1:) $a \geq 0 \Rightarrow |a+b| \leq |a|+|b|$

$|a| = a \quad |b| = b$

$a+b \geq 0 \Rightarrow |a+b| \quad a+b$

$a \geq b$

$c \geq d$

$a+c \geq b+d$

$|a+b| = a+b = |a|+|b| = (-(a+b)$

$0 \leq 0 \quad \wedge \quad b \leq 0$

$|a| = -a \quad |b| = -b$

$a+b \leq 0 \Rightarrow |a+b| = (-(a+b)$

2) $a \geq 0, \quad b \leq 0$

$|a| = a \qquad |b| = b$

$a \geq 0$

$-b \geq 0$

$a - b \geq 0$

$|a+b| \leq |a|+|b|$

$|a+b| \leq a+(-b)$

$|a+b| \leq a-b$

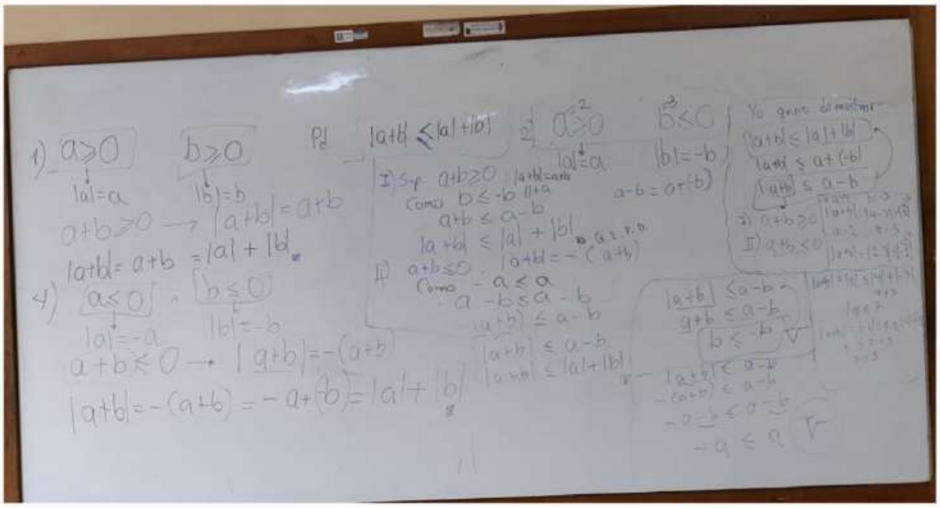
$a+b \geq 0$

$a+b \geq 0$

1 Sup $\Rightarrow a+b \geq 0$

$|a+b| = a+b = |a|+|b|$

3) $a+b \leq 0 > |a+b| = -(a+b)$



Yo quiero demostrar

$|a+b| \leq |a|+|b|$

$|a+b| \leq a+(-b)$

$|a+b| \leq a-b \quad a=4 \quad b=-3 \quad \geq 0$

I) $a+b \geq 0 \quad |a+b| = |4-3| = |1|$

II) $a+b \leq 0 \quad a=2 \quad b=-3 \quad < 0$

$|a+b| = |2-3| = |-1|$

$|a+b| \leq a-b$

$a+b \leq a-b$

$b \leq -b$

Si $a \geq 0$ entonces $|x| \leq a$ si solo si $-a \leq x \leq a$

$a \geq 0 \quad x \in \mathbb{R} \quad \underbrace{|x| \leq a}_{\text{Hip}} \rightarrow -a \leq x \leq a$

Demostración

$|x| \geq a \rightarrow -a \leq -|x| \leq x \leq |x|$

1) $-a \leq -|x|$

$-a \leq x \leq a$ ■

$\Leftarrow$) $-a \leq x \leq a \Rightarrow |x| \leq a$

$\forall x \in \mathbb{R}$
- $x \geq 0 \rightarrow |x| = x \leq a$
- $x < 0 \qquad |x| \leq a$ ■
  - $\rightarrow |x| = -x$

Hipotesis $-a \leq x \quad // (-1)$

$\boxed{a \geq -x}$

$\boxed{-|x| < x}$ V $\forall x \in \mathbb{R}$

$x = 2$	$-|2| \leq 2$ V
$x = 0$	$|0| \leq 0$ V
$x = -0{,}01$	$-|-0.01| \leq -0.001$
	$-0.01 \leq -0.01$ V

$|x| \leq a$

$|x| \leq a \quad \forall x \in \mathbb{R}$ ■

Propiedades de la ecuación

$|4x+3| = 7$

Solución

$|4x+3| = 7$

$4x+3 = 7$ ó $|4x+3| = -7$

$4x = 4$

$x = 0$

Resolver: $|x-2| = |3-2x|$

Solución:

$x-2 = 3-2x$ ó $x-2 = -(3-2x)$

$x = 5$

$x = \frac{5}{3}$ $\qquad 1 = x$

$1 = x$

Ejemplo a) $|3x+5| \leq 7$ y b) $|2x-2| > 4$

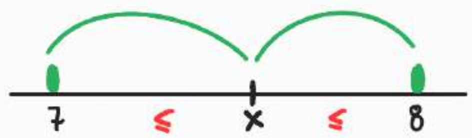
$-7 \leq 3x+5 < 7$

$-12 \leq 2x < 2$ $\quad 11:3/6$

$-4 \leq x < \frac{2}{3}$

Maximo Entero

Ejemplo Hallar el maximo entero de los siguientes incisos



$[3] = 3$

$[7,1] = 7$

$4x^2 - 5x - 4 < 1 + 1$

$4x^2 - 5x - 6 < 0$

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4(4)(6)}}{2(4)}$$

$$\frac{5+\sqrt{121}}{8} = \frac{16}{8} = 2 \qquad \frac{5-11}{8} = \frac{-6}{4}$$

Raices diferentes inecuación

$CS: \left(-\frac{3}{4} ; 2\right)$ //

Solución

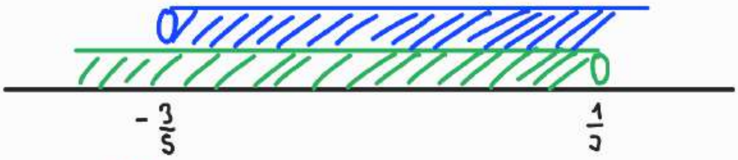
Deler base $b = 2 > 1$ entonces la solución esta dado por

$$\underbrace{2x+4 > 5x+1}\ > 0 \quad \wedge \quad 5x+1>0$$

$$x > -\frac{1}{5}$$

$$1 > 3x \qquad \wedge$$

$$\frac{1}{3} > x$$



CS: $-\frac{1}{5} < x < \frac{1}{3}$

Solución $0 < b = 0.1 < 1$

$$x^2+3 > x-17 > 0$$

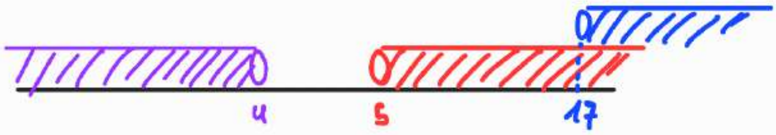
$$x^2 - x + 20 > 0 \quad y \quad x - 17 > 0$$

$$y \qquad x > 17$$

$$x^2 - x + 20 = 0$$

$$(x-5)(x-4) = 0$$

$$x = 4 \quad x = 5$$



Cs: $(-\infty, 4) \cup (5, +\infty)$

$$x^2 - 1x + 20 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4(20)}}{2(1)} = \frac{1 \pm \sqrt{-79}}{2} \to \frac{1+\sqrt{79}i}{2}, \quad \underbrace{\frac{1-\sqrt{79}i}{2}}_{\text{complejos}}$$

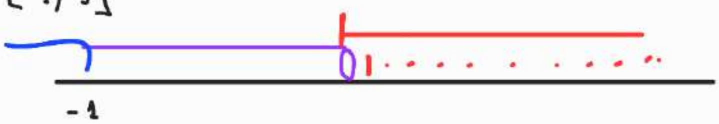
Cs: $\varnothing$

Cs: $(17, +\infty)$

Maximos minimos

Ejemplo

a) $A = [-1, 3]$



b) Ejemplo

$[-\infty, 4]$

infimo = no tiene

Maximo = 4

Ejemplo

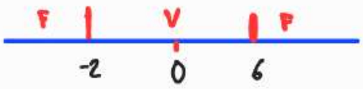
b) $\beta \geq (x \in \mathbb{R} / x^2 - 4x - 12 < 0)$

Solucion

$x^2 - 4x - 12 = 0$

$(x-6)(x+2) = 0$

$x = -2 \quad x = 6$



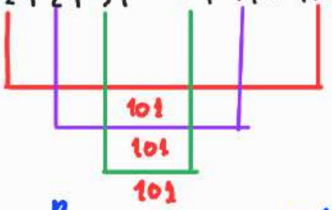
$Cs: (-2, 6)$

Infimo $\beta = -2$ Supremo $\beta = 6$

Resolver

a) Teorema de la suma

$1 + 2 + 3 + \cdots + 99 + 100 = 5050$



$$\sum_{i=1}^{n} = i \Rightarrow \frac{n(n+1)}{2}$$

Demuestro

$A = \left\{ n \in \mathbb{N} / 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \right\}$

1) $1 \in A$

2) sup cierto $\boxed{k \in A} \Rightarrow k+1 \in A$

Puede ir variando

Demostración

1) $n = 1 \qquad \frac{1(1+1)}{2} = 1 \in A \quad \frac{2(2+1)}{2} = 2$

2) Supongamos cierto para $k \in A \qquad 1 + 2 + 3, \cdots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

Para $k+1$; se tiene $1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$

En efecto

$1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + k + 1$

Por tanto $k+1 \qquad \frac{k^2 + k + 2k + 2}{2}$

1) $A = \{ n \in \mathbb{N} / (1+p)^n \geq 1 + np \}$

1) $1 = n$ Pd $1 \in A$

$(1+p)^1 = 1 + p = 1 + 1p$

2) Supongamos cierto para k; $\underbrace{(1+p)^k \geq 1 + kp}_{\text{Hip}}$ Pd $(1+p)^{k+1} \geq 1 + (k+1)p \quad (k+1) \in A$

$k \in \mathbb{N}$ $p \geq -1$

En efecto

siendo: $kp^2 \geq 0$ verdadero

$$(1+p)^{k+1} = (1+p)^k (1+p) \geq (1+kp)(1+p) = 1+p+kp+kp^2 \geq 1+p+k\cdot p$$

$$(1+p)^{k+1} \geq 1+(k+1)p \;\blacksquare$$

Funciones y "Relaciones"

Dominio y Rango

$f(x) = x^2 - 4x + 7$

$y = x^2 - 4x + 7$

$0 = x^2 - 4x + 7 - y$

$$0 = x^2 - 4x + \left(\frac{4}{2}\right) - \left(\frac{4}{2}\right)^2 + 7 - y$$

$$0 = (x^2-2)^2 + 3 - y \longrightarrow y - 3 = (x-2)^2 \quad //\sqrt{\ }$$

$D_f: 2 \leq x \leq 3 \quad //-2$

$0 \leq x-2 \leq 1$

$\sqrt{y-3} = |x-2|$

$\sqrt{y-3} = x-2$

$$2 \leq \sqrt{y-3} + 2 = x \leq 3, \text{ por dominio}$$

$2 \leq \sqrt{y-3} + 2 \leq 3 \quad //-2$

$0 \leq \sqrt{y-3} \leq 1 \quad //(\ )^2$

$0 \leq (y-3) \leq 1$

$y-3 \geq 0 \; ; \; 0 \leq y-3 \quad \wedge \quad y-3 \leq 1$

$$\boxed{3 \leq y \; ; \; y \leq 4}$$

$3 \leq y \leq 4$

Completando cuadrados

$$x^2 - 3x = x^2 - 3x + \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$

$$= \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4}$$

$y - 3 \leq 0$

$0 \leq -(y-3) \leq 1$

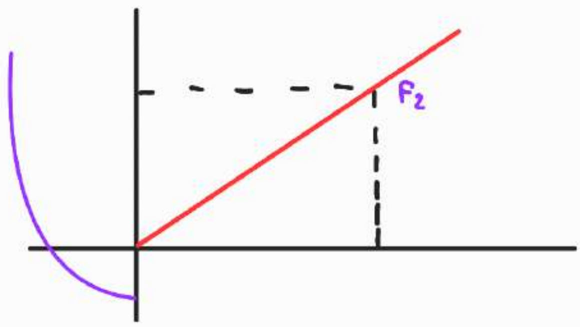
$0 \leq -y+3 \leq 1 \quad //(-3)$

$-3 \leq -y \leq -2 \quad //(-1)$

$3 \geq y \geq 2$

Calcular el dominio y rango de la función

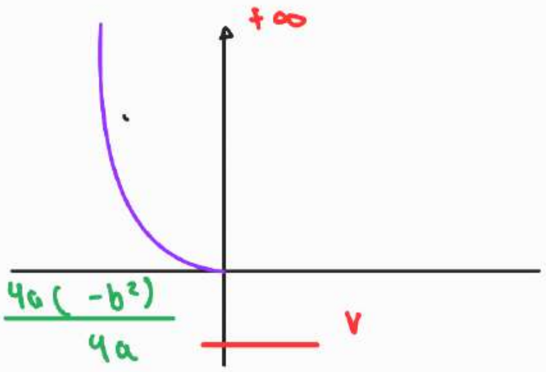
$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si } x \geq 1 \\ x^2 - 2 & x < 0 \end{cases}$$



Solución

Por el dominio

$$D_f = [1, +\infty) \cup (-\infty, 0)$$



$f_1(x) = 2x+2$

$R_F : R_{F_1} \cup R_{F_2}$

$f_2(x) = x^2 - 2$

$y = 2x + 2 \cdots R_1 : \mathbb{R}$

$y = 1x^2 - 2$

$R_{F_2} = [v, +\infty)$

$R_{f_2} = [-2, +\infty)$

Luego $R_F : [-2, +\infty) \cup \mathbb{R}$

$R_F : \mathbb{R}$

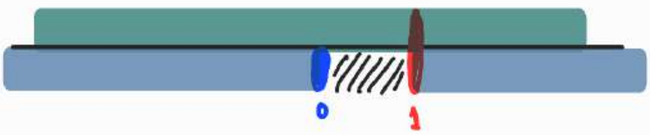
Determine el dominio, rango y graficar la función

$f(x) = |x| + |x-1|$

Solución

$f(x) = |x| + |x-1|$

$|x| \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ $\quad |x-1| = \begin{cases} x-1 & : x-1 \geq 0 \\ -(x-1) & x-1 < 0 \end{cases} = \begin{cases} x-1 & x \geq 1 \\ -x+1 & x < 1 \end{cases}$



1) $(-\infty, 0)$ $\quad f(x) = |x| + |x-1| = -x \ -x+1 \rightarrow f(x) = -2x+1$
$x < 0$

2) $[0, 1)$ $\quad f(x) = |x| + |x-1| = x - x + 1 = 1$

$0 \leq x < 1$

3) $[1 + \infty)$ $\quad f(x) = |x| + |x-1| = x + x - 1 = 2x - 1$
$x \geq 1$

$f(x) = [|x|] + \sqrt{x - [|x|]}$

$f(x) = [|x|]^{\circ} + \sqrt{x - [|x|^{\circ}]} = F(x)$

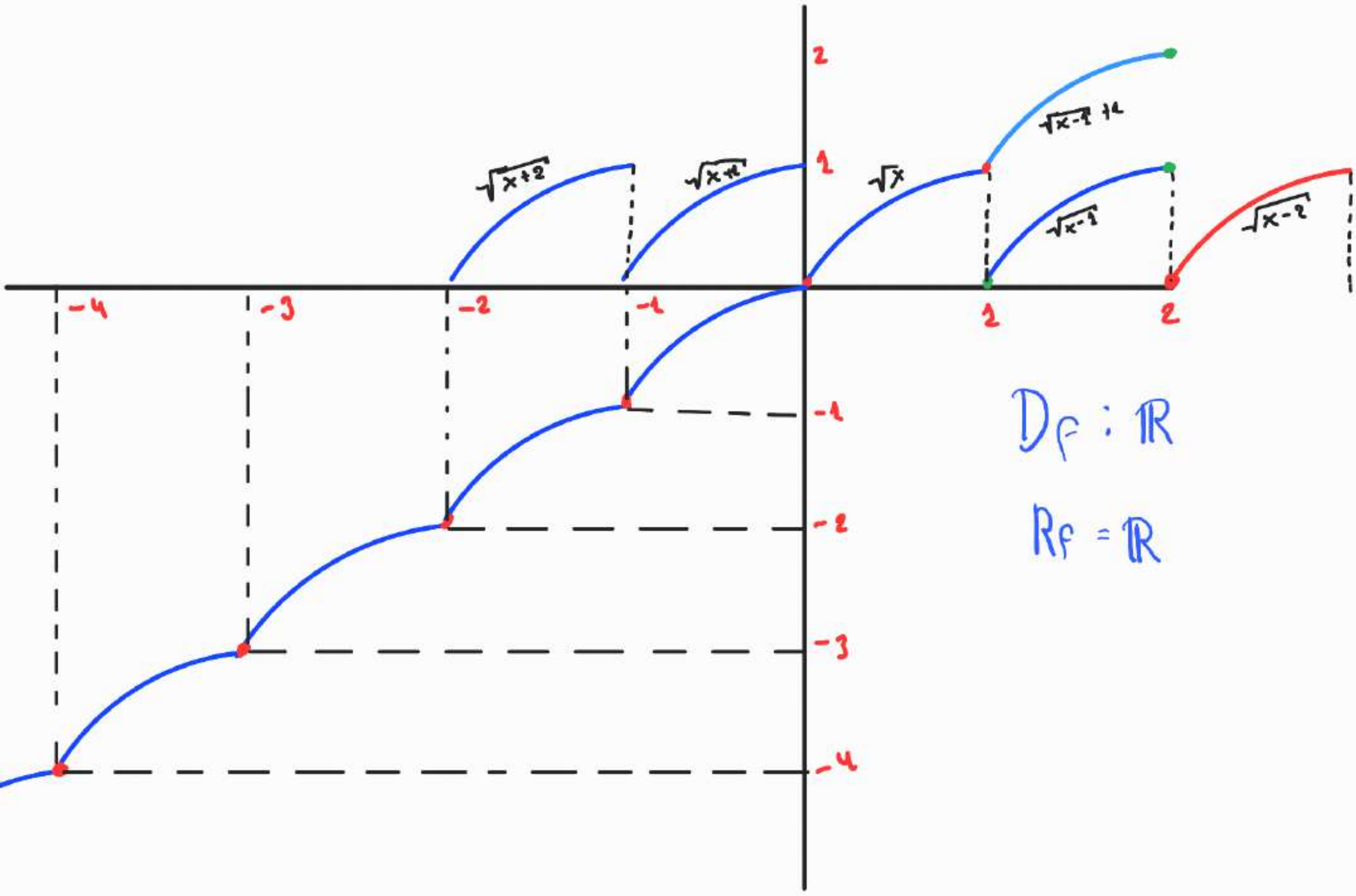
$f(x) = 1 + \sqrt{x-1}$

$f(x) = 2 + \sqrt{x-2}$

$-1 \leq x < 0 \rightarrow [|x|] = -1 \qquad f(x) = -1 + \sqrt{x+1}$

$-2 \leq x < -1 \rightarrow [|x|] = -2 \qquad f(x) = -2 + \sqrt{x+2}$

$-3 \leq x < -2$



$D_f : \mathbb{R}$

$R_f = \mathbb{R}$

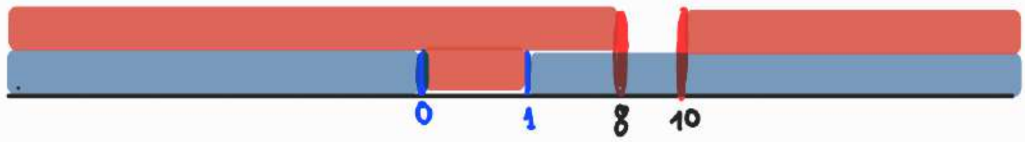
Ejemplo Calcular $(f+g)(x)$ si

$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; \text{ si } x \geq 1 \\ x^2 - 2 & ; \text{ si } x < 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 3x+1 & \text{si } x \leq 8 \\ 2x^3 & \text{si } x > 10 \end{cases} \qquad$ Hallar $f+g$

Solución:

f) $D_{f+g} = D_f \cap D_g = \{(-\infty, 0] \cup [1, +\infty)\} \cap \{(-\infty, 8] \cup (10, +\infty)\}$

$D_{f+g} = (-\infty, 0) \cup [1, 8] \cup (10, +\infty)$



$f+g = \begin{cases} x^2+3x-1 \longrightarrow & x<0 \\ 5x+2 \longrightarrow & 1 \leq x \leq 8 \\ 2x^3+2x+1 \longrightarrow & x > 10 \end{cases} \qquad f \cdot g = \begin{cases} 3x^3+x^2-6x-2 \longrightarrow & x<0 \\ \longrightarrow & 1 \leq x \leq 8 \\ \longrightarrow & x > 10 \end{cases}$

$f-g = \begin{cases} x^2-3x-3 \longrightarrow & x<0 \\ -x \longrightarrow & 1 \leq x \leq 8 \\ -2x^3+2x+1 \longrightarrow & x > 10 \end{cases}$

2°) Hallemos $f+g$ en cada caso

⊙ $(-\infty,0)$ $(x<0)$ $f+g(x) = f(x) + g(x) = x^2-2+3x+1 = x^2+3x-1$

⊙⊙ $1 \leq x \leq 8$ $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 2x+1+3x+1 = 5x+2$

⊙⊙⊙ $x > 8$: $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = 2x+1+2x^3 = 2x^3+2x+1$

Ejemplo Hallar f/g si

$f = \{(-2,7),(0,3),(4,0),(5,-3),(6,3)\}$ y $g = \{(0,-2),(-2,5),(3,2),(5,0),(8,-2)\}$

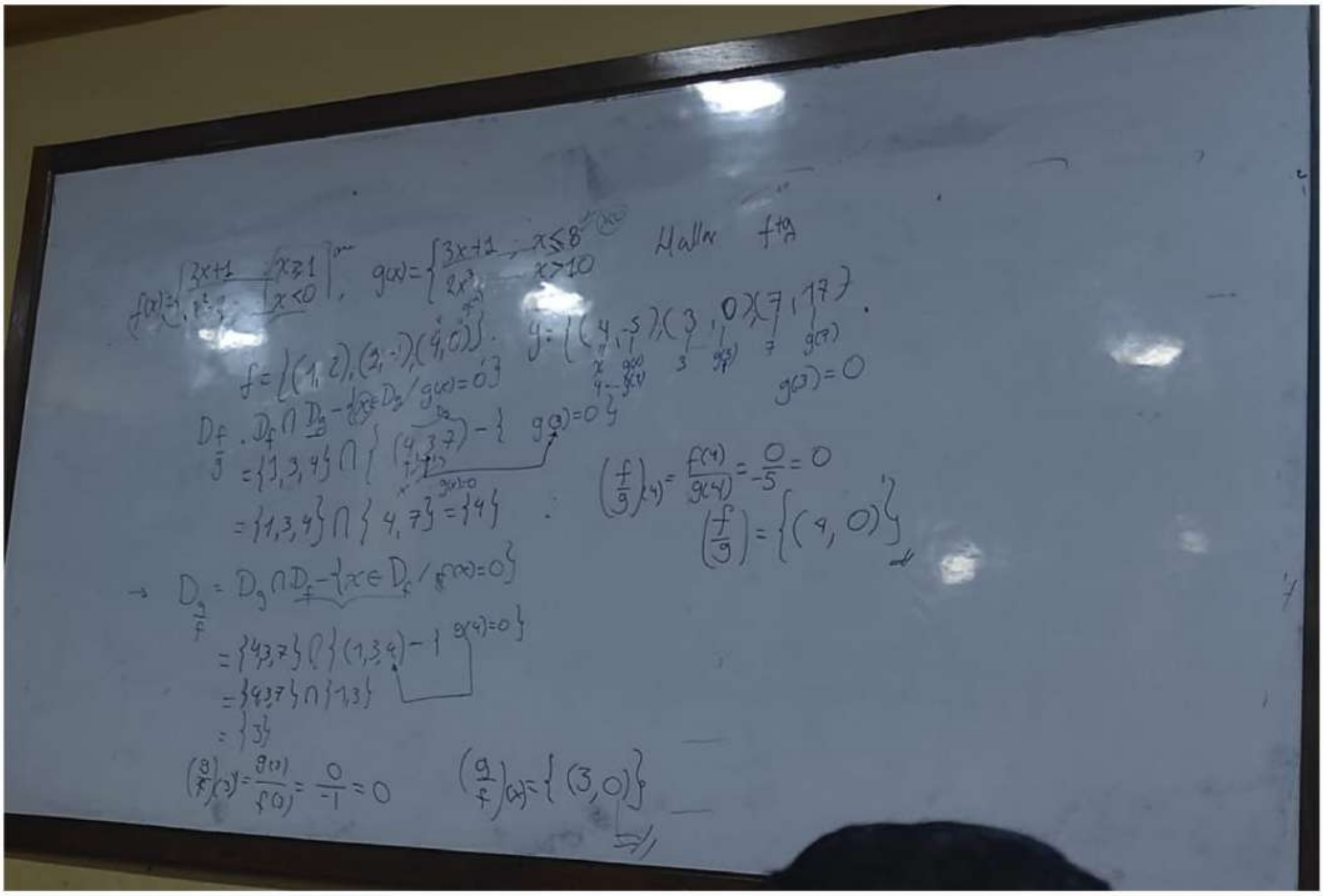
1) $D_{\frac{f}{g}} = (-2,0,4,5,6) \cap \{(0,-2,7,5,8)-(5)\}$

$\{0,-2,3,8\}$

$= \{0,-2\}$

$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & ; x \geq 1 \\ x^2-2 & x<0 \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} 3x+1 & ; x<8 \\ 2x^3 & x>10 \end{cases}$ Hallar $f+g$

$f = \{(1,2),(3,-1),(4,0)\}$, $g = \{(4,-5);(3,0),(7,17)\}$



Ejemplo

$f = \{(0,1), (1,2), (2,3), (4,3), (5,4)\}$ y $g = \{(6,7), (5,4), (4,3)(2,4), (1,4), (0,7)\}$

Hallar

$D_{g\circ f}$, $D_{f\circ g}$ así como $f\circ g$ y $g\circ f$

I) $g\circ f$

$D_{g\circ f} \{x \; D_f \wedge f(x) \in D_g\}$

$\{0, 1, 2, 4, 5\}$

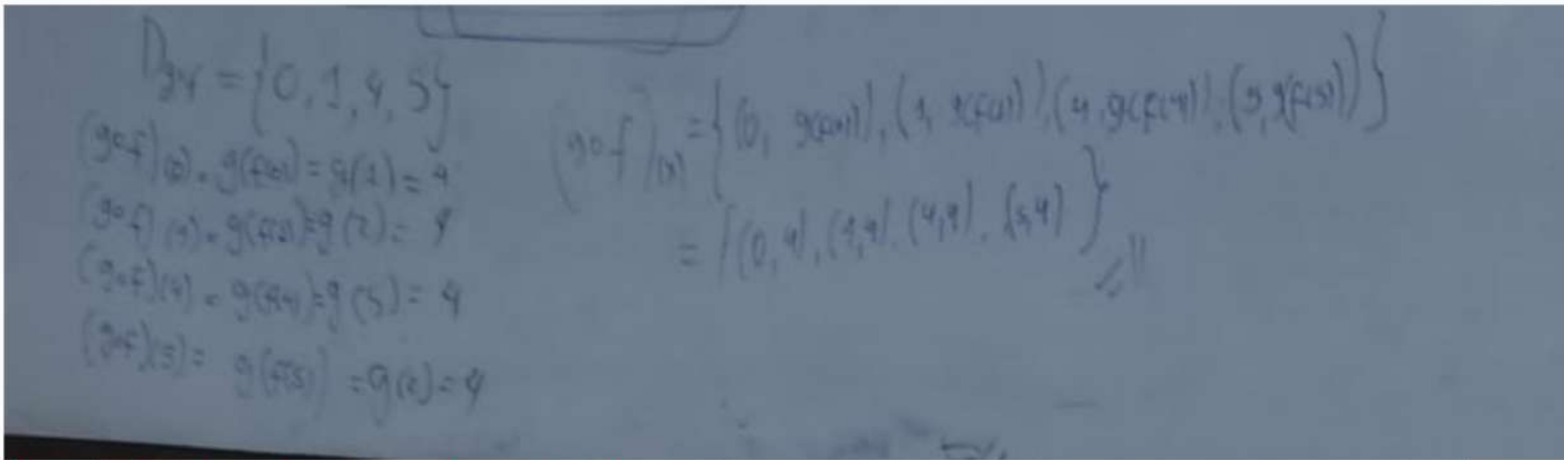
$f(x)$ $\{1, 2, 3, 5, 2\}$ $\in$ $D_g = \{6, 5, 4, 2, 1, 0\}$

$D_{g\circ f} = \{0, 1, 4, 5\}$

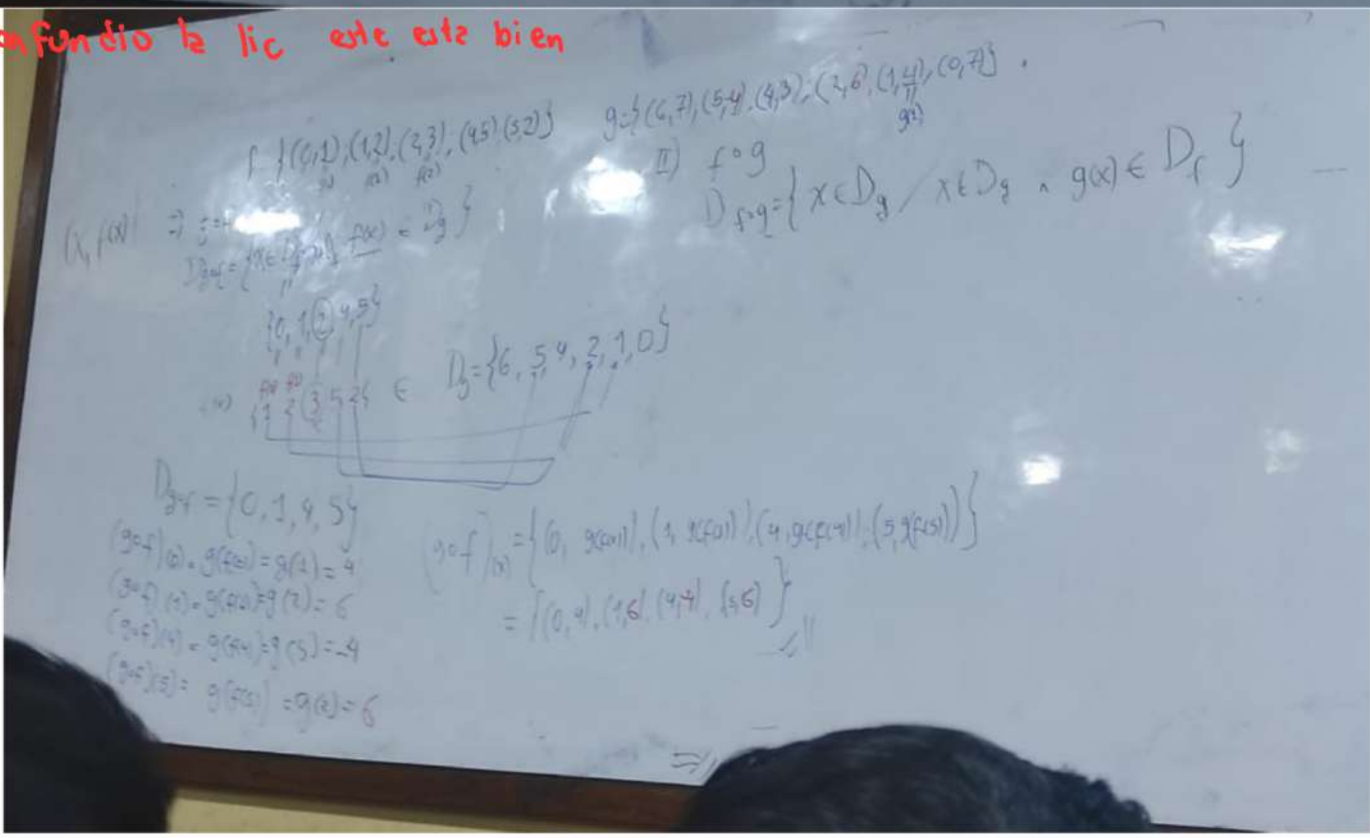
$(g\circ f)_{(0)} = g(f(0)) = g(1) = 4$

II) $f\circ g$

$D_{f\circ g} = \{x \in D_g / x \in D_g \wedge g(x) \in D_f\}$



Se confundió la lic este está bien



$f(x) = \begin{cases} x+2 = f_1 & \boxed{x < 1}\ D_{f_1} \\ x-1 = f_2 & x \geq 1\ D_{f_2} \end{cases}$ $g(x) = \begin{cases} x^2 = g_1 & \boxed{x<0}\ D_{g_1} \\ 1-x = g_2 & x \geq 0\ D_{g_2} \end{cases}$

$(f \circ g)(x) \begin{cases} x^2+2 & [-1,0) = D_{f_1 \circ g_1} \\ & D_{f_1 \circ g_2} \\ & D_{f_2 \circ g_1} \\ & D_{f_2 \circ g_2} \end{cases}$

1c) Hallar $D_{f \circ g} = \begin{cases} 1)\ D_{f_1 \circ g_1} \\ 2)\ D_{f_1 \circ g_2} \\ 3)\ D_{f_2 \circ g_1} \\ 4)\ D_{f_2 \circ g_2} \end{cases}$

1) $D_{f_1 \circ g_1} = \{\underbrace{x \in D_{g_1}} \wedge g_1(x) \in D_{f_1}\}$

$= x < 0 \wedge x^2 \in \{x \leq 1\}$

$= x < 0 \wedge x^2 \leq 1 \quad \| \sqrt{\ }$

$= x < 0 \wedge |x| \leq 1$

$= x < 0 \wedge -1 \leq x \leq 1$

$= [-1, 0)$

$D_{f_1 \circ g_2} = \{x \in D_{g_2} \wedge g(x) \in D_{f_1}\}$

$-1 \leq x < 0 \quad (f_1 \circ g_1)(x) = f_1(\underline{g_1(x)}) = f_1(x^2) = x^2+2$

f es tal que $3f(2-x)+2f(x)=x^2$: Determinar $f(0)$

$f(x)=?$

Solución:

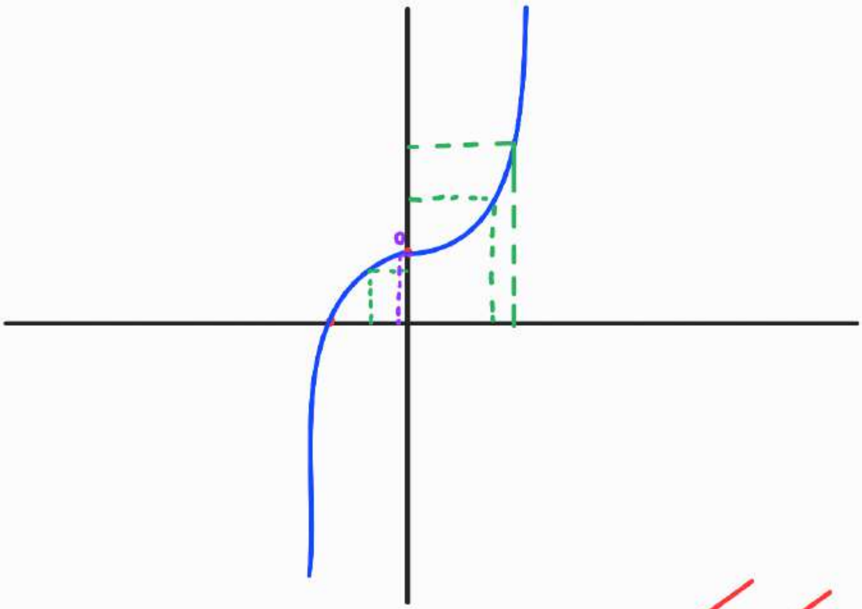
C.V. $u=2-x$

$2-u=x$

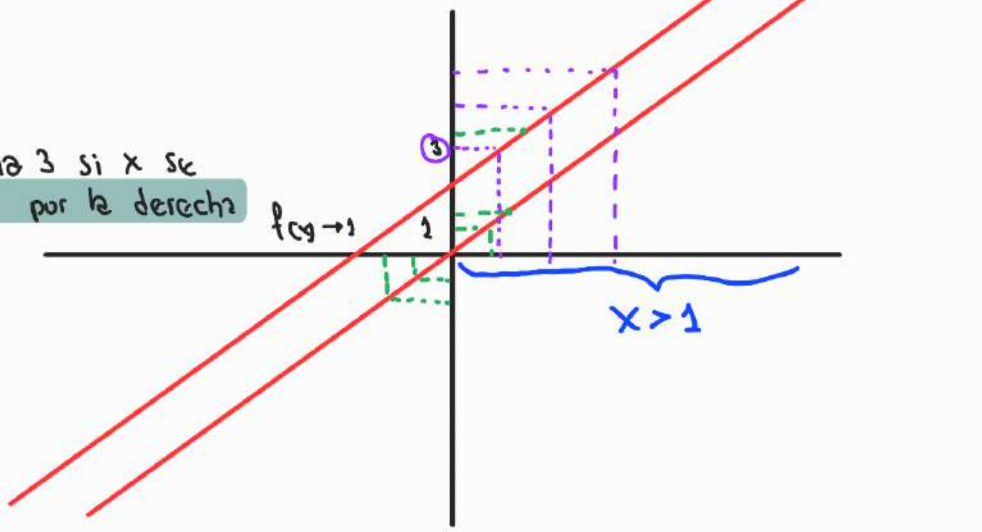
$$\begin{cases} 3f(u)+2f(2-u)=(2-u)^2 \quad \cdots\cdots (1) \ // \cdot 3 \\ 9f(u)+6f(2-u)=3(2-u)^2 \\ 3f(2-u)+2f(u)=u^2 \quad \cdots\cdots (2) \ // (-2) \\ -6f(2-u)-4f(u)=u^2 \end{cases}$$

Limite de una Función

$f_1(x)$

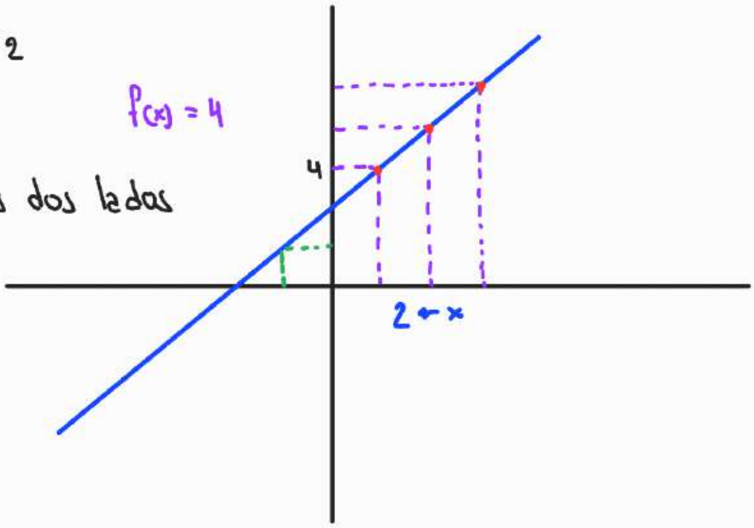


$f(x)$ se aproxima 3 si x se aproxima a 1 por la derecha

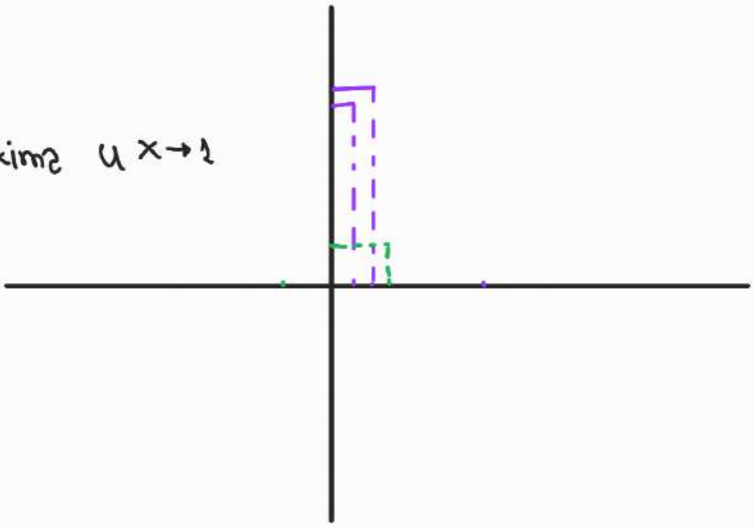


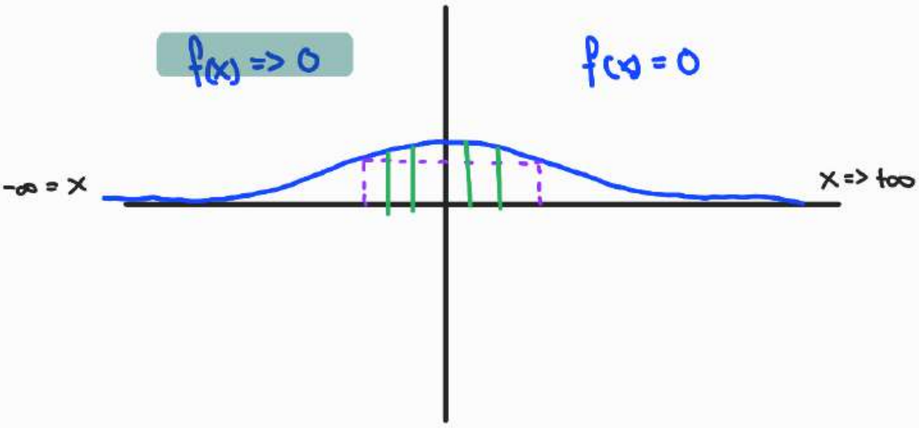
$f_3(x) = \frac{x^2-4}{x-2} \quad \forall x \neq 2$

Se aproxima por los dos lados



Cuando x se aproxima a $x \to 1$
por la izquierda





Propiedades de Limites de Funciones

Sean f·g $A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

e) $\lim_{x \to n} (f(x))^n \cdot (\lim_{x \to n} f(x))^n = 1^n$

g) $\lim_{x \to n} |f(x)| = |\lim_{x \to n} f(x)| = |1|$

Demostración:

1) $\lim_{x \to n} K(x) \Rightarrow KL \leftarrow$ m $\varepsilon > 0$ $\exists \delta$: $0 < |x-a| < \delta$ pd $|K f(x) - KL| < \varepsilon$

Hipotesis: $\lim_{x \to 0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \delta \geq 0, \exists \delta > 0 \quad \forall x \in D_f\ 0 < |x-a| < \delta$

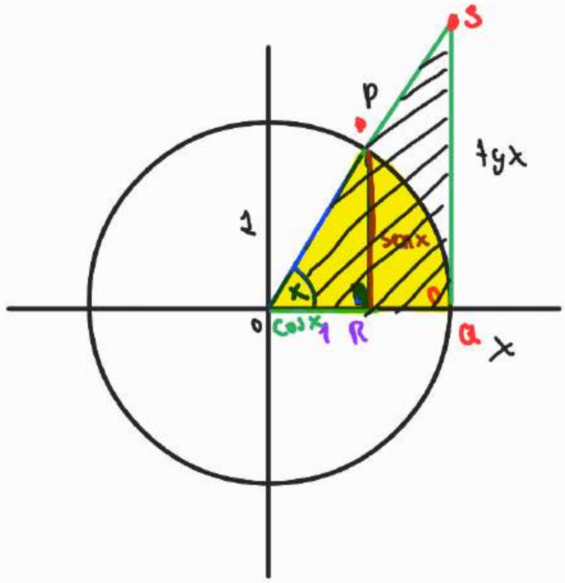
$|K\ f\ a) - K1| = |K(f(x) L)'$

Problema Demostrar que:

$$\lim_{y \to 0} \operatorname{sen} x = 0$$

$$\lim_{x \to 0} \cos x = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

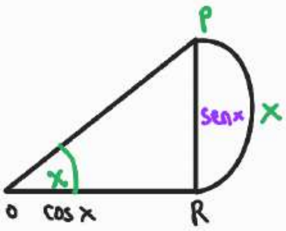


Sea x proximo a m

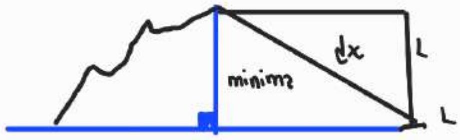
Demostracion: (I) $\operatorname{sen} x = \frac{PR}{OP} = \frac{PR}{1} = \operatorname{sen} x = PR$

(II) $\cos x = \frac{OR}{1} \Rightarrow \cos x = OR$

(III) $tg\, x = \frac{SQ}{OQ} = \frac{SQ}{1} \Rightarrow tg\, x = SQ$



La distancia $PR = \operatorname{sen} x$ es < distancia x



minima distancia del punto P a la recta en L es aquella perpendicular

distancia

$$|\operatorname{sen} x| < |x|$$

$$-|x| < |\operatorname{sen} x| < |x|$$

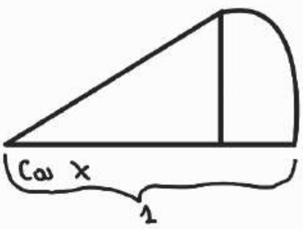
$$0 = -\lim_{x \to 0} |x| < \lim_{x \to 0} \operatorname{sen} x < \lim_{x \to 0} |x| = 0$$

$$\boxed{\lim_{x \to 0} = 0 \quad \text{Demostrado}}$$

Pd $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$

Del grafico

$0 < \cos x < 1$



$\cos^2 x < \cos x$

$1 - \operatorname{sen}^2 x < \cos x \longrightarrow 1 - \cos x < \operatorname{sen}^2 x \ldots (1)$

De 1) $|\operatorname{sen} x| < |x| \rightarrow \operatorname{sen}^2 x < x^2 \ldots (2)$

De 1) y 2)

$$1 - \cos x < \operatorname{sen}^2 x < x^2$$

$$1 - \cos x < x^2$$

$$1 - x^2 < \cos x < 1$$

$$1 = \lim_{x\to 0} 1 - x^2 < \lim_{x\to 0} \cos x < \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \cos x = 1$$

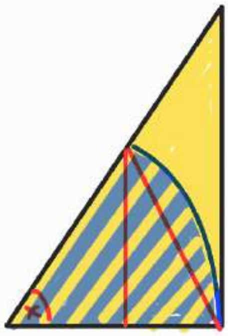
III $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Del grafico $|\operatorname{Sen} x| < |x| < |\operatorname{tg} x|$ (De los triangulos OPQ, ORS)

Area de los triangulos

$\Delta_{OPQ} <$ Area sen O $_{OPQ}$

$$\frac{1}{2}\cdot 1\operatorname{sen} x < \frac{1}{2} 1^2 x < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot \operatorname{tg} x \quad // 2$$



$\operatorname{Sen} x < x < \operatorname{tg} x$

$\operatorname{sen} x < x \quad \wedge \quad x < \operatorname{tg} x$

$\frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1 \qquad x < \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

$$\cos x < \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$$

$$1 = \lim_{x\to 0} \cos x < \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} < \lim_{x\to 0} = 1$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = L$$

$\lim f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in D_f\ 0 < |x - x_0| < \delta$ se tiene $|f(x) - L| < \varepsilon$

hagamos un cambio de variable sea $h = x - x_0 \to x = h + x_0$

Dado $\varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall h + x_0 \in D_f\ 0 < |h| < \delta$ implica

$$|f(h + x_0) - L| < \varepsilon$$

$$\lim_{h\to 0} f(x_0 + h) = L$$

Ejemplo Calcular el siguiente limite

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{3}} \frac{1 - 2\cos x}{\pi - 3x} =$$

Solucion: Como en el limite x 10 tiende a 0, hagamos cambio de variable
$h = x - \pi/3 \to x = h + \pi/3$, $x \to \pi/3 \quad h \to 0$

$$\lim_{x \to \pi/3} \frac{1 - 2\cos x}{\pi - 3x} \qquad \lim_{h \to 0} \frac{1 - 2\cos(h + \pi/3)}{\pi - 3(h + \pi/3)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1 - 2(\cos h \cos \pi/3 - \operatorname{sen} h \operatorname{sen} \pi/3)}{\pi - 3h - \pi} = \lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos h + \sqrt{3}\operatorname{sen} h}{-3h}$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{1 - \cos h}{h}}_{0} + \sqrt{3}\underbrace{\lim_{h \to 0} \frac{\operatorname{sen} h}{h}}_{1}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}(\sqrt{3}) =$$

Teorema: Si $F(x)$ es acotada en un entorno de x_0 al cual no pertenece x_0 y si $\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$

Entonces $\lim_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = 0$

Demostración

hipótesis f es acotada, existe $\delta_1 > 0$ $|M| > 0$. $|f(x)| < M$

$\lim_{x \to x_0} g(x) = 0$, $\forall \varepsilon > 0 : \exists \delta_2 > 0 \; \forall x \in D_g \;\; 0 < |x - x_0| < \delta$ se tiene $|g(x) - 0| \leq \varepsilon$

Sea $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\} > 0$, $0 < |x - x_0| < \delta$ implica

$|f(x) g(x) - 0| = |f(x) g(x)| = |f(x)| \, |g(x)| < M \cdot \varepsilon$

Ejemplo Hallar el límite de

$$\lim_{x \to 0} x^2 \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)$$

Solución

9:43 AM Jue. 11 Ene

Untitled Jam

7/20

FUNCIÓN EXPONENCIAL

Uno de los números que surge en cuestiones básicas es el número natural

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Se realiza un préstamo de 1bs con un interés anual 100%

Al final del año se devolverá

¿Es esto adecuado y justo? ¿Por qué?

Alguna razón, puede ser pérdida del valor de la moneda. Sería más adecuado actualizar el capital cada seis meses. Al final del sexto mes el nuevo capital será

Ahora se actualiza continuamente (lo más adecuado) cuando $n \to \infty$, ello ocurre cuando $\frac{1}{n} \to 0$, al final del año se debe pagar

$$\boxed{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad = 2.718281828459}$$

Definición La función exponencial de base e,

$$\exp: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

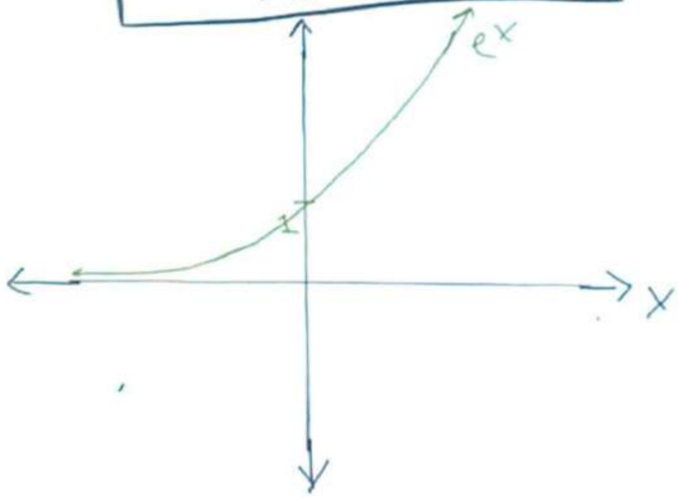
$$x \longmapsto \exp(x) = e^x$$

se define por

$$\boxed{\exp(x) = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$$

<u>TEOREMA</u> (1) $\lim_{x\to 0} e^x = 1$

$$\boxed{(2) \quad \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1}$$



$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x)\right)^{g(x)}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(\infty)\right) = \underset{\in \mathbb{R}}{A} = 1 = \lim_{x\to 0} g(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(f(x)^{g(x)}\right) = \lim_{x\to\infty} f(x)^{\lim_{x\to\infty} g(x)}$$

$+\infty$
$-\infty$
A

$$\boxed{\begin{array}{l} \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \\ \lim_{z\to 0} \left(1+z\right)^{\frac{1}{z}} = e \end{array}}$$

② $$\lim_{x\to\infty} \left[\frac{x^2+3}{x^2+4x}\right]^{\frac{x^2-1}{x}} = \lim_{x\to 0} \left[1+\frac{x^2+3}{x^2+4x} - 1\right]^{\frac{x^2-1}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[1+\frac{x^2+3-x^2-4x}{x^2+4x}\right] = \lim_{x\to\infty} \left[1+\frac{-4x+3}{x^2+4x}\right]^{\frac{x^2-1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[1+\frac{1}{\frac{x^2+4x}{-4x+3}}\right]$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\left[1+\frac{1}{\frac{x^2+4x}{-4x+3}}\right]^{\frac{x^2+4x}{-4x+3} \cdot \frac{x^2-1}{x} \cdot \frac{-4x+3}{x^2+4x}}\right)$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left[1+\frac{1}{\frac{x^2+4x}{-4x+3}}\right]^{\frac{x^2+4x}{-4x+3}}\Bigg)^{\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-1}{x}\right)\frac{(-4x+3)}{(x^2+4x)}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P}{Q} \frac{a_n x^n}{b_m x^m} \begin{cases} n>m & \infty \\ m>n & 0 \\ n=m & \frac{a_n}{b_m} \end{cases}$$

② $$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[1+\frac{x^2-1}{x^2+1} - 1\right]^{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[1+\frac{\cancel{x^2}-1-\cancel{x^2}-1}{x^2+1}\right]^{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[1+\frac{-2}{x^2+1}\right]^{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left[1+\frac{1}{\frac{x^2+1}{-2}}\right]^{\frac{x-1}{x+1}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\left[1+\frac{1}{\frac{x^2+1}{-2}}\right]^{\frac{x^2+1}{-2}}\right)\cdot\frac{x-1}{x+1}\cdot\frac{-2}{x^2+1}$$

$$\lim_{x\to\infty}(e)^{\frac{(x-1)}{(x+1)}\cdot\frac{(-2)}{(x^2+1)}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2x-1}{}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-2}{-2}=1$$

③ $\lim_{x\to\infty}\frac{1+2+\quad+n}{n^2}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{n(n+1)}{2}=$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{2n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\cancel{n}\left(\frac{1+\frac{1}{n}}{2\cancel{n}}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2}=$$

$$\frac{1+\frac{1}{\infty}}{2}$$

$$\frac{1+0}{2}$$

$$\frac{1}{2}\ //$$

① $\lim_{x\to0}\frac{x^2-2x+3}{x^2-3x+2}$ $\quad\lim_{x\to0}\frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$

Evaluando

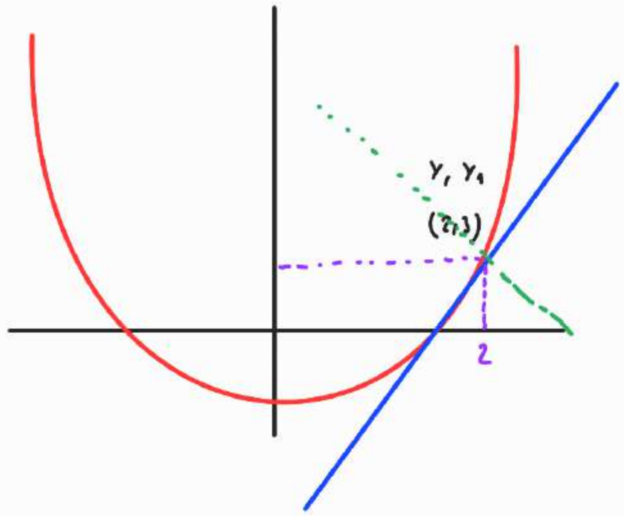
$$\frac{0^2-2(0)+3}{0^2-3(0)+2}\qquad\frac{\operatorname{sen}(0)}{0}$$

$$=\frac{3}{2}^{1}$$

$$=\frac{3}{2}\ //$$

Ejemplo

Encuentre una ecuación de la recta tangente a la parabola $y = x^2 - 1$ en el punto $(2,3)$, Dibuje la parabole y muestre un segmento de la recta tangente en $(2,3)$.



$L: y, y_1 = m(x - x_1)$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(2+\Delta x) - f(2)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{(2+\Delta x)^2 - 1 - (2^2 - 1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{4 + 4\Delta x + \Delta x - 1 - 3}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cancel{\Delta x}(4 + \Delta x)}{\cancel{\Delta x}} = 4$$

$y - 3 = 4(x - 2)$

$y - 4x + 5 = 0$

Definación (De recta normal a una grafica

La recta normal a una grafica en un punto donde es la recta perpendicular a la recta tangente en ese punto

Ejemplo hallar en $(2,3)$

Solución:

Del ejemplo anterior la recta tangente es $y - 4x + 5 : L_T$ $(2,3)$ $m = 4$

Por la recta normal la pendiente m debe ser perpendicular entonce nuestra pendiente es : $-\frac{1}{4}$

Perpendicular

$m_1 \; m_2 = -1$

$4\left(-\frac{1}{4}\right) =$

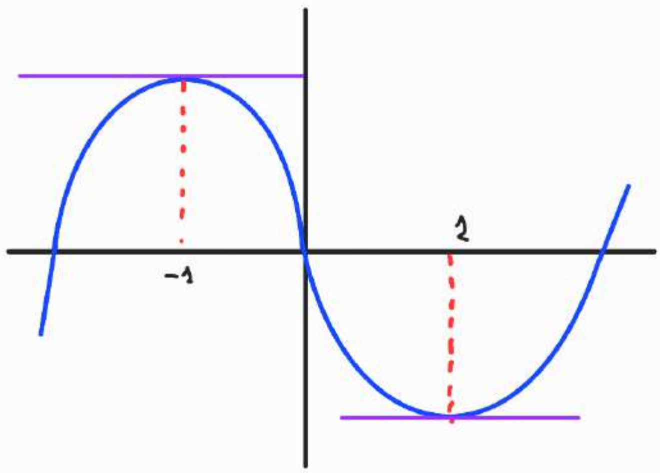
Ejemplo: grafica $f(x) = x^3 - 3x$

Sol:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_1 + \Delta x) - f(x_1)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_1 + \Delta x)^3 - 3(x_1 + \Delta x) - (x_1^3 - 3x_1)}{\Delta x}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} x^3 + 3x^2\,\Delta x + 3x\,\Delta^2 x + \Delta^3 x - 3x - 3\Delta x - x^3 + 3x = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\cancel{\Delta x}\,(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta^2 x - 3)}{\cancel{\Delta x}}$$

$$= 3x_i^2 - 3$$



tangente es horizontal cuando

Ejemplo

$$f(x) = \frac{3}{x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{3}{x+\Delta x} - \frac{3}{x}}{\Delta x} \quad : x \neq 0$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{3x - 3(x+\Delta x)}{x(x+\Delta x)}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{3x - 3x - 3\Delta x}{\Delta x\,(x^2 + x\Delta x)} = -\frac{3}{x^2}$$

Ejemplo: $f'(x)$ y $f(0)$

si $f(x) = \cos x$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x} = 0$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x - \Delta x) - \cos x}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos x \cdot \cos \Delta x - \operatorname{sen} x \ \operatorname{sen}\Delta x - \cos x}{\Delta x}$$

$$= \frac{(1 - \cos \Delta x)\cos x}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\operatorname{sen} \Delta x}{\Delta x} = \operatorname{sen} x$$

$$= \cos x \cdot 0 - \operatorname{sen} x \cdot 1$$

$$=$$

$$f(x) = x^{2/3} \quad x \in \mathbb{R}$$

Demostración:

$$f'(0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(0+\Delta x)^{1/3} - 0^{2/3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x^{2/3}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x^{1/3}}$$

$$= \frac{1}{0} = \infty \notin \mathbb{R}$$

No existe en 0

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|\Delta x + x| - |x|}{\Delta x} = \begin{cases} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x + x - x}{\Delta x} = 1 \\ \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x - x + x}{\Delta x} = -1 \end{cases} \neq$$

Teorema

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \quad \text{existe}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

1) $\exists f(x_0)$ por hipotesis

2) $\lim_{x \to x_0} f(x) = (f(x_0)) = \lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} (x - x_0)) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0)$$

$$= f'(x_0) \cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) - f(x_0) = 0 \iff \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

f es continua.

Definicion derivada lateral

$$f_+(x_0) = \lim_{x \to 0}$$

Ejemplo: Sea f la funcion definida por $f(x) = |1 - x^2|$

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

Sol:

$$|1 - x^2| \begin{cases} 1 - x^2 & ; \ 1 - x^2 \geq 0 \\ 0 & \ 1 - x^2 = 0 \\ -(1 - x^2) & \ 1 - x^2 < 0 \end{cases}$$

$1 - x^2 > 0 \iff 1 > x^2$

$x^2 < 1 \quad // \sqrt{} \iff |x| < 1$

$-1 < x < 1$

$1 - x^2 = 0 : x^2 = 1$

$|x| = 1 \quad x = \pm 1$

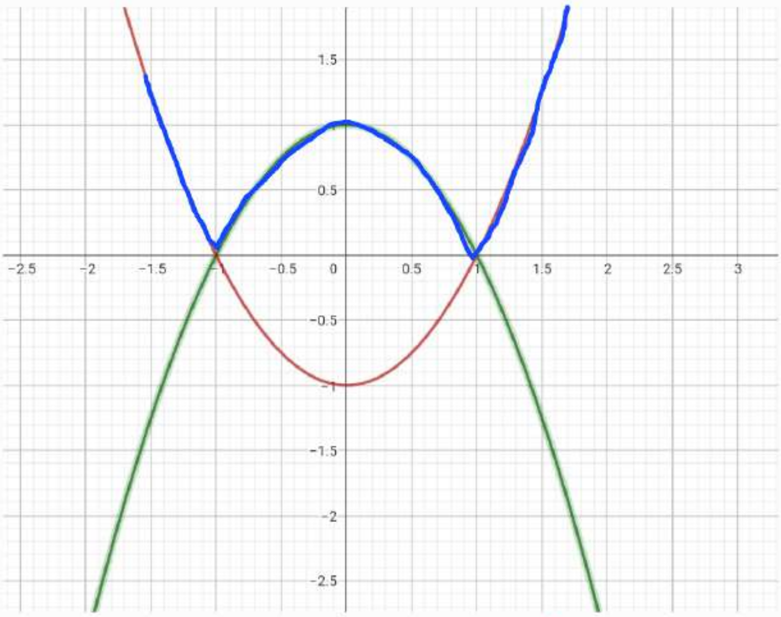
$$|1 - x^2| = \begin{cases} 1 - x^2 & -1 < x < 1 \\ 0 & x = -1 ; x = 1 \\ x^2 - 1 & x < -1 \text{ o } x > 1 \end{cases}$$

$1 - x^2 < 0$

$1 < x^2 \quad // \sqrt{}$

$1 < |x|$

$1 < x$ o $x < -1$



$f'(x_1) = \lim\limits_{x \to x_1} \dfrac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$ Existe

b) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

1) $\exists\, f(1) = 0$

2) $\exists \lim\limits_{x \to 1} f(x)$

3) $1) = 2)$

2) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} x^2 - 1 = 0$

$\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} 1 - x^2 = 0$

3) $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = 0 \; f(1)$

f es continua en 1

$f'(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1}$

$\dfrac{x^2 - 1 - 0}{x - 1} = \lim\limits_{x \to p} \dfrac{(x-1)(x+1)}{x-1} = 2$

XD

$f(1) = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1 - x^2}{x - 1}$

$= - \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{(1-x)(1+x)}{1-x} \quad x \neq 1$

$= -2$

Si $f'(1) = f'_-(1) \Leftrightarrow \exists\, f'(1)$

$2 \neq -2$

$\nexists\, f'(1)$

4:

$$f(x)\begin{cases} x+2a & \text{si } x<-2 \\ 3ax+b & \text{si } -2\leq x\leq 1 \\ 6x-2b & \text{si } x>1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to 1^-} 3ax+b = \lim_{x\to 1^+} 6x-2b$$

$$3a+b = 6-2b$$

$$3a+3b=6 \quad // \frac{1}{3}$$

$$a+b=2$$

$$\lim_{x\to -2^-} x+2a = \lim_{x\to -2^+} 3ax+b$$

$$-2+2a = 3a\cdot -2+b$$

$$-2+2a=-6a+b$$

$$-2=-8a+b \quad // -1$$

$$8a-b=2$$

$$\begin{array}{l} a+\cancel{b}=2 \\ 8a-\cancel{b}=2 \\ \hline 9a=4 \\ a=\frac{4}{9} \end{array}$$

$$3a+b=6-2b$$

$$3.\frac{4}{9}+b=6-2b$$

$$\frac{12}{9}+b=6-2b$$

$$\frac{4}{3}+b=6-2b$$

$$\frac{4+3b}{3}=6-2b$$

$$4+3b=3(6-2b)$$

$$4+3b=18-6b$$

$$9b=18-4$$

$$9b=14$$

$$b=\frac{14}{9}$$

$$f(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$$

$$f(x)=\left((x)^{\frac{1}{2}}\right)'+\left((1-x)^{\frac{1}{2}}\right)'$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot -1$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\cdot -1$$

Integral Indefinida

① $\int (0x^2 + 5x - 2)\,dx = x^3 + \frac{5x^2}{2} - 2x$

② $\int \qquad\qquad = x^9 + e^x$

③ $\int e^{\frac{1}{5}x}\,dx = 5\,e^{1/5x} \sim e^{\frac{1}{5}x} \cdot \frac{1}{\cancel{5}}\cancel{5}$

① a) $\int 5\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x^2}\,dx$

$\int 5\sqrt{x}\,\sqrt[3]{x^2}\,dx = \int 5x^{1/2}\,x^{2/3}\,dx$

$= 5\int x^{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}\,dx$

$= 5\int x^{\frac{\cancel{10}\,5}{\cancel{6}\,3}}\,dx$

$= 5\int x^{\frac{5}{3}}\,dx$

$= \frac{5\,x^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1} + C = \frac{15x^{\frac{8}{3}}}{8} + C$

b) $\int x^2(3 - 5bx)\,dx =$

$= \int (3x^2 - 5bx^3)\,dx =$

$= \int 3x^2\,dx - \int 5bx^3\,dx$

$= 3\int x^2\,dx - 5b\int x^3\,dx$

$= 3\,\frac{x^3}{3} - 5b\,\frac{x^4}{4} + C$

Cambio de variable

① $\int (x^2 - 5x)(3x^2 - 5)\,dx = \int u\,du = \frac{u^2}{2} + C = \frac{(x^3 - 5x)^2}{2} + C$

② $\int \frac{2x - 4x^3}{x^2 - x^4}\,dx = \int \frac{du}{u} = \ln|u| + C$

$= \ln|x^2 - x^4| + C$ //

C.V

$u = x^2 - x^4$

$du = (2x \cdot 4x^3)\,dx$

③ $\int (x+7)^2\,dx = \int u^2\,du$

C.V

$u = x+7$

$dx = (1+0)\,dx$

$du = dx$

$= \frac{u^3}{3} + C$

$= \frac{(x+7)^3}{3} + C$

④ $\int e^{7x+6}\,dx = \int e^u \frac{du}{7}$

C V

$u = 7x+6$

$du = (7)\,dx$

$\frac{du}{7} = dx$

$= \frac{1}{7}\int e^u du$

$= \frac{1}{7} e^x + C$

⑤ $\int \frac{3x+\ln x}{x}\,dx = \int \frac{(3+\ln + x)\,dx}{x}$

Solución

$u = 3+\ln x$

$du = \left(0+\frac{1}{x}\right)dx$

$du = \frac{1}{x}dx = \frac{dx}{x}$

$= \int u^2\,du$

$= \frac{u^2}{2} + C$

$=$

1) $\int \frac{1dx}{x^2.4x+13}$

$x^2-4x+13 = x^2-4x+4+9$

$= (x-2)^2+9 = (x-2)^2+3^2$

$\int \frac{1dx}{x^2-4x+13} = \int \frac{1}{(x-2)^2+3^2}\,dx = \int \frac{1}{u^2+\underset{a}{3^2}}\,du = \frac{1}{3}\operatorname{arctg}\left(\frac{u}{3}\right)+c$

$= \frac{1}{3}\operatorname{arctg}$

② $\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}}$

Solución

$5-2x+x^2 = x^2-2x+\cancel{\left(\frac{2}{2}\right)^2} - \left(\frac{2}{2}\right)^2+5 = (x-1)^2+4$

$\int \frac{dx}{\sqrt{5-2x+x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+2^2}} = \int \frac{du}{\sqrt{u^2+2^2}}$

$= \ln\left|u+\sqrt{u^2+2^2}\right|+C$

$= \ln\left|x-1+\sqrt{(x-1)^2+4}\right|+C$ ///

$\int \operatorname{sen}(x^2-4x+3)(x-2)\,dx = \int \operatorname{sen} u \frac{du}{2}$

Solución

C.V

$u = x^2-4x+3$

$du = (2x-4)\,dx$

$du = 2(x-2)\,dx$

$\frac{du}{2} = (x-2)\,dx$

$= \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} u\,du$

$= \frac{1}{2}$

Teorema del valor medio

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Ejemplo: Sea $f(x) = x^3 - x^2 - 2x$

para $a = 1$ y $b = 3$ determinar c en el intervalo abierto $(1,3)$

1) f es continua en $[1,3]$
2) f es diferenciable en $(1,3)$

existe $c \in (1,3)$ tq $\quad f'(c) = \dfrac{f(3) - f(1)}{3 - 1}$

Remplazamos

$$= \frac{(3^3 - 3^2 - 2\cdot 3) - (1^3 - 1^2 - 2\cdot 1)}{2}$$

$$= \frac{27 - 9 - 6 - (1 - 1 - 2)}{2}$$

$$= \frac{12 + 2}{2} = \frac{\cancel{14}^{\,7}}{\cancel{2}_{\,1}}$$

$\boxed{= 7}$ Pendiente

Calculo de "C"

$f'(x) = x^3 - x^2 - 2x = 7$

$3c^2 - 2c - 2 = 7$

$\underbrace{3c^2}_{a}\ \underbrace{-2c}_{b}\ \underbrace{-9}_{c} = 0 \Rightarrow c = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(3)(-9)}}{2(3)} = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 + 108}}{6}$

$= \dfrac{2 \pm \sqrt{112}}{6}$ $\begin{cases} c_1: + = 2.09 \\ c_2: - = -1.43 \notin (1,3) \end{cases}$

$\therefore$ Para $c_1 \in (1,3)$

Funcion Creciente : $f(x_1) < f(x_2)$ siempre que $x_1 < x_2$

Funcion Decreciente: $f(x_1) > f(x_2)$ " " $x_1 < x_2$

TEOREMA CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA PARA EXTREMOS RELATIVOS

Sea f una función continua en (a,b) y $c \in (a,b)$ un número crítico y $f'(x)$ está definida para todos los puntos de (a,b) excepto posiblemente en c. Entonces:

i) Si $\left.\begin{array}{l} f'(x) > 0, \ \forall x \in (a,c) \\ f'(x) < 0, \ \forall x \in (c,b) \end{array}\right\} \Rightarrow f(c)$ es un valor máximo relativo de f

ii) si $\left.\begin{array}{l} f'(x) < 0 \ \ \forall x \in (a,c) \\ f'(x) > 0 \ \ \forall x \in (c,b) \end{array}\right\} \Rightarrow f(c)$ es un valor mínimo relativo de f

iii) Si $f'(x)$ no cambia de signo, cuando x pasa por c, entonces $f(c)$ no es un valor máximo ni mínimo relativo

Ejemplo: Utilice un polinomio de Maclarin para determinar el valor de $e^{\frac{1}{2}}$ con una exactitud de 4 cifras decimales

$x = 1/2 \quad e^x \approxeq ?$

$P_n(x)$ se denomina **polinomio de Taylor de n-ésimo grado** de la función f en el número a, y $R_n(x)$ se llama **residuo**. El término $R_n(x)$, dado en (5), se denomina **forma de Lagrange** del residuo, llamada así en honor al matemático francés **Joseph L. Lagrange** (1736-1813).

El caso especial de la fórmula de Taylor que se obtiene al considerar $a = 0$ en (2) es

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \frac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)}x^{n+1}$$

donde z está entre 0 y x. Esta fórmula recibe el nombre de **fórmula de Maclaurin**, en honor al matemático escocés **Colin Maclaurin** (1698-1746). Sin embargo, la fórmula fue obtenida por Taylor y por otro matemático inglés, **James Stirling** (1692-1770). El **polinomio de Maclaurin de n-ésimo grado** para una función f, obtenido a partir de (4) con $a = 0$, es

$$P_n(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n \tag{6}$$

De este modo, una función puede aproximarse por medio de un polinomio de Taylor en un número a o por un polinomio de Maclaurin.

$$-\frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{-3+4}{6} = \frac{1}{6}$$