Tutorium: Analysis und Lineare Algebra

Vorbereitung der Bonusklausur am 02.07.2012

Lösungen der Aufgaben

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Aufgabe 1

$$\text{(i)} \quad f'(x) = 21x^6 + 12x^5 - 12x^2 + 1$$

$$\text{(ii)} \quad f'(x) = 3\left(x^5 - x^3 + x\right)^2 \cdot \left(5x^4 - 3x^2 + 1\right)$$

$$\text{(iii)} \quad f'(x) = 4x \cdot \sqrt[3]{2x^2+1} + \left(2x^2 - 1\right) \cdot \tfrac{1}{3}\left(2x^2+1\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 4x$$

$$\text{(iv)} \quad f'(x) = \ln y \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin\left(x^3\right)}} \cdot \cos\left(x^3\right) \cdot 3x^2$$

$$\text{(v)} \quad f'(x) = 2^{x^{-2} - x + 1} \cdot \ln 2 \cdot \left(-2x^{-3} - 1\right)$$

$$\text{(vi)} \quad f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Aufgabe 2

Differenziere die folgenden Funktionen:

$$\text{(i)} \quad f(x) = \frac{\sin\left(\ln\left(\sqrt{3x \cdot \sin x}\right)\right) \cdot \left(3\sin x + 3x\cos x\right)}{3x \cdot \sin x \cdot 2}$$

$$\text{(ii)} \quad f(x) = e^x \cdot \sqrt{2x} \cdot \cos x + \frac{e^x \cdot \cos x}{\sqrt{2x}} - e^x \cdot \sqrt{2x} \cdot \sin x$$

$$\text{(iii)} \quad f(x) = (\sin x)^{x^2+1} \cdot \left(2x \cdot \ln(\sin x) + \frac{(x^2+1) \cdot \cos x}{\sin x}\right)$$

$$\text{(iv)} \quad f'(x) = \frac{(1 + \tan^2 x) \cdot e^x - \tan x \cdot e^x}{e^{2x}} = \frac{(1 + \tan^2 x) - \tan x}{e^x}$$

$$\text{(v)} \quad f(x) = -\sin\left(3x^2\right) \cdot 6x \cdot \ln\left(\sqrt{\sin(2x^3)}\right) + \frac{\cos\left(3x^2\right)\cos\left(2x^3\right) \cdot 6x^2}{2\sin(2x^3)}$$

$$\text{(vi)} \quad f(x) = 2^{2^x} \cdot \ln 2 \cdot 2^x \cdot \ln 2$$

Aufgabe 3 I

1. Schritt: Bestimmen von $f'(x)$, $f''(x)$ und $f'''(x)$

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= e^x \cdot x^2 + e^x \cdot 2x \\
&= e^x \left(x^2 + 2x\right) \\
f''(x) &= e^x \left(x^2 + 2x\right) + e^x \left(2x + 2\right) \\
&= e^x \left(x^2 + 4x + 2\right) \\
f'''(x) &= e^x \left(x^2 + 4x + 2\right) + e^x \left(2x + 4\right) \\
&= e^x \left(x^2 + 6x + 6\right)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3 II

2. Schritt: Bestimmen der Nullstellen von $f'(x)$

- e^x besitzt keine Nullstellen.
- $x^2 + 2x$ besitzt die Nullstellen $x_1 = 0$ und $x_2 = -2$.

3. Schritt: Einsetzen der Nullstellen von $f'(x)$ in $f''(x)$

$$\begin{aligned} f''(0) &= e^0 \\ &= 1 > 0 \\ f''(-2) &= e^-2 + \left((-2)^2 + 4 \cdot (-2) + 2\right) \\ &= -2e^{-2} < 0 \end{aligned}$$

Die Funktion hat bei $\left(0, f(0)\right) = \left(0, 0\right)$ ein Minimum.
Die Funktion f hat bei $\left(-2, f(-2)\right) = \left(-2, 4e^{-2}\right)$ ein Maximum.

Aufgabe 3 III

4. Schritt: Bestimmen der Nullstellen von $f''(x)$

- e^x besitzt keine Nullstellen.
- $x^2 + 4x + 2$ besitzt die Nullstellen $x_{1/2} = -2 \pm \sqrt{2}$.

5. Schritt: Einsetzen der Nullstellen von $f''(x)$ in $f'''(x)$

$$\begin{aligned} f'''(-2-\sqrt{2}) &= e^{-2-\sqrt{2}} + \left(\left(-2-\sqrt{2}\right)^2 + 6 \cdot \left(-2-\sqrt{2}\right) + 2\right) \\ &\neq 0 \\ f'''(-2+\sqrt{2}) &= e^{-2+\sqrt{2}} + \left(\left(-2+\sqrt{2}\right)^2 + 6 \cdot \left(-2+\sqrt{2}\right) + 2\right) \\ &\neq 0 \end{aligned}$$

Die Funktion hat bei $\left(-2-\sqrt{2}, f(-2-\sqrt{2})\right)$ einen Wendepunkt.
Die Funktion hat bei $\left(-2+\sqrt{2}, f(-2+\sqrt{2})\right)$ einen Wendepunkt.

Aufgabe 4

Es sei $x_n = x_0 + \frac{1}{n} = 2 + \frac{1}{n}$. Es folgt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left|2\cdot(2+\frac{1}{n})-4\right|-\left|2\cdot 2-4\right|}{2+\frac{1}{n}-2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left|\frac{2}{n}\right|}{\frac{1}{n}}\right) = 2$$

Es sei $x_n = x_0 - \frac{1}{n} = 2 - \frac{1}{n}$. Es folgt:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left|2\cdot(2-\frac{1}{n})-4\right|-\left|2\cdot 2-4\right|}{2+\frac{1}{n}-2}\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\left|-\frac{2}{n}\right|}{-\frac{1}{n}}\right) = -2$$

Der Grenzwert des Differenzenquotienten existiert nicht, die Funktion ist an der Stelle x_0 nicht differenzierbar.

Aufgabe 5 I

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} U_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\left(-\left(\frac{i}{n}\right)^3+2\left(\frac{i}{n}\right)^2+\left(\frac{i}{n}\right)\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\left(\sum_{i=0}^{n-1}-\left(\frac{i}{n}\right)^3+\sum_{i=0}^{n-1}2\left(\frac{i}{n}\right)^2+\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^4}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} i^3+\frac{2}{n^3}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} i^2+\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} i\right)
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 II

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^4}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} i^3+\frac{2}{n^3}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} i^2+\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} i\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^4}\cdot\frac{(n-1)^2n^2}{4}+\frac{2}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6}+\frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n+1)n}{2}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n^4+\dots}{4n^4}+\frac{4n^3+\dots}{6n^3}+\frac{n^2+\dots}{2n^2}\right)\\
&= -\frac{1}{4}+\frac{4}{6}+\frac{1}{2}\\
&= \frac{11}{12}
\end{aligned}
$$

Der gesuchte Flächeninhalt beträgt $\frac{11}{12}$.

Aufgabe 6 (i)-(iii)

(i)
$$\int \left(23x^4 + x^3 - 2x^2 + 7\right)\, dx = \frac{23}{5}x^5 + \frac{1}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 + 7x$$

(ii)
$$\begin{aligned} \int \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\, dx &= \int x^{-\frac{3}{5}}\, dx \\ &= \frac{5}{2}x^{\frac{2}{5}} \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} \int \cos\left(4x\right)\, dx &= \frac{1}{4}\int 4\cos\left(4x\right)\, dx \\ &= \frac{1}{4}\sin\left(4x\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (iv)

$$
\begin{aligned}
\text{(iv)} \int \left(x^2+1\right) \cdot \sin\left(2x\right)\, dx &= -\frac{1}{2}\left(x^2+1\right) \cdot \cos\left(2x\right) + \int x \cdot \cos\left(2x\right)\, dx \\
&= -\frac{1}{2}\left(x^2+1\right) \cdot \cos\left(2x\right) \\
&\quad + \frac{1}{2} x \cdot \sin\left(2x\right) - \frac{1}{2} \int \sin\left(2x\right)\, dx \\
&= -\frac{1}{2}\left(x^2+1\right) \cdot \cos\left(2x\right) \\
&\quad + \frac{1}{2} x \cdot \sin\left(2x\right) + \frac{1}{4} \cos\left(2x\right)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6 (v)-(vi)

(v)

$$\int x^9 \cdot \ln x \; dx = \frac{1}{10}x^{10} \cdot \ln x - \frac{1}{10}\int x^{10} \cdot \frac{1}{x} \; dx$$
$$= \frac{1}{10}x^{10} \cdot \ln x - \frac{1}{100}x^{10}$$

(vi) Es sei $t = \sqrt[3]{7x+5}$. Dann folgt:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{7}{3}\Big(7x+5\Big)^{-\frac{2}{3}} = \frac{7}{3}t^{-2}$$
$$dx = \frac{3}{7}t^2 \; dt.$$

Aufgabe 6 (vi)

$$
\begin{aligned}
\int 2^{\sqrt[3]{7x+5}}\;dx &= \frac{3}{7}\int 2^t \cdot t^2\;dt \\
&= \frac{3\cdot 2^t\cdot t^2}{7\cdot\ln 2} - \frac{6}{7\cdot \ln 2}\int 2^t\cdot t\;dt \\
&= \frac{3\cdot 2^t\cdot t^2}{7\cdot\ln 2} - \frac{6\cdot 2^t\cdot t}{7\cdot(\ln 2)^2} + \frac{6\cdot 2^t}{7\cdot(\ln 2)^3}
\end{aligned}
$$

Resubstitution ergibt die gesuchte Stammfunktion:

$$
\frac{3\cdot\left(\sqrt[3]{7x+5}\right)^2\cdot 2^{\sqrt[3]{7x+5}}}{7\cdot\ln 2} - \frac{6\cdot\left(\sqrt[3]{7x+5}\right)\cdot 2^{\sqrt[3]{7x+5}}}{7\cdot(\ln 2)^2} + \frac{6\cdot 2^{\sqrt[3]{7x+5}}}{7\cdot(\ln 2)^3}
$$

Aufgabe 7 (i)-(iii)

(i)
$$\begin{aligned}\int \frac{4x+2}{x^2+x}\,dx &= 2\int \frac{2x+1}{x^2+x}\,dx\\ &= 2\ln\left|x^2+x\right|\end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned}\int \tan x\ dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x}\,dx\\ &= -\int \frac{-\sin x}{\cos x}\,dx\\ &= -\ln\left|\cos x\right|\end{aligned}$$

(iii)
$$\int \frac{\arctan x}{x^2+1}\,dx = \frac{1}{2}\Big(\arctan x\Big)^2$$

Aufgabe 7 (iv)-(v)

(iv)
$$\begin{aligned}\int 2\cdot\sin x\cdot\cos x\ dx &= 2\int \sin x\cdot\cos x\ dx\\ &= \left(\sin x\right)^2\end{aligned}$$

(v)
$$\begin{aligned}\int \frac{5x-7}{x^2-x-6}\ dx &= \int \frac{\frac{17}{5}}{x+2}\ dx + \int \frac{\frac{8}{5}}{x-3}\ dx\\ &= \frac{17}{5}\int \frac{1}{x+2}\ dx + \frac{8}{5}\int \frac{1}{x-3}\ dx\\ &= \frac{17}{5}\ln\left|x+2\right| + \frac{8}{5}\ln\left|x-3\right|\end{aligned}$$

Aufgabe 7 (vi)

(vi) $$\int \frac{42}{2x^2+3}\,dx = 42\int \frac{1}{2x^2+3}\,dx = \frac{42}{3}\int \frac{1}{\frac{2}{3}x^2+1}\,dx$$
$$= \frac{42}{3}\int \frac{1}{\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)^2+1}\,dx = \frac{42\cdot\sqrt{3}}{3\cdot\sqrt{2}}\int \frac{1}{t^2+1}\,dt$$
$$= \frac{42\cdot\sqrt{3}}{3\cdot\sqrt{2}}\arctan t = \frac{42\cdot\sqrt{3}}{3\cdot\sqrt{2}}\arctan\left(\sqrt{\frac{2}{3}}x\right)$$

Im Laufe des Verfahrens wurde mit $t=\sqrt{\frac{2}{3}}x$ substituiert. Es gilt:

$$\frac{dt}{dx} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$
$$dx = \sqrt{\frac{3}{2}}\,dt.$$

Aufgabe 8a-b

a) Berechnen der ersten vier Partialsummen:

$$\begin{aligned} s_2 &= -\frac{1}{16} \\ s_3 &= -\frac{5}{64} \\ s_4 &= -\frac{21}{256} \\ s_5 &= -\frac{85}{1024} \end{aligned}$$

b) Es handelt sich um eine geometrische Reihe mit $q = \frac{1}{4}$ (und somit $|q| < 1$); die Reihe konvergiert.

Aufgabe 8c

$$
\begin{aligned}
s_n &= -\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k \\
&= -\left(\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}} - \frac{5}{4}\right) \\
&= -\left(\frac{4}{3} - \frac{4}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - \frac{5}{4}\right) \\
&= \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{1}{12}
\end{aligned}
$$

Als Grenzwert ergibt sich:

$$
\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^n - \frac{1}{12}\right) = -\frac{1}{12}.
$$

Aufgabe 9

(i) Konvergenz, geometrische Reihe mit $|q| = \frac{1}{5} < 1$.

(ii) Divergenz, geometrische Reihe mit $|q| = \frac{3}{2} > 1$.

(iii) Konvergenz, geometrische Reihe mit $|q| = \frac{1}{3} < 1$.

(iv) Divergenz, harmonische Reihe mit $\alpha = 1$.

(v) Konvergenz, harmonische Reihe mit $\alpha = 2$.

(vi) Konvergenz nach dem Leibniz-Kriterium.

Aufgabe 10a

(i) Es liegt Divergenz vor:

$$\lim_{i\to\infty}\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| = \lim_{i\to\infty}\left|\frac{(i+1)!\cdot 5^{-i-1}\cdot (i+1)^2}{i!\cdot 5^{-i}\cdot i^2}\right| = \lim_{i\to\infty}\left|\frac{(i+1)^3}{5i^2}\right| = \infty > 1$$

(ii) Es liegt Konvergenz vor:

$$\lim_{i\to\infty}\left|\frac{a_{i+1}}{a_i}\right| = \lim_{i\to\infty}\left|\frac{6^{i+1}\cdot (i+1)^3\cdot (i+1)!}{(i+2)!\cdot 6^i\cdot i^3}\right| = \lim_{i\to\infty}\left|\frac{6\cdot (i+3)^3}{(i+2)\cdot i^3}\right| = 0 < 1$$

(iii) Es liegt Konvergenz vor:

$$\lim_{i\to\infty}\left(\sqrt[i]{\left(\frac{23}{42}\right)^i\cdot i^5}\right) = \lim_{i\to\infty}\left(\sqrt[i]{\left(\frac{23}{42}\right)^i}\cdot\sqrt[i]{i^5}\right) = \frac{23}{42} < 1$$

Aufgabe 10b I

$$R = \lim_{i\to\infty}\left|\frac{a_i}{a_{i+1}}\right| = \lim_{i\to\infty}\left|\frac{2^i\cdot 5^{-i-1}\cdot i^2}{2^{i+1}\cdot 5^{-i-2}\cdot (i+1)^2}\right|$$

$$= \lim_{i\to\infty}\left|\frac{5\cdot i^2}{2\cdot (i+1)^2}\right| = \frac{5}{2}$$

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{i\to\infty}\sqrt[i]{a_i}} = \frac{1}{\lim\limits_{i\to\infty}\left(\sqrt[i]{2^i\cdot 5^{-i-1}\cdot i^2}\right)}$$

$$= \frac{1}{\lim\limits_{i\to\infty}\left(\sqrt[i]{2^i}\cdot\sqrt[i]{5^{-i}}\cdot\sqrt[i]{5^{-1}}\cdot\sqrt[i]{i^2}\right)} = \frac{5}{2}$$

Der Konvergenzradius ist $R = \frac{5}{2}$.

Aufgabe 10b II

Überprüfen der Grenzen $\frac{5}{2}$ und $-\frac{5}{2}$:

Es gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(2^i \cdot 5^{-i-1} \cdot i^2 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5} \cdot i^2\right) \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(2^i \cdot 5^{-i-1} \cdot i^2 \cdot \left(-\frac{5}{2}\right)^i\right) = \sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5} \cdot i^2 \cdot (-1)^i\right) \qquad (2)$$

Weder bei (1) noch bei (2) handelt es sich um Nullfolgen; es liegt in keinem der Fälle Konvergenz vor.