Transformada de Fourier de x(t) continua

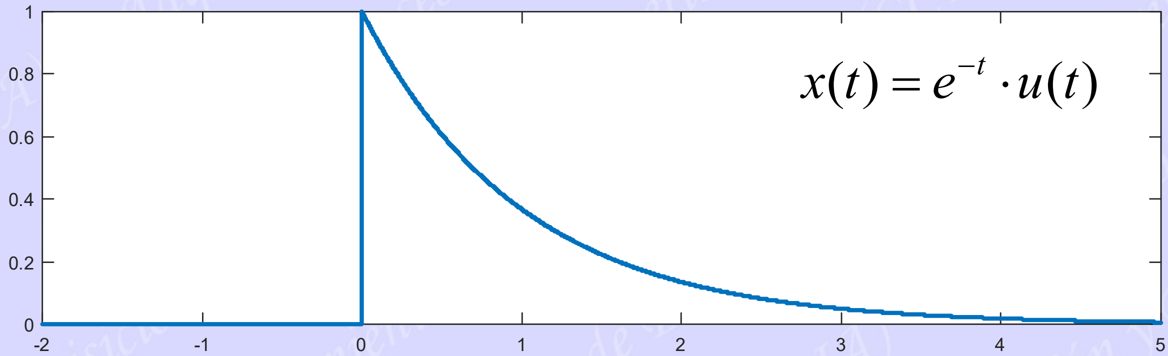
Análisis

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-i\omega \cdot t} \cdot dt$$

Síntesis

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{i\omega \cdot t} \cdot d\omega$$

Tanto x(t) como X(ω) son funciones continuas



Transformada de Fourier de x(t) continua

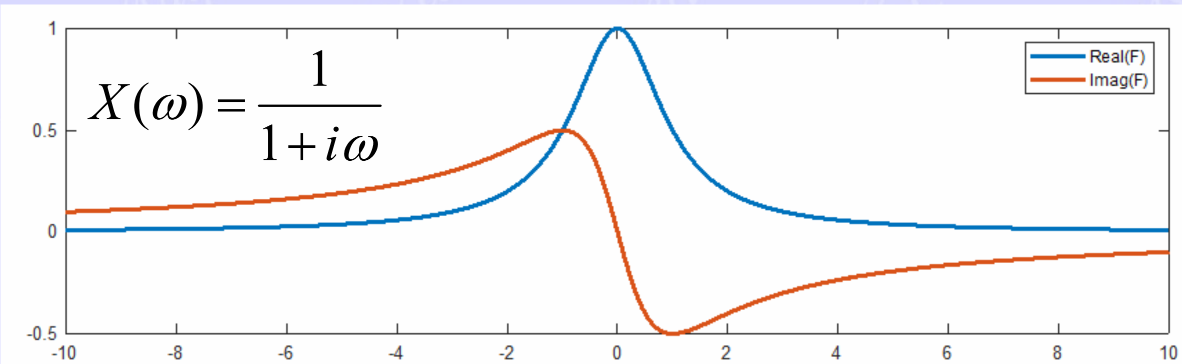
Análisis

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-i\omega \cdot t} \cdot dt$$

Síntesis

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \cdot e^{i\omega \cdot t} \cdot d\omega$$

Tanto x(t) como X(ω) son funciones continuas



ADQUISIÓN Y PROCESAMIENTO NUMÉRICO de DATOS / PROCESAMIENTO DIGITAL de la SEÑAL ANTONIO TABERNERO GALÁN

Propiedades

Cambio de escala: $x(a \cdot t) \leftrightarrow \frac{1}{a} X\left(\frac{\omega}{a}\right)$

Desplazamiento en un dominio → Modulación en el otro

$$x(t-t_0) \leftrightarrow X(\omega) \cdot e^{-i\omega \cdot t_0} \qquad x(t) \cdot e^{-i\omega_0 \cdot t} \leftrightarrow X(\omega - \omega_0)$$

Convolución en un dominio → Multiplicación en el otro

$$x(t) * y(t) \leftrightarrow X(\omega) \cdot Y(\omega) \qquad x(t) \cdot y(t) \leftrightarrow \frac{1}{2\pi} X(\omega) * Y(\omega)$$

Si x(t) real → $X(-\omega) = X^*(\omega)$

→ Parte real de X(ω) y su modulo son pares,

→ Parte imaginaria de X(ω) es impar

Señal x(t) periódica: x(t)=x(t+T)

Análisis

$$X_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \cdot e^{-ik\omega_0 \cdot t} \cdot dt$$

Síntesis

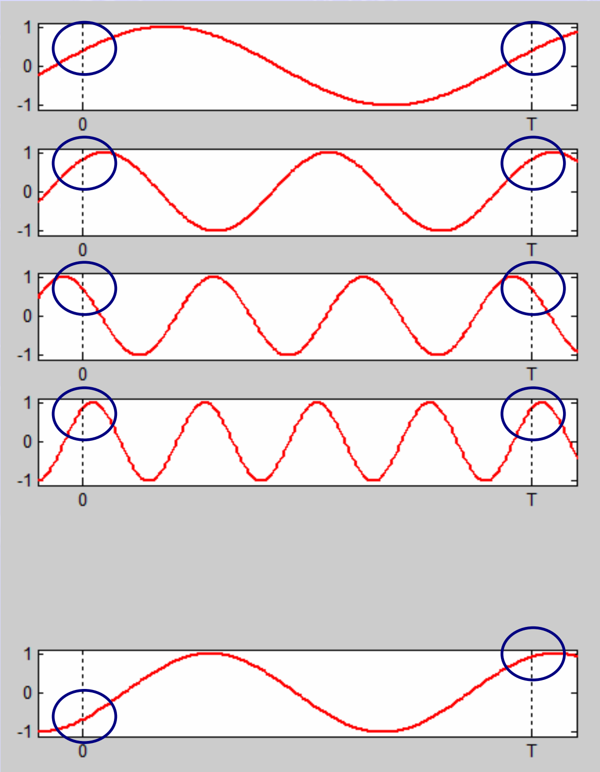
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \cdot e^{ik\omega_k \cdot t}$$

La transformada de Fourier de una x(t) periódica es discreta

La señal x(t) se reconstruye con un discreto de frecuencias, siempre múltiplos de la frecuencia fundamental $\omega_0=2\pi/T$.

Eso si, podemos necesitar infinitas de esas frecuencias para la reconstrucción de la señal.

Frecuencias de los armónicos

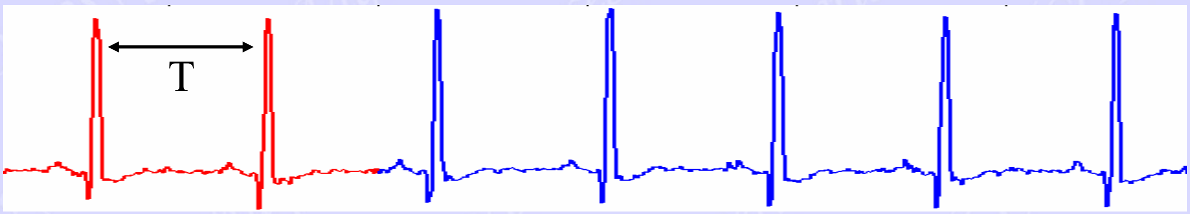


Las frecuencias ω_k de los armónicos corresponden a aquellas que tienen un nº entero de ciclos en el periodo T.

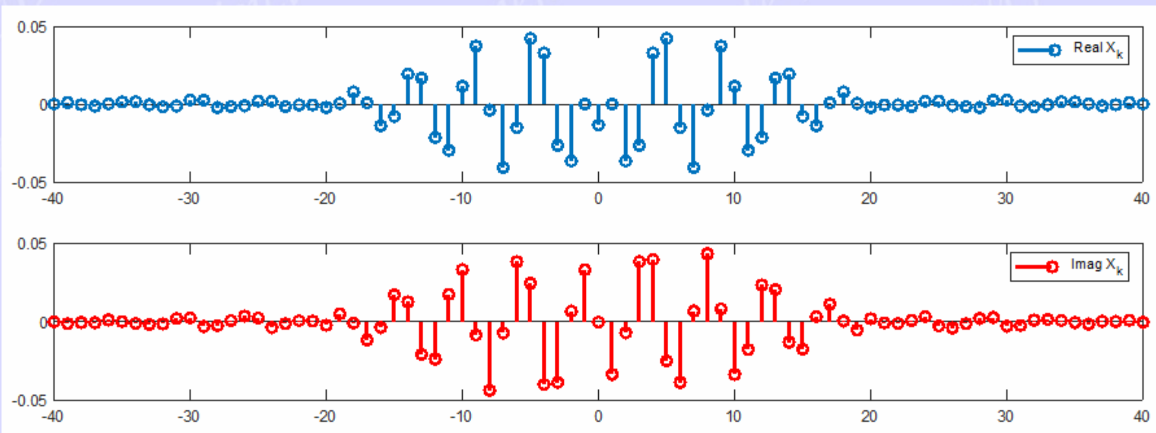
Nos aseguramos de que la señal termina el periodo como lo empezó.

Una sinusoide con un número no entero de ciclos en T, acabaría el periodo de forma diferente a como empezó → la señal resultante no podría ser periódica de periodo T

Señal x(t) periódica: x(t)=x(t+T)



Parte Real y Imag de X_k, correspondiente a las frecuencias k/T



Transformada de Fourier de una secuencia x[n]

$$X\left(e^{i\omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x[n]\cdot e^{-i\omega\cdot n} \qquad x[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}X\left(e^{i\omega}\right)\cdot e^{ik\omega\cdot n}\cdot d\omega$$

La transformada de Fourier de x[n] es continua, pero periódica

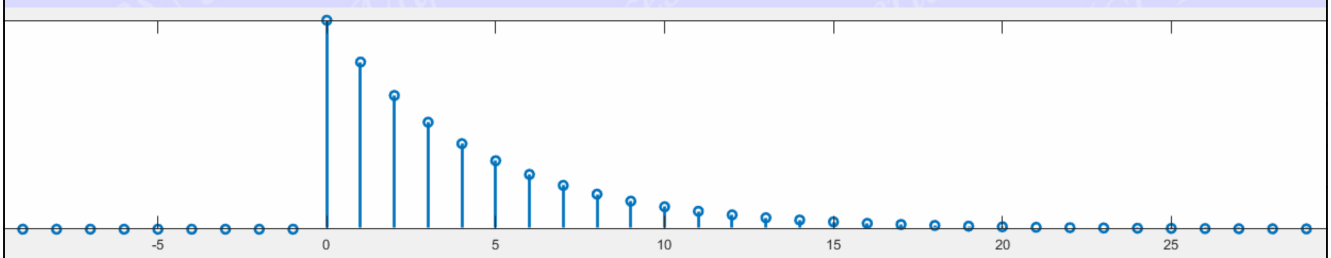
La periodicidad se debe a que $e^{i(\omega+2\pi)\cdot n} = e^{i\omega n}\, e^{i(2\pi)\cdot n} = e^{i\omega n}$

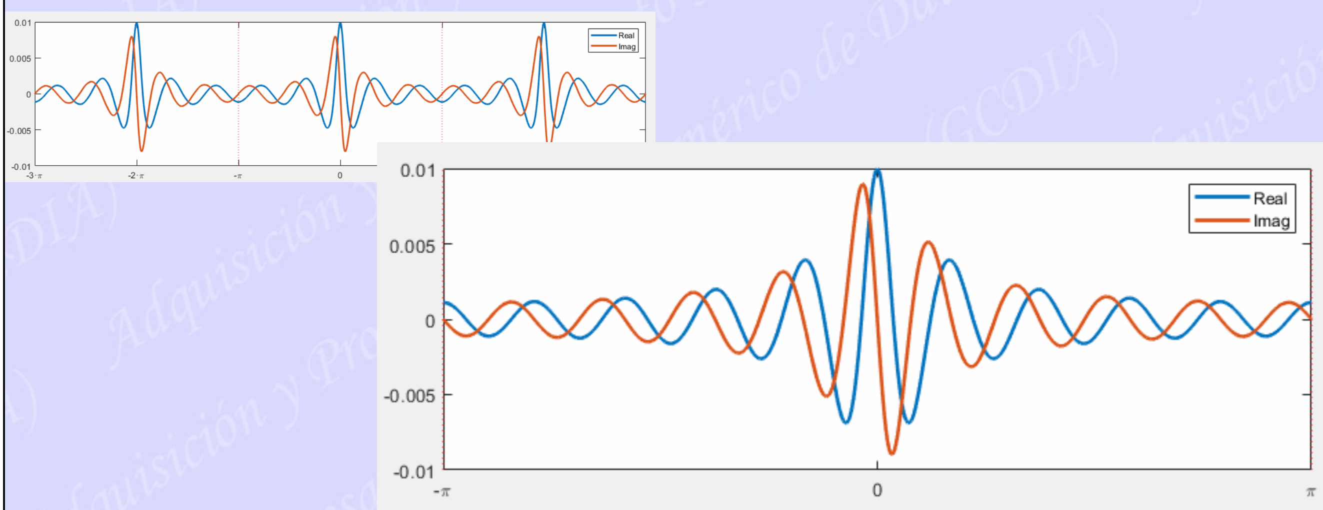
→ **Aliasing**: en una señal discreta la frecuencia ω no se puede distinguir de $\omega + 2k\pi$

Dualidad: discreto en un dominio ←→ periódico en el otro

Las ecuaciones para $X(e^{i\omega})$ y x[n] son análogas a las de una señal periodica x(t) y sus coeficientes de Fourier X_k, intercambiando tiempo y frecuencia.

Transformada de Fourier de una secuencia x[n]





Similares propiedades

Desplazamiento en un dominio → Modulación en el otro

$$x[n-n_0] \leftrightarrow X(\omega)\cdot e^{-i\omega\cdot n_0} \qquad x[n]\cdot e^{-i\omega_0\cdot n} \leftrightarrow X(\omega-\omega_0)$$

Convolución en un dominio → Multiplicación en el otro

$$x[n]*y[n] \leftrightarrow X(\omega)\cdot Y(\omega)$$

$$x[n]\cdot y[n] \leftrightarrow \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} X(\omega-\varphi)Y(\varphi)d\varphi$$

Si x[n] real → $X(-\omega)=X^*(\omega) \qquad |X(\omega)|=|X(-\omega)|$

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

Sea una secuencia x[n] discreta de duración finita N:

$$X(e^{i\omega}) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cdot e^{-i\omega\cdot n}$$

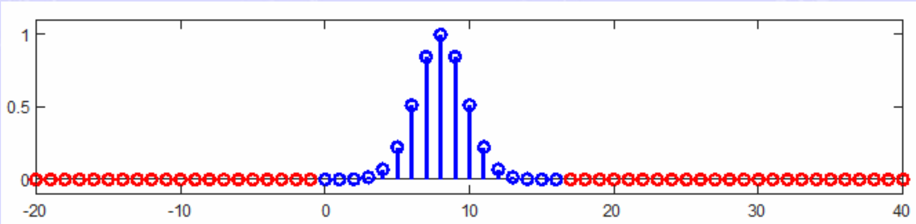
Su transformada de Fourier es continua. Si la muestreamos en N frecuencias equiespaciadas en el intervalo [0, 2π)

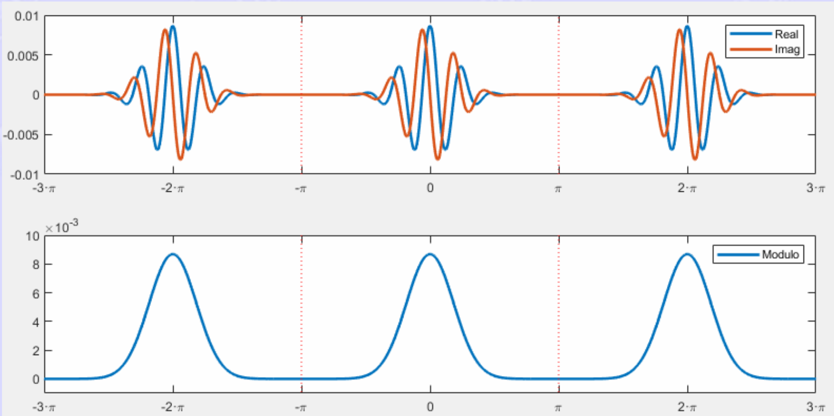
$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k \qquad X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cdot e^{-i\omega_k n} = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\cdot e^{-i\frac{2\pi}{N}nk}$$

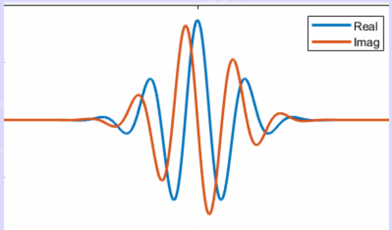
Obtenemos N valores, X[k] , que forman la DFT (Discrete Fourier Transform) de la secuencia finita x[n] de longitud N

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

Secuencia finita (N=16). Nula fuera de muestras n=0, …, 15







Transformada de Fourier Discreta (DFT)

¿De qué secuencia es transformada de Fourier esta DFT?

→ De una secuencia periódica (de periodo N) obtenida replicando la secuencia original x[n] cada N muestras.

Aprovechamos la dualidad:

Periodicidad en un dominio ←→ Discretización en el otro

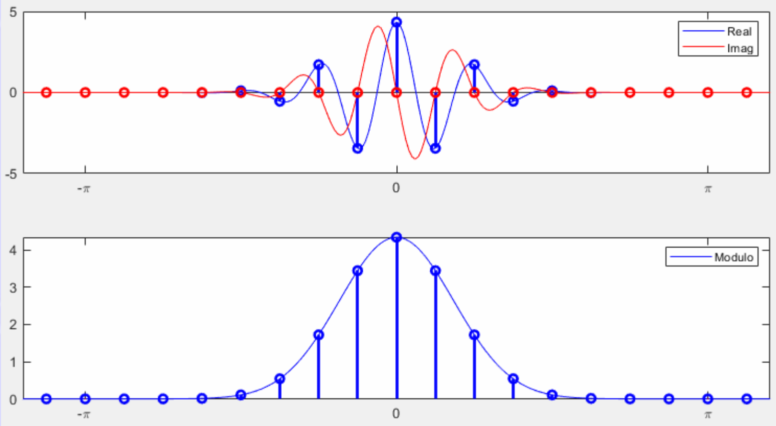
Una secuencia periódica, x[n]=x[n+N] tendrá una TF que es:

- Periódica 2π como cualquier otra secuencia x[n] discreta
- Discreta por ser x[n] periódica.

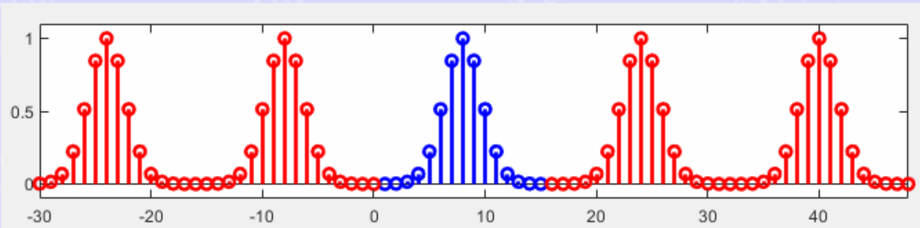
En ambos dominios la señal queda descrita usando N datos: N muestras de la secuencia o N muestras en la frecuencia.

Transformada de Fourier Discreta (DFT)

Si muestreamos la TF de la secuencia finita x[n] en N=16 puntos.



La secuencia finita (N=16) es replicada infinitamente:



De índices k a frecuencias en Hertzios

Secuencia finita de duración N muestras → DFT con N coefs. X[k]

Frecuencias asociadas a X[k] ? → muestreo en frecuencia $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$

Recordando que $\omega=\pi$ rads/muestra corresponde a f = fs/2 (Hz)

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k \rightarrow f = \frac{2}{N}\frac{f_s}{2}k = \frac{f_s}{N}k$$

Resolución o salto en frecuencias de la DFT corresponde a $\Delta f = \frac{f_s}{N} = \frac{1}{T}$
→ inverso de la duración secuencia:

- Si se desea incrementar la resolución → debemos “escuchar” a la señal durante más tiempo (aumentar duración)
- Si queremos analizar frecuencias más altas: hay que incrementar la frecuencia de muestreo fs.

Propiedades

Desplazamiento en un dominio → Modulación en el otro

$$x[n-n_0] \leftrightarrow X[k]\cdot e^{-i\frac{2\pi}{N}k\cdot n_0} \qquad x[n]\cdot e^{-i\frac{2\pi}{N}k_0\cdot n} \leftrightarrow X[k-k_0]$$

Simetrías:

Si x[n] es real → $X^*[k] = X[-k] = X[N-k]$

$$\mathrm{mod}(X[k]) = \mathrm{mod}(X[N-k])$$

$$real(X[k]) = real(X[N-k])$$

$$imag(X[k]) = -imag(X[N-k])$$

Convolución circular vs. lineal

Convolución de x[n] e y[n] → Multiplicación de X[k] e Y[k]

$$x[n] * y[n] \leftrightarrow X[k]\cdot Y[k]$$

Pero la nueva convolución no corresponde a la convolución habitual (lineal) de las secuencias finitas x[n] e y[n].

Al usar X[k]·Y[k] operamos con las secuencias replicadas.

Al desplazar una de las secuencias, las muestras que van saliendo por un lado entran por el otro lado debido a las replicas "añadidas" → convolución circular.

El problema puede arreglarse insertando suficientes ceros en las secuencias x[], y[] originales.