Tutorium: Analysis und lineare Algebra

Integralrechnung

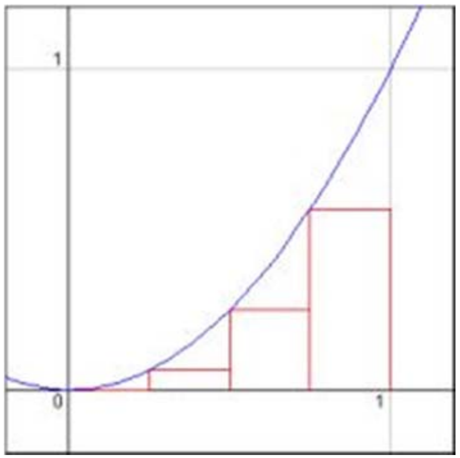
Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Ober- und Untersummen I

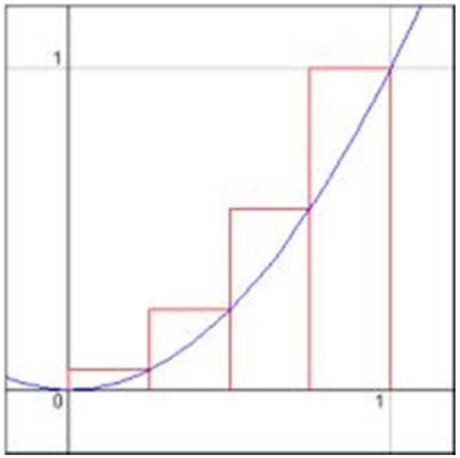
Untersumme



$$U_n = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=0}^{n-1} f\left(a + (b-a)\frac{i}{n}\right)$$

Ober- und Untersummen II

Obersumme



$$O_n = \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} f\left(a + (b-a)\frac{i}{n}\right)$$

Ober- und Untersummen III

Das Integral ist der Grenzwert der Ober- bzw. Untersumme:

$$\int\limits_a^b f(x) = \lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} f\left(a+(b-a)\frac{i}{n}\right)\right) = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

$$\int\limits_a^b f(x) = \lim_{n\to\infty} U_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{b-a}{n}\cdot\sum_{i=0}^{n-1} f\left(a+(b-a)\frac{i}{n}\right)\right) = \Big[F(x)\Big]_a^b$$

Insbesondere gilt:

$$\lim_{n\to\infty} O_n = \lim_{n\to\infty} U_n$$

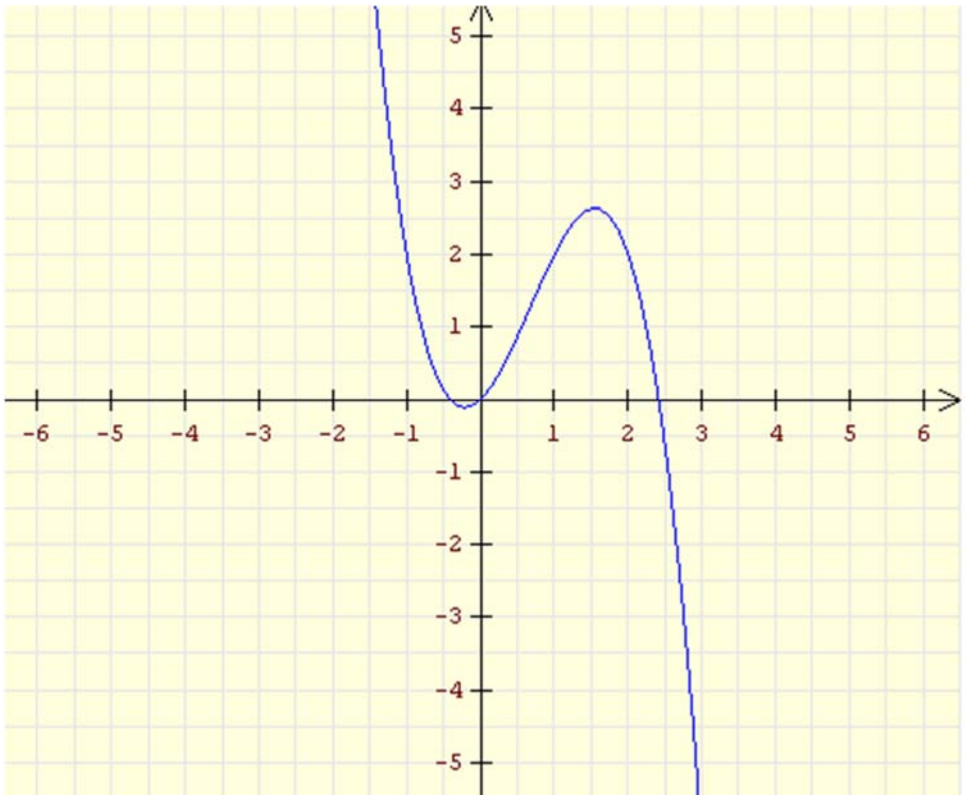
Ober- und Untersummen IV

Aufgabe 1

Berechne die Fläche, die von der x-Achse, den beiden Geraden $x = 0$ und $x = 1$ sowie der Funktion $f(x)$ selbst eingeschlossen wird, mithilfe einer Obersumme.

$$f(x) = -x^3 + 2x^2 + x$$

Ober- und Untersummen V



Graph der Funktion $f(x) = -x^3 + 2x^2 + x$.

Potenzen

$$\int x^n \, dx = \frac{1}{n+1} \, x^{n+1} + c$$

Wurzeln

$$\int \frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \sqrt{x} + c$$

$$\int \frac{1}{n \cdot \sqrt[n]{x^{n-1}}}\,dx = \sqrt[n]{x} + c$$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3}\,x^{\frac{3}{2}} + c$$

$$\int \sqrt[m]{x^n}\,dx = \frac{m}{n+m}\,x^{\frac{n+m}{m}} + c$$

$$\int \frac{1}{\sqrt[m]{x^n}}\,dx = \frac{m}{-n+m}\,x^{\frac{-n+m}{m}} + c$$

Exponentialfunktionen

$$\int e^x \; dx = e^x + c$$

$$\int a^x \ln a \; dx = a^x + c$$

$$\int a^x \; dx = \frac{1}{\ln a} \; a^x + c$$

Logarithmen

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{x}\,dx &= \ln|x| + c \\
\int \frac{1}{\ln a \cdot x}\,dx &= \log_a|x| + c \\
\int \log_a \mathrm{e} \cdot \frac{1}{x}\,dx &= \log_a|x| + c \\
\int \ln x\,dx &= x \cdot \ln x - x + c \\
\int \log_a x\,dx &= \frac{1}{\ln a}\Big(x \cdot \ln x - x\Big) + c
\end{aligned}$$

Trigonometrische Funktionen I

$$\int \sin x \; dx = -\cos x + c$$

$$\int \cos x \; dx = \sin x + c$$

$$\int -\sin x \; dx = \cos x + c$$

$$\int -\cos x \; dx = -\sin x + c$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} \; dx = \tan x + c$$

$$\int \left(1 + \tan^2 x\right) \; dx = \tan x + c$$

$$\int \frac{-1}{\sin^2 x} \; dx = \cot x + c$$

$$\int \left(-1 - \cot^2 x\right) \; dx = \cot x + c$$

Trigonometrische Funktionen II

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arcsin x + c$$

$$\int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \arccos x + c$$

$$\int \frac{1}{x^2+1}\,dx = \arctan x + c$$

$$\int \frac{-1}{x^2+1}\,dx = \operatorname{arccot} x + c$$

Partielle Integration I

Die *partielle Integration* basiert auf der Produktregel:

$$(u \cdot v)' = u'v + uv'$$

Durch Integrieren erhält man:

$$\begin{aligned} \int (u \cdot v)' &= \int u'v + \int uv' \\ uv &= \int u'v + \int uv' \end{aligned}$$

Anschließendes Umstellen ergibt:

$$\begin{aligned} \int u'v &= uv - \int uv' \\ \int uv' &= uv - \int u'v \end{aligned}$$

Partielle Integration II

Aufgabe 2

Berechne das folgende Integral: $\int \left(x^2 - 3\right) \cdot e^x \; dx.$

Integration durch Substitution I

Integration durch Substitution macht Verwendung von der Kettenregel:

$$F\Big(g(x)\Big)' = f\Big(g(x)\Big) \cdot g'(x)$$

Durch Integrieren ergibt sich:

$$\begin{aligned} \int F\Big(g(x)\Big)' \; dx &= \int f\Big(g(x)\Big) \cdot g'(x) \; dx \\ F\Big(g(x)\Big) &= \int f\Big(g(x)\Big) \cdot g'(x) \; dx \end{aligned}$$

Integration durch Substitution II

Es sei f eine auf dem Intervall I stetige Funktion und es soll dort $\displaystyle\int f(x)\,dx$ berechnet werden. Für ein Intervall I' sei $g : I' \to I$ eine bijektive Funktion mit stetiger Ableitung. Dann lässt sich $\displaystyle\int f(x)\,dx$ berechnen, indem man

1. $\displaystyle\int f\big(g(t)\big) \cdot g'(t)\,dt$ ermittelt;
2. im Ergebnis $t = g^{-1}(x)$ substituiert (Resubstitution).

Formelmäßig drückt man dies häufig auch durch die folgende Schreibweise aus:

$$\int f(x)\,dx = \left[\int f\Big(g(t)\Big) \cdot g'(t)\,dt\right]_{t=g^{-1}(x)}$$

Integration durch Substitution III

Aufgabe 3

Berechne das folgende Integral: $\int \sin\left(\sqrt{x+1}\right)\,dx.$

Funktionen mit speziellem Aufbau I

Manchmal liegen Funktionen in der folgenden Form vor:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx.$$

Diese lassen sich einfach mit dem Logarithmus integrieren:

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx = \ln\Big|f(x)\Big|.$$

Funktionen mit speziellem Aufbau II

Manchmal liegen Funktionen in der folgenden Form vor:

$$\int f(x) \cdot f'(x)\; dx.$$

Diese lassen sich wie folgt direkt integrieren:

$$\int f(x) \cdot f'(x)\; dx = \frac{1}{2}\Big(f(x)\Big)^2.$$

Funktionen mit speziellem Aufbau III

Aufgabe 4

Berechne das folgende Integral: $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$

Aufgabe 5

Berechne das folgende Integral: $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}\cdot \arcsin x}\,dx.$

Tricks I

Teilweise fehlt lediglich ein konstanter Faktor c, um eine Funktion direkt integrieren zu können. Dieser kann durch eine "*Multiplikation mit 1*" leicht hinzugefügt werden:

$$\int f(x)\ dx = \int \frac{1}{c} \cdot c \cdot f(x)\ dx = \frac{1}{c} \int c \cdot f(x)\ dx.$$

Teilweise fehlt eine additive Konstante, um eine Funktion direkt integrieren zu können. Diese kann durch eine "*Addition von 0*" leicht hinzugefügt werden:

$$\int f(x)\ dx = \int \Big(f(x) + c - c\Big)\ dx = \int \Big(f(x) + c\Big)\ dx - \int c\ dx.$$

Tricks II

Aufgabe 6

Berechne das folgende Integral: $\displaystyle\int e^{3x-5}\,dx.$

Aufgabe 7

Berechne das folgende Integral: $\displaystyle\int \frac{2x+1}{x^2+1}\,dx.$

Integration von rationalen Funktionen I

1. Schritt: Division mit Rest

Dieser Schritt ist nur notwendig, wenn der Grad des Zählers größer oder gleich dem Grad des Nenners ist.

2. Schritt: Faktorzerlegung des Nenners

Zerlegung des Nenners in die folgende Form:

$$c\cdot\Big(x-a_1\Big)^{\alpha_1}\cdot\Big(x-a_2\Big)^{\alpha_2}\cdot\ldots\cdot\Big(x-a_r\Big)^{\alpha_r}\cdot\Big(Q_1(x)\Big)^{\beta_1}\cdot\ldots\cdot\Big(Q_s(x)\Big)^{\beta_s}$$

Hierbei gilt:

- $(x-a_i)$ sind Linearfaktoren, a_i Nullstellen des Nenners;
- $Q_i(x)$ sind quadratische Polynome ohne Nullstellen;
- α_i und β_i sind die Vielfachheiten der jeweiligen Terme.

Integration von rationalen Funktionen II

3. Schritt: Partialbruchzerlegung

$$
\begin{aligned}
\frac{f(x)}{g(x)} = {} & \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \frac{A_{12}}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}} + \ldots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-a_1)} \\
& + \frac{A_{21}}{(x-a_2)^{\alpha_2}} + \frac{A_{22}}{(x-a_2)^{\alpha_2-1}} + \ldots + \frac{A_{2\alpha_2}}{(x-a_2)} \\
& \vdots \\
& + \frac{A_{r1}}{(x-a_r)^{\alpha_r}} + \frac{A_{r2}}{(x-a_r)^{\alpha_r-1}} + \ldots + \frac{A_{r\alpha_r}}{(x-a_r)} \\
& + \frac{px+q}{Q(x)}
\end{aligned}
$$

Integration von rationalen Funktionen III

4. Schritt: Integration

Die Integration findet für jeden bei der Partialbruchzerlegung entstandenen Term separat statt; die Terme werden dabei in vielen Fällen auf die Ableitungen des Logarithmus oder des Arcustangens zurückgeführt.

$$
\begin{aligned}
\int \frac{f(x)}{g(x)} = & \int \frac{A_{11}}{(x-a_1)^{\alpha_1}} + \int \frac{A_{12}}{(x-a_1)^{\alpha_1 - 1}} + \ldots + \int \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-a_1)} \\
& + \int \frac{A_{21}}{(x-a_2)^{\alpha_2}} + \int \frac{A_{22}}{(x-a_2)^{\alpha_2 - 1}} + \ldots + \int \frac{A_{2\alpha_2}}{(x-a_2)} \\
& \vdots \\
& + \int \frac{A_{r1}}{(x-a_r)^{\alpha_r}} + \int \frac{A_{r2}}{(x-a_r)^{\alpha_r - 1}} + \ldots + \int \frac{A_{r\alpha_r}}{(x-a_r)} \\
& + \int \frac{px+q}{Q(x)}
\end{aligned}
$$

Integration von rationalen Funktionen IV

Aufgabe 8

Berechne das folgende Integral: $$\int \frac{2x+3}{x^2-2x+1}\,dx.$$

Aufgabe 9

Berechne das folgende Integral: $$\int \frac{2}{x^2-3x+2}\,dx.$$

Aufgabe 10

Berechne das folgende Integral: $$\int \frac{2}{3x^2+5}\,dx.$$

Integration von rationalen Funktionen V

Aufgabe 11

Berechne das folgende Integral: $\displaystyle\int \frac{x^5+2x^4+x^3-x^2+7x+15}{x^3+2x^2+2x-5}\,dx.$