Tutorium: Diskrete Mathematik

Geraden

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

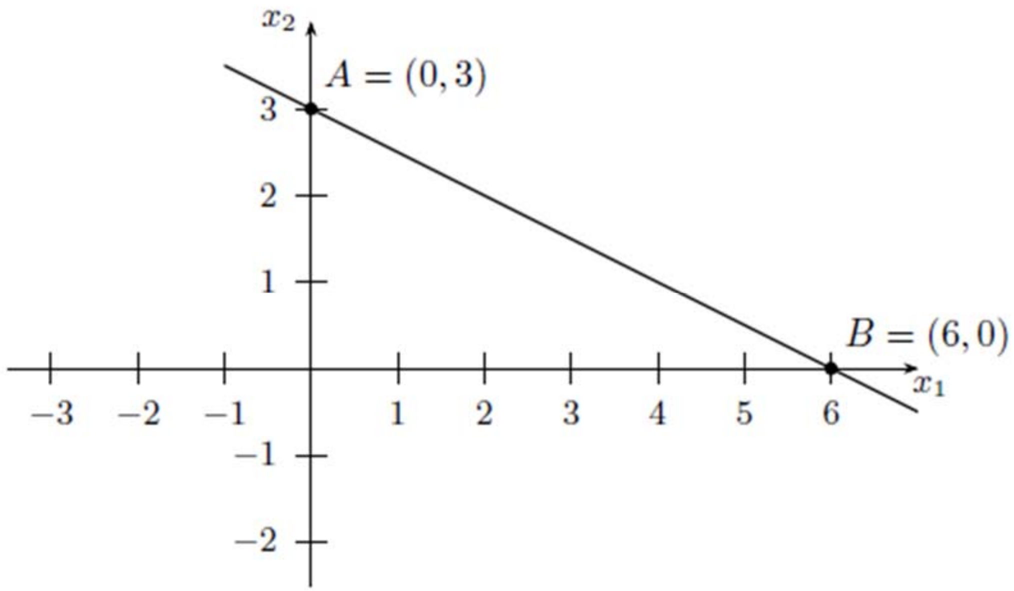
Definition I

Eine *Gerade* oder *gerade Linie* ist ein Element der Geometrie. Anschaulich kann man sich darunter eine unendlich lange, dünne Linie vorstellen.

Eine durch 2 Punkte begrenzte Gerade nennt man *Strecke*.

Definition II

Beispiel einer Geraden, die durch die Punkte $A = (0,3)$ und $B = (6,0)$ verläuft:



Durch die Punkte A und B wird zudem die Strecke $\overline{AB}$ begrenzt.

Darstellungsformen

Eine Gerade kann auf mehrere Arten dargestellt werden:

- die Koordinatenform;
- die Parameterform;
- die Normalenform.

Koordinatenform I

Definition

Jede Gerade in der x_1, x_2-Ebene lässt sich durch eine *Koordinatengleichung*

$$ax_1 + bx_2 + c = 0$$

beschreiben, bei der mindestens einer der beiden Koeffizienten a und b ungleich Null ist.

Koordinatenform II

Aufgabe

Prüfe, ob der Punkt $A = (5, 3)$ auf der Geraden liegt, die durch die Gleichung

$$-x_1 + 3x_2 - 4 = 0$$

beschrieben wird.

Koordinatenform III

Lösung

Der Punkt A hat die Koordinaten $(5, 3)$. Setzt man nun für $x_1 = 5$ und für $x_2 = 3$ ein, so ergibt sich

$$-5 + 3 \cdot 3 - 4 = 0.$$

Folglich liegt der Punkt A auf der Geraden.

Dieses Verfahren nennt man *Punktprobe*, da man für einen Punkt testet, ob er auf der Geraden liegt.

Koordinatenform IV

Frage

Wie findet man die Koordinatenform, wenn lediglich zwei Punkte der Geraden bekannt sind?

Koordinatenform V

Antwort

Man kann es berechnen. Dies geht beispielsweise

- durch Aufstellen der Geradengleichung;
- mit dem Gauß-(Jordan-)Verfahren;
- über die Parameter- oder Normalenform.

Im Folgenden beschäftigen wir uns zunächst damit, die Geradengleichung aufzustellen.

Geradengleichung I

Jede Gerade kann in der folgenden Form dargestellt werden:

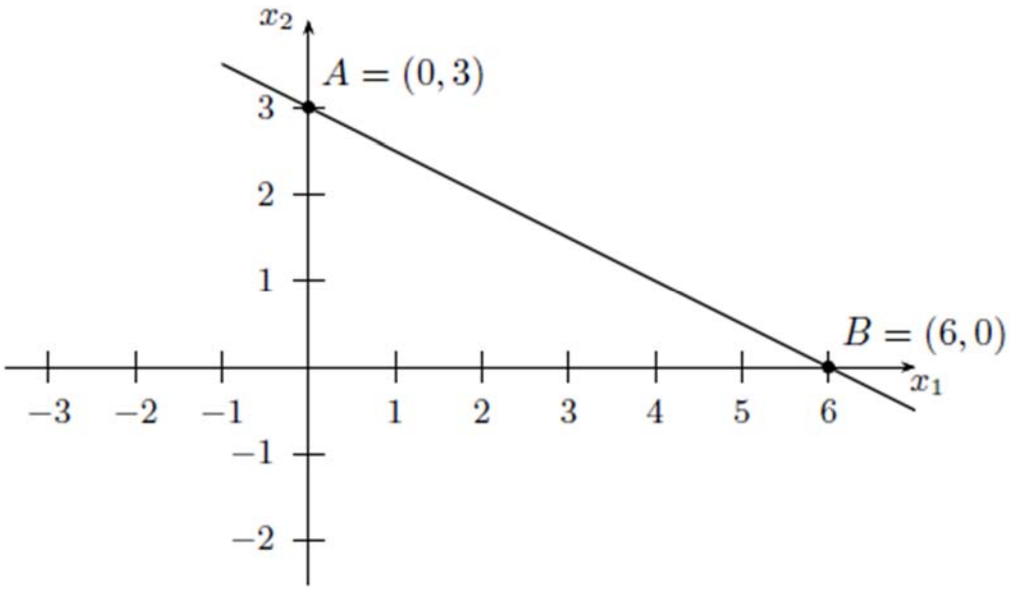
$$x_2 = ax_1 + b.$$

Die Bezeichnungen sind dabei wie folgt:

- x_1 und x_2 sind die Koordinaten;
- a ist der Anstieg der Geraden;
- b ist die Verschiebung in x_2-Richtung.

Geradengleichung II

Wir führen das Verfahren exemplarisch an dem zuvor verwendeten Beispiel einer Geraden vor.



Geradengleichung III

Den Anstieg der Geraden berechnen wir leicht mit einem Steigungsdreieck. Es gilt

$$a = \frac{\Delta x_2}{\Delta x_1} = \frac{b_2 - a_2}{b_1 - a_1}.$$

In unserem Beispiel ist dies

$$a = \frac{0-3}{6-0} = -\frac{1}{2}.$$

Wir können die gesuchte Geradengleichung also bereits wie folgt darstellen:

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + b.$$

Geradengleichung IV

Es verbleibt nur noch die einfache Aufgabe, b zu bestimmen.

Dazu stellen wir die Gleichung nach b um und setzen einen der Punkte A oder B in die Gleichung ein – sie müssen ja beide in jedem Fall auf der Geraden liegen.

$$b = \frac{1}{2}x_1 + x_2.$$

Setzt man A ein, ergibt sich

$$b = \frac{1}{2} \cdot 0 + 3 = 3.$$

Geradengleichung V

Die gesuchte Geradengleichung lautet also

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_1 + 3.$$

Umstellen ergibt die gesuchte Koordinatenform:

$$\frac{1}{2} \cdot x_1 + x_2 - 3 = 0.$$

Alternativ kann diese auch so dargestellt werden:

$$x_1 + 2x_2 - 6 = 0.$$

Aufgaben

Aufgabe 1

Bestimme die Koordinatenform der Geraden, die durch die Punkte $P_1 = (2,3)$ und $P_2 = (4,4)$ verläuft.

Aufgabe 2

Bestimme die Koordinatenform der Geraden, die durch die Punkte $P_1 = (2,1)$, $P_2 = (6,3)$ und $P_3 = (4, \frac{5}{2})$ verläuft.

Parameterform I

Eine andere, sehr komfortable Möglichkeit, eine Gerade darzustellen, ist die sogenannte *Parameterform*. Die Gerade wird dabei in der folgenden Form dargestellt:

$$x = p + t \cdot u \quad (t \in \mathbb{R}).$$

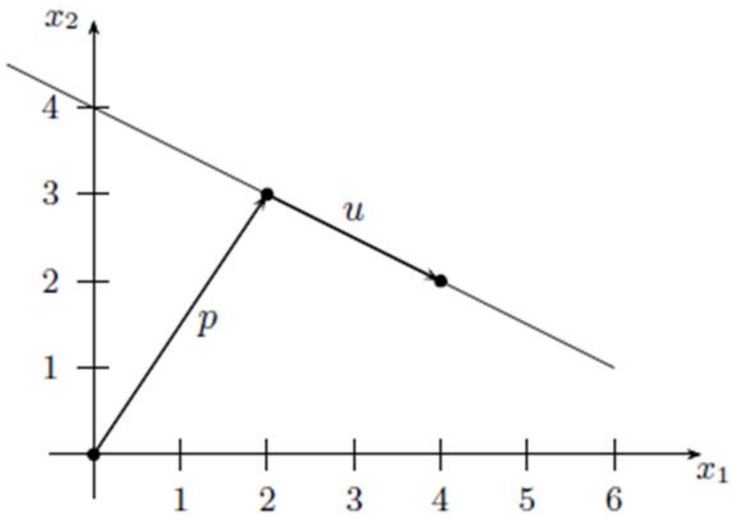
Die Bezeichnungen sind dabei wie folgt:

- p ist der *Stützvektor*;
- u ist ein *Richtungsvektor*;
- $t \in \mathbb{R}$ ist ein beliebiges Skalar.

Diese Darstellung einer Geraden wird auch *vektorielle Punkt-Richtungsform* genannt.

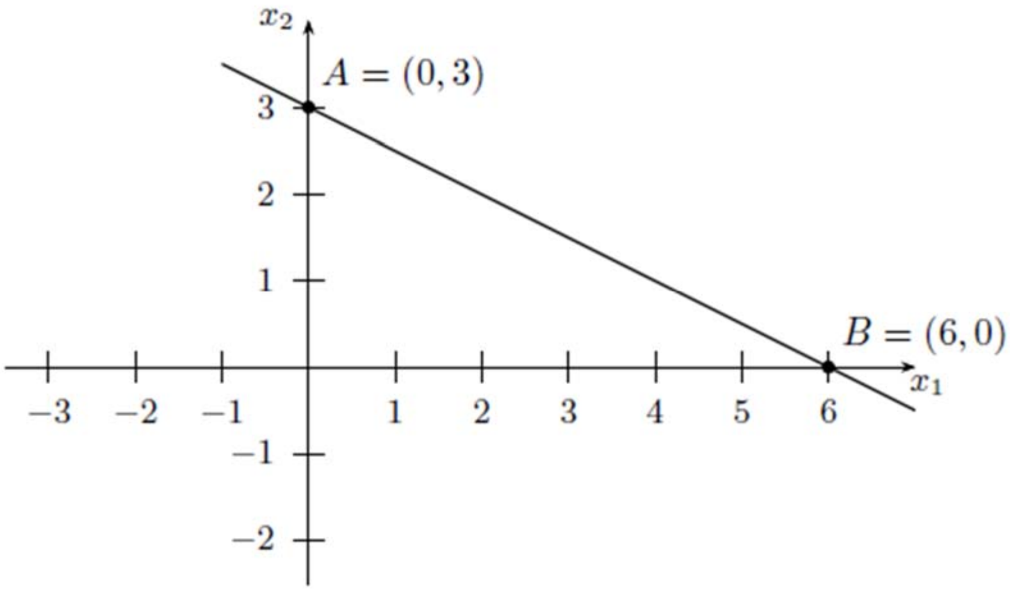
Parameterform II

Bildlich veranschaulicht bedeutet dies, dass die Gerade durch einen Punkt auf der Geraden (der Stützvektor p) sowie die Richtung der Geraden (der Richtungsvektor u) beschrieben wird:



Parameterform III

Wir führen auch dieses Verfahren exemplarisch an dem bereits bekannten Beispiel einer Geraden vor.



Parameterform IV

Als Stützvektor können wir beispielweise den Vektor $\overrightarrow{0A}$ verwenden, als Richtungsvektor den Vektor $\overrightarrow{AB}$. Es ergibt sich

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6-0 \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Die gesuchte Gerade in Parameterform lautet also

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Durch entsprechende Werte für die Variable t kann jeder Punkt der Geraden dargestellt werden.

Normalenform I

Die letzte hier behandelte Art, eine Gerade darzustellen, ist die *Normalenform*. Dabei wird die Gerade unter Zuhilfenahme einer *Normalen* dargestellt – also mit einem zur Geraden senkrechten Vektor. Es gilt

$$n \cdot (x - p) = 0.$$

Die Bezeichnungen sind dabei wie folgt:

- n ist die Normale;
- p ist ein fester Punkt auf der Geraden;
- x ist der zu prüfende Punkt.

Wichtig: Die Normalenform einer Geraden existiert nur im $\mathbb{R}^2$.

Normalenform II

Eine alternative Schreibweise erhält man, wenn man in

$$n \cdot (x - p) = 0$$

n und p ausmultipliziert. Es folgt

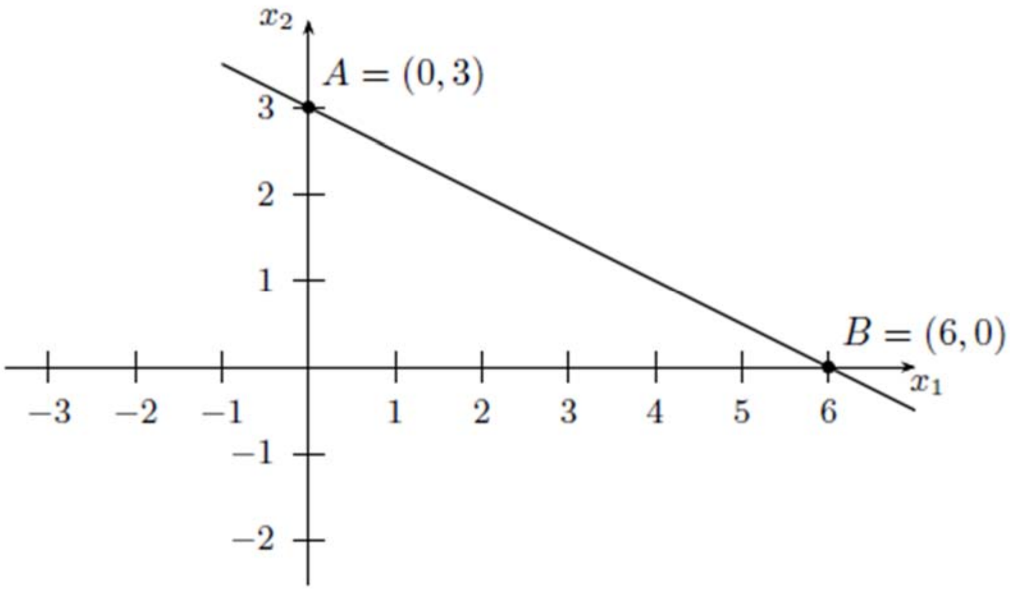
$$n \cdot x + c = 0.$$

Die Bezeichnungen sind dabei wie folgt:

- n ist die Normale;
- x ist der zu prüfende Punkt;
- c ist ein konstanter Wert, der für alle Punkte der Geraden gilt.

Normalenform III

Wir führen auch dies wieder an unserem bisher verwendeten Beispiel vor – unter Berücksichtigung der Ergebnisse der Darstellung in Parameterform.



Normalenform IV

Für einen zweidimensionalen Vektor $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ ist stets jedes Vielfache des Vektors $\begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix}$ ein Normalenvektor von v, denn es gilt

$$\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = -v_1 v_2 + v_1 v_2 = 0.$$

Normalenform V

Nach Bestimmung einer Normalen zum Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ ergibt sich die folgende Normalenform:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot x + c = 0.$$

Einsetzen eines Punktes der Geraden und Ausrechnen von c ergibt

$$c = -\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = -(3 \cdot 0 + 6 \cdot 3) = -18.$$

Normalenform VI

Der berechnete Wert c ist für jeden Punkt der Geraden identisch.

Für die Normalenform der Geraden ergibt sich

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix} \cdot x - 18 = 0.$$

Aufgaben

Aufgabe 3

Bestimme die Parameter- und Normalenform der Geraden, die durch die Punkte $P_1 = (2, 3)$ und $P_2 = (4, 4)$ verläuft.

Ergänzungen zur Parameterform I

Die besprochene Parameterform ging bisher stets von einem $t \in \mathbb{R}$ aus:

$$x = p + t \cdot u \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Es ist jedoch ohne Weiteres möglich, t einzuschränken.

Beispielsweise kann t auf ein *uneigentliches Intervall* eingeschränkt werden (beispielsweise $t > 1$ oder $t \leq -2$). In diesem Fall stellt die Parameterform eine *Halbgerade* dar.

t kann außerdem auf ein endliches Intervall eingeschränkt werden (beispielsweise $0 \leq t \leq 1$). Dann wird durch die Parameterform eine *Strecke* dargestellt.

Ergänzungen zur Parameterform II

Beispiel

Gesucht ist die Parameterdarstellung der Strecke $\overline{PQ}$ für $0 \leq t \leq 1$. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \\
&= t \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + (1 - t) \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq 1)
\end{aligned}$$

Ergänzungen zur Parameterform III

Die gesuchte Parameterform lautet also

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Durch Vertauschen von P und Q ergibt sich analog

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq 1).$$

Umrechnung zwischen den Darstellungen

Die Umrechnung zwischen den einzelnen Darstellungen einer Geraden funktioniert analog zu den Umformungen zwischen den Darstellungen einer Ebene.

Hier werden sie aus diesem Grund nicht weiter besprochen.