第一讲　微分与积分

2001年10月11日

1　微积分的起源：牛顿与莱布尼兹

讲到微积分,最要紧的两个人是牛顿(Issac Newton, 1642-1727)跟莱布尼兹(Gottpied Leibniz, 1646-1716), 微积分就是他们发现的. 关于牛顿, 有兴趣的是他做这个工作是在学生的时候, 也许比你们的岁数还要小, 那个时候, 也就是17世纪那个时候, 欧洲瘟疫很厉害, 欧洲死了很多人. 他在英国剑桥大学, 因为瘟疫的关系, 学校放假了, 他就回家在家里做关于微积分的这些工作. 莱布尼兹是一个各方面都非常优秀的人, 数学是他的兴趣的一部分, 他的兴趣到宗教、法律各方面都有. 他们两人之间有点争论, 是因为争论谁是微积分的发现者. 这个争论是不幸的, 也没有什么意义. 实质上是莱布尼兹头一个发表关于微积分论文的人, 他的论文在1684年发表. 牛顿做这个工作早于莱布尼兹, 而莱布尼兹发表论文早于牛顿, 牛顿有了这个工作后没有发表什么任何的东西. 而莱布尼兹不但发表了这些东西, 同时还引用了一些符号, 也许我们现在还在用. 那么后来两个人有一个争论, 大概都是跟数学没有关系的人在那里造成的情况, 这不是一个什么有意思的事情.

2　微积分基本定理

微积分是数学里头很重要的方面. 至于什么是微积分呢？我想微分的发现跟笛卡儿发现坐标非常有关系, 因为笛卡儿发现坐标之后, 数学主要的目的就是研究函数, 研究两组数的关系, 有种种的关系. 我们知道, 函数有种种, 有线性的, 非线性的, 三角函数等种种函数,那么要怎么样地研究函数的性质? 我们都知道, 函数可以用曲线来表示, 如$y = f(x)$ 这条曲线. 在这条曲线的每点, 如果它是可以微分的话, 那么它在每点有个切线. 微分就是把这个曲线用它的切线来研究它的性质. 所以也等于说它是把函数线性化, 线

性化之后, 可以加、减、乘、除, 可以计算, 因此可以得到数出来. 数学要是能够得到数出来, 总是很要紧的. 所以微分大概是说用曲线的切线来研究曲线的性质. 积分来得早了,因为积分实际上大致讲起来, 它是要计算面积. 那么假使平面上有一个区域, 由曲线来做为边界, 它的面积有多大, 圆周的面积有多大, 这里的问题是积分的开始, 也是积分重要的目的. 因此, 实际上, 积分的发展在微分之前. 积分当时也没有一定的定义, 积分就是有个极限的观念. 曲线所围城的区域一般想法子用直线来逼近, 使得逼近的曲线趋于你的边界的时候, 就有个极限, 就是这个区域的面积. 所以, 总而言之, 积分的发展在微分之前. 中间这两个问题好象没有关系, 但是其实这关系非常的密切. 积分差不多是微分的反运算. 比方说, 假使你求这条直线跟两条垂线所成区域的面积, 这两条垂线, 一个是$s = a$,一个是$s = x$, 你要去算这个区域的面积, 是个定积分$\int_a^x f(x)dx$, (读作$f(x)$定积分从$a \to x$). 这是当年莱布尼兹的符号, 这个积分的符号记成这样, 因为积分总是代表一个和, $\int$代表和(sum). 假设面积一边由$s = a$ 的直线作边界, 另一边是任意的x, 你把x这条直线移动的话, 就得到一个x的函数, 这个函数, 我叫它$A(x)$, 就是我图上的面积, 是个积分, 所以它是一个数目, 与x有关, 所以是x的函数. 这个函数跟曲线方程$y = f(x)$这个函数有密切关系. 为什么有密切的关系呢？很简单地看看, 假如求$A(x) = \int_a^x f(x)dx$的微分, 求它的微分嘛, 就是说, 求$s = x, x + \delta x$ 所围成的这个小条区域的面积. 现在如果你拿δx除的话, 我想很容易看出来了, 这个极限就是$f(x)$. 所以很容易看出来$A(x)$这个函数的微分就是$f(x)$, 因此

$$\frac{dA(x)}{dx} = f(x). \tag{1.1}$$

这就是微分同积分的基本的关系. 这个关系说$A(x)$是一个积分, 求它的微分的时候, 就得$f(x)$. 这个一般地, 叫做微积分的基本定理. 我从前在南开念微积分的时候, 始终不懂为什么这是一个微积分的基本定理, 因为一般地把这个关系式写成

$$\int f(x)dx|_a^b = \int_a^b f(x)dx \tag{1.2}$$

形状. 左边积分是个不定积分(indefinite integral), 不定积分是个函数, 左式

是函数在b的值减去函数在a的值, 等于这个定积分(definite integral). 所以从这个关系知道要求积分的话, 只需要求一个函数, 它的微分是已知的,就是$f(x)$, 即微分是已知的. 所以这样微分跟积分连起来了. 互相的, 积分等于微分的反运算, 有了$f(x)$, 要找一个函数, 它的微分等于$f(x)$, 是个反运算. 因此微、积分有密切的关系.

3 多元微积分

上面讲的是一个变数的微积分. 下面讲高维的, 要多变数的. 多变数的话, 有新的现象, 是什么样的呢？我想对于多变数的, 我们先不看别的, 先看两个变数的情形, x跟y, 那么我们知道这个时候微分的观念的推广是偏微分, 等于x跟y分开求微分. 积分的观念推广是重积分. 二重积分(double integral)是在2维的情形, 在高维的情形是多重的. 先看2维, 2维的情形就有了区域, 我们叫它Δ, 那么它的边界叫它γ. 所以积分的一个自然推广是一个2重积分, 普通积分把x分成小段, 然后取小段再乘上这个函数, 求一个和. 在2重积分的时候, 方法也是把区域分成小块, 然后取每一小块的面积, 在其上函数值乘上它的面积, 然后求它的和. 很不得了的, 假使函数好的话, 无论你如何圈你的区域,极限是一样的, 所以这极限就是2重积分

$$I = \int\int f(x,y)dxdy. \tag{1.3}$$

在2维的时候, 甚至高维的时候, 一个重要的现象是, 我们现在有2个变数x, y, 换变数怎么样？所以我现在换变数, 换变数当然是在微积分里是很重要的一个办法, 因为很多的问题是看你的变数是否选择得适当, 有时换变数, 问题就立刻简单化了, 就可以解决了. 现在我换变数：

$$\begin{cases} x = x(x', y') \\ y = y(x', y') \end{cases} \tag{1.4}$$

其中, (x', y')是另外一组坐标. 我们发现一个事实,在高维的时候,微分的乘法, 我们写成$dx \wedge dy$, 这是一个乘法, 怎么乘呢？$dx \wedge dy$在微积分上是最微妙的观点. 什么叫微分？什么是dx？这个是困扰了数学家几百年的事. 怎么

样定微分的定义跟究竟什么是dx, 这个很麻烦, 可以做到很满意, 不过把它讲清楚需要有一定的时间. 所以我马马虎虎说有一个dx. 在dx, dy这种微分之间要建立乘法$\wedge$. 什么叫$dx \wedge dy$? 这个问题更复杂了, 你如果dx, dy本身是什么都不清楚, 乘了以后是什么东西更是一个很微妙困难的问题. 在这方面有一个大的进步, 就是引进外代数和外微分. 假定$dx \wedge dy$这个乘法是反对称,

$$dx \wedge dy = -dy \wedge dx. \tag{1.5}$$

这个问题就清楚简单了. 因为乘法如果是反对称的话,当然$dx \wedge dx = 0$. 事实上, 因为$dx \wedge dx = -dx \wedge dx$, 所以$dx \wedge dx = 0$, 在反对称的乘法之下, 把$dx \wedge dy$看成变数, 因为乘法是反对称的, $dx^2 = 0$, 所以就没有高次的东西了. 这样得到的代数叫做外代数. 这个代数很妙的. 有一个立刻的结论：换变数公式为

$$dx \wedge dy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(x', y')} dx' \wedge dy'. \tag{1.6}$$

假使我们的微分用的是偏微分, 所以

$$dx = \frac{\partial x}{\partial x'} dx' + \frac{\partial x}{\partial y'} dy', dy = \frac{\partial y}{\partial x'} dx' + \frac{\partial y}{\partial y'} dy'. \tag{1.7}$$

现在用外乘法一乘, $dx' \wedge dx' = dy' \wedge dy' = 0$. 而$dx' \wedge dy'$因为乘法是反对称的, 所以是刚好乘以$x = x(x', y'), y = y(x', y')$ 的雅可比$\frac{\partial(x,y)}{\partial(x',y')}$, 这个符号是雅可比, 是四个偏微分所成的行列式, 所以

$$dx \wedge dy = \frac{\partial(x, y)}{\partial(x', y')} dx' \wedge dy'. \tag{1.8}$$

这个刚巧是我们重积分换变数的一个关系.我们知道重积分要是换变数的话, 它应该乘上雅可比. 所以这个结论就是, 对重积分的Integral, 即积分下的式子, 把积分号丢掉, Integral是一个微分多项式, 乘法是反对称的. 所以假使多重积分有3维, 4维到n 维的空间, 多重积分的Integral可看成是外代数的多项式, 那么换变数就自然对了. 这里头有一点微妙的地方, 因为通常, 你要证明换变数的公式的时候, 假定雅可比是正的, 不然的话, 乘上雅可比的绝对值, 使它是正的. 这个是高维几何微妙的东西, 就是空间有个

向(Orietation),你转的时候, 有2个相反转的方向. 转的时候, 假使改了方向的话, 雅可比是负值, 因此我们一个结论是多重积分的Integral应该是一个外代数多项式, 是dx, dy的多项式, 乘法是反对称, 这样换变数完全可以对的, 当然我只做了2维的例子. 高维是很明显的, 同样的.外乘法是妙得很呐, 是不会有高次的, 所以比较简单, 平方一下,就是0.

4 外微分

上面讲了这么样一种关系, 甚至这关系还更要好, 我们讲高等微积分的时候, 一个重要的定理是格林定理(Green's Theorem). 就是说, 假使你有个区域, 在边界上的微分是可以变为区域上的微分, 是一个一重积分和二重积分的关系, 这是个非常重要的关系. 比方龚升教授有一本小书, 讲到这个关系, 他认为这是整个微积分的基本定理, 我是同意的. 这样的关系现在通常写格林定理的时候, 往往是写成有积分,

$$\int_\gamma Adx + bdy = (\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y})dxdy. \tag{1.9}$$

如果有一个问题, 有时候你可以只管Integral, 不要管其它, 那么Integral就是把一个一次微分式变为两次微分式, 这怎么变呢？公式定理是这样子: 我就引入一个外微分, 我们刚才讲$dx \wedge dy$ 是一个多项式, 是一个外代数的一个式子, 就象我们普通多项式一样,不但如此, 对于这样的式子, 我们还可以定义它一个微分,

$$d(Adx + Bdy) = dA \wedge dx + dB \wedge dy = A_y dy \wedge dx + B_x dx \wedge dy. \tag{1.10}$$

叫外微分(Exterior differential calculus). 外微分很简单, 假设有$Adx + Bdy$, 它的微分就是微分它的系数, 也就是微分函数. A与B是x, y的函数, 所以就微分A, B . A的微分就是$A_x dx + A_y dy$, B的微分就是$B_x dx + B_y dy$, 可是$A_x dx \wedge dx = 0$ 就得到$A_y dy \wedge dx$, 第二项就得$B_x dx \wedge dy$. 但是因为乘法是反对称的, 所以就得$(B_x - A_y)$, 这是格林定理里头2重积分的系数, 所以格林定理把单次积分变成两次积分, 它的Integral实际上是个外微分. 可以看出外

微分是很妙的东西, 因此你可以把积分号丢掉, 就说我们拿dx, dy造一个外代数, 对这个外代数有个外微分, 外微分很简单, 就是假使微分各项的时候, 其实是对每项系数微分, 结果我得到一个多项式, 这个多项式的次数高一个. 作为函数就变为一次微分式了, 所以次数高一个, 因此就作为原来是k次的话,得到一个$k+1$次的微分式. 这个是格林定理中如何把曲线微分的微分式变为区域微分式, 一重微分变为二重微分的公式. 这个就很好了, 因为这里面有一个外代数, 所以把这个微分式乘起来, 用一个外乘法, 微分的乘法是反对称. 然后呢, 现在我有一个微分, 它把k次的外微分式变为$k+1$次的外微分式, 这样子就把这个外微分式中间给了一个新的结构, 可以微分, 这个微分跟普通的微分不一样, 它是把k次变为$k+1$次, 微分一般地总是加一次. 这个外微分是最早时候Frobenius, Dauboux和我的老师Elie Cartan引进来的. 他们最初引进这个观念是对于一次微分式, 是Frobenius, Dauboux引入的一次微分式. 而Elie C artan是法国的教授, 是我的老师, 他恐怕是二十世纪, 也就是上个世纪最伟大的几何学家, 法国巴黎大学的教授. 我想这种教授很是模范, 他不做别的活动, 专做数学, 时常功课是完全新的. 有一年, 他给了一门课, 是《解析力学》(Analytical Mechanics), 他把外微分的观念从Frobenius, Dauboux从一次式的定义推广到高次式, 所以整个的外微分是Elie Cartan引进来的, 这是有用的东西. 这个外微分有奇怪的现象: 是用两次之后等于0.

$$d^2 = 0, \tag{1.11}$$

即这个外微分用两次等于0. 我们要证明(1.11), 就是对无论一个k次微分式, 微分一次就变为$k+1$次, 两次就变为$k+2$次微分式, 它一定是0. 要证明这一点, 我证明对于函数对了, 就行了. 所以我要证明对于任意的函数f, 把这个d, 外微分用两次, 就等于0, 即$d^2 f = 0$ 就行了. 那么为什么呢？因为显然我要证明$d^2 = 0$, 只要证明d^2作用在只有一项上对就行了, 这是因为它是线性的, 所以如果线性一项有这个性质, 那么整个的和就等于0. 那么一项的话, 都是一个函数乘上一组dx, 我现在选dx_i, 就是假定在高维,在n维, x_i就是x_1到x_n, 在高维时, 如果有一个函数f,f是$x_1, \cdots, x_n$的一个函数, 对于这个函数, 用外微分两次, 一定等于0. 事实上, 因为外微分一次就得到a_i是f_i

对x_i的一个偏微分, 那么再用一次呢, 它的系数就是从x_i 到x_j微分a_i, a_i是f的对x_i 的微分, 所以这是f对从x_i到x_j的二阶微分:

$$d(a_i dx_i) = \frac{\partial a_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_i, \tag{1.12}$$

这个函数对于i, j是对称的. 事实上我们知道一个函数微分两次的话跟次序没有关系, 是对称的. 如果一个对称的函数是$dx \wedge dy$的系数, 而$dx \wedge dy$是反对称的, 那么它就等于0 了. d 是一个外微分, 是对外代数的多项式的一个运算, 这个运算运用两次就等于0 了, 这是一个了不得的关系. 因为几何上讲, 假使你有一个区域, 你取这个区域的边界, 再取这个边界的边界, 就没有边界了. 假使你取的边界是整个球, 那么球没有边界. 所以几何上讲有一个运算求边界, 求边界的话, 用两次, 就等于0. 有一个区域的求一次边界是一个很好的区域, 即不再有边界了, 这个几何的性质跟外微分的性质是对偶的. 求两次边界一定等于0,这是个几何的性质; 求外微分两次等于0, 是个分析的性质. 这两个东西不是两个互不相关的东西, 是完全对偶的, 是一回事. 一个边界通常用符号∂表示, 边界两次等于0, 即$\partial^2 = 0$. 它跟外微分是对偶的. 这是一个了不得的几何关系, 了不得的数学上的关系, 妙得不得了, 因为求边界是一个几何的问题, 更是一个整体的问题, 一定要拿整个区域乘上边界, 但是求外微分是个分析的问题, 是个局部的问题. 要外微分只要知道这个微分式在一点附近的性质就有了. 这一个局部的运算跟一个整体的运算有这样对偶的关系是很难得的事情, 是一个重要的几何现象, 是重要的数学现象. 为什么对偶呢？其实这就是格林定理的推广, 就是Stokes定理. Stokes定理讲, 假使有一个区域, 把它封闭上, Δ^k是这样一个k维的区域, 所以它的边界就是边界$\partial\Delta^k$. 那么假使有一个微分式叫做α, 它的次数是$k-1$($\deg\alpha = k-1$), 于是我们就有这么一个关系: α 在边界的积分等于$d\alpha$ 在Δ^k的积分,

$$\int_{\partial\Delta^k} \alpha = \int_{\Delta^k} d\alpha. \tag{1.13}$$

这是重要极了的定理, 通常用Stokes 名义. Stokes 是英国的应用数学家, 你们大概在这个课中已经听到Stokes 定理. Stokes 定理就把两个普通的运算,

一个是等于区域的边界的运算, 一个是等于外微分的积分, 这两个有简单的关系. 假使我们把外微分的积分写成这个关系,

$$(\partial\Delta, \alpha) = (\Delta, d\alpha). \tag{1.14}$$

这个外微分成一个矢量空间(Vector Space), 可以加减, 这个区域也是另外一个矢量空间,也可以加减. 假使这两个矢量空间经过积分, 因此就有一个所谓的“对”(pair), 这个矢量空间的一点和那个矢量空间一点连在一起是得到一个正数, 得到一个数, 那么St okes定理就是说这个paring使得对Δ的作用的算子∂ 与外微分d 是伴随的(adjoint), 是对偶的“对”, 这就是Stokes定理的意义. 高维时, 及任意维时都是对的.龚升教授在他的小书里说, 这个是微积分的基本定理. 从它就给出我们普通微积分的基本定理. 因为假使$k = 1$, 那么我们的区域是一个线段, 从a 到b的线段, 这个线段就是Δ, 它的边界呢, 是b点减a点. α 在这里是一个函数, 上次讲的$d\alpha$是个积分, 在一维的情形就是用到直线上. 因此在一维的情形Δ是个线段, 它的边界是$b-a$, α是一个函数f,所以$d\alpha$是df, 于是

$$(b-a, f) = (\Delta, df) \Longrightarrow f(b) - f(a) = \int_a^b df. \tag{1.15}$$

这就是说函数在b点的值减去函数在a点的值等于df在这个线段上的积分, 这个就是所谓微积分的基本定理. 也就是说右边是从a到b积分df, 左边就是$f(b) - f(a)$, 这就是我们的基本定理, 所以Stokes定理是微积分的基本定理在高维的推广. 因此在多元的微积分里头也是个进步, 非常有用, 因为外微分包含很多材料. 有一个公式很容易证明的, 就是你把两个外微分的式子α跟β相乘, 而求这个的外微分,

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \wedge d\beta, \tag{1.16}$$

这个公式很容易证明, 因为简单地只要假定α和β都单项就行了. 这是由于对于α和β都是线性的. 假定它们都是单项的, 就可以写成$dx_1, \cdots, dx_k, \cdots, dx_n$, 前头乘个函数一算就可以得到了. 所以它们这个乘法之间和外微分有这样一种简单的关系. 这个关系不但如此, 还可以更远的, 因为假使有一

个运算,它的平方等于0, 这是很不得了的, 这个就可以造一个除法, 有个商(quotient). 这样得到一个除法, 现在叫做同调(homology). 现在许多数学的发展都是有个运算, 加两次等于0, 你就能造一个quotien t, 怎么样呢, 什么叫quotient呢? 就是你把所有的满足$d\alpha = 0$的α, 被所有$d\beta$来除, 即

$$\{\alpha|d\alpha = 0\}/d\beta. \tag{1.17}$$

要是$\alpha = d\beta$的话, 因为$d^2 = 0$, 所以$d\alpha = 0$. 因此你取所有的所谓的闭形式(close form), 被可以写成d什么的东西来除, 就得到在数学里头用一个唬人的名字叫homology. 也就是取所有的k次的微分式, 它们是封闭的(被d作用为0), 被所有的$d\beta$的除, 造一个商结构, 这个商结构就叫做homology. 你可以用到这个d, 也可以用到这个边界. 用到边界的, 历史上, 是在拓扑里头, 先有用边界的, 因为用的是∂的homology 叫上同调(cohomology). 这是由于历史的关系, 名字用掉了, 所以叫cohomology. 这个很厉害, 假使你有一个流形, 它是紧致的, 它的cohomology form是有限维的, 这个有限维的维数叫这个空间的Betti 数(Bett i Number). 这是拓扑的内容, 单学微积分, 可以不必去管, 不过这个领域整个的有重要的发展, 是近来数学的发展基本内容, 当然很要紧了. 你有一个很大的空间, 所有微分式组成的空间大得不得了, 它有结构, 你可以加减, 也可以求外微分, 大得不得了, 然后呢, 它有些几何的性质,取quotient, 这个quotient是有限的, 这个有限有个好处, 得到数目有限, 是说有限维的维数是多少. 得到一组数, 这组数目就是这个空间的重要性质, 因为得知Betti 数是一个整数, 有一群整数很要紧, 比方说, 球面,球面有这种Bet ti 数, 环面也有Betti 数, 它们是不一样, 下面搞拓扑的人想法要证明这种Betti 数是拓扑不变量, 因此拓扑在数学的运用中就要紧了.

第二讲　指数与对数函数

2001年10月19日

1　本课的计划和目的

还有几分钟, 我想趁这个机会讲一讲我的计划和目的. 我这个课的课时是8个小时, 但微积分大得不得了, 微积分的范围很广. 不要说8个小时, 就是80个小时也讲不完的. 所以我当然只能讲个大概, 尤其是介绍整个的有一些意义的问题. 至于详细的情形我没法去多讲. 不详细的定义或者证明, 我想你们已经学过微积分, 所以我都不一定要给你们参考书, 你们回去看一看自己以前用的书, 大概在书里找得到. 也有我的讲的范围和内容是书中没有的. 我觉得应该提一提微积分整个的影响或者是在那些方面向前发展. 可以说, 微积分向前发展大概有两个最重要的方面. 一个是在几何的应用. 微积分在微分几何的应用, 最早是Gauss. Gauss也许不是最早的, 应该还有别的人, 如Euler, Monge等人. 不过, 我想Gauss是19世纪全世界最伟大的数学家. 数学在那时候, 全世界也就是西欧了. 因为这个原因, 德国的数学在19世纪是全世界最好的. 那时, 不但有Gauss, 还有Gauss的影响及其学生. Gauss最要紧的学生就是Riemann. 因为有Gauss和Riemann, 德国的数学就领先, 领先的意思就是大家跟着他的方向去发展. 在几何上的应用的发展是很多的. 当年Einstein曾说过物理现象就是几何现象, 以此发展他的广义相对论. 广义相对论当然要用坐标, Einstein了解最初的坐标表示几何问题, 希望坐标(x, y) 有几何的意义. 当一个物理学家觉得应该有几何的或物理的意义时, 他做起来才比较合理. 不过, Einstein慢慢了解这个做不到, 因为空间呢, 来得比较复杂, 它允许任意坐标, 允许坐标的任意选择, 因此也允许坐标变换, 这就是我们现在所叫的流形. 流形的概念是空间概念的推广. 本来用的是Euclid空间或者非欧空间等只有几个空间, 现在推广的流形就整个推广了. 推广了以后, 整个的空间观念在物理上影响向前发展了. 因此几何里头要描写物理现象就需要几何新的概念. 除了流形之外, 还有纤维丛的

观念. 在下面的课中, 我想稍微跟大家讲一讲几何方面的发展. 微积分还有一个发展, 最要紧的是复数. 很奇怪的, 普通的数目是实数, 那么在实数域上, $x^2+1=0$ 就没有解. 在复数域上, 我们不但使它有解, 并且复数有非常巧妙的性质, 有很多现象都被放在复数里头了. 复数与实数一样, 有运算的规律, 你用这个规律之后, 复数代表了很多现象. 我们以后会看到在复数里头的这些内容. 所以, 数学要应用, 我们这个课是应用数学, 要学会应用. 要应用的话, 会发现复数很要紧. 因此, 复变函数论在19世纪的发展是数学里头最要紧的, 是一个比其它方面的发展来得更要紧一些的发展. 最后, 我得留点时间讲讲在复数方面的应用. 复数不只是使得对于任一个方程式有解, 并且利用复数, 很多数学问题来得简单. 复变函数论比实变函数论简单多了. 实变函数论有许多抽象的问题, 其实与实际不大有关系, 不过当时也需要了. 所以这是两个题目, 我要在这个课程里头把它们想办法讲一点, 使得大家能了解微积分在它们上的应用是最重要的两个方向.

2 关于Stokes公式的补充

上次讲到了微积分的基本定理, 有时候就写成这种形状：

$$\int_a^b f(x)dx = \int f(x)|_a^b \to L(\int f(x)dx) = f(x), \tag{2.1}$$

即这两个式子相等. 很惭愧地, 当年我在南开思源堂念微积分, 我自己就有一个问题, 为什么这就是基本定理, 始终不懂. 很不幸地, 你们大概现在也还有这个习惯, 不敢问问题. 我那时也不敢问问题, 跟你们现在一样, 始终不懂, 过了很多年, 才知道(2.1)的确是基本定理. 这是因为(2.1)说明了微分与积分的关系. 这个式子的两端, 一边是个定积分, 是一个面积, 右边是微分相反的运算, 所以右边的积分是一个不定积分, 换句话, 是一个函数, 它的微分是$f(x)$. 也就是说, 它的左边是积分, 右边是微分. 那么这个基本定理就说明了微分与积分的基本关系. 大致上说, 微分是积分的一个反运算, 就是要找一个函数, 使得它作为已知函数的微分. 现在的问题是, 到了高维怎么样？这个基本定理是一个变数的. 现在假设多变数, 会怎么样？这就是

多变数的微积分. 有一个n维的空间, n维下来就有许多不同的维. 多变数的微积分基本观念是个重积分, 在平面上是一个二重积分, 在高维的空间是多重积分. 我上次讲了, 积分有一个积分的区域, 积分是在一个区域里求积分, 然后还有一个算子, 主要讨论积什么东西, 这一个函数是什么东西. 我上次讲这个算子是一个外微分, 外微分就是dx, dy 这些微分乘起来. 不过这个乘法是反对性的, 反对称妙极了. 因为反对称之后, 一个dx 不能够存在两次, 即$(dx)^2 = 0$. 一个要紧的问题是什么叫dx, 这个问题比较复杂,讲起来比较长. 这个问题也就是什么是一个函数的微分. 我们假定dx是确定的, 有意义的. 以dx为变数造一个多项式, 这个多项式的乘法是反对称, 这种反对称乘法的多项式叫外微分式, 外微分式就是指积分的一个对象, 在一个区域里积这个外微分. 这也可以看作一种配偶(pair), 有一个区域, 再有一个积分和, 放在一起, 积分有一个值, 这个值是一个数, 这两个是配合的结果. 有了这个多重积分的观念之后, 多变数的微积分基本定理, 就是所谓的Stokes定理. Stokes定理是一个几何的现象与一个分析现象联合的结果. 在高维时候, 例如在n维的空间, 假使存在一个k维的区域, 它可以是低维的任意区域. 有这样一个k维区域, 例如平面上一个二维区域, 空间中一个曲面等, 很明显地, 这个低维区域有一个边界. 区域有边界的观念是代数拓扑一个基本观念, 你要研究它的边界关系, 一个深刻的研究就引到所谓（下）同调群(homology). 同调群是代数拓扑研究空间性质的最基本的一个观念. 现在有一个k维区域Δ, 它的边界写成$\partial\Delta$. 另外有一个$(k-1)$维外微分, 外微分式子是$k-1$次, 微分以后为k次. 所谓Stokes定理, 就是说对于ω是一个$k-1$维外微分式, 它的外微分$d\omega$ 在Δ上积分等于把ω在Δ边界上求积分, 即

$$\int_\Delta d\omega = \int_{\partial\Delta} \omega, \omega \text{ 是外微分式.} \tag{2.2}$$

这个就是所谓Stokes定理. 这是多变数微积分的一个基本定理. 在龚升先生写的书中, 也特别提出这个观点. 这个基本定理的确包括我上面讲的那个基本定理作为特别情形. 假使这个空间是1维的, 在1维的情形, 区域是线段, 它的边界就是线段的两个端点, 两个点. 求ω在两个端点的值(其中ω为那个不定积分)就是我在上面基本定理的公式的右边函数在b的值减去在a的值, 就

是在边界上ω的积分, 而左边就是在这个线段的积分, 就是从a到b的定积分. 所以, 不难看出来Stokes定理在直线(1维)的情形就是微积分的基本定理. 那么2维的情形呢？2维就是很有名的所谓Green定理:

$$\int (P_x - Q_y) dxdy = \int Pdx + Qdy \tag{2.3}$$

2维情形时, 区域是2维的, 它的边界是曲线. 于是(2.3)就是平常的Green定理, 你们都知道, 都很熟悉. 所以Stokes定理在平面上的特别情形就是Green定理. Stokes定理有不同的名字, 看你用哪一本书. 不过现在比较通行叫Stokes定理. 那么还有另外的一个特别情形: 在三维空间, 假设有一个曲面, 它是一个三维区域的边界, 那么CI此时Storkes定理就写成

$$\int (P_x + Q_y + R_z) dxdydz = \int Pdydz + Qdxdz + Rdxdy. \tag{2.4}$$

你们在学高等微积分已经碰到了, 一个二次式在边界(曲面)上的重积分等于它的三次式在区域里头的三重积分. 这是Stokes公式的另外一个情况. 整个的情况在高维都对. 有一个基本性质, 就是外微分d 用两次一定等于0. 假使$\o mega$是一个外微分式, 那么

$$d(d(\omega)) = 0. \tag{2.5}$$

这个方程非常容易证明. 对于ω, 外微分式显然是线性的, 所以你只需要把ω当成一个单项来证明就行了, 这是因为你每一项的d^2都等于0. 于是对于单项的情况, 单项是一组d乘上一个函数. 显然, 只要证明一个函数用两次d, 它一定等于0就可以了. 我底下算了一下: 在一个n维的空间中, 它的坐标是$(x_1, \cdots, x_n)$. 有一个函数是f 是x_i的函数, d一次的话, 就是普通的偏微分, 也就是$\frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i$. 再微分一次, 得到二级偏微分, 再乘$dx_j \wedge dx_i$. 这个二阶偏微分$f_{ij}$是对称的, 这是因为求偏微分与次序无关. 因此这个系数是对称的, 而我们这两个dx_i, dx_j的乘法是反对称的, 显然两次微分之后就等于0了, 即

$$d(df) = d(f_i dx_i) = f_{ij} dx_j \wedge dx_i = 0. \tag{2.6}$$

这里, 因为固定了i与j, 就得到$df_{ij} - df_{ji}$, 但是因为f是对于这个指标是对称的, 所以就是0了. 因此上面证明了对于函数的$d^2 = 0$, 这就可以了. Stokes定

理可以说区域与外微分是一个对偶, 使得求边界跟算这个d这两个算子是adjoint, 是对偶的算子, 这是个了不得的结果. 因为求边界, 是一个几何运算, 其实求一个区域的边界是一个完全的几何的运算, 是整个的区域的一个性质. 求外微分d是一个局部的, 分析的运算, 是完全局部的, 只与这一点的附近有关系, 所以一个是整体的几何算子. 一个是局部的分析算子, 它们是对偶的. Stokes定理说它们是对偶的, 所以这是一个重要极了的定理. 我可以下面稍微讲得多一点. 空间不一定是普通的Euclid空间, 也许空间拿x做坐标为所谓的流形. 假设空间是一个流形的话, 也可以讨论它的外微分式, 例如k次的外微分式. 一个k次的外微分式加另外一个k次外微分式还是一个k次的外微分式, 于是所有的k次的外微分式成为一个我们所谓的矢量空间(vector space), 在其中可以进行加减. 现在我就讨论所有$d=0$的这种外微分式, 即外微分为0的那些外微分式. 在数学上, 我们称这种外微分式是封闭(close)的. 这些封闭的外微分式构成矢量空间, 因为两个close外微分相加仍为封闭的. 设

$$\Gamma^k = \{\omega | \omega \text{ 是} k \text{ 次外微分式}\},\ C^k = \{\omega | \omega \in \Gamma^k, d\omega = 0\}. \tag{2.7}$$

那么我取ω, ω是一个封闭的外微分式. 现在我把C^k当成一个群, 这个群有个子群, 这个子群是什么呢？它就是所有的$k-1$维的外微分式子用d来作用. 因为$d^2=0$, 所以它就一定是close的. 因此在所有的封闭的k次外微分式构成的C^k 中, 所有d乘上一个$k-1$次外微分式成为一个子群. 于是整个群用子群一除, 在群论里头说它是一个商群(quotient). 这个群有个名字叫de Rham group:

$$H^k = C^k / d\Gamma^k. \tag{2.8}$$

这在拓扑上非常重要, 就是说, 外微分式多得不得了, 甚至于close的外微分式也多得不得了, 而在你除$d\beta$之后, 在很多情形之下, 就变成一个有限维的矢量空间. 那么这个有限维空间的维数是这空间的一个重要的性质, 通常叫做Betti number, 这是代数拓扑中最浅的一个基本观念. 也就是我们讨论外微分式可以决定它的有些拓扑的不变式.

3 指数和对数函数

我现在去讲另外一个问题. 上次有人讲, 对于跟这个课有些困难, 我讲的这些题目不一定有关系, 所以你如果对某一个题目有困难的话, 就听我讲一个别的题目了, 所以不一定受多少影响. 现在我换个题目. 微积分既然是研究函数的性质, 用微积分来表示它的性质, 那么函数是多得不得了的. 函数有种种的性质, 而有一些函数, 比较简单, 因此也比较重要并且许多应用上总碰到. 有两个特别重要的函数是指数函数(exponential function)与对数函数(logarithm fun ction). 这两个函数有什么性质呢? 这是非常重要的函数, 我们都晓得头一个的微分式. 而x^{n+1}的微分是等于$(n+1)x^n$, 因此x^n的积分是等于$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$, 这里假使$n+1\neq 0$, 即

$$\frac{d}{dx}x^{n+1}=(n+1)x^n \rightarrow \int x^n dx=\frac{1}{n+1}x^{n+1},\ n+1\neq 0. \tag{2.9}$$

如果n不等于-1, 普通人到这个时候就结束了. 因为你知道这个公式是什么时候成立, 这个公式在$n=-1$时不对, 这就够了. 这是很自然的. 不过, 如果这时候要停止的话, 你就没有用到函数积分的重要的定理, 因为$n=-1$时, 这个积分才有意思. 所以, 假使$n=-1$, 我就取对dx/x的积分. 因为我不取$x=0$, 所以我这个积分假定它从1积到x, 这个积分是要紧极了, 有意义极了. 因为我这个积分, 叫它$\log x$:

$$\int_1^x \frac{dx}{x}=\log x, \tag{2.10}$$

这就是对数函数. 下面我讨论对数函数的最重要的性质. 假使我把x乘常数a, 对$\log ax$ 求微分. 由于log的微分等于$1/x$, 于是$\log ax$也是等于$1/x$, 所以这两个函数差一个常数C:

$$\frac{d}{dx}\log(ax)=\frac{1}{ax}a=\frac{1}{x}\Longrightarrow \log ax=\log x+C. \tag{2.11}$$

假使我将$x=1$ 代入(2.11), 此时$\log 1=0$, 这是因为积分是从1到x, 所以从1到1积分当然是0. 于是我就证到常数C就是$\log a$, 因此就得到log这个函数的基本性质:log函数用到ax的话等于$\log x+\log a$:

$$\log(ax)=\log a+\log x. \tag{2.12}$$

换句话说, 对数是使得乘法变为加法, 这是从前用对数表计算的一个基本性质. 现在因为有计算机了, 大概不大用了. 不过log这个函数非常要紧, 因为用到了我们这个基本的性质(2.12). 那么由这个对数的函数立刻就引进指数的函数, 指数函数是对数函数的反函数. 假使$y=\log x$的话, 就按定义, $x=e^y$, 即

$$y=\log x \leftrightarrow x=e^y. \tag{2.13}$$

因此它们互相是相反的函数. e^y是个指数函数, 其与$\log x$一起有加法与乘法关系的公式: $\log x$把乘法变为加法, 指数函数也就把加法变为乘法了. 一个把乘法变为加法, 一个倒了过来, 它就把加法变为乘法, 这是一个简单的公式:

$$e^{x+y}=e^x e^y. \tag{2.14}$$

我这里有个证明:

$$e^{x+y}=e^{\log u+\log v}=e^{\log uv}=uv,\ u=e^x, v=e^y. \tag{2.15}$$

这些都是很容易的计算. 我现在要证明指数函数它的微分就是它自己, 即e^y对y求微分就等于e^y. 这个证明为

$$dy=\frac{dx}{x} \Rightarrow \frac{\exp y}{dy}=\frac{dx}{dy}=x=\exp y, \tag{2.16}$$

这里把指数函数写成$\exp y$, 当然也可写成e^y. 这时假定所有的数都是正的, 所以没有什么log存在与否的问题. 于是, 指数函数的微分就是它自己, 上面就给出了一个证明. 大家也许记得, 两个函数的图是这个样子, 一个是log在x的区域中在$x=0$的附近越来越小起来, 趋于负无穷. 对数函数也是一个增长的函数(increasing funct ion), 不过它增长得非常慢. 指数函数就增长得很快, 它永远是正的. 这是我画的两个简单的图(graph).我想你们在任何微积分的书都看到过这两个函数的图. 指数函数与对数函数是统一的函数, 一个是另外一个的反函数, 这个性质是非常要紧的, 有奇妙的性质. 第一, 指数函数的微分是它自己, 因此, 它有一个很简单的无穷级数. 这个无穷级数是用Talyor公式展开的. 我把Taylor公式写一下：

$$f(b)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(b-a)+\frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2+\cdots+R_n, \tag{2.17}$$

$$R_n = \int_a^b f^{(n)}(t)\frac{(b-t)^{n-1}}{(n-1)!}dt. \tag{2.18}$$

我想这些你们都念过了这些了. 这个Taylor公式把任意的函数展成一个无穷级数, a是一点, b是另外一点, 那么它可以展成$(b-a)$的一个多项式, 后面有一个余项, 这个余项是由积分(2.18)给出. Taylor公式在一个余项的时候就是这个所谓中值定理（Mean Value Theorem）. Taylor公式就是中值定理的高次的一个推广. 由Taylor公式, 现在我们这个指数函数简单得不得了, 因为微分下去都是它自己, 所以有一个无穷级数, 很简单, 我写为

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots, \tag{2.19}$$

所以这个指数函数有一个很简单的展开, 它有一个重要的性质, 我想有时候, 你这个数目当然是正数, 至少是实数, 有的时候你用一下复数的话, 有很巧妙的性质！同样的, 我知道$\sin x$与$\cos x$有另外这两个展开:

$$\sin x = x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \cdots; \tag{2.20}$$

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \cdots. \tag{2.21}$$

你会发现, 假使对e^x, 将x改为ix, 其中$i^2 = -1$. 那么e^{ix}就有个式子:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \tag{2.22}$$

我想很容易由(2.19)-(2.21)看出来有这样的公式. 允许变数取复数的值, 取一个东西, 那么假使你用这个公式的话, 取$x = \pi$, 于是$e^{i\pi} = -1$. 你们都知道这个公式. 不过这是个很有意思的式子. 因为这里头有几个常数. 大家注意的一个是π, 另外一个就是e. e是因为Euler. Euler在当时18世纪的那个时候, 那时跟现在时间不太一样, 那个时候世界就是西欧. 世界有科学的发展, 就是在西欧. 大家承认有一个最伟大的数学家, Euler是那时被承认最伟大的数学家. 所以有人做了国王之后, 在他的朝廷里愿意有个伟大的数学家, 于是Euler就被请到圣彼得堡. 他就写了很多很多书. 这个Euler是很有意思的, 大概写的文章是没有人超过的. 他写了几百本. 他有好多小孩, 所

以他是抱着小孩子, 孩子坐在他腿上, 做他的数学. 我跟他曾经发生一个关系, 就是我们这个南开图书馆要不要他的全集. 他的全集要几千块美金, 几百本. 很抱歉的, 后来我决定不买了. 太贵了并且恐怕没有人看了, 文章都是拉丁文的, 结果我们图书馆没有Euler的全集. 我们有很多其它人的全集, 不过现在看来问题是有些文字的问题. 比方说, 你们如果有功夫的话, 可以看看高斯的全集. Gauss刚才我说是19世纪最伟大的数学家, 大家都知道他的数学能力. 所以说呢, 如果人家过节请他, 带着他一起去过节, 那么过节时就问他小的几何问题, Gauss当然就能解. 那么Gauss的小的几何问题的解在他的论文集里, 这是很有意思的. 这些问题完全是初等几何的, 有的就一页. 做做他的小的几何定理, 他的小定理都很有意思, 我们可以偷他的来写一篇文章. 很不幸地是他的文章不是拉丁文, 就是德文, 至少是德文. Euler写了很多东西. 这个公式是其中之一, 它把几个主要的数连起来. e, i, π 有这样的关系: $e^{i\pi} = -1$. 这是非常有意思的. 我再告诉你们另外一个公式, 不知你们有无兴趣. 同样用这个展开的话, 可以用到arctg$x$. arctg$x$的微分是$\frac{1}{1+x^2}$. 所以arctg这个函数有一个性质, 就是一直求它们微分的话,式子会比较简单. 因此由这些就得π的一个式子, 即π可以写成一个无穷级数

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots \tag{2.23}$$

这是一个漂亮极了的一个公式. 它把一个1,3,5,7,9这么连在一起, 加在一起是$\pi/4$! 所以, 这是漂亮极了的一个公式! 近代的一个有名的数论家Selberg, 他是挪威的数学家, 有一次他写一个文章, 讲他对数论发生兴趣就因为他看到这个公式. 他恐怕现在是岁数大了一点, 我想他可以总有80多岁, 人还在.

4 在几何上应用

还有几分钟, 下一次我要讲一点几何. 微积分在几何上的应用. 几何上的应用, 当然是空间几何最有意思的是曲面的几何——二维曲面的几何. 二维曲面有种种样子，有种种的形式，有种种不同的性质。在这方面有Gauss的

工作, 就是

$$ds^2 = dx^2+dy^2+dz^2 = Edu^2+2Fdudv+Gdv^2,\ x = x(u,v), y = y(u,v), z = z(u,v) \tag{2.23}$$

这个曲面通常用参数表示，在这个三维空间中, 坐标是(x, y, z), 于是把三维空间的坐标表示为两个变数的函数, 所以x, y, z是两个变数u, v的函数，我们称之为参数(par ameter).于是这个空间里头有一个短距离ds^2，就是$dx^2 + dy^2 + dz^2$. 把x, y, z 表示u, v的函数之后，ds^2 就变为一个二次的微分式, 其中系数, 一般就叫做E, F, G. 我们晓得几何开始的时候有Euclid几何，Euclid几何很伟大！它是头一本整个的几何, 它看出来要有一种公理得到数学的结论是很重要的，因为数学结论是由一个公理经过一个逻辑的推理得来. 因此, 这个是很具体很坚决的一个结论. 而且它其实不只是几何, Euclid这个《几何原本》是整个的数学. 他看出来由公理用逻辑方法推出结论的重要性. 对于这方面我觉得很惭愧的是，中国没有. 我们这个课是应用数学, 对于应用数学, 中国太注重应用了, 任何东西都一定要有应用. 而对于这样的一个数学大家以为没有什么应用, 其实最初你要的是最初做了一点的话, 应用会来的, 并且应用更重要, 更深刻. 对于这个二次微分式(2.23), Gauss的工作就是可以根据这个二次微分式, 发展一个几何, 这个几何就大得不得了. Euclid几何可以它的微分式就是$du^2 + dv^2$, 这是一个最简单的情形. 另外一个情况之下就可以发展非欧几何. 现在E, F, G是任意函数, 再加上一些适当条件, 这个几何的观念广大得不得了. 就是说, 在三维空间可以有切面, 即切面上的几何，可以不管这个曲面在三维空间里的位置, 只考虑在曲面上的这个几何, 它包括Euclid、非Euclid几何等在内，广得了不得. 于是, 这样的一个发现使得几何有很多，欧氏几何的观念也就推广到一般的情况. 所以, 我下次要讲点微积分在几何上的应用. 我想今天也许差不多, 讲完了, 谢谢！

第三讲　曲线论

2001年10月26日

1　平面曲线

我想这几次跟大家讲一点微积分在几何上的应用. 这是非常要紧的发展. 那么, 从最简单的情况开始, 我们就讲平面上的曲线. 假设平面上有一条曲线$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t))$, 即在这个图上所在的情况. 用微积分的话呢, 就是这条曲线有条切线. 切线有个切矢量. 对于切矢量, 我们取这个矢量是单位矢量, 它的长度是1, 也就是取为单位切矢量. 于是我们知道假使把坐标x表示成弧长s的函数的话, 这就表示这个单位切矢量就是x 对s 的微分$\frac{dx}{ds}$,即单位切矢量为

$$e_1 = (\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}), (e_1, e_1) = 1, s \text{ 是弧长. } eqno(3.1)$$

那么怎么样研究这条切线呢？很简单, 那就是有了一个单位切矢量之后, 并假设如果平面是定向的, 即有一个转动的方向, 那么它就有一个单位法向量, 也就是跟它垂直的那个单位矢量. 现在, 我叫e_1是单位切矢量, e_2 是单位法矢量. 于是要得到这条切线的性质, 第一件事情就是把e_1这个函数对于s再求微分. 那么再求微分之后, 当然这是一个新的矢量. 因为e_1是一个单位矢量, 所以$(e_1, e_1) = 1$. 那么把它微分一下子, 我们就得到$\frac{de_1}{ds}$ 同e_1垂直, 所以它一定在法线的方向. 因此, 我们就有$\frac{de_1}{ds}$ 等于单位法矢量e_2的倍数. 这个倍数是弧长的一个函数, 我们叫$k(s)$. 这个倍数满足

$$\frac{de_1}{ds} = ke_2, e_2 \text{ 是单位法矢量}, (e_1, e_2) = 0. \tag{3.2}$$

k这个函数一般叫做曲率, 是这条曲线在这个平面里头最要紧的一个性质, 是弧长的一个函数.

习题:

对于给定的曲线方程, 给出曲率k 的公式. [提示：k是曲线方程的一阶和二阶微分的一个函数]

2 空间曲线

从平面曲线再进一步怎么样呢？我们看看空间的情形. 假设我们现在有一条曲线是空间的曲线$\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t))$. 在3维空间里有切线, 所以这个空间的坐标$x, y$ 就表示为参数t 的函数. 这些东西你们大概都知道, 我再温习一下子. 所以$\mathbf{x}(t)$ 是一个矢量, 它的分量就是点的坐标, 而点是t 的函数. 于是它就作一条切线, 这3个分量叫做$x_i(t)(i = 1, 2, 3)$. $\mathbf{x}(t)$是一个矢量, 是参数t的函数, 它的3个分量就是把点的坐标表示为t 的函数, 那么怎么进行呢？同样的方法就是对这条曲线用微积分. 假定曲线有切线, 并且在切线上面有单位矢量, 即有单位切矢量. 对曲线有个方向, 一直这么走, 沿着一个方向, 比如说参数t 是增加的一个方向. 总而言之, 我们就有一个单位切矢量, 叫它e_1, 那么跟平面同样的情况, 把e_1这个函数对s 再求微分, 就等于说对s 求二阶的微分. 因为e_1 是单位矢量, 所以得到的这个微分跟e_1 是垂直的. 而对于一条空间中的曲线, 它的切线是一条, 它的法线有无数个. 其实经过这一点跟切线垂直的法线有无数个, 那么其中有一个是$\frac{de_1}{ds}$, 它是不完全确定的. 由于同样的理由, 我把这个方向的单位矢量叫做e_2, 那么它就是ke_2, 即可以写成

$$\frac{de_1}{ds} = ke_2. \tag{3.3}$$

e_2是其中一条法线, 我们叫它为主法线(principal normal), 而k这个函数与平面的情形一样, 叫做曲线的曲率. 所以现在, 我有一个切线的方向和一个主法线方向. 在三维空间就有另外一个方向跟这两个方向垂直, 我们通常叫它binormal. 总而言之, 存在另外一个法线, 所以它有两个法线. 那么这两个法线所成的平面就是法平面. 曲线是1维的, 切线是1维的, 所以法线是2维的, 是个平面. 那么有一个$e_3 = e_1 \times e_2$, 其中$e_1 \times e_2$ 是矢量积. 对于两个方向的话, 有一个确定的第三个方向是跟它们垂直的, 并且使得e_1, e_2, e_3成一个正交系统. 我们假定这个空间是定向的, 右手, 左手都有一个确定的方向. 通常我们都用右手, 所以就有一个确定的e_3满足

$$(e_i, e_j) = \delta_{ij}. \tag{3.4}$$

因此在研究三维几何的时候, 这样的三个互相垂直的单位矢量所成的图形非常要紧. 这是为什么呢? 这样一个东西我叫它标架. 你把一个标架搬到另一个标架的运动是完全确定的. 那么三维空间最要紧的性质就是三维空间的运动. 我们要研究的几何性质是经过运动不变的. 所以就要知道什么时候你可以把这个东西搬到另外一个位置, 什么时候它的位置相差在于一个运动, 而标架就是这个运动解析的表示的方法. 你要能够搬过去就表示这个标架搬到另外一个标架的运动是完全确定的. 显然, 只有一个运动并且一定有一个运动把一个标架变为另外一个标架. 因为要研究空间经过运动不变的性质, 所以解析的方法就是利用标架. 那么假使我现在有一条曲线, 我不只有一个标架, 这些标架是时间的函数, 在那里运动. 因此e_i这三个作为标架的矢量都是时间t 的函数, 于是我可以求它的微分$\frac{de_i}{dt}$. $\frac{de_i}{dt}$是个矢量. 因为是(e_1, e_2, e_3)是个标架, 所以任何一个矢量就可以写成e_1, e_2, e_3这3个矢量的线性组合. 那么我把它稍微推广一点, 就把它写成de_i等于e_j的线性组合:

$$de_i = \omega_{ij} e_k. \tag{3.5}$$

这个组合的系数是一次微分式, 这是因为我现在做了一下微分, 由这函数便得到一次微分式, 那么这样的一次微分式我叫它ω_{ij}, 这就表示两个相邻的标架的关系. 你有一个e_i 的标架, 旁边有个相邻的标架$e_i + de_i$, 那么de_i 表为e_i的函数的时候, 它的组合的系数就是一次微分式. ω_{ij} 是一次微分式, 在这里, 我的指标i, j都是从1 到3, 3 是我们空间的维数, 所以ω_{ij} 一共有9个: i, j 每一个从1 到3, 所以一共有9个. 这9个一次微分式是有关系的, 它不是完全任意的. 这个关系就是

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0. \tag{3.6}$$

所以假使你把ω_{ij} 看成一个3×3 的方阵的元素的话, 这个方阵是反对称的. 这一组方程很容易从e_i, e_j 的内积等于δ_{ij}得到: 把这个关系(方程(3.4))微分的话, 就立刻得到这一组性质. 这就是说(ω_{ij}) 是一个3×3 方阵的元素, 这个方阵的元素都是一次微分式, 并且这个方阵整个是反对称的, 换句话说, 这个方阵主角线上的元素是0. 其它呢, 由于反对称, 有$\omega_{12} = -\omega_{21}$等, 是反对称的. 因此我们现在有一个单位切矢量, 有一个主法矢量, 还有一个与它

们垂直的成一个标架的$e_3 = e_1 \times e_2$(矢量积). 对于这个标架, 我把它的三个方程都对弧长求函数(微分), 就可以把这个函数表为e_1, e_2, e_3 的一个线性组合. 这个组合是这样的一组方程：第一个方程是$de_1 = ke_2$. 因为我们的方阵是反对称的, 主对角线上的元素都是0, 所以$\omega_{13} = 0$. 但是其他的元素要注意e_3的位置, 由于e_1, e_2 选择的关系, ω_{13} 是等于0的. 因此ω_{31} 也等于0. 所以这个方阵写出来, 就是我下面的3个方程:

$$
\begin{aligned}
\frac{de_1}{ds} &= ke_2 \\
\frac{de_2}{ds} &= -ke_1 + \omega e_3 \\
\frac{de_3}{ds} &= -\omega e_2
\end{aligned}
\tag{3.7}
$$

这组方程是当年曲线论发展的时候最早的一组方程. 我们通常叫它Frenet方程, Fren et是法国的一个数学家. 我想这是他的的博士论文. 他不一定是头一个给出这个方程, 当时有几个人做出这个工作. 从我讲的, 你们可以看出来得这个方程并不太困难. 因此我除了曲率以外, 还有另一个函数ω. ω就是方程中的挠率(torison), 也是弧长的函数, 是表示空间的曲线在运动群下的性质. 所以空间曲线有两个函数, 一个是曲率, 另一个是挠率, 挠率就是描写它怎么样不是一条平面曲线, 它是在空间弯曲的一个量. 所以空间曲线是用两个函数来描写的, 它们解析地描写这空间的性质. 这两个函数显然很重要, 因为它们要是等于0的时候, 就表示了曲线很简单的性质. 要是$k = 0$的话, 这曲线就成为直线. 这很容易证明, 我下面给出证明：因为$k = 0$, 所以$de_1 = 0$. 因此单位切矢量e_1是一个常数, 因为这样它的微分才等于0. 那么你把这个常数$e_1 = C$代入到$e_1 = \frac{dx}{ds}$中, 再把它积分一下子就得到x是s 的一次函数：

$$
x = Cs. \tag{3.8}
$$

所以这就是一条直线. 反过来也很容易能证明如果你有一条直线的话, 它的曲率k 是等于0的. 因此$k = 0$ 代表曲线的最简单的性质, 就是直线. 那么要注意的是在定挠率的时候, 一定要$k \neq 0$. 若是$k = 0$ 的, 于是$\frac{de_1}{ds} = 0$, 也就是直线了. 这时它就没有法子定主法线. 一条直线跟它垂直的是一个平面,

这个平面里头所有跟此直线垂直的方向都是有同样的性质, 所以就没有主法线, 因此也不能定挠率. 挠率一定要在这点的曲率$k \neq 0$的时候才有意义. 而当挠率等于0的时候, 当然就是表示这条曲线是在平面上一条曲线. 下面我也给了一个简单的证明. 因为挠率这个函数是在Frenet 公式的第三个公式里. 所以由$\omega = 0$ 可知此时e_3是个常数的矢量. 对于e_3 这个常数矢量, 由于e_3是一个法线, 并且因为法线跟切线是永远垂直的，所以e_3 跟$\frac{dx}{ds}$ 的内积是永远等于0 . 因此e_3要是等于常数的话, 我就可以把方程

$$(e_3, \frac{dx}{ds}) = 0 \tag{3.9}$$

积分. 因为e_3是一个常数，所以这积分就是e_3 跟x 的内积等于一个常数. 因此它是一个平面曲线, 于是$\omega = 0$是表示曲线是个平面曲线. 反过来, 可以很容易证明平面曲线的挠率是0. 所以曲率和挠率两个函数都有简单的几何性质. 另外一种很有意思的曲线是k与ω都不为0, 但都是常数. 那么在这个情形之下, 可以证明曲线是个螺线. 就是这样简单的微积分的应用在生物化学上有重要的意义. 因为我们知道生物化学的一个主要的化合物是DNA. DNA是两条螺线, 是个双螺线, 这是生物上非常基本之现象. 在生物上, 这样的曲线就跑出来了. 因此, 曲线论在生物化学有重要的应用, 也就是大家要知道曲线的性质如何影响DNA的化学性质, 所以数学就很重要了. 曲线的性质影响到化学的性质, 尤其是在化学里头, 有时候你把DNA切断了, 它的性质就改变了. 所以切断之后, 数学性质就发生改变，它的化学性质也改变, 讨论它们如何改变，这是在DNA的研究及在生物化学方面是非常基本的问题, 大家做了很多的工作. 现在拿一本微生物化学的书要翻开来的话, 就看见有一个基本的公式, 叫做White公式. White是我的一个学生的学生, 他做这个工作是他博士论文的一个结果. 他运气很好, 他这个结果变为生物化学的一个基本的公式. 我现在不能讲这个结果.

3 Feuchll不等式, Crofton积分公式和Fary-Milnor定理

做这个几何研究的时候, 有些重要性质要讨论. 通常重要的性质往往是整体几何的性质, 在曲线的情况也不是研究一小段的几何. 我们现在把上面的这个叫做局部的几何，即研究一小段的几何性质, 这时k,ω都是弧长的函数, 用它们研究它的性质, 是怎么样弯曲. 不过更重要的是研究整条曲线. 假使有一条曲线是封闭的, 看这条曲线有什么样的性质. 这里有个非常要紧的公式. 对于这条封闭的曲线, 每点有个曲率. 因为封闭了, 我就研究全曲率, 即把这个曲率沿整条曲线求它的积分, 于是就有所谓Feuchll 公式

$$\int_c kds \geq 2\pi, \tag{3.10}$$

就是说这个积分有个下界, 一定是2π. 这个直觉讲起来就是如果你一点曲率都没有, 这条曲线就直线走下去, 是不会封闭起来. 你要直线走下去能够封闭的话, 总要把它弯过来, 弯过来就要有曲率. 那么如果能够弯过来, 与原来地方对上来的话, 那么曲率在整个曲线上的积分有一个固定的下界, 这个下界是2π. 这就是所谓的Feuchll公式. 我要证明这个公式. 为什么讲全曲率要有一个下界? 证明这个公式的方法就是讨论这条曲线的单位切矢量, 即在切线的方向的一个单位矢量. 主要观念就是利用高斯映射(Gau ss map). 对于这样一个单位切矢量, 在固定点取跟这个切矢量是平行的那些单位矢量, 所以你有许多单位矢量是$e_1(s)$, 它是长等于1 的一个矢量. 所以你假使把它看成空间一个点, 它就是在单位球上的一个点. 因此你取一个单位球, 将$e_1(s)$看成单位球上的一个点, 那么当你这个点沿原来曲线走一圈的时候, $e_1(s)$在单位球上成一条曲线. 这是高斯映射的意思, 即所谓的高斯映射. 这条曲线$e_1(s)$在单位球上所成的的曲线不是原来的曲线, 换了一种了, 因为它的方程是$e_1(s)$, 不是$x(s)$. $e_1(s)$ 满足:

$$\frac{d\sigma^2}{ds^2} = (\frac{de_1}{ds}, \frac{de_1}{ds}) = k^2, \sigma\text{是}e_1(s)\text{的弧长}. \tag{3.11}$$

单位球面如果有一个大圆, 那么这个大圆有一个极点, 我叫它y. 也就是说,

大圆是子午圆, y 是这个大圆的极点. 把这个极点当成顶上的一点, 那么曲线就有个高度, 这个高度被取成是$y(x)$, 是个内积. 这个高度可以看成是曲线上的一个函数, 那么曲线在空间里头就有了一个高度. 我们这曲线是封闭的, 当然有个最高点, 有个最低点. 在最高点, 因为它是最高的, 显然它的切线是平的. 在最低点, 切线也是平的. 所以就有两个临界点, 一个是代表高度最高的, 一个是最低的, 而与y这个点垂直的那个大圆, 一定跟单位球上的曲线相交. 因为(y, dx) 这个内积是0, 所以y跟球面的$e_1(s)$在一点相交. 因此在单位球上的曲线跟这个单位圆相交. 但是y是任意方向, 所以我们球上的高斯映射的曲线是跟球上的什么圆都相交, 这是因为y是任意一个点, 于是y的那个子午圆交我们这条曲线. 我想高斯曲线我叫它γ, 它跟y的子午圆相交, 因此跟任意单位圆相交, 这是很要紧的一个性质. 所以γ这条曲线一定要相当长, 它在球上不是一条任何的曲线, 它在球上是一条跟所有的圆周(大圆)都相交的曲线. 那么我还是需要证明它有2π 这个下界, 下面来说明这个问题. 我这条曲线γ是$e_1(s)$, 叫同位圆. $e_1(s)$ 就是空间曲线的一个高斯映射, 它是切线的方向在单位球上所成的曲线, 而这条曲线叫做γ, 它跟球上的任何单位圆都相交. 那么一般地, 这条曲线相当长了, 如果太短, 它没有这个性质. 说它有一个2π 的下界, 是Crofton公式:

$$\int\int = 4L. \tag{3.12}$$

Crofton的文章也很有意思, 不是一个正式的数学文章. 英国的百科全书(Encyclopaedi a) 请他写一篇文章, 是关于几何概率的. 他是在写(几何)概率的文章时候把他的结果写在里头了. 这个结果很要紧, 换句话说, 就在平面上讲, 曲线的长度可以表为跟它相交的直线的度量. 长度, 就是直线的度量, 这个意思在探物学里, 近代在医学都有应用. 有时候, 你身体上的东西, 要问它有多大, 也不能把人切开, 是不好量的. 于是就是用看相交这个东西的线作为度量, 来量这个身体上的某一部分的大小. 这一部分数学一般叫做积分几何, 不是微分几何. 积分几何就是研究这些积分的关系与性质. 积分几何在医学上有很大的应用, 有很多机器采用采用这理论. 因为你要看人的病体, 也不能拿这个病体来量, 就拿线射它, 按射它的效果来看病体的

大小及其它的性质. 这就是积分几何. 那么我现在说, (3.12)是Crofton公式, 就是说球面上边也有几何, 是球面几何. 它的点我都知道, 它的直线就是大圆. 所以现在我在球面上有条曲线, 跟所有大圆都相交. 那么, 这种直线的个数有一个量度, Crofton公式讲, 它是等于4倍它的量度. Feuchll公式是球面上Crofton公式的一个结果. 因为Crofton公式说它的量度是4倍于它的四边路长, 所以就利用这条曲线跟每一个大圆都相交的性质就得到Feuchll公式. 因此问题就是说什么是球面上大圆的量度. 球面上的大圆是球面上非欧几何的直线. 而对于直线, 我也有个量度(measure).在球面上的量度很简单, 这是因为球面上的直线跟极点有个简单的对偶关系: 因为你有一个大圆, 它有一个极点, 因此这条直线跟这个极点有个对偶关系. 于是这个大圆的量度就取为这个极点的量度. 所以我现在大概讲一讲怎么样证明球面上的Crofton公式. 这个证明其实很简单, 不过要小心一点, 就是想法子换换坐标就行了. 现在比方说, γ这条曲线跟一个大圆相交, 那么这个大圆可以换坐标. 如果换坐标, 由于$e_1(s)$这条曲线跟这个大圆相交, 而大圆有个极点y, 所以要换y的坐标. 那么换坐标换什么呢？这个大圆与直线相交, 而大圆是2维的空间, 所以要有两个坐标. 我就取这条曲线的弧长s作为一个坐标. 那么, 这个大圆跟直线相交的话, 就有图上的这个情况：还缺一个坐标是什么呢？大圆有一个极点, 这个极点是y. 显然y是与e_1垂直的, 所以y 一定在e_2, e_3 所成的圆周上, 这是因为e_2, e_3是跟e_1 垂直的. 因此y就是在e_2, e_3的圆周上, 于是y就可以表为

$$y = \cos\theta e_2(s) + \sin\theta e_3(s), \tag{3.13}$$

实际上, y是e_2, e_3 的一个线性组合. 又因为它是个单位矢量, 所以可以写成这样的形状. 因此y这点有两个坐标,我可以取为s, θ. 那么现在的问题是求y在这个面积元素(element area)的度量, 是要把y 这点的度量看成是大圆的度量. 通常这不难求. y 是一个点, 你就求dy. y是在单位球上的一点, 于是下面来求dy. 把这个dy写为跟y 垂直的两个方向的函数, 那么这两个单位矢量系数的外积就是y 的度量. 所以我现在这么做. e_1, e_2, e_3是标架, 它们三个矢

量是互相垂直的单位矢量, 它们也都是s的函数. 所以我把它的公式写出来:

$$\begin{aligned} \frac{de_1}{ds} &= a_2e_2 + a_3e_3 \\ \frac{de_2}{ds} &= -a_2e_1 + a_1e_3 \\ \frac{de_3}{ds} &= -a_3e_1 - a_1e_2 \end{aligned} \tag{3.14}$$

无论如何, 这公式里头的系数成一个反对称的方阵. 这就做下去, 很简单地, 如果算一算dy,就得到dy一个公式:

$$dy = (-\sin\theta e_2 + \cos\theta e_3)(d\theta + a_3ds) - e_1(a_1\cos\theta + a_3\ sin\theta)ds. \tag{3.15}$$

于是我们有

$$\text{面积元素} = (a_2\cos\theta + a_3\sin\theta)d\theta\wedge ds. \tag{3.16}$$

若命

$$a_2 = \cos\tau, a_3 = \sin\tau, \tag{3.17}$$

则

$$\text{面积元素} = \cos(\tau-\theta)d\theta\wedge ds. \tag{3.18}$$

即最后$\cos(\tau-\theta)d\theta\wedge ds$ 是球面上的面积元素. 为了要求这个球面上的面积, 求这个东西的重积分, 也就是求这个式子的重积分. 那么我数这个点的时候, 是考虑完全绝对值, 来求这个绝对值的这个重积分. 我刚才假设有两个变数s 跟θ, 那么就对它们来求积分. 积分的时候先固定s, 取cos的绝对值来求积分. 假使角度转一圈的话, $|\cos|$一共变了多少呢? cos的绝对值的积分是4 . 这是因为当cos从0到π时是从1到-1, 一共是4次1, 所以是4. 因此这样你就求到跟曲线相交的大圆的度量, 即有多少个大圆. 这个度量是求这个重积分, 把它算出来. 算出来之后, 你只要求一次对θ的积分就可以了. 剩下的是曲线的弧长. 所以Cr ofton问题就能从这个计算得到. 你们抄下来, 回去想一想, 就可以得到. 因此Crofton公式说γ这条曲线至少有多长. 它把这个曲线跟任何大圆相交的性质表为一个度量的性质, 即有多长. 由这个我就得到Feuchll定理. 这是很漂亮的一个定理: 我们假使这个流形是封闭的,

在2维的情形, 就是封闭的曲线. 对于封闭的曲线, 它的总曲率有一个一定的下限. 什么时候这个下限能达到? 显然当这条曲线是平面曲线并且是一条完备(complete)曲线时是可以达到的. 根据上面讨论也可以证明这个结论. 更有意思的一个结果是所谓的Fray-Milnor 定理：如果曲线C有结, 则

$$\int_C kds \geq 4\pi. \tag{3.19}$$

我想Milnor是近些年来美国最优秀的一个拓扑学家者. 他做这个定理的时候, 就跟你们一样. 上课时, 老师谈到这个问题. 他给出一个条件什么时候一条封闭的曲线能打成一个结. 假使有结的话, 显然我们推测需要曲率更多一些, 因为打结就得转转. 不过Fray -Milnor定理就是讲假使这个封闭的曲线有一个结的话, 它的全曲率的积分至少为4. 所以全曲率一定就大于4. 这个证明很简单, 因为如果它小于4的话, 一定有个方向, 在这个方向上的高度只有一个极大跟一个极小点. 所以我这条曲线一定是连接这个极大点与极小点的两个弧. 那么中间就没有极大点和极小点, 所以中间那些平行的平面跟曲线相交的话, 都相交于两点. 那么用一条线段把这两点连起来, 于是它这曲线就围成一个区域. 显然曲线就可以缩成一点, 所以就不是结. 所以如果这全曲率小于4 的话, 它这条曲线的结就可以解开. 因此如果曲线有个结的话, 它的全曲率一定$\geq$ 4. 于是立刻得出来Fray-Milnor 定理. 下面我讲讲与陈国才的工作的关系. 陈国才的工作是讨论这个结, 进行不只一条曲线, 可以有好几条曲线, 即所谓link的研究, 讨论什么时候这个link 能绕过来曲率是挠率. 这个问题物理学家很感兴趣, 最近, 做了很多这方面的工作. 不过, 推广Fary-Milnor 定理有个可能性, 就是讨论切线的曲率跟挠率对于陈国才的不变式有什么影响. 陈国才是研究曲线的对偶同调的性质跟微分式的关系, 所以真正用在这个方面, 你不见得能把这个结解开. 但是有可能当曲线的曲率与挠率有某种性质的时候, 他所定的这个不变式会等于0. 所以有些问题研究的时候可以想一想. 如果有人听了Harris教授的课的话, 他就在讲陈国才的工作. 陈国才是近几年来中国产生的一个非常优秀的数学家. 他没有名, 不愿与媒介有什么关系, 一个人做他的领域, 做非常特殊, 非常创新的工作.

第四讲　曲面论(一)

2001年11月2日

1　曲面的标架

今天我们讲一点曲面论. 微积分在曲面上应用的研究在整个数学里头是很要紧的. 这是因为在曲面论中, 曲面的这些性质往往扩充到其他更广的情形, 而这些更广的情形变化到曲面的时候也有很多性质, 在曲面的情形已经发生了. 那么, 曲面有个优点, 就是我们假定它是在3维空间里头, 所以你看得见, 你可以画图, 可以在看得见它上头的曲线里的性质及其他什么的. 一到高维以后, 就看不见了. 我的讲法跟书不一样, 所以我想大家把这几页材料复印一下. 这个材料大概应该在普通微分几何书上找不到的, 它有个优点, 就是快得很而且方法来得简单. 那么什么是曲面呢? 曲面就是图上一个扭曲的东西, 我把它的点的坐标表为两个变数的函数, 这两个变数我叫做u,v. u,v一般叫做参数(parameter), 假使u,v变化的时候, 这些点的轨迹就成了一个2维的曲面$\mathbf{x}(u,v)=(x^1(u,v),x^2(u,v),x^3(u,v))$. 于是因为有$u,v$, 所以你可以使得一个参数的值是常数, 然后使得另一个参数变化. 设v 是常数, 令u 变化, 所以就有一条曲线, 它的参数是u. 同样, 你可以使得u不变, 而v变化. 因此在曲面里头, 有两组曲线, 它的参数一组是v 等于常数, 一组u是等于常数. 对于这两组曲线, 每一条曲线在每一点都有一条切线. 所以在一个点x, 我们就有两条直线. 我假定这两条直线不重合, 换句话说, 解析地讲, x_u,x_v 不是同一个方向, 不平直(线性)相关, 其中x_u,x_v就是x 的矢量分别对u,v求偏微分. 或者我说, 它的矢量积$x_u\times x_v\neq 0$. 假使这两个方向不重合, 所以它们就张成一个平面, 这个平面我叫做曲面在这一点的切面. 这个切面在x这一点有个垂直的方向, 这个方向的直线一般叫做法线. 沿着法线的方向有一个单位矢量, 因此也叫做法矢量. 这个法矢量有两个选择, 它可以向上走, 也可以向下走, 有两个方向刚好相反的选择. 我选择它使得x_u,x_v跟法矢量是一个右手的坐标标架, 是一个右手系. 换句话说, 我叫这个法矢

量e_3, 并假设e_3是个单位矢量, 于是e_3就满足条件

$$(e_3, e_3) = 1 \text{ (单位矢量)},\ e_3 = \frac{x_u \times x_v}{|x_u \times x_v|^2}. \tag{4.1}$$

那么在这样的选择之下, (x_u, x_v, e_3)就是右手系. 这时, 行列式$\det(x_u, x_v, e_3)$是正的, 即$\det(x_u, x_v, e_3) > 0$, 所以是右手系. 现在, 我的这个方法跟一般的方法是不同的. 一般的书上往往用u, v 参数发展整个的曲面的微分几何, 因此就比较长了. 他们这里有一个缺点: 因为x_u 跟x_v 不一定垂直, 那么我们的兴趣是在于Euclid 几何有一个度量, 所以他们用的是非垂直的坐标系, 而几何是一样的, 但是分析方面的公式就比较复杂了. 而我取e_1, e_2是单位矢量, 它们是互相垂直的. 所以现在e_1, e_2, e_3三个矢量都是单位矢量, 而且互相垂直, 并且因为要它是一个右手系, 所以它的行列式应该是正的. 但是因为这三个矢量都是互相垂直的单位矢量, 所以行列式等于±1, 它的平方等于1. 所以我现在是叫这个行列式等于1 的, 因此这是一个正交的坐标系, 它的行列式等于1, 于是

$$e_1, e_2, e_3 \text{ (右正交标架)}:\ (e_i, e_j) = \delta_{ij},\ (e_1, e_2, e_3) = 1,\ 1 \le i, j, k \le 3. \tag{4.2}$$

2 曲面的微分式及其几何

那么微分几何怎么样呢? 这时就不只是有一个坐标系, 而是有一族(family)坐标系, 还有几个变数(变的参数). 那么最要紧的一个现象就是一个坐标系跟它临近的坐标系是怎么一个关系. 要了解这个关系是微分几何最主要的问题. 所以我现在有一族坐标系, 比方说是有两个变数u, v, 甚至可以有多个变数, 那么要找这个临近坐标系跟它的关系, 我就把它微分了. 现在我这个$\mathbf{x}$是矢量, e_i也都是矢量, 所以我就求求看dx, 看d跟de_i. 这是一个矢量的微分. 但是因为e_1, e_2, e_3 是一个标架, 是线性无关的, 而我们是在3维空间中讨论的, 所以任何一个矢量必然是e_1, e_2, e_3 的线性组合. 所以我可以把de_i写成

$$de_i = \omega_{ij} e_j. \tag{4.3}$$

这里我用的是Einstein的符号: 如果有一个指数重复的话就相加. 因为我们的空间是3 维的, i, j, k都是从1到3, 那么$\omega_{ij}e_j$ 就是对j 相加. 所以这是3 项, 即$j = 1, 2, 3$, 有3项. 这是Einstein 在微分几何引进的符号. Einstein还做了一件事情: 比方说, 从前你要有个数目, 它要有个指数, 即x_i, i这个指数都写成下标. Einstein说不写下标, 他就写了上标, 因此后来的微分几何的书里头, 上标非常多. 坐标的这个指标都写成上标, 其实, 上下没有关系. 所以, 我用下标写成公式(4.3). 公式(4.3)是基本的公式, 它表示两个临近坐标的关系, 一个de_i 跟原来的坐标e_i 的关系. ω_{ij}是什么呢? 它是一次微分式. 因为de_i 是一次微分式, 它的值是矢量的一次微分式, 所以你如果写成它的分量的话, 就有3个分量, 而且每一个都是de_i的分量, 那么ω_{ij}是一次微分式. 因为i, j都是从1 到3, 所以一共有9个. 但是这些ω_{ij} 不是任意的, 这是几何上, 力学上最基本的一个公式. 因为我们一切都是正交的系统, 所以ω_{ij}对于下标i, j是反对称的, 即

$$\omega_{ij} + \omega_{ji} = 0. \tag{4.4}$$

为什么呢? 因为e_i, e_j 满足$(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, 你把它微分, 又因为 $delta_{ij}$ 是常数, 所以微分它之后是0，于是就能得到下面公式:

$$(de_i, e_j) + (e_i, de_j) = 0. \tag{4.5}$$

由于$de_i = \omega_{ik}e_k$, 并且e_i, e_k是互相正交的, 所以由上式就得到$\omega_{ij}+\omega_{ji} = 0$, 即公式(4.4). 对于所有的$i, j$从1 到3, ω_{ij}是反对称的, 因此(ω_{ij}) 看成一个3×3的方阵. 那么这个方阵是反对称的, 它不是有9个元素, 实际上, 只有3个, 并且因为反对称, 所以主(对角)线上的元素都是0, 其他的对于主线是反对称的. 也就是有

$$(\omega_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & \omega_{12} & \omega_{13} \\ -\omega_{12} & 0 & \omega_{23} \\ -\omega_{13} & -\omega_{23} & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.6}$$

因此只剩下3个元素, 即只有$\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}$, 这3个都是一次微分式. 而这3个一次微分式对曲面几何性质是非常要紧的, 即它们都可以由微分式来表示. 普通研究函数论, 搞分析的时候, 都是讲函数, 讨论函数或者是把函数微分

了, 把它的微商作为系数, 大家传统不习惯于一次微分式. 其实, 一次微分式是把这个问题弄得简单了. 我开头的时候曾经跟你们介绍过法国的大数学家Darboux的书, 它有四大本叫做《曲面论》. 这种书很值得看, 不过可惜是法文的. 他不用微分式, 他用的是偏微分, 所以有许多公式写起来长一些. 用微分式的话, 一次微分式写起来就简单多了. 所以我这里用了一次微分式, 用正交标架, 使曲面论非常简单. 这些你们在普通微分几何书中很少能找到. 但是这种方法很有效, 因为一切东西都简单了. 我假定曲面是定向的, 即在转的时候有一个反时钟方向. 因为定了向之后, 在一个点, 它有两个切矢量的话, 它的法矢量就完全确定了. 因此, 曲面定向之后, 每一点一定有一个固定的单位法矢量, 不是它的负的矢量. 那么, 曲面上有一个很要紧的几何结构, 就是一个点加一个单位切矢量, 即x跟e_1, 这是现代所谓纤维丛的最简单的情况, 也是最要紧的情况. 那么对于$x+e_1$, 它多了一个维数, 因为固定了x之后, e_1这个单位切矢量还可以转圈, 所以x的轨迹是2维的. 那么每一个x的切矢量还得加1维. 这是因为它可以是一个圆, 转一个圆周, 它是单位的. 所以这个空间是3维的, 而这个3维空间我叫做E:

$$E = \{xe_1 | x \in M\}(\text{圆丛});\ \dim E = 3. \tag{4.7}$$

有一个3维的空间或者说造出一个3维空间, 这个观念要紧极了. 现在许多数学, 物理都需要这个观念. 一旦你用原来的流形来描写几何不够, 往往需要上面有一个圆圈, 这个我们叫做纤维丛. 这时圆周是一个纤维, 因此这个纤维丛叫做圆丛. 因为纤维是圆, 所以E是由流形M(曲面我叫它为M, 是一个流形)造出来的一个圆丛. 那么在一点要有e_1, 就有e_2了. 这是因为e_2 是跟它垂直的一个单位切矢量, 同时可以由原来的定向确定下来. 因此e_1, e_2就定下来了, e_3是法矢量当然也定了. 所以xe_1这个单位切矢量跟标架是一回事. 有了单位切矢量也可以构造一个标架, 当然有了标架, 你就可以取第一个切矢量为e_1. 所以这3维空间就是我们的曲面所有这些标架e_1, e_2, e_3 所成的空间. 于是我们就有上面的公式(4.7). 我说E是3维的, E有一个映射, 映到原来的曲面M: 因为你有这个切矢量, 它有一个原点x, 由xe_1把它映为x, 这是一个从E 到M的映射. 要研究曲面的微分几何, 单从曲面不够, 一定要用E.

E跟原来的曲面有密切的关系, 刚才我讲了这种几何的关系. 用E的好处在于, E 的空间是3维的空间, 它上头有一次微分式, 这些微分式在E上头都是确定的. 那么除了我讲的e_1, e_2, e_3这几个单位矢量, 当然曲面的点x也是一个矢量, 它的位置矢量也是一个矢量. x 是u, v的函数, dx 当然是u, v 的一个一次微分式, 它也可以表为e_1, e_2, e_3 的一个线性组合. 但是实际上, 它一定是e_1, e_2 的组合, 这是因为e_3 是法矢量, 所以它一定是在切面上头, 而e_1, e_2都是切矢量, 所以dx一定是e_1, e_2的线性组合, 它的系数我叫做ω_1, ω_2, 即得到我们第一个公式:

$$dx = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2. \tag{4.8}$$

所以我现在有5个一次微分式: $\omega_1, \omega_2, \omega_{13}, \omega_{23}, \omega_{12}$. 这组微分式非常要紧, 它们都有简单的几何意义. 这个就说明微分式讨论几何性质使得问题简单而且容易. 现在我们就有公式(4.8). 我们将公式(4.3),(4.4)作为我们的第二个公式. 我在前面讲过, 微分式有个最大的优点, 就是微分两次后是0, 即对于dx, $d(dx) = 0$. 对于任何函数的外微分两次一定等于0, 这就相当于在空间任意取一个区域, 再取它的边界, 而边界不再有边界. 取边界取两次一定是等于0. 因为这个性质, 这种数学结构就有所谓的同调(homology)性质. 现在你要搞什么东西, 都是同调性质, 非常要紧. 不过我们现在把公式(4.8)左边dx 再d一下子就等于0, 而把右边的展开就得$d(\ omega_1 e_1) + d(\omega_2 e_2)$, 即

$$d(\omega_1 e_1) + d(\omega_2 e_2) = 0, \tag{4.9}$$

注意当外微分前面有一个一次的话, 微分第二个因子要改号. 总而言之, 你就把它们微分了. 微分之后, 就发现所得到的式子是e_1, e_2, e_3的线性组合, 那么它的系数是二次微分式. 而对于这个系数是二次微分式的矢量要等于0的话, 所有的系数都要等于0. 于是你如果令e_1, e_2的系数为0 的话, 就得到我下面的第三个公式:

$$d\omega_1 = -\omega_2 \wedge \omega_{12}; d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12}. \tag{4.10}$$

我不详细把它做了, 这个证明很简单, 可立即可得. 这是要紧极了的一个公式. 这些公式你们也许觉得新, 因为在普通书上看不见, 这是由于普通不

喜欢用微分式, 许多人也不会用微分式, 其实这很简单. 所以我就得到公式(4.10). 然后令e_3的系数为0, 就得到第四个公式:

$$0 = d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23}. \tag{4.11}$$

这是非常非常要紧的公式. 由这些就得到所谓的Levi-Civita平行性. 现在, 这个也叫联络(connection). 对于联络, 普通找一本书, 可以讲上很久很久, 其实很简单. 我说在这个情形之下, Levi-C ivita联络就是ω_{12}这个一次微分式. 注意ω_{12} 是E里头的一个一次微分式, 它就定几何的性质, 使得我可以把这个矢量沿着一条曲线平行的移动. 这是什么意思呢? 就是ω_{12}这个一次微分式由方程(4.10)完全确定. 因为如果有一个ω'_{12} , 使得适合同样的方程式, 即

$$d\omega_1 = -\omega_2 \wedge \omega'_{12}; \quad d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega'_{12}. \tag{4.12}$$

我需要证明$\omega_{12} = \omega'_{12}$, 即只有一个可能性, 只有一个$\omega_{12}$ 适合方程(4.10). 也就是说, 假使有另外一个ω'_{12}适合方程(4.10), 那么我们把两个方程相减, 就得到

$$\omega_1 \wedge (\omega'_{12} - \omega_{12}) = 0; \;\; \omega_2 \wedge (\omega'_{12} - \omega_{12}) = 0. \tag{4.13}$$

而两个一次微分式如果相乘等于0的话, 而且如果其中一个不是0, 那么其它那个必然是它的倍数, 这是外代数最简单的东西. 你们算一算就出来了. ω_1, ω_2是不为0 的, 而且不但不等于0, 并且线性无关. 因此, $\omega'_{12} - \omega_{12}$既等于$\omega_1$的倍数, 又等于$\omega_2$的倍数. 但是$\omega_1, \omega_2$ 线性无关, 所以它要等于0. 因此如果再有一个ω'_{12}适合同样的方程, 它一定等于$\o mega_{12}$. 这是完全确定的. 那么我用这个引进所谓的Levi-Civita平行性. 我们现在有$de_1 = \omega_{12} e_2 + \o mega_{13} e_3$. 我们把$e_3$这一项取消, 取消是什么意思呢? 假使有一个矢量, 你把它的e_3取消之后, 就是沿着e_3的方向取这个正交投影, 所以你把它取消了的意思就是取它的正交投影. 你把它取消的话, 我现在不再是普通的微分了, 是新的微分了. 我用D表示这个新的微分, 于是就得到这组公式:

$$De_1 = \omega_{12} e_2, \; De_2 = -\omega_{12} e_1. \tag{4.14}$$

这是照我刚才证明的是由几何完全确定的, 这是因为ω_{12}是完全确定的. 假使$De_1=0$的话, 我就说这个矢量是Levi-Civita意义下平行, 即我说在这种情形下它就是平行的. 它是平行的, 这是有新的意义. 在Euclid 几何的时候, 这就是普通平行, 现在是普通平行的推广, 也就是$De_1=0$时是Levi-Civita平行. 所以在曲面上, 你用一次微分式, 尽管这个平行比较难懂. 令$De_1=0$的话, 对于矢量是个微分方程. 这个微分方程不一定有解, 但是假使你有一条曲线, 你就可以沿着这条曲线求解. 对于曲线来说, 所有的这些函数都是t的函数. 沿着这条曲线求解, 可以求到解. 至于这个条件, 我说这个矢量就是Levi-Civita 平行. 所以从这个定义可以了解这个平行性跟曲线的选择有关. 假使有一个点, 另外还有一点, 那么你联这两点有两条不同的曲线, 你把同一个矢量沿头一条曲线平行, 并沿第二条曲线平行, 看到的一般不是同一个矢量. 至于这个平行性与曲线的选择有关系, 是普通的平行性的推广. 普通的时候, 平行性在Euclid 平面里上是绝对的和定了的, 现在这个时候是跟曲线的选择有关系, 这就是联络. 我刚才把x 这个矢量d两次等于0. 而同样的, 我可以对e_i这个矢量也d 两次, 即$d(de_i)=0$. 因此算出来$d(de_i)=0$, 就有:

$$d\omega_{ij}=\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}. \tag{4.15}$$

实际上, 很简单地, 我对$de_i=\omega_{ij}e_j$ 求微分. 然后因为ω_{ij}是一次微分式, 所以应该有个负号, 即负的$\omega_{ij}\wedge de_j$, 于是有

$$d(de_i)=d\omega_{ij}e_j-\omega_{ij}\wedge de_j=0. \tag{4.16}$$

但是$de_j=\omega_{jk}e_k$, 所以头一个$d\omega_{ij}e_j$改为$d\omega_{ik}e_k$ 没有关系, 这是因为你对于j,k是求和, 可写成j, 也可写成k, 都是从1到3, 无所谓的. 因此就得到公式(4.15). 这是一个基本的公式, 看着麻烦, 其实很简单. 尤其是在3维的情形, 很简单. 实际上, 右边讲起来是3项之和, 但是这3项是对于j 求和. 因为ω 是反对称的, 所以我们来看$\omega_{ik}, i\neq k$, 或者就来看看ω_{13}. 在下面那个公式看$d\ omega_{13}$ 应该是$\omega_{1j}\omega_{j3}$, 但是实际上, j只能等于2, 这是因为$j=1$时$\omega_{11}=0$, $j=3$ 时$\omega_{33}=0$. 所以右边看着是这么样之和, 其实就只

有一项, 所以你就得到

$$d\omega_{13} = \omega_{12} \wedge \omega_{23}. \tag{4.17}$$

同样可以得到

$$d\omega_{23} = -\omega_{12} \wedge \omega_{13}. \tag{4.18}$$

这些一般就是所谓的Weingarten公式, 非常简单. 所以这些公式都是从简单的外微分立即得到的. Weingarten公式很有意思, 你要它跟原来的ω_1, ω_2的公式比较的话, 完全是一个形状, 即注意到这些公式与公式(4.10) 相似. 这个形状是有几何意义的, 现在它用来定所谓的Betti Transform ation, 这个我不细讲了. Weingarten公式跟原来$d\omega_i$的公式的相似性是有深刻的几何意义的.

3 曲面的基本不变式

上面我讨论了De_1的Levi-Civita 平行性. 如果取这个矢量在e_3这个方向的话, 我就得到$\omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23} = 0$, 即公式(4.1 1). 因此, ω_{13}, ω_{23}都是ω_1, ω_2的线性组合, 我可以写成

$$\omega_{13} = a\omega_1 + b\omega_2,\ \omega_{23} = b\omega_1 + c\omega_2. \tag{4.19}$$

由这个我得到这个曲面的要紧的不变式. 一个曲面与另一个曲面有什么分别? 这个分别在于曲率. 曲率是曲面上的函数. 比方说, 一般的话, 我们用第一基本式跟第二基本式来表示:

$$\text{第一基本式}\ \ \mathrm{I} = ds^2 = (dx, dx) = \omega_1^2 + \omega_2^2; \tag{4.20}$$

$$\text{第二基本式}\ \ \mathrm{II} = (-dx, de_3) = a\omega^2 + 2b\omega_1\omega_2 + c\omega_2^2. \tag{4.21}$$

对于第一基本式, 我叫它(I).它就是曲面的$ds^2 = (dx, dx)$. 由于$dx = \omega_1 e_1 + \ omega_2 e_2$, 但是$e_1, e_2$是互相垂直的单位矢量, 所以就得到$\omega_1^2 + \omega_2^2$. 因此$\omega$这5个一次微分式都有重要的几何意义. ω_1, ω_2 的平方和就是曲面的度量. 在3维空间里头, 曲面当然有一个度量, 那么它的度量是什么呢? 就是它的Riemann 度量, 是一个2次的微分式. 这个2次微分式简单极了, 就

是$\omega_1^2+\omega_2^2$. 那么, 我也可以对e_3这个矢量取$-(de_3,dx)$. 照我刚才所写的, 它就等于$a\omega^2+2b\omega_1\omega_2+c\omega_2^2$, 这也是一个2次微分式. 这个一般叫做第二基本式. 那么有一个第一基本式, 还有个第二基本式, 你就取它的特征值. 特征值的和就是$a+c$, 特征值的积就是$ac-b^2$. 一般地, $H=\frac{a+c}{2}$叫做曲面的中曲率, $K=ac-b^2$ 叫做曲面的Gauss曲率. 这里要紧极了, Gauss曲率有许多有趣的性质. 因此这是怎么样从5个一次微分式由它们的线性组合的关系就得到曲面的不变式. 中曲率跟Gauss曲率这两个不变式描写曲面的几何性质. 比方说, 可以证明Gauss 曲率是正的话, 曲面是鼓的, Gauss曲率是负的话, 曲面就有鞍点, 就象马鞍点. 许多几何性质都可以用这两个曲率来描写, 所以是曲面里头两个最主要的不变式. 这个不变式是函数. 以往我们得到的是一次微分式, 而一次微分式不大容易想象究竟是什么意思, 但由它的运算可以得出函数来. 这函数当然是了解得比较清楚, 便得到中曲率跟Gauss 曲率. 中曲率等于0, 一般叫做极小曲面. 所谓的极小曲面, 举例就是你把一条封闭的曲线放在肥皂水里头所成的曲面就是面积最小的曲面, 它的中曲率为0. 所以这有简单的几何意义, 最近, 甚至现在都有很多关于极小曲面的研究. Gauss曲率更要紧, Gauss曲率是等于$\omega_{13}\wedge\omega_{23}$. 在曲面上也一样有Gauss映射. 曲面每点有一个单位法矢量, 把这个单位法矢量看为一个半径为1 的球面的点, 就把曲面映射到球面上去了. 每个点有一个单位法矢量, 你在0点画一个单位法矢量跟它平行, 它的端点就在单位球面上. 那么对于所有的点都做这个构造的话, 就在单位球面上得到一个区域. 在这个映射下, 两个面积元素的比, 即它的像(imag e)的面积元素跟原来面积元素的比就是Gauss 曲率. 这样一下子就看出来了. 所以这个Gauss曲率有很简单的几何意义. 这时, 曲面的讨论是一个推广. 曲面的时候有曲线, 曲线也有一个Gauss映射. 那个Gauss映射是取单位切矢量, 其实也可以取单位法矢量. 那么曲线的时候, Gauss映射把切线映射到单位圆上头, 把单位圆的度量被原来这个度量除就是曲率. 现在就把这个观念推广到高维, 推广到2维, 即推广到曲面, 所以我由这个曲面Gauss映射到一个单位球面上头, 这两个面积的比就是Gauss曲率. 所以这是一个非常自然的几何度量. 现在有个很要紧的关系. 上头有$d\omega_{ik}=\omega_{ij}\wedge\omega_{jk}$, 现在我把这个公式用到$\omega_{12}, i,k=1,2$, 于

是$d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32}$. 但是$\omega$是反对称的, 所以$\omega_{32} = -\omega_{23}$. 这里$\omega_{13} \wedge \omega_{23}$ 就是$ac - b^2$, 也就是Gauss曲率. 所以我就得到公式

$$d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2, \tag{4.22}$$

其中, K是Gauss曲率. 这是一个令Gauss 非常惊讶的公式. 所以Gauss把这个定理叫做Theorem Egregious, Egregious是拉丁字母, 意思指这是一个了不得的定理. 为什么呢? 它证明了Gauss曲率只跟曲面的Riemann 度量有关, 跟这个曲面在空间的位置无关. 因为在这个公式里头, ω_{12}已经证明了只跟曲面的Riemann度量有关. 然后$\omega_1 \wedge \omega_2$就是在这个度量下的面积元素, 当然只跟ds^2有关, 即只跟Riemann度量有关. 所以虽然Gauss曲率是一个曲面在空间里头的一个不变式, 但是它只跟曲面的Riemann度量有关. 换句话说, 你把曲面变换(deform)一下子, 使得Riemann度量不变, Gauss曲率就不变. 所以Gauss曲率有这么重要的性质. 我想Gau ss做了许多要紧的和漂亮的结果, 这个定理显然是他特别欣赏的一个结果, 是很特别的一个结果. 实际上, 我们就把这些方程用外微分微分一下子, 得到基本公式, 然后就得到这些公式. 下次, 我要讲由这个公式证明Gauss-Bonnet公式. Gauss-Bonnet公式是推广三角形三角之和等于180^o, 将这个公式推广到曲面的情形. Gauss-Bonnet公式的应用非常之广. 证明的时候, 我始终利用圆丛. 这圆丛稍微用得复杂一些: 假定这个丛是一个复的线丛(complex line). 那么这个复线丛的纤维是条复线, 在复线里头, 绝对值等于1的复数是一个圆周, 就是圆丛. 这个观念在物理上是基本的. 现在大家搞得很多的是辛几何(symplectic geometry). 单有辛结构(symplectic structure)不太有用, 你要把辛几何用到量子力学的话, 需要加上一个复线丛, 就是我们现在所讲的东西的一个推广. 我们现在讲2维, 一到物理的话, 空间与时间加在一起是4维, 所以你基本的空间是4维, 在4 维空间当中有一个复线丛. 因此就得到这个Gauss 曲率. 现在这个曲率是2次微分式, 它d一下子等于0, 就得到Maxwell方程. 所以微积分在几何上应用是许多物理的基础. 最近我在《科学》杂志上写了一篇文章, 叫做《Gauss-Bonnet公式与Maxwell方程》, 你们如果能找到, 可以去看一看. 我想把这篇文章拿来给大家, 但是

现在乱得很, 没找到. 下次我想讲Gauss-Bonnet公式的一个证明, 这个跟我们的工作有非常密切的关系. 在5 0年前, 在昆明西南联大, 我教微分几何, 就得到Gauss-Bonnet公式的这个证明. 普通书上复杂多了. Gauss-Bonnet公式主要意思是说, 你有任何一个曲面, 曲面上头有一个多边形, 把这个多边形的Euler特征数表示种种曲率的组合, 这是Gauss-Bonnet公式. 我得到这个证明. 我想这是Gauss-Bonnet公式最简单和最自然的一个证明, 就是把$d\omega_{12}$一微分就得到Gauss-Bonnet公式积分的式子. 然后我在一九四几年的时候, 到了Princeton 做高维的, 当然自然而然地, 我想法子把这个推广到高维, 这个是可以做到的. 以后, 我还做了些别的工作. 所以可以说我这个Gauss-Bonnet公式的证明在

我所做的工作中是我最喜欢的一个. 我想现在可以结束了.

第五讲　曲面论(二)
－Gauss-Bonnet公式

2001年11月23日

1　曲面论发展的简介

很高兴又与大家见面了. 我在医院里住了几天, 你们可以看出来我还没有完全好, 不过我觉得我还是跟大家讲讲这些东西. 那么, 我今天要讲的是Gauss-Bonnet公式. 这个公式有相当的意义, 也有相当的历史, 尤其跟我个人的工作也有关系, 所以我要提一提我跟这个问题是怎么样的关系. 我们上次讲到曲面论, 曲面论是微分几何里头最重要的一部分. 因为许多微分几何的现象在在3维空间里的2维曲面的情况已经产生了. 同时, 因为它是在3维空间里头, 这个几何的情况是可以看见的, 不是完全用代数来表示. 曲面论有很长的历史, 最早的当然是Monge. Monge 是法国的大数学家, 他老先生对政治有些活动, 所以他除了做大学教授之外, 他对法国的教育有很多影响. 他是拿破仑底下的一个雇员, 帮助拿破仑做事, 他是拿破仑政府的海军部长, 甚至还跟着拿破仑去埃及打仗. 因为他的影响, 法国的高工学校(Ploytechnique)就建立起来了. 很长一段时期, 法国最好的学生都在高工学校. 我想高工学校也许象现在的清华, 有许多好的学生, 例如说, 法国一个最大的数学家Poincare 就是Ploytechnique的学生. Monge是第一个写关于微分几何书的人, 他的书就叫做《微积分在几何上的应用》, 这也是我要讲的题目. 因此, 法国的教育在微分几何有一个相当的传统. 除了Monge本人之外, 由于他在高工的影响, 他有很多学生, 都是在微分几何有相当贡献的人. 然后在微分几何逐渐发展之中, 比较晚一些的是法国另外一个大数学家Darboux. Darbo ux是法国科学院的秘书长, 所以在他的时期, 他是在科技界有很多影响的一个人. 他不仅是秘书长, 也是巴黎大学理学院的院长. 他的最大的工作是四本《曲面论》. 我想, 这四大本是数学文献里头永远的一个文献. 现在可惜由于它是法文的, 很多人不看这个书, 我想这些人对微

分几何缺少一点了解, 他们应该看这个书. Darboux的书讲得非常好, 包括了很多材料. 在1941 年, 我在西南联大教书, 教《微分几何》, 也讲到曲面论. 讲到曲面论时, 当然就看Darboux的书, 就想到Darboux的书里头, 一个主要的方法是用活动标架, 也就是采用活动标架法. 他用得非常彻底, 做得非常之漂亮. Darboux稍微不用的一点是他不用外微分, 我想, 我的课是讲微积分, 而微积分你要讲到多元, 多变数的时候, 这个外微分不能避免. 这是因为在多变数的时候, 最有效的工具是外微分. 外微分可以加, 减, 可以乘, 可以微分, 所以有很多代数的运算可以用到外微分, 同时, 一个外微分也是一个式子, 这个式子给予很多数学问题, 不管是它的几何, 还是它的分析, 都给你很多材料, 因此是非常有用的. Darboux的缺点是他没有用外微分. 他用活动标架法, 但是没有外微分. 因此, 有很多工

作, 不用外微分, 怎么办呢? 他也是还要用微积分的, 不用外微分, 他用偏微分. 用偏微分比外微分差得多了. 因为你的曲面是2维的空间, 所以对于两个变数, 即曲面的参数u, v, 你要对u求偏微分, 对v求偏微分, 这里头有很多偏微分, 而用外微分就简单多了. 但是他不采用外微分, 这是很奇怪的事情. Darboux是发现一次外微分式的第一人. 一个是Darboux, 一个是Frobenius, 他们两个人最早发现这个东西的, 但是等到应用到曲面研究的时候, 不知道为什么, 他没有用. 也许是由于传统的关系, 他写了外微分之后, 谁都不懂了, 所以他不用外微分了. 我刚才讲了, 在1941年, 我刚巧在昆明教这个课, 我很自然地想, 为什么不用外微分呢?所以我就用外微分想法子做Darboux所做的工作, 或者说至少做曲面论和一些几何的讨论. 我采用外微分, 因此我得到一个很好的了解.

2 曲面论基本内容的回顾

什么叫外微分呢?就是你发现要研究曲面的话, 曲面是一个2维的流形, 它在普通空间里头是2维的, 所以它上头任意一个点是两个变数, 通常就叫做参数. 但是现在呢, 我们就叫它局部坐标u, v. 因此它的坐标是2个变数的函数, 所以是这个条件使它在每一点有一个切平面. 这个切平面当然很要紧, 因为

我们没有法子研究复杂的图形. 我们只能研究最简单的如直线, 平面这些东西. 切平面跟曲面有最密切的关系. 那么, 单说密切的关系不够, 一定要解析地能够解决比较更深刻的一些问题. 有一个切平面, 在这个切平面上是2 维的, 于是每一点就有许多矢量, 也就是切矢量. 切矢量就是跟这个曲面相切的矢量. 因为这个曲面是在Euclid 空间里头, 所以我可以讲这个矢量的长度. 为简单起见, 我限于讨论长度等于1 的矢量, 即单位矢量, 所以有一圈单位切矢量. 跟这些单位切矢量垂直的有另外一个矢量, 我们假定它是取成单位的, 那么这个矢量我们叫做单位法矢量. 要注意的是这里就有一个几何现象发生了, 因为假使这个曲面弄平了的话, 单位法矢量可以向上走, 也可以向下走. 换句话说, 这个曲面除了是一个2维的流形之外, 它还有一个定向: 在曲面上你是顺方向转, 还是跟逆方向转, 这个转动是很不一样的. 所以, 你要定怎么样子转动是顺方向, 这就是要给曲面一个定向. 定向有了之后, 它的单位法矢量就定了. 单位法矢量在这个方向可以向上走, 也可以向下走. 定了一个之后, 这个曲面也就定向了. 这是很重要的一个观念. 虽然相差的只是一个符号, 但是这是一个很重要的观念. Mobius是德国伟大的几何学家. 因为你要定向, Mobius发现有些曲面不能定向, 这当然是很有意思的一件事情. 你们大家都知道的这个图形: 就是拿一张纸, 你把它转一圈连起来的话, 就得到所谓的Mobius 曲面, 它没法子定向. 这是几何上很有意思的一件事情. 那么我们假定曲面已经确定了一个方向. 有了这样定向的曲面之后, 几何情况是怎么样的呢?由单位法矢量e_3, 其中e_3 是在3维空间, 你发现有一件事实, 就是说你单独讨论曲面不够, 你一定要利用曲面上的单位切矢量, 我叫这个单位切矢量为e_1. 这样我就有了一个标架, 它有了第一个单位矢量和第三个单位矢量. 如果空间是定向的, 第二个单位矢量$e_2 = e_3 \times e_1$也就完全确定了. 所以我就有个单位标架. 单位标架就是三个单位矢量按照一定的次序, 是互相垂直的. 为什么单位标架在几何的研究之中是这么重要? 就是因为几何是根据运动群研究空间在运动之下不变的几何性质, 而这运动群就是标架所成的空间. 因为是有一个并且只有一个运动把一个标架变为其它的标架. 至于全体的单位标架跟这个运动群的元素成一一对应, 不但是一一对应, 而且对应保持拓扑和一切的性质, 所以运动群很要紧. 因为空讲的

运动不知道在解析的情况之下如何可以处理, 而了标架之后, 就可以处理了. 标架就是矢量了, 而矢量一般是有3个分量的矢量, 而每一个分量是函数, 就可以把它微分, 加, 减什么的. 矢量有加, 减的运算, 也有微分的运算. 在某种意义下, 还可以有积分的运算. 所以我现在就可以微分. 我研究曲面的时候, 不只一个标架, 那么在曲面的每点, 这样的标架有多少呢? 假使你晓得e_1的话, 同时这个曲面是定向的, 这个标架就完全定了. e_1是什么呢? e_1是这个曲面在这一点的单位切矢量, 那么这个曲面有多少单位切矢量呢? 每点有一圈在切平面上头等于单位矢量, 而曲面是2维的, 所以它们所成的空间是3维流形. 这是因为这个点是在曲面上移动, 是2维的, 现在在点定了之后, 单位切矢量可以绕着它转一圈, 成一个圆周, 所以它是又加一维, 是3维. 这个3维空间非常要紧. 我想现在实际上, 你们要了解微积分或者了解跟微积分下去的数学或者在数学中的应用, 这个情况是最简单的, 同时是最有用的. 所以我有一个3维空间, 由于每一点有个圆周, 现在有个名字叫做圆丛, 或者圆周丛, 丛是bundle. 所以你要研究曲面的几何性质, 用这个解析的方法, 一定要讨论它的圆丛. 讨论圆丛了之后, 一切都简单了. 因为一切都是矢量, 而是矢量的话, 它有分量, 就可以微分, 就可以用代数或者微分的运算. 我们是在讨论微积分, 我们假定碰到什么函数都可以微分. 我叫在这个曲面上的点为x, 那么dx 是一个矢量, 就是从原点连着这个点的矢量. x 是u, v 的函数, 而u, v是曲面上的局部坐标, 所以你可以写出dx: 假使x 限制在曲面上, 那么dx一定是e_1 与e_2的线性组合, 所以在这个地方, 我就充分利用外微分的观念. 实际上dx是一个矢量值的一次微分式, 所以它是e_1 与e_2 的线性组合, 它的组合系数是一次微分式, 所以dx可以写为

$$dx = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2. \tag{5.1}$$

(dx, dx) 就是我们曲面的黎曼度量. 因为e_1, e_2是互相垂直的单位矢量, 所以

$$\omega_1^2 + \omega_2^2 = ds^2 \tag{5.2}$$

就是黎曼度量. 如果这个清楚了, 这对于普通讲微分几何简单多了. 因为普通微分几何, 黎曼度量要写成$g_{ij}dx_i dx_j$, 这是因为在切空间里所利用

的坐标是任意的Ca rtesian坐标, 它不一定垂直, 也不一定是单位. dx 等于$\omega_1 e_1 + \omega_2 e_2$, 但是我们外微分有个基本的性质, 就是再用一次的话, 它等于0. 这就是普通说的偏微分可以是交换的条件, 一样的, 也就是得到的偏微分与微分的次序无关. 所以你就把d用到dx上头, 一定等于0. 你把右边展开的话, 就得到$d(\omega_1 e_1) + d(\omega_2 e_2)$, 注意当外微分前面有一个一次因式的话, 微分第二个因子要改号. 总而言之, 可以得到

$$d\omega_1 = -\omega_2 \wedge \omega_{12}; d\omega_2 = \omega_1 \wedge \omega_{12}. \tag{5.3}$$

$$0 = d\omega_3 = \omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23}. \tag{5.4}$$

我会在下面给出$\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}$. 既然用微积分了, 所以可以把$(xe_1e_2, e_3)$的微分表为$e_1, e_2, e_3$的线性组合. 这个线性组合把$de_i$写成$\omega_{ij}e_j$. 现在我用微分几何普通的符号: 假使有一个指数要重复的话, 就表示相加, i, j, k从1到3. 你把de_i 写成$\omega_{ij}e_j$, ω_{ij}的几何意义很明显: 你现在有一组标架, 这组标架跟一组参数有关系, 而对于这一组标架, 就有一个邻近标架, 这个邻近标架跟原来标架的关系就是ω_{ij}. 这关系是由一次微分式来表示的. 因此就有

$$de_i = \omega_{ij} e_j. \tag{5.5}$$

这组方程式很要紧, 它就表示两个邻近标架互相的关系. 在这个情况之下, 微分几何跟力学不大一样, 力学往往变数是时间, 所以一个标架跟着时间在移动, 因此你整个标架只有一个变数, 都是时间t的函数. 现在我们是一个曲面, 每点有许多标架, 所以我这标架的参数是3. 这是因为有切面的局部坐标, 又有切矢量在平面里头变换的坐标, 所以我现在这个自变数是3, 还因为E 这空间是3维的. 自变数高了, 所以这是有原因使得外微分有效. 我们已将de_i 写成方程(5.5). ω_{ij}对于i, j是反对称的, 这是因为我的标架是单位标架, 即因为$(e_i, e_j) = \delta_{ij}$, 所以它是反对称的. 因此ω_{ij}实际上很简单: 你把(ω_{ij})写出来, 它是一个方阵. 这个方阵是反对称的, 所以在对角线的ω等于0, 其余的对着对角线是反对称的, 因此实际上只有3个一次微分式: $\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}$. 我想我上次证明了$\omega_{12}$由$d\omega_1, d\omega_2$的方程(5.3)完全确定, 这是一个重要的定

理, 这是使得Levi-Civita出名的重要定理. 我现在把方程(5.5)求外微分. 因为$d(de_i)=0$, 所以右边的话, 我就得求$d\omega_{ij}$, 结果得到的是

$$d\omega_{ij}=\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}. \tag{5.6}$$

因此这些ω之间有很简单的关系, 简单得不得了. 因为什么呢?因为对于$d\omega_{ij}=\omega_{ik}\wedge\omega_{kj}$, i,j是不相等的. 如果相等了的话, ω_{ii} 是0, 这是因为ω是反对称的, 所以你取$i\neq j$. 如果k等于i, 则$\omega_{ii}=0$; k要等于j, $\omega_{jj}=0$. 所以k不等于i, 不等于j. 因为我们是在3维空间, k只有一个可能性. 因此这个看着很神奇的方程式, 它的右边只有一项, 我上次把它写下来了, 就是

$$d\omega_{12}=\omega_{13}\wedge\omega_{32}. \tag{5.7}$$

$$d\omega_{13}=\omega_{12}\wedge\omega_{23}. \tag{5.8}$$

$$d\omega_{23}=\omega_{21}\wedge\omega_{13}. \tag{5.9}$$

尤其是得到$d\omega_{12}=\omega_{13}\wedge\omega_{32}$这个公式. 但是$\omega$ 是反对称的, 所以就得到

$$d\omega_{12}=-\omega_{13}\wedge\omega_{23}. \tag{5.10}$$

而ω_{13},ω_{23}都是ω_1,ω_2的线性组合:

$$\omega_{13}=a\omega_1+b\omega_2,\ \omega_{23}=b\omega_1+c\omega_2. \tag{5.11}$$

这刚巧就得到下面这个公式:

$$d\omega_{12}=-\omega_{13}\wedge\omega_{23}=-K\omega_1\wedge\omega_2. \tag{5.12}$$

K是Gauss曲率, Gauss 曲率就是$K=ac-b^2$. 这个公式不得了. 当年Gauss不是这样得到这个公式, 是用旁的方法得到公式. 它叫做Theorem Egregium, 用中文讲, 它是一个奇妙的定理, 妙的定理. 你细细看看它, 它是很妙的. 因为我们的E是单位矢量丛, 它这个圆周丛对于曲面M 有一个投影: 对于圆周丛, 有这个单位矢量, 我取它的原点就是它的投影. 因此我们现在的几何比从前观念上比较复杂了, 就是说, 不只是有一个曲面或者有一个曲线, 现在

有两个空间: 有E这个空间和曲面M. 事实上, 有了曲面M, 然后有由所有它的单位矢量所成的空间是E, 它是曲面的圆周丛. 现在通常叫这个曲面是底空间, 它是在底上的一个空间. 所以就有一个3维的圆周丛, 它的底空间是我们的曲面. 在这个情况之下, 我们有几个一次微分式: 在空间里头有一次微分式ω_1, ω_2, 然后有$\omega_{12}, \omega_{13}, \omega_{23}$, 一共5个一次微分式, 其中$\omega_{13}, \omega_{23}$是$\omega_1, \omega_2$的线性组合(公式(5.11)), 它表示曲面的几何性质. 我们有

$$\text{第一基本式}\ \ \mathrm{I} = ds^2 = (dx, dx) = \omega_1^2 + \omega_2^2; \tag{5.13}$$

$$\text{第二基本式}\ \ \mathrm{II} = (-dx, de_3) = \omega_1 \wedge \omega_{13} + \omega_2 \wedge \omega_{23} = a\omega^2 + 2b\omega_1\omega_2 + c\omega_2^2. \tag{5.14}$$

也就是$\omega_1 \wedge \omega_{13}$ 加上$\omega_2 \wedge \omega_{23}$是曲面所谓的第二基本式. 第一基本式是$\omega_1^2 + \omega_2^2$, 是两个变数$\omega_1, \omega_2$的平方和. 第二基本式对于第一基本式有特征值, 特征值的代数和一般叫做中曲率$H = \frac{a+c}{2}$, 特征值的积就是Gauss曲率, 所以Gauss曲率是$ac - b^2$. 而我们现在有一个奇妙的公式就是$d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$. 在这个公式右边, $\omega_1 \wedge \omega_2$ 就是曲面的面积元素, 它当然只跟曲面的度量有关, 与它的位置没有关系, 只跟曲面的第一基本式有关. 在它的左边, ω_{12} 是我们的Levi-Civita联络, 由于右边由第一基本式完全确定, 所以左边也是只与第一基本式有关, 因此我们知道Gauss曲率只跟第一基本式有关. 这是Gauss非常得意的结果.

3 Gauss-Bonnet公式

我们可以由$d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$ 得出来Gauss有名的这个定理. 我现在说, Gauss-Bonnet 公式也立刻就由这个公式得出来. 那么, 当年我也这么想, 因为假使你有一个封闭的曲面, 有了这个Gauss 曲率乘以面积元素, 你当然很自然地问它的积分是什么: 有一个面积元素乘以一个函数(Gauss曲率), 把它在曲面上积一遍得出的数是不是跟这个曲面的几何有关?那么, 这个就是Gauss-Bonnet公式: M是封闭的定向曲面, 则

$$\int\int K dA = \frac{1}{2\pi}\chi(M). \tag{5.15}$$

在我们这个公式中, 我们把$\omega_1 \wedge \omega_2$ 叫面积元素, 我们也可以叫它做dA, KdA就是这个积分. 你立刻就想: 我们在封闭的曲面, 所以如果有一个积分, 它可以写成d什么的, 那么它的积分在应该是在曲面的边界上, 可以变为一个边界积分, 这是我开始讲的Stokes定理主要的部分. 所以会不会由这个得到Gauss曲率的积分是0 . 这显然是错误的, Gauss曲率积分不会等于0, 这是因为你取一个2维的球面, 它可以取一般的度量使它的Gauss曲率等于1, 那么在曲面上的积分当然不会等于0. 所以这个道理是错误的. 当年因此我想错在什么地方. 错在我们这个公式$d\omega_{12} = -KdA$不是在曲面上, 是在圆周丛上头. 这个曲面是在圆周丛上, 所以我需要把这个曲面提高到圆周丛上头, 提高是什么意思呢? 就是在每一点你取这个点作为原点的单位切矢量. 所以换句话说, 我们一般叫这个为矢量场, 因此你在一个2维流形上面要取一个矢量场, 这个矢量是单位矢量跟曲面相切, 即为单位矢量场, 这是不是可能? 随便任给你一个曲面, 你能不能每点指定一个单位切矢量, 或者切矢量, 使得它是连续的, 甚至是可以微分的. 这样的矢量场不一定有, 这是一个拓扑的定理. 整个的这一段的发展是曲面论, 或者是整体曲面论跟曲面的度量这种种的关系在差不多100年前是主要的问题. 那个时候最主要的杂志是《Mathematische Annalen》, 全世界数学的中心是在德国. 《Mathematische Annalen》上头关于这个问题有很多文章. 那时候, Einstein是《Mathematische Annalen》的一个编辑. 这个问题完全搞清楚了需要一些时间. 那么其中有一个因素是假使你有一个封闭的曲面, 你取每点的并且定向的单位法矢量, 即取每点确定的单位法矢量, 把它映射到单位球上去, 这个通常叫做Gauss 映射. 所以Gauss映射把你的曲面映射到单位球上去, 这样就把一个2维曲面映射到另一个2维曲面, 两个都是定向的, 于是这里就有一个拓扑不变式, 叫做Mapping Degree, 即映射的次数. 在平面的情形, 你有一条曲线, 所以单位球就是单位圆, 那么你把这条封闭的曲线映射到单位圆上头, 究竟它转了多少圈呢?这就是Mapping Degree(映射的次数). 这个定义在高维, 甚至是2维就不这么简单了. 显然, 我们把曲面映射到单位球上头, 然后取单位球上头的面积元素, 这就是Gauss 曲率, 所以这个映射就等于Gauss曲率的积分, 把这个对面空间的面积元素用映射拉

回来之后和原来曲面的面积元素一除, 即为求它的整个的积分, 就得到映射的Degree. 可以证明这个Degree 在可以定向的曲面的情况下, 它是曲面的Euler数的$\frac{1}{2\pi}$. 很可惜的, 我大概没有时间把这个完全讲完. 我想我下次再详细讲讲. 我现在大致讲讲这个证明是怎么样的. 显然我们已有基本公式$d\omega_{12} = -KdA$. 我们还要把曲面放到E上去, 所以要定一个单位矢量场, 这不一定可能. 这样的单位矢量场要有异点, 也就是说如果你允许整体单位矢量场有异点的话, 它那是可能的. 这也需要证明. 有了异点之后, 就看这个异点的性质, 比如说, 你看看这些单位矢量场, 画这几个图（图略）. 这是矢量场的异点的可能性, 可能矢量场有许多不同的方向, 但是在异点有时候这个矢量向外走, 也有时候矢量向里走, 也有时候就象第三个图, 它是跟一族双曲线相切. 所以讨论矢量场的异点的性质是非常有意思的问题. 那么我在任何曲面一定有一个, 并且且不只一个, 而是有许多有异点的单位矢量场. 在这个情形之下, 你要把曲面切成小块, 切成一个所谓complex(复形). 你先定它在顶点, 因为所谓的complex, 就是说, 有些顶点, 有些边, 有些面. 在顶点, 定一个任何的矢量, 那么第二步把这个矢量场延到边. 取一个边的话, 如果矢量场已经在顶点确定了, 那么很容易看出来可以把它延到整个的边. 现在是面了: 假使是面的话, 比方说有个三角形, 现在矢量场已经在边上都定了, 是不是能够延长到它的内部, 这就不明显了. 当然这是一定可以的. 假使你允许它有异点, 比方说是一个三角形, 那么你就在三角形中间取一点, 然后从这点连到边上, 那么这个矢量场就把它延到内部, 但是这样定的矢量场在中间的那点一定是异点, 因为中间的那点没法子定一个可以连续的矢量场, 使得每点只有一个矢量. 在这一点就没法子定. 所以刚才这个理由可以证明: 假使你允许这矢量场有异点, 这样的矢量场是存在的. 普通一定有异点, 在地球上, 要刮风的话, 这风跟地球相切的时候, 它的方向是个矢量场, 一定有一点没有风, 至少有一点. 而这一点就很复杂了, 那么这种样子点的研究是很有意思, 也很要紧的问题. 区别矢量场在异点的性质, 很简单的一个方法是我们可以在异点定一个整数. 这一般就叫做它的指标：

$$I(s) = \lim \frac{1}{2\pi} \int \omega_1. \tag{5.16}$$

就是说, 中间有异点, 异点附近的矢量场是完全确定的, 所以你在这点画个小圆周, 那么圆周的边界矢量场已经有了, 所以你在这一点把它映射到一个圆周. 因为局部的时候, 你假定是Euclid几何, 假定用平行线, 你就把它映到圆周, 那么绕圆周是多少次呢? 这就是矢量场的指标. 下次我证明假使你有了这些, 你就取单位矢量的矢量场, 并且把这个曲面提高到E里头, 即提高到圆周从里头, 它就变这个曲面为有尖点的. 既有尖点, 又有异点, 这个异点弄上去就是尖点. 那么这些尖点的指标加在一起就是Euler 常数, 就等于这个积分, 即这个积分有意义, 它是Euler常数. 我想微积分有一个重要的应用是在复变函数论. 你要讲数, 最有意思的数就是复数. 很惭愧, 我看中国数学史, 中国人太实际了, 中国人没有复数. 复数要紧得不得了. 我要讲一点复变函数, 我要证代数基本定理. 复变函数之后, 任何代数方程式都有解, 这是不得了的一个结果. 这个结果, 当年Euler不会证, 很多人都证不出来. Gauss能证明, 他是近代最伟大的数学家.

第六讲　曲面论(三)
－Gauss-Bonnet公式(续)

2001年11月30日

1　微积分在复变函数论中应用简介

我还应该再讲两次. 这两次我有个计划: 预备讲一点复变函数论, 因为在数学中, 很要紧的一件事实, 同时在数学史上也是非常要紧的一件事情, 就是有复数. 这个复数使得数学简单, 复函数有许多漂亮, 有意思的性质, 因此, 这使得这些函数在应用上特别有用处. 所以, 我预备讲一讲, 比如说, 复变函数有一个很重要的性质: 任意的代数方程在复变函数之中一定有解. 这是一个不得了的事情, 因为不管你怎么样写一个方程, 你要是允许解是复数的话, 它一定有解. 例如, $x^2+1=0$, 那么它有个解就是$\sqrt{-1}$, 所以$\sqrt{-1}$就这么样子有用处. 不但如此, 复数跟实数一样, 可以加减, 有同样的性质, 所以, 它可以运算. 同时它包含了许多材料是实数不能包含的. 我想我的课在过程中一定会有个空挡, 在空挡的时候, 我想找两次讲复变函数. 我预备讲: 一个是我刚才讲的代数的基本定理, 就是说任意的代数的方程在复数域中一定有解. 这个是很难证明的, 需要数学上新的观念. 比方说, 伟大数学家如Euler, 他想法子证明, 但没有能成功. 我想Gauss 是我们近代最伟大的数学家, 他很年轻的时候就有一个证明, 也就是复数需要一些几何的性质, 不完全是代数的问题. 我预备下次讲复数的时候证明这个定理;同时, 复变函数最主要的一个定理是Picard定理, 就是说, 假使对于一个复变函数, 取它的函数值在复平面里头所取的位置, 它把整个复平面都盖住了, 其中也许可以去掉一点, 两点. 这是不得了的, 就是说, 函数如果是一个全纯函数的话, 它分布得非常之均匀, 可以说差不多把平面都盖住了. 有意思的一件事情是这个定理是复变函数高峰的定理, 可以利用我们现在要讲的Gauss-Bonnet公式来证明. 这说明看起来没有关系的一些方法跟观念, 结果是有关系的. 这是数学上非常要紧, 有意思的问题.

2 关于学习的自动性

这个课快结束了, 你们在这个课写个报告, 最好是自动. 你能够自己找到一个问题, 这是更要紧的. 我想你们都是大学生, 大学生受高等教育最后的一段, 以后到社会上去, 即使在学校, 在学术单位里头, 最要紧的一定要自动. 不要是等老师叫你做什么, 你再做什么, 这个最坏. 要自动, 要自己能找问题, 要自己能够答复自己找的问题. 那么, 当然你找的问题不一定合适, 你暂时也不一定能够得到答案. 不过, 你中间经过一些弯路, 经过一些错误, 可以使得你的学问真正进步, 而使得你真正进步的就是要经过这样的手续, 所以我鼓励大家要自动. 多一点地讲起来, 你们甚至要能够组织一个团体, 互相报告找问题, 或者请校内校外老师, 同学来做报告, 这是很有好处的, 自己要把数学想一想, 或者对任意的学问, 你自己有个思想, 觉得有个什么样的活动, 对于你, 对于这个学问的知识可以增加, 同时你对学问的能力也可以增加. 所以这是很值得注意的一件事情, 希望你们考虑一下这个可能性.

3 Gauss-Bonnet公式的证明

上次, Gauss-Bonnet公式我没有证明全, 所以我先把证明说全了. 我上次讲的Gauss-Bo nnet公式就是: 假使在空间里头有一个曲面, 它是一个整个的曲面, 并且假使这个曲面是定向的, 即它的法线有一定的方向, 于是这样子, Gauss曲率K就是曲面上的一个函数, 我可以把这个函数对于曲面上的面积度量求积分, 这个积分是一个2重积分, 求它积分之后, 结果这个积分等于一个常数(2π)乘以曲面的Euler 示性数. 即

$$\int\int KdA = 2\pi\chi(M) \tag{6.1}$$

Euler示性数就是把曲面切成小块之后, 适于一点自然的条件, 把它切完之后, 其顶点个数$-$边的个数$+$面的个数, 这样3个数的正负的和就叫做这个曲面的Euler示性数. 当曲面是球面的话, 它的Euler示性数$= 2$, 如果它是个环面, 它的Euler 示性数是0. 你们可以试一试, 就能得到这个. 如果曲面是个定

向曲面, 这是它的唯一的拓扑不变式. 一般讲起来, 假使球上加几个环, 环的个数就跟Euler示性数有个关系: 这环的个数普通叫曲面的亏格(genus), 这是曲面最重要的拓扑不变式. 有意思的是, 这曲面的性质, 曲面上头函数的性质跟亏格有密切的关系, 所以亏格是拓扑不变式, 它影响到曲面的几何性质和解析性质, 有非常之重要的影响. 所以整个这些关系是很深奥的, 相当深奥的. 因此, 也是非常要紧, 非常有意思的. 我上次证明Gauss-Bonnet公式, 最要紧的公式就是

$$d\omega_{12} = -\omega_{13} \wedge \omega_{23} = -K\omega_1 \wedge \omega_2. \tag{6.2}$$

我现在重复一遍. 要研究曲面论的话, 一定要研究曲面上的标架. 假使取这个标架, 使标架的3个单位矢量互相垂直, 并且我们假定它是个右手系, 即在两个之间选择一个右手或者左手, 我们假使是右手系. 那么, 对于这样子标架, 假使你知道第一个矢量之后, 其它两个矢量就确定了. 因为我们假定第三个是曲面的单位法矢量, 那么第一个, 第三个定了的话, 第二个也就定了. 事实上, 我这是一个单位标架, 同时是右手系(右手标架), 这就完全定了. 所以对于在一个点的所有这种样子的标架, 一共这种标架有单参数系(one parameter family), 是根据了一个变数. 曲面是2维的, 再加上这点的标架有一个参数, 所以曲面所有标架是一个3维的空间. 3维空间有x这个顶点, 定它在曲面的位置, 它去掉两个维, 然后再取一个切线方向, 又有一个维, 因为切线在切面里头可以转, 所以又多了一维. 这样子就得到所有标架系所成空间的3维的性质. 有了标架系, 有什么好处呢? 因为有了矢量, 你可以用公式来表示出来. 矢量有分量, 这分量就有数. 我们搞数学最要紧的要有数. 你要有数的话, 描写是准确的, 并且应用的时候你可以观察到的都是数. 在某种意义下为什么微积分要紧? 我想数学主要的目的是研究函数, 研究两个系统的关系. 现在这关系呢, 函数不好搞了, 所以微积分是把这个关系线性化, 因此可以用代数. 矢量可以加, 拿个数目来乘, 所以微积分主要的成就是把空间的理论, 把函数的理论线性化, 代数化. 有了代数以后, 你就可以算, 所以就有用, 因此也重要. 那么有了标架所得到的解析的事实是什么呢? 我把这

个标架叫做$xe_1e_2e_3$,

$$E = \{xe_1e_2e_3 | M\text{定向}\ \ e_3\text{是法矢量},\ e_1\ \mathrm{mbox4\#\%}\} \tag{6.3}$$

e_3是单位的法矢量. x, e_1, e_2, e_3 都是矢量, 所以它们的微分也是一个矢量. 微分之后是一次微分式矢量值. 因此, 它们可以表为e_1, e_2, e_3的一个线性组合. 我把dx表为线性组合, 得到的系数我叫做ω_1, ω_2,

$$dx = \omega_1 e_1 + \omega_2 e_2. \tag{6.4}$$

$\omega_1 \wedge \omega_2$就是曲面的面积度量, 是一个2次微分式, 它当然可以用来做个重积分的积分函数(integral), 所以把它积分的话, 就得到这个曲面的面积. 我讲的关于曲面的理论的这些结果, 你在微分几何书上找不到. 如果你不能完全接受, 不能完全懂的话, 没有关系. 因为这些内容大概是普通微分几何可以讲一个月, 我讲一两次就把它讲完了. 这也证明这个方法的优点. 它的优点主要是我在研究3维空间的Euc lid 几何. Euclid几何最好是用正交标架, 因为正交性在Euclid几何不变, 是有意义的, 所以最好用正交标架. 那么, 一般的微分几何的书等用到曲面论的时候, 它不用正交标架, 你要想别的法子. 比如说, 平面解析几何, 你不用正交标架, 你的两个坐标不垂直, 甚至于它走的方向不是单位的方向, 你去试试看就知道难多了, 麻烦多了. 不是不可能做, 可以做到, 就是麻烦多了. 有意思的一件事情, 当然我们都知道, 坐标系统是法国的哲学家, 数学家笛卡尔发现的. 他头一次用坐标的时候不是正交标架, 都是任意的标架. 他用任意的标架拿来处理这种几何的问题. 不知道是哪位先生放了个正交标架, 以后你在书上看到的都是正交标架. 所以, 我的标架是$xe_1e_2e_3$, 这4个都是矢量. 它们的微分也得到矢量值的一次微分, 所以每一个可以表为e_1, e_2, e_3的线性组合. 由于我们是在一个3维的空间, 那么这就是上面写的这个公式(6.4)和下面的公式:

$$de_i = \omega_{ij} e_j. \tag{6.5}$$

这时候, 因为是一次微分式, 所以这种线性组合是e_1, e_2, e_3的线性组合, 它的系数是一次微分式, 不再是函数了. 以前如果是函数的话, 它线性组合的

系数是函数, 现在, 系数是一次微分式, 这些一次微分式重要得很. 因为它描写一个标架跟它临近标架的关系: 它临近标架动一点点, 跟原来相差多少? 相差是一个微分, 就是我们的ω_i跟ω_{ij}. 这几个微分式有简单的关系, 最要紧的是ω_{ij}, 你看它很麻烦, i, j从1到3, 但是因为标架是正交的单位矢量, 所以ω_{ij}对于i, j是反对称的. 因此, 你把ω_{ij}写成一个3×3 的方阵的话, 这个方阵是反对称的, 它的对角线的元素都是0, 并且对于对角线它是反对称的, 所以只有3个真正要处理的一次微分式. 你要用标架来研究几何的这种情况, 在力学很自然. 力学讲一个物体在那儿移动, 那么它的位置就是时间的函数, 因此, 这标架是时间的函数. 这种函数在力学上是一个变数的函数. 因为在力学上, 在动力学上, 真正的变数是时间, 只有一个. 但是要研究几何的话, 情况来得复杂, 可能这个标架是跟多于一个变数有关系, 可以是多变数的函数. 因此这之间就有些关系, 这关系就是你求$d(de_i)$. 我讲过, 你用上d的话, d用两次是0. 所以你把这个关系写出来的话, 就得到$d\omega_{ij}$ 是一个式子, 可以用其他的ω来表示, 这式子是

$$d\omega_{ij} = \omega_{ik} \wedge \omega_{kj}. \tag{6.6}$$

你得到这样子一组方程, 这是有意义的. 因为ω_{ij}是一次微分式, 你把它微分的话是2次微分式, 而在右边是两个一次微分式相乘, 所以也是2次微分式, 因此这组方程不荒谬. 这组方程非常要紧, 它们代表运动群整个的性质. 这组方程看着复杂, 其实非常简单, 因为这些ω_{ij} 是反对称的, 所以如果$i \neq j$ 的话, 例如, 如果$i = 1, j = 2$, 那么$k = 3$. 这是因为k 要是等于1, 于是有$\omega_{11} = 0$, 而要是k等于2, 那么有$\omega_{22} = 0$. 所以这组方程式看着复杂, 右边只有一项. 很简单地, 你还可以得到一个特别情形, 就得到

$$d\omega_{12} = \omega_{13} \wedge \omega_{32} = -\omega_{13} \wedge \omega_{23}. \tag{6.7}$$

这个公式要紧极了. 我们在这个情形就碰到一个新的情况: 同样你们念微积分的时候, 一般只有一个空间, 大概一般不是平面就是3维空间, 可是我们现在有两个空间, 一个是标架常数成的空间, 是3维的;另一个是我们2维的曲面, 所以我有一个2维曲面还有一个3维的空间, 这3维空间是个标架. 因此如

果一个标架, 你取它原点的话, 我们说它就投影到曲面上去了, 这样子就有个投影. 现在它有个名词叫做纤维丛. 现在是圆周丛了, 纤维是圆周, 有一把圆周, 而整个的圆周所成的空间就是我原来的曲面, 我们叫原来的曲面为底空间. 拿同一个原点的所有单位切矢量就成纤维, 于是构成纤维丛. 它就象我们衣服似的, 有一条一条的线. 最简单的纤维丛是它的纤维是直线, 那么它是直线丛. 我试着把它比方成一把筷子, 你有好多筷子, 每一根筷子是条直线, 那么有好多筷子, 整个筷子成一个空间, 这就是我们的纤维丛, 这是直线的情况. 我们现在做的情况是圆周丛. 这个观念是微积分里头一个新的观念, 就是说, 你不是讨论一个空间, 而是你在讨论两个空间, 并且这两个空间之间有密切的关系. 一个是圆周所成的空间, 一个是我们的底空间, 也就是原来的曲面. 这两个空间之间有我所说的这个关系, 这个关系有意思极了, 重要极了, 因为有下面的关系

$$d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2. \tag{6.8}$$

右边是曲面上的式子, 这是因为K是Gauss曲率, $\omega_1 \wedge \omega_2$是面积度量, 所以右边是曲面上的性质. 左边是一个东西的微分. ω_{12}是在纤维丛E 里头的一次微分式, 这个一次微分式的外微分等于右边的式子. 这个证明说明Gauss曲率只跟Riemann 度量有关, 因为要是有了Riemann度量就有ω_{12}. 那么我们右边的式子只跟Riemann度量有关, 这是Gauss 当年很得意的一个结果, 连Guass都觉得很不得了有这么样子一个关系. Gauss-Bonnet公式就是我们要求右边这个式子的积分. 我们现在有一个封闭的曲面, 它是定向的, 要求右边的积分, 求出它的值来. 那么当时我也有一种错误, 因为右边这个式子既然是d 一个东西的话, 在一个封闭曲面上的积分应该是0. 事实上, 它应该等于ω_{12}沿着这个曲面的边界的积分, 而如果曲面是封闭的, 它没有边界, 所以应该是0. 这显然是错的. 为什么它不等于0? 我们虽然有$d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$, 但这个关系不是在一个2维空间上, 它是在$E$这个3 维空间上. 所以我们只能够在3维空间利用Stokes 定理. 而在3维空间的话, 这个曲面在3维空间里头就有边界了. 你要把这个曲面升到3维空间去, 怎么升呢? 就是每点要给一个拿这点做原点的切矢量. 换句话说, 这就是所谓的矢

量场. 所以这个曲面需要有个矢量场, 每点有个切矢量, 而这个切矢量是E里头的一个点, 就把这个曲面升到E里头去. 假使有一个曲面, 是不是一定有个矢量场? 这不简单了. 在局部的时候, 当然很简单. 你写下坐标, 随便写些矢量, 就有了. 是不是能够在整个曲面给一个矢量场, 这是几何里头所谓整体的问题, 普通拓扑就搞这个问题. 也就是说, 局部显然可以写矢量的, 你有局部坐标, 你把坐标分量写下来, 当然就有个矢量场, 但是这个是局部的, 能不能扩充到整个的曲面, 不一定可能. 那么, 我上次已经讲过, 要这样的话, 必须允许这个矢量场有异点(singularity). 比方说, 在下面几个图里头有几个矢量场的例子: (图见透明片) 最左边的例子, 它的异点就在原点, 经过这个原点, 向所有方向画矢量. 除了原点之外, 就定了一个矢量场, 但是原点是一个异点, 它是所有水流出来的出发点, 所以它是个异点. 第二个, 所有矢量都向原点走, 原点还是一个异点, 原点就变成一个沉下去的一个点, 英文叫sink. 而左边的叫source. 当然也有象最右边的例子. 从这些例子可以看出矢量场在异点有不同性质. 如何描写它的不同的性质, 就有一个叫做矢量场的指标(index). 你在这一点, 假使有个孤立的异点, 那么围着这个异点做个小圆圈, 因为是孤立的异点, 所以在小圆圈上的点的矢量是完全确定的. 那么现在, 在小圆圈的点绕着异点转多少圈呢? 如果转一圈, 并且是在正的方向转一圈, 它的指标是1. 如果向负的方向就是-1. 那么, 在我的上面例子中, 无论sink 还是source, 指标都是1 . 双曲线的现象指标为-1. 异点很复杂, 因此指标可以取任何值. 假使我把曲面升到纤维丛里头, 升到圆周丛里头, 并且允许有异点, 那么这个上去的曲面就有边界, 这个边界就相当于这些异点. 所以根据公式$d\omega_{12} = -K\omega_1 \wedge \omega_2$, 我们关于Gauss曲率的积分就等于异点的指标和. 所以我们证明一个重要性质: 不论你取任何一个矢量场, 假使它只有有限个异点, 我们这个积分是指标和, 即是把每个异点的指标加起来就等于指标和. 这里很要紧, 因为这个积分是跟矢量场选择无关的. 所以这证明了一个曲面假使有一个有有限个异点的矢量场, 在异点的指标和矢量场的选择无关. 它等于那个积分, 而那个积分里是没有矢量场, 所以就得到这样一个结果. 我再说一遍, 现在有一个封闭的曲面, 取一个矢量场, 有有限个异点, 它的指标和是与矢量场的选择无关的, 这是因为它等于右边的

积分, 而右边积分根本没有矢量场, 所以与矢量场的选择无关. 为什么这个数目等于Euler 示性数呢? 现在既然它跟矢量场选择无关, 你就任取一个矢量场, 比方说, 假使有个曲面, 你把曲面分割了, 分割成小块, 每个小块是三角形. 对于这三角形, 每个边取它的中点, 三角形取它的重心, 你就可以定一个矢量场, 就象我所画的. 从顶点出去, 然后到三角形的重心就进去. 对于这样子定的矢量场很容易看出来, 刚巧在边上的这种点的指标等于-1. 于是它在顶点的指标是1, 在三角形重心的指标都是1, 但是在边上每个点指标为-1. 所以把这指标加起来的话, 就等于顶点的个数+面的个数−边的个数, 因此就是Euler 示性数. 这样子证明了Gauss-Bonnet 公式.

4 Gauss-Bonnet公式的推广及应用

Gauss-Bonnet公式真正有用的时候是曲面有边界. 在曲面有边界的时候, Gauss-Bonnet 公式是顶点+顶点的外角+边的测地曲率(geodesic curvature), 再加上在面的Gauss曲率. 下面是一般的Gauss-Bonnet公式

$$\sum(\pi-\alpha)\ (\text{点})+\sum\int k_g(s)ds\ (\text{边})+\sum\int\int KdA\ (\text{面})=2\pi\chi(M) \quad (6.9)$$

对于有边界的曲面, 头一部分是边界顶点的点曲率, 其次是边界的边的线曲率, 然后整个的这个东西的面曲率, 所以你有一个有边界的曲面, 你就取边界的点曲率+边界的线曲率+面曲率, 是Euler示性数. 证明是一样的. 真正Gauss-Bonnet公式最有用的是有边界的情况. 比方说, 在一个Euclid平面, 假使有一个三角形, 这个三角形由直线所成. 由于空间是Euclid空间, Gauss曲率=0; 假使边都是直线, 所以测地曲率也是0. 因此这个就是说$\sum(\pi-\alpha)$ 等于2π. 这是因为要是三角形, Euler 示性数是1. 右边要等于2π, 所以这就说明三角形三角之和在Euclid平面上等于π. Gauss-Bonnet公式是三角形三角和公式在一般情形的推广. 这个观念重要极了, 它就是整个纤维丛的观念. 我说, 由这个纤维丛, Maxwell方程就是这个情况的推广. 你到物理上应用的时候, 你的空间是4维, 是3维空间+1维时间, 是4维的洛仑兹流形. 那么要表Maxwell方程的话, 你要用一个圆周丛, 实际上是一个复的直

线从. 它有个曲率, 我们的曲率是Gauss曲率乘以面积元素, 而这个曲率是个2次微分式, 把表示这个曲率是封闭的条件写出来就是Maxwe ll方程. 所以, Maxwell方程的几何背景是非常简单的, 就是因为世界是4维的空间, 所以是从2维空间扩充到4维. 那么这个曲率因为是一个2次微分式, 还是反对称的, 因此在4维空间里是一个4×4方阵:

$$(F_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & E_1 & E_2 & E_3 \\ -E_1 & 0 & -B_0 & B_2 \\ -E_2 & B_0 & 0 & -B_1 \\ -E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.10}$$

这个方阵里头E_1, E_2, E_3 是Electric Potential, B_0, B_1, B_2是Magnetic Po tential, 也就是电势跟磁势, 这些都是方阵里头的函数. 表示由这个方阵所表示的2次微分式是封闭的, 即d这个式子的微分为0, 就是Maxwell 方程

$$d(F_{\alpha\beta} dx^\alpha \wedge dx^\beta) = 0. \tag{6.11}$$

Gauss-Bonnet公式是一个历史上很多演变的. 真正我写的公式既不由于Gauss, 也不由于Bonnet. Gauss只做了三角形的情况, 由测地三角形做到三角形. Bonnet也没有做拓扑的应用. Bonnet把三角形推广到任意曲线, 他把任意曲线的测地曲率积分表为Gauss-B onnet公式的积分. 当年Bonnet是法国最要紧的几何学家, 他在微分几何做了非常基本的贡献. 我不管你们了解多少, 我希望你们了解这一部分的数学非常要紧. Maxwell方程是它的特别情况, 这个非常有用处. 我有一篇文章在今年的《科学》上发表, 题目叫《Gauss- Bonnet公式与Maxwell方程》, 我讲的许多要点在这篇文章里头有.