Hausaufgaben zum 12./13. Januar 2012

Elena Noll, Sven-Hendrik Haase, Arne Struck

12. April 2012

1. 1)

$$1.Fall : x > -5 \Rightarrow Nennerpositiv$$

$$\frac{2}{x+5} \geq 3 \Leftrightarrow 2 \leq 3x + 15 \quad (1)$$
$$\Leftrightarrow -13 \leq 3x \quad (2)$$
$$\Leftrightarrow -\frac{13}{3} \leq x \quad (3)$$

$$2.Fall : x < -5 \Rightarrow Nennernegativ$$

$$\frac{2}{x-5} \geq 3 \Leftrightarrow 2 \geq 3x + 15 \quad (4)$$
$$\Leftrightarrow -13 \geq 3x \quad (5)$$
$$\Leftrightarrow -\frac{13}{3} \geq x \quad (6)$$

$$L = (-5, -\frac{13}{3}]$$

2)

$$|3x - 4| \geq 2 : x \in \mathbb{R}$$

$$1.Fall : 3 > \frac{4}{3}$$

$$|3x - 4| \geq 2 \Leftrightarrow 3x - 4 \geq 2 \quad (7)$$

$$\Leftrightarrow 3x \geq 6 \quad (8)$$

$$\Leftrightarrow x \geq 2 \quad (9)$$

$$2.Fall : x < \frac{4}{3}$$

$$|3x - 4| \geq 2 \Leftrightarrow -(3x - 4) \geq 2 \quad (10)$$

$$\Leftrightarrow -3x + 4 \geq 2 \quad (11)$$

$$\Leftrightarrow -3x \geq -2 \quad (12)$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{2}{3} \quad (13)$$

$$L = (-\infty, \frac{2}{3}] \cup [2, +\infty)$$

3) a)

$$|a_n - a| \Leftrightarrow |\frac{3n + 2}{n + 4} - 3| = |\frac{3n + 2 - 3n - 12}{n + 4}| \quad (14)$$

$$= | - \frac{10}{n + 4}| = \frac{10}{n + 4} \quad (15)$$

b)

$$|a_n - a| < \epsilon$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{n + 4} < \epsilon \quad (16)$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{\epsilon} < n + 4 \quad (17)$$

$$\Leftrightarrow \frac{10}{\epsilon} - 4 < n \quad (18)$$

$$\Rightarrow N > \frac{10}{\epsilon} - 4 \quad (19)$$

c)

$$\epsilon = \frac{1}{5} : N > 10 * 5 - 4 = 46 \Rightarrow N = 47 \quad (20)$$

$$\epsilon = \frac{1}{100} : N > 1000 - 4 = 996 \Rightarrow N = 997 \quad (21)$$

$$\epsilon = \frac{1}{1000} : N > 10000 - 4 = 9996 \Rightarrow N = 9997 \quad (22)$$

4) Nachweis der Beschränktheit.

Induktionsanfang:

$$1 \leq 1 < 2$$

Induktionsannahme: Für ein beliebiges aber fest gewähltes $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$a_{n+1} = (\frac{a_n}{2})^2 + 1$$

$$1 \leq a_{n+1} < 2$$

Induktionsschritt:

$$a_{(n+1)+1} = (\frac{a_{n+1}}{2})^2 + 1 =^{IA} (\frac{(\frac{a_n}{2})^2 + 1}{2})^2 + 1$$

Daraus folgt:

Nach Induktionsannahme ist der Zähler < 2. Hierraus folgt: Bruch < 1. Aus alledem folgt, dass die Gleichung < 2 sein muss.