Mathematik I für Studierende der Informatik
(Diskrete Mathematik)

Thomas Andreae, Christoph Stephan

Wintersemester 2011/12
Blatt 9

A: Präsenzaufgaben am 15./16. Dezember 2011

1. a) Man definiere (wie in Abschnitt 6.2 angedeutet) die Rechteckgruppe H und stelle die zugehörige Gruppentafel auf.
Hinweis: Die Rechteckgruppe besitzt vier Elemente, nämlich die Identität, eine Drehung um 180° und zwei Spiegelungen; man wähle für diese Elemente die Bezeichnungen i, r, x und y.

b) Ist die Rechteckgruppe H kommutativ? Ist H zyklisch? (Man gebe kurze Begründungen für die Antworten!)

2. Es seien a, b und c Elemente einer Gruppe.

a) Man erläutere (kurz), wieso $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$ gilt.

b) Wie lautet die entsprechende Formel für $(abc)^{-1}$?

3. Man zeige, dass Folgendes gilt, wenn man isomorphe Gruppen als gleich ansieht:

a) Es gibt nur eine Gruppe der Ordnung 2.

b) Es gibt nur eine Gruppe der Ordnung 3.

Hinweis: Man bezeichne die Gruppenelemente mit 1 und a bzw. mit 1, a und b und überlege sich, wie die zugehörigen Multiplikationstabellen der Gruppen aussehen müssen.

B: Hausaufgaben zum 22./23. Dezember 2011

1. Es sei M die Menge der Matrizen der Form

$$\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

wobei sämtliche Einträge Elemente aus $\mathbb{Z}_7$ sind und zusätzlich $a \neq 0$ gilt. Wie in Beispiel 6 (Abschnitt 6.2) zeigt man, dass M eine Gruppe bezüglich der Matrizenmultiplikation ist. (Dass dies tatsächlich so ist, ist nicht der Gegenstand der Aufgabe, sondern werde vorausgesetzt.)

a) Man bestimme die Ordnung von M.

b) Man bestimme das Inverse zu $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

c) Man bestimme die Ordnung der folgenden Elemente:

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

d) Gibt es in M ein Element der Ordnung 2?

2. G sei die Quadratgruppe (vgl. Abschnitt 6.2); die Elemente von G seien wie im Skript mit i, r, s, t, w, x, y und z bezeichnet.

a) Man berechne $s * y$, $x * r$ sowie $x * y$ und gebe zu allen Elementen das zugehörige Inverse an.

b) Ist G zyklisch? Ist G kommutativ? Welche Ordnungen besitzen die Elemente von G?

c) Finden Sie zwei Untergruppen H_1 und H_2 von G, die beide die Ordnung 4 haben. Ist eine dieser Untergruppen zyklisch? Ist eine dieser Untergruppen isomorph zur Rechteckgruppe?

3. a) Es seien a, b, c und d Elemente einer Gruppe G. Vereinfachen Sie den folgenden Ausdruck:

$$a^{-1}\left(bd^{-1}\right)^{-1}bc\left(b^{-1}cdc\right)^{-1}ab^{-1}.$$

Wie vereinfacht sich der Ausdruck, wenn wir zusätzlich annehmen, dass G abelsch ist?

b) Beweisen Sie: Jede zyklische Gruppe H ist abelsch. (**Hinweis**: Potenzregeln!)

c) Wahr oder falsch? Geben Sie kurze Begründungen für Ihre Antworten!

(i) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine zyklische Gruppe der Ordnung n.

(ii) Sind G und H zwei zyklische Gruppen der Ordnung n, so gilt $G \cong H$.

4. Man zeige, dass Folgendes gilt, wenn man isomorphe Gruppen als gleich ansieht: Es gibt genau zwei verschiedene Gruppen der Ordnung 4.

Hinweis: Man zeige, dass es außer der zyklischen Gruppe $G = < a > = \{1, a, a^2, a^3\}$ bis auf Isomorphie nur noch eine weitere Gruppe der Ordnung 4 gibt. Man beginne den Beweis so: Sei $G = \{1, a, b, c\}$ eine nicht zyklische Gruppe. Man überlege sich dann, welche Ordnung die Elemente a, b und c aufgrund der Folgerung 1 in Abschnitt 6.8 haben müssen. Danach zeige man, dass damit die Einträge der Gruppentafel bereits feststehen.

Abschließend finde man unter den Gruppen, die wir bereits kennengelernt haben, ein Beispiel für eine nicht zyklische Gruppe der Ordnung 4.