Lösungen zu ausgewählten Hausaufgaben

Mathematik II für Studierende der Informatik (Analysis und Lineare Algebra)

Th. Andreae, N.N.

Sommersemester 2012
Blatt 1

B: Hausaufgaben zum 12. April 2012

3. Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_n = \frac{3n+2}{n+4}$. Es sei $a = 3$.
   a) Berechnen Sie zunächst $|a_n - a|$, d.h. den Abstand des Folgenglieds a_n von $a = 3$.
   b) Zeigen Sie sodann durch direktes Zurückführen auf die Definition der Konvergenz (Skript, Seite 9), dass $(a_n) \to a$ gilt.
   c) Man gebe zu $\varepsilon = \frac{1}{5}$, $\varepsilon = \frac{1}{100}$ sowie $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ ein jeweils möglichst kleines $N \in \mathbb{N}$ an, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt.

a) $$|a_n - a| = \left|\frac{3n+2}{n+4} - 3\right| = \left|\frac{3n+2-3(n+4)}{n+4}\right| = \left|\frac{-10}{n+4}\right| = \frac{10}{n+4}.$$

b) Es sei $\varepsilon > 0$. Aufgrund von a) erhält man

$$(*) \quad |a_n - a| < \varepsilon \iff \frac{10}{n+4} < \varepsilon \iff \frac{10}{\varepsilon} - 4 < n.$$

Wir wählen $N > \frac{10}{\varepsilon} - 4$. Für alle $n \geq N$ gilt dann $n > \frac{10}{\varepsilon} - 4$, was wegen $(*)$ äquivalent ist zu der Feststellung, dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt. Dies zeigt $(a_n) \to a$.

c) Anhand von $(*)$ erkennt man, wie $N \in \mathbb{N}$ zu wählen ist, damit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt: Man muss $N > \frac{10}{\varepsilon} - 4$ wählen. Für $\varepsilon = \frac{1}{5}$ gilt

$\frac{10}{\varepsilon} - 4 = 46$. Also ist $N=47$ die kleinst-mögliche Wahl von N, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt.

Analog: $N = 997$ für $\varepsilon = \frac{1}{100}$ und

$N = 9997$ für $\varepsilon = \frac{1}{1000}$.

4. Die Folge (a_n) sei rekursiv definiert durch

$$a_1 = 1;$$
$$a_{n+1} = \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + 1.$$

Weisen Sie die Konvergenz der Folge mit Hilfe des Satzes über monotone, beschränkte Folgen nach.

Hinweis: Man beginne mit dem Nachweis, dass (a_n) beschränkt ist. Man zeige die Beschränktheit, indem man durch vollständige Induktion beweist, dass $1 \le a_n < 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. Zum Nachweis der Monotonie zeige man anschließend $a_{n+1} \ge a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Nachweis von $1 \le a_n < 2$ durch vollst. Ind.:

(I) Induktionsanfang: Wegen $a_1 = 1$ gilt die Behauptung für $n=1$.

(II) Induktionsschritt: Für ein $n \ge 1$ gelte $1 \le a_n < 2$. Es folgt $\frac{1}{2} \le \frac{a_n}{2} < 1$, woraus man durch quadrieren $\frac{1}{4} \le \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 < 1$ erhält. Es folgt $\frac{5}{4} \le \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + 1 < 2$, also $1 \le a_{n+1} < 2$.

Damit ist die Beschränktheit der Folge (a_n) gezeigt. Die Monotonie ergibt sich aus

$$a_{n+1} \ge a_n \Longleftrightarrow \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 + 1 \ge a_n \Longleftrightarrow \left(\frac{a_n}{2}\right)^2 - a_n + 1 \ge 0$$
$$\Longleftrightarrow \left(\frac{a_n}{2} - 1\right)^2 \ge 0.$$

Aus dem Satz über monotone, beschränkte Folgen erhält man die Konvergenz von (a_n).