

90. Determinar el retículo que forman los subgrupos de \mathbb{Z}_{p^2q} , donde p y q son primos diferentes.

Dado que p y q son primos

$$\mathbb{Z}_{p^2q} \cong \mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_q$$

Subgrupos \mathbb{Z}_{p^2} y \mathbb{Z}_q

\mathbb{Z}_{p^k} donde $0 \leq k \leq 2$

Tenemos los siguientes subgrupos

1. $\mathbb{Z}_{p^0} = \{0\}$

2. $\mathbb{Z}_{p^1} = \{0, p, 2p, \dots, (p-1)p\}$

3. $\mathbb{Z}_{p^2} = \{0, 1, 2, \dots, p^2-1\}$

Los subgrupos que son de la forma \mathbb{Z}_{q^k} donde $0 \leq k \leq 1$

1. $\mathbb{Z}_{q^0} = \{0\}$

2. $\mathbb{Z}_{q^1} = \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$

Para encontrar los subgrupos de $\mathbb{Z}_{p^2q} \Rightarrow \mathbb{Z}_{p^2}$ y \mathbb{Z}_q

1. $\mathbb{Z}_{p^0} \times \mathbb{Z}_{q^0} = \{0\}$

2. $\mathbb{Z}_{p^1} \times \mathbb{Z}_{q^0} = \{0, p, 2p, \dots, (p-1)p\}$

3. $\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^0} = \{0, 1, 2, \dots, p^2-1\}$

4. $\mathbb{Z}_{p^0} \times \mathbb{Z}_{q^1} = \{0, q, 2q, \dots, (q-1)q\}$

5. $\mathbb{Z}_{p^1} \times \mathbb{Z}_{q^1} = \{0, p, 2p, \dots, (p-1)p, q, 2q, \dots, (q-1)q, p+q, p+2q, \dots, p+(q-1)q, 2p+q, 2p+2q, \dots, (p-1)p+(q-1)q\}$

6. $\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^1} = \{0, 1, 2, \dots, p^2-1, q, 2q, \dots, (q-1)q, p+q, p+2q, \dots, p^2-1+(q-1)q\}$

\therefore Estos son los grupos que forman el retículo de \mathbb{Z}_{p^2q}

96. Probar que un grupo infinito debe tener un número infinito de subgrupos.

Supongamos un grupo infinito G . Supongamos por contradicción, que G tiene un número finito subgrupos. Considerando un grupo infinito G .

$g \neq e$ (el elemento neutro del grupo).

$$g^k \in G \Rightarrow g^k \neq g^j \forall j \neq k$$

$g^k = g^j \Rightarrow G$ sería un grupo finito la cual contradice la suposición inicial de G infinito.

Conjunto $\{g, g^2, g^3, \dots\}$ es infinito

el subgrupo $\langle g \rangle = \{g^0, g^1, g^2, \dots\}$

el subgrupo $\langle g^2 \rangle = \{g^0, g^2, g^4, \dots\}$

Conjunto $\{g, g^2, g^3, \dots\}$

\therefore Un grupo infinito debe tener un número infinito de subgrupos.