D

2. Bonusklausur zur Vorlesung „Mathematik I (DM)“

T. Andreae **14. Januar 2012, 8:30 bis 10:00 Uhr**

Insgesamt sind 30 Punkte zu erreichen. Es genügt in der Regel nicht, nur das Ergebnis einer Rechnung bzw. die Antwort auf eine Frage anzugeben, sondern es sollte auch der Rechenweg ersichtlich sein bzw. eine kurze Begründung für die Antwort gegeben werden. Wer mindestens 15 Punkte erzielt, hat bestanden. Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*10 Punkte*)

a) Geben Sie (ohne zu rechnen, aber mit einer kurzen Begründung) das Inverse von 776 in $\mathbb{Z}_{777}$ an! (*1 Punkt*)

b) Falls 275 in $\mathbb{Z}_{313}$ ein Inverses bezüglich der Multiplikation besitzt, so berechne man dieses und gebe das Ergebnis als ein Element aus $\{1, 2, \dots, 312\}$ an; falls ein solches Inverses nicht existiert, so begründe man die Nichtexistenz. (*4 Punkte*)

c) Verwenden Sie den Satz von Fermat, um den Rest von 3^{2802} bei Division durch 29 zu bestimmen. (*3 Punkte*)

d) A sei eine Menge mit $|A| = 4$. Gibt es mehr als 70000 verschiedene binäre Relationen auf A? Geben Sie eine kurze Begründung für Ihre Anwort! (*2 Punkte*)

Aufgabe 2 (*10 Punkte*)

a) Es seien $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ und $Y = \{a, b, c, u, v, w\}$. Die Abbildung $g : X \to Y$ sei definiert durch $g(1) = a$, $g(2) = c$, $g(3) = v$, $g(4) = b$, $g(5) = v$. Es sei $X' = \{1, 3, 4\}$. Geben Sie $g^{-1}(g(X'))$ an! (*2 Punkte*)

b) Gegeben seien die Matrizen

$$U = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \; V = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \; W = \begin{pmatrix} 1, & 0, & -5 \end{pmatrix}, \; X = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die folgenden Produkte, falls diese existieren: UW^T, UV, XW, WX. Für Produkte, die nicht existieren, gebe man eine kurze Begründung für deren Nichtexistenz. (*4 Punkte*)

c) A und B seien Mengen, und $g : A \to B$ sei eine Funktion. Beweisen Sie, dass für alle $A_1, A_2 \subseteq A$ gilt: $g(A_1) \cap g(A_2) \supseteq g(A_1 \cap A_2)$.

Zeigen Sie außerdem, dass die umgekehrte Beziehung $g(A_1) \cap g(A_2) \subseteq g(A_1 \cap A_2)$ nicht immer gilt. (*4 Punkte*)

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)

a) Es sei $B = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ und R sei folgende Relation auf B:
$R = \{(a, b),\ (b, c),\ (c, c),\ (d, e),\ (e, f),\ (f, g)\ (g, g)\}$.

(i) Veranschaulichen Sie R als gerichteten Graphen. (*1 Punkt*)

(ii) Durch Hinzufügen von möglichst wenigen Paaren soll erreicht werden, dass aus R eine Ordnungsrelation R^+ auf B entsteht. Welche Paare muss man hinzufügen? (*3 Punkte*)

(iii) Stellen Sie R^+ durch ein Hasse-Diagramm dar. (*2 Punkte*)

b) Mit „Graph“ ist im Folgenden immer „ungerichteter Graph ohne Schlingen und Mehrfachkanten“ gemeint. Kreuzen Sie die jeweils richtige Antwort an:

(i) Es gibt einen Graphen mit genau 222 Knoten, die alle den Grad 3 haben.

☐ wahr ☐ falsch

(ii) Es gibt einen Graphen mit genau 111 Knoten, die alle den Grad 3 haben.

☐ wahr ☐ falsch

(iii) Es gibt einen Graphen H, der eine Eulersche Linie besitzt und für den außerdem gilt: H hat genau 222 Knoten, die alle den Grad 3 haben.

☐ wahr ☐ falsch

(iv) Es gibt einen Graphen H, der keinen Hamiltonschen Kreis besitzt und für den außerdem gilt: H hat genau 222 Knoten, die alle den Grad 3 haben.

☐ wahr ☐ falsch

Begründungen sind nicht erforderlich! Für jedes richtig gesetzte Kreuz bekommt man 1 Punkt. Für jedes falsch gesetzte Kreuz wird 1 Punkt abgezogen. Insgesamt werden für die Aufgabe 3b) nicht weniger als 0 Punkte gegeben.