Tutorium: Diskrete Mathematik

Algebraische Strukturen

Lösungen

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Aufgabe 1

a) ja

b) nein (nicht abgeschlossen, z.B. bei Division durch 0; kein neutrales Element)

c) nein (Assoziativgesetz gilt nicht; kein neutrales Element)

d) ja

Aufgabe 2

Die vier Elemente der Rechteckgruppe sind:

- die Identität (i);
- die Drehung um 180° (r);
- die beiden Spiegelungen an den Seitenhalbierenden (x, y).

Als Gruppentafel ergibt sich:

	i	r	x	y
i	i	r	x	y
r	r	i	y	x
x	x	y	i	r
y	y	x	r	i

Aufgabe 3

Zum Nachweis sind 2 Dinge zu zeigen:

- $a, b \in G \cap H \Rightarrow a \star b \in G \cap H$
- $a \in G \cap H \Rightarrow a^{-1} \in G \cap H$

Zum Nachweis der ersten Eigenschaft genügt die folgende Begründung:

$$\begin{aligned} & a, b \in G \cap H \\ \Rightarrow\ & a, b \in G \quad \text{und} \quad a, b \in H \\ \Rightarrow\ & a \star b \in G \quad \text{und} \quad a \star b \in H \\ \Rightarrow\ & a \star b \in G \cap H \end{aligned}$$

Der Nachweis der zweiten Eigenschaft erfolgt analog.

Aufgabe 4

Die beiden Gruppen der Ordnung 4 haben die folgenden Gruppentafeln:

	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	b	c	1
b	b	c	1	a
c	c	1	a	b

	1	a	b	c
1	1	a	b	c
a	a	1	c	b
b	b	c	1	a
c	c	b	a	1

Die linke Gruppe enthält Elemente der Ordnung 4, die rechte Gruppe nicht. Sie können also nicht isomorph sein. Die rechte Gruppe ist auch als Kleinsche Vierergruppe bekannt.

Aufgabe 5

Die durch $\mathcal{H}$ erzeugte Untergruppe von S_3 lautet:

$$\mathcal{H} = \Big\{id, (1,2)\Big\}.$$

Es ergeben sich die folgenden Linksnebenklassen:

$$\begin{aligned} id\mathcal{H} &= \Big\{id, (1,2)\Big\} \\ (1,3)\mathcal{H} &= \Big\{(1,3), (1,2,3)\Big\} \\ (2,3)\mathcal{H} &= \Big\{(2,3), (1,3,2)\Big\}. \end{aligned}$$

Die "restlichen" Nebenklassen sind mit den bereits genannten identisch.

Aufgabe 6

Sei $\mathcal{M}$ die Menge der invertierbaren 2×2 - Matrizen. Es muss Folgendes gezeigt werden:

- $(\mathcal{M}, +)$ bildet eine kommutative Gruppe;
- $(\mathcal{M}, \cdot)$ bildet einen Monoid;
- Gültigkeit der Distributivgesetze.

Es handelt sich weder um einen Ring noch um einen Körper, da Addition zweier invertierbarer Matrizen nicht immer eine invertierbare Matrix ergibt. Die Menge $\mathcal{M}$ ist folglich nicht abgeschlossen bzgl. $+$.
Es seien $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ und $M_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$. Sowohl M_1 als auch M_2 sind invertierbar. $M_1 + M_2 = 0$ ist nicht invertierbar, liegt also nicht in $\mathcal{M}$.