Hausaufgaben zum 10./11. November 2011

Elena Noll, Sven-Hendrik Haase, Arne Feil

10. November 2011

1. a) (i) $177 \not\equiv 18(mod 5)$ da $5 \nmid 159$
   (ii) $177 \equiv 18(mod 5)$ da $5 \mid 195$
   (iii) $-89 \not\equiv -12(mod 6)$ da $6 \nmid -77$
   (iv) $-123 \equiv 33(mod 13)$ da $13 \mid -156$
   (v) $39 \equiv -1(mod 40)$ da $40 \mid 40$
   (vi) $77 \equiv 0(mod 11)$ da $11 \mid 77$
   (vii) $2^{51} \not\equiv 51(mod 2)$ da $2 \nmid 2^{51} - 51$

   b) $ggT(7293, 378)$
   $7293 = 19 \cdot 378 + 111$
   $378 = 3 \cdot 111 + 45$
   $111 = 2 \cdot 45 + 21$
   $45 = 2 \cdot 21 + 3$
   $21 = 7 \cdot 3 + 0$

   $ggT(7293, 378) = 3$

   c) $\lceil\sqrt{7}\rceil = 3 \quad \lfloor\sqrt{7}\rfloor = 2 \quad \lceil 7.1\rceil = 8 \quad \lfloor 7.1\rfloor = 7$
   $\lceil -7.1\rceil = -7 \quad \lfloor -7.1\rfloor = -8 \quad \lceil -7\rceil = -7\lfloor -7\rfloor = -7$

2. (2) Aus $b_1 \mid a_1$ und $b_2 \mid a_2$ folgt $b_1 \cdot b_2 \mid a_1 \cdot a_2$

$$\begin{aligned} \text{I} \quad & a_1 = b_1 \cdot c_1 \\ \text{II} \quad & a_2 = b_2 \cdot c_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{I*II} \quad & a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2 \cdot c_1 \cdot c_2 \quad c_1 \cdot c_2 = c_3 \\ & a_1 \cdot a_2 = b_1 \cdot b_2 \cdot c_3 \quad \square \end{aligned}$$

(3) Aus $c \cdot b \mid c \cdot a$ (für $c \neq 0$) folgt $b \cdot a$
$c \cdot a = c \cdot b \cdot c \quad | \div c$
$a = b \cdot c \quad \square$

(4) Aus $b \mid a_1$ und $b \mid a_2$ folgt $b \mid c_1 \cdot a_1 + c_2 \cdot a_2$ für beliebige ganze Zahlen c_1 und c_2.

$$\begin{aligned}
\text{I} \quad & a_1 = b \cdot d_1 \quad | \cdot c_1 \\
& a_1 \cdot c_1 = b \cdot d_1 \cdot c_1 \\
\text{II} \quad & a_2 = b \cdot d_2 \quad | \cdot c_2 \\
& a_2 \cdot c_2 = b \cdot d_2 \cdot c_2 \\
\text{I+II} \quad & a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2 = b \cdot d_1 \cdot c_1 + b \cdot d_2 \cdot c_2 \\
& a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2 = b(c_1 \cdot d_1 + c_2 \cdot d_2) \quad | c_1 \cdot d_1 + c_2 \cdot d_2 = c_3 \\
& a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2 = b \cdot c_3 \quad \square
\end{aligned}$$

3. a) $3 \mid (n^3 + 2n)$
Induktionsannahme: $n^3 + 2n = 3 \cdot c$
Induktionsanfang: $n = 0 \quad 0^3 + 2 \cdot 0 = 3 \cdot c$ für $c = 0$
Induktionsschritt: $(n+1)^3 + 2(n+1) = n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 = n^3 + 2n + 3n^2 + 3n + 3$
Durch unsere Induktionannahme wissen wir, dass $3 \mid n^3 + 2n$ und es ist klar das $3 \mid 3n^2 + 3n + 3$.
Daraus folgt: $3 \mid (n+1)^3 + 2(n+1) \quad \square$

b) Ein Schachbrett der Größe $2^1 \times 2^1$ hat vier Felder der Größe 1×1. Überdeckt man dieses Schachbrett mit einem L-Stück, welches drei Felder der Größe 1×1 hat, so bleibt ein Feld frei (Induktionsanfang).
Daraus folgt (Induktionsannahme): $2^n \times 2^n = (2^n \times 2^n - 1) + 1$ Die Klammern dienen nur der Verdeutlichung.
Induktionsschritt: $2^{n+1} \times 2^{n+1} = 2 \cdot 2^n \times 2 \cdot 2^n$
Durch verwenden der Induktionsannahme folgt:
$2 \cdot 2^n \times 2 \cdot 2^n - 1 + 1 = 2^{n+1} \times 2^{n+1} - 1 + 1 \quad \square$

4. a) Angenommen, für $n, m, k, l \in \mathbb{Q}$ gelte $n, m \neq k, l$ und $g(n, m) = g(k, l)$, dann wäre g nicht injektiv.

   I $nm^2 = kl^2$

   II $nm^2 - 3n = kl^2 - 3k$

   II-I $3n = 3k$
   $n = k$

   III $(n^2 - 2)m = (k^2 - 2)l \quad n = k$
   $(k^2 - 2)m = (k^2 - 2)l$
   $m = l$

   Daraus folgt $n, m = k, l$. Das steht im Widerspruch zur Annahme. g ist also injektiv. $\square$

   b) Annahme: h ist surjektiv. D.h. es gibt $z \in \mathbb{Z}$ für das gilt $h(z) = (x, x)$ mit $x \in \mathbb{Z}$
   $x = 0$
   $z + 2 = 0 \quad$ und $z - 1 = 0$
   $z = -2 \quad$ und $z = 1$ Widerspruch zur Annahme $\square$.