

PROBLEMAS SISTEMAS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA. FUNCIÓN TRANSFERENCIA. FILTROS FIR E IIR

NOTA:

1. Transformada Fourier $x[n]$: $[X \ w]=\text{freqz}(x,1)$
2. Implementación de un sistema discreto dado por una ecuación en diferencias de coeficientes constantes, del tipo

$$\sum_{k=0}^Q a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^P b_k x[n-k], \quad a_0 = 1$$

$$a = [a_k], \quad b = [b_k]$$

- Implementar la actuación del sistema con entrada $x[n]$ y salida $y[n]$: $y=\text{filter}(b,a,x)$.
- Función transferencia del filtro: $[H \ w]=\text{freqz}(b,a)$
`subplot(211); plot(w,abs(H)); % Pintamos módulo`
`subplot(212); plot(w,angle(H)); % Pintamos fase.`

Problema 1. Determinar la respuesta al impulso $h[n]$ y la función de transferencia $H(\omega)$ de los siguientes filtros FIR. Esbozad el módulo (o el módulo al cuadrado) de dichas funciones transferencia.

- a) Un sistema que promedia entradas consecutivas: $y[n]=0.5(x[n]+x[n-1])$.
- b) Un sistema que resta entradas vecinas: $y[n]=0.5(x[n]-x[n-1])$, destacando las diferencias.
- c) Un sistema $y[n]=x[n] + k x[n-N]$ que modela un fenómeno de recepción de una señal con un eco retrasado N muestras y atenuado en un factor $1/2$. Dar la función transferencia del sistema que eliminaría dicho eco.

Problema 2. Se considera el filtro dado por $y[n]=0.9y[n-1]+0.1x[n]$. Calcular la función transferencia y su módulo. Bosquejad la gráfica del módulo e indicar qué tipo de filtro es.

Se puede hacer usando Matlab:

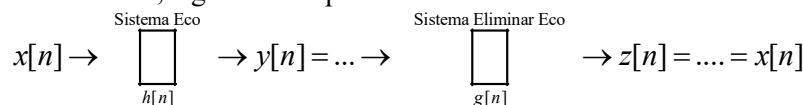
- Gráfica del módulo y la fase de la función transferencia en cada caso, indicando el tipo de sistema (paso bajo, paso alto, etc.): Identificar los coeficientes a_k y b_k y hacer: $[H \ w]=\text{freqz}(b,a)$
`subplot(211); plot(w,abs(H)); % Pintamos módulo`
`subplot(212); plot(w,angle(H)); % Pintamos fase.`
- Con Matlab podemos obtener una idea de la respuesta de impulso usando:
`n=[-5:25]; % Zona de estudio, desde n=-5 hasta n=25`
`delta=(n==0); % Genero delta[n] con soporte 0:31`
`h=filter(b,a,delta); % Filtro usando los coefs b[], a[] del sistema.`
`stem(n,h); % Pintamos respuesta de impulso en rango considerado`

Problema 3.

I. Sistema Eco: Se considera el sistema $y[n]=x[n] + 0.1x[n-4]$ que simula un fenómeno de recepción de una señal con un eco retrasado 4 muestras y atenuado en un factor de 0.1.

- El sistema ¿es de tipo FIR o IIR? Dar los vectores a y b de los coeficientes del filtro.
- Dar la expresión $h[n]$ respuesta a la secuencia impulso.
- Determinar la función de transferencia $H(w)$ y calcular su módulo al cuadrado. Confirmar que dicho módulo no se anula (se puede comprobar en la gráfica).

II. Sistema Eliminar Eco: A continuación del sistema anterior se va a incorporar un nuevo sistema ("inverso") que elimine el eco, siguiendo esquema:



de forma que $z[n]$, respuesta del 2º sistema a $y[n]$, coincida con $x[n]$.

- Escribir el proceso/esquema anterior en el dominio del tiempo, rellenando los puntos suspensivos (relaciones entre las secuencias involucradas).

- Escribir el proceso anterior expresado en la variable frecuencia, recogiendo las relaciones de las señales involucradas ($X(w)$, $H(w)$, $Y(w)$, $G(w)$ y $Z(w)$). Dar la expresión de la función transferencia $G(w)$ del Sistema Eliminar Eco ¿Qué propiedad garantiza formalmente que se puede construir $G(w)$ y por tanto recuperar la señal $x[n]$?
- El sistema 'inverso' eliminar eco resultante ¿es de tipo FIR o IIR? Dar la ecuación en diferencias que relaciona la entrada/salida del Sistema Eliminar Eco. Dar los vectores a_{inv} y b_{inv} de los coeficientes de dicho sistema.

III. Con la ayuda de Matlab, vamos a comprobar la actuación de los filtros anteriores para la secuencia de entrada $x[n]=(0.5)^{|n|}$ con $X(w)=TF(x[n])=0.75/(1.25-\cos(w))$:

- Figure (1): Representar gráficamente (stem) las secuencias: $x[n]$ (subplot(1,3,1)), $y[n]$, respuesta del sistema eco a $x[n]$ (subplot(1,3,2)) y $z[n]$, respuesta del filtro eliminar eco a $y[n]$ (subplot(1,3,3)) con $n=-20:20$.

- Figure (2): Representar gráficamente con w en $[-\pi,\pi]$:

subplot(2,2,1), gráfica de $|H(w)|$ (Módulo función transferencia Sistema Eco);

subplot(2,2,2), gráfica de $|X(w)|$ e $|Y(w)|$ (IN/OUT Sistema Eco);

subplot(2,2,3), gráfica de $|G(w)|$ (Módulo función transferencia Sistema Eliminar Eco);

subplot(2,2,4), gráfica de $|Y(w)|$ y $|Z(w)|$ (IN/OUT Sistema Eliminar Eco), utilizando las relaciones de las funciones $Y(w)$ y $Z(w)$ con $X(w)$.

Comentar los resultados.

IV. En el caso de que la secuencia $x[n]$ fuera el resultado de muestrear $x(t)$ con frecuencia de muestreo $f_s=500$ muestras/sg. ¿cuál sería la atenuación/ampliación sufrida por una frecuencia de 1500 Hz presente en la señal original $x(t)$ al pasar por el Sistema Eco?

Problema 4. Sea el sistema LTI descrito por la ecuación

$$y[n] = x[n] - \beta x[n-1] + \alpha y[n-1].$$

a) Demostrar que para $\beta = 1/\alpha$ el sistema definido es un llamado filtro paso-todo; es decir, el módulo de su función de transferencia $H(w)$ es constante para toda w . ($|H(w)| = 1/\alpha$).

b) Eso no quiere decir que tal sistema no distorsione a las señales que lo atraviesan, ya que puede desajustar las diferentes frecuencias variando su fase relativa (aunque no su módulo).

Usando Matlab, dibujad el módulo y la fase del sistema para el caso $\alpha = 0.5$, $\beta = 2$:

alfa=0.5; beta=1/alfa;

b=[? ?]; a=[? ?] % Identificación de a[] y b[] del sistema

[H w]=freqz(b,a); % Hallamos la respuesta en frecuencia (compleja)

subplot(211); plot(w,abs(H)); set(gca,'Xlim',[-pi pi]); % Pintamos módulo

subplot(212); plot(w,angle(H)); set(gca,'Xlim',[-pi pi]); % Pintamos fase

a) Hacer pasar un pulso muy estrecho definido por $x[n] = (0.1)^n u[n]$ por el sistema anterior y pintar su salida. Además del factor de escala $(1/\alpha)$ introducido, ¿coincide su forma? Comparar la entrada y la salida en el dominio de frecuencias.

n=[-5:20]; % Intervalo de estudio

u = n>=0; x=u.*(0.1).^n; % Señal de entrada x[]

y=filter(b,a,x); % Señal de salida

subplot(211); stem(n,x); % Pintamos entrada

subplot(212); stem(n,y*alfa); % Pintamos salida corrigiendo factor escala

[X w]=freqz(x,1); [Y w]=freqz(y,1); % TFs de x[] e y[]

figure(2);

subplot(211);

plot(w,abs(X),w,abs(Y)); set(gca,'Xlim',[-pi pi]); % Comparamos módulos

subplot(212);

plot(w,angle(X),w,angle(Y)); set(gca,'Xlim',[-pi pi]); % Comparamos fase.

Problema 5.

- a) Se considera el filtro promedio $y[n] = \alpha(0.5x[n-1] + x[n] + 0.5x[n+1])$, con $\alpha > 0$.
- a1) Dar la expresión de la respuesta al impulso $h_1[n]$ de dicho filtro ¿Es un filtro causal? ¿Qué tipo de filtro es (FIR/IIR)?
- a2) Determinar la función transferencia $H_1(w)$ del sistema y calcular el factor de escalamiento alfa para que el sistema tenga ganancia 1 a frecuencia 0 (alfa, tal que $|H(0)| = 1$). Para este valor representar gráficamente el módulo de la función transferencia en el intervalo $[0, \pi]$ ¿Qué tipo de filtro (paso bajo, ranura,...) es? Utilizar ese valor de alfa en el resto del ejercicio.
- b) Comprobar que la respuesta a la secuencia $x[n] = e^{jw_0 n}$ con $w_0 = \pi/3$ es del tipo $y[n] = ce^{jw_0 n}$. Dar el valor de c. Comprobar que $c = H(w_0)$.
- c) A partir del sistema descrito en el apartado anterior se construye un filtro con respuesta al impulso $h_2[n] = (-1)^n h_1[n]$.
- c1) Dar función transferencia $H_2(w)$ del nuevo filtro y representar gráficamente su módulo en el intervalo $[0, \pi]$ ¿Qué tipo de filtro (paso bajo, ranura,...) es?
- c2) Dar la ecuación en diferencias que implementa dicho filtro.

Problema 6. Se considera el filtro $y[n] = x[n] + x[n-1] + x[n-2] + x[n-3] + x[n-4]$.

1. (Estudio filtro dominio frecuencia). Determinar la función transferencia $H(w)$ del filtro y calcular su módulo. Para dar una expresión más amable de la función módulo reescribir la expresión de $H(w)$ utilizando la siguiente indicación:

$$1 + e^{-jw} + e^{-2jw} + \dots + e^{-4jw} = e^{-2jw} (e^{2jw} + e^{jw} + 1 + \dots + e^{-2jw}) = e^{-2jw} (2 \cos(2w) + \dots)$$

- Dar los vectores a y b de coeficientes del filtro.
- Representar gráficamente con Matlab el módulo de la función transferencia en el intervalo $[0, \pi]$. A la vista de la gráfica ¿cómo se comporta el filtro para frecuencias próximas a 0? ¿y para frecuencias próximas a π ? ¿A groso modo, qué tipo de filtro es (paso-bajo, paso-alto,...)?
- Calcular el módulo de $H(w)$ en las frecuencias 0.2π , 0.96π y $2\pi/5$? ¿Qué efecto (atenuación/magnificación/....) tendrá el filtro sobre dichas frecuencias?

2. (Señal entrada/Señal salida) Se considera la secuencia $x[n] = \cos(0.2\pi n) + \cos(0.96\pi n)$ con $n = -20:20$. Con la ayuda de Matlab, calculad la respuesta $y[n]$ del filtro a la secuencia $x[n]$ y representar gráficamente en un mismo objeto gráfico. Comentar los resultados que se observan en la gráfica y relacionar con los valores $|H(0.2\pi)|$ y $|H(0.96\pi)|$.

3. Comprobamos que el filtro elimina la frecuencia $2\pi/5$, para ello aplicamos el filtro dado a la señal $x[n] = \cos((2\pi/5)n)$: Con la ayuda de Matlab, calculad la respuesta $y[n]$ del filtro a la secuencia $x[n]$ y representar gráficamente $x[n]$ e $y[n]$ en un mismo objeto gráfico con $n = -20:20$. Comentar el resultado.

- Si la secuencia $x[n]$ proviene de muestrear (correctamente) una señal analógica $x(t)$ con frecuencia de muestreo $f_s = 1000\text{Hz}$ ¿Cuál será el valor de la frecuencia eliminada (en Hz) en la señal $x(t)$?