Mathematik II für Studierende der Informatik (Analysis und Lineare Algebra)

Thomas Andreae, Henrik Bachmann, Rosona Eldred, Malte Moos

Sommersemester 2012
Blatt 8

A: Präsenzaufgaben am 7. Juni 2012

1. a) Schreiben Sie die Reihe

$$1+\frac{4}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^2+\left(\frac{4}{5}\right)^3+\dots$$

und ebenfalls die n-te Partialsumme s_n dieser Reihe mit dem Summenzeichen auf. Konvergiert diese Reihe? Geben Sie ggf. den Grenzwert an.

b) Wie a) für

$$1-\frac{4}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^2-\left(\frac{4}{5}\right)^3+\dots.$$

c) Begründen Sie, weshalb für $q \in \mathbb{R}$ (mit $|q| < 1$) Folgendes gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} q^i = \frac{1}{1-q} \ .$$

d) Für $q \in \mathbb{R}$ mit $|q| \geq 1$: Begründen Sie, weshalb die Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} q^i$ divergiert.

2. Die Reihe

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\dots$$

nennt man bekanntlich *Harmonische Reihe*; ihre n-te Partialsumme bezeichnet man mit H_n und man nennt H_n die *n-te harmonische Zahl*:

$$H_n = 1+\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{n} \quad (n=1,2,\dots).$$

a) Schreiben Sie sowohl H_n als auch die Harmonische Reihe mit dem Summenzeichen auf und berechnen Sie $H_1, \dots, H_4$.

b) Begründen Sie (mündlich) anhand der folgenden Zeile, dass die Harmonische Reihe divergiert:

$$1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{\geq\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{16}}_{\geq\frac{1}{2}}+\dots \tag{$\star$}$$

c) Skizzieren Sie die Funktion $f(x) = \frac{1}{x}$ für $x > 0$ und überlegen Sie sich anhand der Skizze, dass Folgendes gilt:

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\,dx \leq H_n \quad (n=1,2,\dots). \tag{$\star\star$}$$

Hinweis: H_n ist der Wert einer Obersumme zum linksstehenden Integral.

d) Erläutern Sie, weshalb ($\star\star$) ebenfalls eine Begründung für die Divergenz der Harmonischen Reihe liefert.
Hinweis: Berechnen Sie das in ($\star\star$) linksstehende Integral.

3. a) Wir wissen bereits, dass die Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ konvergiert (vgl. Skript, Seite 19/20). Was können wir daraus für die Reihen $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^\alpha}$ mit $\alpha > 2$ schließen?

b) Weisen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i}$ mit dem Quotientenkriterium nach.

Hinweis: Es ist hier (wie in vielen Fällen) zweckmäßig, die Limes-Version des Quotientenkriteriums zu verwenden.

B: Hausaufgaben zum 14. Juni 2012

1. a) In Präsenzaufgabe 3b) haben wir die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{i}{2^i}$ mit dem Quotientenkriterium nachgewiesen. Führen Sie dasselbe mit dem Wurzelkriterium durch. (Es ist zweckmäßig, die Limes-Version des Wurzelkriteriums zu verwenden.)
Hinweis: Es gilt $\sqrt[i]{i} \to 1$ für $i \to \infty$ (siehe Skript, Abschnitt 2.7.2).

b) Weisen Sie die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot i!}{i^i}$ mit der Limes-Version des Quotientenkriteriums nach.

c) Berechnen Sie den Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum\limits_{i=0}^{\infty} i^2 2^i x^i$ auf zwei Arten:

(i) mit Hilfe der Limes-Version des Quotientenkriteriums;

(ii) mit Hilfe der Limes-Version des Wurzelkriteriums.

2. Entscheiden Sie, ob Konvergenz oder Divergenz vorliegt:

$$\text{(i)} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-1}{2^{i+1}} \qquad \text{(iii)} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2(i+1)} \qquad \text{(v)} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1}$$

$$\text{(ii)} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i \cdot i}{2(i+1)} \qquad \text{(iv)} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{2^i} \qquad \text{(vi)} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i}$$

Für (i) - (iv) gilt: Falls Konvergenz vorliegt, so ermittle man auch den Grenzwert. Falls Sie zu dem Ergebnis gekommen sind, dass im Fall (v) bzw. (vi) Konvergenz vorliegt: Haben Sie eine Idee, welches der Grenzwert ist?

3. Auf Seite 19/20 des Skripts wurde nachgewiesen, dass die Reihe $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i^2}$ konvergiert. Der entscheidende Punkt dabei war der Nachweis, dass die Folge (s_n) der Partialsummen beschränkt ist. Weisen Sie dies auf eine andere Art nach, nämlich mit Mitteln der Integralrechnung.

Hinweis: Gehen Sie ähnlich vor wie in Präsenzaufgabe 2c) und 2d), betrachten Sie hier jedoch eine geeignete Untersumme.

4. Es sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ eine Funktion, für die $f(n) \to \infty$ für $n \to \infty$ gilt. In der Informatik wird in vielen Zusammenhängen danach gefragt, *wie schnell* $f(n)$ gegen unendlich geht. Wir betrachten in dieser Aufgabe die Funktion

$$f(n) = H_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

die häufig bei der Analyse von Algorithmen auftritt, etwa bei der Laufzeitanalyse von QUICKSORT, in der das Resultat dieser Übungsaufgabe eine wichtige Rolle spielt (vgl. Cormen et al.: *Algorithmen - Eine Einführung*).

a) Zeigen Sie

$$H_n - 1 \leq \ln(n) \leq H_n \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{1}$$

Hinweis: Die „Hälfte" von (1) wurde im Wesentlichen bereits in den Präsenzaufgaben erledigt.

b) Folgern Sie aus (1):

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\ln(n)}{H_n} = 1. \tag{2}$$

Hinweis: Wenn a) erledigt ist, so geht b) recht schnell.

(Das Ergebnis (1) (bzw. (2)) können wir auch so aussprechen: Die Funktion $f(n) = H_n$ wächst nur recht langsam, nämlich etwa so wie $\ln(n)$.)