Hausaufgaben zum 19. April 2012

Elena Noll, Sven-Hendrik Haase, Arne Struck

19. April 2012

1. (i)

$$\frac{-3n^4+2n^2+n+1}{-7n^4+25} = \frac{n^4}{n^4} * \frac{-3+2\frac{n^2}{n^4}+\frac{n}{n^4}+\frac{1}{n^4}}{-7+\frac{25}{n^4}} \tag{1}$$
$$= 1 * \frac{-3+0+0+0}{-7+0} \tag{2}$$
$$= \frac{-3}{-7} \tag{3}$$

(ii)

$$\frac{-3n^4+2n^2+n+1}{-7n^4+25} = \frac{n^4}{n^5} * [...] \tag{4}$$
$$= 0 * [...] = 0 \tag{5}$$

(iii)

$$\frac{-3n^4+2n^2+n+1}{-7n^4+25} = \frac{n^5}{n^4} * [...] \tag{6}$$
$$= \infty * [...] = \infty \tag{7}$$

(iv)

$$\frac{6n^3+2n-3}{9n^2+2} - \frac{2n^3+5n^2+7}{3n^2+3} \tag{8}$$
$$= \frac{(6n^3-2n-3)*(3n^2+3)-(2n^3+5n^2+7)*(9n^2+2)}{(9n^2+2)*(3n^2+3)} \tag{9}$$
$$= \frac{18n^5+6n^3-9n^2+18n^3+6n-9-(18n^5+45n^4+63n^2+4n^3+10n^2+14)}{27n^4+6n^2+27n^2+6} \tag{10}$$
$$= \frac{18n^5+6n^3-9n^2+18n^3+6n-9-18n^5-45n^4-63n^2-4n^3-10n^2-14}{27n^4+6n^2+27n^2+6} \tag{11}$$
$$= \frac{-45n^4+20n^3-82n^2+6n-23}{27n^4+33n^2+6} = \frac{-n^4}{n^4} * [...] = -\infty \tag{12}$$

(v)

$$\frac{\sqrt{9n^4+n^2+1}-2n^2+3}{\sqrt{2n^2+1}*\sqrt{2n^2+n+1}} = \frac{\sqrt{n^4(9+\frac{n^2}{n^4}+\frac{1}{n^4})}-2n^2+3}{\sqrt{n^2(2+\frac{1}{n^2})}*\sqrt{n^2(2+n+\frac{1}{n^2})}} \tag{13}$$

$$=\frac{n^2\sqrt{9+\frac{n^2}{n^4}+\frac{1}{n^4}}-2n^2+3}{n\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}*n\sqrt{2+n+\frac{1}{n^2}}} = \frac{n^2}{n^2}*\frac{\sqrt{9+\frac{n^2}{n^4}+\frac{1}{n^4}}-2+\frac{3}{n^2}}{\sqrt{2+\frac{1}{n^2}}*\sqrt{2+n+\frac{1}{n^2}}} \tag{14}$$

$$=\frac{n^2}{n^2}*\frac{\sqrt{9+\frac{n^2}{n^4}+\frac{1}{n^4}}-2+\frac{3}{n^2}}{\sqrt{(2+\frac{1}{n^2})(2+n+\frac{1}{n^2})}} = [...] \tag{15}$$

2. a) (i)

$$a_0 = 1 \qquad s_0 = 1 \tag{16}$$

$$a_1 = \frac{2}{5} \qquad s_1 = \frac{7}{5} \tag{17}$$

$$a_2 = \frac{4}{25} \qquad s_2 = \frac{34}{25} \tag{18}$$

$$a_3 = \frac{8}{125} \qquad s_3 = \frac{203}{125} \tag{19}$$

$$a_4 = \frac{16}{625} \qquad s_4 = \frac{1031}{625} \tag{20}$$

Konvergiert gegen $\frac{5}{3}$.

(ii)

$$a_0 = 1 \qquad s_0 = 1 \tag{21}$$

$$a_1 = \frac{5}{2} \qquad s_1 = \frac{7}{5} \tag{22}$$

$$a_2 = \frac{25}{4} \qquad s_2 = \frac{39}{4} \tag{23}$$

$$a_3 = \frac{125}{8} \qquad s_3 = \frac{203}{8} \tag{24}$$

$$a_4 = \frac{625}{16} \qquad s_4 = \frac{1031}{16} \tag{25}$$

Konvergiert nicht.

(iii)

$$a_0 = 1 \qquad s_0 = 1 \tag{26}$$
$$a_1 = -\frac{2}{5} \qquad s_1 = \frac{3}{7} \tag{27}$$
$$a_2 = \frac{4}{25} \qquad s_2 = \frac{19}{25} \tag{28}$$
$$a_3 = -\frac{8}{125} \qquad s_3 = \frac{87}{125} \tag{29}$$
$$a_4 = \frac{16}{625} \qquad s_4 = \frac{451}{625} \tag{30}$$

Konvergiert gegen $\frac{5}{7}$.

3. (i) Die Reihe ist konvergent. Dies lässt sich mit dem Satz über monoton-beschränkte Folgen zeigen.
Monotonie: Zahlen $(\frac{3}{7})^i$ sind positiv, also ist die Folge monoton-wachsend.

(ii) ka

(iii) Die Reihe oszilliert zwischen 1 und 0. Beispiel aus der Folge:

$$-1 + 1 - 1 + 1...$$

Daraus folgt, dass sie nicht konvergieren kann.
Die Folge der Koeffizienten konvergiert nicht gegen 0. Sie ist immer entweder 1 oder -1. Somit ist die Reihe divergent.

(iv) Die Reihe ist konvergent. Dies lässt sich mit dem Satz über monoton-beschränkte Folgen zeigen.
Monotonie: Zahlen $\frac{1}{i(i+1)}$ sind positiv, also ist die Folge monoton-wachsend.

3. (i)

$$(1 + \frac{1}{n})^n * (1 + \frac{1}{n})^1 \tag{31}$$
$$= e * (1 + 0)^1 = e \tag{32}$$

(ii)

$$(1 + \frac{1}{n})^{2n} \tag{33}$$
$$= \left((1 + \frac{1}{n})^n\right)^2 \tag{34}$$
$$= e^2 \tag{35}$$

(iii)

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \tag{36}$$