Beispiele:

1. Es sei $V = K^3$ für $K = \mathbb{Z}_7$ und $v_1, v_2, v_3 \in V$ seien gegeben durch $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (1,1,1)$ und $v_3 = (3,4,5)$. Die Vektoren v_1, v_2 und v_3 sind linear abhängig, da

$$\begin{aligned} v_1 + 2v_2 + 6v_3 &= (1,2,3) + 2(1,1,1) + 6(3,4,5) \\ &= (1,2,3) + (2,2,2) + (4,3,2) \\ &= (0,0,0). \end{aligned}$$

2. Wie im Beispiel zuvor sei $K = \mathbb{Z}_7$ und $V = K^3$. Es soll geklärt werden, ob die folgenden Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in V$ linear abhängig oder unabhängig sind: $v_1 = (1,2,1)$, $v_2 = (6,2,3)$, $v_3 = (4,4,0)$.

Mit anderen Worten: Gibt es Skalare[1] λ_1, λ_2 und λ_3, die nicht alle gleich Null sind, so dass

$$(*) \quad \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = (0,0,0).$$

---

1) Es sei noch einmal darauf hingewiesen, dass „Skalar" in diesem Beispiel „Element des Körpers $K = \mathbb{Z}_7$" bedeutet.

Lösung: Zweckmäßigerweise schreiben wir die Vektoren v_1, v_2, v_3 in Spaltenform; (*) lautet dann

$$\lambda_1\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\lambda_2\begin{pmatrix}6\\2\\3\end{pmatrix}+\lambda_3\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Wir haben also ein lineares Gleichungssystem mit Koeffizienten (und Unbestimmten) aus $\mathbb{Z}_7$ zu lösen:

$$\begin{aligned}\lambda_1+6\lambda_2+4\lambda_3&=0\\2\lambda_1+2\lambda_2+4\lambda_3&=0\\\lambda_1+3\lambda_2\qquad\quad&=0\end{aligned}$$

Wir verwenden den *Gauß-Algorithmus*:

$$\begin{array}{ccc|c}1&6&4&0\\2&2&4&0\\1&3&0&0\\\hline 1&6&4&0\\0&4&3&0\\0&4&3&0\\\hline 1&6&4&0\\0&1&6&0\\0&0&0&0\end{array}$$

Es ergibt sich als Lösung des Gleichungssystems ($t \in \mathbb{Z}_7$ ist ein frei wählbarer Parameter):

$$\lambda_3 = t$$

$$\begin{gathered}\lambda_2+6\lambda_3=0\\\Longrightarrow \lambda_2=-6\lambda_3=-6t=t\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\lambda_1+6\lambda_2+4\lambda_3=0\\\Longrightarrow \lambda_1=-6\lambda_2-4\lambda_3=\lambda_2+3\lambda_3=4t\end{gathered}$$

Die *allgemeine Lösung* des Gleichungssystems lautet also

$$(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)=(4t,t,t)=t(4,1,1),\ t\in\mathbb{Z}_7.$$

Insbesondere erhält man bei Wahl von $t=1$ eine nichttriviale Darstellung des Nullvektors

$$4v_1+v_2+v_3=(0,0,0).$$

Die Vektoren v_1, v_2 und v_3 sind also linear abhängig. $\square$

Einige Bemerkungen zum letzten Beispiel:

Als Menge geschrieben lautet die allgemeine Lösung des betrachteten linearen Gleichungssystems („die Lösungsmenge")

$$\mathcal{L} = \{t(4,1,1) : t \in \mathbb{Z}_7\}.$$

In Analogie zum $\mathbb{R}^3$ nennt man $\mathcal{L}$ eine <u>Ursprungsgerade</u> des K^3.

Man übernimmt also auch die gewohnten Sprechweisen. <u>Frage</u>:

Wie viele Elemente enthält K^3?
Und wie viele dieser Elemente liegen auf der Geraden $\mathcal{L}$? Tragen Sie die Antworten ein: $|K^3| =$, $|\mathcal{L}| =$.
Geben Sie auch sämtliche Elemente von $\mathcal{L}$ („Punkte der Geraden") an:

Ein weiteres Beispiel:

3. $K = \mathbb{Z}_3$, $v_1 = (2,2,0)$, $v_2 = (1,1,1)$, $v_3 = (0,1,1)$. Sind diese Vektoren des K^3 linear abhängig? Wir verwenden wieder den Gauß-Algorithmus:

$$\begin{array}{ccc|c}
2 & 1 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
1 & 2 & 0 & 0 \\
2 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
1 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 \\
\hline
1 & 2 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0
\end{array}$$

Um eine führende 1 zu erhalten wird die erste Zeile mit dem Inversen von 2 multipliziert.

Es folgt, dass $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ die einzige Lösung ist, d. h., die Vektoren v_1, v_2, v_3 sind linear unabhängig.