Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der Abschlussklausur am 04.02.2012

Lösungen

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Aufgabe 1

a) Es ergibt sich

$$\begin{aligned} a(x) + b(x) &= 3x^3 + 6x^2 + 3x + 9 \\ a(x) \cdot b(x) &= 18x^5 + 3x^4 + 27x^3 + 26x^2 + 14x + 20. \end{aligned}$$

b) Es ergibt sich

$$\begin{aligned} a(x) - b(x) &= 3x^3 + x^2 + x + 6 \\ a(x) : b(x) &= 4x + 4, \text{ Rest: } 6x + 5. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

a) Die höchste in $a(x) \cdot b(x)$ vorkommende Potenz ist $x^9 \cdot x^{10} = x^{19}$; der Grad von $a(x) \cdot b(x)$ ist folglich 19.

b) Berechnen und Aufsummieren aller Terme, die x^{13} enthalten:

$$x^9 \cdot (-4x^4) + 2x^7 \cdot 2x^6 + 2x^4 \cdot (-5x^9) + (-x^3) \cdot x^{10} = -11x^{13}$$

Der gesuchte Koeffizient lautet folglich -11.

Aufgabe 3

Anwenden des Euklidischen Algorithmus zum Bestimmen des ggT liefert die folgenden Zerlegungen mit Rest:

$$
\begin{aligned}
6x^4 - x^3 - 13x^2 + 8x + 4 &= \left(-\frac{2}{3}x^2 - \frac{7}{9}x + \frac{1}{27}\right) \cdot \left(-9x^2 + 12x + 5\right) \\
&\quad + \left(\frac{103}{9}x + \frac{103}{27}\right) \\
-9x^2 + 12x + 5 &= \left(-\frac{81}{103}x + \frac{135}{103}\right) \cdot \left(\frac{103}{9}x + \frac{103}{27}\right) + 0
\end{aligned}
$$

Der ggT ist folglich $\frac{103}{9}x + \frac{103}{27}$.
Jedes Vielfache dieses Polynoms ist ebenfall ein Teiler, z.B. $3x+1$.
Der normierte größte gemeinsame Teiler lautet $x + \frac{1}{3}$.

Aufgabe 4a-b

a) $\left[A \mid b\right] = \left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 3 & 19 \\ -1 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right]$

b) Überführen der erweiterten Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & 0 & 3 & 19 \\ -1 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{Z_1 \cdot \frac{1}{2}} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{19}{2} \\ -1 & 1 & 2 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{Z_2 + Z_1 \\ Z_3 - 3Z_1}}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{19}{2} \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{33}{2} \\ 0 & 2 & -\frac{11}{2} & -\frac{59}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{Z_3 - 2Z_2} \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{19}{2} \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{33}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{25}{2} & -\frac{125}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{Z_3 \cdot \left(-\frac{2}{25}\right)}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{19}{2} \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{33}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{array}\right]$$

Rückwärtseinsetzen ergibt $x_3 = 5$, $x_2 = -1$ und $x_1 = 2$.

Aufgabe 4c

Anwendung von Algorithmus 1.3 (Gramlich):

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{Z_1 \cdot \frac{1}{2}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{Z_2 + Z_1 \\ Z_3 - 3Z_1}}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -\frac{11}{2} & -\frac{3}{2} & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{Z_3 - 2Z_2} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{25}{2} & -\frac{5}{2} & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{Z_3 \cdot \left(-\frac{2}{25}\right)}$$

$$\left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{4}{25} & -\frac{2}{25} \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{Z_2 - \frac{7}{2}Z_3 \\ Z_1 - \frac{3}{2}Z_3}} \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & -\frac{6}{25} & \frac{3}{25} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{11}{25} & \frac{7}{25} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{4}{25} & -\frac{2}{25} \end{array}\right]$$

Als Lösung ergibt sich $\begin{bmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{6}{25} & \frac{3}{25} \\ -\frac{1}{5} & \frac{11}{25} & \frac{7}{25} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{25} & -\frac{2}{25} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 19 \\ 7 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{bmatrix}$

Aufgabe 5

a) Die Vektoren sind linear abhängig; es gilt $v_3 = 5v_1 + 6v_2$.

b) Aufstellen der erweiterten Koeffizientenmatrix der Gleichung $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4 = 0$ und Überführen in Zeilenstufenform liefert

$$\left[\begin{array}{cccr|c} 1 & 0 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{11}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right].$$

Rückwärtseinsetzen ergibt $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$. Die Vektoren sind folglich linear unabhängig.

c) Die Vektoren $v_1, \ldots, v_5$ sind linear abhängig; 5 Vektoren des $\mathbb{R}^4$ können niemals linear unabhängig sein.

Aufgabe 6

a) Aufschreiben der Vektoren als **Zeilen** einer Matrix und anschließendes Überführen in Zeilenstufenform:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 4 & -2 \\ -1 & 10 & -1 \\ -4 & 22 & -7 \end{bmatrix} \to \ldots \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 12 & 2 \\ 0 & 30 & 5 \end{bmatrix} \to \ldots \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 6 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Alle Nicht-Null-Zeilen bilden eine Basis von $\mathrm{Lin}\,(v_1, v_2, v_3, v_4)$.

b) $\mathrm{Lin}\,(v_1, v_2, v_3, v_4)$ besitzt die zwei Basisvektoren $b_1 = (1, 2, 3)$ und $b_2 = (0, 6, 1)$, d.h. $\dim\big(\mathrm{Lin}\,(v_1, v_2, v_3, v_4)\big) = 2$.

c) Es handelt sich um eine Ebene im $\mathbb{R}^3$.

Aufgabe 7

Um zu zeigen, dass es sich im eine Basis von U handelt, muss folgendes gezeigt werden:

(1) *Die Vektoren b_1 und b_2 sind linear unabhängig*:

Dies ist leicht zu sehen, da b_2 kein Vielfaches von b_1 ist.

(2) *Jeder Vektor $u \in U$ ist eine Linearkombination von b_1 und b_2*:

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lösen des Gleichungssystems ergibt $\lambda_1 = \frac{1}{3}u_1 + \frac{2}{3}u_2$ und $\lambda_2 = \frac{1}{3}u_1 - \frac{1}{3}u_2$.

Wegen (1) und (2) sind die Vektoren b_1 und b_2 eine Basis von U.

Aufgabe 8a

$$
\text{(i)} \quad \det A = (-2) \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} - (-1) \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}
$$
$$
= (-2) \cdot (-11) + 1 \cdot 1
$$
$$
= 23
$$

$$
\begin{aligned}
\text{(ii)} \quad \det A &= 1 \cdot 0 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 \cdot 5 + 0 \cdot 3 \cdot (-1) \\
&\quad -0 \cdot 0 \cdot 5 - 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 2 \cdot 3 \cdot (-2) \\
&= 23
\end{aligned}
$$

$$
\text{(iii)} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{23}{6} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = 1 \cdot (-6) \cdot \left(-\frac{23}{6}\right) = 23
$$

Aufgabe 8b+c

b) Da $\det A \neq 0$ ist, ist die Matrix A invertierbar; anders gesagt: Die inverse Matrix A^{-1} existiert.

c) Es gilt

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{23}.$$

Aufgabe 9

a) U ist kein Unterraum, da es nicht abgeschlossen bzgl. der skalaren Multiplikation ist. Es gilt z.B. $u = (1, 0, 0, 0) \in U$, aber $-u = (-1, 0, 0, 0) \notin U$.

b) U ist wegen $(0, 0, 0, 0) \notin U$ kein Unterraum.

c) ($\rightarrow$ siehe nächste Folie)

d) U ist kein Unterraum, da es nicht abgeschlossen bzgl. der skalaren Multiplikation ist. Es gilt z.B. $u = (1, 1, 0, 0) \in U$, aber $2u = (2, 2, 0, 0) \notin U$.

Aufgabe 9c I

U ist ein Unterraum.

(i) $U \neq \emptyset$, da z.B. $0 \in U$ gilt.

(ii) Für $u, v \in U$ gilt $u + v \in U$.

$$\begin{aligned}
u + v &= \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_1 + 2u_2 - u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_1 + 2v_2 - v_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \\ u_1 + 2u_2 - u_3 + v_1 + 2v_2 - v_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ u_3 + v_3 \\ (u_1 + v_1) + 2(u_2 + v_2) - (u_3 + v_3) \end{pmatrix} \in U
\end{aligned}$$

Aufgabe 9c II

(iii) Für $u \in U$ gilt $\lambda u \in U$.

$$\begin{aligned}
\lambda u &= \lambda \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_1 + 2u_2 - u_3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \lambda u_3 \\ \lambda(u_1 + 2u_2 - u_3) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \lambda u_1 \\ \lambda u_2 \\ \lambda u_3 \\ \lambda u_1 + 2\lambda u_2 - \lambda u_3 \end{pmatrix} \in U
\end{aligned}$$

Aufgabe 10

Die Menge U aus Aufgabe 9a ist beispielsweise abgeschlossen bzgl. der Vektoraddition, nicht jedoch bezüglich der skalaren Multiplikation.

Analog lässt sich eine Menge $U \subseteq \mathbb{R}^3$ definieren, die die gewünschten Eigenschaften besitzt:

$$U = \Big\{ (x_1, x_2, x_3) \;\Big|\; x_1 + x_2 \geq 0 \Big\}.$$

Aufgabe 11a-b

a) $x = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix}0\\5\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}$

b) $\mathrm{n} = \begin{pmatrix}0\\5\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-13\\4\\-20\end{pmatrix}$

Es gilt $\begin{pmatrix}-13\\4\\-20\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}0\\5\\1\end{pmatrix} = -13 \cdot 0 + 4 \cdot 5 + (-20) \cdot 1 = 0.$

Es gilt $\begin{pmatrix}-13\\4\\-20\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix} = -13 \cdot 4 + 4 \cdot 3 + (-20) \cdot (-2) = 0.$

Aufgabe 11c-d

d) Überführen der Ebene in Koordinatenform mithilfe der Normalenform.

$$\begin{pmatrix} -13 \\ 4 \\ -20 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right) = 0$$

$$\begin{pmatrix} -13 \\ 4 \\ -20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -13 \\ 4 \\ -20 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$-13x_1 + 4x_2 - 20x_3 + 53 = 0$$

c)
- Es gilt $-13 \cdot 1 + 4 \cdot 2 - 20 \cdot 3 + 53 = -12 \neq 0$. P_1 liegt nicht in der Ebene $\mathcal{E}$;
- Es gilt $-13 \cdot (-3) + 4 \cdot 7 - 20 \cdot 6 + 53 = 0$. P_2 liegt in der Ebene $\mathcal{E}$.

Aufgabe 12a-e

a) $a \cdot b = 1 \cdot 3 + 0 \cdot 1 + 2 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) = 5$. Folglich sind a und b nicht orthogonal.

b) $\cos(\varphi) = \frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|} = \frac{5}{\sqrt{6} \cdot \sqrt{14}} = \frac{5}{2 \cdot \sqrt{21}}$. Es folgt $\varphi = \arccos\left(\frac{5}{2 \cdot \sqrt{21}}\right) \approx 56,94°$.

c) Es muss $a \cdot c = 1 \cdot (-2) + 0 \cdot (-1) + 2 \cdot x + (-1) \cdot 0 = 0$ gelten. Auflösen nach x ergibt $x = 1$.

d) Es muss $b \cdot d = 3 \cdot 1 + 1 \cdot y + 0 \cdot 2 - 2 \cdot z = 0$ gelten. Einsetzen von $z = t$ ergibt $y = -3 + 2t$ (mit $t \in \mathbb{R}$).

e) $|a| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$

Aufgabe 12f

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a \cdot c}{|a| \cdot |c|} = \frac{-2+2x}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{5+x^2}}$$

Umstellen, Quadrieren und Umstellen ergibt:

$$\begin{aligned}
\sqrt{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{5+x^2} &= -4+4x \\
12\cdot(5+x^2) &= 16x^2-32x+16 \\
4x^2-32x-44 &= 0 \\
x^2-8x-11 &= 0.
\end{aligned}$$

Lösen der quadratischen Gleichung liefert:

$$x_{1/2} = 4 \pm \sqrt{27} = 4 \pm 3\cdot\sqrt{3}.$$

Aufgabe 13

(I) Induktionsanfang:

Für $n = 1$ gilt $f_2 \cdot f_0 - f_1^2 = 1 \cdot 0 - 1^2 = -1 = (-1)^1$. ✓

(II) Induktionsschritt:

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine fest gewählte natürliche Zahl, für die die Behauptung gilt, d.h. $f_{n+1} \cdot f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
f_{n+2} \cdot f_n - f_{n+1}^2 &= (f_n + f_{n+1}) \cdot f_n - f_{n+1}^2 \\
&= f_n^2 + f_{n+1} f_n - f_{n+1}^2 \\
&= f_n^2 + f_{n+1}(f_n - f_{n+1}) \\
&= f_n^2 - f_{n+1}(f_{n+1} - f_n) \\
&= -(-f_n^2 + f_{n+1} \cdot f_{n-1}) \\
&= -(-1)^n = (-1)^{n+1} \quad \square
\end{aligned}$$

Aufgabe 14 I

Die Abbildung f ist nicht injektiv, da beispielsweise gilt:

$$f(1) = 2 = f(2).$$

Aufgabe 14 II

Zum Nachweis der Surjektivität genügt es zu zeigen, dass es zu jedem Element $y \in \mathbb{Z}$ mindestens ein Urbild $n \in \mathbb{Z}$ gibt, für das $f(n) = y$ gilt.

$$y = f(n) = \left\lfloor \frac{n+3}{2} \right\rfloor$$

Da die Gauß-Klammern nicht umkehrbar sind, betrachten wir eine ähnliche Funktion, die ohne die Gauß-Klammern auskommt:

$$y = f'(n) = \frac{n+3}{2}.$$

Für ungerade Werte von n liefern f und f' offenbar dieselben Ergebnisse.

Aufgabe 14 III

Umstellen nach n ergibt:

$$n = 2y - 3.$$

Es bleibt nur noch zu überprüfen, ob das gefundene n tatsächlich ein Urbild für y ist.

$$\begin{aligned} f(2y-3) &= \left\lfloor \frac{2y-3+3}{2} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor \frac{2y}{2} \right\rfloor \\ &= \lfloor y \rfloor \\ &= y \end{aligned}$$

Da $n = 2y - 3$ ein Urbild für y ist, ist die Abbildung f surjektiv.

Aufgabe 15a-f

Wahr oder falsch?

a) Falsch. Anhand der Injektivität einzelner Komponenten kann keine Aussage über die gesamte Abbildung getroffen werden.

b) Wahr.

c) Wahr.

d) Falsch.

e) Falsch.

f) Falsch. Dies ist keine hinreichende Bedingung für Hamiltonkreise.

Aufgabe 15g-1

Wahr oder falsch?

g) Falsch. Nach dem Schubfachprinzip unmögich.

h) Falsch. $A = \{1, 2\}$, $R = \{(1, 1)\}$ ist symmetrisch mit $|R| = 1$.

i) Falsch. 2703 und 3012 sind nicht teilerfremd; ein gemeinsamer Teiler ist 3.

j) Wahr.

k) Falsch. Es gilt lediglich $\dim \operatorname{Lin}(v_1, v_2, v_3, v_4, v_5) \leq 5$;

l) Falsch. Das Kreuzprodukt existiert nur im $\mathbb{R}^3$.