Mathematik I für Studierende der Informatik
(Diskrete Mathematik)

Thomas Andreae, Christoph Stephan

Wintersemester 2011/12
Blatt 8

B: Hausaufgaben zum 15./16. Dezember 2011

3. Es sei $n \geq 4$ eine gerade Zahl. Der Graph H bestehe aus zwei Zusammenhangskomponenten H_1 und H_2, wobei H_1 ein Graph mit n Knoten ist, die alle den Grad 3 besitzen; H_2 sei ein vollständiger Graph mit ebenfalls n Knoten. Der Graph G entsteht aus H dadurch, dass man weitere Kanten folgendermaßen zu H hinzufügt: Man verbindet jeden Knoten von H_1 mit jedem Knoten von H_2 durch eine Kante.

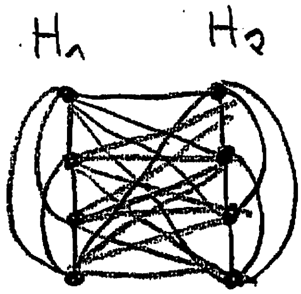
a) Für $n = 4$ und $n = 6$ gebe man je ein Beispiel für einen derartigen Graphen G an (durch Zeichnung).

b) Man zeige, dass G genau $\frac{3}{2}n^2 + n$ Kanten hat.

c) Man zeige, dass G einen Hamiltonschen Kreis besitzt (durch Angabe eines solchen Kreises).

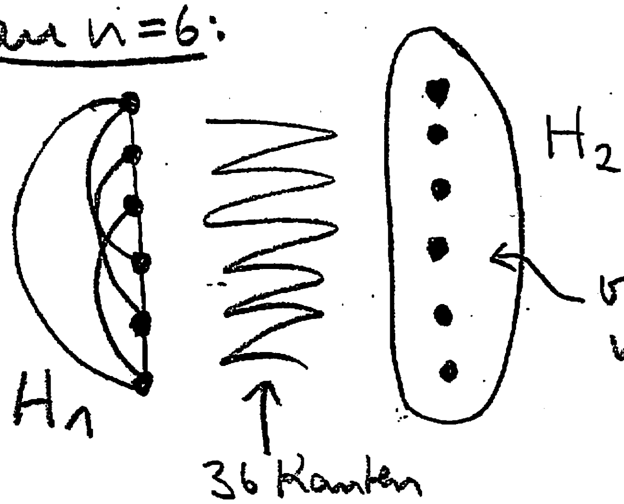
d) Man begründe, weshalb G keine Eulersche Linie besitzt.

a) <u>$n=4$:</u>



$\Rightarrow$ G ist ein vollständiger Graph mit 8 Knoten

<u>Skizze zu $n=6$:</u>



vollständiger Graph mit 6 Knoten

b) H_1 hat $\frac{3n}{2}$ Kanten, H_2 hat $\frac{n(n-1)}{2}$ Kanten, zwischen H_1 und H_2 laufen n^2 Kanten; insgesamt: $\frac{3n}{2} + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + n^2 =$

$\underline{\underline{\frac{3}{2}n^2 + n \text{ Kanten}}}$.

c) Sind $a_1, a_2, \ldots, a_n$ und $b_1, b_2, \ldots, b_n$ die Knoten von H_1 bzw. H_2 (in beliebiger Reihenfolge), so ist $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n, b_n, a_1$ ein Hamiltonscher Kreis von G.

d) In G haben die Knoten von H_1 den Grad $n+3$. Da n gerade ist, ist $n+3$ eine ungerade Zahl, d. h., es gibt in G Knoten ungeraden Grades. Also hat G keine Eulersche Linie.

<u>Kleine Zusatzfrage</u>: Haben Sie eine Idee, weshalb vorausgesetzt wurde, dass n eine gerade Zahl mit $n \geq 4$ ist?

4. $M = \{a, b, c, d\}$ sei eine Menge mit vier Elementen und $A = \mathcal{P}(M)$ sei die Potenzmenge von M.

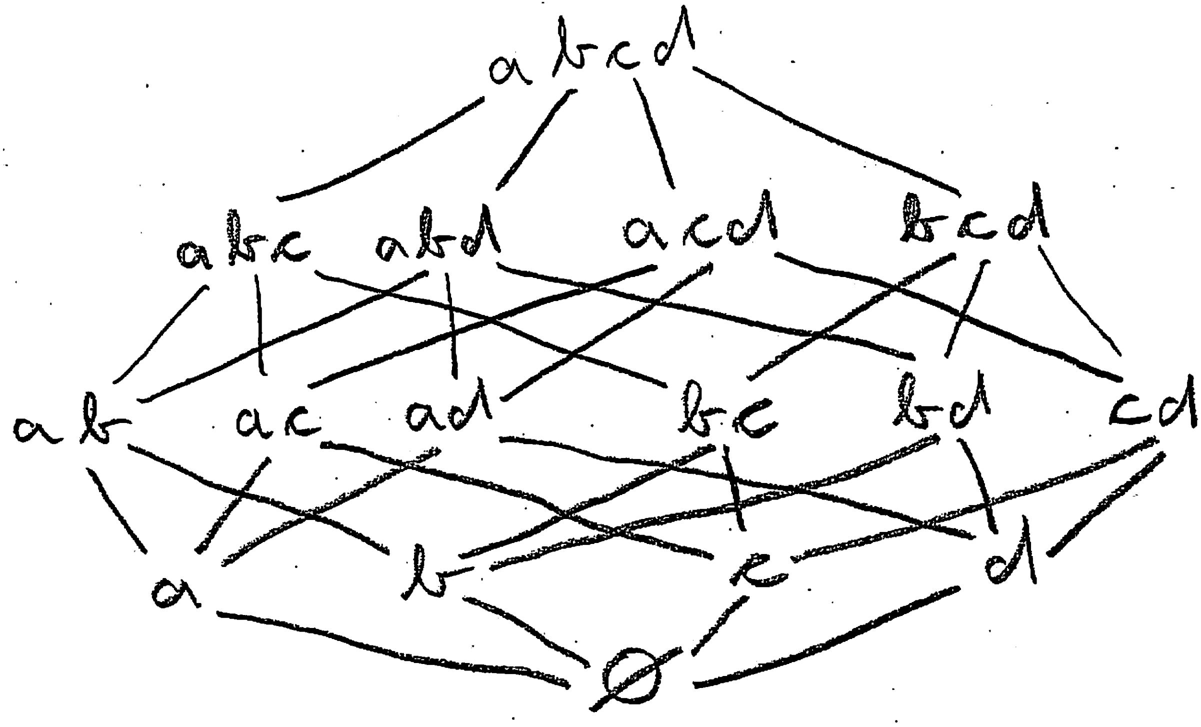
a) Wie viele Elemente enthält $\mathcal{P}(M)$? Geben Sie die Elemente von $\mathcal{P}(M)$ an.

b) Auf $A = \mathcal{P}(M)$ betrachten wir die Relation $\subseteq$ („Inklusion von Mengen"). Zeichnen Sie das zugehörige Hasse-Diagramm.
Hinweis: Ganz unten steht $\emptyset$, darüber die Mengen $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ und $\{d\}$, darüber die 2-elementigen Teilmengen von M, etc. Es ist etwas Sorgfalt beim Zeichnen des Hasse-Diagramms nötig!

c) Nun fassen wir das Hasse-Diagramm aus b) als Graphen auf. Dieser Graph ist isomorph zu einem anderen Graphen, der bereits auf diesem Übungsblatt vorkam. Zu welchem? Geben Sie einen zugehörigen Isomorphismus an. (Möglichst nicht irgendeinen, sondern den naheliegenden!)

a) $2^4 = 16$; Elemente von $\mathcal{P}(M)$: $\emptyset$, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$, $\{b,c\}$, $\{b,d\}$, $\{c,d\}$, $\{b,c,d\}$, $\{a,c,d\}$, $\{a,b,d\}$, $\{a,b,c\}$, M.

b) Elemente von $\mathcal{P}(M)$ werden ohne Mengenklammern und Kommata angegeben:



c) Der Graph G aus b) ist isomorph zu Q_4. Naheliegender Isomorphismus:

$f(\emptyset) = 0000$
$f(a) = 1000$
$f(b) = 0100$
$f(c) = 0010$
$f(d) = 0001$
$f(ab) = 1100$
$f(ac) = 1010$
$f(ad) = 1001$
$f(bc) = 0110$
$f(bd) = 0101$
$f(cd) = 0011$
$f(abc) = 1110$
$f(abd) = 1101$
$f(acd) = 1011$
$f(bcd) = 0111$
$f(abcd) = 1111$.

<u>Erklärung</u>: Wie schon zuvor, wurden die folgenden abkürzenden Schreibweisen verwendet: Die Elemente von $\mathfrak{P}(M)$ wurden ohne Mengenklammern und Kommata angegeben (z.B. acd statt $\{a,c,d\}$) und für die Knoten von Q_4 wurde beispielsweise 1011 statt (1,0,1,1) geschrieben. Durch f werden die Mengen „codiert": 1001 bedeutet beispielsweise, dass a in der

betreffenden Menge dabei ist, dass b und c nicht dabei sind und dass d wiederum in der betreffenden Menge liegt.

Man beachte außerdem die folgende Entsprechung zwischen G und Q_4: In G sind zwei Knoten genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sich die betreffenden Mengen nur um ein Element unterscheiden; Entsprechendes gilt in Q_4: Zwei Knoten sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sich die betreffenden n-Tupel an genau einer Stelle unterscheiden.