FUNCIONES

1. Determina si cada una de las siguientes relaciones es una función con dominio $\{1,2,3,4\}$. Explicar la respuesta.

(a) $f = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(3,3)\}$

En este caso "f" no es una funcion ya que por teoria un elemento del dominio es primer componente de un par y sale de uno y como podemos apreciar 3 del dominio este en dos pares distintos $(2,1)$ y $(3,3)$

(b) $f = \{(1,2),(2,3),(4,2)\}$

En esta funcion podemos decir que $\forall a \in$ Dominio tiene una unica imagen en el codominio entonces $f : \{1,2,3,4\} \Rightarrow$ Codominio

(c) $f = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}$

En Esta funciona podemos decir que $\forall a \in$ Dominio tiene una unica imagen es el codominio entonces $f : \{1,2,3,4\} \Rightarrow$ codominio

(d) $f = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$

Sucede lo mismo que en el ejercicio "a)" 1 tenemos la imagen

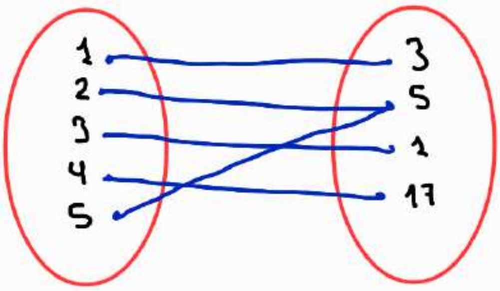
(e) $f = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$

En esto caso esta Función tiene un dominio en $\{1,2,3,4\}$

4. Con el conjunto $S = \{1,2,3,4,5\}$ se define $f : S \to \mathbb{Z}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{, si } x \text{ es par,} \\ 2x-5 & \text{, si } x \text{ es impar.} \end{cases}$$

Expresar f como un subconjunto de $S \times \mathbb{Z}$. ¿Será f uno-uno?



es do $\Leftrightarrow \forall x' \, \forall x'' \in S : x' \neq x'' \Rightarrow f(x') \neq f(x'')$
uno a uno

Contrareciproco $\Leftrightarrow \forall x' \, x'' \in S : f(x') = f(x'') \Rightarrow x' = x''$

Para $x' = 2k_1 \quad x'' = 2k_2 + 1$

$$f(x') = f(x'')$$
$$x^2 + 1 = 2x - 5$$
$$(2k)^2 + 1 = 2(2k_2 + 1) - 5$$
$$4k_1^2 + 1 = 4k_2 + 2 - 5$$
$$4k_1 2 + 1 = 4k_2 - 3$$

$$4k_1^2 + 1 \neq 4k_2 - 3$$

Para $x = 2k$

$$x^2 + 1 = 2x - 5$$

$$(2k_1)^2 + 1 = 2(2k_2) - 5$$

$$4k_1^2 + 1 \neq 4k_2 - 5$$

Para $x = 2k + 1$

$$x + 1 = 2x - 5$$

$$(2k+1)^2 + 1 = 2(2k_2 + 1) - 5$$

$$4k_1^2 + 4k_1 + 1 + 1 = 4k_2 + 1 - 5$$

$$4(k_1^2 + k_1) + 2 = 4k_2 - 4$$

$$4(k_1^2 + k_1) + 2 \neq 4(k_2 - 1)$$

$\therefore$ No es una función de uno a uno

5. La adición y multiplicación de números reales son las funciones adi, mul : $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde

$$\text{adi}(x, y) = x + y; \qquad \text{mul}(x, y) = xy$$

(a) ¿Será adi uno-uno? ¿Será sobre?

Suma de uno a uno $\Leftrightarrow \forall (x_1, y_1)(x_2, y_2) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : \text{adi}(x_1, y_1) = \text{adi}(x_2, y_2) \Rightarrow (x_1\, y_1) = (x_2, y_2)$

$: \text{multi}(x_1, y_1) = \text{mul}(x_2, y_2) \Rightarrow (x_1\, y_1) = (x_2\, y_2)$

$$\text{adi}(x_1, y_1) = \text{adi}(x_2, y_2)$$

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \quad (1) \Rightarrow x_1 = x_2 + y_2 - y_1 \quad (3)$$

$$\text{mul}(x_1, y_1) = \text{mul}(x_2, y_1)$$

$$x_1\, y_1 = x_2\, y_2 \quad (2) \Rightarrow x_1 = \frac{x_2\, y_2}{y_1}$$

Reemplazamos (4) en (2)

$$\frac{x_2\, y_2}{y_1} + y_1 = x_2 + y_2$$

$$x_2\, y_2 = (x_2 + y_2 - y_1)\, y_1$$

$$x_2\, y_2 = x_2\, y_1 + y_2\, y_1 - y_1^2$$

$$0 = x_2\, y_1 + y_2\, y_1 - y_1^2 - x_2\, y_2$$

$$0 = x_2(y_1 - y_2) + y_1(y_2 - y_1)$$

$$0 = x_2(y_1 - y_2) - y_1(y_1 - y_2)$$

$$0 = (y_1 - y_2)(x_2 - y_1)$$

$$y_1 = x_2 \quad (6)$$

Reemplazamos 6 en (1)

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2$$

$$x_1 + \cancel{y_1} = \cancel{y_1} + y_2$$

$$x_1 = y_2 \quad (7)$$

$\Rightarrow$

Reemplazamos $y_2 = x_1$

$$x_1 + y_1 = x_2 + y_2$$

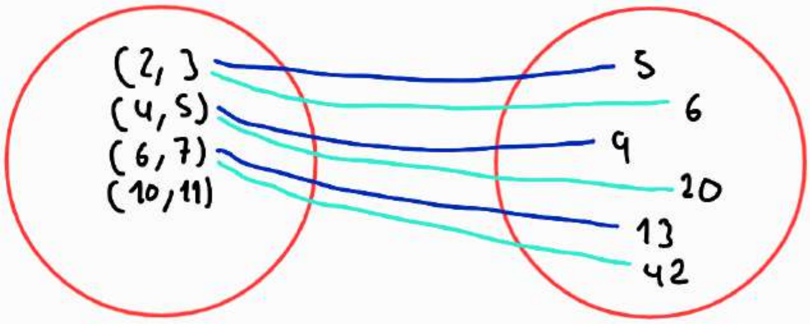
$$x_1 + y_1 = y_1 + x_1$$

También

$$x_1\, y_1 = y_1\, x_1$$

$\therefore$ Si es una función de 1 a 1 adi $\wedge$ mul

(b) ¿Será mul uno-uno? ¿Será sobre?



Como conocimiento tenemos que $\forall a,b \in \mathbb{R}$, $ab \in \mathbb{R}$

$\forall a,b \in \mathbb{R}$, $a+b \in \mathbb{R}$

=> Como sabemos esto adi (x_1, y_1) tiene imagen en los $\mathbb{R}$ tambien mul $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}$ => nuestras imagenes en $\mathbb{R}$ siempre tendran un antecedente

6. Se define $g : \mathbb{Z} \to B$ por $g(x) = |x| + 1$. Determinar sí g es uno-uno o sobre en cada uno de los siguientes casos.

(a) B es el conjunto $\mathbb{Z}$.

$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

g es uno a uno $\Leftrightarrow g(x_1) = g(x_1) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$g(x_1) = g(x_2)$$

$$|x_1| + 1 = |x_2| + 2 \quad // ()^2$$

$$|x_1|^2 = |x_2|^2$$

$$x_1^2 = x_2^2$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$$

$$x_1 - x_2 = 0 \quad \wedge \quad x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 = x_2 \qquad x_1 = -x_2$$

∴ Como tenemos dos resultados la Funcion no e inyectiva o uno a uno.

Analizemos

$|x| + 1$ = no es invectiva ya que por ej:

$x = 2$ y $x = -2$ nos daria 3 => tenemos de $(-2, 3)$ $(2, 3)$ ya no e uno a uno

(b) B es el conjunto $\mathbb{N}$.

$g: \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$

es uno a uno $\Leftrightarrow g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$g(x_1) = g(x_2)$$

$$|x_1| + 1 = |x_2| + 1$$

$$|x_1| = |x_2|$$

$$|x_1|^2 = |x_2|$$

$$x_1^2 = x_2^2$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$$

$$x_1 - x_2 = 0 \quad \wedge \quad x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 = x_2 \quad \wedge \quad x_1 = -x_2$$

Analizamos

$\therefore$ No es 1 a 1 ya que como en el anterior caso tenemos dos respuestas así
2 relaciones de $(-3, 4)$ $(3, 4)$

9. Se define $g : A \to A$ por $g(x) = 3x^2 + 14x - 51$. Determinar sí g es uno-uno o sobre en cada uno de los siguientes casos.

(a) A es el conjunto $\mathbb{Z}$.

$g: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

g es uno a uno $\Leftrightarrow g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$3x_1^2 + 14x_1 - \cancel{51} = 3x_2^2 + 14x_2 - \cancel{51} \quad //(\ )'$$

$$(3x_1^2 + 14x_1)' = (3x_2^2 + 14x_2)'$$

$$6x_1 + \cancel{14}' = 6x_2 + \cancel{14}$$

$$\cancel{6}x_1 = \cancel{6}x_2$$

$$x_1 = x_2$$

$\therefore$ Es uno a uno

(b) A es el conjunto $\mathbb{R}$.

A es el conjunto IR

uno a uno $\Longleftrightarrow g(x_1) - g(x_2) \Rightarrow x_1 - x_2$

$$3x^2_1 + 14x\cancel{-52} = 3x^2_1 + 14x_2 \cancel{-52}$$

$$3x^2_1 + 14x = 3x^2_1 + 14x_2 \qquad // (\ )'$$

$$(3x^2_1 + 14x)' = (3x^2_1 + 14x_2)'$$

$$6x_1 + \cancel{14} = 6x_2 + \cancel{14}$$

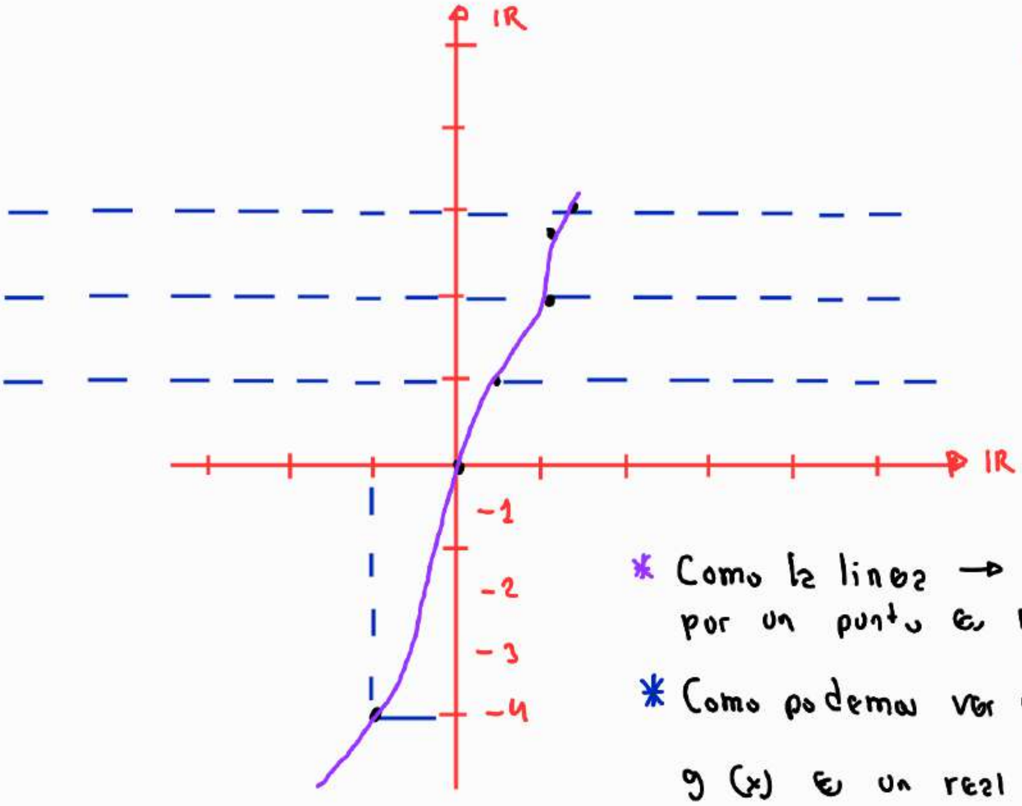
$$6x_1 = 6x_2$$

$$x_1 = x_2 \; //$$

$\therefore$ Es uno a uno

13. Se define la función:

(a) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) = 3x^3 + x$. Gráficar g para determinar sí la función es uno-uno y/o sobre.

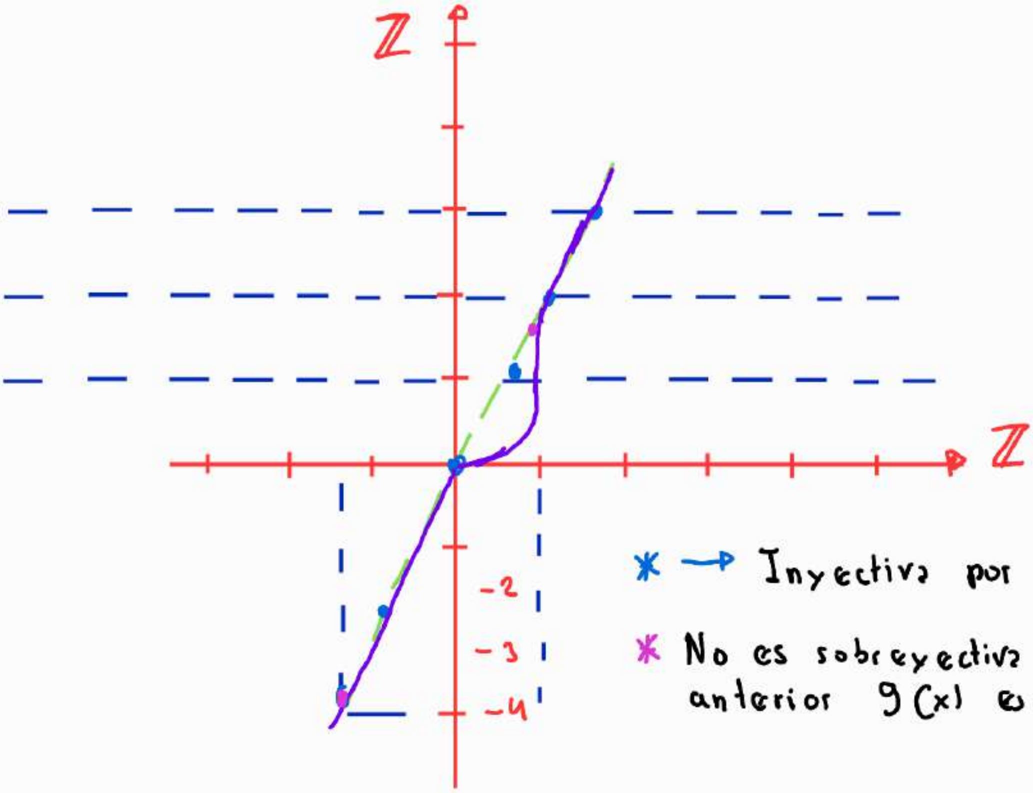


X	g(x)
-1	-4
0	0
1	4
2	26
3	84

* Como la linea → pasa por un punto es inyectiva

* Como podemos ver en la tabla g(x) es un real par no toma en cuenta a los impares asi que no es sobreyectiva

(b) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ por $g(x) = 3x^3 + x$. Gráficar g para determinar sí la función es uno-uno y/o sobre.



$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

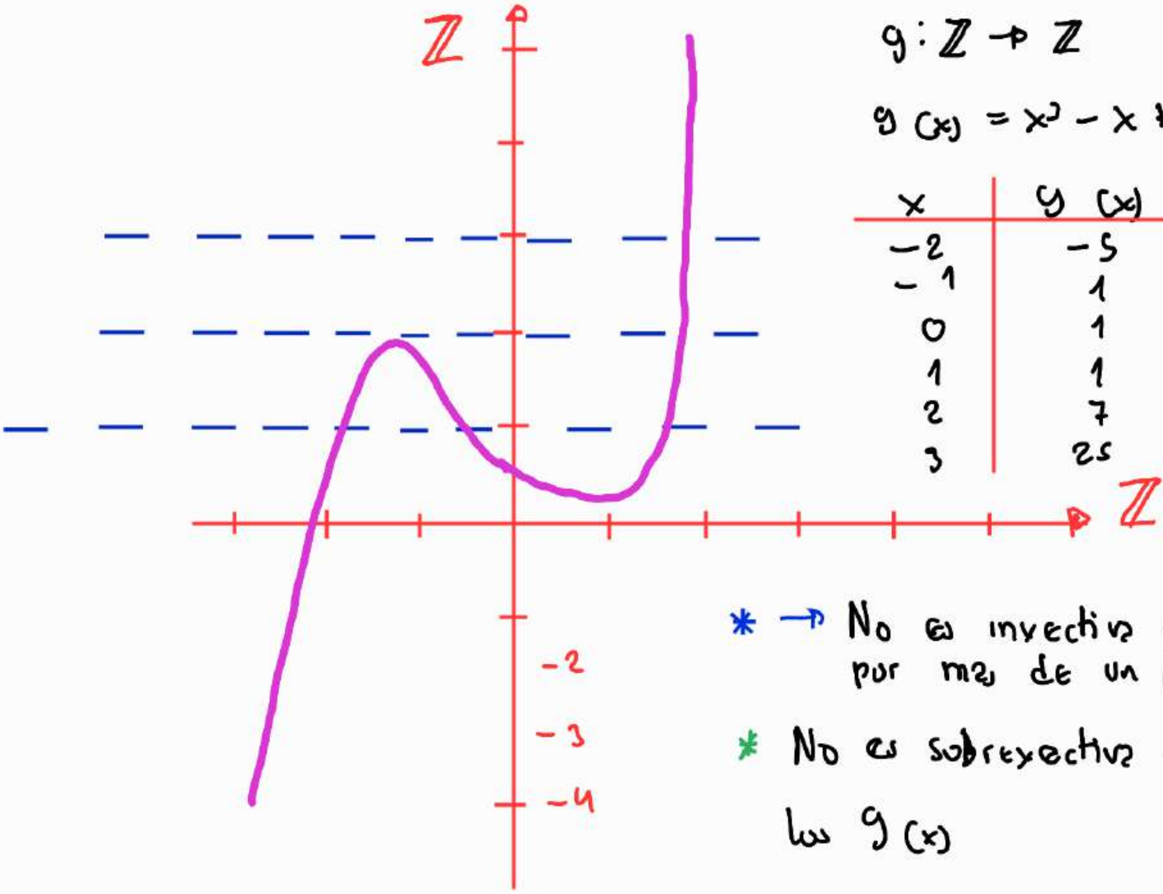
$g(x) = 3x + x$

x	$g(x)$
-1	-4
0	0
1	4

* → Inyectiva por que pasa por un

* No es sobreyectiva por como en el caso anterior $g(x)$ es par

(c) Repetir (b) para la función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $g(x) = x^3 - x + 1$.



$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$g(x) = x^3 - x + 1$

x	$g(x)$
-2	-5
-1	1
0	1
1	1
2	7
3	25

* → No es invectiva ya que pasa por mas de un punto

* No es sobreyectiva por que solo los $g(x)$

Inversas y composición

23. Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, encontrar la inversa de cada una de las siguientes funciones $f : A \to A$.

(a) $f = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,1)\}$

$F = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,1)\}$

$F^{-} = \{(2,1), (3,2), (4,3), (3,4), (1,5)\}$

(b) $f = \{(1,2), (2,4), (3,3), (4,1), (5,5)\}$

$F = \{(1,2), (2,4), (3,3), (4,1), (5,5)\}$

$F^{-} = \{(2,1), (4,2), (3,3), (1,4), (5,5)\}$

(c) $f = \{(1,1), (2,4), (3,3), (4,2), (5,5)\}$

$F = \{(1,1), (2,4), (3,3), (4,2), (5,5)\}$

$F^{-} = \{(1,1), (4,2), (3,3), (2,4), (5,5)\}$

25. Mostrar que cada una de las siguientes funciones $f : A \to \mathbb{R}$ es uno-uno. Encontrar el rango de cada función y una adecuada inversa.

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 4\}$, $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-4}$

uno a uno $\Leftrightarrow \forall x' \in A \; \forall x'' \in A;\; f(x') = f(x'') \Rightarrow x$

Rango

$(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$

$\mathbb{R} - \{4\}$

$F(x_1) = f(x_2)$

$$\cancel{1+}\frac{1}{x_1-4} = \cancel{1+}\frac{1}{x_2-4}$$

$$\frac{1}{x_1-4} = \frac{1}{x_2-4}$$

$$x_2 - 4 = x_1 - 4$$

$$x_2 = x_1$$

∴ Es uno a uno o es inyectivo

Inversa

$$y = 1 + \frac{1}{x-4}$$

$$x = 1 + \frac{1}{y-4}$$

$$x - 1 = \frac{1}{y-4}$$

$$(x-1)(y-4) = 1$$

$$xy - 4x - y + 4 = 1$$

$$xy - 4x - y + 3 = 0$$

(c) $A = \{x \in \mathbb{R} | \, x \neq -\frac{1}{2}\}$, $f(x) = \dfrac{3x}{2x+1}$

Rango

$(-\infty, -\frac{1}{2}) \cup (-\frac{1}{2}, +\infty) \Rightarrow \mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$

Inyectiva

Es inyectiva $\Leftrightarrow \forall x_1 \; 2x \in A : f(x_1) = f(x_1) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\frac{3x1}{2x_1+1} = \frac{3x2}{2x_2+1}$$

$$(2x_2+1)(3x_1) = 3x_2(2x_1+1)$$

$$6x_1x_2 + 3x_1 = 6x_1 \, x_2 + 3x_2$$

$$\cancel{3}(2X_1X_2 + X_1) = \cancel{3}(2x_1 \, x_2 + x_2)$$

$$2x_1 \, x_2 + X_1 = 2x \, x_2 + x_2$$

$$2x_1 \, x_2 - 2x_1 \, x_2 = x_2 - 2x$$

$\underline{x_1 = x_2}$ $\therefore$ Es inyectiva

Inversa

$$f(x) = \frac{3x}{2x+1}$$

$$y = \frac{3x}{2x+1}$$

$$x = \frac{3y}{2y+1}$$

$$x(2y+1) = 3y$$

$$2xy + x = 3y$$

$$2xy - 3y = -x$$

$$y(2x-3) = -x$$

$$y = -\frac{x}{2x-3}$$

$$y = \frac{x}{3-2x}$$

(d) $A = \{x \in \mathbb{R} | \, x \neq -3\}$, $f(x) = \dfrac{x-3}{x+3}$

Rango

$(-\infty, -3) \cup (-3, \infty)$

$\mathbb{R} - \{-3\}$

Inyectividad

$f(x_1) = f(x_1)$

$\dfrac{x_1 - 3}{x_1 + 3} = \dfrac{x_2 - 3}{x_2 + 3}$

$(x_2 + 3)(x_1 - 3) = (x_2 - 3)(x_1 + 3)$

$x_1 x_2 - 3x_2 + 3x_1 - 9 = x_1 x_2 + 3x_2 - 3x_1 - 9$

$\cancel{x_1} x_2 - 3\cancel{x_2} + \cancel{3}x_1 - \cancel{9} - \cancel{x_1} x_2 - \cancel{3x_2} + \cancel{3}x_2 + \cancel{9} = 0$

$-6x_2 + 6x_1 = 0$

$6x_1 = \cancel{6}x_2$

$x_1 = x_2$ //

Inversa

$f(x) = \dfrac{x-3}{x+3}$

$y = \dfrac{x-3}{x+3}$

$x = \dfrac{y-3}{y+3}$

$xy + 3x = y - 3$

$xy - y = -3 - 3x$

$y(x-1) = -3(1+x)$

$y = -\dfrac{3(x+1)}{x-1}$ //