Globale Extrema

In vielen Anwendungen der Differentialrechnung möchte man nicht nur lokale Extremstellen finden, sondern man ist vor allem daran interessiert, globale Extrema zu bestimmen. Dies gilt insbesondere für die Wirtschaftswissenschaften, in denen es häufig um Gewinnmaximierung oder Kostenminimierung geht (vergl. beispielsweise Blatt 10, Aufgabe 4). Wir betrachten hier

den speziellen Fall einer Funktion $f: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, d.h. wir setzen voraus, dass f auf dem gesamten Raum $\mathbb{R}^n$ definiert ist. Außerdem wollen wir annehmen, dass auf $\mathbb{R}^n$ alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung existieren und stetig sind.

Zur Orientierung betrachten wir zunächst den Fall $n=1$: An einer Stelle $x_0 \in \mathbb{R}$ gelte

(1) $f'(x_0)=0$ und $f''(x_0)>0$.

Wie wir wissen, liegt dann an der

Stelle x_0 ein lokales Minimum vor[1]. Nehmen wir nun zusätzlich an, dass $f''(x) > 0$ nicht nur für $x = x_0$, sondern für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Dann können wir sicher sein, dass bei x_0 sogar ein globales Minimum vorliegt. Der Grund, weshalb dies so ist, ist einfach zu erkennen:

$f''(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ bedeutet, dass f auf $\mathbb{R}$ streng konvex ist (vergl. Skript, S. 48). Der Graph von f ist also (anschaulich ausgedrückt) "nach unten durchhängend" bzw. anders gesagt "beschreibt eine Linkskurve", weshalb x_0 ein globales Minimum auf $\mathbb{R}$ sein muss.

Besonders einfaches Beispiel: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$. Dann gilt: $f'(x) = 2x$ und $f''(x) = 2 > 0$. Bei $x_0 = 0$ liegt also ein globales Minimum vor.

---

1) genauer: Es liegt sogar ein strenges lokales Minimum vor; das ergibt sich aus dem Beweis von Satz 18, Skript S. 46/47.

<u>Nun betrachten wir wieder den allgemeinen Fall $n \geq 1$.</u> Analog zu (1) setzen wir voraus, dass an einer Stelle $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ Folgendes gilt:

(2) $\operatorname{grad} f(x^{(0)}) = 0$ und $H_f(x^{(0)})$ ist positiv definit.

Wir wissen, dass dann an der Stelle $x^{(0)}$ ein strenges lokales Minimum vorliegt. Nehmen wir nun zusätzlich an, dass $H_f(x)$ sogar für alle $x \in \mathbb{R}^n$ positiv definit ist, <u>dann können wir wieder sicher sein, dass sogar ein globales Minimum vorliegt.</u>

Entsprechende Aussagen gelten auch für lokale bzw. globale Maxima von Funktionen $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. (Um dies einzusehen, braucht man anstelle von f nur die Funktion $-f$ zu betrachten.)

Zusammenfassend können wir feststellen: Es sei $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die auf $\mathbb{R}^n$ sämtliche partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung existieren und stetig sind. Für ein $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ gelte $\operatorname{grad} f(x^{(0)}) = 0$. Dann folgt:

(a) Ist die Hessesche Matrix $H_f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ positiv definit, so hat f an der Stelle $x^{(0)}$ ein globales Minimum.

(b) Ist die Hessesche Matrix $H_f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ negativ definit, so hat f an der Stelle $x^{(0)}$ ein globales Maximum.