Mathematik II für Studierende der Informatik
(Analysis und Lineare Algebra)

Thomas Andreae, Henrik Bachmann, Rosona Eldred, Malte Moos

Sommersemester 2012
Blatt 5

A: Präsenzaufgaben am 3. Mai 2012

1. Berechnen Sie $f'(x)$ für

(i) $f(x) = \dfrac{1}{x^5}$ (ii) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (iii) $f(x) = \sqrt[5]{\sqrt{x^3}} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{x^7}}$

2. Berechnen Sie die erste Ableitung der beiden Funktionen

$$f(x) = \sin(2x) \quad \text{und} \quad g(x) = \cos\left(\sqrt{x^2+1}\right).$$

3. Zeigen Sie: Unter allen Rechtecken mit vorgegebenem Umfang U besitzt das Quadrat die größte Fläche.

4. Es sei $f(x) = x^2 - 3$. Mit $t(x) = ax + b$ sei die Tangente an den Graphen von $f(x)$ im Punkt $\big(2, f(2)\big)$ bezeichnet.

a) Berechnen Sie a und b sowie den Schnittpunkt von $t(x)$ mit der x-Achse. Fertigen Sie eine (grobe) Skizze von $f(x)$ und $t(x)$ an.

b) Was meinen Sie: Lässt sich das Newton-Verfahren zur näherungsweisen Berechnung von Quadratwurzeln verwenden?

c) Berechnen Sie mit dem Newton-Verfahren einige Näherungswerte für die positive Nullstelle von $f(x) = x^2 - 3$. Beginnen Sie mit dem Startwert $x_0 = 2$. Berechnen Sie $x_1, x_2, \ldots, x_6$.

B: Hausaufgaben zum 10. Mai 2012

1. Berechnen Sie $f'(x)$ für

(i) $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[4]{x^5}} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{x^7}}$ (iv) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

(ii) $f(x) = \sin\left(x^2\right)$ (v) $f(x) = \arcsin\left(\sqrt{x}\right)$

(iii) $f(x) = \sin^2 x$ (vi) $f(x) = (x^3-1)^{\arctan x}$ (für $x > 1$).

2. Führen Sie eine Kurvendiskussion für die Funktion

$$f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

durch. Gehen Sie dabei nach dem Schema auf Seite 49 des Skripts vor.

3. Es sei $f(x) = x^4 - 5x^2 + 5x - \frac{5}{2}$. Zeigen Sie, dass f im Intervall $[1,2]$ eine Nullstelle besitzt, und berechnen Sie diese näherungsweise mit dem Newton-Verfahren, wobei der Startwert $x_0 = 2$ sein soll. Führen Sie einige Iterationsschritte aus: Berechnen Sie zumindest x_1, x_2, x_3 und x_4. Besser ist es jedoch, wenn Sie noch ein paar Schritte mehr durchführen, bis sich der erhaltene Wert „nicht mehr ändert“.

4. a) Eine zylindrische Konservendose soll ein Fassungsvermögen (Volumen) von $V = 2000$ cm^3 haben. Wie ist der Radius r und die Höhe h zu wählen, wenn man so wenig Blech wie möglich zu ihrer Herstellung verwenden will?
Hinweis: Die Oberfläche der Dose wird durch $A = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ gegeben.

b) Ein Fahrzeug soll in möglichst kurzer Zeit vom Punkt mit den Koordinaten $(0, 0)$ zum Punkt $(30, 10)$ gelangen. Auf der x-Achse (Straße) kann es 50 km/h fahren, außerhalb der x-Achse (Gelände) nur 20 km/h. An welcher Stelle der Straße muss es abbiegen? (1 Einheit auf den Achsen = 1 km)
Anleitung: Ist P der Punkt, an dem das Fahrzeug die x-Achse verlässt, so betrachte man den Abstand d zwischen P und dem Punkt $Q = (30, 0)$. Der Abstand zwischen dem Ursprung und P ist dann gleich $30 - d$. Man berechne den Abstand zwischen P und $R = (30, 10)$ und gebe die zu minimierende Fahrzeit als Funktion $h(d)$ an.