Mathematik I für Studierende der Informatik (Diskrete Mathematik)

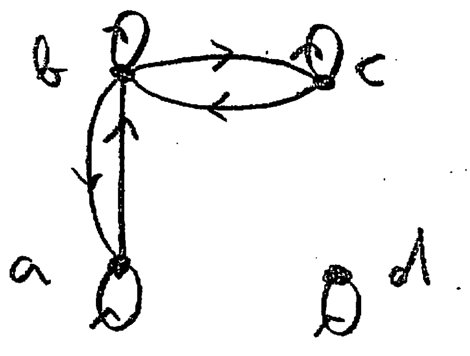
Thomas Andreae, Christoph Stephan

Wintersemester 2011/12
Blatt 5

B: Hausaufgaben zum 24./25. November 2011

3. Es sei $A = \{a, b, c, d\}$. Man gebe – wenn möglich – eine Relation R mit $(a, b) \in R$ an, für die gilt:
   a) R ist reflexiv und symmetrisch, aber nicht transitiv.
   b) R ist reflexiv und transitiv, aber nicht symmetrisch.
   c) R ist symmetrisch und transitiv, aber nicht reflexiv.

   Geben Sie R sowohl als Menge von Paaren als auch in der Form eines Graphen an. Geben Sie jeweils auch kurze Begründungen, die zeigen, dass R tatsächlich die geforderten Eigenschaften besitzt.

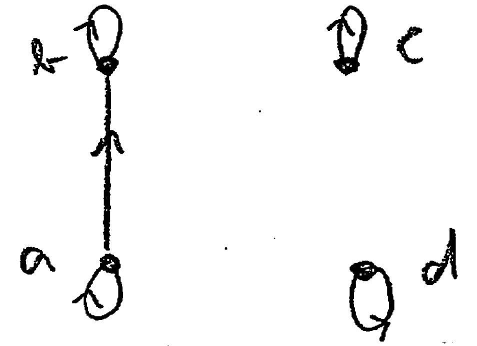
a) 

Angabe als Menge:
$R = \{(a,a), (b,b), (c,c), (d,d), (a,b), (b,a), (b,c), (c,b)\}$.

Die durch diesen Graphen gegebene Relation R ist reflexiv, da es an jedem Knoten eine Schlinge gibt; R ist symmetrisch, da mit jeder Kante (x,y) auch die „Rückwärtskante" (y,x) vorhanden ist.

Wegen $(c,b) \in R$, $(b,a) \in R$ und $(c,a) \notin R$ ist R nicht transitiv.

b)

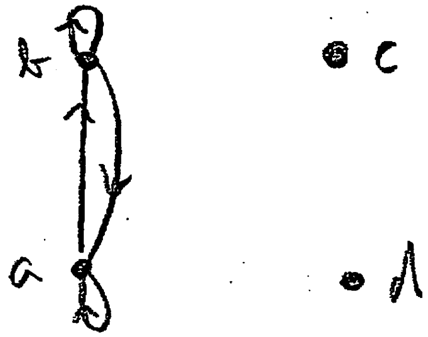


Angabe als Menge:
$R = \{(a,a),(b,b),(c,c),(d,d),(a,b)\}$

Durch diesen Graphen wird eine reflexive Relation R dargestellt (Begründung wie in a)); R ist nicht symmetrisch, da $(a,b) \in R$ und $(b,a) \notin R$ gilt.

Nachweis der Transitivität: Es sei $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R$. Dann gibt es nur zwei Möglichkeiten, für die dies zutrifft: 1. $x=a$, $y=a$ und $z=b$; 2. $x=a$, $y=b$, $z=b$. In beiden Fällen gilt $(x,z) \in R$, d.h., R ist transitiv.

c)



Angabe als Menge:
$R=\{(a,a),(b,b),(a,b),(b,a)\}$

R ist nicht reflexiv, da $(d,d) \notin R$; R ist symmetrisch, da sowohl $(a,b) \in R$ als auch $(b,a) \in R$ gibt und da es keine weiteren Kanten zwischen zwei verschiedenen Knoten gibt.

Nachweis der Transitivität: Es sei $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R$. Es gibt nur vier Möglichkeiten, für die dies zutrifft: 1. $x=a, y=b, z=b$; 2. $x=a, y=b, z=a$; 3. $x=b, y=a, z=a$; 4. $x=b, y=a, z=b$. In allen vier Fällen gilt $(x,z) \in R$. Also ist R transitiv.

4. a) Auf der Menge $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ betrachten wir die folgende Relation R („Teilbarkeitsrelation"):

$$R = \Big\{(n, m) : n, m \in A \text{ und } n \mid m\Big\}.$$

Geben Sie die Elemente von R an und stellen Sie R sowohl durch einen Graphen als auch durch ein Hasse-Diagramm dar!

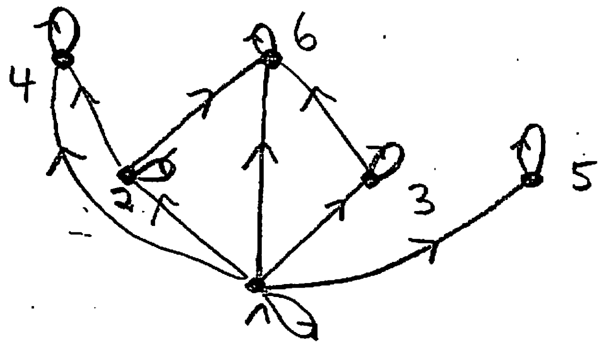
b) Nun sei A die Potenzmenge der Menge $M = \{1, 2\}$, d.h., $A = \mathcal{P}(M) = \{\emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1, 2\}\}$. Auf der Menge A betrachten wir die folgende Relation R („Inklusion"):

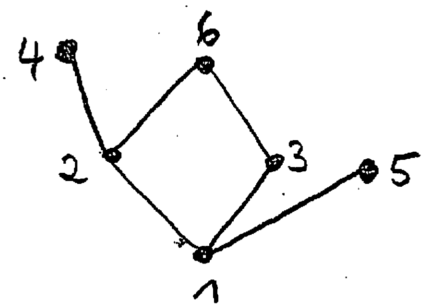
$$R = \Big\{(X, Y) : X, Y \in A \text{ und } X \subseteq Y\Big\}.$$

Stellen Sie R sowohl durch einen Graphen als auch durch ein Hasse-Diagramm dar!

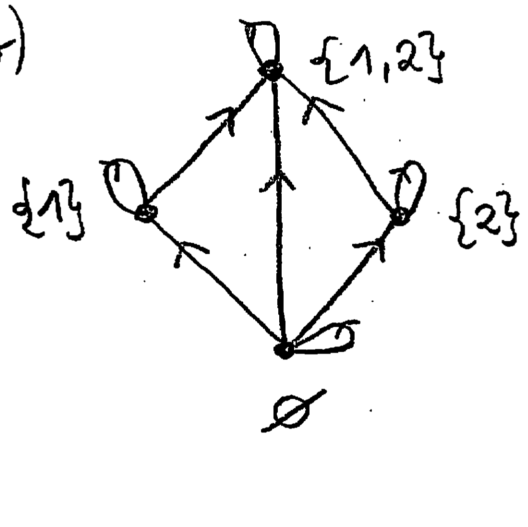
c) Wie b) für $M = \{1, 2, 3\}$: Geben Sie zunächst die Menge $A = \mathcal{P}(M)$ an; stellen Sie diesmal R nur als Hasse-Diagramm (und nicht als Graphen) dar!

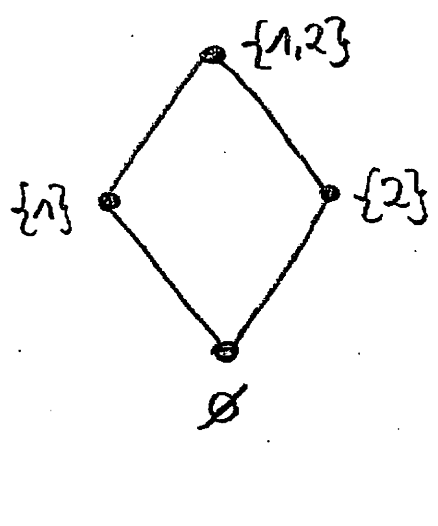
a) $R = \{(1,1), (2,2), (3,3), (4,4), (5,5), (6,6), (1,2), (1,3),$
$(1,4), (1,5), (1,6), (2,4), (2,6), (3,6)\}$



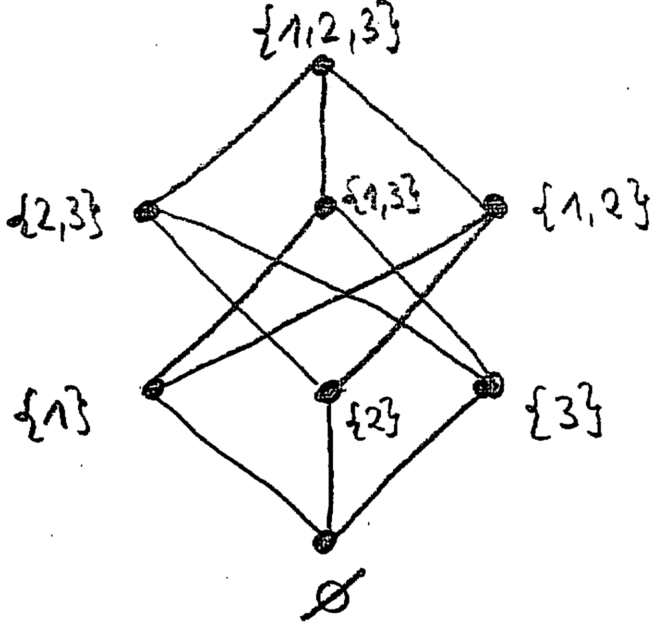


b)





c) $A = \mathcal{P}(M) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}, \{1,2,3\}\}$



oder (etwas anders gezeichnet)