Mathematik I für Studierende der Informatik (Diskrete Mathematik)

Thomas Andreae, Christoph Stephan

Wintersemester 2011/12
Blatt 11

A: Präsenzaufgaben am 12./13. Januar 2012

1. Für das folgende lineare Gleichungssystem stelle man die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix auf und bestimme die allgemeine Lösung *mit dem Gauß-Verfahren*. Falls es unendlich viele Lösungen gibt, so gebe man die allgemeine Lösung in parametrisierter Form an (vgl. Gramlich Seite 22 sowie Ergänzungsskript Seite 4).

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_3 &= 8 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 3x_1 - x_2 + 10x_3 &= 22 \end{aligned}$$

2. Es seien $v_1 = (1, 3, 3)$ und $v_2 = (2, -1, 4)$ Vektoren des $\mathbb{R}^3$. Prüfen Sie mit Hilfe des Gauß-Verfahrens, ob der Vektor $u \in \mathbb{R}^3$ mit $u = (5, -27, 3)$ eine Linearkombination von v_1 und v_2 ist. Geben Sie ggf. eine Darstellung von u als Linearkombination von v_1 und v_2 an.

3. Für das folgende lineare Gleichungssystem stelle man die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix auf und bestimme die allgemeine Lösung mit dem Gauß-Verfahren:

$$\begin{aligned} -x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 &= -2 \\ 6x_1 + 6x_2 + 12x_3 &= 5. \end{aligned}$$

B: Hausaufgaben zum 19./20. Januar 2012

1. Für die folgenden linearen Gleichungssysteme stelle man jeweils die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix auf und bestimme die allgemeine Lösung mit dem Gauß-Verfahren. Falls es unendlich viele Lösungen gibt, so gebe man die allgemeine Lösung in parametrisierter Form an!

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 3x_1 + \tfrac{3}{2}x_2 + \tfrac{3}{2}x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

2. Wir gehen davon aus, dass die erweiterte Koeffizientenmatrix eines linearen Gleichungssystems durch elementare Zeilenumformungen auf die folgende Zeilenstufenform gebracht wurde:

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Die Variablen seien wie üblich mit $x_1, x_2, \ldots, x_6$ bezeichnet. Welches sind die führenden und welches sind die freien Variablen? Man bestimme die allgemeine Lösung des Gleichungssystems durch Rückwärtssubstitution, wobei eine geeignete Zahl von Parametern zu verwenden ist.

3. Es seien $v_1 = (1,0,0,3)$, $v_2 = (0,-1,1,2)$ und $v_3 = (-1,4,2,1)$ Vektoren des $\mathbb{R}^4$. Prüfen Sie mit Hilfe des Gauß-Verfahrens, ob die Vektoren $u = (1,3,6,15)$ und $w = (-2,2,4,1)$ des $\mathbb{R}^4$ Linearkombinationen von v_1, v_2 und v_3 sind. Falls ja, so gebe man eine entsprechende Darstellung von u und w an.

4. a) Es sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ gegeben durch $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Berechnen Sie A^{-1} auf zwei Arten:

(i) durch Anwendung der bekannten Formel für die Inverse einer $(2,2)$-Matrix (vgl. Gramlich, Abschnitt 1.8),

(ii) durch Anwendung von Algorithmus 1.3 (vgl. Gramlich Seite 42).

b) Es sei $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ gegeben durch $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 9 & -3 \\ -2 & -3 & 7 \end{bmatrix}$.

Berechnen Sie A^{-1} durch Anwendung von Algorithmus 1.3 und *machen Sie die Probe*, d.h., prüfen Sie für die von Ihnen berechnete Matrix A^{-1}, ob tatsächlich $AA^{-1} = E$ gilt.
Verwenden Sie die soeben berechnete Matrix A^{-1} zur Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ für $b = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 2 \end{bmatrix}^T$.

c) Weisen Sie mit Hilfe von Algorithmus 1.3 nach, dass die folgende Matrix aus $\mathbb{R}^{3\times 3}$ nicht invertierbar ist:

$$\begin{bmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 6 & 4 & -1 \\ -10 & -12 & 13 \end{bmatrix}.$$