KOMPLEXE ZAHLEN

Mathematische Brückenkurs

Dr. Joseph Rudzinski

Abteilung Theorie der Polymere, Max-Planck-Institut für Polymer Forschung

Wintersemester 2021/22

DIE KOMPLEXE ZAHLEN

Die reellen Zahlen enthalten algebraische Zahlen, so zum Beispiel Lösungen $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$ der Gleichung

$$x^2 = 2$$

Aber: Nicht jede algebraische Zahl ist eine relle Zahl. So hat zum Beispiel die Gleichung

$$x^2 = -2$$

keine reellen Lösungen.

DIE KOMPLEXE ZAHLEN

Definition

Man definiert die imaginäre Einheit i als eine Lösung der Gleichung

$$x^2 = -1$$

Definition

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ sind die Menge

$$\mathbb{C} = \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}\}$$

DIE KOMPLEXE ZAHLEN

Analogie mit $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$

Definition

Setzen wir $w = \sqrt{3}$, so ist w eine Lösung der Gleichung

$$w^2 = 3$$

Definition

Der Körper $\mathbb{Q}[\sqrt{3}]$ ist die Menge

$$\mathbb{Q}[\sqrt{3}] = \{a + bw \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$$

DIE KOMPLEXE ZAHLEN

Addition und Multiplikation von komplexen Zahlen

Sei $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$

Definition der Addition und der Multiplikation

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

Beispiel

$$(1 + 2i) + (3 + 4i) = 4 + 6i$$

$$(1 + 2i) \cdot (3 + 4i) = 3 + 6i + 4i + 8i^2 = 3 + 10i - 8 = -5 + 10i$$

Quiz

Sei $z_1 = 7 + 13i$ und $z_2 = 2 - 5i$, $z_1 + z_2 =$?

(A) $17i$

(B) $9 + 8i$

(C) $9 + 18i$

(D) $5 - 18i$

Quiz - Solution

Sei $z_1 = 7 + 13i$ und $z_2 = 2 - 5i$, $z_1 + z_2 = ?$

$$= (7 + 13i) + (2 - 5i)$$

$$= 7 + 2 + 13i - 5i = 9 + 8i$$

(A) $17i$

$\boxed{\text{(B) } 9 + 8i}$

(C) $9 + 18i$

(D) $5 - 18i$

Quiz

Sei $z_1 = 5 + 9i$ und $z_2 = 2i$, $\quad z_1 \cdot z_2 =$?

(A) $10 + 18i$

(B) $10 - 18i$

(C) $-18 + 10i$

(D) $18 + 10i$

DIE KOMPLEXE ZAHLEN

Quiz - Solution

Sei $z_1 = 5 + 9i$ und $z_2 = 2i$, $\quad z_1 \cdot z_2 =$?

$$= (5 + 9i) \cdot (2i) = 10i + 18i^2$$

$$= 10i + 18i^2 = 10i - 18$$

(A) $10 + 18i$

(B) $10 - 18i$

(C) $\boxed{-18 + 10i}$

(D) $18 + 10i$

DIE KOMPLEXE ZAHLEN

Subtraktion und Division von komplexen Zahlen

Sei $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$

Definition der Subtraktion und der Division

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1 + iy_1)}{(x_2 + iy_2)} = \frac{(x_1 + iy_1)\cdot(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)\cdot(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(-x_1y_2 + x_2y_1)}{(x_2^2 + iy_1x_2 - iy_1x_2 - i^2y_2^2)}$$

$$= \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(-x_1y_2 + x_2y_1)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

Subtraktion und Division von komplexen Zahlen

Beispiel

$$(1+2i)-(3+4i)=(1-3)+i(2-4)=-2-2i$$

$$\frac{1+2i}{3+4i}=\frac{(1+2i)\cdot(3-4i)}{(3+4i)\cdot(3-4i)}=\frac{(3+8)+i(6-4)}{(9+16)}=\frac{11+2i}{25}=\frac{11}{25}+\frac{2}{25}i$$

Quiz

Sei $z_1 = 6 + 8i$ und $z_2 = 2i$, $\quad \dfrac{z_1}{z_2} = ?$

(A) 10

(B) $3 + 4i$

(C) $4 - 3i$

(D) $4 + 3i$

Quiz - Solution

Sei $z_1 = 6 + 8i$ und $z_2 = 2i$, $\quad \dfrac{z_1}{z_2} = ?$

(A) 10

(B) $3 + 4i$

(C) $\boxed{4 - 3i}$

(D) $4 + 3i$

$$= \frac{(6 + 8i) \cdot (-2i)}{2i \cdot (-2i)} = \frac{-12i - 16i^2}{-4i^2}$$

$$= \frac{16 - 12i}{4} = \frac{16}{4} - \frac{12}{4}i$$

$$= 4 - 3i$$

DIE KOMPLEXE ZAHLEN

<u>**Der Körper der komplexen Zahlen**</u>

- Mit dieser Addition und Multiplikation bilden die komplexen Zahlen einen Körper.
- Dieser Körper ist algebraisch abgeschlossen, d.h. die Nullstellen eines jeden Polynoms liegen in dem Körper.
- Der Körper ist allerdings nicht angeordnet.
- Das Vollständigkeitsaxiom gilt.

Nullstellen eines Polynoms

Es seien $c_n, c_{n-1}, \ \dots \ c_1, c_0 \in \mathbb{C}$. Wir betrachten die Gleichung

$$c_n z^n + c_{n-1} z^{n-1} + \cdots + c_1 z + c_0 = 0$$

Diese Gleichung hat für die unbekannte Variable z in $\mathbb{C}$ genau n Lösungen, wobei Vielfachheiten mitgezählt werden.

Anders ausgedrückt: Ein Polynom n-ten Grades hat in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen, wobei Vielfachheiten mitgezählt werden.

Vielfachheiten

Beispiel

Betrachte das Polynom: $(z-4)\,(z-5)^2\,.$

Die Nullstelle $z=4$ hat die Vielfachtheit 1, die Nullstelle 5 hat die Vielfachtheit 2.

Das Polynom hat den Grad 3, es sollte also drei Nullstellen haben. Eine einfache Nullstelle und eine doppelte Nullstelle ergibt.

Nullstellen eines Polynoms

Beispiel

Wir betrachten die quadratische Gleichung

$$2z^2 - 8z + 26 = 0$$

Die Diskriminante ist: $D = b^2 - 4ac = -144$

Somit

$$z_{+/-} = \frac{1}{4}\left(8 \pm \sqrt{-144}\right) = \frac{1}{4}\left(8 \pm \sqrt{(-1)\cdot(12)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{4}(8 \pm 12i) = 2 \pm 3i$$

Real- und Imaginärteil

Definition

Sei $z = x + iy$ eine komplexe Zahl.

Man bezeichnet x als Realteil und y als Imaginärteil.

$$\mathrm{Re}(z) = x\,,\ \mathrm{Im}(z) = y$$

Beispiel

$$\mathrm{Re}(3 + 5i) = 3$$

$$\mathrm{Im}(3 + 5i) = 5$$

Konjugation

Definition

Die zu $z = x + iy$ **konjugiert komplexe Zahl** ist

$$z^* = x - iy$$

Beispiel

$$(3 + 5i)^* = 3 - 5i$$

DIE KOMPLEXE ZAHLEN

Rechnenregeln

$$(z^*)^* = z$$

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$$

$$(z_1 - z_2)^* = z_1^* - z_2^*$$

$$(z_1 \cdot z_2)^* = z_1^* \cdot z_2^*$$

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^* = \frac{z_1^*}{z_2^*}$$

$$\textbf{Re}(z) = \frac{1}{2}(z + z^*), \quad \textbf{Im}(z) = \frac{1}{2}(z - z^*)$$

Betrag einer komplexen Zahlen

Sei $z = x + iy$ eine komplexe Zahl. Es ist

$$z \cdot z^* = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 + y^2$$

Definition

Als Betrag der komplexen Zahl bezeichnet man

$$|\, z \,| = \sqrt{zz^*} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

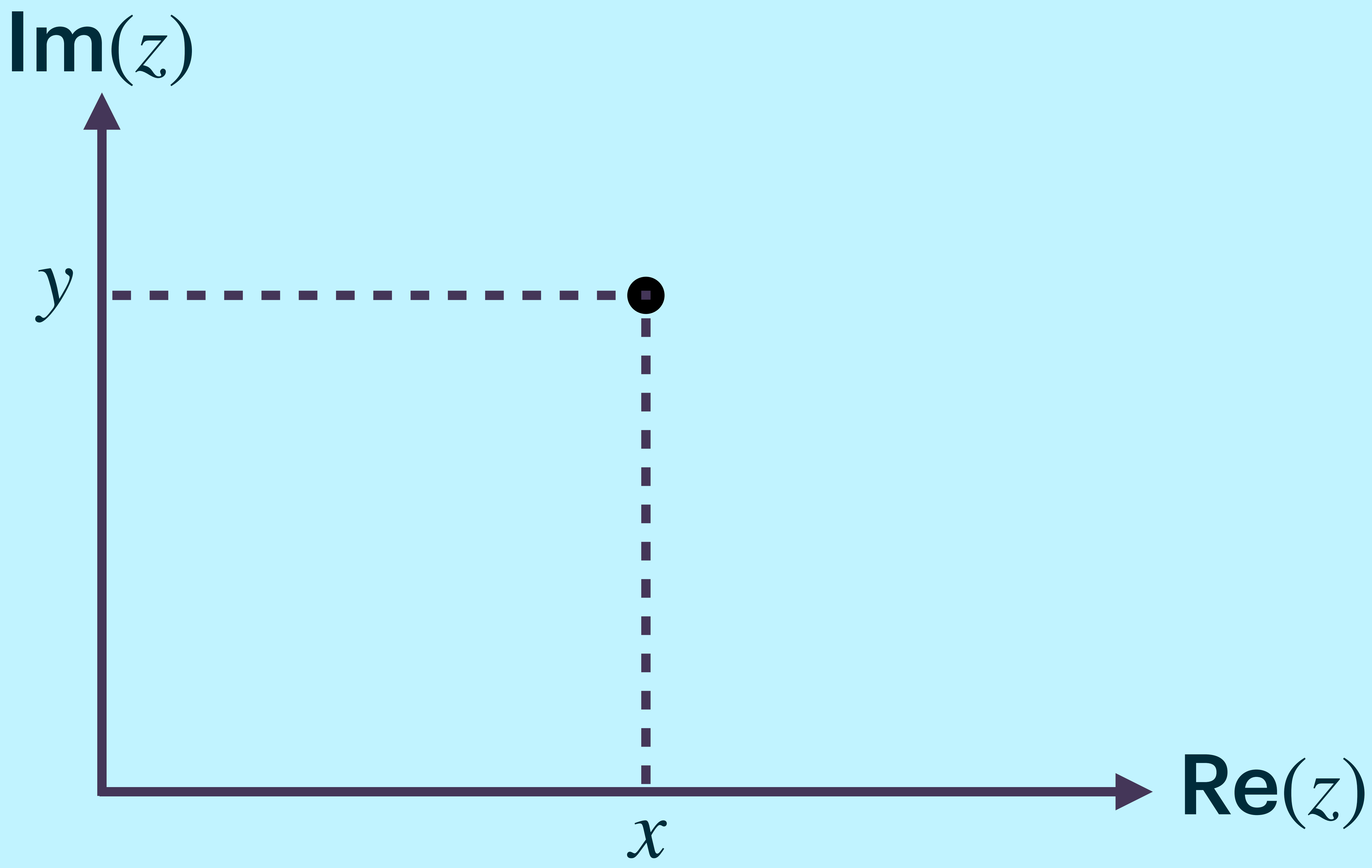
Beispiel

$$|\, 3 + 5i \,| = \sqrt{(3 + 5i)(3 - 5i)} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

DIE KOMPLEXE ZAHLEN

Die komplexe Zahlenebene

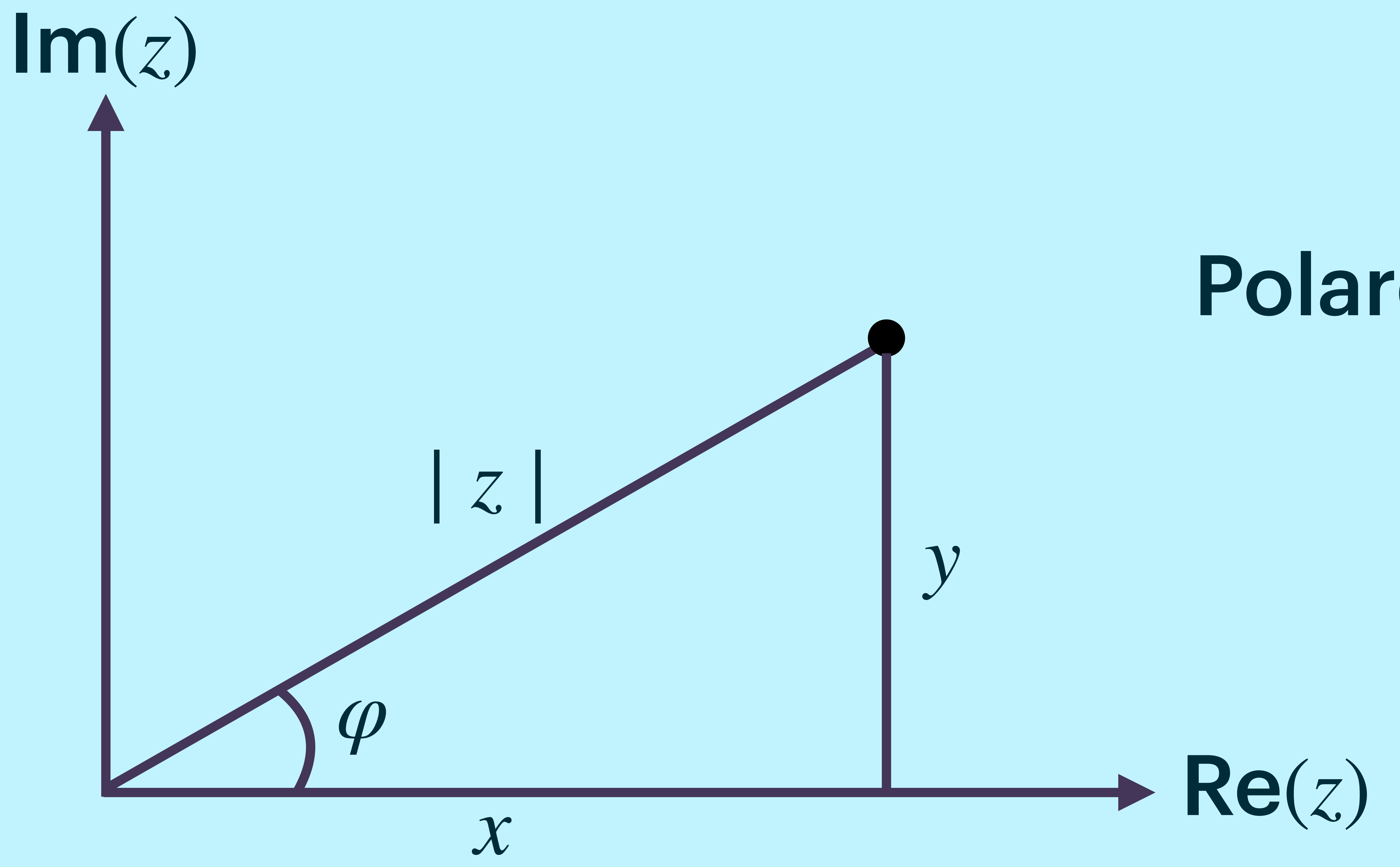
Eine komplexe Zahl $z = x + iy$ wird durch ein Paar (x, y) zweier reeler Zahlen beschrieben.



Die reellen Zahlen sind genau die Zahlen, für die Im$(z) = 0$ gilt.

DIE KOMPLEXE ZAHLEN

<u>Die komplexe Zahlenebene</u>



Polardarstellung einer komplexen Zahl:

$$z = |\,z\,| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$$

φ nennt man das Argument oder die Phase der komplexen Zahl.

DIE KOMPLEXE ZAHLEN

Umrechnung: Normalform in Polarform

$$|\, z \,| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \frac{\pi}{2}, \text{ für } x = 0, y > 0$$

$$\tan\varphi = \frac{y}{x}, \text{ für } x \neq 0$$

$$\varphi = \frac{3\pi}{2}, \text{ für } x = 0, y < 0$$

Die Auflösung der Gleichung $\tan\varphi = y/x$ nach φ ergibt

$$\varphi = \arctan\frac{y}{x}, \quad \text{für } x > 0, y \geq 0$$

$$\varphi = 2\pi + \arctan\frac{y}{x},$$

für $x > 0, y < 0$

$$\varphi = \pi + \arctan\frac{y}{x}, \quad \text{für } x < 0$$

Umrechnung: Normalform in Polarform

$$x = |\, z \,| \cos \varphi \qquad\qquad y = |\, z \,| \sin \varphi$$

Multiplikation und Division in Polarform

In der Normalform hatten wir:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1) \cdot (x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2}$$

In der Polarform sind Multiplikation und Division besonders einfach:

$$z_1 \cdot z_2 = |\, z_1 \,|\,|\, z_2 \,| \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|\, z_1 \,|}{|\, z_2 \,|} \left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$$

Die Formel von Moivre

Aus

$$z_1 \cdot z_2 = |\, z_1 \,|\, |\, z_2 \,| \left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$$

folgt insbesondere

$$z^n = |\, z \,|^n \left[\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi)\right]$$

Dieser Gleichung wird auch als Formel von Moivre bezeichnet.

DIE KOMPLEXE ZAHLEN

Die Formel von Euler

Polardarstellung einer komplexen Zahl:

$$z = |\, z \,| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

Wir werden später komplexwertige Funktionen kennenlernen. Im Vorgriff soll allerdings hier schon die Formel von Euler erwähnt werden

$$e^{i\varphi} = cos\varphi + i \sin \varphi$$

Diese Formel werden wir später mit Hilfe der Reihendarstellung der Funktionen $\exp, \sin,$ und $\cos$ relativ einfach beweisen können. Somit

$$z = |\, z \,| \cdot e^{i\varphi}$$

Multiplikation und Division mit der Formel von Euler

Es sei $|z_1| e^{i\varphi_1}$ und $|z_2| e^{i\varphi_2}$. Dann ist

$$z_1 \cdot z_2 = |z_1| \cdot |z_2| e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$$

Quiz

$$i^9 = \textbf{?}$$

(A) $-i$

(B) i

(C) $9i$

(D) $9+i$

Quiz - Solution

$$\begin{aligned} i^9 &= i \cdot i \cdot i \cdot i \cdot i \cdot i \cdot i \cdot i \cdot i \\ &= i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i^2 \cdot i \\ &= (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot i \\ &= (-1)^4 \cdot i \\ &= i \end{aligned}$$

(A) $-i$

$\boxed{\text{(B) } i}$

(C) $9i$

(D) $9 + i$

DIE KOMPLEXE ZAHLEN

Betrag und Argument von *i*

Wir schreiben i in Polarform: Es ist

$$|\, i \,| = \sqrt{i \cdot i^*} = \sqrt{i \cdot (-i)} = \sqrt{1} = 1$$

Da $i = 0 + 1 \cdot i$ und somit $x = 0$ und $y = 1$ gilt

$$\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Somit

$$i = \underbrace{\cos\frac{\pi}{2}}_{0} + i\,\underbrace{\sin\frac{\pi}{2}}_{1}$$

Potenzen von *i*

Sei $n \in \mathbb{Z}$. Mit Formel von Moivre haben wir

$$i^n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Insbesondere:

$$i^{-4} = 1 \qquad i^{-3} = i \qquad i^{-2} = -1 \qquad i^{-1} = -i$$

$$i^{0} = 1 \qquad i^{1} = i \qquad i^{2} = -1 \qquad i^{3} = -i$$

$$i^{4} = 1 \qquad i^{5} = i \qquad i^{6} = -1 \qquad i^{7} = -i$$

Quiz

$$\sqrt{i} = ?$$

(A) -1

(B) 1

(C) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$

(D) $-1+i$

Quiz

(A) -1

(B) 1

(C) $\boxed{\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1+i)}$

(D) $-1+i$

$$\sqrt{i} = i^{\frac{1}{2}} = \cos\left(\frac{1\pi}{2\cdot 2}\right) + i\sin\left(\frac{1\pi}{2\cdot 2}\right)$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1+i)$$

DIE KOMPLEXE ZAHLEN

DIE KOMPLEXE ZAHLEN

DIE KOMPLEXE ZAHLEN

DIE KOMPLEXE ZAHLEN