Mathematik II für Studierende der Informatik
(Analysis und Lineare Algebra)
Steven Köhler

Sommersemester 2012
Aufgaben zur Vorbereitung der Bonusklausur am 07.05.2012

1. a) Bestimme alle Werte $x \in \mathbb{R}$, die die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\frac{5}{2x-1} \leq \frac{1}{2}.$$

Mit L sei die Menge dieser x bezeichnet. Gib L in Intervallschreibweise an.

b) Wie a) für die folgende Ungleichung:

$$\frac{|2x+3|}{3x-5} \leq -\frac{1}{2}.$$

c) Zum Lösen einer Ungleichung müssen oft Fallunterscheidungen vorgenommen werden. Welche Fälle müssen für die folgende Ungleichung unterschieden werden? (Das Lösen dieser Ungleichung ist **nicht** Teil der Aufgabe!)

$$\frac{|4x-9| \cdot |-x+3|}{x^2-x-6} > |x+7|$$

2. Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_n = \frac{2n+1}{3n}$.

(a) Bestimme den Grenzwert der Folge (a_n) für $n \to \infty$.

(b) Zeige mithilfe der Definition der Konvergenz, dass es sich bei dem in a) gefundenen Wert tatsächlich um den Grenzwert der Folge (a_n) handelt.

3. Gib ein Beispiel dafür an, dass es zum Nachweis der Konvergenz einer Folge nicht genügt, lediglich $|a_n - a| < \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$ zu fordern.

4. Bestimme die folgenden Grenzwerte:

(i) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{-7n^4+n^3-5n+1}{3n^4+2n^2-25}\right)$$

(ii) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3-10n^2+5}{-n^4+6n-100}\right)$$

(iii) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^6+2n^3-1}+2n}{3n^2+7n-25}\right)$$

(iv) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+n-2}{2n^2+2}-\frac{14n^2+8n+7}{4n^2-9}\right)$$

(v) $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+5n-8}{6n+1}+\frac{-2n^2+3n-4}{4n-7}\right)$$

5. Gegeben seien die folgenden Reihen:

(i) $\displaystyle\sum_{i=1}^{\infty}\left(-\frac{3}{7}\right)^i$ (ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{5}{2k}\right)$ (iii) $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^i$ (iv) $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1}{j}\right)^2$.

Entscheide, ob diese Reihen konvergent oder divergent sind (mit kurzer Begründung) und bestimme für (i)-(iii) die Grenzwerte, falls diese existieren.

6. Gegeben sei die Reihe $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{2}{k(k-1)}\right)$.

(a) Berechne die Partialsummen s_1 bis s_4 dieser Reihe.

(b) Zeige, dass diese Reihe gegen den Grenzwert 2 konvergiert.

7. Die Funktion $f : [0, 12] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{, für } 0 \leq x < 2; \\ -\frac{1}{2}x + 7 & \text{, für } 2 \leq x < 5; \\ x - 1 & \text{, für } 5 \leq x < 11; \\ 2x - 12 & \text{, für } 11 \leq x < 12. \end{cases}$$

An welchen Stellen ist f stetig, an welchen Stellen ist f unstetig? Begründe deine Antwort.

8. Die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{23}{x^3}\right) & \text{, für } x \neq 0; \\ 0 & \text{, für } x = 0 \end{cases} \qquad \text{und} \qquad g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \cdot \cos\left(\dfrac{23}{x^3}\right) & \text{, für } x \neq 0; \\ 0 & \text{, für } x = 0. \end{cases}$$

An welchen Stellen ist f stetig, an welchen Stellen ist f unstetig? Begründe deine Antwort. Analog für g.

9. Berechne die folgenden Grenzwerte. Gib an, an welchen Stellen die Stetigkeit der beteiligten Funktionen verwendet wird.

$$\text{(i)} \quad \lim_{n\to\infty} \left(\cos\left(\frac{\pi n^2 + 6n + 11}{4n^2 + n + 3}\right)\right) \qquad \text{(ii)} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{8n^2 + 7n - 1}{2n^2 - 9n + 1}}$$

10. Bestimme die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(i) $f_1(x) = 3x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 5x + 42$

(ii) $f_2(x) = x^e \cdot \sin(3x) \cdot \ln(x)$

(iii) $f_3(x) = \cos\left(\sqrt{\ln\left(\tan\left(2^x + 1\right)^3\right)}\right)$

(iv) $f_4(x) = (\sin x)^{2x^2 - x + 1}$

11. Gegeben seien die beiden Funktionen

$$h_1(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)} \qquad \text{und} \qquad h_2(x) = -1 - \cot^2(x).$$

Bestätige mithilfe der Quotientenregel, dass es sich sowohl bei h_1 als auch bei h_2 um die Ableitung(en) der Funktion $h(x) = \cot x$ handelt.

12. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch:

$$f(x) = \frac{1}{9} \cdot 2^{-3x} .$$

a) Finde eine allgemeine Formel für die n-te Ableitung von f.

b) Zeige durch vollständige Induktion, dass die von dir gefundene Formel tatsächlich die n-te Ableitung von f ist.