3. Gegeben seien zwei reelle Funktionen g und h. Es gelte: g ist in x_0 stetig und h ist in $y_0 = g(x_0)$ stetig. Zeigen Sie, dass dann auch die Funktion $f = h \circ g$ an der Stelle x_0 stetig ist. („Die Nacheinanderausführung zweier stetiger Funktionen ist wiederum stetig.")

Es sei $(x_1, x_2, x_3, \dots)$ eine Folge mit $x_n \to x_0$, wobei $x_n \in D(h \circ g)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und auch $x_0 \in D(h \circ g)$. Zu zeigen ist $(h \circ g)(x_n) \to (h \circ g)(x_0)$. Aus $x_n \in D(h \circ g)$ folgt $x_n \in D(g)$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ und nach Voraussetzung gilt $x_n \to x_0$. Also folgt wegen der Stetigkeit von g in x_0, dass $g(x_n) \to g(x_0)$. Aus $x_n \in D(h \circ g)$ folgt ferner $g(x_n) \in D(h)$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$. Also folgt wegen der Stetigkeit von h in $g(x_0)$, dass $h(g(x_n)) \to h(g(x_0))$ gilt, was zu zeigen war.

<u>Kurzfassung:</u>

$$x_n \to x_0 \underset{\substack{\text{Stetigkeit}\\ \text{von } g\\ \text{in } x_0}}{\Longrightarrow} g(x_n) \to g(x_0) \underset{\substack{\text{Stetig-}\\ \text{keit von } h\\ \text{in } g(x_0)}}{\Longrightarrow} h(g(x_n)) \to h(g(x_0))$$

4. Die Funktionen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien gegeben durch

$$g(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{, für } x \neq 0 \\ 0 & \text{, für } x = 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad h(x) = \begin{cases} x \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{, für } x \neq 0 \\ 0 & \text{, für } x = 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, für welche $x \in \mathbb{R}$ diese Funktionen stetig sind. (Insbesondere ist also zu untersuchen, ob diese Funktionen im Punkt $x_0 = 0$ stetig sind.)

Ist $x \neq 0$, so sind beide Funktionen in x stetig. Dies ergibt sich aus der Stetigkeit der beteiligten Funktionen unter Anwendung von Hausaufgabe 3 und den Sätzen 10 (a) und 11(b) (Skript Seite 24 und 25).

g ist unstetig in $x = 0$, denn für $x_n = \frac{1}{2\pi n}$ gilt $x_n \to 0$ und $g(x_n) = \cos(2\pi n) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also $g(x_n) \to 1 \neq 0 = g(0)$.

h ist stetig in $x = 0$, denn für $x_n \to 0$ gilt

$$0 \leq |h(x_n)| = \left|x_n \cos\left(\frac{1}{x_n}\right)\right| = |x_n| \cdot \left|\cos\left(\frac{1}{x_n}\right)\right| \leq$$

$$|x_n| \cdot 1 = |x_n| \to 0.$$ Es folgt (nach dem Einschließungssatz, Skript S. 16)

$\lim\limits_{x \to 0} |h(x)| = 0$ und somit auch

$\lim\limits_{x \to 0} h(x) = 0 = h(0)$, d.h., h ist in 0 stetig.