Zahlenfolgen

Will man Analysis betreiben,
muss man gelegentlich was schreiben;
wir schreiben daher zu Beginn
uns ein paar schlichte Zahlen hin:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \ldots \qquad (1)$$

Wie rechts es immer weiter geht,
sich sicherlich von selbst versteht:
Ein sechstel steht an sechster Stell,
an siebter dann ein siebentel,
und was nun niemand mehr verwundert:
ein hundertstel steht bei Platz hundert.
Kurzum, an *n*-ter Position,
das wissen wir jetzt alle schon,
muss stets die Zahl ein *n*-tel steh'n,

$$\frac{1}{n}.$$

Wie schön, wie schön,
wie schön, wie schön!

Das, was soeben hier beschrieben,
wo ihr gefolgt seid mir, ihr Lieben,
wird eine *Folge* kurz genannt
von Bayern bis zur Waterkant.

Auch bei den nächsten Folgen hier
reicht wieder rechts nicht das Papier:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \ldots \qquad (2)$$

$$2, 4, 6, 8, \ldots \qquad (3)$$

$$-1, 1, -1, 1, -1, \ldots \qquad (4)$$

$$1, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{5}, 1, \frac{6}{7}, 1, \ldots \qquad (5)$$

(Man füg' an jeder, wenn man kann,
zum Spaß sechs weit're Zahlen an!)

Ganz allgemein schreibt Folgen man
in folgender Gestalt gern an:

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

wie auch auf etwas kürz're Art

(a_n),

wobei man gleich Papier einspart.

Die Folgen (1) bis (4) erhalten
auf diese Weise die Gestalten

$$\left(\frac{1}{n}\right), \left(\frac{1}{2^n}\right), (2n), \left((-1)^n\right)$$

dieweil die fünfte Folge man
z. B. so beschreiben kann

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{, falls } n \text{ ungerade} \\ \dfrac{n}{n+1} & \text{, falls } n \text{ gerade} \end{cases}$$

Wie ich mir eine Folge mal'
ist letzten Endes ganz egal,
sofern man nur dabei begreift,
wie diese läuft und läuft und läuft,

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

d. h. wie jedem *n* dabei
ein a_n zugeordnet sei.
Das n durchläuft vergnügt und heiter
dabei die ganze Zahlenleiter
1, 2, 3, 4, 5, ... usw.
Nun sind wir schon ein Stück gescheiter.

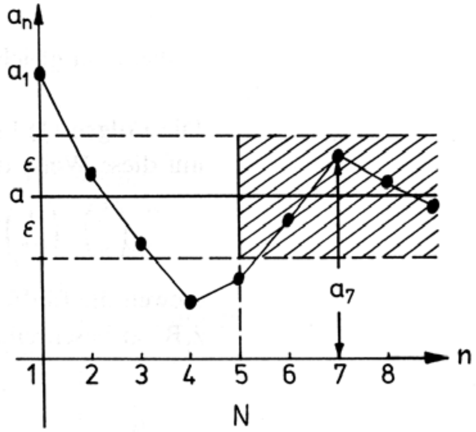
Die Zahlenfolgen laufen, laufen,
fast wie beim Sommerschluss-Verkaufen.
Was hat das nur für einen Sinn?
Wo laufen denn die Folgen hin?

Gar manche machen wilde Sprünge
und andre ausgeflippte Dinge,
Doch einige, in stiller Ruh,
sie »streben einem Grenzwert zu«.
Sie »konvergieren«, sagt man auch
(das ist schon lange Zeit so Brauch).

Was aber heißt, »sie konvergieren?«
Das will ich kurz euch definieren:

Man sagt, es konvergiert (a_n)
zum Grenzwert, welchen a ich nenn',
wenn, wie skizziert im rechten Bild,
die folgende Bedingung gilt:

»Zu jeder positiven Zahl
– ich nenn sie ε *einmal –*
gibt es ein positives N,
für das ich folgendes erkenn':
$\forall\ n > N: |a_n - a| < \varepsilon$.«



In Formelzeichen, wie durchtrieben,
wird dies erstaunlich kurz beschrieben :

$$\lim_{n\to\infty} a_n = n\cdot$$

Auch wird dies so symbolisiert:

$a_n \to a$ für $n \to \infty$,

wie auch in Kurzform aufnotiert:

$a_n \to a$.

So einfach alles dies gesagt,
so schwer sich mancher damit plagt.
Drum lieber Leser, sei recht pfiffig,
und mach' dir's an Exempeln griffig.

Zum Beispiel Folgen (1) und (2),
sie streben munter, eins, zwei, drei,
zum Grenzwert Null, das sieht man schon.
Prüf's nach mit N und ε.

Bei (3), (4) ist man angeschmiert,
weil überhaupt nichts konvergiert.
Guckt man sich auch die Augen aus,
kein Grenzwert springt dabei heraus.
Man möchte fast den Mut verlieren,
denn diese Folgen »*divergieren*.«

Die Folge (5) dagegen strebt,
was uns're Stimmung merklich hebt,
zum Grenzwert 1, ihr sei's gedankt,
obwohl sie dabei etwas schwankt.

Der Leser such' sich weit're Fälle,
jongliere sie wie Zirkusbälle,
hol' N und ε herbei,
vermische dies zu einem Brei,
der klumpenfrei ist, schlank und glatt,
bis alles er verstanden hat.

Der junge Math'matik-Student,
der dies begriffen hat und kennt,
der hat ein sich'res Fundament,
wenn frohgemut er weiter rennt.

[Friedrich Wille: Humor in der Mathematik,
Göttingen (Vandenhoeck & Ruprecht) 1992[4], S. 38-41]