90. Determinar el retículo que forman los subgrupos de $\mathbb{Z}_{p^2q}$, donde p y q son primos diferentes.

dado que p y q son primos

$\mathbb{Z}_{p^2q} \cong \mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_q$

Subgrupos $\mathbb{Z}_{p^2}$ y $\mathbb{Z}_q$

$\mathbb{Z}_{p^K}$ donde $0 \leq K \leq 2$

Tenemos los siguientes subgrupos

1. $Z_{p^0} = \{0\}$
2. $Z_{p^1} = \{0, p, 2p, \dots, (p-1)p\}$
3. $Z_{p^2} = \{0, 1, 2, \dots, p^2-1\}$

Los subgrupos que son de la forma $\mathbb{Z}_{q^K}$ donde $0 \leq K \leq 1$

1. $Z_{q^0} = \{0\}$
2. $Z_{q^1} = \{0, 1, 2, \dots, q-1\}$

Para encontrar los subgrupos de $\mathbb{Z}_{p^2q} \Rightarrow \mathbb{Z}_{p^2}$ y $\mathbb{Z}_q$

1. $\mathbb{Z}_{p^0} \times \mathbb{Z}_{q^0} = \{0\}$
2. $\mathbb{Z}_{p^1} \times \mathbb{Z}_{q^0} = \{0, p, 2p, \dots, (p-1)p\}$
3. $\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^0} = \{0, 1, 2, \dots, p^2-1\}$
4. $\mathbb{Z}_{p^0} \times \mathbb{Z}_{q^1} = \{0, q, 2q, \dots, (q-1)q\}$
5. $\mathbb{Z}_{p^1} \times \mathbb{Z}_{q^1} = \{0, p, 2p, \dots, (p-1)p, q, 2q, \dots, (q-1)q, p+q, p+2q, \dots, p+(q-1)q, 2p+q, 2p+2q, \dots, (p-1)p+(q-1)q\}$
6. $\mathbb{Z}_{p^2} \times \mathbb{Z}_{q^1} = \{0, 1, 2, \dots, p^2-1, q, 2q, \dots, (q-1)q, p+q, p+2q, \dots, p^2-1+(q-1)q\}$

$\therefore$ Estos son los grupos que formen el reticulo de Z_{p^2q}

96. Probar que un grupo infinito debe tener un número infinito de subgrupos.

Supongamos un grupo infinito G. Supongamos por contradicción, que G tiene un numero finito subgrupos. Considerando un grupo infinito G.

$g \neq e$ (el elemento neutro del grupo).

$g^K G \Rightarrow g^K \neq g^J \ \forall J \neq K$

$g^K = K \neq j \Rightarrow G$ seria un grupo finito la cual contradice la suposición inicial de G infinito.

Conjunto $\{g, g^2, g^3, \dots\}$ es infinito

el subgrupo g es $\langle g \rangle = \{g^0, g^1, g^2, \dots\}$

el subgrupo g^2 es $\langle g^2 \rangle = \{g^0, g^2, g^4, \dots\}$

Conjunto $\{g, g^2, g^3, \dots\}$

$\therefore$ Un grupo infinito debe tener un numero infinito de subgrupos.