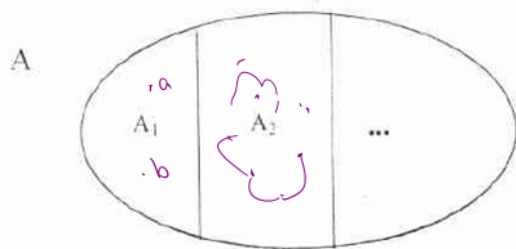


Teorema Toda partición de un conjunto A permite definir en éste una relación de equivalencia " \sim " en la que las clases de equivalencia son los bloques de la partición.



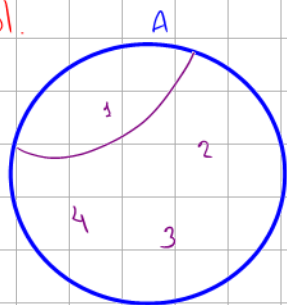
Si $\{A_1, A_2, \dots\}$ es una partición de A , entonces según el teorema cada A_i es una clase de equivalencia de A . En donde la relación de equivalencia se define como sigue:

$$a \sim b \Leftrightarrow a \text{ y } b \text{ son miembros del mismo bloque}$$

Ejm. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y sea $\{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}$ una partición de A .

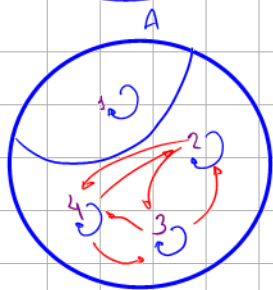
Determine la relación de equivalencia \sim en A .

Sol.



Luego

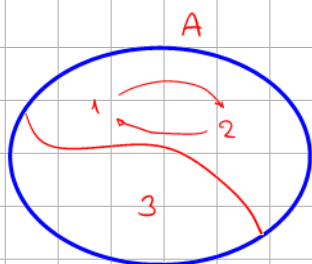
$$\sim = \{(1, 1) (2, 2) (3, 3) (4, 4) (2, 3) (3, 2) (2, 4) (4, 2) (3, 4) (4, 3)\}$$



Así \sim es una rel. de equivalencia.

$$x R y \Leftrightarrow x = y \vee x + y = 3$$

Ej.



$$\sim = \{(1, 1) (2, 2) (3, 3) (4, 4) (1, 2) (2, 1)\}$$

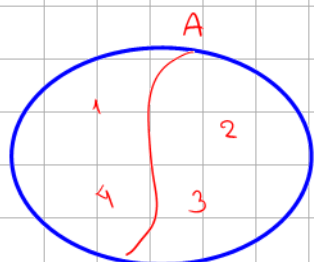
$$1 \sim 1 \wedge 1 \sim 2 \Rightarrow 1 \sim 2$$

$$2 \sim 2 \wedge 2 \sim 1 \Rightarrow 2 \sim 1$$

$$1 \sim 2 \wedge 2 \sim 1 \Rightarrow 1 \sim 1$$

$$2 \sim 1 \wedge 1 \sim 2 \Rightarrow 2 \sim 2$$

$$\left. \begin{array}{l} 3 \sim 3 \Rightarrow 3 \sim 3 \\ 1 \sim 1 \Rightarrow 1 \sim 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \checkmark \\ \checkmark \end{array}$$



$$\sim = \{(1, 1) (2, 2) (3, 3) (4, 4) (2, 3) (3, 2) (1, 4) (4, 1)\}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$x R y \Leftrightarrow x = y \vee x + y = 5$$

Ejm. En \mathbb{Z} se define la rel. de equiv. \sim mediante

$$x \sim y \Leftrightarrow 5 \mid x-y \quad (5 \text{ divide a } x-y \text{ ó } x-y = 5 \cdot k, k \in \mathbb{Z})$$

a) Determine las clases de equivalencia

b) Determine el conjunto de índices

$$K_a = \{y \in \mathbb{Z} : a \sim y\}$$

c) Determine el conjunto cociente.

$$5 \mid a-y$$

Sol. $R = \{(0,0)(1,1)(2,2) \dots (-1,-1)(-2,-2)\}$

Reflexiva: $x R x$ porque $5 \mid x-x$
 $5 \mid 0 \quad \checkmark$

Simétrica. $x R y \Leftrightarrow 5 \mid x-y \quad x-y = -(y-x)$

$$\Leftrightarrow 5 \mid -(y-x) \quad \begin{array}{l} 5 \mid -10 \\ 5 \mid 10 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow 5 \mid y-x \Leftrightarrow y R x$$

Transitividad $x R y \wedge y R z \Leftrightarrow 5 \mid x-y \wedge 5 \mid y-z$

$$a/b \wedge a/c \Leftrightarrow 5 \mid (x-y) + (y-z)$$

$$a/b+c \Leftrightarrow 5 \mid x-z$$

$$\Leftrightarrow x R z$$

Así R es de equivalencia.

$$\text{Luego } \sim = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 5 \mid x-y\}$$

Así x es equivalente a y si 5 divide a $x-y$

Entonces, las clases de equivalencia serán:

$$K_0 = \{ \dots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, \dots \} = K_5 = K_{10}$$

$$K_1 = \{ \dots, -9, -4, 1, 6, 11, 16, 21, \dots \} = K_6 = K_{11}$$

$$K_2 = \{ \dots, -8, -3, 2, 7, 12, 17, 22, \dots \} = K_7 = K_{12}$$

$$K_3 = \{ \dots, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \dots \} = K_8$$

$$K_4 = \{ \dots, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \dots \} = K_9$$

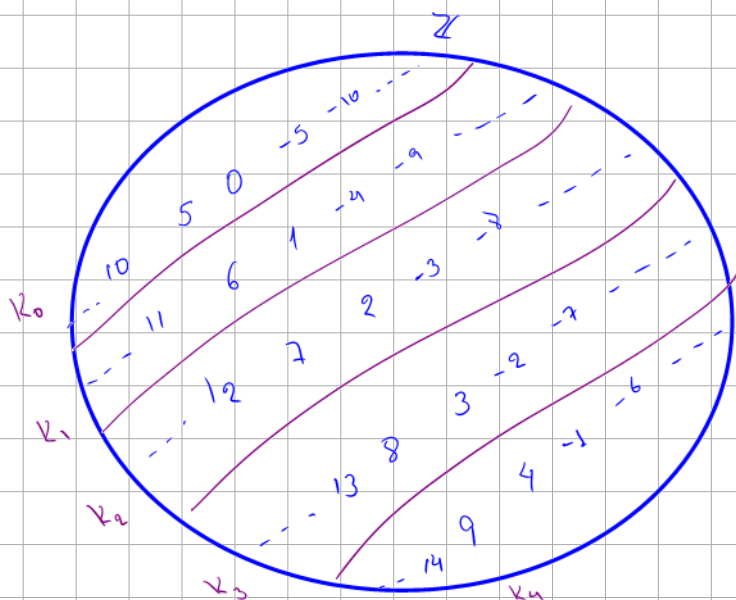
$$K_5 = \{ \dots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, \dots \} = K_0$$

Así se tiene 5 clases distintas.

$$K_0, K_1, K_2, K_3, K_4$$

b) $I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

c) $\mathbb{Z}/\sim = \{K_0, K_1, K_2, K_3, K_4\}$

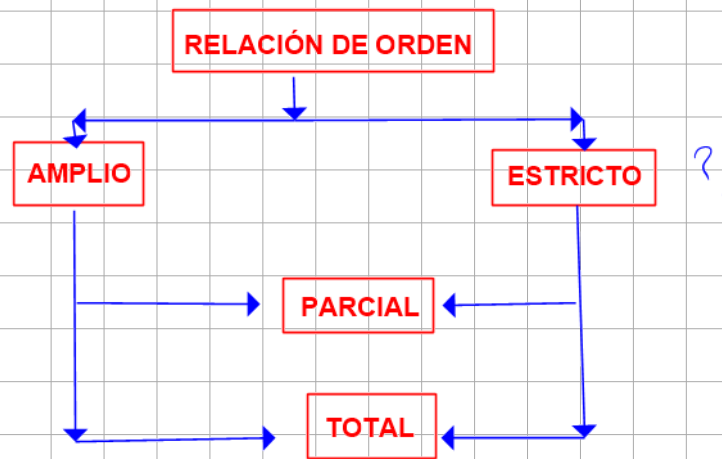


RELACIONES DE ORDEN

Cuando queremos referirnos a un orden cualquiera, usaremos el término genérico "preceder"

$$x R y \Leftrightarrow x \text{ precede a } y$$

se dice que es de orden amplio o estricto y en cada caso, es de orden parcial o total.



Relación de orden amplio

R es una relación de orden amplio en A si y sólo si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

- i) Sí $x \in A \Rightarrow x R x$
- ii) Sí $x R y \wedge y R x \Rightarrow x = y$
- iii) Sí $x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$

Ejm

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y sea R una relación definida por $x R y \Leftrightarrow x \leq y$

Verifica si R es una relación de orden amplio.

Sol.

Reflexiva. $\forall x \in A, x R x \Leftrightarrow x \leq x$

Antisimétrica. Si $x R y \wedge y R x \Rightarrow x \leq y \wedge y \leq x$
 $\Rightarrow x = y$

Transitiva. Sean

$$\begin{aligned}
 x R y \wedge y R z &\Rightarrow x \leq y \wedge y \leq z \\
 &\Rightarrow x \leq z \\
 &\Rightarrow x R z.
 \end{aligned}$$

$\therefore R$ es una relación de orden amplio.

Ejm.

Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y sea R una relación definida por

$$x R y \Leftrightarrow x | y, \text{ es } R \text{ una relación de orden amplio?}$$

Sol.

Reflexiva. $\forall x \in A, x | x \Rightarrow x R x$

Antisimétrica. Si $x R y \wedge y R x \Rightarrow x | y \wedge y | x$

$$\Rightarrow x = y$$

Transitiva. Sean $x R y \wedge y R z \Rightarrow x | y \wedge y | z$

$$\Rightarrow y = x \cdot t \wedge z = y \cdot r, r, t \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow z = y \cdot r = x \cdot (t \cdot r)$$

$$\Rightarrow z = x \cdot s, s = t \cdot r \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x | z$$

$$\Rightarrow x R z$$

∴ R es de orden amplio.

Orden parcial y total

Sea R una relación de orden amplio definida en un conjunto A .

1) Cuando todos los elementos de A son comparables dos a dos, el orden se llama total.

Es decir, si

$$x \neq y \Rightarrow x R y \vee y R x$$

Por ejemplo en $A = \{1, 2, 3\}$ y $x R y \Leftrightarrow x \leq y$

$$R = \{(1,1)(2,2)(3,3)(1,2)(1,3)(2,3)\}$$

$$\text{Sea } 1 \neq 3 \Rightarrow 1 R 3 \vee 3 R 1$$

2) Cuando existen pares de elementos de A que no son comparables, el orden se llama parcial. Es decir,

$$\exists x, \exists y / x \not R y \wedge y \not R x$$

Por ejemplo $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $x R y \Leftrightarrow x | y$

$$R = \{(1,1)(2,2)(3,3)(4,4)(1,2)(1,3)(1,4)(2,4)\}$$

$$\exists 3, \exists 4 \quad / \quad 3 \not R 4 \quad \wedge \quad 4 \not R 3$$

$$3 \not R 4 \quad \quad 4 \not R 3$$

$$\exists 2, \exists 3 \quad : \quad 2 \not R 3 \quad \wedge \quad 3 \not R 2$$

Orden estricto

R es una relación de orden estricto si y sólo si es arreflexiva, asimétrica y transitiva.

i) Si $\forall x \in A \Rightarrow x \not R x$

ii) Si $\forall x R y \Rightarrow y \not R x$

iii) Si $x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$

Ejm. Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $x R y \Leftrightarrow x < y$

Determine si R es de orden estricto

Sol.

Arreflexiva. $\forall x \in A ; x \not R x$, porque $x \not < x$

Asimétrica. $\forall x, y \in A, x R y \Rightarrow x < y$

$$\Rightarrow y \not < x$$

$$\Rightarrow y \not R x$$

Transitiva. Sean $x R y \wedge y R z \Rightarrow x < y \wedge y < z$

$$\Rightarrow x < z$$

$$\Rightarrow x R z.$$

$\therefore R$ es de orden estricto

Ejm. Sean A y B conjuntos en un mismo universo.

$$A R B \Leftrightarrow A \subset B$$

Determine si R es de orden estricto.

Sol.

Arreflexiva $\forall A, A \not R A$ porque $A \subset A$ ✓

Asimétrica

Transitiva.

∴ R no es de orden estricto

Ejm. Sea $A = \{a, b, c, d\}$ y R definida por

$$R = \{(a, b), (a, c), (a, d), (b, d), (c, d)\}$$

Determine si R es de orden estricto y si es total o parcial.

Sol.

Arreflexiva $\forall x \in A, x \not R x$

Asimétrica $\forall x, y, x R y \Rightarrow y \not R x$

Transitiva. Si $x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$

$$a R b \wedge b R d \Rightarrow a R d$$

$$a R c \wedge c R d \Rightarrow a R d$$

∴ R es de orden estricto.

Orden total. $\forall x \neq y \Rightarrow x R y \vee y R x$

Sea $b \neq c \Rightarrow b \not R c \wedge c \not R b$ ∴ No es total.

Orden parcial $\exists x, \exists y : x \not R y \wedge y \not R x$ ✓

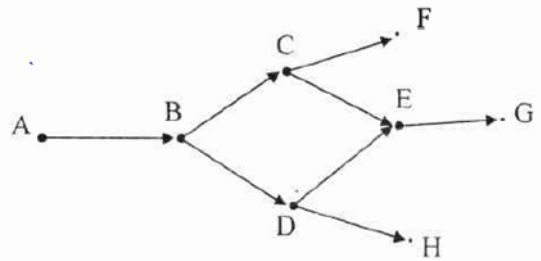
$\exists b, \exists c \in A : b \not R c \wedge c \not R b$ ∴ es de orden parcial.

Diagrama de Hasse

$\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$

$\{A, B, C, F\}$ ✓

Ejm.



Sea $A = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 36\}$ y sea R una relación de divisor definida por $x R y \Leftrightarrow x | y$

Determina si R es de orden amplio y parcial.

Reflexiva: $\forall x \in A, x | x \Rightarrow x R x$

Antisimétrico: $x R y \wedge y R x \Rightarrow x | y \wedge y | x \Rightarrow x = y$

Transitivo: $x R y \wedge y R z \Rightarrow x | y \wedge y | z \Rightarrow x | z$

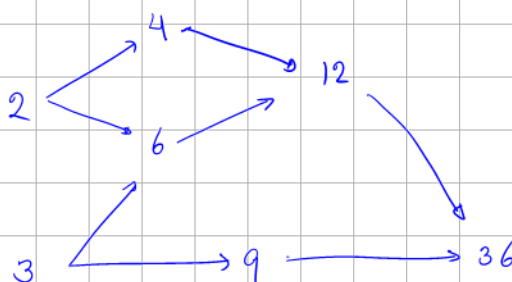
$\Rightarrow x R z$ \therefore es de orden amplio

Luego. $\exists 3, \exists 4 \in A : 3 \nmid 4 \wedge 4 \nmid 3$

Lo que significa que R es de orden parcial.

Luego el diagrama de Hasse es.

$A = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 36\}$



Luego los sig. subconjuntos están ordenados con un orden total.

$\{2, 4, 12, 36\}$

$\{2, 6, 12, 36\}$

$\{3, 6, 12, 36\}$

$\{3, 9, 36\}$

Ejm. Sea $A = \{1, 2, 4, 6, 18, 20, 36\}$ y R

$$x R y \Leftrightarrow x \mid y$$

a) Verifica que R es de orden amplio y parcial.

b) Realiza el diagrama de Hasse.

c) Escribe todos los subconjuntos totalmente ordenados.