Mathematatik I für Studierende der Informatik (Diskrete Mathematik)

Thomas Andreae, Christoph Stephan

Wintersemester 2011/12
Blatt 2

B: Hausaufgaben zum 3./4. November 2011

1. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die folgende Gleichung:

$$A(n): \quad \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n\cdot(n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

a) Schreiben Sie die Gleichung $A(n)$ unter Verwendung des Summenzeichens auf.
b) Prüfen Sie, ob $A(n)$ für $n = 1, 2, 3, 4$ richtig ist.
c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

a) $A(n): \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$

b) $n=1: \sum_{i=1}^{1} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{2}$

$n=2: \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{2}{3} = 1 - \frac{1}{3}$

$n=3: \sum_{i=1}^{3} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} = \frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{4}$

$n=4: \sum_{i=1}^{4} \frac{1}{i(i+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} = \frac{48}{60} = \frac{4}{5} = 1 - \frac{1}{5}$

c) (I) Induktionsanfang: siehe b).

(II) Induktionsschluss: Wir nehmen an, dass $A(n)$ für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt (IA)[1] und zeigen $A(n+1)$:

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \overset{IA}{=} 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= 1 - \frac{n+2}{(n+1)(n+2)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{n+2-1}{(n+1)(n+2)} = 1 - \frac{1}{n+2}. \square$$

3. a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 7$ die folgende Ungleichung gilt:

$$13n < 2^n.$$

b) Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist die folgende Ungleichung richtig?

$$n^2 < 2^n$$

Stellen Sie eine Vermutung auf und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Vermutung durch vollständige Induktion.

a) (I) Induktionsanfang: Für $n=7$ gilt die Ungleichung, da $13 \cdot 7 = 91$ und $2^7 = 128$.

(II) Induktionsschritt: Wir nehmen an (IA)[1], dass für ein $n \geq 7$ die Ungleichung $13n < 2^n$ richtig ist, und zeigen, dass daraus $13(n+1) < 2^{n+1}$ folgt. Es gilt

---

1) IA soll Induktionsannahme bedeuten

$13(n+1) = 13n + 13 \overset{IA}{<} 2^n + 13 \overset{(1)}{<} 2^n + 2^n = 2^{n+1}$,

wobei sich die Ungleichung (1) wie folgt ergibt: Wegen $n \geq 7$ gilt $13 < 2^7 \leq 2^n$, woraus man (1) durch Addition von 2^n erhält. Damit ist $13(n+1) < 2^{n+1}$ gezeigt.

b) Für $n = 1$ gilt die Ungleichung wegen $1^2 < 2^1$; für $n = 2$ und 3 gilt die Ungleichung nicht, da $n^2 = 2^n$ für $n = 2$ gilt sowie $n^2 = 9 > 8 = 2^n$ für $n = 3$. Für $n = 4$ gilt $n^2 = 16 = 2^n$, d. h., die Ungleichung gilt auch für $n = 4$ nicht. Wir zeigen durch vollständige Induktion, dass $n^2 < 2^n$ für alle $n \geq 5$ richtig ist.

(I) <u>Induktionsanfang</u>: Für $n = 5$ gilt $n^2 < 2^n$, da $n^2 = 25$ und $2^n = 32$.

(II) <u>Induktionsschluss</u>: Für ein $n \geq 5$ gelte $n^2 < 2^n$ (Induktionsannahme (IA)). Wir zeigen, dass dann auch $(n+1)^2 < 2^{n+1}$ gilt. Dies ergibt sich wie folgt:

$$2^{n+1} = 2^n \cdot 2 \overset{IA}{>} n^2 \cdot 2 = n^2 + n^2 \overset{(*)}{>} n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2.$$

An der Stelle (∗) wurde benutzt, dass wegen $n \geq 5$ gilt: $n^2 = n \cdot n > 4n = 2n + 2n > 2n + 1$. □