Mathematik I für Studierende der Informatik
(Diskrete Mathematik)

Thomas Andreae, Christoph Stephan

Wintersemester 2011/12
Blatt 3

A: Präsenzaufgaben am 3./4. November 2011

1. Wahr oder falsch? (Kurze Begründung!)

a) $89 \equiv 16 \pmod 5$

b) $89 \equiv -16 \pmod 5$

c) $-108 \equiv 11 \pmod{17}$

d) $-99 \equiv -1 \pmod 4$

2. Man bestimmte $\mathrm{ggT}(768, 216)$ mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus.

3. Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 1$ die folgende Aussage $A(n)$ gilt:

$$6 \mid \big(7^n - 1\big).$$

B: Hausaufgaben zum 10./11. November 2011

1. a) Wahr oder falsch? (Kurze Begründung!)

(i) $177 \equiv 18 \pmod 5$

(ii) $177 \equiv -18 \pmod 5$

(iii) $-89 \equiv -12 \pmod 6$

(iv) $-123 \equiv 33 \pmod{13}$

(v) $39 \equiv -1 \pmod{40}$

(vi) $77 \equiv 0 \pmod{11}$

(vii) $2^{51} \equiv 51 \pmod 2$

b) Man bestimme $\mathrm{ggT}(7293, 378)$ mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus.

c) Berechnen Sie $\lceil\sqrt{7}\rceil$, $\lfloor\sqrt{7}\rfloor$, $\lceil 7.1\rceil$, $\lfloor 7.1\rfloor$, $\lceil -7.1\rceil$, $\lfloor -7.1\rfloor$, $\lceil -7\rceil$ und $\lfloor -7\rfloor$.

2. Beweisen Sie die Regeln (2), (3) und (4), Skript Seite 23.

3. a) Zeigen Sie mit vollständiger Induktion, dass für alle $n \geq 0$ die folgende Aussage gilt:

$$3 \mid \big(n^3 + 2n\big).$$

b) Zeigen Sie, dass sich für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $2^n \times 2^n$ - Schachbrett überdeckungsfrei durch L-Stücke belegen lässt, so dass einzig und allein das Feld in der rechten oberen Ecke frei bleibt. Die L-Stücke sollen dabei so groß wie drei Felder des Schachbretts sein.

4. a) Die Funktion $g : \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ sei gegeben durch

$$g(x, y) = \Big(xy^2, xy^2 - 3x, \big(x^2 - 2\big)y\Big).$$

Zeigen Sie, dass g injektiv ist.

b) Die Funktion $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ sei gegeben durch

$$h(z) = \Big(z + 2, z - 1\Big).$$

Ist h surjektiv?