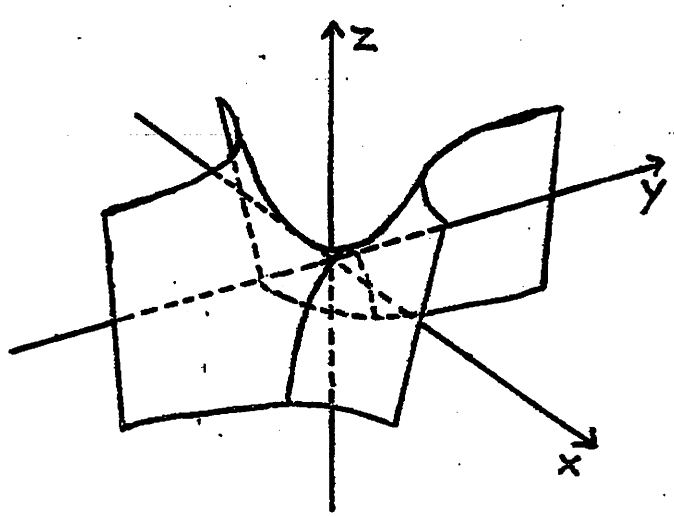
Ein Beispiel, durch das der Begriff des <u>Sattelpunktes</u> illustriert wird: Die Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch

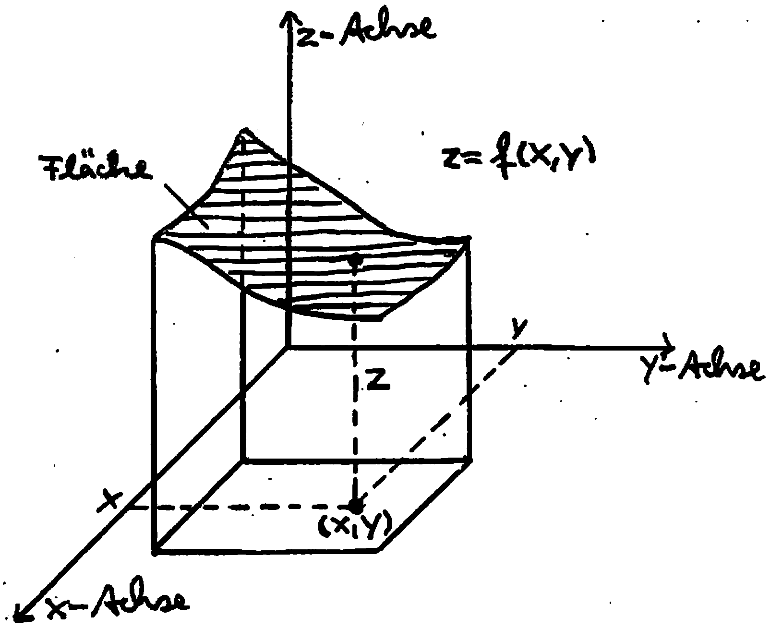
$$f(x,y) = x \cdot y.$$

Dann gilt $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y$ und $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$. An der Stelle $(x_0,y_0) = (0,0)$ gilt also $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = 0$, d.h., die Bedingung „Gradient ist gleich dem Nullvektor" ist erfüllt. Trotzdem liegt bei $(0,0)$ kein lokales Extremum vor, da es in beliebiger Nähe von $(0,0)$ sowohl positive, als auch negative Funktionswerte gibt. Es liegt also ein Sattelpunkt vor. (Überprüfen Sie dies mit Hilfe der Hesseschen Matrix!)

<u>Graph der Funktion $f(x,y) = x \cdot y$:</u>

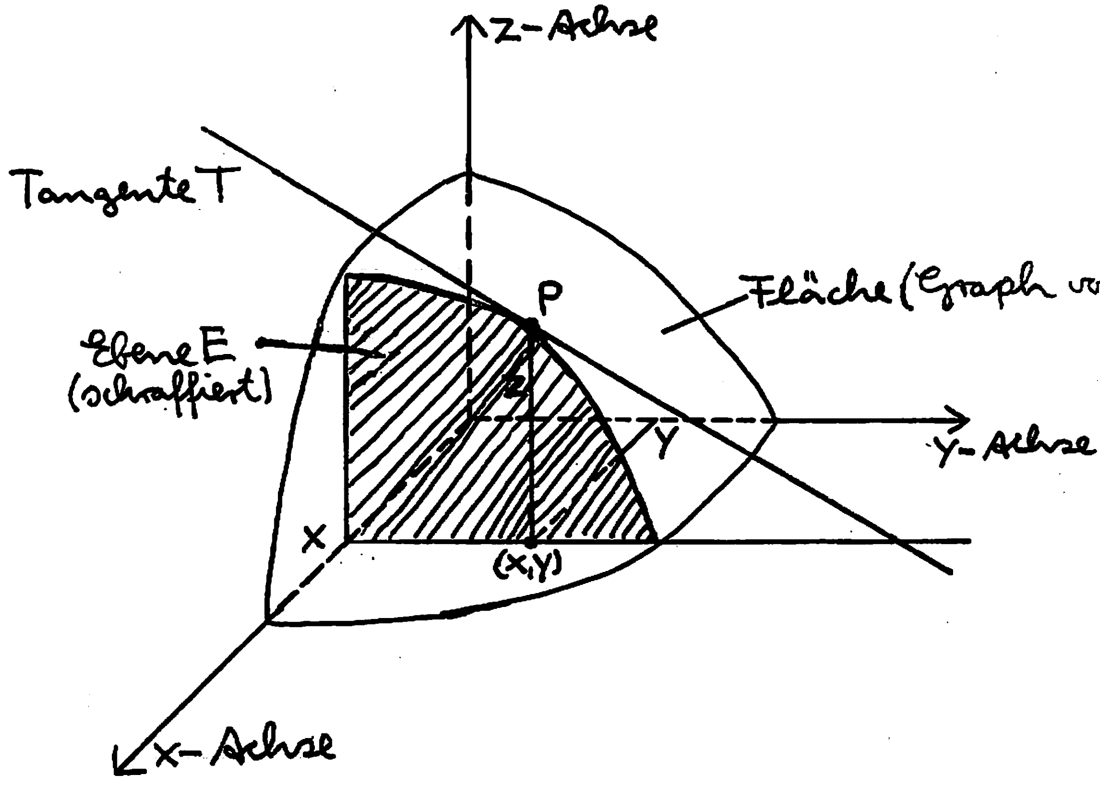


Eine Zeichnung, die den Begriff der <u>Fläche</u> („Gebirge", „Landschaft") illustriert. Oder, anders gesagt: Der <u>Graph einer Funktion $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$</u> wird in der nachfolgenden Zeichnung dargestellt.



Im Skript wurde gesagt (vergl. Seite 145):

$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ gibt die <u>Steigung des Graphen von f in Richtung der y-Achse an</u>. Im Folgenden wird noch einmal genauer beschrieben, was damit gemeint ist: Wir betrachten den Graphen von f, den wir uns wie gewohnt als Fläche vorstellen. Auf dieser Fläche betrachten wir einen Punkt $P=(x,y,z)$ mit $z=f(x,y)$ sowie die Ebene E, die P enthält und die parallel zur y- und z-Achse verläuft (siehe Zeichnung). Diese Ebene schneidet aus dem Graphen von f eine Kurve aus, die durch



den Punkt P geht. An diese Kurve können wir im Punkt P die Tangente T anlegen. (Man beachte: Sowohl die ~~Kurve~~ als auch die Tangente T verlaufen in E; siehe Zeichnung auf Seite E. 12.)

<u>Die partielle Ableitung</u>

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$$

<u>gibt die Steigung der Tangente T an.</u>