Mathematik II für Studierende der Informatik
(Analysis und Lineare Algebra)

Th. Andreae, N.N.

Sommersemester 2012
Blatt 2

B: Hausaufgaben zum 19. April 2012

3. Welche der folgenden Reihen konvergieren und welche divergieren? Geben Sie kurze Begründungen und bestimmen Sie im Falle der Konvergenz den Grenzwert.

(i) $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^i$ (iii) $\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i$

(ii) $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\cdot\left(\frac{3}{7}\right)^{i+1}$ (iv) $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{i(i+1)}$

Hinweis zu (iv): Man schaue sich im Skript auf Seite 19 das Beispiel 3 an.

(i) Es gilt $1+\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^i = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^i = \frac{1}{1-\frac{3}{7}}$

$= \frac{7}{4}$. Also $\sum_{i=1}^{\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^i = \frac{7}{4}-1=\frac{3}{4}$.

(ii) Es gilt $\sum_{i=1}^{\infty}(-1)^i\left(\frac{3}{7}\right)^{i+1} = \frac{3}{7}\sum_{i=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{7}\right)^i =$

$\frac{3}{7}\left(-1+\sum_{i=0}^{\infty}\left(-\frac{3}{7}\right)^i\right) = \frac{3}{7}\left(-1+\frac{1}{1-\left(-\frac{3}{7}\right)}\right) =$

$\frac{3}{7}\left(-1+\frac{7}{10}\right) = \frac{3}{7}\cdot\left(-\frac{3}{10}\right) = \underline{\underline{-\frac{9}{70}}}$.

(iii) Divergenz, da die Partialsummen abwechselnd die Werte 1 und 0 annehmen.

(iv) Für die n-te Partialsumme dieser Reihe gilt (vergl. auch Skript, Seite 19, Beispiel 3):

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+1)} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i+1} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{i} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$ Es folgt $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i(i+1)} = 1.$

4. Bestimmen Sie die folgenden Grenzwerte:

(i) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$ (iii) $\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n}$

(ii) $\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{2n}$

Hinweis: Verwenden Sie die Definition der Eulerschen Zahl e (siehe Skript, Seite 15) sowie die Rechenregeln für konvergente Folgen.

(i) $$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)\right) =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e.$$

(ii) $$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n} = \lim_{n\to\infty} \left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\right)^2 =$$

$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} = e \cdot e = e^2.$$

(iii) Behauptung: $\lim_{n\to\infty} \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{e}$.

Wir setzen $a_n = \left(1-\frac{1}{n}\right)^n$. Zum Beweis der Behauptung ist also $\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{e}$ zu zeigen.

Man beachte, dass $a_n \neq 0$ für $n \geq 2$ gilt. Wir können also die Folge $b_n = \frac{1}{a_n}$ bilden (für $n = 2, 3, \ldots$). Es gilt $a_n = \left(\frac{n-1}{n}\right)^n$ und somit

$$b_n = \left(\frac{n}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right).$$

Man erhält

$$\lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) = e \cdot 1 = e.$$

Aus Satz 8(d) (Skript S. 15) ergibt sich

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{e}.$$

Wegen $\frac{1}{b_n} = a_n$ folgt die Behauptung.