Mathematik II für Studierende der Informatik (Analysis und Lineare Algebra)

Thomas Andreae, Henrik Bachmann, Rosona Eldred, Malte Moos

Sommersemester 2012
Blatt 7

B: Hausaufgaben zum 7. Juni 2012

4. Die Konzentration eines Medikaments im Blut eines Patienten steigt nach der Einnahme zunächst an, um dann wieder zu fallen: Das Medikament baut sich ab. Die Funktion $f : [0, 24] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(t) = 9t \cdot e^{-\frac{1}{3}t}$$

beschreibt für die ersten 24 Stunden nach der Einnahme die im Blut vorhandene Menge eines Medikaments in Milligramm pro Liter (in Abhängigkeit von der Zeit t).

a) Berechnen Sie die maximale Konzentration im Blut und geben Sie an, zu welchem Zeitpunkt diese erreicht wird.

b) Berechnen Sie die mittlere Konzentration des Medikaments in den ersten 12 Stunden nach der Einnahme.

c) Skizzieren Sie den Graphen von f, wobei Sie auch den Punkt des stärksten Abbaus des Medikaments berechnen und einzeichnen.

a) $f'(t) = 9e^{-\frac{1}{3}t} - 3te^{-\frac{1}{3}t} = 0 \iff 3e^{-\frac{1}{3}t} = te^{-\frac{1}{3}t} \iff$
$t = 3$ (wegen $e^{-\frac{1}{3}t} \neq 0$).

$$f''(t) = -3e^{-\frac{1}{3}t} - 3e^{-\frac{1}{3}t} + te^{-\frac{1}{3}t}$$
$$= (t-6)e^{-\frac{1}{3}t}$$

$\Rightarrow f''(3) < 0$

Also liegt bei $t = 3$ ein Maximum vor, d.h., die maximale Konzentration wird nach 3 Stunden erreicht, sie beträgt (in Milligramm pro Liter)

$f(3) = 27 \cdot e^{-1} \approx 9.93$.

b) Die gesuchte mittlere Konzentration ist gleich

$$\frac{1}{12}\int_0^{12} 9te^{-\frac{1}{3}t}\,dt = \frac{3}{4}\int_0^{12} te^{-\frac{1}{3}t}\,dt.$$

$$\int t e^{-\frac{1}{3}t}\,dt = t\cdot(-3)e^{-\frac{1}{3}t} - \int -3e^{-\frac{1}{3}t}\,dt =$$

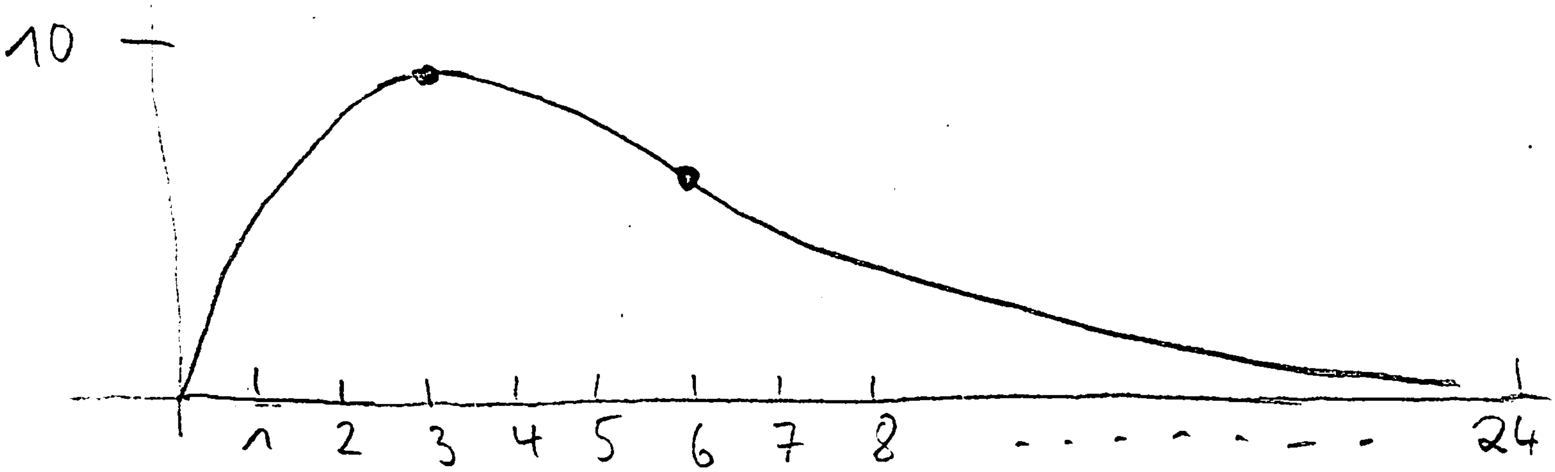
$$-3te^{-\frac{1}{3}t} + 3\cdot(-3)e^{-\frac{1}{3}t} = (-3t-9)e^{-\frac{1}{3}t}.$$

Als Ergebnis erhält man $\frac{3}{4}\left[(-3t-9)e^{-\frac{1}{3}t}\right]_0^{12} =$

$\frac{3}{4}\left(-45e^{-4}+9\right) \approx \underline{\underline{6.13}}$ [Milligramm pro Liter].

c) Zur Ermittlung des Wendepunktes („Punkt stärksten Abbaus") setzen wir $f''(t)=0$, d.h. $(t-6)e^{-\frac{1}{3}t}=0$. Es folgt, dass dieser Punkt bei $t=6$ liegt. (Man beachte: $f''(t)<0$, falls $t<6$ und $f''(t)>0$, falls $t>6$.)

Es gilt $f(6) = 54\cdot e^{-2} \approx 7.3$; Skizze (grob):



Zu guter Letzt einige Klausuraufgaben aus dem Jahr 2011.

5. a) Es sei $h(x) = x^{\sin(x)}$ (für $x > 0$). Berechnen Sie $h'(x)$.

b) Berechnen Sie $\int \cos\left(\sqrt{\frac{x}{3}+1}\right)\,dx$.

c) Berechnen Sie $\int \frac{1}{x^2-4}\,dx$.

d) Berechnen Sie mittels Partialbruchzerlegung: $\int \frac{3x+2}{x^2-10x+25}\,dx$.

a) $h(x) = e^{\ln(x^{\sin(x)})} = e^{\sin(x)\cdot\ln(x)} \Rightarrow$

$$h'(x) = e^{\sin(x)\cdot\ln(x)}\cdot\left(\cos(x)\cdot\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x}\right)$$
$$= x^{\sin(x)}\cdot\left(\cos(x)\ln(x) + \frac{\sin(x)}{x}\right)$$

b) $t = \sqrt{\frac{x}{3}+1} \Rightarrow t^2 = \frac{x}{3}+1 \Rightarrow x = 3t^2-3 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = 6t$

$\Rightarrow dx = 6t\,dt$

$$\Rightarrow \int \cos\left(\sqrt{\tfrac{x}{3}+1}\right)dx = \int 6t\cos t\,dt = 6\int t\cos t\,dt =$$
$$6\left(t\sin t - \int \sin t\,dt\right) = 6(t\sin t + \cos t) =$$
$$6\left(\sqrt{\tfrac{x}{3}+1}\,\sin\left(\sqrt{\tfrac{x}{3}+1}\right) + \cos\left(\sqrt{\tfrac{x}{3}+1}\right)\right).$$

c) $\frac{1}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} = \frac{(A+B)x+B-A}{x^2-1} \Rightarrow$

$A+B=0,\ B-A=1 \Rightarrow B=1+A \Rightarrow A+1+A=0$

$\Rightarrow A=-\frac{1}{2},\ B=\frac{1}{2} \Rightarrow \int \frac{1}{x^2-1}dx =$

$-\frac{1}{2}\int\frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{2}\int\frac{1}{x-1}dx = -\frac{1}{2}\ln|x+1| + \frac{1}{2}\ln|x-1|$

d) $\frac{3x+2}{x^2-10x+25} = \frac{3x+2}{(x-5)^2} = \frac{A}{x-5} + \frac{B}{(x-5)^2} =$

$\frac{Ax-5A+B}{(x-5)^2} \Rightarrow A=3,\ -5A+B=2 \Rightarrow B=17$

$\Rightarrow \int\frac{3x+2}{x^2-10x+25}dx = 3\int\frac{1}{x-5}dx + 17\int\frac{1}{(x-5)^2}dx =$

$\underline{\underline{3\ln|x-5| - 17(x-5)^{-1}}}$