Mathematik II für Studierende der Informatik
(Analysis und Lineare Algebra)

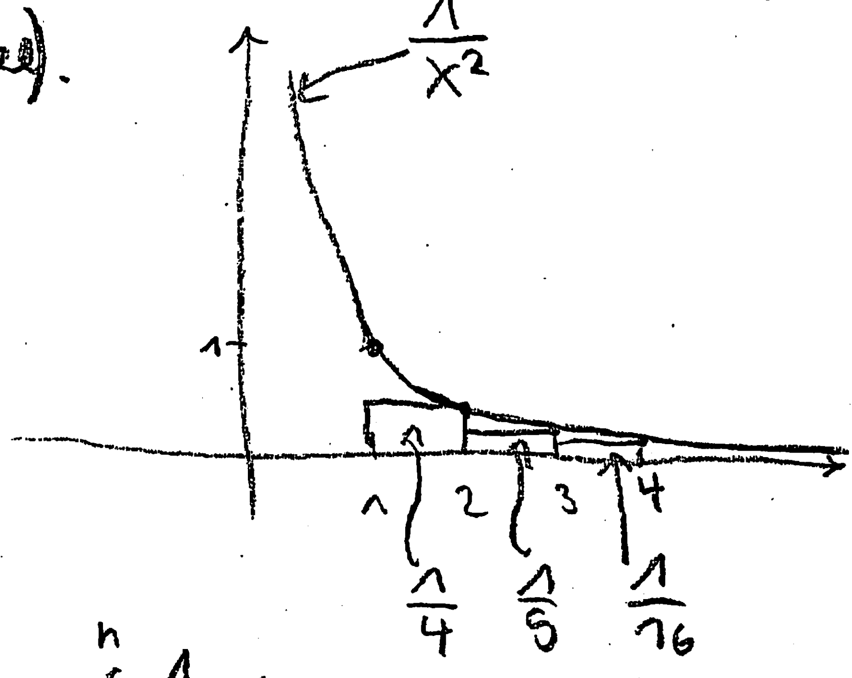
Thomas Andreae, Henrik Bachmann, Rosona Eldred, Malte Moos

Sommersemester 2012
Blatt 8

B: Hausaufgaben zum 14. Juni 2012

3. Auf Seite 19/20 des Skripts wurde nachgewiesen, dass die Reihe $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ konvergiert. Der entscheidende Punkt dabei war der Nachweis, dass die Folge (s_n) der Partialsummen beschränkt ist. Weisen Sie dies auf eine andere Art nach, nämlich mit Mitteln der Integralrechnung.
Hinweis: Gehen Sie ähnlich vor wie in Präsenzaufgabe 2c) und 2d), betrachten Sie hier jedoch eine geeignete Untersumme.

Für $s_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i^2}$ gilt $s_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx$ (siehe Skizze).



Man hat $\int_1^n \frac{1}{x^2}\,dx = \left[-x^{-1}\right]_1^n = 1 - \frac{1}{n}$.

$\Rightarrow s_n - 1 \leq 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow s_n \leq 2 - \frac{1}{n}$. Also gilt $s_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$, d. h., s_n ist beschränkt. Da s_n monoton wachsend ist, folgt die Konvergenz von s_n.

4. Es sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die $f(n) \to \infty$ für $n \to \infty$ gilt. In der Informatik wird in vielen Zusammenhängen danach gefragt, *wie schnell* $f(n)$ gegen unendlich geht. Wir betrachten in dieser Aufgabe die Funktion

$$f(n) = H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

die häufig bei der Analyse von Algorithmen auftritt, etwa bei der Laufzeitanalyse von QUICKSORT, in der das Resultat dieser Übungsaufgabe eine wichtige Rolle spielt (vgl. Cormen et al.: *Algorithmen - Eine Einführung*).

a) Zeigen Sie

$$H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Hinweis: Die „Hälfte" von (1) wurde im Wesentlichen bereits in den Präsenzaufgaben erledigt.

b) Folgern Sie aus (1):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{H_n} = 1. \tag{2}$$

Hinweis: Wenn a) erledigt ist, so geht b) recht schnell.

(Das Ergebnis (1) (bzw. (2)) können wir auch so aussprechen: Die Funktion $f(n) = H_n$ wächst nur recht langsam, nämlich etwa so wie $\ln(n)$.)

a) In Präsenzaufgabe 2 wurde gezeigt

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leq H_n.$$

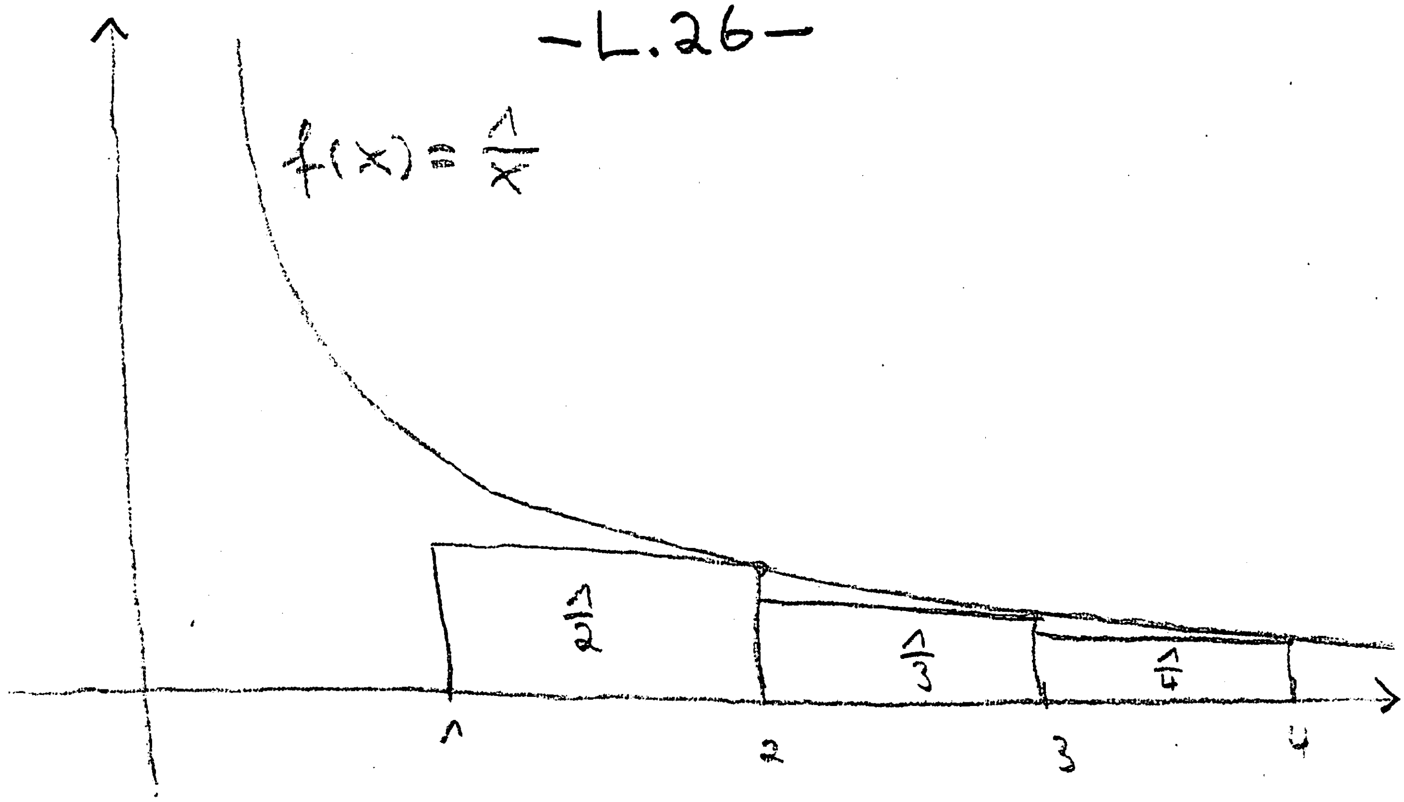
Für das linksstehende Integral gilt

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln(x)\right]_1^{n+1} = \ln(n+1).$$

Folglich: $\ln(n) \leq \ln(n+1) \leq H_n$. Damit ist die rechte Ungleichung aus (1) gezeigt. Es bleibt zu zeigen

$$H_n - 1 \leq \ln(n).$$

Diese Ungleichung erhält man durch Betrachtung einer Untersumme für die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$:



$H_n - 1$ ist also eine Untersumme für das Integral $\int_1^n \frac{1}{x}\,dx = \left[\ln(x)\right]_1^n = \ln(n)$.

Also gilt $H_n - 1 \leq \ln(n)$. Damit ist auch die linke Ungleichung aus (1) gezeigt.

b) Aus (1) erhält man mittels Division durch H_n:

$$1 - \frac{1}{H_n} \leq \frac{\ln(n)}{H_n} \leq 1.$$

Da $H_n \to \infty$ gilt, folgt $\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{H_n}\right) = 1$. Nach dem Einschließungssatz (Skript Seite 16) folgt $\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n)}{H_n} = 1$.