3. a) Die Methode, die Sie bei der Bearbeitung von Präsenzaufgabe 3 kennengelernt haben, nennt man *Logarithmisches Differenzieren* (vgl. Skript, Abschnitt 2.3.8). Arbeiten Sie diesen Abschnitt selbstständig durch und wenden Sie die beschriebene Methode zur Berechnung von $f'(x)$ für die folgende Funktion f an:

$$f(x) = (x+1)^{x^2+5} \quad (x > -1).$$

b) Stellen Sie sich vor, Sie könnten sich nicht mehr an die Formeln für die Ableitungen von $f(x) = 2^x$ und $g(x) = 3^x$ erinnern. Leiten Sie sich die Formeln mit Hilfe von Logarithmischer Differentiation her.

c) Differenzieren Sie die folgenden Funktionen:

(i) $g(x) = (x-2)^{2x^2+3} \quad (x > 2)$ (ii) $h(x) = (x^2+1)^{3x+1}$

a) $f(x) = e^{\ln((x+1)^{x^2+5})} = e^{(x^2+5)\ln(x+1)} \Rightarrow$

$f'(x) = e^{(x^2+5)\ln(x+1)} \cdot \left(2x \cdot \ln(x+1) + \frac{x^2+5}{x+1}\right)$

$= (x+1)^{x^2+5}\left(2x \cdot \ln(x+1) + \frac{x^2+5}{x+1}\right).$

b) $f(x) = 2^x = e^{\ln(2^x)} = e^{x\ln 2} \Rightarrow$

$f'(x) = e^{x\ln 2} \cdot \ln 2 = 2^x \cdot \ln 2.$

Analog: $g'(x) = 3^x \cdot \ln 3.$

c) (i) $g(x) = e^{\ln((x-2)^{2x^2+3})} = e^{(2x^2+3)\cdot\ln(x-2)} \Rightarrow$

$g'(x) = g(x) \cdot \left(4x \cdot \ln(x-2) + \frac{2x^2+3}{x-2}\right)$

(ii) $h(x) = e^{\ln((x^2+1)^{3x+1})} = e^{(3x+1)\cdot\ln(x^2+1)} \Rightarrow$

$h'(x) = e^{(3x+1)\cdot\ln(x^2+1)} \cdot \left(3\ln(x^2+1) + \frac{3x+1}{x^2+1} \cdot 2x\right)$

$= h(x) \cdot \left(3\ln(x^2+1) + \frac{(6x+2)\cdot x}{x^2+1}\right).$

4. a) In den Wirtschaftswissenschaften geht es häufig darum, gegebene Größen zu optimieren (Minimierung der Kosten, Maximierung des Gewinns etc.). Hier eine Aufgabe, die dies illustriert (aus S. Kurz, J. Rambau: Mathematische Grundlagen für Wirtschaftswissenschaftler): Der McMoney Verlag bringt ein neues Buch auf den Markt. Jetzt überlegt die Geschäftsführung, zu welchem Preis p (in €) es verkauft werden soll. Der McMoney Verlag geht davon aus, dass die Zahl der verkauften Exemplare v wie folgt vom Preis abhängt:

$$v(p) = \frac{10^5}{p^2}.$$

Der Druck eines Buches kostet 3€. Der erwartete Gewinn g in Abhängigkeit vom Preis p ist also (in €):

$$g(p) = v(p)\cdot p - v(p)\cdot 3 = v(p)\cdot(p-3) = \frac{10^5}{p^2}\cdot(p-3) = 10^5\cdot\left(\frac{1}{p} - \frac{3}{p^2}\right).$$

Der Verkaufspreis muss selbstverständlich die Druckkosten decken, weshalb $p \geq 3$ angenommen werden darf. Außerdem wäre ein Preis oberhalb von 100€ glatter Wucher und ist somit ebenfalls ausgeschlossen. Der Preis p soll nun so festgesetzt werden, dass der Gewinn maximal wird. Ermitteln Sie diesen Preis, indem Sie das globale Maximum von $g(p)$ auf dem Intervall $[3, 100]$ bestimmen. Begründen Sie in der Rechnung auch, dass es sich bei Ihrer Lösung um das globale Maximum handelt.

b) Wo nehmen die folgenden Funktionen ihr globales Minimum und Maximum an?

(i) $f : [-10, 10] \to \mathbb{R},\ f(x) = 3x^7 + 5x^5 + 2x^3 + x$

(ii) $g : [-2, 2] \to \mathbb{R},\ g(x) = e^{2x-1} - e^{x+1}$

(iii) $h : [1, 6] \to \mathbb{R},\ h(x) = 4\ln(x) + \frac{1}{2}x^2 - 4x$

a) $g'(p) = 10^5\left(-\frac{1}{p^2} + \frac{6}{p^3}\right) = 10^5\,\frac{6-p}{p^3}$

$g'(p) = 0 \Rightarrow p = 6$

Damit stehen die Kandidaten für das Vorliegen eines globalen Maximums fest: $p=3$, $p=6$ und $p=100$. Man braucht nur noch einzusetzen: $g(3)=0$, $g(6) = 10^5\cdot\frac{1}{12}$, $g(100) = 10^5\cdot\frac{99}{10000}$. Es gilt also $g(6) > g(3)$ und $g(6) > g(100)$. Bei $p=6$ liegt demnach ein globales Maximum vor, d. h., bei einem Preis von 6€ ist der Gewinn maximal.

b) (i) $f'(x) = 21x^6 + 25x^4 + 6x^2 + 1 > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Da $f(10) > f(-10)$ gilt, liegt das globale Maximum bei $x = 10$, und bei $x = -10$ befindet sich das globale Minimum.

(ii) $g'(x) = 2e^{2x-1} - e^{x+1} = 0 \Rightarrow 2e^{2x-1} = e^{x+1}$

$\Rightarrow \ln(2) + 2x - 1 = x + 1 \Rightarrow x = 2 - \ln(2) \approx 1.3.$

Damit gibt es drei Kandidaten für das Vorliegen eines globalen Maximums bzw. Minimums: -2, 2 und $2-\ln(2)$. Die Entscheidung fällt durch Einsetzen in g: $g(-2) = e^{-5} - e^{-1} \approx -0.36$, $g(2) = 0$, $g(2-\ln(2)) \approx -5.02$. Also: globales Minimum bei $x = 2-\ln(2)$, globales Maximum bei $x = 2$.

(iii) $h'(x) = \frac{4}{x} + x - 4 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + 4 = 0 \Rightarrow x = 2.$

Es gilt $h(1) = -3.5$, $h(2) = 4\ln(2) - 6 \approx -3.2$, $h(6) = 4\ln(6) - 6 \approx 1.167$.

Also: globales Minimum bei $x = 1$, globales Maximum bei $x = 6$.