Mathematatik I für Studierende der Informatik (Diskrete Mathematik)

Thomas Andreae, Christoph Stephan

Wintersemester 2011/12
Blatt 6

B: Hausaufgaben zum 1./2. Dezember 2011

3. A sei eine $m \times n$ - Matrix, B_1 und B_2 seien $n \times p$ - Matrizen. Beweisen Sie die Gültigkeit des Distributivgesetzes $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$.

Es sei $A = (a_{ij})_{\substack{i=1,\dots,m\\ j=1,\dots,n}}$,

$$B_1 = (b_{jk})_{\substack{j=1,\dots,n\\ k=1,\dots,p}},$$

$$B_2 = (b'_{jk})_{\substack{j=1,\dots,n\\ k=1,\dots,p}}.$$

Es folgt $B_1 + B_2 = (b_{jk} + b'_{jk})_{\substack{j=1,\dots,n\\ k=1,\dots,p}}$ und somit

$$A(B_1+B_2) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}(b_{jk} + b'_{jk}) \right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ k=1,\dots,p}}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} (a_{ij}b_{jk} + a_{ij}b'_{jk}) \right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ k=1,\dots,p}}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n} (a_{ij}b_{jk}) + \sum_{j=1}^{n} (a_{ij}b'_{jk}) \right)_{\substack{i=1,\dots,m\\ k=1,\dots,p}}$$

$$= \left(\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}b_{jk})\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\k=1,\dots,p}} + \left(\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}b'_{jk})\right)_{\substack{i=1,\dots,m\\k=1,\dots,p}}$$

$$= AB_1 + AB_2 . \square$$

4. a) Beweisen Sie Aussage (6), Skript Seite 61: Für jede Abbildung $f : A \to B$ und jedes $B' \subseteq B$ gilt $f(f^{-1}(B')) \subseteq B'$.

   b) In den Präsenzaufgaben wurde anhand eines Beispiels gezeigt, dass $f(f^{-1}(B')) = B'$ nicht immer gilt. Geben Sie ein besonders einfaches Beispiel an, das dies ebenfalls zeigt.

Lösung:

a) Es sei $b \in f(f^{-1}(B'))$. Zu zeigen ist $b \in B'$. Aus $b \in f(f^{-1}(B'))$ folgt, dass es ein $a \in f^{-1}(B')$ gibt, für das $f(a) = b$ gilt. Aus $a \in f^{-1}(B')$ folgt, dass es ein $b' \in B'$ gibt, für dass $f(a) = b'$ gilt. Also gilt $b = f(a) = b'$ und außerdem gilt $b' \in B'$, woraus $b \in B'$ folgt.

b) Es sei $A = \{a\}$ und $B = \{b_1, b_2\}$. Die Funktion $f: A \to B$ bilde a auf b_1 ab. Wir wählen $B' = B$. Dann gilt $f^{-1}(B') = A$. Es folgt $f(f^{-1}(B')) = f(A) = \{b_1\}$ und somit $f(f^{-1}(B')) \neq B'$.

Illustration zu b):