Mathematatik I für Studierende der Informatik
(Diskrete Mathematik)

Thomas Andreae, Christoph Stephan

Wintersemester 2011/12
Blatt 2

A: Präsenzaufgaben am 27./28. Oktober 2011

1. Behauptung: Für alle natürlichen Zahlen n gilt die folgende Aussage, die wir mit $A(n)$ bezeichnen wollen:

$$A(n): \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

a) Prüfen Sie zunächst, ob die Aussage $A(n)$ für $n = 1, 2, 3, 4$ gilt.

b) Nun soll gezeigt werden, dass die Aussage $A(n)$ tatsächlich **für alle** $n \in \mathbb{N}$ gilt. Beweisen Sie dies mittels vollständiger Induktion.

2. Die Fibonacci-Zahlen $f_0, f_1, f_2, \ldots$ seien wie auf Seite 17 des Skripts definiert. Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle $n \geq 0$ gilt:

$$\sum_{i=0}^{n} f_i = f_{n+2} - 1.$$

Im folgenden Beispiel ist die betrachtete Aussage $A(n)$ *keine Gleichung, sondern eine Ungleichung.*

3. Für $n \geq 0$ betrachten wir die folgende Aussage $A(n)$:

$$A(n): \quad 3n < 2^n.$$

a) Aussagen können wahr oder falsch sein. Prüfen Sie, ob $A(n)$ für $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ wahr oder falsch ist.

b) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass $A(n)$ für alle $n \geq 4$ richtig ist.

B: Hausaufgaben zum 3./4. November 2011

1. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die folgende Gleichung:

$$A(n): \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \ldots + \frac{1}{n \cdot (n+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

a) Schreiben Sie die Gleichung $A(n)$ unter Verwendung des Summenzeichens auf.

b) Prüfen Sie, ob $A(n)$ für $n = 1, 2, 3, 4$ richtig ist.

c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass die Aussage $A(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

2. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die folgende Aussage, die wir mit $B(n)$ bezeichnen:

$$B(n): \quad \sum_{i=1}^{n} (2i - 1) = n^2.$$

a) Prüfen Sie, ob $B(n)$ für $n = 1, 2, 3, 4$ gültig ist.

b) Schreiben Sie $B(n)$ ohne das Summenzeichen auf. Formulieren Sie $B(n)$ auch in Worten.

c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion, dass $B(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.

3. a) Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 7$ die folgende Ungleichung gilt:

$$13n < 2^n.$$

b) Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist die folgende Ungleichung richtig?

$$n^2 < 2^n$$

Stellen Sie eine Vermutung auf und beweisen Sie die Korrektheit Ihrer Vermutung durch vollständige Induktion.

4. Mit $n!$ bezeichnet man bekanntlich das Produkt der ersten n natürlichen Zahlen (z.B. $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$). Wir betrachten die Ungleichung

$$2^n < n!$$

Diese Ungleichung ist gewiss nicht für alle $n \in \mathbb{N}$ richtig; für $n = 3$ gilt sie beispielsweise nicht. Für welche $n \in \mathbb{N}$ gilt diese Ungleichung? Beweisen Sie Ihre Vermutung durch vollständige Induktion!