POLITÉCNICA

Tema 6. Razonamiento Aproximado
Razonamiento con imprecisión: lógica borrosa

Daniel Manrique
dmanrique@fi.upm.es
D-2109

2019

Razonamiento con imprecisión
Lógica borrosa

1. Representación del conocimiento
2. Razonamiento en lógica borrosa
   - Controladores difusos

Bibliografía

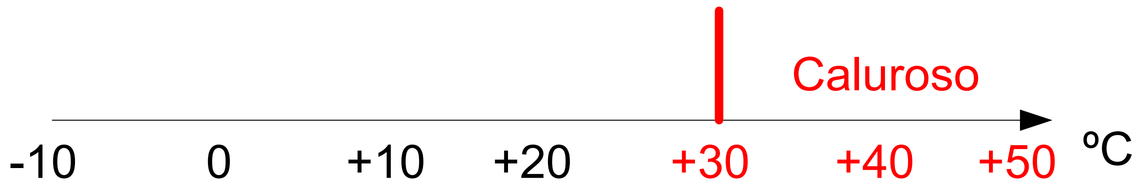
- Diapositivas (temas generales):
  - Daniel Manrique, M. Carmen Suárez. Razonamiento con imprecisión: lógica borrosa. Apuntes y ejercicios. http://oa.upm.es/46795/, 2017.
  - José Cuena. Sistemas Inteligentes. Conceptos, técnicas y métodos de construcción. Facultad de Informática – Servicio de Publicaciones.Fundación General de la UPM. Madrid, 1997.
  - G. J. Klir, B. Yuan. Fuzzy Sets and Fuzzy Logic. Theory and Applications. Prentice Hall PTR. New Jersey, 1995.
- Temas específicos:
  - J.M. Font, D. Manrique, J. Ríos. Evolutionary Construction and Adaptation of Intelligent Systems. Expert Systems With Applications, Vol. 37: 7711-7720, 2010.
  - A. Carrascal, A. Díez, J.M. Font, D. Manrique. Evolutionary Generation of Fuzzy Knowledge Bases for Diagnosing Monitored Railway Systems. Proceedings of 22nd International Congress Condition Monitoring and Diagnostic Engineering Management, pp. 191-198, 2009. San Sebastián, España.
  - J. Couchet, J.M. Font, D. Manrique. Using Evolved Fuzzy Neural Networks for Injury Detection form Isokinetic Curves. Proceedings of 28th International Conference on Innovative Techniques and Applications of Artificial Intelligence, pp. 225-238, 2008. Cambridge, UK.
  - A. Carrascal, D. Manrique, J. Ríos, C. Rossi. Evolutionary Local Search of Fuzzy Rules through a novel Neuro-Fuzzy Encoding Method. International Journal of Evolutionary Computation, Vol. 11(4): 439-461, 2003.

Representación del conocimiento

1. Borrosidad, vaguedad, imprecisión.
2. Conjuntos borrosos.
3. Operaciones con conjuntos borrosos.

Imprecisión

- La lógica borrosa permite representar conjuntos con fronteras no precisas.
- La afirmación "x pertenece a A" no es cierta o falsa, sino que medible mediante una posibilidad en [0,1].
- Permite manejar la vaguedad o imprecisión.
  - "Día caluroso": la frontera entre caluroso y templado no es exacta.



  - ¿Se puede suponer que si hay 30ºC el día es caluroso, pero si hay 29.9ºC, ¿entonces ya no lo es?

Imprecisión e incertidumbre

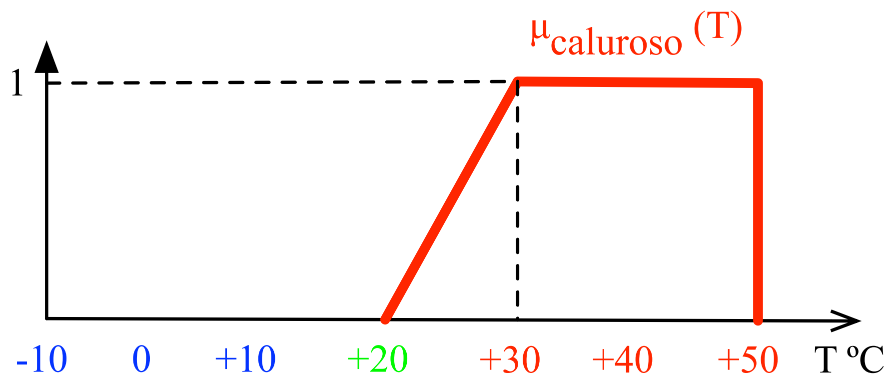
- Imprecisión: vaguedad, fronteras mal definidas.
- Incertidumbre: si lanzamos un dado hay seis sucesos (precisos), pero se desconoce qué saldrá.
- Aplicaciones de la lógica borrosa:
  - Sistemas basados en el conocimiento.
  - Control difuso.
  - Reconocimiento de patrones.
  - Proceso de encaje en marcos.

Representación del conocimiento

1. Borrosidad, vaguedad, imprecisión.
2. Conjuntos borrosos.
3. Operaciones con conjuntos borrosos.

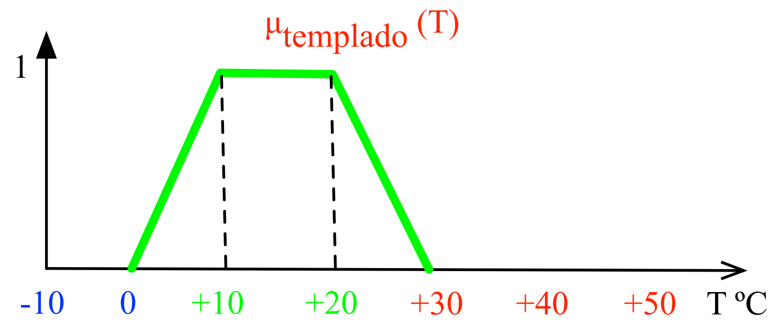
Conjuntos borrosos

- Conjunto borroso: aquél en donde la pertenencia de los elementos se define mediante una función de pertenencia o función de distribución de posibilidad.
  - $\mu_A: X \rightarrow [0,1]$.
    - El conjunto borroso A tiene una función de pertenencia $\mu_A(x)$ que asigna a cada valor $x \in X$ un número entre 0 (no pertenece) y 1 (sí pertenece).
    - Los valores intermedios representan pertenencia parcial.
- Ejemplo: $\mu_{caluroso}$: $T^a \rightarrow [0,1]$:

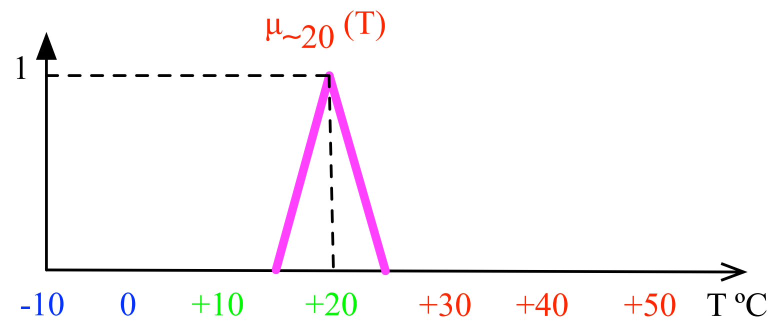


Distribuciones típicas

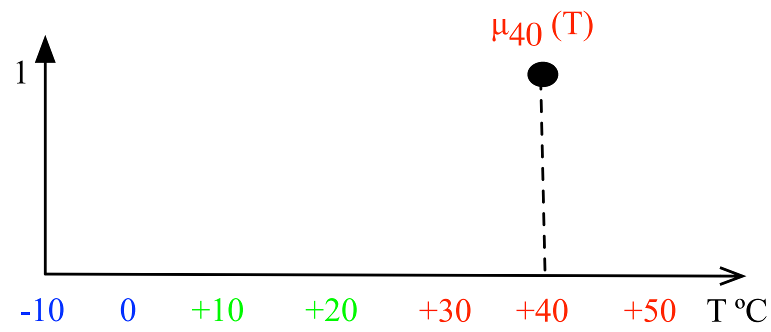
- Trapezoidales:



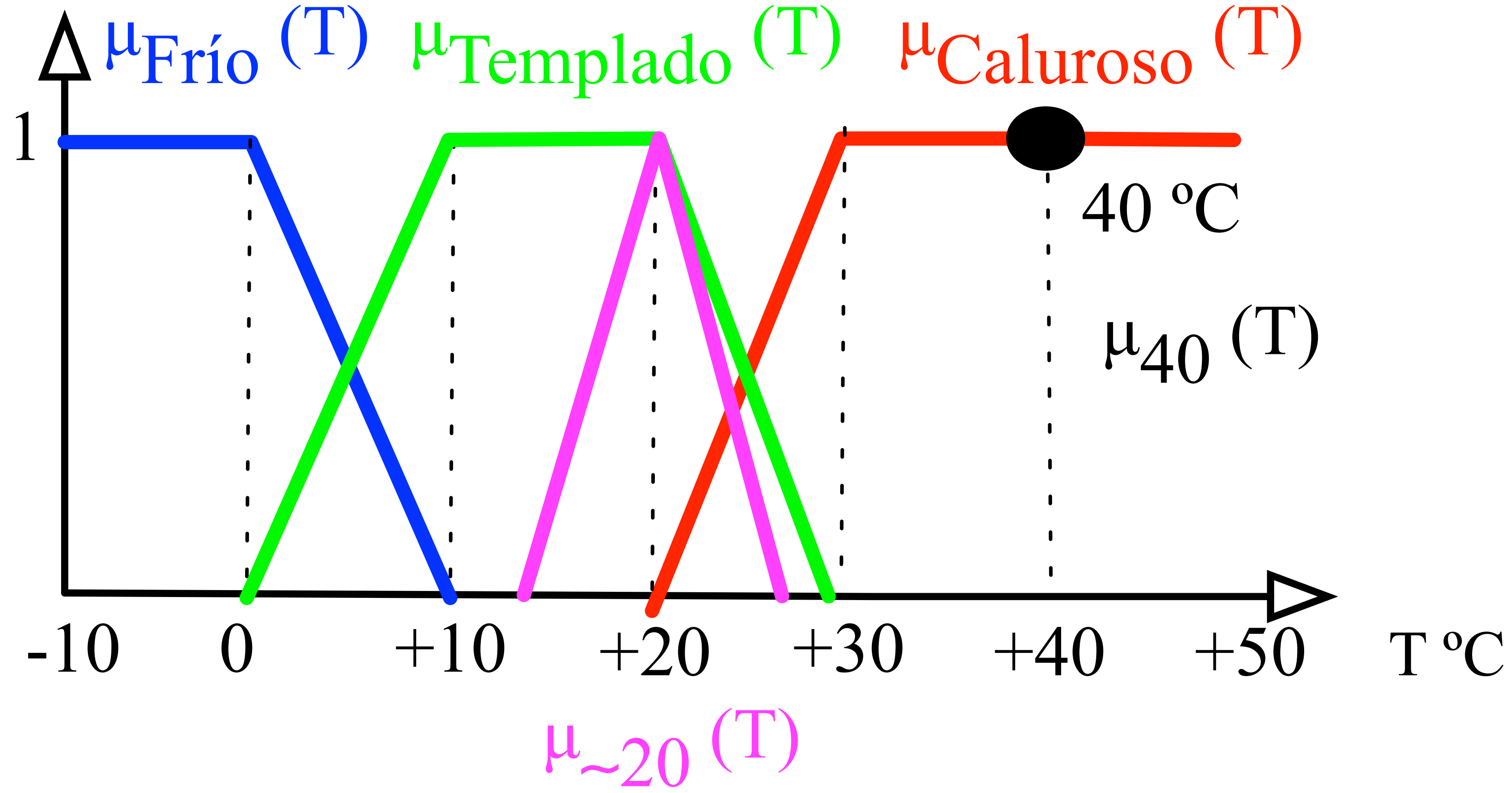
- Triangulares:



- Nítidas:



Ejemplo



$\mu_{Frío}(T)$
$\mu_{Templado}(T)$
$\mu_{Caluroso}(T)$
1
40 ºC
$\mu_{40}(T)$
-10
0
+10
+20
+30
+40
+50
T ºC
$\mu_{\sim 20}(T)$

Representación del conocimiento

1. Borrosidad, vaguedad, imprecisión.
2. Conjuntos borrosos.
3. Operaciones con conjuntos borrosos.

Composición de fórmulas

- A partir de la cuantificación de la posibilidad de que sea cierta "x es p" expresado como $\mu_p(x)$:
  - x es p y q: $\mu_{p \wedge q}(x)$.
  - x es p ó q: $\mu_{p \vee q}(x)$
  - x no es p: $\mu_{\neg p}(x)$
  - Si x es p, entonces x es q: $\mu_{p \to q}(x)$
- Generalización a n dimensiones:
  - $\mu_{p \wedge q}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mu_{p \vee q}(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, etc.

Extensión cilíndrica

- Para componer dos funciones, deben estar referidas a las mismas variables:
  - No es posible componer x es p e y es q:

$$\mu_p(x) \wedge \mu_q(y)$$

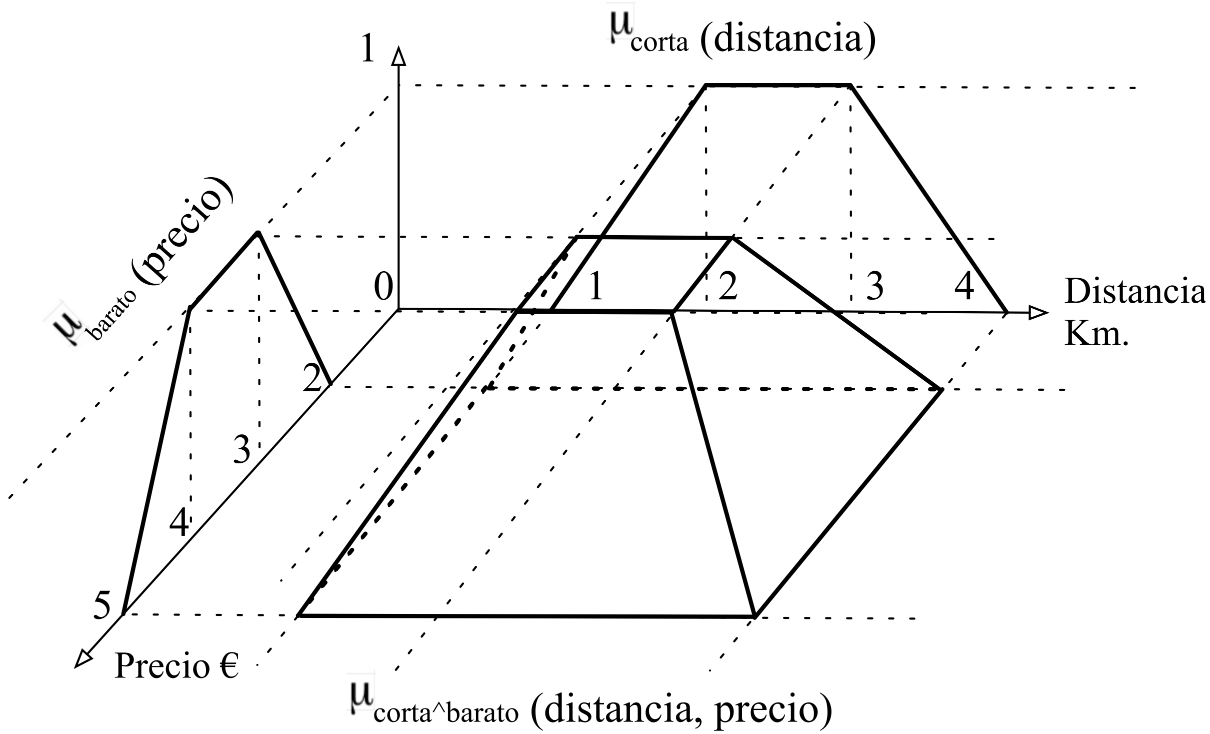
- Para ello se calcula la extensión cilíndrica de $\mu_p(x)$ con y, y la extensión cilíndrica de $\mu_q(y)$ con x para obtener $\mu_p(x,y)$ y $\mu_q(x,y)$.
  - Entonces es posible: $\mu_{p \wedge q}(x,y)$

- La extensión cilíndrica de $\mu_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ con y es $\mu_p(x_1, x_2, \ldots, x_n, y)$ tal que cumple:

$$\forall y \; \mu_p(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) = \mu_p(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Extensión cilíndrica. Ejemplo

- Se desea representar que la tarifa de un taxi es barata cuando la carrera es corta.
  - Se tiene μ_{corta}(distancia) y μ_{barato}(precio).
  - Se desea calcular $\mu_{corta \wedge barato}$(distancia, precio)



t-Norma, t-Conorma, negación

- Se manejan las siguientes funciones:
  - t-norma:
    - Conjunción (lógica), intersección (conjuntos)
    - T (x,y). $\mu_{p \wedge q}(x) = T(\mu_p(x), \mu_q(x))$
  - t-conorma:
    - Disyunción (lógica), unión (conjuntos)
    - S (x,y). $\mu_{p \vee q}(x) = S(\mu_p(x), \mu_q(x))$
  - Negación:
    - N(x). $\mu_{\neg p}(x) = N(\mu_p(x))$.

Funciones T: t-normas

- Representa la conjunción o intersección.
- $\forall x, y, z$ distribuciones de posibilidad. Propiedades:
  1. $T(x,1) = x$ (elemento neutro)
  2. $x \leq y \rightarrow T(x,z) \leq T(y,z)$ (monotonía)
  3. $T(x,y) = T(y,x)$ (conmutativa)
  4. $T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z)$ (asociativa)
- Ejemplos:
  - $T(x,y) = \text{mín}(x,y)$ (mínimo)
  - $T(x,y) = P(x,y) = x \cdot y$ (producto)
  - $T(x,y) = W(x,y) = \text{máx}(0,x+y-1)$ (Lukasiewicz)
  - $T(x,y) = Z(x,y) = x$ si $y=1$; y si $x=1$; 0 resto (drástica)

Funciones S: t-conormas

- Representa la disyunción.
- $\forall$ x, y, z distribuciones de posibilidad. Propiedades:
  1. $S(x,0) = x$ (elemento neutro)
  2. $x \leq y \rightarrow S(x,z) \leq S(y,z)$ (monotonía)
  3. $S(x,y) = S(y,x)$ (conmutativa)
  4. $S(x,S(y,z)) = S(S(x,y),z)$ (asociativa)
- Ejemplos:
  - $S(x,y) = \text{máx}(x,y)$ (máximo)
  - $S(x,y) = P'(x,y) = x+y-x\cdot y$ (suma-producto)
  - $S(x,y) = W'(x,y) = \text{mín}(1,x+y)$ (Lukasiewicz)
  - $S(x,y) = Z'(x,y) =$ x si y=0; y si x=0; 1 resto (drástica)

Funciones de negación

- Debe cumplir $\forall x$ función de distribución de posibilidad:
  1. $N(0) = 1; N(1) = 0$ (condiciones frontera)
  2. $x \leq y \rightarrow N(x) \geq N(y)$ (inversión de monotonía)
- Ejemplos:
  - $N(x) = (1-x)$
  - $N(x) = (1-x^2)^{1/2}$

Implicación difusa (I)

- Se han visto las operaciones:
  - T(x,y), S(x,y) y N(x)
  - Conjuntos:
    - Intersección, unión y complementario
  - Lógica:
    - Conjunción, disyunción y negación
- En lógica borrosa se define la implicación a través de la función binaria J (x,y).

$$\mu_{p\rightarrow q}(x) = J(\mu_p(x), \mu_q(x))$$

Implicación difusa (II)

- De la lógica clásica, se tiene que:
  - $A \rightarrow B = \neg A \vee B$
  - $J(x,y) = S(N(x),y)$.
- Tomando $N(x) = 1-x$, se tiene:
  - Con $S(x,y) = \text{máx}(x,y)$ $\quad J(x,y) = \text{máx}(1-x,y)$
  - Con $S(x,y) = P'(x,y) = x+y-x\cdot y$ $\quad J(x,y) = 1-x+x\cdot y$
  - $S(x,y) = W'(x,y) = \text{mín}(1,x+y)$ $\quad J(x,y) = \text{mín}(1,1-x+y)$
  - $S(x,y) = Z'(x,y) = x$ si $y=0$; y si $x=0$; 1 resto
    $J(x,y) = y$ si $x=1$; $1-x$ si $y=0$; 1 resto

  - **$J(x,y) = \text{mín}(x,y)$. Implicación de Mamdani**

Índice

1. Representación del conocimiento con lógica borrosa
2. Razonamiento en lógica borrosa
   - Controladores difusos

Modus ponens generalizado

- Modus ponens:
  - Regla: Si X es A, entonces Y es B
  - Hecho: X es A.
  - Conclusión: Y es B

- En lógica borrosa se puede generalizar al no requerir X es A, sino X es A':
  - Modus ponens generalizado:
    - Regla: Si X es A, entonces Y es B
    - Hecho: X es A'
    - Conclusión: Y es B'
  - La función de posibilidad de $\mu_{B'}$ se calcula con RCI.

Regla composicional de inferencia

$$\mu_{B'}(y) = \operatorname*{Sup}_{x \in X} \left\{ T\left(\mu_{A'}(x), \mu_{A \to B}(x, y) \right) \right\}$$

Inferencia difusa con RCI

- Datos: X es A: $\mu_A(x)$, Y es B: $\mu_B(y)$, X es A': $\mu_{A'}(x)$
- Objetivo: cálculo $\mu_{B'}(y)$

1. Calcular $\mu_{A\rightarrow B}(x,y)$ a partir de $\mu_A(x)$ y $\mu_B(y)$
   - Es necesario realizar las extensiones cilíndricas: $\mu_A(x)$ con y, $\mu_B(y)$ con x
   - Se emplea para la implicación cualquier función J(x,y). E.g. Zadeh: J(x,y)=máx (1-x, y).
2. Calcular $T(\mu_{A'}(x), \mu_{A\rightarrow B}(x,y))$.
   - Se realiza la extensión cilíndrica de $\mu_{A'}(x)$ con y.
   - Se emplea una T-norma. T(x,y) = mín (x,y).
3. Calcular el supremo en x de $T(\mu_{A'}(x,y), \mu_{A\rightarrow B}(x,y))$, que está en función de x e y.
   - Se obtiene la distribución de posibilidad sobre la dimensión y: $\mu_{B'}(y)$, es decir, las posibilidades de y es B'.

Motor de inferencia borroso

- Base de conocimiento:
  - R1: Si X es A_1, entonces Y es B_1.
  - R2: Si X es A_2, entonces Y es B_2.
  - ....
  - Rn: Si X es A_n, entonces Y es B_n.
  - Hecho: X es A′
- Se aplica la RCI a cada regla, obteniendo:
  - $\mu_{B1'}(y), \mu_{B2'}(y), \ldots, \mu_{Bn'}(y)$.
- A partir de las distribuciones anteriores, se calcula la distribución final y es B′ mediante la t-conorma S.
  - $\mu_{B'}(y)=S(\mu_{B1'}(y), \mu_{B2'}(y), \ldots, \mu_{Bn'}(y))$.

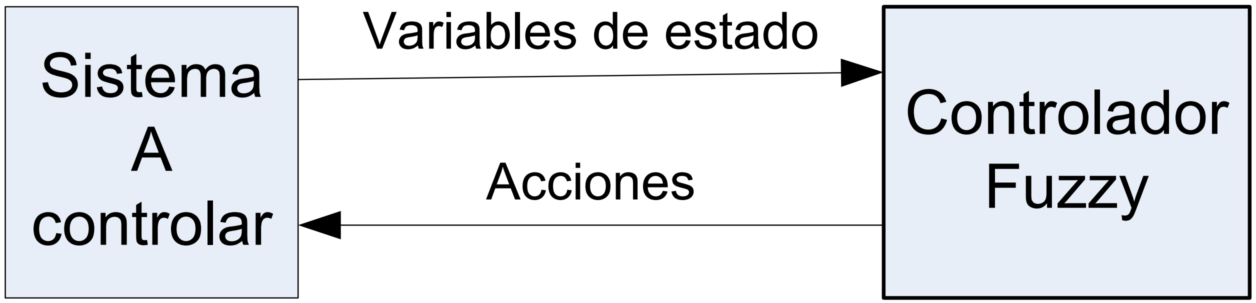
Índice

1. Representación del conocimiento con lógica borrosa
2. Razonamiento en lógica borrosa
   - Controladores difusos

Controladores difusos

- Se emplean para controlar sistemas inestables.
- El control tiene por objeto garantizar una salida en el sistema a pesar de las perturbaciones que le afectan.
- Ejemplos:
  - Sistemas de navegación.
  - Sistemas de climatización.
  - Sistemas de ventilación (túneles, garajes).

Esquema control difuso



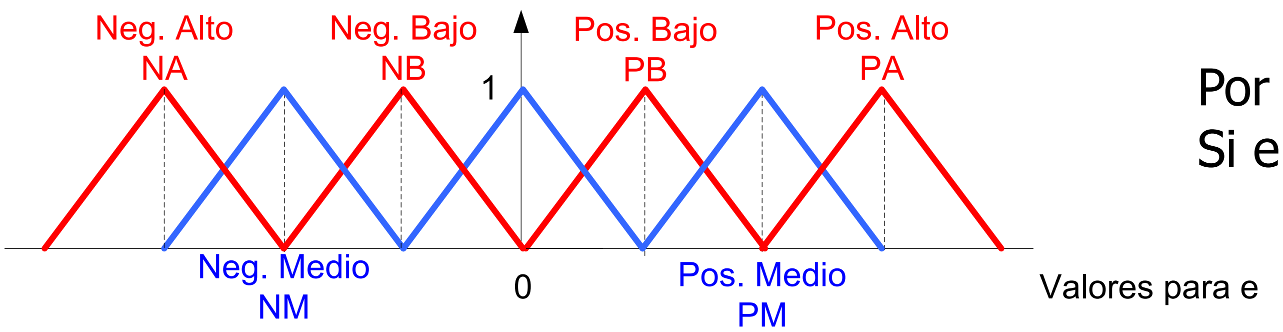
- Variables de estado:
  - s_1, s_2, …, s_n: estado del sistema. Temperatura.
  - e_1, e_2, …, e_n: desvíos (error) con respecto al valor de referencia. Temperatura con respecto a 20 ºC: ΔTª
  - Δe_1, Δe_2, …, Δe_n: tendencia del error: Tª / t
- Acciones:
  - v_1, v_2, …, v_m: cambios a realizar en los actuadores. Administrar la potencia de la caldera.

Modelo de control difuso

- Los valores de las variables de estado y acciones pueden ser etiquetas lingüísticas (valores cualitativos) que son representados por funciones de posibilidad:

$$R_1\text{: Si } e=A_1, \ldots, \Delta e=B_1, \ldots, \text{ entonces } v=C_1$$

- En lo que sigue, se utilizarán reglas del tipo:
  - Si e=A, Δe=B, entonces v = C
  - Cada valor de e, Δe y v son etiquetas lingüísticas con su correspondiente función de posibilidad. Por ejemplo, para e:



Por ejemplo:
Si e = NB

Notación

- Dada la regla: Si $e=A$ y $\Delta e=B$, entonces $v = C$
  - A, B y C son funciones de posibilidad:
  - $\mu_A(e)$, $\mu_B(\Delta e)$, $\mu_C(v)$
- La notación será la siguiente:
  - Si $e = A(e)$ y $\Delta e=B(\Delta e)$, entonces $v = C(v)$
- Un controlador difuso posee una base de conocimiento de reglas del tipo:
  - R1: Si $e = A_1(e)$ y $\Delta e=B_1(\Delta e)$, entonces $v = C_1(v)$
  - R2: Si $e = A_2(e)$ y $\Delta e=B_2(\Delta e)$, entonces $v = C_2(v)$
  - …
  - Rn: Si $e = A_n(e)$ y $\Delta e=B_n(\Delta e)$, entonces $v = C_n(v)$

  - En un momento el estado del sistema es:
    - $e = A(e)$ y $\Delta e=B(\Delta e)$.
  - Tras un proceso de inferencia, el controlador responde para mantener el equilibrio: $v = C(v)$

Regla composicional de inferencia

- El proceso de inferencia emplea la regla composicional de inferencia:

$$\mu_{B'}(y) = \operatorname*{Sup}_{x \in X} \{ T(\mu_{A'}(x), \mu_{A \to B}(x, y)) \}$$

  - y es v. La acción a tomar.
  - x es bidimensional: e y Δe.
  - $\mu_{B'}(y) = C'(v)$. Distrib. de posib. de la acción a tomar.
  - $\mu_{A'}(x) = A'(e) \wedge B'(\Delta e)$. Estado actual del sistema.
  - $\mu_{A \to B}(x,y) = R_i$: $A_i(e) \wedge B_i(\Delta e) \to v = C_i(v)$

$$C_i'(v) = \operatorname*{Sup}_{e, \Delta e} \{ T(A'(e) \wedge B'(\Delta e), A_i(e) \wedge B_i(\Delta e) \to C_i(v)) \}$$

Inferencia en controladores (I)

- T (x,y) = mín (x,y).
- J (x,y) = mín (x,y). Mamdani.

$$C_i^{'}(v) = \operatorname*{Sup}_{e,\Delta e}\left\{T\left(A'(e)\wedge B'(\Delta e), A_i(e)\wedge B_i(\Delta e) \rightarrow C_i(v)\right)\right\}$$

$$C_i^{'}(v) = \operatorname*{Sup}_{e,\Delta e}\left\{\text{mín}\left(\text{mín}(A'(e),B'(\Delta e)),\text{mín}(\text{mín}(A_i(e),B_i(\Delta e)),C_i(v))\right)\right\}$$

Asociatividad:

$$C_i^{'}(v) = \text{mín}\left(\text{mín}\left(\operatorname*{Sup}_{e}\left\{\text{mín}\left(A'(e),A_i(e)\right)\right\},\operatorname*{Sup}_{\Delta e}\left\{\text{mín}(B'(\Delta e),B_i(\Delta e))\right\}\right),C_i(v)\right)$$

Inferencia en controladores (II)

Antecedente regla

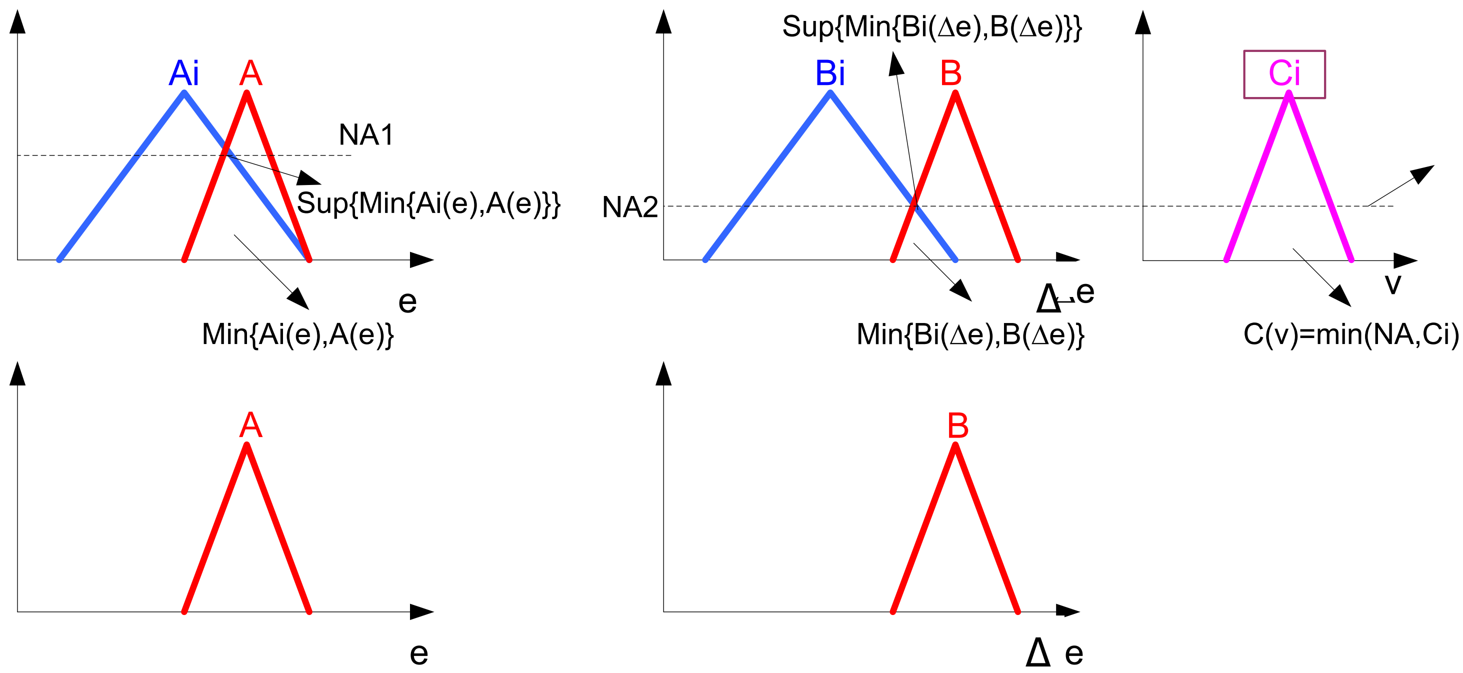
Antecedente regla

$$C_i^{'}(v)=\text{mín}\left(\text{mín}\left(\sup_{e}\left\{\text{mín}\left(A'(e),A_i(e)\right)\right\},\sup_{\Delta e}\left\{\text{mín}(B'(\Delta e),B_i(\Delta e))\right\}\right),C_i(v)\right)$$

$$C_i^{'}(v)=\text{mín}\left(\text{mín}\left(NA_{i1},NA_{i2}\right),C_i(v)\right)$$

$$C_i^{'}(v)=\text{mín}\left(NA_i,C_i(v)\right)$$

Interpretación geométrica



Procedimiento general

- Dada una base de conocimiento:
  - R1: Si $e = A_1(e)$ y $\Delta e = B_1(\Delta e)$, entonces $v = C_1(v)$
  - …
  - Rn: Si $e = A_n(e)$ y $\Delta e = B_n(\Delta e)$, entonces $v = C_n(v)$
  - Hecho: $e = A'(e)$ y $\Delta e = B'(\Delta e)$.
  - Objetivo: $v = C'(v)$

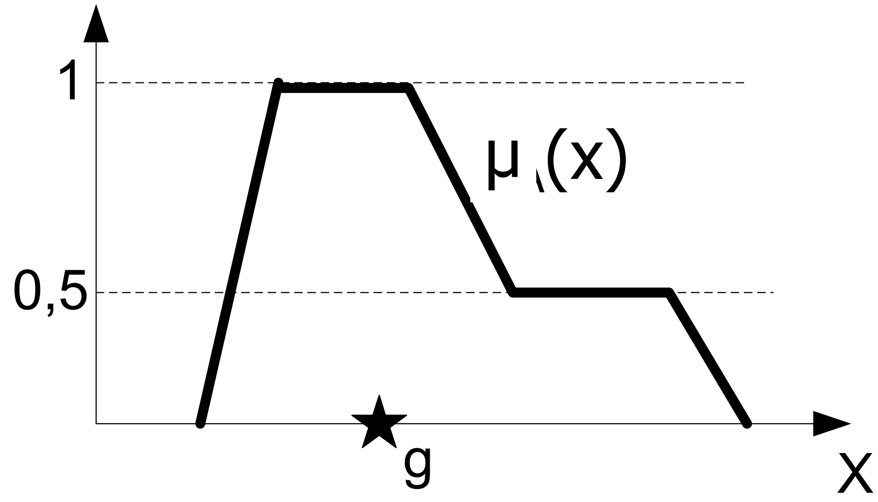
- Procedimiento:
  1. Para cada regla Ri, se obtiene:
     - $NA_i = \text{mín}\{Sup_e[\text{mín}(A'(e), A_i(e))], Sup_{\Delta e}[\text{mín}(B'(\Delta e), B_i(\Delta e))]\}$
     - La distribución del consecuente $C_i'(v) = \text{mín}(NA_i, C_i(c))$
  2. Se obtiene la unión: de los C_i' (v) de las reglas que se disparan
     - $C'(v) = \cup_i \{C'_i(v)\} = \text{máx}_i \{C'_i(v)\}$
  3. *Desborrocificación* de $C'(v)$

Desborrocificación

Método del centro de gravedad

- Cálculo de la proyección en el eje x del centro de gravedad de la distribución.
- Se debe muestrear suficientemente fino para cubrir adecuadamente la función.
- Un muestreo excesivo exige gran carga computacional.
- Para generalizar $\mu_A(x) = \mu_{B'}(y)$

$$g = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i \cdot \mu_A(x_i)}{\sum_{i=1}^{N} \mu_A(x_i)}$$



Desborrocificación

Método Σ_{cuenta}

- Objetivo:
  - Dado un conjunto de distribuciones de posibilidad $\mu_{B1}(x), \mu_{B2}(x), \ldots, \mu_{Bn}(x)$
  - Encontrar qué $\mu_{Bi}(x)$ se *parece* más a una dada $\mu_A(x)$.
- La Σ_{cuenta} es una medida proporcional al área de la distribución.
  - Se basa en la discretización de la función de distribución.

$$\Sigma_{cuenta}(A) = \sum_{i=1}^{N} \mu_A(x_i)$$

- El método elige como más *parecido* a $\mu_A(x)$ aquella $\mu_{Bi}(x)$ que máximiza:

$$\Sigma_{cuenta}(B_i/A) = \frac{\Sigma_{cuenta}(A \wedge B_i)}{\Sigma_{cuenta}(B_i)}$$