

64-040 Modul IP7: Rechnerstrukturen

[http://tams.informatik.uni-hamburg.de/
lectures/2011ws/vorlesung/rs](http://tams.informatik.uni-hamburg.de/lectures/2011ws/vorlesung/rs)

Kapitel 10

Andreas Mäder



Universität Hamburg
Fakultät für Mathematik, Informatik und Naturwissenschaften
Fachbereich Informatik

Technische Aspekte Multimodaler Systeme

Wintersemester 2011/2012

Kapitel 10

Codierung

Grundbegriffe

Adhoc-Codierungen

Einschrittige Codes

Quellencodierung

Symbolhäufigkeiten

Informationstheorie

Entropie

Kanalcodierung

Fehlererkennende Codes

Zyklische Codes

Praxisbeispiele

Literatur

Definition: Codierung

Unter **Codierung** versteht man das Umsetzen einer vorliegenden Repräsentation A in eine andere Repräsentation B .

- ▶ häufig liegen beide Repräsentationen A und B in derselben Abstraktionsebene
- ▶ die Interpretation von B nach A muss eindeutig sein
- ▶ eine **Umcodierung** liegt vor, wenn die Interpretation umkehrbar eindeutig ist

Code, Codewörter

- ▶ **Codewörter:** die Wörter der Repräsentation B aus einem Zeichenvorrat Z
- ▶ **Code:** die Menge aller Codewörter
- ▶ **Blockcode:** alle Codewörter haben dieselbe Länge
- ▶ **Binärzeichen:** der Zeichenvorrat z enthält genau zwei Zeichen
- ▶ **Binärwörter:** Codewörter aus Binärzeichen
- ▶ **Binärcode:** alle Codewörter sind Binärwörter

Gründe für den Einsatz von Codes

- ▶ effiziente Darstellung und Verarbeitung von Information
- ▶ Datenkompression, -reduktion
- ▶ effiziente Übertragung von Information
 - ▶ Verkleinerung der zu übertragenden Datenmenge
 - ▶ Anpassung an die Technik des Übertragungskanal
 - ▶ Fehlererkennende und -korrigierende Codes
- ▶ Geheimhaltung von Information
z.B. Chiffrierung in der Kryptologie
- ▶ Identifikation, Authentifikation

Wichtige Aspekte

Unterteilung gemäß der Aufgabenstellung

- ▶ **Quellencodierung:** Anpassung an Sender/Quelle
- ▶ **Kanalcodierung:** Anpassung an Übertragungsstrecke
- ▶ **Verarbeitungscodierung:** im Rechner
- ▶ sehr unterschiedliche Randbedingungen und Kriterien für diese Teilbereiche. Zum Beispiel sind fehlerkorrigierende Codes bei der Nachrichtenübertragung essentiell, im Rechner wegen der hohen Zuverlässigkeit weniger wichtig.

Darstellung von Codes

▶ Wertetabellen

- ▶ jede Zeile enthält das Urbild (zu codierende Symbol) und das zugehörige Codewort
- ▶ sortiert, um das Auffinden eines Codeworts zu erleichtern
- ▶ technische Realisierung durch Ablegen der Wertetabelle im Speicher, Zugriff über Adressierung anhand des Urbilds

▶ Codebäume

- ▶ Anordnung der Symbole als Baum
- ▶ die zu codierenden Symbole als Blätter
- ▶ die Zeichen an den Kanten auf dem Weg von der Wurzel zum Blatt bilden das Codewort

▶ Logische Gleichungen

▶ Algebraische Ausdrücke

Codierung von Text

- ▶ siehe letzte Woche
- ▶ Text selbst als Reihenfolge von Zeichen
- ▶ ASCII, ISO-8859 und Varianten, Unicode

Für geschriebenen (formatierten) Text:

- ▶ Trennung des reinen Textes von seiner Formatierung
- ▶ Formatierung: Schriftart, Größe, Farbe, usw.
- ▶ diverse applikationsspezifische Binärformate
- ▶ Markup-Sprachen (SGML, HTML)

Codierungen für Dezimalziffern

	BCD	Gray	Exzess3	Aiken	biquinär	1-aus-10	2-aus-5
0	0000	0000	0011	0000	000001	0000000001	11000
1	0001	0001	0100	0001	000010	0000000010	00011
2	0010	0011	0101	0010	000100	0000000100	00101
3	0011	0010	0110	0011	001000	0000001000	00110
4	0100	0110	0111	0100	010000	0000010000	01001
5	0101	0111	1000	1011	100001	0000100000	01010
6	0110	0101	1001	1100	100010	0001000000	01100
7	0111	0100	1010	1101	100100	0010000000	10001
8	1000	1100	1011	1110	101000	0100000000	10010
9	1001	1101	1100	1111	110000	1000000000	10100

Codierungen für Dezimalziffern

- ▶ alle Codes der Tabelle sind Binärcodes
- ▶ alle Codes der Tabelle sind Blockcodes
- ▶ jede Spalte der Tabelle listet alle Codewörter eines Codes
- ▶ jede Wandlung von einem Code der Tabelle in einen anderen Code ist eine Umcodierung
- ▶ aus den Codewörtern geht **nicht** hervor, welcher Code vorliegt
- ▶ Dezimaldarstellung in Rechnern unüblich, die obigen Codes werden also kaum noch verwendet

Begriffe für Binärcodes

- ▶ **Minimalcode:** alle $N = 2^n$ Codewörter bei Wortlänge n werden benutzt
- ▶ **Redundanter Code:** nicht alle möglichen Codewörter werden benutzt
- ▶ **Gewicht:** Anzahl der Einsen in einem Codewort
- ▶ **komplementär:** zu jedem Codewort c existiert ein gültiges Codewort \bar{c}
- ▶ **einschrittig:** aufeinanderfolgende Codewörter unterscheiden sich nur an einer Stelle
- ▶ **zyklisch:** bei n geordneten Codewörtern ist $c_0 = c_n$

Dualcode

- ▶ der Name für Codierung der Integerzahlen im Stellenwertsystem
- ▶ Codewort

$$c = \sum_{i=0}^{n-1} a_i \cdot 2^i, \quad a_i \in \{0, 1\}$$

- ▶ alle Codewörter werden genutzt: Minimalcode
- ▶ zu jedem Codewort existiert ein komplementäres Codewort
- ▶ bei fester Wortbreite ist c_0 gleich $c_n \Rightarrow$ zyklisch
- ▶ nicht einschrittig

Einschrittige Codes

- ▶ möglich für Mengen mit Ordnungsrelation
- ▶ Elemente der Menge werden durch Binärwörter codiert
- ▶ **einschrittiger Code**: die Codewörter für benachbarte Elemente der Menge unterscheiden sich in genau einer Stelle
- ▶ **zyklisch einschrittig**: das erste und letzte Wort des Codes unterscheiden sich ebenfalls genau in einer Stelle
- ▶ Einschrittige Codes werden benutzt, wenn ein Ablesen der Bits auch beim Wechsel zwischen zwei Codeworten möglich ist (bzw. nicht verhindert werden kann)
- ▶ z.B.: Winkelcodierscheiben oder digitale Schieblehre
- ▶ viele interessante Varianten möglich: siehe Knuth, AoCP

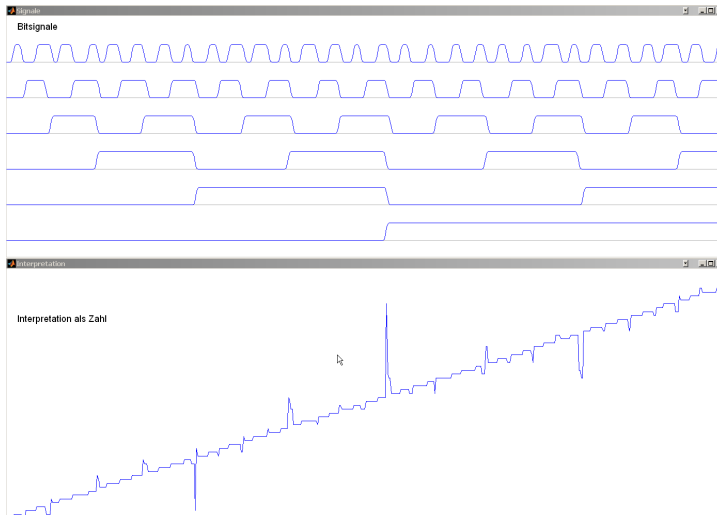
Einschrittige Codes: Matlab-Demo

- ▶ T1-Skript, Kapitel 1.4: Ablesen eines Wertes mit leicht gegeneinander verschobenen Übergängen der Bits
 - ▶ `demoeinschritt(0:59)` normaler Dualcode
 - ▶ `demoeinschritt(einschritt(60))` einschrittiger Code

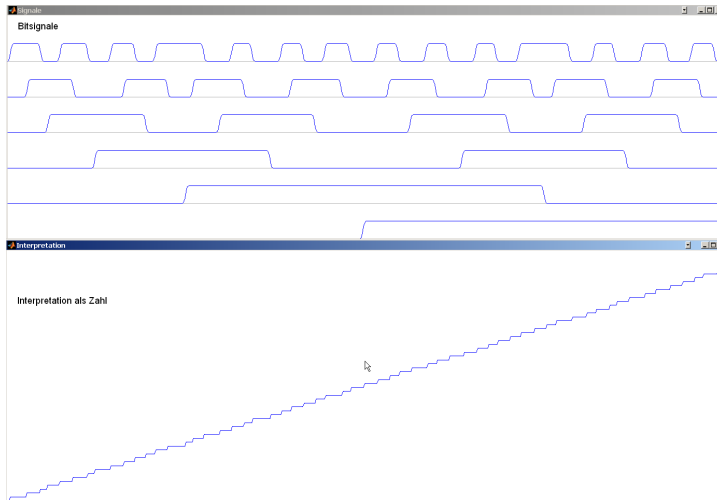
- ▶ maximaler Ablesefehler
 - ▶ 2^{n-1} beim Dualcode
 - ▶ 1 beim einschrittigen Code

- ▶ Konstruktion eines einschrittigen Codes
 - ▶ rekursiv
 - ▶ als ununterbrochenen Pfad im KV-Diagramm (s.u.)

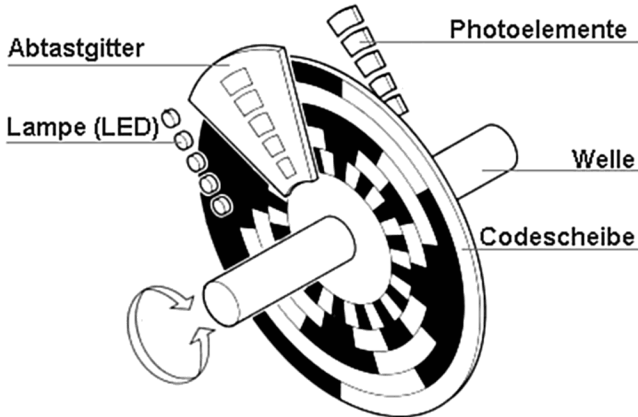
Ablezen des Wertes aus Dualcode



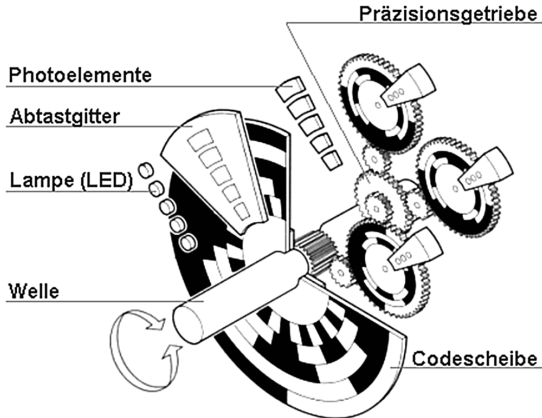
Ablezen des Wertes aus einschrittigem Code



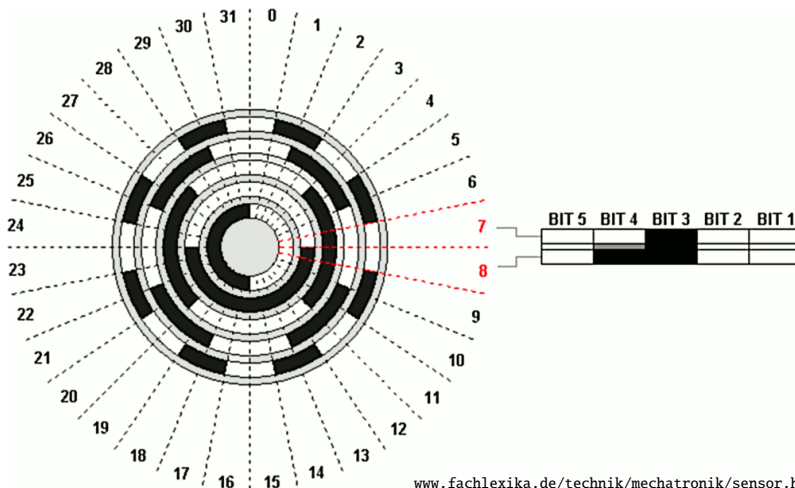
Gray-Code: Prinzip eines Winkeldrehgebers



Gray-Code: mehrstufiger Drehgeber

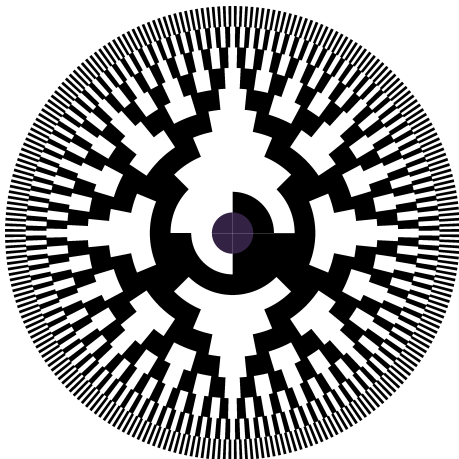


Gray-Code: 5-bit Codierscheibe



www.fachlexika.de/technik/mechatronik/sensor.html

Gray-Code: 10-bit Codierscheibe



Einschrittiger Code: rekursive Konstruktion

- ▶ Starte mit zwei Codewörtern: 0 und 1
- ▶ Gegeben: Einschrittiger Code C mit n Codewörtern
- ▶ Rekursion: Erzeuge Code C_2 mit (bis zu) $2n$ Codewörtern
 1. hänge eine führende 0 vor alle vorhandenen n Codewörter
 2. hänge eine führende 1 vor die in umgekehrter Reihenfolge notierten Codewörter

$\{ 0, 1 \}$

$\{ 00, 01, 11, 10 \}$

$\{ 000, 001, 011, 010, 110, 111, 101, 100 \}$

...

Karnaugh-Veitch Diagramm

x3 x2 \ x1 x0				
	00	01	11	10
00	0	1	3	2
01	4	5	7	6
11	12	13	15	14
10	8	9	11	10

x3 x2 \ x1 x0				
	00	01	11	10
00	0000	0001	0011	0010
01	0100	0101	0111	0110
11	1100	1101	1111	1110
10	1000	1001	1011	1010

- ▶ 2D-Diagramm mit $2^n = 2^{n_y} \times 2^{n_x}$ Feldern
 - ▶ gängige Größen sind: 2×2 , 2×4 , 4×4
darüber hinaus: mehrere Diagramme der Größe 4×4
 - ▶ Anordnung der Indizes ist im einschrittigen-Code (!)
- ⇒ benachbarte Felder unterscheiden sich gerade um 1 Bit

Einschrittiger Code: KV-Diagramm

		x1 x0			
		00	01	11	10
x3 x2	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

		x1 x0			
		00	01	11	10
x3 x2	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

- ▶ jeder Pfad entspricht einem einschrittigen Code
- ▶ geschlossener Pfad: zyklisch einschrittiger Code
 - ▶ links: 0,1,3,2,6,7,5,13,15,14,10,11,9,8,12,4
 - ▶ rechts: 1,3,7,6,14,15,11,9,13,12,4,5

Einschrittiger Code: KV-Diagramm (cont.)

		x1 x0			
		00	01	11	10
x3 x2	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

		x1 x0			
		00	01	11	10
x3 x2	00	0	1	3	2
	01	4	5	7	6
	11	12	13	15	14
	10	8	9	11	10

- ▶ linke und rechte Spalte unterscheiden sich in 1 Bit
obere und untere Zeile unterscheiden sich in 1 Bit
- ⇒ KV-Diagramm als „außen zusammengeklebt“ denken
- ▶ Pfade können auch „außenherum“ geführt werden
- ▶ links: 4,5,13,15,7,6,14,10,8,12 rechts: 2,6,14,10

Gray-Code: Umwandlung in/von Dualcode

Umwandlung: Dual- in Graywort

1. MSB des Dualworts wird MSB des Grayworts
2. von links nach rechts: bei jedem Koeffizientenwechsel im Dualwort wird das entsprechende Bit im Graywort 1, sonst 0

► Beispiele $0011 \rightarrow 0010$, $1110 \rightarrow 1001$, $0110 \rightarrow 0101$ usw.

► $\text{gray}(x) = x \wedge (x \ggg 1)$

Gray-Code: Umwandlung in/von Dualcode (cont.)

Umwandlung: Gray- in Dualwort

1. MSB wird übernommen
2. von links nach rechts: wenn das Graywort eine Eins aufweist, wird das vorhergehende Bit des Dualworts invertiert in die entsprechende Stelle geschrieben, sonst wird das Zeichen der vorhergehenden Stelle direkt übernommen

► Beispiele $0010 \rightarrow 0011$, $1001 \rightarrow 1110$, $0101 \rightarrow 0110$ usw.

► in Hardware einfach durch Kette von XOR-Operationen

<http://tams.informatik.uni-hamburg.de/applets/hades/webdemos/10-gates/15-graycode/dual2gray.html>

Optimalcodes: Codes variabler Länge

- ▶ Einsatz zur Quellencodierung
- ▶ Minimierung der Datenmenge durch Anpassung an die Symbolhäufigkeiten
- ▶ häufige Symbole bekommen kurze Codewörter, seltene Symbole längere Codewörter
- ▶ anders als bei Blockcodes ist die Trennung zwischen Codewörtern nicht durch Abzählen möglich
- ⇒ Einhalten der **Fano-Bedingung** notwendig oder Einführen von **Markern** zwischen den Codewörtern

Fano-Bedingung

Eindeutige Decodierung eines Codes mit variabler Wortlänge?

Fano-Bedingung

Kein Wort aus einem Code bildet den Anfang eines anderen Codewortes

- ▶ die sogenannte **Präfix-Eigenschaft**
- ▶ nach R. M. Fano (1961)

- ▶ ein **Präfix-Code** ist eindeutig decodierbar
- ▶ Blockcodes sind Präfix-Codes

Fano-Bedingung: Beispiele

- ▶ Telefonnummern: das Vorwahlsystem gewährleistet die Fano-Bedingung

110, 112 : Notrufnummern
 42883 2502 : Ortsnetz (keine führende Null)
 040 42883 2502 : nationales Netz
 0049 40 42883 2502 : internationale Rufnummer

- ▶ Morse-Code: Fano-Bedingung verletzt

Morse-Code

Punkt: kurzer Ton
Strich: langer Ton

Codetabelle des Morse-Codes					
a	• —	o	— — —	4	• • • • —
ä	• — • —	ö	— — — •	5	• • • • •
å	• — — • —	p	• — — •	6	— • • • •
b	— • • •	q	— — • —	7	— — • • •
c	— • — •	r	• — •	8	— — — • •
ch	— — — —	s	• • •	9	— — — — •
d	— • •	t	—		
e	•	u	• • —	.	• — • — • —
é	• • — • •	ü	• • — —	,	— — • • — —
f	• • — •	v	• • • —	:	— — — • • •
g	— — •	w	• — —	-	— • • • • —
h	• • • •	x	— • • —	'	• — — — — •
i	• •	y	— • — —	(— • — — • —
j	• — — —	z	— — • •	?	• • — — • •
k	— • —			"	• — • • — •
l	• — • •	0	— — — — —	Notruf	• • • — — — • • •
m	— —	1	• — — — —	SP	• •
n	— •	2	• • — — —	Anfang	— • — • —
ñ	— — • — —	3	• • • — —	Ende	• • • — • —

Morse-Code (cont.)

► Eindeutigkeit

Codewort: • • • • • – •

e → •

i → • •

n → – •

r → • – •

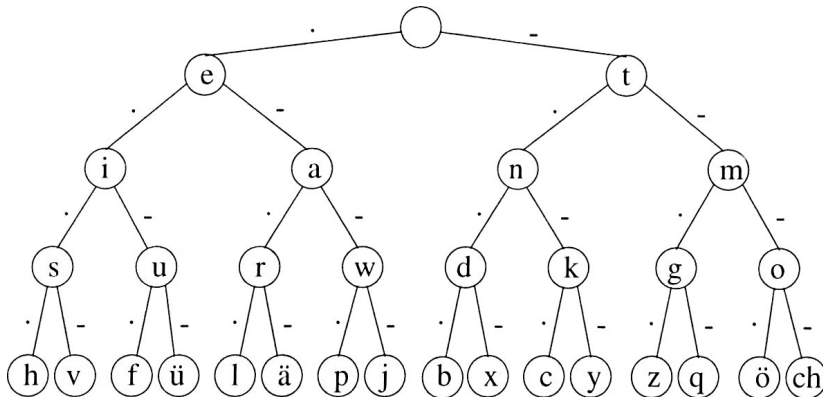
s → • • •

- bestimmte Morse-Sequenzen sind mehrdeutig
- Pause zwischen den Symbolen notwendig

► Codierung

- Häufigkeit der Buchstaben = $1 / \text{Länge des Codewortes}$
- Effizienz: kürzere Codeworte
- Darstellung als Codebaum

Morse-Code: Codebaum (Ausschnitt)



- Symbole als Knoten (!) oder Blätter
- Codewort am Pfad von Wurzel zum Blatt ablesen

Morse-Code: Umschlüsselung

Umschlüsselung des Codes für binäre Nachrichtenübertragung

- ▶ 110 als Umschlüsselung des langen Tons -
10 als Umschlüsselung des kurzen Tons .
0 als Trennzeichen zwischen Morse-Codewörtern
- ▶ der neue Code erfüllt die Fano-Bedingung
jetzt eindeutig decodierbar: 101010011011011001010100 (SOS)
- ▶ viele andere Umschlüsselungen möglich, z.B.:
1 als Umschlüsselung des langen Tons -
01 als Umschlüsselung des kurzen Tons .
00 als Trennzeichen zwischen Morse-Codewörtern

Codierung nach Fano

Gegeben: die zu codierenden Urwörter a_i
und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $p(a_i)$

- ▶ Ordnung der Urwörter anhand ihrer Wahrscheinlichkeiten
 $p(a_1) \geq p(a_2) \geq \dots \geq p(a_n)$
- ▶ Einteilung der geordneten Urwörter in zwei Gruppen mit möglichst gleicher Gesamtwahrscheinlichkeit. Eine Gruppe bekommt als erste Codewortstelle eine 0, die andere eine 1
- ▶ Diese Teilgruppen werden wiederum entsprechend geteilt, und den Hälften wieder eine 0, bzw. eine 1, als nächste Codewortstelle zugeordnet
- ▶ Das Verfahren wird wiederholt, bis jede Teilgruppe nur noch ein Element enthält
- ▶ vorteilhafter, je größer die Anzahl der Urwörter (!)

Codierung nach Fano: Beispiel

Urbildmenge $\{A, B, C, D\}$ und zugehörige
Wahrscheinlichkeiten $\{0.45, 0.1, 0.15, 0.3\}$

0. Sortierung nach Wahrscheinlichkeiten ergibt $\{A, D, C, B\}$
 1. Gruppenaufteilung ergibt $\{A\}$ und $\{D, C, B\}$
Codierung von A mit 0 und den anderen Symbolen als 1*
 2. weitere Teilung ergibt $\{D\}$, und $\{C, B\}$
 3. letzte Teilung ergibt $\{C\}$ und $\{B\}$
- ⇒ Codewörter sind $A = 0$, $D = 10$, $C = 110$ und $B = 111$

mittlere Codewortlänge L

- ▶ $L = 0.45 \cdot 1 + 0.3 \cdot 2 + 0.15 \cdot 3 + 0.1 \cdot 3 = 1.8$
- ▶ zum Vergleich: Blockcode mit 2 Bits benötigt $L = 2$

Codierung nach Fano: Deutsche Großbuchstaben

Buchstabe a_i	Wahrscheinlichkeit $p(a_i)$	Code (Fano)	Bits
Leerzeichen	0.15149	000	3
E	0.14700	001	3
N	0.08835	010	3
R	0.06858	0110	4
I	0.06377	0111	4
S	0.05388	1000	4
...
Ö	0.00255	111111110	9
J	0.00165	1111111110	10
Y	0.00017	11111111110	11
Q	0.00015	111111111110	12
X	0.00013	111111111111	12

Fano-Code der Buchstaben der deutschen Sprache, Ameling 1992

Codierung nach Huffman

Gegeben: die zu codierenden Urwörter a_i
und die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten $p(a_i)$

- ▶ Ordnung der Urwörter anhand ihrer Wahrscheinlichkeiten
 $p(a_1) \leq p(a_2) \leq \dots \leq p(a_n)$
- ▶ in jedem Schritt werden die zwei Wörter mit der geringsten Wahrscheinlichkeit zusammengefasst und durch ein neues ersetzt
- ▶ das Verfahren wird wiederholt, bis eine Menge mit nur noch zwei Wörtern resultiert
- ▶ rekursive Codierung als Baum (z.B.: links 0, rechts 1)
- ▶ ergibt die kleinstmöglichen mittleren Codewortlängen
- ▶ Abweichungen zum Verfahren nach Fano sind aber gering
- ▶ vielfältiger Einsatz (u.a. bei JPEG, MPEG, ...)

Codierung nach Huffman: Beispiel

Urbildmenge $\{A, B, C, D\}$ und zugehörige
Wahrscheinlichkeiten $\{0.45, 0.1, 0.15, 0.3\}$

0. Sortierung nach Wahrscheinlichkeiten ergibt $\{B, C, D, A\}$
 1. Zusammenfassen von B und C als neues Wort E ,
Wahrscheinlichkeit von E ist dann $p(E) = 0.1 + 0.15 = 0.25$
 2. Zusammenfassen von D und E als neues Wort F mit
 $p(F) = 0.55$
 3. Zuordnung der Bits entsprechend der Wahrscheinlichkeiten
 - ▶ $F = 0$ und $A = 1$
 - ▶ Split von F in $D = 00$ und $E = 01$
 - ▶ Split von E in $C = 010$ und $B = 011$
- ⇒ Codewörter sind $A = 1$, $D = 00$, $C = 010$ und $B = 011$

Bildung eines Huffman-Baums

- ▶ Alphabet = $\{E, I, N, S, D, L, R\}$
- ▶ relative Häufigkeiten
 $E = 18, I = 10, N = 6, S = 7, D = 2, L = 5, R = 4$
- ▶ Sortieren anhand der Häufigkeiten
- ▶ Gruppierung (rekursiv)
- ▶ Aufbau des Codebaums
- ▶ Ablesen der Codebits

Bildung eines Huffman-Baums (cont.)

D	R	L	N	S	I	E
2	4	5	6	7	10	18



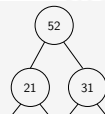
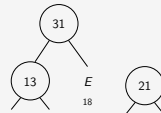
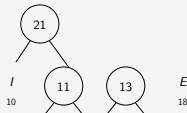
D	R	L	N	S	I	E
2	4	5	6	7	10	18



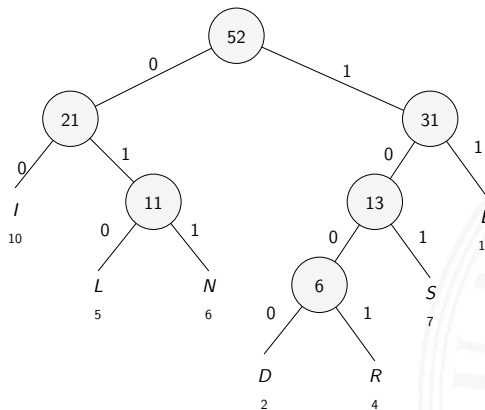
L	N		S	I	E
5	6	6	7	10	18



	S	I		E
	7	10	11	18



Bildung eines Huffman-Baums (cont.)



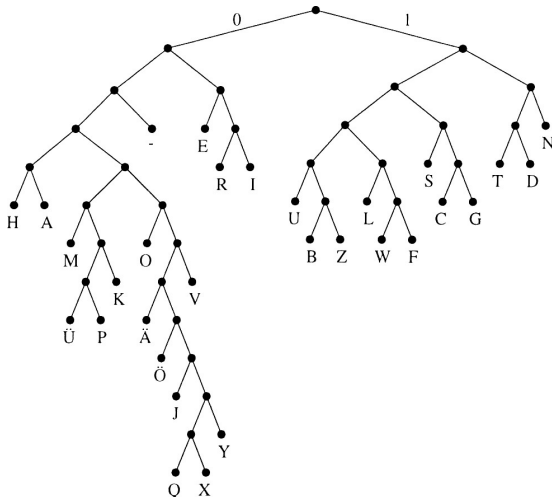
I	00
L	010
N	011
D	1000
R	1001
S	101
E	11

1001 0011 1011
R I E S E

Codierung nach Huffman: Deutsche Großbuchstaben

Zeichen	Code	Zeichen	Code
—	001	O	000110
E	010	B	100010
N	111	Z	100011
R	0110	W	100110
I	0111	F	100111
S	1010	K	0001011
T	1100	V	0001111
D	1101	Ü	00010100
H	00000	P	00010101
A	00001	Ä	00011100
U	10000	Ö	000111010
L	10010	J	0001110110
C	10110	Y	00011101111
G	10111	Q	000111011100
M	000100	X	000111011101

Codierung nach Huffman: Codebaum



ca. 4.5 Bits/Zeichen,
1.7-Mal besser als ASCII

Codierung nach Huffman: Minimale Codelänge

- ▶ Sei C ein Huffman-Code mit durchschnittlicher Codelänge L
- ▶ Sei D ein weiterer Präfix-Code mit durchschnittlicher Codelänge M , mit $M < L$ und M minimal
- ▶ Berechne die C und D zugeordneten Decodierbäume A und B
- ▶ Betrachte die beiden Endknoten für Symbole kleinster Wahrscheinlichkeit:
 - ▶ Weise dem Vorgängerknoten das Gewicht $p_{s-1} + p_s$ zu
 - ▶ streiche die Endknoten
 - ▶ Codelänge reduziert sich um $p_{s-1} + p_s$
- ▶ Fortsetzung führt dazu, dass Baum C sich auf Baum mit durchschnittlicher Länge 1 reduziert, und D auf Länge < 1 . Dies ist aber nicht möglich.

Codierung nach Huffman: Symbole mit $p \geq 0.5$

Was passiert, wenn ein Symbol eine Häufigkeit $p_0 \geq 0.5$ aufweist?

- ▶ die Huffman-Codierung müsste weniger als ein Bit zuordnen, dies ist jedoch nicht möglich
- ⇒ Huffman- (und Fano-) Codierung ist in diesem Fall ineffizient
- ▶ Beispiel: Codierung eines Bildes mit einheitlicher Hintergrundfarbe
- ▶ andere Ideen notwendig
 - ▶ Lauflängenkodierung (Fax, GIF, PNG)
 - ▶ Cosinustransformation (JPEG), usw.

Dynamic Huffman Coding

was tun, wenn

- ▶ die Symbolhäufigkeiten nicht vorab bekannt sind?
- ▶ die Symbolhäufigkeiten sich ändern können?

Dynamic Huffman Coding (Knuth 1985)

- ▶ Encoder protokolliert die (bisherigen) Symbolhäufigkeiten
- ▶ Codebaum wird dynamisch aufgebaut und ggf. umgebaut
- ▶ Decoder arbeitet entsprechend:
Codebaum wird mit jedem dekodierten Zeichen angepasst
- ▶ Symbolhäufigkeiten werden nicht explizit übertragen

Kraft-Ungleichung

- ▶ Leon G. Kraft, 1949

<http://de.wikipedia.org/wiki/Kraft-Ungleichung>

- ▶ Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz eines eindeutig decodierbaren s -elementigen Codes C mit Codelängen $l_1 \leq l_2 \leq l_3 \leq \dots \leq l_s$ über einem q -nären Zeichenvorrat F ist:

$$\sum_{i=1}^s \frac{1}{q^{l_i}} \leq 1$$

- ▶ Beispiel

$\{1, 00, 01, 11\}$ ist nicht eindeutig decodierbar,
denn $\frac{1}{2} + 3 \cdot \frac{1}{4} = 1.25 > 1$

Kraft-Ungleichung: Beispiel

- ▶ Sei $F = \{0, 1, 2\}$ (ternäres Alphabet)
 - ▶ Seien die geforderten Längen der Codewörter: 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 3
 - ▶ Einsetzen in die Ungleichung: $\frac{1}{3} + 5 \cdot \frac{1}{3^2} + 3 \cdot \frac{1}{3^3} = 1$
 - ⇒ Also existiert ein passender Präfixcode.
 - ▶ Konstruktion entsprechend des Beweises
- 0 10 11 12 20 21 220 221 222

Kraft-Ungleichung: Beweis

Sei $l_s = m$ und seien u_i die Zahl der Codewörter der Länge i

► Wir schreiben

$$\sum_{i=1}^s \frac{1}{q^{l_i}} = \sum_{j=1}^m \frac{u_j}{q^j} = \frac{1}{q^m} \sum_{j=1}^m u_j \cdot q^{m-j} \leq 1$$

$$u_m + \sum_{j=1}^m u_j \cdot q^{m_j} \leq q^m \quad (*)$$

- Jedes Codewort der Länge i „verbraucht“ q^{m-i} Wörter aus F^m
- Summe auf der linken Seite von $(*)$ ist die Zahl der durch den Code C benutzten Wörter von F^m

⇒ Wenn C die Präfix-Bedingung erfüllt, gilt $(*)$

Informationstheorie

- ▶ Informationsbegriff
- ▶ Maß für die Information?
- ▶ Entropie
- ▶ Kanalkapazität



Informationsbegriff

- ▶ n mögliche sich gegenseitig ausschliessende Ereignisse A_i
- ▶ die zufällig nacheinander mit Wahrscheinlichkeiten p_i eintreten
- ▶ stochastisches Modell $W\{A_i\} = p_i$

- ▶ angewendet auf Informationsübertragung:
das Symbol a_i wird mit Wahrscheinlichkeit p_i empfangen

- ▶ Beispiel
 - ▶ $p_i = 1$ und $p_j = 0 \quad \forall j \neq i$
 - ▶ dann wird mit Sicherheit das Symbol A_i empfangen
 - ▶ der Empfang bringt keinen Informationsgewinn

- ⇒ Informationsgewinn („Überraschung“) wird größer, je kleiner p_i

Geeignetes Maß für die Information?

- ▶ Wir erhalten die Nachricht A mit der Wahrscheinlichkeit p_A und anschließend die unabhängige Nachricht B mit der Wahrscheinlichkeit p_B
- ▶ Wegen der Unabhängigkeit ist die Wahrscheinlichkeit beider Ereignisse gegeben durch das Produkt $p_A \cdot p_B$.
- ▶ Informationsgewinn („Überraschung“) größer, je kleiner p_i
- ▶ Wahl von $1/p$ als Maß für den Informationsgewinn?
- ▶ möglich, aber der Gesamtinformationsgehalt zweier (mehrerer) Ereignisse wäre das Produkt der einzelnen Informationsgehalte
- ▶ additive Größe wäre besser \Rightarrow Logarithmus von $1/p$ bilden

Erinnerung: Logarithmus

- ▶ Umkehrfunktion zur Exponentialfunktion
- ▶ formal: für gegebenes a und b ist der Logarithmus die Lösung der Gleichung $a = b^x$
- ▶ falls die Lösung existiert, gilt: $x = \log_b(a)$

- ▶ Beispiel $3 = \log_2(8)$, denn $2^3 = 8$

- ▶ Rechenregeln
 - ▶ $\log(x \cdot y) = \log(x) + \log(y)$
 - ▶ $b^{\log_b(x)} = x$ und $\log_b(b^x) = x$
 - ▶ $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$
 - ▶ $\log_2(x) = \log(x) / \log(2) = \log(x) / 0,69314718$

Erinnerung: Binärer Logarithmus

► $\log_2(x) = 0.b_1b_2b_3\dots = \sum_{k>0} b_k 2^{-k} \quad \text{mit } b_k \in \{0,1\}$
 $\log_2(x^2) = b_1.b_2b_3\dots \quad \text{wegen } \log(x^2) = 2 \log(x)$

► Berechnung

Input: $1 < x < 2$ (ggf. vorher skalieren)

Output: Nachkommastellen b_i der Binärdarstellung von $\log_2(x)$

```
i = 0
LOOP
  i = i+1
  x = x*x
  IF (x >= 2)
    THEN   x = x/2
           bi = 1
    ELSE   bi = 0
  END IF
END LOOP
```

Definition: Informationsgehalt

Informationsgehalt eines Ereignisses A_i mit Wahrscheinlichkeit p_i ?

- ▶ als meßbare und daher additive Größe
- ▶ durch Logarithmierung (Basis 2) der Wahrscheinlichkeit:

$$I(A_i) = \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right) = -\log_2(p_i)$$

- ▶ **Informationsgehalt** I (oder Information) von A_i
- ▶ auch **Entscheidungsgehalt** genannt
- ▶ Beispiel: zwei Nachrichten A und B

$$I(A) + I(B) = \log_2\left(\frac{1}{p_A \cdot p_B}\right) = \log_2\frac{1}{p_A} + \log_2\frac{1}{p_B}$$

Informationsgehalt: Einheit Bit

$$I(A_i) = \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right) = -\log_2(p_i)$$

- ▶ Wert von I ist eine reelle Größe
- ▶ gemessen in der Einheit **1 Bit**

- ▶ Beispiel: nur zwei mögliche Symbole 0 und 1 mit gleichen Wahrscheinlichkeiten $p_0 = p_1 = \frac{1}{2}$

Der Informationsgehalt des Empfangs einer 0 oder 1 ist dann

$$I(0) = I(1) = \log_2(1/\frac{1}{2}) = 1 \text{ Bit}$$

- ▶ Achtung: die Einheit Bit nicht verwechseln mit Binärstellen oder den Symbolen 0 und 1

Ungewissheit, Überraschung, Information

Vor dem Empfang einer Nachricht gibt es **Ungewissheit** über das Kommende

Beim Empfang gibt es die **Überraschung**

Und danach hat man den Gewinn an **Information**

- ▶ Alle drei Begriffe in der oben definierten Einheit **Bit** messen
- ▶ Diese Quantifizierung der **Information** ist zugeschnitten auf die Nachrichtentechnik
- ▶ umfasst nur einen Aspekt des umgangssprachlichen Begriffs **Information**

Informationsgehalt: Beispiele

Meteorit

- ▶ die Wahrscheinlichkeit, an einem Tag von einem Meteor getroffen zu werden, sei $p_M = 10^{-16}$
- ▶ Kein Grund zur Sorge, weil die Ungewissheit von $I = \log_2(1/(1 - p_M)) \approx 3,2 \cdot 10^{-16}$ sehr klein ist
Ebenso klein ist die Überraschung, wenn das Unglück nicht passiert \Rightarrow Informationsgehalt der Nachricht „Ich wurde nicht vom Meteor erschlagen“ ist sehr klein
- ▶ Umgekehrt wäre die Überraschung groß: $\log_2(1/p_M) = 53,15$

Informationsgehalt: Beispiele (cont.)

Würfeln

- ▶ bei vielen Spielen hat die 6 eine besondere Bedeutung
- ▶ hier betrachten wir aber zunächst nur die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen, nicht deren Semantik
- ▶ die Wahrscheinlichkeit, eine 6 zu würfeln, ist $1/6$
- ▶ $I(6) = \log_2\left(\frac{1}{6}\right) = 2,585$

Informationsgehalt: Beispiele (cont.)

Information eines Buchs

- ▶ Gegeben seien zwei Bücher
 1. deutscher Text
 2. mit Zufallsgenerator mit Gleichverteilung aus Alphabet mit 80-Zeichen erzeugt
 - ▶ Informationsgehalt in beiden Fällen?
 1. Im deutschen Text abhängig vom Kontext!
Beispiel: Empfangen wir als deutschen Text „Der Begrif“, so ist „f“ als nächstes Symbol sehr wahrscheinlich
 2. beim Zufallstext liefert jedes neue Symbol die zusätzliche Information $I = \log_2(1/(1/80))$
- ⇒ der Zufallstext enthält die größtmögliche Information

Informationsgehalt: Beispiele (cont.)

Einzelner Buchstabe

- ▶ die Wahrscheinlichkeit, in einem Text an einer gegebenen Stelle das Zeichen „A“ anzutreffen sei $W\{A\} = p = 0,01$
- ▶ Informationsgehalt $I(A) = \log_2(1/0,01) = 6,6439$
- ▶ wenn der Text in ISO-8859-1 codiert vorliegt, werden 8 Binärstellen zur Repräsentation des „A“ benutzt
- ▶ der Informationsgehalt ist jedoch geringer

Bit : als Maß für den Informationsgehalt

bit : Anzahl der Binärstellen 0 und 1

Entropie

Obige Definition der Information lässt sich nur jeweils auf den Empfang eines speziellen Zeichens anwenden

- ▶ Was ist die **durchschnittliche Information** bei Empfang eines Symbols?
- ▶ diesen Erwartungswert bezeichnet man als **Entropie** des Systems
- ▶ Wahrscheinlichkeiten aller möglichen Ereignisse A_i seien $W\{A_i\} = p_i$
- ▶ da jeweils eines der möglichen Symbole eintrifft, gilt $\sum_i p_i = 1$

Entropie (cont.)

- ▶ dann berechnet sich die Entropie H als Erwartungswert

$$\begin{aligned}
 H &= E\{I(A_i)\} \\
 &= \sum_i p_i \cdot I(A_i) \\
 &= \sum_i p_i \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right) \\
 &= - \sum_i p_i \log_2(p_i)
 \end{aligned}$$

- ▶ als Funktion der Symbol-Wahrscheinlichkeiten nur abhängig vom stochastischen Modell

Entropie: Beispiele

1. drei mögliche Ereignisse mit Wahrscheinlichkeiten $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{6}\}$

- ▶ dann berechnet sich die Entropie zu

$$H = -(\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\log_2\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\log_2\frac{1}{6}) = 1,4591$$

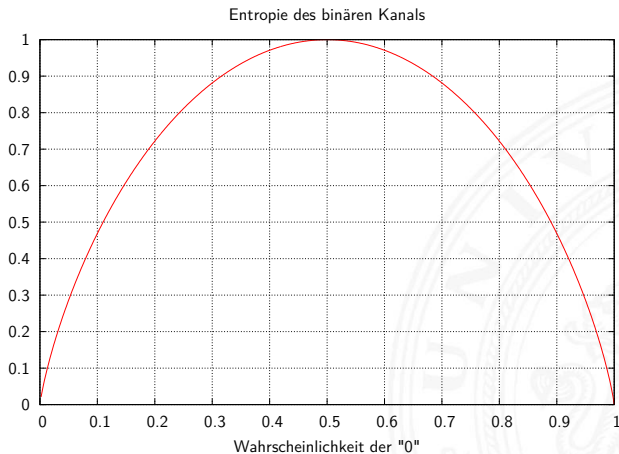
2. Empfang einer Binärstelle mit den Wahrscheinlichkeiten $p_0 = q$ und $p_1 = (1 - q)$.

- ▶ für $q = \frac{1}{2}$ erhält man

$$H = -(\frac{1}{2}\log_2\frac{1}{2} + (1 - \frac{1}{2})\log_2(1 - \frac{1}{2})) = 1.0$$

- ▶ mittlerer Informationsgehalt beim Empfang einer Binärstelle mit gleicher Wahrscheinlichkeit für beide Symbole ist genau 1 Bit

Entropie: Diagramm



Entropie bei Empfang einer Binärstelle mit den Wahrscheinlichkeiten $p_0 = q$ und $p_1 = (1 - q)$

Entropie: Gleichverteilte Symbole

- ▶ mittlerer Informationsgehalt einer Binärstelle nur dann 1 Bit, wenn beide möglichen Symbole gleich wahrscheinlich
- ▶ entsprechendes gilt auch für größere Symbolmengen
- ▶ Beispiel: 256 Symbole (8-bit Bytes), gleich wahrscheinlich

$$H = \sum_i p_i \log_2(1/p_i) = 256 \cdot (1/256) \cdot \log_2(1/(1/256)) = 8 \text{ Bit}$$
- ▶ **Redundanz**: die Differenz zwischen dem aufgrund der Symbole möglichen (z.B. Wortlängen) und dem tatsächlich genutzten Informationsinhalt

Entropie: einige Eigenschaften

1. $H(p_1, p_2, \dots, p_n)$ ist maximal, falls $p_i = 1/n$ ($1 \leq i \leq n$)
2. H ist symmetrisch, für jede Permutation π von $1, 2, \dots, n$ gilt:

$$H(p_1, p_2, \dots, p_n) = H(p_{\pi(1)}, p_{\pi(2)}, \dots, p_{\pi(n)})$$
3. $H(p_1, p_2, \dots, p_n) \geq 0$ mit $H(0, \dots, 0, 1, \dots, 0) = 0$
4. $H(p_1, p_2, \dots, p_n, 0) = H(p_1, p_2, \dots, p_n)$
5. $H(1/n, 1/n, \dots, 1/n) \leq H(1/(n+1), 1/(n+1), \dots, 1/(n+1))$
6. H ist stetig in seinen Argumenten
7. Additivität: seien $n, m \in \mathbb{N}^+$

$$H\left(\frac{1}{n \cdot m}, \frac{1}{n \cdot m}, \dots, \frac{1}{n \cdot m}\right) = H\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right) + H\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m}\right)$$

Redundanz

- ▶ **Redundanz** (engl. *code redundancy*): die Differenz zwischen dem aufgrund der Symbole möglichen (z.B. Wortlängen) und dem tatsächlich genutzten Informationsinhalt $R = H_0 - H$
- ▶ relative Redundanz: $r = \frac{H_0 - H}{H_0}$
- ▶ binäre Blockcodes mit Wortlänge N bits: $H_0 = N$
gegebener Code mit m Wörtern a_i und $p(a_i)$:

$$\begin{aligned} R &= H_0 - H = H_0 - \left(- \sum_{i=1}^m p(a_i) \log_2 p(a_i) \right) \\ &= N + \sum_{i=1}^m p(a_i) \log_2 p(a_i) \end{aligned}$$

Kanalkapazität

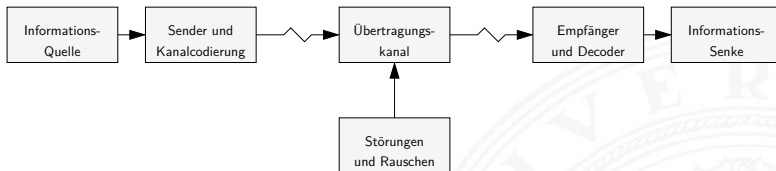
Informationstheorie ursprünglich entwickelt zur:

- ▶ formalen Behandlung der Übertragung von Information
- ▶ über reale nicht fehlerfreie Kanäle
- ▶ deren Verhalten als stochastisches Modell formuliert werden kann
- ▶ zentrales Resultat ist die **Kanalkapazität C** des **binären symmetrischen Kanals**
- ▶ der maximal pro Binärstelle übertragbare Informationsgehalt

$$C = 1 - H(F)$$

mit $H(F)$ der Entropie des Fehlerverhaltens

Erinnerung: Modell der Informationsübertragung



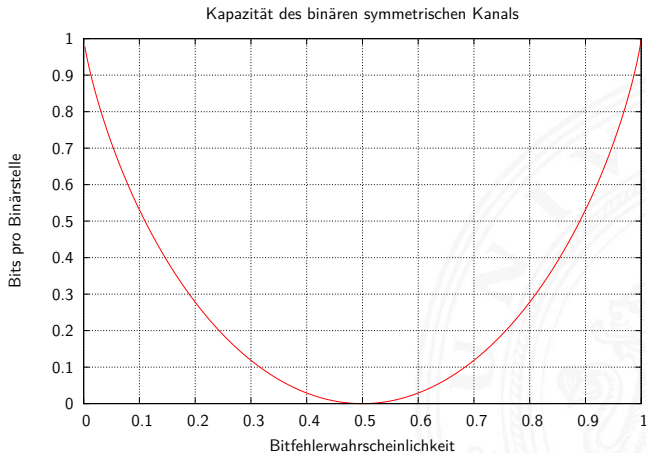
- ▶ Informationsquelle
- ▶ Sender mit möglichst effizienter Kanalcodierung
- ▶ gestörter und verrauschter Übertragungskanal
- ▶ Empfänger mit Decodierer und Fehlererkennung/-korrektur
- ▶ Informationssenke und -verarbeitung

Binärer symmetrischer Kanal

- ▶ Wahrscheinlichkeit der beiden Symbole 0 und 1 ist gleich $\left(\frac{1}{2}\right)$
- ▶ Wahrscheinlichkeit P , dass bei Übertragungsfehlern aus einer 0 eine 1 wird = Wahrscheinlichkeit, dass aus einer 1 eine 0 wird
- ▶ Wahrscheinlichkeit eines Fehlers an Binärstelle i ist unabhängig vom Auftreten eines Fehlers an anderen Stellen
- ▶ Entropie des Fehlerverhaltens

$$H(F) = P \cdot \log_2(1/P) + (1 - P) \cdot \log_2(1/(1 - P))$$
- ▶ Kanalkapazität ist $C = 1 - H(F)$

Kanalkapazität: Diagramm



Kanalkapazität: Konsequenzen

- ▶ bei $P = 0.5$ ist die Kanalkapazität $C = 0$
- ⇒ der Empfänger kann die empfangenen Daten nicht von einer zufälligen Sequenz unterscheiden
- ▶ bei $P > 0.5$ steigt die Kapazität wieder an
(rein akademischer Fall: Invertieren aller Bits)

Die Kanalkapazität ist eine obere Schranke

- ▶ wird in der Praxis nicht erreicht (Fehler)
- ▶ Theorie liefert keine Hinweise, wie die fehlerfreie Übertragung praktisch durchgeführt werden kann

Shannon-Theorem

C. E. Shannon: *Communication in the Presence of Noise*; Proc. IRE, Vol.37, No.1, 1949

Gegeben:

binärer symmetrischer Kanal mit Störwahrscheinlichkeit P
und Kapazität $C(P)$

Shannon-Theorem

Falls die Übertragungsrate R kleiner als $C(P)$ ist,
findet man zu jedem $\epsilon > 0$ einen Code \mathcal{C}
mit Übertragungsrate $R(\mathcal{C})$ und $C(P) \geq R(\mathcal{C}) \geq R$ und
Fehlerdekodierwahrscheinlichkeit $< \epsilon$

Shannon-Theorem (cont.)

C. E. Shannon: *Communication in the Presence of Noise*; Proc. IRE, Vol.37, No.1, 1949

- ▶ leider liefert die Theorie keine Ideen zur Realisierung
- ▶ die Nachrichten müssen sehr lang sein
- ▶ der Code muss im Mittel sehr viele Fehler in jeder Nachricht korrigieren
- ▶ mittlerweile sehr nah am Limit: Turbo-Codes, LDPC Codes, usw.

Fehlererkennende / -korrigierende Codes

Motivation

- ▶ Informationstheorie
- ▶ Kanalkapazität
- ▶ Shannon-Theorem

- ▶ zuverlässige Datenübertragung ist möglich
- ▶ aber (bisher) keine Ideen für die Realisierung

- ⇒ fehlererkennende Codes
- ⇒ fehlerkorrigierende Codes

Fehlertypen

diverse mögliche Fehler bei der Datenübertragung

- ▶ Verwechslung eines Zeichens
- ▶ Vertauschen benachbarter Zeichen
- ▶ Vertauschen entfernter Zeichen
- ▶ Zwillings-/Bündelfehler
- ▶ usw.

$$a \rightarrow b$$

$$ab \rightarrow ba$$

$$abc \rightarrow cba$$

$$aa \rightarrow bb$$

- ▶ abhängig von der Technologie / der Art der Übertragung
 - ▶ Bündelfehler durch Kratzer auf einer CD
 - ▶ Bündelfehler bei Funk durch längere Störimpulse
 - ▶ Buchstabendreher beim „Eintippen“ eines Textes

Begriffe zur Fehlerbehandlung

- ▶ **Block-Code:** k -Informationsbits werden in n -Bits codiert
- ▶ **Faltungscodes:** ein Bitstrom wird in einen Codebitstrom höherer Bitrate codiert
- ▶ **linearer (n, k) -Code:** ein k -dimensionaler Unterraum des $GF(2)^n$
- ▶ **modifizierter Code:** eine oder mehrere Stellen eines linearen Codes werden systematisch verändert (d.h. im $GF(2)$ invertiert)
Null- und Einsvektor gehören nicht mehr zum Code
- ▶ **nichtlinearer Code:** weder linear noch modifiziert

Einschub: $GF(2)$, $GF(2)^n$

Boole'sche Algebra:

- ▶ basiert auf: UND, ODER, Negation
- ▶ UND \approx Multiplikation
ODER \approx Addition
- ▶ aber: kein inverses Element für die ODER-Operation
 \Rightarrow kein Körper

Galois-Field mit zwei Elementen: $GF(2)$

- ▶ Körper, zwei Verknüpfungen: UND und XOR
- ▶ UND als Multiplikation
XOR als Addition *mod* 2
- ▶ additives Inverses existiert: $x \oplus x = 0$

Begriffe zur Fehlerbehandlung (cont.)

- ▶ **systematischer Code:** wenn die zu codierende Information direkt (als Substring) im Codewort enthalten ist
- ▶ **zyklischer Code**
 - ▶ ein Block-Code (identische Wortlänge aller Codewörter)
 - ▶ zu jedem Codewort gehören auch sämtliche zyklischen Verschiebungen (Rotationen, z.b. rotate-left) des Wortes auch zum Code
 - ▶ bei serieller Übertragung erlaubt dies die Erkennung/Korrektur von Bündelfehlern

ARQ und FEC

- ▶ **Automatic Repeat Request (ARQ):** der Empfänger erkennt ein fehlerhaftes Symbol und fordert dies vom Sender erneut an
 - ▶ bidirektionale Kommunikation erforderlich
 - ▶ unpraktisch bei großer Entfernung / Echtzeitanforderungen

- ▶ **Vorwärtsfehlerkorrektur** (*Forward Error Correction, FEC*): die übertragene Information wird durch zusätzliche Redundanz (z.B. Prüfziffern) gesichert
 - ▶ der Empfänger erkennt fehlerhafte Codewörter und kann diese selbständig korrigieren

- ▶ je nach Einsatzzweck sind beide Verfahren üblich
- ▶ auch kombiniert

Hamming-Abstand

- ▶ **Hamming-Abstand:** die Anzahl der Stellen, an denen sich zwei Binärcodewörter der Länge w unterscheiden
- ▶ **Hamming-Gewicht:** Hamming-Abstand eines Codewortes vom Null-Wort

▶ Beispiel $a = 0110\ 0011$
 $b = 1010\ 0111$

⇒ Hamming-Abstand von a und b ist 3
 Hamming-Gewicht von b ist 5

▶ Java: `Integer.bitcount(a ^ b)`

Fehlererkennende und -korrigierende Codes

- ▶ Zur *Fehlererkennung* und *Fehlerkorrektur* ist eine Codierung mit Redundanz erforderlich
- ▶ Repräsentation enthält mehr Bits, als zur reinen Speicherung nötig wären
- ▶ Codewörter so wählen, dass sie paarweise mindestens den Hamming-Abstand d haben
- ▶ dieser Abstand heißt dann **Minimalabstand** d
- ▶ Fehlererkennung bis zu $(d - 1)$ fehlerhaften Stellen
- ▶ Fehlerkorrektur bis zu $((d - 1)/2)$ fehlerhaften Stellen

Prüfinformation

Man fügt den Daten **Prüfinformation** hinzu, oft **Prüfsumme** genannt

- ▶ zur Fehlerkennung
- ▶ zur Fehlerkorrektur
- ▶ zur Korrektur einfacher Fehler, Entdeckung schwerer Fehler

verschiedene Verfahren

- ▶ Prüfziffer, Parität
- ▶ Summenbildung
- ▶ CRC-Verfahren (*cyclic-redundancy check*)
- ▶ BCH-Codes (Bose, Ray-Chauduri, Hocquengham)
- ▶ RS-Codes (Reed-Solomon)

Paritätscode

- ▶ das Anfügen eines **Paritätsbits** an ein Binärcodewort $z = (z_1, \dots, z_n)$ ist die einfachste Methode zur Erkennung von Einbitfehlern
- ▶ die Parität wird berechnet als

$$p = \left(\sum_{i=1}^n z_i \right) \bmod 2$$

- ▶ **gerade Parität** (*even parity*): $y_{\text{even}} = (z_1, \dots, z_n, p)$
 $p(y_{\text{even}}) = (\sum_i y_i) \bmod 2 = 0$
- ▶ **ungerade Parität** (*odd parity*): $y_{\text{odd}} = (z_1, \dots, z_n, \bar{p})$
 $p(y_{\text{odd}}) = (\sum_i y_i) \bmod 2 = 1$

Paritätscode: Eigenschaften

- ▶ in der Praxis meistens Einsatz der ungeraden Parität:
pro Codewort y_{odd} mindestens je eine Null und Eins
- ▶ Hamming-Abstand zweier Codewörter im Paritätscode ist mindestens 2, weil sich bei Ändern eines Nutzbits jeweils auch die Parität ändert: $d = 2$
- ▶ Erkennung von Einbitfehlern möglich:
Berechnung der Parität im Empfänger und Vergleich mit der erwarteten Parität
- ▶ Erkennung von (ungeraden) Mehrbitfehlern

Zweidimensionale Parität

- ▶ Anordnung der Daten / Informations-Bits als Matrix
- ▶ Berechnung der Parität für alle Zeilen und Spalten
- ▶ optional auch für Zeile/Spalte der Paritäten

- ▶ entdeckt 1-bit Fehler in allen Zeilen und Spalten
- ▶ erlaubt Korrektur von allen 1-bit und vielen n-bit Fehlern

- ▶ natürlich auch weitere Dimensionen möglich
 n -dimensionale Anordnung und Berechnung von n Paritätsbits

Zweidimensionale Parität: Beispiel

H	100 1000	0	Fehlerfall	100 1000	0
A	100 0001	0		100 0101	0
M	100 1101	0		110 1101	0
M	100 1101	0		100 1101	0
I	100 1001	1		000 1001	1
N	100 1110	0		100 1110	0
G	100 0111	0		100 0111	0
I	100 1001	1		100 1000	1

- ▶ 64-Bits pro Symbol, davon 49 für Nutzdaten und 15 für Parität
- ▶ links: Beispiel für ein Codewort und Paritätsbits
- ▶ rechts: empfangenes Codewort mit vier Einzelfehlern, davon ein Fehler in den Paritätsbits

Zweidimensionale Parität: Einzelfehler

H	100 1000	0
A	100 0001	0
M	100 1101	0
M	100 1101	0
I	100 1001	1
N	100 1110	0
G	100 0111	0
I	100 1001	1

Fehlerfall	100 1000	0
	100 0101	0 1
	100 1101	0
	100 1101	0
	100 1001	1
	100 1110	0
	100 0111	0
	100 1001	1

1

- ▶ Empfänger: berechnet Parität und vergleicht mit gesendeter P.
- ▶ Einzelfehler: Abweichung in je einer Zeile und Spalte
- ⇒ Fehler kann daher zugeordnet und korrigiert werden
- ▶ Mehrfachfehler: nicht alle, aber viele erkennbar (korrigierbar)

Zweidimensionale Parität: Dezimalsystem

- Parität als Zeilen/Spaltensumme mod 10 hinzufügen

- Daten

3	7	4
5	4	8
1	3	5

- Parität

3	7	4	4
5	4	8	7
1	3	5	9
<hr/>			
9	4	7	

- Fehlerfall

3	7	4	4
5	4	3	2
1	3	5	9
<hr/>			
9	4	2	

International Standard Book Number

ISBN-10 (1970), ISBN-13

- ▶ an EAN (*European Article Number*) gekoppelt
- ▶ Codierung eines Buches als Tupel
- 1. Präfix (nur ISBN-13)
- 2. Gruppennummer für den Sprachraum als Fano-Code:
0 – 7, 80 – 94, 950 – 995, 9960 – 9989, 99900 – 99999
 - ▶ 0, 1: englisch – AUS, UK, USA...
 - ▶ 2: französisch – F...
 - ▶ 3: deutsch – A, DE, CH
 - ▶ ...
- 3. Verlag, Nummer als Fano-Code:
00 – 19 (1 Mio Titel), 20 – 699 (100 000 Titel) usw.
- 4. verlagsinterne Nummer
- 5. Prüfziffer

Prüfverfahren für ISBN-10

- ▶ ISBN-10 Zahl: z_1, z_2, \dots, z_{10}
- ▶ Prüfsumme berechnen, Symbol X steht für Ziffer 10

$$\sum_{i=1}^9 (i \cdot z_i) \mod 11 = z_{10}$$

- ▶ ISBN-Zahl zulässig, genau dann wenn

$$\sum_{i=1}^{10} (i \cdot z_i) \mod 11 = 0$$

- ▶ Beispiel: 0-13-713336-7

$$1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 4 \cdot 7 + 5 \cdot 1 + 6 \cdot 3 + 7 \cdot 3 + 8 \cdot 3 + 9 \cdot 6 = 161$$

$$161 \mod 11 = 7$$

$$161 + 10 \cdot 7 = 231$$

$$231 \mod 11 = 0$$

Prüfverfahren für ISBN: Fehlertypen

- ▶ Prüfziffer schützt gegen Verfälschung einer Ziffer
- ▶ —" Vertauschung zweier Ziffern
- ▶ —" „Falschdopplung“ einer Ziffer

- ▶ Beispiel: vertausche i -te und j -te Ziffer (mit $i \neq j$)
 Prüfsumme: $\langle \text{korrekt} \rangle - \langle \text{falsch} \rangle$

$$= i \cdot z_i + j \cdot z_j - j \cdot z_i - i \cdot z_j = (i - j) \cdot (z_i - z_k) \quad \text{mit } z_i \neq z_j.$$

(3,1)-Wiederholungscode

- ▶ dreifache Wiederholung jedes Datenworts
- ▶ Generatormatrix ist

$$G = (111)$$

- ▶ Codewörter ergeben sich als Multiplikation von G mit dem Informationsvektor u (jeweils ein Bit)

$$u = 0 : x = (111) \cdot (0) = (000)$$

$$u = 1 : x = (111) \cdot (1) = (111)$$

- ▶ Verallgemeinerung als (n, k) -Wiederholungscode
- ▶ systematischer Code mit Minimalabstand $D = n$
- ▶ Dekodierung durch Mehrheitsentscheid: 1-bit Fehlerkorrektur
- Nachteil: geringe Datenrate

Hamming-Code

- ▶ Hamming-Abstand 3
- ▶ korrigiert 1-bit Fehler, erkennt (viele) 2-bit und 3-bit Fehler

Verfahren: Datenwort n -bit (d_1, d_2, \dots, d_n)

1. bestimme kleinstes k mit $n \leq 2^k - k - 1$
2. Prüfbits an Bitpositionen: $2^0, 2^1, \dots, 2^{k-1}$
3. Originalbits an den übrigen Positionen
4. berechne Prüfbit i als mod 2-Summe der Bits deren Positionsnummer ein gesetztes i -bit enthält
5. dabei werden auch die Prüfbits berücksichtigt

(7,4)-Hamming-Code

- ▶ sieben Codebits für je vier Datenbits
- ▶ linearer (7,4)-Block-Code
- ▶ Generatormatrix ist

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- ▶ Codewort $c = G \cdot d$

(7,4)-Hamming-Code (cont.)

- ▶ Prüfmatrix H orthogonal zu gültigen Codewörtern: $H \cdot c = 0$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

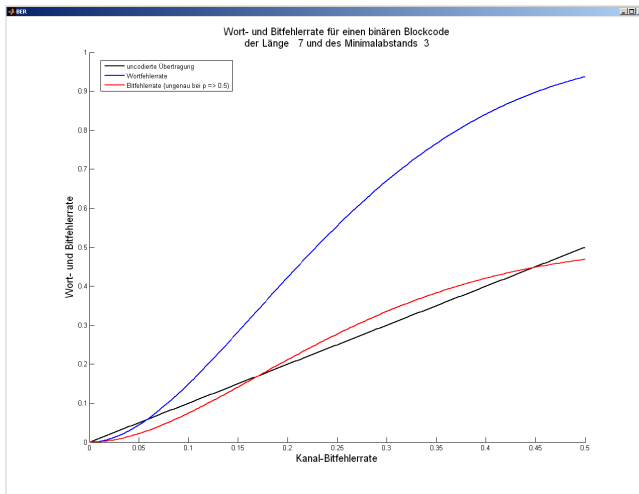
für ungültige Codewörter $H \cdot c \neq 0$

⇒ „Fehlersyndrom“ liefert Information über Fehlerposition / -art

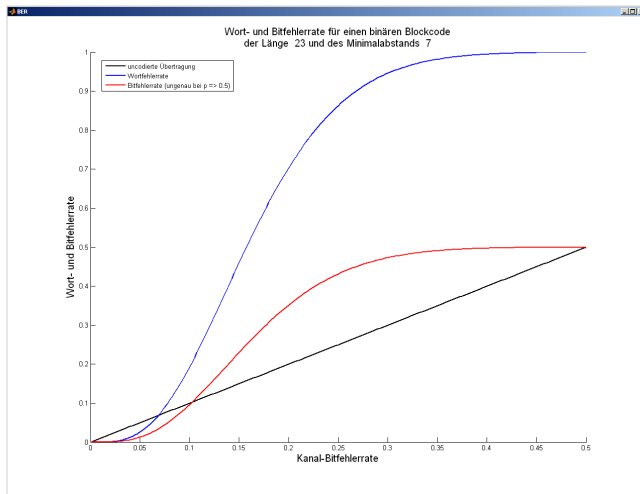
Fazit

- ▶ Hamming-Codes für diverse Wortlängen konstruierbar
- + einfaches Prinzip, einfach dekodierbar
- es existieren weit bessere Codes

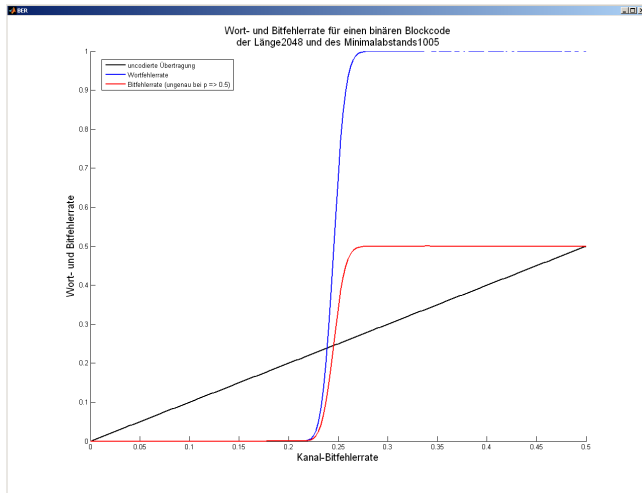
(7,4)-Hamming-Code: Fehlerrate



(23,7)-Hamming-Code: Fehlerrate



(2048,1005)-Zufalls-Code: Fehlerrate



Binärpolynome

- ▶ jedem n -bit Wort (d_1, d_2, \dots, d_n) lässt sich ein Polynom über dem Körper $\{0, 1\}$ zuordnen
- ▶ Beispiel, mehrere mögliche Zuordnungen

$$\begin{aligned}
 100\,1101 &= 1 \cdot x^6 + 0 \cdot x^5 + 0 \cdot x^4 + 1 \cdot x^3 + 1 \cdot x^2 + 1 \cdot x^1 + 1 \cdot x^0 \\
 &= x^6 + x^3 + x^2 + x^0 \\
 &= x^0 + x^3 + x^4 + x^6 \\
 &= x^0 + x^{-3} + x^{-4} + x^{-6} \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

- ▶ mit diesen Polynomen kann „gerechnet“ werden: Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division
- ▶ Theorie: Galois-Felder

Zyklische Codes (CRC)

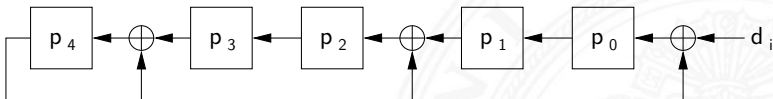
CRC (*Cyclic Redundancy Check*)

- ▶ Polynomdivision als Basis für CRC-Codes erzeugt Prüfbits
- ▶ zyklisch: Codewörter werden durch Schieben und Modifikation (mod 2 Summe) ineinander überführt
- ▶ Familie von Codes zur Fehlererkennung insbesondere auch zur Erkennung von Bündelfehlern
- ▶ in sehr vielen Codes benutzt
 - ▶ Polynom $0x04C11DB7$ (CRC-32) in Ethernet, ZIP, PNG ...
 - ▶ weitere CRC-Codes in USB, ISDN, GSM, openPGP ...

Zyklische Codes (CRC) (cont.)

Sehr effiziente Software- oder Hardwarerealisierung

- ▶ rückgekoppelte Schieberegister und XOR
LFSR (*Linear Feedback Shift Register*)
- ▶ Beispiel $x^5 + x^4 + x^2 + 1$



- ▶ Datenwort d_i wird bitweise in CRC-Check geschoben, Divisionsrest bildet Registerinhalt p_i
- ▶ Prüfbits p_i an Datenwort anhängen
Test bei Empfänger: fehlerfrei, wenn $= 0$

Zyklische Codes (CRC) (cont.)

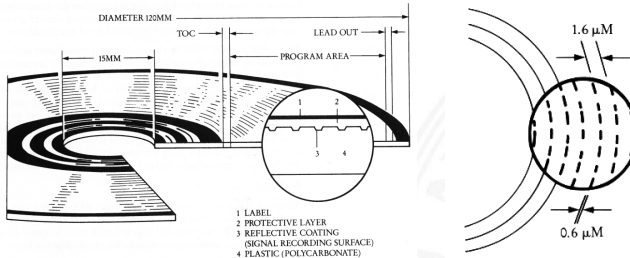
Je nach Polynom (# Prüfbits) unterschiedliche Güte

- ▶ Galois-Felder als mathematische Grundlage
- ▶ en.wikipedia.org/wiki/Cyclic_redundancy_check
en.wikipedia.org/wiki/Computation_of_CRC
de.wikipedia.org/wiki/Zyklische_Redundanzprüfung
de.wikipedia.org/wiki/LFSR

Compact Disc

Audio-CD und CD-ROM

- Polycarbonatscheibe, spiralförmige geprägte Datenspur



- spiralförmige Spur, ca. 16000 Windungen, Start innen
- geprägte Vertiefungen *pits*, dazwischen *lands*
- Wechsel pit/land oder land/pit codiert 1, dazwischen 0

Compact Disc (cont.)

Audio-CD und CD-ROM

- ▶ Auslesen durch Intensität von reflektiertem Laserstrahl
- ▶ 650 MiB Kapazität, Datenrate $\approx 150 \text{ KiB/sec}$ (1x speed)
- ▶ von Anfang an auf billigste Fertigung ausgelegt
- ▶ mehrstufige Fehlerkorrekturcodierung fest vorgesehen
- ▶ Kompensation von Fertigungsmängeln und -toleranzen
- ▶ Korrektur von Staub und Kratzern, etc.
- ▶ Audio-CD: Interpolation nicht korrigierbarer Fehler
- ▶ Daten-CD: geschachtelte weitere Codierung
- ▶ Bitfehlerrate $\leq 10^{11}$

Compact Disc: Mehrstufige Codierung

- ▶ Daten in *Frames* à 24 Bytes aufteilen
- ▶ 75 *Sektoren* mit je 98 Frames pro Sekunde
- ▶ Sektor enthält 2352 Bytes Nutzdaten (und 98 Bytes *Subcode*)

- ▶ pro Sektor 784 Byte Fehlerkorrektur hinzufügen
- ▶ Interleaving gegen Burst-Fehler (z.B. Kratzer)
- ▶ Code kann bis 7000 fehlende Bits korrigieren

- ▶ *eight-to-fourteen* Modulation: 8-Datenbits in 14 Codebits
2..10 Nullen zwischen zwei Einsen (pit/land Übergang)

- ▶ Daten-CD zusätzlich mit äußerem 2D *Reed-Solomon Code*
- ▶ pro Sektor 2048 Bytes Nutzdaten, 276 Bytes RS-Fehlerschutz

Farbbilder: JPEG

Joint Picture Experts Group Bildformat (1992)

- ▶ für die Speicherung von Fotos / Bildern
- ▶ verlustbehaftet

mehrere Codierungsschritte

- | | |
|---|-----------------|
| 1. Farbraumkonvertierung: RGB nach YUV | verlustbehaftet |
| 2. Aufteilung in Blöcke zu je 8x8 Pixeln | verlustfrei |
| 3. DCT (<i>discrete cosinus transformation</i>) | verlustfrei |
| 4. Quantisierung (einstellbar) | verlustbehaftet |
| 5. Huffman-Codierung | verlustfrei |

Video: MPEG

Motion Picture Experts Group: Sammelname der Organisation und diverser aufeinander aufbauender Standards

Codierungsschritte für Video

1. Einzelbilder wie JPEG (YUV, DCT, Huffman)
2. Differenzbildung mehrerer Bilder (Bewegungskompensation)
3. *Group of Pictures* (*I*-Frames, *P*-Frames, *B*-Frames)
4. Zusammenfassung von Audio, Video, Metadaten im sogenannten PES (*Packetized Elementary Stream*)
5. *Transport-Stream* Format für robuste Datenübertragung

Digitales Fernsehen: DVB

Digital Video Broadcast: Sammelname für die europäischen Standards für digitales Fernsehen

Codierungsschritte

1. Videocodierung nach MPEG-2 (geplant: MPEG-4)
2. Multiplexing mehrerer Programme nach MPEG-TS
3. optional: Metadaten (Electronic Program Guide)
4. vier Varianten für die eigentliche Kanalcodierung
 - ▶ DVB-S: Satellite
 - ▶ DVB-C: Cable
 - ▶ DVB-T: Terrestrial
 - ▶ DVB-H: Handheld/Mobile

Literatur: Vertiefung

- ▶ Richard W. Hamming, *Information und Codierung*, VCH, 1987
- ▶ Klaus von der Heide, *Vorlesung: Technische Informatik 1 — interaktives Skript*, Universität Hamburg, FB Informatik, 2005
tams.informatik.uni-hamburg.de/lectures/2004ws/vorlesung/t1
- ▶ Klaus von der Heide, *Vorlesung: Digitale Datenübertragung*, Universität Hamburg, FB Informatik, 2005
tams.informatik.uni-hamburg.de/lectures/2005ss/vorlesung/Digit
- ▶ William E. Ryan, Shu Lin, *Channel codes: classical and modern*, Cambridge University Press, 2009