Tutorium: Diskrete Mathematik

Matrizen

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Definition I

Eine Matrix ist eine rechteckige Anordnung (Tabelle) von Elementen, mit denen man in bestimmter Weise rechnen kann.

Matrizen sind ein Schlüsselkonzept der linearen Algebra und tauchen in vielen Gebieten der Mathematik auf. Matrizen stellen Zusammenhänge, in denen Linearkombinationen eine Rolle spielen, übersichtlich dar und erleichtern damit Rechen- und Gedankenvorgänge. Sie werden insbesondere dazu benutzt, lineare Abbildungen darzustellen und lineare Gleichungssysteme zu beschreiben.

Definition II

Matrizen werden dargestellt durch eine tabellarische Auflistung der Werte, die durch ein großes Klammerpaar umgeben ist. Die Form der Klammern ist dabei nicht fest vorgegeben, typisch sind aber runde oder eckige Klammern.

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}$$

Addition von Matrizen

Ebenso wie Vektoren werden Matrizen elementweise addiert und subtrahiert.

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Subtraktion von Matrizen

Ebenso wie Vektoren werden Matrizen elementweise addiert und subtrahiert.

$$
\begin{aligned}
A - B &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} - b_{11} & a_{12} - b_{12} & a_{13} - b_{13} \\ a_{21} - b_{21} & a_{22} - b_{22} & a_{23} - b_{23} \\ a_{31} - b_{31} & a_{32} - b_{32} & a_{33} - b_{33} \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Skalare Multiplikation

Eine Matrix kann mit einen konstanten Faktor $\lambda \in \mathbb{R}$ multipliziert werden. Den Wert λ nennt man ein Skalar.

$$\lambda A = \lambda \cdot \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \\ \lambda a_{31} & \lambda a_{32} & \lambda a_{33} \end{bmatrix}$$

Multiplikation von Matrizen I

Neben der skalaren Multiplikation gibt es noch eine weitere Multiplikation für Matrizen. Dabei werden 2 Matrizen miteinander mutlipliziert. Die folgende Formel zeigt dies exemplarisch für zwei 3×3 - Matrizen:

$$\begin{aligned}
&A \cdot B \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} & a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} & a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33} \\ a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31} & a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32} & a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Multiplikation von Matrizen II

Die Einträge der Ergebnismatrix C sind offenbar die Skalarprodukte der Zeilenvektoren der Matrix A mit den Spaltenvektoren der Matrix B.

Daraus lässt sich leicht eine Aussage über eine essentielle Voraussetzung der Matrizenmultiplikation treffen.

Damit man zwei Matrizen multiplizieren kann, müssen die Anzahl der Spalten der ersten Matrix und die Anzahl der Zeilen der zweiten Matrix übereinstimmen.

Multiplikation von Matrizen III

Gegeben seien sei Matrizen $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ und $B = \mathbb{R}^{n \times p}$. Das Produkt C der beiden Matrizen A und B ist dann eine $m \times p$ - Matrix und lässt sich allgemein durch die folgende Formel darstellen:

$$\begin{aligned} C &= A \cdot B \\ &= \left[a_{ij}\right] \cdot \left[b_{ij}\right] \\ &= \left[c_{ij}\right] \text{ mit } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \end{aligned}$$

Multiplikation von Matrizen IV

Aufgabe

Es seien $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ gegeben.

Berechne $A + B$, $A - B$ und $A \cdot B$.

Multiplikation von Matrizen V

Lösung

Es ergeben sich die folgenden Matrizen:

$$A + B = \begin{bmatrix} 0 & 7 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$$

$$A - B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A \cdot B = \begin{bmatrix} -1 & 11 \\ -3 & 27 \end{bmatrix}$$

Falksches Schema I

Das Falksche Schema (1951 von Sigurd Falk vorgeschlagen) ist eine einfache Methode, Matrizenmultiplikation übersichtlicher darzustellen.

Dazu werden die Matrizen A und B sowie deren Produkt C in eine bestimmte tabellarische Form gebracht, die vor allem eine optische Hilfe bietet.

Falksches Schema II

Gegeben seien die Matrizen $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$. Darstellung der Matrizenmultiplikation mit dem Falkschen Schema:

$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix} (= B) \\
\hline
(A =) \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix} (= C)
\end{array}
$$

Die Werte für c_{ij} berechnen sich wie zuvor durch $c_{ij} = \sum_{k=1}^{3} a_{ik} b_{kj}$.

Aufgaben

Aufgabe 1

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 7 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \end{bmatrix}, \; D = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Entscheide, ob die folgenden Produkte definiert sind und berechnen diese, falls sie existieren: AB, BA, AC, AD, AA, BB, CD, DC.

Aufgaben

Aufgabe 2

Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 7 & 7 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 3 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Berechne das Element, das in AB in der dritten Zeile und zweiten Spalte steht. Berechne außerdem die vierte Spalte von AB.

Aufgaben

Aufgabe 3

Entscheide, welche der folgenden Aussagen wahr und welche falsch sind. Begründe deine Meinung!

a) Die Addition von Matrizen ist nicht assoziativ.

b) Die Multiplikation von Matrizen ist für alle Matrizen kommutativ.

c) Die Multiplikation von Matrizen ist niemals kommutativ.

d) Für 2×2 - Matrizen gilt das Distributivgesetz

$$(A + B) \cdot C = AC + BC.$$

Elementare Zeilenumformungen

Man darf Matrizen durch elementare Zeilenumformungen in eine andere Matrix überführen. Diese Umformungen sind:

- Vertauschen von zwei Zeilen;
- Multiplikation einer Zeile mit einer von Null verschiedenen Konstanten;
- Addition eines Vielfachen einer Zeile zu einer anderen Zeile.

Diese Operationen dürfen beliebig kombiniert und beliebig oft wiederholt werden.

Elementare Spaltenumformungen I

Ebenso wie durch elementare Zeilenumformungen darf man eine Matrix durch elementare Spaltenumformungen in eine andere Matrix überführen. Diese Umformungen sind:

- Vertauschen von zwei Spalten;
- Multiplikation einer Spalte mit einer von Null verschiedenen Konstanten;
- Addition eines Vielfachen einer Spalte zu einer anderen Spalte.

Diese Operationen dürfen ebenfalls beliebig kombiniert und beliebig oft wiederholt werden.

Elementare Spaltenumformungen II

Generell sollten elementare Zeilen- und Spaltenumformungen nicht vermischt werden, da dies meist mehr Chaos als Nutzen bringt.

Wir werden uns im Folgenden ausschließlich mit elementaren Zeilenumformungen beschäftigen.

Sollten einmal Umformungen der Spalten notwendig sein, werden wir die zugehörige Matrix zunächst transponieren und anschließend die Zeilen der transponierten Matrix umformen.

Zeilenstufenform I

Durch elementare Zeilenumformungen kann man jede Matrix in die sogenannte *Zeilenstufenform* bringen. Diese erfüllt die folgenden Eigenschaften (vgl. Gramlich):

- Alle Zeilen, die nur Nullen enthalten, stehen in der Matrix ganz unten.
- Wenn eine Zeile nicht nur aus Nullen besteht, so ist die erste von Null verschiedene Zahl eine Eins. Sie wird als *führende Eins* bezeichnet.
- In zwei aufeinanderfolgenden Zeilen, die von Null verschiedene Elemente besitzen, steht die führende Eins in der unteren Zeile stets weiter rechts als in der oberen Zeile.

Zeilenstufenform II

Besitzt die Matrix Zeilenstufenform und gilt zusätzlich noch

- Eine Spalte, die eine führende Eins enthält, hat keine weiteren von Null verschiedenen Einträge,

dann liegt die Matrix in *reduzierter Zeilenstufenform* vor.

Zeilenstufenform III

Beispiel

Es sei $A = \begin{bmatrix} 2 & 8 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Bringe die Matrix A in Zeilenstufenform!

Zeilenstufenform IV

Zunächst wird die 1. Zeile mit $\frac{1}{2}$ multipliziert:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Anschließend wird das (-3)-fache der 1. Zeile zur 2. Zeile addiert:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -7 \end{bmatrix}.$$

Abschließend wird die 2. Zeile mit $-\frac{1}{7}$ multipliziert:

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zeilenstufenform V

Aufgabe 4

Überführe die folgende Matrix in Zeilenstufenform!

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Einheitsmatrizen I

Als *Einheitsmatrix* wird die spezielle quadratische Matrix

$$E_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$$

bezeichnet, deren Hauptdiagonalenelemente 1 sind; alle anderen Einträge sind 0.

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Einheitsmatrizen II

Die Einheitsmatrix ist das neutrale Element bezüglich der Matrizenmultiplikation, d.h., für alle Matrizen A (passende Dimensionen vorausgesetzt) gilt

$$A \cdot E = E \cdot A = A.$$

Diagonalmatrizen

Diagonalmatrizen sind spezielle quadratische Matrizen, die lediglich auf der Hauptdiagonalen von 0 verschiedene Elemente besitzen:

$$D = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & d_{n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & d_n \end{bmatrix}.$$

Die Einheitsmatrizen E_n sind spezielle Diagonalmatrizen.

Skalarmatrizen I

Skalarmatrizen sind spezielle Diagonalmatrizen, besitzen also ebenfalls nur auf der Hauptdiagonalen von 0 verschiedene Elemente; zusätzlich haben alle Hauptdiagonalenelemente denselben Wert:

$$S = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Skalarmatrizen II

Wie man leicht sieht, ist die Skalarmatrix lediglich ein skalares Vielfaches der Einheitsmatrix:

$$S = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda \cdot E_n.$$

Dreiecksmatrizen I

Dreiecksmatrizen sind eine weitere spezielle Art von Matrizen. Sie werden unterschieden in *obere* und *untere Dreiecksmatrizen*.

Sie zeichnen sich dadurch aus, dass sie über- bzw. unterhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen besitzen.

Dreiecksmatrizen II

$$O = \begin{bmatrix} a_1 & \star & \dots & \star & \star \\ 0 & a_2 & \dots & \star & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1} & \star \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \star & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \star & \star & \dots & a_{n-1} & 0 \\ \star & \star & \dots & \star & a_n \end{bmatrix}$$

Transponierte Matrix I

Aus einer Matrix A erhält man die *transponierte Matrix* A^T dadurch, dass man *die Zeilen der Matrix A mit den Spalten der Matrix A vertauscht.*

Mit anderen Worten: Die Matrix A wird an der Hauptdiagonalen „gespiegelt“.

Gegentlich wird die transponierte Matrix auch *gestürzte Matrix* genannt.

Transponierte Matrix II

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$ gegeben durch:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Durch Vertauschen der Zeilen und Spalten erhält man die transponierte Matrix $A^T \in \mathbb{R}^{m \times n}$:

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{n1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1m} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}.$$

Symmetrische Matrizen

Eine quadratische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt symmetrisch, wenn für alle $i, j \in \mathbb{N}$ $(1 \leq i \leq n$ und $1 \leq j \leq n)$ Folgendes gilt:

$$a_{ij} = a_{ji}.$$

Für symmetrische Matrizen gilt außerdem

$$A = A^T.$$

Inverse Matrix I

Eine quadratische Matrix A heißt *invertierbar*, falls es eine Matrix A^{-1} gibt, für die gilt:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Nicht jede quadratische Matrix ist invertierbar. Falls eine Matrix invertierbar ist, so ist ihr Inverses allerdings eindeutig bestimmt.

Inverse Matrix II

Frage:

Woher weiß man, ob eine quadratische Matrix invertierbar ist oder nicht? Wenn man weiß, dass eine Matrix invertierbar ist, wie kann man die inverse Matrix bestimmen?

Inverse Matrix III

Antwort:

Man wendet den *Gauß-Jordan-Algorithmus* an.

- Ist die Matrix invertierbar, liefert dieser garantiert die inverse Matrix.
- Ist die Matrix nicht invertierbar, wird dies durch das Verfahren zweifelsfrei festgestellt.

Gauß-Jordan-Algorithmus I

Der Gauß-Jordan-Algorithmus besteht aus den folgenden einfachen Schritten, mit deren Hilfe man die inverse Matrix bestimmen kann, falls sie existiert.

Vorbereitung

Man erstellt die folgende Blockmatrix:

$$\left[A \mid E\right].$$

A ist die zu invertierende Matrix, E ist eine entsprechend dimensionierte Einheitsmatrix.

Gauß-Jordan-Algorithmus II

1. Schritt
Man wählt die erste Spalte, die noch nicht in der richtigen Form vorliegt (1 auf der Hauptdiagonalen, sonst nur Nullen).

2. Schritt
Ist das Hauptdiagonalenelement der Spalte eine Null, so vertauscht man die Zeilen der Matrix auf geeignete Art, um ein von Null verschiedenes Element in die Hauptdiagonale zu bekommen.

3. Schritt

Durch Multiplikation mit einem geeigneten Faktor macht man das Hauptdiagonalenelement der Spalte zu einer 1.

Gauß-Jordan-Algorithmus III

4. Schritt

Durch Addition geeigneter Vielfacher der gerade multiplizierten Zeile bringt man alle anderen Elemente in der aktuellen Spalte auf Null.

5. Schritt

Man wiederholt dieses Vorgehen, bis alle Spalten der Matrix A die richtige Form haben oder bis ein weiteres Umformen nicht mehr möglich ist.

Gauß-Jordan-Algorithmus IV

Beispiel

Gesucht ist das Inverse der Matrix $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 1 \end{bmatrix}$.

Lösung

Zunächst stellen wir die entsprechende Blockmatrix auf.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Gauß-Jordan-Algorithmus V

Zuerst bringen wir das Hauptdiagonalenelement der ersten Spalte in die richtige Form, indem wir die erste Zeile mit -1 multiplizieren.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Um den Rest der ersten Spalte in die richtige Form zu bringen, addieren wir das (-4)-fache der ersten Zeile zur dritten Zeile.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 12 & 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Gauß-Jordan-Algorithmus VI

Weiter mit Spalte 2. Zunächst vertauschen wir die zweite und dritte Zeile.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Durch Multiplikation mit $\frac{1}{12}$ bringen wir das Hauptdiagonalenelement von Zeile 2 in die richtige Form.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{12} & \frac{4}{12} & 0 & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Gauß-Jordan-Algorithmus VII

Durch Addition des doppelten der zweiten Zeile zur ersten Zeile bringen wir die zweite Spalte in die richtige Form.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{12} & -\frac{4}{12} & 0 & \frac{2}{12} \\ 0 & 1 & \frac{1}{12} & \frac{4}{12} & 0 & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

Weiter mit Spalte 3. Multiplikation der dritten Zeile mit $\frac{1}{3}$ ergibt:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{12} & -\frac{4}{12} & 0 & \frac{2}{12} \\ 0 & 1 & \frac{1}{12} & \frac{4}{12} & 0 & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right]$$

Gauß-Jordan-Algorithmus VII

Addition geeigneter Vielfacher zu den ersten beiden Zeilen bringt schließlich die dritte Spalte in die richtige Form.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{18} & \frac{1}{6} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{36} & \frac{1}{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{array}\right]$$

Wir haben also die inverse Matrix zu A gefunden.

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{3} & -\frac{1}{18} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{36} & \frac{1}{12} \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \end{bmatrix}$$

Gauß-Jordan-Algorithmus VIII

Ist die Matrix A nicht invertierbar, so lässt sie sich mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus nicht zur Einheitsmatrix E umformen.

Im Gegenzug kann die Matrix A immer genau dann zur Einheitsmatrix E umgeformt werden, wenn sie invertierbar ist.

Aufgaben

Aufgabe 5

a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben durch $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

Berechne A^{-1} mit Hilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus. Überprüfe dein Ergebnis auf Richtigkeit!

b) Zeige, dass die folgende Matrix $B \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ nicht invertierbar ist:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 2 & -12 & 13 \end{bmatrix}.$$

Aufgaben

Aufgabe 6

Zeige anhand der Matrix $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$, dass die folgende Eigenschaft gilt:

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T.$$

Anwendungen für Matrizen

Matrizen haben eine Vielzahl von Anwendungsgebieten:

- Wachstumsmatrizen
- Populationsmatrizen
- Kosten-Preis-Kalkulationen
- Lösen von linearen Gleichungssystemen
- Darstellung von linearen Abbildungen
- Anwendungen in der Computergrafik (Rotation, Translation, etc.)