Das Summenzeichen

Wir beginnen mit einigen einfachen Feststellungen zu den reellen Zahlen und zum Distributivgesetz.

Die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ bilden einen <u>Körper</u>, d.h., die vier Grundrechenarten sind in $\mathbb{R}$ definiert und unbegrenzt ausführbar (außer der Division durch 0) und es gelten die bekannten Rechenregeln wie beispielsweise $a+b=b+a$ und $a\cdot b = b\cdot a$ („Kommutativgesetze") oder wie das <u>Distributivgesetz</u>: Für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt

$$a(b+c) = ab + ac.$$

Eine entsprechende Regel gilt auch für drei, vier oder mehr Summanden, beispielsweise gilt auch

$$a(b+c+d) = ab + ac + ad$$

oder

$$a(b+c+d+e)=ab+ac+ad+ae.$$

Allgemein gilt für n Summanden:

(1) $a(b_1+b_2+\ldots+b_n)=ab_1+ab_2+\ldots+ab_n.$

Liest man die Formel (1) von rechts nach links, so erkennt man, dass durch diese Formel das <u>Ausklammern von gemeinsamen Faktoren</u> beschrieben wird.

Von links nach rechts gelesen beschreibt die Formel (1) das übliche <u>Ausmultiplizieren</u>: Jeder der Summanden $b_1, b_2, \ldots, b_n$ wird mit dem Faktor a multipliziert.

Entsprechend verfährt man, wenn man zwei Summen miteinander zu multiplizieren hat; es gilt beispielsweise

$$(a_1+a_2)(b_1+b_2+b_3)=a_1b_1+a_1b_2+a_1b_3+a_2b_1+a_2b_2+a_2b_3.$$

Allgemein gilt:

(2) $(a_1+a_2+\ldots+a_m)(b_1+b_2+\ldots+b_n) =$

$$\begin{array}{l} a_1b_1+a_1b_2+\ldots+a_1b_n+ \\ a_2b_1+a_2b_2+\ldots+a_2b_n+ \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\ a_mb_1+a_mb_2+\ldots+a_mb_n. \end{array}$$

Jeder Summand der ersten Klammer wird also mit jedem Summanden der zweiten Klammer multipliziert.

Nun, wie angekündigt, zum Summenzeichen:

Gegeben seien n reelle Zahlen

$$a_1, a_2, \ldots, a_n$$

(für $n \in \mathbb{N}$).

Dann ist $\sum_{i=1}^{n} a_i$ eine andere Bezeichnung für die Summe $a_1+\ldots+a_n$. Es gilt also

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1+\ldots+a_n.$$

<u>Beispiel</u>: $\sum_{i=1}^{5} a_i$ ist ein anderer Ausdruck für die Summe $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5$, es gilt also

$$\sum_{i=1}^{5} a_i = a_1+a_2+a_3+a_4+a_5.$$

In der Summe $\sum_{i=1}^{n} a_i$ wird i <u>Laufindex</u> genannt, da i die natürlichen Zahlen von 1 bis n durchläuft; 1 nennt man die <u>untere Summationsgrenze</u>, n ist die <u>obere Summationsgrenze</u>. (Statt Laufindex kann man auch <u>Summationsindex</u> oder <u>Indexvariable</u> sagen.)

Der Laufindex muss nicht unbedingt mit i bezeichnet werden, sondern man kann z.B. auch j, k oder s wählen; außerdem muss die untere Summationsgrenze nicht unbedingt gleich 1 sein. Beispielsweise ist

$$\sum_{j=0}^{3} a_j$$

eine andere Bezeichnung für $a_0 + a_1 + a_2 + a_3$, es gilt also

$$\sum_{j=0}^{3} a_j = a_0 + a_1 + a_2 + a_3 .$$

Analog: $\sum_{k=2}^{7} b_k = b_2 + b_3 + b_4 + b_5 + b_6 + b_7$,

$$\sum_{s=0}^{4} 2^s = 2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31,$$

$$\sum_{i=0}^{5} (-1)^i a_i = a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 .$$

Wir geben im Folgenden einige einfache, aber nützliche und oft gebrauchte Regeln für das <u>Rechnen mit dem Summenzeichen</u> an.

Unmittelbar klar ist folgende Regel:

(i) $$\sum_{i=1}^{n} a_i = na, \text{ falls } a_1 = \ldots = a_n = a.$$

Aufgrund des <u>Distributivgesetzes</u> gilt (vergleiche (1) auf Seite E.2) $a(b_1+b_2+\ldots+b_n) = ab_1+ab_2+\ldots+ab_n$. Mit dem Summenzeichen lässt sich diese Regel wie folgt schreiben:

(ii) $$\sum_{i=1}^{n} ab_i = a\sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Auch die Regel (2) auf Seite E.3 lässt sich mit dem Summenzeichen schreiben, wodurch die Regel eine besonders kompakte Form annimmt:

(iii) $$\left(\sum_{i=1}^{m} a_i\right)\left(\sum_{j=1}^{n} b_j\right) \overset{(2)}{=} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_i b_j \overset{*}{=} \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} a_i b_j.$$

Die mit * bezeichnete Gleichheit ergibt sich aus dem Kommutativgesetz der Addition: Es handelt sich nur um eine <u>Änderung der Summationsreihenfolge</u>. Um dies deutlich zu machen, schreiben wir die Formel (iii) noch einmal für den Spezialfall $m=3$ und $n=2$ auf:

$$(a_1+a_2+a_3)(b_1+b_2) \overset{(2)}{=} a_1b_1+a_1b_2+a_2b_1+a_2b_2+a_3b_1+a_3b_2$$

$$\overset{*}{=} a_1b_1+a_2b_1+a_3b_1+a_1b_2+a_2b_2+a_3b_2.$$

Auch die folgende Regel beruht nur auf einer Änderung der Summationsreihenfolge:

$$\text{(iv)} \quad \sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i.$$

Zu (iv) analoge Regeln gelten auch, wenn anstelle von a_i+b_i eine Summe aus drei oder mehr Summanden vorliegt. Beispielsweise gilt analog zu (iv) die Regel

$$\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i+c_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i + \sum_{i=1}^{n} b_i + \sum_{i=1}^{n} c_i.$$

Wir haben unsere Regeln (i)–(iv) nur für den Fall formuliert, dass der Laufindex Werte von 1 bis n annimmt. Analoge Regeln gelten entsprechend abgeändert natürlich auch für Varianten hiervon; beispielsweise gilt analog zu Regel (i):

$$\sum_{i=0}^{n} a_i = (n+1)a, \text{ falls } a_0 = \ldots = a_n = a$$

oder

$$\sum_{i=0}^{n+1} a_i = (n+2)a, \text{ falls } a_0 = \ldots = a_{n+1} = a.$$

<u>Beispiel</u>. Gelegentlich hat man es auch mit Summen der folgenden Art zu tun:

$$\sum_{i=0}^{5} a_{2i+1} \quad \text{oder} \quad \sum_{i=0}^{5} a_{2i}.$$

Ohne Summenzeichennotation lautet die erste dieser Summen

$$\sum_{i=0}^{5} a_{2i+1} = a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + a_9 + a_{11}.$$

Schreiben Sie die zweite Summe entsprechend auf:

$$\sum_{i=0}^{5} a_{2i} =$$

Wir führen den <u>Beweis von Satz 1</u> (Skript, Seite 14/15) noch einmal aus, diesmal <u>unter Verwendung des Summenzeichens</u>.

Satz 1. Für alle natürlichen Zahlen n gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Beweis: (I) Induktionsanfang: Für $n=1$ ist die behauptete Formel richtig, da für $n=1$ $\sum_{i=1}^{n} i = 1 = \frac{1(1+1)}{2}$ gilt.

(II) Induktionsschritt: Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine beliebig gewählte natürliche Zahl; wir setzen voraus (Induktionsannahme), dass die behauptete Formel für dieses n richtig ist, d.h., es gelte für dieses n:

$$(2.1) \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Wir haben zu zeigen, dass unter dieser Voraussetzung die behauptete Formel auch für $n+1$ richtig ist, d.h., wir müssen nachweisen, dass

$$(2.2) \quad \sum_{i=1}^{n+1} i = \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}$$

gilt. Dies ergibt sich so:

$$\sum_{i=1}^{n+1} i = \sum_{i=1}^{n} i + (n+1)$$

$$\stackrel{(2.1)}{=} \frac{n(n+1)}{2} + (n+1)$$

$$= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

$$= \frac{(n+1)((n+1)+1)}{2}.$$

Damit sind (I) und (II) gezeigt; nach dem Induktionsprinzip gilt die behauptete Formel also für alle $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Die 1. Zeile auf dieser Seite ist <u>typisch</u> für derartige besonders einfache Induktionsbeweise: <u>Man spaltet den letzten Summanden ab</u>, d.h., man nimmt ihn aus der Summe heraus.