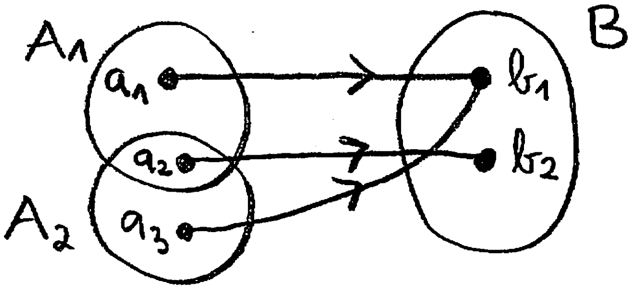
Ergänzungen zu S. 61

Es wurde gezeigt, dass für alle $A_1, A_2 \subseteq A$ gilt:

(1) $f(A_1 \cap A_2) \subseteq f(A_1) \cap f(A_2)$.

Wir fragen uns, ob für alle $A_1, A_2 \subseteq A$ immer auch die umgekehrte Beziehung $f(A_1) \cap f(A_2) \subseteq f(A_1 \cap A_2)$ gilt. Die Antwort ist <u>nein</u>, wie man durch Angabe eines <u>Gegenbeispiels</u> erkennt: Es sei $A = \{a_1, a_2, a_3\}$, $B = \{b_1, b_2\}$; f sei definiert durch $f(a_1) = b_1$, $f(a_2) = b_2$, $f(a_3) = b_1$; es sei $A_1 = \{a_1, a_2\}$, $A_2 = \{a_2, a_3\}$ (vergl. Zeichnung). Dann gilt $f(A_1) = f(A_2) = B$, also $f(A_1) \cap f(A_2) = B$ sowie $A_1 \cap A_2 = \{a_2\}$, also $f(A_1 \cap A_2) = \{b_2\}$.



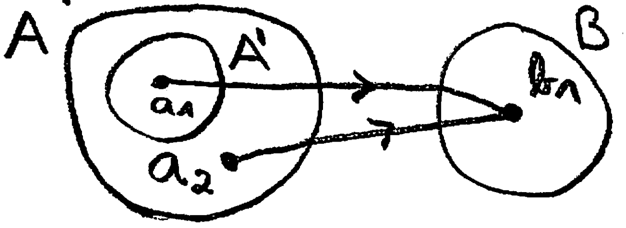
<u>Fazit</u>: Die Umkehrung von (1) gilt im Allgemeinen nicht, wie wir durch Angabe eines Gegenbeispiels gezeigt haben. Deshalb kann man in (1) das Zeichen „$\subseteq$" nicht durch „$=$" ersetzen.

„Ähnlich wie mit der Aussage (1) verhält es sich mit der Aussage (5) (Skript, S. 61):

(5) $f^{-1}(f(A')) \supseteq A'$.

Nachweis, dass diese Aussage immer gilt:
Es sei $a \in A'$. Zu zeigen ist $a \in f^{-1}(f(A'))$. Dies folgt so: Es sei $b = f(a)$. Wegen $a \in A'$ folgt dann $b \in f(A')$, woraus man (wegen $f(a) = b$) die Behauptung $a \in f^{-1}(f(A'))$ erhält. □

Wir fragen uns wieder, ob auch die umgekehrte Beziehung $f^{-1}(f(A')) \subseteq A'$ immer gilt. Antwort: __nein.__ Hier ist ein __Gegenbeispiel:__ $A = \{a_1, a_2\}$, $A' = \{a_1\}$, $B = \{b_1\}$ und f sei definiert durch $f(a_1) = b_1 = f(a_2)$ (siehe Zeichnung). Dann gilt $f(A') = B$ und somit $f^{-1}(f(A')) = f^{-1}(B) = A$, d.h., $f^{-1}(f(A')) \not\subseteq A'$.



__Fazit__: In (5) gilt die umgekehrte Beziehung nicht, und deshalb darf man in (5) das Zeichen „$\supseteq$“ nicht einfach durch „$=$“ ersetzen.

Abschließend betrachten wir die Aussage

(2) $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

<u>Beweis von (2)</u>: (2) setzt sich aus den beiden Teilaussagen (i) $f(A_1 \cup A_2) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2)$ und (ii) $f(A_1) \cup f(A_2) \subseteq f(A_1 \cup A_2)$ zusammen, die wir nacheinander beweisen.

<u>Nachweis von (i)</u>: Es sei $b \in f(A_1 \cup A_2)$. Wir haben zu zeigen, dass dann auch $b \in f(A_1) \cup f(A_2)$ gilt. Dies folgt so: Aus $b \in f(A_1 \cup A_2)$ folgt, dass es ein $a \in A_1 \cup A_2$ gibt mit $f(a) = b$. Aus $a \in A_1 \cup A_2$ folgt, dass $a \in A_1$ oder $a \in A_2$ gilt. Falls $a \in A_1$ gilt, so folgt $b \in f(A_1)$ (wegen $f(a) = b$); falls $a \in A_2$, so folgt aus demselben Grund $b \in f(A_2)$. Es gilt also $b \in f(A_1)$ oder $b \in f(A_2)$, d.h., es gilt $b \in f(A_1) \cup f(A_2)$.

<u>Nachweis von (ii)</u>: Es sei $b \in f(A_1) \cup f(A_2)$. Wir zeigen, dass dann auch $b \in f(A_1 \cup A_2)$ gilt: Aus $b \in f(A_1) \cup f(A_2)$ folgt, dass $b \in f(A_1)$ oder $b \in f(A_2)$ gilt. Falls $b \in f(A_1)$, so gibt es ein Element $a \in A_1$ mit $f(a) = b$;

falls $b \in f(A_2)$, so gibt es ein $a \in A_2$ mit $f(a) = b$. In jedem der beiden Fälle gibt es also ein $a \in A_1 \cup A_2$ mit $f(a) = b$, d.h., es gilt $b \in f(A_1 \cup A_2)$. $\square$

<u>Fazit</u>: Anders als bei den Aussagen (1) und (5) gilt in dem gerade behandelten Fall sowohl die Aussage $f(A_1 \cup A_2) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2)$, als auch die umgekehrte Beziehung $f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \cup f(A_2)$. In (2) konnte deshalb „=" geschrieben werden. Entsprechend verhält es sich mit (3) und (4). Aussage (6) wird in den Übungen behandelt.