Tutorium: Diskrete Mathematik

Vorbereitung der Bonusklausur am 26.11.2011
Lösungen der Aufgaben

Steven Köhler

mathe@stevenkoehler.de

mathe.stevenkoehler.de

Aufgabe 1a & 1b

a)
- $f(n)$ ist nicht injektiv, da beispielsweise gilt: $f(0) = 4 = f(4)$.
- $f(n)$ ist nicht surjektiv, da beispielsweise kein Urbild für $f(n) = 2$ existiert.
- $f(n)$ ist nicht bijektiv.

b)
- $g(n)$ ist injektiv, denn:

$$\begin{aligned} g(n) &= g(m) \\ 42n - 23 &= 42m - 23 \\ 42n &= 42m \\ n &= m \end{aligned}$$

- $g(n)$ ist nicht surjektiv, da beispielsweise $g(n) = 10$ kein Urbild besitzt.
- $g(n)$ ist nicht bijektiv.

Aufgabe 1c

c)

- $h(n)$ ist injektiv, denn:

$$\begin{aligned} h(n) &= h(m) \\ \left((n-2)^2, n^2\right) &= \left((m-2)^2, m^2\right) \end{aligned}$$

  Es folgt

$$\begin{aligned} (n-2)^2 &= (m-2)^2 \\ n^2 &= m^2 \end{aligned}$$

  Subtraktion von (I) und (II) ergibt:

$$\begin{aligned} -4n+4 &= -4m+4 \\ n &= m \end{aligned}$$

- $h(n)$ ist nicht surjektiv, da beispielsweise $h(n) = (\star, 2)$ kein Urbild besitzt.
- $h(n)$ ist nicht bijektiv.

Aufgabe 1d

d)
- $u(a,b)$ ist injektiv, denn:

$$\begin{aligned} u(a,b) &= u(x,y) \\ \big(ab, 2a+1\big) &= \big(xy, 2x+1\big) \end{aligned}$$

  Es folgt

$$\begin{aligned} ab &= xy \\ 2a+1 &= 2x+1 \end{aligned}$$

  Aus (II) folgt direkt $a = x$. Einsetzen in (I) und anschließende Division ($a \neq 0$ wegen $a \in \mathbb{N}$) ergibt $b = y$;

- $u(a,b)$ ist nicht surjektiv, da beispielsweise $u(a,b) = (\star, 2)$ kein Urbild besitzt.
- $u(a,b)$ ist nicht bijektiv.

Aufgabe 1e

e)

- $v(n, m)$ ist nicht injektiv, da beispielsweise $v(1, 0) = 5 = v(2, 5)$ gilt.
- $v(n, m)$ ist surjektiv, da beispielsweise $(n, 5n - y)$ ein Urbild für $v(n, m) = y$ ist:

$$v(n, 5n - y) = 5n - (5n - y) = y$$

- $v(n, m)$ ist nicht bijektiv.

Aufgabe 1f

f)

- $f(x,y)$ ist injektiv, denn:

$$\begin{aligned} f(x,y) &= f(a,b) \\ \left(xy^2, xy^2+5y-1, (y^2-2)x\right) &= \left(ab^2, ab^2+5b-1, (b^2-2)a\right) \end{aligned}$$

  Es folgt

$$\begin{aligned} xy^2 &= ab^2 \\ xy^2+5y-1 &= ab^2+5b-1 \\ (y^2-2)x &= (b^2-2)a \end{aligned}$$

  Subtraktion von (I) und (II) ergibt unmittelbar $y = b$. Einsetzen in (III) liefert $x = a$.

- $f(x,y)$ ist nicht surjektiv, da beispielsweise $f(x,y) = (3, \star, 3)$ kein Urbild besitzt.
- $f(x,y)$ ist nicht bijektiv.

Aufgabe 2

Es sei $M = \{a, b\}$. Es gilt $P(M) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$. Hieraus ergibt sich unmittelbar:

(i) falsch

(ii) falsch

(iii) wahr

(iv) falsch

(v) falsch

(vi) falsch

(vii) wahr

Aufgabe 3a

(I) Induktionsanfang:

Für $n = 1$ gilt $7^{2\cdot 1} - 2^1 = 47$ und $47 \mid 47$. ✓

(II) Induktionsschritt:

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine fest gewählte natürliche Zahl, für die die Behauptung gilt, d.h. $47 \mid \left(7^{2n} - 2^n\right)$. Dann folgt:

$$\begin{aligned} 7^{2(n+1)} - 2^{n+1} &= 7^{2n+2} - 2^{n+1} \\ &= 7^2 \cdot 7^{2n} - 2 \cdot 2^n \\ &= 49 \cdot 7^{2n} - 49 \cdot 2^n + 47 \cdot 2^n \\ &= 49 \cdot \left(7^{2n} - 2^n\right) + 47 \cdot 2^n \end{aligned}$$

Dieser Term ist offensichtlich durch 47 teilbar. Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. $\square$

Aufgabe 3b

(I) Induktionsanfang:

Für $n = 1$ gilt $\sum_{i=1}^{1} \big(4i - 1\big) = 3$ sowie $2 \cdot 1^2 + 1 = 3$. ✓

(II) Induktionsschritt:

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine fest gewählte natürliche Zahl, für die die Behauptung gilt, d.h. $\sum_{i=1}^{n} \big(4i - 1\big) = 2n^2 + n$. Dann folgt:

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n+1} \big(4i - 1\big) &= \sum_{i=1}^{n} \big(4i - 1\big) + \big(4(n+1) - 1\big) \\
&= 2n^2 + n + 4n + 4 - 1 \\
&= 2n^2 + 5n + 3 \\
&= \big(2n^2 + 4n + 2\big) + \big(n + 1\big) \\
&= 2\big(n + 1\big)^2 + \big(n + 1\big)
\end{aligned}
$$

Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. □

Aufgabe 3c

(I) Induktionsanfang:

Für $n = 1$ gilt $\sum_{i=0}^{1} 2^i = 3$ sowie $2^{1+1} - 1 = 3$. ✓

(II) Induktionsschritt:

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine fest gewählte natürliche Zahl, für die die Behauptung gilt, d.h. $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} 2^i &= \sum_{i=0}^{n} 2^i + 2^{n+1} \\
&= 2^{n+1} - 1 + 2^{n+1} \\
&= 2 \cdot 2^{n+1} - 1 \\
&= 2^{n+2} - 1 \\
&= 2^{(n+1)+1} - 1
\end{aligned}$$

Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. □

Aufgabe 3d

(I) Induktionsanfang:

Für $n = 3$ gilt $3^2 - 2 \cdot 3 - 1 = 2 > 0$. ✓

(II) Induktionsschritt:

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine fest gewählte natürliche Zahl mit $n \geq 3$, für die die Behauptung gilt, d.h. $n^2 - 2n - 1 > 0$. Dann folgt:

$$
\begin{aligned}
&(n+1)^2 - 2(n+1) - 1 \\
&\quad = n^2 + 2n + 1 - 2n - 2 - 1 \\
&\quad = n^2 - 2 \\
&\quad = (n^2 - 2n - 1) + (2n - 1) \\
&\quad > 2n - 1 \\
&\quad > 0 \text{ (für } n \geq 3)
\end{aligned}
$$

Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. $\square$

Aufgabe 3e

(I) Induktionsanfang:

Für $n = 1$ gilt $\sum_{i=0}^{1} \binom{1}{i} = 2$ sowie $2^1 = 2$. ✓

(II) Induktionsschritt:

Es sei $n \in \mathbb{N}$ eine fest gewählte natürliche Zahl, für die die Behauptung gilt, d.h. $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$. Dann folgt:

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n+1}{i} + \binom{n+1}{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n+1}{i} + \binom{n+1}{n+1} \\
&= \binom{n+1}{0} + \sum_{i=1}^{n} \left(\binom{n}{i-1} + \binom{n}{i} \right) + \binom{n+1}{n+1}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3e

$$
\begin{aligned}
&= 1 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i-1} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} + 1 \\
&= 1 + \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} + \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} + 1 \\
&= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} + \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \\
&= 2 \cdot \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \\
&= 2 \cdot 2^n \\
&= 2^{n+1}
\end{aligned}
$$

Aus (I) und (II) folgt, dass die Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. $\square$

Aufgabe 3

Beweise durch vollständige Induktion!

a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $47 \mid \left(7^{2n} - 2^n\right)$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=1}^{n} \left(4i - 1\right) = 3 + 7 + 11 + \ldots = 2n^2 + n$.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$.

d) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ gilt: $n^2 - 2n - 1 > 0$.

e) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.

Aufgabe 4

a) Wahr, da $47 - 17 = 30$ und $15 \mid 30$ gilt.

b) Falsch, da $42 - 23 = 19$ und $7 \nmid 19$ gilt.

c) Falsch, da $202 - 101 = 101$ und $47 \nmid 101$ gilt.

d) Wahr, da $312 - (-21) = 333$ und $3 \mid 333$ gilt.

e) Falsch, da $57 - 29 = 28$ und $23 \nmid 28$ gilt.

Aufgabe 5a

Mit dem Euklidischen Algorithmus ergibt sich:

$$\begin{aligned} 577 &= 3 \cdot 177 + 26 \\ 177 &= 6 \cdot 26 + 21 \\ 26 &= 1 \cdot 21 + 5 \\ 21 &= 4 \cdot 5 + 1 \\ 5 &= 5 \cdot 1 + 0 \end{aligned}$$

Der größte gemeinsame Teiler von 557 und 177 ist folglich 1. Das bedeutet, dass die beiden Zahlen keine gemeinsamen Teiler besitzen.

Aufgabe 5b

Mit dem Euklidischen Algorithmus ergibt sich:

$$\begin{aligned} 299 &= 1 \cdot 247 + 52 \\ 247 &= 4 \cdot 52 + 39 \\ 52 &= 1 \cdot 39 + 13 \\ 39 &= 3 \cdot 13 + 0 \end{aligned}$$

Der größte gemeinsame Teiler von 299 und 247 ist folglich 13. Das bedeutet, dass die beiden Zahlen nicht teilerfremd sind.

Aufgabe 6

Es seien A und B Mengen mit $|A| = 5$ und $|B| = 7$. Betrachtet werden Abbildungen $A \to B$.

a) Es gibt insgesamt $7^5 = 16.807$ Abbildungen.

b) Es gibt insgesamt $7^{\underline{5}} = 2.520$ injektive Abbildungen.

c) Es gibt keine surjektiven Abbildungen, da $|B| > |A|$ gilt.

d) Wie in b) existieren 2.520 Abbildungen. $f(a_1) \neq f(a_2)$ ist durch die Injektivität bereits implizit gegeben.

e) Analog zu d).

f) Es gibt insgesamt $7^3 \cdot 6^2 = 12.348$ derartige Abbildungen.

Aufgabe 7 a-c

a) (i) mit Zurücklegen: $10^5 = 100.000$ Möglichkeiten;
ohne Zurücklegen: $10^{\underline{5}} = 30.240$ Möglichkeiten

(ii) mit Zurücklegen: $\binom{10-1+5}{5} = 2.002$ Möglichkeiten;
ohne Zurücklegen: $\binom{10}{5} = 252$ Möglichkeiten

b) Es gibt insgesamt $\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1} = 258$ Möglichkeiten, exakt 5 richtige Gewinnzahlen anzukreuzen.

c) Es gibt insgesamt $\binom{6}{5} \cdot \binom{43}{1} + \binom{6}{6} = 259$ Möglichkeiten, mindestens 5 richtige Gewinnzahlen anzukreuzen.

Aufgabe 7 d-f

d) Anzahl der möglichen Wörter:

$$\binom{13}{1,2,4,1,1,1,1,2} = \frac{13!}{1!\cdot 2!\cdot 4!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!} = 64.864.800.$$

e) Zunächst erhält jedes Kind 2 Bonbons. Es verbleiben $n - 2k$ Bonbons. Daraus resultiert die folgende Anzahl an Möglichkeiten:

$$\binom{k-1+n-2k}{n-2k} = \binom{n-k-1}{n-2k}.$$

f) Der gesucht Koeffizient lautet $\binom{10}{2,1,4,3} = 12.600.$