Mathematik II für Studierende der Informatik (Analysis und Lineare Algebra)

Thomas Andreae, Henrik Bachmann, Rosona Eldred, Malte Moos

Sommersemester 2012
Blatt 11

A: Präsenzaufgaben am 28. Juni 2012

1. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x, y) = 3xy + 2x^2 - y^2 - x + 4y - 5.$$

Den Graphen von f stellen wir uns als ein Gebirge vor. Ein Wanderer befindet sich im Punkt P mit den Koordinaten $\big(1, 1, f(1, 1)\big)$.

a) Aufwärm-Frage: Auf welcher Höhe befindet sich der Wanderer? (1 Einheit = 1km)

b) Berechnen Sie die Steigung des Gebirges im Punkt P in Richtung der x-Achse und in Richtung der y-Achse.

c) In welcher Richtung steigt das Gebirge in P am steilsten an? Berechnen Sie die Stärke des Anstiegs in dieser Richtung.

2. a) Für $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_1 = 3 + 4i$ und $z_2 = -2 + 5i$: Stellen Sie $z_3 = z_1 \cdot z_2$ sowie $z_4 = \dfrac{z_1}{z_2}$ in der Form $a + ib$ dar.

b) Für z_1 und z_2 wie in a): Berechnen Sie Betrag und Argument von z_1 und z_2 und geben Sie sowohl z_1 als auch z_2 in Polarkoordinatendarstellung an.

c) Es sei $z = 5\Big(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\Big)$. Geben Sie z^2 und z^3 in Polarkoordinaten an.

d) Lösen Sie die folgenden quadratischen Gleichungen:

(i) $x^2 + 2x - 35 = 0$;

(ii) $x^2 + 2x + 10 = 0$;

(iii) $x^2 - 18x + 81 = 0$.

3. Beschreiben Sie die folgende Teilmenge der komplexen Ebene durch geometrische Begriffe (wie z.B. Kreis, Mittelpunkt, Radius, Gerade, ...):

$$M = \Big\{ z \in \mathbb{C} : |z - i| = |z| \Big\}.$$

B: Hausaufgaben zum 5. Juli 2012

1. a) Bestimmen Sie die stationären Stellen für die folgende Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und entscheiden Sie, ob lokale bzw. globale Minima oder Maxima vorliegen:

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + 4z^2 - 2yz - 2x - 6y + 8.$$

b) Stellen Sie sich vor, dass die Funktion f aus a) eine räumliche Temperaturverteilung beschreibt: Für jeden Punkt (x, y, z) gibt $f(x, y, z)$ die Temperatur zu einem festen Zeitpunkt an. Wir betrachten den Punkt $P = (1, 1, 1)$. In welcher Richtung steigt in P die Temperatur am stärksten an? Berechnen Sie auch die Größe des Anstiegs in dieser Richtung! Welche Richtung ist die des steilsten Abstiegs?

2. a) Die komplexen Matrizen A, B und C seien gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & -i \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} i & -i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Falls möglich, berechne man die Produkte AB, AC, BC und CB. (Falls ein oder mehrere Produkte nicht existieren, gebe man eine *kurze* Begründung, wieso dies so ist.)

b) Für $z = a + ib \in \mathbb{C}$ gelte $\overline{z} = \dfrac{3+4i}{2-3i}$. Bestimmen Sie a und b.

c) Die komplexen Zahlen $z_1, \ldots, z_4$ seien gegeben durch

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \qquad z_2 = -1 + i, \qquad z_3 = z_1 \cdot z_2 \quad \text{sowie} \quad z_4 = \overline{z_2}.$$

Geben Sie in einer Skizze die Lage von $z_1, \ldots, z_4$ in der Gaußschen Zahlenebene an.

d) Beschreiben Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Ebene durch geometrische Begriffe (wie z.B. Kreis, Mittelpunkt, Radius, Gerade, ...):

(i) $M_1 = \Big\{z \in \mathbb{C} : \big|z - (3+2i)\big| = 2\Big\}$;

(ii) $M_2 = \Big\{z \in \mathbb{C} : \big|z - i\big| = \big|1 - z\big|\Big\}$.

3. Eine zu Aufgabe 4 von Blatt 10 ähnliche Aufgabe, die diesmal jedoch mit der *Lagrange-Methode* gelöst werden soll: Ein Unternehmen produziert zwei Sorten eines Gutes. Beim Verkauf von x bzw. y Einheiten sei der Gewinn pro Tag gegeben durch

$$f(x,y) = -0.1x^2 - 0.2xy - 0.2y^2 + 47x + 48y - 600.$$

Ähnlich wie in Aufgabe 4 von Blatt 10 ist eine Nebenbedingung zu berücksichtigen, die in Form einer Gleichung vorliegt:

$$x + y = 200. \tag{$\star$}$$

Gesucht sind x und y, so dass der Gewinn $f(x,y)$ maximal wird.

a) Stellen Sie die dazugehörige Lagrange-Funktion $L(x,y,\lambda)$ auf und bestimmen Sie die einzige kritische Stelle (x,y) von f unter der Nebenbedingung $(\star)$.

b) Zeigen Sie mithilfe der geränderten Hesseschen Matrix, dass an der gefundenen Stelle ein lokales Maximum vorliegt.

4. Bestätigen Sie das in Aufgabe 3 gefundene Ergebnis, indem Sie die Aufgabe mit *Variablensubstitution* lösen.