n-stellige Relationen

Im Abschnitt 3.1 (Skript, Seite 50) haben wir die Menge

$$A \times B = \{(a,b) : a \in A, b \in B\}$$

kennengelernt; $A \times B$ besteht aus der Menge aller geordneten Paare (a,b) mit $a \in A$ und $b \in B$.

Sind nicht nur zwei, sondern drei Mengen A, B, C gegeben, so definiert man entsprechend

$$A \times B \times C = \{(a,b,c) : a \in A, b \in B, c \in C\}.$$

Die Menge $A \times B \times C$ besteht also aus der Menge aller geordneten Tripel (a,b,c) mit $a \in A$, $b \in B$, $c \in C$.

Hierzu zwei Beispiele:

1. $A = \{1,2,3\}$, $B = \{0,1\}$, $C = \{2,3\}$; dann ist $A \times B \times C = \{(1,0,2),(1,0,3),(1,1,2),(1,1,3),(2,0,2),(2,0,3),(2,1,2),(2,1,3),(3,0,2),(3,0,3),(3,1,2),(3,1,3)\}$.

2. $A = \{u, v, w\}$, $B = \{1, 2\}$, $C = \{u, v, w\}$; dann ist $A \times B \times C =$

$$
\begin{array}{lll}
\{ & (u,1,u), & (u,2,u), \\
 & (u,1,v), & (u,2,v), \\
 & (u,1,w), & (u,2,w), \\
 & (v,1,u), & (v,2,u), \\
 & (v,1,v), & (v,2,v), \\
 & (v,1,w), & (v,2,w), \\
 & (w,1,u), & (w,2,u), \\
 & (w,1,v), & (w,2,v), \\
 & (w,1,w), & (w,2,w) \quad \}.
\end{array}
$$

Analog läßt sich natürlich auch die Menge $A \times B \times C \times D$ aller *geordneten Quadrupel* (a, b, c, d) mit $a \in A, b \in B, c \in C, d \in D$ definieren, oder die Menge $A \times B \times C \times D \times E$ aller *geordneten Quintupel* (a, b, c, d, e) mit $a \in A, b \in B, c \in C, d \in D, e \in E$. Dies führt zu folgender Definition.

Definition. Für $n \geq 2$ seien n Mengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$ gegeben. Die Menge $A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n$ aller *geordneten n-Tupel* der Mengen $A_1, \ldots, A_n$ wird wie folgt definiert:

$$A_1 \times A_2 \times \cdots \times A_n := \{(a_1, a_2, \ldots, a_n) : a_i \in A_i \text{ für } i = 1, \ldots, n\}.$$

Man nennt $A_1 \times A_2 \times \ldots A_n$ das *kartesische Produkt* der Mengen A_1, A_2, …, A_n, genauer gesagt spricht man vom *n-stelligen kartesischen Produkt.* Ist $n = 2$, so spricht man von einem *zweistelligen* oder *binären kartesischen Produkt*, ähnlich für $n = 3$: *dreistelliges* oder *ternäres kartesisches Produkt.*

Es sei noch einmal darauf hingewiesen, daß es sich um *geordnete* n-Tupel handelt; es ist z.B.: $(1,2) \neq (2,1)$ oder $(1,2,3) \neq (3,2,1)$ oder $(1,0,1,0) \neq (0,0,1,1)$. Ist $A \neq B$, so gilt immer $A \times B \neq B \times A$. (Beispiel:$A = \{0,1\}, B = \{1,2\}$. Dann gilt $(0,1) \in A \times B$ aber $(0,1) \notin B \times A$; also $A \times B \neq B \times A$.)

Wie bereits früher erwähnt, versteht man unter dem *1-stelligen kartesischen Produkt* einer Menge A die Menge A selber.

Definition. Gegeben seien Mengen $A_1, \ldots, A_n$ (für $n \geq 1$) und R sei eine Teilmenge des kartesischen Produkts $A_1 \times \cdots \times A_n$, d.h. es gilt

$$R \subseteq A_1 \times \cdots \times A_n.$$

Dann nennt man R eine (n-*stellige*) *Relation* über $A_1, \ldots, A_n$.

Ist $n = 2$ (bzw. 3), so spricht man von einer *binären* (bzw. *ternären*) Relation. Sind die Mengen $A_1, \ldots, A_n$ alle gleich, gilt also $A_1 = \cdots = A_n = A$ für eine Menge A, so spricht man von einer n-stelligen Relation *auf* A.

Beispiele: Es sei (wie oben) $A = \{1,2,3\}$, $B = \{0,1\}$, $C = \{2,3\}$.

1. Dann ist $R = \{(1,0,2), (1,0,3), (2,1,3), (3,1,2)\}$ eine (ternäre) Relation über A, B, C, da $R \subseteq A \times B \times C$ gilt.
2. Andere Relationen über A, B, C:
   $R_1 = \emptyset$, $R_2 = \{(1,0,3)\}$, $R_3 = \{(1,0,3), (3,1,3)\}$, $R_4 = A \times B \times C$.
3. $R_5 = \{(0,1,3), (1,1,2)\}$ ist dagegen *keine* Relation über A, B, C, da *nicht* $R_5 \subseteq A \times B \times C$ gilt. Es gilt aber $R_5 \subseteq B \times A \times C$, und dementsprechend ist R_5 eine Relation über B, A, C. (Es kommt in diesem Zusammenhang also sehr auf die Reihenfolge an, in der die beteiligten Mengen genannt werden !)

Zur Übung : Für die Mengen A, B, C gelte $|A| = 3$, $|B| = 2$, $|C| = 2$.

a) Wie viele Elemente besitzt die Menge $A \times B \times C$?

b) Wie viele verschiedene (ternäre) Relationen gibt es über A, B, C ?

Wir wollen uns abschließend einen Spezialfall anschauen, nämlich ternäre Relationen über Mengen A, B, C, wobei $A = C$ gilt. Mit anderen Worten, wir betrachten Teilmengen R von $A \times B \times A$; es gilt also

$$R \subseteq A \times B \times A\,.$$

Derartige Relationen lassen sich als *kantenbewertete, gerichtete Multigraphen* veranschaulichen. Wir erläutern dies in einem Beispiel. Es sei $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{a,b,c\}$ und $R = \{(1,a,2),(1,b,2),(2,b,2),(2,a,3),(3,a,2),(3,c,2),(1,c,4),(4,b,3)\}$. Veranschaulichung als kantenbewerteter, gerichteter Multigraph: