Hinreichende Bedingungen bei Extremwertaufgaben mit Nebenbedingungen

Wir betrachten hier in erster Linie den Fall $n = 2$ („zwei Variablen") und $m = 1$ („eine Nebenbedingung") und gehen erst am Ende des Abschnitts kurz auf den allgemeinen Fall ein.

Für $D \subseteq \mathbb{R}^2$ und die Zielfunktion $f : D \to \mathbb{R}$ sollen die lokalen Extrema unter der Nebenbedingung

$$g(x_1, x_2) = 0 \qquad (*)$$

bestimmt werden. Es sollen die Voraussetzungen zur Anwendung des Lagrange-Verfahrens vorliegen (vgl. Satz 6). Dann geht man bekanntlich wie folgt vor:

1) Man stellt die *Lagrange-Funktion* auf:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = f(x_1, x_2) + \lambda g(x_1, x_2).$$

2) Man bildet die partiellen Ableitungen von L und setzt diese gleich Null, wodurch man das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1}(x_1, x_2, \lambda) &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2}(x_1, x_2, \lambda) &= 0 \qquad (**) \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x_1, x_2, \lambda) &= 0 \end{aligned}$$

erhält. Ist $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \lambda^{(0)}\right)$ eine Lösung des Gleichungssystem (**), so ist $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right)$ ein möglicher Kandidat für ein lokales Extremum von f unter der Nebenbedingung (*) („kritische Stelle" bzw. „stationäre Stelle").

Man bestimmt also die kritischen Stellen *und muss nun noch herausfinden, ob ein lokales Minimum, ein lokales Maximum oder überhaupt kein Extremum von f unter der Nebenbedingung (*) vorliegt.*

Für Aufgaben *ohne Nebenbedingungen* erledigt man das Entsprechende mit der *Hesseschen Matrix* (vgl. Abschnitt 5.2).

Für Aufgaben *mit Nebenbedingungen* geht man ähnlich vor, wobei man jedoch eine andere Matrix verwendet, nämlich die sog. *geränderte Hessesche Matrix.*

Ist $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \lambda^{(0)}\right)$ eine Lösung von (**) („kritische Stelle"), so definiert man die dazugehörige geränderte Hessesche Matrix $\overline{H}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \lambda^{(0)}\right)$ wie folgt[2]:

$$\overline{H}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \lambda^{(0)}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) & \frac{\partial g}{\partial x_2}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) \\ \frac{\partial g}{\partial x_1}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_1}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \lambda^{(0)}\right) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \lambda^{(0)}\right) \\ \frac{\partial g}{\partial x_2}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \lambda^{(0)}\right) & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_2}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \lambda^{(0)}\right) \end{pmatrix}$$

Von dieser Matrix bildet man nun die Determinante. Es gilt folgende *hinreichende Bedingung*:

(a) Es sei $\left|\overline{H}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \lambda^{(0)}\right)\right| > 0$.
Dann ist $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right)$ ein lokales Maximum von f unter der Nebenbedingung (*).

(b) Es sei $\left|\overline{H}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \lambda^{(0)}\right)\right| < 0$.
Dann ist $\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\right)$ ein lokales Minimum von f unter der Nebenbedingung (*).

Ist $\left|\overline{H}\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \lambda^{(0)}\right)\right| = 0$, so ist alleine aufgrund dieses Ergebnisses keine Aussage möglich.

Wir verwenden auch folgende *Kurzschreibweise* für die geränderte Hessesche Matrix:

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2 \partial x_1} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 L}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}.$$

Beispiel 1. Bestimmen Sie die stationären Stellen der Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f(x,y) = 2x^2 - y^2 + xy$$

unter der folgenden Nebenbedingung:

$$g(x,y) = x + 2y - 1 = 0.$$

<u>*1. Möglichkeit*: mit der Lagrange-Methode</u>

$$L(x,y,\lambda) = 2x^2 - y^2 + xy + \lambda(x + 2y - 1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) &= 4x + y + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) &= -2y + x + 2\lambda = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) &= x + 2y - 1 = 0 \end{aligned}$$

[2]Dabei setzen wir voraus, dass f und g (und folglich auch L) C^2-Funktionen sind.

Lösung („einzige kritische Stelle"):

$$(x, y, \lambda) = \left(-\frac{4}{10}, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}\right).$$

Bestimmung der Determinante der geränderten Hesseschen Matrix:

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 14 = -10 < 0.$$

Folglich liegt bei $\left(-\frac{4}{10}, \frac{7}{10}\right)$ ein lokales Minimum von f unter der Nebenbedingung $x + 2y - 1 = 0$.

2. Möglichkeit: ohne die Lagrange-Methode

Da es möglich ist, die Nebenbedingung nach einer der beiden Variablen aufzulösen, kann man auch wie folgt vorgehen: Aus der Nebenbedingung erhält man:

$$x = 1 - 2y. \tag{7.9}$$

Einsetzen in die Zielfunktion ergibt:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 2x^2 - y^2 + xy \\ &= 2(1-2y)^2 - y^2(1+2y)y \\ &= 8y^2 - 8y + 2 - y^2 + y - 2y^2 \\ &= 5y^2 - 7y + 2 =: f(y) \end{aligned}$$

Es folgt $f'(y) = 10y - 7$ und man erhält $y = \frac{7}{10}$ als einzige Nullstelle von f'. Wegen $f''(y) = 10 > 0$ handelt es sich um ein Minimum der Funktion $f(y) = 5y^2 - 7y + 2$. Einsetzen von $y = \frac{7}{10}$ in (7.9) ergibt $x = -\frac{4}{10}$.

Es hat sich also dasselbe Ergebnis wie bei der 1. Lösungsmöglichkeit ergeben.

Beispiel 2. Wie Beispiel 1 für $f(x) = xy$ und $g(x,y) = x^2 + y^2 - 2 = 0$.

Wir verwenden die Lagrange-Methode:

$$L(x, y, \lambda) = xy + \lambda(x^2 + y^2 - 2)$$

$$\begin{aligned} &\text{(I)} & \frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) &= y + 2\lambda x = 0 \\ &\text{(II)} & \frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) &= x + 2\lambda y = 0 \\ &\text{(III)} & \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) &= x^2 + y^2 - 2 = 0 \end{aligned}$$

Lösung dieses Gleichungssystems:

Löst man (I) nach y auf und setzt in (II) ein, so erhält man $x + 2\lambda(-2\lambda x) = 0$ und folglich:

$$x(1 - 4\lambda^2) = 0. \tag{7.10}$$

Es muss $x \neq 0$ gelten, da aus $x = 0$ und (I) folgen würde, dass auch $y = 0$ gilt, im Widerspruch zu (III). Aus (7.10) erhält man somit $1 - 4\lambda^2 = 0$. Es folgt $\lambda = \frac{1}{2}$ oder $\lambda = -\frac{1}{2}$.

Ist $\lambda = -\frac{1}{2}$, so erhält man aus (I) $x = y$ und somit aus (III) $x = \pm 1$.

Ist $\lambda = \frac{1}{2}$, so erhält man aus (I) $x = -y$ und somit aus (III) $x = \pm 1$.
Es gibt also genau vier Lösungen:

$$\begin{aligned}
\left(x^{(1)}, y^{(1)}, \lambda^{(1)}\right) &= \left(1, 1, -\frac{1}{2}\right) \\
\left(x^{(2)}, y^{(2)}, \lambda^{(2)}\right) &= \left(-1, -1, -\frac{1}{2}\right) \\
\left(x^{(3)}, y^{(3)}, \lambda^{(3)}\right) &= \left(1, -1, \frac{1}{2}\right) \\
\left(x^{(4)}, y^{(4)}, \lambda^{(4)}\right) &= \left(-1, 1, \frac{1}{2}\right)
\end{aligned}$$

Mögliche lokale Extrema von f unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 0$ sind also die Punkte $(1, 1)$, $(-1, -1)$, $(1, -1)$ und $(-1, 1)$ („kritische Stellen").
Wir bilden die geränderte Hessesche Matrix für eine beliebige Stelle (x, y, λ):

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 1 \\ 2y & 1 & 2\lambda \end{pmatrix}.$$

Um die kritische Stelle $(1, 1)$ zu untersuchen, setzten wir $\left(x^{(1)}, y^{(1)}, \lambda^{(1)}\right) = (1, 1, -\frac{1}{2})$ in $\overline{H}$ ein und berechnen $|\overline{H}|$:

$$|\overline{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = (-2)(-4) + 2 \cdot 4 = 16 > 0.$$

Es liegt bei $(1, 1)$ also ein lokales Maximum vor.
Analog erhält man:

- lokales Maximum bei $(-1, -1)$
- lokales Minimum bei $(1, -1)$
- lokales Minimum bei $(-1, 1)$

Wir haben hier nur den Fall „2 Variablen mit einer Nebenbedingung" ($n = 2$ und $m = 1$) besprochen. Der allgemeine Fall „n Variablen mit m Nebenbedingung" ($n, m \in \mathbb{N}$ beliebig mit $m < n$) geht ähnlich, die Details sind allerdings komplizierter. Die geränderte Hessesche Matrix ist dann eine $(m+n) \times (m+n)$ - Matrix, von der man gewisse Abschnittsdeterminanten (oft auch *Hauptminoren* genannt) untersuchen muss. Man findet die Einzelheiten z.B. in

- Alessandro Tomazic, *Wirtschaftsmathematik 2*, Folien zur gleichnamigen Vorlesung im Sommersemester 2009 an der Universität Wien.