- L. 33 -

Mathematatik I für Studierende der Informatik (Diskrete Mathematik)

Thomas Andreae, Christoph Stephan

Wintersemester 2011/12
Blatt 11

B: Hausaufgaben zum 19./20. Januar 2012

1. Für die folgenden linearen Gleichungssysteme stelle man jeweils die zugehörige erweiterte Koeffizientenmatrix auf und bestimme die allgemeine Lösung mit dem Gauß-Verfahren. Falls es unendlich viele Lösungen gibt, so gebe man die allgemeine Lösung in parametrisierter Form an!

a)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4 \end{aligned}$$

c)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= -1 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

b)
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 2x_3 &= 5 \end{aligned}$$

d)
$$\begin{aligned} 3x_1 + \tfrac{3}{2}x_2 + \tfrac{3}{2}x_3 &= 6 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\ 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 8 \end{aligned}$$

a)
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -1 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \quad \tfrac{1}{2}\mathrm{I}$$

$$\begin{array}{ccc|cl}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\
0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & \mathrm{II}-\mathrm{I} \\
0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \mathrm{III}-3\mathrm{I} \\
\hline
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\
0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & \left(-\frac{2}{3}\right)\mathrm{II} \\
0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & \\
\hline
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\
0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & \\
0 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{4}{3} & \mathrm{III}+\frac{1}{2}\mathrm{II} \\
\hline
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\
0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{7}{3} & \\
0 & 0 & 1 & 4 & 3\mathrm{III}
\end{array}$$

Hieraus folgt $x_3 = 4$, $x_2 = -\frac{7}{3} + \frac{1}{3}x_3 = -\frac{7}{3} + \frac{4}{3} = -1$ und $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - 2 = -1$.
Also ist $x_1 = -1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 4$ die eindeutig bestimmte Lösung.

b) und c)

$$\begin{array}{ccc|cc}
2 & 1 & 1 & 2 & -1 \\
1 & -1 & 1 & 3 & 3 \\
3 & 0 & 2 & 5 & 0 \\
\hline
\end{array}$$

$$
\begin{array}{ccc|cc l}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\mathrm{I} \\
1 & -1 & 1 & 3 & 3 & \\
3 & 0 & 2 & 5 & 0 & \\
\hline
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \\
0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 2 & \frac{7}{2} & \mathrm{II}-\mathrm{I} \\
0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} & \mathrm{III}-3\,\mathrm{I} \\
\hline
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \\
0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & (-\frac{2}{3})\mathrm{II} \\
0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 2 & \frac{3}{2} & \\
\hline
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & \\
0 & 1 & -\frac{1}{3} & -\frac{4}{3} & -\frac{7}{3} & \\
0 & 0 & 0 & 0 & -2 & \mathrm{III}+\frac{3}{2}\mathrm{II}
\end{array}
$$

Für c) gibt es somit keine Lösung.

Nun zu b): Für die freie Variable x_3 wählen wir einen Parameter $t \in \mathbb{R}$: $x_3 = t$. Es folgt

$x_2 = -\frac{4}{3} + \frac{1}{3}x_3 = -\frac{4}{3} + \frac{1}{3}t$, $x_1 = 1 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 =$
$1 - \frac{1}{2}\left(-\frac{4}{3} + \frac{1}{3}t\right) - \frac{1}{2}t = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}t$. Die Lösung lautet

also $x_1 = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}t$, $x_2 = -\frac{4}{3} + \frac{1}{3}t$, $x_3 = t$ (für $t \in \mathbb{R}$).

d)

$$\begin{array}{ccc|c} 3 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2} & 6 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 8 \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 2 & 1 & 1 & 4 \\ 4 & 2 & 2 & 8 \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \frac{1}{3}\mathrm{I} \\ \\ \\ \\ \mathrm{II}-2\mathrm{I} \\ \mathrm{III}-4\mathrm{I} \end{array}$$

Für die beiden freien Variablen x_2 und x_3 wählen wir Parameter $s,t \in \mathbb{R}$: $x_3 = t$, $x_2 = s$. Es folgt $x_1 = 2 - \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 = 2 - \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t$.
Die Lösung lautet somit

$$x_1 = 2 - \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}t\,,\ x_2 = s\,,\ x_3 = t \quad (\text{für } s,t \in \mathbb{R}).$$

3. Es seien $v_1 = (1,0,0,3)$, $v_2 = (0,-1,1,2)$ und $v_3 = (-1,4,2,1)$ Vektoren des $\mathbb{R}^4$. Prüfen Sie mit Hilfe des Gauß-Verfahrens, ob die Vektoren $u = (1,3,6,15)$ und $w = (-2,2,4,1)$ des $\mathbb{R}^4$ Linearkombinationen von v_1, v_2 und v_3 sind. Falls ja, so gebe man eine entsprechende Darstellung von u und w an.

$$\begin{array}{rrr|rr}
1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\
0 & -1 & 4 & 3 & 2 \\
0 & 1 & 2 & 6 & 4 \\
3 & 2 & 1 & 15 & 1
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rrl}
1 & 0 & -1 & 1 & -2 & \\
0 & -1 & 4 & 3 & 2 & \\
0 & 1 & 2 & 6 & 4 & \\
0 & 2 & 4 & 12 & 7 & \mathrm{IV}-3\mathrm{I}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rrl}
1 & 0 & -1 & 1 & -2 & \\
0 & 1 & -4 & -3 & -2 & (-1)\mathrm{II} \\
0 & 1 & 2 & 6 & 4 & \\
0 & 2 & 4 & 12 & 7 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rrl}
1 & 0 & -1 & 1 & -2 & \\
0 & 1 & -4 & -3 & -2 & \\
0 & 0 & 6 & 9 & 6 & \mathrm{III}-\mathrm{II} \\
0 & 0 & 12 & 18 & 11 & \mathrm{IV}-2\mathrm{II}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rrl}
1 & 0 & -1 & 1 & -2 & \\
0 & 1 & -4 & -3 & -2 & \\
0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & \frac{1}{6}\mathrm{III} \\
0 & 0 & 12 & 18 & 11 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|rrl}
1 & 0 & -1 & 1 & -2 & \\
0 & 1 & -4 & -3 & -2 & \\
0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & 1 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \mathrm{IV}-12\mathrm{III}
\end{array}$$

Es hat sich ergeben, dass w keine Linearkombination von v_1, v_2, v_3. Dagegen ist u eine Linearkombination von v_1, v_2, v_3. Eine Darstellung von u als Linearkombination erhält man, indem man nur noch den Vektor u als rechte Seite betrachtet und das Gauß-Verfahren fortsetzt ("Rückwärtseinsetzen"). Es ergibt sich die eindeutig bestimmte Lösung

$$x_3 = \frac{3}{2},\ x_2 = -3 + 4x_3 = -3 + 6 = 3,\ x_1 = 1 + x_3 = \frac{5}{2}.$$

<u>Probe</u>: $\frac{5}{2} v_1 + 3 v_2 + \frac{3}{2} v_3 =$

$$\frac{5}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{3}{2}\begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix}.$$