Universidad Mayor de San Andrés

Facultad de Ciencias Puras y Naturales

Carrera de Informática

PRACTICA#1

ALGEBRA

APELLIDO: MAMANI QUEA

NOMBRES: JHAMIL CALIXTO

CI: 9914119LP

DOCENTE: EUGENIO CASTAÑOS CALLE

PARALELO: E

LA PAZ - BOLIVIA

2023

Conjuntos

1. Describa cada conjunto listando sus elementos

(a) Los enteros entre -3 y 9.

$\therefore \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$

(b) Los enteros negativos mayores que -10.

$\therefore \{-9,-8,-7,-6,-5,-4,-3,-2,-1\}$

(c) Los enteros positivos cuyo cuadrado es menor a 25.

$\therefore \{1,2,3,4\}$

2. Describa los siguientes conjuntos por comprensión:

(a) Los números reales positivos.

$\therefore\ x \in \mathbb{R} \mid x > 0$

(b) Los números irracionales negativos.

$\therefore\ x \in \mathbb{I} \mid x < 0$

(c) Los enteros negativos pares mayores que -50.

$\therefore\ x \in \mathbb{Z} \mid \ x \geq -50 \ \wedge \ x = 2k$

3. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son vacíos?

(b) $\{s \in \mathbb{R} \mid s^2 + 5s - 7 = 0\}$.

$$\underbrace{s^2}_{a} \underbrace{+5s}_{b} \underbrace{-7}_{c} = 0$$

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(1 \cdot -7)}}{2 \cdot 1}$$

$$\frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4(-7)}}{2}$$

$$\frac{-5 \pm \sqrt{25 + 28}}{2}$$

$$\frac{-5 \pm \sqrt{53}}{2}$$

$+ = 1.1400$

$- = -6.1400$

$\therefore \sqrt{53}$ es un real positivo la cual no es un conjunto Vacio

4. Enlista los elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

(a) $\{x \in \mathbb{Z} | \; xy = 15$ para algún $y \in \mathbb{Z}\}$

Los elementos son:

$\therefore \{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 15\}$

(c) $\{x \in \mathbb{N} | \; a < -4$ y $a > 4\}$

No hay numeros naturales que lo cumplen:

$\therefore \{x \in \mathbb{N} / x \in \varnothing\}$

5. Enlista cinco elementos de cada uno de los siguientes conjuntos:

(a) $\{a + b\sqrt{2} | \; a \in \mathbb{N}, -b \in \{2, 5, 7\}\}$

C "A": $\{a+b\sqrt{2} | a \in \mathbb{N}, -b \in \{2,5,7\}\}$

1. $1 + 2\sqrt{2}$
2. $1 + 5\sqrt{2}$
3. $1 + 7\sqrt{2}$
4. $2 + 2\sqrt{2}$
5. $2 + 5\sqrt{2}$

C "A": $\{-a-b\sqrt{2} | a \in \mathbb{N}, -b \in \{2,5,7\}\}$

1. $-1 - 2\sqrt{2}$
2. $-1 - 5\sqrt{2}$
3. $-1 - 7\sqrt{2}$
4. $-2 - 2\sqrt{2}$
5. $-2 - 5\sqrt{2}$

(b) $\{x/y | \; x, y \in \mathbb{R}, x^2 + y^2 = 25\}$

1. $-3/-4$, pues $-3, -4 \in \mathbb{R} \wedge (-3)^2 + (-4)^2 = 25$
2. $\sqrt{7}/\sqrt{18}$, pues $\sqrt{7}, \sqrt{18} \in \mathbb{R} \wedge \sqrt{7}^2 + \sqrt{18}^2 = 25$
3. $0/5$, pues $0, 5 \in \mathbb{R} \wedge 0^2 + 5^2 = 25$
4. $3/4$, pues $3, 4 \in \mathbb{R} \wedge 4^2 + 3^2 = 25$
5. $4/3$, pues $4, 3 \in \mathbb{R} \wedge 3^2 + 4^2 = 25$

6. Si $A = \{1, 2, 3, 4\}$ enlistar todos los subconjuntos B de A tales que:

(a) $\{1, 2\} \subseteq B$.

$B = \{1,2\}$ (Este es el conjunto completo $\{1,2\}$)

$B = \{1,2,3\}$

$B = \{1,2,4\}$

$\therefore$ Estos son los subconjuntos de A que incluyen los elementos 1 y 2.

(b) $B \subseteq \{1, 2\}$.

$B = \{\}$ (El conjunto vacio, que es un subconjunto de cualquier conjunto)

$B = \{1\}$

$B = \{2\}$

$B = \{1,2\}$

$\therefore$ Estos son los unicos subconjuntos de A que son subconjuntos de $\{1,2\}$

7. Si $A = \{\{a, b\}\}$, determinar cuales de las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas. Explicar su respuesta.

(a) $a \in A$.

$A = \{\{a,b\}\}$ contiene los elementos a y b Entonces a es un elemento de A

$\therefore$ $a \in A$ es verdadera

(b) $A \in A$.

$A = \{\{a,b\}\}$ pero A mismo no es un elemento de si mismo

$\therefore$ $A \in A$ es una afirmación Falsa

(c) $\{a, b\} \in A$.

$\{a,b\}$ es un elemento de A

$\therefore$ $\{a,b\} \in A$ es verdadera

9. Determine si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas. Justifique su respuesta.

(a) $\emptyset \subseteq \emptyset$

Por que el $\emptyset$ es un subconjunto de cualquier conjunto, el conjunto vacio en si mismo $\therefore$ Es Verdadera

(b) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$

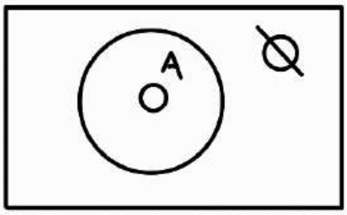
Se compara con $\{\emptyset\}$ que es vacio en si mismo

$\therefore$ Es Verdadera

(g) $A \subseteq \emptyset$

Por que el vacio no puede tener ningun elemento

$\therefore$ Es Falsa



(h) $\emptyset \subseteq A$

Por que A no tiene ningun elemento por lo tanto como Subconjunto es valido

∴ Es Verdadera

12. Suponga que A, B y C son conjuntos. Para cada una de las siguientes afirmaciones, proporcione una demostración si es verdadera o un contraejemplo si es falsa.

(a) $A \in B, B \in C \rightarrow A \in C.$

Contra - ejemplo

Si $A \in B$ y $B \in C$ entonces $B = \{A\}$ y $C = \{B\}$

entonces $C = \{B\}$

entonces $C = \{\{A\}\}$ pues $B = \{A\}$

entonces es Falso decir que $A \in C$, pues vemos que no ocurre que

$C = \{A\}$

(b) $A \subseteq B, B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C.$

Demostración

Supongamos que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$

1. $A \subseteq B$, todos los elementos de A deben estar en B.
2. $B \subseteq C$, todos los elementos de B deben estar en C.

Podemos concluir que todos los elementos de A tambien están en C. Por lo tanto:

$A \subseteq C$

∴ $A \subseteq B, B \subseteq C \rightarrow A \subseteq C$ es Verdadera

(g) $A \subseteq B, B \in C \rightarrow A \subseteq C.$

contra - ejemplo

$A = \{1, 4\}$, $B = \{1, 4, 9\}$, $C = \{\{1, 4, 9\}, \{121\}\}$ en donde vemos que:

$A \subseteq B \wedge B \in C$, pero $A \not\subseteq C$

∴ La afirmacion es Falsa

15. Sean $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$,
$A = \{a, c, i, e\}$, $B = \{b, c, e, f\}$, $C = \{a, c, d, e\}$
hallar los conjuntos:

(a) A^c, B^c, C^c, $A \setminus B$, $C \cap B$.

$A^c = \{b, d, f, g, h, J\}$

$B^c = \{a, d, g, h, i, J\}$

$C^c = \{b, f, g, h, i, J\}$

$A \setminus B$ (A sin B) $= \{a, i\}$

$C \cap B = \{c, e\}$

(b) $A \cap B^c$, $B \cap A^c$, $(A \cap B \cap C)^c$.

$A \cap B^c = B^c = \{a, d, g, h, i, j\}$

$A \cap B^c = \{a, i\}$

$B \cap A^c = A^c = \{b, d, f, g, h, j\}$

$B \cap A^c = \{b, f\}$

$(A \cap B \cap C)^c = A \cap B = \{c, e\}$

$(A \cap B) \cap C = \{c, e\} \cap \{a, c, d, e\} = \{c, e\}$

$(A \cap B \cap C)^c = U - (A \cap B \cap C) = \{a, b, d, f, g, h, i, j\}$

17. Sean $S = \{2, 5, \sqrt{2}, 25, \pi, \frac{5}{2}\}$ y $T = \{4, 25, \sqrt{2}, 6, \frac{3}{2}\}$.

(a) Encontrar $S \cap T$, $S \cup T$, y $T \times (S \cap T)$.

Primer conjunto:

$S \cap T = \{2, 5, \sqrt{2}, 25, \pi, \frac{5}{2}\} \cap \{4, 25, \sqrt{2}, 6, \frac{3}{2}\}$
$= \{\sqrt{2}, 25\}$

Segundo conjunto:

$S \cup T = \{2, 5, \sqrt{2}, 25, \pi, \frac{5}{2}\} \cup \{4, 25, \sqrt{2}, 6, \frac{3}{2}\}$
$= \{\sqrt{2}, 4, 5, 25, \pi, 6, \frac{5}{2}, \frac{3}{2}\}$

Tercer conjunto:

$T \times (S \cap T) = \{(4, \sqrt{2}), (4, 25), (25, \sqrt{2}), (25, 25), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (\sqrt{2}, 25), (6, \sqrt{2}), (6, 25), (\frac{3}{2}, \sqrt{2}),$
$(\frac{3}{2}, 25)\}$

(b) Encontrar $\mathbb{Z} \cup S$, $\mathbb{Z} \cap S$, $\mathbb{Z} \cup T$, y $\mathbb{Z} \cap T$.

Primer conjunto:

$\mathbb{Z} \cup S = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\} \cup \{2, 5, \sqrt{2}, 25, \pi, \frac{5}{2}\}$

$= \{2, 5, -\sqrt{2}, 25, \pi, \frac{5}{2}, -1, 0, 1\}$

Segundo conjunto:

$\mathbb{Z} \cap S = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\} \cap \{2, 5, \sqrt{2}, 25, \pi, \frac{5}{2}\}$

$= \{2, 5, 25\}$

Tercer Conjunto:

$\mathbb{Z} \cup T = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\} \cup \{4, 25, -\sqrt{2}, 6, \frac{3}{2}\}$

$= \{4, 25, -\sqrt{2}, 6, \frac{3}{2}, -1, 0, 1\}$

Cuarto Conjunto:

$\mathbb{Z} \cap T = \{\ldots, -1, 0, 1, \ldots\} \cap \{4, 25, -\sqrt{2}, 6, \frac{3}{2}\}$

$= \{4, 25, 6\}$

18. Considerando $A = \{a, b, c, \{a, b\}\}$ y $B = \{a, b, c\}$, encontrar

(a) $A \setminus \{a, b\}$

$\therefore \{c, \{a, b\}\}$

(b) $\{\emptyset\} \setminus \mathcal{P}(A)$

$\therefore \emptyset$

(c) $A \setminus \emptyset$

$\therefore$ A ({ a, b ,c{a,b}}) No cambia nada

24. Sean A y B conjuntos tales que

(a) $A \cap B = A$.

$A \cap B \subset B$ — Por el Lema 1

$A \cap B \subset B \wedge A \cap B = A$ — Por hipotesis

$A \cap B = A \wedge A \cap B \subset B$ — Prop. Conmutativa

$A = A \cap B \wedge A \cap B \subset B$

$\Rightarrow A \subset B$

$\therefore$ Podemos concluir que $A \subset B$

(b) $A \cup B = A$.

$B \subset A \cup B$ Por el Lema 1

$B \subset A \cup B \wedge A \cup B = A$ Por hipotesis

$\Rightarrow B \subset A$

$\therefore$ Podemos concluir que $B \subset A$

27. Sean A, B y C subconjuntos de algún conjunto universal U.

(a) Probar que $A \cap B \subseteq C$.

$X \in A \cap B$

$A \subseteq C$ Por def. intersección

$\rightarrow X \in C$

$\therefore A \cap B \subseteq C$

(b) Probar que $A^c \cap B \subseteq C$ implica $B \subseteq C$.

$A^c \cap B \subseteq C \rightarrow B \subseteq C$

$x \in B$ por suposición

$x \notin A$ por def. complemento

$x \in A^c$

$x \in A^c \cap B$ por hipotesis

$\rightarrow x \in C$

$\therefore B \subseteq C$

28. Si A, B y C son conjuntos.

(a) Encontrar un contraejemplo a la afirmación $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap C$.

Contraejemplo : $C = \varnothing \wedge A, B$ conjuntos

$A \cup (B \cap \varnothing) = (A \cup B) \cap \varnothing$

$A \cup \varnothing = \varnothing$

$A = \varnothing$

$\therefore$ Lo cual es una contradicción por que A era cualquier conjunto

(b) Sin el empleo de diagramas de Venn, probar que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

$x \in A \cup (B \cap C)$

$x \in A \lor x \in (B \cap C)$

$x \in A \lor (x \in B \land x \in C)$

$(x \in A \lor x \in B) \land (x \in A \lor x \in C)$

$x \in (A \cup B) \land x \in (A \cup C)$

$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

$\therefore$ Por tanto $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cap C)$

32. Demostrar que: $A \oplus B = \emptyset$ si, y solo si $A = B$.

Demostremos $A \oplus B = \emptyset \Rightarrow A = B$

$A \oplus B = \emptyset \Rightarrow (A - B) \cup (B - A) = \emptyset$

$(A - B) = \emptyset \land (B - A) = \emptyset$ mediante Teorema 2

$A - B = \emptyset \land B - A = \emptyset$

$A \subset B \land B \subset A$ mediante Teorema 1

$A = B$ por la definición de igualdad de conjuntos

Demostramos $A \oplus B = \emptyset \Rightarrow A = B$

$A = B \Rightarrow A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$

$A \oplus B = (A - B) \cup (B - A) \land A = B$

$A \oplus B = (B - B) \cup (A - A)$

$A \oplus B = (\emptyset) \cup (\emptyset)$

$A \oplus B = \emptyset$

Por tanto $A = B \Rightarrow A \oplus B = \emptyset$

$\therefore$ $A \oplus B = \emptyset \Longleftrightarrow A = B$

33. ¿Cuáles de las siguientes condiciones implica que $B = C$? En cada caso, proporciona una prueba o un contraejemplo.

(a) $A \cup B = A \cup C$.

Contra ejemplo

$A = \{1,2\}$
$B = \{2,3\}$
$C = \{1,3\}$

Entonces

$A \cup B = \{1,2,3\}$
$A \cup C = \{1,2,3\}$

Aunque $A \cup B = A \cup C$, $B \neq C$, ya que B tiene el elemento 3 y C no lo tiene.

$\therefore$ $A \cup B = A \cup C$ no implica necesariamente que $B = C$

(b) $A \cap B = A \cap C$.

Si A es un conjunto distinto de $\emptyset$

$A \cap B = A \cap C$ implica que $B = C$

$A \cap B = A \cap C \;\wedge\; A = \emptyset \Rightarrow B = C$

$A \cap B = A \cap C$

$(A \cap B) \cup \emptyset = (A \cap C) \cup \emptyset$

$(A \cup \emptyset) \cap (B \cup \emptyset) = (A \cup \emptyset) \cap (C \cup \emptyset)$ Prop. Distributiva

$A \cup \emptyset = A$ y $B \cup \emptyset = B$ y $C \cup \emptyset = C$

$A \cap B = A \cap C$ y $A = \emptyset$

Podemos concluir que $B = C$

$\therefore$ $A \neq \emptyset$ la igualdad $A \cap B = A \cap C$ implica que $B = C$

$\therefore$ $A = \emptyset$ la igualdad $A \cap B = A \cap C$ no garantiza que $B = C$

36. Para conjuntos A, B y C, mostrar que

(a) $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$.

$(x, y) \in (A \cup B) \times C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \;\wedge\; y \in C$

$(x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C$

$(x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C)$

$[(x,y) \in A \times C] \vee [(x,y) \in B \times C]$

$(x,y) \in A \times C \;\vee\; (x,y) \in B \times C$

$(x, y) \in (A \cup B) \times C \Leftrightarrow (x,y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$

$\therefore$ Se cumple $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$ para todo A, B, C

(b) $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$.

$(x,y) \in (A \cap B) \times C \Longleftrightarrow x \in (A \cap B) \wedge y \in C$

$(x \in A \wedge x \in B) \wedge y \in C$

$(x \in A \wedge y \in C) \wedge (x \in B \wedge y \in C)$

$[(x,y) \in A \times C] \wedge [(x,y) \in B \times C]$

$(x,y) \in A \times C \;\wedge\; (x,y) \in B \times C$

$(x,y) \in (A \cap B) \times C \Longleftrightarrow (x,y) \in (A \times C) \cap (B \times C)$

$\therefore$ Se cumple $(A \cap B) \times C = (A \times C) \cap (B \times C)$ para todo A, B, C

39. Pruébese que:

1. $A \backslash B = (A \cup B) \backslash B$.

$(A \cup B)/B = (A \cup B) \cap B^c$

$= (A \cap B^c) \cup (B \cap B^c)$ Ley distributiva

$= (A \cap B^c) \cup \varnothing$ PI vi

$= (A \cap B^c)$ PU d)

$= A/B$

$\therefore$ Por tanto $(A \cup B)/B = A/B$

3. $(A \backslash C) \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \backslash C$.

Consideremos que

$\left.\begin{array}{l} A = \{1,2,3\} \\ B = \{1,2\} \\ C = \{2,3\} \end{array}\right\}$ Conjuntos

$\left.\begin{array}{l} (A \backslash C) \backslash (B \backslash C) = \{1\} \\ (A \backslash B) \backslash C = \{3\} \end{array}\right\}$ No son relativamente iguales

$\therefore$ La igualdad $(A \backslash C)\,(B \backslash C) \backslash C$ es cierta si $B \subseteq C$

4. $(A \backslash C) \cup (B \backslash C) = (A \cup B) \backslash C$.

$\rightarrow x \in (A \cup B) \backslash C) = (A \backslash C) \cup (B \backslash C)$ Dif. Conj

$= (A \cap C^c) \cup (B \cap C^c)$ L. Distributiva

$= ((A \cup B) \cap C^c)$ Dif. Conj

$x \in (A \cup B) \backslash C) = (A \cup B) \backslash C$

$\therefore$ Por tanto $(A \cup B) \backslash C) = (A \cup B) \backslash C$

47. De un total de 120 personas encuestadas, 25 personas hablan inglés y francés, 40 solo hablan francés y 20 no hablan ninguno de estos idiomas. ¿Cuántas personas hablan solo uno de estos idiomas?

$U = 120$

$I \cap F = 25$

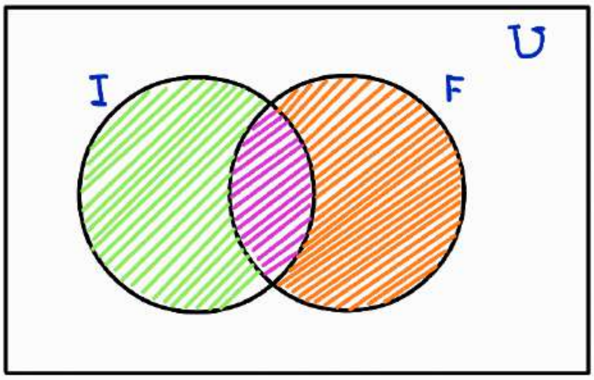
$F - I = 40$

$(I \cup F)^c = 20$

$U - (I \cup F) = 20$

$A \cup B = 120 - 20$

$= 100$



$A = A \cup B - B$

$A = 100 - 65$

$A = 35$

$F - 25 = 40$

$I + (I - F)$

$35 + 40$

$= 75$