Mathematik II für Studierende der Informatik
(Analysis und Lineare Algebra)

Thomas Andreae, Henrik Bachmann, Rosona Eldred, Malte Moos

Sommersemester 2012
Blatt 11

B: Hausaufgaben zum 5. Juli 2012

2. a) Die komplexen Matrizen A, B und C seien gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 2 & -i \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} i & -i \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad C = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Falls möglich, berechne man die Produkte AB, AC, BC und CB. (Falls ein oder mehrere Produkte nicht existieren, gebe man eine *kurze* Begründung, wieso dies so ist.)

b) Für $z = a + ib \in \mathbb{C}$ gelte $\overline{z} = \frac{3+4i}{2-3i}$. Bestimmen Sie a und b.

c) Die komplexen Zahlen $z_1, \ldots, z_4$ seien gegeben durch

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \sin\frac{\pi}{4}\right), \qquad z_2 = -1 + i, \qquad z_3 = z_1 \cdot z_2 \quad \text{sowie} \quad z_4 = \overline{z_2}.$$

Geben Sie in einer Skizze die Lage von $z_1, \ldots, z_4$ in der Gaußschen Zahlenebene an.

d) Beschreiben Sie die folgenden Teilmengen der komplexen Ebene durch geometrische Begriffe (wie z.B. Kreis, Mittelpunkt, Radius, Gerade, ...):

(i) $M_1 = \left\{z \in \mathbb{C} : |z - (3+2i)| = 2\right\}$;

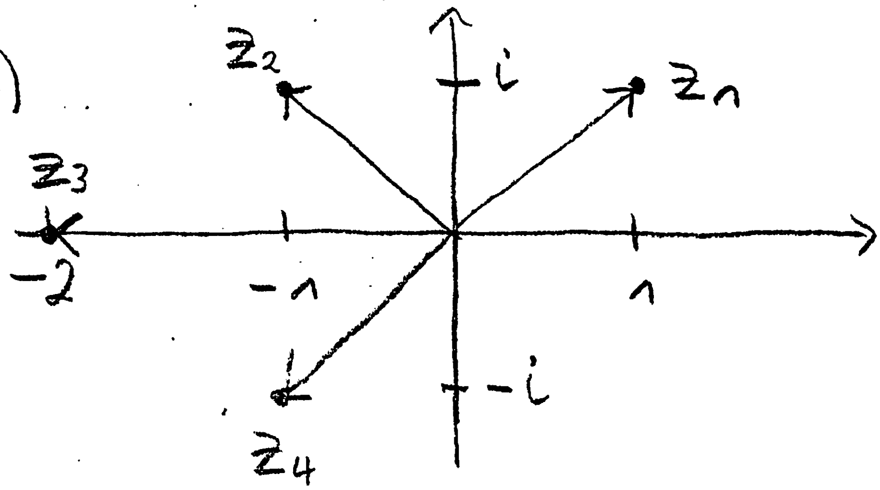
(ii) $M_2 = \left\{z \in \mathbb{C} : |z - i| = |1 - z|\right\}$.

a) AB ex. nicht, da Zeilenlänge von $A \neq$ Spaltenl. von B

$AC = \begin{pmatrix} 2 \\ -3i \end{pmatrix}$, $BC = (1 - i)$, $CB = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ i & -i \end{pmatrix}$.

b) $\overline{z} = \frac{(3+4i)(2+3i)}{13} = \frac{6-12+17i}{13} \Rightarrow a = -\frac{6}{13}, b = -\frac{17}{13}$.

c)



d) (i) Es handelt sich um die Menge aller $z \in \mathbb{C}$, deren Abstand von $3+i2$ gleich 2 ist. Anders gesagt: M_1 beschreibt einen Kreis mit Mittelpunkt $(3,2)$ und Radius 2.

(ii) Es handelt sich um die Gerade durch $(0,0)$ und $(1,1)$.

3. Eine zu Aufgabe 4 von Blatt 10 ähnliche Aufgabe, die diesmal jedoch mit der *Lagrange-Methode* gelöst werden soll: Ein Unternehmen produziert zwei Sorten eines Gutes. Beim Verkauf von x bzw. y Einheiten sei der Gewinn pro Tag gegeben durch

$$f(x,y) = -0.1x^2 - 0.2xy - 0.2y^2 + 47x + 48y - 600.$$

Ähnlich wie in Aufgabe 4 von Blatt 10 ist eine Nebenbedingung zu berücksichtigen, die in Form einer Gleichung vorliegt:

$$x + y = 200. \tag{$\star$}$$

Gesucht sind x und y, so dass der Gewinn $f(x,y)$ maximal wird.

a) Stellen Sie die dazugehörige Lagrange-Funktion $L(x,y,\lambda)$ auf und bestimmen Sie die einzige kritische Stelle (x,y) von f unter der Nebenbedingung $(\star)$.

b) Zeigen Sie mithilfe der geränderten Hesseschen Matrix, dass an der gefundenen Stelle ein lokales Maximum vorliegt.

a) $L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$ für $g(x,y) = x+y-200$

$$\frac{\partial L}{\partial x}(x,y,\lambda) = -0.2x - 0.2y + 47 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}(x,y,\lambda) = -0.2x - 0.4y + 48 + \lambda = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = x + y - 200 = 0$$

Eindeutig bestimmte Lösung: $(x,y,\lambda) = (195, 5, -7)$; einzige kritische Stelle von f unter der Nebenbedingung $(\ast)$ ist $(x,y) = (195,5)$.

b) Die geränderte Hessesche-Matrix $\overline{H}$ lautet:

$$\overline{H} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -0.2 & -0.2 \\ 1 & -0.2 & -0.4 \end{pmatrix}.$$

Da die Matrix konstant ist, haben wir einfach nur $\overline{H}$ geschrieben. Es gilt

$$\det \overline{H} = -\begin{vmatrix} 1 & -0.2 \\ 1 & -0.4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -0.2 \\ 1 & -0.2 \end{vmatrix} = 0.2 > 0,$$

also liegt ein lokales Maximum von f unter der Nebenbedingung (*) vor.