Mathematatik I für Studierende der Informatik (Diskrete Mathematik)

Steven Köhler

Wintersemester 2011/12
Aufgaben zur Vorbereitung der Abschlussklausur am 04.02.2012

1. Es seien die folgenden beiden Polynome gegeben:

$$\begin{aligned} a(x) &= 3x^3 + 2x + 4 \\ b(x) &= 6x^2 + x + 5. \end{aligned}$$

a) Bestimme $a(x) + b(x)$ sowie $a(x) \cdot b(x)$.

b) Bestimme $a(x) - b(x)$ und $a(x) : b(x)$ unter der Bedingung, dass sämtliche Koeffizienten aus $\mathbb{Z}_7$ stammen.

2. Es seien die folgenden beiden Polynome gegeben:

$$\begin{aligned} a(x) &= x^9 + 2x^7 - 3x^6 + 2x^4 - x^3 + 5x^2 + x - 23 \\ b(x) &= x^{10} - 5x^9 + 2x^6 - 3x^5 - 4x^4 + 2x^3 - x + 42. \end{aligned}$$

a) Bestimme den Grad des Polynoms $a(x) \cdot b(x)$.

b) Welchen Koeffizienten besitzt x^{13} im Produkt $a(x) \cdot b(x)$?

3. Bestimme den normierten größten gemeinsamen Teiler der folgenden beiden Polynome:

$$\begin{aligned} a(x) &= 6x^4 - x^3 - 13x^2 + 8x + 4 \\ b(x) &= -9x^2 + 12x + 5. \end{aligned}$$

4. Gegeben sei das folgende lineare Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_3 &= 19 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= -1. \end{aligned}$$

a) Stelle die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix auf.

b) Berechne die Lösung des linearen Gleichungssystems mit dem Gauß-Verfahren.

c) Bestimme die inverse Matrix der Koeffizientenmatrix und löse mit dieser das lineare Gleichungssystem.

d) Unter welchen Voraussetzungen kann das Verfahren aus c) zum Lösen eines linearen Gleichungssystems eingesetzt werden? Welche Vorteile bringt es gegenüber dem Gauß-Verfahren?

5. Entscheide für die folgenden Vektoren, ob sie linear abhängig oder unabhängig sind.

a) $v_1 = (3, 1, 5)$, $v_2 = (-1, 2, -1)$ und $v_3 = (9, 17, 19)$.

b) $v_1 = (1, 0, -1, 2)$, $v_2 = (0, 2, 3, 1)$, $v_3 = (4, 3, -2, 0)$ und $v_4 = (1, -1, 3, -5)$.

c) $v_1 = (2, 1, 5, -6)$, $v_2 = (7, -1, 0, 3)$, $v_3 = (8, -4, 3, -2)$, $v_4 = (1, 3, 3, 7)$ und $v_5 = (23, -5, 0, 1)$.

6. Gegeben seien die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$:

$$v_1 = (1, 2, 3), \quad v_2 = (-1, 4, -2), \quad v_3 = (-1, 10, -1) \quad \text{und} \quad v_4 = (-4, 22, -7).$$

a) Bestimme eine Basis von $\operatorname{Lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

b) Gib die Dimension von $\operatorname{Lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)$ an.

c) Um welchen Raum handelt es sich bei $\operatorname{Lin}(v_1, v_2, v_3, v_4)$?

7. Es sei $U = \Big\{(x_1, x_2, 0) \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R}\Big\}$ ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$. Zeige, dass es sich bei den Vektoren $b_1 = (1,1,0)$ und $b_2 = (2,-1,0)$ um eine Basis des Unterraums U handelt.

8. Gegeben sei die folgende Matrix:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

a) Berechne die Determinante der Matrix A

(i) durch Entwicklung nach der zweiten Spalte;

(ii) mithilfe der Regel von Sarrus;

(iii) durch Überführen der Matrix A in eine obere Dreiecksmatrix.

b) Welche Aussage über die Invertierbarkeit der Matrix ist anhand der Determinante möglich?

c) Wie lautet die Determinante der inversen Matrix A^{-1}?

9. Entscheide für die folgenden Mengen, ob ein Unterraum des $\mathbb{R}^4$ vorliegt:

a) $U = \Big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_2 \geq 0\Big\}$;

b) $U = \Big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 + x_3 - x_4 = 1\Big\}$;

c) $U = \Big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_4 = x_1 + 2x_2 - x_3\Big\}$;

d) $U = \Big\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = x_2^2\Big\}$.

10. Es sei $V = \mathbb{R}^3$. Gib einen Unterraum U von V an, der bezüglich der Vektoraddition abgeschlossen ist, bezüglich der skalaren Multiplikation jedoch **nicht** abgeschlossen ist.

11. Gegeben seien die folgenden Punkte:

$$A = (1,0,2), \quad B = (1,5,3) \quad \text{und} \quad C = (5,3,0).$$

a) Gib die durch A, B und C beschriebene Ebene $\mathcal{E}$ in Parameterform an.

b) Bestimmen einen Vektor n, der senkrecht auf der Ebene $\mathcal{E}$ steht. Zeige, dass n tatsächlich orthogonal zu $\mathcal{E}$ ist.

c) Überprüfe, ob die Punkte $P_1 = (1,2,3)$ und $P_2 = (-3,7,6)$ in der Ebene $\mathcal{E}$ liegen.

d) Gib die von dir gefundene Ebene $\mathcal{E}$ in Koordinatenform an.

12. Gegeben seien die Vektoren $a = (1,0,2,-1)$, $b = (3,1,0,-2)$, $c = (-2,-1,x,0)$ und $d = (1,y,2,z)$ des $\mathbb{R}^4$.

a) Entscheide, ob die Vektoren a und b senkrecht zueinander sind.

b) Bestimme den von den Vektoren a und b eingeschlossenen Winkel.

c) Bestimme den Wert x, so dass $a \perp c$ gilt.

d) Bestimme die Werte y und z, so dass $b \perp d$ gilt.

e) Bestimme die Länge des Vektors a.

f) Bestimme x derart, dass der von a und c eingeschlossene Winkel $\frac{\pi}{4}$ beträgt.

13. Beweise mit vollständiger Induktion, dass für die Fibonacci-Zahlen folgender Zusammenhang gilt:

$$f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n.$$

14. Entscheide, ob die folgende Abbildung $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ injektiv und/oder surjektiv ist:

$$f(n) = \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor.$$

15. Wahr oder falsch?

a) Eine Abbildung ist injektiv, wenn eine ihrer Komponenten injektiv ist.

b) Eine Abbildung ist nicht surjektiv, wenn eine ihrer Komponenten nicht surjektiv ist.

c) Es existieren bijektive Abbildungen $\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

d) Es existiert keine injektive Abbildung $\mathbb{Z} \to \mathbb{Q}$.

e) Es existiert eine surjektive Abbildung $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$.

f) Jeder Graph, der nur Knoten geraden Grades besitzt, hat einen Hamiltonkreis.

g) Es existiert ein Graph mit 5 Knoten, in dem keine zwei Knoten denselben Grad besitzen.

h) Jede symmetrische Relation R besitzt eine gerade Anzahl von Elementen, d.h. $|R| = 2n$ für $n \in \mathbb{N}$.

i) Das Inverse von 2703 in $\mathbb{Z}_{3012}$ ist 447.

j) Es gibt symmetrische Ordnungsrelationen.

k) Es ist stets möglich, in $\operatorname{Lin}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5)$ vier linear unabhängige Vektoren zu finden.

l) Das Kreuzprodukt $a \times b$ liefert stets einen Vektor c, für den $a \perp c$ sowie $b \perp c$ gilt.