Mathematik II für Studierende der Informatik (Analysis und Lineare Algebra)

Thomas Andreae, Henrik Bachmann, Rosona Eldred, Malte Moos

Sommersemester 2012
Blatt 6

B: Hausaufgaben zum 24. Mai 2012

4. Berechnen Sie die folgenden Integrale und machen Sie jeweils die Probe.

(i) $\int e^{\sqrt{\frac{1}{3}x+2}}\,dx$ (iii) $\int (\ln x)^3\,dx$

(ii) $\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$ (iv) $\int\limits_0^3 \frac{x^2}{x^3+4}\,dx$ (für $x>0$)

Hinweise: Verwenden Sie bei (iii) die Substitution $t = \ln x$. Aufgabe (iv) ist leicht, wenn man beachtet, dass – bis auf den Faktor 3 – der Zähler gleich der Ableitung des Nenners ist. Bei (iv) ist keine Substitution zu verwenden.

(i) $t = \sqrt{\frac{1}{3}x+2}$, $x = 3t^2-6$, $\frac{dx}{dt} = 6t$, $dx = 6t\,dt$.

$$\int e^{\sqrt{\frac{1}{3}x+2}}\,dx = 6\int e^t \cdot t\,dt = 6(e^t \cdot t - e^t) =$$

$$6e^t(t-1) = 6e^{\sqrt{\frac{1}{3}x+2}}\left(\sqrt{\frac{1}{3}x+2}-1\right).$$

<u>Probe</u>: $\left[6e^{\sqrt{\frac{1}{3}x+2}}\left(\sqrt{\frac{1}{3}x+2}-1\right)\right]' =$

$$6e^{\sqrt{\frac{1}{3}x+2}} \cdot \frac{(1/3)}{2\sqrt{\frac{1}{3}x+2}}\left(\sqrt{\frac{1}{3}x+2}-1\right) +$$

$$6e^{\sqrt{\frac{1}{3}x+2}} \cdot \frac{(1/3)}{2\sqrt{\frac{1}{2}x+2}} = e^{\sqrt{\frac{1}{3}x+2}}.$$

(ii) $t = \sqrt[3]{x}$, $x = t^3$, $\frac{dx}{dt} = 3t^2$, $dx = 3t^2 dt$

$$\int e^{\sqrt[3]{x}} dx = 3\int e^t t^2 dt = 3\left(e^t t^2 - 2\int e^t t\, dt\right) =$$

$$3(e^t t^2 - 2(e^t t - e^t)) = e^t(3t^2 - 6t + 6) =$$

$$e^{x^{\frac{1}{3}}}\left(3x^{\frac{2}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}} + 6\right)$$

<u>Probe:</u> $\left[e^{x^{\frac{1}{3}}}\left(3x^{\frac{2}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}} + 6\right)\right]' =$

$$\frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} e^{x^{\frac{1}{3}}}\left(3x^{\frac{2}{3}} - 6x^{\frac{1}{3}} + 6\right) +$$

$$e^{x^{\frac{1}{3}}}\left(2x^{-\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{2}{3}}\right) =$$

$$e^{x^{\frac{1}{3}}}\left(1 - 2x^{-\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{2}{3}}\right) + e^{x^{\frac{1}{3}}}\left(2x^{-\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{2}{3}}\right)$$

$$= e^{x^{\frac{1}{3}}}.$$

(iii) $t = \ln x,\ x = e^t,\ \frac{dx}{dt} = e^t,\ dx = e^t dt$

$$\int (\ln x)^3 dx = \int t^3 e^t dt = t^3 e^t - 3\int t^2 e^t dt =$$

$$t^3 e^t - 3\left(t^2 e^t - 2\int t e^t dt\right) = t^3 e^t - 3t^2 e^t +$$

$$6\Big(te^t - \underbrace{\int e^t dt}_{= e^t}\Big) = (t^3 - 3t^2 + 6t - 6)e^t =$$

$$x(\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6\ln x - 6)$$

<u>Probe</u>: $\ln^3 x - 3\ln^2 x + 6\ln x - 6 +$

$$x\left(\frac{3\ln^2 x}{x} - \frac{6\ln x}{x} + \frac{6}{x}\right) = \ln^3 x.$$

(iv) $$\int_0^3 \frac{x^2}{x^3+4} dx = \frac{1}{3}\int_0^3 \frac{3x^2}{x^3+4} dx = \frac{1}{3}\Big[\ln(x^3+4)\Big]_0^3 =$$

$$\frac{1}{3}(\ln 31 - \ln 4) = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{31}{4}\right) \approx 0.683.$$

5. Das Integral lässt sich – wie Sie wissen – zur Bestimmung von Flächeninhalten verwenden. In praktischen Anwendungen kommt es aber auch sehr häufig vor, dass das Integral der Berechnung von *Durchschnittswerten* dient. Hier eine Aufgabe, die dies illustriert: Die Funktion $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = 7x^3 - 42x^2 + 63x - 2.$$

Wir stellen uns vor, dass f auf dem Intervall $[0,3]$ die Lufttemperatur in $°C$ an einem festen Ort und im Laufe eines Tages angibt. (1 Einheit auf der x-Achse entspricht also 8 Stunden.) Bestimmen Sie

(i) die Tageshöchsttemperatur;
(ii) die Tagestiefsttemperatur;
(iii) die Durchschnittstemperatur dieses Tages.

$$f'(x) = 21x^2 - 84x + 63 = 0 \iff x^2 - 4x + 3 = 0$$

Nullstellen: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$

$$f(0) = -2, \; f(1) = 26, \; f(3) = -2$$

Also: (i) Tageshöchsttemperatur 26°C
(ii) Tagestiefsttemperatur −2°C

Nun zu (iii): Zu berechnen ist

$$\frac{1}{3}\int_0^3 f(x)\,dx.$$

Man hat $\int_0^3 f(x)\,dx = \left[\frac{7}{4}x^4 - 14x^3 + \frac{63}{2}x^2 - 2x\right]_0^3 = 41.25$

Demnach beträgt die Durchschnittstemperatur $\frac{41.25}{3}$ °C $= 13.75$ °C.