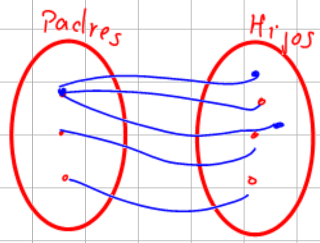
Ejm. Determine si las siguientes relaciones son o no funciones

Sea A el conjunto de personas, $R \subset A \times A$

a) $\quad xRy \iff \underset{\forall}{x}$ es hijo de $\underset{\exists!}{y}$ $\qquad$ es función.

b) $\quad xSy \iff x$ es padre de y

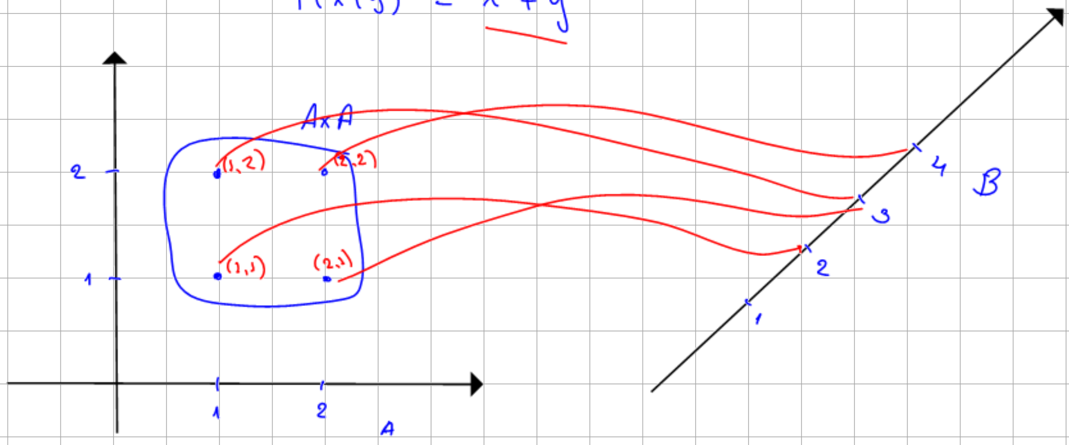
no es función



Ejm. Sean $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$

y $\quad f : A \times A \to B$

$$f(x, y) = x + y$$

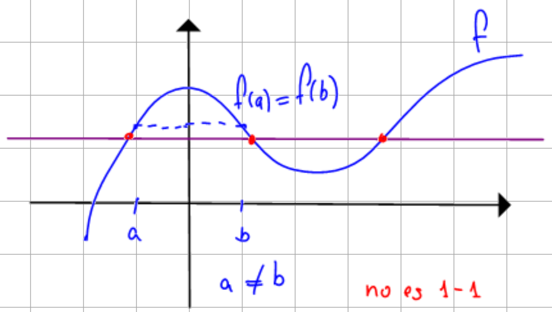


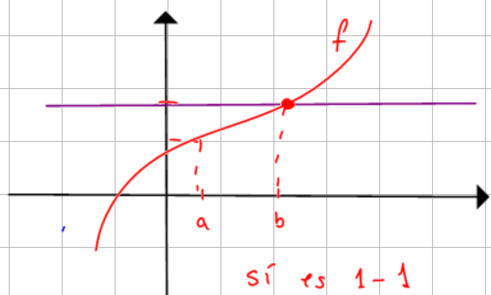
Clasificación de las funciones

Función inyectiva (1-1) Sea $f : A \to B$

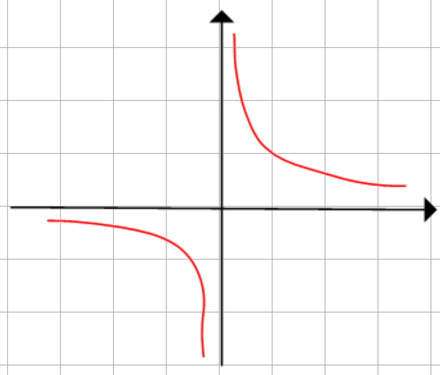
f es inyectiva $\iff \forall a, b \in A.\ f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

f es inyectiva $\iff \forall a, b \in A.\ a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$





Ejm. Determina si f es o no inyectiva.



Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$x \longmapsto f(x) = \frac{x-1}{x+2}$$

Sol. Sea

$$f(a) = f(b)$$

$$\frac{a-1}{a+2} = \frac{b-1}{b+2}$$

$$(b+2)(a-1) = (a+2)(b-1)$$

$$\cancel{ab} - b + 2a - \cancel{2} = \cancel{ab} - a + 2b - \cancel{2}$$

$$2a + a = 2b + b$$

$$3a = 3b$$

$$a = b \qquad \therefore f \text{ es } 1\text{-}1.$$

Función sobreyectiva

Sea $f: A \to B$

f es sobreyectiva $\Leftrightarrow$ $\forall y \in B, \exists x \in A : f(x) = y$

f es sobreyectiva $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(f) = B$

Ejm. Determina si f es o no sobreyectiva.

Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
$x \mapsto f(x) = 2x + 1$

Sol. f es sobre si $\forall y \in \mathbb{R}, \underline{\exists x \in \mathbb{R}}: f(x) = y$

$\underline{\forall y \in \mathbb{R}}$: con $f(x) = y$

$$2x + 1 = y$$

$$2x = y - 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$$

Así $\underline{\exists x = \frac{y-1}{2}} \in \mathbb{R}$ tal que $\underline{f(x)} = f\left(\frac{y-1}{2}\right)$

$$= \cancel{2}\left(\frac{y-1}{\cancel{2}}\right) + 1$$

$$= y - 1 + 1$$

$$\underline{= y}$$

$\therefore$ f es sobre.

Función biyectiva

Sea $f: A \to B$

f es biyectiva $\Leftrightarrow$ f es 1-1 y f es sobre.

f no es biyectiva $\Leftrightarrow$ f no es 1-1 o f no es sobre.

Ejm. Determina si f es biyectiva.

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$
   $x \mapsto f(x) = x^3$

Sol. f inyectiva. Si $f(a) = f(b)$

$$a^3 = b^3$$

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a^3 - b^3 = 0$$

$$(a-b)\cdot(a^2 + ab + b^2) = 0$$

$$mn^2 + cn + b = 0$$

$$a - b = 0 \quad \vee \quad a^2 + ab + b^2 = 0$$

$$\underline{a = b} \quad \vee \quad a = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4b^2}}{2}$$

$$n = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mb}}{2m}$$

$$a = \frac{-b \pm \sqrt{-3b^2}}{2}$$

$$a = \frac{-b \pm b\sqrt{-3}}{2}$$

$$0 = 0$$

esto ocurre sólo si $a = b = 0$

$\therefore$ f es 1-1.

f sobreyectiva. $\forall y \in \mathbb{R}, \underline{\exists x \in \mathbb{R}} : f(x) = y$

$\underline{\forall y \in \mathbb{R}}$ con $f(x) = y$

$$x^3 = y \Rightarrow x = \sqrt[3]{y} \in \mathbb{R}$$

Así $\underline{\exists\, x = \sqrt[3]{y}} \in \mathbb{R}$: $\underline{f(x)} = f(\sqrt[3]{y})$

$$= (\sqrt[3]{y})^3$$

$$\underline{= y}$$

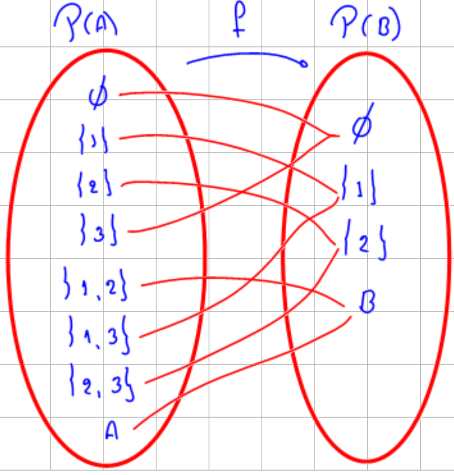
$\therefore$ f es sobre.

Por lo tanto f es biyectiva.

Ejm. Sean $A = \{1,2,3\}$ $B = \{1,2\}$

definimos $f : \mathcal{P}(A) \longrightarrow \mathcal{P}(B)$

$$X \mapsto f(X) = X \cap B$$



$\{1\} \neq \{1,3\}$

$f(\{1\}) \neq f(\{1,3\})$

$\{1\} = \{1\}$

$f(\emptyset) = \emptyset \cap B$

$= \emptyset$

$f(\{1\}) = \{1\} \cap B$
$= \{1\} \cap \{1,2\} = \{1\}$

$f(\{3\}) = \{3\} \cap \{1,2\}$
$= \emptyset$

$f(A) = A \cap B$
$= \{1,2,3\} \cap \{1,2\}$
$= \{1,2\} = B$

f no es 1-1

f es sobre

$\therefore$ f no es biyectiva

Ejercicio. Demuestra que $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ $\quad x \xrightarrow{f} f(x) \in \mathbb{R}$

para $f: A \to B$, $g: B \to C$ y $h: C \to D$

Dem. Sea $\forall x \in A$: $[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)(f(x))$

$= h[\underbrace{g(f(x))}]$

$= h[(g \circ f)(x)]$

$= (h \circ (g \circ f))(x)$

$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$

$h \circ g \circ f : A \to D$

Composición de funciones inyectivas

Si $f: A \to B$ y $g: B \to C$ son funciones inyectivas, entonces

$g \circ f: A \to C$ es inyectiva.

Dem. Sea $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(b)$ $\quad f(a) = f(b) \to a = b$

$g(f(a)) = g(f(b))$,

$g(m) = g(n) \to m = n$

como g es 1-1, $f(a) = f(b)$

como f es 1-1 $a = b$. $\therefore$ $g \circ f$ es 1-1

Ejercicio. Si $f: A \to B$ y $g: B \to C$ funciones sobreyectivas, entonces $g \circ f: A \to C$ es sobreyectiva.

Dem.

Funciones inversas

Sea $A = \{a, b, c\}$ $B = \{1, 2, 3\}$

y $f = \{(a,1)(b,2)(c,1)\}$

de donde $f^{-1} = \{(1,a)(2,b)(1,c)\}$ no es función.

entonces para que f^{-1} sea función se necesita que f sea 1-1.