Tutorium: Analysis und Lineare Algebra

Vorbereitung der Bonusklausur am 02.07.2012

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Aufgabe 1

Differenziere die folgenden Funktionen:

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} && f(x) = 3x^7 + 2x^6 - 4x^3 + x - 1 \\
&\text{(ii)} && f(x) = \left(x^5 - x^3 + x\right)^3 \\
&\text{(iii)} && f(x) = \left(2x^2 - 1\right) \cdot \sqrt[3]{2x^2 + 1} \\
&\text{(iv)} && f(x) = \sqrt{\sin\left(x^3\right)} \cdot \ln y \\
&\text{(v)} && f(x) = 2^{x^{-2} - x + 1} \\
&\text{(vi)} && f(x) = \sin x \cdot \cos x
\end{aligned}
$$

Aufgabe 2

Differenziere die folgenden Funktionen:

$$\text{(i)} \quad f(x) = \cos\left(\ln\left(\sqrt{3x \cdot \sin x}\right)\right)$$

$$\text{(ii)} \quad f(x) = e^x \cdot \sqrt{2x} \cdot \cos x$$

$$\text{(iii)} \quad f(x) = (\sin x)^{x^2+1}$$

$$\text{(iv)} \quad f(x) = \frac{\tan x}{e^x}$$

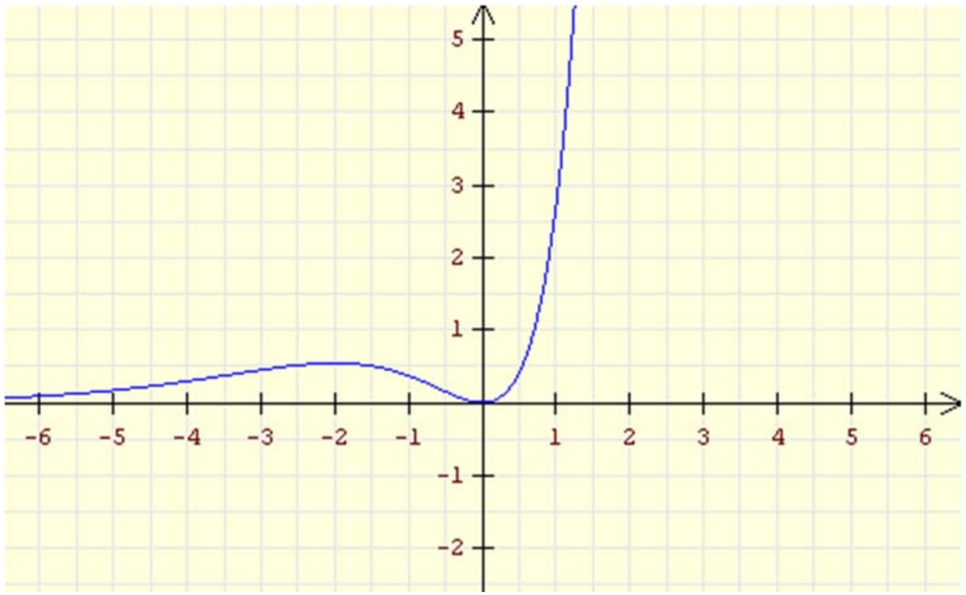
$$\text{(v)} \quad f(x) = \cos\left(3x^2\right) \cdot \ln\left(\sqrt{\sin\left(2x^3\right)}\right)$$

$$\text{(vi)} \quad f(x) = 2^{2^x}$$

Aufgabe 3

Bestimme die Extrem- und Wendepunkte der folgenden Funktion:

$$f(x) = e^x \cdot x^2$$



Aufgabe 4

Zeige mithilfe der Definition der Differenzierbarkeit, dass die Funktion

$$f(x) = \left|2x - 4\right|$$

an der Stelle $x_0 = 2$ nicht differenzierbar ist.

Aufgabe 5

Bestimme mithilfe einer Untersumme die Fläche, die von der x-Achse, den beiden Geraden $x = 0$ und $x = 1$ sowie dem Graphen der Funktion

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 + x$$

eingeschlossen wird.

Aufgabe 6

Berechne die folgenden Integrale:

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} && \int \left(23x^4 + x^3 - 2x^2 + 7\right)\, dx \\
&\text{(ii)} && \int \frac{1}{\sqrt[5]{x^3}}\, dx \\
&\text{(iii)} && \int \cos\left(4x\right)\, dx \\
&\text{(iv)} && \int \left(x^2 + 1\right) \cdot \sin\left(2x\right)\, dx \\
&\text{(v)} && \int x^9 \cdot \ln x\; dx \\
&\text{(vi)} && \int 2^{\sqrt[3]{7x+5}}\, dx
\end{aligned}
$$

Aufgabe 7

Berechne die folgenden Integrale:

$$\text{(i)} \quad \int \frac{4x+2}{x^2+x}\,dx$$

$$\text{(ii)} \quad \int \tan x\,dx$$

$$\text{(iii)} \quad \int \frac{\arctan x}{x^2+1}\,dx$$

$$\text{(iv)} \quad \int 2 \cdot \sin x \cdot \cos x\,dx$$

$$\text{(v)} \quad \int \frac{5x-7}{x^2-x-6}\,dx$$

$$\text{(vi)} \quad \int \frac{42}{2x^2+3}\,dx$$

Aufgabe 8

Gegeben sei die folgende Reihe: $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{-4^k}\right).$

a) Bestimme die ersten 4 Partialsummen dieser Reihe.

b) Entscheide, ob Konvergenz oder Divergenz vorliegt. Begründe deine Antwort.

c) Im Falle der Konvergenz: Gib den Grenzwert der Reihe an.

Aufgabe 9

Entscheide, ob für die folgenden Reihen Konvergenz oder Divergenz vorliegt:

(i) $$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{5^{k+1}} \right)$$

(ii) $$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{2} \right)^{k}$$

(iii) $$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k}}{3} \right)^{k}$$

(iv) $$\sum_{i=3}^{\infty} \left(\frac{5}{2i} \right)$$

(v) $$\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{42}{3} j^{-2} \right)$$

(vi) $$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(-1)^{k+1}}{k} \right)$$

Aufgabe 10

a) Entscheide mithilfe der Limes-Version des Wurzel- oder des Quotientenkriteriums, ob die folgenden Reihen konvergieren.

(i) $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} i! \cdot 5^{-i} \cdot i^2$ (ii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \frac{6^i \cdot i^3}{(i+1)!}$ (iii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{23}{42}\right)^i \cdot i^5$

b) Bestimme diejenigen $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe

$$\sum_{i=1}^{\infty} 2^i \cdot 5^{-i-1} \cdot i^2 \cdot x^i$$

konvergiert:

(i) mit der Limes-Version des Quotientenkriteriums;

(ii) mit der Limes-Version des Wurzelkriteriums.

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit

&

Viel Erfolg bei der Bonusklausur ☺