Ejercicios de repaso

1. **Demostrar que si el producto ab de dos números enteros es par, entonces a es par o b es par**

p (el producto ab de dos números enteros es par), q (a es par), r (b es par)

$$p \Rightarrow (q \vee r)$$

$\sim q$: a no es par

$\sim q$: a es impar

$$\sim (q \vee r) \Rightarrow \sim p$$

$$(\sim q \wedge \sim r) \Rightarrow \sim p$$

$\sim r$: b no es par

$\sim r$: b es impar

Dem. La demostración la realizamos por el contrarecíproco.

Si a es impar y b es impar entonces ab es impar

Luego a es impar y b es impar $\Rightarrow a = 2t+1 \wedge b = 2r+1 \ , \ \exists\, t, r \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow ab = (2t+1)(2r+1)$$

$$\Rightarrow ab = \underbrace{4tr + 2t + 2r} + 1$$

$$\Rightarrow ab = 2\underbrace{(2tr + t + r)}_{k} + 1$$

$$\Rightarrow ab = 2 \cdot k + 1 \ , \quad k \in \mathbb{Z}$$

$\Rightarrow$ ab es impar

2. **Simplificar** $(\sim p \vee q) \wedge \left[\sim q \wedge (q \rightarrow r)\right]$.

$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

$$(\sim p \vee q) \wedge [\sim q \wedge (q \Rightarrow r)] \equiv (\sim p \vee q) \wedge [\sim q \wedge (\sim q \vee r)] \quad \text{def. implic.}$$

$$\equiv (\sim p \vee q) \wedge \sim q \quad \text{L. absorción}$$

$$\equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim q) \quad \text{L. distrib.}$$

$$\equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee F \quad \text{L. negación}$$

$$\equiv \sim p \wedge \sim q \quad \text{L. Identidad}$$

$$\equiv \sim (p \vee q) \quad \text{L. De Morgan}$$

3. **Demostrar que** $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left(\sum_{i=1}^{n} i\right)^2$**, para todo entero positivo** n**.**

Dem. Por inducción matemática.

Paso 1. Verificamos para $n=1$.

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{1} i^3} = \left[\sum_{i=1}^{1} i\right]^2$$

$$1^3 = [1]^2$$

$$1 = 1 \qquad V$$

Paso 2. Sup. cierto para $n=k$

$$\sum_{i=1}^{k} i^3 = \left[\sum_{i=1}^{k} i\right]^2 \qquad [\text{Hipótesis}]$$

entonces veamos para $n=k+1$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \left[\sum_{i=1}^{k+1} i\right]^2 \quad ?$$

Dem.

$$\sum_{i=1}^{k+1} i^3 = \sum_{i=1}^{k} i^3 + (k+1)^3 = \left[\sum_{i=1}^{k} i\right]^2 + (k+1)^3$$

$$\left[\underbrace{1+2+3+\ldots+k}\right]^2$$

$$\left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2$$

$$= \left[\frac{k(k+1)}{2}\right]^2 + (k+1)^3$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$= \frac{k^2(k+1)^2 + 4(k+1)^3}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2\left[k^2+4k+4\right]}{4} = \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4} = \left[\frac{(k+1)(k+2)}{2}\right]^2$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{k+1} i\right]^2$$

Paso 3. $\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\sum_{i=1}^{n} i\right]^2 \quad , \forall n \in \mathbb{N}$

$n=5 \qquad 1^3+2^3+3^3+4^3+5^3 = \left[1+2+3+4+5\right]^2 = \left(\frac{5(5+1)}{2}\right)^2 = 15^2 = \underline{225}$

4. **Si $C \subset A$, simplificar** $(A \cap B) \cup \left[B \cap \left((C \cap D) \cup (C^c \cup D)^c\right)\right]$

Sol.

$$(A \cap B) \cup \left[B \cap \left((C \cap D) \cup (C^c \cup D)^c\right)\right] = (A \cap B) \cup \left[B \cap \left((C \cap D) \cup (C \cap D^c)\right)\right]$$

$$= (A \cap B) \cup \left[B \cap \left(C \cap (D \cup D^c)\right)\right]$$

$$= (A \cap B) \cup \left[B \cap (C \cap U)\right]$$

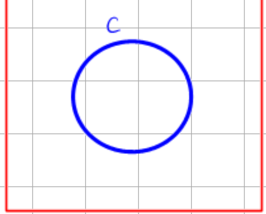
$$= (A \cap B) \cup \left[B \cap C\right]$$

$$= B \cap (A \cup C)$$

$$= B \cap A$$

$$= A \cap B$$

$C \subset U$



$C \cup U = U$

$A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$

$\qquad\qquad A \cap B = A$

$C \subset A \Rightarrow A \cup C = A$

5. **Si $|A \triangle B| = 15$ y $|A \cup B| = 50$. ¿Cuantos elementos tiene $A \cap B$?** 35

Sol.

$$|A \triangle B| = |A \cup B| - |A \cap B|$$

$$15 = 50 - |A \cap B|$$

$$|A \cap B| = 50 - 15$$

$$= 35$$

(b) $A \subseteq \{A\}$ si, y solo si $A = \emptyset$.

Dem.

i) $A \subseteq \{A\}$ entonces $A = \emptyset$

$\forall x \in A$, si $x \in A \Rightarrow x \in \{A\}$

pero $\{A\}$ tiene un solo elemento que es el mismo A.

esto significa que $\boxed{A = \emptyset}$

ii) si $A = \emptyset$ entonces $A \subseteq \{A\}$

Si $A = \emptyset$, se ve que $\{A\}$ tiene un solo elemento que es A mismo, pero como

$A = \emptyset \subseteq \{\emptyset\} = \{A\}$

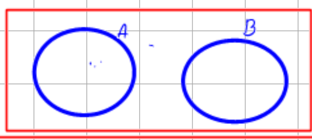
$A \subseteq \{A\}$

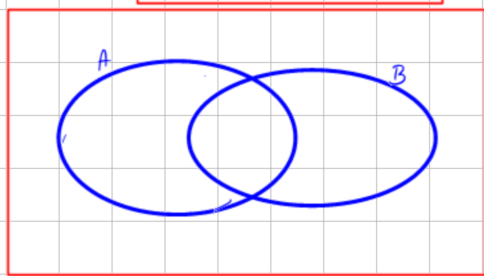
31. Sean A y B conjuntos, su diferencia simétrica de define como Sea $A \oplus B = (A - B) \cup (B - A)$. Encontrar una condición necesaria y suficiente para que

(a) $A \oplus B = A$. (b) $A \cap B = A \cup B$.

Sol.

$\boxed{A \oplus B = A}$ $A = B = \emptyset$





$(A \cup B) - (A \cap B) = A$

i) $(A \cup B) - \emptyset = A$

$A \cup B = A$

ii) $(A \cup B) \cap (A \cap B)^c = A$

$(A \cap B)^c = A \Rightarrow \emptyset^c = A \Rightarrow \boxed{U = A}$

$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \boxed{B = \emptyset}$