Linearkombinationen

Mit $\mathbb{R}^n$ bezeichnet man bekanntlich die Menge aller n-Tupel reeller Zahlen:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1,\dots,x_n) : x_i \in \mathbb{R} \text{ für } i=1,\dots,n\}.$$

In vielen Zusammenhängen nennt man die Elemente von $\mathbb{R}^n$ auch Vektoren und spricht von dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$ oder auch einfach nur von dem $\mathbb{R}^n$. Dies ist zunächst einmal nichts als eine Sprechweise – später werden wir den Begriff des Vektorraums noch genau definieren.

Die übliche Art, Elemente von $\mathbb{R}^n$ zu addieren, ist die komponentenweise Addition:

$$(x_1,x_2,\dots,x_n)+(y_1,\dots,y_n) = (x_1+y_1, x_2+y_2,\dots,x_n+y_n).$$

Ebenfalls komponentenweise definiert man die skalare Multiplikation (für $c \in \mathbb{R}$):

$$c(x_1,x_2,\dots,x_n) = (cx_1, cx_2,\dots, cx_n).$$

Kombiniert man die Addition und die skalare Multiplikation, so gelangt man zum Begriff der Linearkombination; beispielsweise ist $u=(10,23,0,-1)$ eine

Linearkombination der Vektoren $v_1 = (1,1,2,1)$, $v_2 = (3,7,-1,1)$ und $v_3 = (1,0,1,6)$, da

$$u = 2v_1 + 3v_2 + (-1)v_3.$$

gilt. (Rechnen Sie es nach!)

Allgemein definiert man den Begriff der Linearkombination wie folgt: Es seien $v_1, \ldots, v_r$ und u Vektoren aus $\mathbb{R}^n$. Man nennt u eine <u>Linearkombination</u> der Vektoren $v_1, \ldots, v_r$, falls es Skalare $c_1, \ldots, c_r$ gibt, für die gilt:

$$u = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_r v_r.$$

Die Zahlen $c_1, \ldots, c_r$ nennt man die <u>Koeffizienten</u> der Linearkombination.

<u>Vektoren $v = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ schreibt man häufig auch als Spalten</u>, d.h., man sieht sie als $n \times 1$-Matrizen an:

$$v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Die obige Linearkombination in dieser Schreibweise:

$$u = \begin{pmatrix} 10 \\ 23 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + (-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

In vielen Situationen fällt dem **Nullvektor des $\mathbb{R}^n$** eine besondere Rolle zu, wobei mit „Nullvektor des $\mathbb{R}^n$" – wie Sie sich bereits gedacht haben – derjenige Vektor der Länge n gemeint ist, dessen Einträge alle gleich 0 sind:

$$(0, 0, \ldots, 0)$$

bzw. in Spaltenschreibweise

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Den Nullvektor werden wir im Folgenden einfach mit 0 bezeichnen – diese „Doppelbezeichnung" stellt kein Problem dar, da aus dem Zusammenhang immer hervorgehen wird, ob wir mit „0" die Zahl Null oder den Nullvektor des $\mathbb{R}^n$ meinen.

Gegeben seien Vektoren $v_1, \ldots, v_r$ des $\mathbb{R}^n$ und 0 bezeichne den Nullvektor des $\mathbb{R}^n$.

Frage: Ist der Nullvektor eine Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_r$?

Mit anderen Worten: Wir fragen, ob es

reelle Zahlen („Koeffizienten") $c_1, \ldots, c_r$ gibt, so dass

$$(*) \quad c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_r v_r = 0.$$

Denkt man einen kleinen Moment nach, so erkennt man, dass dies eine <u>dumme Frage</u> war: Natürlich gibt es Zahlen $c_1, \ldots, c_r$ für die (*) gilt – man braucht ja nur $c_1 = c_2 = \ldots = c_r = 0$ zu wählen! – Wir wandeln die Frage also etwas ab:

<u>Frage</u>: Gibt es eine Darstellung des Nullvektors wie in (*), <u>in der die Koeffizienten $c_1, \ldots, c_r$ nicht alle gleich Null sind</u>?

<u>Vorläufige Antwort</u>: Ob es eine solche Darstellung gibt oder nicht, hängt von den gegebenen Vektoren $v_1, \ldots, v_r$ ab.

Wann genau es eine solche Darstellung gibt und wie man ggf. derartige Koeffizienten $c_1, \ldots, c_r$ finden kann, darum wird es u.a. in den ersten Wochen des Jahres 2012 gehen.

Ich wünsche Ihnen ein erfolgreiches Jahr 2012!