—L.31—

Mathematik I für Studierende der Informatik (Diskrete Mathematik)

Thomas Andreae, Christoph Stephan

Wintersemester 2011/12

Blatt 10

B: Hausaufgaben zum 12./13. Januar 2012

2. a) G sei die symmetrische Gruppe S_3 und $H = <(1,2)>$ sei die von der Transposition $(1,2)$ erzeugte zyklische Untergruppe von G. Man gebe sowohl die Zerlegung von G in Linksnebenklassen von H als auch die Zerlegung von G in Rechtsnebenklassen von H an.

b) G sei die symmetrische Gruppe S_6; H sei eine Untergruppe von G mit 360 Elementen. Man gebe eine kurze Begründung, weshalb für alle $g \in G$ gilt: Die Linksnebenklasse gH ist gleich der Rechtsnebenklasse Hg.

c) $G = E(\mathbb{Z}_{42})$ sei die Einheitengruppe des Rings $\mathbb{Z}_{42}$. Man gebe die Elemente von G an! Außerdem gebe man eine kurze Begründung, weshalb für alle Untergruppen H von G und alle $g \in G$ gilt: Die Linksnebenklasse gH ist gleich der Rechtsnebenklasse Hg.

/6

a) $H = \{id, (1,2)\}$
Linksnebenklassen: H, $(1,3)H = \{(1,3), (1,3)(1,2)\} = \{(1,3), (1,2,3)\}$, $(2,3)H = \{(2,3), (1,3,2)\}$
Rechtsnebenklassen: H, $H(1,3) = \{(1,3), (1,3,2)\}$, $H(2,3) = \{(2,3), (1,2,3)\}$.

b) $|S_6| = 6! = 720$, H hat $\frac{|S_6|}{2}$ Elemente $\Rightarrow$ Es gibt nur 2 Linksnebenklassen: H und $S_6 \setminus H$. Für die Rechtsnebenklassen gilt dasselbe. $\Rightarrow$ Beh.

c) $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7 \Rightarrow E(\mathbb{Z}_{42}) = \{1, 5, 11, 13, 17, 19, 23, 25, 29, 31, 37, 41\}$, da $E(\mathbb{Z}_{42})$ gerade die zu 42 teilerfremden Zahlen $k \in \{1, \dots, 41\}$ enthält.
Da $E(\mathbb{Z}_{42})$ kommutativ ist, gilt $gH = Hg$.

4. a) Es seien $a(x) = x^5 + 2x^4 + 3x^3 + x^2 + 4x + 2$ und $b(x) = x^2 + 4x + 3$ Polynome aus $\mathbb{Q}[x]$. Man bestimme Quotient und Rest, wenn $a(x)$ durch $b(x)$ geteilt wird.

b) Gegeben seien die folgenden beiden Polynome aus $\mathbb{Q}[x]$:

$$\begin{aligned} a(x) &= 6x^5 + 7x^4 - 7x^3 - 22x^2 - 25x - 15 \\ b(x) &= 3x^4 + 2x^3 - 6x^2 - 6x - 9. \end{aligned}$$

Man bestimmte den normierten größten gemeinsamen Teiler von $a(x)$ und $b(x)$ mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus für Polynome.

a) $(x^5+2x^4+3x^3+x^2+4x+2):(x^2+4x+3) = x^3-2x^2+8x-25$

$$\begin{aligned}
&-(x^5+4x^4+3x^3) \\
&\quad -2x^4 \\
&-(-2x^4-8x^3-6x^2) \\
&\quad 8x^3+7x^2 \\
&-(8x^3+32x^2+24x) \\
&\quad -25x^2-20x+2 \\
&-(-25x^2-100x-75) \\
&\quad 80x+77
\end{aligned}$$

Also ist $a(x) = q(x)b(x) + r(x)$ mit
$q(x) = x^3-2x^2+8x-25$ und $r(x) = 80x+77$

b) Der Euklidische Algorithmus ergibt

$6x^5+7x^4-7x^3-22x^2-25x-15 =$
$(3x^4+2x^3-6x^2-6x-9)\cdot(2x+1) + 3x^3-4x^2-x-6,$
$3x^4+2x^3-6x^2-6x-9 = (3x^3-4x^2-x-6)(x+2)+3x^2+2x+3,$
$(3x^3-4x^2-x-6) = (3x^2+2x+3)(x-2)+0.$

$\Rightarrow$ Ein größter gemeinsamer Teiler der Polynome ist $3x^2+2x+3$; der normierte größte gemeinsame Teiler ist $x^2+\frac{2}{3}x+1$.