Estimación estadística e inferencia

Cuando generamos simulaciones por computadora, estamos interesados en saber si los resultados de nuestra experimentación generalizan adecuadamente, esto es, mediante el uso de inferencia estadística determinar si bajo cierto nivel de confianza, podemos concluir válidamente sobre nuestros resultados. En primera instancia, debemos validar que nuestras secuencias de números aleatorios cumplan ciertas pruebas, a saber:

- Aleatoriedad
    - Prueba de rachas
    - Prueba serial
    - Prueba poker
- Bondad de ajuste
    - Prueba chi-cuadrado
    - Prueba de Kolmogorov-Smirnov
- Autocorrelación
    - Prueba de correlación serial

Prueba chi-cuadrado

La prueba puede ser usada para cualquier distribución a partir de un histograma, se basa en un principio de comparación entre frecuencias observadas versus frecuencias esperadas (teóricas) de la distribución específicas. Si el histograma tiene k intervalos y sean O_i y E_i las frecuencias observadas y esperadas respectivamente en la i-ésima celda, entonces el estadígrafo de prueba sera:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(O_i - E_i)^2}{E_i}$$

Que tiene una distribución χ^2 con $k-1$ grados de libertad.

Prueba de Kolmogorov-Smirnov

Popularmente conocida como prueba KS, nos permite determinar si una muestra de observaciones proviene de una distribución de probabilidad determinada. Para ello se basa en la comparación entre funciones de distribución acumulada. El estadígrafo de prueba se obtiene mediante la expresión:

$$D = max\left|S_n(x) - F_n(x)\right|$$

Donde S_n y F_n se refieren a las distribuciones acumuladas observada y teórica en el corte n respectivamente. El estadígrafo se distribuye de acuerdo a la distribución de Kolmogorov.

Prueba de rachas

Dada una muestra de números pseudo aleatorios se construye una sucesión formada por 0 y 1 de acuerdo con lo siguiente: se coloca un 0 en la posición i si $x_{i+1} < x_i$ y 1 en caso contrario. Cada grupo consecutivo de dígitos se denomina racha, para un tamaño de muestra suficientemente grande (25 en adelante), el número de rachas R se aproxima a una distribución normal, donde el estadígrafo de contraste sería:

$$Z = \frac{R - \frac{2n-1}{3}}{\sqrt{\frac{16n-29}{90}}}$$

Distribuido como una normal estándar.

Prueba serial

Se usa para probar uniformidad en dos o más dimensiones. El método consiste en dividir el hiperespacio en hipercubos de igual hipervolumen, cada punto en el hiperespacio deberá ser asignado a un hipercubo e idealmente se esperarán igual número de puntos en cada hipercelda. Se puede usar un test chi-cuadrado para determinar la uniformidad, en el caso bidimensional se tienen $K^2 - 1$ grados de libertad. Los puntos serán constituidos por tuplas no solapadas.

Prueba Poker

Es una prueba de independencia basada en la frecuencia en que los dígitos de una serie de números aleatorios se repiten. El nombre de la prueba proviene del juego de cartas. Una vez seleccionado el número de dígitos a probar, deberán considerarse las probabilidades de todas las "manos de poker" (combinaciones) que pudieran darse las cuales fungirán como valores esperados que serán contrastados contra las observaciones provenientes de la muestra mediante una prueba chi-cuadrado.

Prueba de correlación serial

Esta prueba permite probar dependencia entre dos variables mediante el cálculo de su covarianza. Si esta es distinta de cero, entonces son dependientes. Si tenemos una secuencia de números pseudo-aleatorios se puede calcular la covarianza entre números k-distantes, a lo anterior se le conoce como autocovarianza con desplazamiento k y se denota R_k dada por:

$$R_k = \frac{1}{n-k}\sum_{i=1}^{n-k}\left(x_i - \frac{1}{2}\right)\left(x_{i+k} - \frac{1}{2}\right)$$

Para n grande, R_k se distribuye normal y el intervalo de confianza para la autocovarianza será:

$$R_k \pm \frac{Z_{1-\alpha/2}}{12\sqrt{(n-k)}}$$

Si el intervalo incluye el cero podemos decir que las covarianzas son estadísticamente insignificantes.