Mathematik I für Studierende der Informatik (Diskrete Mathematik)

Thomas Andreae, Christoph Stephan

Wintersemester 2011/12
Blatt 10

A: Präsenzaufgaben am 22./23. Dezember 2011

1. Es sei $G = \{i, r, s, x, y, z\}$ die Dreiecksgruppe.

a) Wir betrachten die folgenden Teilmengen von G:

$$H_1 = \{x, y, z\}, \quad H_2 = \{i, x, y\} \quad \text{und} \quad H_3 = \{i, x\}.$$

Handelt es sich um Untergruppen von G?

b) Es sei $H = < s >$ die von s erzeugte zyklische Untergruppe. Geben Sie die Elemente von H an.

c) Geben Sie die Elemente der folgenden zyklischen Untergruppen von G an: $< y >$, $< r >$ und $< i >$.

2. Es sei $G = \mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\} = \{1, 2, \ldots, 12\}$ mit Multiplikation modulo 13. Die Untergruppe H sei durch $H = < 5 >$ gegeben. Man gebe die Elemente von H an und bestimme die Linksnebenklassen von H.

3. Wir betrachten die additive Gruppe $(\mathbb{Z}, +)$; mit anderen Worten: Es sei $G = \mathbb{Z}$ und die betrachtete Operation sei die gewöhnliche Addition. H_3 sei die Menge der Vielfachen von 3, d.h.,

$$H_3 = \{\ldots,\ -9,\ -6,\ -3,\ 0,\ 3,\ 6,\ 9,\ \ldots\}.$$

a) Zeigen Sie, dass H eine Untergruppe von G ist.

b) Geben Sie die Nebenklassen von H an.

c) Geben Sie unendlich viele weitere Untergruppen von $(\mathbb{Z}, +)$ an und beschreiben Sie deren Nebenklassen.

Zusatzfrage: Weshalb ist in b) und c) von *Nebenklassen* die Rede und nicht von *Linksnebenklassen*? Ist das „erlaubt“? War es in Aufgabe 2 unbedingt nötig, von *Linksnebenklassen* zu sprechen?

B: Hausaufgaben zum 12./13. Januar 2012

1. Wir betrachten die Gruppe $G = \mathbb{Z}_{13} \setminus \{0\} = \{1, 2, \ldots, 12\}$ mit Multiplikation modulo 13.

a) Welche der folgenden Mengen sind Untergruppen von G?

$$\begin{aligned} H_1 &= \{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12\}, \\ H_2 &= \{1,\ 2,\ 4,\ 8\}, \\ H_3 &= \{1,\ 12\}. \end{aligned}$$

b) H sei die durch $H = < 3 >$ gegebene Untergruppe von G. Man gebe die Elemente von H an und bestimme die Nebenklassen von H.

2. a) G sei die symmetrische Gruppe S_3 und $H = < (1, 2) >$ sei die von der Transposition $(1, 2)$ erzeugte zyklische Untergruppe von G. Man gebe sowohl die Zerlegung von G in Linksnebenklassen von H als auch die Zerlegung von G in Rechtsnebenklassen von H an.

b) G sei die symmetrische Gruppe S_7; H sei eine Untergruppe von G mit 360 Elementen. Man gebe eine kurze Begründung, weshalb für alle $g \in G$ gilt: Die Linksnebenklasse gH ist gleich der Rechtsnebenklasse Hg.

c) $G = E(\mathbb{Z}_{42})$ sei die Einheitengruppe des Rings $\mathbb{Z}_{42}$. Man gebe die Elemente von G an! Außerdem gebe man eine kurze Begründung, weshalb für alle Untergruppen H von G und alle $g \in G$ gilt: Die Linksnebenklasse gH ist gleich der Rechtsnebenklasse Hg.

3. a) Man bilde die Summe und das Produkt der folgenden Polynome aus $\mathbb{Q}[x]$:

$$4x^2 - x + 2 \quad \text{und} \quad 2x^3 + x^2 - 3x + 2.$$

b) Es seien $a(x)$ und $b(x)$ Polynome aus $\mathbb{Q}[x]$ mit

$$\begin{aligned} a(x) &= 2x^8 + x^7 + 3x^6 + 6x^5 + 3x^4 + 7x^3 + 8x^2 + x + 2 \\ b(x) &= x^8 + x^7 + 6x^6 + 5x^5 - x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 2x - 2. \end{aligned}$$

Wie lautet der Koeffizient des Produkts $a(x) \cdot b(x)$, der zu x^7 gehört?

c) Man berechne Summe und Produkt der folgenden Polynome $a(x), b(x) \in \mathbb{Z}_5[x]$:

$$\begin{aligned} a(x) &= 4x^3 + 2x^2 + 3x + 2 \\ b(x) &= 3x^4 + x^2 + 3. \end{aligned}$$

Dabei gebe man die Koeffizienten der berechneten Polynome wie üblich als Elemente aus $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ an.

4. a) Es seien $a(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + x^2 + 4x + 2$ und $b(x) = x^2 + 4x + 3$ Polynome aus $\mathbb{Q}[x]$. Man bestimme Quotient und Rest, wenn $a(x)$ durch $b(x)$ geteilt wird.

b) Gegeben seien die folgenden beiden Polynome aus $\mathbb{Q}[x]$:

$$\begin{aligned} a(x) &= 6x^5 + 7x^4 - 7x^3 - 22x^2 - 25x - 15 \\ b(x) &= 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x - 9. \end{aligned}$$

Man bestimmte den normierten größten gemeinsamen Teiler von $a(x)$ und $b(x)$ mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus für Polynome.