Vektorräume über einem beliebigen Körper K

Im Gramlich werden reelle Vektorräume betrachtet, d. h., es liegt der Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen zugrunde. Hier soll nun der allgemeinere Fall betrachtet werden, dass ein beliebiger Körper K zugrunde liegt.

Anders gesagt: Im Gramlich wird immer der Spezialfall $K = \mathbb{R}$ betrachtet, im Allgemeinen kann K aber auch ein anderer Körper sein, beispielsweise $\mathbb{Z}_2$ oder $\mathbb{Z}_3$ oder (allgemeiner) $\mathbb{Z}_p$ für eine Primzahl p.

Wir beginnen mit einigen Beispielen, wobei wir mit dem bereits bekannten Beispiel des reellen Vektorraums $\mathbb{R}^n$ starten.

1. Für ein $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Menge $\mathbb{R}^n$ und definieren auf dieser Menge auf die übliche Art eine Addition:

Für zwei n-Tupel $x = (x_1, \ldots, x_n)$ und $y = (y_1, \ldots, y_n)$ definieren wir deren Summe durch

$$x + y = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

Die Summe zweier n-Tupel ist wieder ein n-Tupel; bei der Addition handelt es sich also um eine Abbildung vom Typ

$$+ : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Beispiel. $n = 4, x = (3, 4, 7, -1), y = (4, 0, 2, 4)$. Dann gilt $x + y = (7, 4, 9, 3)$.

Man sagt, die Addition zweier n-Tupel erfolgt *komponentenweise*, d.h., man addiert die erste Komponente von x zur ersten Komponente von y, die zweite Komponente von x zur zweiten Komponente von y usw.

Ähnlich (d.h. ebenfalls komponentenweise) definiert man, wie ein n-Tupel $x = (x_1, \dots, x_n)$ mit einer reellen Zahl λ multipliziert wird:

$$\lambda x = \lambda(x_1, \dots, x_n) = (\lambda x_1, \dots, \lambda x_n).$$

D.h., jede Komponente wird mit λ multipliziert.

Das Ergebnis $(\lambda x_1, \dots, \lambda x_n)$ ist wieder ein n-Tupel, es liegt also eine Abbildung vom Typ

$$\cdot : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

vor.

Beispiel. $n = 4, x = (3, 4, 7, -1), \lambda = 3$. Dann gilt $\lambda x = (9, 12, 21, -3)$.

Für die soeben definierte Addition und Multiplikation gelten gewisse *Rechenregeln*, die alle direkt aus der Definition folgen (sowie aus der Tatsache, dass ähnliche Rechenregeln für $\mathbb{R}$ gelten):

(1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ für alle $x, y, z \in \mathbb{R}^n$.

(2) $x + y = y + x$ für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$.

(3) Schreiben wir (wie üblich) kurz 0 statt $(0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$, so gilt $x + 0 = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(4) Ist $x = (x_1, \dots, x_n)$ und schreiben wir $-x$ für $(-x_1, \dots, -x_n)$, so gilt $x + (-x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(5) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$.

(6) $1x = x$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$.

(7) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}, x, y \in \mathbb{R}^n$.

(8) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ für alle $\lambda, \mu \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^n$.

Die Regeln (1) - (4) beziehen sich ausschließlich auf die Addition; wir können diese ersten vier Regeln auch so zusammenfassen:

$$(\mathbb{R}^n, +) \text{ ist eine abelsche Gruppe.}$$

2. Mit $[-1, 1]$ bezeichnen wir das Intervall $I = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq x \leq 1\}$; wir betrachten die Menge M aller Funktionen $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$. Es sei also

$$M = \{f : f \text{ ist eine Funktion } [-1, 1] \to \mathbb{R}\}.$$

Beispiele:

- Die Funktion f, die durch $f(x) = x$ für alle $x \in [-1, 1]$ gegeben ist.
- Die Funktion g, die durch $g(x) = x^2$ für alle $x \in [-1, 1]$ gegeben ist.
- Die konstante Funktion h, für die $h(x) = 5$ für alle $x \in [-1, 1]$ gilt.

Man kann für 2 Funktionen $f, g \in M$ auf nahe liegende Art eine Funktion $f + g$ definieren, die man die *Summe von f und g* nennt:

$$(f + g)(x) := f(x) + g(x) \text{ für alle } x \in [-1, 1].$$

Die Funktion $f + g$ ordnet also jedem $x \in [-1, 1]$ die Summe von $f(x)$ und $g(x)$ zu. Die so definierte Funktion $f + g$ ist wieder in M; bei der Addition handelt es sich also um eine Abbildung vom Typ

$$+ : M \times M \longrightarrow M.$$

Ähnlich definiert man zu einer reellen Zahl λ und einer Funktion $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ eine Funktion λf:

$$(\lambda f)(x) := \lambda f(x) \text{ für alle } x \in [-1,1].$$

Die so definierte Funktion λf ist wieder in M; die Abbildung, die jedem $\lambda \in \mathbb{R}$ und jedem $f \in M$ die neue Funktion λf zuordnet, ist also vom Typ

$$\cdot : \mathbb{R} \times M \longrightarrow M.$$

Mit 0 wollen wir die konstante Funktion aus M bezeichnen, die jedes Element $x \in [-1,1]$ auf die Zahl $0 \in \mathbb{R}$ abbildet[1]. Für jedes $f \in M$ sei mit $-f$ die Abbildung aus M bezeichnet, für die $(-f)(x) = -f(x)$ gilt. Mit diesen Bezeichnungen gelten genau die Rechenregeln, denen wir schon im ersten Beispiel begegnet sind: Für alle $f, g, h \in M, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

(1) $(f+g)+h = f+(g+h)$

(2) $f+g = g+f$

(3) $f+0 = f$

(4) $f+(-f) = 0$

(5) $\lambda(\mu f) = (\lambda\mu)f$

(6) $1f = f$

(7) $\lambda(g+f) = \lambda f + \lambda g$

(8) $(\lambda+\mu)f = \lambda f + \mu f$

Die Regeln (1) - (4) lassen sich wieder zusammenfassen zu der Feststellung, dass $(M,+)$ eine abelsche Gruppe ist.

> *Obwohl in den beiden obigen Beispielen die auftretenden Objekte recht unterschiedlich sind, wird doch mit diesen Objekten nach den gleichen formalen Regeln gerechnet.*

Wir wollen anstelle des ersten Beispiels nun ein etwas allgemeineres Beispiel betrachten. Es ist ohne Weiteres möglich, den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen durch einen beliebigen Körper K zu ersetzen.

3. Gegeben sei der Körper K. Für ein $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die Menge K^n aller n-Tupel $x = (x_1, \ldots, x_n)$ mit Komponenten $x_i \in K$ $(i = 1, \ldots, n)$.

Für zwei n-Tupel $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n)$ kann man dann wieder deren Summe definieren durch:

$$x + y = (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) := (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n).$$

Beispiele zur soeben definierten Addition:

(i) $K = \mathbb{Z}_2, x = (1,0,0,1), y = (0,1,1,1) \Rightarrow x + y = (1,1,1,0)$.

(ii) $K = \mathbb{C}, x = (1, 2+i, 3, i), y = (0, 1+4i, 2i, 0) \Rightarrow x + y = (1, 3+5i, 3+2i, i)$.[2]

Das Produkt eines Körperelements $\lambda \in K$ mit $x = (x_1, \ldots, x_n)$ wird durch

$$\lambda x = \lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n)$$

definiert.

Beispiele hierzu:

(i) $K = \mathbb{Z}_2, x = (1,0,0,1) \Rightarrow 0x = (0,0,0,0), 1x = (1,0,0,1)$.

(ii) $K = \mathbb{Z}_3, x = (2,0,1,2), \lambda = 2 \Rightarrow \lambda x = 2x = (1,0,2,1)$.

---

1) Derartige Doppelbezeichnungen sind nicht unüblich in der Mathematik; wichtig ist, dass aus dem Zusammenhang immer eindeutig hervorgeht, was mit dem Zeichen 0 in einer bestimmten Situation gemeint ist.

2) Mit $\mathbb{C}$ bezeichnet man den Körper der komplexen Zahlen. Diejenigen, die sich mit komplexen Zahlen nicht auskennen, können dieses Beispiel übergehen.

(iii) $K = \mathbb{C}, x = (1, 2+i, 3-4i, i), \lambda = i \Rightarrow \lambda x = ix = (i, -1+2i, 4+3i, -1)$.[3]

Analog zum ersten Beispiel ist dann die Addition eine Abbildung vom Typ

$$+ : K^n \times K^n \longrightarrow K^n$$

und die Multiplikation (die man übrigens *skalare Multiplikation* nennt) ist eine Abbildung vom Typ

$$\cdot : K \times K^n \longrightarrow K^n.$$

Auch gelten dieselben Rechenregeln wie im ersten Beispiel: Man hat in den Regeln (1) bis (8) des Beispiels 1 nur das Symbol $\mathbb{R}$ gegen K auszutauschen.

4. Ebenfalls kann man das zweite Beispiel verallgemeinern: Man kann ohne weiteres den Körper $\mathbb{R}$ der reellen Zahlen durch einen beliebigen Körper K ersetzen und darüber hinaus an die Stelle der etwas speziellen Menge $I = [-1, 1]$ eine beliebige Menge A setzen (,wobei noch nicht einmal $A \subseteq K$ gelten muss, sondern A völlig beliebig sein kann).

   Man definiert dann ebenso wie zuvor für $M = \left\{f : f \text{ ist eine Funktion } A \to K\right\}$ eine Addition $+ : M \times M \longrightarrow M$ und eine skalare Multiplikation $\cdot : K \times M \longrightarrow M$, für die dann die Rechenregeln (1) - (8) gelten.

Diese und viele weitere Beispiele führen zum Begriff des Vektorraums über einem Körper K, der wie folgt definiert wird.

Definition.

Gegeben sei ein Körper K. Ein Tripel $(V, +, \cdot)$, bestehend aus einer Menge V, einer Abbildung (genannt *Addition*)

$$\begin{aligned} + : V \times V &\longrightarrow V, \\ (x, y) &\longmapsto x + y \end{aligned}$$

und einer Abbildung (genannt *skalare Multiplikation*)

$$\begin{aligned} \cdot : K \times V &\longrightarrow V, \\ (\lambda, x) &\longmapsto \lambda x \end{aligned}$$

heißt ein *Vektorraum über* K, wenn für die Abbildungen $+$ und $\cdot$ Folgendes gilt:

(I) Bezüglich der Addition $+$ ist V eine abelsche Gruppe. Im Einzelnen bedeutet dies, dass die folgenden Axiome gelten:
  - (1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ für alle $x, y, z \in V$.
  - (2) $x + y = y + x$ für alle $x, y \in V$.
  - (3) Es gibt ein neutrales Element $0 \in V$ (genannt „Null" oder „Nullvektor") mit $x + 0 = x$ für alle $x \in V$.
  - (4) Zu jedem $x \in V$ gibt es ein Element $-x \in V$ mit $x + (-x) = 0$.

(II) Darüber hinaus sollen vier weitere Axiome gelten:
  - (5) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ für alle $\lambda, \mu \in K, x \in V$.
  - (6) $1x = x$ für alle $x \in V$.
  - (7) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ für alle $\lambda \in K, x, y \in V$.
  - (8) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ für alle $\lambda, \mu \in K, x \in V$.

Die Elemente von V heißen *Vektoren* und die Elemente von K werden *Körperelemente* oder *Skalare* genannt. Den Körper K nennt man auch den *zugrundeliegenden Körper*.

Ist der zugrunde liegende Körper $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$, so spricht man von einem *reellen* bzw. *komplexen Vektorraum*.

---

3) Ebenso wie zuvor gilt für dieses Beispiel und für alle weiteren Beispiele, in denen $K = \mathbb{C}$ gilt: Wenn Sie sich mit komplexen Zahlen noch nicht auskennen, so übergehen Sie das entsprechende Beispiel.

Durch die obigen Beispiele ist bereits angedeutet worden, dass es Vektorräume ganz unterschiedlicher Art gibt. Hier einige weitere Beispiele, die zeigen, dass Vektorräume in den unterschiedlichsten Zusammenhängen auftreten.

5. Die Menge $K[x]$ der *Polynome* über einem Körper K bilden einen Vektorraum über K, wenn man die Addition zweier Polynome auf die übliche Art definiert (siehe Abschnitt 7.3 des DM-Skripts) und die skalare Multiplikation auf die nahe liegende Art wie folgt erklärt: Für $a(x) \in K[x]$ mit $a(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n$ und $\lambda \in K$ sei
$$\lambda a(x) := \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \ldots + \lambda a_n x^n.$$

6. Die Menge $M(m \times n, K)$ der $m \times n$ - Matrizen über einem Körper K bilden einen Vektorraum über K, wenn Addition und skalare Multiplikation auf die übliche Art erklärt werden (siehe Abschnitt 5.3 des DM-Skripts).

7. Es sei $U(K)$ die Menge der *unendlichen Folgen*
$$u_0, u_1, u_2, \ldots ,$$
wobei die Folgenglieder u_i aus K stammen ($i = 0, 1, \ldots$). Besonders wichtig ist für uns dabei der Fall, dass $K = \mathbb{R}$ gilt, dass es sich also um *unendliche Folgen reeller Zahlen* handelt.

   Als eine kompakte Schreibweise für Folgen $u_0, u_1, u_2, \ldots$ aus $U(K)$ wählen wir die Schreibweise $(u_i)_{i=0,1,\ldots}$ oder (noch kürzer) (u_i). Für $(u_i), (u_i') \in U(K)$ und $\lambda \in K$ definiert man Addition und skalare Multiplikation *gliedweise* durch:
$$(u_i) + (u_i') := (u_i + u_i') \in U(K),$$
$$\lambda(u_i) := (\lambda u_i) \in U(K).$$
   Dadurch wird $U(K)$ zu einem Vektorraum über K.

Wir haben bislang eine Reihe unterschiedlichster Vektorräume kennengelernt, u.a.

- K^n, den Vektorraum aller *n-Tupel* über K,
- die Menge M aller *Funktionen* $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$,
- die Menge $K[x]$ aller *Polynome* über K,
- die Menge $M(m \times n, K)$ aller $m \times n$*-Matrizen* über K und
- die Menge $U(\mathbb{R})$ aller *reellen unendlichen Folgen*,

wobei die Addition und skalare Multiplikation jeweils wie zuvor beschrieben definiert sind. Oft interessiert man sich allerdings gar nicht so sehr für die Menge *aller* Vektoren eines Vektorraums V, sondern viel mehr für *interessante Teilmengen von V, die für sich genommen bereits einen Vektorraum bilden*; man spricht in diesem Zusammenhang von *Untervektorräumen*.

Beispiele für derartige Untervektorräume:

- die Menge aller *stetigen* Funktionen $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$
- die Menge aller *differenzierbaren* Funktionen $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$
- die Menge aller $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$, die Lösung *eines gegebenen homogenen linearen Gleichungssystems* sind.

Beispiele für interessante Untervektorräume von $U(\mathbb{R})$:

- die Menge derjenigen unendlichen Folgen $u_0, u_1, u_2, \ldots$ aus $U(\mathbb{R})$, die einer gegebenen homogenen linearen Rekursionsgleichung (*ohne* Anfangsbedingungen) genügen.4)
- die Menge der konvergenten Folgen aus $U(\mathbb{R})$.

---

4) Mit linearen Rekursionsgleichungen werden wir uns – sofern es die Zeit erlaubt – in diesem oder im kommenden Semester befassen. Da Rekursionsgleichungen besonders in der Informatik eine wichtige Rolle spielen, sei dieses Beispiel bereits hier erwähnt.

Im Gramlich werden in erster Linie die reellen Vektorräume $\mathbb{R}^n$ und deren Unterräume betrachtet. Es gilt jedoch: Alles, was im Gramlich über die Vektorräume $\mathbb{R}^n$ und ihre Unterräume gesagt wird, lässt sich entsprechend auch auf die Vektorräume K^n und ihre Unterräume übertragen (für beliebige Körper K).

Wer mehr über allgemeine Vektorräume wissen möchte, greife zu einem der bekannten Lehrbücher der Linearen Algebra (siehe Literaturverzeichnisse im Gramlich und im DM-Skript).

Ein <u>offensichtlicher Unterschied</u> zwischen den Vektorräumen $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ einerseits sowie den Vektorräumen $\mathbb{Z}_p^n$ andererseits besteht in der Anzahl der Elemente: Während $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{R}^n$ und $\mathbb{C}^n$ unendlich viele Elemente enthalten, handelt es sich bei K^n um eine endliche Menge, falls $K = \mathbb{Z}_p$ gilt.

Fragen: 1. Wie viele Elemente enthält der Körper $K = \mathbb{Z}_p$?

2. Wie viele Elemente enthält der Vektorraum K^n, falls $K = \mathbb{Z}_p$ gilt?

3. Geben Sie die Elemente folgender Vektorräume K^n durch Aufzählung an:

(i) $K = \mathbb{Z}_2 \Rightarrow K^2 = \{ \qquad \}$,

(ii) $K = \mathbb{Z}_2 \Rightarrow K^3 =$

(iii) $K = \mathbb{Z}_3 \Rightarrow K^2 =$

4. Es sei $K = \mathbb{Z}_5$ und $V = K^4$. Für $u, v, w \in V$ mit $u = (4,3,0,1)$, $v = (3,2,4,4)$ und $w = (2,0,3,4)$ berechnen man $u + v$ und $3u + 2v + 4w$:

$v + w =$

$3u + 2v + 4w =$