Tutorium: Analysis und Lineare Algebra

Vorbereitung der Bonusklausur am 07.05.2012

Lösungen der Aufgaben

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Aufgabe 1a

Es sind zwei Fälle zu unterscheiden:

<u>Fall 1: $x < \frac{1}{2}$</u>

$$
\begin{aligned}
\frac{5}{2x-1} &\leq \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow \quad 5 &\geq x - \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow \quad \frac{11}{2} &\geq x
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad L_1 = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$$

<u>Fall 2: $x > \frac{1}{2}$</u>

$$
\begin{aligned}
\frac{5}{2x-1} &\leq \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow \quad 5 &\leq x - \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow \quad \frac{11}{2} &\leq x
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad L_2 = \left[\frac{11}{2}, \infty\right)$$

Es folgt

$$L = L_1 \cup L_2 = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right) \cup \left[\frac{11}{2}, \infty\right).$$

Aufgabe 1b I

Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

Fall 1: $x < -\frac{3}{2}$

$$\begin{aligned} \frac{|2x+3|}{3x-5} &\leq -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad -2x-3 &\geq -\frac{3}{2}x+\frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow \quad -\frac{11}{2} &\geq \frac{1}{2}x \\ \Leftrightarrow \quad -11 &\geq x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad L_1 = \left(-\infty, -11\right]$$

Fall 2: $x > \frac{5}{3}$

$$\begin{aligned} \frac{|2x+3|}{3x-5} &\leq -\frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \quad 2x+3 &\leq -\frac{3}{2}x+\frac{5}{2} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} &\leq -\frac{7}{2}x \\ \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{7} &\geq x \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad L_2 = \emptyset$$

Aufgabe 1b II

Es sind drei Fälle zu unterscheiden:

<u>Fall 3: $-\frac{3}{2} < x < \frac{5}{3}$</u>

$$
\begin{aligned}
& \frac{|2x+3|}{3x-5} && \leq && -\frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & 2x+3 && \geq && -\frac{3}{2}x + \frac{5}{2} \\
\Leftrightarrow\quad & \frac{1}{2} && \geq && -\frac{7}{2}x \\
\Leftrightarrow\quad & -\frac{1}{7} && \leq && x
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad L_3 = \left[-\frac{1}{7}, \frac{5}{3}\right)$$

Insgesamt ergibt sich

$$
\begin{aligned}
L &= L_1 \cup L_2 \cup L_3 \\
&= \left(-\infty, -11\right] \cup \left[-\frac{1}{7}, \frac{5}{3}\right).
\end{aligned}
$$

Aufgabe 1c

Es müssen die folgenden Fälle unterschieden werden:

- $x < -7$
- $-7 \leq x < -2$
- $-2 < x < \frac{9}{4}$
- $\frac{9}{4} \leq x < 3$
- $x > 3$

Aufgabe 2

Als Grenzwert ergibt sich $a = \frac{2}{3}$. Überprüfen mithilfe der Definition der Konvergenz:

$$\begin{aligned} \left|\frac{2n+1}{3n} - \frac{2}{3}\right| &< \varepsilon \\ \Leftrightarrow \qquad \left|\frac{1}{3n}\right| &< \varepsilon \\ \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{3n} &< \varepsilon \\ \Leftrightarrow \qquad \frac{1}{3\varepsilon} &< n \end{aligned}$$

Für alle $n > N = \lceil \frac{1}{3\varepsilon} \rceil$ gilt $|a_n - a| < \varepsilon$ für ein beliebiges $\varepsilon > 0$. Damit ist gezeigt, dass es sich bei $a = \frac{2}{3}$ tatsächlich um den gesuchten Grenzwert handelt.

Aufgabe 3

Für die Folge $b_n = (-1)^n$ könnte mit $\varepsilon = 2$ beispielsweise der vermeintlich Grenzwert $b = 0$ bewiesen werden.

Aufgabe 4

$$\text{(i)} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-7n^4+n^3-5n+1}{3n^4+2n^2-25}\right)=-\frac{7}{3}$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3-10n^2+5}{-n^4+6n-100}\right)=0$$

$$\text{(iii)} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^6+2n^3-1}+2n}{3n^2+7n-25}\right)=\infty$$

$$\text{(iv)} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+n-2}{2n^2+2}-\frac{14n^2+8n+7}{4n^2-9}\right)=-1$$

$$\text{(v)} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+5n-8}{6n+1}+\frac{-2n^2+3n-4}{4n-7}\right)=\frac{5}{8}$$

Aufgabe 5

Es ergibt sich:

(i) Geometrische Reihe mit $q = -\frac{3}{7}$. Konvergent wegen $|q| < 1$.
Grenzwert: $\frac{7}{10} - 1 = -\frac{3}{10}$.

(ii) Harmonische Reihe. Divergent.

(iii) Geometrische Reihe mit $q = \frac{3}{2}$. Divergent wegen $|q| > 1$.

(iv) Allgemeine harmonische Reihe mit $\alpha = 2$. Konvergent.

Aufgabe 6a

Für die ersten Partialsummen ergibt sich:

$$\begin{aligned} s_1 &= a_2 = 1 \\ s_2 &= a_2 + a_3 = \frac{4}{3} \\ s_3 &= a_2 + a_3 + a_4 = \frac{3}{2} \\ s_4 &= a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = \frac{8}{5} \end{aligned}$$

Aufgabe 6b

Berechnung des Grenzwerts der Reihe:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=2}^{n}\frac{2}{k(k-1)}\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(2\cdot\sum_{k=2}^{n}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)\right)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left(2\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)\\
&= 2
\end{aligned}$$

Aufgabe 7 I

In den Intervallen $(0,2)$, $(2,5)$, $(5,11)$ und $(11,12)$ ist die Funktionen stetig, da sie dort jeweils ein Polynom ist; diese sind auf ihrem Definitionsbereich immer stetig.

$$\begin{aligned}
f(2) &= 6 \\
\lim_{x_n \to 2^-} \Big(f(x_n) \Big) &= \lim_{x_n \to 2^-} \Big(x_n^2 + 2 \Big) = 6 \\
\lim_{x_n \to 2^+} \Big(f(x_n) \Big) &= \lim_{x_n \to 2^+} \Big(-\frac{1}{2} x_n + 7 \Big) = 6
\end{aligned}$$

Wegen $\lim_{x_n \to 2^-} \Big(f(x_n) \Big) = f(2) = \lim_{x_n \to 2^+} \Big(f(x_n) \Big)$ ist f an der Stelle $x_0 = 2$ stetig.

Aufgabe 7 II

$$\begin{aligned}
\lim_{x_n \to 5^-} \Big(f(x_n)\Big) &= \lim_{x_n \to 5^-} \Big(-\frac{1}{2}x_n + 7\Big) = \frac{9}{2} \\
\lim_{x_n \to 5^+} \Big(f(x_n)\Big) &= \lim_{x_n \to 5^+} \Big(x_n - 1\Big) = 4
\end{aligned}$$

Wegen $\lim\limits_{x_n \to 5^-} \Big(f(x_n)\Big) \neq \lim\limits_{x_n \to 5^+} \Big(f(x_n)\Big)$ ist f an der Stelle $x_0 = 5$ unstetig.

$$\begin{aligned}
f(11) &= 10 \\
\lim_{x_n \to 11^-} \Big(f(x_n)\Big) &= \lim_{x_n \to 11^-} \Big(x_n - 1\Big) = 10 \\
\lim_{x_n \to 11^+} \Big(f(x_n)\Big) &= \lim_{x_n \to 11^+} \Big(2x_n - 12\Big) = 10
\end{aligned}$$

Wegen $\lim\limits_{x_n \to 11^-} \Big(f(x_n)\Big) = f(11) = \lim\limits_{x_n \to 11^+} \Big(f(x_n)\Big)$ ist f an der Stelle $x_0 = 11$ stetig.

Aufgabe 8 I

Aufgrund der Stetigkeit der beteiligten Funktionen und der Tatsache, dass die Nacheinanderausführung stetiger Funktionen wiederum stetig ist, ist f für $x \neq 0$ stetig. Es bleibt $x_0 = 0$ zu überprüfen.

Es sei $x_n = \frac{1}{\sqrt[3]{2\pi n}}$. Es gilt $(x_n) \to x_0$.

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{23}{x_n^3}\right) = \lim_{n\to\infty} \cos\left(\frac{23}{\frac{1}{\left(\sqrt[3]{2\pi n}\right)^3}}\right) = \lim_{n\to\infty} \cos\left(23 \cdot 2n\pi\right) = 1$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq f(x_0)$ ist f an der Stelle $x_0 = 0$ unstetig.

Aufgabe 8 II

Es gilt

$$\lim_{x_n \to 0} \left(-\sqrt{x_n}\right) \leq \lim_{x_n \to 0} \left(\sqrt{x_n} \cdot \cos\left(\frac{23}{x_n^3}\right)\right) \leq \lim_{x_n \to 0} \left(\sqrt{x_n}\right).$$

Hieraus folgt

$$0 \leq \lim_{x_n \to 0} \left(\sqrt{x_n} \cdot \cos\left(\frac{23}{x_n^3}\right)\right) \leq 0.$$

Nach dem Einschließungssatz folgt

$$\lim_{x_n \to 0} \left(\sqrt{x_n} \cdot \cos\left(\frac{23}{x_n^3}\right)\right) = 0.$$

Wegen $\lim\limits_{x_n \to 0} f(x_n) = f(x_0)$ ist g an der Stelle $x_0 = 0$ stetig.

Aufgabe 9

$$\lim_{n\to\infty}\left(\cos\left(\frac{\pi n^2+6n+11}{4n^2+n+3}\right)\right) = \cos\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi n^2+6n+11}{4n^2+n+3}\right)\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{8n^2+7n-1}{2n^2-9n+1}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}\left(\frac{8n^2+7n-1}{2n^2-9n+1}\right)} = \sqrt{4} = 2$$

Die Stetigkeit der cos bzw. der $\sqrt{}$-Funktion wurde verwendet, um $\lim_{n\to\infty}$ in die jeweilige Funktionen zu ziehen.

Aufgabe 10

Es ergibt sich:

$$
\begin{aligned}
f_1'(x) &= 12x^3 - 6x^2 + 20x - 5 \\
f_2'(x) &= ex^{e-1}\sin(3x)\ln(x) + 3x^e\cos(3x)\ln(x) + x^{e-1}\sin(3x) \\
f_3'(x) &= \frac{-\sin\left(\sqrt{\ln\left(\tan\left(2^x+1\right)^3\right)}\right)\cdot 3(2^x+1)^2\cdot 2^x\ln 2}{2\sqrt{\ln\left(\tan\left(2^x+1\right)^3\right)}\cdot\tan\left(2^x+1\right)^3\cdot\cos^2\left(2^x+1\right)^3} \\
f_4'(x) &= (\sin x)^{2x^2-x+1}\cdot\left((4x-1)\cdot\ln(\sin x) + (2x^2-x+1)\cdot\cot x\right)
\end{aligned}
$$

Aufgabe 11

Es gilt $\cot x = \dfrac{\cos x}{\sin x}$.

Ableiten ergibt

$$\begin{aligned}\big(\cot x\big)' &= \frac{-\sin x \sin x - \cos x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} \\ &= -\frac{\sin^2 x}{\sin^2 x} - \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = -1 - \cot^2 x.\end{aligned}$$

Wegen $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ folgt zudem

$$\big(\cot x\big)' = \frac{-1}{\sin^2 x}.$$

Aufgabe 12a

Für die ersten Ableitungen ergibt sich:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{9} \cdot (-3) \cdot \ln 2 \cdot 2^{-3x} \\
f''(x) &= \frac{1}{9} \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot \ln 2 \cdot \ln 2 \cdot 2^{-3x} \\
f'''(x) &= \frac{1}{9} \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot \ln 2 \cdot \ln 2 \cdot \ln 2 \cdot 2^{-3x}
\end{aligned}$$

Für die n-te Ableitung kann die folgende Vermutung getroffen werden:

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{9} \cdot (-3)^n \cdot (\ln 2)^n \cdot 2^{-3x} = (-1)^n \cdot 3^{n-2} \cdot (\ln 2)^n \cdot 2^{-3x}$$

Aufgabe 12b

(I) Induktionsanfang

Einsetzen von $n = 1$ in die gefundene Formel ergibt

$$f^{(1)}(x) = (-1)^1 \cdot 3^{1-2} \cdot (\ln 2)^1 \cdot 2^{-3x} = -\frac{1}{3} \cdot \ln 2 \cdot 2^{-3x} = f'(x). \quad \checkmark$$

(II) Induktionsschritt

Die Behauptung gelte für ein fest gewähltes $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned}\left(f^{(n)}(x)\right)' &= (-1)^n \cdot 3^{n-2} \cdot (\ln 2)^n \cdot 2^{-3x} \cdot \ln 2 \cdot (-3) \\ &= (-1)^{n+1} \cdot 3^{n-1} \cdot (\ln 2)^{n+1} \cdot 2^{-3x} \\ &= f^{(n+1)}(x)\end{aligned}$$

Aus (I) und (II) folgt die Gültigkeit der Formel. $\square$