Mathematik II für Studierende der Informatik (Analysis und Lineare Algebra)

Steven Köhler

Sommersemester 2012
Aufgaben zur Vorbereitung der Abschlussklausur am 21.07.2012

1. a) Die Funktion f sei gegeben durch $f(x) = \frac{3x+2}{4x}$. $T(x)$ sei die Tangente an den Graphen von f im Punkt $\big(1, f(1)\big)$. Welche Steigung besitzt T?

b) Berechne $\displaystyle\int_1^8 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx$.

c) Ist die folgende Reihe konvergent oder divergent? Gib im Falle der Konvergenz den Grenzwert an; gib im Falle der Divergenz eine Begründung, wieso Divergenz vorliegt.

$$\sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{5}{4}\right)^i$$

d) Ist die folgende Reihe konvergent oder divergent? Gib im Falle der Konvergenz den Grenzwert an (Ergebnis genügt); gib im Falle der Divergenz eine (kurze) Begründung, wieso Divergenz vorliegt.

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}$$

e) Zeige die Konvergenz der Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{2^k}$ sowohl mit dem Quotienten- als auch mit dem Wurzelkriterium.

2. a) Differenziere die folgende Funktion:

$$g(x) = \left(x^3 + 4\right)^{\arctan x}$$

b) Berechne die partiellen Ableitungen erster Ordnung:

$$h(x, y) = \cos\left(y \cdot e^{x+y^2}\right)$$

3. a) Berechne $\displaystyle\int \ln x\; dx$ auf zwei Arten:

(i) mit partieller Integration (Hinweis: $\ln x = 1 \cdot \ln x$)
(ii) mit der Substitutionsregel (Hinweis: $t = \ln x$)

b) Mache die Probe, d.h., überprüfe das Ergebnis durch Ableiten.

4. a) Berechne $\displaystyle\int \cos\left(\sqrt{\frac{x}{2} + 3}\right) dx$.

b) Berechne $\displaystyle\int \frac{1}{x^2 - x - 2}\, dx$.

5. Bestimme mithilfe einer Untersumme die Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = -x^3 + 2x^2 + x$, der x-Achse sowie den beiden Geraden $x = 0$ und $x = 1$ eingeschlossen wird.

6. a) Berechne eine Stammfunktion von $f(x) = e^{\sqrt[3]{x}}$ und mache die Probe!

b) Berechne $\displaystyle\int \frac{x^3 + 2}{x^2 - 4x + 4}\, dx$.

c) Berechne $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin x \cdot \cos x \; dx$.

d) Berechne $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} \; dx$.

e) Berechne $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{1}{x^4} \; dx$.

7. Berechne Näherungswerte für $\sqrt{2}$, indem du das Newton-Verfahren auf die Funktion $f(x) = x^2 - 2$ anwendest. Beginne mit dem Startwert $x_0 = 2$ und berechne x_1 und x_2.

8. Berechne $\displaystyle\iint_G xy \; d(x,y)$, wobei G das Dreieck mit den Eckpunkten $(0,1)$, $(2,1)$ und $(2,2)$ ist.

9. a) Berechne $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x + e^{-2x}}{x^2 + 3x + 1} \right)$.

b) Berechne $\displaystyle\lim_{x \to 0} \left(\frac{e^x - e^{-2x}}{x^2 + 3x} \right)$.

c) Berechne $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \left(\frac{2x^3 + x + 5}{\ln x} \right)$.

10. Bestimme die stationären Stellen der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = 3x^2 - y^2$ unter der Nebenbedingung $-x + y = -2$:

a) mit Hilfe des Lagrange-Ansatzes;

b) ohne Lagrangesche Multiplikationsregel.

c) Entscheide: Minimum, Maximum oder kein lokales Extremum.

11. Bestimme die stationären Stellen für die folgende Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und entscheide, ob lokale Minima oder Maxima vorliegen:

$$f(x,y,z) = -2x^2 - 3y^2 - z^2 + 2xz + 2x + 8y$$

12. a) Berechne die Taylor-Polynome $T_0(x)$ bis $T_3(x)$ für $f(x) = \dfrac{1}{(1+x)^2}$ an der Stelle $x_0 = 0$.

b) Berechne die Taylor-Polynome $T_0(x)$, $T_1(x)$, $\ldots$, $T_5(x)$ von $f(x) = \sin(3x)$ an der Stelle $x_0 = 0$.

c) Gib die Taylorreihe von $f(x) = \sin(7x)$ an. (Ohne Beweis!)

13. Die folgenden Punkte des $\mathbb{R}^2$ seien gegeben durch $P_1 = \big(1,8\big)$, $P_2 = \big(2,9\big)$ und $P_3 = \big(5,24\big)$. Bestimme ein Polynom, dass durch die Punkte P_1, P_2 und P_3 geht:

a) mit dem Lagrange-Verfahren;

b) mit dem Newton-Verfahren.

c) Wie könnte das Polynom ohne Lagrange- oder Newtonverfahren bestimmt werden?

14. a) Es seien $z_1 = 5 + i$ und $z_2 = 3 - 2i$ zwei komplexe Zahlen. Berechne $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$ sowie $\dfrac{z_2}{z_1}$.

b) Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = 2 - 2i$ und $z_2 = 3\Big(\cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{7}\right)\Big)$.

(i) Gib Betrag und Argument von $z = z_1^5 \cdot z_2$ an.

(ii) Es sei $z = z_1 - z_2$. Gib $\overline{z}$ in der Form $a + ib$ an.

c) Bestimme das Produkt AB der beiden folgenden beiden Matrizen A und B:

$$A = \begin{bmatrix} i & 1+i \\ 2-i & 5 \end{bmatrix} \qquad \text{und} \qquad B = \begin{bmatrix} 3+i & 1 \\ i & 1-i \end{bmatrix}.$$