文章编号：1007-9831（2011）05-0007-04

有理分式的快速分解方法及其应用

鲁志波，勒孚龙，张启慧

（信息工程大学 理学院，河南 郑州 450001）

摘要：根据有理分式的不同结构特点，给出了相应的分解为部分分式的快速算法及其应用，有效解决了这类函数的积分问题.

关键词：有理分式；部分分式；快速分解
中图分类号：O13 **文献标识码**：A doi：10.3969/j.issn.1007-9831.2011.05.003

Fast decomposition of rational functions and its application

LU Zhi-bo，LE Fu-long，ZHANG Qi-hui

（School of Science，Information Engineering University，Zhengzhou 450001，China）

Abstract: Gave several methods of fast decomposing the rational functions into portion fraction based on their mathematical structure. The integral of the rational functions can be effectively achieved by these methods.

Key words: rational function；portion fraction；fast decomposition

有理分式（又称有理函数）是由 2 个多项式的商所表示的函数[1]，即形如

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_{m-1}x+a_m} \tag{1}$$

的函数，其中：m 和 n 都是非负整数；a_0，a_1，$\cdots$，a_n 及 b_0，b_1，$\cdots$，b_m 都是实数，且 $a_0\neq 0$，$b_0\neq 0$. 这是不定积分和定积分计算中经常遇到的一类函数，处理这类问题关键的是分解有理函数为部分分式之和，通常使用“待定系数法”来解决[2-3]. 这种方法理论可完全解决有理函数的分解问题，但当多项式次数较高时，用这种常规方法计算往往很繁琐且容易出错，本文根据有理函数中分母 $Q(x)$ 的不同结构特点，给出直接计算分解系数的方法.

不失一般性，不妨设有理函数（1）中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 之间没有公因式，且有理函数为真分式，即 $n<m$.

1 单重一次因式

定理 1 若 $Q(x)=(x-a)Q_1(x)$，且 $Q_1(a)\neq 0$，则有分解式

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x-a}+\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \tag{2}$$

其中：$A=\left.\frac{P(x)}{Q_1(x)}\right|_{x=a}$；$P_1(x)$ 是一实系数多项式.

证明 在式（2）中利用待定系数法，并取 $x=a$ 即得式（2）. 证毕.

收稿日期：2011-04-01
基金项目：国家自然科学基金资助项目（60803154）
作者简介：鲁志波（1976-），男，湖北天门人，讲师，博士，从事函数论研究. E-mail：zhibolu@gmail.com

推论 若$Q(x)=\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)$，这里$a_i$为互不相同的实数，则

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{i=1}^{m}\frac{A_i}{x-a_i} \tag{3}$$

其中：$A_i=\left.\frac{P(x)}{Q(x)}(x-a_i)\right|_{x=a_i}=\left.\frac{P(x)}{\prod\limits_{k=1,k\neq i}^{m}(x-a_k)}\right|_{x=a_i}$.

由推论可以看出，当有理分式中分母为m个单重一次因式的乘积时，计算系数A_i只需把有理函数中分母里对应的因式$(x-a_i)$去掉后再代入$x=a_i$即可．系数计算式（3）形式简洁，应用方便，在分解有理函数时不需要像使用"待定系数法"时求解方程组，可以直接计算得到分解后的系数，极大地减少了计算量.

例1 分解有理函数$\frac{2x^2-x+1}{(x+1)(x-3)(x+2)}$.

解 有理函数中分母为3个一次因式的乘积，根据式（3），即有$A_1=\left.\frac{2x^2-x+1}{(x-3)(x+2)}\right|_{x=-1}=-1$，$A_2=\left.\frac{2x^2-x+1}{(x+1)(x+2)}\right|_{x=3}=\frac{4}{5}$，$A_3=\left.\frac{2x^2-x+1}{(x+1)(x-3)}\right|_{x=-2}=\frac{11}{5}$，故$\frac{2x^2-x+1}{(x+1)(x-3)(x+2)}=\frac{-1}{(x+1)}+\frac{4}{5(x-3)}+\frac{11}{5(x+2)}$.

2 r重一次因式

定理2[4]185 若$Q(x)=(x-a)^rQ_1(x)$，$r\geq 1$且$Q_1(a)\neq 0$，则有分解式

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{k=0}^{r-1}\frac{A_k}{(x-a)^{r-k}}+\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} \tag{4}$$

其中：$P_1(x)$是一实系数多项式；系数$A_k=\left.\frac{1}{k!}\left[\frac{P(x)}{Q_1(x)}\right]^{(k)}\right|_{x=a}$ $(k=0,\ 1,\ \cdots,\ r-1)$.

显然，$r=1$时，式（4）和式（2）相同.

例2 分解有理函数$\frac{16}{(x+3)^3(x-1)}$为部分分式.

解 分母中含有1个三重一次因式，设$\frac{16}{(x+3)^3(x-1)}=\frac{A_0}{(x+3)^3}+\frac{A_1}{(x+3)^2}+\frac{A_2}{x+3}+\frac{D}{x-1}$，由式（2）易得$D=\left.\frac{16}{(x+3)^3}\right|_{x=1}=\frac{1}{4}$；由式(4)可得$A_0=\left.\frac{16}{x-1}\right|_{x=-3}=-4$，$A_1=\left.\left(\frac{16}{x-1}\right)'\right|_{x=-3}=-1$，$A_2=\left.\frac{1}{2!}\left(\frac{16}{x-1}\right)^{(2)}\right|_{x=-3}=-\frac{1}{4}$，故$\frac{16}{(x+3)^3(x-1)}=\frac{-4}{(x+3)^3}+\frac{-1}{(x+3)^2}+\frac{-0.25}{x+3}+\frac{0.25}{x-1}$.

从例2可以看出，在计算系数A_k时可以利用计算A_{k-1}过程中的求导结果简化运算．但是当$Q_1(x)$是2个以上因式的乘积时，求导运算$\left(\frac{P(x)}{Q_1(x)}\right)^{(k)}$仍然很繁琐．在某些特殊情形下可使用极限法来计算分解系数.

定理3 若$Q(x)=(x-c)^r\prod_{i=1}^{m}(x-a_i)$（$c$, a_i互不相同）时，则

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{k=0}^{r-1}\frac{A_k}{(x-c)^{r-k}}+\sum_{i=1}^{m}\frac{B_i}{x-a_i} \tag{5}$$

其中：系数A_0和$B_i\,(i=1,\ 2,\ \cdots,\ m)$的计算同式（2）；当$k=r-1,\ r-2,\ \cdots,\ 1$时，$A_k=\lim\limits_{x\to\infty}x^{r-k}\left(\frac{P(x)}{Q(x)}-\right.$

$\displaystyle\sum_{j=0,j\neq k}^{r-1}\frac{A_j}{(x-c)^{r-j}}-\sum_{i=1}^{m}\frac{B_i}{x-a_i}\Bigg)$.

证明　显然，用式（2）可计算系数 A_0 和 $B_i\,(i=1,2,\cdots,m)$．当 $k=r-1,r-2,\cdots,1$ 时，在式（5）两端同乘 x^{r-k}，整理得 $A_k\dfrac{x^{r-k}}{(x-c)^{r-k}}=x^{r-k}\left(\dfrac{P(x)}{Q(x)}-\displaystyle\sum_{j=0,j\neq k}^{r-1}\dfrac{A_j}{(x-c)^{r-j}}-\sum_{i=1}^{m}\dfrac{B_i}{x-a_i}\right)$，令 $x\to\infty$，则有 $A_k=\lim\limits_{x\to\infty}x^{r-k}\left(\dfrac{P(x)}{Q(x)}-\displaystyle\sum_{j=0,j\neq k}^{r-1}\dfrac{A_j}{(x-c)^{r-j}}-\sum_{i=1}^{m}\dfrac{B_i}{x-a_i}\right)$.　证毕.

例 3　分解有理函数 $\dfrac{1}{(x-1)^4(x-2)}$.

解　设

$$\frac{1}{(x-1)^4(x-2)}=\frac{A_0}{(x-1)^4}+\frac{A_1}{(x-1)^3}+\frac{A_2}{(x-1)^2}++\frac{A_3}{x-1}+\frac{A_4}{x-2}\tag{6}$$

易知 $A_0=-1$，$A_4=1$．为避免用复杂的求导运算计算 A_3，在式（6）两端同乘 x，并令 $x\to\infty$，两端同取极限，则有 $A_3=-\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{A_4}{x-2}x=-A_4=-1$．在式（6）两端同乘 x^2，并令 $x\to\infty$，则有 $A_2=-1$．同理可得 $A_3=-1$，从而 $\dfrac{1}{(x-1)^4(x-2)}=\dfrac{-1}{(x-1)^4}+\dfrac{-1}{(x-1)^3}+\dfrac{-1}{(x-1)^2}+\dfrac{-1}{x-1}+\dfrac{1}{x-2}$.

3　二次因式

若有理函数中分母包含二次因式，这时候的分解一般都较为复杂，但在前面分析的基础上类似地有以下几种求解部分分式中待定系数的方法.

定理 4　若 $Q(x)$ 包含二次因式，即 $Q(x)=(x^2+px+q)^rQ_1(x)$，其中：$p^2-4q<0$；$r\geq 1$，设 $x^2+px+q=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})$，$Q_1(\alpha)\neq 0$，则有分解式

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{k=0}^{r-1}\frac{A_kx+B_k}{(x^2+px+q)^{r-k}}+\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\tag{7}$$

其中：$P_1(x)$ 为一实系数多项式；系数 A_k 和 $B_k\,(k=0,1,\cdots,r-1)$ 可利用以下 4 种方法计算：

方法 1　使用常规的待定系数法.

方法 2　复根代入计算法．两端同乘 $(x^2+px+q)^{r-k}\,(k=0,1,\cdots,r-1)$，然后代入复根 α（或 $\overline{\alpha}$）后比较等式两边的实部和虚部，依次计算 $A_0,B_0,A_1,B_1,\cdots,A_{k-1},B_{k-1}$，并利用这些结果计算 $A_k,B_k\,(k=0,1,2,\cdots,r-1)$.

方法 3　直接公式计算法．注意到在复数域内二次因式可进一步分解为 $\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}=\dfrac{c}{x-\alpha}+\dfrac{\overline{c}}{x-\overline{\alpha}}$，其中：系数 c 和 $\overline{c}$ 是共轭复数．因此可以利用定理 2 中的式（4）直接计算系数 c 和 $\overline{c}$，即

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{k=0}^{r-1}\left[\frac{c_k}{(x-\alpha)^{r-k}}+\frac{\overline{c}_k}{(x-\overline{\alpha})^{r-k}}\right]+\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\tag{8}$$

其中：$c_k=\dfrac{1}{k!}\left[\dfrac{P(x)}{(x-\overline{\alpha})Q_1(x)}\right]^{(k)}\Bigg|_{x=\alpha}$.

方法 4　当 $r=1$ 时，设 $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+px+q}+\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$，利用复根代入计算法易知，$Ax+B$ 满足

$$Ax+B=\left.\frac{P(x)}{Q_1(x)}\right|_{x^2+px+q=0}\tag{9}$$

此时不必解出 $x^2+px+q=0$ 的虚根再来分别计算系数 A 和 B，只需利用恒等式 $x^2+px+q=0$ 将有理函数 $\dfrac{P(x)}{Q_1(x)}$ 化为一次多项式即可整体上得到 $Ax+B$.

注1 将有理函数分解为部分分式的目的是为了计算积分，直接公式计算法中得到式（8）后，右端前 $r-1$ 项（$k=0, 1, \cdots, r-2$）先分别积分后通分，第 r 项（即 $k=r-1$ 项）则先通分后积分，即可得到实系数的有理式[4]185.

注2 式（9）在 $r=1$ 时相对较为简单，具有较强的实用性.

注3 一般地，当 $r>1$ 时，式（9）对计算系数 A_0x+B_0 同样适用.

例4 分解有理函数 $\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}$.

解 设 $\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}=\dfrac{Ax+B}{x^2+1}+\dfrac{Cx+D}{x^2+x+1}$，则由式（9）可得 $Ax+B=\left.\dfrac{1}{x^2+x+1}\right|_{x^2+1=0}=\left.\dfrac{x}{-1}\right|_{x^2+1=0}=-x$，$Cx+D=\left.\dfrac{1}{x^2+1}\right|_{x^2+x+1=0}=\dfrac{x+1}{-1}=x+1$，即有 $\dfrac{1}{(x^2+1)(x^2+x+1)}=\dfrac{-x}{x^2+1}+\dfrac{x+1}{x^2+x+1}$.

例5 分解有理函数 $\dfrac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}$ 为部分分式.

解 设 $\dfrac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\dfrac{C}{x-2}+\dfrac{A_0x+B_0}{(x^2+1)^2}+\dfrac{A_1x+B_1}{x^2+1}$，由式（3）得 $C=\left.\dfrac{2x^2+2x+13}{(x^2+1)^2}\right|_{x=2}=1$，由式（9）得 $A_0x+B_0=\left.\dfrac{2x^2+2x+13}{x-2}\right|_{x^2+1=0}=-\dfrac{1}{5}(-2+15x+22)=-3x-4$，则化简分式易得 $\dfrac{A_1x+B_1}{x^2+1}=\dfrac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}-\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{-3x-4}{(x^2+1)^2}=\dfrac{x+2}{x^2+1}$，从而有 $\dfrac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}=\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{3x+4}{(x^2+1)^2}-\dfrac{x+2}{x^2+1}$.

本文针对有理函数的结构不同，给出了不同的分解为部分分式的方法，通过综合应用以上方法，可以避免常规待定系数法中求解多个方程的繁琐计算，具有较强的实用性和可操作性. 需要指出的是，一些特殊情况使用其他特殊方法可能更加简便，大多数情况中需要综合运用以上方法来确定部分分式的系数.

参考文献：

[1] 同济大学应用数学系. 高等数学[M]. 5版. 北京：高等教育出版社，2002
[2] 姜长友，张武军，魏宝军，等. 高等数学教与学[M]. 北京：北京航空航天大学出版社，2010
[3] 吉米多维奇. 吉米多维奇数学分析习题集[M]. 济南：山东科技出版社，2005
[4] 朱文辉. 分解与积分有理函数的直接方法[J]. 大学数学，2007，23（6）：182–185

（上接第6页）

3.3 用以证明调和函数的极值原理

调和函数的极值原理 设 $U(z)$ 是区域 D 内的调和函数，并连续到边界 C 上，则 $U(z)$ 只能在 C 上取得最大值和最小值，除非在 D 内 $U(z)$ 为常数.

证明 因为调和函数 $U(z)$ 的最小值点就是函数 $-U(z)$ 的最大值点，而 $-U(z)$ 也是调和函数，所以只对最大值的情形证明就够了.

设 $U(z)$ 是 D 内解析函数 $f(z)$ 的实部，考察函数 $F(z)=\mathrm{e}^{f(z)}$，显然 $F(z)$ 在 D 内解析，且 $|F(z)|=\mathrm{e}^{U(z)}$，$F(z)\neq 0$. 如果 $U(z)$ 在 D 内一点 z_0 处取得最大值，则 $|F(z)|$ 也就在 z_0 处取得最大值，这与最大模原理矛盾，除非 $F(z)$ 为常数，从而 $U(z)$ 为常数. 证毕.

参考文献：

[1] 钟玉泉. 复变函数论[M]. 3版. 北京：高等教育出版社，2004
[2] 余家荣. 复变函数论[M]. 3版. 北京：高等教育出版社，2000
[3] 路见可，钟可寿. 复变函数论[M]. 2版. 武汉：武汉大学出版社，2007
[4] 金晶亮. 非线性测量误差模型的 Bayes 估计[J]. 南通大学学报：自然科学版，2009，8（2）：91–96
[5] 李泽安，葛建芳，章雅娟. Beta 回归模型在数据挖掘预测中的应用[J]. 南通大学学报：自然科学版，2009，8（3）：83–85
[6] 彭小智，凌能祥. 相依样本下回归函数分割估计的渐近正态性[J]. 南通大学学报：自然科学版，2009，8（4）：89–94