A

1. Bonusklausur zur Vorlesung „Mathematik II (ALA)“

Thomas Andreae **7. Mai 2012, 8:15 bis 9:30 Uhr**

Insgesamt sind 40 Punkte zu erreichen. Es genügt in der Regel nicht, nur das Ergebnis einer Rechnung bzw. die Antwort auf eine Frage anzugeben, sondern es sollte auch der Rechenweg ersichtlich sein bzw. eine kurze Begründung für die Antwort gegeben werden. Wer mindestens 20 Punkte erzielt, hat bestanden. Viel Erfolg!

Aufgabe 1 (*10 Punkte*)

a) Bestimmen Sie diejenigen $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, die die Ungleichung

$$\frac{-5}{x+2} \leq 3$$

erfüllen. Mit L sei die Menge dieser x bezeichnet. Geben Sie L in Intervallschreibweise an. (*7 Punkte*)

b) Leiten Sie die folgende Funktion ab: $f(x) = e^{\sqrt{3x+1}} \cdot \sin x$. (*3 Punkte*)

Aufgabe 2 (*10 Punkte*)

Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_n = \dfrac{-4n+1}{n+2}$. Es sei $a = -4$.

a) Berechnen Sie zunächst $|a_n - a|$, d.h. den Abstand des Folgenglieds a_n von $a = -4$. (*3 Punkte*)

b) Zeigen Sie sodann durch direktes Zurückführen auf die Definition der Konvergenz, dass $(a_n) \to a$ gilt. (*4 Punkte*)

c) Man gebe zu $\varepsilon = \frac{1}{100}$ ein möglichst kleines $N \in \mathbb{N}$ an, so dass $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$ gilt. (*3 Punkte*)

Aufgabe 3 (*10 Punkte*)

a) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+4n-1}{n+2} - \frac{n^2+2}{n+1}\right).$$

(*4 Punkte*)

b) Wir betrachten die folgende Reihe:

$$\sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{3}{7}\right)^i.$$

Geben Sie für diese Reihe die ersten drei Glieder an und berechnen Sie die ersten drei Partialsummen. Falls Konvergenz vorliegt, bestimme man den Grenzwert; andernfalls begründe man, warum die Reihe nicht konvergiert. (*6 Punkte*)

Aufgabe 4 (*10 Punkte*)

a) Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

   (i) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{3n+1}$, (*3 Punkte*)

   (ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\left(e^{\frac{2n^2+1}{n^2+5}}\right)\right)$. (*3 Punkte*)

   Falls Sie in Ihren Rechnungen von der Stetigkeit einer der beteiligten Funktionen Gebrauch gemacht haben, so ist darauf hinzuweisen.

b) Geben Sie eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ an, für die (i) und (ii) gilt:

   (i) f ist an der Stelle $x=0$ unstetig und sonst überall stetig;

   (ii) f ist an der Stelle $x=1$ nicht differenzierbar, aber bis auf die Stellen $x=0$ und $x=1$ überall differenzierbar. (Angabe von f genügt, Beweise brauchen nicht gegeben zu werden.) (*4 Punkte*)