Mathematik I für Studierende der Informatik (Diskrete Mathematik)

Thomas Andreae, Christoph Stephan

Wintersemester 2011/12
Blatt 13

B: Hausaufgaben zum 2./3. Februar 2012

1. a) In Hausaufgabe 1b) (Blatt 11) wurde ein lineares Gleichungssystem betrachtet, dessen allgemeine Lösung $x = (x_1, x_2, x_3)$ wie folgt lautete (für $t \in \mathbb{R}$):

$$x_1 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}t, \quad x_2 = -\frac{4}{3} + \frac{1}{3}t, \quad x_3 = t.$$

Überprüfen Sie, ob es sich bei dieser allgemeinen Lösung um eine Gerade handelt und geben Sie diese ggf. in **Parameterform** an, d.h. mit **Stütz- und Richtungsvektor**.

b) In Hausaufgabe 1d) (Blatt 11) wurde ein lineares Gleichungssystem betrachtet, dessen allgemeine Lösung $x = (x_1, x_2, x_3)$ wie folgt lautete (für $s, t \in \mathbb{R}$):

$$x_1 = 2 - \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t, \quad x_2 = s, \quad x_3 = t.$$

Überprüfen Sie, ob es sich bei dieser allgemeinen Lösung um eine Ebene handelt und geben Sie diese ggf. in **Parameterform** an, d.h. mit **Stützvektor** und zwei **Spannvektoren**.

c) In Hausaufgabe 2 (Blatt 11) wurde ein lineares Gleichungssystem betrachtet, dessen allgemeine Lösung $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$ wie folgt lautete (für $r, s, t \in \mathbb{R}$):

$$x_1 = -3 + 5r + 3s + t, \quad x_2 = 1 - 2r - 3s, \quad x_3 = r, \quad x_4 = s, \quad x_5 = -2 + 3t, \quad x_6 = t.$$

Man gebe die Lösungsmenge auf eine Art an, die der Parameterform einer Ebene ähnlich ist, d.h. mit **Stützvektor** und mehreren **Spannvektoren**.

a) $$x = (x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{5}{3} - \frac{2}{3}t, -\frac{4}{3} + \frac{1}{3}t, t\right)$$
$$= \underbrace{\left(\frac{5}{3}, -\frac{4}{3}, 0\right)}_{\text{Stützvektor}} + t\underbrace{\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)}_{\text{Richtungsvektor}}, \ t \in \mathbb{R}.$$

b) $$x = (x_1, x_2, x_3) = \left(2 - \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t, s, t\right)$$
$$= \underbrace{(2, 0, 0)}_{\text{Stützvektor}} + s\left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right) + t\left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right), \ s, t \in \mathbb{R}$$

Spannvektoren

c) $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6)$

$= (-3+5r+3s+t, 1-2r-3s, r, s, -2+3t, t)$

$$= \underbrace{(-3,1,0,0,-2,0)}_{\text{Stützvektor}} + r\underbrace{(5,-2,1,0,0,0)} + s\underbrace{(3,-3,0,1,0,0)} + t\underbrace{(1,0,0,0,3,1)}, \quad r,s,t \in \mathbb{R}.$$

3 Spannvektoren

4. a) Finden Sie heraus, ob die Vektoren $v_1 = (2,4,-2,-4)$, $v_2 = (-2,3,3,3)$ und $v_3 = (-5,18,9,6)$ linear abhängig oder linear unabhängig sind.

b) Ebenso für $v_1 = (2,4,-2,-4)$, $v_2 = (-2,3,3,3)$ und $v_3 = (-4,-1,6,7)$.

c) Ebenso für $v_1 = (1,1,1,1)$, $v_2 = (-1,0,1,1)$, $v_3 = (2,2,0,-1)$ und $v_4 = (-1,5,13,14)$.

d) Ebenso für $v_1 = (4,3,0,1)$, $v_2 = (5,6,7,8)$, $v_3 = (1,0,0,7)$, $v_4 = (0,0,7,0)$ und $v_5 = (4,7,1,1)$.

a)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -5 & 0 \\ 4 & 3 & 18 & 0 \\ -2 & 3 & 9 & 0 \\ -4 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 4 & 3 & 18 & 0 \\ -2 & 3 & 9 & 0 \\ -4 & 3 & 6 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 7 & 28 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$\rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -\frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ Es gibt nicht triviale Lösungen. Folglich sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear abhängig.

b)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -2 & -4 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 6 & 0 \\ -4 & 3 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 4 & 3 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 6 & 0 \\ -4 & 3 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es folgt, dass es nur die triviale Lösung $x_1=0, x_2=0, x_3=0$ gibt. Deshalb sind die Vektoren v_1, v_2, v_3 linear unabhängig.

c)
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 5 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 13 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 14 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 14 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 15 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es folgt, dass es nicht triviale Lösungen gibt. Deshalb sind die Vektoren $v_1, \dots, v_4$ linear abhängig.

d) $v_1, \dots, v_5$ sind linear abhängig aufgrund von Satz 4.9 (Gramlich, Abschnitt 4.10); siehe auch Ergänzungsskript Seite 26.