Mathematatik I für Studierende der Informatik (Diskrete Mathematik)

Thomas Andreae, Christoph Stephan

Wintersemester 2011/12
Blatt 4

B: Hausaufgaben zum 17./18. November 2011

3. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 3$ die folgende Aussage gilt:

$$\sum_{i=3}^{n} \binom{i}{i-3} = \binom{n+1}{4}.$$

(I) <u>Induktionsanfang</u>: Wegen $\sum_{i=3}^{3} \binom{i}{i-3} = \binom{3}{0} = 1 = \binom{4}{4}$ gilt die Gleichung für $n=3$.

(II) <u>Induktionsschluss</u>: Für ein $n \geq 3$ gelte $\sum_{i=3}^{n} \binom{i}{i-3} = \binom{n+1}{4}$ (Induktionsannahme (IA)).

Es folgt

$$\sum_{i=3}^{n+1} \binom{i}{i-3} = \sum_{i=3}^{n} \binom{i}{i-3} + \binom{n+1}{n-2}$$
$$\stackrel{IA}{=} \binom{n+1}{4} + \binom{n+1}{n-2}$$
$$= \binom{n+1}{4} + \binom{n+1}{3}$$
$$= \binom{n+2}{4}$$
$$= \binom{(n+1)+1}{4}. \square$$

4. a) Mit der Siebformel bestimme man die Anzahl derjenigen $k \in \mathbb{N}$ $(1 \leq k \leq 2000)$, die weder durch 3 noch durch 5 noch durch 7 teilbar sind.

b) Ebenfalls mit der Siebformel: Bestimmen Sie die Anzahl derjenigen $k \in \mathbb{N}$ $(1 \leq k \leq 1000)$, die weder durch 3 noch durch 5 noch durch 7 noch durch 11 teilbar sind.

a) Es sei $S = \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq 2000\}$, $A_1 = \{k \in S : 3|k\}$, $A_2 = \{k \in S : 5|k\}$, $A_3 = \{k \in S : 7|k\}$. Es folgt $N = |S| = 2000$, $|A_1| = \left\lfloor \frac{2000}{3} \right\rfloor = 666$, $|A_2| = \frac{2000}{5} = 400$, $|A_3| = \left\lfloor \frac{2000}{7} \right\rfloor = 285$.

Außerdem: $A_1 \cap A_2 = \{k \in S : 15|k\}$, $A_1 \cap A_3 = \{k \in S : 21|k\}$, $A_2 \cap A_3 = \{k \in S : 35|k\}$. Es gilt $|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{2000}{15} \right\rfloor = 133$, $|A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{2000}{21} \right\rfloor = 95$, $|A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{2000}{35} \right\rfloor = 57$.

Schließlich: $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{k \in S : 105|k\}$ mit $|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{2000}{105} \right\rfloor = 19$.

Nach der Siebformel ergibt sich $|S \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3)|$

$= 2000 - (666 + 400 + 285) + (133 + 95 + 57) - 19 = \underline{\underline{915}}$.

b) Bezeichnungen: $S = \{k \in \mathbb{N} : 1 \leq k \leq 1000\}$, $A_1 = \{k \in S : 3|k\}$, $A_2 = \{k \in S : 5|k\}$, $A_3 = \{k \in S : 7|k\}$, $A_4 = \{k \in S : 11|k\}$. Es gilt

$|S| = 1000,$

$|A_1| = \left\lfloor \frac{1000}{3} \right\rfloor = 333, \ |A_2| = \left\lfloor \frac{1000}{5} \right\rfloor = 200, \ |A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{7} \right\rfloor = 142$

$|A_4| = \left\lfloor \frac{1000}{11} \right\rfloor = 90,$

$|A_1 \cap A_2| = \left\lfloor \frac{1000}{15} \right\rfloor = 66, \ |A_1 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{21} \right\rfloor = 47,$

$|A_1 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{1000}{33} \right\rfloor = 30, \ |A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{35} \right\rfloor = 28,$

$|A_2 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{1000}{55} \right\rfloor = 18, \ |A_3 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{1000}{77} \right\rfloor = 12,$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = \left\lfloor \frac{1000}{105} \right\rfloor = 9, \ |A_1 \cap A_2 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{1000}{165} \right\rfloor = 6$

$|A_1 \cap A_3 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{1000}{231} \right\rfloor = 4, \ |A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{1000}{385} \right\rfloor = 2,$

$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = \left\lfloor \frac{1000}{1155} \right\rfloor = 0.$ Also:

$|S \setminus (A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)| = 1000 - (333 + 200 + 142 + 90) +$
$66 + 47 + 30 + 28 + 18 + 12 - (9 + 6 + 4 + 2) = \underline{\underline{415}}.$