MATRIZEN

Mathematische Brückenkurs

Dr. Joseph Rudzinski

Abteilung Theorie der Polymere, Max-Planck-Institut für Polymer Forschung

Wintersemester 2021/22

MATRIZEN

Definition

Eine rechteckige Anordnung

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

von Elementen a_{ij} aus einem Körper nennt man ein Matriz.

Die Elementen a_{ij} nennt man die Komponenten der Matriz.

Eine Matriz mit n Zeilen und m Spalten bezeichnet man als $n \times m$-Matrix.

MATRIZEN

- Eine Matrix bezeichnet man als quadratisch, falls $n = m$.
- Eine Matrix bezeichnet man als Einheitsmatrix, falls sie quadratisch ist und $a_{ij} = \delta_{ij}$.
- Eine Matrix bezeichnet man als Diagonalmatrix, falls sie quadratisch ist und $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$.
- Eine Matrix bezeichnet man als obere Dreiecksmatrix, falls sie quadratisch ist und $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$.

MATRIZEN

Quadratisch

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Einheitsmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

obere Dreiecksmatrix

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Addition von Matrizen

Seien A und B zwei $n \times m$-Matrizen

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nm} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1m}+b_{1m} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2m}+b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+b_{1n} & a_{n2}+b_{n2} & \cdots & a_{nm}+b_{nm} \end{pmatrix}$$

Addition von Matrizen

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+7 & 2+8 & 3+9 \\ 4+10 & 5+11 & 6+12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 8 & 10 & 12 \\ 14 & 16 & 18 \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit Skalaren

Seien A ein $n \times m$-Matriz und $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\lambda \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1m} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda a_{n1} & \lambda a_{n2} & \cdots & \lambda a_{nm} \end{pmatrix}$$

Multiplikation mit Skalaren

Beispiel

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 & 3 \cdot 2 & 3 \cdot 3 \\ 3 \cdot 4 & 3 \cdot 5 & 3 \cdot 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 12 & 15 & 18 \end{pmatrix}$$

MATRIZEN

Der Vectorraum der *nxm*-Matrizen

- Mit dieser Addition und dieser skalaren Multiplikation bilden die $n \times m$-Matrizen einen Vektorraum.
- Die dimension dieses Vektorraumes ist $n \cdot m$.
- Eine Basis ist gegeben durch die Matrizen:

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

die nur in dem Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte eine Einshaben, ansonsten nur Nullen.

Multiplikation

Die Multiplikation einer $n \times k$-Matrix A mit einer $k \times m$-Matrix B ist wie folgt definiert:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{k1} & b_{k2} & \cdots & b_{km} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1m} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nm} \end{pmatrix}$$

wobei

$$c_{ij} = a_{j1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{jk}b_{kj}$$

Regel: Zeile $\times$ Spalte

Multiplikation

Beispiel

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \\ 11 & 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 7 + 2 \cdot 9 + 3 \cdot 11 & 1 \cdot 8 + 2 \cdot 10 + 3 \cdot 12 \\ 4 \cdot 7 + 5 \cdot 9 + 6 \cdot 11 & 4 \cdot 8 + 5 \cdot 10 + 6 \cdot 12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 + 18 + 33 & 8 + 20 + 36 \\ 28 + 45 + 66 & 32 + 50 + 72 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 58 & 64 \\ 139 & 159 \end{pmatrix}$$

Quiz

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \text{?}$$

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ **(B)** $\begin{pmatrix} 5 \\ 11 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 7 & 10 \end{pmatrix}$ **(D)** $\begin{pmatrix} 17 \end{pmatrix}$

Quiz

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 4 \end{pmatrix} = \textbf{?}$$

(A) $\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}$ **(B)** $\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} 3 & 8 \end{pmatrix}$ **(D)** $\begin{pmatrix} 11 \end{pmatrix}$

MATRIZEN

Spaltenvecktoren und Zeilenvektoren

- Ein n-dimensionaler Spaltenvektor
$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}$$
kann als eine $n \times 1$-Matrix aufgefasst werden.

- Ebenso kann ein n-dimensionaler Zeilenvektor
$$(a_{11}, a_{12}, \ \ldots, a_{1n})$$
kann als eine $1 \times n$-Matrix betrachtet werden.

MATRIZEN

Lineare Gleichungssysteme

Setz man
$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

so lässt sich das lineare Gleichungssytem

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1m}x_m &= b_1\,, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2m}x_m &= b_2\,, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{nm}x_m &= b_n\,. \end{aligned}$$

auch wie folgt schreiben: $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$

Quadratische Matrizen

Wir betrachten im folgenden die quadratischen $n \times n$-Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

und führen die Begriffe Spur und Determinante ein.

Spur

Sei A ein $n \times n$-Matrix :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Definition

Die Spur (engl. "trace") einer quadratischen Matrix ist die Summe der Diagonalelemente:

$$\operatorname{Tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

Rechenregeln für die Spur

Es seien A und B $n \times n$-Matrizen, λ ein Skalar:

$$\begin{aligned} \operatorname{Tr}(A+B) &= \operatorname{Tr}A + \operatorname{Tr}B \\ \operatorname{Tr}(\lambda \cdot A) &= \lambda \cdot \operatorname{Tr}A \end{aligned}$$

Spur

Beispiel

$$\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} = 1 + 6 + 11 + 16 = 34$$

Quiz

$$\mathrm{Tr}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 42 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \textbf{?}$$

(A) $\sqrt{3}$

(B) 3

(C) 6

(D) 45

Determinante

Definition

Die Determinante einer quadratischen Matrix ist definiert durch:

$$\det A \;=\; \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_n=1}^{n}\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} a_{1i_1} a_{2i_2}\cdots a_{ni_n}$$

wobei $\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ das total antisymmetrische Symbol in n Dimensionen ist:

$$\epsilon_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \begin{cases} +1 & \text{für } (i_1, i_2, \ldots, i_n) \text{ eine gerade Permutation von } (1,2,\ldots,n) \\ -1 & \text{für } (i_1, i_2, \ldots, i_n) \text{ eine ungerade Permutation von } (1,2,\ldots,n) \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Determinante

Für die Determinante existiert auch die folgende Schreibweise:

$$\det A \;=\; \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinante einer Diagonalmatrix

Sie $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ eine Diagonalmatrix.

Dann ist

$$\det D = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n$$

Eine 1×1-Matrix ist immer eine Diagonalmatrix und somit

$$\mid a_{11} \mid = a_{11}$$

Berechnung der Determinante

Zu einer $n \times n$-Matrix A definieren wir zunächst eine $(n-1) \times (n-1)$-Matrix A_{ij} die dadurch ensteht, dass man die i-ten Zeile und die j-ten Spalte der Matrix A entfernt.

Laplace'sche Entwicklungssatz

Entwicklung nach der i-ten Zeile:
$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

Äquivalent kann auch nach der j-ten Spalte entwickelt werden:

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

Dies erlaubt die rekursive Berechnung einer Determinante.

Rechenregeln für die Determinante:

Es seien A und B $n \times n$-Matrizen, λ ein Skalar:

$$\det(A \cdot B) = (\det A) \cdot (\det B)$$

$$\det(\lambda \cdot A) = \lambda^n \cdot \det A$$

Determinante

Beispiel

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} = -3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 9 & 11 \end{vmatrix}$$

$$= -3 \cdot (5 \cdot 11 - 7 \cdot 9) = 24$$

Determinante

Beispiel

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix}$$

$$+4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 9 & 10 & 11 \end{vmatrix} + 8 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix} = \cdots$$

Quiz

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 42 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \textbf{?}$$

(A) 0

(B) 10

(C) 24

(D) -228

Quadratische Matrizen

Es seien A und B $n \times n$-Matrizen. In diesem ist das Matrixprodukt $A \cdot B$ wieder eine $n \times n$-Matrix.

Für $n \times n$-Matrizen ist die Matrizenmultipliktion also abgeschlosssen.

Das neutrale Element bezüglich der Matrizenmultiplikation ist offensichtlich die Einheitsmatrix

$$\mathbf{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Die inverse Matrix

Unter welchen Bedingungen existiert auch ein inverses Element?

Falls so ein Element existiert bezeichnen wir es mit A^{-1}.

Es soll also gelten $A \cdot A^{-1} = \mathbf{1}$

Nehmen wir auf beiden Seiten die Determinante, so erhalten wir

$$\det A \cdot \det A^{-1} = \det \mathbf{1} = 1.$$

Also falls $\det A \neq 0$: $\quad \det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}.$

$\det A \neq 0$ ist eine notwendige Bedingung für die Existenz eines Inversen.

Die inverse Matrix

Es lässt sich zeigen, dass $\det A \neq 0$ auch eine hinreichende Bedingung ist.

Satz

A^{-1} existiert genau dass, wenn $\det A \neq 0$.

Die Gruppe der invertierteren Matrizen

Wir betrachten nun die Menge aller quadratischen $n \times n$-Matrizen mit der Eigenschaft $\det A \neq 0$.

Wegen $\det(AB) = \det A \det B$ ist diese Menge abgeschlossen bezüglich der Matrizenmultiplikation.

Wie gerade diskutiert wurde, existiert in diese Menge zu jeder Matrix auch ein Inverses.

Diese Menge bildet daher bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe, die man als

$$\mathrm{GL}(n, \mathbb{R}), \quad \textbf{bzw.} \ \mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$$

bezeichnet.

Die inverse Matrix

Sei A eine $n \times n$-Matrix mit $\det A \neq 0$. Gesucht ist eine $n \times n$-Matrix X

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

so dass gilt:

$$A \cdot X = \mathbf{1}$$

Die inverse Matrix

Wir multiplizieren die linke Seite aus und betrachten danach die j-ten

$$\begin{aligned}
a_{11}x_{1j} + a_{12}x_{2j} + \cdots + a_{1n}x_n &= 0\,, \\
\vdots \qquad \cdots &= 0\,, \\
a_{j1}x_{1j} + a_{j2}x_{2j} + \cdots + a_{jn}x_n &= 1\,, \\
\vdots \qquad \cdots &= 0\,, \\
a_{n1}x_{1j} + a_{n2}x_{2j} + \cdots + a_{nn}x_{nj} &= 0\,.
\end{aligned}$$

Dies n Gleichungen bilden eine lineares Gleichungssystem für die Unbekannten $x_{1j}, x_{2j}, \ \ldots, x_{nj}$ welches mit Hilfe des Gauß'schen Algorithmus gelöst werden kann.

Die inverse Matrix

Da dies für jede Spalte j gilt, kann man so alle n^2 Unbekannten x_{ij} bestimmen.

Da die Koeffizienten der linken Seite des linearen Gleichungssystem immer gleich sind, verfährt man in der Praxis wie folgt:

$$\left.\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{array}\right| \begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{array}$$

Die inverse Matrix

und bringt dieses Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß'sche Algorithmus auf die Form

$$
\left(\begin{array}{cccc|cccc}
1 & 0 & \cdots & 0 & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\
0 & 1 & \cdots & 0 & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \cdots & 1 & x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn}
\end{array}\right)
$$

Die inverse Matrix

Die inverse Matrix A^{-1} ist dann gegeben durch

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nn} \end{pmatrix}$$

Beispiel

Sei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Wir beginnen mit

$$\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 7 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

MATRIZEN

Berechnung der inversen Matrix

$$\left.\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Addiere das (-2)-facher der $1.$ Zeile

$$\left.\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{array}\right| \begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Addiere das (-1)-facher der $2.$ Zeile

Addiere das (-1)-facher der $2.$ Zeile

$$\left.\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{array}\right| \begin{array}{ccc} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{array}$$

Multipliziere mit $\frac{1}{3}$

Berechnung der inversen Matrix

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\;\right|\;\begin{matrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{matrix}$$

Addiere das (-2)-facher der $3.$ Zeile
Addiere das (-1)-facher der $3.$ Zeile

$$\left.\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\;\right|\;\begin{matrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{matrix}$$

Berechnung der inversen Matrix

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right.$$

Somit ist A^{-1} gegeben durch:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{8}{3} & \frac{4}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -8 & 4 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

MATRIZEN

MATRIZEN

MATRIZEN