Mathematatik I für Studierende der Informatik (Diskrete Mathematik)

Thomas Andreae, Christoph Stephan

Wintersemester 2011/12
Blatt 1

B: Hausaufgaben zum 27./28. Oktober 2011

2. Durch die folgenden Formeln werden Funktionen $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ definiert: $f(x) = x^2 - 5$, $g(x) = 5x - 3$ und $h(x) = x + 5$.
   Welche dieser Funktionen sind injektiv, welche sind nicht injektiv. Ebenso für surjektiv und bijektiv. (Man gebe nicht nur die Antworten an, sondern auch die dazugehörigen Beweise!)

Behauptung: f ist nicht injektiv.
Beweis: Es gilt $f(1) = -4 = f(-1)$.
Behauptung: g ist injektiv.
Beweis: Angenommen, es gebe $x, y \in \mathbb{Z}$ mit $x \neq y$ und $g(x) = g(y)$. Aus $g(x) = g(y)$ erhält man: $5x - 3 = 5y - 3 \Rightarrow 5x = 5y \Rightarrow x = y$.
Dies ist ein Widerspruch zu $x \neq y$, also ist g injektiv.
Behauptung: h ist injektiv.
Beweis: Aus $x \neq y$ und $h(x) = h(y)$ würde $x + 5 = y + 5$ folgen, woraus man $x = y$ erhielte. Dies steht im Widerspruch zu $x \neq y$, also ist h injektiv.

<u>Behauptung</u>: f ist nicht surjektiv.

<u>Beweis</u>: Angenommen, es gebe ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $f(x) = 0$, d.h., $x^2 - 5 = 0$. Es folgt $x^2 = 5$ und somit $x = \sqrt{5}$ oder $x = -\sqrt{5}$. Dies ist ein Widerspruch, da weder $\sqrt{5}$ noch $-\sqrt{5}$ ein Element von $\mathbb{Z}$ ist. Also ist f nicht surjektiv.

<u>Behauptung</u>: g ist nicht surjektiv.

<u>Beweis</u>: Angenommen, es gebe ein $x \in \mathbb{Z}$ mit $g(x) = 1$, d.h., $5x - 3 = 1$. Es folgt $x = \frac{4}{5} \notin \mathbb{Z}$, im Widerspruch zur Annahme $x \in \mathbb{Z}$. Also: g ist nicht surjektiv.

<u>Behauptung</u>: h ist surjektiv.

<u>Beweis</u>: Es sei $y \in \mathbb{Z}$ beliebig. Wir wählen $x = y - 5$. Dann folgt $h(x) = y - 5 + 5 = y$, was zeigt, dass h surjektiv ist.

Nur h ist bijektiv, da h die einzige der drei Funktionen ist, die sowohl injektiv als auch surjektiv ist.

3. Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen injektiv oder surjektiv sind. (Beweise!)

a) $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(n, m) = n - m$

b) $g : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $g(n, m) = (n + m, n - m)$

c) $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $h(n) = ((n+1)^2, n^2 + 1)$.

a) Behauptung: f ist nicht injektiv.

Beweis: $f(1,2) = -1 = f(2,3)$.

Behauptung: f ist surjektiv.

Beweis: Für $z \in \mathbb{Z}$ gilt $f(z, 0) = z - 0 = z$.

b) Behauptung: g ist injektiv.

Beweis: Angenommen, es gebe in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ Paare (n, m) und (k, l) mit $(n, m) \neq (k, l)$ und $g(n, m) = g(k, l)$. Aus $g(n, m) = g(k, l)$ folgt $(n+m, n-m) = (k+l, k-l)$, d.h., es gilt

$$(1) \quad n + m = k + l \quad \text{und}$$
$$(2) \quad n - m = k - l.$$

Addition der beiden Gleichungen ergibt $2n = 2k$, also $n = k$. Durch Einsetzen in (1) erhält man $n + m = n + l$, also $m = l$. Es folgt $(n, m) = (k, l)$ im Widerspruch zu $(n, m) \neq (k, l)$. $\square$

Behauptung: g ist nicht surjektiv.

Beweis: Wir zeigen für das Paar $(1,0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, dass es kein Paar $(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ gibt, für das $g(n,m) = (1,0)$ gilt. Angenommen, es gäbe $(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ mit $g(n,m) = (1,0)$. Dann würde $(n+m, n-m) = (1,0)$ folgen. Es würde also $n+m = 1$ und $n-m = 0$ gelten. Addiert man diese beiden Gleichungen, so erhält man $2n = 1$ und somit $n = \frac{1}{2}$, im Widerspruch zu $(n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. □

c) Behauptung: h ist injektiv.

Beweis: Angenommen, es gebe $n, m \in \mathbb{Z}$ mit $n \neq m$ und $h(n) = h(m)$. Wegen $h(n) = h(m)$ gilt $((n+1)^2, n^2+1) = ((m+1)^2, m^2+1)$. Es folgt $n^2 + 2n + 1 = m^2 + 2m + 1$ und $n^2 + 1 = m^2 + 1$. Subtraktion dieser beiden Gleichungen ergibt $2n = 2m$, also $n = m$ im Widerspruch zur Annahme $n \neq m$. □

Behauptung: h ist nicht surjektiv.

Beweis: Es gibt kein $n \in \mathbb{Z}$ mit $h(n) = (-1,0)$, da $(n+1)^2$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ eine nichtnegative Zahl ist. □