Mathematik II für Studierende der Informatik
(Analysis und Lineare Algebra)
Thomas Andreae, Henrik Bachmann, Rosona Eldred, Malte Moos

Sommersemester 2012
Blatt 10

A: Präsenzaufgaben am 21. Juni 2012

1. a) Zum Aufwärmen: Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

$$f(x) = 3x^4 - 2x^2 + x + 5.$$

Den Graphen von f, d.h. die Menge aller Punkte $\big(x, f(x)\big)$, können wir uns als eine Kurve vorstellen. Berechnen Sie die Steigung des Graphen von f im Punkt $\big(1, f(1)\big) = (1, 7)$.

b) Nun sei eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben:

$$f(x, y) = 2xy - x^2 - 2y^2 + 4x + 2y + 10.$$

Den Graphen von f, d.h. die Menge aller Punkte $\big(x, y, f(x, y)\big)$, können wir uns als ein Gebirge vorstellen. Berechnen Sie die Steigung des Graphen von f im Punkt $\big(1, 2, f(1, 2)\big) = (1, 2, 13)$:

(i) in Richtung der x-Achse;
(ii) in Richtung der y-Achse.

2. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ für die folgenden Funktionen:

(i) $f(x, y) = e^{x^3 y^2}$ (ii) $f(x, y) = \sin(x) \cdot \ln(x^2 y)$

3. Bilden Sie für $f(x, y) = x^4 y^2 - 2xy^3$ die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung und verifizieren Sie die Rechenregel

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \; = \; \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y).$$

4. Bestimmen Sie die kritischen Stellen der Funktion

$$f(x, y) = 2xy - x^2 - 2y^2 + 4x + 2y + 10$$

und entscheiden Sie für jede dieser Stellen, ob ein lokales Extremum vorliegt und, falls ja, ob es sich um ein lokales Minimum oder um ein lokales Maximum handelt.

B: Hausaufgaben zum 28. Juni 2012

1. Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung für

(i) $f(x, y) = 2x^2 y^2 - 3xy + 4x + 2$ (iii) $f(x, y) = \dfrac{\sin x + \cos y}{x^2 + y^2}$

(ii) $f(x, y) = \cos(x^2 y) \cdot e^{xy}$ (iv) $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

2. Wie Präsenzaufgabe 3 für die Funktion $f(x, y) = x^2 y^3 + y e^{x^2 y}$.

3. Bestimmen Sie die kritischen Stellen und entscheiden Sie, ob lokale Minima oder lokale Maxima vorliegen.

(i) $f(x, y) = -xy + x^2 + y^2 - y + 5$ (iii) $f(x, y) = x^3 + y^3 - 12x - 3y + 5$

(ii) $f(x, y) = xy - y^2 + x + y + 3$

4. Aus einem Lehrbuch für Wirtschaftswissenschaftler:

a) Ein Unternehmen produziert zwei verschiedene Sorten A und B eines Gutes. Die täglichen Kosten der Produktion von x Einheiten des Gutes A und y Einheiten des Gutes B sind

$$C(x, y) = 0.04x^2 + 0.01xy + 0.01y^2 + 4x + 2y + 500.$$

Nehmen Sie an, dass das Unternehmen den ganzen Output verkauft – und zwar das Gut A zu einem Stückpreis von 15 Geldeinheiten und das Gut B zu einem Stückpreis von 9 Geldeinheiten. Bestimmen Sie die täglichen Produktionsniveaus x und y, die den Gewinn pro Tag maximieren.

b) Nehmen Sie nun zusätzlich an, dass jede Produktion des Unternehmens eine Umweltbelastung hervorruft, so dass das Unternehmen per Gesetz eingeschränkt ist, nicht mehr als insgesamt 320 Einheiten der beiden Güter zu produzieren. Ein Unterschreiten der erlaubten Höchstmenge von 320 Einheiten kommt aus betrieblichen Gründen (Auslastung der Maschinen) nicht in Frage. Das Problem des Unternehmens ist dann, den Gewinn pro Tag zu maximieren – unter der Nebenbedingung

$$x + y = 320.$$

Welches sind jetzt die beiden optimalen Mengen des Outputs?
Hinweis: Verwenden Sie die *Methode der Variablensubstitution* (Auflösen der Nebenbedingung nach einer Variablen mit anschließendem Einsetzen in die Zielfunktion).

c) Berechnen Sie sowohl für Fall a) als auch für Fall b) den maximalen Gewinn.