Eine <u>Aufgabe zur Determinante</u>: Es sei

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

a) Berechnen Sie Det A auf zwei Arten:

(i) Durch Entwicklung nach der dritten Zeile,

(ii) durch elementare Zeilenumformungen.

b) Was bedeutet das Ergebnis von a) für die Invertierbarkeit von A?

c) Was bedeutet das Ergebnis von a) für die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems $Ax = b$?

d) Können Sie ohne zu rechnen – nur aufgrund des Ergebnisses von a) – die Werte von $\mathrm{Det}(A^T)$ und $\mathrm{Det}(A^2)$ sowie die Dimension der Räume $Z(A^T)$ und $N(A^T)$ angeben?

Lösung: a) (i) $\operatorname{Det} A = 3\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 9 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$

$3(9+27-54-6)-(18+8-6-4) = 3\cdot(-24)-16 = \underline{\underline{-88}}$

(ii)

$$\left.\begin{matrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 9 \end{matrix}\right\} A$$

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -7 & -6 & 9 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{16}{5} & \frac{24}{5} \end{matrix}$$

$$\left.\begin{matrix} 1 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{88}{15} \end{matrix}\right\} B$$

Da keine Zeilenvertauschungen vorgenommen wurden, folgt

$\operatorname{Det} A = \operatorname{Det} B = 1\cdot(-5)\cdot 3\cdot \frac{88}{15} = -88.$

b) $\operatorname{Det} A \neq 0 \Rightarrow A$ invertierbar

c) $Ax = b$ ist für jedes b eindeutig lösbar.

d) $\operatorname{Det}(A^T) = \operatorname{Det}(A) = -88$, $\operatorname{Det}(A^2) = \operatorname{Det}(A \cdot A)$
$= (\operatorname{Det} A)(\operatorname{Det} A) = 88^2 = 7744.$

Determinantenmultiplikationssatz

$\operatorname{Det}(A^T) \neq 0 \Rightarrow \operatorname{Dim}(Z(A^T)) = 3$, $\operatorname{Dim}(N(A^T))$
$= 0.$