Universidad Mayor de San Andrés

Facultad de Ciencias Puras y Naturales

Carrera de Informática

PRACTICA#1

ALGEBRA

APELLIDO: MAMANI QUEA

NOMBRES: JHAMIL CALIXTO

CI: 9914119LP

DOCENTE: EUGENIO CASTAÑOS CALLE

PARALELO: E

LA PAZ - BOLIVIA

2023

Logica

1.1 Logica Proposicional

Problema 2. Escriba las siguientes implicaciones en la forma "si ... entonces ...":

(a) La práctica diaria de su servicio es una condición suficiente para que Daniela tenga una buena posibilidad de ganar el torneo de tenis.

Si practica diariamente de su servicio entonces Daniela tendra una buena posibilidad de ganar el torneo de tenis.

(b) Arreglé mi aire acondicionado o no pagaré la renta.

Si areglo mi airo acondicionado entonces no pagare la renta

(c) María puede subir a la motocicleta de Luis sólo si usa el casco.

Si usa el casco entonces Maria puede subir a la motocicleta de Luis

(d) Nieva siempre que el viento sople del noroeste.

Si nieva siempro entonces el viento sopla del noroesto

(e) Que Bolívar gane el clásico, implica que ha derrotado a The strongest.

Si Bolivar gana el clasico entonces ha derrotado a The Strongest

(f) Es necesario caminar ocho kilómetros para llegar a la meta.

Si para llegar a la meta entonces es necesario caminar ocho Kilometros

(g) Para que una película gane el premio Oscar, es suficiente con que le guste a los miembros de la Academia de Hollywood.

Si le gusta a los miembros dela academia do Hollywood entonces la pelicula gana el premio Oscar.

(h) La garantía de tu equipo es válida sólo si los has comprado hace menos de noventa dias.

Si has comprado hacemenos de noventa dias entonces la garantia de tu equipo es valida

Problema 4. Proporcione las contrarecíprocas del ejercicio anterior.

Si p es primo, entonces $\sqrt{p}$ es irracional.

Si $\sqrt{p}$ no es irracional entonces p no es primo

Si acepto el mundo que me ofrecen y soy feliz, entonces empiezo a cavar mi propia tumba.

Si no empiezo a cavar mi propia tumba entonces no acepto el mundo que me ofrecen y no soy feliz.

Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Si $a \neq 0$ o $b \neq 0$ entonces $a \cdot b \neq 0$

Si $a < 0$, entonces $a^{-1} < 0$.

Si $a^{-1} > 0$ entonces $a > 0$

Problema 6. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

(a) Si $2 + 3 = 4$, entonces $1 + 1 = 5$.

$\overset{p}{2+3=4}$ F $\quad 1 + \overset{q}{1} = 5$ F

$$\underbrace{F \longrightarrow F}_{V}$$

∴ La proposición sería verdadera

(b) Si verde es rojo, entonces la luna está hecha de queso.

p: verde es rojo F

q: la luna está hecha de queso F

$p \Rightarrow q$

$\underbrace{F \Rightarrow F}_{V}$

∴ La proposición es verdadera

(c) Si verde es rojo, entonces la luna no está hecha de queso.

p: verde es rojo F

q: la luna no está hecha de queso V

$\underbrace{F \Rightarrow V}_{V}$

∴ La proposición es verdadera

(d) $7 < 2$ si $2 < 1$.

p: $7 < 2$ F

q: $2 < 1$ F

$\underbrace{F \vee F}_{F}$

∴ La proposición es Falsa

(e) Rojo es blanco si, y sólo si verde es azul.

p: Rojo es blanco F

q: Verde es azul F

$\underbrace{F \Leftrightarrow F}_{V}$

∴ La Proposición es verdadera

(f) $2 + 1 = 3$ y $3 + 1 = 5$ implica que 4 es impar.

p: $2+1=3$ V

q: $3+1=5$ F

r: 4 es impar F

$p \wedge q \Rightarrow r$

$\underbrace{\underbrace{V \wedge F}_{F} \Rightarrow F}_{V}$

∴ La proposición es Verdadera

Problema 8. Escriba en forma simbólica y asigne valores de verdad:

(a) $3 + 1 \neq 4$ y 24 es divisible por 8.

p : $3+1 \neq 4$ F
q : 24 es divisible por 8 V

$\underbrace{F \wedge V}_{F}$

(b) No es cierto que 7 sea impar o $3 + 1 = 4$.

No = $\sim$
p: es cierto que 7 sea impar V
q: $3+1=4$ V

$\sim p \vee q$
$\sim V \vee V$
$F \vee V$
V

(c) $3 + 1 = 4$ pero 24 no es divisible por 8.

p: $3+1=4$ V
q: 24 no es divisible por 8 F

$\underbrace{V \wedge F}_{F}$

(d) 7 es par si, y sólo si $3 + 1 = 4$.

p: 7 es par F
q: $3+1=4$ V

$\underbrace{F \Leftrightarrow V}_{F}$

Problema 10. Sabiendo que p es verdadera y que $q \Rightarrow (p \wedge r)$ es falsa, indique el valor de verdad de:

(a) $p \wedge q$.

p = V

$p \wedge r$
V F
F

$p \wedge (p \wedge r)$
V V F
V $\wedge$ F
F

(b) $r \Rightarrow p$.

$r \Rightarrow p$
$F \Rightarrow V$
V

(c) $(p \wedge r) \Rightarrow m$.

m = V ó F

$(p \wedge r) \Rightarrow m$
$V \wedge F \Rightarrow m$
$F \Rightarrow V$
V

(d) $(p \wedge r) \wedge t$.

t = V ó F

$(p \wedge r) \wedge t$
$V \wedge F \wedge F$
$F \wedge F$
F

(e) $r \Leftrightarrow [q \vee (p \wedge r)]$

$r \Leftrightarrow [q \vee (p \wedge r)]$
$F \Leftrightarrow [F \vee (V \wedge F)]$
$F \Leftrightarrow [F \vee F]$
$F \Leftrightarrow F$
V

(f) $p \vee (r \vee t)$.

$p \vee (r \vee t)$ t = V ó F
$V \vee (F \vee V)$
$V \vee V$
V

si t = F
$V \vee (F \vee F)$
$V \vee F$
V

(g) $\sim r \wedge [m \vee (t \wedge r)]$.

t = V ó F
m = V ó F

$\sim r \wedge [m \vee (t \wedge r)]$
$\sim F \wedge [V \vee (V \wedge F)]$
$V \wedge [V \vee (V \wedge F)]$
$V \wedge [V \vee F]$
$V \wedge V$
V

Problema 12. Encontrar la respuesta a las siguientes cuestiones:

(a) ¿Es la condicional asociativa? En otras palabras, ¿Es

$$[(p \Rightarrow q) \Rightarrow r] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (q \Rightarrow r)]$$

una tautología?

$[(p$	$\Rightarrow$	$q)$	$\Rightarrow$	$r]$	$\Leftrightarrow$	$[p$	$\Rightarrow$	$(q$	$\Rightarrow$	$r)]$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	F	V	V	F	V	F	F
V	F	F	V	V	V	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V	V	F	V	F
F	V	V	V	V	V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F	V	F	V	V
F	V	F	F	F	F	F	V	F	V	F

∴ No es una tautologia es una contingencia

(b) ¿Es la bicondicional asociativa? Es decir, ¿Será

$$[(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r] \Leftrightarrow [p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)]$$

una tautología?

$[(p$	$\Leftrightarrow$	$q)$	$\Leftrightarrow$	$r]$	$\Leftrightarrow$	$[p$	$\Leftrightarrow$	$(q$	$\Leftrightarrow$	$r)]$
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	F	V	V	F	V	F	F
V	F	F	F	V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V	F	V	F
F	F	V	F	V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F	V	F	F	V
F	V	F	F	F	V	F	F	F	V	F
	1		3		3 y 4		4		2	

∴ Si es una tautologia

Problema 14. Simbolice: "Puedes engañar a algunos todo el tiempo, y puedes engañar a todos algún tiempo; pero no puedes engañar a todos todo el tiempo".

p = Puedes engañar
q = todo el tiempo
r = algun tiempo

$$(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (\sim p \vee q)$$

Problema 16. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son tautologías?

(a) $[(p \wedge q) \vee r] \wedge \sim q$.

$[(p$	$\wedge$	$q)$	$\vee$	$r]$	$\wedge$	$\sim q$
V	V	V	V	V	F	F
V	V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V
F	F	V	V	V	F	F
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	V
	1		2		3	

∴ No es una tautologia es una contingencia

(b) $(p \vee q) \Rightarrow (p \wedge \sim q)$.

$(p$	$\vee$	$q)$	$\Rightarrow$	$(p$	$\wedge$	$\sim q)$
V	V	V	F	V	F	F
V	V	F	V	V	V	V
F	V	V	F	F	F	F
F	F	F	V	F	F	V
	1		1 y 2		2	

∴ Es una contingencia

(c) $(\sim p \Leftrightarrow \sim q) \Leftrightarrow (p \Rightarrow q)$.

$(\sim p$	$\Leftrightarrow$	$\sim q)$	$\Leftrightarrow$	$(p$	$\Rightarrow$	$q)$
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	V	V	F	F
V	F	F	F	F	V	V
V	V	V	V	F	V	F
	2		1 y 2		1	

∴ Es una contingencia

(d) $[(\sim p \wedge q) \Rightarrow (p \vee \sim q)] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (\sim q \wedge p)]$.

$[(\sim p$	$\wedge$	$q)$	$\Rightarrow$	$(p$	$\vee$	$\sim q)]$	$\Leftrightarrow$	$[p$	$\Rightarrow$	$(\sim q$	$\wedge$	$p)]$
F	F	V	V	V	V	F	F	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	F	F	F	F	F	V	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V	V	F	V	V	F	F
	1		5		2		5 y 4		4		3	

∴ Es una contingencia

(e) $(p \vee q) \wedge (\sim p \wedge \sim q)$.

(p	∨	q)	∧	(~ p	∧	~ q)
V	V	V	F	F	F	F
V	V	F	F	F	F	V
F	V	V	F	V	F	F
F	F	F	F	V	V	V
	1		1 y 2		2	

∴ Es una contradicción

(f) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$.

(p	⇒	q)	⟺	(p	∧	~ q)
V	V	V	F	V	F	F
V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	F	F	F	F
F	V	F	F	F	F	V
	1		1 y 2		2	

∴ Es una contradicción

(g) $(p \wedge q) \Rightarrow (q \vee r)$.

(p	∧	q)	⇒	(q	∨	r)
V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	V	V	V	F
V	F	F	V	F	V	V
V	F	F	V	F	F	F
F	F	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	F
F	F	F	V	F	V	V
F	F	F	V	F	F	F
	1		1 y 2		2	

∴ Es una tautología.

(h) $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$.

(p	∧	~ q)	∨	(~ p	∧	q)	∨	(~ p	∧	~ q)
V	F	F	F	F	F	V	F	F	F	F
V	V	V	V	F	F	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	F	V	V	V	V
	1		1 y 2, 4		2		4 y 3		3	

∴ Es una contingencia.

(i) $(p \Rightarrow q) \vee (p \vee q)$.

(p	⇒	q)	∨	(p	∨	q)
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	F
F	V	V	V	F	V	V
F	V	F	V	F	F	F
	1		1 y 2		2	

∴ Es una tautología

(j) $[(\sim p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow (p \wedge q)$.

[(~p	∧	q)	∧	(p	⇒	q)]	⇒	(p	∧	q)
F	F	V	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	F	F	V	V	F	F
V	V	V	V	F	V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	F	V	F	V	F	F	F
	1		4		3		5		2	

∴ Es una contingencia

(k) $[(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$.

[(p	⇒	q)	∧	(~p	⇒	q)]	⇒	q
V	V	V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	F	V	F	V	F
F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	F	V	F
			3				4	

∴ Es una Tautología

(l) $\sim [(\sim p \Rightarrow q) \Leftrightarrow \sim (p \vee \sim q)]$.

~	[(~p	⇒	q)	⟺	~	(p	∨	~q)]
V	F	V	V	F	F	V	V	F
V	F	V	F	F	F	V	V	V
F	V	V	V	V	V	F	F	F
F	V	F	F	V	F	F	V	V
1 y 2		1			2			

∴ Es una contingencia

(m) $p \vee q \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q)$.

p	∨	q	∨	(~ p	∧	~ q	∧	r)	⟺	(p	∨	q)
V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	V
V	V	V	V	F	F	F	F	F	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V	V	V	V	V	F
V	V	F	V	F	F	V	F	F	V	V	V	F
F	V	V	V	V	F	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	V	F	V	F	F	V	F	F	F
	4		4 3, 5		3		2		6		1	

∴ Es una contingencia

(n) $p \wedge [(\sim q \Rightarrow r) \vee \sim \{q \vee ((r \wedge s) \vee (r \Rightarrow s))\}]$.

p	∧	[(~q	⇒	r)	∨	~	{q	∨	((r	∧	s)	∨	(r	⇒	s))}]
V	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V	V	V	F	F	F	V	F	F
V	V	F	V	F	V	F	V	V	F	F	V	V	F	V	V
V	V	F	V	F	V	F	V	V	F	F	F	V	F	V	F
V	V	V	V	V	V	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	V	V	V	V	F	F	V	F	F	F	V	F	F
V	F	V	F	F	F	F	F	V	F	F	V	V	F	V	V
V	F	V	F	F	F	F	F	V	F	F	F	V	F	V	F
F	F	F	V	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	F	V	V	V	F	F	F	V	F	F
F	F	F	V	F	V	F	V	V	F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	F	V	V	F	F	F	V	F	V	F
F	F	V	V	V	V	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	F	F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	F	F	V	F	F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	F	F	F	V	F	F	F	V	F	V	F
	7		5		6			4				3			

∴ Es una contingencia

Problema 18. Construya demostraciones formales de los siguientes teoremas:

(a) Si $p \vee \sim q, t \wedge q, t \Rightarrow\sim (\sim s \wedge p)$; entonces $r \vee s$.

1. $p \vee \sim q$
2. $t \wedge q$
3. $t \Rightarrow \sim(\sim s \wedge p)$
4. $t \Rightarrow (s \vee p)$
5. t 2   R.S
6. $s \vee p$ 4 5   M.P.P
7. q 2   R.S
8. p 1 7   M.T.P
9. $\sim p$ 8   L de I
10. s 6 9   M.T.P
11. $r \vee s$ 10   L. A

(b) Si $\sim (p \Rightarrow\sim q), q \Rightarrow\sim (p\wedge \sim t), r \vee s$; entonces $\sim t \vee s$.

1. $\sim(p \Rightarrow \sim q)$
2. $q \Rightarrow \sim(p \wedge \sim t)$
3. $r \vee s$
4. $q \Rightarrow (\sim p \vee t)$ 2
5. $p \wedge q$ 1   L. E.
6. q 5   Simp
7. $\sim p \vee t$ 4 6   M.P.P
8. p 5   Simp
9. t 7 8   M.T.P
10. $\sim t$ 9   L de I
11. $\sim t \vee s$ 10   L de Adición

(c) Si $p \Rightarrow q$, $r \Rightarrow s, \sim (p \Rightarrow s)$; entonces $q\wedge \sim r$.

1. $p \Rightarrow q$
2. $r \Rightarrow s$
3. $\sim(p \Rightarrow s)$
4. $p \wedge \sim s$ 3   L. Equi
5. $\sim s$ 4   R. Simpli
6. $\sim r$ 5 2   M.T.P
7. $\sim p \vee q$ 1   L. Equi
8. p 4   R. Simpli
9. q 7 8   M.T.P
10. $q \wedge \sim r$ 6 9   Adjunción

(d) Si $p \Rightarrow q, \sim r \Rightarrow s, \sim q\vee \sim s$; entonces $p \Rightarrow r$.

1. $p \Rightarrow q$
2. $\sim r \Rightarrow s$
3. $\sim q \vee \sim s$
4. $\sim p \vee r$ 1 2 3   Dilema destructivo
5. $p \Rightarrow r$ 4   L. Equivalencia

Auxiliar

$$\begin{array}{l} \sim q \vee \sim s \\ p \Rightarrow q \\ \underline{\sim r \Rightarrow s} \\ \sim p \vee r \end{array}$$

(d) Si $p \Rightarrow q, \sim r \Rightarrow s, \sim q \vee \sim s$; entonces $p \Rightarrow r$.

1 $p \Rightarrow q$
2 $\sim r \Rightarrow s$
3 $\sim q \vee \sim s$
4 $\sim p \vee r$ 1 2 4 D. destruc
5 $p \Rightarrow r$ 4 L. Equivalencia

Auxi
$\sim q \vee \sim s$
$p \Rightarrow q$
$\sim r \Rightarrow s$
$\sim p \vee \sim(\sim r)$
$\sim p \vee r$

(e) Si $p \Rightarrow (q \wedge r), (q \vee s) \Rightarrow t, p \vee s$; entonces t.

1 $p \Rightarrow (q \wedge r)$
2 $(q \vee s) \Rightarrow t$
3 $p \vee s$
4 p 3 principio disyunción
5 s 3 principio disyunción
6 $q \wedge r$ 1 y 4 M.P.P
7 $s \Rightarrow t$ 2 s es verdadera
8 t 7 5 M.P.P

(f) Si $p \Rightarrow (q \wedge r), r \Rightarrow s, \sim (q \wedge s)$; entonces $\sim p$.

1 $p \Rightarrow (q \wedge r)$
2 $r \Rightarrow s$
3 $\sim(q \vee s)$
4 $\sim q \wedge \sim s$ 3
5 $\sim s$ 4 Simp
6 $\sim q$ 4 Simp
7 $\sim r$ 2 5 M.T.T.
8 $\sim q \wedge \sim r$ 6 7 R. Adju
9 $\sim p$ 1 8 M.T.T

1.2. Lógica cuantificada.

Problema 20. Negar la siguiente proposición: Todos los estudiantes de esta clase han aprobado algún examen en marzo.

∴ No todos los estudiantes de esta clase han aprobado algun examen en marzo.

Problema 22. Escriba formalmente las siguientes proposiciones, luego determine sus negaciones y traduzca estas al lenguaje natural.

(a) Si vale menos de Bs. 15, comeré en la cafetería.

p: vale menos de Bs. 15
q: Comere en la cafeteria

$p \wedge q$
Si negamos $\Rightarrow$ $\sim p \vee \sim q$

∴ Si no vale menos de Bs. 15 o no comeré en la cafeteria

(b) Todos los habitantes de Madrid viajan en metro.

p: los habitantes de Madrid
q: viajan en metro

$p \Rightarrow q$
Si negamos: $p \wedge \sim q$

∴ Todos los habitantes de Madrid no viajan en metro.

(c) Hay personas en todas las ciudades que usan el transporte publico.

p: Hay personas en todas las ciudades
q: usan el transporte publico

$p \Rightarrow q$
Si negamos: $p \wedge \sim q$

∴ Hay personas en todas las ciudades que no usan el transporte publico

Problema 24. Dado el conjunto $A = \{1, 3, 5, 7\}$, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

(a) $(\exists x \in A)\left(4x^2 - 19x - 5 = 0\right) \wedge (\exists x \in A)\left(x^2 = x\right)$.

$4x^2 - 19x - 5 = 0$

Usando la formula cuadratica

Sol

$x_1 = 2.438$

$x_2 = 0.562$

Ninguna de estas soluciones es un numero entero, dado que el conjunto A son (1, 3, 5, 7) no existe ningun x en A. Por lo tanto es falsa.

2: $(\exists x \in A)(x^2 = x)$

La solucion para esta ecuación son $x = 0$ y $x = 1$ y en el conjunto A tenemos el numero 1 lo que satisface.

$$1^2 = 1$$

lo que es verdadera

Evaluamos:

$$\underset{F}{(\exists x \in A)(4x^2 - 19x - 5 = 0)} \underset{\underset{F}{\wedge}}{\wedge} \underset{V}{(\exists x \in A)(x^2 = x)}$$

∴ La proposición es falsa

(b) $(\exists x \in A)(2x + 3 = 5x) \vee (\exists x \in A)(2x = x)$.

1 $(\exists x \in A)(2x + 3 = 5x)$

$$2x + 3 = 5x$$
$$3 = 5x - 2x$$
$$3 = 3x$$
$$\frac{3}{3} = x$$
$$1 = x$$

El numero 1 esta en el conjunto A por lo tanto ay un valor que satisface la ecuación

2 $(\exists x \in A)(2x = x)$

$$2x = x \quad // \frac{1}{x}$$
$$\cancel{2x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = \cancel{x}\,\frac{1}{\cancel{x}}$$
$$x \cdot 1 = 1$$
$$x = 1$$

Remplazando

$$2x = x$$
$$2 \cdot 1 = 1$$
$$2 = 1$$

F

La cual 2 no es igual a 1

Evaluamos:

$$\underset{V}{(\exists x \in A)(2x + 3 = 5x)} \underset{\underset{V}{V}}{\vee} \underset{F}{(\exists x \in A)(2x = x)}$$

∴ La expresión completa es Verdadera

Problema 26. Considerando los números enteros como universo de discurso, sean los siguientes predicados: Si

$$p(x) : x > 0.$$
$$q(x) : x \text{ es par.}$$
$$r(x) : x \text{ es un cuadrado perfecto.}$$
$$s(x) : x \text{ es divisible por 4.}$$
$$t(x) : x \text{ es divisible por 5.}$$

Escriba en forma simbólica.

(a) Algún entero es par.

Algún : $\exists$

$q(x)$: entero es par

$\exists\, q(x)$

(b) Existe al menos un entero positivo y par.

$\exists\, x > 0\ q(x)$

(c) Si x es par, entonces x no es un divisor de 5.

$q(x) \Rightarrow \sim t(x)$

(d) Ningún entero par es divisible entre 5.

$\sim q(x) \wedge t(x)$

(e) Existe al menos un entero par divisible entre 5.

$\exists\, q(x) \wedge t(x)$

(f) Si x es par y un cuadrado perfecto, entonces x es divisible entre 4.

$q(x) \wedge r(x) \Rightarrow s(x)$

Problema 28. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales y sea $P(r, s)$ el predicado "r divide a s ". Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

(a) $P(2, 3)$.

$\frac{2}{3} \rightarrow \boxed{F}$

(b) $P(5, 10)$.

$\frac{5}{10} \rightarrow \boxed{F}$

(c) $P(2, 3) \wedge P(5, 10)$.

F $\wedge$ F

$\boxed{F}$

(d) $P(2, 3) \vee P(5, 10)$.

F $\vee$ F

$\boxed{F}$

(e) $P(2, 3) \Rightarrow P(5, 10)$.

F $\Rightarrow$ F

$\boxed{V}$

(f) $P(5, 10) \Rightarrow P(2, 3)$.

F $\Rightarrow$ F

$\boxed{V}$

(g) $(\forall m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(P(m, n))$.

Contraejemplo

$\left.\begin{array}{l} 1/2 \rightarrow 0,5 \notin \mathbb{N} \\ 3/3 \rightarrow 1 \in \mathbb{N} \end{array}\right\}$ no para $\forall$

$\boxed{= F}$

(h) $(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(P(m, n))$.

Contraejemplo

$\left.\begin{array}{l} 2/1 \rightarrow 2 \in \mathbb{N} \\ 2/3 \rightarrow 0,66 \notin \mathbb{N} \end{array}\right\}$ No $\forall n/m$

$\boxed{= F}$

(i) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})(P(m,n))$.

Contraejemplo

$4/2 \to 2 \in \mathbb{N}$

$6/3 \to 2 \in \mathbb{N}$ $\Big\}\ \exists \underbrace{(m,n)}_{\mathbb{V}}$

(j) $(\forall m \in \mathbb{N})(P(m,1))$.

Supongamos que

$2/1 \to 2 \in \mathbb{N}$

$3/1 \to 3 \in \mathbb{N}$ $\Big\}\ \mathbb{V}$

$4/1 \to 4 \in \mathbb{N}$

Problema 30. Demuestre o refute:

(a) Si x es un entero impar, entonces x^3 es impar.

Por contradicción

Sea p: x es un entero impar

q: x^3 es impar

$\sim(P \to Q)$

$P \wedge \sim q$

$p \to x = 2k+1 \leftarrow$ Impar

$x^3 = (2k+1)^3$

$x^3 = \underbrace{8k^3 + 12k^2 + 6k}_{\text{multiplos de 2}} + 1$

$\therefore x^3$ es par $\to (\sim q)$

x^3 es impar

(b) Si $x \in \mathbb{N}$, el resto de dividir x^2 entre 4 sólo puede tomar los valores 0 o 1.

$x = 2n$ ó $x = 2n+1$

$(2n)^2 = 4n^2$

$\Leftrightarrow 4n^2$ residuo 0

de $4n^2 + 4n + 1 \to 4$ es 1

$\therefore \mathbb{V}$

(c) Si n es un entero natural y $3n+1$ es un cuadrado perfecto, $n+1$ es suma de tres cuadrados perfectos.

$n \in n$ y $3r \cup 1 \to n^2$

$n+1 \to 3n^2$

$3n+1 = m^2$

Por contradicción

$n+1 \neq 3n^2$

$n+1 \neq c^2 + b^2 + c^2$

$1 \neq 2n+1+b^2+c^2$

$\to 1 = 2n^2 + g^2 + c^2$

$1 + 2n^2 + b^2 + c^2$

$\mathbb{V}$

Por contradición

$\mathbb{F}$

(d) Sea $x \in \mathbb{Z}$, x es par si, y sólo si x^2 es par.

$x \in \mathbb{Z} \to x = 2n <> x^3 = 2n$

$x = 2k \Leftrightarrow x^3 = 2k$

$(2k)^3 = 8k^3 = 2(4k^3) \Leftrightarrow x^3 = 2k$

Es par

Por contradicción

$= 2(4m^3 + 6m^2 + 3m) + 1$

x^3 // Impar

cost

es par

$\mathbb{V}$

(e) Si $x \geq 0$ es un número real tal que para todo número real $\epsilon > 0$ se cumple que $0 \leq a < \epsilon$, entonces $a = 0$.

Entonces $a<0$ $a=0$ $a>0$

$x \geq 0 \cap \epsilon > 0$

$0 < a < e$

1 $a < 0 = 0$

2 $a > 0 = a < a \Rightarrow\Leftarrow$

$a = 0$? (No resp)

(f) $\sqrt{2}$ no es racional.

$(\sqrt{2})^2 = (a/b)^2$

$2 = (a^2/b^2) \to 2b^2 = 2a^2$

$a = 2k$

$b^2 = 2k^2 \to \sqrt{2}$

$\therefore \mathbb{F}$

(g) La suma de tres enteros consecutivos es múltiplo de tres.

$(2n)(2m+1) = 4nm + 2n$

$(2(2nm+n))$

$\therefore \mathbb{V}$

(h) El producto de un entero par con un entero impar es par.

Por $(\Rightarrow\Leftarrow)$ p y $q \leftarrow$ Primos $r =$ la suma de p y q

$p + q > 1 \Leftarrow p + q + r > 2$

$(\Rightarrow \Leftarrow)$

$\therefore \mathbb{F}$

(j) Si un número real x es racional, entonces $\pi + x$ no es racional.

$\frac{p}{q}$ donde $q \neq 0$

$x = p/s$

$\pi + s$ r/s donde $s/0$

$\pi + r = r/s$

$\pi = r/s \cdot p$ no es racional $(\Rightarrow\Leftarrow)$

$\therefore \mathbb{V}$

Problema 32. Sea n un entero. Probar que n es par si, y sólo si $31n + 12$ es par.

$31n + 12$ con $2k$ y $2k+1$

$31 + 12 = 31(2k+1) + 12 = 62k + 31 + 12 = 62k + 43$

$\boxed{31n + 12} \Leftarrow$ es impar

Por otro lado

$31n + 12 = 31(2k) + 12 = 62k + 12$

$\boxed{31n + 12}$ tambien es par

$\therefore$ n es par $\Leftrightarrow$ $31n + 12$ es par

Problema 34. Sean m y n números enteros. Realizando una demostración directa demostrar que:

(a) Si n es impar, entonces n^3 es impar.

$n^3 : (2k+1)^3$

$n^3 : (2k+1)^3 = 8n^3 + 12(r^2 + 6k + 1$

2k (multiplo de 2)

expepto por +1

$\therefore$ n es $2k+1 \Rightarrow n^3$ es impar

(b) Si n es impar, entonces $n^2 + 3n + 5$ también es impar.

Hipotesis : n es impar

$n^2 + 3n + 5$ es impar

$n = (2k+1)$

$n^2 + 3n + 5 = (2k+1)^2 + 3(2k+1) + 5$

Simplificando $= 4k^2 + 4k + 1 + 6k + 3 + 5$

$= 4k^2 + 10k + 9$

$= \underbrace{4k^2 + 10k}_{\text{es multiplo de 2}} \Rightarrow 2(2k^2 + 5k)$ 9 es un numero impar

$\therefore$ Por lo tanto demostramos que $n^2 + 3n + 5$ es impar dado que n es impar.

(c) Si n es par y m es impar, entonces $n + m$ es impar.

Hipotesis

n es par

m es impar

$n = 2k$ $\quad k \exists \mathbb{Q}$

$m = 2k + 1$

$n + m = (2k) + (2k+1)$

$= 2(k+k) + 1$

$2(k+k)$ es multiplo de 2 y al sumar 1 a un numero par obtenemos un numero impar

$\therefore$ Por lo tanto hemos demostrado "n" es par "m" impar, entonces $n+m$ es impar.

(d) Si n y m son pares, entonces nm es par.

Hipotesis

n y m son pares

$n = 2p$

$m = 2q$

$n \cdot m = 2p \cdot 2q$

$= 4pq$

$4pq$ es un multiplo de 2, podemos factorizar $2(2pq)$

$\therefore$ Demostramos que si n y m son pares, entonces nm es par

(e) Si n y m son impares, entonces el producto nm también es impar.

Hipotesis

n es impar

m es impar

$n = 2q_1 + 1$

$m = 2q_2 + 1$

$nm = (2q_1 + 1)(2q_2 + 1) = 4q_1q_2 + 2q_1 + 2q_2 + 1$

$nm = 2\underbrace{(2q_1q_2 + q_1 + q_2)}_{\text{es un numero entero}}$

Al sumar 1 a un numero par (un multiplo de 2)

obtenemos un numero impar

$\therefore$ Hemos demostrado que si n y m son imperes, entonces el producto nm tambien es impar

Problema 36. Aplicando la forma contrarrecíproca de una implicación, probar que:

(a) Si n^2 es impar, entonces n es impar.

$\therefore$ Si n es par, entonces n^2 es par.

(b) Si $a \nmid bc$, entonces $a \nmid b$.

$\therefore$ S a/b, entonces a/bc.

(c) Si $4 \nmid a^2$, entonces a es impar.

$\therefore$ Si a es par, entonces 4 divide a a^2

Problema 38. Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

(a) $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ y $\cos(\pi) = -1$.

1) $\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$ es una identidad trigonometrica
Esta identidad es verdadera para cualquier valor θ
$\therefore$ Es verdadera
2) $\cos(\pi) = -1$
$\cos(180) = -1$
$\therefore$ La pronosicion es verdadera

$V \wedge V$
V $\therefore$ Las proposiciones es verdadera

(b) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ó $\cos(\pi) = 0$.

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ y no a 0
$\therefore$ Falsa

2) $\cos(\pi) = 0$ Esta proposicion es verdadera

$\therefore$ Verdadera

$F \vee V$
V
$\therefore$ Verdadera

(c) Si $\sin(45^\circ) = 1$ y $\cos(45^\circ) = 1$, entonces se tiene que $\tan(30^\circ) = \frac{1}{2}$.

$\sin(45^\circ) = 1$ $\therefore$ Es Falsa
$\cos(45^\circ) = 1$ $\therefore$ Es Falsa
$\tan(30^\circ) = \frac{1}{2}$ $\therefore$ Es Falsa

$F \wedge F \Rightarrow F$
$F \Rightarrow F$
V

(d) $\sqrt{2} < \sqrt{3}$ si, y sólo si, $\frac{1}{2} < \frac{1}{3}$.

$\sqrt{2} = 1.41$
$\sqrt{3} = 1.73$
$1.41 < 1.73$
V

$\therefore$ La proposición es verdadera

$\frac{1}{2} = 0.5$; $\frac{1}{3} = 0.333$
$0.5 < 0.333$
F
$\therefore$ Es Falsa

$V \Leftrightarrow F$
F

Problema 40. Sean p y q proposiciones. La disyunción exclusiva de p y q, denotada por $p\veebar q$ es falso si p y q (ambos) tienen el mismo valor de verdad, en otros casos es verdadero. Construir la tabla de verdad de:

(a) $p\veebar q$.

p	⊻	q
V	F	V
V	V	F
F	V	V
F	F	F

(b) $(p\veebar q)\veebar r$.

(p	⊻	q)	⊻	r
V	F	V	V	V
V	F	V	F	F
V	V	F	F	V
V	V	F	V	F
F	V	V	F	V
F	V	V	V	F
F	F	F	V	V
F	F	F	F	F

(c) $p\veebar(q \Rightarrow r)$.

p	⊻	(q	=>	r)
V	F	V	V	V
V	V	V	F	F
V	F	F	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	V	F	V	F

(d) Demostrar que $p\veebar q \equiv (p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$.

(p	∨	q)	∧	~	(p	∧	q)
V	V	V	F	F	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	F
F	V	V	V	V	F	F	V
F	F	F	F	V	F	F	F

(e) Simplificar $p\veebar p$.

p	⊻	p
V	F	V
F	F	F

$p \veebar p \equiv F$

∴ Se simplifica a F

(f) Es$(p\veebar q)\veebar r \equiv p\veebar(q \vee r)$? Demostrar o dar un contraejemplo.

(p	⊻	q)	⊻	r
V	F	V	V	V
V	F	V	F	F
V	V	F	F	V
V	V	F	V	F
F	V	V	F	V
F	V	V	V	F
F	F	F	V	V
F	F	F	F	F

p	⊻	(q	∨	r)
V	F	V	V	V
V	F	V	V	F
V	F	F	V	V
V	V	F	F	F
F	V	V	V	V
F	V	V	V	F
F	V	F	V	V
F	F	F	F	F

∴ Demostramos que tienen los mismos valores de verdad por lo que son equivalentes

(g) ¿Será $p \wedge (q\veebar r)$ es equivalente a $(p \wedge q)\veebar\ (p \wedge r)$? Justifique su respuesta.

p	∧	(q	⊻	r)
V	F	V	F	V
V	V	V	V	F
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	F	V	F	V
F	F	V	V	F
F	F	F	V	V
F	F	F	F	F

(p	∧	q)	⊻	(p	∧	r)
V	V	V	F	V	V	V
V	V	V	V	V	F	F
V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	V
F	F	V	F	F	F	F
F	F	F	F	F	F	V
F	F	F	F	F	F	F

∴ $p \wedge (q \veebar r)$ es equivalente $(p \wedge q) \veebar (p \wedge r)$ por que tiene 2 valores de verdad; por lo que lo hace equivalente

Problema 42. Sea $x \in \mathbb{R}$. Encuentre la negación de las siguientes proposiciones:

(a) $x \neq 2$.

$\therefore x = 2$

(b) $|x| \leq 2$.

$\therefore |x| > 2$

(c) $2 \leq |x| < 4$.

$\therefore 2 > |x| \geqslant 4$

(d) $2 \leq x < 3$.

$\therefore 2 > x \geqslant 3$

Problema 44. Sea t una tautología y c una contradicción. Demostrar que las siguientes afirmaciones son tautologías:

(a) $p \Rightarrow p \wedge t$.

$p \Rightarrow p \wedge t \qquad t = V$

$p \Rightarrow p \wedge V$

$p \Rightarrow p$

$\sim p \vee p$

$V \quad \therefore$ es una tautologia

(b) $c \Rightarrow p$.

$c \Rightarrow p \qquad c = F$

$F \Rightarrow p$

$\sim(F) \vee p$

$V \vee p$

$V \quad \therefore$ es una tautologia

(c) $p \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow p)$.

V V V V V

F F F V F

$\therefore$ No es una tautologia

(d) $c \Leftrightarrow (p \wedge \sim p)$.

$c \Leftrightarrow (p \wedge \sim p) \qquad c = F$

$F \Leftrightarrow (F)$

$(F \Rightarrow F) \wedge (F \Rightarrow F)$

$(\sim(F) \vee F) \wedge (\sim(F) \vee (F))$

$(V \vee F) \wedge (V \vee F)$

$V \quad \wedge \quad V$

$V \quad \therefore$ Si es una tautologia

Problema 46. Si p y q son proposiciones verdaderas y r es falsa, determine el valor de verdad de:

(a) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$.

$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$

$V \Rightarrow (V \Rightarrow F)$

$V \Rightarrow (\sim(V) \vee F)$

$V \Rightarrow (F \vee F)$

$V \Rightarrow F$

$\sim(V) \vee F$

$F \vee F$

$\therefore F$

(b) $[(\sim p \vee q) \wedge (r \vee \sim p)] \Leftrightarrow q$.

$[(\sim V \vee V) \wedge (F \vee \sim V)] \Leftrightarrow V$

$[(F \vee V) \wedge (F \vee F)] \Leftrightarrow V$

$[(V) \wedge (F)] \Leftrightarrow V$

$F \Leftrightarrow V$

$\therefore F$

(c) $[(\sim p \wedge q) \vee r] \Rightarrow q$.

$[(\sim V \wedge V) \vee F] \Rightarrow V$

$[(F \wedge V) \vee F] \Rightarrow V$

$[(F) \vee F] \Rightarrow V$

$[F] \Rightarrow V$

$\therefore V$

(d) $[(p \Leftrightarrow \sim q) \Rightarrow \sim r] \vee (\sim q \Leftrightarrow r)$.

$[(V \Leftrightarrow \sim V) \Rightarrow \sim F] \vee (\sim V \Leftrightarrow F)$

$[(V \Leftrightarrow F) \Rightarrow V] \vee (F \Leftrightarrow F)$

$[F \Rightarrow V] \vee V$

$V \vee V$

$\therefore V$

Problema 48. Se sabe que la proposición:

$$[(p \vee q) \wedge p] \Rightarrow [(r \vee q) \Leftrightarrow p]$$

es falsa. Determinar el valor de verdad de la proposición:

$$[(p \vee \sim q) \Rightarrow (r \wedge p)] \Leftrightarrow [\sim q \wedge (r \vee p)].$$

Daremos valores : $p = V$; $q = F$; $r = F$

$[(p \vee q) \wedge p] \Rightarrow [(r \vee q) \Leftrightarrow p]$ Sabiendo que esta proposicion es Falsa llegamos al resultado F

$[(V \vee F) \wedge V] \Rightarrow [(F \vee F) \Leftrightarrow V]$

$[V \wedge V] \Rightarrow [F \Leftrightarrow V]$

$V \Rightarrow F$

F

Dado que le asignamos valores veridicos podemos afirmar que esta bien

$[(p \vee \sim q) \Rightarrow (r \wedge p)] \Leftrightarrow [\sim q \wedge (r \vee p)]$

$[(V \vee \sim F) \Rightarrow (F \wedge V)] \Leftrightarrow [\sim F \wedge (F \vee V)]$

$[(V \vee V) \Rightarrow (F \vee V)] \Leftrightarrow [V \wedge (F \vee V)]$

$[(V) \Rightarrow (V)] \Leftrightarrow [V \wedge V]$

$V \Leftrightarrow V$

$\therefore$ V

Problema 50. Mediante el álgebra de proposiciones, demuestre que:

(a) $(p \vee q) \wedge \sim p \equiv \sim p \wedge q$.

$(p \vee q) \wedge \sim p$

$\sim (p \vee q) \vee \sim p$ L. Morgan

$(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim p$

$\sim p \vee (\sim p \wedge \sim q)$ L. Absorción

$(\sim p \wedge \sim q) \vee \sim p$ Conmutativa

Demostramos que

$\therefore (p \vee q) \wedge \sim p \equiv \sim p \wedge q$

(b) $\sim (p \vee q) \vee (\sim p \wedge q) \equiv \sim p$.

$\sim p \wedge \sim q \vee (\sim p \wedge q)$ Morgan

$(\sim p \vee \sim p) \wedge (\sim p \vee q)$ L. Distributiva

$\sim p \wedge (\sim p \vee q)$ Simplificando

$\sim p$ L. Absorción

Demostramos que

$\therefore \sim p \equiv \sim p$

Problema 52. Construya demostraciones formales de los siguientes teoremas:

(a)

$$\begin{array}{ll} (1) & p \Rightarrow q \\ (2) & \sim p \Rightarrow r \\ \hline \therefore & q \vee r \end{array}$$

3 $\sim q \Rightarrow \sim p$ 2 Transpo

4 $\sim q \Rightarrow r$ 3 y 2 S. Hip.

5 $q \vee r$ 4 L. Equiva

(b)

$$\begin{array}{ll} (1) & \sim (r \wedge s) \\ (2) & \sim s \Rightarrow \sim q \\ \hline \therefore & r \Rightarrow \sim q \end{array}$$

3 $\sim r \vee \sim s$ 1

4 $r \Rightarrow \sim s$ 3 L. Equi

5 $r \Rightarrow \sim q$ 4 y 2 Silogismo hipotetico

(c)

$$\begin{array}{ll}(1) & p \wedge t \\ (2) & p \Rightarrow q \\ (3) & q \Rightarrow (r \wedge s) \\ (4) & \sim r \vee \sim t \vee w \\ \hline \therefore & w\end{array}$$

5	$\sim (r \wedge t) \vee w$	4	
6	t	1	simp
7	p	1	simp
8	$\sim q \vee (r \wedge s)$	3	L. Equi
9	q	2 y 7	P.P
10	$r \wedge s$	8 y 9	M.T.P
11	r	10	simpli
12	$r \wedge t$	6 y 11	Adjunción
13	w	5 y 12	M.T.P

Problema 54. Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3/2\}$ y $B = \{3, 4, 3/2\}$, determinar el valor de verdad de:

(a) $\exists x \in \mathbb{N} : x \in A \wedge x \in B$.

$A = \{1, 2, 3/2\}$
$B = \{3, 4, 3/2\}$

el numero $\frac{3}{2}$ estan en ambos conjuntos de A y B

$\mathbb{N}: 1, 2, 3, 4$ pero $\frac{3}{2}$ no existe en los $\mathbb{N}$

$\therefore \exists x \in \mathbb{N} : x \in A \wedge x \in B$ es Falsa

(b) $\exists x \in \mathbb{Q} : x \in A \wedge x \in B$.

$A = \{1, 2, 3/2\}$
$B = \{3, 4, 3/2\}$

existe el $\frac{3}{2}$ que si existe en los $\mathbb{Q}$ por que se puede expresar en fracción

$\therefore \exists x \in \mathbb{Q} : x \in A \wedge x \in B$ es verdadero y que pertenece a ambos conjuntos A y B el numero $\frac{3}{2}$

Problema 56. Determinar la negación de los siguientes predicados:

(a) $\exists x : P(x) \vee \sim Q(x)$.

$\sim(\exists x : P(x) \vee \sim Q(x))$
$\forall x : \sim P(x) \wedge \sim(\sim Q(x))$
$\forall x : \sim P(x) \wedge Q(x)$

$\therefore$ Los valores de x, $P(x)$ es Falso y $Q(x)$ es verdadero al mismo tiempo.

(b) $\forall x : P(x) \Rightarrow Q(x)$.

$\sim(\forall x : P(x) \Rightarrow Q(x))$
$\exists x : \sim(P(x) \Rightarrow Q(x))$
$\exists x : P(x) \wedge \sim Q(x)$

$\therefore$ hay al menos un valor de X para el cual la implicación $P(x) \Rightarrow Q(x)$ no es verdadera.

(c) $\forall x, \forall y : P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y$.

$\sim(\forall x, \forall y : P(x) \wedge P(y) \Rightarrow x = y)$
$\exists x, \exists y : P(x) \wedge P(y) \wedge x \neq y$

$\therefore$ que existe al menos un par de valores distintos para los cuales P es verdadero y x no es igual a y, lo que implica que la igualdad $x = y$ no se cumple para todos los pares de valores