Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der Bonusklausur am 14.01.2012

Lösungen der Aufgaben

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Aufgabe 1

a) (i) wahr
   (ii) falsch
   (iii) wahr
   (iv) falsch
   (v) falsch

b) R ist weder Äquivalenz- noch Ordnungsrelation.

Aufgabe 2

a) $R = \Big\{(1,1),\ (2,2),\ (3,3),\ (1,2),\ (2,3)\Big\}$
- nicht transitiv, da z.B. $(1,3)$ fehlt

b) $R = \emptyset$
- triviale Symmetrie und Antisymmetrie

c) $R = \Big\{(1,2),\ (2,1),\ (2,3),\ (3,2),\ (1,3)\Big\}$
- nicht symmetrisch, da $(3,1)$ fehlt

d) $R = \emptyset$
- nicht reflexiv, folglich weder Äquivalenz- noch Ordnungsrelation

Aufgabe 3

a) Es gibt $2^{|A \times A|} = 2^9 = 512$ binäre Relationen R_a.

b) Es gibt $2^{|A \times B \times A|} = 2^{3 \cdot 4 \cdot 3} = 2^{36}$ ternäre Relationen R_b.

c) Die Elemente (a, a), (b, b) und (c, c) müssen enthalten sein. Die restlichen 6 Elemente können enthalten sein oder nicht enthalten sein. Es existieren folglich $2^6 = 64$ reflexive binäre Relationen über A.

Aufgabe 4

a) Die folgenden Produkte existieren: AA, BA, CD, DB und DC.

b) Es gilt:

$$BA^T = \begin{bmatrix} -11 & -2 & -1 \\ 11 & 1 & -4 \end{bmatrix}, \quad CD = \begin{bmatrix} 6 & 10 \\ -3 & -5 \end{bmatrix}, \quad DC = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}.$$

AB existiert nicht.

c) Die Anzahl der Spalten der linken Matrix muss mit der Anzahl der Zeilen der rechten Matrix übereinstimmen.

Aufgabe 5

a) Es seien $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ und $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Es folgt

$$AB = \begin{bmatrix} 4 & 11 \\ 8 & 23 \end{bmatrix} \quad \text{und} \quad BA = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 17 & 24 \end{bmatrix}.$$

Es gilt $AB \neq BA$. Die Multiplikation von 2×2 Matrizen ist folglich nicht in jedem Fall kommutativ.

b)
- Multiplikation mit der Nullmatrix
- Multiplikation mit der Einheitsmatrix
- Multiplikation einer Matrix mit sich selbst

Aufgabe 6 I

Es sind die folgenden beiden Aussagen zu zeigen:

(1) $f(A_1 \cup A_2) \subseteq f(A_1) \cup f(A_2)$

(2) $f(A_1 \cup A_2) \supseteq f(A_1) \cup f(A_2)$

Nachweis von (1):

Es sei $b \in f(A_1 \cup A_2)$. Dann existiert ein Element $a \in A_1 \cup A_2$ mit $f(a) = b$. Es folgt $a \in A_1$ oder $a \in A_2$. Für $a \in A_1$ folgt $f(a) = b \in f(A_1)$ und folglich auch $b \in f(A_1) \cup f(A_2)$. Analog für $a \in A_2$.

Aufgabe 6 II

Nachweis von (2):

Es sei $b \in f(A_1) \cup f(A_2)$. Es sei $b \in f(A_1)$. Dann existiert ein Element $a \in A_1$ mit $f(a) = b$. Wegen $a \in A_1$ gilt $a \in A_1 \cup A_2$. Hieraus folgt $f(a) = b \in f(A_1 \cup A_2)$. Analog für $b \in f(A_2)$.

Da sowohl (1) als auch (2) gelten, folgt

$$f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2). \quad \square$$

Aufgabe 7 I

Bestimmen von $\mathrm{ggT}\,(149, 42)$:

$$\begin{aligned}
149 &= 3 \cdot 42 + 23 \\
42 &= 1 \cdot 23 + 19 \\
23 &= 1 \cdot 19 + 4 \\
19 &= 4 \cdot 4 + 3 \\
4 &= 1 \cdot 3 + 1 \\
3 &= 3 \cdot 1 + 0
\end{aligned}$$

Es folgt $\mathrm{ggT}\,(149, 42) = 1$, folglich existiert das Inverse.

Aufgabe 7 II

Rückwärtseinsetzen ergibt:

$$\begin{aligned}
1 &= 4 - 1 \cdot 3 \\
&= 4 - 1 \cdot (19 - 4 \cdot 4) \\
&= -1 \cdot 19 + 5 \cdot 4 \\
&= -1 \cdot 19 + 5 \cdot (23 - 1 \cdot 19) \\
&= 5 \cdot 23 - 6 \cdot 19 \\
&= 5 \cdot 23 - 6 \cdot (42 - 1 \cdot 23) \\
&= -6 \cdot 42 + 11 \cdot 23 \\
&= -6 \cdot 42 + 11 \cdot (149 - 3 \cdot 42) \\
&= 11 \cdot 149 - 39 \cdot 42
\end{aligned}$$

Aufgabe 7 III

Es folgt:

$$1 \equiv 11 \cdot 149 - 39 \cdot 42 \equiv -39 \cdot 42 \pmod{149}$$

Es ist $x = -39 = 110$ das gesucht Inverse von 42 in $\mathbb{Z}_{149}$.

b) Es gilt:

$$\begin{aligned} 51 &= 3 \cdot 17 \\ 93 &= 3 \cdot 31. \end{aligned}$$

51 und 93 sind nicht teilerfremd. Folglich existiert kein multiplikatives Inverses für 51 in $\mathbb{Z}_{93}$.

c) Es gilt, dass $m-1$ in $\mathbb{Z}_m$ stets zu sich selbst invers ist. Folglich ist 22 in $\mathbb{Z}_{23}$ zu sich selbst invers.

Aufgabe 8

a) Nach dem Satz von Fermat gilt $3^{18} \equiv 1 \pmod{19}$. Es folgt

$$3^{966} \equiv \left(3^{18}\right)^{53} \cdot 3^{12} \equiv 1^{53} \cdot 3^{12} \equiv 11 \pmod{19}.$$

b) Es gilt $4^3 \equiv 1 \pmod{21}$. Es folgt

$$4^{148} \equiv \left(4^{3}\right)^{49} \cdot 4 \equiv 1^{49} \cdot 4 \equiv 4 \pmod{21}.$$

Aufgabe 9

a) $\pi = (1,3,2)(4,5,7,6)(8,9)$.

b) $\pi = (1,2)(1,3)(4,6)(4,7)(4,5)(8,9)$.

c) π besteht aus 6 Transpositionen, ist also gerade.

d) $\operatorname{sign} \pi = +1$.

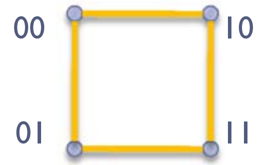
e) π ist eine gerade, ρ ist eine ungerade Permutation. Diese können nicht identisch sein, da gerade Permutationen nur durch andere gerade Permutationen dargestellt werden können; analog für ungerade Permutationen.

Aufgabe 10 I

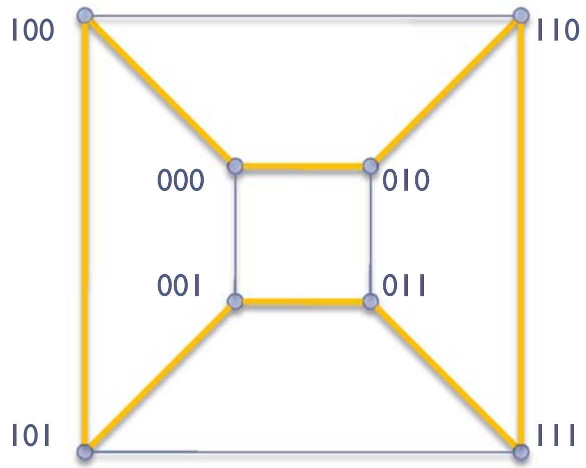
Induktionsanfang

Die Hyperwürfel Q_2 und Q_3 besitzen Hamiltonkreise.

Hyperwürfel Q_2



Hyperwürfel Q_3



Aufgabe 10 II

<u>Induktionsannahme</u>

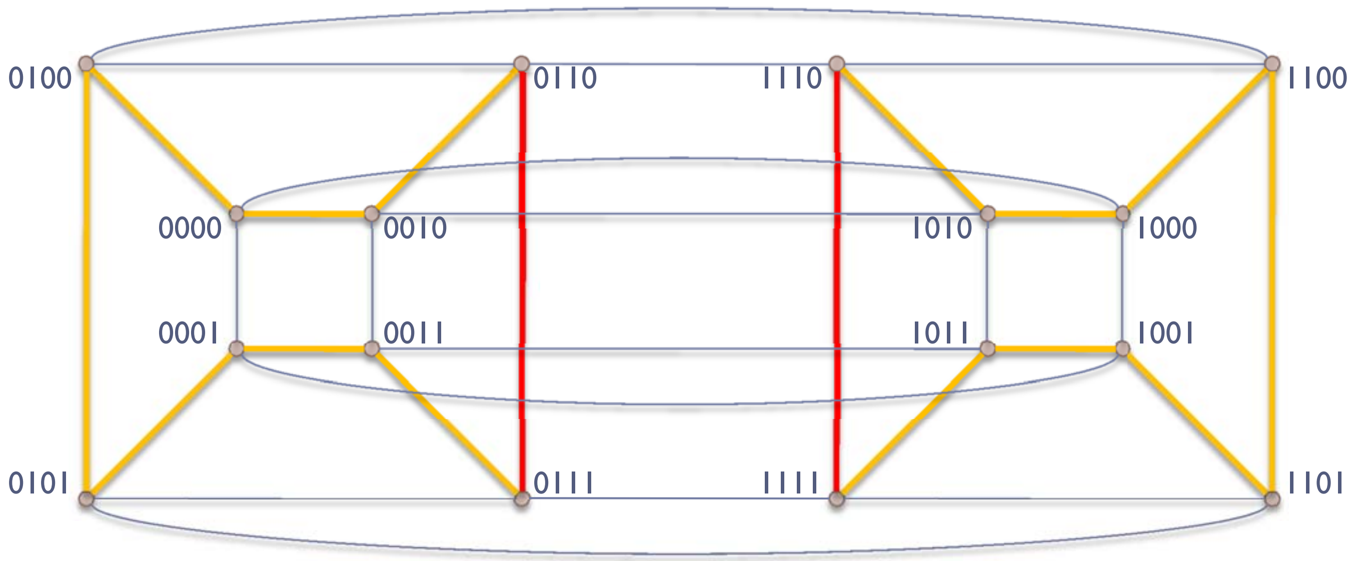
Für ein fest gewähltes $n \in \mathbb{N}$ besitzt der Hyperwürfel Q_n einen Hamiltonkreis.

<u>Induktionsschritt</u>

Der Hyperwürfel Q_{n+1} entsteht aus Q_n, indem man Q_n verdoppelt (und die Kopie spiegelt) und die entsprechenden Verbindungskanten hinzufügt.

Aufgabe 10 III

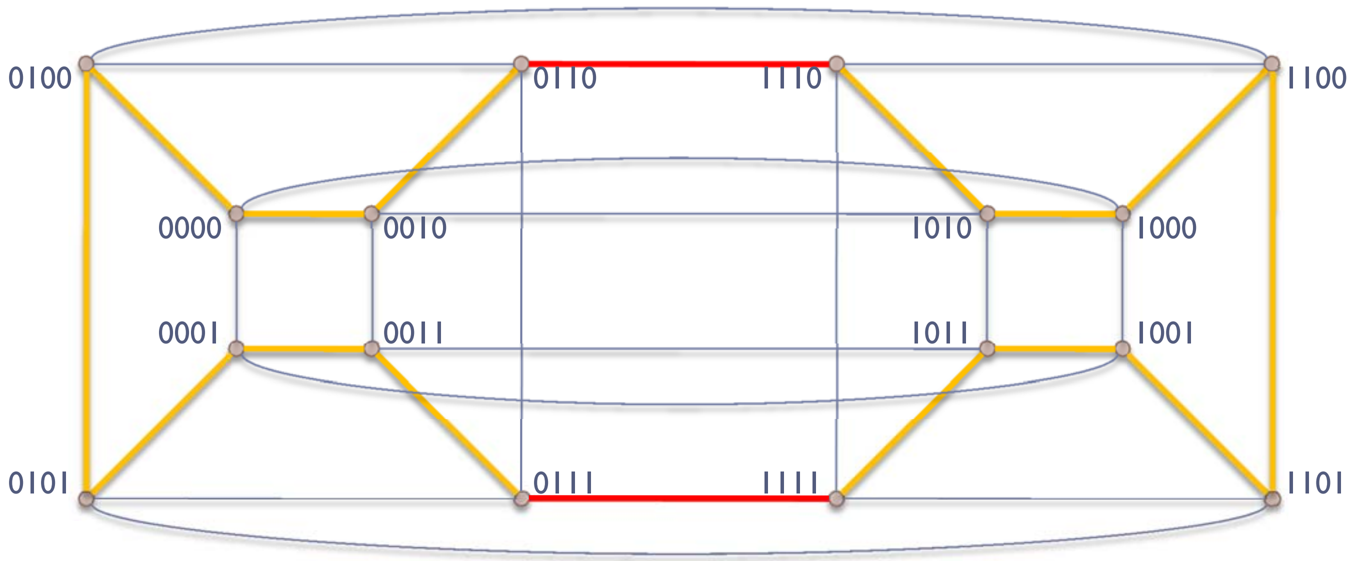
Demonstration am Beispiel von Q_4:



Die orangenen (bzw. roten) Kanten sind die Hamiltonkreise der beiden enthaltenen Hyperwürfel Q_3. Die beiden roten Kanten werden aus den Hamiltonkreisen "entfernt", die orangenen Kantenzüge werden neu verbunden.

Aufgabe 10 IV

Es entsteht der Hamiltonkreis des Q_4:



Auf diese Weise lässt sich analog der Hamiltonkreis für jeden Hyperwürfel Q_{n+1} aus den (nach der Induktionsannahme exitierenden) Hamiltonkreisen der beiden Hyperwürfel Q_n erzeugen. $\square$

Aufgabe 11

a) H_1 besitzt $\binom{n}{2} = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$ Kanten. H_2 besitzt $2n-1$ Kanten. Für die Verbindung von H_1 und H_2 werden $n \cdot 2n = 2n^2$ Kanten benötigt. Als Gesamtanzahl der Kanten von G folgt:

$$\frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n + 2n - 1 + 2n^2 = \frac{5}{2}n^2 + \frac{3}{2}n - 1.$$

b) Für $n >= 3$ gilt: Besitzt der Baum z.B. die Form eines Sterns, so ist kein Hamiltonkreis möglich.

c) Die Knoten von H_1 haben den Grad $3n-1$; dieser ist ungerade, falls n gerade ist. Es existiert dann keine Eulersche Linie.

Aufgabe 12

Für jeden Graphen gilt:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|.$$

Für den Graphen G gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{v \in V} d(v) &= 15 \cdot 1 + 5 \cdot 2 + 55 \cdot 5 + 25 \cdot 8 \\ &= 500\end{aligned}$$

Hieraus folgt direkt die Anzahl der Kanten von G:

$$|E| = 250.$$

Aufgabe 13

Wahr oder falsch?

(i) Falsch, die Aussage gilt nur für vollständige Graphen mit mind. 3 Knoten.

(ii) Wahr.

(iii) Wahr, da ein ungerichteter Graph maximal $\binom{n}{2}$ Knoten besitzen kann.

(iv) Falsch.

(v) Falsch, diese Bedingung ist nur notwendig, allerdings nicht hinreichend.