Tutorium: Diskrete Mathematik

Vektoren

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Definition I

Im allgemeinen Sinn versteht man in der linearen Algebra unter einem *Vektor* ein Element eines *Vektorraums*, d.h. ein Objekt, das zu anderen Vektoren addiert und mit Zahlen, die *Skalare* genannt werden, multipliziert werden kann. (Quelle: Wikipedia)

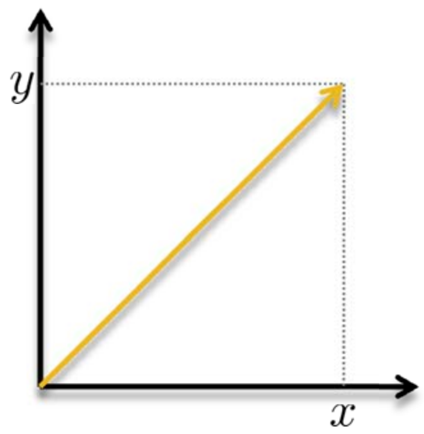
Definition II

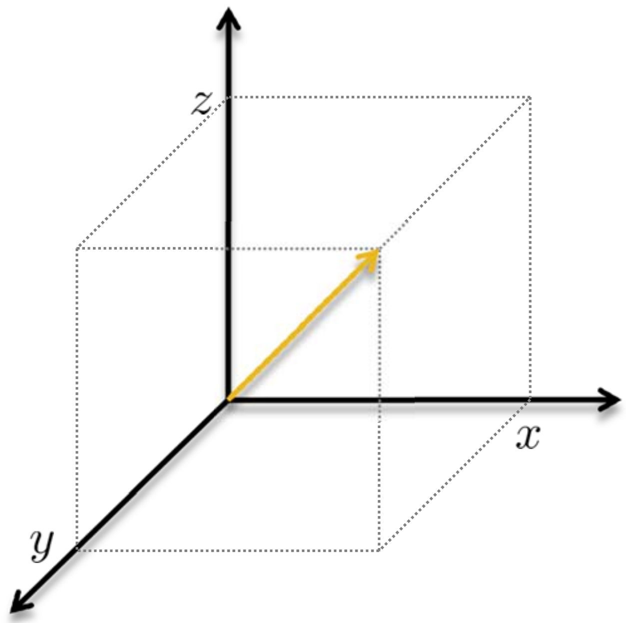
In der analytischen Geometrie kann man einen Vektor als ein Objekt auffassen, dass eine *Parallelverschiebung* in der *Ebene* oder im *Raum* beschreibt.

Ein Vektor kann als Pfeil aufgefasst werden, der einen *Urbildpunkt* mit seinem *Bildpunkt* verbindet.

Definition III

Jedem Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ bzw. $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ kann ein Vektor zugeordnet werden.





Analoges gilt auch für alle Punkte $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Schreibweise I

Ein Vektor kann wie folgt dargestellt werden:

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Anstatt die einzelnen Einträge mit x, y oder z zu bezeichnen, ist auch die folgende Notation sehr gebräuchlich:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Schreibweise II

Bisher haben wir Vektoren immer als *Spaltenvektoren* betrachtet:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}.$$

Alternativ kann man Vektoren aber auch als *Zeilenvektoren* betrachten:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix}.$$

Zur besseren Übersicht dürfen zwischen den einzelnen Einträgen auch Trennzeichen – beispielsweise Kommas oder Semikolons – gesetzt werden:

$$v = \begin{pmatrix} v_1, & v_2, & v_3 \end{pmatrix}.$$

Nullvektor

Als *Nullvektor* wird der folgende spezielle Vektor bezeichnet, dessen Einträge alle Null sind:

$$v = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Oft wird der Nullvektor mit 0 oder o bezeichnet.

Transponieren von Vektoren

Vektoren können *transponiert* werden. Das bedeutet nichts anderes, als einen Zeilenvektor als einen Spaltenvektor aufzuschreiben – und andersherum:

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} \quad \text{wird zu} \quad v^T = (v_1, v_2, v_3);$$

$$u = (u_1, u_2, u_3) \quad \text{wird zu} \quad u^T = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}.$$

Länge eines Vektors

Die *Länge eines Vektors* lässt sich leicht mit Hilfe des *Skalarprodukts* oder geometrisch über den *Satz des Pythagoras* bestimmen. Es gilt

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}.$$

Allgemein gilt

$$|v| = \sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2}.$$

Normieren von Vektoren

Unter einem *normierten Vektor* v' zu einem Vektor v versteht man einen Vektor der Länge 1, der dieselbe Richtung wie v besitzt. Man erhält den normierten Vektor v' zu einem beliebigen Vektor v, indem man v mit dem Reziproken seiner Länge multipliziert.

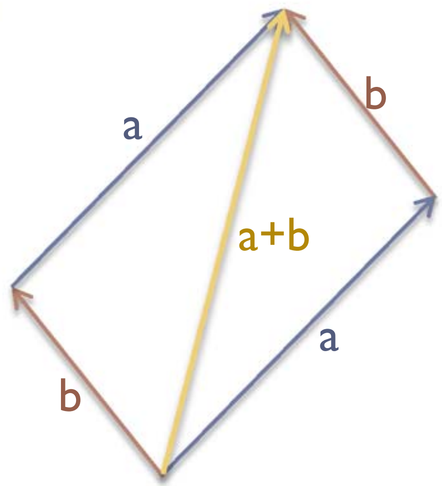
$$v' = \frac{1}{|v|} \cdot v$$

Addition von Vektoren

Die Addition von Vektoren erfolgt komponentenweise:

$$a + b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix} .$$

Grafisch kann man die Vektoraddition als Hintereinanderhängen der Vektoren betrachten.

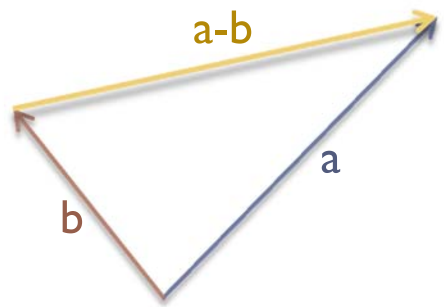


Subtraktion von Vektoren

Die Subtraktion von Vektoren erfolgt ebenfalls komponentenweise:

$$a - b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}.$$

Man kann die Subtraktion auch als Addition des Vektors $-b$ zum Vektor a betrachten. Grafisch sieht dies wie folgt aus:

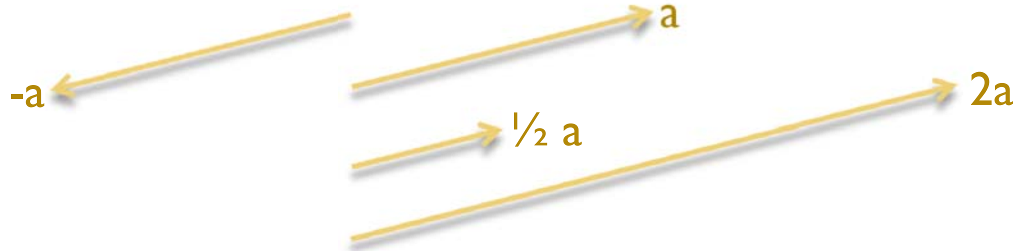


Skalare Multiplikation

Ein Vektor kann mit einem konstanten Faktor $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert werden. Den Wert λ nennt man *Skalar*.

$$\lambda a = \lambda \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot a_1 \\ \lambda \cdot a_2 \\ \lambda \cdot a_3 \end{pmatrix}$$

Man kann die *skalare Multiplikation* als Strecken oder Stauchen des Vektors interpretieren.



Aufgaben

Aufgabe 1

a) Berechne die Summe und die Differenzen der beiden Vektoren $a = (5, 0, 23)$ und $b = (4, 2, -7)$.

b) Berechne die Summe und die Differenzen der beiden Vektoren $a = (47, -8, 0)$ und $b = (3, 42)$.

Aufgabe 2

Gegeben seien die Vektoren $v_1 = (1, 2, 3)$, $v_2 = (7, 5, -3)$ und $v_3 = (0, 2, 1)$. Berechne die Länge des Vektors $v = v_1 - v_2 + 3v_3$.

Aufgaben

Aufgabe 3

Kannst du entscheiden, ob die Vektoren $v_1 = (4, -2, 5)$ und $v_2 = (-2, 4, 0)$ orthogonal sind?

Skalarprodukt I

Das *Skalarprodukt* (auch *inneres Produkt* oder *Punktprodukt*) ist eine weitere Art der Vektormultiplikation. Dabei werden die Vektoren komponentenweise multipliziert und diese Produkte aufsummiert:

$$a \cdot b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 .$$

Man nennt dies auch die *Koordinatenform* des Skalarprodukts.

Skalarprodukt II

Anhand des Skalarprodukts zweier Vektoren a und b kann man Rückschlüsse auf den Winkel zwischen diesen beiden Vektoren ziehen.

Es gilt

$$a \cdot b = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a \perp b.$$

In Worten: Das Skalarprodukt zweier Vektoren ist genau dann 0, wenn die beiden Vektoren *senkrecht zueinander* (*orthogonal*) sind.

Skalarprodukt III

Eine andere Art, das Skalarprodukt zu definieren, ist die folgende:

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos\alpha.$$

- $|a|$ und $|b|$ sind die Längen der Vektoren a und b;
- α ist der zwischen den beiden Vektoren eingeschlossene Winkel.

Skalarprodukt IV

Aus der Formel

$$a \cdot b = |a| \cdot |b| \cdot \cos\alpha$$

kann man Rückschlüsse auf den Winkel zwischen den beiden Vektoren a und b ziehen:

$$\cos\alpha = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}.$$

Hieraus folgt

$$\alpha = \arccos\left(\frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}\right).$$

Skalarprodukt V

Abschließend sehen wir uns an, wie die bereits erwähnte Koordinatenform des Skalarprodukts hergeleitet werden kann.

Gegeben seien die beiden Vektoren $u = (u_1, u_2, u_3)$ und $v = (v_1, v_2, v_3)$. φ sei der zwischen u und v eingeschlossene Winkel.

Nach dem Kosinussatz gilt

$$|v-u|^2 = |v|^2 + |u|^2 - 2|u||v|\cos\varphi.$$

Umformen ergibt

$$|u||v|\cos\varphi = \frac{1}{2}\Big(|v|^2 + |u|^2 - |v-u|^2\Big).$$

Skalarprodukt VI

Einsetzen der Definition des Skalarprodukt ergibt

$$u \cdot v = \frac{1}{2}\Big(|v|^2 + |u|^2 - |v-u|^2\Big).$$

Mit der bekannten Formel für den Betrag eines Vektors erhalten wir:

$$\begin{aligned} u \cdot v &= \frac{1}{2}\Big(u_1^2 + u_2^2 + u_3^2 + v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 \\ &\qquad - (v_1 - u_1)^2 - (v_2 - u_2)^2 - (v_3 - u_3)^2\Big) \\ &= \frac{1}{2}\Big(2u_1v_1 + 2u_2v_2 + 2u_3v_3\Big) \\ &= u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3. \end{aligned}$$

Kreuzprodukt

Das *Kreuzprodukt* (auch *äußeres Produkt*, *vektorielles Produkt* oder *Vektorprodukt*) ist ebenfalls eine Art, zwei Vektoren a und b zu multiplizieren. Das Resultat ist ein neuer Vektor c, der sowohl senkrecht zu a (d.h. $a \perp c$) als auch senkrecht zu b (d.h. $b \perp c$) steht:

$$c = a \times b = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} .$$

Wichtig: Das Kreuzprodukt ist nur im $\mathbb{R}^3$ definiert!

Aufgaben

Aufgabe 4

Gegeben sind die folgenden Vektoren a, b und c:

$$a = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad c = \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

a) Bestimme $a \cdot b$, $a \cdot c$ sowie $b \cdot c$. Welche der Vektoren a, b und c sind senkrecht zueinander?

b) Bestimme einen Vektor, der sowohl senkrecht zu a als auch senkrecht zu b ist. Gib diesen als normierten Vektor an.