Mathematik I für Studierende der Informatik (Diskrete Mathematik)

Thomas Andreae, Christoph Stephan

Wintersemester 2011/12
Blatt 8

A: Präsenzaufgaben am 8./9. Dezember 2011

1. G sei ein ungerichteter Graph mit 100 Knoten. Den Grad 3 haben 50 Knoten, 30 Knoten haben den Grad 4 und die restlichen 20 Knoten haben den Grad 6. Wie viele Kanten besitzt G?

2. Unter einem *Hyperwürfel* Q_n versteht man den folgenden Graphen: Knotenmenge von Q_n ist die Menge aller n-Tupel $(x_1, \dots, x_n)$ mit $x_i \in \{0, 1\}$ für $i = 1, \dots, n$. Zwei Knoten von Q_n sind genau dann durch eine Kante verbunden, wenn sich die entsprechenden n-Tupel an genau einer Stelle unterscheiden.

a) Man zeichne die Graphen Q_n für $n = 1, 2, 3, 4$.

b) Wie viele Knoten hat Q_n?

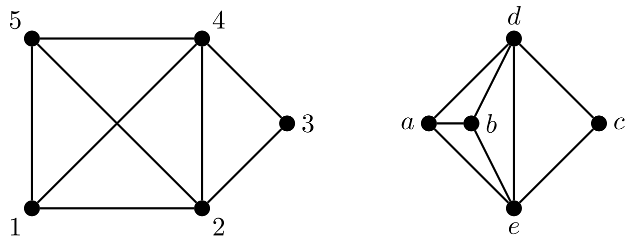
c) Wie viele Kanten hat Q_n?

Erläuterung: In b) und c) soll eine Formel für beliebiges n gegeben werden.

3. Es sei $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Wie viele verschiedene Graphen mit der Knotenmenge V gibt es?

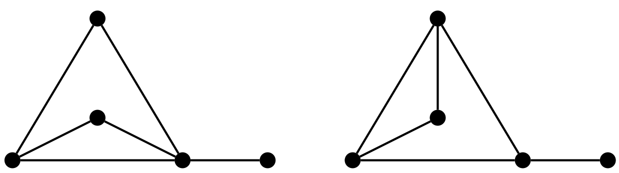
4. Zwei Graphen $G = (V, E)$ und $G' = (V', E')$ heißen *isomorph*, falls es eine bijektive Abbildung $f : V \to V'$ mit der folgenden Eigenschaft gibt: Für alle $u, v \in V$ ist $\{u, v\}$ genau dann in E enthalten, wenn $\{f(u), f(v)\}$ in E' enthalten ist.

a) Zeigen Sie, dass die folgenden Graphen isomorph sind. (Angabe von f genügt!)



G $\qquad$ G'

b) Sind die folgenden Graphen ebenfalls isomorph?



H $\qquad$ H'

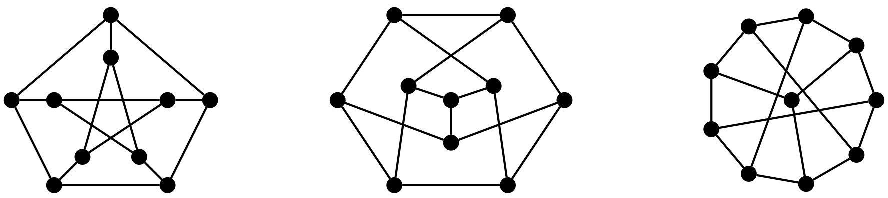
B: Hausaufgaben zum 15./16. Dezember 2011

1. a) Sind die folgenden Graphen isomorph?

G $\qquad$ G'

Falls ja, so gebe man einen Isomorphismus an; falls nein, so begründe man, weshalb es keinen Isomorphismus geben kann. (Zur Terminologie: Eine Abbildung f wie in Präsenzaufgabe 4 nennt man einen *Isomorphismus*.)

b) Welche der drei abgebildeten Graphen sind isomorph?



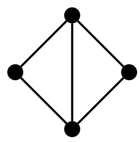
2. G sei ein vollständiger Graph mit genau 10 Knoten.

a) Wie viele Kanten hat G?

b) Wie viele verschiedene Kreise der Länge 3 enthält G?

c) Wie viele verschiedene Kreise der Länge 4 enthält G?

d) Wie viele verschiedene Teilgraphen, die isomorph zum abgebildeten Graphen H sind, enthält G?



H

Geben Sie in jedem Fall eine (möglichst kurze) Begründung!

3. Es sei $n \geq 4$ eine gerade Zahl. Der Graph H bestehe aus zwei Zusammenhangskomponenten H_1 und H_2, wobei H_1 ein Graph mit n Knoten ist, die alle den Grad 3 besitzen; H_2 sei ein vollständiger Graph mit ebenfalls n Knoten. Der Graph G entsteht aus H dadurch, dass man weitere Kanten folgendermaßen zu H hinzufügt: Man verbindet jeden Knoten von H_1 mit jedem Knoten von H_2 durch eine Kante.

a) Für $n = 4$ und $n = 6$ gebe man je ein Beispiel für einen derartigen Graphen G an (durch Zeichnung).

b) Man zeige, dass G genau $\frac{3}{2}n^2 + n$ Kanten hat.

c) Man zeige, dass G einen Hamiltonschen Kreis besitzt (durch Angabe eines solchen Kreises).

d) Man begründe, weshalb G keine Eulersche Linie besitzt.

4. $M = \{a, b, c, d\}$ sei eine Menge mit vier Elementen und $A = \mathcal{P}(M)$ sei die Potenzmenge von M.

a) Wie viele Elemente enthält $\mathcal{P}(M)$? Geben Sie die Elemente von $\mathcal{P}(M)$ an.

b) Auf $A = \mathcal{P}(M)$ betrachten wir die Relation $\subseteq$ („Inklusion von Mengen“). Zeichnen Sie das zugehörige Hasse-Diagramm.
Hinweis: Ganz unten steht $\emptyset$, darüber die Mengen $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ und $\{d\}$, darüber die 2-elementigen Teilmengen von M, etc. Es ist etwas Sorgfalt beim Zeichnen des Hasse-Diagramms nötig!

c) Nun fassen wir das Hasse-Diagramm aus b) als Graphen auf. Dieser Graph ist isomorph zu einem anderen Graphen, der bereits auf diesem Übungsblatt vorkam. Zu welchem? Geben Sie einen zugehörigen Isomorphismus an. (Möglichst nicht irgendeinen, sondern den naheliegenden!)