Practica Nº 3

NUMEROS

Algoritmo de la división

1. Encontrar los enteros q y r, con $0 \geq r < |b|$, tal que $a = bq + r$ en cada uno de los siguientes casos

(a) $a = 12\,345$; $b = -39$.

$a = 12345$ y $b = -39$ q n r tal que $0 > r < |-39| = 39$

$$q = \frac{a}{b} = \frac{12345}{-39} = -316.538461538$$

$$q = -316$$

$r = a - bq$:

$$r = 12345 - (-39 \times -316) = 12345 - 12324 = 21$$

los enteros q n r $q = -316$ y $r = 21$

(b) $a = -102\,497$; $b = -977$.

$a = -102497$ y $b = -977$ q n r tal que $0 > r < |-977| = 977$

$$\frac{-102497}{-977} = \underbrace{105}.031272929$$

$$q = 105.$$

$$r = -102497 - (-977 - 105) = -102497 + 102585 = 88$$

los enteros q n r $q = 10б$

(c) $a = 98\,764$; $b = 4\,789$.

$a = 98.764$ y $b = 4789$

q n r tal que $0 > r < |-4789| - 4789$

$$\frac{98764}{4789} = \underbrace{20}.622465$$

$$q = 20$$

$$r = 98764 - (4789 \times 20) = 96764 - 95780$$

$$r = 2984$$

los enteros q n r $q = 20$ y $p = 2984$

(d) $a = -81\,538\,416\,000$; $b = 38\,754$.

$a = -81538416000$; $b = 38764$ $q \wedge r$ tal que $0 > r < |38754| = 38754$.

$$\frac{-81538416000}{38754} = -2104022.440$$

$q = -2.104022$ $r = -81538416000 - (38754 \wedge -2104022)$

$= -81538416000 + 81838416000 = 0$

$r = 0$ x

se cumple la condición $0 > r < |38754|$

$q = -2104022$ y $r = 0$;

5. Probar que el cuadrado de cualquier entero a es, o de la forma $3k$ o bien de la forma $3k+1$ para algún entero k.

Dado $n \in \mathbb{Z}$ y $3 \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ existen numeros enteros q, r unidos

$n = 3q + r$ y $0 \leq \, < 3 \Rightarrow r = 0 \vee r = 1 \vee r = 2$

• Si $r = 0$ en () • $n = 3q \Rightarrow n^2 - (3q)^2 = 9q^2 = 3 \underbrace{(3q^2)}_{\in \mathbb{Z}}$

$\Rightarrow n^2 = 3K_1$ $K\,3q^3 \in \mathbb{Z}$

• Si $r = 1$, en () $n = 3q + 1 \Rightarrow n^2 = (3q+1)^2 = (3q)^2 + 2(3q)(1) + 1^2$

$\Rightarrow n^2 = 9a^2 + 6q + 1 = 3(3q^2 + 2q) + 1$

$\Rightarrow n^2 = 3K + 1$, $K = 3q^2 + 2q \in \mathbb{Z}$

• Si $r = 2$ en () $n = 3q + 2 \Rightarrow n^2 = (3q+2)^2 = (3q)^2 + (2(3q)(2) + 2^2$

$\Rightarrow n^2 = 9q^2 + 12q + 4 = 9q^2 + 12q + 3 + 1 = 3\underbrace{(3q^2 + 4q + 1)}_{\in \mathbb{Z}} + 1$

$\Rightarrow n^2 - 3K + 1$, $K = 3q^2 + 4q + 1 \in \mathbb{Z}$

$\therefore$ $\forall n \in \mathbb{Z}$ $n^2 = 3K \vee n^2 = 3K + 1$, $K \in \mathbb{Z}$

6. Probar que para cada entero impar a, el número a^2 es de la forma $8k+1$ para algún entero k.

• Sea $m = 3K$ entero $m^3 = (3K)^3 = 9K^3 = 9K'$ //

• Sea $m = 3K + 1$ ento $m^3\ (3K+1)^3 = (3K)^3 + 3 \cdot (3K)^2 \cdot 1 + 3 \cdot 3K \cdot (1)^2 + (1)^3 \rightarrow$

$= 27K^3 + 27K^2 + 9K + 1 = 9(3K^3 + 3K^2 + K) + 1 = 9K + 1$ //

• Sea $m = 3K + 2$ entero $(3K+2)^3 = (3K)^3 + 3 \cdot (3K)^2 \cdot 2 \cdot + 3 \cdot 3K \cdot (2)^2$

$\Rightarrow 27K^3 + 54K^2 + 36K + 8 = 9(3K3 + 6K^2 + 4K) + 8 = 9K + 8$ //

9. Ya vimos que $(\mathbb{N}, |)$ es un conjunto parcialmente ordenado.

(a) ¿Estará totalmente ordenado?

(IN |) no esta totalmente ordenado, ya que un conjunto parcialmente ordenado cumple con las propiedades

i) Reflexividad

$\forall a \in \mathbb{N} \Rightarrow (a|a) \in \mathbb{N}$

$\therefore$ Es reflexiva ya que cualquier numero es divisible por si mismo

ii) Antisimetría

$(\forall a|b \wedge b|a) \in \mathbb{N} \Rightarrow a = b$

$\therefore$ Es antisimetrica

iii) Transitividad

$(\forall a,b,c \in \mathbb{N})\ (a|b \wedge b|c) \Rightarrow a|c$

$\therefore$ Es transitiva

Sin embargo le falta cumplir la totalidad

$\exists a,b \in \mathbb{N} : \neg(a/b) \wedge \neg(b|a)$ en $(\mathbb{N};|)$

no cumple por que por ejemplo 2 y 3 no son divisibles entre si

$\therefore$ No hay una relacion de orden total entre todos elementos $A \in (\mathbb{N}, |)$

(b) ¿$(\mathbb{N}, |)$ tendrá un máximo?

En $(\mathbb{N}, |)$ no existe un numero que sea mayor o igual que todos los demas

por que los numeros naturales son infinitos

$\mathbb{N} : \{1, 2, 3, 4 \dots \infty\}$

$\therefore (\mathbb{N}, 1)$ no tiene un maximo.

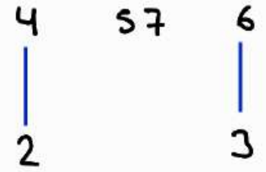
(c) ¿$(\mathbb{N}, |)$ tendrá un mínimo?

En $(\mathbb{N}, |)$, el numero 1 es el menor a comparacion de los otros elementos del Conjunto de los numeros naturales.

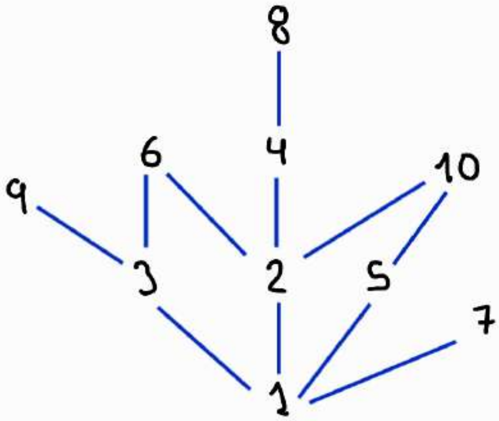
$\therefore (\mathbb{N}, |)$ si tienen un minimo, es el numero 1. $\mathbb{N}\ \{1, 2, 3 \dots \infty\}$

11. Traza el diagrama de Hasse para cada uno de los siguientes ordenes parciales

(a) $(\{2,3,4,5,6,7\}, |)$



(b) $(\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}, |)$



(c) Enlista todos los elementos minimal, mínimo, maximal y máximo para los ordenes parciales de los incisos (a) y (b).

a) - Elementos minimales : $\{2,3\}$
- Elementos maximales : $\{6,8\}$

b) - Elementos minimo : $\{1\}$
- Elementos maximales : $\{6,7,8,9,10\}$

13. Probar que n^2-2 (n un entero) no es divisible por 4.

Por contradicción

Así n^2-2 es divisible por 4

$n^2-2=4K, K\in\mathbb{Z}$

$n^2=4K+2$

Caso 1 n es par

$(2x)^2=4K+2, x\in\mathbb{Z}$

$4x^2=4K+2$

$4t=4K+2, \quad t=x^2, t\in\mathbb{Z}$

$2t=2K+1$

$2t$ es par, $2K+1$ es impar

Caso 2 n es impar

$(2x+1)^2=4K+2, x\in\mathbb{Z}$

$4x^2+4x+1=4K+2$

$4x^2+4x=4K+1$

$4(x^2+x)=4K+1$

$4j=4K+1, \ j=x^2+x, \ j\in\mathbb{Z}$ (adición)

$2d=2e+1, d=2j, e=2K; d,e\in\mathbb{Z}$ (M)

$2d$ es par

$2e+1$ es impar

∴ Ambos casos se contradicen

así n^2-2 no es divisible por 4.

14. Dados los enteros a y x, con $a > 1$, $a|(11x+3)$ y $a|(55x+52)$, encontrar a.

$a, x \in \mathbb{Z}$ $\quad a = ?$

$a > 1$

$a \mid (11x + 3) \wedge a \mid (55x + 52)$

Por $a|b \Rightarrow a \mid (b - c) \quad \forall c \in \mathbb{Z}$

Por conveniencia del ejercicio $c = 5$

$a \mid (11x+3) \Rightarrow a \mid c(11x+3) \Rightarrow a \mid 5(11x+3) \Rightarrow a \mid 55x+3$

Por propiedad $a|b$ y $a|c \Rightarrow a \mid (b \pm c)$

Para $a \mid (b - c)$

$a \mid (55x+52) - (5(11x+3))$

$a \mid (\cancel{55}x + 52 - \cancel{55}x - 15)$

$a \mid (37) \Rightarrow a = 1$ ó $a = 37$ ya que son los unicos divisores de 37

15. Suponga que a y b son enteros con el mismo residuo por ser divididos por el mismo número natural n. Probar que $n|(a-b)$.

Hipotesis

$a \wedge b \in \mathbb{Z}$

$r_a = r_b$

$n \in \mathbb{N}$

Tesis

$n \mid (a - b)$

Solución

$n|a \Rightarrow a = n \cdot q_a + r \Rightarrow$ (1)

$n|b \Rightarrow b = n \cdot q_b + r$ (2) $\Rightarrow r = b - n \cdot q_b$

reemplazamos en (1)

$a = n \cdot q_a + r$

$a = n \cdot q_a + b - n \cdot q_b$

$a = b + n \underbrace{(q_a - q_b)}_{\oslash}$

$a - b = n \oslash$

$\Rightarrow n \boxed{a - b}$

16. ¿Verdadero o falso? En cada caso, justifica tu respuesta con una demostración o un contraejemplo (todas las variables representan enteros).

(a) Si $a|b$ y $b|-c$, entonces $a|c$.

Supongamos que es falso

si $a|b$ y $b|-c \Rightarrow a|c$

$a|b \Rightarrow b = aq_1 + r_1$ (1)

$b|-c \Rightarrow -c = bq_2 + r_2$ (2)

Reemplazamos en (2)

$-c = (aq_1 + r_1)q_2 + r_2$

$-c = aq_1q_2 + r_1q_2 + r_2$

$-c = aq_1q_2$

$a|-c \Rightarrow \therefore a|-c$ poco por es $2|10 \wedge 2|-10$
$ 5 \qquad -5$

$\Rightarrow$ Podemos decir que si $a|-c \Rightarrow a|c$

$\Rightarrow$ es verdad por que si nos extendemos a los negativos un numero es divisible por si mismo por el 1 y tambien sus negativos

(b) Si $a|b$ y $c|b$, entonces $ac|b$.

Si $a|b \wedge c|b \Rightarrow ac|b$

como los dos dividen a "b" entonces sus residuos son iguales a 0

Supongamos que es falso por contradiccion

Sea $a = 3$
$c = 5$
$b = 30$

$a|b \vee c|b \Rightarrow ac \nmid b$

$3|30 \vee 5|30 \Rightarrow 3 \cdot 5 \nmid 30$ $\therefore$ Es verdadero

$\Rightarrow 15 \nmid 30$ (F)

(c) Si $a|b$ y $a|c$, entonces $a|bc$.

Si $a|b \wedge a|c \Rightarrow a|bc$

Supongamos que es falso por contradiccion

sea $a = 2$
$b = 10$
$c = 30$

$a|b \vee a|c \Rightarrow a \nmid bc$

$2|10 \vee 2|30 \Rightarrow 2 \nmid 10 \cdot 30$

$2 \nmid 300$ (F)

150

(d) Si $a|b$ y $c|d$, entonces $ac|bd$.

Si $a|b \wedge c|d \Rightarrow ac|bd$

Por propiodades

$a|b \Rightarrow a|b \cdot c \ \forall c \in \mathbb{Z}$

Tenemos $c|d \in \mathbb{Z}$ entonces con $x - \frac{d}{c}$

$a|b \Rightarrow a|b \cdot x \Rightarrow a|b \cdot x$

$$xb = aq + r$$

$$b = \frac{aq + r}{\frac{d}{c}}$$

$$b = \frac{(aq + r)c}{d}$$

$$bd = (aq + r)c$$

$bd = acq + r\cancel{c}$ Pero como $a|b \wedge c|d$ su residuos son 0

$bd = acq + 0 \Rightarrow ac|bd$ // Es verdad

(e) Si $a|b$ y $c|\frac{b}{a}$, entonces $c|b$ y $a|\frac{b}{c}$.

Tenemos

$a|b = b = aq_1 + r_1$ ①

$c|\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = cq_2 + r_2$ ②

de ②

$$\frac{b}{a} = cq_2 + r_2$$

$$b = acq_2 + ar_2$$

$$b = a(cq_2 + r_2)$$

$$\frac{b}{cq_2 + r_2} = a$$

remplazamos a en ①

$$b = aq_1 + r_1$$

$$b = \frac{b}{cq_2 + r_2} \cdot q_1 + r_1$$

$$b = \frac{bq_1 + (cq_2 + r_2) r_1}{cq_2 + r_2}$$

$$\underbrace{(cq_2 + r_2)}_{\theta} b = bq_1 + \underbrace{(cq_2 + r_2)}_{\theta} r_1$$

$$b\theta = bq_1 + \theta r_1$$

$$b\theta - bq_1 = \theta r_1$$

$$b(\theta - q_1) = \theta r_1$$

$b = \dfrac{(\theta r_1)}{\theta - q_1} \Rightarrow$ como esto no tiene la forma $a = bq + r$ entonces es Falso

F

17. Suponga que los enteros a y b son primos relativos y que c es un entero tal que $a|c$ y $b|c$. Probar que $ab|c$.

$a \wedge b$ son primos relativos su MCD es 1

$MCD(a, b) = 1$

$c = a * m \quad (m, n) \in \mathbb{Z}$

$c = b * n$

Para demostrar que ab divide a c

$c = ab * k$

$ac | bn \quad (c = b * n)$

Podemos cocluir que

$a | an$

$\exists k \in n = a * k$

Sustituimos n en la ecuacion $c = b * n$

$c = b * (a * k)$

$c = ab * k$

Lo que significa que:

ab divide a c

$ab | c$

18. En cada uno de los siguientes casos, encontrar el máximo común divisor de a y b, y expresarlo en la forma $ma + nb$ para apropiados enteros m y n.

(a) $a = 93$, $b = 119$.

mcd (119 , 93)

$$119 = 93 \cdot 1 + 26$$
$$93 = 26 \cdot 3 + 15$$
$$26 = 15 \cdot 1 + 11$$
$$15 = 11 \cdot 1 + 4$$
$$11 = 4 \cdot 2 + 3$$
$$4 = 3 \cdot 1 + \boxed{1}$$
$$3 = 1 \cdot 3 + 0$$

El comun divisor de a y b, el MCD(93,119) = 1

Para expresar el MCD en la forma ma + nb podemos retroceder en las divisiones

$$1 = 4 - 3 \times 1$$

remplazamos 3 por su expresión anterior

$$1 = 4 - (11 - 4 \times 2) \times 1$$
$$= 4 - 11 + 4 \times 2$$
$$= 4 \times 3 - 11$$

$$1 = (15 - 11 \times 1) \times 3 - 11$$
$$= 15 \times 3 - 11 \times 4$$

Remplazamos 11 por su expresión anterior:

$$1 = 15 \times 3 - ((26 - 15 \times 1) \times 4$$
$$= 15 \times 3 - 26 \times 4 + 15 \times 4$$
$$= 15 \times 7 - 26 \times 4$$

Rem. 26

$$1 = (93 - 26 \times 3) \times 7 - 26 \times 4$$
$$= 93 \times 7 - 26 \times 21 - 26 \times 4$$
$$= 93 \times 7 - 26 \times 25$$

Rem. 93

$$1 = (119 - 93 \times 1) \times 7 - 26 \times 25$$
$$= 119 \times 7 - 93 \times 7 - 26 \times 25$$
$$= 119 \times 7 - 93 \times 7 - 26 \times 25$$

Por lo tanto, el maximo comun divisor de 93 y 119 es 1, y se puede expresar en la forma ma + nb como:

$$1 = 119 \times 7 - 93 \times 7 - 26 \times 25$$

(b) $a = -93$, $b = 119$.

Aplicando Algoritmo de Euclides

$$119 = 93 \cdot 1 + 26$$
$$93 = 26 \cdot 3 + 15$$
$$26 = 15 \cdot 1 + 11$$
$$15 = 11 \cdot 1 + 4$$

$$11 = 4 \cdot 2 + 3$$
$$4 = 3 \cdot 1 + \boxed{1}$$
$$3 = 1 \cdot 3 + 0$$

1 es el maximo comun divisor de a y b

MCD (93, 119) = 1

Para expresar el MCD en la forma ma + nb
Utilizamos el algoritmo extendido de Euclides

$1 = 4 - 3 \times 1$
$1 = 4 - (11 - 4 \times 2) \times 1$
$1 = 4 \times 3 - 11$
$1 = (15 - 11 \times 1) \times 3 - 11$
$1 = 15 \times 3 - 11 \times 4$
$1 = 15 \times 3 - (26 - 15 \times 1) \times 4$
$1 = 15 \times 7 - 26 \times 4$
$1 = (93 - 26 \times 3) \times 7 - 26 \times 4$
$1 = 93 \times 7 - 26 \times 25$
$1 = (-93) \times 7 + 119 \times (-5)$

El maximo comun divisor de -93 y 119 es 1 y se puede expresar en la forma ma + nb
Como : $1 = (-93) \times 7 + 119 \times (-5)$

(c) $a = -93$, $b = -119$.

Algoritmo de Euclides:

$-93 = (-119) \times 0 + (-93)$
$-119 = (-93) \times 1 + (-26)$
$-93 = (-26) \times 3 (-15)$
$-26 = (-15) \times 1 + (-11)$
$-15 = (-11 \times 1 + (-4)$
$-11 = (-4) \times 2 + (-3)$
$-4 = (-3) \times 1 + (-1)$
$-3 = (-1) \times 3 + 0$

Por lo tanto el MCD $(-93, -119) = 1$
Para el MCD en la forma ma + nb ; usando algoritmo extendido de euclides

$1 = (-4) - (-3) \times 1$
$1 = (-4) - ((-11) - (-4) \times 2) \times 1$
$1 = (-4) \times 3 + (-11)$
$1 = ((-15) - (-11) \times 1) \times 3 + (-11)$
$1 = (-15) \times 3 + (-11) \times 4$
$1 = (-15) \times 3 + ((-26) - (-15) \times 1) \times 4$
$1 = (-15) \times 7 (-26) \times 4$
$1 = ((-93) - (-26) \times 3) \times 7 + (-26) \times 4$
$1 = (-93) \times 7 + (-26) \times 25$
$1 = (-93) \times 7 + ((-119) - (-93) \times 1) \times 25$
$1 = (-93) \times 7 + (-119) \times 25 + (-93) \times 25$
$1 = (-93) \times 32 + (-119) \times 25$

El maximo comun divisor de -93 y -119 es 1 y su expresión
ma + nb como : $1 = (-93) \times 32 + (-119) \times 25$

(d) $a = 1575$, $b = 231$.

Algoritmo de Euclides

$1575 = 231 \times 6 + 189$
$231 = 189 \times 1 + 42$
$189 = 42 \times 4 + 21$
$42 = 21 \times 2 + 0$

El MCD $(1575, 231) = 21$

MCD en forma ma + nb ; Alg. extendido de Euclides:

$21 = 189 - 42 \times 4$
$21 = 189 - (231 - 189 \times 1) \times 4$
$21 = 189 \times 5 - 231 \times 4$

Podemos expresar el MCD $(1575, 231) = 21$ en la forma ma + nb se representa:
$21 = 189 \times 5 - 231 \times 4$

(e) $a = 1575$, $b = -231$.

Alg. Euclides

$1575 = (-231) \times (-7) + 168$
$-231 = 168 \times (-2) + (-105)$
$168 = (-105) \times (-1) + 63$
$-105 = 63 \times (-2) + (-21)$
$63 = (-21) \times (-3) + 0$

El MCD de $(1575, -231) = 21$

Para expresar el MCD en la forma ma + nb
Utilizando extendido de Euclides
$21 = (-105) - 63 \times (-2)$
$21 = (-105) - (168 - (-105) \times (-1)) \times (-2)$
$21 = (-105) + (-168) \times (-2) + (-105) \times 2$
$21 = (-105) \times 3 + (-168) \times (-2)$

El MCD $(1575, -231) = 21$ en la forma ma + nb es: $21 = (-105) \times 3 + (-168) \times (-2)$

(f) $a = -1575$, $b = -231$.

$-1575 = (-231) \times 6 + (-189)$
$-231 = (-189) \times 1 + (-42)$
$-189 = (-42) \times 4 + (-21)$
$-42 = (-21) \times 2 + 0$

El MCD de -1575 y -231 es 21

Para MCD en la forma ma + nb

$21 = (-189) - (-42) \times 4$
$21 = (-189) - ((-231) - (-189) \times 1) \times 4$
$21 = (-189) \times 5 + (-231) \times (-4)$

El MCD $(-1575, -231) = 21$ en la forma ma + nb $21 = (-189) \times 5 + (-231) \times (-4)$

(g) $a = -3719$, $b = 8416$.

$8416 = (-3719) \times (-2) + 982$
$-3719 = 982 \times (-4) + (-91)$
$982 = (-91) \times (-10) + 12$
$-91 = 12 \times (-8) + 5$
$12 = 5 \times 2 + 2$
$5 = 2 \times 2 + 1$
$2 = 1 \times 2 + 0$

El MCD $(-3719, 8416) = 1$

El MCD en forma ma + nb

$1 = 63 - 62$
$1 = 63 - (125 - 63)$
$1 = 2 \times 63 - 125$
$1 = 2 \times (563 - 4 \times 125) - 125$
$1 = 2 \times 563 - 9 \times 125$
$1 = 2 \times 563 - 9 \times (3078 - 5 \times 563)$
$1 = -45 \times 563 + 18 \times 3078$
$1 = -45 \times 563 + 18 \times (8416 - 2 \times (-3719))$
$1 = 18 \times 8416 - 81 \times 3719$

El MCD de -3719 y 8416 es 1 y puede expresarse para $ma + nb$ como: $1 = 18 \times 8416 - 81 \times 3719$

(h) $a = 12345$, $b = 54321$.

$5431 = 12345 \times 4 + 1986$
$12345 = 1986 \times 6 + 1299$
$1986 = 1299 \times 1 + 687$
$1299 = 687 \times 1 + 612$
$687 = 612 \times 1 + 75$
$612 = 75 \times 8 + 12$
$75 = 12 \times 6 + 3$
$12 = 3 \times 4 + 0$

El MCD de 12345 y 54321 es 3

Para expresar MCD en la forma ma + nb

$3 = 75 - 12 \times 6$
$3 = 75 - (612 - 75 \times 8) \times 6$
$3 = 75 \times 49 - 612 \times 6$

Podemos expresar el MCD(12345, 54321) = 3 en la forma ma + nb : $3 = 75 \times 49 - 612 \times 6$

24. Mostrar que no existen enteros x, y tales que

(a) $154x + 260y = 3$

tenemos que $ax + by \rightarrow$ mdc de a y b debe dividir a c

$154x + 260y = 3$

mdc d 154 y 260 $\rightarrow$ divide a 3

Calculamos

mdc de 154 y 260

$260 = 1 \cdot 154 + 106$

$154 = 1 \cdot 106 + 48$

$106 = 2 \cdot 48 + 10$
$48 = 4 \cdot 10 + 8$
$10 = 1 \cdot 8 + 2$
$8 = 4 \cdot 2 + 0$

El mdc es 2

Ahora verificamos si 2 divide a 3

- Claramente, 2 no divide 3, ya que no existe ningun entero k tal que $2k = 3 \to \nexists$ enteros x, y y que satisfagan la ecuacion

$$154x + 260y = 3$$

(b) $196x + 260y = 14$

- Verificamos si el mdc es divisible a 14 entonces calculemos el mdc de 196 y 260

$260 = 1 \cdot 196 + 64$
$196 = 3 \cdot 64 + 4$
$64 = 16 \cdot 4 + 0$

- El mdc de 196 y 260 en 4 ahora verificamos si 4 divide a 14
- Sabemos que 4 no divide a 14 por que no existe ningun entero k tal que $4k = 14$

Entonces, no existen enteros $x \to y$ que satisfagan la ecuación

62. Usar la inducción matemática para probar la verdad de cada una de las siguientes afirmaciones, para todo $n \geq 1$.

(a) $n^2 + n$ es divisible por 2.

Tomamos el Paso base

- Verificamos la afirmacion

$$n = 1$$

- Cuando $n = 1$, la expresion $n^2 + n$ se convierte en

$$1^2 + 1 = 1 + 1 = 2$$

Por tanto $2 = 2$

Afirmamos que es verdadera para $n = 1$

Por induccion

Suponemos k es afirmacion verdadera

Asumimos $k^2 + k = 2$
para $k + 1$
$(k+1)^2 + (k+1) = 2$

Por tanto tenemos

$$K^2 + K + K + K + 2 = K^2 \to K + 2(K+1)$$
$$K^2 + K + 2(K+1) = 2$$

Por tanto queda demostrado la afirmacion $K+1$

$$K^2 + K = 2$$
$$2(K+1) = 2$$

Tenemos de la suma de dos terminos divisible por

$$2, K^2 + K = 2 \quad \wedge \quad 2(K+1) = 2$$

$\therefore$ Queda demostrado que la afirmación es verdadera del valor K y $K+1$

para $n = 1$, por tanto se demuestra que para todo

$n^2 + n$ es divisible para todo $n \geq 1$

(b) $n^3 + 2n$ es divisible por 3.

Verificamos la afirmacion

$$n = 1$$

$$n^3 + 2n = 1^3 + 2(1) = 1 + 2 = 3$$

Entonces 3 es divisible de 3

Inducción

$$K^3 + 2K = 3$$
$K+1$ entonces

$$(K+1)^3 + 2(K+1) = 3$$

$$= (K+1)^3 + 2(K+1)$$

$$= (K+1)^3 + 2(K+1)$$

$$= K+1)(K+1(K+1) + 2(K+1)$$

Sabemos que $K3 + 2K = 3$
$2(K+1) = 2K + 2$

$$= (K^3 + 3K^2 + 3K + 1) + (2K + 2)$$
$$= (K^3 + 3K^2 + 3K + 2x + 3)$$

Obtenemos:

$K^3 + 3K^2 + 3K$ es divisible por 3

$2K+3$ es divisible por 3
Sum dos terminos $=3$
$K^3+3K^2+3K=3 \wedge 2K+3=3$

$\therefore$ Para K, $K+1$, $n=1$ $\Rightarrow n^3+2n=3$ para todo $n \geq 1$

(c) $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ es divisible por 9.

$n=1$
$= 1^3+(1+1)^3+(1+2)^3$
$= 1+8+27$
$= 36$
Vemos si 36 es divisible por 9

$36 \div 9 = 4 \to$ La afirmación es verdadera para $n=1$

Hipotesis inductiva

$K \geq 1$ es verdadera

$K^3+(K+1)^3+(K+2)^3$ es divisible por 9

Inductivo

Demostramos que $K+1 \to K+1=n$

$(K+1)+(K+1+1)^3+(K+1+2)^{13}$

$K^3+3K^2+3K+1+(K+2)^3+(K+3)^3$

$K^3+(K+1)^3+(K+2)^3$

Reemplazamos

$K^3+(K+1)^3+(K+2)^3=9m$

$9m+(K^3+3K^2+6K+4)+(K^3+9K^2+27K+27)$

$2K^3+12K^2+33K+31+9n$

K^3, K^2, K son multiplos de 9

K^3 es 2
$a\,(2 \cdot 9 = 18)$

K^2 es 12

$a\,(12 \cdot 9 = 108)$

Cociente K es 33

$9\,(33 \cdot 9 = 297)$

los cocientes k^3, k^2 y k son multiplos de 9 $2x^3+12x^2+3J$ son $\div$ 9

(d) $5^n - 1$ es divisible por 4.

$n=1$ tenemos $5^1 - 1 = 5 - 1 = 4$

4 es divisible de 4 $\rightarrow$ esa afirmacion es verdadera para $n=1$

Paso Induccion

$k \geq 1 \rightarrow 5^{k-1}$ es divisible por 4

$k+1$ demostrar que:

$5^{(k+1)} - 1$ es divisible por 4

$5^k - 1$ es divisible por 4

$5^1 = 5$

$5^{(k+1)} - 1 \Rightarrow (5^x - 1) - 5 + 4$

$(5^k\ 1)\ 5$ es divisible por 4

$(5^k - 1)\ 5 + 4 \rightarrow$ es divisible por 4

K es una afirmacion verdadera para K+1

$\forall n \geq 1$ se demostro que es afirmativa

(e) $8^n - 3^n$ es divisible por 5.

$8^1 - 3^1 = 8 - 3 = 5$

entonces 5 es divisible de 5

La afirmacion es verdadera

Hipotesis de induccion

K valor arbitrario donde $k \geq 1$

$8^k - 3^k$ es divisible por 5

Paso de Induccion

K+1 es afirmación verdadera

$= 8 \cdot (k+1) - 3(k+1$

$= 8^{(k+1)} - 3^{(k+1)}$

$= 8 \cdot 8^k - 3 \cdot 3^k$

$= (5 \cdot 8)^k \cdot 8^k - (2+1) - 3^k$

$= 5 \cdot 8^k + 3 \cdot 8^k - 2 \cdot 3^k - 3$

$= 5 \cdot 8^k - 2 \cdot 3^k + 3 \cdot (8^k - 3^k)$

$8^{k+1} - 3^{k+1} = 5 \cdot 8^k - 2 \cdot 3^k + 3 \cdot (8^k - 3^k)$

$= 5 \cdot 8^x - 2 \cdot 3^x + 3(5m)$

$= 5 \cdot 8^x - 2 \cdot 3^+ + 15n$

$= 5(8^k - 2 \cdot 3^\Omega) + 15m$

$8^{(k+1)} - 3^{(k+1)}$

Entonces se verifica que si la afirmacion es verdadera para K n K+1

$\rightarrow n=1$ es verdadera $\wedge$ $n \geq 1$ es una afirmacion verdadera.