Mathematik II für Studierende der Informatik (Analysis und Lineare Algebra)

Thomas Andreae, Henrik Bachmann, Rosona Eldred, Malte Moos

Sommersemester 2012
Blatt 10

B: Hausaufgaben zum 28. Juni 2012

3. Bestimmen Sie die kritischen Stellen und entscheiden Sie, ob lokale Minima oder lokale Maxima vorliegen.

(i) $f(x,y) = -xy + x^2 + y^2 - y + 5$
(ii) $f(x,y) = xy - y^2 + x + y + 3$
(iii) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 12x - 3y + 5$

(i) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = -y + 2x = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x + 2y - 1 = 0$. Aus der ersten Gleichung folgt $y = 2x$. Setzt man dies in die zweite Gleichung ein, so ergibt sich $3x = 1$, also $x = \frac{1}{3}$ und $y = \frac{2}{3}$. Ergebnis: $(x,y) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ist die einzige kritische Stelle.

Es gilt außerdem
$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = -1$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 2$.

Für die Hessesche Matrix H und deren Abschnittsdeterminanten folgt
$H = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, $\Delta_1 = 2 > 0$, $\Delta_2 = \det H = 3 > 0$,
d.h., H ist positiv definit. Also liegt bei $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ ein lokales Minimum vor

(ii) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y+1 = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x-2y+1 = 0$. Es folgt $x=-3$ und $y=-1$, d.h., $(-3,-1)$ ist die einzige kritische Stelle. Es gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 1\,,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -2.$$

Für die Hessesche Matrix und deren Determinante folgt $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$ und $\det H = -1 < 0$. Das bedeutet, dass H indefinit ist; es liegt also ein Sattelpunkt vor.

(iii) $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=3x^2-12=0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=3y^2-3=0$. Es folgt $x^2=4$, $y^2=1$. Folglich gibt es vier kritische Stellen, nämlich: $(2,1)$, $(2,-1)$, $(-2,1)$, $(-2,-1)$. Es gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=6x,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)=0,\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=6y.$$

Mit $H(x,y)$ sei die Hessesche Matrix an der Stelle (x,y) bezeichnet. Es gilt

$$H(x,y)=\begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6y \end{pmatrix}.$$

Die Abschnittsdeterminanten von $H(x,y)$ seien mit $\Delta_1(x,y)$ und $\Delta_2(x,y)$ bezeichnet. Es gilt $\Delta_1(x,y)=6x$, $\Delta_2(x,y)=|H(x,y)|=36xy$.

Für die kritischen Stellen folgt:

Bei $(2,1)$ liegt ein lokales Minimum vor, da $\Delta_1(2,1)=12>0$ und $\Delta_2(2,1)=72>0$;

bei $(2,-1)$ liegt ein Sattelpunkt vor, da $\Delta_2(2,-1)=-72<0$;

bei $(-2,1)$ liegt ebenfalls ein Sattelpunkt vor, da

$\Delta_2(-2,1) = -72 < 0$;

bei $(-2,-1)$ liegt ein lokales Maximum vor, da

$\Delta_1(-2,-1) = -12 < 0$ und $\Delta_2(-2,-1) = 72 > 0$.

4. Aus einem Lehrbuch für Wirtschaftswissenschaftler:

a) Ein Unternehmen produziert zwei verschiedene Sorten A und B eines Gutes. Die täglichen Kosten der Produktion von x Einheiten des Gutes A und y Einheiten des Gutes B sind

$$C(x,y) = 0.04x^2 + 0.01xy + 0.01y^2 + 4x + 2y + 500.$$

Nehmen Sie an, dass das Unternehmen den ganzen Output verkauft – und zwar das Gut A zu einem Stückpreis von 15 Geldeinheiten und das Gut B zu einem Stückpreis von 9 Geldeinheiten. Bestimmen Sie die täglichen Produktionsniveaus x und y, die den Gewinn pro Tag maximieren.

b) Nehmen Sie nun zusätzlich an, dass jede Produktion des Unternehmens eine Umweltbelastung hervorruft, so dass das Unternehmen per Gesetz eingeschränkt ist, nicht mehr als insgesamt 320 Einheiten der beiden Güter zu produzieren. Ein Unterschreiten der erlaubten Höchstmenge von 320 Einheiten kommt aus betrieblichen Gründen (Auslastung der Maschinen) nicht in Frage. Das Problem des Unternehmens ist dann, den Gewinn pro Tag zu maximieren – unter der Nebenbedingung

$$x + y = 320.$$

Welches sind jetzt die beiden optimalen Mengen des Outputs?
Hinweis: Verwenden Sie die *Methode der Variablensubstitution* (Auflösen der Nebenbedingung nach einer Variablen mit anschließendem Einsetzen in die Zielfunktion).

c) Berechnen Sie sowohl für Fall a) als auch für Fall b) den maximalen Gewinn.

a) Der Gewinn pro Tag sei mit $g(x,y)$ bezeichnet; es gilt

$$g(x,y) = 15x + 9y - C(x,y)$$

$$= -0.04x^2 - 0.01xy - 0.01y^2 + 11x + 7y - 500.$$

Man erhält

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = -0.08x - 0.01y + 11 = 0$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = -0.01x - 0.02y + 7 = 0$$

Addition des (−8)-fachen der zweiten Gleichung zur ersten ergibt

$$0.15y = 45.$$

Es folgt $y = 300$. Einsetzen in die 2. Gleichung ergibt $-0.01x - 6 + 7 = 0$, also $x = 100$.

Die einzige kritische Stelle befindet sich demnach bei $(x,y) = (100, 300)$. Die Hessesche Matrix H lautet für alle $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ („konstante Hessesche Matrix")

$$H = \begin{pmatrix} -0.08 & -0.01 \\ -0.01 & -0.02 \end{pmatrix}.$$

Für die Abschnittsdeterminanten von H gilt $\Delta_1 = -0.08 < 0$ und $\Delta_2 = 0.0015 > 0$; H ist somit negativ definit. Für die Stelle $(x,y) = (100,300)$ bedeutet dies (vergl. Skript S. 149 sowie Ergänzungsskript*): Bei $(x,y) = (100,300)$ liegt ein lokales und somit auch globales Maximum vor.

| * Seite E.2 – E.5

b) Setzt man $y = 320 - x$ in die Zielfunktion $g(x,y)$ ein, so erhält man eine Darstellung der Gewinnfunktion, in der die Variable y nicht mehr vorkommt:

$$\tilde{g}(x) = -0.04x^2 - 0.01x(320-x) - 0.01(320-x)^2 + 11x + 7(320-x) - 500$$

$$= -0.04x^2 + 7.2x + 716.$$

$\tilde{g}'(x) = -0.08x + 7.2 = 0 \Rightarrow x = 90$ und

$y = 320 - 90 = 230.$

Wegen $\tilde{g}''(x) = -0.08 < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ liegt bei $x = 90$ ein globales Maximum von $\tilde{g}$ vor (vergl. auch Ergänzungsskript*).

c) Im Fall a) beträgt der maximale Gewinn

$g(100, 300) = 1100$ GE;

im Fall b) beträgt der maximale Gewinn

$g(90, 230) = \tilde{g}(90) = 1040$ GE.

---

* Seite E.2 – E.5