Mathematik I für Studierende der Informatik
(Diskrete Mathematik)
Thomas Andreae, Christoph Stephan

Wintersemester 2011/12
Blatt 3

B: Hausaufgaben zum 10./11. November 2011

2. Beweisen Sie die Regeln (2), (3) und (4), Skript Seite 23.

<u>Beweis von (2)</u>: Aufgrund der Voraussetzungen $b_1 | a_1$ und $b_2 | a_2$ gibt es $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$, sodass $a_1 = b_1 \cdot c_1$ und $a_2 = b_2 \cdot c_2$. Es folgt $a_1 a_2 = b_1 c_1 b_2 c_2 = b_1 b_2 c_1 c_2$, womit $a_1 a_2 | b_1 b_2$ gezeigt ist. □

<u>Beweis von (3)</u>: Aufgrund der Voraussetzung $cb | ca$ gibt es ein $d \in \mathbb{Z}$, sodass $ca = cbd$. Wegen $c \neq 0$ ist es möglich auf beiden Seiten dieser Gleichung durch c zu teilen: Man erhält $a = bd$, also $b | a$. □

<u>Beweis von (4)</u>: Wegen $b | a_1$ und $b | a_2$ gibt es $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}$ mit $a_1 = bd_1$, $a_2 = bd_2$. Für beliebige $c_1, c_2 \in \mathbb{Z}$ folgt $c_1 a_1 = c_1 b d_1$ und $c_2 a_2 = c_2 b d_2$, woraus man $c_1 a_1 + c_2 a_2 = c_1 b d_1 + c_2 b d_2 = b(c_1 d_1 + c_2 d_2)$ erhält. Dies zeigt $b | c_1 a_1 + c_2 a_2$. □

3. a) **Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 0$ die folgende Aussage gilt:**

$$3 \mid (n^3 + 2n).$$

b) **Zeigen Sie, dass sich für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $2^n \times 2^n$ - Schachbrett überdeckungsfrei durch L-Stücke belegen lässt, so dass einzig und allein das Feld in der rechten oberen Ecke frei bleibt. Die L-Stücke sollen dabei so groß wie drei Felder des Schachbretts sein.**

(I) Induktionsanfang: Wegen $3 \mid 0$ gilt die Beziehung $3 \mid n^3 + 2n$ für $n = 0$.

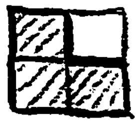
(II) Induktionsschluss: Für ein $n \geq 0$ gelte $3 \mid n^3 + 2n$ (Induktionsannahme (IA)), d.h., es gibt ein $c \in \mathbb{Z}$ mit $n^3 + 2n = 3c$. Zu zeigen ist $3 \mid (n+1)^3 + 2(n+1)$. Es gilt

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + 2(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 3n + 1 + 2n + 2 \\ &= n^3 + 2n + 3(n^2 + n + 1) \\ &\overset{IA}{=} 3c + 3(n^2 + n + 1) \\ &= 3(c + n^2 + n + 1),\end{aligned}$$

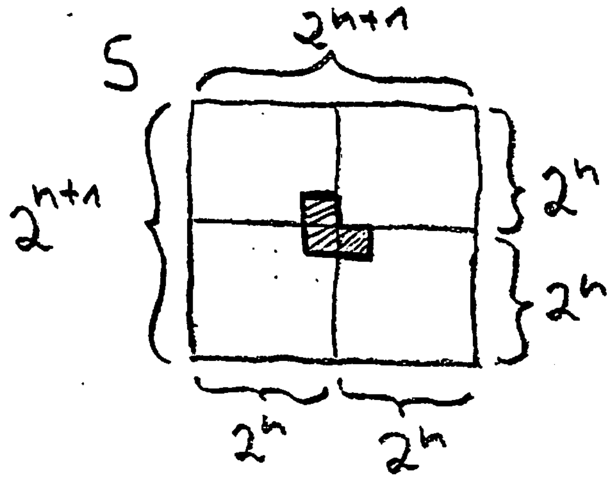
womit $3 \mid (n+1)^3 + 2(n+1)$ gezeigt ist. $\square$

b) Wir zeigen die Aussage durch Induktion nach n:

(I) Induktionsanfang: Die Aussage gilt für $n=1$, da sich ein 2×2-Schachbrett offenbar wie gewünscht belegen lässt (siehe Zeichnung).



(II) Induktionsschluss: Wir setzen für ein $n\in\mathbb{N}$ voraus, dass sich ein $2^n\times 2^n$-Schachbrett wie gewünscht belegen lässt (Induktionsannahme). Wir haben zu zeigen, dass dasselbe dann auch für ein $2^{n+1}\times 2^{n+1}$-Schachbrett S gilt. Hierzu teile man S in vier $2^n\times 2^n$-Schachbretter und platziere ein L-Stück so in der Mitte von S, dass es bis auf das rechte obere $2^n\times 2^n$-Brett von jedem der vier $2^n\times 2^n$-Bretter genau ein Feld enthält (siehe Zeichnung).



Nach Induktionsannahme kann jedes der vier $2^n\times 2^n$-Bretter so belegt werden, dass insgesamt die gewünschte Belegung von S entsteht. $\square$