组合积分法

朱永银　郭文秀　著

华中科技大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

组合积分法/ 朱永银 郭文秀 朱若霞著
武汉:华中科技大学出版社,2002 **年** 10 **月**
ISBN 7-5609-2827-7

Ⅰ .**组**…
Ⅱ .①**朱**… ②**郭**… ③**朱**…
Ⅲ .**积分学**
Ⅳ .O172.2

组合积分法 **朱永银 郭文秀 朱若霞 著**

责任编辑:**徐正达** **封面设计**:**刘 卉**
责任校对:**刘 飞** **责任监印**:**张正林**

出版发行:**华中科技大学出版社**
武昌喻家山 **邮编**:430074 **电话**:(027)87545012

录排:**武汉皇荣文化发展有限责任公司照排室**
印刷:**华中科技大学印刷厂**

开本:850×1168 1/ 32 **印张**:6.625 **插页**:2 **字数**:154 000
版次:2002 **年** 10 **月第** 1 **版** **印次**:2003 **年** 4 **月第** 2 **次印刷** **印数**:1 201—2 700
ISBN 7-5609-2827-7/ O·271 **定价**:10.00 **元**

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行部调换)

前　言

数学是研究空间形式和数量关系的科学,数学科学包括两个主要方面.第一个方面是它抽象的方面,可以叙述为:“对结构、模式以及模式和谐性的研究,探求抽象模式结构中的对称性和规则性是纯数学的核心.”研究数学的这种抽象性就是所谓的基础研究“.这些探求的目的通常在于了解抽象的概念,但是也常常对其他领域产生实践的和理论的影响”。数学科学的第二个方面是‘对生活中,通常是由物理学、生物学和商业中,碰到的事件或系统的(数学)建模所激发的”各种应用数学解决实际问题的事例进行研究.研究数学在各领域中的应用就是所谓的数学的应用研究“.数学具有双重的性质,她既是为其精确性和内在的优美而受到敬重的独立的学科,她也是应用领域的丰富的工具资源.可以把数学描述为具有内部抽象性和外部有效性的学科.”

“这种双重性的两部分是深刻地联系在一起的.探求模式中的次序、对称性和规则性是纯数学研究的核心.这种研究的结果是非常持久的,有的时候会在发现这些结果的几十年后以一种意想不到的方式找到重要的应用.一个重要的理由就是数学结果一经证明,决不会被否证,即使它们可能会被更强的结果所取代.相比之下,其他科学是经由一个逐次逼近的过程来达到真理的”.

本书是积分领域中一种方法的研究,属于数学基础研究范畴。在传统的积分方法中,很难求解甚至不能求解的各类函数有理式的积分问题,应用本书创立的全新积分方法——组合积分法就可以顺利解决.通过大量的研究,还得到了许多算式对称、结构和谐和结果简洁的优美的积分公式和积分递推公式.今天看起来这种研究似乎是微不足道的

所得出的结果会被得到“意想不到”的重用.

本书共有五章,内容包括三角函数有理式的积分、指数函数有理式的积分、双曲函数有理式的积分、一类无理函数的积分和组合积分法在其他方面的应用.书后附有两个附录,即附录A:增补积分表;附录B:增补积分递推公式.本书可作为大学生和数学教师的参考书,也可作为报考硕士研究生和“专升本”学生备考数学的参考书.

武汉大学前校长、著名数学家齐民友教授欣然为本书作序,给本书增色不少.本书的出版发行,得到武汉职业技术学院领导和科研处的大力支持.以本书的撰写及其在教学中的使用为主要内容的研究项目“高等数学的教学与实践”,被批准为湖北省教育厅高等教育处立项的教学研究项目,并通过了湖北省教育厅组织的专家委员会验收.本书能顺利出版发行,还得到华中科技大学出版社的大力支持。在此一并表示谢意.

由于作者水平所限,疏漏之处在所难免,望读者不吝赐教.

作　者

2002年5月

内 容 简 介

本书介绍的是积分领域中传统积分方法未曾涉及的一种新方法——组合积分法,内容包括三角函数有理式的积分、指数函数有理式的积分、双曲函数有理式的积分、一类无理函数的积分和组合积分法在其他方面的应用等 5 章.书后有两个附录:增补积分表和增补积分递推公式.

本书可作为大学生和数学教师的参考书,也可作为报考硕士研究生和"专升本"学生备考数学的参考书.

序

数学是研究空间形式和数量关系的科学,它的产生和发展经历了由实践到理论、再指导实践的过程 .随着时代的进步和科学技术的飞速发展,数学的理论和方法越来越多地应用到生产实践和科学技术和各个方面 .可以预见,在科学技术日益更新的时代,随着信息技术的日益广泛的应用,掌握数学知识将更加重要。数学的多样性和应用的广泛性也将日益显现。

由于数学基础的重要性,它历来是高等教育基础课的重要组成部分,我们数学教育工作者 要加倍努力工作,更好地帮助学生掌握他们需要的数学知识 .对于高等数学的基础微积分不但要在理论上进行研究,而且更重要的是在方法上进行革新。这无疑是十分有意义的事情 .

本书的作者在完成繁重的教学任务的情况下,笔耕不辍,经过十多年的潜心研究,在微积分领域创造了一种全新的积分方法——组合积分法 .对于各类复杂的有理函数式的积分,用常用的积分方法很难求出其积分,甚至解决不了其积分问题,但用组合积分法就很顺利地解决 .组合积分法的理论和方法在今后的数学理论发展中将起到一定的作用。

由于以上这些想法,我很高兴地为《组合积分法》这本书写了以上的序 .

2002 年 5 月于武汉大学珞珈山

绪　论

积分在微积分中占有极为重要的地位,它与微分比较,难度大,方法灵活.掌握积分的基本方法(如换元法、分部积分法等)是十分必要的,但这远远不够,还必须掌握一些特殊的积分方法,以便能顺利地、快速地、准确地计算出函数的积分来.学习一些积分方法,不应单纯地看做是在玩符号游戏.应该看到,通过积分运算的训练,可以达到锻炼意志、启迪思维、加强运算能力培养的目的.本书要介绍的是一种全新的积分方法——组合积分法.

华罗庚教授在他的著作《高等数学引论》一书中,举出了这样一个求不定积分的例子:

求 $T_1=\int\frac{\sin x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x$, $T_2=\int\frac{\cos x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x$.

我们可以用代换 $t=\tan\frac{x}{2}$分别求出 T_1 与 T_2,但还有更简单的方法,即

$$bT_1+aT_2=\int\mathrm{d}x=x+C_1, \tag{1}$$

$$-aT_1+bT_2=\int\frac{-a\sin x+b\cos x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(a\cos x+b\sin x)}{a\cos x+b\sin x}=\ln|a\cos x+b\sin x|+C_2. \tag{2}$$

由此立刻可以得到

$$T_1=\frac{1}{a^2+b^2}[bx-a\ln|a\cos x+b\sin x|]+C,$$

$$T_2=\frac{1}{a^2+b^2}[ax+b\ln|a\cos x+b\sin x|]+C'。$$

事实上,此题若用万能代换 $t=\tan\frac{x}{2}$ 分别求出 T_1, T_2,过程是十分繁杂的,不妨解答如下:

对于
$$T_1=\int\frac{\sin x}{a\cos x+b\sin x}\mathrm{d}x,$$
可设 $t=\tan\frac{x}{2}$,则
$$\sin x=\frac{2t}{1+t^2},\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\quad \mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}t}{1+t^2},$$
于是
$$T_1=\int\frac{4t\mathrm{d}t}{(1+t^2)(a-at^2+2bt)}.$$
此有理式的积分分母含有字母,求解十分不易.用部分分式法可令
$$\frac{4t}{(1+t^2)(a-at^2+2bt)}=\frac{At+B}{1+t^2}+\frac{Ct+D}{a-at^2+2bt},$$
去分母,比较同次幂的系数得方程组
$$\begin{aligned}&-Aa+C=0,\\&2Ab-Ba+D=0,\\&Aa+2Bb+C=4,\\&Ba+D=0,\end{aligned}$$
解方程组,得
$$A=\frac{2a}{a^2+b^2},\quad B=\frac{2b}{a^2+b^2},\quad C=\frac{2a^2}{a^2+b^2},\quad D=-\frac{2ab}{a^2+b^2}.$$
故原积分 T_1 可化为
$$\begin{aligned}T_1&=\frac{2}{a^2+b^2}\int\frac{at+b}{1+t^2}\mathrm{d}t+\frac{2}{a^2+b^2}\int\frac{a^2t-ab}{a-at^2+2bt}\mathrm{d}t\\&=\frac{a}{a^2+b^2}\int\frac{2t\mathrm{d}t}{1+t^2}+\frac{2b}{a^2+b^2}\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}-\frac{a}{a^2+b^2}\int\frac{-2at+2b}{a-at^2+2bt}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{a^2+b^2}\left[a\int\frac{\mathrm{d}(1+t^2)}{1+t^2}+2b\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}-a\int\frac{\mathrm{d}(a-at^2+2bt)}{a-at^2+2bt}\right]\\&=\frac{1}{a^2+b^2}\left[a\ln(1+t^2)+2b\arctan t-a\ln|a-at^2+2bt|\right]+C\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{a^2 + b^2} \quad 2b\arctan t - a\ln\left|\frac{a - at^2 + 2bt}{1 + t^2}\right| \quad + C$$

$$= \frac{1}{a^2 + b^2} \quad 2b\arctan t - a\ln\left|\frac{a(1 - t^2)}{1 + t^2} + \frac{2bt}{1 + t^2}\right| + C$$

$$= \frac{1}{a^2 + b^2} \quad bx - a\ln|a\cos x + b\sin x| \quad + C .$$

同理可求出 T_2 .与华教授给出的解法比较,这种解法不知道要复杂多少倍,而且运算程序多,极易出错 .

华教授的解法为什么可以简化运算呢 ? 在这里,他巧妙地将两个结构相似的积分组合在一起,成为一个以所求积分为变量的 T_1, T_2 的二元方程组,解此方程组,即得所求的不定积分 .

在华教授这一例子的启发下,我们对能用此种方法求解的积分问题进行了多年深入的探讨和研究,将研究的心得写成了这本书,奉献给广大读者,力求使华教授的这一方法具有更加普遍的指导意义 .

像华教授那样用解方程组求解问题的方法称为组合法,用组合法求积分的方法称为组合积分法 .本书主要研究的是用组合法求积分的问题 .

用组合法求解积分问题的关键,是在式(2)中利用了凑微分公式

$$(-a\sin x + b\cos x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(a\cos x + b\sin x) .$$

那么,什么样的函数能够这样凑微分呢 ? 这样的函数具有怎样的性质呢 ? 下面来讨论这个问题 .

1. 互导函数与自导函数

由导数公式可知

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x,$$

$$(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x, \quad (\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x .$$

由这样的一种互导性引出如下定义:

定义 1 设函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为可导函数,如果 $f'(x) =$

$\alpha g(x)$，且 $g'(x)=\alpha f(x)$或 $g'(x)=-\alpha f(x)$ (α为任意常数)，那么称 $f(x)$与 $g(x)$为互导函数.若 $f'(x)=\alpha g(x)$，且 $g'(x)=-\alpha f(x)$，则称 $f(x)$与 $g(x)$为相反互导函数，α为互导系数.

例如，双曲正弦函数 $f(x)=\operatorname{sh} x$ 与双曲余弦函数 $g(x)=\operatorname{ch} x$为互导函数，这是因为

$$f'(x)=(\operatorname{sh} x)'=\operatorname{ch} x=g(x),$$

且
$$g'(x)=(\operatorname{ch} x)'=\operatorname{sh} x=f(x).$$

显然，正弦函数 $f(x)=\sin x$ 与余弦函数 $g(x)=\cos x$ 也为互导函数.且为相反互导函数.这是因为

$$f'(x)=(\sin x)'=\cos x=g(x),$$

且
$$g'(x)=(\cos x)'=-\sin x=-f(x).$$

这里 $\alpha=1$.

事实上，常数函数 $y_1=a, y_2=b$ (a, b 为常数)也为互导函数，这是因为

$$y_1'=(a)'=0=0\cdot b=0\cdot y_2,$$

且
$$y_2'=(b)'=0=0\cdot a=0\cdot y_1.$$

这里 $\alpha=0$.

不难证明，$\operatorname{sh} ax$ 与 $\operatorname{ch} ax$，$\sin ax$ 与 $\cos ax$ 也为互导函数.

指数函数 e^x 具有十分有趣的特性，它的导数就是其本身，即 $(e^x)'=e^x$.对于一般的指数函数 $y=a^x$ ($a>0, a\neq 1$)，有 $y=(a^x)'=a^x\ln a=\ln a\cdot y$.这就是说，指数函数的导数等于函数本身去乘以一个常数，对于此类函数的自导特性，引出定义 2。

定义 2 设函数 $y=f(x)$为可导函数，如果

$$f'(x)=\omega f(x) \quad (\omega\text{为任意常数}),$$

那么，称函数 $y=f(x)$为自导函数.ω为自导系数.

如果 $y=f(x)$为自导函数，则称 $y=f(-x)$为对称自导函数.这是因为 $y=f(x)$与 $y=f(-x)$的图像关于 y 轴对称的缘故.

如：$y=e^{-x}$为自导函数，这是因为

$$y'=(e^{-x})'=-e^{-x}=-y.$$

同时 $y=e^{-x}$ 也是 $y=e^{x}$ 的对称自导函数.

常数函数 $y=a$ 也是自导函数,这是因为

$$y'=(a)'=0=0\cdot y.$$

这里自导系数 $\omega=0$.

同样不难验证,函数 $y=a^{-x}$, $y=e^{\alpha x}$, $y=e^{-\alpha x}$, $y=a^{\alpha x}$, $y=a^{-ax}$ 等都为自导函数.

2. 互导函数与自导函数的性质

性质 1　两个非相反互导函数之和与两个相反互导函数之差为自导函数,即

如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为两个非相反互导函数,那么 $f(x)+g(x)$ 为自导函数.

如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为相反互导函数,那么 $f(x)-g(x)$ 是自导函数.

证　设 $h(x)=f(x)+g(x)$.因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为非相反互导函数,所以有

$$f'(x)=\alpha g(x) \quad 且 \quad g'(x)=\alpha f(x).$$

于是有
$$\begin{aligned} h'(x)&=[f(x)+g(x)]'=f'(x)+g'(x) \\ &=\alpha[f(x)+g(x)]=\alpha h(x) \end{aligned}$$

由定义知, $h(x)$ 为自导函数,即 $f(x)+g(x)$ 为自导函数.

同样可证明性质 1 的第二部分.

推论 1　如果 $f(x)$, $g(x)$ 为互导函数.那么有下列凑微分式成立:

$$[g(x)\pm f(x)]dx=\frac{1}{\alpha}d[f(x)+g(x)] \quad (\alpha\neq 0). \qquad (3)$$

证　因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 为互导函数,所以由定义知

$$f'(x)=\alpha g(x)$$

且 $\qquad g'(x)=\alpha f(x) \quad 或 \quad g'(x)=-\alpha f(x),$

于是有 $\qquad d[f(x)+g(x)]$

$$= [f'(x) + g'(x)]\mathrm{d}x = [\alpha g(x) \pm \alpha f(x)]\mathrm{d}x$$
$$= \alpha[g(x) \pm f(x)]\mathrm{d}x,$$

所以有 $$[g(x) \pm f(x)]\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\mathrm{d}[f(x) + g(x)].$$

性质 2　两个自导函数之积仍为自导函数.即,如果函数 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都为自导函数,那么函数 $f(x)g(x)$ 也为自导函数.

证　因为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都是自导函数.所以由定义知,存在 ω_1,ω_2.使得

$$f'(x) = \omega_1 f(x),\quad g'(x) = \omega_2 g(x)$$

成立。于是设 $h(x) = f(x)g(x)$,则

$$h'(x) = [f(x)g(x)]' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$= (\omega_1 + \omega_2)f(x)g(x) = (\omega_1 + \omega_2)h(x).$$

由定义知 $h(x)$ 为自导函数,即 $f(x)g(x)$ 为自导函数.

推论 2　三个或三个以上自导函数的积也是自导函数。

推论 3　自导函数的 n 次幂也为自导函数.即,如果函数 $f(x)$ 为自导函数,那么 $f^n(x)$ 也为自导函数.

性质 3　两个相反自导函数的和与这两个相反自导函数的差为互导函数.即,如果 $f(x)$ 为自导函数,那么 $u(x) = f(x) + f(-x)$ 与 $v(x) = f(x) - f(-x)$ 为互导函数.

证　因为 $f(x)$ 为自导函数,所以有

$$f'(x) = \omega f(x),\quad f'(-x) = -\omega f(-x),$$

于是有

$$u'(x) = f'(x) + f'(-x) = \omega f(x) - \omega f(-x)$$
$$= \omega[f(x) - f(-x)] = \omega v(x),$$

且 $$v'(x) = f'(x) - f'(-x) = \omega f(x) + \omega f(-x)$$
$$= \omega[f(x) + f(-x)] = \omega u(x),$$

所以由互导函数的定义便有,函数 $u(x)$ 与 $v(x)$ 为互导函数,即 $f(x) + f(-x)$ 与 $f(x) - f(-x)$ 为互导函数.

推论 4　设函数 $f(x)$ 为自导函数,则有下列凑微分式:

$$[f(x)-f(-x)]\mathrm{d}x=\frac{1}{\omega}\mathrm{d}[f(x)+f(-x)]\quad(\omega\neq 0).(4)$$

组合积分法就是利用了自导对称函数和互导函数的特性,将结构相似的积分组合在一起,从而简化了被积函数,达到简化积分运算和便于积分的目的.

3. 组合积分法的分类

组合积分法分为两大类型,即参元组合法与分解组合法.

(1) 参元组合法

在求一个积分 I 时,找出另一个与 I 结构相似的积分 J,然后将两个积分组合起来,通过解 I 与 J 的方程组求解积分的方法叫做参元组合法.

例 1　设函数 $f(x)$为自导函数,则 $f(-x)$为对称自导函数,求下列有理式的积分:

$$I=\int\frac{f(x)}{af(x)+bf(-x)}\mathrm{d}x.$$

解　设 $J=\int\frac{f(-x)}{af(x)+bf(-x)}\mathrm{d}x$,则有

$aI+bJ=\int\mathrm{d}x=x$　(不计一常数之差,以下同),

$$aI-bJ=\int\frac{af(x)-bf(-x)}{af(x)+bf(-x)}\mathrm{d}x=\frac{1}{\omega}\int\frac{\mathrm{d}[af(x)+bf(-x)]}{af(x)+bf(-x)}$$

$$=\frac{1}{\omega}\ln|af(x)+bf(-x)|.$$

两式相加立刻可得

$$I=\frac{1}{2a}[x+\frac{1}{\omega}\ln|af(x)+bf(-x)|]+C.$$

(2) 分解组合法

将一个积分分为两个结构相似的积分 I 与 J,将 I 与 J 组合成

这里用了凑微式(4).

一个方程组,解方程组即得积分 I 与 J.最后将 I 和 J 联合成所要求的积分,这种求积分的方法叫做分解组合法.

例 2 设 $f(x)$与 $g(x)$为相反互导函数,且 $a=1$,即 $f'(x)=g(x)$.且 $g'(x)=-f(x)$,求下列有理式的积分:

$$I=\int\frac{a_1 f(x)+b_1 g(x)}{af(x)+bg(x)}\mathrm{d}x。$$

解 令 $I_1=\int\frac{f(x)}{af(x)+bg(x)}\mathrm{d}x$, $I_2=\int\frac{g(x)}{af(x)+bg(x)}\mathrm{d}x$,

则有
$$aI_1+bI_1=\int\mathrm{d}x=x,$$

$$-bI_1+aI_2=\int\frac{-bf(x)+ag(x)}{af(x)+bg(x)}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}[af(x)+bg(x)]}{af(x)+bg(x)}$$
$$=\ln|af(x)+bg(x)|,$$

由此立刻得到

$$I_1=\frac{1}{a^2+b^2}[ax-b\ln|af(x)+bg(x)|],$$

$$I_2=\frac{1}{a^2+b^2}[bx+a\ln|af(x)+bg(x)|].$$

所以 $I=a_1 I_1+b_1 I_1$

$$=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}x+\frac{ab_1-a_1 b}{a^2+b^2}\ln|af(x)+bg(x)|+C。$$

以上只是简单地介绍了组合积分法的两大类型,这些方法在以后的积分过程中都要用到.一般来说,具有自导性与互导性函数(如三角函数、指数函数、双曲函数)有理式的积分均可使用组合积分法。这些将在以下各章陆续介绍.

第 1 章　三角函数有理式的积分

三角函数有理式的积分一般可用万能代换法来求.但是,有些三角函数有理式的积分,使用万能代换后得到的代数有理式的积分仍然是一个比较复杂的积分,要求出此积分相当困难,有些积分甚至无法“积”出。本章介绍的就是用组合积分法求三角函数有理式的积分。

1.1　含有 $a\sin x + b\cos x$ 的积分

对于分母含有 $a\sin x + b\cos x$ 的三角函数有理式的积分,可考虑使用组合积分法。为了说明问题,先从以下简单的例子谈起。

例 1　求 $\int \frac{\sin x}{3\cos x + 2\sin x}\mathrm{d}x$.

解法 1　此题若用万能代换法求,可令 $\tan\frac{x}{2} = t$,则原积分化为

$$\int \frac{4t\mathrm{d}t}{(3 - 3t^2 + 4t)(1 + t^2)}.$$

要解出上述有理式的积分是很繁的,但绪论中对于此类积分的一般情形作了详细的解答,在这里就不再赘述了。用组合积分法解答如下:

令 $I = \int \frac{\sin x}{3\cos x + 2\sin x}\mathrm{d}x$,　$J = \int \frac{\cos x}{3\cos x + 2\sin x}\mathrm{d}x$,

因为

$$2I + 3J = \int \mathrm{d}x = x, \tag{1}$$

$$-3I + 2J = \int \frac{(2\cos x - 3\sin x)\mathrm{d}x}{3\cos x + 2\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}(3\cos x + 2\sin x)}{3\cos x + 2\sin x}$$

$$= \ln|3\cos x + 2\sin x|, \tag{2}$$

所以由 $2\times(1)-3\times(2)$便有

$$I=\frac{2}{13}x-\frac{3}{13}\ln|3\cos x+2\sin x|+C.$$

解法 2 此题也可用吉米多维奇著《数学分析习题集》中的公式

$$\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x=Ax+B\ln|a\sin x+b\cos x|+C \quad (3)$$

来解,其中

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2},\quad B=\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2}\qquad x\neq k\pi-\arctan\frac{\pi}{a}\quad .$$

这里可令 $a_1=1$, $b_1=0$, $a=2$, $b=3$,代入 A, B 式中便有 $A=\frac{2}{13}$, $B=\frac{-3}{13}$,于是有

$$\int\frac{\sin x}{3\cos x+2\sin x}\mathrm{d}x=\frac{2}{13}x-\frac{3}{13}\ln|3\cos x+2\sin x|+C。$$

此种解法看起来简单,但要记住这样复杂的公式的确不是一件容易的事。而用组合积分法解,不用记公式,只需记住这种解题思路就行了。对于式(3),苏联数学家 Ц·ЦДЯШКОА 等在《数学分析参考书》中用待定法来进行证明,将式(3)右边求导与被积函数比较,可求出待定系数 A, B,即为所要证明的结论。这种证法固然简单,但要得到式(3)绝不是一件容易的事情,一定要经过多次反复演算,从大量的题目中抽出一般公式,然后才能进行证明的。在掌握了组合积分法以后,要得到式(3)就十分容易了,直接求式(3)左边的积分即可。

令
$$I=\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x,$$

$$I_1=\int\frac{\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x,$$

$$I_2=\int\frac{\sin x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x,$$

则有
$$bI_1 + aI_2 = \int \mathrm{d}x = x, \tag{4}$$
$$aI_1 - bI_2 = \int \frac{a\cos x - b\sin x}{a\sin x + b\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(a\sin x + b\cos x)}{a\sin x + b\cos x}$$
$$= \ln|a\sin x + b\cos x|. \tag{5}$$
$b\times(4) + a\times(5)$,得
$$I_1 = \frac{b}{a^2 + b^2}x + \frac{a}{a^2 + b^2}\ln|a\sin x + b\cos x|,$$
$a\times(4) - b\times(5)$,得
$$I_2 = \frac{a}{a^2 + b^2}x - \frac{b}{a^2 + b^2}\ln|a\sin x + b\cos x|.$$
于是有
$$I = a_1 I_2 + b_1 I_1$$
$$= \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2}x + \frac{ab_1 - ba_1}{a^2 + b^2}\ln|a\sin x + b\cos x| + C.$$

在绪论中我们已讨论过,组合积分法分为参元组合法和分解组合法。例 1 中的两种解法,前者为参元组合法,后者为分解组合法。在参元组合法中,一些用万能代换不易求出的积分,用分解组合法比较容易解出。在求某个积分时,要找出一个与所求积分结构相似的积分,我们称它为辅助积分。用参元组合法解题,关键在于找出辅助积分。寻求辅助积分应掌握以下原则:

1) 辅助积分与原积分在结构上相似。

2) 对一个三角函数有理式的积分,它的辅助积分仍然是一个三角函数有理式的积分。对于指数函数有理式的积分、双曲函数有理式的积分也是如此,它们的辅助积分分别为指数函数有理式的积分和双曲函数有理式的积分。

下面再举例说明寻求辅助积分的方法。

例 2 求 $I = \int \frac{\cos^2 x}{a\sin x + b\cos x}\mathrm{d}x$.

解 显然可令 $J = \int \frac{\sin^2 x}{a\sin x + b\cos x}\mathrm{d}x$ 作为辅助积分,于是有

$$I+J=\int\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin x+b\cos x}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|, \qquad (6)$$

$$-b^2I+a^2J=\int\frac{a^2\sin^2 x-b^2\cos^2 x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\int(a\sin x-b\cos x)\mathrm{d}x=-a\cos x-b\sin x. \qquad (7)$$

$a^2\times(6)-(7)$，得

$$I=\frac{1}{a^2+b^2}\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|+a\sin x+b\cos x\right)+C.$$

例 3 求 $I=\int\frac{a_1^2\sin^2 x+b_1^2\cos^2 x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x$.

解 显然要用分解组合法解，即可令

$$I_1=\int\frac{\sin^2 x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x,\quad I_2=\int\frac{\cos^2 x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x,$$

由例 2 不难得到

$$I_1=\frac{1}{a^2+b^2}\left(\frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|-a\cos x-b\sin x\right),$$

$$I_2=\frac{1}{a^2+b^2}\left(\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|+a\cos x+b\sin x\right)。$$

于是有 $I=a_1^2I_1+b_1^2I_2$

$$=\frac{a_1^2b^2+a^2b_1^2}{(a^2+b^2)^{3/2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|$$

$$+(ab_1^2-aa_1^2)\cos x+(bb_1^2-ba_1^2)\sin x+C.$$

例 4　求 $I=\int \frac{\cos^3 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

解　不妨设辅助函数 $J=\int \frac{\sin^3 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$**,于是有**

$$I+J=\int \frac{\cos^3 x+\sin^3 x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\int (1-\sin x\cos x)\mathrm{d}x=x+\frac{1}{2}\cos^2 x,$$

$$I-J=\int \frac{(\cos x-\sin x)(1+\sin x\cos x)}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int \frac{[1+(\sin x+\cos x)^2]}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}(\cos x+\sin x)$$

$$=\frac{1}{2}\int \left[\frac{1}{\sin x+\cos x}+(\sin x+\cos x)\right]\mathrm{d}(\cos x+\sin x)$$

$$=\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+\frac{1}{4}(\sin x+\cos x)^2$$

$$=\frac{1}{2}\ln|\sin x+\cos x|+\frac{1}{2}\sin x\cos x+\frac{1}{4},$$

立刻便有

$$I=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\cos^2 x+\frac{1}{4}\ln|\sin x+\cos x|+\frac{1}{4}\cos x\sin x+C.$$

以上例子均是利用解关于 I, J **的二元方程组来求解的。事实上,用三元方程组也可以求解,例 5 就是用** I_1, I_2, I_3 **的三元方程组求解的。**

例 5　求 $I=\int \frac{a_1\sin^2 x+2b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2 x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x$.

解　令

$$I_1=\int \frac{\sin^2 x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x,$$

$$I_2=\int \frac{2\sin x\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x,$$

$$I_3=\int \frac{\cos^2 x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x,$$

则有

$$I_1 + I_3 = \int \frac{\mathrm{d}x}{a\sin x + b\cos x} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}} \ln \left| \tan \frac{x + \arctan \frac{b}{a}}{2} \right|, \tag{8}$$

$$a^2 I_1 - b^2 I_3 = \int (a\sin x - b\cos x)\mathrm{d}x = -a\cos x - b\sin x, \tag{9}$$

$$\begin{aligned} a^2 I_1 + abI_2 + b^2 I_3 &= \int (a\sin x + b\cos x)\mathrm{d}x \\ &= -a\cos x + b\sin x. \end{aligned} \tag{10}$$

$a^2 \times (8) - (9)$,得

$$I_3 = \frac{a^2}{(a^2+b^2)^{3/2}} \ln \left| \tan \frac{x + \arctan \frac{b}{a}}{2} \right| + \frac{a}{a^2+b^2}\cos x + \frac{b}{a^2+b^2}\sin x,$$

$b^2 \times (8) + (9)$,得

$$I_1 = \frac{b^2}{(a^2+b^2)^{3/2}} \ln \left| \tan \frac{x + \arctan \frac{b}{a}}{2} \right| - \frac{a}{a^2+b^2}\cos x - \frac{b}{a^2+b^2}\sin x,$$

$(10) - (9)$,得

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{2}{a}(\sin x - bI_3) \\ &= -\frac{2ab}{(a^2+b^2)^{3/2}} \ln \left| \tan \frac{x + \arctan \frac{b}{a}}{2} \right| \\ &\quad + \frac{2a}{a^2+b^2}\sin x - \frac{2b}{a^2+b^2}\cos x. \end{aligned}$$

于是有 $I = a_1 I_1 + b_1 I_2 + c_1 I_3$

$$= \frac{a_1 b^2 + c_1 a^2 - 2abb_1}{(a^2+b^2)^{3/2}} \ln \left| \tan \frac{x + \arctan \frac{b}{a}}{2} \right|$$

$$+\frac{c_1 b - a_1 b + 2ab_1}{a^2+b^2}\sin x + \frac{ac_1 - aa_1 - 2bb_1}{a^2+b^2}\cos x$$

$$+ C.$$

对于分母含有 $a\sin x + b\cos x + c$ **的三角函数有理式的积分,也可以考虑使用组合积分法.**

例 6　求 $I = \int \frac{\sin x}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$.

解　令 $J = \int \frac{\cos x}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$,**则有**

$$I + J = \int \frac{\sin x+\cos x}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{1}{1+\sin x+\cos x}\right)\mathrm{d}x$$

$$= x - \ln\left|1+\tan\frac{x}{2}\right| = x - \ln\left|\frac{1+\sin x+\cos x}{1+\cos x}\right|,$$

$$-I + J = \int \frac{\cos x - \sin x}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(1+\sin x+\cos x)}{1+\sin x+\cos x}$$

$$= \ln|1+\sin x+\cos x|.$$

所以有

$$I = \frac{1}{2}\left(x - \ln\left|\frac{1+\sin x+\cos x}{1+\cos x}\right| - \ln|1+\sin x+\cos x|\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}[x - 2\ln|1+\sin x+\cos x| + \ln|1+\cos x|] + C$$

$$= \frac{1}{2}\left(x + \ln\frac{|1+\cos x|}{(1+\sin x+\cos x)^2}\right) + C.$$

例 7　求 $I = \int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x + c_1}{a\sin x + b\cos x + c}\mathrm{d}x$.

解　令
$$I_1 = \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{a\sin x + b\cos x + c},$$

$$I_2 = \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{a\sin x + b\cos x + c},$$

$$I_3 = \int \frac{\mathrm{d}x}{a\sin x + b\cos x + c}$$ **(此积分查表可求出,这里从略)**,

则有
$$aI_1 + bI_2 + cI_3 = \int \mathrm{d}x = x, \tag{1}$$

$$-bI_1 + aI_2 = \int \frac{(a\cos x - b\sin x)\mathrm{d}x}{a\sin x + b\cos x + c} = \int \frac{\mathrm{d}(a\sin x + b\cos x + c)}{a\sin x + b\cos x + c}$$

$$= \ln|a\sin x + b\cos x + c| . \qquad (2)$$

$a\times(1) - b\times(2)$,得

$$I_1 = \frac{ax}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2}\ln|a\sin x + b\cos x + c| - \frac{ac}{a^2+b^2} I_3 ,$$

$b\times(1) + a\times(2)$,得

$$I_2 = \frac{bx}{a^2+b^2} + \frac{a}{a^2+b^2}\ln|a\sin x + b\cos x + c| - \frac{bc}{a^2+b^2} I_3 .$$

所以有 $I = a_1 I_1 + b_1 I_2 + c_1 I_3$

$$= \frac{a_1 a + b_1 b}{a^2+b^2} x + \frac{b_1 a - a_1 b}{a^2+b^2}\ln|a\sin x + b\cos x + c| + c_1 - \frac{aa_1 + bb_1}{a^2+b^2} I_3 .$$

对于分母含有$(a\sin x + b\cos x)(b\sin x + a\cos x)$**的积分,也可以用组合积分法。**

例 8 **求** $I = \int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{(a\sin x + b\cos x)(b\sin x + a\cos x)} dx \quad (a^2 \neq b^2)$.

解 **令** $I_1 = \int \frac{\sin x\, dx}{(a\sin x + b\cos x)(b\sin x + a\cos x)}$,

$$I_2 = \int \frac{\cos x\, dx}{(a\sin x + b\cos x)(b\sin x + a\cos x)},$$

则有

$$aI_1 + bI_2 = \int \frac{dx}{b\sin x + a\cos x} = \frac{1}{a^2+b^2}\ln\left|\tan\frac{x + \arctan\frac{a}{b}}{2}\right|,$$

$$bI_1 + aI_2 = \int \frac{dx}{a\sin x + b\cos x} = \frac{1}{a^2+b^2}\ln\left|\tan\frac{x + \arctan\frac{b}{a}}{2}\right|,$$

解方程组,得

$$I_1 = \frac{1}{a^2-b^2}\quad\frac{1}{a^2+b^2}\quad a\ln\left|\tan\frac{x + \arctan\frac{a}{b}}{2}\right|$$

$$- b\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right| ,$$

$$I_2 = \frac{1}{(b^2 - a^2)\quad a^2 + b^2}\quad b\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{a}{b}}{2}\right|$$

$$- a\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right| .$$

所以有 $I = a_1 I_1 + b_1 I_2$

$$= \frac{aa_1 - bb_1}{(a^2 - b^2)\quad a^2 + b^2}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{a}{b}}{2}\right|$$

$$+ \frac{ab_1 - ba_1}{(a^2 - b^2)\quad a^2 + b^2}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right| + C .$$

对于分母含有$(a\sin x + b\cos x)(c\sin x + d\cos x)$**的三角函数有理式的积分,按照例 8 的方法立刻可得到**

$$\int\frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{(a\sin x + b\cos x)(c\sin x + d\cos x)}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{da_1 - ab_1}{(ad - bc)\quad c^2 + d^2}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{d}{c}}{2}\right|$$

$$+ \frac{cb_1 - ba_1}{(ad - bc)\quad a^2 + b^2}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right| + C .$$

例 9 **求** $I = \int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x + b\cos x)(b\sin x + a\cos x)}\mathrm{d}x \quad (a^2 \neq b^2)$.

解 **令** $I_1 = \int\frac{\sin^2 x}{(a\sin x + b\cos x)(b\sin x + a\cos x)}\mathrm{d}x$,

$$I_2 = \int\frac{\cos^2 x}{(a\sin x + b\cos x)(b\sin x + a\cos x)}\mathrm{d}x ,$$

则有

$$\begin{aligned}a^2I_1-b^2I_2&=\int\frac{a\sin x-b\cos x}{b\sin x+a\cos x}\mathrm{d}x\\&=-\int\frac{\mathrm{d}(b\sin x+a\cos x)}{b\sin x+a\cos x}\\&=-\ln|b\sin x+a\cos x|,\\b^2I_1-a^2I_2&=\int\frac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x\\&=-\int\frac{\mathrm{d}(a\sin x+b\cos x)}{a\sin x+b\cos x}\\&=-\ln|a\sin x+b\cos x|.\end{aligned}$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{a^4-b^4}[b^2\ln|a\sin x+b\cos x|-a^2\ln|b\sin x+a\cos x|],$$

$$I_2=\frac{1}{a^4-b^4}[a^2\ln|a\sin x+b\cos x|-b^2\ln|b\sin x+a\cos x|],$$

于是有

$$\begin{aligned}I&=I_1+I_2\\&=\frac{a^2+b^2}{a^4-b^4}\ln|a\sin x+b\cos x|\\&\quad-\frac{a^2+b^2}{a^4-b^4}\ln|b\sin x+a\cos x|+C\\&=\frac{1}{a^2-b^2}\ln\left|\frac{a\sin x+b\cos x}{b\sin x+a\cos x}\right|+C.\end{aligned}$$

含有$(a\sin x+b\cos x)$的积分还可以举出许多例子,这里不再一一列举,留给读者去思考。

习　题　1.1

1．用参元组合法求下列不定积分:

(1) $\displaystyle\int\frac{\cos x}{3\sin x+4\cos x}\mathrm{d}x$;　　(2) $\displaystyle\int\frac{\sin^2 x}{3\sin x+4\cos x}\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int\frac{\sin x}{a\sin x-b\cos x}\mathrm{d}x$;

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(3\sin x+4\cos x)(4\sin x-3\cos x)}$。

2．**用分解组合法求下列不定积分**:

(1) $\int \frac{3\sin x+2\cos x}{2\sin x+3\cos x}\mathrm{d}x$; (2) $\int \frac{a\sin x-b\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x$;

(3) $\int \frac{\sin^2 x+\sin x\cos x+\cos^2 x}{2\sin x+3\cos x}\mathrm{d}x$;

(4) $\int \frac{a_1\sin^2 x+b_1\cos^2 x}{(a\sin x+b\cos x)(c\sin x+d\cos x)}\mathrm{d}x$。

3．**用微分法验证积分公式**:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)(b\sin x+a\cos x)}$$
$$=\frac{1}{a^2-b^2}\ln\left|\frac{a\sin x+b\cos x}{b\sin x+a\cos x}\right|+C.$$

4．**求** $\int \frac{\sin x\cos x}{1+\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$ (**用三种方法求解**)。

1.2 含有$(a\sin x+b\cos x)^n$的积分

对于分母含有$(a\sin x+b\cos x)^n$ $(n>1)$**的三角函数有理式的积分,可考虑使用组合积分法。先证明两个递推公式**.

定理 1 设

$$J_n=\int \frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^n}\quad n>1,\ x\neq k\pi-\arctan\frac{b}{a},$$

则 $$J_n=\frac{1}{(n-1)(a^2+b^2)}\left[(n-2)J_{n-1}+\frac{b\sin x-a\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}\right].\tag{1}$$

证 由

$$J_n=\int \frac{(a\sin x+b\cos x)\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^{n+1}}=\int \frac{\mathrm{d}(b\sin x-a\cos x)}{(a\sin x+b\cos x)^{n+1}}$$
$$=\frac{b\sin x-a\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n+1}}$$

$$-\int (b\sin x - a\cos x)\mathrm{d}(a\sin x + b\cos x)^{-(n+1)}$$

$$= \frac{b\sin x - a\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n+1}} - (n+1)\int \frac{(b\sin x - a\cos x)^2\mathrm{d}x}{(a\sin x + b\cos x)^{n+2}}$$

$$= \frac{b\sin x - a\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n+1}} - (n+1)\int \frac{(a^2 + b^2)\mathrm{d}x}{(a\sin x + b\cos x)^{n+2}} + (n+1)J_n,$$

所以有

$$nJ_n = (n+1)(a^2 + b^2)J_{n+2} - \frac{b\sin x - a\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n+1}}.$$

将 $n-2$ 代替上式中的 n,得

$$(n-2)J_{n-2} = (n-1)(a^2 + b^2)J_n - \frac{b\sin x - a\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}},$$

故得递推公式

$$J_n = \frac{1}{(n-1)(a^2 - b^2)}\left[(n-2)J_{n-2} + \frac{b\sin x - a\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}}\right].$$

定理 2 设 $$J_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x + b\cos x)^n},$$

$$A = \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2}, \quad B = \frac{ab_1 - ba_1}{a^2 + b^2},$$

则

$$I = \int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^n}\mathrm{d}x$$

$$= AJ_{n-1} - \frac{B}{n-1}\frac{1}{(a\sin x + b\cos x)^{n-1}}$$

$$\left(n > 1, x \neq k\pi - \arctan\frac{b}{a}\right). \tag{2}$$

证 用组合积分法来证明.令

$$I_1 = \int \frac{\sin x}{(a\sin x + b\cos x)^n}\mathrm{d}x,$$

$$I_2=\int\frac{\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^n}\mathrm{d}x,$$

则

$$aI_1+bI_2=J_{n-1},$$

$$-bI_1+aI_2=\int\frac{\mathrm{d}(a\sin x+b\cos x)}{(a\sin x+b\cos x)^n}$$

$$=-\frac{1}{n-1}\frac{1}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}.$$

所以有

$$I_1=\frac{a}{a^2+b^2}J_{n-1}+\frac{b}{a^2+b^2}\frac{1}{n-1}\frac{1}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}},$$

$$I_2=\frac{b}{a^2+b^2}J_{n-1}-\frac{a}{a^2+b^2}\frac{1}{n-1}\frac{1}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}.$$

于是有

$$I=a_1I_1+b_1I_2$$

$$=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}J_{n-1}-\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2}\frac{1}{n-1}\frac{1}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}$$

$$=AJ_{n-1}-\frac{B}{n-1}\frac{1}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}.$$

由上面两个递推公式立刻可得下面要用到的一些积分公式。例如,由递推公式(1)**可得到**

$$J_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^2}=\frac{1}{a^2+b^2}\frac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x}+C,\quad(3)$$

$$J_3=\frac{1}{2(a^2+b^2)}\left(J_1+\frac{b\sin x-a\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^2}\right)$$

$$=\frac{1}{2(a^2+b^2)}\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|\right.$$

$$\left.+\frac{b\sin x-a\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^2}\right)+C,\quad(4)$$

$$J_4=\frac{1}{3(a^2+b^2)}\left(2J_2+\frac{b\sin x-a\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^3}\right)$$

$$= \frac{1}{3(a^2+b^2)}\left[\frac{2}{a^2+b^2}\,\frac{b\sin x - a\cos x}{a\sin x + b\cos x} + \frac{b\sin x - a\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^3}\right] + C. \tag{5}$$

由递推公式(2)可得到

$$\begin{aligned}
&\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^2}\,\mathrm{d}x \\
&= AJ_1 - B\,\frac{1}{a\sin x + b\cos x} \\
&= A\,\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right| - \frac{B}{a\sin x + b\cos x} + C.
\end{aligned}$$

要记住递推公式(2)不是件容易的事情，实际上只需记住递推公式(2)的证题思路，直接用组合积分法求解就可以了。

例 1 求 $I = \int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^2}\mathrm{d}x$.

解 令

$$I_1 = \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{(a\sin x + b\cos x)^2},$$

$$I_2 = \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{(a\sin x + b\cos x)^2},$$

则

$$\begin{aligned}
aI_1 + bI_2 &= \int \frac{\mathrm{d}x}{a\sin x + b\cos x} \\
&= \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|,
\end{aligned}$$

$$-bI_1 + aI_2 = \int \frac{\mathrm{d}(a\sin x + b\cos x)}{(a\sin x + b\cos x)^2} = -\frac{1}{a\sin x + b\cos x},$$

于是有

$$I_1 = \frac{1}{a^2+b^2}\left[\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right| + \frac{b}{a\sin x + b\cos x}\right],$$

$$I_2=\frac{1}{a^2+b^2}\quad\frac{b}{a^2+b^2}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|-\frac{a}{a\sin x+b\cos x}\quad.$$

所以有 $\qquad I=a_1I_1+b_1I_2$

$$=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}\quad\frac{1}{a^2+b^2}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|$$

$$-\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2}\;\frac{1}{a\sin x+b\cos x}+C$$

$$=\frac{A}{a^2+b^2}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|$$

$$-\frac{B}{a\sin x+b\cos x}+C\ .$$

为了熟悉用组合积分法求分母含有$(a\sin x+b\cos x)^2$**的有理式的积分,下面再举几例。**

例 2 **求** $I=\int\frac{\sin^2 x}{(a\sin x+b\cos x)^2}\mathrm{d}x$.

解 令 $\qquad J=\int\frac{\cos^2 x\,\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^2}$,

则有$I+J=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^2}=\frac{1}{a^2+b^2}\;\frac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x}$,

$$a^2I-b^2J=\int\frac{a^2\sin^2 x-b^2\cos^2 x}{(a\sin x+b\cos x)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{a\sin x-b\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x-\frac{2ab}{a^2+b^2}\ln|a\sin x+b\cos x|\ .$$

所以有 $\qquad I=\frac{1}{a^2+b^2}\quad\frac{b^2}{a^2+b^2}\;\frac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x}+\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x$

$$-\frac{2ab}{a^2+b^2}\ln|a\sin x+b\cos x|\quad+C$$

$$=\frac{1}{(a^2+b^2)^2}\quad\frac{b^3\sin x-ab^2\cos x}{a\sin x+b\cos x}+(a^2-b^2)x$$

$$-2ab\ln|a\sin x+b\cos x| + C.$$

例 3 **求** $I=\int\frac{a_1\sin^2 x+2b_1\sin x\cos x+c_1\cos^2 x}{(a\sin x+b\cos x)^2}\mathrm{d}x$.

解 **令**
$$I_1=\int\frac{\sin^2 x\,\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^2},$$
$$I_2=\int\frac{2\sin x\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^2}\mathrm{d}x,$$
$$I_3=\int\frac{\cos^2 x\,\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^2},$$

则有
$$a^2I_1+abI_2+b^2I_3=\int\mathrm{d}x=x,$$
$$I_1+I_3=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^2}=\frac{1}{a^2+b^2}\frac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x},$$
$$a^2I_1-b^2I_3=\int\frac{a\sin x-b\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x-\frac{2ab}{a^2+b^2}\ln|a\sin x+b\cos x|,$$

所以有
$$I_1=\frac{1}{(a^2+b^2)^2}\left[\frac{b^3\sin x-ab^2\cos x}{a\sin x+b\cos x}+(a^2-b^2)x\right.$$
$$\left.-2ab\ln|a\sin x+b\cos x|\right],$$
$$I_3=\frac{1}{(a^2+b^2)^2}\left[\frac{a^2b\sin x-a^3\cos x}{a\sin x+b\cos x}-(a^2-b^2)x\right.$$
$$\left.+2ab\ln|a\sin x+b\cos x|\right].$$

而
$$I_2=-\frac{a}{b}I_1-\frac{b}{a}I_3$$
$$=-\frac{2ab}{(a^2+b^2)^2}\frac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x}-\frac{(a^2-b^2)^2}{ab(a^2+b^2)^2}x$$
$$+\frac{2(a^2-b^2)}{(a^2+b^2)^2}\ln|a\sin x+b\cos x|,$$

于是有
$$I=a_1I_1+b_1I_2+c_1I_3$$

$$= \frac{b^2 a_1 - 2abb_1 + a^2 c_1}{(a^2+b^2)^2} \frac{b\sin x - a\cos x}{a\sin x + b\cos x}$$

$$+ \frac{(a^2-b^2)(a_1 ab - a^2 b_1 + b^2 b_1 - 2abc_1)}{ab(a^2+b^2)^2} x$$

$$+ \frac{2(abc_1 - aba_1 + a^2 b_1 - b^2 b_1)}{(a^2+b^2)^2} \ln|a\sin x + b\cos x| + C.$$

例 4 求 $I = \int \frac{a_1 \sin x + b_1 \cos x}{(a\sin x + b\cos x)^2 (b\sin x + a\cos x)} dx \ (a^2 \neq b^2)$.

解 令 $$I_1 = \int \frac{\sin x\, dx}{(a\sin x + b\cos x)^2 (b\sin x + a\cos x)},$$

$$I_2 = \int \frac{\cos x\, dx}{(a\sin x + b\cos x)^2 (b\sin x + a\cos x)},$$

则由 1.1 **节例** 9 **有**

$$aI_1 + bI_2 = \int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)(b\sin x + a\cos x)}$$

$$= \frac{1}{a^2-b^2} \ln \left| \frac{a\sin x + b\cos x}{b\sin x + a\cos x} \right|,$$

$$bI_1 + aI_2 = \int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^2} = \frac{1}{a^2+b^2} \frac{b\sin x - a\cos x}{a\sin x + b\cos x},$$

所以有

$$I_1 = \frac{1}{a^2-b^2} \left(\frac{a}{a^2-b^2} \ln \left| \frac{a\sin x + b\cos x}{b\sin x + a\cos x} \right| - \frac{b}{a^2+b^2} \frac{b\sin x - a\cos x}{a\sin x + b\cos x} \right),$$

$$I_2 = \frac{1}{b^2-a^2} \left(\frac{b}{a^2-b^2} \ln \left| \frac{a\sin x + b\cos x}{b\sin x + a\cos x} \right| - \frac{a}{a^2+b^2} \frac{b\sin x - a\cos x}{a\sin x + b\cos x} \right).$$

于是有 $$I = a_1 I_1 + b_1 I_2$$

$$= \frac{aa_1 - bb_1}{(a^2-b^2)^2} \ln \left| \frac{a\sin x + b\cos x}{b\sin x + a\cos x} \right|$$

$$+ \frac{ab_1 - ba_1}{a^4 - b^4} \frac{b\sin x - a\cos x}{a\sin x + b\cos x} + C.$$

例 5 求 $I = \int \frac{dx}{(a\sin x + b\cos x)^2 (b\sin x + a\cos x)}$。

解 令

$$I_1 = \int \frac{\sin^2 x}{(a\sin x + b\cos x)^2(b\sin x + a\cos x)}\mathrm{d}x,$$

$$I_2 = \int \frac{\cos^2 x}{(a\sin x + b\cos x)^2(b\sin x + a\cos x)}\mathrm{d}x,$$

则有 $$a^2 I_1 - b^2 I_2 = \int \frac{a\sin x - b\cos x}{(a\sin x + b\cos x)(b\sin x + a\cos x)}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{a^2+b^2}{(a^2-b^2)\quad a^2+b^2}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{a}{b}}{2}\right|$$

$$- \frac{2ab}{(a^2-b^2)\quad a^2+b^2}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|,$$

$$b^2 I_1 - a^2 I_2 = \int \frac{b\sin x - a\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^2}\mathrm{d}x$$

$$= -\int \frac{\mathrm{d}(a\sin x + b\cos x)}{(a\sin x + b\cos x)^2} = \frac{1}{a\sin x + b\cos x}.$$

所以有

$$I_1 = \frac{1}{a^4-b^4}\quad \frac{a^2\quad a^2+b^2}{a^2-b^2}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{a}{b}}{2}\right| - \frac{2a^3 b}{(a^2-b^2)\quad a^2+b^2}\ln$$

$$\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right| - \frac{b^2}{a\sin x + b\cos x}\quad,$$

$$I_2 = \frac{1}{a^4-b^4}\quad \frac{a^2}{a\sin x + b\cos x} - \frac{b^2\quad a^2+b^2}{a^2-b^2}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{a}{b}}{2}\right|$$

$$+ \frac{2ab^3}{(a^2-b^2)\quad a^2+b^2}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|\quad.$$

于是有 $$I = I_1 + I_2$$

$$= \frac{1}{a^4-b^4}\qquad a^2+b^2\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{a}{b}}{2}\right|$$

$$-\frac{2ab}{a^2+b^2}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|$$

$$+\frac{a^2-b^2}{a\sin x+b\cos x}+C.$$

例 6　求 $I=\int\frac{\sin^3 x}{(\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x$.

解　令　　$J=\int\frac{\cos^3 x}{(\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x$,

则有

$$I+J=\int\frac{1-\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{2-2\sin x\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{3-(\sin x+\cos x)^2}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x+\cos x}-\frac{1}{2}\int(\sin x+\cos x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{3}{2\sqrt{2}}\ln\left|\tan\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\right|-\frac{1}{2}(\sin x-\cos x),$$

$$-I+J=\int\frac{(\cos x-\sin x)(1+\sin x\cos x)}{(\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\int\frac{1+(\sin x+\cos x)^2}{(\sin x+\cos x)^2}\mathrm{d}(\sin x+\cos x),$$

$$=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{\sin x+\cos x}+\sin x+\cos x\right).$$

所以有

$$I=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{\sqrt{2}}\ln\left|\tan\frac{x+\frac{\pi}{4}}{2}\right|+\frac{1}{\sin x+\cos x}-2\sin x\right)+C.$$

对于含有$(a\sin x+b\cos x)^3$**的三角函数有理式的积分,也可以考虑使用组合积分法。**

例 7　求 $I=\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^3}\mathrm{d}x$.

解　此积分可用递推公式(2)**,但要记住这个公式**(2)**十分困**

难，不妨直接用组合积分法来计算此积分。为方便起见，不妨设

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2},\qquad B=\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2}。$$

令
$$I_1=\int\frac{\sin x}{(a\sin x+b\cos x)^3}\mathrm{d}x,$$
$$I_2=\int\frac{\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^3}\mathrm{d}x,$$

则有

$$aI_1+bI_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^2}=\frac{1}{a^2+b^2}\frac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x},$$

$$-bI_1+aI_2=\int\frac{a\cos x-b\sin x}{(a\sin x+b\cos x)^3}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(a\sin x+b\cos x)}{(a\sin x+b\cos x)^3}$$
$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{(a\sin x+b\cos x)^2}.$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{a^2+b^2}\frac{a}{a^2+b^2}\frac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x}+\frac{b}{2}\frac{1}{(a\sin x+b\cos x)^2},$$

$$I_2=\frac{1}{a^2+b^2}\frac{b}{a^2+b^2}\frac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x}-\frac{a}{2}\frac{1}{(a\sin x+b\cos x)^2}.$$

于是有
$$I=a_1I_1+b_1I_2$$
$$=\frac{A}{a^2+b^2}\frac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x}$$
$$-\frac{B}{2}\frac{1}{(a\sin x+b\cos x)^2}+C.$$

例 8 求 $I=\int\frac{\sin^2 x}{(a\sin x+b\cos x)^3}\mathrm{d}x$.

解 令 $J=\int\frac{\cos^2 x}{(a\sin x+b\cos x)^3}\mathrm{d}x$，则

$$I+J=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^3}$$
$$=\frac{1}{2(a^2+b^2)}$$
$$\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right|+\frac{b\sin x-a\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^2},$$

$$a^2 I - b^2 J = \int \frac{a\sin x - b\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2(a^2 + b^2)}\ln\left|\tan\frac{x + \arctan\frac{b}{a}}{2}\right|$$

$$+ \frac{2ab}{a^2 + b^2}\frac{1}{a\sin x + b\cos x}.$$

所以有

$$I = \frac{1}{a^2 + b^2}\frac{2a^2 - b^2}{2(a^2 + b^2)^{3/2}}\ln\left|\tan\frac{x + \arctan\frac{b}{a}}{2}\right|$$

$$+ \frac{b^2}{2(a^2 + b^2)}\frac{b\sin x - a\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^2}$$

$$+ \frac{2ab}{a^2 + b^2}\frac{1}{a\sin x + b\cos x} + C.$$

对于分母含有$(a\sin x + b\cos x)^n$ $(n > 1)$的三角函数有理式的积分,用组合积分法求解,还可以举出许多例子,这里不再赘述。只要掌握了这种积分方法,耐心细致地去做,一定能解决一些用通常方法解决不了的问题。

习 题 1.2

1. 用分解组合法计算下列不定积分:

(1) $\int \frac{3\sin x + 2\cos x}{(2\sin x + 3\cos x)^2}\mathrm{d}x$;

(2) $\int \frac{a_1\sin x + b_1\cos x}{(a\sin x - b\cos x)^2}\mathrm{d}x$;

(3) $\int \frac{2\sin x + 3\cos x}{(4\sin x - 5\cos x)^3}\mathrm{d}x$;

(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(4\sin x + 3\cos x)^2(3\sin x + 4\cos x)}$。

2. **用参元组合法计算下列不定积分:**

(1) $\int \frac{\cos x}{(3\sin x + 2\cos x)^2} \mathrm{d}x$; (2) $\int \frac{\cos^2 x}{(a\sin x + b\cos x)^3} \mathrm{d}x$;

(3) $\int \frac{\cos x}{(a\sin x + b\cos x)^3} \mathrm{d}x$; (4) $\int \frac{\sin x}{(2\sin x - 3\cos x)^2} \mathrm{d}x$.

1.3 含有 $a + b\sin x$ 与 $c + d\cos x$ 的积分

对于分母含有 $a + b\sin x$ 或 $c + d\cos x$ 的三角函数有理式的积分,利用组合法积分求解,效果也很不错。

1.3.1 含有 $a + b\sin x$ 的积分

例 1 求 $\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} \mathrm{d}x$.

解法 1 令 $I = \int \frac{\sin x}{1 + \sin x} \mathrm{d}x$, $J = \int \frac{\sin x}{1 - \sin x} \mathrm{d}x$,

则
$$I + J = \int \frac{2\sin x}{1 - \sin^2 x} \mathrm{d}x = 2\int \frac{\sin x}{\cos^2 x} \mathrm{d}x = \frac{2}{\cos x},$$

$$I - J = -\int \frac{2\sin^2 x}{1 - \sin^2 x} \mathrm{d}x = -2\int \tan^2 x \,\mathrm{d}x = -2\int (\sec^2 x - 1)\mathrm{d}x$$
$$= -2\tan x + 2x.$$

所以有
$$I = \frac{1}{\cos x} - \tan x + x + C.$$

解法 2
$$\int \frac{\sin x}{1 + \sin x} \mathrm{d}x = \int \frac{\sin x - \sin^2 x}{\cos^2 x} \mathrm{d}x$$
$$= \frac{1}{\cos x} - \tan x + x + C.$$

解法 3 用代换

$$\tan \frac{x}{2} = u, \quad \sin x = \frac{2u}{1 + u^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}u}{1 + u^2},$$

所以有 $$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{2u}{1+u^2}}{1+\frac{2u}{1+u^2}} \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}$$

$$= \int \frac{4u}{(1+u^2)(1+u)^2}\mathrm{d}u .$$

显然以上解法太繁,不宜采用。事实上,将原积分化为

$$\int \left(1-\frac{1}{1+\sin x}\right)\mathrm{d}x = \int \mathrm{d}x - \int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x},$$

再对后一积分作代换

$$\tan\frac{x}{2} = u, \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}。$$

则有 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x} = \int \frac{1}{1+\frac{2u}{1+u^2}} \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2} = 2\int \frac{\mathrm{d}u}{(1+u)^2}$$

$$= -\frac{2}{1+u} = -\frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}}。$$

所以有 $$\int \frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x = x + \frac{2}{1+\tan\frac{x}{2}} + C。$$

显然用解法 2 较简单,但较复杂的情形用解法 1 较好,下面再举几例。

例 2 求 $\int \frac{\sin x}{a+b\sin x}\mathrm{d}x \ (|a| > |b|)$.

解 令 $I = \int \frac{\sin x}{a+b\sin x}\mathrm{d}x, \quad J = \int \frac{\sin x}{a-b\sin x}\mathrm{d}x,$

则 $$I + J = \int \frac{2a\sin x}{a^2 - b^2\sin^2 x}\mathrm{d}x = \frac{-2a}{b}\int \frac{\mathrm{d}(b\cos x)}{a^2 - b^2 + b^2\cos^2 x}$$

$$= \frac{-2}{\sqrt{a^2-b^2}} \frac{a}{b}\arctan \frac{b\cos x}{\sqrt{a^2-b^2}},$$

$$I - J = -\int \frac{2b\sin^2 x}{a^2 - b^2\sin^2 x}\mathrm{d}x = \frac{2}{b}\int \frac{a^2 - b^2\sin^2 x - a^2}{a^2 - b^2\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2}{b}\int \mathrm{d}x - \frac{2a^2}{b}\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - b^2\sin^2 x}$$

$$= \frac{2}{b}x + \frac{2a^2}{b}\int \frac{1}{a^2\csc^2 x - b^2}\mathrm{d}(\cot x)$$

$$= \frac{2}{b}x + \frac{2a}{b}\int \frac{\mathrm{d}(a\cot x)}{a^2 - b^2 + a^2\cot^2 x}$$

$$= \frac{2}{b}x + \frac{2}{a^2 - b^2}\ \frac{a}{b}\arctan\frac{a\cot x}{a^2 - b^2}.$$

所以有 $$I = \frac{1}{b}x + \frac{1}{a^2 - b^2}\ \frac{a}{b}\arctan\frac{a\cot x}{a^2 - b^2}$$

$$- \frac{1}{a^2 - b^2}\ \frac{a}{b}\arctan\frac{b\cos x}{a^2 - b^2} + C.$$

例 3 **求** $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a + b\sin x)(b + a\sin x)}\quad (b^2 > a^2).$

解 **令** $J = \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{(a + b\sin x)(b + a\sin x)}$,**则**

$$aI + bJ = \int \frac{\mathrm{d}x}{b + a\sin x} = -\frac{2}{b^2 - a^2}\arctan\quad \frac{b - a}{b + a}\tan\ \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\quad ,$$

$$bI + aJ = \int \frac{\mathrm{d}x}{a + b\sin x} = -\frac{1}{b^2 - a^2}\ln\left|\frac{b + a\sin x + \quad b^2 - a^2\cos x}{a + b\sin x}\right|.$$

所以有 $$I = \frac{1}{a^2 - b^2}\quad \frac{b}{b^2 - a^2}\ln\left|\frac{b + a\sin x + \quad b^2 - a^2\cos x}{a + b\sin x}\right|$$

$$- \frac{2a}{b^2 - a^2}\arctan\quad \frac{b - a}{b + a}\tan\ \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}\quad + C.$$

例 4 **求** $I = \int \frac{a_1 + b_1\sin^2 x}{a + b\sin x}\mathrm{d}x\quad (a^2 < b^2).$

解 **令** $I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{a + b\sin x},\quad I_2 = \int \frac{\sin^2 x}{a + b\sin x}\mathrm{d}x,$

则 $$a^2 I_1 - b^2 I_2 = \int (a - b\sin x)\mathrm{d}x = ax + b\cos x,$$

I_1 **查表可求出,而**

$$I_2 = \frac{1}{b^2}(a^2 I_1 - ax - b\cos x).$$

所以有 $$I = a_1 I_1 + b_1 I_2$$

$$= a_1 I_1 + \frac{b_1}{b^2}(a^2 I_1 - ax - b\cos x)$$

$$= \frac{b^2 a_1 + a^2 b_1}{b^2} I_1 - \frac{ab_1}{b^2} x - \frac{b_1}{b}\cos x.$$

1.3.2 含有 $c + d\cos x$ 的积分

对于分母含有 $c + d\cos x$ 的三角函数有理式的积分，可用组合积分法求解.先看一个简单的例子。

例 5 求 $I = \int \frac{\cos x}{1+\cos x} \mathrm{d}x$.

解法 1 $$I = \int \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{2\cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x - \int \sec^2 \frac{x}{2} \mathrm{d}\frac{x}{2}$$

$$= x - \tan\frac{x}{2} + C.$$

解法 2 $$I = \int \frac{\cos x(1-\cos x)}{1-\cos^2 x}\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x \,\mathrm{d}x}{\sin^2 x} - \int \cot^2 x \,\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{\sin x} - \int(\csc^2 x - 1)\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{\sin x} + x + \cot x + C.$$

解法 3 $$I = \int \left(1 - \frac{1}{1+\cos x}\right)\mathrm{d}x.$$

设 $\tan\frac{x}{2} = u$，则

$$\cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2}, \quad \mathrm{d}x = \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2},$$

所以有 $$I=\int \mathrm{d}x-\int \frac{1}{1+\frac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}=x-\int \mathrm{d}u$$

$$=x-u+C=x-\tan\frac{x}{2}+C.$$

解法 4 令 $$J=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cos x},$$

则 $$I+J=x,$$

$$-I+J=\int\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{1-2\cos x+\cos^2 x}{\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=-\cot x+\frac{2}{\sin x}-\cot x-x.$$

两式相减便有

$$I=\frac{1}{2}\left(2x-\frac{2}{\sin x}+2\cot x\right)+C=x-\frac{1}{\sin x}+\cot x+C.$$

还有其他方法,这里从略。以上四种方法都不难,但在比较复杂的情况下用第 4 种方法比较好,下面举例说明。

例 6 求 $I=\int\frac{a_1+b_1\cos x}{c+d\cos x}\mathrm{d}x\quad(|c|>|d|)$.

解 设 $$I_1=\int\frac{\mathrm{d}x}{c+d\cos x},\quad I_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{c-d\cos x},$$

则 $$I_1+I_2=2c\int\frac{\mathrm{d}x}{c^2-d^2\cos^2 x}=2c\int\frac{1}{c^2\sec^2 x-d^2}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$$

$$=2\int\frac{\mathrm{d}(c\tan x)}{c^2-d^2+(c\tan x)^2}=\frac{2}{\sqrt{c^2-d^2}}\arctan\frac{c\tan x}{\sqrt{c^2-d^2}},$$

$$I_1-I_2=-\int\frac{2d\cos x}{c^2-d^2\cos^2 x}\mathrm{d}x=-2\int\frac{\mathrm{d}(d\sin x)}{c^2-d^2+d^2\sin^2 x}$$

$$=-\frac{2}{\sqrt{c^2-d^2}}\arctan\frac{d\sin x}{\sqrt{c^2-d^2}},$$

所以有 $I_1 = \frac{1}{c^2 - d^2} \left(\arctan \frac{c\tan x}{c^2 - d^2} - \arctan \frac{d\sin x}{c^2 - d^2} \right)$

$$= \frac{1}{c^2 - d^2} \arctan \frac{\frac{c\tan x - d\sin x}{c^2 - d^2}}{1 + \frac{c\tan x}{c^2 - d^2} \cdot \frac{d\sin x}{c^2 - d^2}}$$

$$= \frac{1}{c^2 - d^2} \arctan \frac{c^2 - d^2 \sin x}{d + c\cos x},$$

$$I_2 = \frac{1}{c^2 - d^2} \left(\arctan \frac{c\tan x}{c^2 - d^2} + \arctan \frac{d\sin x}{c^2 - d^2} \right)$$

$$= \frac{1}{c^2 - d^2} \arctan \frac{c^2 - d^2 \sin x}{-d + c\cos x}.$$

上述结果与查表求得的结果一致,可见用组合积分法能顺利地求出积分表中较难的积分公式。此公式如果用万能代换,令 $\tan \frac{x}{2} = u$ **来求出,将是比较困难的,读者不妨一试。**

由 $I_1 = \frac{1}{c^2 - d^2} \arctan \frac{c^2 - d^2 \sin x}{d + c\cos x}$ **可得**

$$\int \frac{\cos x}{c + d\cos x} \mathrm{d}x = \frac{1}{d} \int \frac{c + d\cos x - c}{c + d\cos x} \mathrm{d}x = \frac{1}{d} x - \frac{c}{d} \int \frac{\mathrm{d}x}{c + d\cos x}$$

$$= \frac{1}{d} x - \frac{c}{d} \frac{1}{c^2 - d^2} \arctan \frac{c^2 - d^2 \sin x}{c + d\cos x},$$

于是有 $I = a_1 I_1 + b_1 \int \frac{\cos x}{c + d\cos x} \mathrm{d}x$

$$= \frac{b_1}{d} x + \frac{da_1 - cb_1}{d\ c^2 - d^2} \arctan \frac{c^2 - d^2 \sin x}{c + d\cos x} + C.$$

例 7 **求** $I = \int \frac{a_1 + b_1 \cos x}{(c + d\cos x)(d + c\cos x)} \mathrm{d}x \quad (|c| > |d|)$.

解 **令** $I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(c + d\cos x)(d + c\cos x)},$

$$I_2 = \int \frac{\cos x}{(c+d\cos x)(d+c\cos x)} \mathrm{d}x,$$

则 $$cI_1 + dI_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{d+c\cos x} = \frac{1}{c^2 - d^2} \operatorname{arth} \frac{c^2 - d^2 \sin x}{c+d\cos x},$$

$$dI_1 + cI_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{c+d\cos x} = \frac{1}{c^2 - d^2} \arctan \frac{c^2 - d^2 \sin x}{d+c\cos x}.$$

所以有 $$I_1 = \frac{1}{c^2 - d^2} \quad \frac{c}{c^2 - d^2} \operatorname{arth} \frac{c^2 - d^2 \sin x}{c+d\cos x}$$

$$- \frac{d}{c^2 - d^2} \arctan \frac{c^2 - d^2 \sin x}{d+c\cos x},$$

$$I_2 = \frac{1}{d^2 - c^2} \quad \frac{d}{c^2 - d^2} \operatorname{arth} \frac{c^2 - d^2 \sin x}{c+d\cos x}$$

$$- \frac{c}{c^2 - d^2} \arctan \frac{c^2 - d^2 \sin x}{d+c\cos x}.$$

于是有 $$I = a_1 I_1 + b_1 I_2$$

$$= \frac{ca_1 - db_1}{(c^2 - d^2)^{3/2}} \operatorname{arth} \frac{c^2 - d^2 \sin x}{c+d\cos x}$$

$$+ \frac{cb_1 - da_1}{(c^2 - d^2)^{3/2}} \arctan \frac{c^2 - d^2 \sin x}{d+c\cos x} + C.$$

例 8 **求** $I = \int \frac{\cos^2 x}{c+d\cos x} \mathrm{d}x$.

解 **令** $J = \int \frac{\mathrm{d}x}{c+d\cos x}$ (J **查表可知**),

则有 $$c^2 J - d^2 I = \int (c - d\cos x) \mathrm{d}x = cx - d\sin x,$$

所以有 $$I = \frac{1}{d^2}(c^2 J - cx + d\sin x)$$

$$= \frac{c^2}{d^2} J - \frac{c}{d^2} x + \frac{1}{d} \sin x \ (J \text{ 查表可知}).$$

以上是分母含有 $a + b\sin x$ **和** $c + d\cos x$ **的三角函数有理式的积分。还有可以化为此类积分的三角函数有理式的积分。下面**

来讨论这个问题。

1.3.3 含有 $a\sec x + b\tan x$ 的积分

对于分母含有 $a\sec x + b\tan x$ 的三角函数有理式的积分,可以化为上述三角函数有理式的积分来进行计算,例如求

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{a\sec x + b\tan x}.$$

原积分可以化为

$$I = \int \frac{\cos x}{a + b\sin x}\mathrm{d}x = \frac{1}{b}\ln|a + b\sin x| + C,$$

也可以直接使用组合积分法求解。

例 9 求 $I = \int \frac{a_1\sec x + b_1\tan x}{a\sec x + b\tan x}\mathrm{d}x$.

解 原积分可以容易地化为

$$I = \int \frac{a_1 + b_1\sin x}{a + b\sin x}\mathrm{d}x \quad (|a| > |b|),$$

令

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{a + b\sin x}, \quad I_2 = \int \frac{\sin x}{a + b\sin x}\mathrm{d}x.$$

由例 2 和查表立刻可以求出结果,即

$$I_1 = -\frac{2}{a^2 - b^2}\arctan \frac{a - b}{a + b}\tan \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2},$$

$$I_2 = \frac{1}{b}x + \frac{1}{a^2 - b^2}\frac{a}{b}\arctan\frac{a\cot x}{a^2 - b^2}$$

$$- \frac{1}{a^2 - b^2}\frac{a}{b}\arctan\frac{b\cos x}{a^2 - b^2}.$$

所以有

$$\begin{aligned} I &= a_1 I_1 + b_1 I_2 \\ &= \frac{b_1}{b}x + \frac{ab_1}{b\ a^2 - b^2}\arctan\frac{a\cot x}{a^2 - b^2} \\ &\quad - \frac{ab_1}{b\ a^2 - b^2}\arctan\frac{b\cos x}{a^2 - b^2} \end{aligned}$$

$$-\frac{2a_1}{a^2-b^2}\arctan \quad \frac{a-b}{a+b}\tan \quad \frac{\pi}{4}-\frac{x}{2} \quad +C.$$

例 10 求 $I=\int\frac{a_1\sec^2 x+b_1\tan^2 x}{a\sec x+b\tan x}\mathrm{d}x$.

解 令
$$I_1=\int\frac{\sec^2 x}{a\sec x+b\tan x}\mathrm{d}x,$$
$$I_2=\int\frac{\tan^2 x}{a\sec x+b\tan x}\mathrm{d}x,$$

则
$$I_1-I_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sec x+b\tan x}=\frac{1}{b}\ln|a+b\sin x|,$$
$$a^2I_1-b^2I_2=\int(a\sec x-b\tan x)\mathrm{d}x$$
$$=a\ln|\sec x+\tan x|+b\ln|\cos x|.$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{a^2-b^2}[a\ln|\sec x+\tan x|+b\ln|\cos x|-b\ln|a+b\sin x|],$$

$$I_2=\frac{1}{a^2-b^2}\quad a\ln|\sec x+\tan x|+b\ln|\cos x|-\frac{a^2}{b}\ln|a+b\sin x| \quad .$$

于是有 $I=a_1I_1+b_1I_2$
$$=\frac{a(a_1+b_1)}{a^2-b^2}\ln|\sec x+\tan x|+\frac{b(a_1+b_1)}{a^2+b^2}\ln|\cos x|$$
$$-\frac{b^2a_1+a^2b_1}{b(a^2-b^2)}\ln|a+b\sin x|+C.$$

例 11 求 $I=\int\frac{a_1\sec x+b_1\tan x}{(a\sec x+b\tan x)(b\sec x+a\tan x)}\mathrm{d}x$。

解 令 $I_1=\int\frac{\sec x\,\mathrm{d}x}{(a\sec x+b\tan x)(b\sec x+a\tan x)},$

$$I_2=\int\frac{\tan x\,\mathrm{d}x}{(a\sec x+b\tan x)(b\sec x+a\tan x)},$$

则 $aI_1+bI_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{b\sec x+a\tan x}=\frac{1}{a}\ln|b+a\sin x|,$

$$bI_1+aI_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sec x+b\tan x}=\frac{1}{b}\ln|a+b\sin x|.$$

所以有

$$I_1 = \frac{1}{a^2 - b^2}[\ln|b + a\sin x| - \ln|a + b\sin x|]$$

$$= \frac{1}{a^2 - b^2}\ln\left|\frac{b + a\sin x}{a + b\sin x}\right|,$$

$$I_2 = \frac{1}{b^2 - a^2} \quad \frac{b}{a}\ln|b + a\sin x| - \frac{a}{b}\ln|a + b\sin x| \quad .$$

于是有

$$I = a_1 I_1 + b_1 I_2$$

$$= \frac{aa_1 - bb_1}{a(a^2 - b^2)}\ln|b + a\sin x| + \frac{ab_1 - ba_1}{b(a^2 - b^2)}\ln|a + b\sin x| + C.$$

1.3.4 含有 $a\csc x + b\cot x$ 的积分

对于分母含有 $a\csc x + b\cot x$ 的积分,同样可以使用组合积分法,方法技巧与上述分母含有 $a\sec x + b\tan x$ 的积分基本相同。

例 12 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a\csc x + b\cot x}$.

解 $\int \frac{\mathrm{d}x}{a\csc x + b\cot x} = \int \frac{\sin x}{a + b\cos x}\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}\cos x}{a + b\cos x}$

$$= -\frac{1}{b}\ln|a + b\cos x| + C.$$

例 13 求 $I = \int \frac{a_1\csc x + b_1\cot x}{(a\csc x + b\cot x)(b\csc x + a\cot x)}\mathrm{d}x$.

解 令 $I_1 = \int \frac{\csc x\,\mathrm{d}x}{(a\csc x + b\cot x)(b\csc x + a\cot x)}$,

$$I_2 = \int \frac{\cot x\,\mathrm{d}x}{(a\csc x + b\cot x)(b\csc x + a\cot x)},$$

则有 $aI_1 + bI_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{b\csc x + a\cot x} = \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{b + a\cos x}$

$$= -\frac{1}{a}\ln|b + a\cos x|,$$

$$bI_1 + aI_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{a\csc x + b\cot x} = \int \frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{a + b\cos x}$$

$$= -\frac{1}{b}\ln|a + b\cos x| .$$

所以有 $I_1 = \dfrac{1}{a^2 - b^2}[\ln|a + b\cos x| - \ln|b + a\cos x|]$,

$$I_2 = \frac{1}{a^2 - b^2}\quad \frac{b}{a}\ln|b + a\cos x| - \frac{a}{b}\ln|a + b\cos x| \quad .$$

于是有

$$I = a_1 I_1 + b_1 I_2$$

$$= \frac{ba_1 - ab_1}{b(a^2 - b^2)}\ln|a + b\cos x| + \frac{bb_1 - aa_1}{a(a^2 - b^2)}\ln|b + a\cos x| + C .$$

例 14 **求** $I = \displaystyle\int \frac{a_1\csc^2 x + b_1\cot^2 x}{a\csc x + b\cot x}\mathrm{d}x \quad (|a| \neq |b|)$.

解 **令**

$$I_1 = \int \frac{\csc^2 x\,\mathrm{d}x}{a\csc x + b\cot x},$$

$$I_2 = \int \frac{\cot^2 x\,\mathrm{d}x}{a\csc x + b\cot x},$$

则

$$a^2 I_1 - b^2 I_2 = \int (a\csc x - b\cot x)\mathrm{d}x$$

$$= a\ln|\csc x - \cot x| - b\ln|\sin x|,$$

$$I_1 - I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{a\csc x + b\cot x} = -\frac{1}{b}\ln|a\csc x + b\cot x| .$$

所以有 $I_1 = \dfrac{1}{a^2 - b^2}[a\ln|\csc x - \cot x| - b\ln|\sin x|$

$$+ b\ln|a\csc x + b\cot x|],$$

$$I_2 = \frac{1}{a^2 - b^2}\quad \frac{a^2}{b}\ln|a\csc x + b\cot x|$$

$$+ a\ln|\csc x - \cot x| - b\ln|\sin x| \quad 。$$

于是有 $I = a_1 I_1 + b_1 I_2$

$$= \frac{b^2 a_1 + a^2 b_1}{b(a^2 - b^2)}\ln|a\csc x + b\cot x|$$

$$+\frac{a(a_1+b_1)}{a^2-b^2}\ln|\csc x-\cot x|$$
$$+\frac{bb_1-ba_1}{a^2-b^2}\ln|\sin x|+C.$$

习　题　1.3

求下列不定积分:

(1) $\int\frac{dx}{3+2\sin x}$;　　(2) $\int\frac{\cos x}{2+3\cos x}dx$;

(3) $\int\frac{b+a\sin x}{a+b\sin x}dx$;　　(4) $\int\frac{d+c\cos x}{c+d\sin x}dx$;

(5) $\int\frac{\cot^2 x}{3\csc x+2\cot x}dx$;　　(6) $\int\frac{b\sec x+a\tan x}{a\sec x+b\tan x}dx$;

(7) $\int\frac{\sec x+\tan x}{(3\sec x+2\tan x)(2\sec x+3\tan x)}dx$;

(8) $\int\frac{4\csc x+5\cot x}{(2\csc x+3\cot x)(3\csc x+2\cot x)}dx$.

1.4　含有 $a+b\sin x\cos x$ 的积分

对于分母含有 $a+b\sin x\cos x$ 的积分,可考虑使用组合积分法,不过里使用组合积分法难度较大.先看一个简单的例子。

例 1　求 $I=\int\frac{\cos x\,dx}{1+\sin x\cos x}$。

解　这里如果用万能代换,设 $\tan\frac{x}{2}=u$,则

$$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\quad \sin x=\frac{2u}{1+u^2},\quad dx=\frac{2du}{1+u^2}.$$

原积分可变为

$$I=\int\frac{\dfrac{1-u^2}{1+u^2}}{1+\dfrac{2u}{1+u^2}\dfrac{1-u^2}{1+u^2}}\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}=\int\frac{2(1-u^2)\mathrm{d}u}{(1+u^2)^2+2u(1-u^2)}$$

$$=\int\frac{2(1-u^2)\mathrm{d}u}{u^4-2u^3+2u^2+2u+1}.$$

以上有理函数的积分,要求出来相当困难,如果改用组合积分法将能很快地求出。

令 $$J=\int\frac{\sin x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x,$$

则有 $$I+J=\int\frac{\cos x+\sin x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x=2\int\frac{\mathrm{d}(\sin x-\cos x)}{2+2\sin x\cos x}$$

$$=2\int\frac{\mathrm{d}(\sin x-\cos x)}{3-(\sin x-\cos x)^2}$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3+\sin x-\cos x}{3-\sin x+\cos x}\right|,$$

$$I-J=\int\frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x=2\int\frac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{2+2\sin x\cos x}$$

$$=2\int\frac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{1+(\sin x+\cos x)^2}=2\arctan(\sin x+\cos x).$$

立刻便有

$$I=\frac{1}{2}\quad\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3+\sin x-\cos x}{3-\sin x+\cos x}\right|$$

$$+2\arctan(\sin x+\cos x)\quad+C.$$

同样不难得到

$$J=\frac{1}{2}\quad\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3+\sin x-\cos x}{3-\sin x+\cos x}\right|$$

$$-2\arctan(\sin x+\cos x)\quad+C.$$

系数复杂一些情形的积分如例 2 所述.

例 2 求 $I=\int\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{3+\sin 2x}$.

解　令

$$J = \int \frac{\sin x}{3 + \sin 2x} \mathrm{d} x,$$

则有

$$I + J = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x - \cos x)}{4 - (\sin x - \cos x)^2} = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 + \sin x - \cos x}{2 - \sin x + \cos x} \right|,$$

$$I - J = \int \frac{\mathrm{d}(\sin x + \cos x)}{2 + (\sin x + \cos x)^2} = \frac{1}{2} \arctan \frac{\sin x + \cos x}{2} .$$

于是便有

$$I = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 + \sin x - \cos x}{2 - \sin x + \cos x} \right| + \frac{1}{2} \arctan \frac{\sin x + \cos x}{2} \quad + C .$$

一般情形的积分如例 3 **所述** .

例 3　求 $I = \int \frac{3\cos x + 4\sin x}{3 + 2\sin x \cos x} \mathrm{d} x$.

解　令

$$I_1 = \int \frac{\cos x \,\mathrm{d} x}{3 + 2\sin x \cos x}, \qquad I_2 = \int \frac{\sin x \,\mathrm{d} x}{3 + 2\sin x \cos x} .$$

则有

$$I_1 + I_2 = \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 + \sin x - \cos x}{2 - \sin x + \cos x} \right|,$$

$$I_1 - I_2 = \frac{1}{2} \arctan \frac{\sin x + \cos x}{2} .$$

所以有

$$I_1 = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 + \sin x - \cos x}{2 - \sin x + \cos x} \right| + \frac{1}{2} \arctan \frac{\sin x + \cos x}{2} ,$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \ln \left| \frac{2 + \sin x - \cos x}{2 - \sin x + \cos x} \right| - \frac{1}{2} \arctan \frac{\sin x + \cos x}{2} .$$

于是有

$$\begin{aligned} I &= 3 I_1 + 4 I_2 \\ &= \frac{7}{8} \ln \left| \frac{2 + \sin x - \cos x}{2 - \sin x + \cos x} \right| \\ &\quad + \frac{1}{2\ 2} \arctan \frac{\sin x + \cos x}{2} + C . \end{aligned}$$

更一般情形的积分如例 4 **所述** .

例 4 求 $I=\int \frac{a_1\cos x+b_1\sin x}{a+b\sin x\cos x}\mathrm{d}x \quad (b>0,2a+b>0,2a\neq b)$.

解 令

$$I_1=\int\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{a+b\sin x\cos x},\qquad I_1=\int\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{a+b\sin x\cos x}.$$

(1) 当 $2a<b$ 时,有

$$\begin{aligned}I_1+I_2&=\int\frac{\cos x+\sin x}{a+b\sin x\cos x}\mathrm{d}x=2\int\frac{\mathrm{d}(\sin x-\cos x)}{2a+b-b(\sin x-\cos x)^2}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{b(2a+b)}\ln\left|\frac{2a+b+b(\sin x-\cos x)}{2a+b-b(\sin x-\cos x)}\right|\\&=I(x),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_1-I_2&=\int\frac{\cos x-\sin x}{a+b\sin x\cos x}\mathrm{d}x=2\int\frac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{2a-b+b(\sin x+\cos x)^2}\\&=2\int\frac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{b(\sin x+\cos x)^2-(b-2a)}\\&=\frac{1}{b(b-2a)}\ln\left|\frac{b(\sin x+\cos x)-b-2a}{b(\sin x+\cos x)+b-2a}\right|\\&=J(x).\end{aligned}$$

立刻便有

$$I_1=\frac{1}{2}[I(x)+J(x)],$$

$$I_2=\frac{1}{2}[I(x)-J(x)].$$

所以有

$$I = a_1 I_1 + b_1 I_2 = \frac{1}{2}[(a_1 + b_1) I(x) + (a_1 - b_1) J(x)] + C .$$

(2)**当** $2a > b$ **时,由**(1)**的结论有**

$$I_1 + I_2 = I(x),$$

$$I_1 - I_2 = \int \frac{\cos x - \sin x}{a + b\sin x \cos x}\mathrm{d}x = 2\int \frac{\mathrm{d}(\sin x + \cos x)}{2a - b + b(\sin x + \cos x)^2}$$

$$= \frac{2}{b(2a - b)}\arctan \frac{b(\sin x + \cos x)}{2a - b} = K(x) .$$

所以有

$$I_1 = \frac{1}{2}[I(x) + K(x)],$$

$$I_2 = \frac{1}{2}[I(x) - K(x)] .$$

于是有

$$I = a_1 I_1 + b_1 I_2$$

$$= \frac{1}{2}[(a_1 + b_1) I(x) + (a_1 - b_1) K(x)] + C .$$

综上所述,得如下结果:

$$I = \begin{cases} \frac{1}{2}[(a_1 + b_1) I(x) + (a_1 - b_1) J(x)] + C & (2a < b), \\ \frac{1}{2}[(a_1 + b_1) I(x) + (a_1 - b_1) J(x)] + C & (2a > b), \end{cases}$$

其中

$$I(x) = \frac{1}{b(2a + b)}\ln\left|\frac{2a + b + b(\sin x - \cos x)}{2a + b - b(\sin x - \cos x)}\right|,$$

$$J(x) = \frac{1}{b(b - 2a)}\ln\left|\frac{b(\sin x + \cos x) - b - 2a}{b(\sin x + \cos x) + b - 2a}\right|,$$

$$K(x) = \frac{1}{b(2a - b)}\arctan \frac{b(\sin x + \cos x)}{2a - b}。$$

例 5 **求** $I = \int \frac{\cos^2 x}{1 + \sin x \cos x}\mathrm{d}x$.

解 **令** $J = \int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin x \cos x}\mathrm{d}x,$

则有

$$I+J=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x\cos x}=2\int\frac{\mathrm{d}x}{2+\sin 2x}$$

$$=-\frac{4}{3}\arctan\left[\frac{1}{3}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right],$$

$$I-J=\int\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)^2}{1+(\sin x+\cos x)^2}$$

$$=\ln|2+2\sin x\cos x|=\ln|1+\sin x\cos x|+\ln 2.$$

所以有

$$I=\frac{1}{2}\left[\ln|1+\sin x\cos x|-\frac{4}{3}\arctan\left[\frac{1}{3}\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right]\right]+C.$$

例 6 **求** $I=\int\frac{\cos^3 x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x$.

解 **令** $J=\int\frac{\sin^3 x\,\mathrm{d}x}{1+\sin x\cos x}$,

则有

$$I-J=\int\frac{\cos^3 x-\sin^3 x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x=\int(\cos x-\sin x)\mathrm{d}x$$

$$=\sin x+\cos x,$$

$$I+J=\int\frac{\cos^3 x+\sin^3 x}{1+\sin x\cos x}=\int\frac{(\cos x+\sin x)(1-\sin x\cos x)}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{1+(\sin x-\cos x)^2}{3-(\sin x-\cos x)^2}\mathrm{d}(\sin x-\cos x)$$

$$\xlongequal{\text{令}\sin x-\cos x=t}\int\frac{1+t^2}{3-t^2}\mathrm{d}t=\int\left(\frac{1}{3-t^2}+\frac{t^2}{3-t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$=\int\left(\frac{4}{3-t^2}-1\right)\mathrm{d}t=\frac{2}{3}\ln\left|\frac{3+t}{3-t}\right|-t$$

$$\xlongequal{\text{回代}\ t=\sin x-\cos x}\frac{2}{3}\ln\left|\frac{3+\sin x-\cos x}{3-\sin x+\cos x}\right|-\sin x+\cos x.$$

所以有

$$I=\frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}\ln\left|\frac{3+\sin x-\cos x}{3-\sin x+\cos x}\right|-\sin x+\cos x\right]$$

$$+\sin x+\cos x\Big)+C$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3+\sin x-\cos x}{3-\sin x+\cos x}\right|+\cos x+C.$$

分母含有 $a+b\sin x\cos x$ 的积分,是难度较大的一类积分,读者应具有一定的数学功底,才能使用组合积分法,顺利完成积分的运算。

习 题 1.4

求下列不定积分:

(1) $\int\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{2+\sin x\cos x}$;　　(2) $\int\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{2-\sin x\cos x}$;

(3) $\int\frac{2\sin x+3\cos x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x$;　　(4) $\int\frac{\sin x+\cos x}{1-\sin x\cos x}\mathrm{d}x$.

1.5 其他三角函数有理式的积分(1)

除了上述类型的三角函数有理式的积分可以使用组合积分法求解外,其他一些三角函数有理式的积分也可以使用组合积分法求解,只是有更多技巧性和更大的难度罢了。不过,只要肯做有心人,勤奋钻研,这种组合积分法的技巧是可以熟练掌握的。

1.5.1 含有 $b+a\tan x$ 的积分

对于分母含有 $b+a\tan x$ 的三角函数有理式的积分,可以使用组合积分法求解,先看一个简单的例子。

例 1 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\tan x}$.

解法 1 不妨令 $J=\int\frac{\tan x}{1+\tan x}\mathrm{d}x$,则

$$I+J=x,$$

$$I - J = \int \frac{1 - \tan x}{1 + \tan x} \mathrm{d} x = \int \tan \frac{\pi}{4} - x \ \mathrm{d} x$$

$$= \ln \left| \cos \frac{\pi}{4} - x \right| .$$

所以有 $$I = \frac{1}{2} \ x + \ln \left| \cos \frac{\pi}{4} - x \right| \ + C . \qquad (1)$$

解法 2　事实上,原积分可以化为 $I = \int \frac{\cos x}{\sin x + \cos x} \mathrm{d} x$**,由 1.1 节的结论可得**

$$I = \frac{1}{2} [x - \ln |\sin x + \cos x|] + C . \qquad (2)$$

式(1)**、式**(2)**两个结果都正确,由式**(1)**得**

$$I = \frac{1}{2} \ x + \ln \left| \cos \frac{\pi}{4} - x \right| \ + C$$

$$= \frac{1}{2} \ x + \ln \left| \frac{2}{2} \sin x + \frac{2}{2} \cos x \right| \ + C$$

$$= \frac{1}{2} \ x + \ln \frac{2}{2} + \ln |\sin x + \cos x| \ + C$$

$$= \frac{1}{2} \ x + \ln |\sin x + \cos x| \ + C' \quad C' = \frac{1}{2} \ln \frac{2}{2} + C \ .$$

式(1)**与式**(2)**只相差一个常数。**

解法 3　此题也可以用万能代换来求解。

令 $\tan x = u$**,则** $\mathrm{d} x = \frac{\mathrm{d} u}{1 + u^2}$**,于是**

$$I = \int \frac{\mathrm{d} x}{1 + \tan x} = \frac{1}{2} \int \ \frac{1}{1 + u} - \frac{1 - u}{1 + u^2} \ \mathrm{d} u$$

$$= \frac{1}{2} \ln |1 + u| - \frac{1}{4} \ln (1 + u^2) + \frac{1}{2} \arctan u + C$$

$$= \frac{1}{2} \ln |1 + \tan x| - \frac{1}{4} \ln (1 + \tan^2 x) + \frac{1}{2} \arctan (\tan x) + C$$

$$= \frac{1}{2} (x + \ln |\sin x + \cos x|) + C .$$

比较以上三种求法,还是直接使用组合积分法求解比较简单。特别是在情况比较复杂时,组合积分法的优势更明显。

例 2 　**求** $I=\int\frac{a_1+b_1\tan x}{b+a\tan x}\mathrm{d}x$.

解 　**如果此题使用代换** $\tan x=u, \mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2}$, **则**

$$I=\int\frac{a_1+b_1 u}{b+au}\frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} .$$

要求出以上有理函数的积分是很困难的,但用组合积分法,就方便多了。

令 $\qquad I_1=\int\frac{\mathrm{d}x}{b+a\tan x}, \qquad I_2=\int\frac{\tan x}{b+a\tan x}\mathrm{d}x,$

则 $$bI_1+aI_2=x,$$

$$aI_1-bI_2=\int\frac{a-b\tan x}{b+a\tan x}\mathrm{d}x=\int\frac{\frac{a}{b}-\tan x}{1+\frac{a}{b}\tan x}\mathrm{d}x$$

$$=\int\tan x \ \arctan\frac{a}{b}-x \ \mathrm{d}x$$

$$=\ln\left|\cos \ \arctan\frac{a}{b}-x \ \right| .$$

于是有 $$I_1=\frac{1}{a^2+b^2} \ bx+a\ln\left|\cos \ \arctan\frac{a}{b}-x \ \right| \ ,$$

$$I_2=\frac{1}{a^2+b^2} \ ax-b\ln\left|\cos \ \arctan\frac{a}{b}-x \ \right| \ .$$

所以有

$$I=a_1I_1+b_1I_2$$

$$=\frac{ba_1+ab_1}{a^2+b^2}x+\frac{aa_1-bb_1}{a^2+b^2}\ln\left|\cos \ \arctan\frac{a}{b}-x \ \right|+C .$$

此题也可以将原积分化为

$$I=\int\frac{a_1\cos x+b_1\sin x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x,$$

然后由 1.1 **节例** 1 **可以立刻求出,这里从略。**

例 3 　**求** $I=\int\frac{a_1+b_1\tan^2 x}{(b+a\tan x)^2}\mathrm{d}x$.

解　此题将原积分可以化为

$$I=\int\frac{a_1\cos^2 x+b_1\sin^2 x}{(a\sin x+b\cos x)^2}\mathrm{d}x,$$

然后由 1.2 **节的例** 2 **可得** .

令
$$I_1=\int\frac{\sin^2 x}{(a\sin x+b\cos x)^2}\mathrm{d}x,$$
$$I_2=\int\frac{\cos^2 x}{(a\sin x+b\cos x)^2}\mathrm{d}x,$$

则有
$$I_1+I_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^2}$$
$$=\frac{1}{a^2+b^2}\frac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x},$$
$$a^2I_1-b^2I_2=\int\frac{a\sin x-b\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}x-\frac{2ab}{a^2+b^2}\ln|a\sin x+b\cos x|.$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{(a^2+b^2)^2}\left[\frac{b^3\sin x-ab^2\cos x}{a\sin x+b\cos x}+(a^2-b^2)x\right.$$
$$\left.-2ab\ln|a\sin x+b\cos x|\right],$$
$$I_2=\frac{1}{(a^2+b^2)^2}\left[\frac{a^2b\sin x-a^3\cos x}{a\sin x+b\cos x}-(a^2-b^2)x\right.$$
$$\left.+2ab\ln|a\sin x+b\cos x|\right].$$

于是有　$I=a_1I_1+b_1I_2$

$$=\frac{b^2a_1+a^2b_1}{(a^2+b^2)^2}\frac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x}+\frac{(a^2-b^2)(a_1-b_1)}{(a^2+b^2)^2}x$$
$$+\frac{2ab(b_1-a_1)}{(a^2+b^2)^2}\ln|a\sin x+b\cos x|+C.$$

1.5.2　含有 $a\tan x+b\cot x$ 的积分

对于分母含有 $a\tan x+b\cot x$ **的三角函数有理式的积分**,**应**

用组合积分法求解更简单。

例 4 求 $I=\int\frac{\tan x}{\tan x+\cot x}\mathrm{d}x$.

解 令
$$J=\int\frac{\cot x}{\tan x+\cot x}\mathrm{d}x,$$
则有
$$I+J=\int\mathrm{d}x=x,$$
$$I-J=\int\frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}\mathrm{d}x=-\int\frac{\mathrm{d}(\sin x+\cos x)}{\sin x+\cos x}$$
$$=-\ln|\sin x+\cos x| .$$
所以有
$$I=\frac{1}{2}(x-\ln|\sin x+\cos x|)+C .$$

对于下面比较复杂的情况,使用组合积分法效果更好。

例 5 求 $I=\int\frac{a_1\tan x+b_1\cot x}{a\tan x+b\cot x}\mathrm{d}x \quad (ab>0)$.

解 令
$$I_1=\int\frac{\tan x}{a\tan x+b\cot x}\mathrm{d}x,$$
$$I_2=\int\frac{\cot x}{a\tan x+b\cot x}\mathrm{d}x,$$
则
$$aI_1+bI_2=x,$$
$$I_1+I_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin^2 x+b\cos^2 x}=\frac{1}{ab}\arctan\quad\frac{a}{b}\tan x \quad ,$$
所以有
$$I_1=\frac{1}{a-b}\quad x-\frac{1}{ab}\arctan\quad\frac{a}{b}\tan x \quad ,$$
$$I_2=\frac{1}{b-a}\quad x-\frac{1}{ab}\arctan\quad\frac{a}{b}\tan x \quad 。$$
于是有
$$I=a_1 I_1+b_1 I_1$$
$$=\frac{a_1-b_1}{a-b}x+\frac{b_1-a_1}{ab(a-b)}\arctan\quad\frac{a}{b}\tan x \quad +C .$$

例 6 求 $\int\frac{a_1\tan^2 x+b_1\cot^2 x}{a\tan x+b\cot x}\mathrm{d}x$.

解　令

$$I_1=\int\frac{\tan^2 x}{a\tan x+b\cot x}\mathrm{d}x,$$

$$I_2=\int\frac{\cot^2 x}{a\tan x+b\cot x}\mathrm{d}x,$$

则

$$a^2I_1-b^2I_2=\int(a\tan x-b\cot x)\mathrm{d}x$$
$$=-a\ln|\cos x|-b\ln|\sin x|,$$

$$a^2I_1+b^2I_2=\int\frac{(a\tan x+b\cot x)^2-2ab}{a\tan x+b\cot x}\mathrm{d}x$$
$$=\int(a\tan x+b\cot x)\mathrm{d}x-2ab\int\frac{\mathrm{d}x}{a\tan x+b\cot x}$$
$$=-a\ln|\cos x|+b\ln|\sin x|$$
$$-2ab\int\frac{\sin x\cos x}{a\sin^2 x+b\cos^2 x}\mathrm{d}x$$
$$=-a\ln|\cos x|+b\ln|\sin x|$$
$$-\frac{ab}{a-b}\ln|a\sin^2 x+b\cos^2 x|.$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{2a^2}\quad-2a\ln|\cos x|-\frac{ab}{a-b}\ln|a\sin^2 x+b\cos^2 x|\quad,$$

$$I_2=\frac{1}{2b^2}\quad2b\ln|\sin x|-\frac{ab}{a-b}\ln|a\sin^2 x+b\cos^2 x|\quad。$$

于是有

$$I=a_1I_1+b_1I_2$$
$$=-\frac{a_1}{a}\ln|\cos x|+\frac{b_1}{b}\ln|\sin x|$$
$$-\frac{b^2a_1+a^2b_1}{2ab(a-b)}\ln|a\sin^2 x+b\cos^2 x|+C.$$

例 7　**求** $I=\int\frac{a_1\tan x+b_1\cot x}{(a\tan x+b\cot x)(b\tan x+a\cot x)}\mathrm{d}x$.

解　令　$I_1=\int\frac{\tan x\,\mathrm{d}x}{(a\tan x+b\cot x)(b\tan x+a\cot x)},$

$$I_2 = \int \frac{\cot x \, \mathrm{d} x}{(a\tan x + b\cot x)(b\tan x + a\cot x)},$$

则 $aI_1 + bI_2 = \int \dfrac{\mathrm{d} x}{b\tan x + a\cot x} = \dfrac{1}{2(b - a)} \ln|b\sin^2 x + a\cos^2 x|,$

$$bI_1 + aI_2 = \int \frac{\mathrm{d} x}{a\tan x + b\cot x} = \frac{1}{2(a - b)} \ln|a\sin^2 x + b\cos^2 x|,$$

所以有
$$I_1 = \frac{1}{a^2 - b^2} \quad \frac{a}{2(b - a)} \ln|b\sin^2 x + a\cos^2 x|$$
$$- \frac{b}{2(a - b)} \ln|a\sin^2 x + b\cos^2 x| \quad ,$$
$$I_2 = \frac{1}{b^2 - a^2} \quad \frac{b}{2(b - a)} \ln|b\sin^2 x + a\cos^2 x|$$
$$- \frac{a}{2(a - b)} \ln|a\sin^2 x + b\cos^2 x| \quad .$$

于是有
$$I = a_1 I_1 + b_1 I_2$$
$$= \frac{bb_1 - aa_1}{2(a - b)^2(a + b)} \ln|b\sin^2 x + a\cos^2 x|$$
$$+ \frac{ab_1 - ba_1}{2(a - b)^2(a + b)} \ln|a\sin^2 x + b\cos^2 x| + C.$$

1.5.3 含有 $a\sec x + b\csc x$ 的积分

对于分母含有 $a\sec x + b\csc x$ 的三角函数有理式的积分,可以巧妙地使用组合积分法求解,得到令人满意的结果。

例 8 **求** $I = \int \dfrac{a_1 \sec x + b_1 \csc x}{a\sec x + b\csc x} \mathrm{d} x$.

解 **令** $I_1 = \int \dfrac{\sec x \, \mathrm{d} x}{a\sec x + b\csc x}$, $\quad I_2 = \int \dfrac{\csc x \, \mathrm{d} x}{a\sec x + b\csc x}$,

则
$$a_I 1 + bI_2 = x,$$

$$-bI_1 + aI_2 = \int \frac{-b\sin x + a\cos x}{a\sin x + b\cos x} \mathrm{d} x = \int \frac{\mathrm{d}(a\sin x + b\cos x)}{a\sin x + b\cos x}$$
$$= \ln|a\sin x + b\cos x|.$$

所以有
$$I_1 = \frac{1}{a^2 + b^2} [ax - b\ln|a\sin x + b\cos x|],$$

$$I_2=\frac{1}{a^2+b^2}[bx+a\ln|a\sin x+b\cos x|],$$

于是有

$$\begin{aligned}I&=a_1I_1+b_1I_2\\&=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}x+\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2}\ln|a\sin x+b\cos x|+C.\end{aligned}$$

例 9 **求** $I=\int\frac{a_1\sec^2x+b_1\csc^2x}{(a\sec x+b\csc x)(b\sec x+a\csc x)}\mathrm{d}x$.

解 **令** $I_1=\int\frac{\sec^2x\,\mathrm{d}x}{(a\sec x+b\csc x)(b\sec x+a\csc x)}$,

$$I_2=\int\frac{\csc^2x\,\mathrm{d}x}{(a\sec x+b\csc x)(b\sec x+a\csc x)},$$

则 $a^2I_1-b^2I_2=\int\frac{a\sec x-b\csc x}{b\sec x+a\csc x}\mathrm{d}x=\int\frac{a\sin x-b\cos x}{b\sin x+a\cos x}\mathrm{d}x$

$$=-\int\frac{\mathrm{d}(b\sin x+a\cos x)}{b\sin x+a\cos x}=-\ln|b\sin x+a\cos x|,$$

$$b^2I_1-a^2I_2=\int\frac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x}\mathrm{d}x=-\int\frac{\mathrm{d}(a\sin x+b\cos x)}{a\sin x+b\cos x}$$

$$=-\ln|a\sin x+b\cos x|.$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{a^4-b^4}[b^2\ln|a\sin x+b\cos x|-a^2\ln|b\sin x+a\cos x|],$$

$$I_2=\frac{1}{a^4-b^4}[a^2\ln|a\sin x+b\cos x|-b^2\ln|b\sin x+a\cos x|].$$

于是有 $I=a_1I_1+b_1I_2$

$$\begin{aligned}&=\frac{b^2a_1+a^2b_1}{a^4-b^4}\ln|a\sin x+b\cos x|\\&\quad-\frac{a^2a_1+b^2b_1}{a^4-b^4}\ln|b\sin x+a\cos x|+C.\end{aligned}$$

例 10 **求** $\int\frac{\sec^2x}{a^2\sec^2x+b^2\csc^2x}\mathrm{d}x\quad(|a|\neq|b|)$.

解　令
$$I=\int\frac{\sec^2 x}{a^2\sec^2 x+b^2\csc^2 x}\mathrm{d}x,$$
$$J=\int\frac{\csc^2 x}{a^2\sec^2 x+b^2\csc^2 x}\mathrm{d}x,$$

则
$$a^2 I+b^2 J=x,$$
$$I+J=\int\frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x+b^2\cos^2 x}=\frac{1}{ab}\arctan\frac{a\tan x}{b}.$$

所以有
$$I=\frac{1}{a^2-b^2}\quad x-\frac{b}{a}\arctan\frac{a\tan x}{b}\quad+C.$$

习　题　1.5

1. **用多种方法求下列不定积分**:

(1) $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\cot x}$;　　(2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\tan x+\cot x}$;

(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sec x+\csc x}$;　　(4) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\sec^2 x+\csc^2 x}$。

2. **求下列不定积分**:

(1) $\int\frac{b\tan x+a\cot x}{a\tan x+b\cot x}\mathrm{d}x$;　　(2) $\int\frac{\mathrm{d}x}{a+b\cot x}$;

(3) $\int\frac{b\sec x+a\csc x}{a\sec x+b\csc x}\mathrm{d}x$;　　(4) $\int\frac{2+3\tan x}{3+2\tan x}\mathrm{d}x$;

(5) $\int\frac{a\tan x+b\cot x}{a\tan x-b\cot x}\mathrm{d}x$;　　(6) $\int\frac{2\tan x+3\cot x}{3\tan x+2\cot x}\mathrm{d}x$.

1.6　其他三角函数有理式的积分(2)

在 1.5 节,我们对分母含有 $b+a\tan x$, $a\tan x+b\cot x$ **和** $a\sec x+b\csc x$ **的有理式的积分求解问题进行了讨论,得到了一些重要结论。本节将对分母含有** $b+a\sec x$, $b+a\csc x$, $a\sec x+b\tan x$**的有理式的积分求解问题进行讨论。**

1.6.1 含有 $b+a\sec x$ 的积分

例 1 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{3+2\sec x}$.

解 原积分可化为

$$I=\int\frac{\cos x}{3\cos x+2}\mathrm{d}x .$$

令 $$J=\int\frac{\cos x}{2-3\cos x}\mathrm{d}x,$$

则有
$$I+J=\int\frac{4\cos x\,\mathrm{d}x}{4-9\cos^2 x}=4\int\frac{\mathrm{d}\sin x}{-5+9\sin^2 x}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{4}{3}\int\frac{\mathrm{d}(3\sin x)}{9\sin^2 x-5}=\frac{2}{3\ 5}\ln\left|\frac{3\sin x-\ 5}{3\sin x+\ 5}\right|,$$

$$I-J=-6\int\frac{\cos^2 x\,\mathrm{d}x}{4-9\cos^2 x}=-\frac{8}{3}\int\frac{\mathrm{d}x}{4-9\cos^2 x}+\frac{2}{3}\int\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{8}{3}\int\frac{1}{4\sec^2 x-9}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}+\frac{2}{3}x$$
$$=-\frac{8}{3}\int\frac{\mathrm{d}\tan x}{4\tan^2 x-5}+\frac{2}{3}x$$
$$=\frac{4}{3}\int\frac{\mathrm{d}\,2\tan x}{4\tan^2 x-5}+\frac{2}{3}x$$
$$=-\frac{2}{3\ 5}\ln\left|\frac{2\tan x-\ 5}{2\tan x+\ 5}\right|+\frac{2}{3}x .$$

所以有

$$I=\frac{1}{2}\quad\frac{2}{3\ \ 5}\ln\left|\frac{3\sin x-\ 5}{3\sin x+\ 5}\right|$$
$$-\frac{2}{3\ \ 5}\ln\left|\frac{2\tan-\ 5}{2\tan+\ 5}\right|+\frac{2}{3}x\quad+C$$
$$=\frac{1}{3\ \ 5}\ln\left|\frac{(3\sin x-\ 5)(2\tan x+\ 5)}{(3\sin x+\ 5)(2\tan x-\ 5)}\right|+\frac{1}{3}x+C .$$

一般情形的积分如例 2 **所述** .

例 2　求 $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{b+a\sec x}$　$(|a|<|b|)$.

解　**原积分可变为**

$$I=\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{a+b\cos x},$$

再令

$$J=\int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{a-b\cos x},$$

则有

$$I+J=\int \frac{2a\cos x\,\mathrm{d}x}{a^2-b^2\cos^2 x}=2a\int \frac{\mathrm{d}\sin x}{a^2-b^2+b^2\sin^2 x}$$

$$=\frac{2a}{b}\int \frac{\mathrm{d}(b\sin x)}{a^2-b^2+b^2\sin^2 x}=\frac{2a}{b\quad a^2-b^2}\arctan\frac{b\sin x}{a^2-b^2},$$

$$I-J=\int \frac{-2b\cos^2 x}{a^2-b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x=\frac{2}{b}\int \frac{(a^2-b^2\cos^2 x)-a^2}{a^2-b^2\cos^2 x}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{b}\int \mathrm{d}x-\frac{2a^2}{b}\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2-b^2\cos^2 x}$$

$$=\frac{2}{b}x-\frac{2a^2}{b}\int \frac{1}{a^2\sec^2 x-b^2}\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{2}{b}x-\frac{2a^2}{b}\int \frac{\mathrm{d}\tan x}{a^2-b^2+a^2\tan^2 x}$$

$$=\frac{2}{b}x-\frac{2a}{b}\int \frac{\mathrm{d}\,a\tan x}{a^2-b^2+a^2\tan^2 x}$$

$$=\frac{2}{b}x-\frac{2a}{b\quad a^2-b^2}\arctan\frac{a\tan x}{a^2-b^2}.$$

所以有

$$I=\frac{1}{b}x+\frac{a}{b\quad a^2-b^2}\left(\arctan\frac{b\sin x}{a^2-b^2}-\arctan\frac{a\tan x}{a^2-b^2}\right)+C$$

$$=\frac{1}{b}x+\frac{a}{b\quad a^2-b^2}\arctan\frac{a^2-b^2\sin x}{-a\cos x-b}+C.$$

例 3　求 $I=\int \frac{\cos x}{b+a\sec x}\mathrm{d}x$.

解　**原积分可变为**

$$I = \int \frac{\cos^2 x}{a + b\cos x} \mathrm{d}x,$$

再令 $$J = \int \frac{\mathrm{d}x}{a + b\cos x} \ (\text{此积分查表可知}),$$

于是有

$$a^2 J - b^2 I = \int (a - b\cos x)\mathrm{d}x = ax - b\sin x,$$

所以有 $$I = \frac{1}{b^2}(a^2 J - ax + b\sin x) + C.$$

1.6.2 含有 $b + a\csc x$ 的积分

先讨论一个系数比较简单的例子。

例 4 求 $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{2 + 3\csc x}$.

解 原积分可变为

$$I = \int \frac{\sin x}{3 + 2\sin x} \mathrm{d}x,$$

再令 $$J = \int \frac{\sin x}{3 - 2\sin x} \mathrm{d}x,$$

则有 $$I + J = 6\int \frac{\sin x}{9 - 4\sin^2 x} \mathrm{d}x = -6\int \frac{\mathrm{d}(\cos x)}{5 + 4\cos^2 x}$$

$$= -3\int \frac{\mathrm{d}(2\cos x)}{5 + 4\cos^2 x} = -\frac{3}{5}\arctan\frac{2\cos x}{5},$$

$$I - J = -\int \frac{4\sin^2 x}{9 - 4\sin^2 x} \mathrm{d}x = -\int \frac{9 - (9 - 4\sin^2 x)}{9 - 4\sin^2 x} \mathrm{d}x$$

$$= -9\int \frac{\mathrm{d}x}{9 - 4\sin^2 x} + \int \mathrm{d}x = -9\int \frac{1}{9\csc^2 x - 4} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} + x$$

$$= 9\int \frac{\mathrm{d}(\cot x)}{9\cot^2 x + 5} + x = 3\int \frac{\mathrm{d}(3\cot x)}{9\cot^2 x + 5} + x$$

$$= \frac{3}{5}\arctan\frac{3\cot x}{5} + x.$$

所以有

$$I = \frac{1}{2}\quad -\frac{3}{5}\arctan\frac{2\cos x}{5} + \frac{3}{5}\arctan\frac{3\cot x}{5} + x \quad + C$$

$$= \frac{3}{5}\arctan\frac{5\cos x}{3\sin x + 2} + x + C .$$

一般情形的积分如例 5 **所述** .

例 5 **求** $\int \frac{\mathrm{d}x}{b + a\csc x}$ $(b^2 > a^2)$.

解 **原积分可变为**

$$I = \int \frac{\sin x}{a + b\sin x}\mathrm{d}x ,$$

再令

$$J = \int \frac{\sin x}{a - b\sin x}\mathrm{d}x ,$$

则有

$$I + J = \int \frac{2a\sin x}{a^2 - b^2\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\frac{1}{b}\int \frac{2a\mathrm{d}(b\cos x)}{a^2 - b^2 + b^2\cos^2 x}$$

$$= \frac{2a}{b}\int \frac{\mathrm{d}(b\cos x)}{(b^2 - a^2) - b^2\cos^2 x} \quad (a^2 < b^2)$$

$$= \frac{a}{b}\frac{1}{b^2 - a^2}\ln\left|\frac{b^2 - a^2 + b\cos x}{b^2 - a^2 - b\cos x}\right| ,$$

$$I - J = -\int \frac{2b\sin^2 x}{a^2 - b^2\sin^2 x}\mathrm{d}x = -\frac{2}{b}\int \frac{a^2 - a^2 + b^2\sin^2 x}{a^2 - b^2\sin^2 x}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{2a^2}{b}\int \frac{\mathrm{d}x}{a^2 - b^2\sin^2 x} + \frac{2}{b}\int \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{2a^2}{b}\int \frac{\mathrm{d}\cot x}{b^2 - a^2 - a^2\cot^2 x} + \frac{2}{b}x$$

$$= -\frac{2a}{b}\int \frac{\mathrm{d}(a\cot x)}{b^2 - a^2 - a^2\cot^2 x} + \frac{2}{b}x$$

$$= -\frac{a}{b\quad b^2 - a^2}\ln\left|\frac{b^2 - a^2 + a\cot x}{b^2 - a^2 - a\cot x}\right| + \frac{2}{b}x .$$

所以有

$$I = \frac{1}{2}\quad -\frac{a}{b\quad b^2 - a^2}\ln\left|\frac{b^2 - a^2 + a\cot x}{b^2 - a^2 - a\cot x}\right| + \frac{2}{b}x$$

$$+\frac{a}{b\quad b^2 - a^2}\ln\left|\frac{b^2 - a^2 + b\cot x}{b^2 - a^2 - b\cot x}\right| \quad + C .$$

1.6.3 含有 $a\sec x + b\tan x$ 的积分

对于分母含有 $a\sec x + b\tan x$ **的有理式的积分,使用组合积分法极为方便,这里很容易得到下列积分公式:**

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{a\sec x + b\tan x} = \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{a + b\sin x} = \frac{1}{b}\ln|a + b\sin x| + C. \tag{*}$$

例 6 **求** $I = \int \frac{b\sec x + a\tan x}{a\sec x + b\tan x}\mathrm{d}x \quad (a^2 > b^2)$。

解 **令**

$$I_1 = \int \frac{\sec x}{a\sec x + b\tan x}\mathrm{d}x,$$

$$I_2 = \int \frac{\tan x}{a\sec x + b\tan x}\mathrm{d}x.$$

则有

$$aI_1 + bI_2 = x.$$

而

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{a + b\sin x}$$

$$= -\frac{1}{a^2 - b^2}\arctan \frac{a-b}{a+b}\tan \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2},$$

所以有

$$I_2 = \frac{1}{b}[x - aI_1]$$

$$= \frac{1}{b} \quad x + \frac{a}{a^2 - b^2}\arctan \frac{a-b}{a+b}\tan \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}.$$

于是有

$$I = bI_1 + aI_2$$

$$= \frac{1}{b} \quad a^2 - b^2\arctan \frac{a-b}{a+b}\tan \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} + \frac{a}{b}x + C.$$

例 7 **求** $I = \int \frac{b\sec^2 x + a\tan^2 x}{a\sec x + b\tan x}\mathrm{d}x$.

解 **令**

$$I_1=\int\frac{\sec^2 x\,\mathrm{d}x}{a\sec x+b\tan x},\qquad I_2=\int\frac{\tan^2 x\,\mathrm{d}x}{a\sec x+b\tan x},$$

则有

$$I_1-I_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sec x+b\tan x}=\frac{1}{b}\ln|a+b\sin x|,$$

$$a^2I_1-b^2I_2=\int(a\sec x-b\tan x)\mathrm{d}x$$
$$=a\ln|\sec x+\tan x|+b\ln|\cos x|.$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{a^2-b^2}[a\ln|\sec x+\tan x|+b\ln|\cos x|-b\ln|a+b\sin x|],$$

$$I_2=\frac{1}{a^2-b^2}[a\ln|\sec x+\tan x|+b\ln|\cos x|-\frac{a^2}{b}\ln|a+b\sin x|].$$

于是有

$$I=bI_1+aI_2$$
$$=\frac{ba+a^2}{a^2-b^2}\ln|\sec x+\tan x|-\frac{a^3+b^3}{b}\ln|a+b\sin x|$$
$$+\frac{b^2+ab}{a^2-b^2}\ln|\cos x|+C.$$

以上主要讨论了应用组合积分法求三角函数有理式的积分,涵盖 6 种三角函数,只是讨论了一些较简单的三角函数有理式的情形,事实上,还可以讨论更复杂的情形。只要通过对一些较复杂的三角函数有理式积分的讨论,掌握了组合积分法的思维方法,再难的三角函数有理式的积分也会顺利地求出,这里不一一赘述了。

习　题　1.6

求下列有理式的不定积分:

(1) $\int\frac{2\sec x+3\tan x}{3\sec x+2\tan x}\mathrm{d}x$;　　(2) $\int\frac{2\sec^2 x+3\tan^2 x}{3\sec x+2\tan x}\mathrm{d}x$;

(3) $\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sec x+3}$;　　(4) $\int\frac{\mathrm{d}x}{2\sec x+1}$;

(5) $\int\frac{\mathrm{d}x}{\csc x+4}$;　　(6) $\int\frac{\mathrm{d}x}{2\csc x+1}$.

1.7 含有正弦型和余弦型函数的积分

下面来定义与三角函数有紧密联系的一类函数,即正弦型函数和余弦型函数。

定义 1 函数 $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$定义为正弦型函数,记为 $\sin[x]$;而函数 $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)$定义为余弦型函数,记为 $\cos[x]$.

$$\sin[x]=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x),$$

$$\cos[x]=\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}(\cos x-\sin x).$$

显然上述函数具有与三角函数的类似的性质,即

$$\sin^2[x]+\cos^2[x]=1,$$

$$\sin^2[x]-\cos^2[x]=\sin 2x.$$

同样,有正切型函数

$$\tan[x]=\frac{\sin[x]}{\cos[x]}=\tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin x+\cos x}{\cos x-\sin x}.$$

正弦型函数和余弦型函数的定义域是整个数轴,而值域为 $[-1,1]$.但函数奇偶性有区别,正弦型函数和余弦型函数为非奇非偶函数。它们的图像为正弦型曲线。

更重要的是它们具有如下的凑微分公式.因为

$$(\sin[x])'=\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)=\cos[x],$$

而
$$(\cos[x])'=\frac{1}{2}(-\sin x-\cos x)$$

$$=-\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)=-\sin[x]。$$

所以有

$$(\cos[x]-\sin[x])\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sin[x]+\cos[x]),$$

$$(\sin[x]+\cos[x])\mathrm{d}x=\mathrm{d}(\sin[x]-\cos[x]).$$

这样,为使用组合积分法求分母含有正弦型函数和余弦型函数的有理式的积分打下了基础。以下专题讨论这类有理式的积分问题。

1.7.1 含有 $a\sin[x]+b\cos[x]$的积分

例 1 求 $I=\int\frac{\cos[x]\mathrm{d}x}{2\sin[x]+3\cos[x]}$.

解 令

$$J=\int\frac{\sin[x]\mathrm{d}x}{2\sin[x]+3\cos[x]},$$

则有

$$3I+2J=\int\frac{3\cos[x]+2\sin[x]}{2\sin[x]+3\cos[x]}\mathrm{d}x=x,$$

$$2I-3J=\int\frac{2\cos[x]-3\sin[x]}{2\sin[x]+3\cos[x]}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(2\sin[x]+3\cos[x])}{2\sin[x]+3\cos[x]}$$

$$=\ln|2\sin[x]+3\cos[x]|.$$

所以有

$$I=\frac{1}{13}[3x+2\ln|2\sin[x]+3\cos[x]|]+C.$$

一般情形的积分如例 2 所述.

例 2 求 $I=\int\frac{b\sin[x]+a\cos[x]}{a\sin[x]+b\cos[x]}\mathrm{d}x$.

解 令

$$I_1=\int\frac{\sin[x]}{a\sin[x]+b\cos[x]}\mathrm{d}x,\quad I_2=\int\frac{\cos[x]}{a\sin[x]+b\cos[x]}\mathrm{d}x,$$

则有

$$aI_1+bI_2=x,$$

$$aI_2-bI_1=\int\frac{a\cos[x]-b\sin[x]}{a\sin[x]+b\cos[x]}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\mathrm{d}(a\sin[x]+b\cos[x])}{a\sin[x]+b\cos[x]}$$

$$=\ln|a\sin[x]+b\cos[x]|.$$

所以有

$$I_1 = \frac{1}{a^2 + b^2}[ax - b\ln|a\sin[x] + b\cos[x]|],$$

$$I_2 = \frac{1}{a^2 + b^2}[bx + a\ln|a\sin[x] + b\cos[x]|].$$

于是有 $I = bI_1 + aI_2$

$$= \frac{2ab}{a^2 + b^2}x + \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}\ln|a\sin[x] + b\cos[x]| + C.$$

更一般情形的积分如例 3 **所述**.

例 3 **求** $I = \int \frac{a_1\sin[x] + b_1\cos[x]}{a\sin[x] + b\cos[x]}\mathrm{d}x$.

解 **由例** 2 **的结论立刻便有**

$$I = \frac{aa_1 + bb_1}{a^2 + b^2}x - \frac{ba_1 - ab_1}{a^2 + b^2}\ln|a\sin[x] + b\cos[x]| + C.$$

例 4 **求** $I = \int \frac{(2 - 3)\sin x + (2 + 3)\cos x}{(2 + 3)\sin x + (2 - 3)\cos x}\mathrm{d}x$.

解 **此题可以直接使用组合积分法或使用** 1.1 **节的公式求解,这里使用正弦型和余弦型函数有理式的积分更方便。**

原积分可变为

$$I = \int \frac{2\times\frac{1}{2}(\sin x + \cos x) - 3\times\frac{1}{2}(\sin x - \cos x)}{2\times\frac{1}{2}(\sin x + \cos x) + 3\times\frac{1}{2}(\sin x - \cos x)}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{2\sin[x] - 3\cos[x]}{2\sin[x] + 3\cos[x]}\mathrm{d}x.$$

再令

$$I_1 = \int \frac{\sin[x]\mathrm{d}x}{2\sin[x] + 3\cos[x]}, \quad I_2 = \int \frac{\cos[x]\mathrm{d}x}{2\sin[x] + 3\cos[x]},$$

则有 $2I_1 + 3I_2 = x$,

$$-3I_1 + 2I_2 = \int \frac{2\cos[x] - 3\sin[x]}{2\sin[x] + 3\cos[x]}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{d(2\sin[x] + 3\cos[x])}{2\sin[x] + 3\cos[x]}$$
$$= \ln|2\sin[x] + 3\cos[x]| .$$

所以有

$$I_1 = \frac{1}{7}[2x - 3\ln|2\sin[x] + 3\cos[x]|,$$

$$I_2 = \frac{1}{7}[3x + 2\ln|2\sin[x] + 3\cos[x]| .$$

于是有

$$I = 2I_1 - 3I_2$$
$$= \frac{1}{7}x - \frac{4 \quad 3}{7}\ln|2\sin[x] + 3\cos[x]| + C .$$

例 5　求 $I = \int \frac{\cos^2[x]\,dx}{a\sin[x] + b\cos[x]}$.

解　令　$J = \int \frac{\sin^2[x]}{a\sin[x] + b\cos[x]}dx$,

则有　$I + J = \int \frac{dx}{a\sin[x] + b\cos[x]}$

$$= 2\int \frac{dx}{(a - b)\sin[x] + (a + b)\cos[x]},$$

$$= \frac{1}{2(a^2 + b^2)}\ln \tan \frac{x + \arctan \frac{a - b}{a + b}}{2} ,$$

$$b^2 I - a^2 J = \int (b\cos[x] - a\sin[x])dx = b\sin[x] + a\cos[x] .$$

所以有

$$I = \frac{1}{a^2 + b^2} \quad \frac{a^2}{2(a^2 + b^2)}\ln \tan \frac{x + \arctan \frac{a - b}{a + b}}{2}$$

$$+ b\sin[x] + a\cos[x] \quad + C .$$

1.7.2 含有 $a+b\sin[x]\cos[x]$的积分

对于分母含有 $a+b\sin[x]\cos[x]$的有理式的积分也可以使用组合积分法,得到与 1.4 节类似的结论,先看一个简单的例子。

例 6 求 $I=\int\frac{\cos[x]\mathrm{d}x}{1+\sin[x]\cos[x]}$.

解 令
$$J=\int\frac{\sin[x]\mathrm{d}x}{1+\sin[x]\cos[x]},$$
则有
$$I+J=\int\frac{\cos[x]+\sin[x]}{1+\sin[x]\cos[x]}\mathrm{d}x=2\int\frac{\mathrm{d}(\sin[x]-\cos[x])}{3-(\sin[x]-\cos[x])^2}$$
$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3+\sin[x]-\cos[x]}{3-\sin[x]+\cos[x]}\right|,$$
$$I-J=\int\frac{\cos[x]-\sin[x]}{1+\sin[x]\cos[x]}\mathrm{d}x=2\int\frac{\mathrm{d}(\sin[x]+\cos[x])}{1+(\sin[x]+\cos[x])^2}$$
$$=2\arctan(\sin[x]+\cos[x]).$$
所以有
$$I=\frac{1}{2}\quad\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3+\sin[x]-\cos[x]}{3-\sin[x]+\cos[x]}\right|$$
$$+2\arctan(\sin[x]+\cos[x])\quad+C.$$

例 7 求 $I=\int\frac{a_1\cos[x]+b_1\sin[x]}{a+b\sin[x]\cos[x]}\mathrm{d}x\quad(b>0,2a+b>0)$.

解 令
$$I_1=\int\frac{\cos[x]\mathrm{d}x}{a+b\sin[x]\cos[x]},\quad I_2=\int\frac{\sin[x]\mathrm{d}x}{a+b\sin[x]\cos[x]},$$
(1) 当 $2a<b$ 时,有
$$I_1+I_2=\int\frac{\cos[x]+\sin[x]}{a+\sin[x]\cos[x]}\mathrm{d}x$$
$$=2\int\frac{\mathrm{d}(\sin[x]-\cos[x])}{2a+b-b(\sin[x]-\cos[x])^2}$$
$$=\frac{1}{b(2a+b)}\ln\left|\frac{2a+b+\quad b(\sin[x]-\cos[x])}{2a+b-\quad b(\sin[x]-\cos[x])}\right|$$

$$= I(x),$$

$$I_1 - I_2 = 2\int \frac{\mathrm{d}(\sin[x] + \cos[x])}{2a - b + b(\sin[x] + \cos[x])^2}\mathrm{d}x$$

$$= 2\int \frac{\mathrm{d}(\sin[x] + \cos[x])}{b(\sin[x] + \cos[x])^2 - (b - 2a)}$$

$$= \frac{1}{b(b - 2a)}\ln\left|\frac{b(\sin[x] + \cos[x]) - \quad b - 2a}{b(\sin[x] + \cos[x]) + \quad b - 2a}\right|$$

$$= J(x).$$

所以有

$$I_1 = \frac{1}{2}[I(x) + J(x)],$$

$$I_2 = \frac{1}{2}[I(x) - J(x)].$$

于是有

$$I = a_1 I_1 + b_1 I_2$$

$$= \frac{1}{2}[(a_1 + b_1)I(x) + (a_1 - b_1)J(x)] + C.$$

(2) **当** $2a > b$ **时,有**

$$I_1 + I_2 = I(x)$$

$$I_1 - I_2 = 2\int \frac{\mathrm{d}(\sin[x] + \cos[x])}{2a - b + b(\sin[x] + \cos[x])^2}$$

$$= \frac{2}{b}\int \frac{\mathrm{d}\quad b(\sin[x] + \cos[x])}{(\quad 2a - b)^2 + [\quad b(\sin[x] + \cos[x])]^2}$$

$$= \frac{2}{b(2a - b)}\arctan\frac{b(\sin[x] + \cos[x])}{2a - b} = K(x).$$

所以有

$$I_1 = \frac{1}{2}[I(x) + K(x)],$$

$$I_2 = \frac{1}{2}[I(x) - K(x)].$$

于是有

$$I = a_1 I_1 + b_1 I_2$$

$$= \frac{1}{2}[(a_1 + b_1)I(x) + (a_1 - b_1)K(x)] + C.$$

综上所述有

$$I=\begin{cases}\frac{1}{2}[(a_1+b_1)I(x)+(a_1-b_1)J(x)]+C & (2a<b),\\ \frac{1}{2}[(a_1+b_1)I(x)+(a_1-b_1)K(x)]+C & (2a>b),\end{cases}$$

其中 $I(x)=\frac{1}{b(2a+b)}\ln\left|\frac{2a+b+b(\sin[x]-\cos[x])}{2a+b-b(\sin[x]-\cos[x])}\right|$,

$J(x)=\frac{1}{b(b-2a)}\ln\left|\frac{b(\sin[x]+\cos[x])-b-2a}{b(\sin[x]+\cos[x])+b-2a}\right|$,

$$K(x)=\frac{2}{b(2a-b)}\arctan\frac{b(\sin[x]+\cos[x])}{2a-b}.$$

由于分母含有正弦型和余弦型函数有理式的积分与三角函数有理式的积分相类似,故不过多地去讨论其他形式的正弦型和余弦型函数有理式的积分,以免重复。

习 题 1.7

求下列不定积分:

(1) $\int\frac{\cos[x]\mathrm{d}x}{3\sin[x]+4\cos[x]}$; (2) $\int\frac{4\sin[x]+3\cos[x]}{3\sin[x]+4\cos[x]}\mathrm{d}x$;

(3) $\int\frac{\cos^2[x]\mathrm{d}x}{3\sin[x]+4\cos[x]}$; (4) $\int\frac{6\sin^2[x]+5\cos^2[x]\mathrm{d}x}{3\sin[x]+4\cos[x]}\mathrm{d}x$.

1.8 含有$(a\sin[x]+b\cos[x])^n$的积分

对于分母含有$(\sin[x]+\cos[x])^n$的积分,可采用组合积分法。先用组合积分法来证明两个重要的递推公式。

定理 1　设 a, b 为常数, n 为大于 1 的正整数,

$$J_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{[a\sin[x] + b\cos[x]]^n},$$

则有递推公式

$$J_n = \frac{1}{(n-1)(a^2+b^2)}\left((n-2)J_{n-2} + \frac{b\sin[x] - a\cos[x]}{[a\sin[x]+b\cos[x]]^{n-1}}\right). \tag{1}$$

证　由

$$\begin{aligned}
J_n &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(a\sin[x]+b\cos[x])^n} \\
&= \int \frac{a\sin[x]+b\cos[x]}{(a\sin[x]+b\cos[x])^{n+1}}\mathrm{d}x \\
&= \int \frac{\mathrm{d}(b\sin[x]-a\cos[x])}{(a\sin[x]+b\cos[x])^{n+1}} \\
&= \frac{b\sin[x]-a\cos[x]}{(a\sin[x]+b\cos[x])^{n+1}} \\
&\quad - \int (b\sin[x]-a\cos[x])\mathrm{d}(a\sin[x]+b\cos[x])^{-(n+1)} \\
&= \frac{b\sin[x]-a\cos[x]}{(a\sin[x]+b\cos[x])^{n+1}} \\
&\quad - (n+1)\int \frac{(b\sin[x]-a\cos[x])^2}{(a\sin[x]+b\cos[x])^{n+2}}\mathrm{d}x \\
&= \frac{b\sin[x]-a\cos[x]}{(a\sin[x]+b\cos[x])^{n+1}} \\
&\quad - (n+1)(a^2+b^2)J_{n+2} + (n+1)J_n.
\end{aligned}$$

所以有

$$nJ_n = (n+1)(a^2+b^2)J_{n+2} - \frac{b\sin[x]-a\cos[x]}{(a\sin[x]+b\cos[x])^{n+1}}.$$

用 $n-2$ 代替上式中的 n, 得

$$(n-2)J_{n-2} = (n-1)(a^2+b^2)J_n - \frac{b\sin[x]-a\cos[x]}{(a\sin[x]+b\cos[x])^{n-1}}.$$

故得递推公式

$$J_n=\frac{1}{(n-1)(a^2+b^2)}\quad(n-2)J_{n-2}+\frac{b\sin[x]-a\cos[x]}{(a\sin[x]+b\cos[x])^{n-1}}\quad.$$

由递推公式立刻可得

$$J_2=\frac{1}{a^2+b^2}\ \frac{b\sin[x]-a\cos[x]}{a\sin[x]+b\cos[x]}+C,\tag{2}$$

$$J_3=\frac{1}{2(a^2+b^2)}\quad J_1+\frac{b\sin[x]-a\cos[x]}{(a\sin[x]+b\cos[x])^2}\quad,\tag{3}$$

其中

$$J_1=\frac{1}{2(a^2+b^2)}\ln\ \tan\frac{x+\arctan\dfrac{a+b}{a-b}}{2}+C\ ,$$

$$J_4=\frac{1}{3(a^2+b^2)}\quad 2J_2+\frac{b\sin[x]-a\cos[x]}{[a\sin[x]+b\cos[x]]^3}\quad.\tag{4}$$

其中 J_2 **为式**(2).

定理 2　**设** $J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin[x]+b\cos[x])^n}$,

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2},\quad B=\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2}\quad(n>1),$$

则

$$I=\int\frac{a_1\sin[x]+b_1\cos[x]}{(a\sin[x]+b\cos[x])^n}\mathrm{d}x$$

$$=AJ_{n-1}-\frac{B}{n-1}\frac{1}{(\sin[x]+\cos[x])^{n-1}}\ .$$

证　**令**

$$I_1=\int\frac{\sin[x]}{(a\sin[x]+b\cos[x])^n}\mathrm{d}x,$$

$$I_2=\int\frac{\cos[x]}{(a\sin[x]+b\cos[x])^n}\mathrm{d}x,$$

则

$$aI_1+bI_2=J_{n-1},$$

$$-bI_1+aI_2=\int\frac{\mathrm{d}(a\sin[x]+b\cos[x])}{(a\sin[x]+b\cos[x])^n}$$

$$=-\frac{1}{n-1}\frac{1}{(a\sin[x]+b\cos[x])^{n-1}}\ .$$

所以有

$$I_1=\frac{a}{a^2+b^2}J_{n-1}+\frac{b}{a^2+b^2}\ \frac{1}{n-1}\ \frac{1}{(a\sin[x]+b\cos[x])^{n-1}},$$

$$I_2 = \frac{b}{a^2+b^2} J_{n-1} - \frac{a}{a^2+b^2} \frac{1}{n-1} \frac{1}{(a\sin[x]+b\cos[x])^{n-1}}.$$

于是有

$$\begin{aligned} I &= a_1 I_1 + b_1 I_2 \\ &= \frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2} J_{n-1} - \frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2} \frac{1}{n-1} \frac{1}{(a\sin[x]+b\cos[x])^{n-1}} \\ &= AJ_{n-1} - \frac{B}{n-1} \frac{1}{(a\sin[x]+b\cos[x])^{n-1}}. \end{aligned}$$

由递推公式立刻可得

$$\int \frac{a_1\sin[x]+b_1\cos[x]}{(a\sin[x]+b\cos[x])^2} = AJ_1 - \frac{B}{n-1} \frac{1}{a\sin[x]+b\cos[x]},$$

其中 $A = \frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2}, \quad B = \frac{ba_1-ab_1}{a^2+b^2},$

$$J_1 = \frac{1}{2(a^2+b^2)} \ln \tan \frac{x + \arctan\frac{a+b}{a-b}}{2}。$$

例 1 **求** $I = \int \frac{\sin^2[x]}{(a\sin[x]+b\cos[x])^2} \mathrm{d}x.$

解 **令** $J = \int \frac{\cos^2[x]}{[a\sin[x]+b\cos[x]]^2} \mathrm{d}x,$

则有 $I + J = J_2$ (**由递推公式**(2)**可得**),

$$\begin{aligned} a^2 I - b^2 I &= \int \frac{a\sin[x]-b\cos[x]}{a\sin[x]+b\cos[x]} \mathrm{d}x \\ &= \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} x - \frac{2ab}{a^2+b^2} \ln|a\sin[x]+b\cos[x]|, \end{aligned}$$

所以有

$$I = \frac{1}{a^2+b^2} \left(b^2 J_2 + \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2} x - \frac{2ab}{a^2+b^2} \ln|a\sin[x]+b\cos[x]| \right) + C.$$

例 2 **求** $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a\sin[x]+b\cos[x])(b\sin[x]+a\cos[x])}$

$$(a^2 \neq b^2).$$

解　令

$$I_1 = \int \frac{\sin^2[x]\mathrm{d}x}{(a\sin[x]+b\cos[x])(b\sin[x]+a\cos[x])},$$

$$I_2 = \int \frac{\cos^2[x]\mathrm{d}x}{(a\sin[x]+b\cos[x])(b\sin[x]+a\cos[x])},$$

则有

$$\begin{aligned} a^2 I_1 - b^2 I_2 &= \int \frac{a\sin[x]-b\cos[x]}{b\sin[x]+a\cos[x]}\mathrm{d}x \\ &= \frac{ab-ab}{a^2+b^2}x - \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}\ln|b\sin[x]+a\cos[x]| \\ &= -\ln|b\sin[x]+a\cos[x]|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b^2 I_1 - a^2 I_2 &= \int \frac{b\sin[x]-a\cos[x]}{a\sin[x]+b\cos[x]}\mathrm{d}x \\ &= \frac{ab-ab}{a^2+b^2}x - \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2}\ln|a\sin[x]+b\cos[x]| \\ &= -\ln|a\sin[x]+b\cos[x]|. \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned} I_1 = \frac{1}{a^4-b^4}(b^2\ln|a\sin[x]+b\cos[x]| \\ - a^2\ln|b\sin[x]+a\cos[x]|), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 = \frac{1}{a^4-b^4}(a^2\ln|a\sin[x]+b\cos[x]| \\ - b^2\ln|b\sin[x]+a\cos[x]|). \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned} I &= I_1 + I_2 \\ &= \frac{b^2+a^2}{a^4-b^4}\ln|a\sin[x]+b\cos[x]| \\ &\quad - \frac{a^2+b^2}{a^4-b^4}\ln|b\sin[x]+a\cos[x]| + C \\ &= \frac{1}{a^2-b^2}\ln\left|\frac{a\sin[x]+b\cos[x]}{b\sin[x]+a\cos[x]}\right| + C. \end{aligned}$$

例 3　**求** $I = \int \dfrac{\sin[x]\mathrm{d}x}{(a\sin[x]+b\cos[x])(b\sin[x]+a\cos[x])}$

$$(a^2 \neq b^2).$$

解　令

$$J=\int\frac{\cos[x]\,\mathrm{d}x}{(a\sin[x]+b\cos[x])(b\sin[x]+a\cos[x])},$$

则有

$$aI+bJ=\int\frac{\mathrm{d}x}{b\sin[x]+a\cos[x]}$$

$$=\frac{1}{2(a^2+b^2)}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b+a}{b-a}}{2}\right|,$$

$$bI+aJ=\int\frac{\mathrm{d}x}{a\sin[x]+b\cos[x]}$$

$$=\frac{1}{2(a^2+b^2)}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b+a}{a-b}}{2}\right|.$$

所以有

$$I=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{a}{2(a^2+b^2)}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b+a}{b-a}}{2}\right|\right.$$

$$\left.-\frac{b}{2(a^2+b^2)}\ln\left|\tan\frac{x+\arctan\frac{b+a}{a-b}}{2}\right|\right]+C.$$

例 4　**求** $I=\int\frac{a_1\sin[x]+b_1\cos[x]}{(a\sin[x]+b\cos[x])^2(b\sin[x]+a\cos[x])}\mathrm{d}x$

$(a^2\neq b^2)$.

解　令

$$I_1=\int\frac{\sin[x]\,\mathrm{d}x}{(a\sin[x]+b\cos[x])^2(b\sin[x]+a\cos[x])},$$

$$I_2=\int\frac{\cos[x]\,\mathrm{d}x}{(a\sin[x]+b\cos[x])^2(b\sin[x]+a\cos[x])}.$$

则有

$$aI_1 + bI_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a\sin[x] + b\cos[x])(b\sin[x] + a\cos[x])}$$

$$= \frac{1}{a^2 - b^2}\ln\left|\frac{a\sin[x] + b\cos[x]}{b\sin[x] + a\cos[x]}\right|,$$

$$bI_1 + aI_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a\sin[x] + b\cos[x])^2}$$

$$= -\frac{1}{a^2 - b^2}\,\frac{b\sin[x] + a\cos[x]}{a\sin[x] + b\cos[x]}.$$

所以有

$$I_1 = \frac{1}{a^2 - b^2}\quad \frac{a}{a^2 - b^2}\ln\left|\frac{a\sin[x] + b\cos[x]}{b\sin[x] + a\cos[x]}\right|$$

$$+\frac{b}{a^2 - b^2}\,\frac{b\sin[x] + a\cos[x]}{a\sin[x] + b\cos[x]},$$

$$I_2 = \frac{1}{a^2 - b^2}\quad -\frac{a}{a^2 - b^2}\,\frac{b\sin[x] + a\cos[x]}{a\sin[x] + b\cos[x]}$$

$$-\frac{b}{a^2 - b^2}\ln\left|\frac{a\sin[x] + b\cos[x]}{b\sin[x] + a\cos[x]}\right|.$$

于是有 $\quad I = a_1 I_1 + b_1 I_2$

$$= \frac{aa_1 - bb_1}{(a^2 - b^2)^2}\ln\left|\frac{a\sin[x] + b\cos[x]}{b\sin[x] + a\cos[x]}\right|$$

$$-\frac{ab_1 - ba_1}{(a^2 - b^2)^2}\,\frac{b\sin[x] + a\cos[x]}{a\sin[x] + b\cos[x]} + C.$$

由于含有 $(a\sin[x] + b\cos[x])^n$ **的有理式的积分与含有** $(a\sin x + b\cos x)^n$ **的有理式的积分相类似,所以这里不再赘述。**

习　题　1.8

求下列不定积分:

(1) $\displaystyle\int \frac{\sin[x]\,\mathrm{d}x}{(3\sin[x] + 2\cos[x])^2}$;

(2) $\displaystyle\int \frac{\sin[x] + 2\cos[x]}{(2\sin[x] + \cos[x])^2}\mathrm{d}x$;

(3) $\int \frac{dx}{(a\sin[x] + b\cos[x])(b\sin[x] - a\cos[x])}$;

(4) $\int \frac{dx}{(a\sin[x] + b\cos[x])(b\sin[x] + a\cos[x])^2}$.

第 2 章　指数函数有理式的积分

绪论中已阐述了指数函数 e^x 与 a^x 具有自导性, 对称自导函数 e^x 与 e^{-x}、a^x 与 a^{-x}的代数和具有互导性, 这就为凑微分提供了条件。这里主要用到以下的凑微分公式:

$$(e^x + e^{-x})dx = d(e^x - e^{-x}),$$

$$(e^x - e^{-x})dx = d(e^x + e^{-x}).$$

一般的指数函数 a^x 与 a^{-x} $(a > 0, a \neq 1)$ 也有类似的凑微分公式:

$$(a^x + a^{-x})dx = \frac{1}{\ln a}d(a^x - a^{-x}),$$

$$(a^x - a^{-x})dx = \frac{1}{\ln a}d(a^x + a^{-x}).$$

这为使用组合积分法提供了保证。下面讨论如何用组合积分法求解指数函数有理式的积分问题。

2.1　含有 $ae^x + be^{-x}$ 的积分

对于分母含有 $ae^x + be^{-x}$ 的指数函数有理式的积分, 可以考虑使用组合积分法。先从一个简单的例子谈起.

例 1　求 $\int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}dx$.

解　此例可用参元组合法求解, 找出与该积分类似的积分组合在一起, 达到简化积分运算的目的, 从而计算出结果来。

令
$$I = \int \frac{e^x}{e^x + e^{-x}}dx, \quad J = \int \frac{e^{-x}}{e^x + e^{-x}}dx.$$

则
$$I + J = \int dx = x,$$

$$I-J=\int\frac{e^{x}-e^{-x}}{e^{x}+e^{-x}}dx=\int\frac{d(e^{x}+e^{-x})}{e^{x}+e^{-x}}=\ln x(e^{x}+e^{-x}).$$

两式相加便有

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}[x+\ln(e^{x}+e^{-x})]+C\\&=\frac{1}{2}[\ln e^{x}+\ln(e^{x}+e^{-x})]+C\\&=\frac{1}{2}\ln(e^{2x}+1)+C.\end{aligned}$$

从例 1 可以看出,在求一个指数函数有理式的积分时,应先找出这个积分的辅助积分,再将这个辅助积分与原积分组合在一起,从而达到简化积分运算的目的。在寻求辅助积分时,应注意以下三点:

1) 辅助积分与原积分结构相似;

2) 指数函数有理式的积分,其辅助积分仍然是指数函数有理式的积分;

3) 在求积分时,巧妙地运用凑微分公式

$$(e^{x}+e^{-x})dx=d(e^{x}-e^{-x}),\quad(e^{x}-e^{-x})dx=d(e^{x}+e^{-x}).$$

在上述用组合积分法求解积分的例子中加入了辅助积分,即使用了参元组合法。为了使读者易于掌握,下面再举几例。

例 2 求 $I=\int\frac{a_1e^{x}+b_1e^{-x}}{ae^{x}+be^{-x}}dx$.

此例可考虑使用分解组合法。

解 令$I_1=\int\frac{e^{x}dx}{ae^{x}+be^{-x}}$, $I_2=\int\frac{e^{-x}}{ae^{x}+be^{-x}}dx$,

则
$$aI_1+bI_2=x,$$

$$\begin{aligned}aI_1-bI_2&=\int\frac{ae^{x}-be^{-x}}{ae^{x}+be^{-x}}=\int\frac{d(ae^{x}+be^{-x})}{ae^{x}+be^{-x}}\\&=\ln|ae^{x}+be^{-x}|.\end{aligned}$$

两式分别相加、相减,得

$$I_1 = \frac{1}{2a}[x + \ln|ae^x + be^{-x}|],$$

$$I_2 = \frac{1}{2b}[x - \ln|ae^x + be^{-x}|].$$

于是有 $\quad I = a_1 I_1 + b_1 I_2$

$$= \frac{a_1 b + b_1 a}{2ab}x + \frac{a_1 b - b_1 a}{2ab}\ln|ae^x + be^{-x}| + C.$$

为了后面例题求解的需要,查表求得一些较简单的积分公式如下:

$$\int \frac{dx}{ae^x + be^{-x}} = \frac{1}{ab}\arctan \quad \frac{a}{b}e^x \quad + C \ (ab > 0), \qquad (1)$$

$$\int \frac{dx}{ae^x + be^{-x} + C} = \frac{1}{c^2 - 4ab}\ln\left|\frac{2ae^x + c - \quad c^2 - 4ab}{2ae^x + c + \quad c^2 - 4ab}\right| + C'$$

$$(c^2 - 4ab > 0), \qquad (2)$$

$$\int \frac{dx}{a^2e^{2x} + b^2e^{-2x}} = \frac{1}{2ab}\arctan \ \frac{a}{b}e^{2x} \quad + C \ (ab \neq 0). \qquad (3)$$

例 3 **求** $I = \int \frac{a_1 e^{2x} + b_1 e^{-2x}}{ae^x + be^{-x}}dx$.

解 **令** $I_1 = \int \frac{e^{2x}dx}{ae^x + be^{-x}}, \quad I_2 = \int \frac{e^{-2x}dx}{ae^x + be^{-x}},$

则 $\quad a^2 I_1 - b^2 I_2 = \int (ae^x - be^{-x})dx = ae^x + be^{-x},$

$$a^2 I_1 + b^2 I_2 = \int \frac{(ae^x + be^{-x})^2 - 2ab}{ae^x + be^{-x}}dx$$

$$= \int \quad (ae^x + be^{-x}) - \frac{2ab}{ae^x + be^{-x}} \quad dx$$

$$= ae^x - be^{-x} - 2 \quad ab\arctan \quad \frac{a}{b}e^x \quad .$$

所以有

$$I_1 = \frac{1}{2a^2}$$

$$(ae^x + be^{-x}) + ae^x - be^{-x} - 2 \quad ab\arctan \quad \frac{a}{b}e^x$$

$$= \frac{1}{2a^2} \quad 2ae^x - 2 \quad ab\arctan \quad \frac{a}{b}e^x$$

$$= \frac{1}{a}e^x - \frac{1}{a} \quad \frac{b}{a}\arctan \quad \frac{a}{b}e^x$$

$$= \frac{1}{a} \quad e^{2x} - \quad \frac{b}{a}\arctan \quad \frac{a}{b}e^x \quad ,$$

$$I_2 = \frac{1}{2b^2} \quad -2be^{-x} - 2 \quad ab\arctan \quad \frac{a}{b}e^x$$

$$= -\frac{1}{b} \quad e^{-x} + \quad \frac{a}{b}\arctan \quad \frac{a}{b}e^x \quad .$$

于是有

$$I = a_1 I_1 + b_1 I_2$$

$$= \frac{a_1}{a}e^x - \frac{b_1}{b}e^{-x} - \quad \frac{a_1}{a} \quad \frac{b}{a} + \frac{b_1}{b} \quad \frac{a}{b} \quad \arctan \quad \frac{a}{b}e^x \quad + C$$

$$= \frac{a_1}{a}e^x - \frac{b_1}{b}e^{-x} - \frac{a_1 b^2 + b_1 a^2}{abab}\arctan \quad \frac{a}{b}e^x \quad + C .$$

对于分母含有 $ae^x + be^{-x} + C$ **的指数函数有理式的积分,也可考虑使用组合积分法。**

例 4　求 $I = \int \frac{a_1 e^x + b_1 e^{-x}}{ae^x + be^{-x} + c}dx \ (c^2 - 4ab > 0)$.

解　令

$$I_1 = \int \frac{e^x dx}{ae^x + be^{-x} + c},$$

$$I_2 = \int \frac{e^{-x} dx}{ae^x + be^{-x} + c},$$

$$I_3 = \int \frac{dx}{ae^x + be^{-x} + c},$$

则

$$aI_1 + bI_2 + cI_3 = x,$$

$$aI_1 - bI_2 = \int \frac{(ae^x - be^{-x})dx}{ae^x + be^{-x} + c} = \int \frac{d(ae^x + be^{-x} + c)}{ae^x + be^{-x} + c}$$

$$= \ln|ae^x + be^{-x} + c| .$$

所以有 $$I_1 = \frac{1}{2a}[x + \ln|ae^x + be^{-x} + c| - cI_3],$$

$$I_2 = \frac{1}{2b}[x - \ln|ae^x + be^{-x} + c| - cI_3].$$

于是有 $$\begin{aligned} I &= a_1 I_1 + b_1 I_2 + c_1 I_3 \\ &= \frac{a_1 b + b_1 a}{2ab} x + \frac{a_1 b - b_1 a}{2ab} \ln|ae^x + be^{-x} + c| \\ &\quad + \frac{2abc_1 - bca_1 - acb_1}{2ab} I_3 . \end{aligned}$$

其中 $$I_3 = \frac{1}{c^2 - 4ab} \ln\left|\frac{2ae^x + c - c^2 - 4ab}{2ae^x + c + c^2 - 4ab}\right| + C'.$$

例 5 求 $\int \frac{e^{3x} dx}{ae^x + be^{-x}}$ $(a \neq 0)$.

解 令 $I = \int \frac{e^{3x} dx}{ae^x + be^{-x}}$, $J = \int \frac{e^{-3x} dx}{ae^x + be^{-x}}$,

则 $$\begin{aligned} a^3 I + b^3 J &= \int (a^2 e^{2x} - ab + b^2 e^{-2x}) dx \\ &= \frac{1}{2} a^2 e^{2x} - abx - \frac{1}{2} b^2 e^{-2x}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a^3 I - b^3 J &= \int \frac{(ae^x - be^{-x})(a^2 e^{2x} + ab + b^2 e^{-2x})}{ae^x + be^{-x}} dx \\ &= \int \frac{(ae^x + be^{-x})^2 - ab}{ae^x + be^{-x}} d(ae^x + be^{-x}) \\ &= \int (ae^x + be^{-x}) d(ae^x + be^{-x}) - ab \int \frac{d(ae^x + be^{-x})}{ae^x + be^{-x}} \\ &= \frac{1}{2}(ae^x + be^{-x})^2 - ab\ln|ae^x + be^{-x}|. \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2a^3}[a^2 e^{2x} + ab - abx - ab\ln|ae^x + be^{-x}|] + C' \\ &= \frac{1}{2a^2}[ae^{2x} + b - bx - b\ln|ae^x + be^{-x}|] + C' \\ &= \frac{1}{2a^2}[ae^{2x} - bx - b\ln|ae^x + be^{-x}|] + C \qquad C = \frac{b}{2a^2} + C' . \end{aligned}$$

例 6 求 $I=\int \frac{a_1 e^{2x}+b_1 e^{-2x}}{ae^x+be^{-x}+c}\mathrm{d}x \ (ab\neq 0,\ c^2-4ab>0)$.

解 令 $I_1=\int \frac{e^{2x}\mathrm{d}x}{ae^x+be^{-x}+c}$, $\quad I_2=\int \frac{e^{-2x}\mathrm{d}x}{ae^x+be^{-x}+c}$,

则
$$a^2I_1-b^2I_2=\int \frac{[(ae^x+be^{-x}+c)-c](ae^x-be^{-x})\mathrm{d}x}{ae^x+be^{-x}+c}$$
$$=\int\left(1-\frac{c}{ae^x+be^{-x}+c}\right)\mathrm{d}(ae^x+be^{-x}+c)$$
$$=ae^x+be^{-x}-c\ln|ae^x+be^{-x}+c|.$$

$$a^2I_1+b^2I_2=\int \frac{(ae^x+be^{-x})^2-2ab}{ae^x+be^{-x}+c}\mathrm{d}x$$
$$=\int \frac{[(ae^x+be^{-x}+c)-c]^2-2ab}{ae^x+be^{-x}+c}\mathrm{d}x$$
$$=\int \frac{[(ae^x+be^{-x}+c)^2-2c(ae^x+be^{-x}+c)+c^2]-2ab}{ae^x+be^{-x}+c}\mathrm{d}x$$
$$=\int\left((ae^x+be^{-x}+c)-2c+\frac{c^2-2ab}{ae^x+be^{-x}+c}\right)\mathrm{d}x$$
$$=ae^x-be^{-x}-cx$$
$$+(c^2-2ab)\frac{1}{\sqrt{c^2-4ab}}\ln\left|\frac{2ae^x+c-\sqrt{c^2-4ab}}{2ae^x+c+\sqrt{c^2-4ab}}\right|.$$

所以有
$$I_1=\frac{1}{2a^2}\left(2ae^x-cx-c\ln|ae^x+be^{-x}+c|\right.$$
$$\left.+\frac{c^2-2ab}{\sqrt{c^2-4ab}}\ln\left|\frac{2ae^x+c-\sqrt{c^2-4ab}}{2ae^x+c+\sqrt{c^2-4ab}}\right|\right),$$
$$I_2=\frac{1}{2b^2}\left(-2be^{-x}-cx+c\ln|ae^x+be^{-x}+c|\right.$$
$$\left.+\frac{c^2-2ab}{\sqrt{c^2-4ab}}\ln\left|\frac{2ae^x+c-\sqrt{c^2-4ab}}{2ae^x+c+\sqrt{c^2-4ab}}\right|\right).$$

于是有

$$I=a_1I_1+b_1I_2$$

$$= \frac{a_1}{a}e^x - \frac{b_1}{b}e^x - \frac{a^2 a_1 c + b^2 b_1 c}{2a^2 b^2}x$$

$$+ \frac{b^2 b_1 c - a^2 a_1 c}{2a^2 b^2}\ln|ae^x + be^{-x} + c|$$

$$+ \frac{a_1 b^2 + b_1 a^2}{2a^2 b^2}\frac{c^2 - 2ab}{c^2 - 4ab}\ln\left|\frac{2ae^x + c - c^2 - 4ab}{2ae^x + c + c^2 - 4ab}\right| + C.$$

对于分母含有 $a^x + a^{-x}$ **的普通指数函数有理式的积分，也可使用组合积分法。**

例 7 **求** $I = \int \frac{b_1 a^x + c_1 a^{-x}}{ba^x + ca^{-x}}dx \ (a > 0, a \neq 1)$.

解 **令** $I_1 = \int \frac{a^x dx}{ba^x + ca^{-x}}$, $I_2 = \int \frac{a^{-x}}{ba^x + ca^{-x}}dx$

则 $bI_1 + cI_2 = x$,

$$bI_1 - cI_2 = \int \frac{ba^x - ca^{-x}}{ba^x + ca^{-x}}dx = \frac{1}{\ln a}\int \frac{d(ba^x + ca^{-x})}{ba^x + ca^{-x}}$$

$$= \frac{1}{\ln a}\ln|ba^x + ca^{-x}|.$$

所以有 $I_1 = \frac{1}{2b} \quad x + \frac{1}{\ln a}\ln|ba^x + ca^{-x}| \quad ,$

$$I_2 = \frac{1}{2c} \quad x - \frac{1}{\ln a}\ln|ba^x + ca^{-x}| \quad .$$

于是有 $I = b_1 I_1 + c_1 I_2$

$$= \frac{b_1 c + bc_1}{2bc}x + \frac{1}{\ln a} \frac{b_1 c - bc_1}{2bc}\ln|ba^x + ca^{-x}| + C'.$$

这里使用组合积分法成功地求出指数函数有理式的积分，充分显示出组合积分法在求指数函数有理式积分中较高的价值。

习　题　2.1

1. **用微分法验证下列等式:**

$$\int \frac{dx}{ae^x + be^{-x} + c} = \frac{1}{c^2 - 4ab}\ln\left|\frac{2ae^x + c - c^2 - 4ab}{2ae^x + c + c^2 - 4ab}\right| + C.$$

2. **计算下列不定积分:**

(1) $\int \frac{e^{-x}}{ae^{x}+be^{-x}}dx$; (2) $\int \frac{5e^{x}+6e^{-x}}{3e^{x}+2e^{-x}}dx$;

(3) $\int \frac{be^{x}+ae^{-x}}{ae^{x}+be^{-x}}dx$; (4) $\int \frac{a_1e^{x}+b_1e^{-x}}{ae^{x}-be^{-x}}dx$;

(5) $\int \frac{e^{-2x}}{e^{x}+e^{-x}}dx$; (6) $\int \frac{e^{3x}}{e^{x}+e^{-x}+1}dx$;

(7) $\int \frac{2^{x}}{3\times 2^{x}+2^{-x}}dx$; (8) $\int \frac{ca^{x}+ba^{-x}}{ba^{x}+ca^{-x}}dx$.

2.2 含有$(ae^{x}+be^{-x})^{n}$的积分

对于分母含有$(ae^{x}+be^{-x})^{n}$的指数函数有理式的积分,也和三角函数有理式的积分一样,可以考虑使用组合积分法求解。先来证明两个递推公式。

定理1　设

$$J_n=\int \frac{dx}{(ae^{x}+be^{-x})^{n}}\quad (n>1,ab\neq 0),$$

证明:

$$J_n=\frac{1}{4ab(n-1)}\left[(n-2)J_{n-2}+\frac{ae^{x}-be^{-x}}{(ae^{x}+be^{-x})^{n-1}}\right].\tag{1}$$

证　因为

$$\begin{aligned}J_n&=\int \frac{dx}{(ae^{x}+be^{-x})^{n}}=\int \frac{d(ae^{x}-be^{-x})}{(ae^{x}+be^{-x})^{n+1}}\\&=\frac{ae^{x}-be^{-x}}{(ae^{x}+be^{-x})^{n+1}}+(n+1)\int \frac{(ae^{x}-be^{-x})^{2}}{(ae^{x}+be^{-x})^{n+2}}dx\\&=\frac{ae^{x}-be^{-x}}{(ae^{x}+be^{-x})^{n+1}}+(n+1)\int \frac{(ae^{x}-be^{-x})^{2}-(ae^{x}+be^{-x})^{2}}{(ae^{x}+be^{-x})^{n+2}}dx\\&\quad+(n+1)J_n\end{aligned}$$

$$= \frac{ae^{x} - be^{-x}}{(ae^{x} + be^{-x})^{n+1}} - (n+1)\int \frac{4ab\mathrm{d}x}{(ae^{x} + be^{-x})^{n+2}} + (n+1)J_n .$$

所以有 $$nJ_n = 4ab(n+1)J_{n+2} - \frac{ae^{x} - be^{-x}}{(ae^{x} + be^{-x})^{n+1}} .$$

用 $n-2$ 代替上式中的 n,得

$$(n-2)J_{n-2} = 4ab(n-1)J_n - \frac{ae^{x} - be^{-x}}{(ae^{x} + be^{-x})^{n-1}} .$$

故得递推公式为

$$J_n = \frac{1}{4ab(n-1)}\left[(n-2)J_{n-2} + \frac{ae^{x} - be^{-x}}{(ae^{x} + be^{-x})^{n-1}}\right] .$$

定理 2

设 $J_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(ae^{x} + be^{-x})^{n}}$, $A = \frac{ba_1 + ab_1}{2ab}$, $B = \frac{ab_1 - ba_1}{2ab}$,

则 $$I = \int \frac{a_1 e^{x} + b_1 e^{-x}}{(ae^{x} + be^{-x})^{n}}\mathrm{d}x = AJ_{n-1} + \frac{B}{n-1}\frac{1}{(ae^{x} + be^{-x})^{n-1}}$$

$$(n>1,\ n\in\mathbf{N},\ ab\neq 0) . \quad (2)$$

证　令 $I_1 = \int \frac{e^{x}\mathrm{d}x}{(ae^{x} + be^{-x})^{n}}$,　$I_2 = \int \frac{e^{-x}\mathrm{d}x}{(ae^{x} + be^{-x})^{n}}$,

则有 $$aI_1 + bI_2 = J_{n-1},$$

$$aI_1 - bI_2 = \int \frac{(ae^{x} - be^{-x})\mathrm{d}x}{(ae^{x} + be^{-x})^{n}} = \int \frac{\mathrm{d}(ae^{x} + be^{-x})}{(ae^{x} + be^{-x})^{n}}$$

$$= -\frac{1}{n-1}\frac{1}{(ae^{x} + be^{-x})^{n-1}} .$$

所以立刻便有

$$I_1 = \frac{1}{2a}\left[J_{n-1} - \frac{1}{n-1}\frac{1}{(ae^{x} + be^{-x})^{n-1}}\right],$$

$$I_2 = \frac{1}{2b}\left[J_{n-1} + \frac{1}{n-1}\frac{1}{(ae^{x} + be^{-x})^{n-1}}\right] .$$

于是有 $I = a_1 I_1 + b_1 I_2$

$$= \frac{ba_1 + b_1 a}{2ab}J_{n-1} + \frac{1}{n-1}\cdot\frac{ab_1 - ba_1}{2ab}\cdot\frac{1}{(ae^{x} + be^{-x})^{n-1}}$$

$$= AJ_{n-1} + \frac{B}{n-1} \frac{1}{(ae^{x} + be^{-x})^{n-1}} .$$

由以上递推公式立刻可得要用到的一些积分公式.例如,由递推公式(1)可得

$$J_2 = \frac{1}{4ab}\frac{ae^{x} - be^{-x}}{ae^{x} + be^{-x}} + C, \tag{3}$$

$$J_3 = \frac{1}{8ab} \quad J_1 + \frac{1}{(ae^{x} + be^{-x})^2}$$

$$= \frac{1}{8ab} \quad \frac{1}{ab}\arctan \quad \frac{a}{b}e^{x} \quad + \frac{1}{(ae^{x} + be^{-x})^2} \quad + C, \tag{4}$$

$$J_4 = \frac{1}{12ab} \quad 2J_2 + \frac{ae^{x} - be^{-x}}{(ae^{x} + be^{-x})^3}$$

$$= \frac{1}{12ab} \quad \frac{ae^{x} - be^{-x}}{2ab(ae^{x} + be^{-x})} + \frac{ae^{x} - be^{-x}}{(ae^{x} + be^{-x})^3} \quad + C . \tag{5}$$

利用递推公式(2),立刻可以得到

$$I = \int \frac{a_1 e^{x} + b_1 e^{-x}}{(ae^{x} + be^{-x})^3} = AJ_2 + \frac{B}{2} \frac{1}{(ae^{x} + be^{-x})^2}$$

$$= \frac{A}{4ab}\frac{ae^{x} - be^{-x}}{ae^{x} + be^{-x}} + \frac{B}{2}\frac{1}{(ae^{x} + be^{-x})^2} + C, \tag{6}$$

其中 $$A = \frac{ba_1 + ab_1}{2ab}, \quad B = \frac{ab_1 - ba_1}{2ab} .$$

例 1 求 $I = \int \frac{a_1 e^{x} + b_1 e^{-x}}{(ae^{x} + be^{-x})^2} dx \ (ab > 0)$。

解法 1 用组合积分法求解。令

$$I_1 = \int \frac{e^{x} dx}{(ae^{x} + be^{-x})^2}, \qquad I_2 = \int \frac{e^{-x} dx}{(ae^{x} + be^{-x})^2},$$

则 $$aI_1 + bI_2 = \int \frac{dx}{ae^{x} + be^{-x}} = \frac{1}{ab}\arctan \quad \frac{a}{b}e^{x} \quad ,$$

$$aI_1 - bI_2 = \int \frac{d(ae^{x} + be^{-x})}{(ae^{x} + be^{-x})^2} = -\frac{1}{ae^{x} + be^{-x}} .$$

所以立刻有

$$I_1 = \frac{1}{2a}\left(\frac{1}{ab}\arctan\frac{a}{b}e^x - \frac{1}{ae^x + be^{-x}}\right),$$

$$I_2 = \frac{1}{2b}\left(\frac{1}{ab}\arctan\frac{a}{b}e^x + \frac{1}{ae^x + be^{-x}}\right).$$

于是有 $$I = a_1 I_1 + b_1 I_2$$

$$= \frac{ba_1 + ab_1}{2ab}\frac{1}{ab}\arctan\frac{a}{b}e^x$$

$$+ \frac{ab_1 - ba_1}{2ab}\frac{1}{ae^x + be^{-x}} + C.$$

解法 2　利用递推公式(2)**立刻得到**

$$I = \int \frac{a_1 e^x + b_1 e^{-x}}{(ae^x + be^{-x})^2}dx = AJ_1 + \frac{B}{2-1}\frac{1}{(ae^x + be^{-x})^{2-1}}$$

$$= A\frac{1}{ab}\arctan\frac{a}{b}e^x + B\frac{1}{ae^x + be^{-x}} + C$$

$$= \frac{ba_1 + ab_1}{2ab}\frac{1}{ab}\arctan\frac{a}{b}e^x + \frac{ab_1 - ba_1}{2ab}\frac{1}{ae^x + be^{-x}} + C.$$

两种方法结果完全一致.用第二种虽然简单,但要记住递推公式并非易事,而第一种方法无须记公式,掌握解题思路就可以了。因而用组合积分法求解此类积分问题十分方便。

例 2　求 $\displaystyle\int \frac{e^{2x}}{(ae^x + be^{-x})^2}dx\ (a \neq 0)$.

解　令 $\displaystyle I = \int \frac{e^{2x}dx}{(ae^x + be^{-x})^2}$,　$\displaystyle J = \int \frac{e^{-2x}dx}{(ae^x + be^{-x})^2}$,

则 $$a^2 I + b^2 J = \int \frac{a^2 e^{2x} + b^2 e^{-2x}}{(ae^x + be^{-x})^2}dx = \int \frac{(ae^x + be^{-x})^2 - 2ab}{(ae^x + be^{-x})^2}dx$$

$$= \int\left(1 - \frac{2ab}{(ae^x + be^{-x})^2}\right)dx = x - \frac{1}{2}\frac{ae^x - be^{-x}}{ae^x + be^{-x}},$$

$$a^2 I - b^2 J = \int \frac{ae^x - be^{-x}}{ae^x + be^{-x}}dx = \int \frac{d(ae^x + be^{-x})}{ae^x + be^{-x}}$$

$$= \ln|ae^x + be^{-x}|.$$

所以有

$$I=\frac{1}{2a^2}\quad x-\frac{1}{2}\;\frac{ae^x-be^{-x}}{ae^x+be^{-x}}+\ln|ae^x+be^{-x}|\quad+C.$$

例 3 　**求** $I=\int\frac{(a_1e^x+b_1e^{-x})\mathrm{d}x}{(ae^x+be^{-x})(be^x+ae^{-x})}$ $(a^2\neq b^2,ab>0)$.

解　令

$$I_1=\int\frac{e^x\mathrm{d}x}{(ae^x+be^{-x})(be^x+ae^{-x})},$$

$$I_2=\int\frac{e^{-x}\mathrm{d}x}{(ae^x+be^{-x})(be^x+ae^{-x})},$$

则

$$aI_1+bI_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{be^x+ae^{-x}}=\frac{1}{ab}\arctan\quad\frac{b}{a}e^x\quad,$$

$$bI_1+aI_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{ae^x+be^{-x}}=\frac{1}{ab}\arctan\quad\frac{a}{b}e^x\quad.$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{a^2-b^2}\;\frac{1}{ab}\quad a\arctan\quad\frac{b}{a}e^x\quad-b\arctan\quad\frac{a}{b}e^x\quad,$$

$$I_2=\frac{1}{b^2-a^2}\;\frac{1}{ab}\quad b\arctan\quad\frac{b}{a}e^x\quad-a\arctan\quad\frac{a}{b}e^x\quad,$$

于是有 $I=a_1I_1+b_1I_2$

$$=\frac{aa_1-bb_1}{ab(a^2-b^2)}\arctan\quad\frac{b}{a}e^x$$

$$+\frac{ab_1-ba_1}{ab(a^2-b^2)}\arctan\quad\frac{a}{b}e^x\quad+C.$$

例 4 　**求** $I=\int\frac{a_1e^{2x}+b_1e^{-2x}}{(ae^x+be^{-x})(be^x+ae^{-x})}\mathrm{d}x$ $(a^2\neq b^2,ab\neq 0)$.

解　令

$$I_1=\int\frac{e^{2x}\mathrm{d}x}{(ae^x+be^{-x})(be^x+ae^{-x})},$$

$$I_2=\int\frac{e^{-2x}\mathrm{d}x}{(ae^x+be^{-x})(be^x+ae^{-x})},$$

则
$$a^2 I_1 - b^2 I_2 = \int \frac{ae^x - be^{-x}}{be^x + ae^{-x}}\mathrm{d}x$$
$$= \frac{a^2 - b^2}{2ab}x + \frac{a^2 + b^2}{2ab}\ln|be^x + ae^{-x}|,$$
$$b^2 I_1 - a^2 I_2 = \int \frac{be^x - ae^{-x}}{ae^x + be^{-x}}\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{a^2 - b^2}{2ab}x + \frac{a^2 + b^2}{2ab}\ln|ae^x + be^{-x}|.$$
所以有
$$I_1 = \frac{1}{a^4 - b^4}\quad \frac{a^4 - b^4}{2ab}x + \frac{a^2 + b^2}{2ab}(a^2\ln|be^x + ae^{-x}| - b^2\ln|ae^x + be^{-x}|),$$
$$I_2 = \frac{1}{a^4 - b^4}\quad \frac{a^4 - b^4}{2ab}x + \frac{a^2 + b^2}{2ab}(b^2\ln|be^x + ae^{-x}| - a^2\ln|ae^x + be^{-x}|).$$
即 $I_1 = \frac{x}{2ab} + \frac{1}{2ab(a^2 - b^2)}[a^2\ln|be^x + ae^{-x}| - b^2\ln|ae^x + be^{-x}|]$,
$$I_2 = \frac{x}{2ab} + \frac{1}{2ab(a^2 - b^2)}[b^2\ln|be^x + ae^{-x}| - a^2\ln|ae^x + be^{-x}|].$$
于是有
$$I = a_1 I_1 + b_1 I_2$$
$$= \frac{a_1 + b_1}{2ab}x + \frac{a^2 a_1 + b^2 b_1}{2ab(a^2 - b^2)}\ln|be^x - ae^{-x}|$$
$$- \frac{b^2 a_1 + a^2 b_1}{2ab(a^2 - b^2)}\ln|ae^x + be^{-x}| + C.$$
例 5 求 $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{(ae^x + be^{-x})(be^x + ae^{-x})}\ (a^2 \neq b^2)$.

解 令
$$I_1 = \int \frac{e^{2x}\mathrm{d}x}{(ae^x + be^{-x})(be^x + ae^{-x})},$$
$$I_2 = \int \frac{e^{-2x}\mathrm{d}x}{(ae^x + be^{-x})(be^x + ae^{-x})},$$
由例 4 的结论知
$$I_1 = \frac{x}{2ab} + \frac{1}{2ab(a^2 - b^2)}[a^2\ln|be^x + ae^{-x}| - b^2\ln|ae^x + be^{-x}|],$$

$$I_2 = \frac{x}{2ab} + \frac{1}{2ab(a^2 - b^2)}[b^2 \ln|be^x + ae^{-x}| - a^2 \ln|ae^x + be^{-x}|].$$

而 $$a^2 I_1 + b^2 I_2 = \frac{a^2 + b^2}{2ab}x + \frac{a^4 + b^4}{2ab(a^2 - b^2)}\ln|be^x + ae^{-x}|$$
$$- \frac{ab}{a^2 - b^2}\ln|ae^x + be^{-x}|.$$

另外又有

$$\begin{aligned} a^2 I_1 + b^2 I_2 &= \int \frac{(ae^x + be^{-x})^2 - 2ab}{(ae^x + be^{-x})(be^x + ae^{-x})}dx \\ &= \int \frac{ae^x + be^{-x}}{be^x + ae^{-x}}dx - 2abI \\ &= \frac{a^2 + b^2}{2ab}x + \frac{a^2 - b^2}{2ab}\ln|be^x + ae^{-x}| - 2abI. \end{aligned}$$

所以有 $I = \frac{1}{2ab}$

$$\frac{a^2 + b^2}{2ab}x + \frac{a^2 - b^2}{2ab}\ln|be^x + ae^{-x}| - (a^2 I_1 + b^2 I_2)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2ab} \quad \frac{a^2 + b^2}{2ab}x + \frac{a^2 - b^2}{2ab}\ln|be^x + ae^{-x}| \\ &\quad - \frac{a^2 + b^2}{2ab}x - \frac{a^4 + b^4}{2ab(a^2 - b^2)}\ln|be^x + ae^{-x}| \\ &\quad + \frac{ab}{a^2 - b^2}\ln|ae^x + be^{-x}| \quad + C \\ &= \frac{1}{2(a^2 - b^2)}\ln\left|\frac{ae^x + be^{-x}}{be^x + ae^{-x}}\right| + C. \end{aligned}$$

事实上,此题有更简单的解法。由

$$\frac{1}{(ae^x + be^{-x})(be^x + ae^{-x})}$$
$$= \frac{1}{2(a^2 - b^2)} \quad \frac{ae^x - be^{-x}}{ae^x + be^{-x}} - \frac{be^x - ae^{-x}}{be^x + ae^{-x}} \quad ,$$

于是有

$$I = \frac{1}{2(a^2 - b^2)} \quad \int \frac{ae^x - be^{-x}}{ae^x + be^{-x}}dx - \int \frac{be^x - ae^{-x}}{be^x + ae^{-x}}dx$$

$$= \frac{1}{2(a^2 - b^2)} \left[\int \frac{\mathrm{d}(ae^x + be^{-x})}{ae^x + be^{-x}} - \int \frac{\mathrm{d}(be^x + ae^{-x})}{be^x + ae^{-x}} \right]$$

$$= \frac{1}{2(a^2 - b^2)} [\ln|ae^x + be^{-x}| - \ln|be^x + ae^{-x}|] + C$$

$$= \frac{1}{2(a^2 - b^2)} \ln\left| \frac{ae^x + be^{-x}}{be^x + ae^{-x}} \right| + C .$$

这种方法比较简单,但要将被积函数

$$\frac{1}{(ae^x + be^{-x})(be^x + ae^{-x})}$$

拆开成两个分式决非易事,因此用第一种方法求解较好。

例 6 **求** $I = \int \frac{a_1 e^x + b_1 e^{-x}}{(ae^x + be^{-x})^2 (be^x + ae^{-x})} \mathrm{d}x \ (a^2 \neq b^2, ab \neq 0)$.

解 **令** $$I_1 = \int \frac{e^x \mathrm{d}x}{(ae^x + be^{-x})^2 (be^x + ae^{-x})},$$

$$I_2 = \int \frac{e^{-x} \mathrm{d}x}{(ae^x + be^{-x})^2 (be^x + ae^{-x})},$$

则有 $$aI_1 + bI_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(ae^x + be^{-x})(be^x + ae^{-x})}$$

$$= \frac{1}{2(a^2 - b^2)} \ln\left| \frac{ae^x + be^{-x}}{be^x + ae^{-x}} \right|,$$

$$bI_1 + aI_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(ae^x + be^{-x})^2} = \frac{1}{4ab} \frac{ae^x - be^{-x}}{ae^x + be^{-x}} .$$

所以有

$$I_1 = \frac{1}{a^2 - b^2} \left[\frac{a}{2(a^2 - b^2)} \ln\left| \frac{ae^x + be^{-x}}{be^x + ae^{-x}} \right| - \frac{1}{4a} \frac{ae^x - be^{-x}}{ae^x + be^{-x}} \right],$$

$$I_2 = \frac{1}{a^2 - b^2} \left[\frac{b}{2(a^2 - b^2)} \ln\left| \frac{ae^x + be^{-x}}{be^x + ae^{-x}} \right| - \frac{1}{4a} \frac{ae^x - be^{-x}}{ae^x + be^{-x}} \right],$$

于是有 $$I = a_1 I_1 + b_1 I_2$$

$$= \frac{aa_1 + bb_1}{2(a^2 - b^2)^2} \ln\left| \frac{ae^x + be^{-x}}{be^x + ae^{-x}} \right|$$

$$-\frac{ba_1+ab_1}{4ab(a^2-b^2)}\frac{ae^x-be^{-x}}{ae^x+be^{-x}}+C.$$

习 题 2.2

1. **用微分法验证下列积分公式:**

$$\int\frac{dx}{(ae^x+be^{-x})(be^x+ae^{-x})}=\frac{1}{2(a^2-b^2)}\ln\left|\frac{ae^x+be^{-x}}{be^x+ae^{-x}}\right|+C.$$

2. **用参元组合法计算下列不定积分:**

(1) $\int\frac{e^x dx}{(3e^x+2e^{-x})^2}$; (2) $\int\frac{e^{-x}dx}{(3e^x+2e^{-x})^2}$;

(3) $\int\frac{e^{-2x}dx}{(3e^x+2e^{-x})(2e^{-x}+3e^{-x})}$; (4) $\int\frac{e^{2x}dx}{(3e^x+2e^{-x})^2}$。

3. **用分解组合法计算下列不定积分:**

(1) $\int\frac{2e^x+3e^{-x}}{(3e^x+2e^{-x})^2}dx$; (2) $\int\frac{a_1e^x+b_1e^{-x}}{(ae^x-be^{-x})^2}dx$;

(3) $\int\frac{4e^x+5e^{-x}}{(2e^x+3e^{-x})(3e^x+2e^{-x})}dx$; (4) $\int\frac{2e^{2x}+3e^{-2x}}{(3e^x+2e^{-x})^2}dx$.

2.3 含有$(pa^x+qa^{-x})^n$的积分

对于分母含有一般指数函数$(pa^x+qa^{-x})^n$ $(a>0, a\neq1)$**的有理式的积分,可以考虑使用组合积分法,这里使用了凑微分式**

$$(a^x+a^{-x})dx=\frac{1}{\ln a}d(a^x-a^{-x}),$$

$$(a^x-a^{-x})dx=\frac{1}{\ln a}d(a^x+a^{-x}).$$

先用组合积分法证明下列递推公式。

定理 1 **设** n **为正整数,且** $n>1$, $pq\neq0$,**并令**

$$J_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(pa^x + qa^{-x})^n},$$

则有递推公式

$$J_n = \frac{1}{4pq(n-1)}\left((n-2)J_{n-2} + \frac{1}{\ln a}\frac{pa^x - qa^{-x}}{(pa^x + qa^{-x})^{n+1}}\right). \quad (1)$$

证　由

$$J_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(pa^x - qa^{-x})^n} = \frac{1}{\ln a}\int \frac{\mathrm{d}(pa^x - qa^{-x})}{(pa^x + qa^{-x})^{n+1}}$$

$$= \frac{1}{\ln a}\left[\frac{(pa^x - qa^{-x})}{(pa^x + qa^{-x})^{n+1}} + (n+1)\ln a\int \frac{(pa^x - qa^{-x})^2}{(pa^x + qa^{-x})^{n+2}}\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1}{\ln a}\frac{pa^x - qa^{-x}}{(pa^x + qa^{-x})^{n+1}}$$

$$+ (n+1)\int \frac{(pa^x - qa^{-x})^2 - (pa^x + qa^{-x})^2}{(pa^x + qa^{-x})^{n+2}} + (n+1)J_n$$

$$= \frac{1}{\ln a}\frac{pa^x - qa^{-x}}{(pa^x + qa^{-x})^{n+1}}$$

$$- (n+1)\int \frac{4pq\mathrm{d}x}{(pa^x + qa^{-x})^{n+2}} + (n+1)J_n.$$

所以有

$$nJ_n = 4pq(n+1)J_{n+2} - \frac{1}{\ln a}\frac{pa^x - qa^{-x}}{(pa^x + qa^{-x})^{n+1}}.$$

用 $n-2$ **代替上式中的** n, **得**

$$(n-2)J_{n-2} = 4pq(n-1)J_n - \frac{1}{\ln a}\frac{pa^x - qa^{-x}}{(pa^x - qa^{-x})^{n-1}}.$$

故得递推公式

$$J_n = \frac{1}{4pq(n-1)}\left((n-2)J_{n-2} + \frac{1}{\ln a}\frac{pa^x - qa^{-x}}{(pa^x + qa^{-x})^{n-1}}\right).$$

定理 2　**设** $n > 1$, $n \in \mathbf{N}$, $pq \neq 0$, **并令**

$$A = \frac{qa_1 + pb_1}{2pq}, \quad B = \frac{pb_1 - qa_1}{2pq},$$

则有递推公式

$$I=\int\frac{a_1 a^x+b_1 a^{-x}}{(pa^x+qa^{-x})^n}\mathrm{d}x$$

$$=AJ_{n-2}+\frac{B}{n-1}\frac{1}{\ln a}\frac{1}{(pa^x+qa^{-x})^{n-1}}. \qquad (2)$$

证　令　$I_1=\int\frac{a^x\mathrm{d}x}{(pa^x+qa^{-x})^n}$,　$I_2=\int\frac{a^{-x}\mathrm{d}x}{(pa^x+qa^{-x})^n}$,

则有

$$pI_1+qI_2=J_{n-1},$$

$$pI_1-qI_2=\int\frac{(pa^x-qa^{-x})\mathrm{d}x}{(pa^x+qa^{-x})^n}=\frac{1}{\ln a}\int\frac{\mathrm{d}(pa^x+qa^{-x})}{(pa^x+qa^{-x})^n}$$

$$=-\frac{1}{\ln a}\frac{1}{n-1}\frac{1}{(pa^x+qa^{-x})^{n-1}}.$$

所以便有

$$I_1=\frac{1}{2p}J_{n-1}-\frac{1}{\ln a}\frac{1}{n-1}\frac{1}{(pa^x+qa^{-x})^{n-1}},$$

$$I_2=\frac{1}{2q}J_{n-1}+\frac{1}{n-1}\frac{1}{\ln a}\frac{1}{(pa^x+qa^{-x})^{n-1}}.$$

于是有

$$I=a_1I_1+b_1I_2$$

$$=\frac{qa_1+pb_1}{2pq}J_{n-1}+\frac{1}{n-1}\frac{pb_1-qa_1}{2pq}\frac{1}{\ln a}\frac{1}{(pa^x+qa^{-x})^{n-1}}$$

$$=AJ_{n-1}+\frac{B}{n-1}\frac{1}{\ln a}\frac{1}{(pa^x+qa^{-x})^{n-1}}.$$

由递推公式立刻可以得到

$$J_2=\frac{1}{4pq}\frac{1}{\ln a}\frac{pa^x-qa^{-x}}{pa^x+qa^{-x}}+C. \qquad (3)$$

由普通积分法可以得

$$J_1=\frac{1}{\sqrt{pq}}\frac{1}{\ln a}\arctan\left(\sqrt{\frac{p}{q}}a^x\right)+C\quad(p,q>0), \qquad (4)$$

$$J_3=J_1+\frac{1}{\ln a}\frac{1}{(pa^x+qa^{-x})^2}$$

$$= \frac{1}{pq}\frac{1}{\ln a}\arctan\left(\frac{p}{q}a^{x}\right) + \frac{1}{\ln a}\frac{1}{(pa^{x}+qa^{-x})^{2}} + C . \tag{5}$$

例 1　**求** $I = \int \frac{a_1 a^{x} + b_1 a^{-x}}{(pa^{x}+qa^{-x})^{2}}\mathrm{d}x \ (p>0, q>0)$.

解　**此题用递推公式求解虽然较简单,但记住递推公式很不容易,下面用组合积分法求解。**

令　$I_1 = \int \frac{a^{x}\mathrm{d}x}{(pa^{x}+qa^{-x})^{2}}$,　$I_2 = \int \frac{a^{-x}\mathrm{d}x}{(pa^{x}+qa^{-x})^{2}}$,

则有

$$pI_1 + qI_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{pa^{x}+qa^{-x}} = \frac{1}{pq}\frac{1}{\ln a}\arctan\left(\frac{p}{q}a^{x}\right),$$

$$pI_1 - qI_2 = \int \frac{pa^{x}-qa^{-x}}{(pa^{x}+qa^{-x})^{2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}\int\frac{\mathrm{d}(pa^{x}+qa^{-x})}{(pa^{x}+qa^{-x})^{2}}$$

$$= -\frac{1}{\ln a}\frac{1}{pa^{x}+qa^{-x}} .$$

所以有

$$I_1 = \frac{1}{2p}\left[\frac{1}{pq}\frac{1}{\ln a}\arctan\left(\frac{p}{q}a^{x}\right) - \frac{1}{\ln a}\frac{1}{pa^{x}+qa^{-x}}\right]$$

$$= \frac{1}{2p}\frac{1}{\ln a}\left[\frac{1}{pq}\arctan\left(\frac{p}{q}a^{x}\right) - \frac{1}{pa^{x}+qa^{-x}}\right],$$

$$I_2 = \frac{1}{2q}\frac{1}{\ln a}\left[\frac{1}{pq}\arctan\left(\frac{p}{q}a^{x}\right) + \frac{1}{pa^{x}+qa^{-x}}\right] .$$

于是有　$I = a_1 I_1 + b_1 I_2$

$$= \frac{qa_1 + b_1 p}{2qp\ pq}\frac{1}{\ln a}\arctan\left(\frac{p}{q}a^{x}\right)$$

$$+ \frac{pb_1 - qa_1}{2pq\ln a}\frac{1}{pa^{x}+qa^{-x}} + C .$$

例 2　**求** $I = \int \frac{a^{2x}\mathrm{d}x}{(pa^{x}+qa^{-x})^{2}}$.

解　令

$$J = \int \frac{a^{-2x}\mathrm{d}x}{(pa^{x} + qa^{-x})^{2}},$$

则有

$$p^{2}I - q^{2}J = \int \frac{pa^{x} - qa^{-x}}{pa^{x} + qa^{-x}}\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}\ln|pa^{x} + qa^{-x}|,$$

$$p^{2}I + q^{2}J = \int \frac{p^{2}a^{2x} + q^{2}a^{-2x}}{(pa^{x} + qa^{-x})^{2}}\mathrm{d}x = \int \frac{(pa^{x} + qa^{-x})^{2} - 2pq}{(pa^{x} + qa^{-x})^{2}}\mathrm{d}x$$

$$= \int \left(1 - \frac{2pq}{(pa^{x} + qa^{-x})^{2}}\right)\mathrm{d}x$$

$$= x - \frac{1}{2pq}\frac{1}{\ln a}\frac{pa^{x} - qa^{-x}}{pa^{x} + qa^{-x}}.$$

所以有

$$I = \frac{1}{2p^{2}}\left(\frac{1}{\ln a}\ln|pa^{x} + qa^{-x}| + x - \frac{1}{2pq}\frac{1}{\ln a}\frac{pa^{x} - qa^{-x}}{pa^{x} + qa^{-x}}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2p^{2}\ln a}\left(\ln|pa^{x} + qa^{-x}| + x - \frac{1}{2pq}\frac{pa^{x} - qa^{-x}}{pa^{x} + qa^{-x}}\right) + C.$$

例 3　**求** $I = \int \frac{a_{1}a^{x} + b_{1}a^{-x}}{(pa^{x} + qa^{-x})(qa^{x} + pa^{-x})}\mathrm{d}x\ (a^{2} \neq b^{2},\ ab \neq 0)$.

解　令

$$I_{1} = \int \frac{a^{x}\mathrm{d}x}{(pa^{x} + qa^{-x})(qa^{x} + pa^{-x})},$$

$$I_{2} = \int \frac{a^{-x}\mathrm{d}x}{(pa^{x} + qa^{-x})(qa^{x} + pa^{-x})}.$$

则有

$$pI_{1} + qI_{2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{qa^{x} + pa^{-x}} = \frac{1}{pq}\frac{1}{\ln a}\arctan\left(\frac{q}{p}a^{x}\right),$$

$$qI_{1} + pI_{2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{pa^{x} + qa^{-x}} = \frac{1}{pq}\frac{1}{\ln a}\arctan\left(\frac{p}{q}a^{x}\right).$$

所以有

$$I_{1} = \frac{1}{p^{2} - q^{2}}\frac{1}{pq}\frac{1}{\ln a}\left(p\arctan\left(\frac{q}{p}a^{x}\right) - q\arctan\left(\frac{p}{q}a^{x}\right)\right),$$

$$I_2 = \frac{1}{q^2 - p^2} \frac{1}{pq} \frac{1}{\ln a} \quad q\arctan \quad \frac{q}{p} a^x \quad - \ p\arctan \quad \frac{p}{q} a^x \quad .$$

于是有 $I = a_1 I_1 + b_1 I_2$

$$= \frac{pa_1 - qb_1}{pq(p^2 - q^2)} \frac{1}{\ln a} \arctan \quad \frac{q}{p} a^x$$

$$+ \frac{pb_1 - qa_1}{pq} \frac{1}{\ln a} \arctan \quad \frac{p}{q} a^x \quad + C .$$

例 4 **求** $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{(pa^x + qa^{-x})(qa^x + pa^{-x})} \ (p^2 \neq q^2)$.

解 **令** $I_1 = \int \frac{a^{2x}\mathrm{d}x}{(pa^x + qa^{-x})(qa^x + pa^{-x})}$,

$$I_2 = \int \frac{a^{-2x}\mathrm{d}x}{(pa^x + qa^{-x})(qa^x + pa^{-x})},$$

则有

$$p^2 I_1 - q^2 I_2 = \int \frac{pa^x - qa^{-x}}{qa^x + pa^{-x}} \mathrm{d}x$$

$$= \frac{p^2 - q^2}{2pq} x + \frac{p^2 + q^2}{2pq} \frac{1}{\ln a} \ln|qa^x + pa^{-x}|,$$

$$q^2 I_1 - p^2 I_2 = \int \frac{qa^x - pa^{-x}}{pa^x + qa^{-x}} \mathrm{d}x$$

$$= -\frac{p^2 - q^2}{2pq} x + \frac{p^2 + q^2}{2pq} \frac{1}{\ln a} \ln|pa^x + qa^{-x}| .$$

所以有

$$I_1 = \frac{1}{p^4 - q^4} \quad \frac{p^4 - q^4}{2pq} x + \frac{p^2 + q^2}{2pq} \frac{1}{\ln a} (p^2 \ln|qa^x + pa^{-x}|$$

$$- q^2 \ln|pa^x + qa^{-x}|) \quad ,$$

$$I_2 = \frac{1}{p^4 - q^4} \quad \frac{p^4 - q^4}{2pq} x + \frac{p^2 + q^2}{2pq} \frac{1}{\ln a} (q^2 \ln|qa^x + pa^{-x}|$$

$$- p^2 \ln|pa^x + qa^{-x}|) \quad .$$

于是有

$$p^2 I_1 + q^2 I_2 = \int \frac{(p^2 a^{2x} + q^2 a^{-2x})\mathrm{d}x}{(pa^x + qa^{-x})(qa^x + pa^{-x})}$$

$$= \int \frac{(pa^x + qa^{-x})^2 - 2pq}{(pa^x + qa^{-x})(qa^x + pa^{-x})}\mathrm{d}x$$

$$= \int \frac{pa^x + qa^{-x}}{qa^x + pa^{-x}}\mathrm{d}x - 2pqI .$$

故得

$$I = \frac{1}{2pq}\left[\int \frac{pa^x + qa^{-x}}{qa^x + pa^{-x}}\mathrm{d}x - (p^2 I_1 + q^2 I_2)\right]$$

$$= \frac{1}{2pq}\left[\frac{p^2+q^2}{2pq}x + \frac{p^2 - q^2}{2pq}\frac{1}{\ln a}\ln|qa^x + pa^{-x}|\right.$$

$$- \frac{p^2+q^2}{2pq}x - \frac{p^4+q^4}{2pq(p^2-q^2)}\frac{1}{\ln a}\ln|qa^x + pa^{-x}|$$

$$\left.+ \frac{pq}{p^2-q^2}\frac{1}{\ln a}\ln|pa^x + qa^{-x}|\right] + C$$

$$= \frac{1}{2(p^2-q^2)}\frac{1}{\ln a}\ln\left|\frac{pa^x + qa^{-x}}{qa^x + pa^{-x}}\right| + C .$$

例 5 求 $I = \int \dfrac{a^x \mathrm{d}x}{(pa^x + qa^{-x})^2(qa^x + pa^{-x})}$.

解 令 $J = \int \dfrac{a^{-x}\mathrm{d}x}{(pa^x + qa^{-x})^2(qa^x + pa^{-x})}$,

则有

$$pI + qJ = \int \frac{\mathrm{d}x}{(pa^x + qa^{-x})(qa^x + pa^{-x})}$$

$$= \frac{1}{2(p^2-q^2)}\frac{1}{\ln a}\ln\left|\frac{pa^x + qa^{-x}}{qa^x + pa^{-x}}\right| ,$$

$$qI + pJ = \int \frac{\mathrm{d}x}{(pa^x + qa^{-x})^2} = \frac{1}{4pq}\frac{1}{\ln a}\frac{pa^x - qa^{-x}}{pa^x + qa^{-x}} .$$

所以有

$$I = \frac{1}{p^2-q^2}\left[\frac{p}{2(p^2-q^2)}\frac{1}{\ln a}\ln\left|\frac{pa^x + qa^{-x}}{qa^x + pa^{-x}}\right|\right.$$

$$\left.- \frac{q}{4pq}\frac{1}{\ln a}\frac{pa^x - qa^{-x}}{pa^x + qa^{-x}}\right] + C$$

$$= \frac{1}{p^2 - q^2} \frac{1}{\ln a} \frac{p}{2(p^2 - q^2)} \ln \left| \frac{pa^x + qa^{-x}}{qa^x + pa^{-x}} \right|$$

$$- \frac{1}{4p} \frac{pa^x - qa^{-x}}{pa^x + qa^{-x}} + C.$$

对于分母含有$(pa^x + qa^{-x})^n$的指数函数有理式的积分,还有 $n > 2$ 的情形,由于比较复杂,这里不再赘述了。只要掌握了组合积分法的思维方法,有耐心去做,再难的积分也可求出。

习 题 2.3

1. 用微分法验证下列积分公式:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(pa^x + qa^{-x})(qa^x + pa^{-x})} = \frac{1}{2(p^2 - q^2)} \frac{1}{\ln a} \ln \left| \frac{pa^x + qa^{-x}}{qa^x + pa^{-x}} \right| + C.$$

2. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{a^{-x}\mathrm{d}x}{(3a^x + 2a^{-x})^2}$; (2) $\int \frac{2a^x + 3a^{-x}}{(3a^x + 2a^{-x})^2}\mathrm{d}x$;

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a^x + 2a^{-x})(2a^x + a^{-x})}$; (4) $\int \frac{a^{-x}\mathrm{d}x}{(a^x + 2a^{-x})^2(2a^x + a^{-x})}$.

第 3 章　双曲函数有理式的积分

在成功地利用组合积分法解决了大量的三角函数有理式与指数函数有理式的积分之后，我们又将这种积分方法用到双曲函数有理式的积分上，同样得到令人满意的结果。本章将专题谈谈组合积分法在双曲函数有理式积分中的应用。先从一个简单例子谈起。

例 1　求 $I = \int \frac{\mathrm{sh}\ x}{\mathrm{sh}\ x + \mathrm{ch}\ x} \mathrm{d}x$.

解　不妨令
$$J = \int \frac{\mathrm{ch}\ x}{\mathrm{sh}\ x + \mathrm{ch}\ x} \mathrm{d}x,$$
则有
$$I + J = x,$$
$$I - J = \int \frac{\mathrm{sh}\ x - \mathrm{ch}\ x}{\mathrm{sh}\ x + \mathrm{ch}\ x} = -\int \mathrm{e}^{-2x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} .$$
于是便有
$$I = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x} \right) + C .$$

像例 1 那样，在求一个积分时，找出一个与之结构相似的积分，将此积分与原积分组合在一起，这样，简化了被积函数，简化了积分运算，使得求此类积分变得更方便。

3.1　含有 $a\mathrm{sh}\ x + b\mathrm{ch}\ x$ 的积分

对于分母含有 $a\mathrm{sh}\ x + b\mathrm{ch}\ x$ 的积分，可考虑使用组合积分法。

例 2　求 $\int \frac{\mathrm{sh}\ x\,\mathrm{d}x}{a\mathrm{sh}\ x + b\mathrm{ch}\ x}$　$(|a| \neq |b|)$.

解　不妨令

$$I=\int\frac{\operatorname{sh}x}{a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x}\mathrm{d}x,\quad J=\int\frac{\operatorname{ch}x}{a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x}\mathrm{d}x,$$

则有

$$aI+bJ=x,$$

$$bI+aJ=\int\frac{b\operatorname{sh}x+a\operatorname{ch}x}{a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)}{a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x}$$

$$=\ln|a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x|.$$

所以有

$$I=\frac{1}{a^2-b^2}[ax-b\ln|a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x|]+C.$$

例 3　求 $I=\int\frac{a_1\operatorname{sh}x+b_1\operatorname{ch}x}{a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x}\mathrm{d}x\quad(|a|\neq|b|)$.

解　观察所求积分的结构,可将被积函数分解为两个双曲函数有理式的积分,故可令

$$I_1=\int\frac{\operatorname{sh}x}{a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x}\mathrm{d}x,\quad I_2=\int\frac{\operatorname{ch}x}{a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x}\mathrm{d}x,$$

则有

$$aI_1+bI_2=x,$$

$$bI_1+aI_2=\int\frac{\mathrm{d}(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)}{a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x}=\ln|a\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x|.$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{a^2-b^2}[ax-b\ln|a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x|],$$

$$I_2=\frac{1}{a^2-b^2}[-bx+a\ln|a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x|].$$

于是有

$$I=a_1I_1+b_1I_2=\frac{aa_1-bb_1}{a^2-b^2}x+\frac{ab_1-ba_1}{a^2-b^2}\ln|a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x|+C.$$

以上两例再一次说明了,组合积分法分为两大类,即:参元组合法,如例 2;**分解组合法,如例** 3。

例 4　求 $I=\int\frac{a_1\operatorname{sh}^2x+2b_1\operatorname{sh}x\operatorname{ch}x+c_1\operatorname{ch}x}{a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x}$。

解　用分解组合法求解。不妨设

$$I_1 = \int \frac{\operatorname{sh}^2 x \, \mathrm{d} x}{a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x},$$

$$I_2 = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x \, \mathrm{d} x}{a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x},$$

$$I_3 = \int \frac{2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x} \mathrm{d} x,$$

则有

$$-I_1 + I_2 = \int \frac{\mathrm{d} x}{a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x} = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \mathrm{e}^x\right),$$

$$a^2 I_1 - b^2 I_2 = \int (a \operatorname{sh} x - b \operatorname{ch} x) \mathrm{d} x = a \operatorname{ch} x - b \operatorname{sh} x,$$

$$a^2 I_1 + ab I_3 + b^2 I_2 = \int (a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x) \mathrm{d} x = a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x,$$

解方程组,**得**

$$I_1 = \frac{1}{a^2 - b^2}\left(\frac{2b^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \mathrm{e}^x\right) + a \operatorname{ch} x - b \operatorname{sh} x\right),$$

$$I_2 = \frac{1}{a^2 - b^2}\left(\frac{2a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \mathrm{e}^x\right) + a \operatorname{ch} x - b \operatorname{sh} x\right),$$

$$\begin{aligned} I_3 &= \frac{1}{ab}[a \operatorname{ch} x + b \operatorname{sh} x - a^2 I_1 - b^2 I_2] \\ &= \frac{2a}{a^2 - b^2} - \frac{2b}{a^2 - b^2} - \frac{4ab}{(a^2 - b^2)^{3/2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \mathrm{e}^x\right). \end{aligned}$$

于是有
$$\begin{aligned} I &= a_1 I_1 + b_1 I_3 + c_1 I_2 \\ &= \frac{a_1 a - 2bb_1 + c_1 a}{a^2 - b^2} \operatorname{ch} x - \frac{a_1 b - 2ab_1 + c_1 b}{a^2 - b^2} \operatorname{sh} x \\ &\quad + \frac{2(c_1 a^2 - 2abb_1 + a_1 b)}{(a^2 - b^2)^{3/2}} \arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}} \mathrm{e}^x\right) + C. \end{aligned}$$

例 5 **求** $I = \int \frac{b \operatorname{sh}^2 x - a \operatorname{ch}^2 x}{a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x} \mathrm{d} x \quad (|a| > |b|)$.

解 **令**

$$I_1 = \int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x} \mathrm{d} x, \quad I_2 = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{a \operatorname{sh} x + b \operatorname{ch} x} \mathrm{d} x,$$

则有

$$a^2 I_1 - b^2 I_2 = \int (a\operatorname{sh} x - b\operatorname{ch} x)\mathrm{d}x = a\operatorname{ch} x - b\operatorname{sh} x,$$

$$-I_1 + I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x} = \frac{2}{a^2 - b^2}\arctan \frac{a+b}{a-b}\mathrm{e}^x .$$

所以有

$$I_1 = \frac{1}{a^2 - b^2} \quad \frac{2b^2}{a^2 - b^2}\arctan \frac{a+b}{a-b}\mathrm{e}^x + a\operatorname{sh} x - b\operatorname{ch} x ,$$

$$I_2 = \frac{1}{a^2 - b^2} \quad \frac{2a^2}{a^2 - b^2}\arctan \frac{a+b}{a-b}\mathrm{e}^x + a\operatorname{ch} x - b\operatorname{sh} x .$$

于是有

$$\begin{aligned} I &= bI_1 + aI_2 \\ &= \frac{2b^3 + 2a^3}{(a^2 - b^2)^{3/2}}\arctan \frac{a+b}{a-b}\mathrm{e}^x \\ &\quad + \frac{2ab}{a^2 - b^2}\operatorname{ch} x - \frac{b^2 + ab}{a^2 - b^2}\operatorname{sh} x + C . \end{aligned}$$

对于分母含有 $a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x + c$ **的有理式的积分,也可使用组合积分法,如例** 6。

例 6　求 $I = \int \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} x + 2\operatorname{ch} x + 1}\mathrm{d}x$.

解　令
$$J = \int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x + 2\operatorname{ch} x + 1}\mathrm{d}x,$$

则有

$$\begin{aligned} I + 2J &= \int \quad 1 - \frac{1}{\operatorname{sh} x + 2\operatorname{ch} x + 1} \quad \mathrm{d}x \\ &= x - \frac{2}{2^2 - 1^2 - 1^2}\arctan \frac{3\mathrm{e}^x + 1}{2} \\ &= x - \frac{2}{2}\arctan \frac{3\mathrm{e}^x + 1}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2I + J &= \int \frac{2\operatorname{sh} x + \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x + 2\operatorname{ch} x + 1}\mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}(\operatorname{sh} x + 2\operatorname{ch} x + 1)}{(\operatorname{sh} x + 2\operatorname{ch} x + 1)} \\ &= \ln|\operatorname{sh} x + 2\operatorname{ch} x + 1| . \end{aligned}$$

所以有

$$I = \frac{1}{3} \quad 2\ln|\operatorname{sh} x + 2\operatorname{ch} x + 1| - x + \frac{2}{2}\arctan \frac{3\mathrm{e}^x + 1}{2} + C .$$

一般情形的积分如例 7 所述.

例 7 求 $I=\int\frac{c_1+a_1\operatorname{sh}x+b_1\operatorname{ch}x}{c+a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x}\mathrm{d}x\quad(b^2>a^2+c^2,|a|\neq|b|)$.

解 不难用普通积分法求得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{c+a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x}=\frac{2}{\sqrt{b^2-a^2-c^2}}\arctan\frac{(a+b)\mathrm{e}^x+c}{\sqrt{b^2-a^2-c^2}}.$$

令 $I_1=\int\frac{\operatorname{sh}x\,\mathrm{d}x}{c+a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x}$, $I_2=\int\frac{\operatorname{ch}x}{c+a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x}\mathrm{d}x$,

则有

$$\begin{aligned}aI_1+bI_2&=\int\left(1-\frac{c}{c+a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x}\right)\mathrm{d}x\\&=x-\frac{2c}{\sqrt{b^2-a^2-c^2}}\arctan\frac{(a+b)\mathrm{e}^x+c}{\sqrt{b^2-a^2-c^2}},\end{aligned}$$

$$bI_1+aI_2=\int\frac{\mathrm{d}(c+a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)}{c+a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x}=\ln|c+a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x|.$$

所以有

$$\begin{aligned}I_1=\frac{1}{a^2-b^2}\Big(&ax-\frac{2ac}{\sqrt{b^2-a^2-c^2}}\arctan\frac{(a+b)\mathrm{e}^x+c}{\sqrt{b^2-a^2-c^2}}\\&-b\ln|c+a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x|\Big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_2=\frac{1}{a^2-b^2}\Big(&a\ln|c+a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x|-bx\\&+\frac{2bc}{\sqrt{b^2-a^2-c^2}}\arctan\frac{(a+b)\mathrm{e}^x+c}{\sqrt{b^2-a^2-c^2}}\Big).\end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned}I&=c_1\int\frac{\mathrm{d}x}{c+a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x}+a_1I_1+b_1I_2\\&=\frac{a^2c_1-b^2c_1-acc_1+bcb_1}{a^2-b^2}\frac{2}{\sqrt{b^2-a^2-c^2}}\arctan\frac{(a+b)\mathrm{e}^x+c}{\sqrt{b^2-a^2-c^2}}\\&\quad+\frac{aa_1-bb_1}{a^2-b^2}x+\frac{b_1a-a_1b}{a^2-b^2}\ln|c+a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x|+C.\end{aligned}$$

此类积分还可以化为指数函数有理式的积分,然后用指数函

数有理式的积分求解,如例 8 所述。

例 8 求 $I=\int\frac{\operatorname{sh}x}{2\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x}\mathrm{d}x$.

解 将原积分变为

$$I=\int\frac{\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}{3\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x,$$

然后利用指数函数有理式的积分求之。令

$$I_1=\int\frac{\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x}{3\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}},\qquad I_2=\int\frac{\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x}{3\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}},$$

则有

$$3I_1-I_2=x,$$

$$3I_1+I_2=\int\frac{3\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{3\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(3\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{x})}{3\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}}=\ln|3\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}|.$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{6}(x+\ln|3\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}|),$$

$$I_2=\frac{1}{2}(\ln|3\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}|-x).$$

于是有

$$I=I_1-I_2=\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}\ln|3\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x}|+C.$$

此题直接用双曲函数有理式的积分方法求更简单一些,特别是系数复杂的情形更是如此。

习 题 3.1

1. 利用双曲函数有理式的积分方法求例 8 的不定积分,并将结果化为一致的原函数。

2. 求下列不定积分:

(1) $\int\frac{\operatorname{ch}x}{3\operatorname{sh}x-2\operatorname{ch}x}\mathrm{d}x$; (2) $\int\frac{2\operatorname{sh}x+3\operatorname{ch}x}{3\operatorname{sh}x+2\operatorname{ch}x}\mathrm{d}x$;

(3) $\int\frac{\operatorname{sh}^2x}{3\operatorname{sh}x+2\operatorname{ch}x}\mathrm{d}x$; (4) $\int\frac{\operatorname{ch}x}{2+4\operatorname{sh}x+\operatorname{ch}x}\mathrm{d}x$.

3.2 含有$(a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x)^n$的积分

对于分母含有$(a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x)^n$ $(n>1)$的双曲函数有理式的积分,具有与分母含有$(a\sin x+b\cos x)^n$的三角函数有理式的积分相类似的性质。为了方便使用组合积分法,不妨先证明如下递推公式。

定理 1 令 $J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x)^n}$ $(n>1,a^2\neq b^2)$,则有如下递推公式:

$$J_n=\frac{1}{(n-1)(b^2-a^2)}\left[(n-2)J_{n-2}+\frac{b\operatorname{sh} x+a\operatorname{ch} x}{(a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x)^{n-1}}\right].$$

证 由

$$\begin{aligned}J_n&=\int\frac{(a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x)\mathrm{d}x}{(a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x)^{n+1}}=\int\frac{\mathrm{d}(b\operatorname{sh} x+a\operatorname{ch} x)}{(a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x)^{n+1}}\\&=\frac{b\operatorname{sh} x+a\operatorname{ch} x}{(a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x)^{n+1}}\\&\quad-\int(b\operatorname{sh} x+a\operatorname{ch} x)\mathrm{d}(a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x)^{-(n+1)},\\&=\frac{b\operatorname{sh} x+a\operatorname{ch} x}{(a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x)^{n+1}}+(n+1)\int\frac{(b\operatorname{sh} x+a\operatorname{ch} x)^2}{(a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x)^{n+2}}\mathrm{d}x\\&=\frac{b\operatorname{sh} x+a\operatorname{ch} x}{(a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x)^{n+1}}\\&\quad+(n+1)\int\frac{(b\operatorname{sh} x+a\operatorname{ch} x)^2-(a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x)^2}{(a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x)^{n+2}}\mathrm{d}x\\&\quad+(n+1)J_n,\end{aligned}$$

有

$$nJ_n=-(n+1)(a^2-b^2)J_{n+2}-\frac{b\operatorname{sh} x+a\operatorname{ch} x}{(a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x)^{n+1}}.$$

用$(n-2)$代替上式中的n,得

$$(n-2)J_{n-2}=-(n-1)(a^2-b^2)J_n-\frac{b\operatorname{sh} x+a\operatorname{ch} x}{(a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x)^{n-1}}.$$

故递推公式为

$$J_n=\frac{1}{(n-1)(b^2-a^2)}\left[(n-2)J_{n-2}+\frac{b\operatorname{sh}x+a\operatorname{ch}x}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)^{n-1}}\right].\tag{1}$$

定理 2 设 $J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)^n}$,

$$A=\frac{aa_1-bb_1}{a^2-b^2},\quad B=\frac{ba_1-ab_1}{a^2-b^2},$$

则有 $I=\int\frac{a_1\operatorname{sh}x+b_1\operatorname{ch}x}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)^n}\mathrm{d}x$

$=AJ_{n-1}+\frac{B}{n-1}\frac{1}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)^{n-1}}\quad(n>1,\ a^2\neq b^2)$.

证 令 $I_1=\int\frac{\operatorname{sh}x\,\mathrm{d}x}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)^n}$, $I_2=\int\frac{\operatorname{ch}x\,\mathrm{d}x}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)^n}$,

则有 $aI_1+bI_2=J_{n-1}$,

$$bI_1+aI_2=\int\frac{b\operatorname{sh}x+a\operatorname{ch}x}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)^n}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)^n}$$

$$=-\frac{1}{n-1}\frac{1}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)^{n-1}}.$$

所以有

$$I_1=\frac{a}{a^2-b^2}J_{n-1}+\frac{b}{a^2-b^2}\frac{1}{n-1}\frac{1}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)^{n-1}},$$

$$I_2=\frac{b}{b^2-a^2}J_{n-1}+\frac{a}{b^2-a^2}\frac{1}{n-1}\frac{1}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)^{n-1}}.$$

于是有

$$I=a_1I_1+b_1I_2$$

$$=\frac{aa_1-bb_1}{a^2-b^2}J_{n-1}+\frac{ba_1-ab_1}{a^2-b^2}\frac{1}{n-1}\frac{1}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)^{n-1}}$$

$$= AJ_{n-1} + \frac{B}{n-1} \frac{1}{(a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x)^{n-1}} . \qquad (2)$$

由以上递推公式立刻可得到要用到的一些积分公式.例如由递推公式(1)可得到

$$J_2 = \frac{1}{b^2 - a^2} \frac{b\operatorname{sh} x + a\operatorname{ch} x}{a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x} + C, \qquad (3)$$

$$J_3 = \frac{1}{2(b^2 - a^2)} \quad J_1 + \frac{b\operatorname{sh} x + a\operatorname{ch} x}{(a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x)^2}$$

$$= \frac{1}{2(b^2 - a^2)} \quad \frac{1}{2 \quad a^2 - b^2} \arctan \quad \frac{a+b}{a-b} e^x$$

$$+ \frac{b\operatorname{sh} x + a\operatorname{ch} x}{(a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x)^2} + C, \qquad (4)$$

$$J_4 = \frac{1}{3(b^2 - a^2)} \quad 2J_2 + \frac{b\operatorname{sh} x + a\operatorname{ch} x}{(a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x)^3}$$

$$= \frac{1}{3(b^2 - a^2)} \quad \frac{2}{b^2 - a^2} \frac{b\operatorname{sh} x + a\operatorname{ch} x}{a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x}$$

$$+ \frac{b\operatorname{sh} x + a\operatorname{ch} x}{(a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x)^3} + C . \qquad (5)$$

下面再举几个利用上述公式求较复杂函数的积分例子。

例 1 求 $I = \int \frac{a_1 \operatorname{sh} x + b_1 \operatorname{ch} x}{(a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x)^2} \mathrm{d}x$.

解法 1 利用组合积分法计算。令

$$I_1 = \int \frac{\operatorname{sh} x \, \mathrm{d}x}{(a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x)^2}, \qquad I_2 = \int \frac{\operatorname{ch} x \, \mathrm{d}x}{(a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x)^2},$$

则 $aI_1 + bI_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x} = \frac{2}{a^2 - b^2} \arctan \quad \frac{a+b}{a-b} e^x$,

$$bI_1 + aI_2 = \int \frac{\mathrm{d}(a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x)}{a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x} = \ln | a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x | .$$

所以有

$$I_1 = \frac{1}{a^2 - b^2} \quad \frac{2a}{a^2 - b^2} \arctan \quad \frac{a+b}{a-b} e^x \quad - b\ln | a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x | ,$$

$$I_2=\frac{1}{a^2-b^2}\left(a\ln|a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x|-\frac{2b}{\sqrt{a^2+b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\mathrm{e}^x\right)\right).$$

于是有

$$\begin{aligned}I&=a_1I_1+b_1I_2\\&=\frac{aa_1-bb_1}{a^2-b^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\mathrm{e}^x\right)\\&\quad+\frac{ba_1-ab_1}{a^2-b^2}\cdot\frac{1}{a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x}+C.\end{aligned}$$

解法 2　利用递推公式(2)求解.将 $n=2$ 代入式(2),得

$$\begin{aligned}I&=AJ_1+\frac{B}{2-1}\cdot\frac{1}{a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x}\\&=\frac{aa_1+bb_1}{a^2-b^2}\cdot\frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\mathrm{e}^x\right)\\&\quad+\frac{ba_1-ab_1}{a^2-b^2}\cdot\frac{1}{a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x}+C.\end{aligned}$$

比较上述两种解法,第二种方法显然较简单,但要记住递推公式(2)绝非易事。而利用组合积分法求解,无须记公式,只掌握解题思路即可。在这里,我们提倡使用组合积分法解题。

例 2　求 $I=\int\frac{a_1\operatorname{sh}x+b_1\operatorname{ch}x}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)(b\operatorname{sh}x+a\operatorname{ch}x)}\mathrm{d}x$.

解　令 $I_1=\int\frac{\operatorname{sh}x\,\mathrm{d}x}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)(b\operatorname{sh}x+a\operatorname{ch}x)}$,

$$I_2=\int\frac{\operatorname{ch}x\,\mathrm{d}x}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)(\operatorname{sh}bx+a\operatorname{ch}x)},$$

则

$$aI_1+bI_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{b\operatorname{sh}x+a\operatorname{ch}x}=\frac{1}{2\sqrt{b^2-a^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}\mathrm{e}^x\right),$$

$$bI_1+aI_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x}=\frac{1}{2\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\mathrm{e}^x\right).$$

所以有

$$I_1 = \frac{1}{a^2 - b^2}\quad \frac{a}{2\quad b^2 - a^2}\arctan\quad \frac{b + a}{b - a}e^x$$

$$- \frac{b}{2\quad a^2 - b^2}\arctan\quad \frac{a + b}{a - b}e^x$$

$$I_2 = \frac{1}{b^2 - a^2}\quad \frac{b}{2\quad b^2 - a^2}\arctan\quad \frac{b + a}{b - a}e^x$$

$$- \frac{a}{2\quad a^2 - b^2}\arctan\quad \frac{a + b}{a - b}e^x$$

于是有

$$I = a_1 I_1 + b_1 I_2$$

$$= \frac{aa_1 - bb_1}{a^2 - b^2}\ \frac{1}{2\quad b^2 - a^2}\arctan\quad \frac{b + a}{b - a}e^x$$

$$+ \frac{ab_1 - ba_1}{a^2 - b^2}\ \frac{1}{2\quad a^2 - b^2}\arctan\quad \frac{a + b}{a - b}e^x \quad + C .$$

例 3　**求** $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a\mathrm{sh}\ x + b\mathrm{ch}\ x)(b\mathrm{sh}\ x + a\mathrm{ch}\ x)}$。

解　**令** $I_1 = \int \frac{\mathrm{sh}^2\ x\ \mathrm{d}x}{(a\mathrm{sh}\ x + b\mathrm{ch}\ x)(b\mathrm{sh}\ x + a\mathrm{ch}\ x)}$,

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{ch}^2\ x\ \mathrm{d}x}{(a\mathrm{sh}\ x + b\mathrm{ch}\ x)(b\mathrm{sh}\ x + a\mathrm{ch}\ x)},$$

则

$$a^2 I_1 - b^2 I_2 = \int \frac{a\mathrm{sh}\ x - b\mathrm{ch}\ x}{b\mathrm{sh}\ x + a\mathrm{ch}\ x}\mathrm{d}x$$

$$= - \frac{2ab}{a^2 - b^2}x + \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\ln|b\mathrm{sh}\ x + a\mathrm{ch}\ x|,$$

$$b^2 I_1 - a^2 I_2 = \int \frac{b\mathrm{sh}\ x - a\mathrm{ch}\ x}{a\mathrm{sh}\ x + b\mathrm{ch}\ x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{2ab}{a^2 - b^2}x - \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}\ln|a\mathrm{sh}\ x + b\mathrm{ch}\ x| .$$

所以有

$$I_1 = \frac{1}{a^4 - b^4}\quad - \frac{2a^3b + 2ab^3}{a^2 - b^2}x + \frac{a^4 + a^2b^2}{a^2 - b^2}\ln|b\mathrm{sh}\ x + a\mathrm{ch}\ x|$$

$$+\frac{a^2b^2+b^4}{a^2-b^2}\ln|a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x|,$$

$$I_2=\frac{1}{a^4-b^4}\left[-\frac{2a^3b+2ab^3}{a^2-b^2}x+\frac{b^4+a^2b^2}{a^2-b^2}\ln|b\operatorname{sh}x+a\operatorname{ch}x|\right.$$

$$\left.+\frac{a^4+a^2b^2}{a^2-b^2}\ln|a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x|\right].$$

于是有
$$I=I_2-I_1$$
$$=\frac{1}{a^4-b^4}[(a^2+b^2)\ln|a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x|$$
$$-(a^2+b^2)\ln|b\operatorname{sh}x+a\operatorname{ch}x|]+C$$
$$=\frac{1}{a^2-b^2}\ln\left|\frac{a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x}{b\operatorname{sh}x+a\operatorname{ch}x}\right|+C.$$

例 4 **求** $I=\int\frac{a_1\operatorname{sh}x+b_1\operatorname{ch}x}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)^2(b\operatorname{sh}x+a\operatorname{ch}x)}\mathrm{d}x$.

解 **令** $J=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)(b\operatorname{sh}x+a\operatorname{ch}x)}$

(**可由例** 3 **求出**),

再令
$$I_1=\int\frac{\operatorname{sh}x\,\mathrm{d}x}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)^2(b\operatorname{sh}x+a\operatorname{ch}x)},$$
$$I_2=\int\frac{\operatorname{ch}x\,\mathrm{d}x}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)^2(b\operatorname{sh}x+a\operatorname{ch}x)},$$

则
$$aI_1+bI_2=J,$$
$$bI_1+aI_2=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)^2}=\frac{1}{b^2-a^2}\frac{b\operatorname{sh}x+a\operatorname{ch}x}{a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x}.$$

所以有
$$I_1=\frac{1}{a^2-b^2}\left[aJ+\frac{b}{a^2-b^2}\frac{b\operatorname{sh}x+a\operatorname{ch}x}{a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x}\right],$$
$$I_2=\frac{1}{b^2-a^2}\left[bJ+\frac{a}{a^2-b^2}\frac{b\operatorname{sh}x+a\operatorname{ch}x}{a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x}\right].$$

于是有

$$I=a_1I_1+b_1I_2=\frac{aa_1-bb_1}{a^2-b^2}J+\frac{ba_1-ab_1}{a^2-b^2}\frac{b\operatorname{sh}x+a\operatorname{ch}x}{a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x}.$$

例 5 **求** $I=\int\frac{a_1\operatorname{sh}^2x+b_1\operatorname{ch}^2x}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)(b\operatorname{sh}x+a\operatorname{ch}x)}\mathrm{d}x$.

解　令 $J=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)(b\operatorname{sh}x+a\operatorname{ch}x)}$

(可由例 3 求出),

再令
$$I_1=\int\frac{\operatorname{sh}^2x\,\mathrm{d}x}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)(b\operatorname{sh}x+a\operatorname{ch}x)},$$
$$I_2=\int\frac{\operatorname{ch}^2x\,\mathrm{d}x}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)(b\operatorname{sh}x+a\operatorname{ch}x)},$$

则
$$I_2-I_1=J$$
$$a^2I_1-b^2I_2=\int\frac{a\operatorname{sh}x-b\operatorname{ch}x}{b\operatorname{sh}x+a\operatorname{ch}x}\mathrm{d}x$$
$$=-\frac{2ab}{a^2-b^2}x+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\ln|b\operatorname{sh}x+a\operatorname{ch}x|,$$

所以有
$$I_1=\frac{1}{a^2-b^2}\left(b^2J-\frac{2ab}{a^2-b^2}x+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\ln|b\operatorname{sh}x+a\operatorname{ch}x|\right),$$
$$I_2=\frac{1}{a^2-b^2}\left(a^2J-\frac{2ab}{a^2-b^2}x+\frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}\ln|b\operatorname{sh}x+a\operatorname{ch}x|\right).$$

于是有
$$I=a_1I_1+b_1I_2$$
$$=\frac{a^2b_1+b^2a_1}{a^2-b^2}J-\frac{2ab(a_1+b_1)}{(a^2-b^2)^2}x$$
$$+\frac{(a^2+b^2)(a_1+b_1)}{(a^2-b^2)^2}\ln|b\operatorname{sh}x+a\operatorname{ch}x|.$$

事实上,对于分母含有$(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)(c\operatorname{sh}x+d\operatorname{ch}x)$的双曲函数有理式的积分,也同样可使用组合积分法求解。

例 6　求 $\int\frac{\operatorname{ch}x\,\mathrm{d}x}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)(c\operatorname{sh}x+d\operatorname{ch}x)}$.

解　令
$$I=\int\frac{\operatorname{sh}x\,\mathrm{d}x}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)(c\operatorname{sh}x+d\operatorname{ch}x)},$$
$$J=\int\frac{\operatorname{ch}x\,\mathrm{d}x}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)(c\operatorname{sh}x+d\operatorname{ch}x)},$$

则 $aI+bJ=\int\frac{\mathrm{d}x}{c\operatorname{sh}x+d\operatorname{ch}x}=\frac{1}{2\sqrt{c^2-d^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{c+d}{c-d}}\mathrm{e}^x\right),$

$$cI + dJ = \int \frac{\mathrm{d}x}{a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x} = \frac{1}{2\quad a^2 - b^2}\arctan\quad \frac{a+b}{a-b}\mathrm{e}^x \quad .$$

于是有

$$J = \frac{1}{bc - ad}\quad \frac{c}{2\quad c^2 - d^2}\arctan\quad \frac{c+d}{c-d}\mathrm{e}^x$$

$$- \frac{a}{2\quad a^2 - b^2}\arctan\quad \frac{a+b}{a-b}\mathrm{e}^x \quad + C .$$

例 7 求 $I = \int \frac{\operatorname{sh} x}{(a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x)^3}\mathrm{d}x \quad (a^2 \neq b^2)$.

解 令 $$J = \int \frac{\operatorname{ch} x}{(a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x)^3}\mathrm{d}x,$$

则有

$$aI + bJ = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x)^2} = -\frac{1}{a^2 - b^2}\ \frac{b\operatorname{sh} x + a\operatorname{ch} x}{a\operatorname{ch} x + b\operatorname{ch} x},$$

$$bI + aJ = \int \frac{\mathrm{d}(a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x)}{(a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x)^3} = -\frac{1}{2}\ \frac{1}{(a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x)^2} .$$

所以

$$I = \frac{1}{a^2 - b^2}\quad \frac{b}{2(a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x)^2} - \frac{a}{a^2 - b^2}\ \frac{b\operatorname{sh} x + a\operatorname{ch} x}{a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x} \quad + C .$$

例 7 也可用递推公式(4)求解,即将 $n = 3$, $a_1 = 1$, $b_1 = c$ 代入式(4)立刻得出以上结果。

对于分母含有$(a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x)^n$ 的双曲函数有理式的积分,还可以举出更多更繁的例子,为避免重复,不再一一赘述了。

习 题 3.2

求下列不定积分:

(1) $\int \frac{\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh} x + 3\operatorname{ch} x}\mathrm{d}x$; (2) $\int \frac{3\operatorname{sh} x + 2\operatorname{ch} x}{2\operatorname{sh} x + 3\operatorname{ch} x}$
$\mathrm{d}x$;

(3) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2\operatorname{sh} x+2\operatorname{ch} x)(3\operatorname{sh} x+2\operatorname{ch} x)}$;

(4) $\int \frac{\operatorname{ch} x\,\mathrm{d}x}{(2\operatorname{sh} x+3\operatorname{ch} x)^2(3\operatorname{sh} x+2\operatorname{ch} x)}$;

(5) $\int \frac{\operatorname{sh} x\,\mathrm{d}x}{(2\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x)^2}$;

3.3 含有其他双曲函数有理式的积分

双曲函数除了双曲正弦、双曲余弦以外，还有双曲正切 $\operatorname{th} x$、双曲余切 $\operatorname{cth} x$、双曲正割 $\operatorname{sech} x$ 和双曲余割 $\operatorname{csch} x$。下面来讨论此类双曲函数有理式的积分求解问题。

3.3.1 含有 $b+a\operatorname{th} x$ 的积分

对于分母含有 $b+a\operatorname{th} x$ 的有理式的积分，可考虑使用组合积分法求解。先看一个简单的例子.

例 1 求 $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\operatorname{th} x}$.

解法 1 令
$$J=\int \frac{\operatorname{th} x}{1+\operatorname{th} x}\mathrm{d}x,$$
则有
$$I+J=x,$$
$$I-J=\int \frac{1-\operatorname{th} x}{1+\operatorname{th} x}\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{-2x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2x}.$$
所以立刻便有
$$I=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}+C.$$

解法 2 将原积分化为
$$I=\int \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x+\operatorname{ch} x}\mathrm{d}x,$$
然后用前面的结论立刻可得
$$I=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\mathrm{e}^{-2x}+C.$$

从以上两种解法可知，在系数比较简单的情况下，可用解法 1 直接求解。但当系数比较复杂时，用解法 1 就不太方便了，用解法 2 较好。即先将原积分化成双曲正弦与双曲余弦的有理式的积分，然后用组合积分法求之。

例 2 求 $I=\int \frac{a_1+b_1\operatorname{th} x}{b+a\operatorname{th} x}\mathrm{d}x \quad (|a|\neq|b|)$.

解 原积分可变为

$$I=\int \frac{b_1\operatorname{sh} x+a_1\operatorname{ch} x}{a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x}\mathrm{d}x,$$

再令

$$I_1=\int \frac{\operatorname{sh} x}{a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x}\mathrm{d}x,\quad I_2=\int \frac{\operatorname{ch} x}{a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x}\mathrm{d}x,$$

则有

$$aI_1+bI_2=x,$$

$$bI_1+aI_2=\int \frac{\mathrm{d}(a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x)}{a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x}=\ln|a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x|.$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{a^2-b^2}[ax-b\ln|a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x|],$$

$$I_2=\frac{1}{a^2-b^2}[a\ln|a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x|-bx].$$

于是有

$$\begin{aligned}I&=b_1I_1+a_1I_2\\&=\frac{ab_1-ba_1}{a^2-b^2}x+\frac{aa_1-bb_1}{a^2-b^2}\ln|a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x|+C.\end{aligned}$$

例 3 求 $I=\int \frac{\operatorname{th}^2 x}{(b+a\operatorname{th} x)^2}\mathrm{d}x \quad (|a|\neq|b|)$.

解 原积分可变为

$$I=\int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{(a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x)^2}\mathrm{d}x,$$

再令

$$J=\int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{(a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x)^2}\mathrm{d}x,$$

则有

$$-I+J=\int \frac{\mathrm{d}x}{(a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x)^2}=\frac{1}{b^2-a^2}\,\frac{b\operatorname{sh} x+a\operatorname{ch} x}{a\operatorname{sh} x+b\operatorname{ch} x},$$

$$a^2 I - b^2 J = \int \frac{a\operatorname{sh} x - b\operatorname{ch} x}{a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} x - \frac{2ab}{a^2 - b^2}\ln|a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x| .$$

所以有

$$I = \frac{1}{a^2 - b^2} \quad \frac{b^2}{a^2 - b^2}\frac{b\operatorname{sh} x + a\operatorname{ch} x}{a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x} + \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} x$$

$$- \frac{2ab}{a^2 - b^2}\ln|a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x| \quad + C .$$

3.3.2 含有 $a + b\operatorname{cth} x$ 的积分

对于分母含有 $a + b\operatorname{cth} x$ 的积分, 与 3.3.1 节的积分相类似, 也可以用组合积分法求之。

例 4 求 $I = \int \frac{a_1 + b_1\operatorname{cth} x}{a + b\operatorname{cth} x}\mathrm{d}x \quad (|a| \neq |b|)$.

解 原积分可变为

$$I = \int \frac{a_1\operatorname{sh} x + b_1\operatorname{ch} x}{a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x}\mathrm{d}x,$$

由 3.1 节例 2 得

$$I = \frac{aa_1 - bb_1}{a^2 - b^2} x + \frac{ab_1 - ba_1}{a^2 - b^2}\ln|a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x| + C .$$

例 5 求 $I = \int \frac{\operatorname{cth}^2 x}{(a + b\operatorname{cth} x)^2}\mathrm{d}x$.

解 原积分可变为

$$I = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{(a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x)^2}\mathrm{d}x,$$

再令

$$J = \int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{(a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x)^2}\mathrm{d}x,$$

则有

$$I - J = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x)^2} = \frac{1}{b^2 - a^2}\frac{b\operatorname{sh} x + a\operatorname{ch} x}{a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x},$$

$$-b^2 I + a^2 J = \int \frac{a\operatorname{sh} x - b\operatorname{ch} x}{a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}x - \frac{2ab}{a^2-b^2}\ln|a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x|.$$

所以有

$$I = \frac{1}{a^2-b^2} \quad \frac{a^2}{b^2-a^2}\frac{b\operatorname{sh} x + a\operatorname{ch} x}{a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x} + \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}x$$

$$-\frac{2ab}{a^2-b^2}\ln|a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x| \quad + C.$$

3.3.3　含有 $a\operatorname{sech} x + b\operatorname{csch} x$ 的积分

对于分母含有 $a\operatorname{sech} x + b\operatorname{csch} x$ 的有理式的积分,用组合积分法求解也是很方便的。

例 6　求 $I = \int \frac{a_1\operatorname{sech} x + b_1\operatorname{csch} x}{a\operatorname{sech} x + b\operatorname{csch} x}\mathrm{d}x$.

解　原积分可变为

$$I = \int \frac{a_1\operatorname{sh} x + b_1\operatorname{ch} x}{a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x}\mathrm{d}x,$$

由 3.1 节例 2,立刻便有

$$I = \frac{aa_1 - bb_1}{a^2-b^2}x + \frac{ab_1 - ba_1}{a^2-b^2}\ln|a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x| + C.$$

例 7　求 $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a\operatorname{sech} x + b\operatorname{csch} x)^2}$.

解　原积分可变为

$$I = \int \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x}{(a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x)^2}\mathrm{d}x,$$

再令

$$I_1 = \int \frac{\operatorname{sh}^2 x}{(a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x)^2}\mathrm{d}x, \quad I_2 = \int \frac{\operatorname{ch}^2 x}{(a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x)^2}\mathrm{d}x,$$

则有

$$-I_1 + I_2 = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x)^2} = \frac{1}{b^2-a^2}\frac{b\operatorname{sh} x + a\operatorname{ch} x}{a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x}.$$

$$a^2 I_1 - b^2 I_2 = \int \frac{a\operatorname{sh} x - b\operatorname{ch} x}{a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x}\mathrm{d} x$$

$$= \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} x - \frac{2ab}{a^2 - b^2}\ln|a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x| .$$

所以有

$$I_1 = \frac{1}{a^2 - b^2} \quad \frac{b^2}{b^2 - a^2}\frac{b\operatorname{sh} x + a\operatorname{ch} x}{a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x} + \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} x$$

$$- \frac{2ab}{a^2 - b^2}\ln|a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x| \quad ,$$

$$I_2 = \frac{1}{a^2 - b^2} \quad \frac{a^2}{b^2 - a^2}\frac{b\operatorname{sh} x + a\operatorname{ch} x}{a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x} + \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2} x$$

$$- \frac{2ab}{a^2 - b^2}\ln|a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x| \quad .$$

于是有 $$a^2 I_1 + 2abI + b^2 I_2 = x,$$

即 $$I = \frac{1}{2ab}[x - (a^2 I_1 + b^2 I_2)]$$

$$= \frac{1}{2ab} \quad x - \quad - \frac{2a^2 b^2}{(a^2 - b^2)^2}\frac{b\operatorname{sh} x + a\operatorname{ch} x}{a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x} + \frac{(a^2 + b^2)^2}{(a^2 - b^2)^2} x$$

$$- \frac{2ab(a^2 + b^2)}{a^2 - b^2}\ln|a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x| \quad + C$$

$$= \frac{2ab}{(a^2 - b^2)^2} x + \frac{ab}{(a^2 - b^2)^2}\frac{b\operatorname{sh} x + a\operatorname{ch} x}{a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x}$$

$$+ \frac{a^2 + b^2}{(a^2 - b^2)^2}\ln|a\operatorname{sh} x + b\operatorname{ch} x| + C .$$

3.4 双曲型函数有理式的积分

我们用指数函数 e^x **与** e^{-x}**定义了双曲函数.同样地,也可以用一般的指数函数** a^x **与** a^{-x}**来定义双曲型函数。**

定义 1 **设** $a > 0$,**且** $a \neq 1$,**将**$\frac{a^x - a^{-x}}{2}$**定义为双曲型正弦函数,记为** $\operatorname{sh}(x\ln a)$,**并将**$\frac{a^x + a^{-x}}{2}$**定义为双曲型余弦函数,记为**

$\operatorname{ch}(x\ln a)$,即

$$\operatorname{sh}(x\ln a)=\frac{a^{x}-a^{-x}}{2}=\frac{e^{x\ln a}-e^{-x\ln a}}{2},$$

$$\operatorname{ch}(x\ln a)=\frac{a^{x}+a^{-x}}{2}=\frac{e^{x\ln a}+e^{-x\ln a}}{2}.$$

类似地,也可以定义其他双曲型函数,这里从略。

双曲型函数具有与双曲函数一样的凑微分公式,如

$$\begin{aligned}&[\operatorname{sh}(x\ln a)+\operatorname{ch}(x\ln a)]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\ln a}\mathrm{d}[\operatorname{ch}(x\ln a)+\operatorname{sh}(x\ln a)],\\&[\operatorname{sh}(x\ln a)-\operatorname{ch}(x\ln a)]\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\ln a}\mathrm{d}[\operatorname{ch}(x\ln a)-\operatorname{sh}(x\ln a)].\end{aligned}$$

这种凑微分公式在组合积分法中有重要作用。

另外,还有和双曲函数类似的公式,如

$$\operatorname{ch}^{2}(x\ln a)-\operatorname{sh}^{2}(x\ln a)=1.$$

3.4.1 含有 $b\operatorname{sh}(x\ln a)+c\operatorname{ch}(x\ln a)$ 的积分

对于系数较简单的情况,可以将积分化为指数函数有理式的积分.

例 1 求 $I=\int\frac{\operatorname{sh}(x\ln a)}{2\operatorname{sh}(x\ln a)+\operatorname{ch}(x\ln a)}\mathrm{d}x$.

解 原积分可化为

$$I=\int\frac{a^{x}+a^{-x}}{3a^{x}-a^{-x}}\mathrm{d}x,$$

再令
$$I_1=\int\frac{a^{x}}{3a^{x}-a^{-x}}\mathrm{d}x,\quad I_2=\int\frac{a^{-x}}{3a^{x}-a^{-x}}\mathrm{d}x$$

则有
$$3I_1-I_2=x,$$

$$3I_1+I_2=\int\frac{3a^{x}+a^{-x}}{3a^{x}-a^{-x}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\ln a}\int\frac{\mathrm{d}(3a^{x}-a^{-x})}{3a^{x}-a^{-x}}$$

$$= \frac{1}{\ln a}\ln|3a^{x} - a^{-x}|.$$

所以有 $$I_1 = \frac{1}{6} \quad x + \frac{1}{\ln a}\ln|3a^{x} - a^{-x}| \quad ,$$

$$I_2 = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{\ln a}\ln|3a^{x} - a^{-x}| - x \quad .$$

于是有 $$I = I_1 + I_2 = \frac{2}{3\ln a}\ln|3a^{x} - a^{-x}| - \frac{1}{3}x + C.$$

如果系数比较复杂,直接用组合积分法求解.

例 2 **求** $I = \int \frac{b_1 \operatorname{sh}(x\ln a) + c_1 \operatorname{ch}(x\ln a)}{b\operatorname{sh}(x\ln a) + c\operatorname{ch}(x\ln a)}\mathrm{d}x \quad (|b| \neq |c|)$.

解 **不妨令**

$$I_1 = \int \frac{\operatorname{sh}(x\ln a)}{b\operatorname{sh}(x\ln a) + c\operatorname{ch}(x\ln a)}\mathrm{d}x,$$

$$I_2 = \int \frac{\operatorname{ch}(x\ln a)}{b\operatorname{sh}(x\ln a) + c\operatorname{ch}(x\ln a)}\mathrm{d}x,$$

则有 $$bI_1 + cI_2 = x,$$

$$cI_1 + bI_2 = \frac{1}{\ln a}\int \frac{\mathrm{d}[b\operatorname{sh}(x\ln x) + c\operatorname{ch}(x\ln a)]}{b\operatorname{sh}(x\ln a) + c\operatorname{ch}(x\ln a)}$$

$$= \frac{1}{\ln a}\ln|b\operatorname{sh}(x\ln a) + c\operatorname{ch}(x\ln a)|.$$

所以有

$$I_1 = \frac{1}{b^2 - c^2} \quad bx - c\frac{1}{\ln a}\ln|b\operatorname{sh}(x\ln a) + c\operatorname{ch}(x\ln a)| \quad ,$$

$$I_2 = \frac{1}{b^2 - c^2} \quad b\frac{1}{\ln a}\ln|b\operatorname{sh}(x\ln a) + c\operatorname{ch}(x\ln a)| - cx \quad .$$

于是有 $$I = b_1 I_1 + c_1 I_2$$

$$= \frac{bb_1 - cc_1}{b^2 - c^2}x + \frac{bc_1 - cb_1}{b^2 - c^2}\frac{1}{\ln a}\ln|b\operatorname{sh}(x\ln a) + c\operatorname{ch}(x\ln a)| + C'.$$

此类积分比较复杂,这里不一一赘述了。

3.4.2 含有 $[b\operatorname{sh}(x\ln a)+c\operatorname{ch}(x\ln a)]^{n}$ $(n>1)$ 的积分

首先来证明两个递推公式。

定理 1 设 b, c 为常数, $|c| \neq |b|$, n 为大于 1 的正整数, 并令

$$J_n=\int \frac{\mathrm{d}x}{[b\operatorname{sh}(x\ln a)+c\operatorname{ch}(x\ln a)]^{n}},$$

则有如下递推公式:

$$J_n=\frac{1}{(n-1)(c^2-b^2)}\left[(n-2)J_{n-2}+\frac{1}{\ln a}\frac{c\operatorname{sh}(x\ln a)+b\operatorname{ch}(x\ln a)}{[b\operatorname{sh}(x\ln a)+c\operatorname{ch}(x\ln a)]^{n-1}}\right]. \qquad (1)$$

证 由

$$\begin{aligned}
J_n&=\frac{1}{\ln a}\int \frac{\mathrm{d}[c\operatorname{sh}(x\ln a)+b\operatorname{ch}(x\ln a)]}{[b\operatorname{sh}(x\ln a)+c\operatorname{ch}(x\ln a)]^{n+1}}\\
&=\frac{1}{\ln a}\frac{c\operatorname{sh}(x\ln a)+b\operatorname{ch}(x\ln a)}{[b\operatorname{sh}(x\ln a)+c\operatorname{ch}(x\ln a)]^{n+1}}\\
&\quad+(n+1)\int \frac{[c\operatorname{sh}(x\ln a)+b\operatorname{ch}(x\ln a)]^2}{[b\operatorname{sh}(x\ln a)+c\operatorname{ch}(x\ln a)]^{n+2}}\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{\ln a}\frac{c\operatorname{sh}(x\ln a)+b\operatorname{ch}(x\ln a)}{[b\operatorname{sh}(x\ln a)+c\operatorname{ch}(x\ln a)]^{n+1}}\\
&\quad-(n+1)\int \frac{(c^2-b^2)\mathrm{d}x}{[b\operatorname{sh}(x\ln a)+c\operatorname{ch}(x\ln a)]^{n+2}}+(n+1)J_n,
\end{aligned}$$

有

$$nJ_n=(n+1)(c^2-b^2)J_{n+2}-\frac{1}{\ln a}\frac{c\operatorname{sh}(x\ln a)+b\operatorname{ch}(x\ln a)}{[b\operatorname{sh}(x\ln a)+c\operatorname{ch}(x\ln a)]^{n+1}}.$$

用 $n-2$ 代替上式中的 n, 得

$$(n-2)J_{n-2}=(n-1)(c^2-b^2)J_n$$

$$-\frac{1}{\ln a}\frac{c\operatorname{sh}(x\ln a)+b\operatorname{ch}(x\ln a)}{[b\operatorname{sh}(x\ln a)+c\operatorname{ch}(x\ln a)]^{n-1}}.$$

故得递推公式

$$J_n=\frac{1}{(n-1)(c^2-b^2)}\left\{(n-2)J_{n-2}+\frac{1}{\ln a}\frac{c\operatorname{sh}(x\ln a)+b\operatorname{ch}(x\ln a)}{[b\operatorname{sh}(x\ln a)+c\operatorname{ch}(x\ln a)]^{n-1}}\right\}.$$

定理 2　令 $J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{[b\operatorname{sh}(x\ln a)+c\operatorname{ch}(x\ln a)]^n}$,

$$A=\frac{a_1b-cb_1}{b^2-c^2},\quad B=\frac{a_1c-b_1b}{b^2-c^2},$$

则有如下递推公式:

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{a_1\operatorname{sh}(x\ln a)+b_1\operatorname{ch}(x\ln a)}{[b\operatorname{sh}(x\ln a)+c\operatorname{ch}(x\ln a)]^n}\mathrm{d}x\\&=AJ_{n-1}+\frac{B}{n-1}\frac{1}{\ln a}\frac{1}{[b\operatorname{sh}(x\ln a)+c\operatorname{ch}(x\ln a)]^{n-1}}.\end{aligned}\tag{2}$$

证　令 $I_1=\int\frac{\operatorname{sh}(x\ln a)\mathrm{d}x}{[b\operatorname{sh}(x\ln a)+c\operatorname{ch}(x\ln a)]^n}$,

$$I_2=\int\frac{\operatorname{ch}(x\ln a)\mathrm{d}x}{[b\operatorname{sh}(x\ln a)+c\operatorname{ch}(x\ln a)]^n},$$

则有

$$bI_1+cI_2=J_{n-1},$$

$$\begin{aligned}cI_1+bI_2&=\frac{1}{\ln a}\int\frac{\mathrm{d}[b\operatorname{sh}(x\ln a)+c\operatorname{ch}(x\ln a)]}{[b\operatorname{sh}(x\ln a)+c\operatorname{ch}(x\ln a)]^n}\\&=\frac{1}{\ln a}\left(-\frac{1}{n-1}\right)\frac{1}{[b\operatorname{sh}(x\ln a)+c\operatorname{ch}(x\ln a)]^{n-1}}.\end{aligned}$$

所以有

$$I_1=\frac{b}{b^2-c^2}J_{n-1}+\frac{c}{(b^2-c^2)\ln a}\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{[b\operatorname{sh}(x\ln a)+c\operatorname{ch}(x\ln a)]^{n-1}},$$

$$I_2=\frac{c}{c^2-b^2}J_{n-1}-\frac{b}{(b^2-c^2)\ln a}\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{[b\operatorname{sh}(x\ln a)+c\operatorname{ch}(x\ln a)]^{n-1}}.$$

于是有

$$\begin{aligned}
I &= a_1 I_1 + b_1 I_2 \\
&= \frac{a_1 b - cb_1}{b^2 - c^2} J_{n-1} + \frac{a_1 c - b_1 b}{b^2 - c^2} \frac{1}{\ln a} \frac{1}{n-1} \\
&\quad \cdot \frac{1}{[b\mathrm{sh}(x\ln a) + c\mathrm{ch}(x\ln a)]^{n-1}} \\
&= AJ_{n-1} + \frac{B}{n-1} \frac{1}{\ln a} \\
&\quad \cdot \frac{1}{[b\mathrm{sh}(x\ln a) + c\mathrm{ch}(x\ln a)]^{n-1}} .
\end{aligned}$$

由递推公式(1)立刻得到

$$J_2 = \frac{1}{c^2 - b^2} \frac{1}{\ln a} \frac{c\mathrm{sh}(x\ln a) + b\mathrm{ch}(x\ln a)}{b\mathrm{sh}(x\ln a) + c\mathrm{ch}(x\ln a)} + C . \qquad (3)$$

例 3　求

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{[b\mathrm{sh}(x\ln a) + c\mathrm{ch}(x\ln a)][c\mathrm{sh}(x\ln a) + b\mathrm{ch}(x\ln a)]} .$$

解　令

$$I_1 = \int \frac{\mathrm{sh}^2(x\ln a)\mathrm{d}x}{[b\mathrm{sh}(x\ln a) + c\mathrm{ch}(x\ln a)][c\mathrm{sh}(x\ln a) + b\mathrm{ch}(x\ln a)]},$$

$$I_2 = \int \frac{\mathrm{ch}^2(x\ln a)\mathrm{d}x}{[b\mathrm{sh}(x\ln a) + c\mathrm{ch}(x\ln a)][c\mathrm{sh}(x\ln a) + b\mathrm{ch}(x\ln a)]},$$

则有

$$\begin{aligned}
b^2 I_1 - c^2 I_2 &= \int \frac{b\mathrm{sh}(x\ln a) - c\mathrm{ch}(x\ln a)}{c\mathrm{sh}(x\ln a) + b\mathrm{ch}(x\ln a)} \mathrm{d}x \\
&= \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} \ln|c\mathrm{sh}(x\ln a) + b\mathrm{ch}(x\ln a)| - \frac{2bc}{b^2 - c^2} \\
&\quad x, \\
c^2 I_1 - b^2 I_2 &= \int \frac{c\mathrm{sh}(x\ln a) - b\mathrm{ch}(x\ln a)}{b\mathrm{sh}(x\ln a) + c\mathrm{ch}(x\ln a)} \mathrm{d}x \\
&= \frac{2bc}{b^2 - c^2} x - \frac{b^2 + c^2}{b^2 - c^2} \ln|a\mathrm{sh}(x\ln a) + b\mathrm{ch}(x\ln a) \\
&\quad | .
\end{aligned}$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{b^4-c^4}\left[\frac{(b^2+c^2)b^2}{b^2-c^2}\ln|c\mathrm{sh}(x\ln a)+b\mathrm{ch}(x\ln a)|\right.$$
$$\left.+\frac{(b^2+c^2)c^2}{b^2-c^2}\ln|b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)|-\frac{2b^3c+2bc^3}{b^2-c^2}x\right],$$

$$I_2=\frac{1}{b^4-c^4}\left[\frac{(b^2+c^2)c^2}{b^2-c^2}\ln|c\mathrm{sh}(x\ln a)+b\mathrm{ch}(x\ln a)|\right.$$
$$\left.-\frac{2b^3c+2bc^3}{b^2-c^2}x+\frac{(b^2+c^2)b^2}{b^2-c^2}\ln|b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)|\right].$$

于是有

$$\begin{aligned}I&=I_2-I_1\\&=\frac{(b^2+c^2)c^2-(b^2+c^2)b^2}{(b^2-c^2)(b^4-c^4)}\ln|c\mathrm{sh}(x\ln a)+b\mathrm{ch}(x\ln a)|\\&\quad+\frac{(b^2+c^2)b^2-(b^2+c^2)c^2}{(b^2-c^2)(b^4-c^4)}\ln|b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)|\\&\quad+C\\&=\frac{1}{b^2-c^2}\ln\left|\frac{b\mathrm{sh}(x\ln a)+c\mathrm{ch}(x\ln a)}{c\mathrm{sh}(x\ln a)+b\mathrm{ch}(x\ln a)}\right|+C.\end{aligned}$$

由于双曲型函数式比较繁杂,加上用组合积分法求解的过程与双曲函数有理式的积分方法差不多,因此这里仅举两例,不再多作阐述了。

3.5 双曲函数与反双曲函数的积分

双曲函数、反双曲函数的定义分别如表 3.1、表 3.2 所示。

表 3.1 双曲函数的定义

函数名称	记　号	定义与表达式
双曲正弦	$\mathrm{sh}\ x$	$\mathrm{sh}\ x=\frac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{2}$
双曲余弦	$\mathrm{ch}\ x$	$\mathrm{ch}\ x=\frac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$

双曲正切	th x	$\dfrac{\text{sh}\ x}{\text{ch}\ x}=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$
双曲余切	cth x	$\dfrac{\text{sh}\ x}{\text{ch}\ x}=\dfrac{e^x+e^{-x}}{e^x-e^{-x}}$
双曲正割	sech x	$\dfrac{1}{\text{ch}\ x}=\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$
双曲余割	csch x	$\dfrac{1}{\text{sh}\ x}=\dfrac{2}{e^x+e^{-x}}$

表 3.2　反双曲函数的定义

函数名称	记　　号	对数表达式
反双曲正弦	arsh x	$\ln(x+\sqrt{x^2+1})$
反双曲余弦	arch x	$\pm\ln(x+\sqrt{x^2-1})\quad(\lvert x\rvert\geq 1)$
反双曲正切	arth x	$\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x}\quad(\lvert x\rvert<1)$
反双曲余切	arcth x	$\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{x+1}{x-1}\quad(\lvert x\rvert>1)$
反双曲正割	arsech x	$\pm\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+\sqrt{1-x^2}}{1-\sqrt{1-x^2}}\quad(0<\lvert x\rvert\leq 1)$
反双曲余割	arcsch x	$\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\sqrt{1+x^2}+1}{\sqrt{1+x^2}-1}\quad(x\neq 0)$

用普通的积分法很容易求得

$$\int \text{sh}\ x\,\text{d}x=\text{ch}\ x+C,\qquad \int \text{ch}\ x\,\text{d}x=\text{sh}\ x+C.$$

用凑微法十分容易地求出双曲正切与双曲余切的积分,即

$$\int \text{th}\ x\,\text{d}x=\int\frac{\text{sh}\ x}{\text{ch}\ x}\text{d}x=\int\frac{\text{dch}\ x}{\text{ch}\ x}=\ln|\text{ch}\ x|+C_1$$

$$=\ln(e^x+e^{-x})+C\quad(C=C_1-\ln 2).$$

同样有 $\displaystyle\int \text{cth}\ x\,\text{d}x=\int\frac{\text{ch}\ x}{\text{sh}\ x}\text{d}x=\ln|e^x-e^{-x}|+C.$

双曲正割和双曲余割的积分也易求出,即

$$\int \text{sech}\ x\,\text{d}x=\int\frac{2\text{d}x}{e^x+e^{-x}}=2\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}\text{d}x=2\arctan e^x+C.$$

同样有

$$\int \operatorname{cech} x\mathrm{d}x = \int \frac{2\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-x}} = 2\int \frac{\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{2x} - 1} = \ln\left|\frac{\mathrm{e}^{x} - 1}{\mathrm{e}^{x} + 1}\right| + C.$$

关于反双曲函数的积分要难一些,下面来逐一讨论 .

例 1 求 $\int \operatorname{arsh} x\,\mathrm{d}x$.

解

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arsh} x\,\mathrm{d}x &= \int \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})\mathrm{d}x \\ &= x\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \int x\mathrm{d}\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \\ &= x\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \int \frac{x\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + 1}} \\ &= x\ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) - \sqrt{x^2 + 1} + C.\end{aligned}$$

例 2 求 $\int \operatorname{arch} x\,\mathrm{d}x$ (**反函数** $y > 0$) .

解

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arch} x\,\mathrm{d}x &= \int \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})\mathrm{d}x \\ &= x\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) - \int x\mathrm{d}\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) \\ &= x\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) - \int \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}\mathrm{d}x \\ &= x\ln(x + \sqrt{x^2 - 1}) - \sqrt{x^2 - 1} + C.\end{aligned}$$

例 3 求 $\int \operatorname{arth} x\,\mathrm{d}x$ $(|x| < 1)$.

解

$$\begin{aligned}\int \operatorname{arth} x\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{2}\int \ln\frac{1 + x}{1 - x}\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}\left[\int \ln(1 + x)\mathrm{d}x - \int \ln(1 - x)\mathrm{d}x\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[x\ln\frac{1 + x}{1 - x} + \ln(1 - x^2)\right] + C.\end{aligned}$$

同样可得

$$\int \operatorname{arcth} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left[x\ln\frac{1 + x}{1 - x} + \ln(x^2 - 1)\right] + C.$$

例 4 求 $\int \operatorname{arsech} x\,\mathrm{d}x$ $(0 < |x| \leq 1, y > 0)$.

解 $\int \operatorname{arsech} x\,\mathrm{d}x$

$$= \frac{1}{2}\int [\ln(1 + \sqrt{1 - x^2}) - \ln(1 - \sqrt{1 - x^2})]\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}x\ln\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{1 - \sqrt{1 - x^2}} + x + C.$$

同样可求得

$$\int \operatorname{arcsch} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}x\ln\frac{\sqrt{1 + x^2} + 1}{\sqrt{1 + x^2} - 1} + \ln(x + \sqrt{1 + x^2}) + C.$$

综上所述,得到双曲函数与反双曲函数积分表(见表 3.3),以便读者查阅.

表 3.3　双曲函数与反双曲函数积分表

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$\operatorname{th} x$	$\ln(\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x})$ 或 $\ln(\operatorname{ch} x)$
$\operatorname{cth} x$	$\ln(\mathrm{e}^{x}-\mathrm{e}^{-x})$ 或 $\ln(\operatorname{sh} x)$
$\operatorname{sech} x$	$2\arctan \mathrm{e}^{x}$
$\operatorname{csch} x$	$\ln\dfrac{\mathrm{e}^{x}-1}{\mathrm{e}^{x}+1}$
$\operatorname{arsh} x$	$x\ln(x+\sqrt{x^{2}+1})-\sqrt{x^{2}+1}$
$\operatorname{arch} x\ (y>0)$	$x\ln(x+\sqrt{x^{2}-1})-\sqrt{x^{2}-1}\quad(\lvert x\rvert\geq 1)$
$\operatorname{arth} x$	$\dfrac{1}{2}\left[x\ln\dfrac{1+x}{1-x}+\ln(1-x^{2})\right]\quad(\lvert x\rvert<1)$
$\operatorname{arcth} x$	$\dfrac{1}{2}\left[x\ln\dfrac{1+x}{x-1}+\ln(x^{2}-1)\right]\quad(\lvert x\rvert>1)$
$\operatorname{arsech} x\ (y>0)$	$\dfrac{1}{2}x\ln\dfrac{1+\sqrt{1-x^{2}}}{1-\sqrt{1-x^{2}}}+x\quad(0<\lvert x\rvert\leq 1)$
$\operatorname{arcsch} x$	$\dfrac{1}{2}x\ln\dfrac{\sqrt{1+x^{2}}+1}{\sqrt{1+x^{2}}-x}+\ln(x+\sqrt{1+x^{2}})$

注:1. 积分结果中省去了积分常数 C.

2. $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$是指 $\ln\left\lvert\dfrac{1+x}{1-x}\right\rvert$,其他类似.

第 4 章　一类无理函数的积分

一些简单的无理函数的积分,可用换元法将积分化为有理函数或三角函数的积分来求解。但是,有些比较复杂的无理函数的积分,用换元法化为有理函数或三角函数的积分后,用传统的方法求积分还是比较困难,有些甚至无法“积”出来.因此,需探求新的积分方法,即本章所要介绍的如何使用组合积分法来求这类无理函数的积分。

例 1　求 $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{3x+2\sqrt{1-x^2}}$.

解　此题如果用传统的方法求解,即如下图 4.1 所示。

$\boxed{\text{原积分}} \xrightarrow{\text{三角代换}} \boxed{\text{三角函数的积分}} \xrightarrow{\text{万能代换}} \boxed{\text{有理式积分}}$

图 4.1　用传统方法求积分框图

作三角变换

$$x=\sin t,\quad \mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t,$$

则原积分可变为

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3x+2\sqrt{1-x^2}}=\int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{3\sin t+2\cos t}. \tag{1}$$

再对右边积分作万能代换,即令 $\tan\dfrac{t}{2}=u$,则有

$$\cos t=\frac{1-u^2}{1+u^2},\quad \sin t=\frac{2u}{1+u^2},\quad \mathrm{d}t=\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}.$$

代入式(1)右边即得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3x+2\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{3\sin t+2\cos t} = \int \frac{\frac{1-u^2}{1+u^2}\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}}{\frac{2u}{1+u^2}+\frac{1-u^2}{1+u^2}}$$

$$= \int \frac{(1-u^2)\mathrm{d}u}{(3u+1-u^2)(1+u^2)}.$$

要求出上式右边有理函数的积分是相当困难的,如果采用组合积分法,将是十分方便的。对式(1)右边积分,可令

$$I = \int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{3\sin t+2\cos t}, \quad J = \int \frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{3\sin t+2\cos t},$$

则有 $2I+3J = \int \frac{2\cos t+3\sin t}{3\sin t+2\cos t}\mathrm{d}t = t$ (不计一常数之差,以下同), (2)

$$3I-2J = \int \frac{3\cos t-2\sin t}{3\sin t+2\cos t}\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}(3\sin t+2\cos t)}{3\sin t+2\cos t}$$

$$= \ln|3\sin t+2\cos t|. \qquad (3)$$

所以有 $$I = \frac{1}{13}(2t+3\ln|3\sin t+2\cos t|)+C.$$

又由题设 $\sin t = x$,则

$$\cos t = \sqrt{1-x^2}, \quad t = \arcsin x,$$

故得

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{3x+2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{13}(2\arcsin x+3\ln|3x+2\sqrt{1-x^2}|)+C.$$

例 2 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\sqrt{x})(1+\sqrt{x})}$.

解 作变换 $x = t^2$, $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$,则原积分可变换为

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\sqrt{x})(1+\sqrt{x})} = 2\int \frac{t\mathrm{d}t}{(2+t)(1+t)}.$$

对于上式右边的积分可用传统的分项法(即部分分式法)求解,虽然不麻烦,但用组合积分法更简便。可令

$$I = \int \frac{t\mathrm{d}t}{(2+t)(1+t)}, \quad J = \int \frac{\mathrm{d}t}{(2+t)(1+t)}$$

则有

$$I + J = \int \frac{\mathrm{d}t}{2+t} = \ln|2+t|,$$

$$I + 2J = \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln|1+t|.$$

所以有 $$I = 2\ln|2+t| - \ln|1+t| + C_1.$$

故得

$$\begin{aligned}
&\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+x)(1+x)} \\
&= \int \frac{2t\mathrm{d}t}{(2+t)(1+t)} = 2I \\
&= 4\ln|2+t| - 2\ln|1+t| + 2C_1 \\
&\xlongequal{\text{回代 } t = x} \ln\frac{(2+x)^4}{(1+x)^2} + C \quad (C = 2C_1).
\end{aligned}$$

像上面两例那样对一类无理式的积分,可考虑使用组合积分法求解。特别对比较复杂的情形用组合积分法求解更方便.对于这类无理函数的积分,其求法如下图 4.2 所示。

图 4.2 用组合积分法求积分框图

下面通过对一些无理函数的积分的例子的讲述,进一步地阐明如何使用组合积分法求一类无理函数的积分。

4.1 含有 $a^2 - x^2$ 的无理式的积分

对于含有 $a^2 - x^2$ 的无理式的积分,可作三角变换,令 $x = a\sin t$,则 $\mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t$,将此无理式的积分转化为三角函数的积分,然后用组合积分法求之。

例 3　求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}\ (a>0)$.

解　作三角变换,设 $x=a\sin t$,则 $\mathrm{d}x=a\cos t\,\mathrm{d}t$,于是原积分可变为

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}=\int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t}.$$

对于上式右边的积分,可令

$$I=\int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t},\quad J=\int \frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{\sin t+\cos t},$$

则有

$$I+J=\int \frac{\cos t+\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=t,$$

$$I-J=\int \frac{\cos t-\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=\int \frac{\mathrm{d}(\sin t+\cos t)}{\sin t+\cos t}=\ln|\sin t+\cos t|.$$

所以有

$$I=\frac{1}{2}[t+\ln|\sin t+\cos t|]+C_1.$$

又由题设知 $a\sin t=x$,则

$$\sin t=\frac{x}{a},\quad \cos t=\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a},\quad t=\arcsin x,$$

于是有

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}[t+\ln|\sin t+\cos t|]+C_1\\&=\frac{1}{2}\ \arcsin x+\ln\left|\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\right|\ +C_1\\&=\frac{1}{2}[\arcsin x+\ln|x+\sqrt{a^2-x^2}|]+C\quad C=C_1-\frac{1}{2}\ln a.\end{aligned}$$

对于一般情形的积分,如例 4 所述。

例 4　求 $I=\int \frac{\mathrm{d}x}{ax+b\sqrt{1-x^2}}$.

解　设 $x=\sin t$,则 $\mathrm{d}x=\cos t\,\mathrm{d}t$,于是原积分可变为

$$I=\int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{a\sin t+b\cos t},$$

再令
$$J = \int \frac{\sin t \, \mathrm{d} t}{a\sin t + b\cos t},$$
则有
$$bI + aJ = \int \frac{b\cos t + a\sin t}{a\sin t + b\cos t}\mathrm{d} t = t,$$
$$aI - bJ = \int \frac{a\cos t - b\sin t}{a\sin t + b\cos t}\mathrm{d} t = \int \frac{\mathrm{d}(a\sin t + b\cos t)}{a\sin t + b\cos t}$$
$$= \ln|a\sin t + b\cos t| .$$
所以有
$$I = \frac{1}{a^2 + b^2}[bt + a\ln|a\sin t + b\cos t|] + C .$$
又由题设知 $\sin t = x$,**则**
$$\cos t = \sqrt{1 - x^2}, \quad t = \arcsin x,$$
故得
$$I = \frac{1}{a^2 + b^2}[b\arcsin x + a\ln|ax + b\sqrt{1 - x^2}|] + C。$$
对于更一般情形的积分,**如例** 5 **所述。**

例 5 **求** $I = \int \frac{\mathrm{d} x}{ax + b\sqrt{a^2 - x^2}} \quad (a > 0)$.

解 **设** $x = a\sin t$,**则** $\mathrm{d} x = a\cos t \, \mathrm{d} t$,**于是原积分可变为**
$$I = \int \frac{a\cos t \, \mathrm{d} t}{a^2\sin t + ab\cos t} = \int \frac{\cos t \, \mathrm{d} t}{a\sin t + b\cos t} .$$
由例 4 **的结论知**
$$I = \frac{1}{a^2 + b^2}[bt + a\ln|a\sin t + b\cos t|] + C_1 .$$
又由题设知 $x = a\sin t$,**则**
$$\sin t = \frac{x}{a}, \quad \cos t = \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}, \quad t = \arcsin\frac{x}{a},$$
故得
$$I = \frac{1}{a^2 + b^2}\left[b\arcsin\frac{x}{a} + a\ln\left|x + \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right|\right] + C_1$$

$$= \frac{1}{a^2 + b^2} \quad b\arcsin\frac{x}{a} + a\ln\left| ax + b \quad a^2 - x^2 \right| \quad + C$$

$$C = C_1 - \frac{1}{a^2 + b^2}\ln \quad a \text{ 。}$$

例 6 **求** $I = \int \frac{x\,\mathrm{d}\,x}{ax + b \quad 1 - x^2}$.

解 **设** $x = \sin t$, **则** $\mathrm{d}\,x = \cos t\,\mathrm{d}\,t$, **于是原积分可变为**

$$I = \int \frac{\sin t \cos t\,\mathrm{d}\,t}{a\sin t + b\cos t} . \qquad (1)$$

再令

$$I_1 = \int \frac{\cos^2 t\,\mathrm{d}\,t}{a\sin t + b\cos t}, \quad I_2 = \int \frac{\sin^2 t\,\mathrm{d}\,t}{a\sin t + b\cos t},$$

于是便有

$$a^2 I_2 + 2abI + b^2 I_1 = \int (a\sin t + b\cos t)\,\mathrm{d}\,t = b\sin t - a\cos t, \qquad (2)$$

$$a^2 I_2 - b^2 I_1 = \int (a\sin t - b\cos t)\,\mathrm{d}\,t = -(b\sin t + a\cos t), \qquad (3)$$

$$I_2 + I_1 = \int \frac{\mathrm{d}\,t}{a\sin t + b\cos t} = \frac{1}{a^2 + b^2}\ln \quad \tan\frac{t + \arctan\frac{b}{a}}{2} \quad . \qquad (4)$$

(2) + (3)**得**

$$a^2 I_2 + abI = -a\cos t,$$

即

$$I = -\frac{1}{b}(\cos t + aI_2) .$$

又(3) + (4) × b^2, **得**

$$I_2 = \frac{1}{a^2 + b^2} \quad \frac{b^2}{a^2 + b^2}\ln \quad \tan\frac{t + \arctan\frac{b}{a}}{2} \quad - b\sin t - a\cos t \text{ 。}$$

所以有

$$I = -\frac{1}{b}\cos t - \frac{a}{b}\frac{1}{a^2 + b^2}$$

$$\cdot \frac{b^2}{a^2+b^2}\ln\left|\tan\frac{t+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right| - b\sin t - a\cos t\Bigg],$$

又由题设知 $\sin t = x$, **则**

$$\cos t = \sqrt{1-x^2}, \quad t = \arcsin x,$$

于是有

$$I = -\frac{1}{b}\sqrt{1-x^2} - \frac{a}{b(a^2+b^2)}\Bigg[a\sqrt{1-x^2}+b$$

$$\cdot \frac{b^2}{a^2+b^2}\ln\left|\tan\frac{\arcsin x+\arctan\frac{b}{a}}{2}\right| - bx - a\sqrt{1-x^2}\Bigg] + C.$$

例 7 **求** $I = \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}+x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

解 **设** $x = \sin t$, **则** $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$, **原积分可化为**

$$I = \int \frac{\sin t\cos t\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t+\sin t\cos t} = \int \frac{\sin t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t.$$

再令 $$J = \int \frac{\cos t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t,$$

则有 $$I + J = \int \frac{\sin t+\cos t}{\cos t+\sin t}\mathrm{d}t = t,$$

$$J - I = \int \frac{\mathrm{d}(\cos t+\sin t)}{\cos t+\sin t} = \ln|\cos t+\sin t|.$$

所以有 $$I = \frac{1}{2}(t+\ln|\cos t+\sin t|) + C.$$

又由题设知 $\sin t = x$, **则**

$$\cos t = \sqrt{1-x^2}, \quad t = \arcsin t,$$

于是有 $$I = \frac{1}{2}[\arcsin x+\ln(x+\sqrt{1-x^2})] + C.$$

例 8 **求** $I = \int \frac{(1-x^2)\mathrm{d}x}{1+x\sqrt{1-x^2}} \quad (|x|\neq 1)$.

解 **作变换** $x = \sin t$, **则** $\mathrm{d}x = \cos t\,\mathrm{d}t$, **于是原积分可变为**

$$I = \int \frac{\cos^3 t\,\mathrm{d}t}{1+\sin t\cos t}.$$

再令
$$J=\int\frac{\sin^3 t\,\mathrm{d}t}{1+\sin t\cos t},$$
则有
$$\begin{aligned}
I+J&=\int\frac{(\cos^3 t+\sin^3 t)}{1+\sin t\cos t}\mathrm{d}t\\
&=\int\frac{(\cos t+\sin t)(1-\sin t\cos t)}{1+\sin t\cos t}\mathrm{d}t\\
&=\int\frac{(\cos t+\sin t)(2-2\sin t\cos t)}{2+2\sin t\cos t}\mathrm{d}t\\
&=\int\frac{[1+(\sin t-\cos t)^2](\cos t+\sin t)}{3-(\sin t-\cos t)^2}\mathrm{d}t\\
&=\int\frac{1+(\sin t-\cos t)^2}{3-(\sin t-\cos t)^2}\mathrm{d}(\sin t-\cos t)
\end{aligned}$$
令 $u=\sin t-\cos t$ $\quad\int\frac{1+u^2}{3-u^2}\mathrm{d}u$
$$\begin{aligned}
&=\int\frac{4-(3-u^2)}{3-u^2}\mathrm{d}u=\int\frac{4\mathrm{d}u}{3-u^2}-\int\mathrm{d}u\\
&=\frac{2}{3}\ln\left|\frac{3+u}{3-u}\right|-u
\end{aligned}$$
回代 $u=\sin t-\cos t$ $\quad\frac{2}{3}\ln\left|\frac{3+\sin t-\cos t}{3-\sin t+\cos t}\right|$
$$-\sin t+\cos t.$$
$$I-J=\int\frac{\cos^3 t-\sin^3 t}{1+\sin t\cos t}\mathrm{d}t=\int(\cos t-\sin t)\mathrm{d}t=\sin t+\cos t.$$
所以有
$$\begin{aligned}
I&=\frac{1}{2}\quad\frac{2}{3}\ln\left|\frac{3+\sin t-\cos t}{3-\sin t+\cos t}\right|\\
&\quad-\sin t+\cos t+\sin t+\cos t\quad+C\\
&=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3+\sin t-\cos t}{3-\sin t+\cos t}\right|+\cos t+C
\end{aligned}$$
回代 $\sin t=x$
$\cos t=\quad 1-x^2$ $\quad\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3+x-\quad 1-x^2}{3-x+\quad 1-x^2}\right|+\quad 1-x^2+C.$

例 9 **求** $I = \int \frac{\sqrt{1 - x^2}}{ax + b\sqrt{1 - x^2}} \mathrm{d}x$.

解 **设** $x = \sin t$, **则** $\mathrm{d}x = \cos t \, \mathrm{d}t$, **于是原积分可变为**

$$I = \int \frac{\cos^2 t}{a\sin t + b\cos t} \mathrm{d}t.$$

再令

$$J = \int \frac{\sin^2 t}{a\sin t + b\cos t} \mathrm{d}t,$$

则有

$$I + J = \int \frac{\mathrm{d}t}{a\sin t + b\cos t} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \tan \frac{t + \arctan \frac{b}{a}}{2},$$

$$b^2 I - a^2 J = \int \frac{b^2\cos^2 t - a^2\sin^2 t}{a\sin t + b\cos t} \mathrm{d}t = \int (b\cos t - a\sin t) \mathrm{d}t$$

$$= b\sin t + a\cos t.$$

所以有

$$I = \frac{1}{a^2 + b^2} \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \tan \frac{t + \arctan \frac{b}{a}}{2} + b\sin t + a\cos t + C.$$

又由题设 $\sin t = x$, **则**

$$\cos t = \sqrt{1 - x^2}, \quad t = \arcsin x,$$

故得

$$I = \frac{1}{a^2 + b^2} \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \ln \tan \frac{\arcsin x + \arctan \frac{b}{a}}{2} + bx + a\sqrt{1 - x^2} + C.$$

例 10 **求** $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{1 + x + \sqrt{1 - x^2}}$.

解 **设** $x = \sin t$, **则** $\mathrm{d}x = \cos t \, \mathrm{d}t$, **于是原积分可变为**

$$I = \int \frac{\cos t \, \mathrm{d}t}{1 + \sin t + \cos t}.$$

再令

$$J = \int \frac{\sin t}{1 + \sin t + \cos t} \mathrm{d}t,$$

则有
$$I+J+\int\frac{\mathrm{d}t}{1+\sin t+\cos t}=t,$$
即
$$I+J=t-\int\frac{\mathrm{d}t}{1+\sin t+\cos t}=t-\ln\left|1+\tan\frac{t}{2}\right|,$$
$$I-J=\int\frac{\cos t-\sin t}{1+\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}(1+\sin t+\cos t)}{1+\sin t+\cos t}$$
$$=\ln|1+\sin t+\cos t|.$$
所以有
$$I=\frac{1}{2}\left[t+\ln|1+\sin t+\cos t|-\ln\left|1+\tan\frac{t}{2}\right|\right]+C$$
$$=\frac{1}{2}(t+\ln|1+\cos t|)+C$$
$$\xrightarrow[\cos t=\sqrt{1-x^2}]{\text{回代 } t=\arcsin x}\frac{1}{2}[\arcsin x+\ln(1+\sqrt{1-x^2})]+C.$$

组合积分法应用很广泛,它巧妙地运用了解方程组的方法来求一类难度大的积分。有一种观点则认为,研究积分的求法无多大意义,真正碰到了难度大的积分,查表就行了,何必费神呢?不过这里要提醒读者,我们介绍组合积分法的初衷,就是要解决在传统的积分表中查不出来的难度大的积分。再说,掌握一种新的积分方法对于加强基础训练也是大有益处的。

习　题　4.1

求下列无理式的不定积分:

(1) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{2x+\sqrt{1-x^2}}$;　　(2) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{9-x^2}}$;

(3) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;　　(4) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int\frac{\sqrt{1-x^2}}{1+x+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$;　　(6) $\displaystyle\int\frac{x}{2x+\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}x$.

4.2 含有 $x^2 + a^2$ 的无理式的积分

对于含有无理式 $x^2 + a^2$ **的积分，可作换元，设** $x = a\operatorname{sh} t$，**则** $\mathrm{d}x = a\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t$，**然后将积分转化为双曲函数有理式的积分，用组合积分法求之。**

例 1　求 $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{2x + x^2 + 9}$.

解　设 $x = 3\operatorname{sh} t$，**则** $\mathrm{d}x = 3\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t$，**于是原积分可变为**

$$I = \int \frac{3\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t}{6\operatorname{sh} t + 9\operatorname{sh}^2 t + 9} = \int \frac{\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t}{2\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t}.$$

再令

$$J = \int \frac{\operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t}{2\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t},$$

则有

$$I + 2J = \int \frac{\operatorname{ch} t + 2\operatorname{sh} t}{2\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t}\mathrm{d}t = t,$$

$$2I + J = \int \frac{2\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t}{2\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t}\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}(2\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t)}{2\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t}$$

$$= \ln(2\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t).$$

解方程组便有

$$I = \frac{1}{3}[2\ln(2\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t) - t] + C_1. \qquad (1)$$

又由题设知 $x = 3\operatorname{sh} t$，**则**

$$\operatorname{sh} t = \frac{x}{3}, \quad \operatorname{ch} t = 1 + \frac{x}{3}^{2} = \frac{1}{3} x^2 + 9,$$

$$t = \operatorname{arsh}\frac{x}{3} = \ln \frac{x}{3} + \frac{x}{3}^{2} + 1 = \ln(x + x^2 + 9) - \ln 3, \qquad (2)$$

将式(2)代入式(1)，便有

$$I = \frac{1}{3} 2\ln \frac{2x}{3} + \frac{1}{3} x^2 + 9 - \ln(x + x^2 + 9) - \ln 3 + C_1$$

$$= \frac{2}{3}\ln(2x + x^2 + 9) - \frac{1}{3}\ln(x + x^2 + 9) + C$$

$$(C = C_1 - \ln 3).$$

一般情形下的积分如例 2 所述,用组合积分法解非常方便。

例 2　求 $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{ax + b\sqrt{x^2 + a^2}}$　$(a > 0$ **且** $|a| \neq |b|)$.

解　设 $x = a\operatorname{sh} t, \mathrm{d}x = a\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t$,**则原积分可变为**

$$I = \int \frac{a\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t}{a^2\operatorname{sh} t + ab\operatorname{ch} t} = \int \frac{\operatorname{ch} t}{a\operatorname{sh} t + b\operatorname{ch} t}\mathrm{d}t. \tag{1}$$

再令

$$J = \int \frac{\operatorname{sh} t}{a\operatorname{sh} t + b\operatorname{ch} t}\mathrm{d}t,$$

则

$$bI + aJ = \int \frac{b\operatorname{ch} t + a\operatorname{sh} t}{a\operatorname{sh} t + b\operatorname{ch} t}\mathrm{d}t = t,$$

$$aI + bJ = \int \frac{a\operatorname{ch} t + b\operatorname{sh} t}{a\operatorname{sh} t + b\operatorname{ch} t}\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}(a\operatorname{sh} t + b\operatorname{ch} t)}{a\operatorname{sh} t + b\operatorname{ch} t}$$

$$= \ln(a\operatorname{sh} t + b\operatorname{ch} t).$$

解方程组,得

$$I = \frac{1}{a^2 - b^2}[a\ln(a\operatorname{sh} t + b\operatorname{ch} t) - bt] + C_1. \tag{2}$$

又因为由题设知 $x = a\operatorname{sh} t$,**则**

$$\operatorname{sh} t = \frac{x}{a},\quad \operatorname{ch} t = \frac{1}{a}\sqrt{x^2 + a^2},$$

$$t = \operatorname{arsh}\frac{x}{a} = \ln\left(\frac{x}{a} + \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1}\right)$$

$$= \ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - \ln a. \tag{3}$$

将式(3)代入式(2)便有

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{a^2 - b^2}[a\ln(ax + b\sqrt{x^2 + a^2}) - a\ln a \\ &\quad - b\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2}) - b\ln a] + C_1, \\ &= \frac{1}{a^2 - b^2}[a\ln(ax + b\sqrt{x^2 + a^2}) \\ &\quad - b\ln(x + \sqrt{x^2 + a^2})] + C \quad \left(C = C_1 + \frac{\ln[a(a+b)]}{a^2 - b^2}\right). \end{aligned}$$

例 3 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{ax+b\sqrt{x^2+1}}\quad(|a|\neq|b|)$.

解 设 $x=\operatorname{sh}t$,则 $\mathrm{d}x=\operatorname{ch}t\,\mathrm{d}t$,于是原积分可变为

$$I=\int\frac{\operatorname{ch}t\,\mathrm{d}t}{a\operatorname{sh}t+b\operatorname{ch}t}.$$

由例 2 的结论不难得到

$$I=\frac{1}{a^2-b^2}[a\ln(a\operatorname{sh}t+b\operatorname{ch}t)-bt]+C_1. \qquad (1)$$

又因为由题设知 $x=\operatorname{sh}t$,则

$$\operatorname{ch}t=\sqrt{x^2+1},\quad t=\operatorname{arsh}x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}), \qquad (2)$$

将式(2)代入式(1)便有

$$I=\frac{1}{a^2-b^2}[a\ln(ax+b\sqrt{x^2+1})-b\ln(x+\sqrt{x^2+1})]+C.$$

比较例 2 与例 3,其被积函数在形式上差不多,但结果不一样,例 2 较复杂,而例 3 则简单得多。

当$|a|=|b|$时,上例也可用组合积分法求解。例 3 可变为

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{ax+a\sqrt{x^2+1}}=\frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2+1}}\quad(a\neq0).$$

可设 $x=\operatorname{sh}t$,则 $\mathrm{d}x=\operatorname{ch}t\,\mathrm{d}t$,于是原积分可变为

$$I_1=\int\frac{\operatorname{ch}t\,\mathrm{d}t}{\operatorname{sh}t+\operatorname{ch}t}\mathrm{d}t.$$

可令
$$I_2=\int\frac{\operatorname{sh}t}{\operatorname{sh}t+\operatorname{ch}t}\mathrm{d}t,$$

则有
$$I_1+I_2=\int\frac{\operatorname{ch}t+\operatorname{sh}t}{\operatorname{sh}t+\operatorname{ch}t}\mathrm{d}t=t,$$

$$I_1-I_2=\int\frac{\operatorname{ch}t-\operatorname{sh}t}{\operatorname{sh}t+\operatorname{ch}t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^{t}}\mathrm{d}t=\int\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}.$$

所以有
$$I_1=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right).$$

于是便有
$$I=\frac{1}{a}I_1=\frac{1}{2a}\left(t-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right)+C.$$

又由题设知 $x=\operatorname{sh}t$,则

$$\operatorname{ch} t=\sqrt{x^2+1},\quad t=\operatorname{arsh} t=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),$$

$$\mathrm{e}^t=x+\sqrt{x^2+1},\quad \mathrm{e}^{-2t}=\frac{1}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}.$$

所以有

$$I=\frac{1}{2a}\left[\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\frac{1}{2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)^2}\right]+C.$$

例 4　求 $I=\int\frac{\sqrt{x^2+1}\,\mathrm{d}x}{ax+b\sqrt{x^2+1}}\ (a^2>b^2)$.

解　设 $x=\operatorname{sh} t$，**则** $\mathrm{d}x=\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t$，**于是原积分可变为**

$$I=\int\frac{\operatorname{ch}^2 t\,\mathrm{d}t}{a\operatorname{sh} t+b\operatorname{ch} t}.$$

再令

$$J=\int\frac{\operatorname{sh}^2 t\,\mathrm{d}t}{a\operatorname{sh} t+b\operatorname{ch} t},$$

则有

$$a^2J-b^2I=\int(a\operatorname{sh} t-b\operatorname{ch} t)\,\mathrm{d}t=a\operatorname{ch} t-b\operatorname{sh} t,$$

$$I-J=\int\frac{\operatorname{ch}^2 t-\operatorname{sh}^2 t}{a\operatorname{sh} t+b\operatorname{ch} t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}t}{a\operatorname{sh} t+b\operatorname{ch} t}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\,\mathrm{e}^t\right)。$$

所以有

$$I=\frac{1}{a^2-b^2}\left[\frac{2a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\,\mathrm{e}^t\right)+a\operatorname{ch} t-b\operatorname{sh} t\right]+C.$$

又由题设

$$x=\operatorname{sh} t,\quad \operatorname{ch} t=\sqrt{x^2+1},\quad \mathrm{e}^t=x+\sqrt{x^2+1},$$

于是有

$$I=\frac{1}{a^2-b^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{a^2-b^2}}\arctan\left[\sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]$$

$$+\frac{1}{a^2-b^2}\left(a\sqrt{x^2+1}-bx\right)+C.$$

例 5　求 $I=\int\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2+x\sqrt{x^2+1}}$.

解　设 $x = \operatorname{sh} t$, **则** $\mathrm{d}x = \operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t$, **所以原积分可变为**

$$I = \int \frac{\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t}{\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh} t \operatorname{ch} t} = \int \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t}\mathrm{d}t .$$

再令
$$J = \int \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t}\mathrm{d}t,$$

则有
$$I + J = t,$$

$$I - J = \int \frac{\operatorname{sh} t - \operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t}\mathrm{d}t = -\int \frac{\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^{t}}\mathrm{d}t = -\int \mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t} .$$

所以有
$$I = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right) + C .$$

又因为由题设知

$$x = \operatorname{sh} t, \quad \operatorname{ch} t = x^2 + 1,$$

$$\mathrm{e}^{-2t} = \frac{1}{(x + x^2 + 1)^2}, \quad t = \ln(x + x^2 + 1),$$

故得

$$I = \frac{1}{2}\ln(x + x^2 + 1) + \frac{1}{4}\frac{1}{(x + x^2 + 1)^2} + C .$$

一般情形的积分如例 6 **所述**.

例 6　求 $I = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{a(1 + x^2) + bx\ 1 + x^2} \quad (|a| \neq |b|)$。

解　设 $x = \operatorname{sh} t$, **则** $\mathrm{d}x = \operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t$, **于是原积分可变为**

$$I = \int \frac{\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t}{a\operatorname{ch}^2 t + b\operatorname{sh} t \operatorname{ch} t} = \int \frac{\operatorname{sh} t}{a\operatorname{ch} t + b\operatorname{sh} t}\mathrm{d}t .$$

再令
$$J = \int \frac{\operatorname{ch} t}{a\operatorname{ch} t + b\operatorname{sh} t}\mathrm{d}t .$$

则
$$bI + aJ = t,$$

$$aI + bJ = \int \frac{a\operatorname{sh} t + b\operatorname{ch} t}{a\operatorname{ch} t + b\operatorname{sh} t}\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}(a\operatorname{ch} t + b\operatorname{sh} t)}{a\operatorname{ch} t + b\operatorname{sh} t}$$
$$= \ln(a\operatorname{ch} t + b\operatorname{sh} t) .$$

所以有
$$I = \frac{1}{a^2 - b^2}[a\ln(a\operatorname{ch} t + b\operatorname{sh} t) - bt] + C .$$

又由题设知 $\operatorname{sh} t = x$，则

$$\operatorname{ch} t = \sqrt{x^2 + 1}, \quad t = \operatorname{arsh} t = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right),$$

所以有

$$I = \frac{1}{a^2 - b^2}\left[a\ln\left(bx + a\sqrt{x^2 + 1}\right) - b\ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)\right] + C.$$

更一般情形的积分如例 7 所述 .

例 7 求 $I = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2 + a^2 + x\sqrt{x^2 + a^2}} \quad (a > 0)$.

解 设 $x = a\operatorname{sh} t$，则 $\mathrm{d}x = a\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t$，于是原积分可变为

$$I = \int \frac{a\operatorname{sh} t\, a\operatorname{ch} t}{a^2\operatorname{ch}^2 t + a^2\operatorname{ch} t \operatorname{sh} t}\mathrm{d}t = \int \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t}\mathrm{d}t .$$

再令

$$J = \int \frac{\operatorname{ch} t}{\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t}\mathrm{d}t .$$

由例 5 的结论可知

$$I = \frac{1}{2}\left(t + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right) + C_1 .$$

又由题设知 $\operatorname{sh} t = x/a$，则，

$$\operatorname{ch} t = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a}, \quad t = \ln\left(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a}\right),$$

$$\mathrm{e}^{-2t} = \frac{1}{\left(\frac{x}{a} + \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a}\right)^2} = \frac{a^2}{\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)^2},$$

所以有

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2}\left[\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) - \ln a + \frac{1}{2}\frac{a^2}{\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)^2}\right] + C_1 \\ &= \frac{1}{2}\left[\ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + \frac{a^2}{2\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)^2}\right] + C \end{aligned}$$

$$\left(C = C_1 - \frac{1}{2}\ln a\right) .$$

例 8 求 $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{1 + x + \sqrt{x^2 + 1}}$.

解　设 $x=\operatorname{sh} t$，则 $\mathrm{d}x=\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t$，于是原积分可变为

$$I=\int\frac{\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t}{1+\operatorname{ch} t+\operatorname{sh} t}.$$

再令

$$J=\int\frac{\operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t}{1+\operatorname{ch} t+\operatorname{sh} t},$$

则有

$$I+J=\int\frac{\operatorname{ch} t+\operatorname{sh} t}{1+\operatorname{ch} t+\operatorname{sh} t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{e}^t\mathrm{d}t}{1+\mathrm{e}^t}=\ln(1+\mathrm{e}^t),$$

$$\begin{aligned}I-J&=\int\frac{\operatorname{ch} t-\operatorname{sh} t}{1+\operatorname{ch} t+\operatorname{sh} t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t\\&=\int\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t(1+\mathrm{e}^t)}=\int\left(\frac{1}{\mathrm{e}^t}-\frac{1}{1+\mathrm{e}^t}\right)\mathrm{d}t\\&=\int\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t-\int\frac{\mathrm{d}t}{1+\mathrm{e}^t}=-\mathrm{e}^{-t}-t+\ln(1+\mathrm{e}^t).\end{aligned}$$

所以有

$$I=\frac{1}{2}[2\ln(1+\mathrm{e}^t)-\mathrm{e}^{-t}-t]+C.$$

又由题设知 $\operatorname{sh} t=x$，则

$$\operatorname{ch} t=\sqrt{x^2+1},\quad t=\operatorname{arsh} x=\ln(x+\sqrt{x^2+1}),$$

$$\mathrm{e}^{-t}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}},$$

故得

$$I=\frac{1}{2}\left[2\ln(1+x+\sqrt{x^2+1})-\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}-\ln(x+\sqrt{x^2+1})\right]+C.$$

通过对上述各例的求解，将含有 $\sqrt{x^2+a^2}$ 的这类无理式的积分，用双曲换元法将无理式的积分转化为双曲函数有理式的积分，然后用组合积分法求之，得到许多不常见的结论.这在积分理论发展上将起到一定的作用。

习　题　4.2

求下列无理式的不定积分：

(1) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2x+3\sqrt{x^2+1}}$;　　(2) $\int \frac{\mathrm{d}x}{2x+3\sqrt{x^2-16}}$;

(3) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{3x+2\sqrt{x^2+1}}$;　　(4) $\int \frac{x\mathrm{d}x}{3x+2\sqrt{x^2+4}}$;

(5) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}\mathrm{d}x}{2x+\sqrt{x^2+1}}$;　　(6) $\int \frac{\sqrt{x^2+16}\mathrm{d}x}{2x+\sqrt{x^2+16}}$.

4.3　含有 $\sqrt{x^2-a^2}$ 的无理式的积分

对于含有根式 $\sqrt{x^2-a^2}$ 的无理式的积分,可采用三角换元法,令 $x=a\sec t$,则 $\mathrm{d}x=a\tan t\sec t\,\mathrm{d}t$,将无理式的积分转化为三角函数的积分。但往往在比较复杂的情况下,比如是关于 $\sec t$ 与 $\tan t$ 的有理式,积分就比较困难。这里仿 4.2 节内容,来用双曲变换,将无理式的积分转化为双曲函数的积分,然后用组合积分法求之。举例说明如下.

例 1　求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{2x+\sqrt{x^2-1}}$.

解　如果作变换 $x=\sec t$,则 $\mathrm{d}x=\sec t\tan t\,\mathrm{d}t$,则原积分可变为

$$\int \frac{\sec t\tan t\,\mathrm{d}t}{2\sec t+\tan t}\mathrm{d}t=\int \frac{\sin t\,\mathrm{d}t}{\cos t(2+\sin t)}。$$

上积分直接使用组合积分法较困难,但如果进一步地作万能代换,结果如何呢?

对上式作变换 $\tan\frac{t}{2}=u$,则

$$\mathrm{d}u=\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2},\quad \cos t=\frac{1-u^2}{1+u^2},\quad \sin t=\frac{2u}{1+u^2},$$

于是原积分可变为

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2x+\sqrt{1-x^2}}=\int \frac{2u\mathrm{d}u}{(1-u^2)(1+u+u^2)}.$$

对于右边的有理式的积分,可用组合积分法或用传统的部分分式法都可以求出,但都比较麻烦。加上回代时要进行两次代换,这就更加繁琐。这种换元法不可取。下面采用双曲换元法。

设 $x = \operatorname{ch} t$,则

$$\mathrm{d}x = \operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t \quad (x \geq 0,\ t \geq 1),$$

于是原积分可变为

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{2x + \sqrt{1 - x^2}} = \int \frac{\operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t}{2\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t}.$$

对于右边的积分,可令

$$I = \int \frac{\operatorname{sh} t}{2\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t}\mathrm{d}t, \quad J = \int \frac{\operatorname{ch} t}{2\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t}\mathrm{d}t,$$

则有

$$I + 2J = \int \frac{\operatorname{sh} t + 2\operatorname{ch} t}{2\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t}\mathrm{d}t = t,$$

$$2I + J = \int \frac{2\operatorname{sh} t + \operatorname{ch} t}{2\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t}\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}(2\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t)}{2\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t}$$

$$= \ln(2\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t).$$

于是便有

$$I = \frac{1}{3}[2\ln(2\operatorname{ch} t + \operatorname{sh} t) - t] + C.$$

又由题设 $x = \operatorname{ch} t$,则

$$\operatorname{sh} t = \sqrt{x^2 - 1}, \quad t = \operatorname{arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}).$$

故得

$$I = \frac{1}{3}[2\ln(2x + \sqrt{x^2 - 1}) - \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})] + C。$$

从上述两种积分变换分析,显然用后一种变化较简单,由此可以看出组合积分法在求较复杂的无理式的积分时,有很多的优势,应引起读者重视。

一般情形下的积分如例 2 所述.

例 2 求 $I = \int \dfrac{\mathrm{d}x}{ax + b\sqrt{x^2 - 1}} \quad (|a| \neq |b|)$.

解　设 $x=\operatorname{ch} t$，**则** $\mathrm{d}x=\operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t$，**于是原积分可变为**

$$I=\int\frac{\operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t}{a\operatorname{ch} t+b\operatorname{sh} t}.$$

再令

$$J=\int\frac{\operatorname{ch} t\,\mathrm{d}t}{a\operatorname{ch} t+b\operatorname{sh} t},$$

则有

$$bI+aJ=\int\frac{a\operatorname{ch} t+b\operatorname{sh} t}{a\operatorname{ch} t+b\operatorname{sh} t}\mathrm{d}t=t,$$

$$aI+bJ=\int\frac{a\operatorname{sh} t+b\operatorname{ch} t}{a\operatorname{ch} t+b\operatorname{sh} t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}(a\operatorname{ch} t+b\operatorname{sh} t)}{a\operatorname{ch} t+b\operatorname{sh} t}$$

$$=\ln(a\operatorname{ch} t+b\operatorname{sh} t).$$

所以有

$$I=\frac{1}{a^2-b^2}[a\ln(a\operatorname{ch} t+b\operatorname{sh} t)-bt]+C.$$

又由题设知 $\operatorname{ch} t=x$，**则**

$$\operatorname{sh} t=\sqrt{x^2-1},\quad t=\operatorname{arsh} t=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),$$

故得

$$I=\frac{1}{a^2-b^2}[a\ln(ax+b\sqrt{x^2-1})-b(\ln(x+\sqrt{x^2-1})]+C.$$

更一般情形的积分如例 3 **所述。**

例 3　求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{ax+b\sqrt{x^2-a^2}}\quad(|a|\neq|b|).$

解法 1　设 $x=a\operatorname{ch} t$，**则** $\mathrm{d}x=a\operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t$，**于是原积分可变为**

$$I=\int\frac{a\operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t}{a^2\operatorname{ch} t+ab\operatorname{sh} t}=\int\frac{\operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t}{a\operatorname{ch} t+b\operatorname{sh} t}.$$

由例 2 **的结论有**

$$I=\frac{1}{a^2-b^2}[a\ln(a\operatorname{ch} t+b\operatorname{sh} t)-bt]+C_1.$$

又由题设知 $x=a\operatorname{ch} t$，**则**

$$\operatorname{ch} t=\frac{x}{a},\quad \operatorname{sh} t=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a},\quad t=\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right),$$

故得

$$I=\frac{1}{a^2-b^2}\left[a\ln\left(x+\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right)-b\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a}\right)\right]+C_1$$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}[a\ln(ax+b\sqrt{x^2-a^2})-a\ln a$$

$$-b\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+b\ln a]+C_1$$

$$=\frac{1}{a^2-b^2}[a\ln(ax+b\sqrt{x^2-a^2})-b\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})]+C$$

$$C=C_1+\frac{b\ln a-a\ln a}{a^2-b^2}.$$

例 3 **在** $|a|\neq|b|$ **时可以用上述方法求积分,如果** $|a|=|b|$ **时,则可按解法** 2 **处理。**

解法 2　如果 $a=b$,**则得到下列积分:**

$$I=\frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

设 $x=a\,\mathrm{ch}\,t$,**则** $\mathrm{d}x=a\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{d}t$,**于是原积分可以变为**

$$I=\frac{1}{a}\int\frac{a\,\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{d}t}{a\,\mathrm{ch}\,t+a\,\mathrm{sh}\,t}=\frac{1}{a}\int\frac{\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}\,t+\mathrm{sh}\,t}.$$

再令
$$I_1=\int\frac{\mathrm{sh}\,t\,\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}\,t+\mathrm{sh}\,t},\quad I_2=\int\frac{\mathrm{ch}\,t\,\mathrm{d}t}{\mathrm{ch}\,t+\mathrm{sh}\,t},$$

则有
$$I_1+I_2=\int\frac{\mathrm{sh}\,t+\mathrm{ch}\,t}{\mathrm{ch}\,t+\mathrm{sh}\,t}\mathrm{d}t=t,$$

$$I_1-I_2=\int\frac{\mathrm{sh}\,t-\mathrm{ch}\,t}{\mathrm{ch}\,t+\mathrm{sh}\,t}\mathrm{d}t=\int\frac{-\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^{t}}\mathrm{d}t$$

$$=-\int\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}.$$

所以有
$$I_1=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right)+C_1.$$

又由题设知 $x=a\,\mathrm{ch}\,t$,**则**

$$\mathrm{ch}\,t=\frac{x}{a},\quad \mathrm{sh}\,t=\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{a},\quad t=\ln\left(\frac{x}{a}+\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{2}\right),$$

故得

$$I_1 = \frac{1}{2}\ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) - \ln a + \frac{1}{2}\frac{a^2}{\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)^2} + C_1 .$$

于是有

$$I = \frac{1}{2a}\ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right) + \frac{a^2}{2\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)^2} + C$$

$$C = C_1 - \frac{1}{2a}\ln a .$$

例 4 求 $I = \int \frac{\sqrt{x^2 - 1}\,\mathrm{d}x}{ax + b\sqrt{x^2 - 1}}\ (b^2 > a^2)$.

解 设 $x = \operatorname{ch} t$,则 $\mathrm{d}x = \operatorname{sh} t\,\mathrm{d}t$,于是原积分可变为

$$I = \int \frac{\operatorname{sh}^2 t\,\mathrm{d}t}{a\operatorname{ch} t + b\operatorname{sh} t} .$$

再令

$$J = \int \frac{\operatorname{ch}^2 t\,\mathrm{d}t}{a\operatorname{ch} t + b\operatorname{sh} t},$$

则有

$$J - I = \int \frac{\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t}{a\operatorname{ch} t + b\operatorname{sh} t}\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{a\operatorname{ch} t + b\operatorname{sh} t}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{b^2 - a^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{b + a}{b - a}}\mathrm{e}^t\right),$$

$$a^2 J - b^2 I = \int (a\operatorname{ch} t - b\operatorname{sh} t)\mathrm{d}t = a\operatorname{sh} t - b\operatorname{ch} t .$$

所以有

$$I = \frac{1}{a^2 - b^2}\left[-\frac{2a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{b + a}{b - a}}\mathrm{e}^t\right) + a\operatorname{sh} t - b\operatorname{ch} t\right] + C .$$

又由题设知 $x = \operatorname{ch} t$,则

$$\operatorname{sh} t = \sqrt{x^2 - 1},\quad \mathrm{e}^t = \left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right),$$

故得

$$I = \frac{1}{a^2 - b^2}\left[-\frac{2a^2}{\sqrt{b^2 - a^2}}\arctan\sqrt{\frac{b + a}{b - a}}\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)\right]$$

$$+ \frac{1}{a^2 - b^2}\left(a\sqrt{x^2 - 1} - bx\right) + C .$$

例 5 求 $I=\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^2-1+x\sqrt{x^2-1}}$.

解 设 $x=\operatorname{ch}t$,则 $\mathrm{d}x=\operatorname{sh}t\,\mathrm{d}t$,于是原积分可变为

$$I=\int\frac{\operatorname{ch}t\operatorname{sh}t\,\mathrm{d}t}{\operatorname{sh}^2t+\operatorname{ch}t\operatorname{sh}t}=\int\frac{\operatorname{ch}t}{\operatorname{sh}t+\operatorname{ch}t}\mathrm{d}t.$$

再令
$$J=\int\frac{\operatorname{sh}t}{\operatorname{sh}t+\operatorname{ch}t}\mathrm{d}t,$$

则有
$$I+J=t,$$

$$I-J=\int\frac{\operatorname{ch}t-\operatorname{sh}t}{\operatorname{sh}t+\operatorname{ch}t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{e}^{-t}}{\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t=\int\mathrm{e}^{-2t}\mathrm{d}t=-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}.$$

所以有
$$I=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\right)+C.$$

又由题设知

$$\operatorname{ch}t=x,\quad t=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),\quad \mathrm{e}^{-2t}=\frac{1}{(x+\sqrt{x^2-1})^2},$$

故得

$$I=\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2-1})-\frac{1}{4}\frac{1}{(x+\sqrt{x^2-1})^2}+C.$$

一般情形的积分如例 6 所述.

例 6 求 $I=\int\frac{x\mathrm{d}x}{a(x^2-1)+bx\sqrt{x^2-1}}$.

解 设 $x=\operatorname{ch}t$,则 $\mathrm{d}x=\operatorname{sh}t\,\mathrm{d}t$,于是原积分可变为

$$I=\int\frac{\operatorname{ch}t\operatorname{sh}t\,\mathrm{d}t}{a\operatorname{sh}^2t+b\operatorname{ch}t\operatorname{sh}t}=\int\frac{\operatorname{ch}t\,\mathrm{d}t}{a\operatorname{sh}t+b\operatorname{ch}t}.$$

再令
$$J=\int\frac{\operatorname{sh}t\,\mathrm{d}t}{a\operatorname{sh}t+b\operatorname{ch}t},$$

则有
$$bI+aJ=t,$$

$$aI+bJ=\int\frac{a\operatorname{ch}t+b\operatorname{sh}t}{a\operatorname{sh}t+b\operatorname{ch}t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}(a\operatorname{sh}t+b\operatorname{ch}t)}{a\operatorname{sh}t+b\operatorname{ch}t}$$
$$=\ln(a\operatorname{sh}t+b\operatorname{ch}t).$$

所以有 $$I=\frac{1}{a^2-b^2}[a\ln(a\operatorname{sh}t+b\operatorname{ch}t)-bt]+C.$$

又由题设知 $\operatorname{ch}t=x$，则

$$\operatorname{sh}t=\sqrt{x^2-1},\quad t=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),$$

故得

$$I=\frac{1}{a^2-b^2}[a\ln(bx+a\sqrt{x^2-1})-b\ln(x+\sqrt{x^2-1})]+C.$$

例 7 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x+\sqrt{x^2-1}}$.

解 设 $x=\operatorname{ch}t$，则 $\mathrm{d}x=\operatorname{sh}t\,\mathrm{d}t$，于是原积分可变为

$$I=\int\frac{\operatorname{sh}t\,\mathrm{d}t}{1+\operatorname{ch}t+\operatorname{sh}t}。$$

再令 $$J=\int\frac{\operatorname{ch}t\,\mathrm{d}t}{1+\operatorname{ch}t+\operatorname{sh}t},$$

则有 $$I+J=\int\frac{\operatorname{sh}t+\operatorname{ch}t}{1+\operatorname{ch}t+\operatorname{sh}t}\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{e}^t}{1+\mathrm{e}^t}=\ln(1+\mathrm{e}^t),$$

$$I-J=\int\frac{\operatorname{sh}t-\operatorname{ch}t}{1+\operatorname{ch}t+\operatorname{sh}t}\mathrm{d}t=\int\frac{-\mathrm{e}^{-t}}{1+\mathrm{e}^t}\mathrm{d}t$$

$$=\int\left(\frac{1}{1+\mathrm{e}^t}-\frac{1}{\mathrm{e}^t}\right)\mathrm{d}t=\mathrm{e}^{-t}+t-\ln(1+\mathrm{e}^t).$$

所以有 $$I=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-t}+t)+C.$$

又由题设知 $\operatorname{ch}t=x$，则

$$\mathrm{e}^{-t}=\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}},\quad t=\ln(x+\sqrt{x^2-1}),$$

故得 $$I=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2-1}}+\ln(x+\sqrt{x^2-1})\right)+C.$$

到现在为止，我们已对含有二次根式的无理式的积分用组合积分法求解问题进行了讨论，得到了一些重要的积分公式，可以用它来指导今后求类似的无理式的积分。

习　题　4.3

求下列无理式的不定积分:

(1) $\int \dfrac{dx}{3x+5\sqrt{x^2-1}}$;　　(2) $\int \dfrac{dx}{3x+5\sqrt{x^2-4}}$;

(3) $\int \dfrac{x\,dx}{2x+\sqrt{x^2-1}}$;　　(4) $\int \dfrac{x\,dx}{2x+\sqrt{x^2-9}}$;

(5) $\int \dfrac{\sqrt{x^2-1}\,dx}{2x+\sqrt{x^2-1}}$;　　(6) $\int \dfrac{\sqrt{x^2-9}\,dx}{2x+\sqrt{x^2-9}}$.

4.4　含有$\sqrt[n]{x}$的无理式的积分

对于被积函数含有$\sqrt[n]{x}$的无理式的积分,也可以用组合积分法求解。其程序为,先通过根式换元法将无理式的积分转化为有理式的积分,然后用组合积分法求之。

例 1　求 $I=\int \dfrac{dx}{(1+\sqrt{x})(2+\sqrt{x})}$.

解　设 $x=t^2$,则 $dx=2t\,dt$,于是原积分可变为

$$I=\int \frac{2t\,dt}{(1+t)(2+t)}.$$

再令
$$J=\int \frac{dt}{(1+t)(2+t)},$$
则有
$$I+2J=2\int \frac{dt}{2+t}=2\ln|2+t|,$$
$$I+4J=2\int \frac{dt}{1+t}=2\ln|1+t|.$$
所以有
$$I=4\ln|2+t|-2\ln|1+t|+C.$$
又由题设知 $\sqrt{x}=t$,故得
$$I=\ln(2+\sqrt{x})^4-\ln(1+\sqrt{x})^2+C=\ln\frac{(2+\sqrt{x})^4}{(1+\sqrt{x})^2}+C.$$

例 2 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)(2+x)(3+x)}$.

解 设 $x=t^2$,则 $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$,于是原积分可变为

$$I=2\int\frac{t\mathrm{d}t}{(1+t)(2+t)(3+t)}.$$

再令

$$I_1=\int\frac{t\mathrm{d}t}{(1+t)(2+t)(3+t)},$$

$$I_2=\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{(1+t)(2+t)(3+t)},$$

$$I_3=\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(2+t)(3+t)},$$

则有

$$I_2+3I_1+2I_3=\int\frac{\mathrm{d}t}{3+t}=\ln(3+t),$$

$$I_2+4I_1+3I_3=\int\frac{\mathrm{d}t}{2+t}=\ln(2+t),$$

$$I_2+5I_1+6I_3=\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t}=\ln(1+t).$$

解方程组,得

$$I_1=2\ln(2+t)-\frac{1}{2}\ln(1+t)-\frac{3}{2}\ln(3+t)+C_1.$$

所以有

$$I=2I_1=4\ln(2+t)-\ln(1+t)-3\ln(3+t)+C\quad(C=2C_1).$$

由题设知 $x=t$,故得

$$I=4\ln(2+x)-\ln(1+x)-3\ln(3+x)+C$$

$$=\ln\frac{(2+x)^4}{(1+x)(3+x)^3}+C.$$

一般情形的积分如例 3 所述.

例 3 求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+x)(b+x)}\quad(a\neq b)$.

解 设 $x=t^2$,则 $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$,于是原积分可变为

$$I=\int\frac{2t\mathrm{d}t}{(a+t)(b+t)}.$$

再令 $I_1 = \int \frac{t\mathrm{d}t}{(a+t)(b+t)}$, $I_2 = \int \frac{\mathrm{d}t}{(a+t)(b+t)}$,

则有

$$I_1 + aI_2 = \int \frac{\mathrm{d}t}{b+t} = \ln|b+t|,$$

$$I_1 + bI_2 = \int \frac{\mathrm{d}t}{a+t} = \ln|a+t|.$$

所以有 $I_1 = \frac{1}{a-b}(a\ln|a+t| - b\ln|b+t|) + C_1$.

故得

$$I = 2I_2 = \frac{2}{a-b}(a\ln|a+t| - b\ln|b+t|) + C \quad (C = 2C_1).$$

由题设知 $t = \ x$,**所以有**

$$I = \frac{2}{a-b}(a\ln|a+ \ x| - b\ln|b+ \ x|) + C.$$

更一般情形的积分如例 4 所述.

例 4 **求** $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a+b\ \ x)(b+a\ \ x)}$ $(a^2 \neq b^2)$.

解 **设** $x = t^2$,**则** $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$,**于是原积分可变为**

$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a+b\ \ x)(b+a\ \ x)} = 2\int \frac{t\mathrm{d}t}{(a+bt)(b+at)}.$$

再令 $I_1 = \int \frac{t\mathrm{d}t}{(a+bt)(b+at)}$, $I_2 = \int \frac{\mathrm{d}t}{(a+bt)(b+at)}$,

则有

$$aI_2 + bI_1 = \int \frac{\mathrm{d}t}{b+at} = \frac{1}{a}\ln|b+at|,$$

$$bI_2 + aI_1 = \int \frac{\mathrm{d}t}{a+bt} = \frac{1}{b}\ln|a+bt|.$$

所以有

$$I_1 = \frac{1}{a^2-b^2} \quad \frac{a}{b}\ln|a+bt| - \frac{b}{a}\ln|b+at| \quad + C_1.$$

由题设知 $x = t$,**故得**

$$I_1 = \frac{1}{a^2-b^2} \quad \frac{a}{b}\ln|a+b\ \ x| - \frac{b}{a}\ln|b+a\ \ x| \quad + C_1.$$

即

$$
\begin{aligned}
I &= 2I_1 \\
&= \frac{2}{a^2-b^2}\left(\frac{a}{b}\ln|a+b\sqrt{x}| - \frac{b}{a}\ln|b+a\sqrt{x}|\right)+C \\
&\qquad\qquad\qquad (C=2C_1).
\end{aligned}
$$

例 5 **求** $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{6+\sqrt{x}-x}$.

解 **设** $x=t^2$,**则** $\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$,**于是原积分可变为**

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{6+\sqrt{x}-x}=2\int\frac{t\mathrm{d}t}{(2+t)(3-t)}.$$

令 $$I_1=\int\frac{t\mathrm{d}t}{(2+t)(3-t)},\quad I_2=\int\frac{\mathrm{d}t}{(2+t)(3-t)},$$

则有 $$2I_2+I_1=\int\frac{\mathrm{d}t}{3-t}=-\ln|3-t|,$$

$$3I_2-I_1=\int\frac{\mathrm{d}t}{2+t}=\ln|2+t|.$$

所以有 $$I_1=\frac{1}{5}[-3\ln|3-t|-2\ln|2+t|]+C_1.$$

又由题设知 $\sqrt{x}=t$,**故得**

$$I=2I_1=-\frac{2}{5}[3\ln|3-\sqrt{x}|+2\ln|2+\sqrt{x}|]+C$$

$$(C=2C_1).$$

例 6 **求** $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[3]{x})(2+\sqrt[3]{x})}$.

解 **设** $x=t^3$,**则** $\mathrm{d}x=3t^2\mathrm{d}t$,**于是原积分可变为**

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+\sqrt[3]{x})(2+\sqrt[3]{x})}=3\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{(1+t)(2+t)}.$$

令 $$I_1=\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{(1+t)(2+t)},\quad I_2=\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(2+t)},$$

则有 $$I_2-I_1=\int\frac{1-t}{2+t}\mathrm{d}t=\int\frac{3-(2+t)}{2+t}\mathrm{d}t$$

$$= 3\int \frac{dt}{2+t} - \int dt = 3\ln|2+t| - t,$$

$$4I_2 - I_1 = \int \frac{2-t}{1+t}dt = \int \frac{3-(1+t)}{1+t}dt$$

$$= 3\int \frac{dt}{1+t} - \int dt = 3\ln(1+t) - t.$$

所以有

$$I_1 = \frac{1}{3}[3\ln|1+t| - t - 12\ln|2+t| + 4t] + C_1$$

$$= \frac{1}{3}[3\ln|1+t| - 12\ln|2+t| + 3t] + C_1$$

$$= \ln|1+t| - 4\ln|2+t| + t + C_1.$$

由题设知$\sqrt[3]{x} = t$,**于是有**

$$I_1 = \ln|1+\sqrt[3]{x}| - 4\ln|2+\sqrt[3]{x}| + \sqrt[3]{x} + C_1.$$

即

$$I = 3I_1 = 3\ln|1+\sqrt[3]{x}| - 12\ln|2+\sqrt[3]{x}| + 3\sqrt[3]{x} + C$$

$$(C = 3C_1).$$

由例 6 可以看出,开方次数越高,无理式的积分越复杂,因此只就较简单的情形介绍一下,给读者一种思考问题的方法 .对于积分问题只要有耐心,再难的问题一般都可以解决。

习　题　4.4

求下列无理式的不定积分:

(1) $\int \frac{dx}{(2+\sqrt{x})(3-\sqrt{x})}$;　　(2) $\int \frac{dx}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)}$;

(3) $\int \frac{dx}{(3+2\sqrt{x})(2+3\sqrt{x})}$;　　(4) $\int \frac{dx}{6+5\sqrt{x}+x}$;

(5) $\int \frac{dx}{(3+\sqrt[3]{x})(2+\sqrt[3]{x})}$;　　(6) $\int \frac{dx}{(3+\sqrt[3]{x})(2-\sqrt[3]{x})}$。

4.5　含有　$ax+b$的无理式的积分

与含有$^{n}\ x$的无理式的积分相似，对于含有　$ax+b$的无理式的积分，也是先作变换，令　$ax+b=t$，**则** $ax+b=t^2$，$x=\frac{1}{a}(t^2-b)$，$\mathrm{d}x=\frac{2}{a}t\mathrm{d}t$，**再代入原积分式得到关于** t **的有理函数的积分，然后用组合积分法求之。**

例 1　**求** $\int\frac{\mathrm{d}x}{(\quad x+1+1)(\quad x+1+2)}$.

解　**设**　$x+1=t$，**则** $x=t^2-1$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，**于是原积分可变为**

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(\quad x+1+1)(\quad x+1+2)}=\int\frac{2t\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)}.$$

由 4.4 **节例** 1 **的结论，有**

$$\int\frac{2t\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)}=4\ln|t+2|-2\ln|1+t|+C,$$

由题设便有　　　$t=\quad x+1$。

故得

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(\quad x+1+1)(\quad x+1+2)}=\ln\frac{(2+\quad x+1)^4}{(1+\quad x+1)^2}+C.$$

一般情形的积分如例 2 **所述。**

例 2　**求** $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(\quad ax+b+m)(\quad ax+b+n)}\quad(m\neq n)$.

解　**设**　$ax+b=t$，**则** $x=\frac{1}{a}(t^2-b)$，$\mathrm{d}x=\frac{2}{a}t\mathrm{d}t$，**于是原积分可变为**

$$I=\int\frac{\frac{2}{a}t\mathrm{d}t}{(t+m)(t+n)}=\frac{2}{a}\int\frac{t\mathrm{d}t}{(t+m)(t+n)}.$$

再令 $I_1 = \int \frac{t\mathrm{d}t}{(t+m)(t+n)}$, $I_2 = \int \frac{\mathrm{d}t}{(t+m)(t+n)}$,

则有

$$I_1 + mI_2 = \int \frac{\mathrm{d}t}{t+n} = \ln|t+n|,$$

$$I_1 + nI_2 = \int \frac{\mathrm{d}t}{t+m} = \ln|t+m|.$$

所以有

$$I_1 = \frac{1}{n-m}(n\ln|t+n| - m\ln|t+m|) + C_1.$$

由题设知 $ax+b = t$,**则**

$$I_1 = \frac{1}{n-m}(n\ln|\quad ax+b+n| - m\ln|\quad ax+b+m|) + C_1.$$

故得

$$I = \frac{2}{a}I_1 = \frac{2}{a(n-m)}(n\ln|\quad ax+b+n|$$

$$- m\ln|\quad ax+b+m|) + C \qquad C = \frac{2}{a}C_1.$$

例 3 **求** $I = \int \frac{\mathrm{d}t}{(\quad x+1+1)(\quad x+1+2)(\quad x+1+3)}$.

解 **可设** $x+1 = t$,**则** $x = t^2 - 1$, $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$,**于是原积分可变为**

$$I = 2\int \frac{t\mathrm{d}t}{(t+1)(t+2)(t+3)}.$$

由 4.4 **节例** 2 **的结论**,**有**

$$I = \ln\frac{(t+2)^4}{(t+1)(t+3)^3} + C,$$

由题设便有

$$I = \ln\frac{(\quad x+1+2)^4}{(\quad x+1+1)(\quad x+1+3)^3} + C。$$

例 4 **求** $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x+2 \quad x+3}$.

解　设　$x+3=t$，则 $x=t^2-3$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，于是原积分可变为

$$I=2\int\frac{t\mathrm{d}t}{t^2+2t-3}=2\int\frac{t\mathrm{d}t}{(t+3)(t-1)}.$$

再令　$I_1=\int\frac{t\mathrm{d}t}{(t+3)(t-1)}$，　$I_2=\int\frac{\mathrm{d}t}{(t+3)(t-1)}$，

则有

$$I_1+3I_2=\int\frac{\mathrm{d}t}{t-1}=\ln|t-1|,$$

$$I_1-I_2=\int\frac{\mathrm{d}t}{t+3}=\ln|t+3|.$$

所以有

$$I_1=\frac{1}{4}(\ln|t-1|+3\ln|t+3|)+C_1.$$

由题设知　$x+3=t$，故得

$$I_1=\frac{1}{4}(\ln|\ x+3-1|+3\ln|\ x+3+3|)+C_1.$$

而 $I=2I_1$，所以有

$$I=\frac{1}{2}[\ln|\ x+3-1|+3\ln(\ x+3+3)]+C\quad(C=2C_1).$$

例 5　求 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(3+\ x+1)(2+\ x+1)^2}$.

解　设　$x+1=t$，则 $x=t^2-1$，$\mathrm{d}x=2t\mathrm{d}t$，于是原积分可变为

$$I=\int\frac{2t\mathrm{d}t}{(3+t)(2+t)^2}.$$

再令

$$I_1=\int\frac{t\mathrm{d}t}{(3+t)(2+t)^2},$$

$$I_2=\int\frac{t^2\mathrm{d}t}{(3+t)(2+t)^2},$$

$$I_3=\int\frac{\mathrm{d}t}{(3+t)(2+t)^2}.$$

则有

$$3I_3+I_1=\int\frac{\mathrm{d}t}{(2+t)^2}=-\frac{1}{2+t},\qquad(1)$$

$$I_2 + 4I_1 + 4I_3 = \int \frac{\mathrm{d}t}{3+t} = \ln|3+t|, \tag{2}$$

$$I_2 + 5I_1 + 6I_3 = \int \frac{\mathrm{d}t}{2+t} = \ln|2+t| . \tag{3}$$

解方程组,可得

$$I_1 = 3\ln\left|\frac{2+t}{3+t}\right| + \frac{2}{2+t} + C_1 .$$

又由 $I = 2I_1$, **得**

$$I = 6\ln\left|\frac{2+t}{3+t}\right| + \frac{4}{2+t} + C \quad (C = 2C_1) .$$

由题设知 $x + 1 = t$, **故得**

$$I = \ln \frac{2+ \quad x+1}{3+ \quad x+1}^{6} + \frac{4}{2+ \quad x+1} + C .$$

例 6　求 $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1+ \quad x-1)(x+ \quad x-1)}$.

解　设 $x - 1 = t$, **则** $x = 1 + t^2$, $\mathrm{d}x = 2t\mathrm{d}t$, **于是原积分可变为**

$$I = 2\int \frac{t\mathrm{d}t}{(1+t)(1+t+t^2)} .$$

再令

$$I_1 = \int \frac{t\mathrm{d}t}{(1+t)(1+t+t^2)},$$

$$I_2 = \int \frac{t^2\mathrm{d}t}{(1+t)(1+t+t^2)},$$

$$I_3 = \int \frac{\mathrm{d}t}{(1+t)(1+t+t^2)},$$

则有

$$I_3 + I_1 = \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2} = \frac{2}{3}\arctan\frac{2t+1}{3},$$

$$I_3 + I_1 + I_2 = \int \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln|1+t|,$$

$$I_3 + 3I_1 + 2I_2 = \int \frac{1+2t}{1+t+t^2}\mathrm{d}t = \ln|1+t+t^2| .$$

解方程组,得

$$I_1 = \frac{1}{2}\ln|1+t+t^2| - 2\ln|1+t| + \frac{2}{3}\arctan\frac{2t+1}{3} + C_1$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t+t^2}{(1+t)^2}\right| + \frac{2}{3}\arctan\frac{2t+1}{3} + C_1 .$$

又由 $I = 2I_1$ **得**

$$I = \ln\left|\frac{1+t+t^2}{(1+t)^2}\right| + \frac{2}{3}\arctan\frac{2t+1}{3} + C \quad (C = 2C_1) .$$

由题设可知 $x-1 = t$, **故得**

$$I = \ln\left|\frac{1+ \quad x-1+x-1}{(1+ \quad x-1)^2}\right| + \frac{2}{3}\arctan\frac{2 \quad x-1+1}{3} + C$$

$$= \ln\frac{|x+ \quad x-1|}{(1+ \quad x-1)^2} + \frac{2}{3}\arctan\frac{2 \quad x-1+1}{3} + C .$$

例 7 **求** $I = \int\frac{dx}{(1+2 \quad x-1+x)(x+ \quad x-1)}$.

解 **设** $x-1 = t$, **则** $x = 1+t^2$, $dx = 2tdt$, **于是原积分可变为**

$$I = 2\int\frac{tdt}{(2+2t+t^2)(1+t+t^2)} .$$

再令

$$I_1 = \int\frac{t^3dt}{(2+2t+t^2)(1+t+t^2)}, \quad I_2 = \int\frac{dt}{(2+2t+t^2)(1+t+t^2)},$$

$$I_3 = \int\frac{t^2dt}{(2+2t+t^2)(1+t+t^2)}, \quad I_4 = \int\frac{tdt}{(2+2t+t^2)(1+t+t^2)},$$

则有下列方程组

$$I_1+2I_3+I_2+2I_4=\int\frac{(1+t)\,\mathrm{d}t}{2+2t+t^2}=\frac{1}{2}\ln|2+2t+t^2|,$$

$$I_3+I_2+I_4=\int\frac{\mathrm{d}t}{2+2t+t^2}=\arctan(1+t),$$

$$2I_1+5I_3+2I_2+6I_4=\int\frac{1+2t}{1+t+t^2}\mathrm{d}t=\ln|1+t+t^2|,$$

$$I_3+2I_2+2I_4=\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t+t^2}=\frac{2}{3}\arctan\frac{2t+1}{3}.$$

设 $$b_1=\frac{1}{2}\ln|2+2t+t^2|,\quad b_2=\arctan(1+t),$$

$$b_3=\ln|1+t+t^2|,\quad b_4=\frac{2}{3}\arctan\frac{2t+1}{3},$$

于是用行初等变换解上线性方程组,得

则 $$A=\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&2&2&b_1\\0&1&1&1&b_2\\2&2&5&6&b_3\\0&2&1&2&b_4\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&2&2&b_1\\0&1&1&1&b_2\\0&0&1&2&b_3-2b_1\\0&2&1&2&b_4\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&2&2&b_1\\0&1&1&1&b_2\\0&0&1&2&b_3-2b_1\\0&0&-1&0&b_4-2b_2\end{array}\right)$$

$$\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&2&2&b_1\\0&1&1&1&b_2\\0&0&1&2&b_3-2b_1\\0&0&0&2&b_3-2b_1+b_4-2b_2\end{array}\right),$$

所以有

$$I_4=\frac{1}{2}(b_3-2b_1+b_4-2b_2)$$

$$=\frac{1}{2}\left[\ln|1+t+t^2|-2\arctan(1+t)+\frac{2}{3}\arctan\frac{2t+1}{3}\right.$$

$$- \ln|2 + 2t + t^2| + C_1$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + t + t^2}{2 + 2t + t^2}\right| - 2\arctan(1 + t) + \frac{2}{3}\arctan\frac{2t + 1}{3} + C_1。$$

由题设可知 $x - 1 = t$,**故得**

$$I_4 = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{x + x - 1}{1 + x + 2 x - 1}\right| - 2\arctan(1 + x - 1)$$

$$+ \frac{2}{3}\arctan\frac{2 x - 1 + 1}{3} + C_1。$$

于是有 $I = 2I_4$

$$= \ln\left|\frac{x + x - 1}{1 + x + x - 1}\right| - 2\arctan(1 + x - 1)$$

$$+ \frac{2}{3}\arctan\frac{2 x - 1 + 1}{3} + C \quad (C = 2C_1)。$$

从上例可以看出,对于较复杂的无理式的积分用组合积分法求解,并不简单,此题用分项法求解更加困难。对于组合积分法作为一种新的积分方法,如果读者能熟练掌握,求积分时就多了一种选择。

习 题 4.5

求下列无理式的不定积分:

(1) $\int \frac{dx}{(3 + x + 1)(2 + x + 1)}$;

(2) $\int \frac{dx}{(x + 1 - 1)(x + 1 + 2)}$;

(3) $\int \frac{dx}{x + 1(x + 1 + x)}$;

(4) $\int \frac{dx}{(2 - x + 1)(3 + x + 1)}$。

第 5 章　组合积分法在其他方面的应用

利用组合积分法可以求出较复杂的三角函数有理式、指数函数有理式和双曲函数有理式的积分，并得到了许多重要的积分公式。本章要介绍的是组合积分法在其他方面的一些应用。

5.1　求导积分法

对于某些函数乘积的积分，可考虑使用分部积分法求解。但对于某些比较复杂的函数的乘积的积分，用分部积分法来求就比较麻烦，而用将要介绍的求积分的新方法——求导积分法，可以很迅速、准确地求出这些积分，达到事半功倍的效果。

5.1.1　含有 e^x 与三角函数乘积的积分

被积函数中含有指数函数 e^x **与三角函数** $\sin x$, $\cos x$ **乘积的积分，在传统的数学中，用分部积分法求之。一般来说，如果系数比较简单，用分部积分法是可行的，但如果系数比较复杂，使用分部积分法就繁琐了。求导积分法将很好地解决这一问题。先看一个简单的例子。**

例 1　**求** $\int e^x\cos x\,dx$。

解　令　$I=\int e^x\cos x\,dx$，　$J=\int e^x\sin x\,dx$，

因为

$$(e^x\cos x)'=e^x\cos x-e^x\sin x,$$

$$(e^x\sin x)'=e^x\sin x+e^x\cos x,$$

两边积分，得含有积分的方程组(不计一常数之差，以下同)。

$$I-J=e^x\cos x,$$

$$I+J=e^x\sin x,$$

两式相加便有

$$I=\int e^{x}\cos x\,dx=\frac{1}{2}e^{x}(\cos x+\sin x)+C。$$

像例 1 这样先求导、后积分的方法称为求导积分法。这种积分法的关键在于先设所求积分为 I，并找出与之对应的(结构相似)辅助积分 J，对两积分的被积函数分别求导，然后对两式分别积分后，代入题设即得到一个关于 I 与 J 的方程组，解之即得所求积分。

事实上，这个例子用分部积分法求也不难，但对于系数比较复杂的积分，应用分部积分法就不那么容易了，而使用求导积分法就会简单得多。

例 2　求 $I=\int e^{ax}\cos bx\,dx$　(a,b 为常数)。

解　令 $$J=\int e^{ax}\sin bx\,dx,$$

因为 $$(e^{ax}\cos bx)'=ae^{ax}\cos bx-be^{ax}\sin bx,$$

$$(e^{ax}\sin bx)'=ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx,$$

两边积分，得

$$aI-bJ=e^{ax}\cos bx,$$

$$aJ+bI=e^{ax}\sin bx。$$

于是有 $$I=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)+C。$$

同时不难得到

$$J=\frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C。$$

例 3　求 $I=\int xe^{ax}\cos bx\,dx$　(a,b 为常数)。

解　令 $$J=\int xe^{ax}\sin bx\,dx,$$

因为

$$(xe^{ax}\cos bx)'=e^{ax}\cos bx+axe^{ax}\cos bx-bxe^{ax}\sin bx,$$

$$(xe^{ax}\sin bx)'=e^{ax}\sin bx+axe^{ax}\sin bx+bxe^{ax}\cos bx,$$

两边积分，得

$$aI - bJ = xe^{ax}\cos bx - \int e^{ax}\cos bx\,dx,$$

$$aJ + bI = xe^{ax}\sin bx - \int e^{ax}\sin bx\,dx。$$

于是,由例 2 的结论便有

$$I = \frac{xe^{ax}}{a^2 + b^2}(a\cos bx + b\sin bx)$$

$$- \frac{e^{ax}}{(a^2 + b^2)^2}[(a^2 - b^2)\cos bx + 2ab\sin bx] + C。$$

同样有

$$J = \frac{xe^{ax}}{a^2 + b^2}(a\sin bx - b\cos bx)$$

$$- \frac{e^{ax}}{(a^2 + b^2)^2}[(a^2 - b^2)\sin bx - 2ab\cos bx] + C。$$

由例 2、例 3 引出如下重要递推公式。

定理 1 设 a, b 为常数, n 为非负整数, 且

$$I_n = \int x^n e^{ax}\cos bx\,dx, \quad J_n = \int x^n e^{ax}\sin bx\,dx,$$

则有递推公式

$$I_n = \frac{x^n e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\cos bx + b\sin bx) - \frac{n}{a^2 + b^2}(aI_{n-1} + bJ_{n-1}),$$

$$J_n = \frac{x^n e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + \frac{n}{a^2 + b^2}(bJ_{n-1} - aI_{n-1})。$$

证 因为

$$(x^n e^{ax}\cos bx)' = nx^{n-1}e^{ax}\cos bx + ax^n e^{ax}\cos bx - bx^n e^{ax}\sin bx,$$

$$(x^n e^{ax}\sin bx)' = nx^{n-1}e^{ax}\sin bx + ax^n e^{ax}\sin bx + bx^n e^{ax}\cos bx,$$

两边积分,得

$$aI_n - bJ_n = x^n e^{ax}\cos bx - nI_{n-1},$$

$$aJ_n + bI_n = x^n\sin bx - nJ_{n-1}。$$

于是有

$$I_n = \frac{x^n e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\cos bx + b\sin bx) - \frac{n}{a^2 + b^2}(aI_{n-1} + bJ_{n-1}),$$

$$J_n = \frac{x^n e^{ax}}{a^2 + b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + \frac{n}{a^2 + b^2}(bI_{n-1} - aJ_{n-1})。$$

例 4 **已知** $I=\int e^x\cos^2 x\,dx$, $J=\int e^x\sin^2 x\,dx$, **求** I, J。

解 **由例** 2 **的结论便有**

$$I+J=\int e^x dx=e^x,$$

$$I-J=\int e^x(\cos^2 x-\sin^2 x)dx=\int e^x\cos 2x\,dx$$

$$=\frac{1}{5}e^x(\cos 2x+2\sin 2x)。$$

所以有

$$I=\frac{1}{2}\left[e^x+\frac{1}{5}e^x(\cos 2x+2\sin 2x)\right]+C$$

$$=\frac{e^x}{10}(5+\cos 2x+2\sin 2x)+C。$$

例 5 **求** $I=\int e^{ax}(a_1\cos bx+a_2\sin bx)dx$。

解 **设** $I_1=\int e^{ax}\cos bx\,dx$, $I_2=\int e^{ax}\sin bx\,dx$,

由例 2 **的结论有**

$$I=a_1 I_1+a_2 I_2$$

$$=\frac{a_1 e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)$$

$$+\frac{a_2 e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+C$$

$$=\frac{a_1 b+a_2 a}{a^2+b^2}e^{ax}\sin bx+\frac{a_1 a-a_2 b}{a^2+b^2}e^{ax}\cos bx+C.$$

5.1.2 含有 a^x 与三角函数乘积的积分

对于一般指数函数 a^x $(a>0, a\neq 1)$**与三角函数** $\cos x$, $\sin x$ **乘积的积分也可以使用求导积分法来求解,而且比用分部积分法来求解方便得多。**

例 6 **求** $\int a^x\cos x\,dx$。

解 **令** $I=\int a^x\cos x\,dx$, $J=\int a^x\sin x\,dx$,

因为

$$(a^x\cos x)'=a^x\ln a\cos x-a^x\sin x,$$

$$(a^x\sin x)'=a^x\ln a\sin x+a^x\cos x,$$

两边积分,得

$$\ln a I-J=a^x\cos x,$$

$$\ln aJ + I = a^x \sin x。$$

于是有 $$I = \frac{a^x}{1+\ln^2 a}(\ln a \cos x + \sin x) + C。$$

同样有 $$J = \frac{ax}{1+\ln^2 a}(\ln a \sin x - \cos x) + C。$$

当系数比较复杂时,使用此方法更为简便。

例 7 **求** $I = \int a^{mx} \cos nx \, \mathrm{d}x$, $J = \int a^{mx} \sin nx \, \mathrm{d}x$。

解 **因为**

$$(a^{mx}\cos nx)' = ma^{mx}\ln a \cos nx - na^{mx}\sin nx,$$

$$(a^{mx}\sin nx)' = ma^{mx}\ln a \sin nx + na^{mx}\cos nx,$$

两边积分,得 $$m\ln aI - nJ = a^{mx}\cos nx,$$

$$m\ln aJ + nI = a^{mx}\sin nx。$$

于是有

$$I = \frac{a^{mx}}{m^2\ln^2 a + n^2}(m\ln a \cos nx + n\sin nx) + C,$$

$$I = \frac{a^{mx}}{m^2\ln^2 a + n^2}(m\ln a \sin nx - n\cos nx) + C。$$

例 8 **求** $\int xa^x \cos x \, \mathrm{d}x$。

解 **令** $I = \int xa^x \cos x \, \mathrm{d}x$, $J = \int xa^x \sin x \, \mathrm{d}x$,

因为

$$(xa^x\cos x)' = a^x\cos x + \ln ax\, a^x\cos x - xa^x\sin x,$$

$$(xa^x\sin x)' = a^x\sin x + \ln ax\, a^x\sin x + xa^x\cos x,$$

两边积分,并由例 6 的结论,得

$$\ln aI - J = xa^x\cos x - \int a^x\cos x \, \mathrm{d}x,$$

$$\ln aJ + I = xa^x\sin x - \int a^x\sin x \, \mathrm{d}x。$$

于是有

$$I = \frac{xa^x}{\ln^2 a+1}(\ln a \cos x + \sin x)$$

$$- \frac{a^x}{(\ln^2 a+1)^2}[(\ln^2 a - 1)\cos x + 2\ln a \sin x] + C。$$

特别地,当 $a=\mathrm{e}$ **时有**

$$\int x\mathrm{e}^x\cos x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^x(x\cos x+x\sin x-\sin x)+C。$$

定理 2　设 n **为非负整数,** a,b **为常数,并令**

$$I_n=\int x^n a^x\cos x\,\mathrm{d}x,\quad J_n=\int x^n a^x\sin x\,\mathrm{d}x,$$

则有递推公式

$$I_n=\frac{x^n a^x}{\ln^2 a+1}(\ln a\cos x+\sin x)-\frac{n}{\ln^2 a+1}(\ln aI_{n-1}-J_{n-1}),$$

$$J_n=\frac{x^n a^x}{\ln^2 a+1}(\ln a\sin x-\cos x)+\frac{n}{\ln^2 a+1}(I_{n-1}-\ln aJ_{n-1})。$$

证　因为

$$(x^n a^x\cos x)'=nx^{n-1}a^x\cos x+\ln a\,x^n a^x\cos x-x^n a^x\sin x,$$

$$(x^n a^x\sin x)'=nx^{n-1}a^x\sin x+\ln a\,x^n a^x\sin x+x^n a^x\cos x,$$

两边积分,得

$$\ln a\,I_n-J_n=x^n a^x\cos x-nI_{n-1},$$

$$\ln a\,J_n+I_n=x^n a^x\sin x-nJ_{n-1}。$$

于是便有

$$I_n=\frac{x^n a^x}{\ln^2 a+1}(\ln a\cos x+\sin x)-\frac{n}{\ln^2 a+1}(\ln a\,I_{n-1}+J_{n-1}),$$

$$J_n=\frac{x^n a^x}{\ln^2 a+1}(\ln a\sin x-\cos x)+\frac{n}{\ln^2 a+1}(I_{n-1}-\ln a\,J_{n-1})。$$

5.1.3　双曲函数与指数函数、三角函数乘积的积分

对于含有双曲函数 $\mathrm{sh}\,x,\mathrm{ch}\,x$ **与指数函数** e^x**,三角函数** $\sin x,\cos x$ **乘积的积分,传统数学很少涉及。这里,我们应用求导积分法来求解这类积分,收到了很好的效果,这对于加强积分训练,提高解题能力是大有裨益的。**

先介绍双曲函数与三角函数乘积的积分。

例 9　求 $\int\mathrm{ch}\,x\cos x\,\mathrm{d}x$。

解　令
$$I=\int \operatorname{ch} x \cos x \,\mathrm{d} x,$$
$$J=\int \operatorname{sh} x \sin x \,\mathrm{d} x,$$

因为
$$(\operatorname{ch} x \sin x)'=\operatorname{sh} x \sin x+\operatorname{ch} x \cos x,$$
$$(\operatorname{sh} x \cos x)'=\operatorname{ch} x \cos x-\operatorname{sh} x \sin x,$$

两边积分,得
$$I+J=\operatorname{ch} x \sin x,$$
$$I-J=\operatorname{sh} x \cos x。$$

于是便有
$$I=\frac{1}{2}(\operatorname{ch} x \sin x+\operatorname{sh} x \cos x)+C。$$

还可求出
$$J=\frac{1}{2}(\operatorname{ch} x \sin x-\operatorname{sh} x \cos x)+C。$$

值得注意的是:双曲函数与三角函数乘积的积分比较复杂,下面就找辅助积分问题专门说明:

1) **找辅助积分时应注意,辅助积分是以双曲函数与三角函数乘积为被积函数,且两个函数分别为原积分两个函数的余函数。如果原积分的被积函数为** $\operatorname{ch} x \cos x$,**则辅助积分的被积函数为** $\operatorname{sh} x \sin x$;**如果原积分的被积函数为** $\operatorname{ch} x \sin x$,**则辅助积分的被积函数为**$\operatorname{sh} x \cos x$;

2) **在求导时不能直接对被积函数求导,如例 9 是分别对** $\operatorname{ch} x \sin x$**和** $\operatorname{sh} x \cos x$ **求导。**

例 10　求$\int \operatorname{sh} x \cos x \,\mathrm{d} x$。

解　令
$$I=\int \operatorname{sh} x \cos x \,\mathrm{d} x,$$
$$J=\int \operatorname{ch} x \sin x \,\mathrm{d} x,$$

因为
$$(\operatorname{sh} x \sin x)'=\operatorname{ch} x \sin x+\operatorname{sh} x \cos x,$$
$$(\operatorname{ch} x \cos x)'=\operatorname{sh} x \cos x-\operatorname{ch} x \sin x,$$

两边积分,得
$$J+I=\operatorname{sh} x \sin x,$$
$$I-J=\operatorname{ch} x \cos x。$$

于是有
$$I=\frac{1}{2}(\operatorname{sh} x \sin x+\operatorname{ch} x \cos x)+C。$$

还可求出 $$J=\frac{1}{2}(\operatorname{sh} x\sin x-\operatorname{ch} x\cos x)+C。$$

对于系数比较复杂的情形也可以用求导积分法求解。

例 11 求 $I=\int\operatorname{sh} ax\cos bx\,\mathrm{d}x$。

解 令 $$J=\int\operatorname{ch} ax\sin bx\,\mathrm{d}x,$$

因为 $$(\operatorname{sh} ax\sin bx)'=a\operatorname{ch} ax\sin bx+b\operatorname{sh} ax\cos bx,$$
$$(\operatorname{ch} ax\cos bx)'=a\operatorname{sh} ax\cos bx-b\operatorname{ch} ax\sin bx,$$

两边积分,得

$$aJ+bI=\operatorname{sh} ax\sin bx,$$
$$aI-bJ=\operatorname{ch} ax\cos bx。$$

于是有

$$I=\frac{1}{a^2+b^2}(a\operatorname{ch} ax\cos bx+b\operatorname{sh} ax\sin bx)+C。$$
$$J=\frac{1}{a^2+b^2}(a\operatorname{sh} ax\sin bx-b\operatorname{ch} ax\cos bx)+C。$$

例 12 求 $I=\int x\operatorname{ch} x\cos x\,\mathrm{d}x$。

解 令 $$J=\int x\operatorname{sh} x\sin x\,\mathrm{d}x,$$

因为

$$(x\operatorname{ch} x\sin x)'=\operatorname{ch} x\sin x+x\operatorname{sh} x\sin x+x\operatorname{ch} x\cos x,$$
$$(x\operatorname{sh} x\cos x)'=\operatorname{sh} x\cos x+x\operatorname{ch} x\cos x-x\operatorname{sh} x\sin x,$$

两边积分,得

$$J+I=x\operatorname{ch} x\sin x-\int\operatorname{ch} x\sin x\,\mathrm{d}x,$$
$$I-J=x\operatorname{sh} x\cos x-\int\operatorname{sh} x\cos x\,\mathrm{d}x。$$

于是由例 10 的结论,有

$$I=\frac{x}{2}(\operatorname{ch} x\sin x+\operatorname{sh} x\cos x)-\operatorname{sh} x\sin x+C。$$

例 13 求 $I=\int\operatorname{ch}^2 x\cos x\,\mathrm{d}x$。

解 令 $$J=\int\operatorname{sh}^2 x\cos x\,\mathrm{d}x,$$

因为 $$I-J=\int\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x,\tag{1}$$
$$I+J=\int\operatorname{ch} 2x\cos x\,\mathrm{d}x。\tag{2}$$

对于积分$\int \operatorname{ch} 2x \cos x \,\mathrm{d}x$,可设

$$I_1=\int \operatorname{ch} 2x \cos x \,\mathrm{d}x, \quad I_2=\int \operatorname{sh} 2x \sin x \,\mathrm{d}x,$$

则有
$$(\operatorname{ch} 2x \sin x)'=2\operatorname{sh} 2x \sin x+\operatorname{ch} 2x \cos x,$$
$$(\operatorname{sh} 2x \cos x)'=2\operatorname{ch} 2x \cos x-\operatorname{sh} 2x \sin x,$$

两边积分,得

$$2I_2+I_1=\operatorname{ch} 2x \sin x,$$
$$2I_1-I_2=\operatorname{sh} 2x \cos x。$$

于是有
$$I_1=\frac{1}{5}(\operatorname{ch} 2x\sin 2x+2\operatorname{sh} 2x \cos x)。\qquad (3)$$

将式(3)代入式(2),得

$$I+J=\frac{1}{5}(\operatorname{ch} 2x \sin x+2\operatorname{sh} 2x \cos x)。\qquad (4)$$

由式(1)和式(4),得

$$I=\frac{1}{10}(\operatorname{ch} 2x \sin x+2\operatorname{sh} 2x \cos x)+\frac{1}{2}\sin x+C。$$

再来讨论被积函数为指数函数 e^x 与双曲函数 $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$ 乘积的情形。

例 14 求$\int \mathrm{e}^x \operatorname{ch} x \,\mathrm{d}x$。

解法 1 令
$$I=\int \mathrm{e}^x \operatorname{ch} x \,\mathrm{d}x, \quad J=\int \mathrm{e}^x \operatorname{sh} x \,\mathrm{d}x,$$

因为
$$I+J=\int \mathrm{e}^x(\operatorname{ch} x+\operatorname{sh} x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^{2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x},$$
$$I-J=\int \mathrm{e}^x(\operatorname{ch} x-\operatorname{sh} x)\mathrm{d}x=\int \mathrm{d}x=x,$$

所以有
$$I=\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+x\ \ +C=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{2}x+C。$$

解法 2 直接求积分。

$$\int \mathrm{e}^x \operatorname{ch} x \,\mathrm{d}x=\int \mathrm{e}^x\frac{1}{2}(\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x})\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int(\mathrm{e}^{2x}+1)\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x}+x\ \ +C=\frac{1}{4}\mathrm{e}^{2x}+\frac{x}{2}+C\ .$$

上述两种方法繁简程度差不多,但如果系数比较复杂,则采用求导积分法比较简单。

例 15　求 $I=\int e^{ax}\mathrm{ch}\ bx\,\mathrm{d}x\quad(|a|\neq|b|)$。

解　令 $$J=\int e^{ax}\mathrm{sh}\ bx\,\mathrm{d}x,$$

因为 $$(e^{ax}\mathrm{ch}\ bx)'=ae^{ax}\mathrm{ch}\ bx+be^{ax}\mathrm{sh}\ bx,$$
$$(e^{ax}\mathrm{sh}\ bx)'=ae^{ax}\mathrm{sh}\ bx+be^{ax}\mathrm{ch}\ bx,$$

两边积分,得 $$aI+bJ=e^{ax}\mathrm{ch}\ bx,$$
$$aJ+bI=e^{ax}\mathrm{sh}\ bx。$$

于是有 $$I=\frac{e^{ax}}{a^2-b^2}(a\mathrm{ch}\ bx-b\mathrm{sh}\ bx)+C。$$

同样有 $$J=\frac{e^{ax}}{a^2-b^2}(a\mathrm{sh}\ bx-b\mathrm{ch}\ bx)+C。$$

对于被积函数为幂函数 x^n,**指数函数** e^x **与双曲函数** $\mathrm{ch}\ x$, $\mathrm{sh}\ x$**乘积的积分,也可以用求导积分法,如例** 16。

例 16　求 $\int xe^{ax}\mathrm{ch}\ bx\mathrm{d}x\quad(|a|\neq|b|)$。

解　令 $I=\int xe^{ax}\mathrm{ch}\ bx\,\mathrm{d}x,\quad J=\int xe^{ax}\mathrm{sh}\ bx\,\mathrm{d}x,$

因为
$$(xe^{ax}\mathrm{ch}\ bx)'=e^{ax}\mathrm{ch}\ bx+axe^{ax}\mathrm{ch}\ bx+bxe^{ax}\mathrm{sh}\ bx,$$
$$(xe^{ax}\mathrm{sh}\ bx)'=e^{ax}\mathrm{sh}\ bx+axe^{ax}\mathrm{sh}\ bx+bxe^{ax}\mathrm{ch}\ bx。$$

两边积分,得
$$aI+bJ=xe^{ax}\mathrm{ch}\ bx-\int e^{ax}\mathrm{ch}\ bx\,\mathrm{d}x,$$
$$aJ+bI=xe^{ax}\mathrm{sh}\ bx-\int e^{ax}\mathrm{sh}\ bx\,\mathrm{d}x。$$

由例 15 **的结论,解方程组得**
$$I=\frac{xe^{ax}}{a^2-b^2}(a\mathrm{ch}\ bx-b\mathrm{sh}\ bx)$$
$$-\frac{e^{ax}}{(a^2-b^2)^2}[(a^2+b^2)\mathrm{ch}\ bx-2ab\mathrm{sh}\ bx]+C。$$

由例 16 **可引出如下递推公式。**

定理 3　设 n **为非负整数**, $|a|\neq|b|$,**且令**
$$I_n=\int x^ne^{ax}\mathrm{ch}\ bx\,\mathrm{d}x,\quad J_n=\int x^ne^{ax}\mathrm{sh}\ bx\,\mathrm{d}x,$$

则有递推公式

$$I_n = \frac{x^n e^{ax}}{a^2 - b^2}(a\operatorname{ch} bx - b\operatorname{sh} bx) - \frac{n}{a^2 - b^2}(aI_{n-1} - bJ_{n-1}),$$

$$J_n = \frac{x^n e^{ax}}{a^2 - b^2}(a\operatorname{sh} bx - b\operatorname{ch} bx) - \frac{n}{a^2 - b^2}(aJ_{n-1} - bI_{n-1})。$$

证　因为

$$(x^n e^{ax}\operatorname{ch} bx)' = nx^{n-1}e^{ax}\operatorname{ch} bx + ax^n e^{ax}\operatorname{ch} bx + bx^n e^{ax}\operatorname{sh} bx,$$

$$(x^n e^{ax}\operatorname{sh} bx)' = nx^{n-1}e^{ax}\operatorname{sh} bx + ax^n e^{ax}\operatorname{sh} bx + bx^n e^{ax}\operatorname{ch} bx,$$

两边积分,得

$$aI_n + bJ_n = x^n e^{ax}\operatorname{ch} bx - nI_{n-1},$$

$$aJ_n + bI_n = x^n e^{ax}\operatorname{sh} bx - nJ_{n-1}。$$

于是有

$$I_n = \frac{x^n e^{ax}}{a^2 - b^2}(a\operatorname{ch} bx - b\operatorname{sh} bx) - \frac{n}{a^2 - b^2}(aI_{n-1} - bJ_{n-1}),$$

$$J_n = \frac{x^n e^{ax}}{a^2 - b^2}(a\operatorname{sh} bx - b\operatorname{ch} bx) - \frac{n}{a^2 - b^2}(aJ_{n-1} - bI_{n-1})。$$

例 17　求 $\int e^x \operatorname{ch}^2 x\,dx$。

解　令　$I = \int e^x \operatorname{ch}^2 x\,dx$,　$J = \int e^x \operatorname{sh}^2 x\,dx$,

则有
$$I - J = \int e^x dx = e^x,$$

$$I + J = \int e^x \operatorname{ch} 2x\,dx = \frac{1}{6}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{-x}。$$

所以有
$$I = \frac{1}{2}\left(e^x + \frac{1}{6}e^{3x} - \frac{1}{2}e^{-x}\right) + C$$

$$= \frac{1}{2}e^x + \frac{1}{12}e^{3x} - \frac{1}{4}e^{-x} + C。$$

应用求导积分法可以求许多被积函数为乘积形式的积分,这里不再一一列举了。

习　题　5.1

求下列不定积分:

(1) $\int e^{2x}\sin 3x\,dx$; (2) $\int e^{\lambda t}\cos\omega t\,dt$;

(3) $\int x^2 e^{2x}\sin 3x\,dx$; (4) $\int xe^x\sin x\,dx$;

(5) $\int \mathrm{sh}\, ax\cos\omega x\,dx$; (6) $\int \mathrm{ch}\,3x\cos 4x\,dx$;

(7) $\int xe^x\sin x\,dx$; (8) $\int xe^x\mathrm{sh}\,x\,dx$。

5.2 有理函数的积分

组合积分法在求三角函数有理式、双曲函数有理式、指数函数有理式等积分中有很重要的应用。后研究发现,一类无理式、三角函数与指数函数乘积、三角函数与双曲函数乘积的积分也可用组合积分法求解。经过多年的实践探索,又发现一般有理函数的积分也可用组合积分法求解。这样,组合积分法在求积分中应用就十分广泛了.这种十分重要的积分方法,应该引起数学界同仁的重视与关注.本节要介绍的是组合积分法在求有理式积分中的应用。

例 1 求 $\int\frac{dx}{(x+1)(x-1)}$。

解 此题可用分部积分法求解,但也可用组合积分法求解。

令 $I=\int\frac{dx}{(x-1)(x+1)}$, $J=\int\frac{x\,dx}{(x-1)(x+1)}$,

于是有

$$I+J=\int\frac{(x+1)dx}{(x-1)(x+1)}=\int\frac{d(x-1)}{x-1}=\ln|x-1|,$$

$$J-I=\int\frac{(x-1)dx}{(x-1)(x+1)}=\int\frac{d(x+1)}{x+1}=\ln|x+1|。$$

两式相减便有

$$I=\frac{1}{2}[\ln|x-1|-\ln|x+1|]+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|+C。$$

对于比较复杂的情形,用组合积分法求解效果十分明显。

例 2 求 $\int\frac{dx}{(3x+1)(4x-5)}$。

解 **令**

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(3x+1)(4x+5)},\quad J=\int\frac{x\mathrm{d}x}{(3x+1)(4x-5)},$$

于是有
$$3J+I=\int\frac{(3x+1)\mathrm{d}x}{(3x+1)(4x-5)}$$
$$=\int\frac{\frac{1}{4}\mathrm{d}(4x-5)}{4x-5}=\frac{1}{4}\ln|4x-5|,\tag{1}$$
$$4J-5I=\int\frac{(4x-5)\mathrm{d}x}{(3x+1)(4x-5)}$$
$$=\int\frac{\frac{1}{3}\mathrm{d}(3x+1)}{3x+1}=\frac{1}{3}\ln|3x+1|。\tag{2}$$

$4\times(1)-3\times(2)$,得
$$I=\frac{1}{19}[\ln|4x-5|-\ln|3x+1|]+C=\frac{1}{19}\ln\left|\frac{4x-5}{3x+1}\right|+C。$$

用组合积分法求有理式的积分,其关键也在于找出辅助积分。找辅助积分的方法,要根据分母两因子的具体情况而定,多做题,多练习,方能熟能生巧,运用自如。

例 3 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(ax+b)(mx+n)}$.

解 令
$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(ax+b)(mx+n)},$$
$$J=\int\frac{x\mathrm{d}x}{(ax+b)(mx+n)},$$

于是有
$$aJ+bI=\int\frac{(ax+b)\mathrm{d}x}{(ax+b)(mx+n)}$$
$$=\int\frac{\frac{1}{m}\mathrm{d}(mx+n)}{(mx+n)}=\frac{1}{m}\ln|mx+n|,\tag{1}$$
$$mJ+nI=\int\frac{(mx+n)\mathrm{d}x}{(ax+b)(mx+n)}$$
$$=\int\frac{\frac{1}{a}\mathrm{d}(ax+b)}{(ax+b)}=\frac{1}{a}\ln|ax+b|。\tag{2}$$

$m\times(1)-a\times(2)$，得

$$I=\frac{1}{mb-na}[\ln|mx+n|-\ln|ax+b|]+C$$

$$=\frac{1}{mb-na}\ln\left|\frac{mx+n}{ax+b}\right|+C。$$

例 4 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)(1+x^2)}$。

解 令

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(1+x)(1+x^2)},$$

$$J=\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(1+x)(1+x^2)},$$

于是有

$$I+J=\int\frac{(1+x^2)\mathrm{d}x}{(1+x)(1+x^2)}=\int\frac{\mathrm{d}(1+x)}{1+x}=\ln|1+x|,$$

$$J-I=\int\frac{(x^2-1)\mathrm{d}x}{(1+x)(1+x^2)}=\int\frac{x-1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{x\mathrm{d}x}{1+x^2}-\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{1}{2}\ln(1+x^2)-\arctan x。$$

所以有

$$I=\frac{1}{2}\ln|1+x|-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+\arctan x+C.$$

例 5 求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+bx)(m+nx^2)}$ $(a>0,b>0,m>0,n>0)$.

解 令

$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a+bx)(m+nx^2)},$$

$$J=\int\frac{x^2\mathrm{d}x}{(a+bx)(m+nx^2)},$$

$$mI+nJ=\int\frac{(m+nx^2)}{(a+bx)(m+nx^2)}\mathrm{d}x$$

$$=\int\frac{\frac{1}{b}\mathrm{d}(ax+b)}{a+bx}=\frac{1}{b}\ln|a+bx|, \qquad (1)$$

$$b^2J - a^2I = \int \frac{(b^2x^2 - a^2)\mathrm{d}x}{(a+bx)(m+bx^2)} = \int \frac{(a+bx)(bx-a)\mathrm{d}x}{(a+bx)(m+nx^2)}$$

$$= \int \frac{(bx-a)\mathrm{d}x}{m+nx^2} = \int \frac{bx\mathrm{d}x}{m+nx^2} - \int \frac{a\mathrm{d}x}{m+nx^2}$$

$$= \frac{b}{2n}\int \frac{\mathrm{d}(m+nx^2)}{m+nx^2} - \int \frac{a\sqrt{\frac{m}{n}}\mathrm{d}\left(\sqrt{\frac{n}{m}}x\right)}{m\left[1+\left(\sqrt{\frac{n}{m}}x\right)^2\right]}$$

$$= \frac{b}{2n}\ln|m+nx^2| - \frac{a\sqrt{\frac{m}{n}}}{m}\int \frac{\mathrm{d}\left(\sqrt{\frac{n}{m}}x\right)}{1+\left(\sqrt{\frac{n}{m}}x\right)^2}$$

$$= \frac{b}{2n}\ln|m+nx^2| - \frac{a}{\sqrt{mn}}\arctan\left(\sqrt{\frac{n}{m}}x\right)。\qquad (2)$$

$(1)\times b^2 - (2)\times n$，得

$$I(b^2m + a^2n) = b\ln|a+bx| - \frac{b}{2}\ln|m+nx^2|$$

$$+ \frac{a\sqrt{n}}{\sqrt{m}}\arctan\left(\sqrt{\frac{n}{m}}x\right),$$

所以有 $$I = \frac{1}{b^2m+a^2n}\left[b\ln|a+bx| - \frac{b}{2}\ln(m+nx^2)\right.$$

$$\left.+ \frac{a\sqrt{n}}{\sqrt{m}}\arctan\left(\sqrt{\frac{n}{m}}x\right)\right] + C.$$

例 6 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(a+bx^2)(m+nx^2)}$ $(a, b, m, n > 0)$。

解 令 $$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{(a+bx^2)(m+nx^2)},$$

$$J = \int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(a+bx^2)(m+nx^2)}。$$

于是便有

$$aI + bJ = \int \frac{(a+bx^2)\mathrm{d}x}{(a+bx^2)(m+nx^2)}$$

$$= \int \frac{dx}{m + nx^2} = \frac{1}{\sqrt{nm}} \arctan\left(\sqrt{\frac{n}{m}}\, x\right),$$

$$mI + nJ = \int \frac{(m + nx^2)dx}{(a + bx^2)(m + nx^2)}$$

$$= \int \frac{dx}{a + bx^2} = \frac{1}{\sqrt{ab}} \arctan\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\, x\right)。$$

所以有

$$I = \frac{1}{na - mb}\left(\sqrt{\frac{n}{m}} \arctan\left(\sqrt{\frac{n}{m}}\, x\right) - \sqrt{\frac{b}{a}} \arctan\left(\sqrt{\frac{b}{a}}\, x\right)\right) + C。$$

例 7 **求** $\int \frac{dx}{x(1 + x^3)}$.

解 **令**
$$I = \int \frac{dx}{x(1 + x^3)},$$

$$J = \int \frac{x^3 dx}{x(1 + x^3)} = \int \frac{x^2 dx}{1 + x^3},$$

于是有
$$I + J = \int \frac{dx}{x} = \ln|x|,$$

而
$$J = \int \frac{x^2 dx}{1 + x^3} = \frac{1}{3} \int \frac{dx^3}{1 + x^3} = \frac{1}{3}\ln|1 + x^3|,$$

所以有
$$I = \ln|x| - \frac{1}{3}\ln|1 + x^3| + C。$$

从以上几例可以看出,找辅助积分要依分母因子的情形而定,一般来说,分母两个因子均为一次式,则令辅助积分的分子为一次幂函数;如果分母的因子有一个为二次式,则令辅助积分的分子为二次幂函数,分母与所求积分分母相同。以上积分是对于分母能分解因式为两个因子相乘的情形,如果是三个因子相乘也可以用组合积分法解,如例 8。

例 8 **求** $\int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)}$。

解 **令**
$$I = \int \frac{dx}{(x+1)(x+2)(x+3)},$$

$$I_1 = \int \frac{x\,dx}{(x+1)(x+2)(x+3)},$$

$$I_2 = \int \frac{x^2 \mathrm{d} x}{(x+1)(x+2)(x+3)},$$

则有

$$2I + 3I_1 + I_2 = \int \frac{(x^2+3x+2)\mathrm{d} x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}(x+3)}{x+3} = \ln|x+3|, \qquad (1)$$

$$3I + 4I_1 + I_2 = \int \frac{(x^2+4x+3)\mathrm{d} x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}(x+2)}{x+2} = \ln|x+2|, \qquad (2)$$

$$6I + 5I_1 + I_2 = \int \frac{(x^2+5x+6)\mathrm{d} x}{(x+1)(x+2)(x+3)}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{x+1} = \ln|x+1|, \qquad (3)$$

解方程组,得

$$I = \frac{1}{2}\ln \frac{|(x+1)(x+3)|}{(x+2)^2} + C。$$

特别地,对于比较复杂的情形,用此法解极为方便。

例 9 **求** $\int \frac{\mathrm{d} x}{(x+m)(x+n)(x+l)}$。

解 **令**

$$I = \int \frac{\mathrm{d} x}{(x+m)(x+n)(x+l)},$$

$$I_1 = \int \frac{x\mathrm{d} x}{(x+m)(x+n)(x+l)},$$

$$I_2 = \int \frac{x^2\mathrm{d} x}{(x+m)(x+n)(x+l)},$$

则有

$$mnI + (m+n)I_1 + I_2 = \int \frac{\mathrm{d}(x+l)}{x+l} = \ln|x+l|, \qquad (1)$$

$$mlI + (m+l)I_1 + I_2 = \int \frac{\mathrm{d}(x+n)}{x+n} = \ln|x+n|, \qquad (2)$$

$$nlI + (n+l)I_1 + I_2 = \int \frac{\mathrm{d}(x+m)}{x+m} = \ln|x+m|, \qquad (3)$$

解方程组,得

$$I = \frac{1}{(m-n)(n-l)(m-l)}[(m-m)\ln|x+l|$$

$$-(m-l)\ln|x+n|+(n-l)\ln|x+m|]+C。$$

例 10 求 $\int \frac{3x^2+5x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\mathrm{d}x$。

解 令
$$I=\int \frac{3x^2+5x+1}{(x+1)(x+2)(x+3)}\mathrm{d}x,$$
$$I_1=\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)},$$
$$I_2=\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)},$$
$$I_3=\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)(x+3)},$$

则有
$$2I_1+3I_2+I_3=\int \frac{\mathrm{d}(x+3)}{x+3}=\ln|x+3|,$$
$$3I_1+4I_2+I_3=\int \frac{\mathrm{d}(x+2)}{x+2}=\ln|x+2|,$$
$$6I_1+5I_2+I_3=\int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{x+1}=\ln|x+1|。$$

解方程组,得
$$I_1=\frac{1}{2}\ln\frac{|(x+1)(x+3)|}{(x+2)^2},$$
$$I_2=\frac{1}{2}\ln\frac{(x+2)^4}{|x+1||x+3|^3},$$
$$I_3=\frac{1}{2}\ln\frac{|x+3|^9|x+1|}{(x+2)^2}。$$

所以有
$$\begin{aligned}I&=3I_3+5I_2+I_1\\&=\frac{3}{2}\ln\frac{|x+3|^9|x+1|}{(x+2)^2}+\frac{5}{2}\ln\frac{(x+2)^4}{(x+1)|x+3|^3}\\&\quad+\frac{1}{2}\ln\frac{|x+1||x+3|}{(x+2)^2}+C\\&=\frac{1}{2}\ln\frac{|x+3|^{13}|x+2|^{12}}{|x+1|}+C.\end{aligned}$$

如果有理式分母含有二次三项式的因子,也可考虑使用组合积分

法求解。

例 11 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+2x+2)}$。

解 令
$$I=\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+2x+2)},$$
$$I_1=\int \frac{x\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+2x+2)},$$
$$I_2=\int \frac{x^2\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+2x+2)},$$

于是便有
$$2I+2I_1+I_2=\int \frac{\mathrm{d}(x+1)}{x+1}=\ln|x+1|, \tag{1}$$
$$I+I_1=\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}=\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1}=\arctan(x+1), \tag{2}$$
$$\begin{aligned} I_2-I&=\int \frac{(x-1)\mathrm{d}x}{x^2+2x+2}=\frac{1}{2}\int \frac{2x+2-4}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x \\ &=\frac{1}{2}\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}\mathrm{d}x-\int \frac{4\mathrm{d}x}{x^2+2x+2} \\ &=\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x^2+2x+2)}{x^2+2x+2}-4\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)^2+1} \\ &=\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)-2\arctan(x+1)。\end{aligned} \tag{3}$$

解方程组,得
$$I=\ln|x+1|-\frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2)+C。$$

虽然用上述方法求此积分并不简单,但用如下普通方法也不方便。

令
$$\frac{1}{(x+1)(x^2+2x+2)}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+2x+2},$$

即
$$1=A(x^2+2x+2)+(x+1)(Bx+C)。$$

令 $x=-1$,得 $1=A \quad A=1$。比较二次项系数,得
$$A+B=0 \quad 1+B=0 \quad B=-1。$$

比较常数项,得

$$2A + C = 1 \quad C = -1.$$

所以 $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x^2+2x+2)} = \int \left(\frac{1}{x+1} - \frac{x+1}{x^2+2x+2}\right)\mathrm{d}x$$

$$= \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln(x^2+2x+2) + C。$$

对于比较复杂的情况,还是用组合积分法要方便得多,如例 12.

例 12 求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)(x^2+bx+l)}$ $(b^2 - 4l < 0)$。

解 令
$$I = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x+a)(x^2+bx+l)},$$
$$I_1 = \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{(x+a)(x^2+bx+l)},$$
$$I_2 = \int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{(x+a)(x^2+bx+l)},$$

于是便有

$$aI + I_1 = \int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+bx+l} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4l-b^2}{4}}$$

$$= \frac{2}{4l-b^2}\arctan\frac{2\left(x+\frac{b}{2}\right)}{4l-b^2},$$

$$lI + bI_1 + I_2 = \int \frac{1}{x+a} = \ln|x+a|,$$

$$I_2 - a^2 I = \int \frac{(x-a)\mathrm{d}x}{x^2+bx+l} = \frac{1}{2}\int \frac{2x+b-b-2a}{x^2+bx+l}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int \frac{2x+b}{x^2+bx+l} - (b+2a)\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+bx+l}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+bx+l) - \frac{b+2a}{2}\frac{2}{4l-b^2}\arctan\frac{2\left(x+\frac{b}{2}\right)}{4l-b^2}$$

$$= \frac{1}{2}\ln(x^2+bx+l) - \frac{b+2a}{4l-b^2}\arctan\frac{2\left(x+\frac{b}{2}\right)}{4l-b^2}。$$

解得 $$I=\frac{1}{l+a^2-ab}\ln|x+a|-\frac{1}{2}\ln(x^2+bx+l)$$
$$+\frac{2a-b}{4l-b^2}\arctan\frac{2x+b}{4l-b^2}+C。$$

用组合积分法求一般有理式的积分,是一次很有意义的尝试,为组合积分法在积分中的普遍应用打下了基础.我们相信,随着研究的深入,组合积分法的应用会越来越广泛。

5.3 用组合法求拉普拉斯逆变换

求拉普拉斯逆变换是工程数学教学中的难点,教师难教,学生难学。这一节介绍一种求拉普拉斯逆变换的新方法——组合求逆法。这种方法就是在求某个逆变换时,找出一个与之结构相似的辅助逆变换,利用已学过的拉普拉斯逆变换的线性性质

$$L^{-1}[aF_1(P)\pm bF_2(P)]$$
$$=aL^{-1}[F_1(P)]\pm bL^{-1}[F_2(P)]=af_1(t)\pm bf_2(t),$$

将原逆变换与辅助逆变换组合起来,从而简化了逆变换的结构式,能很顺利地求出拉普拉斯逆变换。下面先看一个简单的例子.

例 1 已知 $F(P)=\dfrac{P+9}{P^2-5P+6}$,求 $f(t)=L^{-1}[F(P)]$。

解 令 $$f_1(t)=L^{-1}\left[\frac{P}{P^2-5P+6}\right],$$
$$f_2(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{P^2-5P+6}\right],$$

于是有

$$f_1(t)-2f_2(t)=L^{-1}\left[\frac{P-2}{(P-2)(P-3)}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{P-3}\right]=e^{3t},$$
$$f_1(t)-3f_2(t)=L^{-1}\left[\frac{P-3}{(P-2)(P-3)}\right]=L^{-1}\left[\frac{1}{P-2}\right]=e^{2t},$$

所以有 $f_1(t)=3e^{3t}-2e^{2t}$, $f_2(t)=e^{3t}-e^{2t}$。

故原拉普拉斯逆变换为

$$f(t) = f_1(t) + 9f_2(t) = 3e^{3t} - 2e^{2t} + 9e^{3t} - 9e^{2t}$$

$$= 12e^{3t} - 11e^{2t}.$$

从例 1 可知,用组合求逆法求拉普拉斯逆变换,无须用部分分式法将像函数 $F(P)$ 分解为几个分式,然后查逆变换表再分别求之。在一定程度上。这种求逆变换的方法具有较多的优越性,特别是对于比较复杂的情形更是如此。下面再举几个复杂的例子。

例 2　求 $F(P) = \dfrac{1}{(P+5)(P^2+4)}$**的逆变换。**

解法 1　令 $f(t) = L^{-1}\dfrac{1}{(P+5)(P^2+4)}$,

$$g(t) = L^{-1}\frac{P^2}{(P+5)(P^2+4)},$$

由线性性质,便有

$$g(t) + 4f(t) = L^{-1}\frac{P^2+4}{(P+5)(P^2+4)} = L^{-1}\frac{1}{P+5} = e^{-5t},$$

$$g(t) - 25f(t) = L^{-1}\frac{P^2-25}{(P+5)(P^2+4)} = L^{-1}\frac{P-5}{P^2+4}$$

$$= L^{-1}\frac{P}{P^2+4} - \frac{5}{2}L^{-1}\frac{2}{P^2+4}$$

$$= \cos 2t - \frac{5}{2}\sin 2t.$$

所以　$$f(t) = \frac{1}{29}\ e^{-5t} - \cos 2t + \frac{5}{2}\sin 2t$$

即为所求的拉普拉斯逆变换。

解法 2　用传统的方法。设

$$\frac{1}{(P+5)(P^2+4)} = \frac{A}{P+5} + \frac{BP+C}{P^2+4},$$

去分母,有

$$1 = A(P^2+4) + (P+5)(BP+C)。$$

令 $P = -5$**,得** $A = \dfrac{1}{29}$。**比较** P^2 **项系数,得**

$$A+B=0 \qquad B=-\frac{1}{29},$$

比较常数项,得

$$4A+5C=0 \qquad C=\frac{1}{5} \quad 1-\frac{4}{29} \quad =\frac{5}{29}.$$

所以有 $$\frac{1}{(P+5)(P^2+4)}=\frac{1}{29} \quad \frac{1}{P+5}+\frac{-P+5}{P^2+4} \quad 。$$

故有

$$f(t)=L^{-1} \quad \frac{1}{(P+5)(P^2+4)} \quad =\frac{1}{29}L^{-1} \quad \frac{1}{P+5}+\frac{-P+5}{P^3+4}$$

$$=\frac{1}{29}L^{-1} \quad \frac{1}{P+5}-\frac{P}{P^2+4}+\frac{5}{2} \; \frac{2}{P^2+4}$$

$$=\frac{1}{29} \quad e^{-5t}-\cos 2t+\frac{5}{2}\sin 2t \quad 。$$

比较上述两种解法,不难看出,用组合求逆法求逆变换比用传统的方法求逆变换要简便顺利得多。特别是对例 3 的情形,更显示出组合求逆法的优势。

例 3　求 $$F_1(P)=\frac{P^2}{(P+2)(P^2+2P+2)}$$

和 $$F_2(P)=\frac{1}{(P+2)(P^2+2P+2)}$$

的逆变换。

解　令 $$f_1(t)=L^{-1} \quad \frac{P^2}{(P+2)(P^2+2P+2)} \quad ,$$

$$f_2(t)=L^{-1} \quad \frac{1}{(P+2)(P^2+2P+2)} \quad ,$$

$$f_3(t)=L^{-1} \quad \frac{P}{(P+2)(P^2+2P+2)} \quad 。$$

由线性性质不难得到

$$f_1(t)+2f_2(t)+2f_3(t)=L^{-1} \quad \frac{1}{P+2} \quad =e^{-2t},$$

$$f_1(t)-4f_2(t)=L^{-1} \quad \frac{P^2-4}{(P+2)(P^2+2P+2)}$$

$$= L^{-1}\left[\frac{P-2}{P^2+2P+2}\right]$$

$$= L^{-1}\left[\frac{P+1}{(P+1)^2+1} - \frac{3}{(P+1)^2+1}\right]$$

$$= e^{-t}\cos t - 3e^{-t}\sin t,$$

$$f_3(t) + 2f_2(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{P^2+2P+2}\right] = L^{-1}\left[\frac{1}{(P+1)^2+1}\right]$$

$$= e^{-t}\sin t,$$

解得 $$f_2(t) = \frac{1}{2}(e^{-2t} - e^{-t}\cos t + e^{-t}\sin t),$$

$$f_1(t) = e^{-2t} - e^{-t}(\cos t + \sin t),$$

即

$$L^{-1}\left[\frac{P^2}{(P+2)(P^2+2P+2)}\right] = e^{-2t} - e^{-t}(\cos t + \sin t),$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{(P+2)(P^2+2P+2)}\right] = \frac{1}{2}(e^{-2t} - e^{-t}\cos t + e^{-t}\sin t)。$$

例3 如果用传统方法求,复杂的程度可想而知,而用组合求逆法求逆变换,可以一箭双雕,两个逆变换一次完成,大大地简化了运算。

为了进一步地熟练掌握这种方法,不妨再举几例,请读者注意用组合求逆法时应掌握找辅助逆变换的技巧。

例4 求 $F(P) = \dfrac{P+3}{P^3+4P^2+4P}$的逆变换。

解 令 $$f_1(t) = L^{-1}\left[\frac{P}{P^3+4P^2+4P}\right],$$

$$f_2(t) = L^{-1}\left[\frac{1}{P^3+4P^2+4P}\right],$$

$$f_3(t) = L^{-1}\left[\frac{P^2}{P^3+4P^2+4P}\right],$$

由线性性质可得

$$f_3(t)+4f_1(t)+4f_2(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{P}\right]=1,$$

$$f_3(t)+2f_1(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{P+2}\right]=e^{-2t},$$

$$f_1(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{(P+2)^2}\right]=te^{-2t},$$

解得 $$f_3(t)=e^{-2t}-2f_1(t)=e^{-2t}-2te^{-2t},$$

$$f_2(t)=\frac{1}{4}[1-f_3(t)-4f_1(t)]$$

$$=\frac{1}{4}[1-e^{-2t}+2te^{-2t}-4te^{-2t}]$$

$$=\frac{1}{4}(1-e^{-2t}-2te^{-2t})。$$

所以有 $$f(t)=f_1(t)+3f_2(t)=te^{-2t}+\frac{3}{4}(1-e^{-2t}-2e^{-2t}t)$$

$$=\frac{1}{4}(3-3e^{-2t}-2te^{-2t})。$$

例 5 求 $F(P)=\dfrac{4P+6}{(P+1)(P+2)(P+3)}$。

解 令 $$f_1(t)=L^{-1}\left[\frac{P^2}{(P+1)(P+2)(P+3)}\right],$$

$$f_2(t)=L^{-1}\left[\frac{P}{(P+1)(P+2)(P+3)}\right],$$

$$f_3(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{(P+1)(P+2)(P+3)}\right],$$

由线性性质不难得到

$$f_1(t)+3f_2(t)+2f_3(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{P+3}\right]=e^{-3t},$$

$$f_1(t)+4f_2(t)+3f_3(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{P+2}\right]=e^{-2t},$$

$$f_1(t)+5f_2(t)+6f_3(t)=L^{-1}\left[\frac{1}{P+1}\right]=e^{-t},$$

解方程组,得

$$f_3(t)=\frac{1}{2}(e^{-t}-2e^{-2t}+e^{-3t}),$$

$$f_2(t)=\frac{1}{2}(4e^{-2t}-3e^{-3t}-e^{-t})。$$

所以
$$\begin{aligned}f(t)&=4f_2(t)+6f_3(t)\\&=8e^{-2t}-6e^{-3t}-2e^{-t}+3e^{-t}-6e^{-2t}+3e^{-3t}\\&=e^{-t}+2e^{-2t}-3e^{-3t},\end{aligned}$$

即为所求的拉普拉斯逆变换。

从以上几个例子可以看出,在找辅助逆变换时应该注意,如果分母为 P 的 n 次多项式,则可设分子分别为 $1, P, P^2, \cdots, P^{n-1}$,而分母不变,分别求出逆变换,得到一个含有像原函数的方程组,解这个方程组就可以求出所求的逆变换。

利用组合求逆法,尽管有时还比较麻烦,但作为一种新的求逆变换的方法介绍给读者,对于加强这方面的训练是大有益处的。

习　题　5.3

求下列拉普拉斯逆变换:

(1) $F(P)=\dfrac{P}{(P+3)(P+5)}$;

(2) $F(P)=\dfrac{1}{P(P+1)(P+2)}$;

(3) $F(P)=\dfrac{4}{P^2+6P^2+9P}$;

(4) $F(P)=\dfrac{P^2+1}{P(P-1)^2}$;

(5) $F(P)=\dfrac{5P+3}{(P-1)(P^2+2P+5)}$;

(6) $F(P)=\dfrac{150}{(P^2+2P+5)(P^2-4P+8)}$。

5.4　用组合积分法求定积分

既然能够用组合积分法求不定积分,那么,用组合积分法求定积分应该不难。在求出一个原函数后,待入定积分的上、下限,由牛顿-莱布尼茨公式立刻得到定积分的值。本节要介绍的用组合积分法求定积分并非这种情况,而是在组合过程中得到含有定积分的方程组,通过解定积分的方法组而得出结果。先看下面的例子。

例 1　求 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$。

解法 1　令
$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x,$$
则有
$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2},$$
$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\cos x+\sin x}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\,\mathrm{d}x}{\cos x+\sin x}=0$$
(不难证明 $I=J$).

于是便有
$$I=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=\frac{\pi}{4}。$$

解法 2　令
$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x,$$
则
$$\begin{aligned}I+J&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos^2 x}{\cos 2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2x}{\cos 2x}\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\left(\ln|\sec 2x+\tan 2x|+2x\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2},\end{aligned}$$
$$I-J=-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|\cos 2x|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=0。$$

于是有
$$I=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=\frac{\pi}{4}。$$

解法 3　令
$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{\cos x-\sin x}\mathrm{d}x,$$

则
$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos 2x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln|\sec 2x+\tan 2x|\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=0,$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos 2x-\sin 2x}{\cos 2x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\tan 2x)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2}\left[2x-\ln|\cos 2x|\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}。$$

所以
$$I=\frac{\pi}{4}。$$

解法 4　因为
$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan x}\mathrm{d}x,$$

所以可令
$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\tan x}{1+\tan x}\mathrm{d}x,$$

则
$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}x=x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2},$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\tan x}{1+\tan x}\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\mathrm{d}x=0。$$

于是有
$$I=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi}{4}。$$

注意,这里将原积分变为 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan x}\mathrm{d}x$**,其中被积函数在** $x=\frac{\pi}{2}$**处不连续,但** $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\tan x}=0$**,所以** $x=\frac{\pi}{2}$**为第一类间断点.根据积分的存在定理,函数** $\frac{1}{1+\tan x}$ **在** $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ **上可积,故这种积分变形是可行的。**

解法 5　$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cot x}{\cot x+1}\mathrm{d}x$**,步骤同解法** 4**,这里从略。**

解法 6　复数解法。令
$$I=\int\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x,\quad J=\int\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x,$$

由
$$I+\mathrm{i}J=\int\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int\frac{\sin x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x$$
$$=\int\frac{\cos x+\mathrm{i}\sin x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x\quad(\text{代入欧拉公式})$$
$$=\int\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x}{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})+\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})}$$
$$=\frac{1}{\mathrm{i}}\int\frac{\mathrm{d}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})+\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x})}$$
$$=\frac{1-\mathrm{i}}{2}\ln|1+\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}+\mathrm{i}(1-\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}x})|$$
$$=\frac{1}{2}[x+\ln|\cos x+\sin x|]$$
$$+\frac{\mathrm{i}}{2}[x+\ln|\cos x+\sin x|],$$
所以有
$$I=\frac{1}{2}[x+\ln|\cos x+\sin x|]+C。$$
于是
$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left.\left(x+\ln|\cos x+\sin x|\right)\right|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{4}。$$

解法 6 较复杂,但作为一种思考方法介绍给读者,可以开拓思想,启迪思维。在解题遇到困难时,可多一种选择。

从以上解法可以看出,用组合积分法求解定积分的关键在于找到与被积函数的结构相似、而积分区间与所求积分区间相同的辅助积分,将辅助积分与原积分组合起来,可以简化积分式,从而简化运算,得到一个方程组,解方程组即得所求定积分。但由于解题思路与用组合积分法求解不定积分相似,故这里不作赘述,只是通过上例的一题多解,给读者一个将不定积分转化为定积分的方法。为了加深理解,下面再举一例。

例 2 求 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x$。

解 此题如果用万能代换来解,积分无法"积"出,不妨作如下

尝试。

设 $\tan\frac{x}{2}=u$，则 $\sin x=\frac{2u}{1+u^2}$，$\cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2}$，$\mathrm{d}x=\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}$，于是原积分可变为

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x=\int_0^1\frac{\frac{1-u^2}{1+u^2}}{1+\frac{2u}{1+u^2}\,\frac{1-u^2}{1+u^2}}\,\frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2}$$

$$=2\int_0^1\frac{1-u^2}{u^4-2u^3+2u^2+2u+1}\mathrm{d}u。$$

此式很繁，要对它积分相当困难，如果改用组合积分法，就十分方便了。

令
$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x,$$
则有

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x+\sin x}{1+\sin x\cos x}\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}(\sin x-\cos x)}{3-(\sin x-\cos x)^2}$$

$$=\frac{1}{3}\ln\left|\frac{3+(\sin x-\cos x)}{3-(\sin x-\cos x)}\right|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\ln\left|\frac{3+1}{3-1}\right|-\ln\left|\frac{3-1}{3+1}\right|\right)$$

$$=\frac{2}{3}\ln\frac{3+1}{3-1},$$

$$I-J=0\quad(\text{不难证得 } I=J)。$$

于是
$$I=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\ln\frac{3+1}{3-1}\right)=\frac{1}{3}\ln\frac{3+1}{3-1}。$$

用组合积分法求定积分也是十分方便的，用它可以很顺利地求出用传统积分法不容易求出或求不出来的一些定积分。可见掌握这种积分方法是很重要的，希望引起读者的关注。

习 题 5.4

计算下列定积分:

(1) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x \cos x} \mathrm{d} x$; (2) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x-\sin x}{1+\sin x \cos x} \mathrm{d} x$。

5.5 用组合积分法求解硕士研究生入学考试部分数学试题

高等数学作为硕士研究生入学考试的一门重要科目,备受莘莘学子的重视。它已由最初的各高校的自行命题,发展到全国统一命题,积分是其中的必考内容之一。因此,如何求解积分问题,也就显得十分关键。本节将运用组合积分法求解硕士生入学考试中的一类积分问题,给广大考生提供一种解题的新理念、新方法。利用组合积分法求解积分问题运算简便,容易掌握,比传统的积分方法的优点更多。现举例如下。

例 1 求 $\int \sin \ln x \mathrm{d} x$, [1982 年浙江大学考研数学试题], $\int \cos \ln x \mathrm{d} x$. [1984 年西安交通大学考研数学试题]

解 令 $I=\int \sin \ln x \mathrm{d} x$, $J=\int \cos \ln x \mathrm{d} x$,

因为
$$(x \sin \ln x)'=\sin \ln x+\cos \ln x,$$
$$(x \cos \ln x)'=\cos \ln x-\sin \ln x,$$

两边积分,得
$$x \sin \ln x=\int \sin \ln x \mathrm{d} x+\int \cos \ln x \mathrm{d} x,$$
$$x \cos \ln x=\int \cos \ln x \mathrm{d} x-\int \sin \ln x \mathrm{d} x .$$

所以
$$I+J=x \sin \ln x,$$
$$J-I=x \cos \ln x .$$

两式相加(或相减),得

$$I=\frac{1}{2}x(\sin\ln x-\cos\ln x)+C,$$

$$J=\frac{1}{2}x(\sin\ln x+\cos\ln x)+C.$$

例 2　求 $\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$。[1996 **年全国考研数学试题**(二)]

解　令 $I=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}$,　$J=\int\frac{\mathrm{d}x}{1-\sin x}$

则
$$I+J=2\int\frac{\mathrm{d}x}{1-\sin^2x}=2\int\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2x}=2\tan x,$$

$$I-J=-2\int\frac{\sin x}{1-\sin^2x}\mathrm{d}x=2\int\frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos^2x}=-\frac{2}{\cos x}。$$

所以
$$I=\int\frac{\mathrm{d}x}{1+\sin x}=\frac{1}{2}\left(2\tan x-\frac{2}{\cos x}\right)+C$$
$$=\tan x-\frac{1}{\cos x}+C.$$

例 3　求 $\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$。[2003 **年全国考研数学试题**(二)]

解　令 $I=\int\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$,　$J=\int\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$,

因为

$$\left(\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}\right)'=\frac{\sqrt{1+x^2}\,\mathrm{e}^{\arctan x}+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{e}^{\arctan x}-\frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{e}^{\arctan x}}{1+x^2}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}+\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}},$$

$$\left(\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{\sqrt{1+x^2}}\right)'=\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}\frac{1}{1+x^2}\sqrt{1+x^2}-\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\mathrm{e}^{\arctan x}}{1+x^2}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}-\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}。$$

两边积分,得

$$\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{1+x^2} = \int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x + \int \frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x,$$

$$\frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{1+x^2} = \int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x - \int \frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x,$$

即

$$J + I = \frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{1+x^2}, \quad J - I = \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{1+x^2}.$$

所以

$$I = \int \frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\left(\frac{x\mathrm{e}^{\arctan x}}{1+x^2} - \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{1+x^2}\right) + C$$

$$= \frac{(x-1)\mathrm{e}^{\arctan x}}{2\ \ 1+x^2} + C。$$

例 4 **求** $\int \frac{\mathrm{e}^{2\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x$.[1982 **年北京化工学院考研数学试题**]

解 **令** $I = \int \frac{\mathrm{e}^{2\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x, \quad J = \int \frac{x\mathrm{e}^{2\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}\mathrm{d}x,$

因为

$$\left(\frac{\mathrm{e}^{2\arctan x}}{1+x^2}\right)' = \frac{\mathrm{e}^{2\arctan x}\frac{2}{1+x^2}\ \ 1+x^2 - x\frac{1}{1+x^2}\mathrm{e}^{2\arctan x}}{1+x^2}$$

$$= \frac{2\mathrm{e}^{2\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}} + \frac{x\mathrm{e}^{2\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}},$$

$$\left(\frac{x\mathrm{e}^{2\arctan x}}{1+x^2}\right)' =$$

$$\frac{\mathrm{e}^{2\arctan x}\ \ 1+x^2 + x\mathrm{e}^{2\arctan x}\frac{2}{1+x^2} - \frac{x^2}{1+x^2}\mathrm{e}^{2\arctan x}}{1+x^2}$$

两边积分,得

$$\frac{e^{2\arctan x}}{1+x^2}=2\int\frac{e^{2\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx-\int\frac{xe^{2\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx,$$

$$\frac{xe^{2\arctan x}}{1+x^2}=\int\frac{e^{2\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx+2\int\frac{xe^{2\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx,$$

即

$$2I+J=\frac{e^{2\arctan x}}{1+x^2},\tag{1}$$

$$I-2J=\frac{xe^{2\arctan x}}{1+x^2}.\tag{2}$$

$2\times(1)+(2)$,得

$$I=\int\frac{e^{2\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx=\frac{1}{5}\quad\frac{2e^{2\arctan x}}{1+x^2}+\frac{xe^{2\arctan x}}{1+x^2}\quad+C$$

$$=\frac{(x+2)e^{2\arctan x}}{5\quad 1+x^2}+C.$$

例 5 求$\int\frac{e^{k\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$.[1979 年上海工业大学考研数学试题]

解 令 $I=\int\frac{e^{k\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx,\quad J=\int\frac{xe^{k\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx,$

因为

$$\frac{e^{k\arctan x}}{1+x^2}\quad'=\frac{\frac{k}{1+x^2}e^{k\arctan x}\quad 1+x^2-\frac{x}{1+x^2}e^{k\arctan x}}{1+x^2}$$

$$=\frac{ke^{k\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}-\frac{xe^{k\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}},$$

$$\frac{xe^{k\arctan x}}{1+x^2}\quad'=\frac{e^{k\arctan x}\quad 1+x^2+\frac{kx}{1+x^2}e^{k\arctan x}-\frac{x^2}{1+x^2}e^{k\arctan x}}{1+x^2}$$

$$=\frac{e^{k\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}+\frac{kxe^{k\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}},$$

两边积分,得

$$\frac{e^{k\arctan x}}{1+x^2}=k\int\frac{e^{k\arctan x}}{(1+x)^{3/2}}dx-\int\frac{xe^{k\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx,$$

$$\frac{xe^{k\arctan x}}{1+x^2}=\int\frac{e^{k\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx+k\int\frac{xe^{k\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx,$$

即

$$kI-J=\frac{e^{k\arctan x}}{1+x^2}, \tag{3}$$

$$I+kJ=\frac{xe^{k\arctan x}}{1+x^2}。 \tag{4}$$

$k\times(3)+(4)$,得

$$I=\int\frac{e^{k\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx=\frac{1}{k^2+1}\left(\frac{ke^{k\arctan x}}{1+x^2}+\frac{xe^{k\arctan x}}{1+x^2}\right)$$

$$=\frac{(x+k)e^{k\arctan x}}{(k^2+1)\ 1+x^2}+C。$$

同样,由 $k\times(4)-(3)$,得到一个难度较大的积分式

$$J=\frac{1}{k^2+1}\left(\frac{kxe^{k\arctan x}}{1+x^2}-\frac{e^{k\arctan x}}{1+x^2}\right)+C$$

$$=\frac{(kx-1)e^{k\arctan x}}{(k^2+1)\ 1+x^2}+C.$$

例 6 求 $\int\frac{x^2\arctan x}{1+x^2}dx$.[1991 年全国考研数学试题(五)]

解 令 $I=\int\frac{x^2\arctan x}{1+x^2}dx$, $J=\int\frac{\arctan x}{1+x^2}dx$,

则

$$I+J=\int\arctan x\,dx=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx$$

$$=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2),$$

$$J=\int\arctan x\,d\arctan x=\frac{1}{2}\arctan^2 x.$$

所以

$$I = \int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2} \mathrm{d}x$$
$$= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}\arctan^2 x + C.$$

例 7 **求** $\int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} \mathrm{d}x$.

解 **令** $I = \int \frac{\arctan x}{1+x^2} \mathrm{d}x$, $J = \int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} \mathrm{d}x$,

则
$$I + J = \int \frac{\arctan x}{x^2} \mathrm{d}x = -\int \arctan x \, \mathrm{d}\frac{1}{x}$$
$$= -\frac{\arctan x}{x} + \int \frac{1}{x}\,\frac{1}{1+x^2} \mathrm{d}x$$
$$= -\frac{\arctan x}{x} + \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}\right) \mathrm{d}x$$
$$= -\frac{\arctan x}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

而
$$I = \int \frac{\arctan x}{1+x^2} \mathrm{d}x = \int \arctan x \, \mathrm{d}\arctan x = \frac{1}{2}(\arctan x)^2,$$

所以
$$J = \int \frac{\arctan x}{x^2(1+x^2)} \mathrm{d}x$$
$$= -\frac{\arctan x}{x} + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) - \frac{1}{2}(\arctan x)^2 + C$$
$$= -\frac{\sin x}{x} + \frac{1}{2}\ln\frac{x^2}{1+x^2} - \frac{1}{2}\arctan x + C.$$

例 8 **求** $\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2} \mathrm{d}x$.[1983 **年湖南大学考研数学试题**]

解法 1 **因为**
$$\left(\frac{\ln x}{x-\ln x}\right)' = \frac{\frac{1}{x}(x-\ln x) - \ln x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(x-\ln x)^2} = \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2},$$

所以
$$\int \frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2} \mathrm{d}x = \frac{\ln x}{x-\ln x} + C.$$

解法 2　因为

$$\left(\frac{x}{x-\ln x}\right)'=\frac{x-\ln x-x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(x-\ln x)^2}=\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2},$$

所以
$$\int\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{x-\ln x}+C.$$

解法 3　用待定积分法求解。令

$$\int\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x=\frac{A\ln x}{x-\ln x}+C,$$

则
$$\left(\frac{A\ln x}{x-\ln x}\right)'=\frac{\frac{A}{x}(x-\ln x)-A\ln x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(x-\ln x)^2}$$
$$=\frac{A(1-\ln x)}{(x-\ln x)^2}=\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$$

比较,得
$$A=1,$$

所以
$$\int\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x=\frac{\ln x}{x-\ln x}+C.$$

解法 4　用待定积分法求解。令

$$\int\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x=\frac{Ax}{x-\ln x}+C,$$

则
$$\left(\frac{Ax}{x-\ln x}\right)'=\frac{A(x-\ln x)-Ax\left(1-\frac{1}{x}\right)}{(x-\ln x)^2}$$
$$=\frac{A(1-\ln x)}{(x-\ln x)^2}=\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}$$

比较,得
$$A=1,$$

所以
$$\int\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x=\frac{x}{x-\ln x}+C.$$

解法 5　用倒置法求解。令 $x=\frac{1}{t}$**,则** $\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}t}{t^2}$**,所以**

$$\int\frac{1-\ln x}{(x-\ln x)^2}\mathrm{d}x=\int\frac{1-\ln\frac{1}{t}}{\frac{1}{t}-\ln\frac{1}{t}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t$$

$$= -\int \frac{1+\ln t}{(1+t\ln t)}\mathrm{d}t = -\int \frac{\mathrm{d}(1+t\ln t)}{(1+t\ln t)^2}$$

$$= \frac{1}{1+t\ln t} + C = \frac{x}{x-\ln x} + C.$$

例 9　求 $\int \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x$。[1982 **年太原机械学院考研数学试题**]

解　令　$I = \int \frac{x\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x,\quad J = \int \frac{\mathrm{e}^x}{(1+x)^2}\mathrm{d}x,$

则

$$I + J = \int \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\mathrm{d}x,$$

$$J = -\int \mathrm{e}^x \mathrm{d}\frac{1}{1+x} = -\frac{\mathrm{e}^x}{1+x} + \int \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\mathrm{d}x.$$

所以

$$I = \int \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\mathrm{d}x + \frac{\mathrm{e}^x}{1+x} - \int \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{e}^x}{1+x} + C.$$

例 10　求 $\int \frac{\mathrm{d}t}{t(t^n+a)}$。[1980 **年厦门大学考研数学试题**]

解　当 $a \neq 0$ **时**,**令**

$$I = \int \frac{\mathrm{d}t}{t(t^n+a)},\quad J = \int \frac{t^{n-1}\mathrm{d}t}{t^n+a},$$

则

$$aI + J = \int \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln|t|.$$

而

$$J = \frac{1}{n}\int \frac{\mathrm{d}(t^n+a)}{t^n+a} = \frac{1}{n}\ln|t^n+a|,$$

所以

$$I = \frac{1}{a}\ \ln|t| - \frac{1}{n}\ln|t^n - a| + C$$

$$= \frac{1}{a}\ln\frac{|t|}{|t^n-a|} + C.$$

当 $a=0$ **时**, $\int \frac{\mathrm{d}t}{t(t^n+a)} = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^{n+1}} = -\frac{1}{nt^n} + C.$

例 11　求 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x - 2\sin x}$,[1980 **年上海硅酸盐研究所考研**

数学试题], $\int \frac{dx}{\sin 2x + 2\sin x}$, [1994 年全国考研数学试题(一)]

解 令 $I = \int \frac{dx}{\sin 2x - 2\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin x(\cos x - 1)}$,

$$J = \int \frac{dx}{\sin 2x + 2\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin x(\cos x + 1)},$$

则

$$I + J = \int \frac{2\cos x}{2\sin x(\cos^2 x - 1)} dx$$

$$= -\int \frac{d\sin x}{\sin^3 x} = \frac{1}{2\sin^2 x}, \tag{5}$$

$$I - J = \int \frac{2}{2\sin x(\cos^2 x - 1)} dx = -\int \frac{dx}{\sin^3 x}$$

$$= \int \csc x \, d\cot x = \csc x \cot x + \int \cot^2 x \csc x \, dx$$

$$= \csc x \cot x + \int \csc^3 x \, dx - \int \csc x \, dx.$$

所以

$$I - J = -\frac{1}{2}(\csc x \cot x - \ln|\csc x - \cot x|). \tag{6}$$

(5) + (6),得

$$I = \int \frac{dx}{\sin 2x - 2\sin x}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sin^2 x} - \csc x \cot x + \ln|\csc x - \cot x|\right] + C$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1 + \cos x} + \ln|\csc x - \cot x|\right] + C,$$

(5) - (6),得

$$J = \int \frac{dx}{\sin 2x + 2\sin x}$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{\sin^2 x} + \csc x \cot x - \ln|\csc x - \cot x|\right] + C$$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{1}{1 - \cos x} - \ln|\csc x - \cot x|\right] + C.$$

从以上求解过程可以看出,用组合积分法求积分可以将两个类似的积分放在一起,一并求解,这样可以节约时间,同时也不会出错。

用组合积分法还可以求定积分和广义积分,例如:

例 12 求 $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$.[1981 **年中山大学考研数学试题**]

解 令 $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{1+\sin x}\mathrm{d}x$, $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{1-\sin x}\mathrm{d}x$,

则

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2\sin x}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x=-2\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos^2 x}$$

$$=\frac{2}{\cos x}\bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=2(\sqrt{2}-1),$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-2\sin^2 x}{1-\sin^2 x}\mathrm{d}x=-2\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sec^2 x-1)\mathrm{d}x$$

$$=-2(\tan x-x)\bigg|_0^{\frac{\pi}{4}}=2\left(\frac{\pi}{4}-1\right).$$

所以

$$I=\frac{1}{2}\left[2(\sqrt{2}-1)+2\left(\frac{\pi}{4}-1\right)\right]=\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}-2.$$

例 13 求 $\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$。[1980 **年北京工业学院考研数学试题**]

解 令

$$x=a\sin t,$$

则

$$I=\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{x+\sqrt{a^2-x^2}}=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t,$$

可设

$$J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t$$

则

$$I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}t=t\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2},$$

$$I-J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\sin t+\cos t}{\sin t+\cos t}\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}(\sin t+\cos t)}{\sin t+\cos t}$$

$$=\ln|\sin t+\cos t|\bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=0.$$

所以

$$I=\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}+0\right)=\frac{\pi}{4}.$$

例 14 **求广义积分** $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{e^x+e^{2x}}$。[2003 **年全国考研数学试题**(一)]

解 令 $I=\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{2x}}$, $J=\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x}+1}$,

则 $$I+J=\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x}}=-\frac{1}{\mathrm{e}^{x}}\Big|_{1}^{+\infty}=0+\frac{1}{\mathrm{e}}。$$

而 $$J=\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(\mathrm{e}^{x})}{\mathrm{e}^{x}(\mathrm{e}^{x}+1)}=\ln\frac{\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{e}^{x}+1}\Big|_{1}^{+\infty}$$

$$=0-\ln\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}+1}=\ln(\mathrm{e}+1)-1,$$

所以 $$I=\frac{1}{\mathrm{e}}-\ln(\mathrm{e}+1)+1\ .$$

附录 A　增补积分表

说明:(1) **积分表右边省略了积分常数** C;(2) $\ln f(x)$**是指** $\ln|f(x)|$。

1. 含有 $a\sin x + b\cos x$ **的有理式的积分**

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$\dfrac{\cos x}{a\sin x + b\cos x}$	$\dfrac{b}{a^2+b^2}x + \dfrac{a}{a^2+b^2}\ln(a\sin x + b\cos x)$
$\dfrac{\sin x}{a\sin x + b\cos x}$	$\dfrac{a}{a^2+b^2}x - \dfrac{b}{a^2+b^2}\ln(a\sin x + b\cos x)$
$\dfrac{\sin^2 x}{a\sin x + b\cos x}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\quad \dfrac{b^2}{a^2+b^2}\ln\ \tan\dfrac{x+\arctan\dfrac{b}{a}}{2}$ $-\ a\cos x - b\sin x$
$\dfrac{\cos^2 x}{a\sin x + b\cos x}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\quad \dfrac{a^2}{a^2+b^2}\ln\ \tan\dfrac{x+\arctan\dfrac{b}{a}}{2}$ $+\ a\cos x + b\sin x$
$\dfrac{\sin x}{a\sin x + b\cos x + c}$	$\dfrac{a}{a^2+b^2}x - \dfrac{b}{a^2+b^2}\ln(a\sin x + b\cos x + c)$ $-\dfrac{bc}{a^2+b^2}\int\dfrac{\mathrm{d}x}{a\sin x + b\cos x + c}$ (**后一积分查表可求出**)
$\dfrac{\cos x}{a\sin x + b\cos x + c}$	$\dfrac{b}{a^2+b^2}x + \dfrac{a}{a^2+b^2}\ln(a\sin x + b\cos x + c)$ $-\dfrac{bc}{a^2+b^2}\int\dfrac{\mathrm{d}x}{a\sin x + b\cos x + c}$ (**后一积分查表可求出**)

续表

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$\dfrac{1}{(a\sin x+b\cos x)(b\sin x+a\cos x)}$ $(\lvert a\rvert\neq\lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{a^2-b^2}\ln\dfrac{a\sin x+b\cos x}{b\sin x+a\cos x}$
$\dfrac{1}{(a\sin x+b\cos x)^2}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\dfrac{b\sin x-a\cos x}{a\sin x+b\cos x}$
$\dfrac{\sin x}{(a\sin x+b\cos x)^2}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left(\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left\lvert\tan\dfrac{x+\arctan\dfrac{b}{a}}{2}\right\rvert+\dfrac{b}{a\sin x+b\cos x}\right)$
$\dfrac{\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^2}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left(\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\ln\left\lvert\tan\dfrac{x+\arctan\dfrac{b}{a}}{2}\right\rvert-\dfrac{a}{a\sin x+b\cos x}\right)$
$\dfrac{\sin^2 x}{(a\sin x+b\cos x)^2}$	$\dfrac{1}{(a^2+b^2)^2}\left[\dfrac{b^3\sin x-ab^2\cos x}{a\sin x+b\cos x}+(a^2-b^2)x-2ab\ln(a\sin x+b\cos x)\right]$
$\dfrac{\cos^2 x}{(a\sin x+b\cos x)^2}$	$\dfrac{1}{(a^2+b^2)^2}\left[\dfrac{a^2b\sin x-a^3\cos x}{a\sin x+b\cos x}-(a^2-b^2)x+2ab\ln(a\sin x+b\cos x)\right]$

2. 含有 $a+b\sin x$, $a+b\cos x$, $a+b\sin x\cos x$ 的积分

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$\dfrac{\sin x}{a+b\sin x}$ $(\lvert a\rvert > \lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{b}x+\dfrac{a}{b\quad a^2-b^2}\arctan\dfrac{a^2-b^2(a-b)\cos x}{a^2-b^2+ab\cos^2 x}$
$\dfrac{\cos x}{a+b\cos x}$ $(\lvert a\rvert > \lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{b}x+\dfrac{a}{b\quad a^2-b^2}\arctan\dfrac{a^2-b^2\sin x}{a+b\cos x}$
$\dfrac{\sin^2 x}{a+b\sin x}$ $(a^2<b^2)$	$\dfrac{1}{b^2}\quad a^2\int\dfrac{\mathrm{d}x}{a+b\sin x}-ax-b\cos x$ **积分** $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{a+b\sin x}$ **查表可求**
$\dfrac{\cos^2 x}{a+b\cos x}$ $(\lvert a\rvert > \lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{b^2}\quad a^2\int\dfrac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}-ax+b\sin x$ **积分** $\int\dfrac{\mathrm{d}x}{a+b\cos x}$ **查表可求**
$\dfrac{\sin x}{a+b\sin x\cos x}$ $(b>0, 2a+b>0, 2a\neq b)$	$\dfrac{1}{2}[I(x)-J(x)]\quad(2a<b)$ $\dfrac{1}{2}[I(x)-K(x)]\quad(2a>b)$
$\dfrac{\cos x}{a+b\sin x\cos x}$ $(b>0, 2a+b>0, 2a\neq b)$	$\dfrac{1}{2}[I(x)+J(x)]\quad(2a<b)$ $\dfrac{1}{2}[I(x)+K(x)]\quad(2a>b)$
	$I(x)=\dfrac{1}{b(2a+b)}\ln\dfrac{2a+b+\quad b(\sin x-\cos x)}{2a-b-\quad b(\sin x-\cos x)}$
	$J(x)=\dfrac{1}{b(b-2a)}\ln\dfrac{b(\sin x+\cos x)-\quad b-2a}{b(\sin x+\cos x)+\quad b-2a}$
	$K(x)=\dfrac{2}{b(2a-b)}\arctan\dfrac{b(\sin x+\cos x)}{2a-b}$

3．含有其他三角函数的有理式的积分

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$\dfrac{1}{b+a\tan x}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\quad bx+a\ln\quad\cos\quad\arctan\dfrac{a}{b}-x$
$\dfrac{\tan x}{b+a\tan x}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\quad ax-b\ln\quad\cos\quad\arctan\dfrac{a}{b}-x$
$\dfrac{1}{a\sec x+b\tan x}$	$\dfrac{1}{b}\ln(a+b\sin x)$
$\dfrac{\tan x}{a\sec x+b\tan x}\ (\vert a\vert>\vert b\vert)$	$\dfrac{1}{b}x+\dfrac{a}{b\quad a^2-b^2}\arctan\dfrac{a^2-b^2\ (a-b)\cos x}{a^2-b^2+ab\cos^2 x}$
$\dfrac{\sec^2 x}{a\sec x+b\tan x}(\vert a\vert>\vert b\vert)$	$\dfrac{1}{a^2-b^2}[a\ln(\sec x+\tan x)+b\ln\cos x$ $-b\ln(a+b\sin x)]$
$\dfrac{\tan^2 x}{a\sec x+b\tan x}(\vert a\vert>\vert b\vert)$	$\dfrac{1}{a^2-b^2}\quad a\ln(\sec x+\tan x)+b\ln\cos x$ $-\dfrac{a^2}{b}\ln(a+b\sin x)$
$\dfrac{1}{a\csc x+b\cot x}$	$-\dfrac{1}{b}\ln(a+b\cos x)$
$\dfrac{\cot x}{a\csc x+b\cot x}\ (\vert a\vert>\vert b\vert)$	$\dfrac{1}{b}x+\dfrac{a}{b\quad a^2-b^2}\arctan\dfrac{a^2-b^2\sin x}{a+b\cos x}$
$\dfrac{\tan x}{a\tan x+b\cot x}(a>0,b>0)$	$\dfrac{1}{a-b}\quad x-\dfrac{1}{ab}\arctan\quad\dfrac{a}{b}\tan x$
$\dfrac{\cot x}{a\tan x+b\cot x}(a>0,b>0)$	$\dfrac{1}{b-a}\quad x-\dfrac{1}{ab}\arctan\quad\dfrac{a}{b}\tan x$
$\dfrac{\tan^2 x}{a\tan x+b\cot x}$	$\dfrac{1}{2a^2}\quad -2a\ln(\cos x)-\dfrac{ab}{a-b}\ln(a\sin^2 x+b\cos^2 x)$
$\dfrac{\cot^2 x}{a\tan x+b\cot x}$	$\dfrac{1}{2b^2}\quad 2b\ln(\sin x)-\dfrac{ab}{a-b}\ln(a\sin^2 x+b\cos^2 x)$

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$\dfrac{\sec x}{a\sec x+b\csc x}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}[ax-b\ln(a\sin x+b\cos x)]$
$\dfrac{\csc x}{a\sec x+b\csc x}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}[bx+a\ln(a\sin x+b\cos x)]$
$\dfrac{\sec^2 x}{a\sec x+b\csc x}(\lvert a\rvert\neq\lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{a^2-b^2}\quad x-\dfrac{b}{a}\arctan\dfrac{a\tan x}{b}$
$\dfrac{\csc^2 x}{a\sec x+b\csc x}(\lvert a\rvert\neq\lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{b^2-a^2}\quad x-\dfrac{a}{b}\arctan\dfrac{a\tan x}{b}$

4. 含有指数函数的有理式的积分

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$\dfrac{e^x}{ae^x+be^{-x}}$	$\dfrac{1}{2a}[x+\ln(ae^x+be^{-x})]$
$\dfrac{e^{-x}}{ae^x+be^{-x}}$	$\dfrac{1}{2b}[x-\ln(ae^x+be^{-x})]$
$\dfrac{e^{2x}}{ae^x+be^{-x}}$	$\dfrac{1}{a}\quad e^x-\quad\dfrac{b}{a}\arctan\quad\dfrac{a}{b}e^x$
$\dfrac{e^{-2x}}{ae^x+be^{-x}}$	$-\dfrac{1}{b}\quad e^{-x}+\quad\dfrac{a}{b}\arctan\quad\dfrac{a}{b}e^x$
$\dfrac{e^x}{(ae^x+be^{-x})^2}(ab>0)$	$\dfrac{1}{2a}\quad\dfrac{1}{ab}\arctan\quad\dfrac{a}{b}e^x\quad-\dfrac{1}{ae^x+be^{-x}}$
$\dfrac{e^{-x}}{(ae^x+be^{-x})^2}(ab>0)$	$\dfrac{1}{2b}\quad\dfrac{1}{ab}\arctan\quad\dfrac{a}{b}e^x\quad+\dfrac{1}{ae^x+be^{-x}}$
$\dfrac{e^{2x}}{(ae^x+be^{-x})^2}$	$\dfrac{1}{2a^2}\quad x-\dfrac{1}{2}\dfrac{ae^x-be^{-x}}{ae^x+be^{-x}}+\ln(ae^x+be^{-x})$
$\dfrac{e^{-2x}}{(ae^x+be^{-x})^2}$	$\dfrac{1}{2b^2}\quad x-\dfrac{1}{2}\dfrac{ae^x-be^{-x}}{ae^x+be^{-x}}-\ln(ae^x+be^{-x})$

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$\dfrac{1}{(ae^{x}+be^{-x})(be^{x}+ae^{-x})}$ $(\lvert a\rvert\neq\lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{2(a^{2}-b^{2})}\ln\dfrac{ae^{x}+be^{-x}}{be^{x}+ae^{-x}}$
$\dfrac{1}{(ae^{x}+be^{-x})^{2}}$	$\dfrac{1}{4ab}\dfrac{ae^{x}-be^{-x}}{ae^{x}+be^{-x}}$
$\dfrac{a^{x}}{ba^{x}+ca^{-x}}$	$\dfrac{1}{2b}\quad x+\dfrac{1}{\ln a}\ln(ba^{x}+ca^{-x})$
$\dfrac{a^{-x}}{ba^{x}+ca^{-x}}$	$\dfrac{1}{2c}\quad x-\dfrac{1}{\ln a}\ln(ba^{x}+ca^{-x})$
$\dfrac{a^{x}}{(ba^{x}+ca^{-x})^{2}}$ $(bc>0)$	$\dfrac{1}{2b}\;\dfrac{1}{\ln a}\quad\dfrac{1}{bc}\arctan\quad\dfrac{b}{c}a^{x}\quad-\dfrac{1}{ba^{x}+ca^{-x}}$
$\dfrac{a^{-x}}{(ba^{x}+ca^{-x})^{2}}$ $(bc>0)$	$\dfrac{1}{2c}\;\dfrac{1}{\ln a}\quad\dfrac{1}{bc}\arctan\quad\dfrac{b}{c}a^{x}\quad+\dfrac{1}{ba^{x}+ca^{-x}}$
$\dfrac{1}{(ba^{x}+ca^{-x})(ca^{x}+ba^{-x})}$	$\dfrac{1}{2(b^{2}-c^{2})}\;\dfrac{1}{\ln a}\;\ln\dfrac{ba^{x}+ca^{-x}}{ca^{x}+ba^{-x}}$

5. 含有双曲函数的有理式的积分

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$\dfrac{\mathrm{sh}\,x}{a\,\mathrm{sh}\,x+b\,\mathrm{ch}\,x}$ $(\lvert a\rvert\neq\lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{a^{2}-b^{2}}[ax-b\ln(a\,\mathrm{sh}\,x+b\,\mathrm{ch}\,x)]$
$\dfrac{\mathrm{ch}\,x}{a\,\mathrm{sh}\,x+b\,\mathrm{ch}\,x}$ $(\lvert a\rvert\neq\lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{a^{2}-b^{2}}[-bx+a\ln(a\,\mathrm{sh}\,x+b\,\mathrm{ch}\,x)]$
$\dfrac{\mathrm{sh}^{2}\,x}{a\,\mathrm{sh}\,x+b\,\mathrm{ch}\,x}$ $(\lvert a\rvert>\lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{a^{2}-b^{2}}\quad\dfrac{2b^{2}}{a^{2}-b^{2}}\arctan\quad\dfrac{a+b}{a-b}e^{x}$ $+a\,\mathrm{sh}\,x-b\,\mathrm{ch}\,x$

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$\dfrac{\mathrm{ch}^2 x}{a\,\mathrm{sh}\,x + b\,\mathrm{ch}\,x}$ $(\lvert a\rvert > \lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{a^2-b^2}\quad\dfrac{2a^2}{a^2-b^2}\arctan\quad\dfrac{a+b}{a-b}e^x$ $+ a\,\mathrm{sh}\,x - b\,\mathrm{ch}\,x$
$\dfrac{\mathrm{sh}\,x}{(a\,\mathrm{sh}\,x + b\,\mathrm{ch}\,x)^2}$ $(\lvert a\rvert > \lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{a^2-b^2}\quad\dfrac{2a}{a^2-b^2}\arctan\quad\dfrac{a+b}{a-b}e^x$ $- b\ln(a\,\mathrm{sh}\,x + b\,\mathrm{ch}\,x)$
$\dfrac{\mathrm{ch}\,x}{(a\,\mathrm{sh}\,x + b\,\mathrm{ch}\,x)^2}$ $(\lvert a\rvert > \lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{a^2-b^2}\quad\dfrac{-2b}{a^2-b^2}\arctan\quad\dfrac{a+b}{a-b}e^x$ $+ a\ln(a\,\mathrm{sh}\,x + b\,\mathrm{ch}\,x)$
$\dfrac{1}{(a\,\mathrm{sh}\,x + b\,\mathrm{ch}\,x)^2}$ $(\lvert a\rvert \neq \lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{b^2-a^2}\,\dfrac{b\,\mathrm{sh}\,x + a\,\mathrm{ch}\,x}{a\,\mathrm{sh}\,x + b\,\mathrm{ch}\,x}$
$\dfrac{1}{(a\,\mathrm{sh}\,x + b\,\mathrm{ch}\,x)(b\,\mathrm{sh}\,x + a\,\mathrm{ch}\,x)}$ $(\lvert a\rvert \neq \lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{a^2-b^2}\ln\dfrac{a\,\mathrm{sh}\,x + b\,\mathrm{ch}\,x}{b\,\mathrm{sh}\,x + a\,\mathrm{ch}\,x}$
$\dfrac{1}{b + a\,\mathrm{th}\,x}$ $(\lvert a\rvert \neq \lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{a^2-b^2}[a\ln(a\,\mathrm{sh}\,x + b\,\mathrm{ch}\,x) - bx]$
$\dfrac{\mathrm{th}\,x}{b + a\,\mathrm{th}\,x}$ $(\lvert a\rvert \neq \lvert b\rvert)$	$\dfrac{1}{a^2-b^2}[ax + b\ln(a\,\mathrm{sh}\,x + b\,\mathrm{ch}\,x)]$
$\dfrac{1}{a\,\mathrm{sh}\,x + b\,\mathrm{ch}\,x}$ $(\lvert a\rvert > \lvert b\rvert)$	$\dfrac{2}{a^2-b^2}\arctan\quad\dfrac{a+b}{a-b}e^x$
$\dfrac{1}{a + b\,\mathrm{sh}\,x + c\,\mathrm{ch}\,x}$ $(c^2 > a^2 + b^2)$	$\dfrac{2}{c^2-a^2-b^2}\arctan\dfrac{(b+c)e^x + a}{c^2-a^2-b^2}$

6. 含有 $\sqrt{a^2-x^2}$ 的无理式的积分

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$\dfrac{1}{x+\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a>0)$	$\dfrac{1}{2}\left(\arcsin x+\ln\left(x+\sqrt{a^2-x^2}\right)\right)$
$\dfrac{1}{(ax+b)\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left(b\arcsin x+a\ln\left(ax+b\sqrt{a^2-x^2}\right)\right)$
$\dfrac{1}{(ax+b)\sqrt{a^2-x^2}}$ $(a>0)$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left(b\arcsin\dfrac{x}{a}+a\ln\left(ax+b\sqrt{a^2-x^2}\right)\right)$
$\dfrac{1-x^2}{(ax+b)\sqrt{1-x^2}}$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left(\dfrac{a^2}{a^2+b^2}\ln\dfrac{\arcsin x+\arctan\dfrac{b}{a}}{2}+bx+a\sqrt{1-x^2}\right)$

7. 含有 $\sqrt{x^2\pm a^2}$ 的无理式的积分

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$\dfrac{1}{(ax+b)\sqrt{x^2+a^2}}$ $(a>0$ 且 $\vert a\vert\neq\vert b\vert)$	$\dfrac{1}{a^2-b^2}\left[a\ln\left(ax+b\sqrt{x^2+a^2}\right)-b\ln\left(x+\sqrt{x^2+a^2}\right)\right]$
$\dfrac{1}{(ax+b)\sqrt{x^2+1}}$ $(\vert a\vert=\vert b\vert$ 且 $a\neq0)$	$\dfrac{1}{2a}\left(\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)-\dfrac{1}{2\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}\right)$
$\dfrac{1}{(ax+b)\sqrt{x^2+1}}$ $(\vert a\vert\neq\vert b\vert)$	$\dfrac{1}{a^2+b^2}\left(a\ln\left(ax+b\sqrt{x^2+1}\right)-b\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)$
$\dfrac{x^2+1}{(ax+b)\sqrt{x^2+1}}$ $(a^2>b^2)$	$\dfrac{1}{a^2-b^2}\left(\dfrac{2a^2}{a^2-b^2}\arctan\left(\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}\,\mathrm{e}^x\right)+a\,\mathrm{ch}\,t-b\,\mathrm{sh}\,t\right)$

续表

$f(x)$	$\int f(x)\mathrm{d}x$
$\frac{x}{a(1+x^2)+bx\sqrt{1+x^2}}$ $(\lvert a\rvert \neq \lvert b\rvert)$	$\frac{1}{a^2-b^2}\ a\ln(bx+a\sqrt{1+x^2})-b\ln(x+\sqrt{x^2+1})$
$\frac{x}{x^2+a^2+x\sqrt{x^2+a^2}}$ $(a>0)$	$\frac{1}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2(x+\sqrt{x^2+a^2})}$
$\frac{1}{ax+b\sqrt{x^2-1}}$ $(\lvert a\rvert \neq \lvert b\rvert)$	$\frac{1}{a^2-b^2}\ a\ln(ax+b\sqrt{x^2-1})+b\ln(x+\sqrt{x^2-1})$
$\frac{1}{ax+b\sqrt{x^2-a^2}}$ $(\lvert a\rvert \neq \lvert b\rvert)$	$\frac{1}{a^2-b^2}\ a\ln(ax+b\sqrt{x^2-a^2})-b\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})$
$\frac{1}{ax+b\sqrt{x^2-a^2}}$ $(a=b)$	$\frac{1}{2a}\ln(x+\sqrt{x^2-a^2})+\frac{a^2}{2(x+\sqrt{x^2-a^2})^2}$
$\frac{\sqrt{x^2-1}}{ax+b\sqrt{x^2-1}}$ $(b^2>a^2)$	$\frac{1}{a^2-b^2}\ -\frac{2a^2}{b^2-a^2}\arctan\sqrt{\frac{b+a}{b-a}}(x+\sqrt{x^2-1})$ $+\frac{1}{a^2-b^2}(a\sqrt{x^2-1}-bx)$
$\frac{x}{a(x^2-1)+bx\sqrt{x^2-1}}$ $(\lvert a\rvert \neq \lvert b\rvert)$	$\frac{1}{a^2-b^2}\ a\ln(bx+a\sqrt{x^2-1})-b\ln(x+\sqrt{x^2-1})$

附录 B　增补积分递推公式

公式 1　设

$$J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^n}\quad n>1,\ x\neq k\pi-\arctan\frac{b}{a},$$

则有递推公式

$$J_n=\frac{1}{(n-1)(a^2+b^2)}\left[(n-2)J_{n-2}+\frac{b\sin x-a\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}\right]。$$

公式 2　设

$$J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin x+b\cos x)^n}\quad n>1,\ x\neq k\pi-\arctan\frac{b}{a},$$

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2},\quad B=\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2},$$

则有递推公式

$$I=\int\frac{a_1\sin x+b_1\cos x}{(a\sin x+b\cos x)^n}\mathrm{d}x=AJ_{n-1}-\frac{B}{n-1}\frac{1}{(a\sin x+b\cos x)^{n-1}}.$$

公式 3　设 $J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^n}\ (n>1,\ ab\neq0)$，**则有递推公式**

$$J_n=\frac{1}{4ab(n-1)}\left[(n-2)J_{n-2}+\frac{a\mathrm{e}^x-b\mathrm{e}^{-x}}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^{n-1}}\right].$$

公式 4　设 $J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^n}\ (n>1,\ ab\neq0)$，

且

$$A=\frac{ba_1+ab_1}{2ab},\quad B=\frac{ab_1-ba_1}{2ab},$$

则有递推公式

$$I=\int\frac{a_1\mathrm{e}^x+b_1\mathrm{e}^{-x}}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^n}\mathrm{d}x=AJ_{n-1}+\frac{B}{n-1}\frac{1}{(a\mathrm{e}^x+b\mathrm{e}^{-x})^{n-1}}。$$

公式 5　设 $J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(ba^x+ca^{-x})^n}\ (n>1,\ bc\neq0)$，**则有递推公式**

$$J_n=\frac{1}{4bc(n-1)}(n-2)J_{n-2}+\frac{1}{\ln a}\frac{ba^x-ca^{-x}}{(ba^x+ca^{-x})^{n-1}}\text{。}$$

公式 6　设 $J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(ba^x+ca^{-x})^n}\ (n>1,bc\neq0)$，

且 $$A=\frac{ba_1-cb_1}{2bc},\quad B=\frac{bb_1-ca_1}{2bc},$$

则有递推公式

$$I=\int\frac{a_1a^x+b_1a^{-x}}{(ba^x+ca^{-x})^n}\mathrm{d}x=AJ_{n-2}+\frac{B}{n-1}\frac{1}{\ln a}\frac{1}{(ba^x+ca^{-x})^{n-1}}\text{。}$$

公式 7　设 $J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)^n}\ (n>1,a^2\neq b^2)$，

则有递推公式

$$J_n=\frac{1}{(n-1)(b^2-a^2)}(n-2)J_{n-2}+\frac{b\operatorname{sh}x+a\operatorname{ch}x}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)^{n-1}}\text{。}$$

公式 8　设 $J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)^n}\ (n>1,a^2\neq b^2)$，

$$A=\frac{aa_1-bb_1}{a^2-b^2},\quad B=\frac{ba_1-ab_1}{a^2-b^2},$$

则有递推公式

$$I=\int\frac{a_1\operatorname{sh}x+b_1\operatorname{ch}x}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)^n}\mathrm{d}x=AJ_{n-1}+\frac{B}{n-1}\frac{1}{(a\operatorname{sh}x+b\operatorname{ch}x)^{n-1}}\text{。}$$

公式 9　设

$$J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{[b\operatorname{sh}(x\ln a)+c\operatorname{ch}(x\ln a)]^n}\ (n>1,|b|\neq|c|),$$

则有递推公式

$$J_n=\frac{1}{(n-1)(c^2-b^2)}(n-2)J_{n-2}+\frac{1}{\ln a}\frac{c\operatorname{sh}(x\ln a)+b\operatorname{ch}(x\ln a)}{[b\operatorname{sh}(x\ln a)+c\operatorname{ch}(x\ln a)]^{n-1}}\text{。}$$

公式 10　设

$$J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{[b\operatorname{sh}(x\ln a)+c\operatorname{ch}(x\ln a)]^n}\quad(n>1,|b|\neq|c|),$$

$$A=\frac{a_1 b-cb_1}{b^2-c^2},\quad B=\frac{a_1 c-b_1 b}{b^2-c^2},$$

则有递推公式

$$I=\int\frac{a_1\operatorname{sh}(x\ln a)+b_1\operatorname{ch}(x\ln a)}{[b\operatorname{sh}(x\ln a)+c\operatorname{ch}(x\ln a)]^n}\mathrm{d}x$$

$$=AJ_{n-1}+\frac{B}{n-1}\frac{1}{\ln a}\frac{1}{[b\operatorname{sh}(x\ln a)+c\operatorname{ch}(x\ln a)]^{n-1}}.$$

公式 11　设　$J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin[x]+b\cos[x])^n}\quad(n>1)$,

则有递推公式

$$J_n=\frac{1}{(n-1)(a^2+b^2)}\left((n-2)J_{n-2}+\frac{b\sin[x]-a\cos[x]}{(a\sin[x]+b\cos[x])^{n-1}}\right)。$$

公式 12　设　$J_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{(a\sin[x]+b\cos[x])^n}\quad(n>1)$,

$$A=\frac{aa_1+bb_1}{a^2+b^2},\quad B=\frac{ab_1-ba_1}{a^2+b^2},$$

则有递推公式

$$I=\int\frac{a_1\sin[x]+b_1\cos[x]}{(a\sin[x]+b\cos[x])^n}\mathrm{d}x$$

$$=AJ_{n-1}-\frac{B}{n-1}\frac{1}{(a\sin[x]+b\cos[x])^{n-1}}。$$

公式 13　设 a, b **为常数**, n **为非负整数, 且**

$$I_n=\int x^n\mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x,\quad J_n=\int x^n\mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x,$$

则有递推公式

$$I_n=\frac{x^n\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx+b\sin bx)-\frac{n}{a^2+b^2}(aI_{n-1}+bJ_{n-1}),$$

$$J_n=\frac{x^n\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx-b\cos bx)+\frac{n}{a^2+b^2}(bJ_{n-1}-aI_{n-1})。$$

公式 14　设 a **为常数**, n **为非负整数, 且**

$$I_n=\int x^n a^x\cos x\,\mathrm{d}x,\quad J_n=\int x^n a^x\sin x\,\mathrm{d}x,$$

则有递推公式

$$I_n=\frac{x^n a^x}{\ln^2 a+1}(\ln a\cos x+\sin x)-\frac{n}{\ln^2 a+1}(\ln aI_{n-1}+J_{n-1}),$$

$$J_n = \frac{x^n a^x}{\ln^2 a + 1}(\ln a \sin x - \cos x) + \frac{n}{\ln^2 a + 1}(I_{n-1} - \ln a J_{n-1})。$$

公式 15　设 n 为非负整数，$|a| \neq |b|$，**且**

$$I_n = \int x^n e^{ax} \operatorname{ch} bx \, dx, \quad J_n = \int x^n e^{ax} \operatorname{sh} bx \, dx,$$

则有递推公式

$$I_n = \frac{x^n e^{ax}}{a^2 - b^2}(a \operatorname{ch} bx - b \operatorname{sh} bx) - \frac{n}{a^2 - b^2}(aI_{n-1} - bJ_{n-1}),$$

$$J_n = \frac{x^n e^{ax}}{a^2 - b^2}(a \operatorname{sh} bx - b \operatorname{ch} bx) - \frac{n}{a^2 - b^2}(aJ_{n-1} - bI_{n-1})。$$

主要参考文献

1 华罗庚．高等数学引论．北京:科学出版社,1963．

2 《现代数学手册》编纂委员会．现代数学手册:精典数学卷．武汉:华中科技大学出版社,2000．

3 [俄] Б П 吉米多维奇．数学分析习题集．北京:人民教育出版社,1959．

4 朱永银,郭文秀．一种积分方法——组合积分法．数学通报,1992(6):32～35

5 《数学手册》编写组．数学手册．北京:人民教育出版社,1979．