序

本书为 *cppHusky* 的二〇二三年年礼。

这是一本以方法为导向，按难度来分级的不定积分题集。这里收集了大量我在不定积分学习过程中认为有价值的习题。笔者致力于将其打造为适合各层次不定积分学习者可用的习题集。它适合于大学考研应试学生和对不定积分感兴趣的数学爱好者。

笔者吸收了吉米多维奇习题解集的风格来编撰这本习题集，旨在让考研学生掌握必需的不定积分解题方法，让不定积分爱好者了解更多相关方法，拓宽知识面。

由于这本书采用了难度分级体系，学习者可以选择自己适合的难度来进行训练。

作为习题集，本书还有许多附加的实用功能。笔者会在许多题目之后加入批注和同类题目索引，也会在附录中提供不定积分类型题的讲义资料。

希望本书的每一个读者都能共借助这本书，使自己的不定积分水平更上一层楼。

内容结构与格式约定

- **难度分级系统**：所有题目分七个难度等级，从一级开始难度递增。题目难度的划分标准为使用的方法（越高级越难）和计算量（越复杂越难），前者为主要标准。
- **题目编号体系**：分两个阶段进行。内容扩充阶段使用随机编号，成型阶段统一改为顺序编号。随机标号的格式为“R” + 难度分级对应的阿拉伯数字 1 为 + 随机数 3 位；顺序编号的格式为“T” + 难度分级对应的阿拉伯数字 1 为 + 顺序数字 3 位。
- **编号标示方案**：内容扩充阶段不使用。根据题目所采用的方法，分为“考研必会”和“其它”两类，题号分别以红色和黑色标示。
- **批注索引系统**：以楷体字附于某些题目的解答之后，主要为积分经验的总结和同类型、同方法题目的索引。
- **附录讲义系统**：将有理函数积分、分部积分法等类型的讲义置于附录中。这是笔者学习不定积分许久以来的方法汇总，具备一定价值。

由于本书注重方法，会存在同题多解的情况，这也是提醒读者不要受限于单一的思路。不定积分的方法灵活多样，只有善于思考才能掌握精髓。

cppHusky

附录 A　参考资料 鸣谢人员

- 主要内容参考
  - 书目
    - 《高等数学》第 7 版 同济大学数学系
    - 《积分的方法与技巧》金玉明 / 顾新身 / 毛睿庭
    - 《吉米多维奇数学分析习题集题解 3》费定晖 / 周学圣 / 郭大钧 / 邵品琮
    - 《2023 考研数学三大计算》杨超
    - 《微积分学教程》 Γ. M. 菲赫金哥尔茨
    - 《Table of Integrals, Series, and Products》第八版 I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik
    - 《组合积分法》朱永银 / 郭文秀 / 朱若霞
  - 文章
    - 《不定积分的解题思路及技巧总结》（知乎）零蛋大
    - 《留数法实现有理分式拆分原理》（知乎）TianX
    - 《有理函数的部分分式方法》（百度贴吧）
    - 《不定积分王者 100 题》（知乎）虚调子
  - 个人与社群
    - 魏念辉
    - Polynomial
    - 月临
    - QQ 群 不定积分之潮 （1046154546）
- 工具、技术支持
  + Geogebra
  + Wolfram Mathematica
  + Overleaf
  + Mirion
  + ORG

- 检查与勘误
  + 魏念辉
  + ∅
- 排版参考与审校
  + 《科学出版社作者编辑手册》汪继祥
  + Mirion
  + Wood_Birck_HTE
- 试用与反馈
  + ∅

附录 B 积分常见结论

B.1 基本积分表（请背）

1. $\displaystyle\int x^a\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a+1}x^{a+1}+C\ (a\neq-1)$

2. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln|x|+C$

3. $\displaystyle\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^x+C$

4. $\displaystyle\int a^x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}a^x+C$

5. $\displaystyle\int \sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x+C$

6. $\displaystyle\int \cos x\,\mathrm{d}x=\sin x+C$

7. $\displaystyle\int \csc^2 x\,\mathrm{d}x=-\cot x+C$

8. $\displaystyle\int \sec^2 x\,\mathrm{d}x=\tan x+C$

9. $\displaystyle\int \tan x\sec x\,\mathrm{d}x=\sec x+C$

10. $\displaystyle\int \cot x\csc x\,\mathrm{d}x=-\csc x+C$

11. $\displaystyle\int \tan x\,\mathrm{d}x=-\ln|\cos x|+C$

12. $\displaystyle\int \cot x\,\mathrm{d}x=\ln|\sin x|+C$

13. $\displaystyle\int \csc x\,\mathrm{d}x=\ln\left|\tan\frac{x}{2}\right|+C$

14. $\displaystyle\int \sec x\,\mathrm{d}x=\ln\left|\tan\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C=\ln|\sec x+\tan x|+C$

15. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\arctan x+C=-\operatorname{arccot} x+C_1$

16. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1-x^2}=\operatorname{artanh} x+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|+C$

17. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arsinh} x + C = \ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) + C$

18. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcosh} x + C = \ln\left|x+\sqrt{x^2-1}\right| + C$

19. $\displaystyle\int \sinh x \,\mathrm{d}x = \cosh x + C$

20. $\displaystyle\int \cosh x \,\mathrm{d}x = \sinh x + C$

21. $\displaystyle\int \operatorname{csch}^2 x \,\mathrm{d}x = -\coth x + C$

22. $\displaystyle\int \operatorname{sech}^2 x \,\mathrm{d}x = \tanh x + C$

23. $\displaystyle\int \tanh x \,\mathrm{d}x = \ln(\cosh x) + C$

24. $\displaystyle\int \coth x \,\mathrm{d}x = \ln|\sinh x| + C$

25. $\displaystyle\int \operatorname{csch} x \,\mathrm{d}x = \ln\left|\tanh\frac{x}{2}\right| + C$

B.2 常用恒等变换（能记住或熟练推导）

1. $\sqrt{x^2} = |x| = x \operatorname{sgn} x$
2. $x = |x| \operatorname{sgn} x$
3. $x^3+1 = (x+1)\left(x^2-x+1\right)$
4. $x^3-1 = (x-1)\left(x^2+x+1\right)$
5. $\sin^2 x + \cos^2 x = \sec^2 x - \tan^2 x = \csc^2 x - \cot^2 x = 1$
6. $\sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a \sin b$
7. $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \cos a \sin b$
8. $\cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a \sin b$
9. $\cos(a-b) = \cos a\cos b + \sin a \sin b$
10. $\sin 2x = 2\sin x\cos x = \dfrac{2\tan x}{\tan^2 x + 1}$
11. $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = \dfrac{1-\tan^2 x}{1+\tan^2 x}$
12. $a\sin x + b\cos x = \sqrt{a^2+b^2}\sin\left(x + \arctan\dfrac{b}{a}\right)\ (a>0)$
13. $1+\sin x = \left(\sin\dfrac{x}{2} + \cos\dfrac{x}{2}\right)^2$

14. $1-\sin x=\left(\sin\dfrac{x}{2}-\cos\dfrac{x}{2}\right)^2$
15. $1+\cos x=2\cos^2\dfrac{x}{2}$
16. $1-\cos x=2\sin^2\dfrac{x}{2}$
17. $\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$
18. $\cos^2 x=\dfrac{1+\cos 2x}{2}$
19. $\sin a\cos b=\dfrac{\sin(a+b)+\sin(a-b)}{2}$
20. $\cos a\sin b=\dfrac{\sin(a+b)-\sin(a-b)}{2}$
21. $\cos a\cos b=\dfrac{\cos(a+b)+\cos(a-b)}{2}$
22. $\sin a\sin b=-\dfrac{\cos(a+b)-\cos(a-b)}{2}$
23. $\sin a+\sin b=2\sin\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$
24. $\sin a-\sin b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$
25. $\cos a+\cos b=2\cos\dfrac{a+b}{2}\cos\dfrac{a-b}{2}$
26. $\cos a-\cos b=-2\sin\dfrac{a+b}{2}\sin\dfrac{a-b}{2}$
27. $\sin x\cos x=\dfrac{(\sin x+\cos x)^2-1}{2}=\dfrac{1-(\sin x+\cos x)^2}{2}$
28. $(a\sin x+b\cos x)^2+(b\sin x-a\cos x)^2=a^2+b^2$

B.3 需要熟练掌握解法的积分（可背但无必要）

1. 记 $Y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$, $\Delta=b^2-4ac$, $x_1,x_2=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$，则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x}=\begin{cases}\dfrac{2}{\sqrt{-\Delta}}\arctan\dfrac{Y'}{\sqrt{-\Delta}}+C, & \Delta<0\\ -\dfrac{1}{ax+b}+C, & \Delta=0\\ \dfrac{1}{a(x_1-x_2)}\ln\left|\dfrac{x-x_1}{x-x_2}\right|+C, & \Delta>0\end{cases}.$$

2. 记 $Y=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$, $\Delta=b^2-4ac$, $x_1,x_2=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$，则

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{Y}}=\begin{cases}\dfrac{1}{\sqrt{a}}\ln\left(Y'+2\sqrt{aY}\right)+C, & a>0\\ \dfrac{1}{\sqrt{-a}}\arcsin\dfrac{-Y'}{\sqrt{\Delta}}+C, & a<0\end{cases}.$$

3. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(ax^n+b)^{\frac{n+1}{n}}} = \frac{x}{b\sqrt[n]{ax^n+b}} + C\ (n \in \mathbb{N}_+)$.

B.4 常见的非初等积分

笔者注：如果你做了半天化出了这类不定积分，而且看不到使用分部积分法进行抵消的可能性的话，你可以考虑是这题本身有问题。

1. $\displaystyle\int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Si}(x) + C$
2. $\displaystyle\int \frac{\cos x}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Ci}(x) + C$
3. $\displaystyle\int \frac{\sinh x}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Shi}(x) + C$
4. $\displaystyle\int \frac{\cosh x}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Chi}(x) + C$
5. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x = \mathrm{Ei}(x) + C$
6. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x} = \mathrm{Li}(x) + C$
7. $\displaystyle\int \sin x^2\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}S\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}x\right) + C$
8. $\displaystyle\int \cos x^2\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{2}}C\left(\sqrt{\frac{2}{\pi}}x\right) + C$
9. $\displaystyle\int \mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{erfi}(x) + C$
10. $\displaystyle\int_0^{\varphi} \sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = E(\sin\varphi; k)$
11. $\displaystyle\int_0^{\varphi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}} = F(\sin\varphi; k)$
12. $\displaystyle\int_0^{x} \int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}} = F(x; k)$
13. $\displaystyle\int x^p(1-x)^q\,\mathrm{d}x = \mathrm{B}(x; 1+p, 1+q) + C$

附录 C　讲义：有理函数积分

C.1　简介与概念引入

这节课开始我们来讲一下有理函数积分的相关知识。我在这儿已经默认大家学过了最简单的换元积分法和分部积分法。如果你还没学过的话，可以考虑先补补同济高数，改年再来听课。

好了，话不多说，我们先来介绍几个概念。

C.1.1　多项式函数

在不定积分当中，我们遇到的多项式一般都长这样：

$$x+1,\ 3x^2+2x-2,\ -x^3+x+1,\ x^4+x^3-x^2+x,\ x^5,\ -4.$$

不难理解吧，$x+1$ 是一次二项式，$-x^3+x+1$ 是三次三项式，以此类推。

这里值得注意的是 x^5 和 -4，它们分别是五次单项式和常数。其实在分析学中，单项式和常数也属于多项式函数的范畴，我们把这些类型的函数都简称多项式。

因为多项式的英文叫做 polynomial，所以我们习惯上就用 $P(x), Q(x)$ 来表示一个多项式。

多项式的不定积分 $\displaystyle\int P(x)\,\mathrm{d}x$ 可谓轻而易举。方法就是一个字：算。$P(x)$ 的每一项都是一个幂函数，而幂函数的积分我们当然是再熟悉不过了。这里举一个例子：

$$\int\left(x^3+4x-1\right)\mathrm{d}x=\int x^3\,\mathrm{d}x+\int 4x\,\mathrm{d}x-\int\mathrm{d}x=\frac{1}{4}x^4+2x^2-x+C.$$

怎么样，很简单对吧。

C.1.2　多项式方程的解

假如现在有两个多项式 $P_1(x),P_2(x)$，我们在这两个多项式之间列一个方程，就变成了

$$P_1(x)=P_2(x).$$

这就是一个多项式方程。

考虑到多项式之间可以作差，我们可以把这个方程简化一下。现在把等号右侧的东西都减到左边来，然后令 $P(x) = P_1(x) - P_2(x)$，于是把上面的式子改写成

$$P(x) = 0,$$

就好看多了。

接下来不要研究这种形式的方程怎么求解。你只需要知道当 $P(x)$ 为一次或二次多项式的时候你可以用求根公式来做就行了。如果次数更高的话，我们会选择交给计算机来解。

嗯？你们考试不准用卡西欧？但是没关系啊，考试嘛，不会给你太难的高次方程，顶多就是给个像

$$x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 2 = 0$$

这样的简单方程让你解嘛！

这个时候不要求解，我们把解猜出来。想想，这个式子的系数都是整数对吧，那我们先拿几个整数来试试。

代入 $x = 1$，发现它是这个方程的解。那么我们把这个多项式做一下因式分解好了。

$$x^5 - 2x^4 - 2x^3 + 4x^2 + x - 2 = (x-1)\big(x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2\big).$$

接下来再对剩下的这个四次多项式 $x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2$ 继续猜根和因式分解，最终能一步步猜出另外的 4 个根分别为 $-1, -1, 1, 2$。具体过程当习题，你们自己练一下吧。

C.1.3 多项式的因式分解

其实在不定积分中直接研究多项式方程的解没啥意义，高等代数才干这事。求解的目的其实是要对多项式进行因式分解，我们在后面会用到相关知识。

我们最熟知的因式分解莫过于

$$x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$$

了。其实类似的例子还有很多，比如

$$x^3 + 1 = (x+1)\big(x^2 - x + 1\big)$$
$$x^4 - 1 = \big(x^2 + 1\big)(x+1)(x-1).$$

这就涉及到一个问题：分解出来的因式有些是一次多项式，有些是二次多项式，能不能统

一成一次多项式？事实上还真能：

$$
\begin{aligned}
x^3+1 &= (x+1)\left(x-\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right)\left(x-\frac{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}{2}\right) \\
x^4-1 &= (x+\mathrm{i})(x-\mathrm{i})(x+1)(x-1).
\end{aligned}
$$

不过这种看着就让人头大的复数就别乱引入了。

回来想一下可以发现，问题其实就出在复根上。因式分解出来的有些二项式因式其实是没有实根的，遇到这种情况我们就只能保留二项式因式；倘若还有实根，那么我们就可以继续因式分解了。

举个例子，这里等号右边的样子，才是达到要求的因式分解：

$$
\left(x^2+2x+2\right)\left(x^2+3x+2\right)=\left(x^2+2x+2\right)(x+1)(x+2).
$$

我在这里稍微扩展一点吧。有个定理叫因式分解定理，它表明高次多项式在实数域上都能分解成若干个一次因式与二次不可约因式的积。你听不懂也没关系，简单说就是给你一个高次多项式 $P(x)$，你一定可以因式分解成一堆一次式和一堆二次式，上面给出的例子都是这样的。

C.1.4 有理函数

有理函数其实不难理解，它和有理数挺像的。我们想一下中学学过的知识就可以知道，有理数就是可以表示为两个整数比值的数。比如说现在有两个整数 p, q，那么 $\dfrac{p}{q}$ 就是一个有理数。

有理函数其实就是可以表示为两个整多项式比值的函数。比如说现在有两个多项式 $P(x), Q(x)$，那么 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 就是一个有理函数。因为有理函数的英文名叫做 rational function，所以我们习惯上就用 $R(x)$ 来表示一个有理函数。

举几个例子，下面这些都是有理函数：

$$
\frac{1}{x},\ \frac{x+1}{x^2+1},\ \frac{x^5+1}{x^4+x+1},\ x^2+3x,\ 0.
$$

其中的 x^2+3x 和 0 都是多项式，那么当然也是有理函数的一部分。

有理数可以根据分子与分母的大小关系，分为真分数和假分数，有理函数也是类似的。有理函数 $R(x)=\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ 根据 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 的次数关系可以分为真分式和假分式。

判断标准其实很简单：如果分子的次数低于分母，它就是真分式，比如

$$
\frac{1}{x-2},\ \frac{x}{x^2+1};
$$

如果分子的次数不低于分母，它就是假分式，比如

$$\frac{x}{x+1},\ \frac{x^3}{x^2+1}.$$

在有理数中，假分数可以分解成整数和真分数的和的形式；有理函数也一样，假分式可以分解成整多项式和真分式的和的形式。例如：

$$\frac{-x^2}{x+1} = -x+1-\frac{1}{x+1}.$$

具体的方法我会在之后的课上讲。

有理函数的加减法过程中有时会涉及到通分和化简，几个分母不同的有理函数相加，能够变成一个有理函数，比如：

好了这节课就到此结束了。后面我们开始讲有理函数积分的具体方法，就不再是水课了。

嗯？才知道这节是水课？废话，我怎么可能一上课就告诉你这节是水课啊。

C.2 最简单的有理函数积分

这节课我们来讲一下最简单的有理函数积分。简单不代表它没用，它可是我们后面搞有理函数积分的基础。

先来看几个基本公式：

$$\begin{aligned}
&\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}+C,\ (n\neq -1)\\
&\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|+C,\\
&\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \arctan x + C.
\end{aligned}$$

我相信大家已经很熟悉了，并且会感觉这也太简单了。那就不扯淡了，直接上题！

C.2.1 多项式的积分

多项式的积分其实很简单。我们前面提到过了，直接把多项式拆成若干个幂函数，然后分别求积分就行，像这样：

$$\begin{aligned}
\int \left(x^3+3x^2+3x+1\right)\mathrm{d}x &= \int x^3\,\mathrm{d}x + \int 3x^2\,\mathrm{d}x + \int 3x\,\mathrm{d}x + \int \mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{4}x^4 + x^3 + \frac{3}{2}x^2 + x + C.
\end{aligned}$$

对于更复杂的情形也是一个道理，算就行了。

不过有些时候出题人比较懒，他们会给你出一个次数很高而且项数很多的多项式，但是他们自己懒得写那么多项，于是就会搞出这样的东西：

$$\int (x+1)^{18}\,\mathrm{d}x.$$

某考生拿到这道题一看：妙啊，这我最会做了。然后他开始挨着个算 C_{18}^{k} 算了五分钟，最后没答完卷。

我们都是人，不是计算机，不要遇到问题就是死算。这道题目要是灵活处理起来的话就易如反掌了。想想，大家都知道 $\int x^{18}\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{19}}{19} + C$ 对吧，因为它就是个简单的幂函数积分。那么回到 $\int (x+1)^{18}\,\mathrm{d}x$ 这个问题上，我们能不能把 $x+1$ 化成类似于 x 的形式呢？这时候我们很自然地会想到什么呢，换元。

现在我令 $t = x+1$，然后呢，被积函数就变成了 t^{18} 对吧，那微分变量呢？你们看，因为 $\mathrm{d}t = \mathrm{d}(x+1) = \mathrm{d}x$，所以这样换元就把这个积分变成了 $\int t^{18}\,\mathrm{d}t$，这就好做了嘛。

所以说做题的时候头脑不要太僵硬。那个考生显然就不喜欢动脑，我再让他多考五分钟他也一样答不完卷，因为他只会把时间浪费在暴算上。

好了，那我们再来看一下这道题：

$$\int x^2(x+1)^{18}\,\mathrm{d}x. \tag{1}$$

这题的被积函数既有 x，又有 $x+1$，看起来不像是能用上面的做法解决的。这下只能用二项式展开来做了吧？先别急，我们再来思考一个同类问题：

$$\int x^{18}(x+1)^2\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

比较一下这两道题的计算量吧。想必大家都能看出来，(2) 的计算量比 (1) 要小得多，因为 (1) 这里要做 18 次方的二项展开，(2) 这里只需要做 2 次方的二项展开就够了。

这给我们的启发是什么呢？在 (1) 中我们可以换元 $t = x+1$，然后这个积分变成了

$$\int (t-1)^2 t^{18}\,\mathrm{d}t = \int \left(t^{20} - 2t^{19} + t^{18}\right)\mathrm{d}t.$$

这样计算起来就轻松多了。

C.2.2 简单真分式的积分

接下来我们研究一下有理分式的积分。先来看看这个最简单的：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1}.$$

拿到这种题目，乍一看可能没什么头绪，怎么办？给大家一个方法：遇到陌生的积分要尽量向熟悉的积分去变换。你们看这个积分长得像什么呢？$\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$ 对吧？现在把分母变成了 $x+1$，那么我们试试换元 $t=x+1$ 把分母变成单项的看看呗？

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \int \frac{\mathrm{d}(t-1)}{t} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

这样就能做了。

那么同样的道理，对于任何一个实数 a，积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+a}$ 其实都可以这样做。这里我偷个懒不写换元过程了，直接凑微分行吧：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+a} = \int \frac{\mathrm{d}(x+a)}{x+a} = \ln|x+a| + C.$$

如果分母中一次项的系数不是 1 呢？其实道理是一样的，都可以通过换元来处理。比如说在积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{3x+2}$ 中换元 $t=3x+2$，于是 $x=\frac{t-2}{3}$，那么这个积分变成

$$\int \frac{\mathrm{d}\frac{t-2}{3}}{t} = \frac{1}{3}\int \frac{\mathrm{d}t}{t}.$$

好，这些题看上去轻而易举对不对？那么我们再来一道简单题练个手吧：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x+1}.$$

想必大家都注意到了，这题的被积函数可以写成 $\frac{1}{(x-1)^2}$，这样的话只要换元 $t=x-1$ 就可以了。

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x+1} = \int \frac{\mathrm{d}(t+1)}{t^2} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

后面就是一个幂函数的积分了。

到这里也很容易对不对？那我再加大点难度吧：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x+2}.$$

拿到这题之后会发现——分母好像没办法配方了。对啦，出题人就是这么邪恶。这题被积函数

如果配方一下的话就会变成 $\dfrac{1}{(x-1)^2+1}$，多出来的常数 1 就很讨厌，还消不掉，怎么办？

还是那句话，尽量向熟悉的积分去变换。你们看，$\dfrac{1}{(x-1)^2+1}$，它是不是很像 $\dfrac{1}{x^2+1}$？而我们还知道 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1} = \arctan x + C$。这么一想，问题应该就能迎刃而解了。

这里换元 $t = x-1$，于是

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2+1} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}.$$

这样就把这题秒掉了。

C.2.3 部分分式分解的应用

感觉前面的题目都太简单啦？没问题，我再把上面那题改一改：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x}.$$

这道题目和上面不太一样。我们的确可以将被积函数通过配方法简化成 $\dfrac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2-1}$，但是这节课开始的时候，我们讲的三个基本公式里有 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$，可没有 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-1}$ 啊。

这样我们就遇到了阻碍，我们没办法直接通过这个被积函数的形式联想到熟悉的积分，所以需要考虑对这个被积函数进行一下变形。

好了我不耽误时间了，直接告诉你们怎么变吧。我还得赶地铁去约会。

$$\frac{1}{x^2-2x} = \frac{1}{x(x-2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x}\right).$$

这种方法是将一个分母次数较高的分式分解成若干个分母次数较低的分式。你们看，虽然我不知道 $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x}$，但是我能很容易地解出 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x-2}$ 和 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$ 啊，于是原来的积分也就解决了。

部分分式分解的方法在有理函数积分中的应用其实是非常广泛的。我举个带参数的例子吧：$(b \neq 0)$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x+b)} = \int \frac{1}{b}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+b}\right)\mathrm{d}x = \frac{1}{b}\int \frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{1}{b}\int \frac{\mathrm{d}x}{x+b}.$$

这个部分分式分解的原理，我们为了节省时间，就留到下节课再讲。

C.2.4 分子不为常数情形的处理

这节课我们已经处理过的有理函数积分，都只关注了分母的结构是如何的，都默认把分子当作 1 了。但是出题人完全可以出这么一道题：

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2+1}.$$

这道题的解法是作微分变换 $x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}x^2 = \frac{1}{2}\,\mathrm{d}\big(x^2+1\big)$,然后就会发现这题化成了 $\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}\big(x^2+1\big)}{x^2+1}$,后面就很简单了。

类似地，积分 $\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$ 也可以直接这样凑微分做微分变换来解决。是不是也很简单?

好，那么我把这题稍作改动：

$$\int \frac{x}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x.$$

对吧,出题人就坏在这种地方。你搞懂了解题的套路,那出题人就要出点反套路的东西。那这题怎么思考呢?想想,积分 $\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$ 我们都很会做对吧?现在我们要求 $\int \frac{x}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x$,那就考虑一下，怎么把原来的积分转化成我们会做的积分。

这道题目还是比较明显的，$\frac{x}{x^2+2x+2}$ 可以表示成 $\frac{x+1}{x^2+2x+2} - \frac{1}{x^2+2x+2}$，而且我们很惊喜地发现这两个式子都是我们会做的积分。那么我们把思路整理一下吧：

$$\int \frac{x+1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{1}{2}\,\mathrm{d}\big(x^2+2x\big)}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2}\ln\big(x^2+2x+2\big) + C_1, \tag{3}$$

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} = \int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{(x+1)^2+1} = \arctan(x+1) + C_2. \tag{4}$$

然后求出 (3) − (4) 就可以了：

$$\int \frac{x}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\big(x^2+2x+2\big) - \arctan(x+1) + C.$$

那我把这题再稍作改动：

$$\int \frac{x}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x.$$

别看只是在分母上改了个一次项系数，这题和刚才那个的差别还挺大。如果你按照配方的法子做，就会喜提这样一个式子：

$$\int \frac{x}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{x+\frac{3}{2}}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x - \frac{3}{2}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3x+2}.$$

这两个积分，第一个直接凑微分就可以做，我就不废话了；第二个和上面提到的裂项操作挺像，

于是我们再把它进行分解：

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+3x+2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x+2}.$$

这样算了半天，终于能做了吧。

好了现在我来泼一盆冷水。这题我可以直接秒：

$$\int \frac{x}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{2}{x+2} - \frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = 2\ln|x+2| - \ln|x+1| + C.$$

惊不惊喜，意不意外？

C.2.5 通过分母选择合适的解法

让我们再来比较一下这四道题目：

$$\int \frac{1}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x,\ \int \frac{x}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x,$$
$$\int \frac{1}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x,\ \int \frac{x}{x^2+3x+2}\,\mathrm{d}x.$$

第一题因为分母配方之后会多出正常数，所以就要凑成类似 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$ 的积分；第二题因为分子上的 x 不好处理，所以就要在分子上加减常数凑出分母的导数；第三题因为分母可以因式分解，所以就可以进行裂项；第四题的分母也可以因式分解，所以裂项也能达到目的。

到这里我们就发现，如果分母能进行因式分解的话，那我们就没必要大费周章去凑分母导数了，直接裂项就行。那么什么情况下分母能因式分解呢？

上节课听过的同学们应该明白，$P(x)$ 能进行因式分解就意味着 $P(x)=0$ 有实数根。上节课摸鱼的同学也不需要担心，咱没必要去深究哈。举个例子来说，x^2-5x+6 对应的方程可以求出实根 $2, 3$，于是就可以因式分解成 $(x-2)(x-3)$；x^2-5x+7 对应的方程就没有实根了，它不能进行因式分解，换句话说就是配方之后还多个正常数。

那怎么去判断这个二次方程有没有实根呢？这下我们就明白了，应该用二次方程根的判别式。

我们假设分母的二次多项式是 ax^2+bx+c $(a>0)$。当 $b^2>4ac$ 时这个二次多项式可以因式分解，所以对应的积分就可以直接裂项。当 $b^2 \le 4ac$ 时这个二次多项式不可以因式分解，那就得想办法凑 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+1}$ 了。

这里有两道例题，你们自己看吧。下课！

$$\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+1)^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2} = \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C_1.$$
$$\int \frac{x+3}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = 2\int \frac{\mathrm{d}x}{x-1} - \int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = 2\ln|x-1| - \ln|x+1| + C_2.$$

C.3 部分分式分解与待定系数法

上节课我们介绍了最简单的有理函数积分方法，使得这类积分都能够得到解决：

$$\int \frac{px+q}{ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x.$$

但是我上节课急着走，所以还遗留了一个问题：如果被积函数能进行部分分式分解，那么具体要怎么做呢？比如说我讲了

$$\frac{x}{x^2+3x+2}=\frac{2}{x+2}-\frac{1}{x+1},$$

你们可能就会好奇这是怎么分解出来的。首先我要告诉大家，这不是靠猜出来的。一旦遇到个复杂的你连猜都猜不出来。分解方法其实很多，我先介绍一下最基本的待定系数法。

C.3.1 假分式化为真分式

裂项之初首先就应当保证这个有理函数得是个真分式。如果它不是个真分式怎么办？那就化成真分式。来看个例子吧：

$$\frac{2x^3-11x^2+18x-2}{x^2-5x+6}=2x-1+\frac{x+4}{x^2-5x+6}.$$

这个等式如果从右往左推的话，其实很显然，通分再合并同类项就行了；但是从左往右推那就麻烦了，不好办。

这个时候我们可以考虑，从左往右不好推，那我们设了待定系数然后从右往左推呗？比如说我可以设四个待定系数 A, B, C, D，把左边的式子表示成

$$Ax+B+\frac{Cx+D}{x^2-5x+6}.$$

接下来就通分再合并同类项，得到

$$\frac{Ax^3+(B-5A)x^2+(6A-5B+C)x+(6B+D)}{x^2-5x+6}.$$

我们来看看，这个式子等于啥呢？应该等于我们一开始给的那个假分式 $\dfrac{2x^3-11x^2+18x-2}{x^2-5x+6}$。那么现在我们的任务就是要求出合适的系数让它等于这个式子就行了。

这俩分母一样，我就没必要分析了。直接来看分子，我们要想办法求出 A, B, C, D，使得分子相等，也就是说

$$Ax^3+(B-5A)x^2+(6A-5B+C)x+(6B+D)=2x^3-11x^2+18x-2.$$

咱来对比一下三次项系数，那肯定是 $A=2$ 嘛；再看看二次项系数，显然有 $B-5A=-11$。

以此类推，我们就能想到，这里可以列出四个方程，构成如下的方程组：

$$\begin{cases} A+\ \ 0+\ 0+\ 0 &= 2 \\ -5A+\ \ B+\ 0+\ 0 &= -11 \\ 6A-5B+C+\ 0 &= 18 \\ 0+6B+\ 0+D &= -2 \end{cases}.$$

这就好办了，很容易就能解出 $A=2,\ B=-1,\ C=1,\ D=4$。

来回想一下，在这道题目当中我设了 A, B, C, D 四个待定系数，但是为什么我要设四个呢？我设三个行不行？设三个待定系数，解起来岂不更简单？

事实上不是这样的。设三个待定系数你就解不出来了。我们考虑一下 $Ax+B+\dfrac{Cx+D}{x^2-5x+6}$ 这个式子，它经过通分之后分子上会出现三次项。但是如果不设 A 这个待定系数呢？比如说

$$B+\frac{Cx+D}{x^2-5x+6}=\frac{Bx^2+(C-5B)x+(6B+D)}{x^2-5x+6}.$$

这就出现问题了。因为分子没有三次项，根本没法与原来的假分式形成对应关系，这就无解了。

那么要怎么设待定系数呢？至少要保证设出来的整多项式的次数是那个假分式分子与分母次数的差值。举个例子说，对于

$$\frac{x^3+2}{x+3}$$

来说，它的分子与分母差了 2 次，所以设成

$$Ax^2+Bx+C+\frac{D}{x+3}.$$

好的，那么我们再来练一道简单题吧：

$$\frac{x^9+2}{x^3+3}.$$

我发现很多同学一看到这道题就两眼发光，不用说话我都知道你们会做了。我相信你们的思路一定是设

$$Ax^6+Bx^5+Cx^4+Dx^3+Ex^2+Fx+G+\frac{Hx^2+Ix+J}{x^3+3}.$$

这么长，幸亏英文字母有 26 个够你用的。这么设有问题吗？没有。但是你们觉得这么做简单吗？不是吧。

事实上如果我换元 $t = x^3$，把这个式子变成

$$\frac{t^3+2}{t+3}$$

的话，它只需要设 4 个待定系数就好了嘛。接下来我来给大家做一下这个分解，先设

$$At^2 + Bt + C + \frac{D}{t+3},$$

然后通分化成

$$\frac{At^3 + (3A+B)t^2 + (3B+C)t + (3C+D)}{t+3}.$$

这样就可以比较分子上多项式的系数，列出方程组：

$$\begin{cases} A + \quad 0 + \quad 0 + \ 0 &= 1 \\ 3A + \quad B + \quad 0 + \ 0 &= 0 \\ 0 + 3B + \quad C + \ 0 &= 0 \\ 0 + \quad 0 + 3C + D &= 0 \end{cases}.$$

最后解出 $A = 1,\ B = -3,\ C = 9,\ D = -27$，所以这个假分式就化成了

$$t^2 - 3t + 9 - \frac{27}{t+3} = x^6 - 3x^3 + 9 - \frac{27}{x^3+3}.$$

C.3.2 真分式的部分分式分解

相信大家已经完全掌握了将假分式分解为整多项式和真分式的方法，那么我们接下来就来看看如何将真分式进行因式分解好了。我们进行部分分式分解的目的是，将分母次数较高的有理函数化成若干个分母次数较低的有理函数，比如

$$\frac{1}{x^3-1} = \frac{1}{3x-3} - \frac{x+2}{3x^2+3x+3}.$$

你们看，原本大家不知道 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-1}$ 怎么做。但是通过部分分式分解，我把这个积分化成了两个新的积分 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{3x-3}$ 和 $\displaystyle\int \frac{x+2}{3x^2+3x+3}$，它们都是最简单的有理函数积分，这就容易做了。

那么问题来了，如何进行这个部分分式分解呢？要研究这个问题，我们可以反过来考虑，分母次数较低的有理函数如何加出了分母次数较高的有理函数。我随便举个例子：

$$\frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} = \frac{(A+B)x^2 + (B+C)x + (A+C)}{(x+1)(x^2+1)}.$$

我们可以发现，等号右边的多项式之所以次数较高，其实是左边这几个加式通分造成的。那现在我们来尝试一下分解

$$\frac{6x^2-4x+1}{x^3+x^2+x+1}.$$

因为分母是一样的，那其实就是对比前面那个式子分子的系数，得到方程组：

$$\begin{cases} A+B+\ 0 &= 6 \\ \ 0+B+C &= -4 \\ A+\ 0+C &= 1 \end{cases}.$$

解出 $A=\frac{11}{2}$，$B=\frac{1}{2}$，$C=-\frac{9}{2}$。于是部分分式分解的结果就是

$$\frac{11}{2x+2}+\frac{x-9}{2x^2+2}.$$

从这个过程中我们能看出，部分分式分解的一个首要步骤是对分母进行因式分解。因为只有这样，才有可能把分解后的各个分母找出来。还是拿这个式子举例，倘若我们对分母进行因式分解变成 $(x+1)\big(x^2+1\big)$，我们就能知道要设的两个分式的分母分别是 $x+1$ 和 x^2+1。

那么分子怎么设呢？我们想一下，每个部分分式的分子次数都应该比分母低。如果分母是一次，那分子就是常数了；如果分母是二次，那分子就是一次或者常数。而在设待定系数的过程中，我们其实并不知道分子是一次函数还是常数。那么保险的做法就是设成一次的。

于是就很简单了，设成 $\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+1}$，再通分对比系数就行了。

那么再来一题吧：

$$\frac{1}{x^4-x}.$$

一上来的思路肯定是对分母进行因式分解。这里我们需要知道一个基本公式

$$x^3-1=(x-1)\big(x^2+x+1\big).$$

然后我们将这个式子进行因式分解，并设置好待定系数：

$$\frac{1}{x(x-1)(x^2+x+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{Cx+D}{x^2+x+1}.$$

接下来只需要对比系数列方程组就行了。

$$\begin{cases} A+B+C+\ 0 &= 0 \\ \ 0+B-C+D &= 0 \\ \ 0+B+\ 0-D &= 0 \\ -A+\ 0+0+\ 0 &= 0 \end{cases}.$$

最终解出 $A=-1,\ B=\dfrac{1}{3},\ C=\dfrac{2}{3},\ D=\dfrac{1}{3}$，然后就可以完成部分分式分解了：

$$\frac{1}{x^4-x}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{3x-3}+\frac{2x+1}{3x^2+3x+1}.$$

很简单，对吧。

C.3.3 分母含重因式的情形

接下来我们看一个稍微复杂点的部分分式分解情形。你们拿到这个积分

$$\int \frac{2x^2+x+4}{x^3}\,\mathrm{d}x$$

会怎么做呢?

相信大家的思路都很明确，就是

$$\frac{2x^2+x+4}{x^3}=\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}+\frac{4}{x^3}.$$

你们看，这样我就实现了部分分式分解，目的是把它化成多个简单幂函数的积分。这样一来，原来的积分就能够得到解决了。

受到这样的启发之后，我们来思考一下这个有理分式如何进行部分分式分解：

$$\frac{1}{x^3(x^2+1)}.$$

我们可以想到，它是由一个分母为 x^3 的分式和另一个分母为 x^2+1 的分式通分形成的。那么我们是不是可以设成

$$\frac{Ax^2+Bx+C}{x^3}+\frac{Dx+E}{x^2+1}$$

这样啊。不过我们再观察一下就可以发现，$\dfrac{Ax^2+Bx+C}{x^3}$ 还可以继续进行部分分式分解，否

则还是很难积分。那我们也不用搞这么麻烦了，直接这么写：

$$\frac{1}{x^3(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x^3}+\frac{Dx+E}{x^2+1}=\frac{(A+D)x^4+(B+E)x^3+(A+C)x^2+Bx+C}{x^3(x^2+1)}.$$

接下来就是比较分子列方程组暴算：

$$\begin{cases} A+\ 0+\ 0+D+\ 0 &=0\\ 0+B+\ 0+\ 0+E &=0\\ A+\ 0+C+\ 0+\ 0 &=0\\ 0+B+\ 0+\ 0+\ 0 &=0\\ 0+\ 0+C+\ 0+\ 0 &=1 \end{cases}.$$

能求出 $A=-1,\ B=E=0,\ C=D=1$，于是部分分式分解完毕：

$$\frac{1}{x^3(x^2+1)}=-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^3}+\frac{x}{x^2+1}.$$

再来举个例子：

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-1)^2(x+2)^2}&=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{x+2}+\frac{D}{(x+2)^2}\\ &=\frac{(A+C)x^3+(3A+B+D)x^2+(4B-3C-2D)+(-4A+4B+2C+D)}{(x-1)^2(x+2)^2}.\end{aligned}$$

然后列方程组

$$\begin{cases} A+\ \ 0+\ \ C+\ \ 0 &=0\\ 3A+\ \ B+\ \ 0+\ \ D &=0\\ A+4B-3C-2D &=0\\ -4A+4B+2C+\ \ D &=1 \end{cases}.$$

就能解出 $A=-\dfrac{1}{14},\ B=\dfrac{5}{42},\ C=\dfrac{1}{14},\ D=\dfrac{2}{21}$。

顺便一说这不是我自己做的，这是我昨天晚上备课的时候用 Mathematica 算的。要不然拿着这个四元方程组算半天那不得累死。你们考试不让带计算器，那是迫不得已，但你们得明白，暴算的活交给计算机就可以做，人要做的是创造性的工作，否则你拿什么和计算机竞争啊？

好最后我们再来一个分母含二次重因式的情形。不搞太复杂的，比如

$$\frac{x^2+3x-2}{(x^2+1)^2}.$$

这个思路也是仿照我们在前面遇到一次重因式的情况来处理，就是设

$$\frac{x^2+3x-2}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{(x^2+1)^2} = \frac{Ax^3+Bx^2+(A+C)x+(B+D)}{(x^2+1)^2}.$$

好了我懒得写方程组了，你们自己解一下吧，这题当课后作业。