6. Determinar si cada una de las relaciones binarias R definidas sobre el conjuntos dados A son reflexivas, sim etricas, antisim´etricas o transitivas. Si una relaci´on tiene una cierta propiedad, probarlo; por otro lado, proveer un contraejemplo para mostrar que no.

(a) A es el conjunto de todas las palabras (del Castellano); $(a, b) \in \mathcal{R}$ si, y sólo si a y b tienen al menos una letra en común.

Reflexiva

$a =$ Silla

(Silla, silla) $\in R \Leftrightarrow$ Silla y silla tienen letres en común

$(\forall a \in A)((a,a) \in R) \Rightarrow R$ es reflexiva

Simetrica

R es simetrica $\Leftrightarrow (\forall a,b \in A)((a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R)$

R no es simetrica $\Leftrightarrow (\exists a,b \in A)[(a,b) \in R \wedge (b,a) \notin R)$

Contradicción:

Supongamos que no es simetrica

$\exists$ a = Ventana $(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow (a,c) \in R$
b = Marcador

$\therefore$ Por tanto R es simetrica

Antisimetrica

a = Comer
b = bebé

R es antisimetrica $\Leftrightarrow (\forall a,b \in A)((a,b) \in R \wedge (b,a) \in R)$

Contraejemplo:

$(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow$ Comer o bebé

$\therefore$ R no es antisimetrica

(b) A es el conjunto de todas las personas, $(a, b) \in \mathcal{R}$ si, y sólo si ni a ni b están matriculados actualmente en la UMSA, o si ambos están matriculados en la UMSA y han tomado al menos una materia juntos.

Reflexiva

$(a,a) \in R \Leftrightarrow (a,a) \in R$

$(\forall a \in A)((a,a) \notin R) \Rightarrow R$ no es reflexiva

Simetrica

R es simetrica $\Leftrightarrow (\forall a,b \in A)((a,b) \in R \Rightarrow (b,a) \in R)$

Contradicción

$\exists\ (a,b) \in R \land (b,a) \in R$

$\therefore$ Por tanto R es simetrica

Antisimetrica

$(a,b) \in R \land (b,a) \in R$ Dos personas han tomado almenos una materia juntos Pueden tener diferentes relaciones en el Futuro

$\therefore$ Por tanto R no es Antisimetrica

(c) $A = \{1, 2\}$; $\mathcal{R} = \{(1, 2)\}$.

Reflexiva

$\therefore (\forall a \in A)\ ((a,a) \notin R) \Rightarrow$ R no es reflexiva

Simetrica

$\therefore$ R no es simetrica $\Longleftrightarrow (\forall a,b \in A)\ ((a,b) \notin R) \Rightarrow (a,b) \notin R$

Contredicción

$\exists\ (a,b) \in R \land (b,a) \in R$

$\therefore$ Por tanto R es simetrica

Antisimetrica

$\therefore$ R es antisimetrica $\Leftrightarrow (\forall a,b \in A)\ ((a,b) \in R \land (b,a) \in R)$

(d) $A = \{1, 2, 3, 4\}$;
$\mathcal{R} = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (3, 4)\}$.

Reflexiva

$\therefore (\forall a \in A)\ ((a,a) \notin R) \Rightarrow$ no es reflexiva

Simetrica

$\therefore$ R no es simetrica $\Longleftrightarrow (\forall a,b \in A)\ ((a,b) \notin R) \Rightarrow (a,b) \notin R$

Contredicción

$\exists\ (a,b) \in R \land (b,a) \notin R$

$\therefore$ Por tanto R no es simetrica

Antisimetrica

$\therefore$ R es antisimetrica $\Leftrightarrow (\forall a,b \in A)\ ((a,b) \in R \land (b,a) \in R)$

(e) $A = \mathbb{Z}$; $(a, b) \in \mathcal{R}$ si, y sólo si $ab \geq 0$.

Reflexiva

$a=0$ ⋮ $a=-1$

$(0,0) \in R$ ⋮ $(-1,-1) \notin R$

$(\forall a \in A)\ ((a,a) \notin R) \Rightarrow$ No es reflexiva

Simetrica

∴ R es simetrica $(\forall a,b \in A)\ ((a,b) \in R) \Rightarrow (a,b) \in R$

Transitiva

$\exists\ (a,b) \geqslant 0 \wedge (b,c) \geqslant 0 \Rightarrow (a,c) \geqslant 0$

∴ Por tanto R es transitiva

Antisimetrica

∴ R es antisimetrica $\Leftrightarrow (\forall a,b \in A)\ ((a,b) \in R \wedge (b,a) \in R)$

(f) $A = \mathbb{R}$; $(a, b) \in \mathcal{R}$ si, y sólo si $a^2 = b^2$.

Reflexiva

$(a^2, a^2) \in R$ $(1^2, 1^2) \in R$

$(\forall a \in A)\ ((a,a) \in R) \Rightarrow$ R es reflexiva

Simetrica

∴ R es simetrica $(\forall a,b \in A)\ ((a^2,b^2) \in R) \Rightarrow (a^2,b^2) \in R$

Transitiva

$\exists\ a^2 = b^2 \wedge b^2 = c^2 \Rightarrow a^2 = c^2$

∴ Por tanto R es transitiva

Antisimetrica

∴ R es antisimetrica $\Leftrightarrow (\forall a,b \in A)\ ((a,b) \in R \wedge (b,a) \in R) \Rightarrow a=b$

$a^2 = b^e \wedge b^2 = a^2 \Rightarrow a=b$ o $a=-b$

(g) $A = \mathbb{R}$; $(a, b) \in \mathcal{R}$ si, y sólo si $a - b \leq 3$.

Reflexiva $\mathbb{R} = (0,1,2,3,4,\ldots)$

$(a,a) \in R$ $a-a=0 \leqslant 3$

$(\forall a \in A)\ ((a,a) \in R) \Rightarrow$ R es reflexiva

Simetrica

$\therefore$ R es simetrica $(\forall a,b \in A)\ ((a-b) \leq 3 \in R) \Rightarrow (b,a) \in R$

Transitiva

$((a,b) \wedge (b,c) \in R) \Rightarrow a-b \leq 3 \wedge b-c \leq 3$

$a-c \leq 6 \Rightarrow (a,c) \in R$

$\therefore$ R es transitiva

Antisimetrica

$(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a-b \leq 3 \wedge b-a \leq 3 = 2(a-b) \leq 6 \quad a=b$

$\therefore$ R es Antisimetrica

(h) $A = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$; $((a,b),(c,d)) \in \mathcal{R}$ si, y sólo si $a - c = b - d$.

Reflexiva

$a-a = b-b = 0-0 \Rightarrow ((a,b),(a,b)) \in R$

$\therefore$ R es reflexiva

Simetrica

$((a,b),(c,d) \in R) \Rightarrow a-c = b-d \vee c-a = d-b \quad ((c,d),(a,b) \in R)$

$\therefore$ R es cimetrica

Antisimetrica

$(a,b),(c,d) \in R \wedge (c,d),(a,b) \in R \Rightarrow a-c = b-d \wedge c-a = d-b$

$2(a-c) = 2(b-d)$ lo que implica que son iguales

$\therefore$ R es Antisimetrica

Transitiva

$(a,b),(c,d) \wedge (c,d),(e,f) \in R \Rightarrow \begin{cases} a-\cancel{c} = b-\cancel{d} \\ \cancel{c}-e = \cancel{d}-f \end{cases} = a-e = b-f$

$\therefore$ R es Transitiva

(i) $A = \mathbb{N}$; $\mathcal{R}$ es $\neq$.

Reflexiva

$((a,a) \in R)\ \forall a \in \mathbb{N}$ ejemplo $(1,1) \notin R$

$\therefore$ R no es reflexiva

Simetrica

$(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R$ Ejemplo $(1,2) \in R \wedge (2,1) \notin R$

$\therefore$ R no es simetrica

Antisimetrica

$(a,b) \wedge (b,a) \in R \Rightarrow a \neq a\ b \wedge b \neq a\ a$ son diferentes numeros $\mathbb{N}$

$\therefore$ R es antisimetrica

Transitiva

$(a,b) \wedge (b,c) \in R \Rightarrow \begin{pmatrix} a & \cancel{b} \\ \cancel{b} & c \end{pmatrix} \Rightarrow (a,c)$

$\therefore$ R es transitiva

(j) $A = \mathbb{Z}; \mathcal{R} = \{(x,y) |\ x + y = 10\}$.

Reflexiva

$(x,x) \in R \quad (\forall x \in \mathbb{Z})$

la unica forma de que $x+x=10 \Rightarrow x=5$

$\therefore$ R no es reflexiva

Simetrica

$(x,y) \in R \Rightarrow x+y=10 \circ y+x=10 \quad (y,x) \in R$

$\therefore$ R es simetrica

Antisimetrica

$((x,y) \wedge (y,x) \in R) \Rightarrow x+y=10 \wedge y+x=10$ lo que implica $x=y$

$\therefore$ Por lo tanto R es antisimetrica

Transitiva

$((x,y) \wedge (y,x) \in R)$

Ejemplo: $(2,8) \wedge (8,-2) \in R \quad \begin{matrix} 2+8=10 \\ 8+(-2)=6 \end{matrix} \quad \begin{cases} 2 + \cancel{8} \\ \cancel{8} + (-2) \end{cases} \Rightarrow 2-2=0$ no es igual a 10

$\therefore$ Por lo cual R no es transitiva

(k) $A = \mathbb{R}^2; \mathcal{R} = \{((x,y),(u,v)) | x+y \leq u+v\}$.

Reflexiva

$(\forall x,y \in \mathbb{R}^2) \quad x+y \leq x+y$

$\therefore$ R es reflexiva

Simetrica

$((x,y),(u,v) \in R) \Rightarrow ((u,v),(x,y) \in R) \quad (\forall x,y,u,v \in R)$

Ej: $((1,2),(4,5) \in R) \quad 1+2 \leq 4+5 \Rightarrow 4+5 \leq 1+2$ no pertenece a R

$\therefore$ R no es simetrica

Antisimetrica

$((x,y),(u,v) \wedge (u,v),(x,y) \in R)$ $x+y \leq u+v \wedge u+v \leq x+y$ $x+y = u+v$ $x=u \wedge y=v$

$\therefore$ R es antisimetrica

Transitiva

$((x,y),(u,v) \wedge (u,v),(w,z) \in R) \Rightarrow x+y \leq u+v \wedge u+v \leq w+z$ implica $x+y \leq w+z$ $((x,y),(w,z) \in R)$

$\therefore$ R es transitiva

(l) $A = \mathbb{N}$; $(a,b) \in \mathcal{R}$ si, y sólo si $\frac{a}{b}$ es un entero.

Reflexividad

$(\forall a,b \in R)$ $a/a = 1$ es un numero natural

$\therefore$ R es reflexiva

Simetrica

$(a,b) \in R \wedge (b,a) \in R$ Ej: $\overset{(2,4) \in R}{\frac{2}{4} = \frac{1}{2}} \wedge \frac{4}{2} = 2$

$\therefore$ R no es simetrica

Antisimetrica

$((a,b) \wedge (b,a) \in R)$ $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$ Asi $aa = bb$ $a = b$

$\therefore$ R es antisimetrica

Transitiva

$((a,b) \wedge (b,c) \in R) \Rightarrow \frac{a}{b} \wedge \frac{b}{a}$ implica $\frac{a}{c} = \left(\frac{a}{b}\right) * \left(\frac{b}{c}\right)$ y es un numero $\mathbb{N}$ $(a,c) \in R$

$\therefore$ R es transitiva

(m) $A = \mathbb{Z}$; $(a,b) \in \mathcal{R}$ si, y sólo si $\frac{a}{b}$ es un entero.

Reflexiva

$(\forall a,b \in R)$ $\frac{a}{a} = 1$ es un numero $\mathbb{Z}$

$\therefore$ R es reflexiva

Simetrica

$((a,b) \in R) \Rightarrow \frac{a}{b} \wedge \frac{b}{a} \Rightarrow (4,2) \in R$ $\frac{4}{2} = 2 \wedge \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ R es simetrica

Antisimetrica

$((a,b) \wedge (b,a) \in R) \Rightarrow \frac{a}{b} \wedge \frac{b}{a}$ implica $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$ $aa = bb$ $a = b$ o $a = -b$

$\therefore$ R es antisimetrica

Transitiva

$((a,b) \wedge (b,c) \in R)$ $\frac{a}{\cancel{b}} \wedge \frac{\cancel{b}}{c} = (a,c) \in R$

$\therefore$ R es transitiva

7. Sea S un conjunto que contiene al menos dos elementos a y b. Si A es el conjunto potencia de S, determinar que propiedades -reflexividad, simetría, antisimetría, transitividad- posee cada una de las relaciones $\mathcal{R}$ sobre A. Dar una demostración o un contraejemplo según el caso.

(a) $(X, Y) \in \mathcal{R}$ si, y sólo si $X \subseteq Y$.

Reflexividad

$(\forall x, y \in R)$ $x \subseteq x \in R$

$\therefore$ R es reflexividad

Simetrica

$(\forall x, y \in A)(x, y \in R)$ $x \subseteq y$ entonces (y, x) (x, y)

$\therefore$ R es simetrica

Antisimetrica

$(\forall x, y \in A)$ $(x, y \in R)$ $x \subseteq y$ $y \subseteq x$ tienen los mismos elementos

$\therefore$ R es antisimetrica

Transitiva

$(\forall x, y, z \in A)$ (x, y) (R, y) $(z, R) \Rightarrow (x, R) \in R$ $x \subseteq y \wedge y \subseteq z$ $x \subseteq z$

$\therefore$ R es transitiva

(b) $(X, Y) \in \mathcal{R}$ si, y sólo si $X \subsetneq Y$.

Reflexividad

$(A\, x, v \in R)\, x \subsetneq x \in R$

$\therefore$ R es reflexiva

Simetrica

$(\forall x, y \in A)$ $(x, y \in R)$ $X \subsetneqq Y$ entonces (x,y) (y,x)

$\therefore$ R no es simetrica

Antisimetrica

$(\forall x, y \in A)$ $(x, y \in R)$ $X \subsetneqq Y \wedge Y \subsetneqq X$

$\therefore$ R no es antisimetrica

Transitiva

$(\forall x, y, z \in A)$ (x, y) (R, y) $(z, R) \Rightarrow (x, R) \in R$ $X \subsetneqq Y \wedge Y \subsetneqq Z$ $X \subsetneqq Z$

$\therefore$ R es transitiva

(c) $(X, Y) \in \mathcal{R}$ si, y sólo si $X \cap Y = \emptyset$.

Reflexividad

$(\forall x \in A)$ $x \cap x = \emptyset$

$\therefore$ R es reflexiva

Simetrica

$(\forall x, y \in A)$ $(x, y \in R)$ $x \cap y = \emptyset \Rightarrow y \cap = \emptyset$

$\therefore$ R es Simetrica

Antisimetrica

$x \cap y = \emptyset \wedge y \cap x = \emptyset$

Transitiva

$(\forall x, y, z \in A)$ $((x,y)$ (y,z) $\in R)$

$(x, y) \in R \Leftrightarrow x \cap y = \emptyset$

Ejemplo: si $x = \{1,2\}$, $y = \{3\}$ e $z = \{4\}$, $x \cap y = \emptyset$, $y \cap z = \emptyset$ y $x \cap z = \emptyset$, pero $x \cap z = \{1,2\} \neq 0$

$\therefore$ R no es transitiva

8. Explicar porque cada una de las siguientes relaciones binarias sobre $S = \{1, 2, 3\}$ no es una relación de equivalencia sobre S.

(a) $\mathcal{R} = \{(1,1), (1,2), (3,2), (3,3), (2,3), (2,1)\}$.

Veamos si es reflexiva

no lo es ya que no esta $(2,2)$

Veamos si es simetrica

$(1,2) \in R \Rightarrow (2,1) \in R$

$(3,2) \in R \Rightarrow (2,3) \in R)$

$\therefore$ Si es simetrica

Para que sea una relación de equivalencia debe ser R, S y T

– Lo cual no es reflexiva

$\therefore$ R no es de equivalencia

(b) $\mathcal{R} = \{(1,1), (2,2), (3,3), (2,1), (1,2), (2,3), (3,1), (1,3)\}$.

Veamos si es reflexiva

$\therefore$ Si es reflexiva $(1,1)(2,2)(3,3)$

Veamos si es simetrica

$(1,2) \in R \Rightarrow (2,1) \in R$

$(1,3) \in R \Rightarrow (3,1) \in R$

$(2,3) \in R \Rightarrow (3,2) \notin R$ no existe

$\therefore$ No es simetrica

– Lo cual no es simetrica

$\therefore$ R no es de equivalencia

(c) $\mathcal{R} = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)\}$.

Veamos si es reflexiva

$\therefore$ No es reflexiva $(3,3)$

Veamos si es simetrica

$(1,2) \in R \Rightarrow (2,1) \in R$

$(1,3) \in R \Rightarrow (3,1) \in R$

$\therefore$ Si es simetrica

– Lo cual no es reflexiva

$\therefore$ R no es de equivalencia

(d) $\mathcal{R} = \{(1,1),, (1,2), (2,2), (1,3), (3,3)\}$.

Veamos si es reflexiva

$\therefore$ Si es reflexiva $(1,1), (2,2), (3,3)$

Veamos si es simetrica

$(1,2) \in R \Rightarrow (2,1) \in R$

$(1,3) \in R \Rightarrow (3,1) \in R$

$\therefore$ Si es simetrica

Veamos si es Transitiva

$(1,1)\ (1,3)$

$\therefore$ Si es transitiva

$\therefore$ R es de equivalencia

10. Para $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, se define

$$a \sim b \text{ si, y sólo si } \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}.$$

(a) Probar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

$(a,b) \in R \Longleftrightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

Reflexiva

$\forall x / x \in \mathbb{R} \Rightarrow (x,x) \in R$

$(x,x) \in R \Longleftrightarrow \frac{x}{x} \in \mathbb{Q}$

$\therefore$ Es reflexiva

Simetrica

$\forall a,b \in \mathbb{R} - \{0\}$

Si $a \sim b \Longleftrightarrow \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$

asi tambien

$\frac{1}{\frac{a}{b}} \in \mathbb{Q} \Rightarrow \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{b}{a} \in \mathbb{Q} = b \sim a$

$\therefore \sim$ es simetrico

Es transitivo

$\therefore \sim$ es de equivalencia

(b) Encontrar la clase de equivalencia de 1.

$K_a = \bar{a} = \{b \in \mathbb{R} / b \sim a\}$

$\bar{1} = \{b \in \mathbb{R} / b \sim 1\} = \{b / \frac{b}{1} \in \mathbb{Q}\}$

$= \mathbb{Z} \setminus \{0\}, b \in \mathbb{R} - \{0\}$

$\bar{1} = \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

(c) Mostrar que $\overline{\sqrt{3}} = \overline{\sqrt{12}}$.

$\overline{\sqrt{3}} = \{b_1 / \frac{\sqrt{3}}{b_1} \in \mathbb{Q}\}$

$\overline{\sqrt{12}} = \{b_2 / \frac{\sqrt{12}}{b_2} \in \mathbb{Q}\}$

$= \{b_2 / \frac{2\sqrt{3}}{b_2} \in \mathbb{Q}\}$

11. Para $a, b \in \mathbb{N}$, se define

$$a \sim b \text{ si, y sólo si } a^2 + b \text{ es par.}$$

Probar que $\sim$ define una relación de equivalencia sobre $\mathbb{N}$ y encontrar el conjunto cociente determinado por $\sim$.

a) Reflexividad

Por inducción matemática

$a = 1$

$a \in \mathbb{N} \Rightarrow 1^2 + 1 = 2$

$\Rightarrow 1 \sim 1$

$a = K$

$\forall a / a \in \mathbb{N} \Rightarrow K^2 + K = 2m$

$\Rightarrow K \sim K$

$a = K + 1$

$\forall a / a \in \mathbb{N} \Rightarrow (K+1)^2 + K + 1 = 2q$

$K^2 + 2K + 1 + K + 1$

$\underbrace{K^2 + K} + 2K + 2$

$2m + 2K + 2$

$2\underbrace{(m + K + 1)}_{q}$

$\therefore$ es par $\Rightarrow a \sim a$

$\therefore$ Es reflexiva

b) Simetrica

$\forall a, b \in \mathbb{N} / a \sim b \Rightarrow a^2 + b = 2K$

$\Rightarrow b^2 + a = 2q \Rightarrow b \sim a$

Cuando a y b son impares

$a = 2K + 1 \quad b = 2q + 1$

$(2K+1)^2 + 2q + 1 = 2n$

$\Rightarrow b \sim a$

$\therefore$ Es simetrica

c) Transitiva

$a \sim b \Rightarrow a^2 + b = 2K \quad b = 2K - a^2$

$b \sim c \Rightarrow b^2 + c = 2q$

$b^2 + c = 2q$

$(2K - a^2)^2 + c = 2q$

$4K^2 - 4K + a^4 + c = 2q$

$(a^2)^2 + c = 2q - 4K^2 - 4K$

$(a^2)^2 + c = 2(q - 2K^2 - 2K)$ $\therefore$ Es transitiva

$K_a = \{x \in \mathbb{N} / x \sim a\}$

$x \sim a \Rightarrow x^2 + a = 2K \Rightarrow x = \sqrt{2K - a}$

O sea $K_a = [-\sqrt{2K - a}, \sqrt{2K - a}]$

$\sqrt{2K - a} = -\sqrt{2K - a} \quad // (\,)^2$

$2K - a = 2K - a$

13. Para enteros a, b, se define $a \sim b$ si, y sólo si $2a + 3b = 5n$ para algún entero n. Mostrar que $\sim$ define una relación de equivalencia sobre $\mathbb{Z}$.

Reflexiva

$\forall a \in \mathbb{Z}$

$5/5a = 2a + 3a$

$\Rightarrow 5/2a + 3a$

$\therefore$ Es reflexiva

Simetrica

$\forall a,b \in \mathbb{Z}$, si $a \sim b \Leftrightarrow 5/2a+3b$

$5/5 \Rightarrow 5/5(a+b) = 5a+5b$

$\Rightarrow 5/5a+5b-(2a+3b)$

$5/3a+2b \Leftrightarrow b \sim a$ $\therefore$ Es simetrica

Transitividad

$\forall a,b,c \in \mathbb{Z}$ si $a \sim b \wedge b \sim c$

$\Leftrightarrow 5/2a+3b \wedge 5/2b+3c$

$5/2a+3b+2b+3c$

$= 2a+5b+3c$

como $5/5 \Rightarrow 5/5 \cdot b$

$\Rightarrow 5/2a+5b+3c-5b$

$\Rightarrow 5/2a+3c \Leftrightarrow a \sim c$

$\therefore$ Es transitiva

$\therefore$ Es una relacion de equivalencia

16. Para $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, se define $a \sim b$ si, y sólo si $ab > 0$.

(a) Probar que $\sim$ define una relación de equivalencia sobre $\mathbb{Z}$.

Reflexividad

$\forall a \in \mathbb{Z}\{0\}$ $a \sim a \Leftrightarrow aa > 0$

Supongamos que no es reflexiva

$\exists a \in \mathbb{Z} - \{0\} \setminus a \cdot a < 0$

$a = -1$

$(-1)(-1) < 0$

$1 < 0$ ✗ esto no es verdad

$\therefore$ Es reflexiva

Simetrica

Para que se cumpla tanto $a,b \in \mathbb{Z}$

$\forall a,b \in \mathbb{Z} - \{0\}$ $a \sim b \Leftrightarrow ab > 0$

$a < 0$ y $b > b$

$ab > 0$ y por propiedad de la multiplicación

$a \cdot b = b \cdot a$

$a \sim b \Rightarrow b \sim a$

$\therefore$ Es simetrica

Transitividad

$\forall a,b,c \in \mathbb{Z}$ $a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$
$a \cdot b > 0$ $b \cdot c > 0 \Rightarrow a \cdot c > 0$
$a > 0 \wedge b > 0$ $c > 0$

La multiplicacion de dos numeros del mismo signo de un resultado mayor a 0

con $a > 0 \wedge b > 0 \wedge c > 0$

$a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \cdot b > 0 \wedge b \cdot c > 0$
$\Rightarrow (a \cdot b)(b \cdot c) > 0 \Rightarrow ab^2c > 0 \Rightarrow ac > \frac{0}{b^2}$;
$b > 0 \Rightarrow ac > 0$

$\therefore$ Es transitiva

(b) ¿Cuál es la clase de equivalencia de 5?
¿Cuál es la clase de equivalencia de -5?

$K_5 = \{x \in \mathbb{Z} / x \sim 5\}$

$K_5 = \{x \in \mathbb{Z} / x \cdot 5 > 0\}$

$K5 = \{1, 2, 3, 4 \ldots\ldots\}$

$K5 = \mathbb{Z}^+$

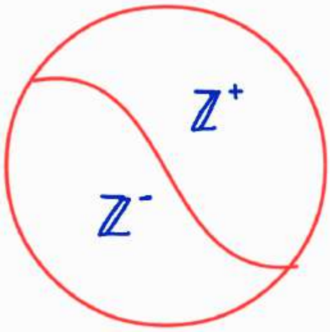
$K_{-5} = \{x \in \mathbb{Z} / x \sim -5\}$

$K_{-5} = \{x \in \mathbb{Z} / x \cdot (-5) > 0\}$

$K_{-5} = \{\ldots\ldots\ldots -3, -2, -1\}$

$K_{-5} = \mathbb{Z}^-$

(c) ¿Cuál es la partición de $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$ determinada por esta relación de equivalencia?



Como pusimos de condición que para que se cumpla $a \cdot b > 0$ $a \wedge b$ tiene que tener el mismo signo entonces

$K_5 = K_4 = K_3 = K_2 \ldots\ldots K_n = \mathbb{Z}^+$

y $K_{-5} = K_{-3} = K_{-2} \ldots\ldots K_n = \mathbb{Z}^-$

22. Si $\sim$ denota una relación de equivalencia sobre el conjunto A. Asumamos que $a, b, c, d \in A$ son tales que $a \in \overline{b}$, $c \in \overline{d}$ y $d \in \overline{b}$. Probar que $\overline{a} = \overline{c}$.

Hipotesis $a, b, c, d \in A$, $\sim \subseteq A$

① $a \in \overline{b} \Rightarrow Kb = \{a \in A / a \sim b\}$
② $c \in \overline{d} \Rightarrow Kd = \{c \in A / c \sim d\}$
③ $d \in \overline{b} \Rightarrow Kb = \{d \in A / d \sim b\}$

Tesis

$\overline{a} = \overline{c}$

Solución

Como $\sim$ es una relación de equivalencia entonces cumple la reflexividad entonces $a \sim a$ y así todos los elementos

$\Rightarrow$ de ① y ③ y ②

$Kb = \{b, a, d \ldots\}$ $Ka = \{a \ldots\}$

$Kb = \{d, c \ldots\}$ $Kc = \{c \ldots\}$

Si cumple la simetría $a \sim b \Rightarrow b \sim a$

$a \in \overline{b} \Rightarrow Kb = \{a \in A / a \sim b\}$ por hipotesis

$\sim$ es una relación de equivalencia

$\Rightarrow$ es simetrica $\Rightarrow b \sim a \Rightarrow Ka = \{a, b \ldots\}$

con esta logica definimos

Ka, Kb, Kc, Kd

④ $Ka = \{a, b \ldots\ldots\}$

⑤ $Kb = \{b, a, d \ldots\}$

⑥ $Kc = \{c, d \ldots\ldots\}$

⑦ $Kd = \{d, b, c \ldots\}$

Tenemos que

$b \sim d$ ya que $b \in \overline{d}$ por simetria

de ① tenemos que

$a \in \overline{b} \Rightarrow a \sim b$

$\sim$ es una relacion de equivalencia
entonces cumple

$a \sim b \wedge b \sim d \Rightarrow a \sim d \Rightarrow a \in \bar{d}$

$\Rightarrow Kd = \{d, b, a, c \ldots\}$

$\Rightarrow Kd = \{a, b, c, d\}$ (8)

de (8) tenemos:

$a \sim d \Rightarrow \sim$ es una relación de equivalencia $\Rightarrow$ por simetria

$\Rightarrow d \sim a \Rightarrow Ka = \{a, b, d \ldots\}$

de (2) tenemos

(9) $c \in \bar{d} \Rightarrow c \sim d$

de (3) tenemos

(10) $d \in \bar{b} \Rightarrow d \sim b$

de (9) y (10) tenemos

$\sim$ cumple la transitividad $\Rightarrow c \sim d \wedge d \sim b \Rightarrow c \sim b \Rightarrow c \in \bar{b}$

$\Rightarrow Kb = \{b, a, d, c\}$

$\Rightarrow Kb = \{a, b, c, d\}$ (11)

de (11) tenemos $c \sim b$ por simetria $b \sim c$

$\Rightarrow b \in \bar{c} \Rightarrow Kc = \{c, d, b \ldots\}$ (12)

Por ultimo de (1) tenemos $a \in \bar{b} \Rightarrow a \sim b$ y de (11) tenemos $c \sim b$ que por simetria tenemos $b \sim c$ entonces:

$a \sim b \wedge b \sim c \Rightarrow a \sim c$ y por simetria $c \sim a \Rightarrow$

$Ka = \{a, b, d, c\} \wedge Kc = \{c, d, b, a\}$

$Ka = \{a, b, d, c\} \wedge Kc = \{a, b, c, d\}$

$\Rightarrow Ka = Kb = Kd = Kc \Rightarrow \bar{a} = \bar{b} = \bar{d} = \bar{c}$

$\Rightarrow Ka = Kb = Kd = Kc \Rightarrow \bar{a} = \bar{b} = \bar{d} = c$

$\Rightarrow \bar{a} = \bar{c}$ //

23. Sea $A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$. Para $a,b \in A$, se define $a \sim b$ si, y sólo si ab es un cuadrado perfecto (es decir el cuadrado de un entero).

(a) ¿Cuáles son los pares ordenados en esta relación?

$\sim = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),(8,8),(9,9)$
$(1,4),(1,9),(2,8),(4,1),(4,9),(8,2),(9,1),(9,4)\}$

(b) Para cada $a \in A$, encontrar $\overline{a} = \{x \in A| \, x \sim a\}$.

$K_1 = \{1,4,9\}$
$K_2 = \{2,8\}$
$K_3 = \{3\}$
$K_4 = \{4,1,9\}$
$K_5 = \{5\}$
$K_6 = \{6\}$
$K_7 = \{7\}$
$K_8 = \{8,2\}$
$K_9 = \{9,1,4\}$

$K_1 = K_4 = K_9$
$\{K_1, K_2, K_3, K_4, K_5, K_6, K_7, K_8\}$

(c) Explicar porque $\sim$ define una relación de equivalencia sobre A.

$\sim$ es una relacion de equivalencia por que:

$\sim = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6),(7,7),(8,8),(9,9)$
$(1,4),(1,9),(2,8),(4,1),(4,9),(8,2),(9,1),(9,4)\}$

Como podemos notar cumple la reflexividad

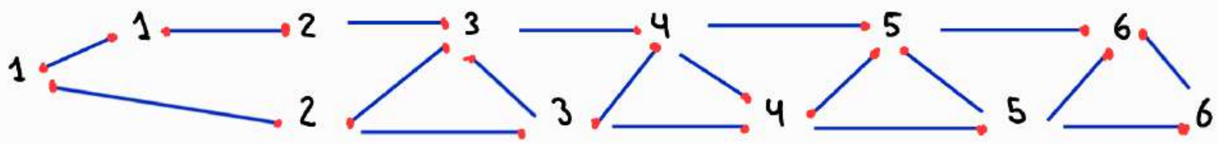
simetria:
Si $b \sim a \Rightarrow a \sim b$
Tenemos $1 \sim 4 \Rightarrow 4 \sim 1$ $\therefore$ Es simetrica por que $(4,1) \in \sim$

Transitiva:
Si $a \sim b \land b \sim c \Rightarrow a \sim c$
Tenemos $1 \sim 9 \land 9 \sim 4 \Rightarrow 1 \sim 4$ $\therefore$ Es transitiva por que $(1,4) \in \sim$

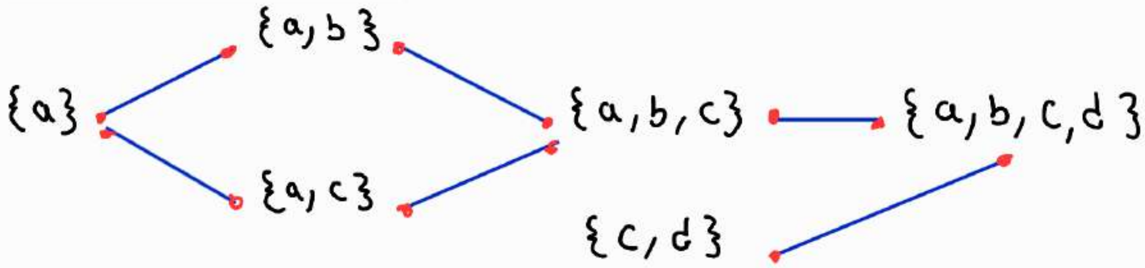
$\Rightarrow \therefore$ Es una relacion de equivalencia

32. Trazar el diagrama de Hasse para cada uno de los ordenes parciales

(a) $(\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}, \leq)$.



(b) $(\{\{a\}, \{a, b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, c, d\}, \{a, c\}, \{c, d\}\}, \subseteq)$.



35. Sea $A = \mathbb{Z}^2$. Para $a = (a_1, a_2)$ y $b = (b_1, b_2)$ en A, se define $a \preceq b$ si, y sólo si $a_1 \leq b_1$ y $a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2$.

(a) Probar que $\preceq$ es un orden parcial sobre A. ¿Será éste orden parcial un orden total? Justifica tu respuesta con una demostración o un contraejemplo.

Contraejemplo

Sean $a_1 = -1$ $\qquad a \leq b \iff a_1 \leq b_1 \wedge a_1 + a_2 \leq b_1 + b_2$

$a_2 = 3$ $\qquad -1 \leq 1 \wedge -1 + 3 \leq 1 + 0$

$b_1 = 1$ $\qquad -1 \leq 1 \wedge 2 \leq 1$

$b_2 = 0$ $\qquad$ V $\qquad$ X

$\Rightarrow \therefore$ Es de orden parcial ya que $2 \leq 1$ esto no es verdadero entonces a no precede a b

(b) Generalizar el resultado de la parte (a) definiendo un orden parcial sobre el conjunto $\mathbb{Z}^n$ de las n-tuplas de enteros.

$A = \mathbb{Z}^n$; $a = (a_1, a_2, a_3, a_4 \dots a_n)$; $a, b \in A$

$b = (b_1, b_2, b_3, b_4 \dots b_n)$

n letras ; Letra$_n \in A$

Sea:

Letra$_n$ = K = sea K un conjunto de todas las combinaciones de letras

$K = \{a, b, c, d, e\ f \dots\}$ $\qquad K = (k_1, k_2 \dots k_n)$

$K \leq K' \iff k_1 \leq k'_1 \wedge K_1 + K_2 + K_3 + K_4 \dots K_n \leq K'_1 + K'_2 + K'_3 \dots K'_n$

38. Sea $U = \{1, 2, 3, 4\}$, con $A = \mathcal{P}$ y sea $\sim$ la relación de inclusión sobre A. Hallar el ínfimo y el supremo de cada conjunto B

(a) $\{\{1\}, \{2\}\}$

Supremo $\{2\}$

Infimo $\{1\}$

(b) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}\}$

Infimo $\{1\}$

Supremo $\{1, 2\}$

(c) $\{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\}$

infimo $\{1\}$

Supremo $\{1, 2\}$

(d) $\{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

infimo $\{1\}$

supremo $\{1, 2, 3\}$

(e) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$

infimo $\{2, 3\}$

(f) $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\},$
$\{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$

Infimo $\{1\}$

supremo $\{1, 2, 3\}$