C

2. Bonusklausur zur Vorlesung „Mathematik I (DM)“

T. Andreae **14. Januar 2012, 8:30 bis 10:00 Uhr**

Insgesamt sind 30 Punkte zu erreichen. Es genügt in der Regel nicht, nur das Ergebnis einer Rechnung bzw. die Antwort auf eine Frage anzugeben, sondern es sollte auch der Rechenweg ersichtlich sein bzw. eine kurze Begründung für die Antwort gegeben werden. Wer mindestens 15 Punkte erzielt, hat bestanden. Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*10 Punkte*)

a) Ist 423 in $\mathbb{Z}_{490}$ invertierbar? Falls ja, so bestimme man $x \in \{1, 2, \ldots, 489\}$, so dass $423 \cdot x \equiv 1 (\text{mod } 490)$. Falls nicht, so gebe man eine kurze Begründung für die Nichtinvertierbarkeit von 423. (*4 Punkte*)

b) Bestimmen Sie den Rest von 5^{17} bei Division durch 21. (*3 Punkte*)

c) Die Permutation $\sigma \in S_{12}$ sei gegeben durch

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 4 & 8 & 5 & 3 & 1 & 7 & 10 & 9 & 2 & 12 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

(i) Man stelle σ in Zyklenschreibweise dar. (*1 Punkt*)

(ii) Man stelle σ als Nacheinanderausführung von Transpositionen dar. (*2 Punkte*)

Aufgabe 2 (*10 Punkte)*

a) Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}, \ C = \begin{pmatrix} -1, & 0, & 5 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die folgenden Produkte, falls diese existieren: BD, CD, A^TD, DC. Für Produkte, die nicht existieren, gebe man eine kurze Begründung für deren Nichtexistenz. (*4 Punkte*)

b) Es sei $C = \{a, b, c, d, e\}$ und $D = \{u, v, w, x, y, z\}$. Die Funktion $h : C \to D$ sei gegeben durch $h(a) = v$, $h(b) = x$, $h(c) = z$, $h(d) = v$, $h(e) = w$. Für $D' = \{v, y, z\}$: Geben Sie $h(h^{-1}(D'))$ an! (*2 Punkte*)

c) B und C seien $m \times p$-Matrizen, D sei eine $p \times n$-Matrix. Beweisen Sie die Gültigkeit des Distributivgesetzes $(B + C)D = BD + CD$. (*4 Punkte*)

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)

Mit „Graph“ ist im Folgenden immer ein „ungerichteter Graph ohne Schlingen und ohne Mehrfachkanten“ gemeint.

a) H sei ein vollständiger Graph mit genau 111 Knoten.

(i) Besitzt H eine Eulersche Linie? (*2 Punkte*)

(ii) Besitzt H einen Hamiltonschen Kreis? (*1 Punkt*)

(iii) Wie viele Kanten hat H? (*1 Punkt*)

(iv) Wie viele vollständige Teilgraphen mit genau 4 Knoten besitzt H? (*2 Punkte*)

b) Es sei B eine Menge mit drei Elementen, sagen wir $B = \{a, b, c\}$. Kreuzen sie die jeweils richtige Antwort an:

(i) Es gibt auf B eine Relation, die eine Ordnungsrelation ist, aber keine Äquivalenzrelation.

☐ wahr ☐ falsch

(ii) Es gibt auf B eine Relation, die eine Äquivalenzrelation ist, aber keine Ordnungsrelation.

☐ wahr ☐ falsch

(iii) Es gibt auf B eine Relation, die weder eine Äquivalenzrelation noch eine Ordnungsrelation ist.

☐ wahr ☐ falsch

(iv) Es gibt auf B eine Relation, die sowohl Ordnungsrelation als auch Äquivalenzrelation ist.

☐ wahr ☐ falsch

Begründungen sind nicht erforderlich! Für jedes richtig gesetzte Kreuz bekommt man 1 Punkt. Für jedes falsch gesetzte Kreuz wird 1 Punkt abgezogen. Insgesamt werden für die Aufgabe 3b) nicht weniger als 0 Punkte gegeben.