Laboratorium Modelowania Cyfrowego					
Rok akademicki	Termin	Rodzaj studiów	Kierunek	Prowadzący	Grupa
2025/2026	Środa 13:15 - 16:15	Stacjonarne	INF2 SSM	Dr inż. Ewa Starzewska-Karwan	IGT

Sprawozdanie

Ćwiczenie 1

Data wykonania ćwiczenia 15.10.2025

Skład sekcji:

Jakub Sibik

Michał Wieczorek

Zestaw B

Zad 6

Dla podanego układu dynamicznego opracować funkcję wyznaczania pochodnych wektora stanu oraz funkcje wykreślania rodziny odpowiedzi czasowych dla zadanych wymuszeń.

B. Element inercyjny II rzędu:

$$K(p) = \frac{1}{(1+5p)(1+4p)}$$

– czas całkowania $t_{max} = 40$,

– wymuszenia: u(t) =1, 0.025t, sin(0.5t).

Wyznaczenie równań stanu:

$$20y'' + 9y' + y = u \quad x_1 = y \quad x_2 = y'$$

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = y'' = \frac{1}{20}(u - 9y' - y) = \frac{1}{20}(u - 9x_2 - x_1)$$

$$y = x_1$$

Równania stanu:

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = \frac{1}{20}u - \frac{9}{20}x_2 - \frac{1}{20}x_1$$

Równanie wyjścia:

$$y = x_1$$

Utworzone funkcje w R:

Dla wymuszenia u(t) = 1:

```
rstanu_6B_1 = function(t,x,a){
 u=1
 dx1=x[2]
 dx2=(u-9*x[2]-x[1])/20
 list(c(dx1,dx2))
```

```
}
```

Dla wymuszenia u(t) = 0.025t:

```
rstanu_6B_2 = function(t,x,a){
 u=0.025*t
 dx1=x[2]
 dx2=(u-9*x[2]-x[1])/20
 list(c(dx1,dx2))
}
```

Dla wymuszenia u(t) = sin(0.5t):

```
rstanu_6B_3 = function(t,x,a){
 u=sin(0.5*t)
 dx1=x[2]
 dx2=(u-9*x[2]-x[1])/20
 list(c(dx1,dx2))
}
```

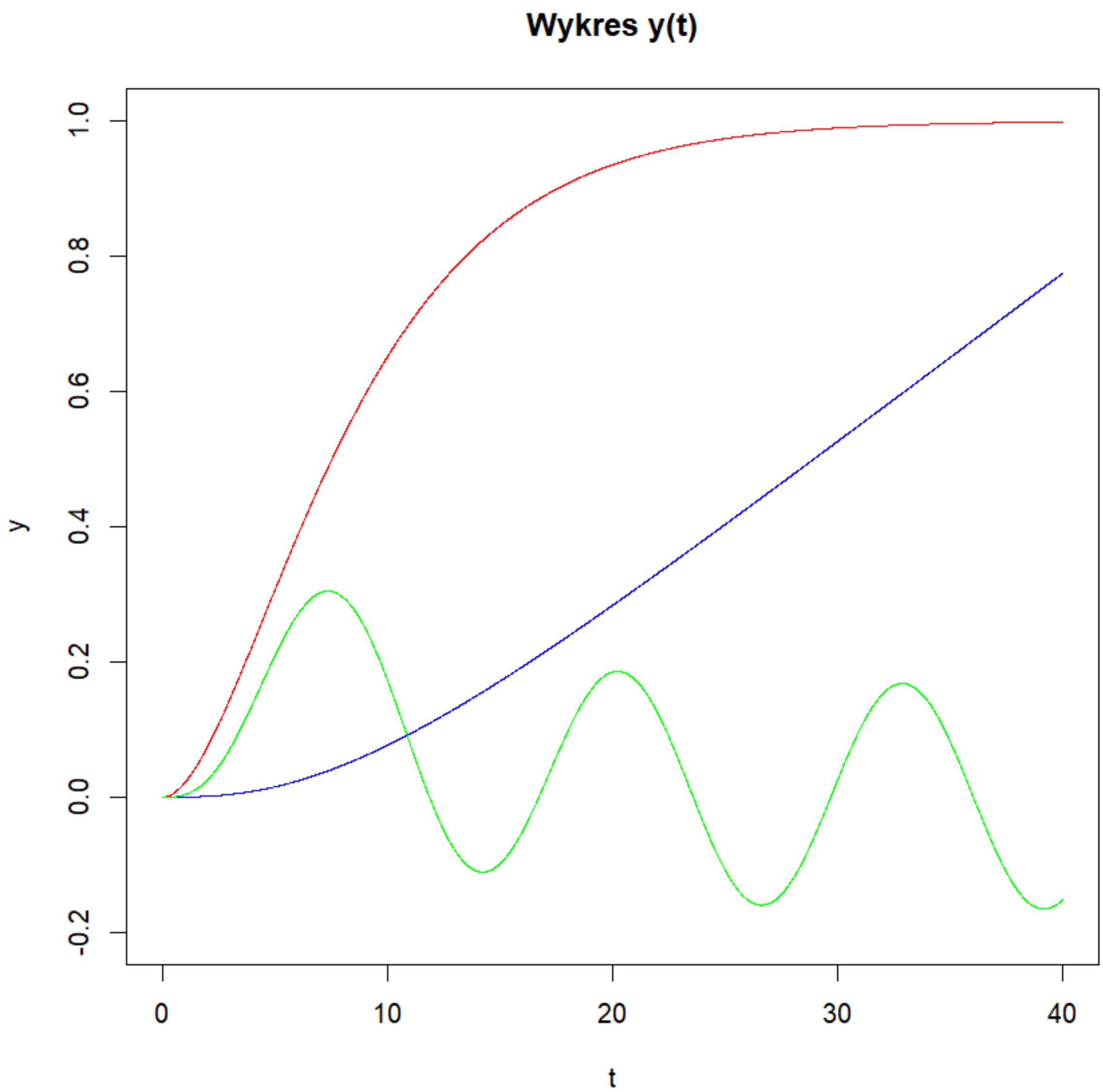
Przeprowadzony eksperyment 3 odpowiedzi czasowych na wymuszenia u(t):

```
eksperyment_6B=function(x0){
 t=seq(0,40,0.01)
 out_1=ode(x0,t,rstanu_6B_1,NULL)
 out_2=ode(x0,t,rstanu_6B_2,NULL)
 out_3=ode(x0,t,rstanu_6B_3,NULL)

 y_1=out_1[,2]
 y_2=out_2[,2]
 y_3=out_3[,2]
 plot(t,y_1,type='l', col="red",xlab='t',ylab='y',main="Wykres y(t)", ylim=c(-0.2, 1))
 lines(t, y_2, col="blue")
 lines(t, y_3, col="green")
```

}

eksperyment_6B(c(0,0))



Rys. 6.1 Wygenerowany w RStudio wykres 3 odpowiedzi czasowych na wymuszenia u(t)

Gdzie:

czerwony – u(t)=1,

niebieski – u(t)=0.025t,

zielony - u(t)=sin(0.5t).

Zad 7 (Jakub Sibik)

Dla podanego liniowego układu dynamicznego opracować funkcję wyznaczania pochodnych wektora stanu oraz funkcje wykreślania portretu fazowego.

B. Układ liniowy

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = -2500x_1 - 100x_2$$

czas całkowania $t_{max} = 0.2$

Utworzone funkcje w R:

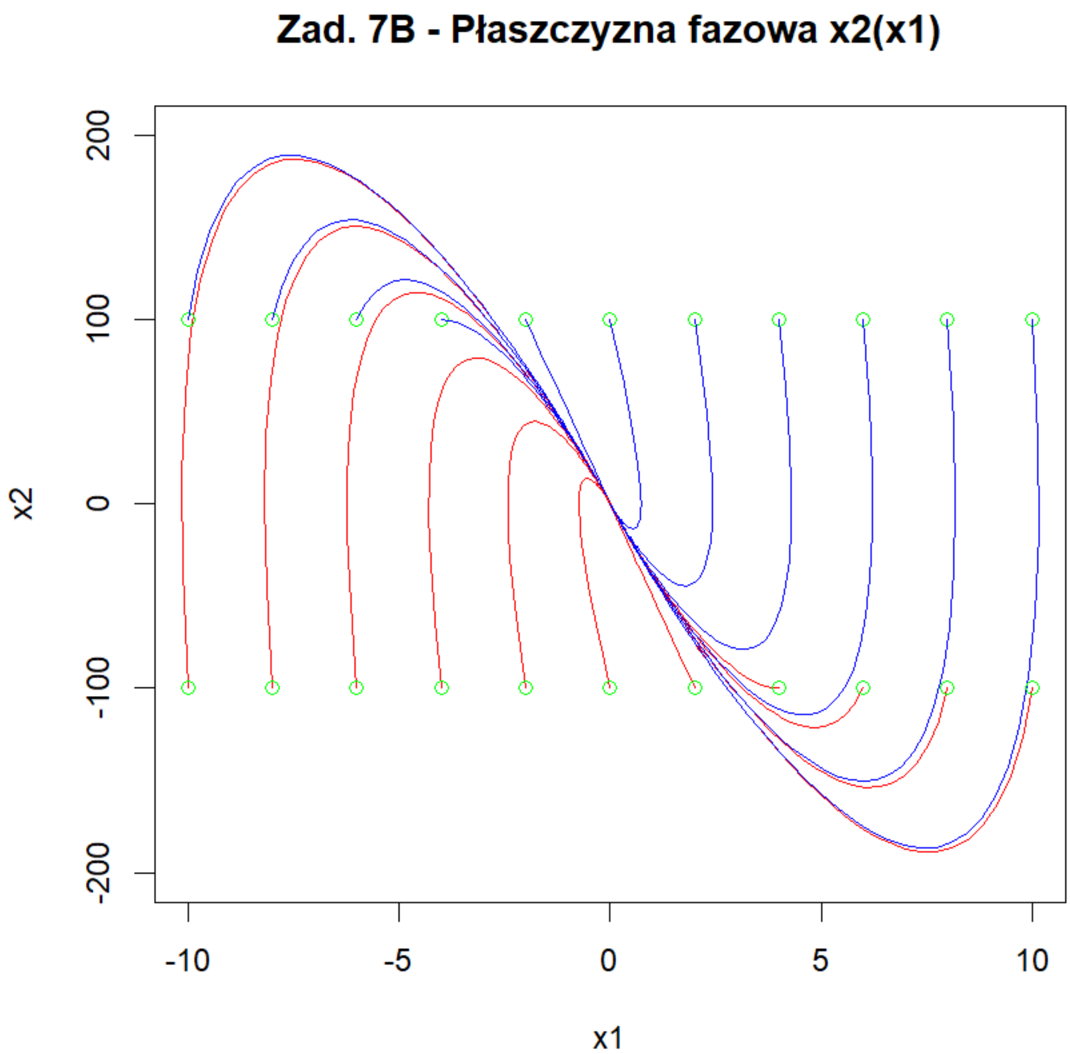
```
rstanu_7B = function(t,x,a) {
 dx1=x[2]
 dx2=-2500*x[1]-100*x[2]
 list(c(dx1,dx2))
}


eksperyment_7B = function(){
  t=seq(0,0.2,0.002)
  plot(0,type='n',xlab='x1',ylab='x2',xlim=c(-10,10),ylim=c(-200,200),main='Zad. 7B - Płaszczyzna fazowa x2(x1)')
  for (i in seq(-10,10,2)) {
    out=ode(c(i,-100),t,rstanu_7B,NULL)
    lines(out[,2],out[,3],col='red')
    points(i,100,col='green')
    out=ode(c(i,100),t,rstanu_7B,NULL)
    lines(out[,2],out[,3],col='blue')
    points(i,-100,col='green')
  }
}
```

Następnie wykonano eksperyment poleceniem:

eksperyment_7B()

Jako wynik uzyskano wykres portretu fazowego:



Rys. 7.1. Wygenerowany w RStudio wykres przedstawiający portret fazowy

Na podstawie wykresu przedstawionego na rys. 7.1 można wywnioskować, że układ asymptotycznie zbieżny do punktu równowagi (0,0).

Wyznaczenie punktu równowagi:

Aby znaleźć punkt równowagi, rozwiązano poniższy układ równań:

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = -2500x_1 - 100x_2$$

Dla:

$$x_1' = 0$$

$$x_2' = 0$$

Otrzymano:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

Z czego wynika, że punkt równowagi wynosi (0, 0).

Sprawdzenie stabilności układu

Wyznaczono składowe macierzy A równania zlinearyzowanego:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = b = -2500$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = -a = -100$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ b & -a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2500 & -100 \end{bmatrix}$$

Następnie otrzymano równanie charakterystyczne:

$$\det(pI - A) = 0$$

$$det \begin{bmatrix} p & -1 \\ -b & p+a \end{bmatrix} = p(p+a) - b = p^2 + pa - b = 0$$

$$det \begin{bmatrix} p & -1 \\ 2500 & p+100 \end{bmatrix} = p^2 + 100p + 2500 = 0$$

A następnie policzono pierwiastki równania:

$$\Delta = 100^2 - 4 * 2500 = 0$$

$$p_0 = \frac{-100}{2} = -50$$

Podwójny pierwiastek jest mniejszy niż 0, z czego można wyciągnąć wniosek, iż układ jest stabilny.

Zad 8 (Michał Wieczorek)

Dla podanego nieliniowego lub niestacjonarnego układu dynamicznego opracować funkcję wyznaczania pochodnych wektora stanu oraz funkcje wykreślania portretu fazowego.

B. Układ nieliniowy opisany równaniami Van der Pola (generator Meissnera)

Parametry:

h<-1.8679*10^6 [s^{-1}]

g<-0.084307 [V^{-2}]

w<-3.8438*10^6 [s^{-1}]

t_max<-0.000005

Równania stanu:

$$x_1' = x_2$$
$$x_2' = -\omega_0^2 x_1 + h(1 - g x_1^2) x_2$$

W programie RStudio została zaimplementowana funkcja zawierająca równania stanu:

```
rstanu_8B = function(t,x,a){
 dx1=x[2]
 dx2=-w^2*x[1]+h*(1-g*x[1]^2)*x[2]
 list(c(dx1,dx2))
}
```

Następnie dla warunków początkowych:

x1(0)=-10, -8, -6 ...6, 8, 10   x2(0)=-1e8, 1e8

opracowano funkcję wykreślania portretu fazowego:

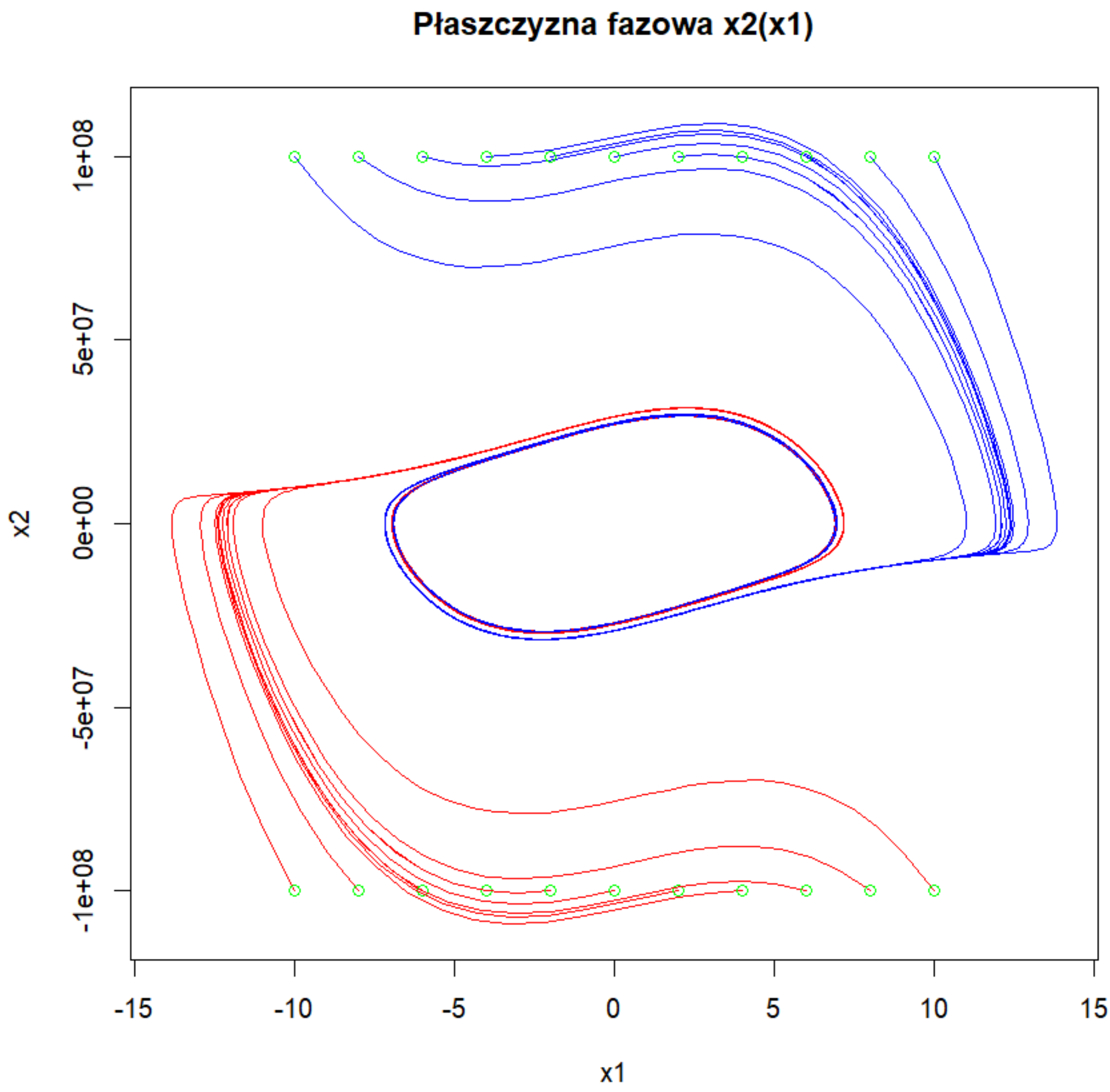
```
eksperyment_8B=function(){
 t=seq(0,t_max,0.00000001)
 plot(0,type='n',xlab='x1',ylab='x2',xlim=c(-14,14),ylim=c(-1.1*10^8,1.1*10^8),main="Płaszczyzna fazowa x2(x1)")
 for (i in seq(-10,10,2)){
```

```
  out=ode(c(i,-10^8),t,rstanu_8B,NULL)
  lines(out[,2],out[,3],col='red')
  points(i,-10^8,col='green')
  out=ode(c(i,10^8),t,rstanu_8B,NULL)
  lines(out[,2],out[,3],col='blue')
  points(i,10^8,col='green')
 }
}
```

Następnie wykonano eksperyment poleceniem:

```
eksperyment_8B()
```

Jako wynik uzyskano wykres portretu fazowego:



Rys. 8.1. Wygenerowany w RStudio wykres przedstawiający portret fazowy

Na podstawie wykresu przedstawionego na rys. 8.1 można wywnioskować, że układ jest cykliczny wokół punktu równowagi (0,0).

Wyznaczenie punktu równowagi metodą analityczną

Równania stanu:

$$x_1' = x_2$$
$$x_2' = -\omega_0^2 x_1 + h(1 - g x_1^2) x_2$$

Należy przyrównać do zera:

$$x_1' = 0$$

$$x_2' = 0$$

Z tego otrzymujemy:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

Zatem punktem równowagi jest punkt (0,0).

Zbadania stabilności układu w punkcie (0,0)

$$x_1' = x_2$$

$$x_2' = -w_0^2 x_1 + h(1 - g x_1^2) x_2$$

$$f_1 = x_2$$

$$f_2 = -w_0^2 x_1 + h(1 - g x_1^2) x_2$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_2} = 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_1} = -w_0^2 \; w \; punkcie \; (0,0)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} = h \; w \; punkcie \; (0,0)$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -w_0^2 & h \end{bmatrix}$$

$$\det(pI - A) = \begin{vmatrix} p & -1 \\ w_0^2 & p - h \end{vmatrix} = p^2 - hp + w_0^2$$

$$p^2 - hp + w_0^2 = 0 \iff p_{1,2} = \frac{h \pm \sqrt{h^2 - 4w_0^2}}{2}$$

Dlatego, że h > 0, układ nie jest asymptotycznie stabilny.

Wnioski:

Ćwiczenie laboratoryjne pokazało nam możliwości środowiska R, a także pomogło poszerzyć umiejętności związane z językiem R i RStudio. Dzięki ćwiczeniom tablicowym z poprzedniego semestru, z łatwością wyznaczyliśmy równania stanu, natomiast zdobytą w trakcie wykładu wiedzę mogliśmy wykorzystać do sprawdzenia stabilności układów. Zadania nie sprawiły nam problemów i zostały wykonane zgodnie z poleceniami.