Mathematik II für Studierende der Informatik
(Analysis und Lineare Algebra)
Steven Köhler

Sommersemester 2012
Aufgaben zur Vorbereitung der Bonusklausur am 02.07.2012

1. Differenziere die folgenden Funktionen:

(i) $f(x) = 3x^7 + 2x^6 - 4x^3 + x - 1$

(ii) $f(x) = \left(x^5 - x^3 + x\right)^3$

(iii) $f(x) = \left(2x^2 - 1\right) \cdot \sqrt[3]{2x^2 + 1}$

(iv) $f(x) = \sqrt{\sin\left(x^3\right)} \cdot \ln y$

(v) $f(x) = 2^{x^{-2} - x + 1}$

(vi) $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

2. Differenziere die folgenden Funktionen:

(i) $f(x) = \cos\left(\ln\left(\sqrt{3x \cdot \sin x}\right)\right)$

(ii) $f(x) = e^x \cdot \sqrt{2x} \cdot \cos x$

(iii) $f(x) = (\sin x)^{x^2 + 1}$

(iv) $f(x) = \dfrac{\tan x}{e^x}$

(v) $f(x) = \cos\left(3x^2\right) \cdot \ln\left(\sqrt{\sin\left(2x^3\right)}\right)$

(vi) $f(x) = 2^{2^x}$

3. Bestimme die Extrem- und Wendepunkte der Funktion $f(x) = e^x \cdot x^2$.

4. Zeige mithilfe der Definition der Differenzierbarkeit, dass die Funktion $f(x) = |2x - 4|$ an der Stelle $x_0 = 2$ nicht differenzierbar ist.

5. Bestimme mithilfe einer Untersumme die Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = -x^3 + 2x^2 + x$, der x-Achse sowie den beiden Geraden $x = 0$ und $x = 1$ eingeschlossen wird.

6. Berechne die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int \left(23x^4 + x^3 - 2x^2 + 7\right)\, dx$

(ii) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\, dx$

(iii) $\displaystyle\int \cos(4x)\, dx$

(iv) $\displaystyle\int \left(x^2 + 1\right) \cdot \sin(2x)\, dx$

(v) $\displaystyle\int x^9 \cdot \ln x\, dx$

(vi) $\displaystyle\int 2^{\sqrt[3]{7x+5}}\, dx$

7. Berechne die folgenden Integrale:

(i) $\displaystyle\int \frac{4x + 2}{x^2 + x}\, dx$

(ii) $\displaystyle\int \tan x\, dx$

(iii) $\displaystyle\int \frac{\arctan x}{x^2 + 1}\, dx$

(iv) $\displaystyle\int 2 \cdot \sin x \cdot \cos x\, dx$

(v) $\displaystyle\int \frac{5x - 7}{x^2 - x - 6}\, dx$

(vi) $\displaystyle\int \frac{42}{2x^2 + 3}\, dx$

8. Gegeben sei die folgende Reihe: $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{-4^k}\right)$.

a) Bestimme die ersten 4 Partialsummen dieser Reihe.

b) Entscheide, ob Konvergenz oder Divergenz vorliegt. Begründe deine Antwort.

c) Im Falle der Konvergenz: Gib den Grenzwert der Reihe an.

9. Entscheide, ob für die folgenden Reihen Konvergenz oder Divergenz vorliegt:

(i)	$\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{5^{k+1}}\right)$	(iv)	$\displaystyle\sum_{i=3}^{\infty}\left(\frac{5}{2i}\right)$
(ii)	$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^{k}$	(v)	$\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{42}{3}j^{-2}\right)$
(iii)	$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^k}{3}\right)^{k}$	(vi)	$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^{k+1}}{k}\right)$

10. a) Entscheide mithilfe der Limes-Version des Wurzel- oder des Quotientenkriteriums, ob die folgenden Reihen konvergieren.

(i) $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} i! \cdot 5^{-i} \cdot i^2$ (ii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{6^i \cdot i^3}{(i+1)!}$ (iii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{23}{42}\right)^{i} \cdot i^5$

b) Bestimme diejenigen $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty} 2^i \cdot 5^{-i-1} \cdot i^2 \cdot x^i$ konvergiert:

(i) mit der Limes-Version des Quotientenkriteriums;

(ii) mit der Limes-Version des Wurzelkriteriums.