Mathematatik II für Studierende der Informatik
(Analysis und Lineare Algebra)

Thomas Andreae, Henrik Bachmann, Rosona Eldred, Malte Moos

Sommersemester 2012
Blatt 6

A: Präsenzaufgaben am 10. Mai 2012

1. Finden Sie jeweils eine Stammfunktion $F(x)$ von $f(x)$ und machen Sie die Probe, d.h., überprüfen Sie, ob $F'(x) = f(x)$ gilt.

(i) $f(x) = 4x^2$ (ii) $f(x) = \sqrt{x}$ (iii) $f(x) = e^{3x+1}$

2. Berechnen Sie $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ sowie $\displaystyle\int \sin\big(3x+1\big)\, dx$.
Vergessen Sie nicht, die Probe zu machen!

3. Berechnen Sie $\displaystyle\int x \cdot \sin x \, dx$ und machen Sie die Probe.

4. a) Berechnen Sie $\displaystyle\int_1^3 \sqrt{x}\, dx$. Skizzieren Sie den Graphen der Funktion $f(x) = \sqrt{x}$ und verdeutlichen Sie anhand der Skizze, um welchen Flächeninhalt es geht.

b) Ebenso wie a) für $\displaystyle\int_1^3 \cos x \, dx$.

B: Hausaufgaben zum 24. Mai 2012

1. a) Berechnen Sie die Fläche, die vom Graphen der Funktion $f(x) = x^3$, der x-Achse und der Geraden $x = 3$ eingeschlossen wird, als Grenzwert einer Folge von Obersummen.
Hinweis: Man gehe ähnlich vor wie auf Seite 70 des Skripts.

b) Zur Probe berechne man diese Fläche mit Hilfe der „Stammfunktionsmethode“ (Satz 9, Abschnitt 3.3)

2. Berechnen Sie $\displaystyle\int_1^3 f(x)\, dx$, skizzieren Sie den Graphen von $f(x)$ und verdeutlichen Sie anhand der Skizze, um welchen Flächeninhalt es geht.

(i) $f(x) = x^2 - x - 6$ (iv) $f(x) = \ln x$
(ii) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ (v) $f(x) = e^{-x}$
(iii) $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

3. Berechnen Sie die folgenden Integrale und machen Sie für (iii)-(v) die Probe.

(i) $\displaystyle\int \big(x^4 + 2x^3 - x + 5\big)\, dx$ (iv) $\displaystyle\int x^3 \cdot \ln x \, dx$

(ii) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{x^3}}\, dx$ (für $x > 0$) (v) $\displaystyle\int x^2 e^x \, dx$

(iii) $\displaystyle\int x \cdot \sin\big(3x\big)\, dx$

4. Berechnen Sie die folgenden Integrale und machen Sie jeweils die Probe.

(i) $\displaystyle\int e^{\sqrt{\frac{1}{3}x+2}}\,dx$ (iii) $\displaystyle\int \left(\ln x\right)^3\,dx$

(ii) $\displaystyle\int e^{\sqrt[3]{x}}\,dx$ (iv) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x^2}{x^3+4}\,dx$ (für $x>0$)

Hinweise: Verwenden Sie bei (iii) die Substitution $t = \ln x$. Aufgabe (iv) ist leicht, wenn man beachtet, dass – bis auf den Faktor 3 – der Zähler gleich der Ableitung des Nenners ist. Bei (iv) ist keine Substitution zu verwenden.

5. Das Integral lässt sich – wie Sie wissen – zur Bestimmung von Flächeninhalten verwenden. In praktischen Anwendungen kommt es aber auch sehr häufig vor, dass das Integral der Berechnung von *Durchschnittswerten* dient. Hier eine Aufgabe, die dies illustriert: Die Funktion $f : [0,3] \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = 7x^3 - 42x^2 + 63x - 2.$$

Wir stellen uns vor, dass f auf dem Intervall $[0,3]$ die Lufttemperatur in $^\circ C$ an einem festen Ort und im Laufe eines Tages angibt. (1 Einheit auf der x-Achse entspricht also 8 Stunden.) Bestimmen Sie

(i) die Tageshöchsttemperatur;
(ii) die Tagestiefsttemperatur;
(iii) die Durchschnittstemperatur dieses Tages.