Mathematik I für Studierende der Informatik und Wirtschaftsinformatik

(Diskrete Mathematik)

Ergänzungsskript
zum Lehrbuch von G. Gramlich

THOMAS ANDREAE

Wintersemester 2011/12

Inhaltsverzeichnis

1 Ergänzungen zu Abschnitt 1: Lineare Gleichungssysteme und Matrizen

1.1 Bemerkungen und Beispiele zu elementaren Gleichungsumformungen

Unter elementaren Gleichungsumformungen versteht man Folgendes:

- Vertauschen von zwei Gleichungen
- Multiplikation einer Gleichung mit einer von Null verschiedenen Konstanten
- Addition eines Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung

Von grundlegender Wichtigkeit ist der folgende Satz (vgl. Gramlich, Seite 13).

> **Satz 1.1**.
> Elementare Gleichungsumformungen ändern nicht die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems.

Beispiel. Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 7x_1 + 5x_2 &= 2 \\ 3x_1 + x_2 &= -1 \end{aligned}$$

hat dieselbe Lösungsmenge wie das System

$$\begin{aligned} 7x_1 + 5x_2 &= 2 \\ 17x_1 + 11x_2 &= 3\ , \end{aligned}$$

da das Doppelte der ersten Gleichung zur zweiten addiert wurde. Auch das System

$$\begin{aligned} -21x_1 - 15x_2 &= -6 \\ 17x_1 + 11x_2 &= 3 \end{aligned}$$

hat dieselbe Lösungsmenge (*warum*?). Das System

$$\begin{aligned} 17x_1 + 11x_2 &= 3 \\ -21x_1 - 15x_2 &= -6 \end{aligned}$$

hat ebenfalls dieselbe Lösungsmenge, da lediglich die Reihenfolge der beiden Gleichungen vertauscht wurde.

Wir erläutern, weshalb der Satz 1.1 tatsächlich richtig ist:

- Dass sich die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems nicht ändert, wenn man zwei Gleichungen vertauscht, ist eine Selbstverständlichkeit.
- Verändert man ein lineares Gleichungssystem dadurch, dass man eine Gleichung mit einer Konstanten $c \neq 0$ multipliziert, so ist selbstverständlich jede Lösung des alten Systems auch eine Lösung des neuen. *Umgekehrt gilt aber auch: Jede Lösung des neuen Systems ist eine Lösung des alten Systems. Dies liegt daran, dass man das alte System aus dem neuen zurückgewinnen kann, indem man die betreffende Gleichung mit c^{-1} multipliziert.*
- Dass sich auch bei der dritten Umformung („Addition des Vielfachen einer Gleichung zu einer anderen Gleichung“) die Lösungsmenge nicht ändert, sieht man ähnlich ein: Addiert man das c-fache der i-ten Gleichung zur j-ten Gleichung ($i \neq j$), so sind die Lösungen des alten Systems

selbstverständlich auch Lösungen des neuen Systems. *Umgekehrt ist aber auch jede Lösung des neuen Systems eine Lösung des alten, da man das alte System aus dem neuen zurückgewinnen kann, indem man das $(-c)$-fache der i-ten Gleichung zur j-ten Gleichung des neuen Systems addiert.*

Zurück zu unserem Beispiel: Die erweiterte Koeffizientenmatrix unseres linearen Gleichungssystems lautet[1]

$$\begin{bmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Wie wirken sich die obigen elementaren Gleichungsumformungen auf die erweiterte Koeffizientenmatrix aus?

$$\begin{array}{cl}
\begin{bmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} & \\
\downarrow & \text{Addition des Doppelten der ersten Zeile zur zweiten Zeile} \\
\begin{bmatrix} 7 & 5 & 2 \\ 17 & 11 & 3 \end{bmatrix} & \\
\downarrow & \text{Multiplikation der ersten Zeile mit } -3 \\
\begin{bmatrix} -21 & -15 & -6 \\ 17 & 11 & 3 \end{bmatrix} & \\
\downarrow & \text{Vertauschen der beiden Zeilen} \\
\begin{bmatrix} 17 & 11 & 3 \\ -21 & -15 & -6 \end{bmatrix} &
\end{array}$$

Wir stellen fest: Jeder elementaren Gleichungsumformung entspricht eine elementare Zeilenumformung, man muss nur das Wort *Gleichung* durch das Wort *Zeile* ersetzen.

Elementare Zeilenumformungen

- Vertauschen von zwei Zeilen
- Multiplikation einer Zeile mit einer von Null verschiedenen Konstanten
- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile

In Abschnitt 1.3 des Gramlich werden die Begriffe **Zeilenstufenform** und **reduzierte Zeilenstufenform** eingeführt. Zur Einführung dieser beiden Begriffe betrachten wir weitere **Beispiele**.

Welche der folgenden Matrizen liegen in Zeilenstufenform oder reduzierter Zeilenstufenform vor?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

1.2 Ergänzung zum Beispiel 1.9

Im Beispiel 1.9 gab es genau eine freie Variable (nämlich x_2) und dementsprechend hatten wir es mit genau einem Parameter (nämlich t) zu tun. Es kann aber auch zwei oder mehr freie Variable geben und ebenso viele Parameter. Dies soll am folgenden Beispiel, das dem Beispiel 1.9 ähnlich ist, gezeigt werden.

[1] Im Buch von Gramlich werden Matrizen durch eckige Klammern gekennzeichnet. Wir schließen uns dieser Schreibweise an, weisen aber darauf hin, dass in der Literatur üblicherweise runde Klammern benutzt werden.

Mit dem Gauß-Verfahren soll die allgemeine Lösung von

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 &= 12 \end{aligned}$$

berechnet werden.

Lösung: Die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 6 & 9 & 12 \end{bmatrix}.$$

Wie im Beispiel 1.9 erhält man die Zeilenstufenform-Matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

und gelangt so zu der Gleichung

$$x_1 = 4 - 2x_2 - 3x_3.$$

Es liegen eine führende Variable, nämlich x_1, und zwei freie Variablen, nämlich x_2 und x_3, vor. Für die freie Variable x_2 können wir einen beliebigen Parameter $s \in \mathbb{R}$ wählen und für die freie Variable x_3 können wir einen beliebigen Parameter $t \in \mathbb{R}$ wählen.

Die unendlich vielen Lösungen haben somit die **parametrisierte Form**

$$x_1 = 4 - 2s - 3t, \qquad x_2 = s, \qquad x_3 = t.$$

Weitere **Beispiele**:

1. Wir gehen davon aus, dass die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems durch elementare Zeilenumformungen auf die folgende Zeilenstufenform gebracht wurde:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Frage: Welches sind die führenden und welches sind die freien Variablen des zugehörigen linearen Gleichungssystems?

2. Ebenso wie 1. für die folgende Matrix: $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

3. Ebenso wie 1. für die folgende Matrix: $\begin{bmatrix} 1 & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(Anstelle von $*$ darf man sich beliebige reelle Zahlen denken.)

Grundsätzlich gilt: Welches die führenden Variablen sind, kann man an den Stellungen der führenden Einsen ablesen.

Um Koeffizientenmatrix und erweiterte Koeffizientenmatrix besser unterscheiden zu können, wird manchmal vor der letzten Spalte der erweiterten Matrix (rechte Seite des Gleichungssystems) ein senkrechter Strich eingefügt. Die erweiterte Matrix im vorletzten Beispiels sieht dann so aus:

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 4 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right].$$

1.3 Ergänzungen zu transponierten Matrizen

Sei $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$. Für die transponierte Matrix gilt $A^T \in \mathbb{R}^{4\times 3}$. Man erhält A^T, indem die erste Zeile von A zur ersten Spalte von A^T wird, die zweite Zeile von A zur zweiten Spalte von A^T wird, usw.. In unserem Beispiel erhalten wir

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \end{bmatrix} \text{ wird zu } A^T = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 4 & 8 & 0 \\ 5 & 9 & 7 \end{bmatrix}.$$

Umgekehrt wird beim Transponieren die erste Spalte von A zur ersten Zeile von A^T, usw.. Allgemein gilt also: Die i-te Zeile von A wird zur i-ten Spalte von A^T, die j-te Spalte von A wird zur j-ten Zeile von A^T.

Wir wollen die Elemente der transponierten Matrix A^T mit a^T_{ij} bezeichnen; die Elemente von A bezeichnen wir wie bisher mit a_{ij}. Es gilt, da die Zeilen von A zu den Spalten von A^T wurden (und umgekehrt): In A^T steht in der Zeile i und der Spalte j dasselbe Element wie in Zeile j und Spalte i von A, d.h., es gilt

$$a^T_{ij} = a_{ji}.$$

Illustration dieser Formel an unserem **Beispiel**:

$$A^T = \begin{bmatrix} a^T_{11} & a^T_{12} & a^T_{13} \\ a^T_{21} & a^T_{22} & a^T_{23} \\ a^T_{31} & a^T_{32} & a^T_{33} \\ a^T_{41} & a^T_{42} & a^T_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 1 \\ 3 & 7 & 3 \\ 4 & 8 & 0 \\ 5 & 9 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 & 9 \\ 1 & 3 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Es gilt etwa $a^T_{21} = 3 = a_{12}$, $a^T_{41} = 5 = a_{14}$ oder $a^T_{42} = 9 = a_{24}$.

Man kann sich den Übergang von A zu A^T auch als eine Spiegelung an der Diagonalen a_{11}, a_{22}, a_{33}, $\ldots$ vorstellen („Spiegelung an der Hauptdiagonalen von A“).

1.4 Beispiele und Ergänzungen zu Operationen mit Matrizen

Kompakt schreibt man das Produkt der Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m\times r}$ und $B \in \mathbb{R}^{r\times n}$ als

$$AB = \left[\sum_{j=1}^{r} a_{ij}b_{jk}\right]$$

für $i = 1, 2, \ldots, m$ und $k = 1, 2, \ldots, n$. Das Ergebnis ist eine (m, n)-Matrix, also $AB \in \mathbb{R}^{m\times n}$.

Die Summe $\sum\limits_{j=1}^{r} a_{ij}b_{jk}$ ist der Eintrag, der in der Produktmatrix AB in Zeile i und Spalte k steht:

Die i-te Zeile von A ist $\begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{ir} \end{bmatrix}$, die k-te Spalte von B ist $\begin{bmatrix} b_{1k} \\ b_{2k} \\ \vdots \\ b_{rk} \end{bmatrix}$.

Es folgt, dass in AB in Zeile i und Spalte k das Element

$$a_{i1}b_{1k} + a_{i2}b_{2k} + \ldots + a_{ir}b_{rk} \;=\; \sum_{j=1}^{r} a_{ij}b_{jk}$$

steht. Die Berechnung der Elemente der Produktmatrix folgt also nach der Merkregel „Zeile mal Spalte“.

Ein Matrizenprodukt AB kann *spaltenweise* oder *zeilenweise* berechnet werden. Die i-te Spalte von AB erhalten wir als Produkt der Matrix A mit der i-ten Spalte von B.

Beispiel zur spaltenweisen Berechnung:

Es seien $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ und $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 4}$, also $b_1 = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix}$, $b_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ sowie $b_4 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Damit folgt $Ab_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 \\ 8 \end{bmatrix}$, $Ab_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 27 \\ -4 \end{bmatrix}$, $Ab_3 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 26 \end{bmatrix}$ sowie $Ab_4 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 \\ 12 \end{bmatrix}$.

Insgesamt haben wir $AB = \begin{bmatrix} | & | & | & | \\ Ab_1 & Ab_2 & Ab_3 & Ab_4 \\ | & | & | & | \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}$.

Es folgt ein **Beispiel** zur zeilenweisen Vorgehensweise mit den gleichen Matrizen A und B wie oben. Es ist $a_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ und $a_2^T = \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \end{bmatrix}$.[2]

Wir erhalten

$$\begin{aligned} a_1^T B &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \end{bmatrix}, \\ a_2^T B &= \begin{bmatrix} 2 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & 1 \\ 2 & 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich

$$AB = \begin{bmatrix} - & a_1^T B & - \\ - & a_2^T B & - \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 27 & 30 & 13 \\ 8 & -4 & 26 & 12 \end{bmatrix}.$$

[2] Zum besseren Verständnis der Schreibweise $a_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$: Mit a_1 ist die Spaltenmatrix gemeint, die der Zeilenmatrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ entspricht, d.h. $a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$. Daraus ergibt sich $a_1^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$. Etwas salopp gesagt: Man gibt der Spalte den Namen a_1, woraus sich für die Zeile die Bezeichnung a_1^T ergibt. Um Missverständnisse zu vermeiden kann man die Einträge einer Zeile auch durch Kommata trennen und beispielsweise $\begin{bmatrix} 1, & 2, & 4 \end{bmatrix}$ statt $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ schreiben.

Weitere **Beispiele**:

1. Es seien $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ gegeben durch $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Dann gilt $AB \in \mathbb{R}^{3\times 2}$, während das Produkt BA nicht definiert ist. (*Wieso nicht*?)

a) Wir berechnen das Element, das in AB in der ersten Zeile und zweiten Spalte steht:

$$1 \cdot 2 + (-1) \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 2.$$

b) Wir berechnen die erste Spalte von AB:

$$Ab_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \\ 3 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \\ 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 12 \\ 14 \end{bmatrix}.$$

c) Wir berechnen die dritte Zeile von AB:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 0, & 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14, 4 \end{bmatrix}.$$

2. Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben durch $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$.

Es existieren beide Produkte AB und BA, es gilt $AB = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$ und $BA = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -6 \end{bmatrix}$.

3. Es seien $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ und $B \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ gegeben durch $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Aufgabe: Berechnen Sie - wenn möglich - AB und BA.

4. Es seien $A \in \mathbb{R}^{1\times 3}$ und $B \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ gegeben durch $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$.

Das Produkt AB ist eine $(1, 1)$-Matrix:

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}.$$

Auch BA existiert, wir erhalten eine $(3, 3)$-Matrix:

$$BA = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 1 & 1 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 1 & 3 \cdot (-1) \\ 2 \cdot 2 & 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 6 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ein Produkt vom Typ „Spalte(nmatrix) mal Zeile(nmatrix)“ nennt man *dyadisches Produkt*. Es ist besonders anschaulich, wenn man es anhand des Falkschen Schemas darstellt, hierzu ein weiteres **Beispiel**:

5. Es seien $A \in \mathbb{R}^{3\times 1}$ und $B \in \mathbb{R}^{1\times 4}$ gegeben durch $A = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix}$.

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & -1 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & -2 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & -3 \end{bmatrix} \end{array}$$

1.5 Drei Darstellungsformen eines linearen Gleichungssystems

In Abschnitt 1.7 des Gramlich werden zwei Arten, ein lineares Gleichungssystem darzustellen, besprochen: Die **explizite Form**

$$\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}$$

und die **Matrixform**

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Verwendet man die Bezeichnungen $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ und $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, so erhält man eine besonders kompakte Darstellung der Matrixform:

$$Ax = b.$$

Darüber hinaus gibt es noch eine dritte, ebenso wichtige Darstellungsform, die wir **Spaltenform** (oder **Vektorform**) nennen wollen:

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}.$$

Verwendet man für die Spalten von A die Bezeichnungen

$$a_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix},\ a_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix},\ \ldots,\ a_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix},$$

so erhält man die Vektorform (Spaltenform) in kompakter Schreibweise

$$x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n = b.$$

Hinweis: Die drei Darstellungsformen eines linearen Gleichungssystems werden häufig gebraucht werden, daher ist es wichtig, dass Sie mit allen drei Formen vertraut sind. Auf Seite 31 findet man im Gramlich Bemerkungen, die in engem Zusammenhang mit der Spaltenform eines linearen Gleichungssystems stehen. Schauen Sie sich insbesondere noch einmal **Beispiel 1.17** an!

Den drei Darstellungsformen entsprechen **unterschiedliche Arten, ein lineares Gleichungssystem als Frage anzusehen**:

- In der expliziten Form wird nach reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ („den Unbestimmten“) gefragt, die m gegebene lineare Gleichungen erfüllen.
- In der Matrixform wird alles zu einer einzigen Gleichung zusammengefasst: Es wird nach einer Spalte x gefragt, die die **Matrixgleichung** $Ax = b$ erfüllt.
- In der Vektorform $x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n = b$ nennt man die Zahlen x_1, x_2, …, x_n **Koeffizienten** und den Ausdruck $x_1a_1 + x_2a_2 + \ldots + x_na_n$ nennt man eine **Linearkombination** der Spalten a_1, a_2, …, a_n. Zu gegebenen Spalten a_1, a_2, …, a_n, b wird also gefragt, ob (und ggf. für welche Koeffizienten x_1, x_2, …, x_n) die Spalte b eine Linearkombination der Spalten a_1, a_2, …, a_n ist.

1.6 Ergänzungen zur Matrixinvertierung; Matrizen der Klassen I und II

Im Gramlich (Abschnitt 1.8) wird festgestellt, dass für $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die folgenden **Rechenregeln für invertierbare Matrizen** gelten:

(1) Mit A ist auch A^{-1} invertierbar und es gilt $(A^{-1})^{-1} = A$.

(2) A, B invertierbar $\Rightarrow$ AB ist invertierbar und es gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

(3) A invertierbar $\Rightarrow$ A^T invertierbar und es gilt $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Wir wollen diese Regeln kurz begründen:

(1) Dies gilt wegen $A^{-1}A = E = AA^{-1}$.

(2) Dies gilt wegen $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = ABB^{-1}A^{-1} = AEA^{-1} = AA^{-1} = E$ und analog $(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}A^{-1}AB = B^{-1}EB = B^{-1}B = E$.

Wegen der Gültigkeit des Assoziativgesetzes dürfen wir auf Klammern verzichten!

(3) Dies gilt wegen $A^T(A^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = E^T = E$ und analog $(A^{-1})^TA^T = (AA^{-1})^T = E^T = E$.

Regel (2) kann auf mehr als zwei Matrizen verallgemeinert werden:

Für invertierbare Matrizen A_1, A_2, …, A_k gilt $(A_1A_2\ldots A_k)^{-1} = A_k^{-1}\ldots A_2^{-1}A_1^{-1}$.

Beispiel. $A, B, C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ seien invertierbar und es sei $D = ABC$.

Fragen: Ist D invertierbar? Wie lautet gegebenenfalls die inverse Matrix von D?

Antworten: D ist invertierbar, es gilt $D^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.

Satz 1.10 im Gramlich besagt: Für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und die Nullmatrix $O \in \mathbb{R}^{n\times r}$ gilt $AO = O \in \mathbb{R}^{m\times r}$. Wir betrachten einen Spezialfall dieses Satzes:

Es sei $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ und $x = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$; x ist also eine Spalte mit lauter Nullen (Nullvektor). Dann gilt

$$Ax = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \ldots + 0 \cdot \begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Wir halten fest: Liegt ein homogenes lineares Gleichungssystem $Ax = 0$ vor (für $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$), so existiert immer mindestens eine Lösung, da nämlich der Nullvektor $x = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ immer eine Lösung ist.

Hierzu noch ein **Zahlenbeispiel**: $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $x = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. Dann gilt

$$Ax = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 0 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Ein **Beispiel** zur Inversion von $(2, 2)$-Matrizen mit Hilfe von **Satz 1.9** (1. Auflage des Gramlich) bzw. **Satz 1.7** (2. Auflage):

Es sei $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Dann gilt $ad - bc = 3 \cdot 5 - 1 \cdot 2 = 13 \neq 0$. Es folgt

$$A^{-1} = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix}.$$

Probe: $AA^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{5}{13} & -\frac{1}{13} \\ -\frac{2}{13} & \frac{3}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot \frac{5}{13} + 1 \cdot \left(-\frac{2}{13}\right) & 3 \cdot \left(-\frac{1}{13}\right) + 1 \cdot \frac{3}{13} \\ 2 \cdot \frac{5}{13} + 5 \cdot \left(-\frac{2}{13}\right) & 2 \cdot \left(-\frac{1}{13}\right) + 5 \cdot \frac{3}{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Analog berechnet man $A^{-1}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Zusatz zur Inversion von $(2, 2)$*-Matrizen*: Gilt $ad - bc = 0$, so existiert A^{-1} nicht. (Dies wird in Abschnitt 5 über Determinanten noch genauer behandelt werden.)

Wir führen die *Probe* $AA^{-1} = E_3$ für die Matrizen aus dem letzten Beispiel des Abschnitts 1.8 (Gramlich) durch:

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -17 & 11 \\ -1 & 11 & -7 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 0 & 1 \cdot (-17) + 1 \cdot 11 + 2 \cdot 3 & 1 \cdot 11 + 1 \cdot (-7) + 2 \cdot (-2) \\ 2 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) + (-3) \cdot 0 & 2 \cdot (-17) + 4 \cdot 11 + (-3) \cdot 3 & 2 \cdot 11 + 4 \cdot (-7) + (-3) \cdot (-2) \\ 3 \cdot 2 + 6 \cdot (-1) + (-5) \cdot 0 & 3 \cdot (-17) + 6 \cdot 11 + (-5) \cdot 3 & 3 \cdot 11 + 6 \cdot (-7) + (-5) \cdot (-2) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_3 \end{aligned}$$

Aufgrund des folgenden Satzes, den wir ohne Beweis angeben, können wir sicher sein, dass auch $A^{-1}A = E_3$ gilt.

Satz.
Es seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Gilt eine der beiden Gleichungen $AB = E_n,\ BA = E_n$, so gilt immer auch die andere.

Wir teilen die quadratischen (n, n)-Matrizen wie folgt in zwei Klassen ein.

Definition.
Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Falls A invertierbar ist, so sagen wir: *A gehört zur Klasse I.* Andernfalls gehöre A zur *Klasse II.*

Zwischen Matrizen der Klasse I und solchen der Klasse II gibt es erhebliche Unterschiede. Dies wird z.B. deutlich, wenn wir für $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ betrachten.

- *Ist A in der Klasse I, so ist das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ für jede rechte Seite b eindeutig lösbar.*

  Begründung: $x = A^{-1}b$ ist die eindeutig bestimmte Lösung (vgl. Gramlich Abschnitt 1.8).

- *Ist dagegen A in der Klasse II, so gilt für jede rechte Seite b: Das Gleichungssystem $Ax = b$ ist nicht oder nicht eindeutig lösbar.*

  Begründung: Bringt man A mit dem Gauß-Jordan-Verfahren in reduzierte Zeilenstufenform Z, so muss $Z \neq E_n$ gelten. (Im Fall $Z = E_n$ würde Algorithmus 1.3 die inverse Matrix A^{-1} liefern, im Widerspruch zur Annahme, dass A aus Klasse II stammt.) Löst man nun $Ax = b$ mit dem Gauß-Jordan-Verfahren, so gibt es wegen $Z \neq E_n$ mindestens eine freie Variable. Das bedeutet: $Ax = b$ ist entweder unlösbar oder es gibt mehr als eine Lösung.

Für **homogene** lineare Gleichungssysteme $Ax = 0$ ergibt sich aus unseren bisherigen Feststellungen:

- *Ist A aus der Klasse I, so besitzt das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ nur die „triviale Lösung", d.h., der Nullvektor ist die einzige Lösung.*
- *Ist A aus der Klasse II, so besitzt das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ neben der trivialen Lösung noch weitere Lösungen.*

In Bezug auf das Gauß-Jordan-Verfahren können wir folgenden Unterschied zwischen Matrizen der Klassen I und II festhalten: Bringt man $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mit dem Gauß-Jordan-Verfahren in reduzierte Zeilenstufenform Z, so gilt

- *$Z = E_n$, falls A aus Klasse I ist;*
- *$Z \neq E_n$, falls A aus Klasse II ist.*

Dies ergibt sich unmittelbar aus dem Algorithmus zur Berechnung von A^{-1} (Algorithmus 1.3).

Weitere Unterschiede zwischen Matrizen der Klassen I und II werden in den Abschnitten 4.7 und 5.2 dieses Ergänzungsskripts besprochen.

2 Ergänzungen zu Abschnitt 2: Vektoren in der Ebene und im Raum

2.1 Beispiele und Ergänzungen zur Länge von Vektoren

Jeder Vektor der Länge 1 heißt *Einheitsvektor*.

Wir zeigen, dass der Vektor $v = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ ein Einheitsvektor ist:

$$|v| = \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \;=\; 1.$$

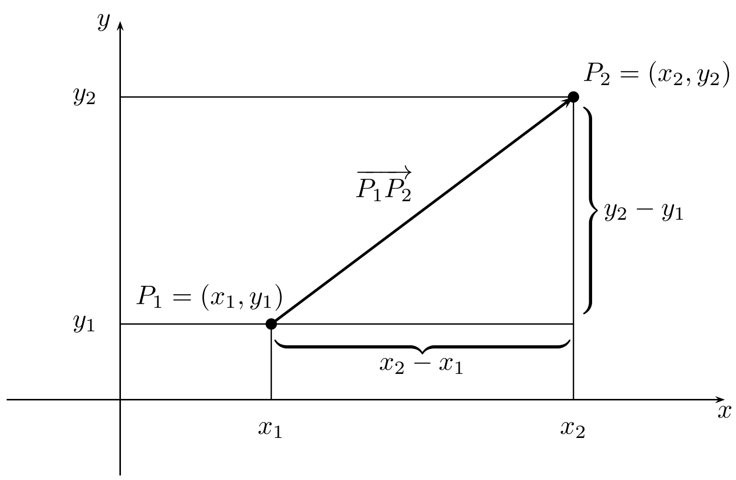
Frage: Ist $u = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ein Einheitsvektor?

Antwort: Wegen $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4}} \neq 1$ ist u kein Einheitsvektor.

Frage: Ist $w = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ ein Einheitsvektor?

Antwort: Wegen $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = 1$ ist w ein Einheitsvektor.

Eine Zeichnung zum Abstand zweier Punkte $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$:



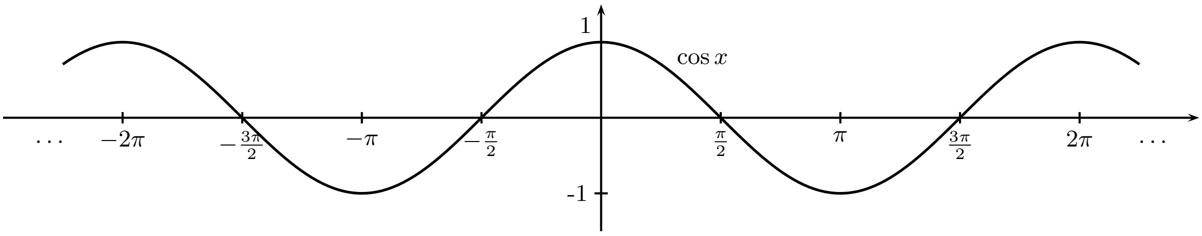
Der Abstand von P_1 und P_2 ist $|\overrightarrow{P_1P_2}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$.

2.2 Beispiele und Ergänzungen zum Skalarprodukt

Das Skalarprodukt $u \cdot v$ ist definiert als

$$u \cdot v := \begin{cases} |u||v| \cos\varphi & \text{, für } u \neq o \text{ und } v \neq o \\ 0 & \text{, für } u = o \text{ oder } v = o \end{cases}$$

Eine Erinnerung an die Cosinusfunktion und an Winkel im Bogenmaß:



Winkel in Grad	0	45	90	180
Winkel im Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	π

Im Gramlich wird im Anschluss an Beispiel 2.8 das Skalarprodukt $u \cdot v$ von Vektoren mit dem Matrizenprodukt $u^T v$ verglichen. Für das dortige Beispiel $u = (0, 0, 1)$ und $v = (0, -2, 2)$ sieht das so aus:

$$u^T v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = 0 \cdot 0 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 2 = 2.$$

Das Skalarprodukt ist also im Wesentlichen ein spezielles Matrizenprodukt („Zeile mal Spalte“)

Ein weiteres **Beispiel** (diesmal für Vektoren des $\mathbb{R}^2$): $u = (3, 4)$ und $v = (-2, 5)$. Dann gilt für das Skalarprodukt $u \cdot v = 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 5 = 14$. Analog ist

$$u^T v = \begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 \\ 5 \end{bmatrix} = 3 \cdot (-2) + 4 \cdot 5 = 14.$$

Beispiele zur Orthogonalität von Vektoren

:

Frage: Sind die Vektoren u und v orthogonal?

a) $u = (3, 2)$, $v = (-4, 6)$

b) $u = (1, 2, 3)$, $v = (8, -2, -2)$

c) $u = (1, 2, 3)$, $v = (8, -1, -2)$

Antwort:

a) Ja, da $u \cdot v = 3 \cdot (-4) + 2 \cdot 6 = 0$

b) Nein, da $u \cdot v = 1 \cdot 8 + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-2) = -2 \neq 0$

c) Ja, da $u \cdot v = 1 \cdot 8 + 2 \cdot (-1) + 3 \cdot (-2) = 0$

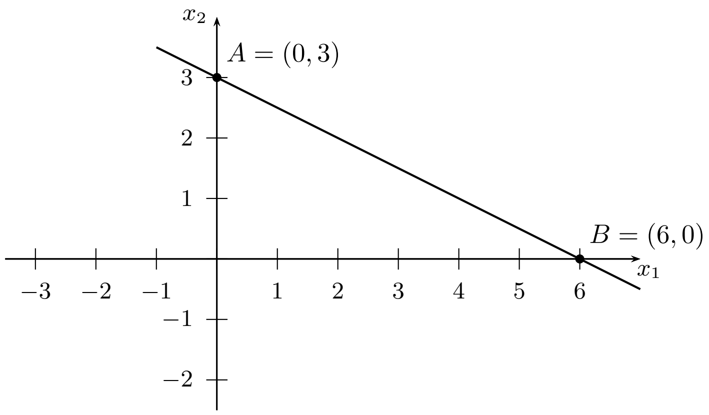
3 Ergänzungen zu Abschnitt 3: Analytische Geometrie von Geraden und Ebenen

3.1 Ergänzungen zur Darstellung von Geraden

Im Buch von Gramlich wird in Beispiel 3.1 gezeigt, dass der Punkt $A = (0, 3)$ auf der Geraden g liegt, die durch die Gleichung $x_1 + 2x_2 = 6$ beschrieben ist. Dieser Punkt liegt außerdem auf der x_2-Achse. Wir bestimmen den Punkt B, der auf der Geraden g und auf der x_1-Achse liegt:

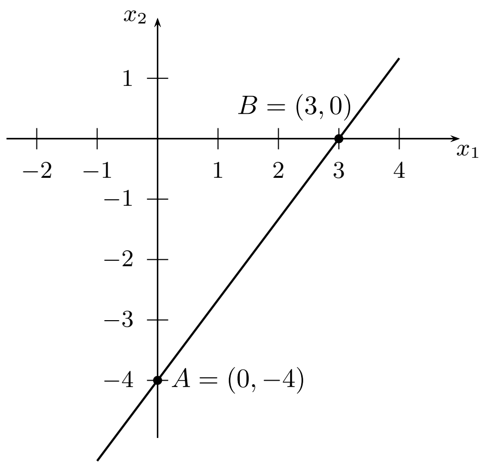
Wir setzen $x_2 = 0$ in die Gleichung $x_1 + 2x_2 = 6$ ein und erhalten $x_1 = 6$, woraus $B = (6, 0)$ folgt.

Skizze:



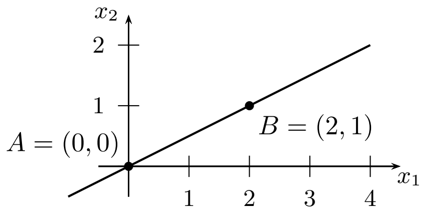
Ein weiteres **Beispiel**:

Eine Gerade in der Ebene sei gegeben durch $4x_1 - 3x_2 - 12 = 0$. Setzt man $x_1 = 0$ in diese Gleichung ein, erhält man $x_2 = -4$, die Gerade geht also durch den Punkt $A = (0, -4)$. Einsetzen von $x_2 = 0$ ergibt $x_1 = 3$, demnach liegt der Punkt $B = (3, 0)$ ebenfalls auf der Geraden.

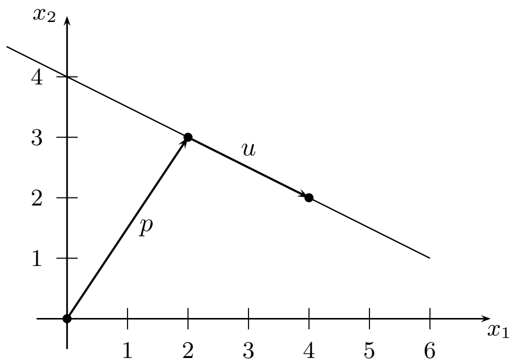


In der Koordinatengleichung kann auch $c = 0$ gelten; in diesem Fall geht die Gerade durch den Punkt $A = (0,0)$. Einen weiteren Punkt auf der Geraden erhält man, indem man für x_1 einen beliebigen Wert $\neq 0$ einsetzt.

Beispiel. $x_1 - 2x_2 = 0$. Setzt man $x_1 = 2$ ein, erhält man $x_2 = 1$. Damit liegt neben $A = (0,0)$ der Punkt $B = (2,1)$ auf der Geraden.



Beispiel. Eine Gerade g sei durch die Parametergleichung $x = (2,3) + t(2,-1)$ gegeben. Hierbei ist $p = (2,3)$ der Stützvektor und $u = (2,-1)$ der Richtungsvektor. Skizze:



Man erhält die Punkte auf der Geraden g, wenn man für t reelle Zahlen einsetzt. So erhält man für $t = 0$ den Punkt $(2,3)$, für $t = 1$ den Punkt $(4,2)$ und für $t = -1$ den Punkt $(2,3) + (-1)(2,-1) = (0,4)$.

Man kann eine gegebene Gerade immer auf unterschiedliche Art in Parameterform angeben. Beispielsweise kann die obige Gerade g auch durch die Gleichung

$$x = (2,3) + t(4,-2)$$

beschrieben werden. Weitere Möglichkeiten sind

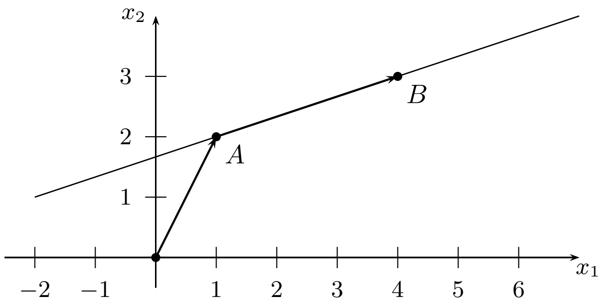
$$x = (2,3) + t(-2,1), \qquad x = (4,2) + t(-2,1), \qquad x = (6,1) + t(-2,1).$$

Allgemein findet man eine Darstellung von g, indem man zunächst einen beliebigen Punkt (a,b) auf g auswählt und diesen Punkt als Stützvektor nimmt. Als Richtungsvektor kann man für $r \neq 0$ ein beliebiges skalares Vielfaches $r \cdot u$ des ursprünglichen Richtungsvektors u wählen: $(a,b) + r \cdot u$ ist dann eine weitere Darstellung in Parameterform.

Aufgabe: Geben Sie eine Parameterdarstellung für die Gerade g durch $A = (1,2)$ und $B = (4,3)$ an.

Lösung: Da A auf g liegt, können wir $A = (1,2)$ als Stützvektor wählen. Da auch B auf g liegt, ist der Vektor $\overrightarrow{AB} = (4,3) - (1,2) = (3,1)$ ein Richtungsvektor für g. Eine gesuchte Parametergleichung ist

$$x = (1,2) + t(3,1).$$



3.2 Ergänzungen zur Darstellung von Ebenen

Ausführliche Darstellung der Lösung von Beispiel 3.6 (Gramlich, Abschnitt 3.2):
Gegeben ist

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

Um eine Gleichung ohne Parameter zu erhalten, fassen wir die Parametergleichung als ein System von drei Gleichungen auf:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 1 & + & 2s & + & 3t \\ x_2 & = & 1 & + & s & & \\ x_3 & = & 1 & & & + & 0.5t. \end{array}$$

Es folgt $s = x_2 - 1$ und $t = 2x_3 - 2$, woraus man durch Einsetzen in die erste Gleichung

$$x_1 - 2x_2 - 6x_3 + 7 = 0$$

erhält.
Ausführliche Darstellung der Lösung von Beispiel 3.7 (Gramlich, Abschnitt 3.2):
Gegeben ist

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{bmatrix};$$

beziehungsweise als ein System von drei Gleichungen:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & = & 2 & + & s & + & 2t \\ x_2 & = & 2 & - & 2s & + & 5t \\ x_3 & = & 1 & + & 3s & + & 7t. \end{array}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $s = x_1 - 2 - 2t$. Setzt man dies in die anderen beiden Gleichungen ein, erhält man

$$\begin{array}{rcrcrcr} x_2 & = & -2x_1 & + & 6 & + & 9t \\ x_3 & = & 3x_1 & - & 5 & + & t. \end{array}$$

Aus der letzten Gleichung folgt $t = -3x_1 + x_3 + 5$. Einsetzen in $x_2 = -2x_1 + 6 + 9t$ ergibt

$$x_2 = -29x_1 + 9x_3 + 51.$$

Durch Umordnen folgt die gesuchte Koordinatendarstellung der Ebene:

$$29x_1 + x_2 - 9x_3 - 51 = 0.$$

Zusammenfassung:
Es gibt unterschiedliche Möglichkeiten, eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ zu beschreiben, wir haben drei kennengelernt:

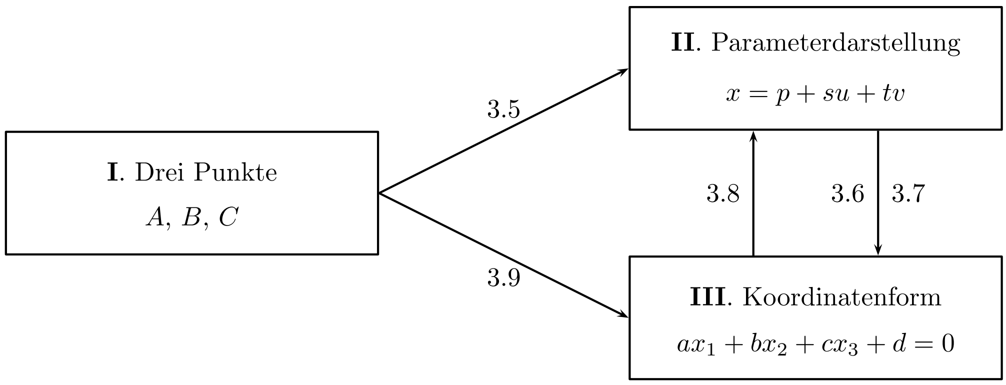
I. Man gibt *drei Punkte* A, B und C an, die nicht auf einer gemeinsamen Geraden liegen. Durch sie ist die Ebene, die diese Punkte enthält, eindeutig festgelegt.

II. *Parameterdarstellung*: $x = p + su + tv$ mit $s, t \in \mathbb{R}$ und Vektoren p, u, v.

III. *Koordinatenform*: $ax_1 + bx_2 + cx_3 + d = 0$ mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, a, b, c nicht alle 0.

Die Parameterdarstellung ist also die Darstellung mit einem **Stützvektor** p und zwei **Spannvektoren** u und v. Statt „Parameterdarstellung“ sagt man auch „Parameterform“ oder „vektorielle Punkt-Richtungsform“. Eine Beschreibung *aller* Punkte der Ebene erhält man übrigens nur durch II und III

Wir haben anhand von einigen Beispielen gesehen, wie man diese unterschiedlichen Darstellungsformen ineinander überführen kann:



Die Bezeichnungen 3.5 - 3.9 an den Pfeilen geben die Nummern der dazugehörigen Beispiele im Gramlich an.

Eine vierte Möglichkeit der Ebenendarstellung findet man im Buch von Gramlich am Ende von Abschnitt 3.2.

4 Ergänzungen zu Abschnitt 4: Reelle Vektorräume und Unterräume

4.1 Ergänzungen zu Unterräumen

Jeder Vektorraum V enthält auf jeden Fall die beiden einfachen Unterräume V selbst und den *Nullvektorraum* $\{o\}$. Diese Unterräume werden auch *triviale Unterräume* genannt.

Ist U ein Unterraum von V, so enthält U den Nullvektor von V: Kein Unterraum U ist leer, also existiert in jedem Unterraum ein Vektor u. Mit $u \in U$ ist aber auch $0 \cdot u = o$ in U.

Bei den folgenden **Beispielen** soll jeweils geklärt werden, ob es sich um Untervektorräume handelt:

1. $U = \Big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\Big|\; x_1 = x_2\Big\}$.

Es gilt beispielsweise $(3, 3, 4, 2) \in U$, aber $(3, 4, 4, 2) \notin U$. Um zu klären, ob U ein Unterraum von $V = \mathbb{R}^4$ ist, überprüfen wir (a) und (b) aus dem Unterraumkriterium (Gramlich, Satz 4.2).

(a) Für $u = (u_1, u_2, u_3, u_4)$ und $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ gelte $u, v \in U$, d.h. $u_1 = u_2$ und $v_1 = v_2$, also auch $u_1 + v_1 = u_2 + v_2$. Damit liegt auch $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, u_3 + v_3, u_4 + v_4)$ in U.

(b) Für $u = (u_1, u_2, u_3, u_4) \in U$ gilt $u_1 = u_2$. Für jede reelle Zahl c folgt $cu_1 = cu_2$ und damit ist $cu = (cu_1, cu_2, cu_3, cu_4) \in U$.

Da (a) und (b) gelten, handelt es sich bei U um einen Unterraum von $\mathbb{R}^4$.

2. $U = \Big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\Big|\; x_1 \neq x_2\Big\}$.

(a) $u = (1, 0, 0, 0)$ und $v = (0, 1, 0, 0)$ liegen zwar in U, nicht aber die Summe $u + v = (1, 1, 0, 0)$. Damit ist (a) nicht erfüllt und es liegt *kein* Unterraum vor.

Da bereits (a) nicht gilt, ist die Überprüfung von (b) nicht mehr notwendig.

Eine andere Begründung wäre: U enthält nicht den Nullvektor $o = (0, 0, 0, 0)$, der aber in jedem Unterraum liegen muss.

3. $U = \Big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \;\Big|\; x_3 \cdot x_4 = 0\Big\}$.

Dieses Beispiel wird in der Vorlesung (oder als Übung) untersucht.

4. $U = \Big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0\Big\}$.

Es gilt beispielsweise $(0, 0, \ldots, 0) \in U$ und (für $n = 4$) $(1, -1, 1, -1) \in U$, aber $(1, 1, 1, 1) \notin U$.

(a) Für $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ und $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ gelte $u, v \in U$, d.h., $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 0$ und $v_1 + v_2 + \ldots + v_n = 0$.

Wir untersuchen $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$.

Wegen $(u_1+v_1)+(u_2+v_2)+\ldots+(u_n+v_n) = (u_1+u_2+\ldots+u_n)+(v_1+v_2+\ldots+v_n) = 0+0 = 0$ gilt $u + v \in U$.

(b) Es sei $c \in \mathbb{R}$ und $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in U$, also $u_1 + u_2 + \ldots + u_n = 0$. Es folgt $cu = (cu_1, cu_2, \ldots, cu_n)$ und $cu_1 + cu_2 + \ldots + cu_n = c(u_1 + u_2 + \ldots + u_n) = c \cdot 0 = 0$, also gilt $cu \in U$.

4.2 Wiederholung und Zusammenfassung der Abschnitte 4.1-4.5 (Gramlich)

Die **Abschnitte 4.1 - 4.3** des Gramlich lassen sich wie folgt zusammenfassen:

Bisher haben wir in erster Linie die Vektorräume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ betrachtet. Eine Verallgemeinerung hiervon ist der Vektorraum $\mathbb{R}^n$, wobei n eine beliebige natürliche Zahl ist.

Die Addition und skalare Multiplikation funktionieren im $\mathbb{R}^n$ ganz genauso wie im $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$, nämlich komponentenweise. Wir erläutern dies an einem **Beispiel**:

Seien $v = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ und $w = (w_1, w_2, w_3, w_4)$ zwei Vektoren des $\mathbb{R}^4$. Die Summe $v + w$ erhält man, indem man komponentenweise addiert:

$$v + w = \Big(v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3, v_4 + w_4\Big).$$

Ähnlich verläuft die skalare Multiplikation:

$$c \cdot v = \Big(cv_1, cv_2, cv_3, cv_4\Big).$$

Ein weiteres **Beispiel**, diesmal sei $n = 6$: Wir betrachten zwei Vektoren des $\mathbb{R}^6$, etwa $v = (-1, 2, 3, 4, -5, 1)$ und $w = (1, 3, 7, 0, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3})$. Dann gilt:

$$v + w = \left(0, 5, 10, 4, -\frac{9}{2}, \frac{2}{3}\right) \qquad \text{und} \qquad 3v = \Big(-3, 6, 9, 12, -15, 3\Big)\ .$$

Man rechnet also im $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^5$ oder $\mathbb{R}^6$ usw. ganz genauso wie im $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$. Der einzige Unterschied besteht darin, dass die Elemente von $\mathbb{R}^2$ oder $\mathbb{R}^3$ eine anschauliche Bedeutung besitzen - man spricht von *Punkten in der Zeichenebene* oder *im Anschauungsraum* – während im $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 4$ diese anschauliche Bedeutung entfällt. Ein weiterer Sonderfall liegt für $n = 1$ vor: Statt vom Vektorraum $\mathbb{R}^1$ spricht man von der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, die Elemente sind die Zahlen der Zahlengeraden.

Außer den Vektorräumen $\mathbb{R}^n$ gibt es weitere allgemeinere Vektorräume, deren Elemente beispielsweise Matrizen oder Funktionen sind. Diese allgemeineren Vektorräume werden wir in dieser Vorlesung jedoch nicht betrachten. *Die einzigen Vektorräume, die in dieser Vorlesung vorkommen, sind die Vektorräume $\mathbb{R}^n$ **sowie deren Unterräume**.*

Wegen der besonderen Wichtigkeit des Unterraumbegriffs wiederholen wir noch einmal die Definition und geben weitere Beispiele.

Es sei $V = \mathbb{R}^n$ und U sei eine nichtleere Teilmenge von V. Man nennt U einen *Unterraum* von V, falls U bezüglich der Addition und skalaren Multiplikation von V ebenfalls ein Vektorraum ist.

Was ist nachzuprüfen, wenn man herausfinden will, ob eine nichtleere Teilmenge U von V ein Unterraum ist? Das *Unterraumkriterium* besagt, dass es ausreicht, zwei Dinge zu überprüfen:

(a) Abgeschlossenheit von U bezüglich der Addition;

(b) Abgeschlossenheit von U bezüglich der skalaren Multiplikation.

Im Einzelnen besagen (a) und (b) Folgendes:

(a) Für alle Vektoren u und v aus U ist auch die Summe $u + v$ in U.

(b) Für alle Vektoren u aus U und für alle reellen Zahlen c ist auch der Vektor $c \cdot u$ in U.

Beispiele:

1. Es sei $V = \mathbb{R}^n$ und $U = \Big\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\Big|\; x_1 = x_2 = \ldots = x_n\Big\}$.

Frage: Ist U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$?

Zur Beantwortung der Frage sollte man genau vor Augen haben, um welche Menge U es sich konkret handelt. In unserem Fall handelt es sich um die Menge aller n-Tupel $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, für die $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$ gilt, d.h., für die alle Komponenten gleich sind. Es sind also nur sehr spezielle n-Tupel in U. Am Beispiel $\mathbb{R}^4$ erläutert gilt also: $(3, 3, 3, 3) \in U$, aber $(3, 4, 2, -3) \notin U$.

Nachdem wir U vor Augen haben, kehren wir zu unserer Frage zurück. Wir haben zu prüfen, ob U nichtleer ist und die beiden Abgeschlossenheitsbedingungen (a) und (b) erfüllt sind. Zur Orientierung betrachten wir ein Beispiel im $\mathbb{R}^4$:

Es seien u und v Elemente aus U, etwa $u = (3, 3, 3, 3)$ und $v = (4, 4, 4, 4)$. Dann gilt $u+v = (7, 7, 7, 7)$. Der Vektor $u + v$ liegt also ebenfalls in U, da seine Komponenten alle gleich sind. Genauso gilt für eine reelle Zahl, etwa $c = 2$, dass $cu = (6, 6, 6, 6)$ zu U gehört.

Aufgrund der Beispiele ist zu vermuten, dass U ein Untervektorraum von $V = \mathbb{R}^n$ ist. Dies ist in der Tat der Fall:

U ist nichtleer, beispielsweise liegt $(1, 1, \ldots, 1)$ in U.

(a) *Nachweis der Abgeschlossenheit von U bezüglich der Addition*:

Es seien $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ und $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ Elemente von U. Es gilt also $u_1 = u_2 = \ldots = u_n$ und $v_1 = v_2 = \ldots = v_n$. Es folgt $u_1 + v_1 = u_2 + v_2 = \ldots = u_n + v_n$, was bedeutet, dass auch $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n)$ ein Element von U ist.

(b) *Nachweis der Abgeschlossenheit von U bezüglich der skalaren Multiplikation*:

Es sei $u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in U$ und $c \in \mathbb{R}$. Aus $u \in U$ folgt $u_1 = u_2 = \ldots = u_n$, woraus man $cu_1 = cu_2 = \ldots = cu_n$ erhält. Also gilt auch $cu = (cu_1, cu_2, \ldots, cu_n) \in U$.

Insgesamt haben wir gezeigt, dass U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$ ist.

2. Es sei $V = \mathbb{R}^n$ und $U = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1^2 = x_2^2\right\}$.

Frage: Ist U ein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$?

Machen wir uns zuerst klar, um welche Menge es sich bei U handelt. U ist die Menge alle n-Tupel $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, für die $x_1^2 = x_2^2$ gilt, d.h., für die das Quadrat der ersten Komponente mit dem Quadrat der zweiten Komponente übereinstimmt, alle anderen Komponenten sind völlig beliebig. Für $n = 4$ erkennen wir beispielsweise $(1, 1, 2, 7) \in U$, $(1, -1, 1, 9) \in U$, $(-3, 3, 0, 0) \in U$, aber $(1, 2, 1, 1) \notin U$.

Was vermuten wir diesmal? Sehen wir uns $u = (1, 1, 2, 7)$ und $v = (1, -1, 1, 9)$ an und bilden wir die Summe $u + v$, erkennen wir $u + v = (2, 0, 3, 16)$; wegen $2^2 = 4 \neq 0 = 0^2$ gilt $u + v \notin U$. Im Fall $V = \mathbb{R}^4$ ist U nicht abgeschlossen bezüglich der Addition, (a) ist nicht erfüllt und deshalb ist U kein Untervektorraum.

Ganz analog begründet man, dass für jedes $n \geq 2$ gilt: U ist kein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$. Wir betrachten die Vektoren $u = (1, 1, 0, \ldots, 0)$ und $v = (1, -1, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^n$ Wie man leicht sieht, gilt $u \in U$ und $v \in U$, aber wegen $u + v = (2, 0, 0, \ldots, 0)$ ist die Summe $u + v$ nicht in U.

Die Menge $U = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 = x_2^2\}$ ist also nicht abgeschlossen bezüglich der Addition und deshalb kein Untervektorraum.

Manchmal ist es ganz einfach zu erkennen, dass eine Menge kein Untervektorraum ist. Wir wissen, dass zu jedem Untervektorraum der Nullvektor gehört. Liegt also eine Menge U vor, die den Nullvektor nicht enthält, weiß man sofort: U ist kein Untervektorraum.

3. Es sei $V = \mathbb{R}^n$ und $U = \left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; x_1^2 = 1\right\}$.

U ist kein Untervektorraum von $\mathbb{R}^n$, da der Nullvektor nicht zu U gehört.

Wichtig zu wissen ist auch, welches die Untervektorräume des $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$ sind. Im Fall $\mathbb{R}^2$ sind es neben den trivialen Unterräumen $\{(0, 0)\}$ und $\mathbb{R}^2$ alle Geraden durch $(0, 0)$; im Fall $\mathbb{R}^3$ sind es neben den trivialen Unterräumen $\{(0, 0, 0)\}$ und $\mathbb{R}^3$ alle Geraden und alle Ebenen durch $(0, 0, 0)$.

Ein besonders häufig vorkommender Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ ist der *Nullraum* $N(A)$ einer (m, n)-Matrix A; hierunter versteht man die Lösungsmenge des *homogenen* linearen Gleichungssystems $Ax = o$ mit $o = [0, 0, \ldots, 0]^T \in \mathbb{R}^n$.

Der Nachweis, dass $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = o\}$ tatsächlich ein Untervektorraum des $\mathbb{R}^n$ ist, ist einfach; man findet ihn in Abschnitt 4.5 des Gramlich. *Empfehlung*: Lesen Sie sich diesen Nachweis genau durch.

4. Gesucht ist der Nullraum $N(A)$ der $(2,3)$-Matrix $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. Das zugehörige homogene lineare Gleichungssystem $Ax = o$ ist

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0\ . \end{aligned}$$

Aus $x_2 = -3x_1$ und $x_3 = -x_1$ folgt

$$N(A) = \Big\{(x_1, -3x_1, -x_1) \mid x_1 \in \mathbb{R}\Big\}.$$

In diesem Fall ist $N(A)$ eine Gerade im $\mathbb{R}^3$, die durch $(0,0,0)$ verläuft („Ursprungsgerade“); eine zugehörige Parameterdarstellung ist $t(1,-3,-1),\ t \in \mathbb{R}$.

Wichtig: Für $b \neq o$ ist die Lösungsmenge von $Ax = b$ übrigens kein Untervektorraum, da der Nullvektor nicht zur Lösungsmenge gehört.

Druckfehler im Buch von Gramlich (nur in der 1. Auflage): Auf Seite 134 in Aufgabe 4.4 muss es an drei Stellen $\mathbb{R}^n$ statt $\mathbb{R}$ heißen; auf Seite 182 in der Lösung zu Aufgabe 4.4 ist das zweite Kreuz fälschlicherweise vorhanden.

4.3 Linearkombinationen und Lineare Hülle

Einige **Beispiele** zum Begriff der Linearkombination:

1. Es sei $V = \mathbb{R}^4$. Die Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in V$ seien gegeben durch $v_1 = (2,1,2,3),\ v_2 = (-1,0,1,0)$ und $v_3 = (5,6,1,1)$.

Eine Linearkombination der Vektoren v_1, v_2, v_3 ist beispielsweise

$$\begin{aligned} v &= 3v_1 + 2v_2 + (-1)v_3 \\ &= 3 \cdot (2,1,2,3) + 2 \cdot (-1,0,1,0) + (-1) \cdot (5,6,1,1) \\ &= (6,3,6,9) + (-2,0,2,0) + (-5,-6,-1,-1) \\ &= (-1,-3,7,8)\ . \end{aligned}$$

Eine andere Linearkombination dieser Vektoren ist $w = v_1 + v_2 + v_3 = (6,7,4,4)$.

Auch der Nullvektor ist eine Linearkombination dieser Vektoren: $0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = (0,0,0,0)$.

Ebenfalls ist beispielsweise v_1 eine Linearkombination dieser Vektoren: $v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3$.

Analog können v_2 und v_3 als Linearkombination aufgeschrieben werden.

Linearkombinationen könne auch in **Spaltenschreibweise** angegeben werden, was besonders übersichtlich ist. Das erste Beispiel sieht dann so aus:

$$\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 7 \\ 8 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

2. Es sei $V = \mathbb{R}^3$ mit Vektoren $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (1,1,0)$ und $v_3 = (1,4,9)$.

Wie im Beispiel oben ist der Nullvektor eine Linearkombination: $0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 = (0,0,0)$.

Es gibt weitere Linearkombinationen dieser Vektoren, die ebenfalls den Nullvektor ergeben, beispielsweise

$$3 \cdot v_1 + (-2) \cdot v_2 + (-1) \cdot v_3 = (3,6,9) - (2,2,0) - (1,4,9) = (0,0,0).$$

Bekanntlich heißt die Menge aller Linearkombinationen der Vektoren aus einer Menge $M = \{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ *lineare Hülle* von M, geschrieben $\mathrm{Lin}(M)$ oder $\mathrm{Lin}(v_1, v_2, \ldots, v_r)$.

Wegen $v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 \cdot v_r$ liegt v_1 (und analog jeder Vektor $v_i \in M$) in $\mathrm{Lin}(M)$.

Wegen $v_1 + v_2 = 1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + \ldots + 0 \cdot v_r$ liegt auch $v_1 + v_2$ in $\mathrm{Lin}(M)$ (für $r \geq 2$). Es gilt beispielsweise auch $3v_1 - 2v_2 \in \mathrm{Lin}(M)$, denn es ist $3v_1 - 2v_2 = 3 \cdot v_1 + (-2) \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + \ldots + 0 \cdot v_r$.

Auch der Nullvektor liegt wegen $o = 0 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + \ldots + 0 \cdot v_r$ in der linearen Hülle.

Beispiele:

1. Die Vektoren $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$ seien gegeben durch $v_1 = (1,1,0,1)$, $v_2 = (-1,0,0,5)$, $v_3 = (3,3,0,4)$. Für den Vektor $v = 3v_1 + 2v_2 - v_3 = (-2,0,0,9)$ gilt also $v \in \mathrm{Lin}\,(v_1, v_2, v_3)$.

Für den Vektor $w = (1,1,1,1)$ gilt dagegen $w \notin \mathrm{Lin}\,(v_1, v_2, v_3)$ (warum?).

2. Diesmal sei nur ein einziger Vektor v gegeben. Die Menge $\mathrm{Lin}\,(v)$ ist genau die Menge aller skalaren Vielfachen von v, also beispielsweise für $v = (3,2,1,0)$:

$$2 \cdot v = (6,4,2,0),\ 3 \cdot v = (9,6,3,0),\ \frac{1}{2} \cdot v = (1.5,1,0.5,0),\ (-1) \cdot v = (-3,-2,-1,0),\ 0 \cdot v = (0,0,0,0).$$

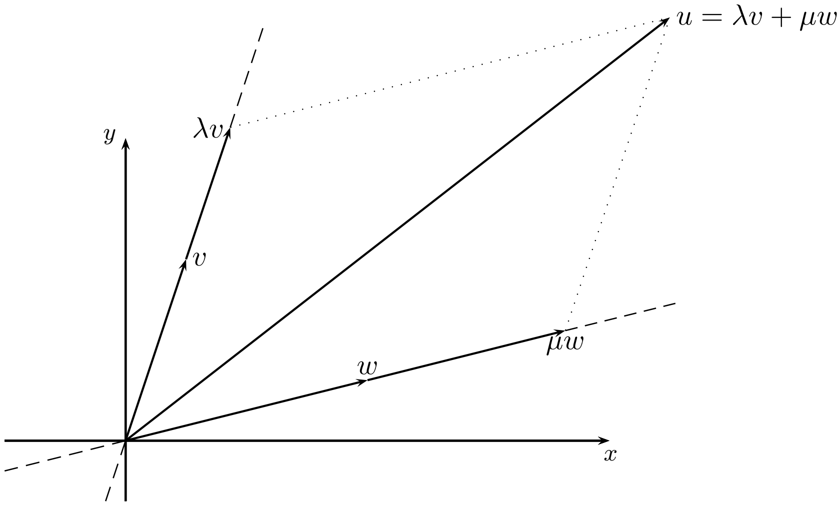
3. Beispiel 2 gilt natürlich auch für den Nullvektor: $\mathrm{Lin}\,(o) = \{a \cdot o \mid a \in \mathbb{R}\} = \{o\}$.

Wenn v und w im $\mathbb{R}^2$ zwei vom Nullvektor verschiedene Vektoren sind, so gilt für ihre lineare Hülle:

- Falls v und w parallel sind, so ist $\mathrm{Lin}(v, w)$ eine Gerade durch den Ursprung.
- Falls v und w nicht parallel sind, so ist $\mathrm{Lin}(v, w)$ der ganze Vektorraum $\mathbb{R}^2$.

Zum letzten Fall ein **Beispiel**:

4. Es sei $v = (1,3)$ und $w = (4,1)$. Dies entspricht den Verhältnissen der folgenden Zeichnung:



Für $u = (9,7)$ sind reelle Skalare λ und μ gesucht mit

$$u = \lambda v + \mu w,$$

für λ und μ soll also gelten $\lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 7 \end{bmatrix}$.

Es ist das lineare Gleichungssystem $\begin{array}{rcl} \lambda + 4\mu & = & 9 \\ 3\lambda + \mu & = & 7 \end{array}$ zu lösen.

Als Lösung erhält man $\lambda = \frac{19}{11}$ und $\mu = \frac{20}{11}$, also

$$(9,7) = \frac{19}{11} \cdot (1,3) + \frac{20}{11} \cdot (4,1).$$

Es folgen Erläuterungen und Beispiele zum Spaltenraum $S(A)$ und Zeilenraum $Z(A)$ einer Matrix A.

Beginnen wir mit $S(A)$: Im Anschluss an Satz 4.6 (Gramlich, Abschnitt 4.6) wird festgestellt, dass für den Spaltenraum $S(A)$ einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ gilt:

$$S(A) = \Big\{ Ax \in \mathbb{R}^m | x \in \mathbb{R}^n \Big\}. \tag{*}$$

Wir erläutern dies anhand eines **Beispiels**: Es sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$; A besteht also aus den Spalten

$$s_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \; s_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \; s_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Der Spaltenraum $S(A)$ besteht nach Definition aus der linearen Hülle der Spaltenvektoren, d.h., aus der Menge aller Linearkombinationen dieser Vektoren:

$$S(A) = \mathrm{Lin}\,(s_1, s_2, s_3) = \Big\{ x_1 s_1 + x_2 s_2 + x_3 s_3 \mid x_i \in \mathbb{R} \Big\}.$$

Frage: Warum gilt nun $S(A) = \big\{ Ax \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R}^3 \big\}$?

Antwort: Es sei $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$. Wir sehen uns Ax genauer an:

$$\begin{aligned} Ax &= \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + 1x_2 + 3x_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1x_1 \\ 2x_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2x_2 \\ 1x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3x_3 \\ 3x_3 \end{bmatrix} = x_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \end{bmatrix} \\ &= x_1 s_1 + x_2 s_2 + x_3 s_3 \end{aligned}$$

Ax ist also nur eine andere Schreibweise für die Linearkombination $x_1 s_1 + x_2 s_2 + x_3 s_3$ (vgl. Gramlich Seite 31 sowie Abschnitt 1.5 in diesem Ergänzungsskript) und deshalb gilt $S(A) = \big\{ Ax \in \mathbb{R}^2 | x \in \mathbb{R}^3 \big\}$.

Für den Zeilenraum $Z(A)$ gilt eine ähnliche Gleichung, die ebenfalls im Gramlich im Anschluss an Satz 4.6 auftaucht:

$$Z(A) = \Big\{ A^T y \in \mathbb{R}^n \mid y \in \mathbb{R}^m \Big\}. \tag{**}$$

Die Gleichung (*) ergibt sich durch Anwendung von (*) auf die Matrix A^T: Da (*) für alle Matrizen gilt, kann man (*) auf die (n, m)-Matrix A^T anwenden, wodurch man

$$S(A^T) = \Big\{ A^T x \in \mathbb{R}^n \mid x \in \mathbb{R}^m \Big\}$$

erhält. Da die Spalten von A^T die Zeilen von A sind, gilt $Z(A) = S(A^T)$, woraus

$$Z(A) = \Big\{ A^T x \in \mathbb{R}^n \mid x \in \mathbb{R}^m \Big\}$$

folgt. Damit hat sich (**) bereits ergeben - man braucht ja nur noch die Bezeichnungen abzuändern, nämlich y statt x zu schreiben.

Eine Ergänzung zu Beispiel 4.10 (Gramlich, Seite 96 (1. Auflage) bzw. Seite 99 (2. Auflage)):

Die Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ hat den Spaltenraum $S(A) = \mathrm{Lin}\big((1, 2, 4), (-1, 3, 5)\big)$ und den Zeilenraum $Z(A) = \mathrm{Lin}\big((1, -1), (2, 3), (4, 5)\big)$.

Der Spaltenraum besteht aus einer Ebene durch den Ursprung, eine Parameterdarstellung dieser Ebene ist $s(1,2,4)+t(-1,3,5)$.

Der Zeilenraum ist gleich dem kompletten Vektorraum $\mathbb{R}^2$, denn jeder Vektor (x,y) ist wegen

$$(x,y)=\frac{3x-2y}{5}\cdot(1,-1)+\frac{x+y}{5}\cdot(2,3)+0\cdot(4,5)$$

als Linearkombination der Vektoren $(1,-1)$, $(2,3)$ und $(4,5)$ darstellbar. (Prüfen Sie dies nach und überlegen Sie sich, wie man darauf kommt!)

Wir wissen, dass der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ von den drei Vektoren $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$ aufgespannt wird. Es gibt zahllose andere Systeme von Vektoren, die dasselbe leisten. Ein Beispiel hierzu: Der Vektorraum $\mathbb{R}^3$ wird auch von den Vektoren $v_1=(1,0,0)$, $v_2=(1,1,0)$ und $v_3=(1,1,1)$ erzeugt, da jeder Vektor $x=(x_1,x_2,x_3)$ wie folgt dargestellt werden kann:

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=(x_1-x_2)\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+(x_2-x_3)\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+x_3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

Die Koeffizienten der Linearkombination sind hier also x_1-x_2, x_2-x_3 und x_3. Ist also beispielsweise $x_1=7$, $x_2=3$ und $x_3=4$, so kann man den Vektor $(x_1,x_2,x_3)=(7,3,4)$ wie folgt als Linearkombination von $v_1=(1,0,0)$, $v_2=(1,1,0)$ und $v_3=(1,1,1)$ darstellen:

$$\begin{bmatrix}7\\3\\4\end{bmatrix}=4\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+(-1)\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}.$$

4.4 Ein Beispiel zu den Fundamentalräumen einer Matrix

Die $(2,3)$-Matrix $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&2&4\end{bmatrix}$ besitzt folgende Fundamentalräume:

- *Spaltenraum* von A: $S(A)=\text{Lin}\big((1,2),(0,2),(1,4)\big)=\mathbb{R}^2$
- *Zeilenraum* von A: $Z(A)=\text{Lin}\big((1,0,1),(2,2,4)\big)$
  Es handelt sich um eine Ursprungsebene im $\mathbb{R}^3$.
- *Nullraum* von A: $N(A)=\{x\in\mathbb{R}^3 \mid Ax=o\}=\text{Lin}\big((-1,-1,1)\big)$
  Es handelt sich um eine Ursprungsgerade im $\mathbb{R}^3$, denn $N(A)$ ist die Lösung des homogenen linearen Gleichungssystems $\begin{bmatrix}1&0&1\\2&2&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$.

  Anwendung des Gauß-Verfahrens ergibt

  $$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\2&2&4&0\end{array}\right]\xrightarrow{\text{II}-2\text{I}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&2&2&0\end{array}\right]\xrightarrow{\text{II}\cdot\frac{1}{2}}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&1&0\end{array}\right].$$

  Es ist $x_3=t$ (freier Parameter) und $x_1=x_2=-t$. Damit ist

  $$N(A)=\Big\{(-t,-t,t)\mid t\in\mathbb{R}\Big\}=\Big\{t(-1,-1,1)\mid t\in\mathbb{R}\Big\}=\text{Lin}\Big((-1,-1,1)\Big).$$

- *Spaltenraum* von A^T: $S(A^T)=Z(A)$
- *Zeilenraum* von A^T: $Z(A^T)=S(A)$
- *Nullraum* von A^T: $N(A^T)=\{x\in\mathbb{R}^2 \mid A^Tx=o\}=\{(0,0)\}$
  (Die zugehörige Rechnung mit dem Gauß-Verfahren führen Sie bitte selbstständig durch.)

4.5 Eine Ergänzung zu Beispiel 4.14

Im Beispiel 4.14 wurde gezeigt, dass $S(E) = S(B) = \mathbb{R}^2$; d.h., jeder Vektor $b \in \mathbb{R}^2$ kann als Linearkombination der Spaltenvektoren der Matrizen E bzw. B geschrieben werden, so auch $b = (1, 4)$:

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} &= 1 \cdot \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 4 \cdot \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \in S(E) \\
\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} &= (-2) \cdot \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} \in S(B) \\
\begin{bmatrix}1\\4\end{bmatrix} &= 6 \cdot \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + (-4) \cdot \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix} \in S(B).
\end{aligned}$$

Wir stellen fest: Die einzige Lösung von $Ex = b$ ist $x = (1, 4)$, während $Bx = b$ unter anderem von $x = (-2, 0, 1)$ oder $x = (6, -4, 1)$ gelöst wird.

4.6 Ergänzungen zur linearen Abhängigkeit

In Beispiel 4.16 wird festgestellt, dass das homogene lineare Gleichungssystem, das zu der Vektorgleichung

$$c_1 \begin{bmatrix}1\\-2\\3\end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix}5\\6\\-1\end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

gehört, die Lösung

$$c_1 = -\frac{1}{2}\,t, \quad c_2 = -\frac{1}{2}\,t, \quad c_3 = t \qquad t \in \mathbb{R} \text{ (freier Parameter)}$$

besitzt. Wählen wir beispielsweise $t = 2$, so erhalten wir $c_1 = c_2 = -1$ und $c_3 = 2$ und damit folgende Darstellung des Nullvektors als Linearkombination von v_1, v_2 und v_3:

$$(-1)v_1 + (-1)v_2 + 2v_3 = o.$$

Erläuterung von Satz 4.8 an Beispielen

1. Weshalb ist eine Menge M, die den Nullvektor enthält, linear abhängig?

Wir betrachten $M = \{v_1, v_2, v_3\}$ mit $v_1 = (1, 2, 3, 4)$, $v_2 = (0, 0, 0, 0)$ und $v_3 = (6, 7, 8, 9)$. Die Gleichung $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = (0, 0, 0, 0)$ hat außer der trivialen Lösung $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ weitere Lösungen wie $c_1 = 0, c_2 = 1, c_3 = 0$, da $0v_1 + 1v_2 + 0v_3 = (0, 0, 0, 0)$ gilt. Daher ist M eine linear abhängige Menge.

2. Weshalb ist ein einzelner Vektor $v \neq o$ linear unabhängig?

Antwort: Die Gleichung $cv = o$ besitzt nur die triviale Lösung $c = 0$.

Ist v dagegen der Nullvektor, gilt also $v = o$, so hat die Gleichung $cv = o$ auch nichttriviale Lösungen wie beispielsweise $c = 1$.

3. Sind zwei Vektoren v und w linear abhängig, gilt also beispielsweise $5v + 3w = o$, so kann man einen der beiden Vektoren als Vielfaches des anderen schreiben, hier etwa $v = -\frac{3}{5}w$.

4. Umgekehrt gilt auch: Ist ein Vektor v ein skalares Vielfaches von w, etwa $v = cw$, so sind v und w linear abhängig. (Weshalb nämlich?)

Aufgrund von **3.** und **4.** gilt also:

Zwei Vektoren sind genau dann linear abhängig, wenn man einen der Vektoren als skalares Vielfaches des anderen darstellen kann.

Oder (anders formuliert):

Zwei Vektoren sind genau dann linear unabhängig, wenn keiner der beiden Vektoren ein skalares Vielfaches des anderen ist.

Unter Punkt 3 wurden nur zwei Vektoren betrachtet. Nun zeigen wir, dass auch für r Vektoren $v_1, \ldots, v_r$ ($r \geq 2$) ein entsprechendes Resultat gilt:

Feststellung. Gegeben seien r Vektoren $v_1, \ldots, v_r$ (für $r \geq 2$). Dann gilt: *Die Vektoren $v_1, \ldots, v_r$ sind genau dann linear abhängig, wenn es unter ihnen einen gibt, der eine Linearkombination der übrigen $r-1$ Vektoren ist.*

Beweis.

(I) Sind die Vektoren $v_1, \ldots, v_r$ linear abhängig, so gibt es Skalare $c_1, \ldots, c_r$, die nicht alle gleich Null sind und für die

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_r v_r = 0$$

gilt. Es sei etwa $c_i \neq 0$. Dann kann man die Gleichung nach v_i auflösen und erhält somit eine Darstellung von v_i als Linearkombination der übrigen $r-1$ Vektoren.

(II) Nun sei umgekehrt einer der Vektoren $v_1, \ldots, v_r$ als Linearkombination der übrigen darstellbar; es sei dies etwa v_i und die Darstellung laute

$$v_i = c_1 v_1 + c_{i-1} v_{i-1} + c_{i+1} v_{i+1} + \ldots + c_r v_r.$$

Bringt man in dieser Darstellung v_i auf die rechte Seite und setzt $c_i = -1$, so hat man Skalare $c_1, \ldots, c_r$, für die

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_r v_r = 0$$

gilt. Da (wegen $c_i = -1$) nicht alle diese Skalare gleich Null sind, haben wir gezeigt, dass die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_r$ linear abhängig sind. $\square$

4.7 Ergänzungen zu Basis und Dimension

Der **Satz 4.9** im Gramlich besagt: *r Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_r$ des $\mathbb{R}^n$ sind immer linear abhängig, falls $r > n$ gilt.*

Wir erklären am Beispiel $r = 5$ und $n = 4$, weshalb das so ist. Es gelte

$$v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \\ a_{41} \end{bmatrix}, \ v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \\ a_{42} \end{bmatrix}, \ \ldots, \ v_5 = \begin{bmatrix} a_{15} \\ a_{25} \\ a_{35} \\ a_{45} \end{bmatrix}.$$

Wir haben zu zeigen, dass die Vektorgleichung

$$c_1 v_1 + c_2 v_2 + \ldots + c_5 v_5 = 0 \qquad (*)$$

neben der trivialen Lösung $c_1 = c_2 = \ldots = c_5 = 0$ noch mindestens eine weitere Lösung besitzt.

Bei (*) handelt es sich um ein homogenes Gleichungssystem mit 4 Gleichungen und 5 Unbestimmten:

$$\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3 + a_{14}c_4 + a_{15}c_5 &= 0 \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23}c_3 + a_{24}c_4 + a_{25}c_5 &= 0 \\ a_{31}c_1 + a_{32}c_2 + a_{33}c_3 + a_{34}c_4 + a_{35}c_5 &= 0 \\ a_{41}c_1 + a_{42}c_2 + a_{43}c_3 + a_{44}c_4 + a_{45}c_5 &= 0. \end{aligned}$$

Löst man dieses System mit dem Gauß-Verfahren, so kann es in der hergestellten Zeilenstufenform höchstens vier führende Einsen geben.

Dies bedeutet: Es gibt mindestens eine freie Variable und deshalb unendlich viele Lösungen. Außer der trivialen Lösung $c_1 = c_2 = \ldots = c_5 = 0$ gibt es also weitere Lösungen, was bedeutet, dass die Vektoren $v_1, v_2, \ldots, v_5$ linear abhängig sind.

Die Kenntnis von Satz 4.9 kann in manchen Situationen sehr nützlich sein: Um zu wissen, ob beispielsweise die Vektoren $(1, 2, 3, 4, 5)$, $(-1, -2, 0, 0, 7)$, $(1, 1, 8, 6, 3)$, $(1, 5, 7, 2, 2)$, $(3, 1, 4, 1, 5)$ und $(2, 7, 1, 8, -3)$ linear abhängig oder unabhängig sind, benötigt man keine Rechnung!

In Abschnitt 1.6 dieses Ergänzungsskripts haben wir die quadratischen Matrizen (d.h. die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$) in zwei Klassen eingeteilt und haben festgestellt, dass es erhebliche Unterschiede zwischen Matrizen der **Klasse I** (*invertierbare Matrizen*) und der **Klasse II** (*nicht invertierbare Matrizen*) gibt. **Hier nun ein weiterer Unterschied**: Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

- *Ist A in der Klasse I, so bilden die Spalten von A eine Basis des $\mathbb{R}^n$.*

  Begründung: siehe Gramlich, Absatz nach Satz 4.9.

- *Ist dagegen A in der Klasse II, so sind die Spalten von A linear abhängig und bilden somit keine Basis des $\mathbb{R}^n$.*

  Begründung: Ist A in der Klasse II, so besitzt das homogene System $Ax = 0$ neben der trivialen Lösung noch weitere Lösungen (vgl. Abschnitt 1.6 dieses Ergänzungsskripts). Dies bedeutet aber gerade, dass die Spalten von A linear abhängig sind, was man sofort erkennt, wenn man das Gleichungssystem $Ax = 0$ **in Spaltenform** aufschreibt:

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2 \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \ldots + x_n \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Der oben für die Spalten von $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ formulierte Unterschied überträgt sich auf die Zeilen von A. Es gilt:

- *Ist A in der Klasse I, so bilden auch die Zeilen von A eine Basis des $\mathbb{R}^n$.*

  Begründung: Ist A invertierbar, so auch A^T (vgl. Gramlich, Abschnitt 1.8 sowie Abschnitt 1.6 dieses Ergänzungsskripts). Damit bilden die Spalten von A^T eine Basis des $\mathbb{R}^n$, und somit auch die Zeilen von A.

Ähnlich erkennt man durch Übergang von A zu A^T:

- *Ist A in der Klasse II, so sind die Zeilen von A linear abhängig (und bilden somit keine Basis des $\mathbb{R}^n$).*

Den folgenden grundlegenden Satz geben wir ohne Beweis an.

Satz.
Ist V ein Vektorraum und bilden $v_1, \ldots, v_n$ und $w_1, \ldots, w_m$ zwei Basen von V, so gilt immer $n = m$.

Mit anderen Worten: Zwei verschiedene Basen eines Vektorraums haben immer gleich viele Elemente. Nur weil dies gilt, kann man den Begriff der *Dimension* eines Vektorraums einführen.

4.8 Beispiele zu Satz 4.11 (Struktursatz)

1. Wir betrachten das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_3 &= 5\,. \end{aligned}$$

Als allgemeine Lösung erhält man mit Hilfe des Gauß-Algorithmus $x_1 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}t$, $x_2 = -\frac{7}{3} + \frac{1}{3}t$, $x_3 = t$ mit frei wählbarem Parameter $t \in \mathbb{R}$.

Wir wollen eine Darstellung der Lösung wie im Struktursatz 4.11 angeben und diese geometrisch interpretieren. Zu diesem Zweck schreiben wir die allgemeine Lösung x als Vektor und formen sie so um, dass sich eine Darstellung wie in Satz 4.11 ergibt:

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, x_3) \\ &= \left(\tfrac{5}{3} - \tfrac{2}{3}\,t, -\tfrac{7}{3} + \tfrac{1}{3}\,t, t\right) \\ &= \left(\tfrac{5}{3}, -\tfrac{7}{3}, 0\right) + t\left(-\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, 1\right) \quad (t \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Hierbei ist $\overline{x} = \left(\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}, 0\right)$ die spezielle Lösung des Gleichungssystems für $t = 0$; $t\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$ ist die allgemeine Lösung des zugehörigen homogenen Systems.

Geometrisch handelt es sich bei der Lösungsmenge um eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ mit Stützvektor $\left(\frac{5}{3}, -\frac{7}{3}, 0\right)$ und Richtungsvektor $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)$.

2. Nun betrachten wir das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 8 \\ -x_1 - \tfrac{1}{2}x_2 - \tfrac{1}{2}x_3 &= -2\,. \end{aligned}$$

Als allgemeine Lösung erhält man mit dem Gauß-Verfahren $x_1 = 2 - \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t$, $x_2 = s$ $x_3 = t$ mit frei wählbaren Parametern s und t.

Wir erhalten folgende Darstellung der allgemeinen Lösung:

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, x_3) \\ &= \left(2 - \tfrac{1}{2}\,s - \tfrac{1}{2}\,t,\ s,\ t\right) \\ &= (2, 0, 0) + s\left(-\tfrac{1}{2}, 1, 0\right) + t\left(-\tfrac{1}{2}, 0, 1\right) \quad (s, t \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Geometrisch handelt es sich bei der Lösungsmenge um eine Ebene im $\mathbb{R}^3$ mit Stützvektor $(2, 0, 0)$ und Spannvektoren $\left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right)$ und $\left(-\frac{1}{2}, 0, 1\right)$.

3. Wir betrachten das folgende lineare Gleichungssystem $Ax = b$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Die allgemeine Lösung lautet $x_1 = 1 - 3t$, $x_2 = 1 + 2t$, $x_3 = 1 - 2t$, $x_4 = t$ mit $t \in \mathbb{R}$.

Wir schreiben die allgemeine Lösung dieses inhomogenen Gleichungssystems als Summe einer speziellen Lösung $\overline{x}$ von $Ax = b$ und der allgemeinen Lösung des zugehörigen homogenen Systems $Ax = o$:

$$\begin{aligned} x &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \\ &= (1 - 3t, 1 + 2t, 1 - 2t, t) \\ &= (1, 1, 1, 0) + t(-3, 2, -2, 1) \quad (t \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Auch dieses Ergebnis lässt sich geometrisch interpretieren: Es handelt sich um eine Gerade im $\mathbb{R}^4$ mit Stützvektor $(1, 1, 1, 0)$ und Richtungsvektor $(-3, 2, -2, 1)$.

Während wir den Vektorraum $\mathbb{R}^1$ als Zahlenstrahl, den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ als Zeichenebene und $\mathbb{R}^3$ als Anschauungsraum deuten können, entfallen für Vektorräume $\mathbb{R}^n$ mit $n \geq 4$ derart anschauliche Deutungen. Trotzdem übernimmt man die geometrischen Sprechweisen der Räume $\mathbb{R}^2$ und $\mathbb{R}^3$.

Sind beispielsweise zwei Vektoren $p = (p_1, \ldots, p_n)$ und $u = (u_1, \ldots, u_n) \neq o$ im $\mathbb{R}^n$ für $n \geq 4$ gegeben, so nennt man die Menge aller $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ mit $x = p + t\,u$ (für $t \in \mathbb{R}$) eine *Gerade im* $\mathbb{R}^n$ *mit Stützvektor* p *und Richtungsvektor* u.

Wir prägen uns das Schema aus Satz 4.11 ein:

Allgemeine Lösung von $Ax = b$

$=$

Spezielle Lösung von $Ax = b$

$+$

Allgemeine Lösung von $Ax = o$

Die allgemeine Lösung von $Ax = o$ ist bekanntlich der Nullraum $N(A)$. Daher kann das obige Schema auch so wiedergegeben werden:

Die allgemeine Lösung von $Ax = b$ besitzt die Form $\overline{x} + N(A)$, wobei $\overline{x}$ eine spezielle Lösung von $Ax = b$ und $N(A)$ der Nullraum von A ist. Wir illustrieren dies anhand von Beispiel 4.21, in dem das Gleichungssystem

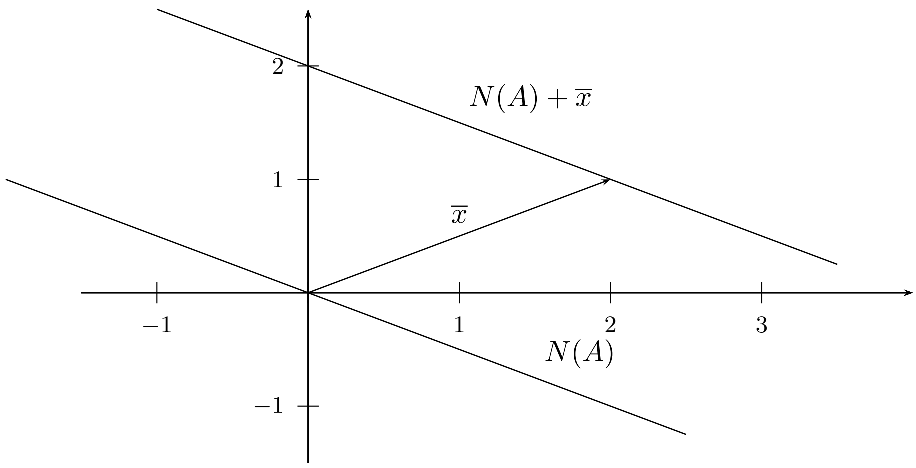
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &= 4 \\ 3x_1 + 6x_2 &= 12 \end{aligned}$$

betrachtet wird. Die allgemeine Lösung dieses Systems lautet

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \overline{x} + N(A)$$

mit $\overline{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ und $N(A) = \mathrm{Lin}\big((-2, 1)\big)$.

Veranschaulichung der Lösungsmenge:



4.9 Ergänzungen und weitere Beispiele zu den Fundamentalräumen einer Matrix

Wir wissen: Elementare Zeilenumformungen ändern die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems nicht. Folglich bleibt auch der Nullraum einer Matrix bei elementaren Zeilenumformungen unverändert, da der Nullraum $N(A)$ die Lösungsmenge von $Ax = 0$ ist.

Im Gramlich wird am Anfang von Abschnitt 4.12 ohne Begründung erwähnt, dass bei elementaren Zeilenumformungen der Zeilenraum $Z(A)$ ebenfalls unverändert bleibt. Wir geben hier eine Begründung für Zeilenumformungen vom Typ 2 („Multiplikation einer Zeile z_i mit einer Konstanten $c \neq 0$“):

A habe die Zeilenvektoren $z_1, \ldots, z_m$ und A' habe dieselben Zeilenvektoren bis auf die i-te Zeile, die cz_i lautet. Ist $v \in Z(A)$, so ist v eine Linearkombination der Zeilen von A, etwa $v = c_1 z_1 + \ldots + c_i z_i + \ldots + c_m z_m$. Dann lässt sich v ebenfalls als Linearkombination der Zeilen von A' schreiben: $v = c_1 z_1 + \ldots + \frac{c_i}{c}(cz_i) + \ldots + c_m z_m$, d.h. $v \in Z(A')$. Jeder Vektor aus $Z(A)$ ist also auch in $Z(A')$. Ähnlich erkennt man, dass jeder Vektor aus $Z(A')$ auch in $Z(A)$ ist. Es folgt $Z(A) = Z(A')$.

Auf ganz ähnliche Art überzeugt man sich ebenfalls für die anderen Typen von elementaren Zeilenumformungen, dass der Zeilenraum unverändert bleibt.

Wir halten fest: Ist A' aus A durch elementare Zeilenumformungen hervorgegangen, so gilt $N(A) = N(A')$ und $Z(A) = Z(A')$. Dagegen kann sich der Spaltenraum verändert haben, d.h., $S(A) \neq S(A')$ ist möglich (Beispiel: siehe Gramlich). Es gilt jedoch (Satz 4.13): Die Spalten von A sind genau dann linear unabhängig, wenn die Spalten von A' linear unabhängig sind.

Ein weiteres Beispiel zur Bestimmung einer Basis von Lin($\mathbf{v_1}$, $\mathbf{v_2}$, …, $\mathbf{v_r}$)

Es sei $v_1 = (1,-1,2)$, $v_2 = (2,1,1)$ und $v_3 = (4,5,-1)$. Wir suchen eine Basis der linearen Hülle $\mathrm{Lin}\,(v_1, v_2, v_3)$.

Lösung: Wir schreiben die drei Vektoren als Zeilenvektoren einer $(3,3)$-Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

und bringen A mit Hilfe des Gauß-Verfahrens auf Zeilenstufenform:

$$Z = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nach Satz 4.14 bilden die vom Nullvektor verschiedenen Zeilenvektoren von Z eine Basis des Zeilenraums von Z. Weil die Zeilenräume von A und von Z übereinstimmen (siehe Satz 4.12), bilden diese Vektoren auch eine Basis des Zeilenraums von A, also von der gegebenen linearen Hülle: $b_1 = (1,-1,2)$ und $b_2 = (0,1,-1)$ ist eine gesuchte Basis von $\mathrm{Lin}\,(v_1, v_2, v_3)$.

Mit der gefundenen Basis können wir eine geometrische Interpretation von $\mathrm{Lin}\,(v_1, v_2, v_3)$ geben: Es handelt sich um eine Ursprungsebene des $\mathbb{R}^3$, die von den gefundenen Basisvektoren aufgespannt wird.

Erläuterung des Hauptsatzes 1 anhand eines Beispiels

Es sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 & 5 \end{bmatrix}$.

A ist eine $(5,4)$-Matrix. Die grundlegenden Größen aus dem Hauptsatz sind:

- m: Zeilenzahl von A
- n: Spaltenzahl von A
- r: Rang von A

Während wir $m = 5$ und $n = 4$ unmittelbar an der Matrix A ablesen können, müssen wir r erst berechnen. Zu diesem Zweck überführen wir A durch elementare Zeilenumformungen in eine Matrix Z_A in Zeilenstufenform:

$$A \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 1 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -7 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & -5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = Z_A$$

Anhand von Z_A können wir jetzt auch r einfach ablesen: Die Anzahl der führenden Einsen ist 3, also gilt $r = 3$.

Wir diskutieren die vier Fundamentalräume von A, d.h., wir bestimmen deren Dimension, geben jeweils eine Basis an und interpretieren die Ergebnisse geometrisch.

1. *Der Zeilenraum $Z(A)$*

   Die Dimension von $Z(A)$ ist $r = 3$.

   Wir bestimmen eine Basis von $Z(A)$. Wir wissen (Gramlich, Satz 4.12), dass $Z(A) = Z(Z_A)$. Aufgrund von Satz 4.14 bilden die ersten drei Zeilen $z_1 = (1, 0, 2, 1)$, $z_2 = (0, 1, 2, 2)$ und $z_3 = (0, 0, 1, \frac{5}{7})$ eine Basis von $Z(Z_A)$ und damit auch von $Z(A)$.

   Zur geometrischen Interpretation: $Z(A)$ ist ein 3-dimensionaler Unterraum des Vektorraums $\mathbb{R}^4$. Genauer gilt
   $$Z(A) = \mathrm{Lin}\,(z_1, z_2, z_3),$$
   d.h., $Z(A)$ ist derjenige Unterraum, der von $z_1 = (1, 0, 2, 1)$, $z_2 = (0, 1, 2, 2)$ und $z_3 = (0, 0, 1, \frac{5}{7})$ aufgespannt wird.

2. *Der Spaltenraum $S(A)$*

   Die Dimension von $S(A)$ ist $r = 3$.

   Wir bestimmen eine Basis von $S(A)$. Leider (vgl. Gramlich, Abschnitt 4.12) gilt im Allgemeinen nicht $S(A) = S(Z_A)$, da sich der Spaltenraum einer Matrix bei elementaren Zeilenumformungen ändern kann. Um zum Ziel zu kommen, betrachten wir A^T anstelle von A, d.h., wir verwandeln die Spalten von A in Zeilen von A^T und bringen A^T durch elementare Zeilenumformungen in Zeilenstufenform:

   $$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 2 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$
   $$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = Z_A{}'$$

   Es gilt $S(A) = Z(A^T) = Z(Z_A{}')$. Mit den gleichen Überlegungen wie unter 1. finden wir $z_1' = (1, -1, 2, 0, 2)$, $z_2' = (0, 1, 2, 1, 4)$ und $z_3' = (0, 0, 1, 0, 1)$ als Basis von $S(A)$.

   Geometrische Interpretation: $S(A)$ ist ein 3-dimensionaler Unterraum des Vektorraums $\mathbb{R}^5$, nämlich derjenige, der von z_1', z_2' und z_3' aufgespannt wird.

3. *Der Nullraum $N(A)$*

   Die Dimension von $N(A)$ ist $n - r = 4 - 3 = 1$.

   Um eine Basis von $N(A)$ zu bestimmen, haben wir das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = o$ zu lösen. Die erweiterte Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystem enthält in der rechten Spalte nur Nullen. Mit dem Gauß-Algorithmus, der A in Z_A verwandelt hat, erhalten wir

$$\left[\begin{array}{rrrr|r} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 5 & 0 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{7} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Zur besseren Übersicht schreiben wir das zugehörige Gleichungssystem auf:

$$\begin{array}{rcl} x_1 \qquad + 2x_3 + \ \ x_4 & = & 0 \\ x_2 + 2x_3 + \ 2x_4 & = & 0 \\ x_3 + \frac{5}{7}x_4 & = & 0 \end{array}$$

Rückwärtseinsetzen ergibt $x_4 = t,\ x_3 = -\frac{5}{7}t,\ x_2 = -\frac{4}{7}t,\ x_1 = \frac{3}{7}t$. Die allgemeine Lösung lautet also

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \ = \ t\left(\frac{3}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{5}{7}, 1\right) .$$

Eine Basis des 1-dimensionalen Unterraums $N(A)$ wird also von $a = \left(\frac{3}{7}, -\frac{4}{7}, -\frac{5}{7}, 1\right)$ gebildet; ebenso kann man $b = 7a = (3, -4, -5, 7)$ anstelle von a als Basisvektor von $N(A)$ wählen.

Geometrische Interpretation: $N(A)$ ist ein 1-dimensionaler Unterraum des Vektorraums $\mathbb{R}^4$, nämlich derjenige, der von $b = (3, -4, -5, 7)$ erzeugt wird. Einen 1-dimensionalen Unterraum nennt man auch *Ursprungsgerade*. Wir können $N(A)$ also auch als die Ursprungsgerade im $\mathbb{R}^4$ beschreiben, die aus dem Vektor b und allen skalaren Vielfachen von b besteht.

4. *Der Nullraum $N(A^T)$*

   Die Dimension von $N(A^T)$ ist $m - r = 5 - 3 = 2$.

   Um eine Basis von $N(A^T)$ zu bestimmen, haben wir das homogene lineare Gleichungssystem $A^T y = o$ zu lösen. Analog zum zweiten Fall liefert uns der Gauß-Algorithmus

$$[\ Z_A{}' \mid o\ ] = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -1 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

   Es folgt $y_5 = t$, $y_4 = s$, $y_3 = -t$, $y_2 = -s - 2t$, $y_1 = -s - 2t$. Die allgemeine Lösung ist

$$\begin{array}{rcl} y & = & (y_1, y_2, y_3, y_4, y_5) \\ & = & (-s - 2t, -s - 2t, -t, s, t) \\ & = & s(-1, -1, 0, 1, 0) + t(-2, -2, -1, 0, 1)\ . \end{array}$$

   Eine Basis von $N(A^T)$ ist $b_1 = (-1, -1, 0, 1, 0)$, $b_2 = (-2, -2, -1, 0, 1)$.

   Geometrische Interpretation: $N(A^T)$ ist ein 2-dimensionaler Unterraum des Vektorraums $\mathbb{R}^5$, nämlich derjenige, der von b_1 und b_2 erzeugt wird. Einen 2-dimensionalen Unterraum nennt man *Ursprungsebene*. Wir können $N(A^T)$ demnach auch als die Ursprungsebene im $\mathbb{R}^5$ beschreiben, die aus allen Linearkombinationen $sb_1 + tb_2$ besteht.

5 Ergänzungen zu Abschnitt 5: Determinanten

5.1 Ergänzungen zur Determinante einer (2,2)-Matrix

Vorweg eine Bemerkung zur Schreibweise von Determinanten: Neben der von Gramlich gewählten Bezeichnung $\mathrm{Det}(A)$ sind ebenfalls $\mathrm{Det}\,A$, $|A|$ („Determinantenstriche“ mit oder ohne Matrix-Klammern) oder auch $\det A$ üblich. Wir wählen in diesem Ergänzungsskript vorzugsweise eine der beiden letzten Varianten.

Wir beweisen von Satz 5.1 die Teilaussagen (a) und (b):

Behauptung (a): $\det A = \det A^T$.

Beweis. Für $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ gilt $\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ und für die transponierte Matrix $A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}$ gilt $\det A^T = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \det A$.

Behauptung (b): Vertauschung der beiden Zeilen oder Spalten ändert das Vorzeichen der Determinante.

Beweis. Es sei $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$.

Vertauscht man die beiden Zeilen, erhält man $B = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$ mit

$$\det B = a_{21}a_{12} - a_{22}a_{11} = -(-a_{21}a_{12} + a_{22}a_{11}) = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -\det A.$$

Vertauscht man die beiden Spalten, erhält man $C = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{bmatrix}$ mit

$$\det C = a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22} = -(-a_{12}a_{21} + a_{11}a_{22}) = -(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = -\det(A).$$

Ein **Beispiel** zu Teilaussage (d): Sei $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 9 - (-8) = 17$.

Addiert man das a-fache der ersten zur zweiten Zeile, so erhält man

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4+3a & 3+2a \end{bmatrix}.$$

Es folgt

$$\det B = 3(3+2a) - 2(-4+3a) = 9 + 6a + 8 - 6a = 17 = \det A.$$

Wir bestätigen die Aussage (c) von Satz 5.2 für die Zeilen einer Matrix (Die Aussagen (a) und (b) bestätigen Sie bitte selber; ebenso Satz 5.3.):

Lineare Abhängigkeit bedeutet im Fall von zwei Zeilen, dass eine der beiden Zeilen ein skalares Vielfaches der anderen ist. Es sei etwa die zweite Zeile ein Vielfaches der ersten Zeile:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ ca & cb \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = a(cb) - b(ca) = 0.$$

Es sei $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$. Wir wollen die Determinante von AB berechnen. Es gilt

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{bmatrix}$$

und folglich

$$\begin{aligned}
\det(AB) &= (a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21})(a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22})-(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22})(a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21})\\
&= \underline{a_{11}b_{11}a_{21}b_{12}}+a_{11}b_{11}a_{22}b_{22}+a_{12}b_{21}a_{21}b_{12}+\underline{a_{12}b_{21}a_{22}b_{22}}\\
&\quad -(\underline{a_{11}b_{12}a_{21}b_{11}}+a_{11}b_{12}a_{22}b_{21}+a_{12}b_{22}a_{21}b_{11}+\underline{a_{12}b_{22}a_{22}b_{21}})\\
&= a_{11}b_{11}a_{22}b_{22}+a_{12}b_{21}a_{21}b_{12}-a_{11}b_{12}a_{22}b_{21}-a_{12}b_{22}a_{21}b_{11}\\
&= (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})(b_{11}b_{22}-b_{12}b_{21})\\
&= \det A\cdot\det B\ .
\end{aligned}$$

Dies beweist Satz 5.4.

5.2 Ergänzungen zum Laplaceschen Entwicklungssatz; Determinante und Invertierbarkeit

Zunächst noch eine weitere Bemerkung zur Schreibweise von Determinanten, die am Beispiel

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&4\\3&2&1\end{bmatrix}$$

erläutert werden soll: Benutzt man die Determinantenstriche, um die Determinante von A zu bezeichnen, so gilt:

$$|A|=\left|\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&4\\3&2&1\end{bmatrix}\right|.$$

Für die rechte Seite schreibt man dann der Einfachheit halber

$$\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&4\\3&2&1\end{vmatrix}.$$

Die Vorzeichen im Ausdruck $\det A=\sum\limits_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det A_{ij}$ ergeben sich aus dem sogenannten *Schachbrettmuster*:

$$\begin{bmatrix}+&-&+&-&\cdots\\-&+&-&+&\cdots\\+&-&+&-&\cdots\\-&+&-&+&\cdots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{bmatrix}.$$

Man beachte: $(-1)^{i+j}=\begin{cases}+1 & \text{falls } i+j \text{ gerade}\\ -1 & \text{falls } i+j \text{ ungerade}\end{cases}$

Beispiel. Man berechne $\det A$ für

$$A=\begin{bmatrix}1&2&0&1\\2&0&0&3\\1&2&3&4\\-1&-1&2&0\end{bmatrix}.$$

Weil in der zweiten Zeile die meisten Nullen stehen, entwickeln wir nach dieser Zeile:

$$\det A = (-2) \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

Für die beiden $(3,3)$-Matrizen gilt:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-8) + 7 = -9 \ ,$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 7 - 2 \cdot 5 = -3 \ .$$

Insgesamt also:

$$\det A = (-2) \cdot (-9) + 3 \cdot (-3) = 18 - 9 = 9.$$

Eine Ergänzung zu Satz 5.6 (Rechenregeln für die Determinante)

Im Punkt (f) der Rechenregeln für die Determinante einer (n,n)-Matrix heißt es unter anderem, dass die Determinante einer (n,n)-Matrix gleich Null ist, falls zwei Zeilen (Spalten) zueinander proportional sind. Dies gilt allgemeiner: Die Determinante einer (n,n)-Matrix ist Null, falls die Zeilen (Spalten) linear abhängig sind.

Eine Ergänzung zu Determinanten und Invertierbarkeit

Wir knüpfen an Satz 5.6 an: Ist $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix, so gilt $AA^{-1} = E$ (Einheitsmatrix), woraus nach Satz 5.6 (g) und (i)

$$1 = \det E = \det(AA^{-1}) = \det A \cdot \det A^{-1}$$

folgt. **Insbesondere gilt also det $\mathbf{A} \neq \mathbf{0}$**. Wir halten dies fest:

$$\boxed{\text{Ist } A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ invertierbar, so gilt } \det A \neq 0.}$$

Nun sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ *nicht* invertierbar. Wenn wir A mit Hilfe des Gauß-Jordan-Verfahrens in eine Einheitsmatrix verwandeln wollen, so gelingt dies nicht, da in der linken Blockmatrix eine Nullzeile auftritt (vgl. Gramlich, Abschnitt 1.8). Dies bedeutet: Durch elementare Zeilenumformungen ist aus A eine Matrix B mit $\det B = 0$ entstanden. Aufgrund von Satz 5.6 (b), (c) und (e) gilt: Durch elementare Zeilenumformungen kann eine Matrix, deren Determinante ungleich Null ist, niemals in eine Matrix übergehen, deren Determinante gleich Null ist. Deshalb gilt:

$$\boxed{\text{Ist } A \in \mathbb{R}^{n\times n} \text{ nicht invertierbar, so gilt } \det A = 0.}$$

Wir haben also eine weitere Eigenschaft gefunden, durch die sich Matrizen der Klasse I (invertierbare (n,n)-Matrizen) von Matrizen der Klasse II (nicht invertierbare (n,n)-Matrizen) unterscheiden:

- Ist A eine Matrix der Klasse I, so gilt $\det A \neq 0$.
- Ist A eine Matrix der Klasse II, so gilt $\det A = 0$.

Wir fassen die Unterschiede zwischen den Matrizen der Klasse I und denen der Klasse II in der nachfolgenden Tabelle zusammen.

Einteilung der quadratischen Matrizen

Klasse I (invertierbare (n,n)-Matrizen A)	**Klasse II** (nicht invertierbare (n,n)-Matrizen A)
$\det A \neq 0$	$\det A = 0$
Die Spalten von A bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$.	Die Spalten von A bilden keine Basis des $\mathbb{R}^n$.
Die Spalten von A sind linear unabhängig.	Die Spalten von A sind linear abhängig.
Die Zeilen von A bilden eine Basis des $\mathbb{R}^n$.	Die Zeilen von A bilden keine Basis des $\mathbb{R}^n$.
Die Zeilen von A sind linear unabhängig.	Die Zeilen von A sind linear abhängig.
$Ax = b$ ist für jede rechte Seite b eindeutig lösbar.	Für jede rechte Seite b gilt: $Ax = b$ ist nicht eindeutig lösbar, d.h., $Ax = b$ ist entweder unlösbar oder es gibt mehr als eine Lösung.
Das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = o$ besitzt nur die triviale Lösung.	Das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = o$ besitzt neben der trivialen Lösung noch weitere (nichttriviale) Lösungen.
Mit dem Gauß-Jordan-Verfahren erhält man die reduzierte Zeilenstufenmatrix $Z = E_n$.	Das Gauß-Jordan-Verfahren führt zu einer reduzierten Zeilenstufenmatrix $Z \neq E_n$.

Die in der Tabelle aufgeführten Unterschiede zwischen Matrizen der Klassen I und II wurden im Laufe der Vorlesung ausführlich besprochen (siehe Abschnitte 1.6, 4.7 und 5.2 dieses Ergänzungsskripts).

Beispiele:

1. Es sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 6 & -5 \end{bmatrix}$.

In Beispiel 5.4 (Gramlich, Abschnitt 5.2) wurde $\det A = -1$ berechnet. Damit ist A invertierbar und wir können beispielsweise feststellen:

- Die Spalten von A bilden eine Basis des $\mathbb{R}^3$, Gleiches gilt für die Zeilen von A.
- Das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = o$ besitzt nur die triviale Lösung.
- $Ax = b$ ist für jede rechte Seite b eindeutig lösbar.

2. Nun sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

Wir berechnen die Determinante von A durch Entwicklung nach der ersten Zeile:

$$\det A = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-16) - 1 \cdot (-6) + 5 \cdot 2 = 0.$$

Damit können wir beispielsweise feststellen:

- A ist nicht invertierbar.
- Die Spalten von A sind linear abhängig; Gleiches gilt für die Zeilen von A.
- Für jede rechte Seite gilt: $Ax = b$ ist entweder unlösbar oder es gibt mehr als eine Lösung. (Welcher dieser Fälle vorliegt, hängt von b ab.)
- $Ax = o$ besitzt neben der trivialen Lösung noch weitere Lösungen.

Eine Ergänzung: Ist $A = [a]$ eine $(1,1)$-Matrix, so definiert man $\det A = a$.

5.3 Ergänzung zur Berechnung von Determinanten und zur Cramerschen Regel

Stellen wir uns einmal vor, wir müssten die Determinante einer großen Matrix berechnen und würden dies mit Hilfe des Entwicklungssatzes versuchen. Das kann sehr aufwendig werden! (Weshalb?) Besser geht es mit dem folgenden Verfahren.

Verfahren zur Berechnung der Determinante großer Matrizen:
Man verwandle die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ durch elementare Zeilenumformungen in eine obere Dreiecksmatrix

$$A' = \begin{bmatrix} a'_{11} & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & a'_{nn} \end{bmatrix}$$

wobei man - anders als im Gauß-Verfahren - nur die folgenden beiden Typen elementarer Umformungen benutzt:

(I) Vertauschung zweier Zeilen;

(II) Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Wenn man Operation (II) anwendet, ändert sich der Wert der Determinante nicht; bei jeder Anwendung von (I) ändert sich das Vorzeichen der Determinante (vgl. Gramlich, Abschnitt 5.2, Satz 5.6 (b) und (e)). Man muss sich also merken, wie oft man (I) angewendet hat.

Hat man schließlich eine obere Dreiecksmatrix A' erreicht, kann man ihre Determinante leicht berechnen (Satz 5.6 (h)):

Sind a'_{11}, a'_{22}, …, a'_{nn} die Elemente der Hauptdiagonalen, so gilt $\det A' = a'_{11} \cdot a'_{22} \cdot \ldots \cdot a'_{nn}$.

Damit hat man aber auch $\det A$ bestimmt. Ist nämlich k die Anzahl der vorgenommenen Zeilenvertauschungen, so folgt

$$\det A = (-1)^k \cdot \det A' = (-1)^k \cdot a'_{11} \cdot a'_{22} \cdot \ldots \cdot a'_{nn} \quad .$$

Beispiel. Es sei $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}$.

Wir berechnen $\det A$ mit dem obigen Verfahren:

$$\begin{aligned} A \quad = \quad & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad \to \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & -5 & 0 & -7 \\ 0 & 3 & 1 & 6 \end{bmatrix} \\ \to \quad & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -\frac{15}{2} & 8 \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} & -3 \end{bmatrix} \quad \to \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -2 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -\frac{15}{2} & 8 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{43}{15} \end{bmatrix} \quad = \quad A' \end{aligned}$$

Da keine Zeilen vertauscht wurden, gilt $\det A = 1 \cdot (-2) \cdot \left(-\frac{15}{2}\right) \cdot \frac{43}{15} = 43$.

Beispiel zur Cramerschen Regel:

Man löse das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 &= 4 \\ x_1 + 5x_2 &= 3 \end{aligned}$$

mit der Cramerschen Regel.

Lösung: Es ist $A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $A_1 = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ und $A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

Man erhält

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{29}{13}, \ x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{2}{13}.$$

Index