einem linearen Gleichungssystem versteht man n Gleichungen mit m Unbekannten $x_1, x_2, \ldots, x_m$ der Form

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1\,, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2\,, \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n\,.
\end{aligned}
$$

Die Koeffizienten a_{ij} und b_i sind gegebene reelle oder komplexe Zahlen.

Jede Variable kommt nur linear vor und jeder Summand auf der linken Seite enthält nur eine Variable.

Beispiel

$$
\begin{aligned}
3x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= 36\,, \\
2x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 29\,, \\
x_2 + 4x_3 &= 14\,.
\end{aligned}
$$

Gegenbeispiel

$$
\begin{aligned}
3x_1^5 + 3x_2 + 9x_3 &= 36\,, \\
x_1 + x_1x_2 + 4x_3 &= 14\,, \\
\sin(x_1) + 7x_3 &= 29\,.
\end{aligned}
$$

- $3x_1^5$ ist nicht linear: höhere Potenz in x_1 .
- x_1x_2 ist nicht linear: enthält mehr als eine Variable.
- $\sin(x_1)$ ist keine linear Funktion von x_1 .

Zeilenvertauschungen

Wir betrachten nun einen Algorithmus um ein Gleichungssystem mit n Gleichungen und m Unbekannten systematisch zu vereinfachen und zu lösen.

Wir beginnen mit einer trivialen Beobachtung: Offentsichtlich können Zeilen vertauscht werden, d.h. das Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1\,, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2\,,
\end{aligned}
$$

Ist äquivalent zu dem Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2\,, \\
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1\,.
\end{aligned}
$$

Multiplikation mit Konstanten

Desweiteren sei $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ein m-Tupel, welches die Gleichung

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + \cdots + a_mx_m = b$$

erfüllt. Dann erfüllt es auch die Gleichung

$$(ca_1)x_1 + (ca_2)x_2 + (ca_3)x_3 + \cdots + (ca_m)x_m = cb$$

Umgekehrt gilt, dass für $c \neq 0$ jedes m-Tupel, welches die zweite Gleichung erfüllt, auch die erste Gleichung erfüllt.

Daraus folgt, dass man die linke und rechte Seite einer Gleichung mit einer konstanten Zahl c ungleich Null multiplizieren darf.

Addition von Zeilen

Die dritte elementare Umformung ist die folgende: Man darf eine Zeile durch die Summe dieser Zeile mit einer anderen Zeiele ersetzen, d.h. die Gleichungssysteme

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1\,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2\,, \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} (a_{11} + a_{21})x_1 + (a_{12} + a_{22})x_2 + (a_{13} + a_{23})x_3 + \cdots + (a_{1m} + a_{2m})x_m &= b_1 + b_2\,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2\,, \end{aligned}$$

haben die gleichen Lösung.

Der Gauß'sche Eliminationsalgorithmus

Mit Hilfe dieser drei elementaren Umformungen

- Zeilenvertauschungen
- Multiplikation mit Konstanten
- Addition von Zeilen

lässt sich ein Algorithmus zur systematischen Vereinfachung von linearen Gleichungssystemen angeben.

Strategie

$$
\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1\,, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2\,, \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3m}x_m &= b_3\,, \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n\,.
\end{aligned}
$$

Strategie

$$
\begin{aligned}
1 \cdot x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1\,, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2\,, \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3m}x_m &= b_3\,, \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n\,.
\end{aligned}
$$

Strategie

$$
\begin{aligned}
1 \cdot x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1\,, \\
0 \cdot x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2\,, \\
0 \cdot x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3m}x_m &= b_3\,, \\
&\vdots \\
0 \cdot x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n\,.
\end{aligned}
$$

Strategie

$$
\begin{aligned}
1 \cdot x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1\,, \\
0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2\,, \\
0 \cdot x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3m}x_m &= b_3\,, \\
&\vdots \\
0 \cdot x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n\,.
\end{aligned}
$$

Strategie

$$
\begin{aligned}
1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1 \,, \\
0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2 \,, \\
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3m}x_m &= b_3 \,, \\
&\vdots \\
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n \,.
\end{aligned}
$$

Strategie

$$
\begin{aligned}
1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1\,, \\
0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2\,, \\
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + \cdots + a_{3m}x_m &= b_3\,, \\
&\vdots \\
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n\,.
\end{aligned}
$$

Strategie

$$
\begin{aligned}
1 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1\,,\\
0 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2\,,\\
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 + \cdots + a_{3m}x_m &= b_3\,,\\
&\vdots\\
0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n\,.
\end{aligned}
$$

Der Gauß'sche Eliminationsalgorithmus

1. Setze $i = 1$ (Zeilenindex), $j = 1$ (Spaltenindex).

2. Falls $a_{ij} = 0$ suche $k > i$, so dass $a_{kj} \neq 0$ und vertausche Zeilen i und k.

3. Falls ein solches k aus Schritt 2 nicht gefunden werden kann, setze $j \to j + 1$

4. Falls man in Schritt 3 den Wert $j = m + 1$ erreicht, beende den Algorithmus, andernfalls gehe zurück zu Schritt 2.

(Fortsetzung nächste Folie)

Der Gauß'sche Eliminationsalgorithmus (Fortsetzung)

5. Multipliziere Zeiele i mit $1/a_{ij}$.

6. Für alle Zeilen $k \neq i$ addiere zur Zeile k das $(-a_{kj})$-fache der i-ten Zeile.

7. Setze $i \to i+1$ und $j \to j+1$.

8. Falls man in Schritt 7 den Wert $i = n+1$ oder den Wert $j = m+1$ erreicht, beende den Algorithmus, andernfalls gehe zurück zu Schritt 2.

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

Notation

In der Praxis schreibt man das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1\,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2\,, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n\,. \end{aligned}$$

wie folgt auf:

$$\left.\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nm} & b_n \end{array}\right.$$

Dies ist ausreichend, da alle Umformungen nur auf die Koeffizienten a_{ij} und b_j wirken.

Beispiel

Wir betrachten das obige Beispiel:

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + 9x_3 &= 36\,, \\ 2x_1 + 3x_2 + 7x_3 &= 29\,, \\ x_2 + 4x_3 &= 14\,. \end{aligned}$$

Aufgeschrieben ergibt dies:

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 9 & 36 \\ 2 & 3 & 7 & 29 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \end{array}$$

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

Umformungen

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 9 & 36 \\ 2 & 3 & 7 & 29 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \end{array}$$

Multipliziere mit $\frac{1}{3}$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 12 \\ 2 & 3 & 7 & 29 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \end{array}$$

Addiere das (-2)-facher der $1.$ Zeile

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 14 \end{array}$$

Addiere das (-1)-facher der $2.$ Zeile

Addiere das (-1)-facher der $2.$ Zeile

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

Umformungen (Fortsetzung)

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 9 \end{array}$$

Multipliziere mit $\frac{1}{3}$

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

Addiere das (-2)-facher der $3.$ Zeile

Addiere das (-1)-facher der $3.$ Zeile

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}$$

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

Ergebnis

Der Gauß'sche Eliminationsalgorithmus endete mit

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right.$$

Das lineare Gleichungssystem ist somit äquivalent zu dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 \\ x_2 &= 2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned}$$

Der Rang eines linearen Gleichungssystems

Durch Unbenennung der Variablen $x_1, \ldots, x_m$ (dies ist gleichbeteutend mit Spaltenvertauschungen) lässt sich durch den Gauß'schen Eliminationsalgorithmus die folgende Form erreichen:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1(r+1)} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2(r+1)} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & a_{r(r+1)} & \cdots & a_{rm} & b_r \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{(r+1)} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n
\end{array}\right)$$

Man bezeichnet r als den Rang (engl. "rank").

Lösungen eines linearen Gleichungssystems

Das lineare Gleichungssystem hat keine Lösung, eine enddeutige Lösung oder mehrere Lösungen falls:

- Ist eine der Zahlen $b_{r+1}, \ldots, b_n$ ungleich Null, so hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.
- Ist $r = m$ und $b_{r+1} = \cdots = b_n = 0$, so gibt es eine eindeutige Lösung.
- Ist $r < m$ und $b_{r+1} = \cdots = b_n = 0$, so gibt mehrere Lösungen.

1. Fall: Keine Lösung

- Ist eine der Zahlen $b_{r+1}, \ldots, b_n$ ungleich Null, so hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.
- In diesem Fall ist notwendigerweise $r < n$.

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1(r+1)} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2(r+1)} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & a_{r(r+1)} & \cdots & a_{rm} & b_r \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{(r+1)} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_n
\end{array}\right)$$

2. Fall: Eindeutige Lösung

- Ist $r = m$ und $b_{r+1} = \cdots = b_n = 0$, so gibt es eine eindeutige Lösung.
- Dies beinhaltet auch den Spezialfall $r = n$. Für $r = n$ ist $\{b_{r+1}, \ldots, b_n\} = \emptyset$ und der zweite Fall reduziert sich auf $r = n = m$.

$$
\left(\begin{array}{cccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & b_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & b_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & b_r \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right)
$$

2. Fall: Mehrere Lösungen

- Ist $r < m$ und $b_{r+1} = \cdots = b_n = 0$, so gibt mehrere Lösungen.
- Dies beinhaltet auch den Spezialfall $r = n$. Für $r = n$ ist $\{b_{r+1}, \ldots, b_n\} = \emptyset$ und der dritte Fall reduziert sich auf $r = n$ und $r < m$.

$$\left.\begin{array}{ccccccc|c}
1 & 0 & \cdots & 0 & a_{1(r+1)} & \cdots & a_{1m} & b_1 \\
0 & 1 & \cdots & 0 & a_{2(r+1)} & \cdots & a_{2m} & b_2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & a_{r(r+1)} & \cdots & a_{rm} & b_r \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0
\end{array}\right.$$

Lösungen eines linearen Gleichungssystems

- Ist $r < n$ und $b_{r+1} = \cdots = b_n = 0$, so reduzieren sich die Zeilen $(r+1)$ bis n

$$\left.\begin{array}{ccccccc|c} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right.$$

auf die triviale Gleichung

$$0 = 0\,.$$

Diese Zeilen enthalten keine zusätzliche Information und können auch weggelassen werden.

Quiz

Für ein lineares Gleichungssystem mit vier Variablen x_1, x_2, x_3, x_4 liefert der Gauß'sche Eliminationsalgorithmus:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

(A) Das Gleichungssystem hat keine Lösung.

(B) Das Gleichungssystem hat die eindeutige Lösung $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, x_4 = 0.$

(C) Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, die auf einer Geraden im $\mathbb{R}^4$ liegen: $x_1 = 1 - t, x_2 = 2 - t, x_3 = 3, x_4 = t\,.$

(D) Das Gleichungssystem hat unendlich viele Lösungen, die auf einer Ebene im $\mathbb{R}^4$ liegen: $x_1 = 1 - t_2, x_2 = 2 - t_2, x_3 = 3 + t_1, x_4 = t_2\,.$

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

Lineare Unabhängigkeit von Vektoren

Zur Erinnerung: m Vektoren $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_1}, \ldots, \overrightarrow{v_m}$ nennt man linear unabhängig, falls die Gleichung

$$\lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{0}$$

nur die Lösung $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) = (0, 0, \ldots, 0)$ hat.
Andernfalls nennt man sie linear abhängig.

Ist der zugrundeliegende Vektorraum n-dimensional, so ergibt die obige Gleichung ausgeschrieben in Komponenten n lineare Gleichungen mit m Unbekannten $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$.

Man kann nun mit Hilfe des Gauß'sche Eliminationsalgorithmus feststellen, ob die Vektoren linear abhängig sind.

Beispiel

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{v_3} = \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ -7 \end{pmatrix}.$$

Dies führt zu dem linearen Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 - 4\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 - 7\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

Beispiel (Forsetzung) - Umformungen

$$\begin{array}{rrr|r}1 & 2 & -1 & 0\\ 1 & 3 & -4 & 0\\ 1 & 4 & -7 & 0\end{array}\quad\begin{array}{l}\\ \text{Addiere das } (-1)\text{-facher der } 1. \text{ Zeile}\\ \text{Addiere das } (-1)\text{-facher der } 1. \text{ Zeile}\end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|r}1 & 2 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 2 & -6 & 0\end{array}\quad\begin{array}{l}\text{Addiere das } (-2)\text{-facher der } 2. \text{ Zeile}\\ \\ \text{Addiere das } (-2)\text{-facher der } 2. \text{ Zeile}\end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|r}1 & 0 & 5 & 0\\ 0 & 1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{array}$$

Beispiel (Forsetzung) - Lösung

$$\left.\begin{array}{ccr} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}$$

Somit ergibt es mehrere Lösungen:

$$\lambda_1 = -5t,\ \lambda_2 = 3t,\ \lambda_3 = t,\ t \in \mathbb{R}$$

Die drei Vektoren sind linear abhängig.

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME

LINEARE GLEICHUNGSSYSTEME