Mathematik I für Studierende der Informatik (Diskrete Mathematik)

Steven Köhler

Wintersemester 2011/12
Aufgaben zur Vorbereitung der Bonusklausur am 26.11.2011

1. Entscheide für die folgenden Abbildungen, ob sie injektiv, surjektiv oder bijektiv sind. Gib in jedem Fall eine (kurze) Begründung.

a) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n) = \big(n-2\big)^2$

b) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $g(n) = 42n - 23$

c) $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $h(n) = \big((n-2)^2, n^2\big)$

d) $\mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $u(a,b) = \big(ab, 2a+1\big)$

e) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $v(n,m) = 5n - m$

f) $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $f(x,y) = \big(xy^2, xy^2 + 5y - 1, (y^2-2)x\big)$

2. Es sei $M = \big\{a,b\big\}$. Welche der folgenden Aussagen sind wahr? Welche sind falsch?

(i) $a \in \mathcal{P}(M)$

(ii) $b \subseteq \mathcal{P}(M)$

(iii) $\big\{a,b\big\} \in \mathcal{P}(M)$

(iv) $\big\{a,b\big\} \subseteq \mathcal{P}(M)$

(v) $\big\{a,\{a\}\big\} \in \mathcal{P}(M)$

(vi) $\big\{\{a\},\{b\}\big\} \in \mathcal{P}(M)$

(vii) $\big\{\{a\},\{b\}\big\} \subseteq \mathcal{P}(M)$

3. Beweise durch vollständige Induktion!

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $47 \mid \big(7^{2n} - 2^n\big)$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum\limits_{i=1}^{n} \big(4i-1\big) = 3 + 7 + 11 + \ldots = 2n^2 + n$.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum\limits_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$.

d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ gilt: $n^2 - 2n - 1 > 0$.

e) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.

4. Wahr oder falsch? Gib jeweils eine kurze Begründung.

a) $17 \equiv 47 \pmod{15}$

b) $23 \equiv 42 \pmod{7}$

c) $101 \equiv 202 \pmod{47}$

d) $-21 \equiv 312 \pmod{3}$

e) $29 \equiv 57 \pmod{23}$

5. Beweise oder widerlege.

a) Die Zahlen 177 und 557 sind teilerfremd.

b) Die Zahlen 247 und 299 sind teilerfremd.

6. Es seien A und B Mengen mit $|A| = 5$ und $|B| = 7$.

a) Wie viele Abbildungen $A \to B$ gibt es?

b) Wie viele dieser Abbildungen sind injektiv?

c) Wie viele dieser Abbildungen sind surjektiv?

d) Wie viele dieser Abbildungen sind injektiv, wenn zusätzlich $f(a_1) \neq f(a_2)$ gelten soll (mit $a_1, a_2 \in A$)?

e) Wie viele dieser Abbildungen sind injektiv, wenn zusätzlich $f(a_1) \neq f(a_2)$ sowie $f(a_1) \neq f(a_3)$ gelten soll (mit $a_1, a_2, a_3 \in A$)?

f) Wie viele Abbildungen gibt es, für die $f(a_1) \neq f(a_2)$ sowie $f(a_1) \neq f(a_3)$ gelten soll (mit $a_1, a_2, a_3 \in A$)?

7. a) In einer Urne befinden sich 10 unterscheidbare Kugeln. Es wird 5 mal gezogen. Wie viele mögliche Ergebnisse gibt es, wenn

(i) die Reihenfolge der gezogenen Kugeln berücksichtigt wird?

(ii) die Reihenfolge der gezogenen Kugeln egal ist?

b) Wie viele Möglichkeiten gibt es, im Lotto exakt 5 richtige Gewinnzahlen anzukreuzen?

c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, im Lotto mindestens 5 richtige Gewinnzahlen anzukreuzen?

d) Wie viele sinnvolle oder sinnlose Wörter lassen sich aus den Buchstaben des Wortes *MASSACHUSETTS* bilden?

e) Für $k, n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2k$: Wie viele Möglichkeiten gibt es, insgesamt n Bonbons auf k Kinder derart zu verteilen, dass jedes Kind mindestens zwei Bonbons erhält?

f) Welchen Koeffizienten besitzt $x^2yz^4w^3$ in $\big(x + y + z + w\big)^{10}$?