Mathematik II für Studierende der Informatik (Analysis und Lineare Algebra)

Th. Andreae, N.N.

Sommersemester 2012
Blatt 1

A: Präsenzaufgaben am 5. April 2012

1. Bestimmen Sie diejenigen $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, die die Ungleichung

$$\frac{3}{x+1} \leq 2$$

erfüllen. Mit L sei die Menge dieser x bezeichnet. Geben Sie L in Intervallschreibweise an.

Hinweis: Gehen Sie ähnlich vor wie im Beispiel auf Seite 7 des Skripts.

2. Bestimmen Sie diejenigen $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung $|3x+1| < 3$ erfüllen. Geben Sie das Ergebnis in Intervallschreibweise an.

Hinweis: Unterscheiden Sie die Fälle $x \geq -\frac{1}{3}$ und $x < -\frac{1}{3}$.

3. Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$. Es sei $a = 0$.

a) Zeigen Sie durch direktes Zurückführen auf die Definition der Konvergenz (Skript, Seite 9) dass $(a_n) \to a$ gilt.

b) Man gebe zu $\varepsilon = \frac{1}{3}$, $\varepsilon = \frac{1}{10}$ sowie $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ ein jeweils möglichst kleines $N \in \mathbb{N}$ an, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt.

4. Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_n = \frac{2n-3}{n+1}$. Es sei $a = 2$.

a) Berechnen Sie zunächst $|a_n - a|$, d.h. den Abstand des Folgenglieds a_n von $a = 2$.

b) Zeigen Sie sodann durch direktes Zurückführen auf die Definition der Konvergenz (Skript, Seite 9), dass $(a_n) \to a$ gilt.

5. Einer Ihrer Kommilitonen behauptet, dass die Definition der Konvergenz wie folgt lautet: Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen *konvergiert gegen eine reelle Zahl* a, wenn es eine reelle Zahl $\varepsilon > 0$ und ein $N \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt. Was halten Sie von dieser Art, die Definition der Konvergenz wiederzugeben?

B: Hausaufgaben zum 12. April 2012

1. Bestimmen Sie diejenigen $x \in \mathbb{R} \setminus \{-5\}$, die die Ungleichung

$$\frac{2}{x+5} \geq 3$$

erfüllen. Mit L sei die Menge dieser x bezeichnet. Geben Sie L in Intervallschreibweise an.

2. Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die

$$|3x-4| \geq 2$$

gilt. Geben Sie das Ergebnis in Intervallschreibweise an.

3. Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_n = \frac{3n+2}{n+4}$. Es sei $a = 3$.

a) Berechnen Sie zunächst $|a_n - a|$, d.h. den Abstand des Folgenglieds a_n von $a = 3$.

b) Zeigen Sie sodann durch direktes Zurückführen auf die Definition der Konvergenz (Skript, Seite 9), dass $(a_n) \to a$ gilt.

c) Man gebe zu $\varepsilon = \frac{1}{5}$, $\varepsilon = \frac{1}{100}$ sowie $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ ein jeweils möglichst kleines $N \in \mathbb{N}$ an, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt.

4. Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1;$$
$$a_{n+1} = \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + 1.$$

Weisen Sie die Konvergenz der Folge mit Hilfe des Satzes über monotone, beschränkte Folgen nach.

Hinweis: Man beginne mit dem Nachweis, dass (a_n) beschränkt ist. Man zeige die Beschränktheit, indem man durch vollständige Induktion beweist, dass $1 \leq a_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zum Nachweis der Monotonie zeige man anschließend $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.