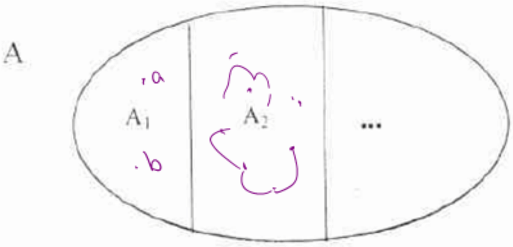
Teorema Toda partición de un conjunto A permite definir en éste una relación de equivalencia "~" en la que las clases de equivalencia son los bloques de la partición.



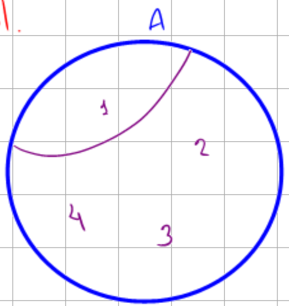
Si $\{A_1, A_2, ...\}$ es una partición de A, entonces según el teorema cada A_i es una clase de equivalencia de A. En donde la relación de equivalencia se define como sigue:

$$a \sim b \Leftrightarrow a \text{ y } b \text{ son miembros del mismo bloque}$$

Ejm. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y sea $\{\{1\}\ \{2, 3, 4\}\}$ una partición de A.

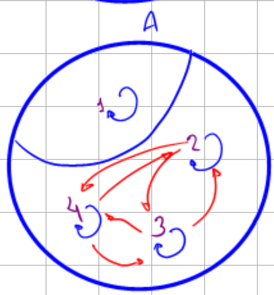
Determine la relación de equivalencia $\sim$ en A.

Sol.



Luego

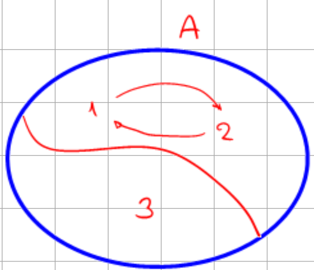
$$\sim = \{(1,1)(2,2)(3,3)(4,4)(2,3)(3,2)(2,4)(4,2)(3,4)(4,3)\}$$



Así $\sim$ es una rel. de equivalencia.

$x R y \iff x = y \vee x + y = 3$

Ej.



$$\sim = \{(1,1)(2,2)(3,3)(1,2)(2,1)\}$$

$1 \sim 1 \wedge 1 \sim 2 \Rightarrow 1 \sim 2$

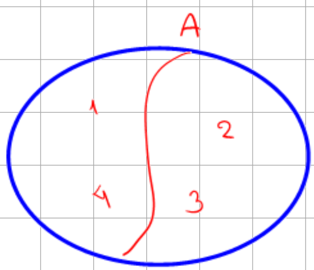
$2 \sim 2 \wedge 2 \sim 1 \Rightarrow 2 \sim 1$

$1 \sim 2 \wedge 2 \sim 1 \Rightarrow 1 \sim 1$

$2 \sim 1 \wedge 1 \sim 2 \Rightarrow 2 \sim 2$

$3 \sim 3 \Rightarrow 3 \sim 3$ V

$1 \sim 1 \Rightarrow 1 \sim 1$ V



$$\sim = \{(1,1)(2,2)(3,3)(4,4)(2,3)(3,2)(1,4)(4,1)\}$$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$\underline{x R y} \iff \underline{x = y \vee x + y = 5}$

Ejm. En $\mathbb{Z}$ se define la rel. de equiv. $\sim$ mediante

$$x \sim y \iff 5 \mid x-y \qquad (5 \text{ divide a } x-y \text{ ó } x-y = 5\cdot k,\ k \in \mathbb{Z}$$

a) Determine las clases de equivalencia

b) Determine el conjunto de índices $\qquad K_a = \{ y \in \mathbb{Z} : a \sim y \}$

c) Determine el conjunto cociente.

$5 \mid a-y$

Sol. $\quad R = \{ (0,0)(1,1)(2,2) \ldots \quad (-1,-1)(-2,-2) \}$

Reflexiva: $\quad xRx$ porque $5 \mid x-x$

$5 \mid 0 \quad \checkmark$

Simétrica. $\quad xRy \iff 5 \mid x-y \qquad x-y = -(y-x)$

$\iff 5 \mid -(y-x) \qquad 5 \mid -10$

$5 \mid 10$

$\iff 5 \mid y-x \iff yRx$

Transitividad $\quad xRy \wedge yRz \iff 5 \mid x-y \wedge 5 \mid y-z$

$a \mid b \wedge a \mid c \qquad \iff 5 \mid (x-\cancel{y}) + (\cancel{y}-z)$

$a \mid b+c \qquad \iff 5 \mid x-z$

$\iff xRz$

Así R es de equivalencia.

Luego $\quad \sim = \{ (x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 5 \mid x-y \}$

Así x es equivalente a y si 5 divide a $x-y$

Entonces, las clases de equivalencia serán:

$K_0 = \{ \ldots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, \ldots \} = K_5 = K_{10}$

$K_1 = \{ \ldots, -9, -4, 1, 6, 11, 16, 21, \ldots \} = K_6 = K_{11}$

$K_2 = \{ \ldots, -8, -3, 2, 7, 12, 17, 22, \ldots \} = K_7 = K_{12}$

$K_3 = \{ \ldots, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \ldots \} = K_8$

$K_4 = \{ \ldots, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \ldots \} = K_9$

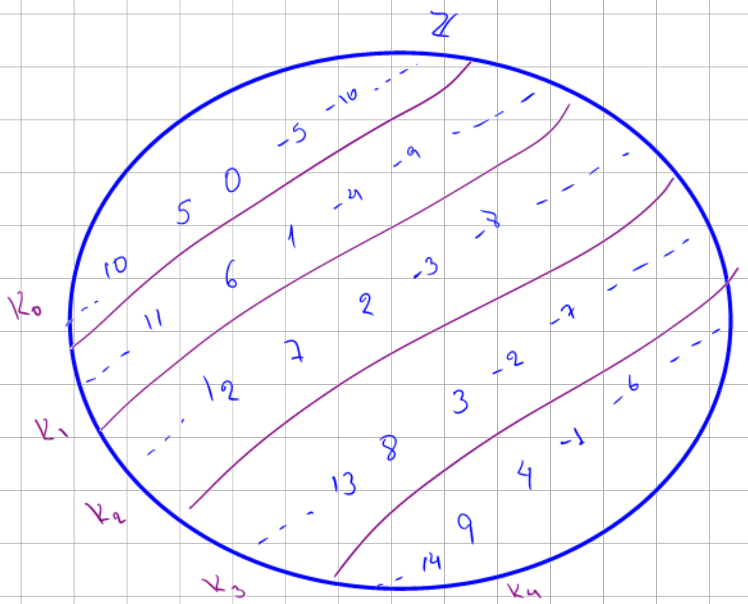
$K_5 = \{ \ldots, -10, -5, 0, 5, \underline{10}, 15, 20, \ldots \} = K_0$

Así se tiene 5 clases distintas.

K_0, K_1, K_2, K_3, K_4

b) $I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

c) $\mathbb{Z}/\sim \; = \{ K_0, K_1, K_2, K_3, K_4 \}$

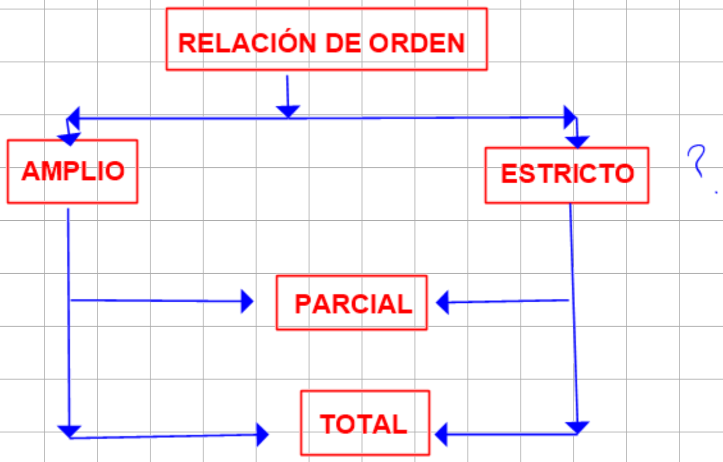


RELACIONES DE ORDEN

Cuando queremos referirnos a un orden cualquiera, usaremos el término genérico "preceder"

$$x R y \iff x \text{ precede a } y$$

se dice que es de orden amplio o estricto y en cada caso, es de orden parcial o total.



Relación de orden amplio

R es una relación de orden amplio en A si y sólo si es reflexiva, antisimétrica y transitiva.

i)	Sí	$x \in A \Rightarrow x\,R\,x$
ii)	Sí	$x\,R\,y \wedge y\,R\,x \Rightarrow x = y$
iii)	Sí	$x\,R\,y \wedge y\,R\,z \Rightarrow x\,R\,z$

Ejm

Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y sea R una relación definida por $x\,R\,y \Leftrightarrow x \leq y$

Verifica si R es una relación de orden amplio.

Sol

Reflexiva. $\forall x \in A$, $x\,R\,x \Leftrightarrow x \leq x$

Antisimetría. Si $x\,R\,y \wedge y\,R\,x \Rightarrow x \leq y \wedge y \leq x$

$\Rightarrow x = y$

Transitiva. Sean

$x\,R\,y \wedge y\,R\,z \Rightarrow x \leq y \wedge y \leq z$

$\Rightarrow x \leq z$

$\Rightarrow x\,R\,z$.

$\therefore$ R es una relación de orden amplio.

Ejm.

Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y sea R una relación definida por

$x R y \Leftrightarrow x \mid y$, es R una relación de orden amplio?

Sol.

Reflexiva. $\forall x \in A$, $x \mid x \Rightarrow x R x$

Antisimétrica. Si $x R y \wedge y R x \Rightarrow x \mid y \wedge y \mid x$

$\Rightarrow x = y$

Transitiva. Sean $x R y \wedge y R z \Rightarrow x \mid y \wedge y \mid z$

$\Rightarrow y = x \cdot t \wedge z = y \cdot r$, $r, t \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow z = y \cdot r = x \cdot (t \cdot r)$

$\Rightarrow z = x \cdot s$, $s = t \cdot r \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x \mid z$

$\Rightarrow x R z$

$\therefore$ R es de orden amplio.

Orden parcial y total

Sea R una relación de orden amplio definida en un conjunto A.

1) Cuando todos los elementos de A son comparables dos a dos, el orden se llama total.

Es decir, sí

$$x \neq y \Rightarrow x R y \vee y R x$$

Por ejemplo en $A = \{1, 2, 3\}$ y $x R y \Leftrightarrow x \leq y$

$R = \{(1,1)(2,2)(3,3)(1,2)(1,3)(2,3)\}$

Sea $1 \neq 3 \Rightarrow 1 R 3 \vee 3 R 1$

2) Cuando existen pares de elementos de A que no son comparables, el orden se llama parcial. Es decir,

$$\exists x, \exists y / x \not R y \wedge y \not R x$$

Por ejemplo $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $x R y \Leftrightarrow x \mid y$

$R = \{(1,1)(2,2)(3,3)(4,4)(1,2)(1,3)(1,4)(2,4)\}$

$\exists 3, \exists 4 \ / \ 3 \not R 4 \quad \wedge \quad 4 \not R 3$

$3 \not< 4 \qquad 4 \not< 3$

$\exists 2, \exists 3 \ : \ 2 \not< 3 \quad \wedge \quad 3 \not< 2$

Orden estricto

R es una relación de orden estricto si y sólo ~~R~~ es arreflexiva, asimétrica y transitiva.

i) Sí $\forall x \in A \Rightarrow x \not R x$

ii) Sí $\forall x R y \Rightarrow y \not R x$

iii) Sí $x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$

Ejm. Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y $\boxed{x R y \iff x < y}$

Determine si R es de orden estricto

Sol.

Arreflexiva. $\forall x \in A \ ; \ x \not R x$, porque $x \not< x$

Asimétrica. $\forall x, y \in A, \ x R y \Rightarrow x < y$

$\Rightarrow y \not< x$

$\Rightarrow y \not R x$

Transitiva. Sean $x R y \wedge y R z \Rightarrow x < y \wedge y < z$

$\Rightarrow x < z$

$\Rightarrow x R z$.

$\therefore$ R es de orden estricto

Ejm. Sean A y B conjuntos en un mismo universo.

$A R B \iff A \subset B$

Determine si R es de orden estricto.

Sol.

Arreflexiva $\quad \forall A \; , \; A R A$ porque $A \subseteq A$ ✓

Asimétrica

Transitiva.

$\therefore$ R no es de orden estricto

Ejm. Sea $A = \{a, b, c, d\}$ y R definida por

$$R = \{(a,b)(a,c)(a,d)(b,d)(c,d)\}$$

Determine si R es de orden estricto y si es total o parcial.

Sol.

Arreflexiva $\quad \forall x \in A \; , \; x \not R x$

Asimétrica $\quad \forall x, y, \; x R y \Rightarrow y \not R x$

Transitiva. $\quad$ Si $x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$

$$\underline{aRb} \wedge bRd \Rightarrow \underline{aRd}$$

$$aRc \wedge cRd \Rightarrow aRd$$

$\therefore$ R es de orden estricto.

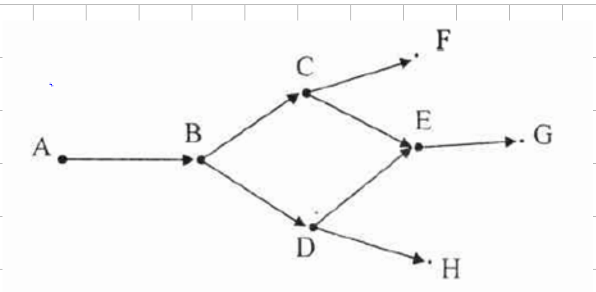
Orden total. $\quad \forall. \; x \neq y \Rightarrow x R y \vee y R x$

Sea $b \neq c \Rightarrow b \not R c \wedge c \not R b \quad \therefore$ No es total.

Orden parcial $\quad \exists x, \exists y : x \not R y \wedge y \not R x$ ✓

$\exists b, \exists c \in A : b \not R c \wedge c \not R b \quad \therefore$ es de orden parcial.

Diagrama de Hasse



$\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$

$\{A, B, C, F \}$ —

Ejm.

Sea $A = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 36\}$ y sea R una relación de divisor definida

por $x \, R \, y \Leftrightarrow x \mid y$

Determina si R es de orden amplio y parcial.

Reflexiva: $\forall x \in A, \quad x \mid x \Rightarrow x R x$

Antisimétrico. $xRy \wedge yRx \Rightarrow x \mid y \wedge y \mid x$

$\Rightarrow x = y$

Transitivo $xRy \wedge yRz \Rightarrow x \mid y \wedge y \mid z$

$\Rightarrow x \mid z$

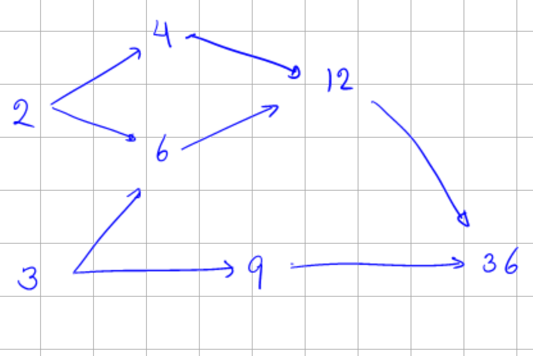
$\Rightarrow xRz \qquad \therefore$ es de orden amplio

Luego. $\exists 3, \exists 4 \in A : 3 \nmid 4 \wedge 4 \nmid 3$

Lo que significa que R es de orden parcial.

Luego el diagrama de Hasse es.

$A = \{2, 3, 4, 6, 9, 12, 36\}$



Luego los sig. subconjuntos estan ordenados con un orden total.

$\{2, 4, 12, 36\}$

$\{2, 6, 12, 36\}$

$\{3, 6, 12, 36\}$

$\{3, 9, 36\}$

Ejm. Sea $A = \{1, 2, 4, 6, 18, 20, 36\}$ y R

$$x R y \iff x \mid y$$

a) Verifica que R es de orden amplio y parcial.

b) Realiza el diagrama de Hasse.

c) Escribe todos los subconjuntos totalmente ordenados.