Ein typisches Beispiel zur Gleichheitsregel

Auf Seite 34 des Skripts haben wir die Additionsregel, die Multiplikationsregel und die Gleichheitsregel kennengelernt. Zur Additions- und Multiplikationsregel haben wir bereits Beispiele besprochen.

Hier ein typisches Beispiel zur Gleichheitsregel: Wir geben zwei Beweise der folgenden Feststellung, von denen der erste die Gleichheitsregel verwendet.

Feststellung: Die Potenzmenge $\mathcal{P}(M)$ einer n-elementigen Menge M besitzt genau 2^n Elemente.

1. Beweis: Für $M = \emptyset$ haben wir $|\mathcal{P}(M)| = |\{\emptyset\}| = 1 = 2^0$, d. h., in diesem Fall gilt unsere Feststellung. Wir dürfen also $M \neq \emptyset$ annehmen. Die Elemente von M seien beliebig nummeriert,

etwa $M = \{m_1, \dots, m_n\}$. Zu jeder Teilmenge T von M bilden wir auf naheliegende Art ein n-Tupel $x_T = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ mit Einträgen 0 oder 1 (genannt: <u>charakteristischer Vektor</u> von T):

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{falls } m_i \in T \\ 0 & \text{andernfalls.} \end{cases}$$

Dadurch wird eine bijektive Abbildung zwischen $\mathcal{P}(M)$ und der Menge $\{0,1\}^n$ aller n-Tupel mit Einträgen 0 oder 1 definiert. Wir wissen aufgrund der Produktregel, dass $|\{0,1\}^n| = 2^n$ gilt[1]; also $|\mathcal{P}(M)| = 2^n$ aufgrund der Gleichheitsregel. □

Zur <u>Illustration</u> geben wir die im Beweis auftretende bijektive Abbildung für den Fall $n=3$ an. Es sei also $M = \{m_1, m_2, m_3\}$. Die Teilmengen von M werden wie folgt durch Tripel mit Einträgen aus $\{0,1\}$ „codiert":

$$\emptyset \longmapsto (0,0,0)$$

$$\{m_1\} \longmapsto (1,0,0), \quad \{m_2\} \longmapsto (0,1,0), \quad \{m_3\} \longmapsto (0,0,1)$$

---

1) vergl. auch Grundaufgabe 1, Skript Seite 35

$\{m_1, m_2\} \longmapsto (1,1,0)$
$\{m_1, m_3\} \longmapsto (1,0,1)$
$\{m_2, m_3\} \longmapsto (0,1,1)$

$M = \{m_1, m_2, m_3\} \longmapsto (1,1,1).$

<u>2. Beweis</u>: Wir benutzen die binomische Formel

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

und setzen darin $a = b = 1$. Es ergibt sich

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$

Für jedes k $(0 \leq k \leq n)$ gibt der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ die Anzahl der k-elementigen Teilmengen der n-elementigen Menge M an. Also hat man insgesamt

$$|\mathfrak{P}(M)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n. \quad \square$$