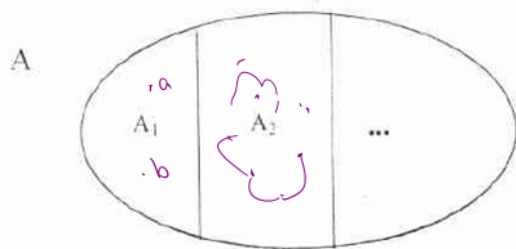


Teorema Toda partición de un conjunto A permite definir en éste una relación de equivalencia " \sim " en la que las clases de equivalencia son los bloques de la partición.



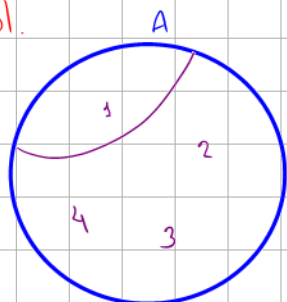
Si $\{A_1, A_2, \dots\}$ es una partición de A , entonces según el teorema cada A_i es una clase de equivalencia de A . En donde la relación de equivalencia se define como sigue:

$$a \sim b \Leftrightarrow a \text{ y } b \text{ son miembros del mismo bloque}$$

Ejm. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y sea $\{\{1\}, \{2, 3, 4\}\}$ una partición de A .

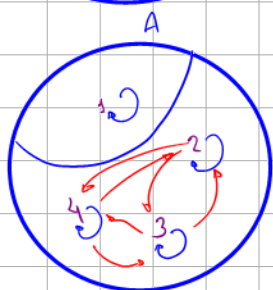
Determine la relación de equivalencia \sim en A .

Sol.



Luego

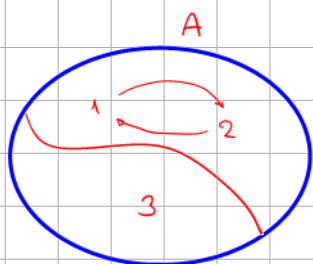
$$\sim = \{(1, 1) (2, 2) (3, 3) (4, 4) (2, 3) (3, 2) (2, 4) (4, 2) (3, 4) (4, 3)\}$$



Así \sim es una rel. de equivalencia.

$$x R y \Leftrightarrow x = y \vee x + y = 3$$

Ej.



$$\sim = \{(1, 1) (2, 2) (3, 3) (4, 4) (1, 2) (2, 1)\}$$

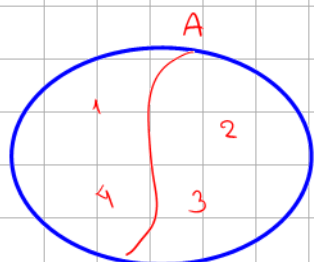
$$1 \sim 1 \wedge 1 \sim 2 \Rightarrow 1 \sim 2$$

$$2 \sim 2 \wedge 2 \sim 1 \Rightarrow 2 \sim 1$$

$$1 \sim 2 \wedge 2 \sim 1 \Rightarrow 1 \sim 1$$

$$2 \sim 1 \wedge 1 \sim 2 \Rightarrow 2 \sim 2$$

$$\left. \begin{array}{l} 3 \sim 3 \Rightarrow 3 \sim 3 \\ 1 \sim 1 \Rightarrow 1 \sim 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \checkmark \\ \checkmark \end{array}$$



$$\sim = \{(1, 1) (2, 2) (3, 3) (4, 4) (2, 3) (3, 2) (1, 4) (4, 1)\}$$

$$A = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$x R y \Leftrightarrow x = y \vee x + y = 5$$

Ejm. En \mathbb{Z} se define la rel. de equiv. \sim mediante

$$x \sim y \Leftrightarrow 5 \mid x-y \quad (5 \text{ divide a } x-y \text{ ó } x-y = 5 \cdot k, k \in \mathbb{Z})$$

a) Determine las clases de equivalencia

b) Determine el conjunto de índices

$$K_a = \{y \in \mathbb{Z} : a \sim y\}$$

c) Determine el conjunto cociente.

$$5 \mid a-y$$

Sol. $R = \{(0,0)(1,1)(2,2) \dots (-1,-1)(-2,-2)\}$

Reflexiva: $x R x$ porque $5 \mid x-x$
 $5 \mid 0 \quad \checkmark$

Simétrica: $\underline{x R y} \Leftrightarrow 5 \mid x-y \quad x-y = -(y-x)$

$$\Leftrightarrow 5 \mid -(y-x) \quad \begin{array}{l} 5 \mid -10 \\ 5 \mid 10 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow 5 \mid y-x \Leftrightarrow y R x$$

Transitividad $x R y \wedge y R z \Leftrightarrow 5 \mid \underline{x-y} \wedge 5 \mid \underline{y-z}$

$$a/b \wedge a/c \Leftrightarrow 5 \mid (x-y) + (y-z)$$

$$a/b+c \Leftrightarrow 5 \mid x-z$$

$$\Leftrightarrow x R z$$

Así R es de equivalencia.

Luego $\sim = \{(x,y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : 5 \mid x-y\}$

Así x es equivalente a y si 5 divide a $x-y$

Entonces, las clases de equivalencia serán:

$$K_0 = \{ \dots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, \dots \} = K_5 = K_{10}$$

$$K_1 = \{ \dots, -9, -4, 1, 6, 11, 16, 21, \dots \} = K_6 = K_{11}$$

$$K_2 = \{ \dots, -8, -3, 2, 7, 12, 17, 22, \dots \} = K_7 = K_{12}$$

$$K_3 = \{ \dots, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \dots \} = K_8$$

$$K_4 = \{ \dots, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \dots \} = K_9$$

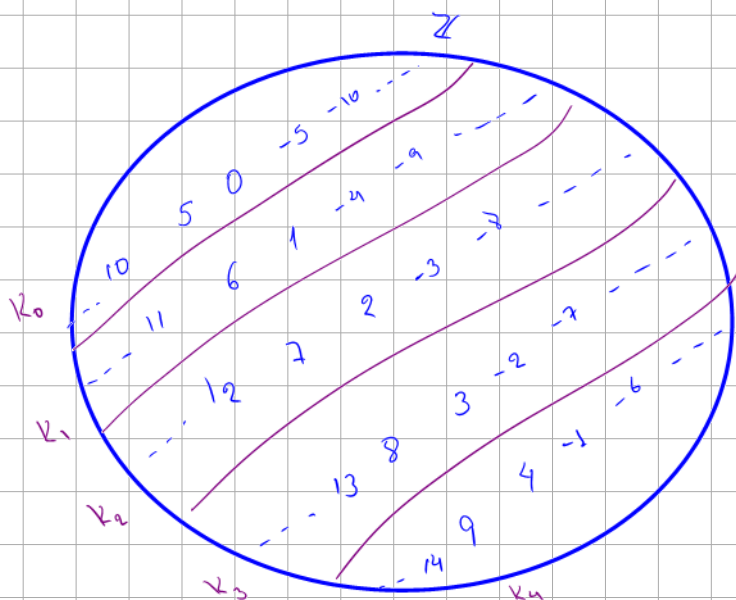
$$K_5 = \{ \dots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, \dots \} = K_0$$

Así se tiene 5 clases distintas.

$$K_0, K_1, K_2, K_3, K_4$$

b) $I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

c) $\mathbb{Z}/\sim = \{K_0, K_1, K_2, K_3, K_4\}$



21

RELACIONES DE ORDEN

Cuando queremos referirnos a un orden cualquiera, usaremos el término genérico "preceder"

$$x R y \Leftrightarrow x \text{ precede a } y$$

se dice que es de orden amplio o estricto y en cada caso, es de orden parcial o total.

