Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der zweiten Bonusklausur am 14.01.2012

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Eigenschaften von Relationen I

Es sei R eine Relation über einer Menge A. Die Relation R ist

- *symmetrisch*, falls gilt:

$$\forall a, b \in A : (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \in R.$$

- *nicht symmetrisch*, falls gilt:

$$\exists a, b \in A : (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \notin R.$$

- *antisymmetrisch*, falls gilt:

$$\forall a, b \in A, a \neq b : (a, b) \in R \rightarrow (b, a) \notin R.$$

Eigenschaften von Relationen II

Es sei R eine Relation über einer Menge A. Die Relation R ist

- *reflexiv*, falls gilt:

$$\forall a \in A : (a, a) \in R.$$

- *nicht reflexiv*, falls gilt:

$$\exists a \in A : (a, a) \notin R.$$

- *irreflexiv*, falls gilt:

$$\forall a \in A : (a, a) \notin R.$$

Eigenschaften von Relationen III

Es sei R eine Relation über einer Menge A. Die Relation R ist

- *transitiv*, falls gilt:

$$\forall a, b, c \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \in R.$$

- *intransitiv*, falls gilt:

$$\exists a, b, c \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \notin R.$$

- *antitransitiv*, falls gilt:

$$\forall a, b, c \in A : (a, b) \in R \wedge (b, c) \in R \rightarrow (a, c) \notin R.$$

Eigenschaften von Relationen IV

Es sei R eine Relation über einer Menge A. Man nennt R eine

- *Äquivalenzrelation*, falls gilt:

  R ist symmetrisch, reflexiv und transitiv.

- *Ordnungsrelation*, falls gilt:

  R ist antisymmetrisch, reflexiv und transitiv.

Aufgabe 1

Es sei R die folgende auf der Menge $A = \{a, b, c, d\}$ definierte Relation:

$$R = \Big\{(a,a),(a,b),(b,b),(c,c),(d,a),(b,a),(a,d),(d,d)\Big\}.$$

a) Entscheide, welche der folgenden Eigenschaften auf die Relation zutreffen. Gib jeweils eine kurze Begründung.

   (i) symmetrisch

   (ii) antisymmetrisch

   (iii) reflexiv

   (iv) irreflexiv

   (v) transitiv

b) Ist R eine Ordnungs- oder eine Äquivalenzrelation?

Aufgabe 2

Es sei $A = \{1, 2, 3\}$.

a) Gib eine Relation R_a über der Menge A an, die reflexiv, aber nicht transitiv ist.

b) Gib eine Relation R_b über der Menge A an, die symmetrisch und transitiv ist.

c) Gib eine Relation R_c über der Menge A an, die irreflexiv und nicht symmetrisch ist. Dabei soll $|R_c| \geq 5$ gelten.

d) Gib eine Relation R_d über der Menge A an, die weder Ordnungs- noch Äquivalenzrelation ist. Dabei soll $|R_d| \leq 3$ gelten.

Aufgabe 3

Es seien $A = \{1, 2, 3\}$ und $B = \{a, b, c, d\}$ zwei Mengen.

a) Wie viele binäre Relationen R_a über der Menge A gibt es?

b) Wie viele ternäre Relationen R_b über A, B, A gibt es?

c) Wie viele der Relationen aus a) sind reflexiv?

Aufgabe 4

Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \; D = \begin{bmatrix} 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

a) Gib an, welche dieser Matrizen miteinander multipliziert werden können (Das Berechnen der Produkte ist nicht Teil dieser Aufgabe.)

b) Berechne, falls existent, die folgenden Produkte: AB, BA^T, CD und DC.

c) Welche Voraussetzungen müssen zwei Matrizen erfüllen, damit deren Produkt existiert?

Aufgabe 5

a) Zeige, dass die Multiplikation von 2×2 - Matrizen im Allgemeinen nicht kommutativ ist.

b) Gib 3 Fälle an, in denen die in a) beschriebene Multiplikation dennoch kommutativ ist.

Aufgabe 6

Für beliebige Mengen A und B sei $f : A \to B$ eine Funktion. Es gelte $A_1, A_2 \subseteq A$ sowie $B_1, B_2 \subseteq B$. Zeige, dass die folgende Aussage gilt:

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2).$$

Erweiterter Euklidischer Algorithmus

Zum Bestimmen des *multiplikativen Inversen* von x in $\mathbb{Z}_m$ kann der *erweiterte Euklidische Algorithmus* verwendet werden.

- Bestimmen von $\mathrm{ggT}\,(x, m)$.
- Gilt $\mathrm{ggT}\,(x, m) \neq 1$, so existiert kein multiplikatives Inverses.
- Gilt $\mathrm{ggT}\,(x, m) = 1$, so kann das multiplikatives Inverses durch *Rückwärtseinsetzen* bestimmt werden.

Satz von Fermat

Satz von Fermat

Es sei p eine Primzahl und n sei eine natürliche Zahl, für die $p \nmid n$ gilt. Dann folgt:

$$n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Aufgabe 7

Bestimme, falls möglich, das multiplikative Inverse. Gib im Falle der Nicht-Existenz eine (kurze) Begründung weshalb das Inverse nicht existiert.

a) 42 in $\mathbb{Z}_{149}$

b) 51 in $\mathbb{Z}_{93}$

c) 22 in $\mathbb{Z}_{23}$

Aufgabe 8

a) Bestimme den Rest von 3^{966} bei Division durch 19.

b) Bestimme den Rest von 4^{148} bei Division durch 21.

Aufgabe 9

Eine Permutation $\pi \in S_9$ sei wie folgt definiert:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 7 & 4 & 6 & 9 & 8 \end{pmatrix}$$

a) Gib π in Zyklenschreibweise an.

b) Gib π als Nacheinanderausführung von Transpositionen an.

c) Ist π eine gerade oder eine ungerade Permutation?

d) Bestimme $\operatorname{sign} \pi$.

e) Entscheide, ob durch die folgende Permutation $\rho \in S_9$ dieselbe Permutation wie durch π beschrieben wird:

$$\rho = (1,2)(2,3)(1,3)(2,4)(9,8)(5,6)(1,2)(7,6)(2,1)(4,5)(8,3)(3,9)(9,8).$$

Eulersche Linie

Definition

G sei ein zusammenhängender (Multi-)Graph. Einen Kantenzug in G nennt man eine Eulersche Linie, falls er geschlossen ist und sämtliche Kanten von G durchläuft.

notwendige & hinreichende Bedinung

Für jeden zusammenhängenden Multigraphen G gilt: G hat genau dann eine Eulersche Linie, wenn der Grad jedes Knotens gerade ist.

Hamiltonkreis

Definition

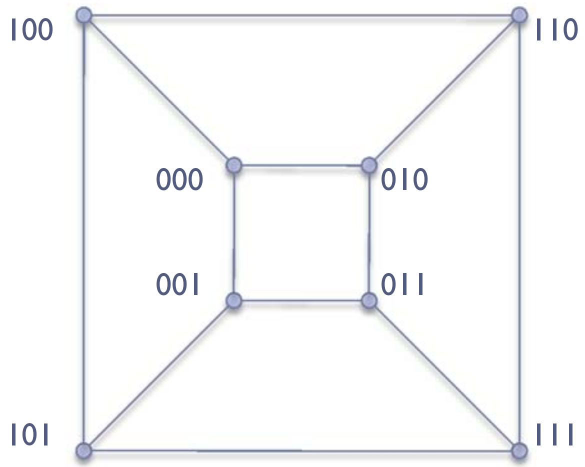
G sei ein Graph und C sei ein Kreis in G. Man nennt C einen Hamiltonschen Kreis, wenn C sämtliche Knoten von G enthält.

Aufgabe 10

Beweise durch vollständige Induktion, dass der Hyperwürfel Q_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ einen Hamiltonkreis besitzt.

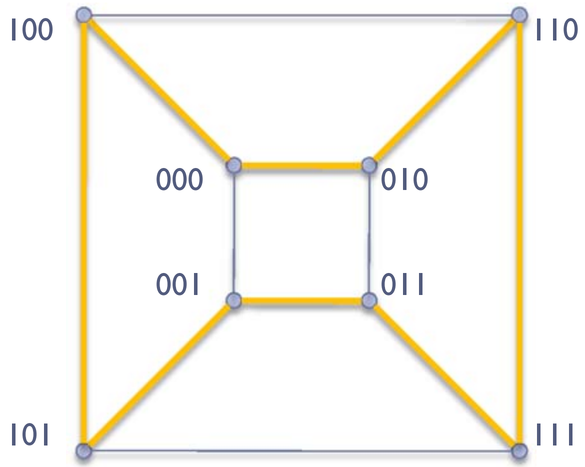
Hyperwürfel I

Hyperwürfel Q_3



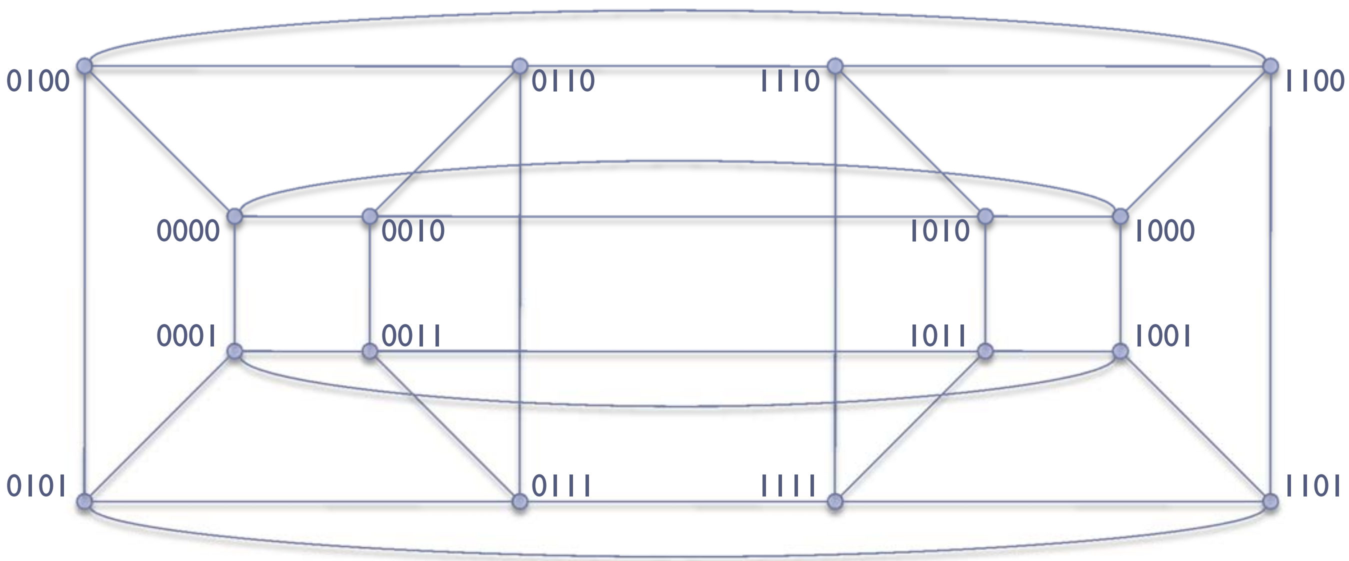
Hyperwürfel II

Hyperwürfel Q_3 mit Hamiltonkreis



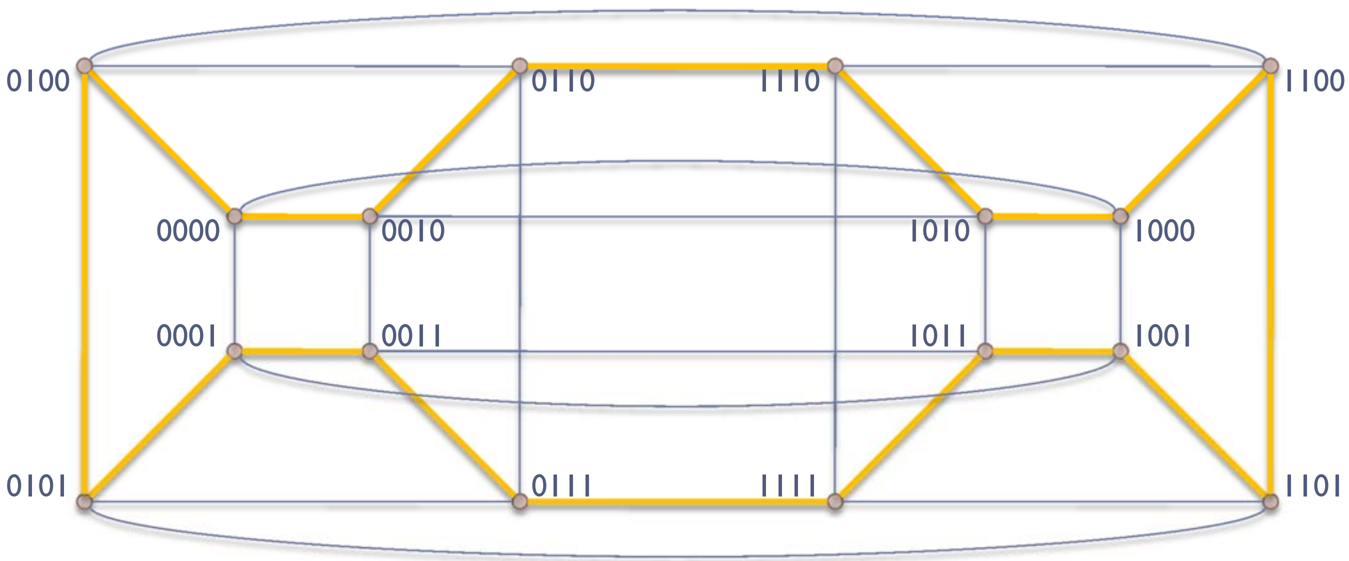
Hyperwürfel III

Hyperwürfel Q_4



Hyperwürfel IV

Hyperwürfel Q_4 mit Hamiltonkreis



Aufgabe 11

Es sei $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$. Der ungerichtete Graph H bestehe aus zwei Zusammenhangskomponenten H_1 und H_2. Der Teilgraph H_1 sei ein vollständiger Graph mit n Knoten, der Teilgraph H_2 sei ein Baum mit insgesamt $2n$ Knoten. Der Graph G entsteht aus H dadurch, dass man weitere Kanten wie folgt zu H hinzufügt: Man verbindet jeden Knoten von H_1 mit jedem Knoten von H_2 durch eine Kante.

a) Wie viele Kanten besitzt der Graph G?

b) Besitzt der Graph G einen Hamiltonkreis? Falls ja, so ist eine Konstruktionsvorschrift für einen Hamiltonkreis anzugeben. Falls nein, wieso nicht?

c) Begründe, weshalb der Graph G im Allgemeinen keine Eulersche Linie besitzt.

Aufgabe 12

G sei ein ungerichteter Graph mit 100 Knoten. Dabei besitzen 15 Knoten den Grad 1, 5 Knoten besitzen Grad 2, 55 Knoten besitzen Grad 5; die restlichen Knoten besitzen Grad 8. Wie viele Kanten besitzt der Graph G?

Aufgabe 13

Wahr oder falsch?

(i) Jeder vollständige Graph besitzt einen Hamiltonkreis.

(ii) Die Summe aller Knotengrade ist stets gerade.

(iii) Es existiert kein ungerichteter Graph mit n Knoten und n^2 Kanten.

(iv) Das "Haus des Nikolaus" besitzt eine Eulersche Linie.

(v) Es sei $G = (V, E)$. Gilt $c(G - A) \leq |A|$ für alle Teilmengen $A \subseteq V$, so besitzt der Graph G einen Hamiltonkreis.

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit

&

Viel Erfolg bei der Bonusklausur ☺