Mathematik II für Studierende der Informatik (Analysis und Lineare Algebra)

Thomas Andreae, Henrik Bachmann, Rosona Eldred, Malte Moos

Sommersemester 2012
Blatt 5

B: Hausaufgaben zum 10. Mai 2012

3. Es sei $f(x) = x^4 - 5x^2 + 5x - \frac{5}{2}$. Zeigen Sie, dass f im Intervall $[1,2]$ eine Nullstelle besitzt, und berechnen Sie diese näherungsweise mit dem Newton-Verfahren, wobei der Startwert $x_0 = 2$ sein soll. Führen Sie einige Iterationsschritte aus: Berechnen Sie zumindest x_1, x_2, x_3 und x_4. Besser ist es jedoch, wenn Sie noch ein paar Schritte mehr durchführen, bis sich der erhaltene Wert „nicht mehr ändert".

Es gilt $f(1) = -1.5$ und $f(2) = 3.5$. Da f stetig ist, hat f nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle im Intervall $[1,2]$.

$$f'(x) = 4x^3 - 10x + 5,$$

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^4 - 5x_n^2 + 5x_n - 2.5}{4x_n^3 - 10x_n + 5}.$$

$$x_0 = 2$$

$$x_1 = 2 - \frac{3.5}{17} \approx 1.794117647$$

$x_2 \approx 1.721536182$

$x_3 \approx 1.712664431$

$x_4 \approx 1.71253877$

$x_5 \approx 1.712538745$

$x_6 \approx 1.712538745$

Zur Durchführung mit dem Taschenrechner, etwa mit CASIO fx-85MS: Man beginnt mit Ans = 2 und gibt

Ans – (Ans^4 – 5 × Ans^2 + 5 × Ans – 2.5) ÷ (4 × Ans^3 – 10 × Ans + 5)

ein. Für jede Iteration ist dann nur noch "=" zu drücken.

4. a) Eine zylindrische Konservendose soll ein Fassungsvermögen (Volumen) von $V = 2000$ cm^3 haben. Wie ist der Radius r und die Höhe h zu wählen, wenn man so wenig Blech wie möglich zu ihrer Herstellung verwenden will?
Hinweis: Die Oberfläche der Dose wird durch $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ gegeben.

$A = A(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$

$V = 2000 = \pi r^2 h \Rightarrow h = \dfrac{2000}{\pi r^2}$

$\Rightarrow A = f(r) = 2\pi r^2 + \dfrac{4000}{r}$. Man erhält

$f'(r) = 4\pi r - \dfrac{4000}{r^2} = 0 \Rightarrow r^3 = \dfrac{4000}{4\pi} = \dfrac{1000}{\pi}$. Also:

Für $r = \dfrac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$ ist die Oberfläche $A = f(r)$ minimal.

(Man beachte: $f''(r) = 4\pi + \dfrac{8000}{r^3} > 0$.)

Für h ergibt sich durch Einsetzen von $r = \dfrac{10}{\sqrt[3]{\pi}}$:

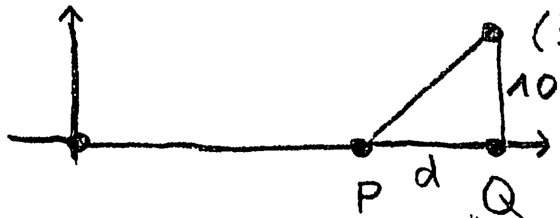
$$h = \frac{2000}{\pi r^2} = \frac{2000}{\pi \cdot \frac{100}{\pi^{2/3}}} = 2 \cdot \frac{10}{\sqrt[3]{\pi}} = 2r.$$

Die Oberfläche ist also minimal, wenn der Durchmesser des Bodens gleich der Höhe ist. (Dies gilt übrigens nicht nur für $V = 2000$ cm^3, sondern für jeden Wert von V: Führt man obige Rechnung für beliebiges V durch, so erhält man

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \quad \text{und} \quad h = 2 \cdot \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2 \cdot r.)$$

b) Ein Fahrzeug soll in möglichst kurzer Zeit vom Punkt mit den Koordinaten $(0,0)$ zum Punkt $(30,10)$ gelangen. Auf der x-Achse (Straße) kann es 50 km/h fahren, außerhalb der x-Achse (Gelände) nur 20 km/h. An welcher Stelle der Straße muss es abbiegen? (1 Einheit auf den Achsen = 1 km)
Anleitung: Ist P der Punkt, an dem das Fahrzeug die x-Achse verlässt, so betrachte man den Abstand d zwischen P und dem Punkt $Q = (30,0)$. Der Abstand zwischen dem Ursprung und P ist dann gleich $30-d$. Man berechne den Abstand zwischen P und $R = (30,10)$ und gebe die zu minimierende Fahrzeit als Funktion $h(d)$ an.

Biegt das Fahrzeug in P ab, so werden $30-d$ km auf der Straße und $\sqrt{d^2+100}$ km im Gelände gefahren (siehe Skizze):



Fahrzeit in Stunden: $h(d)=\frac{30-d}{50}+\frac{\sqrt{d^2+100}}{20}$.
Man erhält $h'(d)=-\frac{1}{50}+\frac{2d}{40\sqrt{d^2+100}}$ und somit
$h'(d)=0 \Leftrightarrow d=\frac{2}{5}\sqrt{d^2+100}$.
Quadrieren ergibt $d^2=\frac{4}{25}(d^2+100)$, was gleichbedeutend ist mit

$$d^2=\frac{400}{21}.$$

Wegen $d \geq 0$ erhält man $d=\frac{20}{\sqrt{21}} \approx 4,364$.

Also: Nach 25,636 km erreicht man den optimalen Abbiegepunkt P.

Es bleibt noch zu prüfen, ob tatsächlich ein Minimum vorliegt: Es gilt

$$h''(d)=\frac{1}{20}\cdot\frac{\sqrt{d^2+100}-\frac{d^2}{\sqrt{d^2+100}}}{d^2+100}>0, \text{ da } \sqrt{d^2+100}-\frac{d^2}{\sqrt{d^2+100}}=\frac{100}{\sqrt{d^2+100}}>0.$$

Also liegt ein Minimum vor.