Tutorium: Analysis und lineare Algebra

Vorbereitung der Abschlussklausur (Teil 2)
Lösungen der Aufgaben

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Aufgabe 1a-c

a) Bestimmen der ersten Ableitung $f'(x)$:

$$f'(x) = \frac{3 \cdot 4x - 4 \cdot (3x+2)}{16x^2} = \frac{-8}{16x^2}$$

Es folgt $f'(1) = -\frac{1}{2}$. Die Steigung der Tangenten T ist $-\frac{1}{2}$.

b)

$$\int\limits_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx = \int\limits_1^8 x^{-\frac{1}{3}}\, dx = \left[\frac{3}{2} x^{\frac{2}{3}}\right]_1^8 = \frac{3}{2}\Big(4-1\Big) = \frac{9}{2}$$

c) Es handelt sich um eine geometrische Reihe mit $|q| = \frac{5}{4}$. Es liegt Divergenz vor.

Aufgabe 1d-e

d) Mit dem Quotientenkriterium folgt die Konvergenz der Reihe:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{(k+1)!}}{\frac{1}{k!}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k!}{(k+1)!}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{k+1}\right| = 0 < 1$$

Es gilt $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$. Es folgt $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = e^1 - 1$.

e) Quotientenkriterium:

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{(k+1)^2}{2^{k+1}}}{\frac{k^2}{2^k}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+1)^2\cdot 2^k}{k^2\cdot 2^{k+1}}\right| = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{k^2+2k+1}{2k^2}\right| = \frac{1}{2} < 1$$

Wurzelkriterium:

$$\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|} = \lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{\left|\frac{k^2}{2^k}\right|} = \lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[k]{|k^2|}}{\sqrt[k]{|2^k|}} = \frac{1}{2} < 1$$

In beiden Fällen ist der Grenzwert < 1, somit liegt Konvergenz vor.

Aufgabe 2

a)

$$g'(x) = \left(x^3 + 4\right)^{\arctan x} \cdot \left(\frac{\ln\left(x^3 + 4\right)}{x^2 + 1} + \frac{\arctan x \cdot 3x^2}{x^3 + 4} \right)$$

b)

$$\begin{aligned} h_x(x, y) &= -\sin\left(y \cdot e^{x+y^2}\right) \cdot y \cdot e^{x+y^2} \\ h_y(x, y) &= -\sin\left(y \cdot e^{x+y^2}\right) \cdot e^{x+y^2} \cdot \left(1 + 2y^2\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 3

a) <u>Partielle Integration</u>:

$$\int \ln x \; dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \; dx = x \cdot \ln x - \int 1 \; dx = x \cdot \ln x - x$$

<u>Integration durch Substitution</u>:

Es sei $t = \ln x$. Hieraus ergibt sich $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{x}$, woraus folgt: $dx = e^t dt$.

$$\int \ln x \; dx = \int t \cdot e^t \; dt = t \cdot e^t - \int e^t \; dt = t \cdot e^t - e^t = \ln x \cdot x - x$$

b) <u>Probe</u>:

$$\Big(x \cdot \ln x - x\Big)' = \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x}\right) - 1 = \ln x + 1 - 1 = \ln x$$

Aufgabe 4a

Es sei $t = \sqrt{\frac{x}{2} + 3}$. Es folgt

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dx} &= \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{x}{2} + 3}} \cdot \frac{1}{2} \\ dx &= 4t \; dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \cos\left(\sqrt{\frac{x}{2} + 3}\right) dx &= \int \cos t \cdot 4t \; dt \\ &= 4t \cdot \sin t - 4 \int \sin t \; dt \\ &= 4t \cdot \sin t + 4 \cos t \\ &= 4 \cdot \sqrt{\frac{x}{2} + 3} \cdot \sin\left(\sqrt{\frac{x}{2} + 3}\right) + 4 \cos\left(\sqrt{\frac{x}{2} + 3}\right) \end{aligned}$$

Aufgabe 4b

Nullstellen von $x^2 - x - 2$: $x_1 = 2$ und $x_2 = -1$; Partialbruchzerlegung:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{x^2 - x - 2} &= \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+1} \\
1 &= A(x+1) + B(x-2) \\
1 &= (A+B)x + (A - 2B)
\end{aligned}$$

Als Lösung für das resultierende Gleichungssystem ergibt sich $A = \frac{1}{3}$ und $B = -\frac{1}{3}$. Es folgt:

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x^2 - x - 2}\,dx &= \int \frac{\frac{1}{3}}{x-2}\,dx + \int \frac{-\frac{1}{3}}{x+1}\,dx \\
&= \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{x-2}\,dx - \frac{1}{3} \cdot \int \frac{1}{x+1}\,dx \\
&= \frac{1}{3} \ln \Big(x - 2\Big) - \frac{1}{3} \ln \Big(x + 1\Big)
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 I

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} U_n &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} f\left(\frac{i}{n}\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=0}^{n-1}\left(-\left(\frac{i}{n}\right)^3+2\left(\frac{i}{n}\right)^2+\left(\frac{i}{n}\right)\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\cdot\left(\sum_{i=0}^{n-1}-\left(\frac{i}{n}\right)^3+\sum_{i=0}^{n-1}2\left(\frac{i}{n}\right)^2+\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{i}{n}\right)\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^4}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} i^3+\frac{2}{n^3}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} i^2+\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} i\right)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 5 II

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^4}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} i^3 + \frac{2}{n^3}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} i^2 + \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} i\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n^4}\cdot\frac{(n-1)^2 n^2}{4} + \frac{2}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2(n-1)+1)}{6} + \frac{1}{n^2}\cdot\frac{(n+1)n}{2}\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{n^4+\dots}{4n^4} + \frac{4n^3+\dots}{6n^3} + \frac{n^2+\dots}{2n^2}\right)\\
&= -\frac{1}{4} + \frac{4}{6} + \frac{1}{2}\\
&= \frac{11}{12}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 6a I

a) Es sei $t = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$. Es folgt

$$\begin{aligned}
\frac{dt}{dx} &= \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}t^{-2} \\
dx &= 3t^2\ dt
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int e^{\sqrt[3]{x}}\ dx &= 3\int e^t \cdot t^2\ dt \\
&= 3\left(e^t \cdot t^2 - 2\int e^t \cdot t\ dt\right) \\
&= 3\left(e^t \cdot t^2 - 2\left(e^t \cdot t - \int e^t\ dt\right)\right) \\
&= 3t^2 \cdot e^t - 6t \cdot e^t + 6e^t \\
&= 3 \cdot \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 \cdot e^{\sqrt[3]{x}} - 6 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot e^{\sqrt[3]{x}} + 6e^{\sqrt[3]{x}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 6a II

Ausklammern von $3e^{\sqrt[3]{x}}$:

$$3 \cdot \left(\sqrt[3]{x}\right)^2 \cdot e^{\sqrt[3]{x}} - 6 \cdot \sqrt[3]{x} \cdot e^{\sqrt[3]{x}} + 6e^{\sqrt[3]{x}} = 3e^{\sqrt[3]{x}}\left(x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 2\right).$$

Ableiten und Zusammenfassen liefert das gewünschte Ergebnis:

$$\begin{aligned}
& 3e^{\sqrt[3]{x}} \cdot \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 2\right) + 3e^{\sqrt[3]{x}}\left(\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \frac{2}{3}x^{-\frac{2}{3}}\right) \\
= \; & e^{\sqrt[3]{x}} \cdot x^{-\frac{2}{3}} \cdot \left(x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{1}{3}} + 2\right) + e^{\sqrt[3]{x}}\left(2x^{-\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{2}{3}}\right) \\
= \; & e^{\sqrt[3]{x}} \cdot \left(1 - 2x^{-\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{2}{3}}\right) + e^{\sqrt[3]{x}}\left(2x^{-\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{2}{3}}\right) \\
= \; & e^{\sqrt[3]{x}}\left(1 - 2x^{-\frac{1}{3}} + 2x^{-\frac{2}{3}} + 2x^{-\frac{1}{3}} - 2x^{-\frac{2}{3}}\right) \\
= \; & e^{\sqrt[3]{x}}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 6b

b) Mit Polynomdivison ergibt sich

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3+2}{x^2-4x+4}\,dx &= \int \left(x+4+\frac{12x-14}{x^2-4x+4}\right)dx \\ &= \frac{1}{2}x^2+4x+\int \frac{12x-14}{x^2-4x+4}\,dx.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{12x-14}{x^2-4x+4} &= \frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2} \\ 12x-14 &= A(x-2)+B \\ &= Ax+(-2A+B)\end{aligned}$$

Koeffizientenvergleich ergibt $A=12$ und $B=10$.

Aufgabe 6b-c

$$\begin{aligned}\int \frac{12x-14}{x^2-4x+4}\;dx &= 12\int \frac{1}{x-2}\;dx + 10\int \frac{1}{(x-2)^2}\;dx \\ &= 12\cdot\ln\left|x-2\right| - 10\cdot\left(x-2\right)^{-1}\end{aligned}$$

Als Gesamtergbnis ergibt sich:

$$\int \frac{x^3+2}{x^2-4x+4}\;dx = \frac{1}{2}x^2 + 4x + 12\cdot\ln\left|x-2\right| - 10\cdot\left(x-2\right)^{-1}$$

c) $$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x\cdot\cos x\;dx &= \left[\frac{1}{2}\sin^2(x)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}\sin^2(0) \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Aufgabe 6d-e

d)

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = -\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{-\sin x}{\cos x}\, dx = -\Big[\ln \big|\cos(x)\big|\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= -\left(\ln\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| - \ln|1|\right) = -\ln\sqrt{2} + \ln 2$$

e)

$$\lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^4}\, dx = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{3}x^{-3}\right]_1^b$$

$$= \lim_{b\to\infty}\left(-\frac{1}{3}\cdot b^{-3} - \left(-\frac{1}{3}\right)\cdot 1^{-3}\right)$$

$$= \frac{1}{3}$$

Aufgabe 7

Es gilt

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n}.$$

Durch Einsetzen und Ausrechnen ergibt sich:

$$\begin{aligned} x_0 &= 2 \\ x_1 &= 2 - \frac{2^2 - 2}{2 \cdot 2} = \frac{3}{2} \\ x_2 &= 2 - \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 - 2}{2 \cdot \frac{3}{2}} = \frac{17}{12}. \end{aligned}$$

Aufgabe 8

Bestimmung des gesuchten Volumens:

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_G xy\ d(x,y) &= \int\limits_0^2 \left(\int\limits_1^{\frac{1}{2}x+1} xy\ dy \right) dx = \int\limits_0^2 \left[\frac{1}{2}xy^2 \right]_1^{\frac{1}{2}x+1} dx \\
&= \int\limits_0^2 \frac{1}{2}x \left(\left(\frac{1}{2}x+1 \right)^2 - 1 \right) dx = \int\limits_0^2 \left(\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{2}x^2 \right) dx \\
&= \left[\frac{1}{32}x^4 + \frac{1}{6}x^3 \right]_0^2 = \frac{1}{2} + \frac{4}{3} = \frac{11}{6}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 9

a)

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x + e^{-2x}}{x^2 + 3x + 1} \right) = 2$$

b)

$$\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - e^{-2x}}{x^2 + 3x} \right) = \lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x + 2e^{-2x}}{2x + 3} \right) = 1$$

c)

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^3 + x + 5}{\ln x} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{6x^2 + 1}{\frac{1}{x}} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(6x^3 + x \right) = \infty$$

Aufgabe 10a I

Aufstellen der Lagrange-Funktion:

$$L\Big(x, y, \lambda\Big) = 3x^2 - y^2 + \lambda\Big(-x + y + 2\Big)$$

Bestimmen der partiellen Ableitungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x}\Big(x, y, \lambda\Big) &= L_x = 6x - \lambda \\
\frac{\partial L}{\partial y}\Big(x, y, \lambda\Big) &= L_y = 2y + \lambda \\
\frac{\partial L}{\partial \lambda}\Big(x, y, \lambda\Big) &= L_\lambda = -x + y + 2
\end{aligned}$$

Aufgabe 10a II

Gleichsetzen des Gradienten mit 0:

$$\operatorname{grad}\Big(L(x,y,\lambda)\Big) = \Big(L_x, L_y, L_\lambda\Big) = (0,0,0)$$

Als einzige stationäre Stelle ergibt sich $S(-1,-3)$.

Aufstellen der geränderten Hesse-Matrix:

$$\overline{H} = \begin{bmatrix} 0 & g_x & g_y \\ g_x & L_{xx} & L_{xy} \\ g_y & L_{yx} & L_{yy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 0 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Es gilt $\det \overline{H} = -4 < 0$. Folglich liegt ein Minimum vor.

Aufgabe 10b

Umstellen der Nebenbedingung nach y und einsetzen in $f(x, y)$:

$$\begin{aligned} y &= x - 2 \\ f(x) &= 3x^2 - (x-2)^2 = 2x^2 + 4x - 4 \end{aligned}$$

Bestimmen der ersten und zweiten Ableitung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 4x + 4 \\ f''(x) &= 4 \end{aligned}$$

Die einzige Nullstelle von $f'(x)$ liegt bei $x_0 = -1$. Wegen $f''(x) = 4 > 0$ liegt ein Minimum vor.

Aufgabe 11 I

Bestimmen der partiellen Ableitungen erster Ordnung:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}\Big(x, y, z\Big) &= f_x = -4x + 2z + 2 \\ \frac{\partial f}{\partial y}\Big(x, y, z\Big) &= f_y = -6y + 8 \\ \frac{\partial f}{\partial z}\Big(x, y, z\Big) &= f_z = -2z + 2x \end{aligned}$$

Gleichsetzen des Gradienten mit 0:

$$\operatorname{grad}\Big(f(x, y, z)\Big) = \Big(f_x, f_y, f_z\Big) = (0, 0, 0)$$

Als einzige stationäre Stelle ergibt sich $S(1, \frac{4}{3}, 1)$.

Aufgabe 11 II

Aufstellen der Hesse-Matrix und bestimmen der Abschnittsdeterminanten:

$$H = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 2 \\ 0 & -6 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} \Delta_1 &= -4 \\ \Delta_2 &= 24 \\ \Delta_3 &= -24 \end{aligned}$$

Wegen $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$ und $\Delta_3 < 0$ ist H negativ definit. Es handelt sich folglich um ein Maximum.

Aufgabe 12a

Bestimmen der ersten Ableitungen:

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= (1+x)^{-2} & f^{(0)}(0) &= 1\\
f^{(1)}(x) &= (-2)\cdot(1+x)^{-3} & f^{(1)}(0) &= -2\\
f^{(2)}(x) &= (-2)\cdot(-3)\cdot(1+x)^{-4} & f^{(2)}(x) &= 6\\
f^{(3)}(x) &= (-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(1+x)^{-5} & f^{(3)}(0) &= -24
\end{aligned}$$

Berechnung der Taylorpolynome:

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= 1\\
T_1(x) &= 1-2x\\
T_2(x) &= 1-2x+3x^2\\
T_3(x) &= 1-2x+3x^2-4x^3
\end{aligned}$$

Aufgabe 12b

Bestimmen der ersten Ableitungen:

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x) &= \sin(3x) & f^{(0)}(0) &= 0 \\
f^{(1)}(x) &= 3\cos(3x) & f^{(1)}(0) &= 3 \\
f^{(2)}(x) &= -3^2\sin(3x) & f^{(2)}(x) &= 0 \\
f^{(3)}(x) &= -3^3\cos(3x) & f^{(3)}(0) &= -3^3 \\
f^{(4)}(x) &= 3^4\sin(3x) & f^{(4)}(0) &= 0 \\
f^{(5)}(x) &= 3^5\cos(3x) & f^{(5)}(0) &= 3^5
\end{aligned}$$

Berechnung der Taylorpolynome:

$$\begin{aligned}
T_0(x) &= 0 \\
T_1(x) &= 3x = T_2(x) \\
T_3(x) &= 3x - \frac{9}{2}x^3 = T_4(x) \\
T_5(x) &= 3x - \frac{9}{2}x^3 + \frac{81}{40}x^5
\end{aligned}$$

Aufgabe 12c

Als Taylorreihe für $\sin(7x)$ ergibt sich:

$$\sin(7x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 7^{2k+1}}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}$$

Aufgabe 13a

Bestimmen der Polynome $L_1(x)$, $L_2(x)$ und $L_3(x)$:

$$\begin{aligned}
L_1(x) &= \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-2)(x-5)}{(1-2)(1-5)} = \frac{1}{4}\Big(x^2-7x+10\Big) \\
L_2(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-1)(x-5)}{(2-1)(2-5)} = -\frac{1}{3}\Big(x^2-6x+5\Big) \\
L_3(x) &= \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-1)(x-2)}{(5-1)(5-2)} = \frac{1}{12}\Big(x^2-3x+2\Big).
\end{aligned}$$

Das gesuchte Polynom ergibt sich durch:

$$\begin{aligned}
L(x) &= y_1L_1(x)+y_2L_2(x)+y_3L_3(x) \\
&= \frac{8}{4}\Big(x^2-7x+10\Big)-\frac{9}{3}\Big(x^2-6x+5\Big)+\frac{24}{12}\Big(x^2-3x+2\Big) \\
&= x^2-2x+9.
\end{aligned}$$

Aufgabe 13b

Das gesuchte Polynom hat die Form

$$N(x) = \alpha_1 + \alpha_2(x - x_1) + \alpha_3(x - x_1)(x - x_2).$$

Bestimmen von α_1, α_2 und α_3:

$$\begin{aligned} y_1 &= \alpha_1 \\ y_2 &= \alpha_1 + \alpha_2(x_2 - x_1) \\ y_3 &= \alpha_1 + \alpha_2(x_3 - x_1) + \alpha_2(x_3 - x_1)(x_3 - x_2). \end{aligned}$$

Einsetzen der Punkte P_1, P_2 sowie P_3 und anschließendes Lösen des Gleichungssystems ergibt $\alpha_1 = 8$ sowie $\alpha_2 = \alpha_3 = 1$. Es folgt

$$\begin{aligned} N(x) &= 8 + 1 \cdot (x - 1) + 1 \cdot (x - 1)(x - 2) \\ &= x^2 - 2x + 9. \end{aligned}$$

Aufgabe 13c

3 Punkte können durch ein quadratisches Polynom exakt beschrieben werden:

$$y = f(x) = ax^2 + bx + c.$$

Einsetzen der Punkte P_1, P_2 und P_3 ergibt:

$$\begin{aligned} 8 &= a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c \\ 9 &= a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c \\ 24 &= a \cdot 5^2 + b \cdot 5 + c \end{aligned}$$

Aufösen des Gleichungssystems liefert $a = 1$, $b = -2$ sowie $c = 9$. Das gesuchte Polynom lautet folglich

$$P(x) = x^2 - 2x + 9.$$

Aufgabe 14a-b

a) $z_1+z_2=8-i$ $\quad z_1-z_2=2+3i$ $\quad z_1\cdot z_2=17-7i$ $\quad \dfrac{z_1}{z_2}=1+i$

b) Umformen von z_1 und z_2 ergibt:

$$\begin{aligned} z_1 &= 2-2i=\sqrt{8}\left(\cos\left(\frac{5}{4}\pi\right)+i\sin\left(\frac{5}{4}\pi\right)\right)\\ z_2 &= 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)=3\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)+i\cdot 3\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\end{aligned}$$

Als Lösung ergibt sich:

$$\begin{aligned} z_1^5\cdot z_2 &= 3\cdot\left(\sqrt{8}\right)^5\left(\cos\left(\frac{55}{28}\pi\right)+i\sin\left(\frac{55}{28}\pi\right)\right)\\ \overline{z_1-z_2} &= \left(2-3\cos\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)+i\left(2+3\sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\right)\end{aligned}$$

Aufgabe 14c

c) $$A \cdot B = \begin{bmatrix} i & 1+i \\ 2-i & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3+i & 1 \\ i & 1-i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2+4i & 1 \\ 15i & 6-3i \end{bmatrix}$$

Viel Erfolg bei der Klausur ☺