Tutorium: Diskrete Mathematik

Ebenen

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

© 2012 Steven Köhler

Definition

Die *Ebene* ist ein Grundbegriff der Geometrie. Allgemein handelt es sich um ein unbegrenzt ausgedehntes, flaches, zweidimensionales Objekt.

- Hierbei bedeutet unbegrenzt ausgedehnt und flach, dass zu je zwei Punkten auch eine durch diese Punkte verlaufende Gerade vollständig in der Ebene liegt.
- Zweidimensional bedeutet, dass – abgesehen von enthaltenen Geraden – kein echter Teilraum ebenfalls diese Eigenschaft hat.

© 2012 Steven Köhler

Darstellungsformen

Analog zur Geraden kann auch eine Ebene auf mehrere Arten dargestellt werden:

- die Koordinatenform;
- die Parameterform;
- die Normalenform.

Diese sind im Wesentlichen analog zu den bereits bekannten Darstellungsformen von Geraden.

© 2012 Steven Köhler

Koordinatenform I

Definition

Jede Ebene im $\mathbb{R}^3$ lässt sich durch eine Koordinatengleichung

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$$

beschreiben, bei der mindestens einer der drei Koeffizienten a, b und c ungleich Null ist.

© 2012 Steven Köhler

Koordinatenform II

Durch Einsetzen der Koordinaten eines Punktes P in die Koordinatenform kann wieder überprüft werden, ob der Punkt P in der Ebene liegt oder nicht (Punktprobe).

<u>Beispiel</u>

Der Punkt $P = (1, 2, 3)$ liegt nicht in der Ebene, die durch

$$3x_1 - x_2 + x_3 - 7 = 0$$

gegeben ist, denn: Setzt man P in diese Gleichung ein, ergibt sich

$$3 \cdot 1 - 2 + 3 - 7 = -3 \neq 0.$$

© 2012 Steven Köhler

Koordinatenform III

Die Koordinatenform einer Ebene kann – analog zur Koordinatenform von Geraden – wie folgt bestimmt werden:

- mit dem Gauß-(Jordan-)Verfahren;
- über die Parameter- oder Normalenform.

© 2012 Steven Köhler

Parameterform I

Eine andere, sehr komfortable Möglichkeit, eine Ebene darzustellen, ist die *Parameterform*. Die Ebene wird dabei in der folgenden Form dargestellt:

$$x = p + s \cdot u + t \cdot v \quad (s, t \in \mathbb{R}).$$

Die Bezeichnungen sind dabei wie folgt:

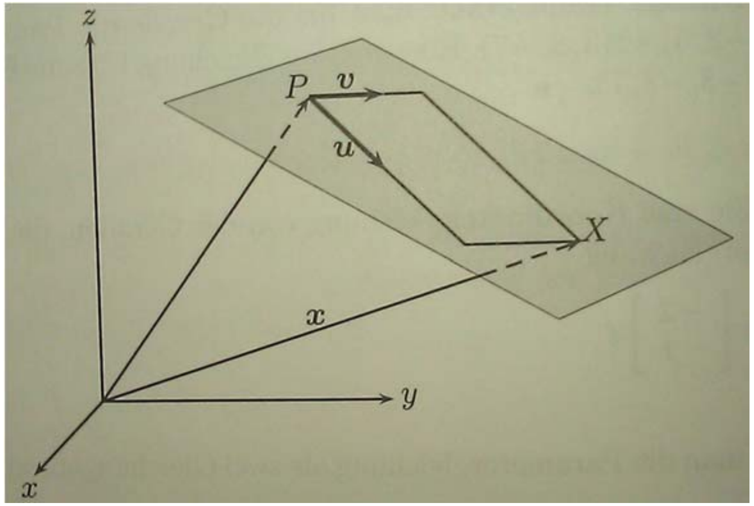
- p ist der *Stützvektor*;
- u und v sind zwei *Spannvektoren*;
- $s, t \in \mathbb{R}$ sind beliebige Skalare.

Diese Darstellung einer Ebene wird auch *Vektorielle Punkt-Richtungsform* genannt.

© 2012 Steven Köhler

Parameterform II

Bildlich veranschaulicht bedeutet dies, dass die Ebene durch einen Punkt in der Ebene (der Stützvektor p) sowie 2 Vektoren (die Spannvektoren u und v) beschrieben wird.



Die Abbildung wurde dem Gramlich entnommen.

© 2012 Steven Köhler

Parameterform III

Wir führen an einem Beispiel exemplarisch vor, wie die Parameterform erstellt werden kann.

Aufgabe

Gesucht ist die Parameterform der Ebene, die die folgenden Punkte enthält:

$$A = (1, 1, 3), \quad B = (2, 4, 0) \quad \text{und} \quad C = (5, 0, -1).$$

© 2012 Steven Köhler

Parameterform IV

Eine mögliche Darstellung mittels Stütz- und Spannvektoren für beliebige Punkte A, B und C kann man wie folgt erhalten:

$$\begin{aligned} v &= \overrightarrow{0A} + s \cdot \overrightarrow{AB} + t \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \\ b_3 - a_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} c_1 - a_1 \\ c_2 - a_2 \\ c_3 - a_3 \end{pmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

© 2012 Steven Köhler

Parameterform V

Für unser Beispiel ergibt sich

$$\begin{aligned} v &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2-1 \\ 4-1 \\ 0-3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5-1 \\ 0-1 \\ -1-3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Eine mögliche Parameterform für die gesuchte Ebene lautet also

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R}).$$

© 2012 Steven Köhler

Normalenform I

Die letzte hier behandelte Art, eine Ebene darzustellen, ist die *Normalenform*. Dabei wird die Ebene unter Zuhilfenahme einer *Normalen* – eines zur Ebene senkrechten Vektors – dargestellt. Es gilt (analog zu Geraden):

$$\left(x - p\right) \cdot n = 0 \quad \text{oder} \quad n \cdot x + d = 0.$$

Die Bezeichnungen sind dabei wie folgt:

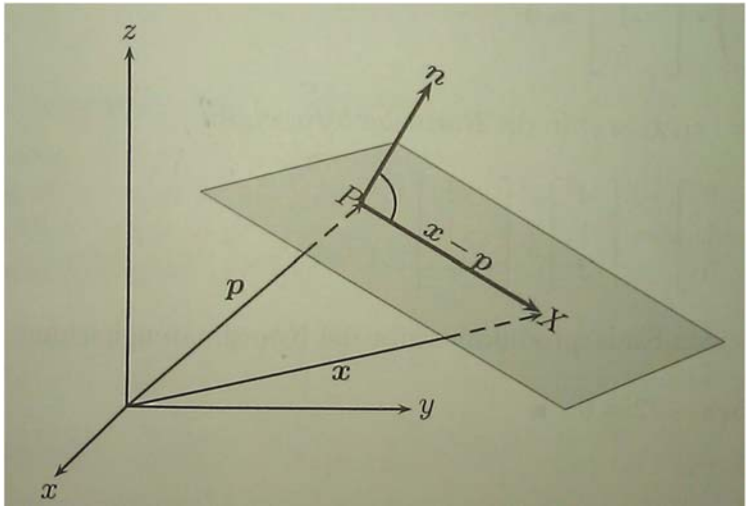
- n ist eine Normale der Ebene;
- x ist ein (vermeintlicher) Punkt in der Ebene;
- p ist ein beliebiger Punkt der Ebene;
- d ist ein konstanter Wert, der für alle Punkte der Ebene gilt.

Wichtig: Die Normalenform einer Ebene existiert nur im $\mathbb{R}^3$.

© 2012 Steven Köhler

Normalenform II

Bildlich kann man sich die Normalenform einer Ebene wie folgt vorstellen.



Die Abbildung wurde dem Gramlich entnommen.

© 2012 Steven Köhler

Normalenform III

Besitzt man die Parameterform der Ebene, lässt sich eine Normale sehr einfach berechnen. Sie ist nichts Anderes als das Kreuzprodukt der beiden Spannvektoren.

© 2012 Steven Köhler

Aufgaben

Aufgabe 1

Bestimme die Parameter- und Normalenform der Ebene, die durch die Punkte $A = (3, 4, 5)$, $B = (0, -1, 2)$ und $C = (1, 0, 2)$ beschrieben wird.

© 2012 Steven Köhler

Umrechnung zwischen den Darstellungen I

Parameterform → Koordinatenform

Die Umrechnung der Parameterform in die Koordinatenform ist relativ einfach. Man betrachtet die Parameterform in der folgenden Weise:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} p_1 + su_1 + tv_1 \\ p_2 + su_2 + tv_2 \\ p_3 + su_3 + tv_3 \end{pmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R}).$$

© 2012 Steven Köhler

Umrechnung zwischen den Darstellungen II

Hieraus bekommt man sofort das folgende Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 &= p_1 + su_1 + tv_1 \\ x_2 &= p_2 + su_2 + tv_2 \\ x_3 &= p_3 + su_3 + tv_3 \end{aligned}$$

Stellt man zwei der Gleichungen nach den Parametern s und t um und setzt diese in die verbleibende Gleichung ein, erhält man die Koordinatenform.

© 2012 Steven Köhler

Umrechnung zwischen den Darstellungen III

Aufgabe

Stelle die in Parameterform gegebene Ebene in Koordinatenform dar.

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

Hieraus ergeben sich die folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 + t \\ x_2 &= 2 + s + 2t \\ x_3 &= 3 - s + t \end{aligned}$$

© 2012 Steven Köhler

Umrechnung zwischen den Darstellungen IV

Umstellen der ersten Gleichung nach t ergibt

$$t = x_1 - 1.$$

Umstellen der zweiten Gleichung nach s und Einsetzen von t ergibt

$$\begin{aligned} s &= x_2 - 2 - 2t \\ &= x_2 - 2 - 2(x_1 - 1) \\ &= x_2 - 2x_1. \end{aligned}$$

© 2012 Steven Köhler

Umrechnung zwischen den Darstellungen V

Einsetzen von s und t in die dritte Gleichung ergibt

$$\begin{aligned} x_3 &= 3 - (x_2 - 2x_1) + (x_1 - 1) \\ &= 2 - x_2 + 3x_1. \end{aligned}$$

Die gesuchte Koordinatenform lautet also

$$-3x_1 + x_2 + x_3 - 2 = 0.$$

© 2012 Steven Köhler

Umrechnung zwischen den Darstellungen VI

Koordinatenform → Parameterform

Die Umrechnung der Koordinatenform in die Parameterform kann folgendermaßen erledigt werden:

Durch Einsetzen von beliebigen Werten x_1, x_2 und Berechnen des Wertes x_3 kann man leicht 3 Punkte der Ebene bestimmen, aus denen man dann einfach die Parameterform der Ebene bestimmen kann.

© 2012 Steven Köhler

Umrechnung zwischen den Darstellungen VII

Normalenform $\rightarrow$ Koordinatenform

Zur Umrechnung der Normalenform in die Koordinatenform kann man einen einfachen Trick verwenden.

Die Werte des Normalenvektors sind die Koeffizienten von x_1, x_2 und x_3. Aus

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + d = 0$$

wird also

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + d = 0.$$

© 2012 Steven Köhler

Umrechnung zwischen den Darstellungen VIII

Koordinatenform → Normalenform

Diese Umrechnung funktioniert analog zur Umrechnung der Normalenform in die Koordinatenform.

Die Koeffizienten von x_1, x_2 und x_3 sind die Einträge des Normalenvektors. Aus

$$n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + d = 0$$

wird also

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + d = 0.$$

© 2012 Steven Köhler

Umrechnung zwischen den Darstellungen IX

Parameterform $\rightarrow$ Normalenform

Diese Umrechnung erfordert etwas mehr Rechenaufwand, ist aber nicht sonderlich schwer.

Zunächst wird aus der Parameterform die Koordinatenform erstellt. Aus dieser kann man die Normalenform dann unmittelbar ablesen.

Alternativ kann der Normalenvektor auch als Kreuzprodukt der beiden Spannvektoren berechnet werden. Als fixer Punkt der Ebene kann der Stützvektor verwendet werden.

© 2012 Steven Köhler

Umrechnung zwischen den Darstellungen X

Normalenform → Parameterform

Diese Umrechnung erfolgt analog zur Umrechnung der Parameterform in die Normalenform.

Zunächst wird aus der Normalenform die Koordinatenform erstellt. Aus dieser kann man dann die Parameterform erstellen.

© 2012 Steven Köhler

Aufgaben

Aufgabe 2

Stelle die folgende Ebene in Parameter- und Normalenform dar:

$$2x_1 + x_2 - x_3 + 4 = 0.$$

Aufgabe 3

Gib die folgende Ebene in Parameterdarstellung an:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right) = 0.$$

© 2012 Steven Köhler