Lineare Algebra

für Informatiker [MA 0901]

Übungsblatt 2

Tutorium

T2.1 Bilden Sie – sofern möglich – mit den folgenden Matrizen und Vektoren

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 4 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -7 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \end{pmatrix}, \; z = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

die Ausdrücke

$$A + C, \quad 2B, \quad A(y+z), \quad C(-4z), \quad (A+C)y, \quad AB, \quad BA, \quad AC^\top, \quad A^2, \quad B^2, \quad x^\top A, \quad y^\top z, \quad yz^\top .$$

T2.2 Bestimmen Sie in (a)-(c) die Inversen der angegebenen Matrizen bzw. begründen Sie dass die Matrizen nicht invertierbar sind. Überlegen Sie in (d)-(g) wie Sie die Inversen der Matrizen bestimmen könnten, ohne die Rechnungen durchzuführen und ohne nochmals den Gauß-Algorithmus anzuwenden.

(a) $A := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, (b) $B := \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & -3 & -2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, (c) $C := \begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(d) $D := AB$, (e) $E := A^\top$, (f) $F = ((A^{-1}B^{-1})^\top)^{-1}$ (g) $G = 3A$.

Zur Selbstkontrolle: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 3 \\ 3 & -7 & -5 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, C n. inv., $B^{-1}A^{-1}$, $(A^{-1})^\top$, $(B^{-1})^\top(A^{-1})^\top$, $\frac{1}{3}A^{-1}$.

T2.3 Bestimmen Sie den Rang folgender Matrizen:

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

Zur Selbstkontrolle: a) 2, b) 0, c) 2, d) 3

T2.4 Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens:

(a)
$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & - & 5x_2 & = & 2 \\ -9x_1 & + & 15x_2 & = & -6 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} -2x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & - & 4x_4 & = & -12 \\ -4x_1 & + & 3x_2 & + & 6x_3 & - & 5x_4 & = & -21 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & - & x_3 & + & 6x_4 & = & 10 \\ -6x_1 & + & 6x_2 & + & 13x_3 & + & 10x_4 & = & -22 \end{array}$$

Zur Selbstkontrolle: a) $L = \left\{ \begin{pmatrix} 2/3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 5/3 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\}$, b) $L = \left\{ (1, 0, -2, 1)^\top \right\}$

Zusätzliche Übungen

Z2.1

(a) Ist das Inverse einer invertierbaren symmetrischen Matrix wieder symmetrisch ?

(b) Folgt aus der Invertierbarkeit einer Matrix A stets die Invertierbarkeit der Matrix $A^\top$?

(c) Ist die Summe invertierbarer Matrizen stets invertierbar?

(d) Ist das Produkt invertierbarer Matrizen stets invertierbar?

Z2.2 Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie A^{-1}, B^{-1}, $(AB)^{-1}$ und $(2A)^{-1}$.

(b) Ist $A + B$ invertierbar?

Z2.3 Lösen Sie die folgenden linearen Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß'schen Eliminationsverfahrens:

(a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & & & + & x_3 & = & 3 \\ 4x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 3 \\ -2x_1 & + & 8x_2 & + & 2x_3 & = & -8 \end{array}$$

(b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 2x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & -4 \\ 5x_1 & + & 5x_2 & + & 11x_3 & = & 6 \end{array}$$

(c)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 5x_2 & + & x_3 & = & -1 \\ -3x_1 & + & 6x_2 & & & = & 2 \\ 3x_1 & - & 4x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

Z2.4 Bestimmen Sie den Rang folgender Matrizen:

(a) $\begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Z2.5 Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden LGS über $\mathbb{R}$ in Abhängigkeit von $r \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} r \cdot x & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & r \cdot y & + & z & = & 1 \\ x & + & y & + & r \cdot z & = & 1 \end{array}$$

Tipp: Achten Sie darauf Fallunterscheidungen so lange wie möglich zu vermeiden!

Aktuelle Informationen zu Vorlesung und Übungen finden Sie unter: `http://www.moodle.tum.de`