# Tutorium: Diskrete Mathematik

Lösungen für die zusätzlichen Materialien

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

# Aufgabe 1 I

Der Nachweis funktioniert nach dem bekannten Schema zum Nachweis der Injektivität:

$$f(x) = f(y)$$
$$(x+2)^2 = (y+2)^2$$

Ziehen der Wurzel auf beiden Seiten der Gleichung ergibt 2 Möglichkeiten:

$$x + 2 = y + 2 \qquad\qquad x + 2 = -y - 2$$
$$x = y \qquad\qquad x = -y - 4$$

Es gibt also verschiedene $x$ und $y$, für die $f(x) = f(y)$ gilt. Die Funktion $f$ ist somit nicht injektiv.

# Aufgabe 1 II

Der Nachweis funktioniert nach dem bekannten Schema zum Nachweis der Injektivität:

$$g(x) = g(y)$$
$$(x+2)^2 = (y+2)^2$$

Ziehen der Wurzel auf beiden Seiten der Gleichung ergibt 2 Möglichkeiten:

$$x + 2 = y + 2 \qquad\qquad x + 2 = -y - 2$$
$$x = y \qquad\qquad x = -y - 4$$

Wegen $-y-4 \notin \mathbb{N}$ ist die einzige Lösung, dass $x = y$ zu $g(x) = g(y)$ führt. Die Funktion $g$ ist also injektiv.

# Aufgabe 1 III

Der Nachweis funktioniert nach dem bekannten Schema zum Nachweis der Injektivität:

$$h(a,b) = h(cd)$$
$$\Big(ab,\ (a+1)b,\ a(b^2+1)\Big) = \Big(cd,\ (c+1)d,\ c(d^2+1)\Big)$$

Hieraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

$$ab = cd$$
$$(a+1)b = (c+1)d$$
$$a(b^2+1) = c(d^2+1)$$

# Aufgabe 1 IV

Ausmultiplizieren der zweiten Gleichung und anschließende Subtraktion der ersten Gleichung ergibt

$$b = d.$$

Setzt man dies in die dritte Gleichung ein und teilt durch $b^2 + 1$ (das darf man, da $b^2 + 1 \neq 0$ gilt), folgt

$$a = c.$$

Die Abbildung $h$ ist also injektiv.

 

# Aufgabe 2 I

Zum Nachweis der Surjektivität genügt es zu zeigen, dass es zu jedem Element $y \in \mathbb{Z}$ mindestens ein Urbild $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ gibt, für das $f(a, b) = y$ gilt:

$$\begin{aligned} y = f(a, b) &= a + b \\ a &= y - b. \end{aligned}$$

Es verbleibt zu zeigen, dass $(y - b, b)$ tatsächlich ein Urbild für $y$ ist:

$$\begin{aligned} f(y - b, b) &= y - b + b \\ &= y. \end{aligned}$$

Die gegebene Abbildung $f$ ist also surjektiv.

# Aufgabe 2 II

Zum Nachweis der Surjektivität genügt es zu zeigen, dass es zu jedem Element $y \in \mathbb{Z}$ mindestens ein Urbild $x \in \mathbb{Z}$ gibt, für das $g(x) = y$ gilt.

$$y = g(x) = \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor$$

Da die Gauß-Klammern nicht umkehrbar sind, betrachten wir eine ähnliche Funktion, die ohne die Gauß-Klammern auskommt:

$$y = g'(x) = \frac{x+1}{2}.$$

Für ungerade Werte von $x$ liefern $g$ und $g'$ offenbar dieselben Ergebnisse.

# Aufgabe 2 III

Umstellen nach $x$ ergibt:

$$x = 2y - 1.$$

Es bleibt nur noch zu überprüfen, ob das gefundene $x$ tatsächlich ein Urbild für $y$ ist.

$$\begin{aligned} g(2y-1) &= \left\lfloor \frac{2y-1+1}{2} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{2y}{2} \right\rfloor \\ &= \lfloor y \rfloor \\ &= y \end{aligned}$$

Da $x = 2y - 1$ ein Urbild für $y$ ist, ist die Abbildung $g$ surjektiv.

# Aufgabe 2 IV

Der Beweis für $h$ ist sehr einfach. Wir nehmen ein beliebiges Tupel

$$\left(\star, 2, \star\right)$$

als Element der Bildmenge.

Es muss $a^2 = 2$ gelten. Da 2 keine ganzzahlige Wurzel besitzt, haben wir unendlich viele Tupel gefunden, die kein Urbild haben.

Die Abbildung $h$ kann also nicht surjektiv sein.

# Aufgabe 1

Als Parameterform ergibt sich sofort

$$x = \overrightarrow{0A} + s \cdot \left(B - A\right) + t \cdot \left(C - A\right) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R}).$$

Aus den beiden Spannvektoren ermittelt man mittels Kreuzprodukt einen Normalenvektor der Ebene:

$$n = \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt die Normalenform der Ebene:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left( x - \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix} \right) = 0.$$

# Aufgabe 2

Es lassen sich leicht 3 Punkte der Ebene bestimmen, beispielsweise $P_1 = (0,0,4)$, $P_2 = (0,-4,0)$ und $P_3 = (-2,0,0)$.

Hieraus ergibt sich die folgende Parameterform der Ebene (für $s,t \in \mathbb{R}$):

$$x = \overrightarrow{0P_1} + s \cdot \left(P_2 - P_1\right) + t \cdot \left(P_3 - P_1\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}.$$

Die Normalenform kann man direkt aus der Koordinatenform ablesen:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot x + 4 = 0.$$

# Aufgabe 3

Zunächst erstellt man die Koordinatenform der Ebene:

$$x_1 - 2x_2 - 4 = 0.$$

Hieraus lassen sich leicht 3 Punkte der Ebene bestimmen, beispielsweise $P_1 = (0,0,0)$, $P_2 = (0,2,0)$ und $P_3 = (4,0,0)$.

Dies ergibt zum Beispiel die folgende Parameterform der Ebene (für $s, t \in \mathbb{R}$):

$$x = \overrightarrow{0P_1} + s \cdot \left(P_2 - P_1\right) + t \cdot \left(P_3 - P_1\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

# Aufgabe 1

Aufstellen der Geradengleichung für die Gerade durch $P_1$ und $P_2$ ergibt

$$x_2 = \frac{1}{2}x_1 + 2.$$

Durch Umstellen ergibt sich die gesuchte Koordinatenform:

$$-\frac{1}{2}x_1 + x_2 - 2 = 0.$$

# Aufgabe 2

Aufstellen der Geradengleichung für die Gerade durch $P_1$ und $P_2$ ergibt

$$x_2 = \frac{1}{2}x_1.$$

Durch Umstellen ergibt sich die gesuchte Koordinatenform:

$$-\frac{1}{2}x_1 + x_2 = 0.$$

Einsetzen von $P_3$ ergibt

$$-\frac{1}{2} \cdot 4 + 2,5 = 0,5 \neq 0.$$

$P_3$ liegt also nicht auf der Geraden. Folglich liegen $P_1$, $P_2$ und $P_3$ nicht auf derselben Geraden.

# Aufgabe 3

Als Parameterform ergibt sich sofort

$$x = \overrightarrow{0P_1} + t \cdot \left(P_2 - P_1\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

Aus dem Richtungsvektor der Parameterdarstellung lässt sich der Normalenvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ direkt ablesen. Für die Normalenform ergibt sich folglich

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \left(x - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 0.$$

# Aufgabe 1

Zunächst stellen wir die erweiterte Koeffizientenmatrix auf:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 7 \\ -2 & -1 & -5 & -13 \end{array}\right].$$

Mittels elementarer Zeilenumformungen erhält man die Matrix

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right].$$

Zeile 3 stellt einen Widerspruch dar. Es gibt folglich keine Lösung für das Gleichungssystem.

# Aufgabe 2

a) Die eindeutige Lösung lautet $x_1 = 1$ und $x_2 = 3$.

b) Es existiert keine Lösung.

c) Die Lösung in Parameterform lautet

$$x = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \quad (t \in \mathbb{R}).$$

# Aufgabe 3 I

Den Wert für $x_5$ kann man direkt ablesen:

$$x_5 = -3.$$

Es sind $x_4 = t$ und $x_3 = s$ die freien Variablen.

Durch Einsetzen in die zweite Zeile und Umstellen nach $x_2$ erhält man

$$x_2 = 1 - 3s - 2t.$$

Analog erhält man aus der ersten Zeile $x_1$:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - 3x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 \\ &= 1 - 3(1 - 3s - 2t) + s + 2t + 3 \\ &= 1 + 10s + 8t. \end{aligned}$$

# Aufgabe 3 II

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 1 + 10s + 8t \\
x_2 &= 1 - 3s - 2t \\
x_3 &= s \\
x_4 &= t \\
x_5 &= -3
\end{aligned}
$$

In Parameterform lässt sich die Lösung wie folgt darstellen:

$$
x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 10 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R}).
$$

Es handelt sich also um eine Ebene im $\mathbb{R}^5$.

# Aufgabe 4 I

Die erweiterte Koeffizientenmatrix ist

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} -1 & -2 & 0 & -3 & 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 10 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 2 & -1 & 11 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 5 & -2 & 5 & 7 \end{array}\right].$$

Überführen in Zeilenstufenform liefert

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 5 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

# Aufgabe 4 II

$x_1$, $x_2$ und $x_5$ sind die führenden Variablen. Die freien Variablen $x_3$, $x_4$ und $x_6$ werden durch Parameter ersetzt:

$$x_3 = r, \quad x_4 = s, \quad x_6 = t.$$

Rückwärtseinsetzen ergibt:

$$\begin{aligned}
x_6 &= t \\
x_5 &= 1 - 2t \\
x_4 &= s \\
x_3 &= r \\
x_2 &= -5 - r - s + 11t \\
x_1 &= 12 + 2r - s - 21t
\end{aligned}$$

# Aufgabe 4 III

In Parameterform lässt sich die Lösung wie folgt darstellen:

$$x = \begin{pmatrix} 12 \\ -5 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -21 \\ 11 \\ 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (r, s, t \in \mathbb{R}).$$

# Aufgabe 5 I

Das zugehörige Gleichungssystem lautet:

$$\begin{aligned} a + b + 2c + d &= 0 \\ 3a + 4b - c + d &= 0 \\ 4a + 3b + c + d &= 0. \end{aligned}$$

Aufstellen der erweiterten Koeffizientenmatrix:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Überführt man die Matrix in Zeilenstufenform, erhält man

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -7 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{5}{14} & 0 \end{array}\right].$$

# Aufgabe 5 II

Durch Rückwärtseinsetzen erhält man die Lösung des Gleichungssystems:

$$d = t.$$

Es folgt

$$c = -\frac{5}{14}t.$$

Hieraus folgt

$$b = -\frac{35}{14}t + 2t = -\frac{7}{14}t = -\frac{1}{2}t.$$

Einsetzen in die erste Zeile ergibt schließlich $a$:

$$a = \frac{1}{2}t + \frac{10}{14}t - t = \frac{3}{14}t.$$

# Aufgabe 5 III

Für $d = 14$ ergibt sich somit beispielsweise die folgende Koordinatenform:

$$3x_1 - 7x_2 - 5x_3 + 14 = 0.$$

Für unsere gegebenen Punkte $A$, $B$ und $C$ ist die Koordinatengleichung wahr. Für $D$ ergibt sich:

$$3 \cdot 1 - 7 \cdot 2 - 5 \cdot 3 + 14 = -12 \neq 0.$$

Der Punkt $D$ liegt also nicht in der durch $A$, $B$ und $C$ beschriebenen Ebene.

# Aufgabe 6

Die Koeffizientenmatrix $A$ lautet

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Es ergibt sich die inverse Matrix

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

Als Lösung des Gleichungssystems ergibt sich wie zuvor

$$\begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

# Aufgabe 1

Die folgenden Produkte sind nicht definiert: $BA$, $AC$ und $AA$.

Für die restlichen Produkte ergibt sich:

$$AB = \begin{bmatrix} 7 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 30 & 17 & 5 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \qquad AD = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 26 \\ -4 \end{bmatrix} \qquad BB = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 1 \\ 5 & 4 & -1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$DC = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -4 \\ 3 & 6 & -6 \\ -2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \quad CD = \begin{bmatrix} 12 \end{bmatrix}.$$

# Aufgabe 2

Als Produkt der beiden Matrizen $A$ und $B$ ergibt sich

$$AB = \begin{bmatrix} 20 & 23 & 10 & 13 \\ 16 & 19 & 7 & 8 \\ 12 & 15 & 4 & 3 \\ 31 & 31 & 6 & 23 \end{bmatrix}.$$

Das gesuchte Element in der dritten Zeile und zweiten Spalte ist 15.

Die vierte Spalte von $AB$ lautet

$$\begin{bmatrix} 13 \\ 8 \\ 3 \\ 23 \end{bmatrix}.$$

# Aufgabe 3

a) falsch

b) falsch

c) falsch

d) wahr

# Aufgabe 4

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 2 & 1 & -2 & 0\\ 3 & 1 & -3 & 1\\ 1 & 3 & 2 & 1\end{bmatrix} \overset{\substack{Z_2 - 2Z_1\\ Z_3 - 3Z_1\\ Z_4 - Z_1}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & -3 & -4 & -2\\ 0 & -5 & -6 & -2\\ 0 & 1 & 1 & 0\end{bmatrix}$$

$$\overset{Z_2 \leftrightarrow Z_4}{\longrightarrow} \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -5 & -6 & -2\\ 0 & -3 & -4 & -2\end{bmatrix} \overset{\substack{Z_3 + 5Z_2\\ Z_4 + 3Z_2}}{\longrightarrow} \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1 & -2\\ 0 & 0 & -1 & -2\end{bmatrix}$$

$$\overset{Z_3 \cdot (-1)}{\longrightarrow} \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & -1 & -2\end{bmatrix} \overset{Z_4 + Z_3}{\longrightarrow} \begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

# Aufgabe 5

a) Anwendung des Gauß-Jordan-Algorithmus ergibt die folgende inverse Matrix:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Es gilt $A \cdot A^{-1} = E$.

b) Im Laufe des Verfahrens wird die folgende Matrix erreicht, die nicht weiter zur Einheitsmatrix umgeformt werden kann:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 8 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

# Aufgabe 6

Es gilt

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} \qquad \left(A^T\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} \qquad \left(A^{-1}\right)^T = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Offensichtlich gilt $\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$.

# Aufgabe 1

a) Es ergibt sich:

$$a+b=\begin{pmatrix}9\\2\\16\end{pmatrix}$$
$$a-b=\begin{pmatrix}1\\-2\\30\end{pmatrix}$$
$$b-a=\begin{pmatrix}-1\\2\\-30\end{pmatrix}.$$

b) Es gilt $a \in \mathbb{R}^3$ und $b \in \mathbb{R}^2$. Da nur Vektoren gleicher Dimension addiert/subtrahiert werden können, ist diese Aufgabe nicht lösbar.

# Aufgabe 2

Es ist

$$v = v_1 - v_2 + 3v_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt

$$|v| = \sqrt{(-6)^2 + 3^2 + 9^2} = \sqrt{126}.$$

 

# Aufgabe 3

Zwei Vektoren sind genau dann senkrecht zueinander (orthogonal), wenn ihr Skalarprodukt gleich 0 ist. Es gilt

$$v_1 \cdot v_2 = 4 \cdot (-2) + (-2) \cdot 4 + 5 \cdot 0 = 0.$$

Die beiden Vektoren $v_1$ und $v_2$ sind also senkrecht zueinander.

# Aufgabe 4

a) Es gilt

$$
\begin{aligned}
a \cdot b &= 3 \cdot (-1) + 1 \cdot 5 + (-1) \cdot 2 = 0 \\
a \cdot c &= 3 \cdot (-6) + 1 \cdot (-2) + (-1) \cdot 2 = -22 \\
b \cdot c &= (-1) \cdot (-6) + 5 \cdot (-2) + 2 \cdot 2 = 0.
\end{aligned}
$$

Es gilt also $a \perp b$ sowie $b \perp c$. $a$ und $c$ sind nicht orthogonal.

b) $c = a \times b$ ist senkrecht zu $a$ und senkrecht zu $b$. $c'$ ist der zu $c$ gehörende normierte Vektor:

$$
c = a \times b = \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 16 \end{pmatrix} \qquad c' = \frac{1}{\sqrt{330}} \begin{pmatrix} 7 \\ -5 \\ 16 \end{pmatrix}.
$$