

1. Bonusklausur zur Vorlesung „Mathematik I (DM)“

T. Andreae

26. November 2011, 9:00 bis 10:30 Uhr

Insgesamt sind 30 Punkte zu erreichen. Es genügt in der Regel nicht, nur das Ergebnis einer Rechnung bzw. die Antwort auf eine Frage anzugeben, sondern es sollte auch der Rechenweg ersichtlich sein bzw. eine kurze Begründung für die Antwort gegeben werden. Wer mindestens 15 Punkte erzielt, hat bestanden. Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (10 Punkte)

- a) Die Funktion $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sei gegeben durch $f(n, m) = (2n - m, n + m)$. Ist f injektiv? Beweisen Sie die Richtigkeit Ihrer Antwort. (6 Punkte)
- b) Die Funktion $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ sei gegeben durch $g(n, m) = n + m + 3$. Ist g surjektiv? Beweisen Sie die Richtigkeit Ihrer Antwort. (4 Punkte)

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass die folgende Aussage (A_n) für alle $n \geq 5$ gilt:

$$(A_n) \quad \sum_{i=5}^n \binom{i}{5} = \binom{n+1}{n-5}$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

- a) Es sei $A = \{w, x, y, z\}$. Man gebe die Potenzmenge $\mathcal{P}(A)$ an. (3 Punkte)
- b) Wahr oder falsch? (Kurze Begründung!)
 - (i) $333 \equiv -192 \pmod{25}$ (2 Punkte)
 - (ii) $3^{33} \equiv 33 \pmod{3}$ (2 Punkte)
- c) Für die Menge M gelte $|M| = 500$. Wie viele Teilmengen von M mit mindestens 497 Elementen gibt es? (3 Punkte)