Mathematik II für Studierende der Informatik
(Analysis und Lineare Algebra)

Thomas Andreae, Rosona Eldred, Malte Moos

Sommersemester 2012
Blatt 4

A: Präsenzaufgaben am 26. April 2012

1. Differenzieren Sie die folgenden Funktionen:

(i) $f(x) = 2x^2 + 3x + 1$

(ii) $f(x) = (2x^2 + 3x + 1)^5$

(iii) $f(x) = \sqrt{x} \cdot (2x^2 + 3x + 1)$

2. Berechnen Sie die erste Ableitung der folgenden Funktionen:

(i) $f(x) = 3 \cdot e^x \cdot \sqrt{x}$

(ii) $g(x) = e^{x^2+1}$

(iii) $h(x) = \ln(x^2 + 1)$

3. Die Funktion $f : (-1, \infty) \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = (x + 1)^{x+2}.$$

Berechnen Sie die erste Ableitung von f.

B: Hausaufgaben zum 3. Mai 2012

1. a) Differenzieren Sie die folgenden Funktionen:

(i) $f(x) = 7x^5 + 3x^3 + x + 1$

(ii) $f(x) = (3x^7 - 4x^3 + x^2 - 3x + 1)^8$

(iii) $f(x) = (3x^4 + 2x) \cdot \sqrt{x^2 + 1}$

(iv) $f(x) = (x^3 + 1) \cdot \ln(x^4 + 3x^2 + 1)$

(v) $f(x) = e^{x^3+x^2+1} \cdot \sqrt{x}$

(vi) $f(x) = \sqrt{x^4 + 1} \cdot \ln x$

b) Berechnen Sie die erste, zweite und dritte Ableitung der Funktion

$$q(x) = \frac{5x^2 + 1}{x - 3}.$$

2. Man überprüfe anhand der Definition der Differenzierbarkeit (Skript, Abschnitt 2.1), ob die folgende Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an der Stelle $x_0 = 6$ differenzierbar ist:

$$f(x) = \left| 3 - \frac{1}{2}x \right|.$$

Fertigen Sie außerdem eine Skizze des Graphen von $f(x)$ an.

3. a) Die Methode, die Sie bei der Bearbeitung von Präsenzaufgabe 3 kennengelernt haben, nennt man *Logarithmisches Differenzieren* (vgl. Skript, Abschnitt 2.3.8). Arbeiten Sie diesen Abschnitt selbstständig durch und wenden Sie die beschriebene Methode zur Berechnung von $f'(x)$ für die folgende Funktion f an:

$$f(x) = (x + 1)^{x^2+5} \quad (x > -1).$$

b) Stellen Sie sich vor, Sie könnten sich nicht mehr an die Formeln für die Ableitungen von $f(x) = 2^x$ und $g(x) = 3^x$ erinnern. Leiten Sie sich die Formeln mit Hilfe von Logarithmischer Differentiation her.

c) Differenzieren Sie die folgenden Funktionen:

$$\text{(i)} \quad g(x) = (x-2)^{2x^2+3} \quad (x > 2) \qquad\qquad \text{(ii)} \quad h(x) = \left(x^2+1\right)^{3x+1}$$

4. a) In den Wirtschaftswissenschaften geht es häufig darum, gegebene Größen zu optimieren (Minimierung der Kosten, Maximierung des Gewinns etc.). Hier eine Aufgabe, die dies illustriert (aus S. Kurz, J. Rambau: Mathematische Grundlagen für Wirtschaftswissenschaftler): Der McMoney Verlag bringt ein neues Buch auf den Markt. Jetzt überlegt die Geschäftsführung, zu welchem Preis p (in €) es verkauft werden soll. Der McMoney Verlag geht davon aus, dass die Zahl der verkauften Exemplare v wie folgt vom Preis abhängt:

$$v(p) = \frac{10^5}{p^2}.$$

Der Druck eines Buches kostet 3€. Der erwartete Gewinn g in Abhängigkeit vom Preis p ist also (in €):

$$g(p) = v(p) \cdot p - v(p) \cdot 3 = v(p) \cdot (p-3) = \frac{10^5}{p^2} \cdot (p-3) = 10^5 \cdot \left(\frac{1}{p} - \frac{3}{p^2}\right).$$

Der Verkaufspreis muss selbstverständlich die Druckkosten decken, weshalb $p \geq 3$ angenommen werden darf. Außerdem wäre ein Preis oberhalb von 100€ glatter Wucher und ist somit ebenfalls ausgeschlossen. Der Preis p soll nun so festgesetzt werden, dass der Gewinn maximal wird. Ermitteln Sie diesen Preis, indem Sie das globale Maximum von $g(p)$ auf dem Intervall $[3, 100]$ bestimmen. Begründen Sie in der Rechnung auch, dass es sich bei Ihrer Lösung um das globale Maximum handelt.

b) Wo nehmen die folgenden Funktionen ihr globales Minimum und Maximum an?

(i) $f : [-10, 10] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x^7 + 5x^5 + 2x^3 + x$

(ii) $g : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $g(x) = e^{2x-1} - e^{x+1}$

(iii) $h : [1, 6] \to \mathbb{R}$, $h(x) = 4\ln(x) + \frac{1}{2}x^2 - 4x$