Mathematik I für Studierende der Informatik (Diskrete Mathematik)

Thomas Andreae, Christoph Stephan

Wintersemester 2011/12
Blatt 9

B: Hausaufgaben zum 22./23. Dezember 2011

2. G sei die Quadratgruppe (vgl. Abschnitt 6.2); die Elemente von G seien wie im Skript mit i, r, s, t, w, x, y und z bezeichnet.

a) Man berechne $s * y$, $x * r$ sowie $x * y$ und gebe zu allen Elementen das zugehörige Inverse an.

b) Ist G zyklisch? Ist G kommutativ? Welche Ordnungen besitzen die Elemente von G?

c) Finden Sie zwei Untergruppen H_1 und H_2 von G, die beide die Ordnung 4 haben. Ist eine dieser Untergruppen zyklisch? Ist eine dieser Untergruppen isomorph zur Rechteckgruppe?

a) $s*y=z$, $x*r=y$, $x*y=r$.

	i	r	s	t	w	x	y	z
Inverses	i	t	s	r	w	x	y	z

b)

	i	r	s	t	w	x	y	z
Ordnung	1	4	2	4	2	2	2	2

G ist nicht zyklisch, da es kein Element der Ordnung 8 gibt;
G ist nicht kommutativ, da $x*r=y$ und $r*x=z$.

c) $H_1 = \{i, r, s, t\}$ ist eine zyklische Untergruppe;

$H_2 = \{i, s, w, x\}$ ist eine Untergruppe, die isomorph zur Rechteckgruppe ist.

Begründungen: $H_1 = \langle r \rangle$, da $r^2 = s$, $r^3 = t$ und $r^4 = i$.

Dass H_2 isomorph zur Rechteckgruppe ist, folgt unmittelbar aus der Tatsache, dass H_2 dieselben Symmetrietransformationen zugrundeliegen wie der Rechteckgruppe.

4. Man zeige, dass Folgendes gilt, wenn man isomorphe Gruppen als gleich ansieht: Es gibt genau zwei verschiedene Gruppen der Ordnung 4.

Hinweis: Man zeige, dass es außer der zyklischen Gruppe $G = < a > = \{1, a, a^2, a^3\}$ bis auf Isomorphie nur noch eine weitere Gruppe der Ordnung 4 gibt. Man beginne den Beweis so: Sei $G = \{1, a, b, c\}$ eine nicht zyklische Gruppe. Man überlege sich dann, welche Ordnung die Elemente a, b und c aufgrund der Folgerung 1 in Abschnitt 6.8 haben müssen. Danach zeige man, dass damit die Einträge der Gruppentafel bereits feststehen.

Abschließend finde man unter den Gruppen, die wir bereits kennengelernt haben, ein Beispiel für eine nicht zyklische Gruppe der Ordnung 4.

Lösung: Der Anleitung folgend erkennt man, dass in der Gruppentafel in der Hauptdiagonalen lauter Einsen stehen mssen:

	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	1		
b	b		1	
c	c			1

Denn die Ordnung jedes Gruppenelementes muss nach der Folgerung 1, Abschnitt ~~7~~6.8 ein Teiler von 4 sein, und da die Gruppe nicht zyklisch sein soll, hat kein Element die Ordnung 4, also alle Elemente außer 1 die Ordnung 2.

In der zweiten Zeile fehlen noch die Einträge b und c. Da in keiner Spalte ein Eintrag mehrfach vorkommen darf, muss die zweite Zeile $a, 1, c, b$ lauten. Die übrigen Einträge ergeben sich mit ählichen Überlegungen zu

	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	1	c	b
b	b	c	1	a
c	c	b	a	1

Damit ist gezeigt, dass es außer der zyklischen Gruppe höchstens eine weitere Gruppe der Ordnung 4 gibt.

Dass tatsächlich eine solche Gruppe existiert, erkennt man durch die Angabe eines Beispiels: Die Rechteckgruppe ist eine nicht zyklische Gruppe der Ordnung 4.