-L.39-

Mathematik I für Studierende der Informatik (Diskrete Mathematik)

Thomas Andreae, Christoph Stephan

Wintersemester 2011/12
Blatt 12

B: Hausaufgaben zum 26./27. Januar 2012

1. Gegeben seien die Punkte $A = (5, 1, 2)$, $B = (-3, 1, 4)$ und $C = (2, -1, 3)$.
   a) Geben Sie die Gerade, die durch B und C geht, in Parameterdarstellung an.
   b) Geben Sie zwei verschiedene Parametergleichungen für die Ebene an, die durch A, B und C geht:
      (i) mit $\overrightarrow{0A}$ als Stützvektor,
      (ii) mit einem Stützvektor, der von $\overrightarrow{0A}$, $\overrightarrow{0B}$ und $\overrightarrow{0C}$ verschieden ist.
   c) Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung für die Ebene, die durch A, B und C geht, und berechnen Sie die Schnittpunkte dieser Ebene mit den drei Koordinatenachsen

   Hinweis: Es ist möglich, dass die Ebene nicht mit jeder Koordinatenachse einen Schnittpunkt besitzt; in diesem Fall ist nachzuweisen, dass in der Tat kein Schnittpunkt vorhanden ist.

Lösung zu Aufgabe 1:

a) $\overrightarrow{BC} = (2, -1, 3) - (-3, 1, 4) = (5, -2, -1)$. Also: $x = (-3, 1, 4) + t(5, -2, -1)$. $(t \in \mathbb{R})$

b) $\overrightarrow{AB} = (-3, 1, 4) - (5, 1, 2) = (-8, 0, 2)$, $\overrightarrow{AC} = (2, -1, 3) - (5, 1, 2) = (-3, -2, 1)$. Also:

$$(1) \quad x = (5, 1, 2) + s(-8, 0, 2) + t(-3, -2, 1). \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

Für $s = 1, t = 1$ erhält man den Punkt $D = (-6, -1, 5)$, der ebenfalls auf der Ebene liegt. Es gilt: $\overrightarrow{DA} = (5, 1, 2) - (-6, -1, 5) = (11, 2, -3)$, $\overrightarrow{DB} = (-3, 1, 4) - (-6, -1, 5) = (3, 2, -1)$. Also:

$$(2) \quad x = (-6, -1, 5) + s(11, 2, -3) + t(3, 2, -1). \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

(Bemerkung: Man muss darauf achten, dass die beiden Spannvektoren nicht parallel sind.)

c) Aus (1) erhält man

$$x = (x_1, x_2, x_3) = (5, 1, 2) + s(-8, 0, 2) + t(-3, -2, 1),$$

was gleichbedeutend ist mit

$$\begin{aligned} x_1 &= 5 - 8s - 3t \\ x_2 &= 1 - 2t \\ x_3 &= 2 + 2s + t \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung erhält man

$$t = -\frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}.$$

Setzt man dies in die dritte Gleichung ein, so folgt durch Auflösen nach s:

$$s = \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - \frac{5}{4}.$$

Einsetzen von s und t in die erste Gleichung ergibt schließlich folgende Koordinatengleichung der Ebene:

$$(3) \quad x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 4x_3 - \frac{27}{2} = 0.$$

~~Schnittpunkt mit der x_1-Achse:~~
~~Wir setzen~~ $x_2 = x_3 = 0$. ~~Aus (3)~~ folgt $x_1 = \frac{27}{2}$, d.h. die Ebene schneidet die x_1-Achse im ~~Punkt~~ $(\frac{27}{2}, 0, 0)$.

Schnittpunkt mit der x_2-Achse:
Wir setzen $x_1 = x_3 = 0$. Aus (3) folgt $x_2 = 27$, d.h. die Ebene schneidet die x_2-Achse im Punkt $(0, 27, 0)$.

Schnittpunkt mit der x_3-Achse:
Wir setzen $x_1 = x_2 = 0$. Aus (3) folgt $x_3 = \frac{27}{8}$, d.h. die Ebene schneidet die x_3-Achse im Punkt $(0, 0, \frac{27}{8})$.

4. a) Gegeben seien die Vektoren $u = (1,2,3)$ und $v = (-4,-7,5)$ des $\mathbb{R}^3$. Bestimmen Sie die Menge U aller Vektoren $x = (x_1, x_2, x_3)$ des $\mathbb{R}^3$, für die $x \perp u$ sowie $x \perp v$ gilt. Ist U eine Gerade? Ist U eine Ebene? Falls eines von beiden zutrifft, so gebe man U in Parameterdarstellung an!
   b) Nun sei nur ein einziger Vektor $u = (2,4,1) \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Bestimmen Sie die Menge U aller Vektoren $x = (x_1, x_2, x_3)$ des $\mathbb{R}^3$, für die $x \perp u$ gilt. Ist U eine Gerade? Ist U eine Ebene? Falls eines von beiden zutrifft, so gebe man U in Parameterdarstellung an!
   c) Gegeben seien die Vektoren $u = (1,2,-1,2)$ und $v = (1,1,4,2)$ des $\mathbb{R}^4$. Bestimmen Sie die Menge U aller Vektoren $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ des $\mathbb{R}^4$, für die $x \perp u$ sowie $x \perp v$ gilt.
   d) Für u und v wie in c): Berechnen Sie die Längen $|u|$ und $|v|$.

a) $x \perp u$ gilt genau dann, wenn $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$,
$x \perp v$ " " " " $-4x_1 - 7x_2 + 5x_3 = 0$.

Da diejenigen x zu bestimmen sind, für die sowohl $x \perp u$ als auch $x \perp v$ gilt, ist das Gleichungssystem zu lösen, das aus den beiden Gleichungen besteht:

$$
\begin{array}{ccc|c}
1 & 2 & 3 & 0 \\
-4 & -7 & 5 & 0 \\
\hline
1 & 2 & 3 & 0 \\
0 & 1 & 17 & 0 \\
\hline
\end{array}
\quad \text{II} + 4\text{I}
$$

Lösung: $x_3 = t$, $x_2 = -17t$, $x_1 = -2x_2 - 3x_3 = 34t - 3t = 31t$, $t \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow U$ ist eine Gerade:

Die Vektoren der Ursprungsgeraden $x = t(31, -17, 1)$ $(t \in \mathbb{R})$ sind genau die Vektoren des $\mathbb{R}^3$, die senkrecht auf u und v stehen.

[Die Parameterdarstellung ist damit bereits gefunden: Der Stützvektor ist der Nullvektor.]

b) $x \perp u$ gilt genau dann, wenn

$2x_1 + 4x_2 + x_3 = 0.$

Auch hier ist ein Gleichungssystem zu lösen, aber nur ein besonders einfaches, das nur aus einer Gleichung besteht:

$$\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 2 & \frac{1}{2} & 0 \end{array} \quad \tfrac{1}{2}\mathrm{I}$$

Lösung: $x_3 = t$, $x_2 = s$, $x_1 = -\frac{1}{2}t - 2s$, $s, t \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow$ U ist eine Ebene im $\mathbb{R}^3$, genauer eine Ursprungsebene.

Parameterdarstellung von U:

$$x = (x_1, x_2, x_3) = (-\tfrac{1}{2}t - 2s, s, t)$$

$$= s(-2, 1, 0) + t(-\tfrac{1}{2}, 0, 1) \text{ für } s, t \in \mathbb{R}.$$

c)

$$\begin{array}{cccc|c}
1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\
1 & 1 & 4 & 2 & 0 \\
\hline
1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\
0 & -1 & 5 & 0 & 0 \\
\hline
1 & 2 & -1 & 2 & 0 \\
0 & 1 & -5 & 0 & 0
\end{array}$$

Lösung: $x_4 = t$, $x_3 = s$, $x_2 = 5s$,

$x_1 = -2x_2 + x_3 - 2x_4 = -10s + s - 2t = -9s - 2t$, bzw.

$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (-9s - 2t, 5s, s, t) =$

$s(-9, 5, 1, 0) + t(-2, 0, 0, 1)$ für $s, t \in \mathbb{R}$.

Es gilt $U = \{s(-9,5,1,0) + t(-2,0,0,1) \mid s, t \in \mathbb{R}\}$.

Bei U handelt es sich um eine <u>Ursprungsebene im $\mathbb{R}^4$.</u>

d) $|u| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-1)^2 + 2^2} = \sqrt{10}$,

$|v| = \sqrt{1 + 1 + 16 + 4} = \sqrt{22}$.