Tutorium: Analysis und Lineare Algebra

Vorbereitung der Bonusklausur am 07.05.2012

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

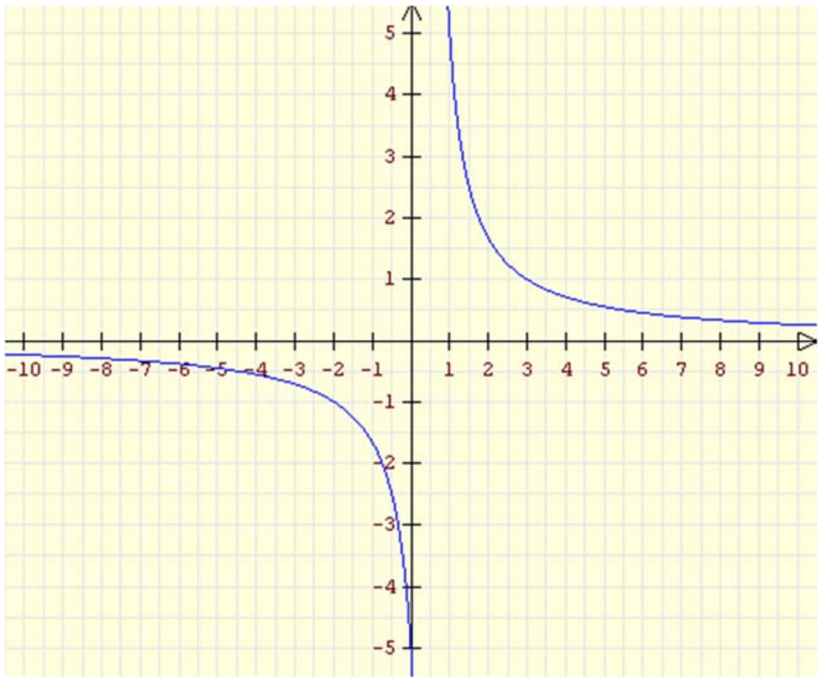
mathe.stevenkoehler.de

Aufgabe 1

a) Bestimme alle Werte $x \in \mathbb{R}$, die die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\frac{5}{2x-1} \leq \frac{1}{2}.$$

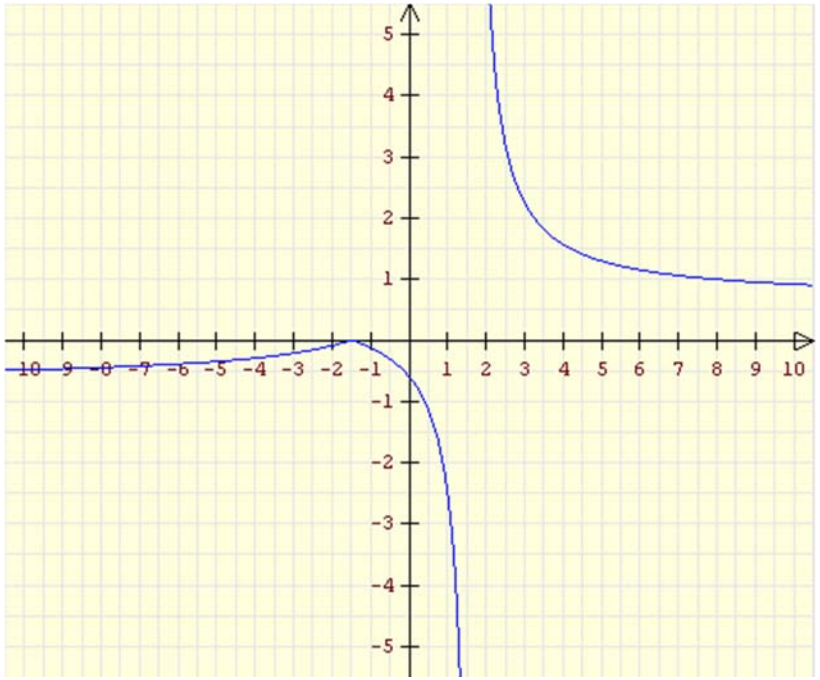
Mit L sei die Menge dieser x bezeichnet. Gib L in Intervallschreibweise an.



Aufgabe 1

b) Wie a) für die folgende Ungleichung:

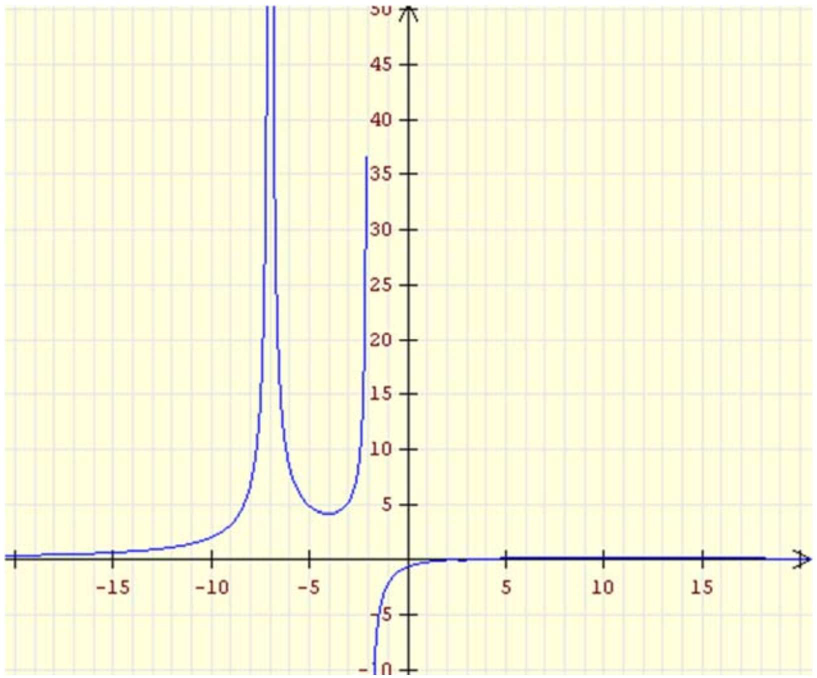
$$\frac{|2x+3|}{3x-5} \leq -\frac{1}{2}.$$



Aufgabe 1

c) Zum Lösen einer Ungleichung müssen oft Fallunterscheidungen vorgenommen werden. Welche Fälle müssen für die folgende Ungleichung unterschieden werden? (Das Lösen dieser Ungleichung ist **nicht** Teil der Aufgabe!)

$$\frac{|4x-9| \cdot |-x+3|}{x^2-x-6} > |x+7|$$



Aufgabe 2

Die Folge (a_n) sei definiert durch $a_n = \dfrac{2n+1}{3n}$.

1. Bestimme den Grenzwert der Folge (a_n) für $n \to \infty$.
2. Zeige mithilfe der Definition der Konvergenz, dass es sich bei dem in a) gefundenen Wert tatsächlich um den Grenzwert der Folge (a_n) handelt.

Aufgabe 3

Gib ein Beispiel dafür an, dass es zum Nachweis der Konvergenz einer Folge nicht genügt, lediglich $|a_n - a| < \varepsilon$ für ein $\varepsilon > 0$ zu fordern.

Aufgabe 4

Bestimme die folgenden Grenzwerte:

$$\text{(i)} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{-7n^4+n^3-5n+1}{3n^4+2n^2-25}\right)$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n^3-10n^2+5}{-n^4+6n-100}\right)$$

$$\text{(iii)} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt{n^6+2n^3-1}+2n}{3n^2+7n-25}\right)$$

$$\text{(iv)} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{5n^2+n-2}{2n^2+2}-\frac{14n^2+8n+7}{4n^2-9}\right)$$

$$\text{(v)} \quad \lim_{n\to\infty}\left(\frac{3n^2+5n-8}{6n+1}+\frac{-2n^2+3n-4}{4n-7}\right)$$

Aufgabe 5

Gegeben seien die folgenden Reihen:

$$\text{(i)} \quad \sum_{i=1}^{\infty} \left(-\frac{3}{7}\right)^i \qquad\qquad \text{(iii)} \quad \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2}\right)^i$$

$$\text{(ii)} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{5}{2k}\right) \qquad\qquad \text{(iv)} \quad \sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{1}{j}\right)^2.$$

Entscheide, ob diese Reihen konvergent oder divergent sind (mit kurzer Begründung) und bestimme für (i)-(iii) die Grenzwerte, falls diese existieren.

Aufgabe 6

Gegeben sei die Reihe $\sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{2}{k(k-1)} \right)$.

1. Berechne die Partialsummen s_1 bis s_4 dieser Reihe.
2. Zeige, dass diese Reihe gegen den Grenzwert 2 konvergiert.

Aufgabe 7

Die Funktion $f : [0, 12] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & \text{, für } 0 \leq x < 2; \\ -\frac{1}{2}x + 7 & \text{, für } 2 \leq x < 5; \\ x - 1 & \text{, für } 5 \leq x < 11; \\ 2x - 12 & \text{, für } 11 \leq x < 12. \end{cases}$$

An welchen Stellen ist f stetig, an welchen Stellen ist f unstetig? Begründe deine Antwort.

Aufgabe 8

Die Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seien definiert durch

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \begin{cases} \cos\left(\dfrac{23}{x^3}\right) & \text{, für } x \neq 0; \\ 0 & \text{, für } x = 0; \end{cases} \\
g(x) &= \begin{cases} \sqrt{x} \cdot \cos\left(\dfrac{23}{x^3}\right) & \text{, für } x \neq 0; \\ 0 & \text{, für } x = 0. \end{cases}
\end{aligned}
$$

An welchen Stellen ist f stetig, an welchen Stellen ist f unstetig? Begründe deine Antwort. Analog für g.

Aufgabe 9

Berechne die folgenden Grenzwerte. Gib an, an welchen Stellen die Stetigkeit der beteiligten Funktionen verwendet wird.

$$\text{(i)} \quad \lim_{n\to\infty} \left(\cos\left(\frac{\pi n^2 + 6n + 11}{4n^2 + n + 3} \right) \right)$$

$$\text{(ii)} \quad \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{8n^2 + 7n - 1}{2n^2 - 9n + 1}}$$

Aufgabe 10

Bestimme die Ableitungen der folgenden Funktionen:

(i) $f_1(x) = 3x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 5x + 42$

(ii) $f_2(x) = x^e \cdot \sin(3x) \cdot \ln(x)$

(iii) $f_3(x) = \cos\left(\sqrt{\ln\left(\tan\left(2^x + 1\right)^3\right)}\right)$

(iv) $f_4(x) = (\sin x)^{2x^2 - x + 1}$

Aufgabe 11

Gegeben seien die beiden Funktionen

$$h_1(x) = \frac{-1}{\sin^2(x)} \qquad \text{und} \qquad h_2(x) = -1 - \cot^2(x).$$

Bestätige mithilfe der Quotientenregel, dass es sich sowohl bei h_1 als auch bei h_2 um die Ableitung(en) der Funktion $h(x) = \cot x$ handelt.

Aufgabe 12

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei gegeben durch:

$$f(x) = \frac{1}{9} \cdot 2^{-3x} \ .$$

a) Finde eine allgemeine Formel für die n-te Ableitung von f.

b) Zeige durch vollständige Induktion, dass die von dir gefundene Formel tatsächlich die n-te Ableitung von f ist.

Vielen Dank für die Aufmerksamkeit

&

Viel Erfolg bei der Bonusklausur ☺