Mathematik II für Studierende der Informatik (Analysis und Lineare Algebra)

Thomas Andreae, Henrik Bachmann, Rosona Eldred, Malte Moos

Sommersemester 2012
Blatt 9

B: Hausaufgaben zum 21. Juni 2012

3. Einige ALA-Klausuraufgaben aus dem Sommersemester 2011:

a) Berechnen Sie die Taylorpolynome $T_0(x)$, $T_1(x)$ und $T_2(x)$ für $f(x) = \sqrt[5]{x+1}$ (für den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$).

b) Berechnen Sie den folgenden Grenzwert: $\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-e^{-x}-e^{x}}{5x^2}\right)$.

c) Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\ln(2x^2+1)}{x} & \text{für } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

Untersuchen Sie, ob diese Funktion im Punkt $x_0 = 0$ stetig ist. Untersuchen Sie ausserdem, ob g an der Stelle $x_0 = 0$ differenzierbar ist. Falls ja, so bestimme man $g'(0)$.

a)

$$f(x) = (x+1)^{\frac{1}{5}} \Rightarrow f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{5}(x+1)^{-\frac{4}{5}} \Rightarrow f'(0) = \frac{1}{5}$$

$$f''(x) = -\frac{4}{25}(x+1)^{-\frac{9}{5}} \Rightarrow f''(0) = -\frac{4}{25}$$

$$\Rightarrow T_0(x) = 1$$

$$T_1(x) = 1 + \frac{1}{5}x$$

$$T_2(x) = 1 + \frac{1}{5}x - \frac{2}{25}x^2$$

b) $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2-e^{-x}-e^{x}}{5x^2}\right) \underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^{-x}-e^{x}}{10x}\right) \underset{\text{"}\frac{0}{0}\text{"}}{\overset{\uparrow}{=}}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{-e^{-x}-e^{x}}{10}\right) = \underline{\underline{-\frac{1}{5}}}$$

c) g ist in $x_0=0$ stetig, da

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(2x^2+1)}{x} \overset{\text{l'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{4x}{2x^2+1} = 0 = g(0).$$

g ist in $x_0=0$ differenzierbar, da

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(2x^2+1)}{x^2} \overset{\text{l'Hospital}}{=}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x}{2x(2x^2+1)} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{2x^2+1} = \frac{2}{1} = 2.$$ Es gilt somit $g'(0)=2$.

4. In der Informatik spielt an vielen Stellen unterschiedliches Wachstumsverhalten von Funktionen („f wächst schneller als g") eine Rolle, beispielsweise, wenn es darum geht, die Laufzeit von Algorithmen zu vergleichen. Die dazugehörige präzise Definition haben wir im Skript auf Seite 65 kennengelernt, wo genau gesagt wird, was es bedeuten soll, dass $f(x)$ für $x\to\infty$ schneller wächst als $g(x)$. Im Folgenden werden drei Standardtypen von Funktionen betrachtet, für die das Wachstumsverhalten zu vergleichen ist.

   a) Es sei $f(x)=a^x$ für ein $a>1$ und $g(x)=x^n$ für ein $n\in\mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass $f(x)$ für $x\to\infty$ schneller wächst als $g(x)$, d.h., weisen Sie nach, dass Folgendes gilt:

   $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\infty.$$

   Hinweis: Regeln von de l'Hospital.

   b) Nun sei $g(x)=x^r$ für ein $r\in\mathbb{R}^+$ (d.h. $r>0$) und $h(x)=(\ln x)^k$ für ein $k\in\mathbb{N}$. Bei $h(x)$ handelt es sich also um die k-te Potenz des natürlichen Logarithmus; man schreibt meistens $\ln^k x$ anstelle von $(\ln x)^k$. Zeigen Sie, dass $g(x)$ für $x\to\infty$ schneller wächst als $h(x)$.

   c) **Zusätze** (leichte Verallgemeinerungen von a) und b)):

      (i) Begründen Sie, weshalb a) richtig bleibt, wenn dort $g(x)=x^r$ für ein beliebiges $r\in\mathbb{R}$ mit $r>0$ vorausgesetzt wird.

      (ii) Bleibt b) richtig, wenn dort (anstelle von $\ln x$) $\log_a x$ für eine beliebige Basis $a>1$ betrachtet wird?

a) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^x}{x^n}\right) \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^x\cdot(\ln a)^n}{n!}\right) = \infty.$$

n-fache Anwendung der Regeln von de l'Hospital

b) Der Fall $k=1$ wurde bereits im Skript behandelt; um zu erkennen, wie der Hase läuft, betrachten wir zusätzlich noch den Fall $k=2$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^r}{(\ln x)^2}\right) \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{r\,x^{r-1}}{2(\ln x)\cdot\frac{1}{x}}\right) =$$

l'Hospital

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{r\,x^r}{2\ln x}\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{r^2\cdot x^{r-1}}{2\cdot\frac{1}{x}}\right) \underset{\uparrow}{=}$$

l'Hospital

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{r^2 x^r}{2}\right) = \infty.$$

Allgemeiner Fall:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^r}{(\ln x)^k}\right) \underset{\uparrow}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{r^k x^r}{k!}\right) = \infty.$$

k-fache Anwendung der Regel von de l'Hospital

c) (i) Es sei $n = \lceil \tau \rceil$. Für $x \geq 1$ gilt dann $x^\tau \leq x^n$ und folglich

$$(*) \quad \frac{a^x}{x^n} \leq \frac{a^x}{x^\tau} \text{ für alle } x \geq 1.$$

Wir haben bereits $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{a^x}{x^n}\right) = \infty$ gezeigt, woraus man wegen $(*)$ erhält:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{a^x}{x^\tau}\right) = \infty.$$

(ii) Ja, weil sich $\ln x$ und $\log_a x$ nur um einen konstanten Faktor unterscheiden: Für $c = \frac{1}{\ln a}$ gilt

$$(**) \quad \log_a x = c \cdot \ln x \text{ für alle } x > 0.$$

Es folgt

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^\tau}{(\log_a x)^k}\right) \overset{(**)}{=} \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^\tau}{c^k (\ln x)^k}\right) =$$

$$\frac{1}{c^k}\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^\tau}{(\ln x)^k}\right) = \infty.$$