Funciones inversas

Sea $A = \{a, b, c\}$ $\quad B = \{1, 2, 3\}$

y $f = \{(a,1)(b,2)(c,1)\}$

de donde $f^{-1} = \{(1,a)(2,b)(1,c)\}$ no es función de B en A

porque para 3 no existe $f(3)$ y además $(1,a)$ y $(1,c)$.

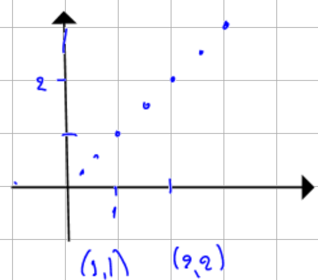
Pero si $f: A \to B$ dado por. $A = \{1,2,3\}$ $B = \{a,b,c\}$

$f = \{(1,a)(2,c)(3,b)\}$ es una función, la relación inversa

$f^{-1} = \{(a,1)(c,2)(b,3)\}$ es una función de B en A, llamada

función inversa de f

$f^{-1} \circ f = \{(1,1)(2,2)(3,3)\} = Id_A$



y $f \circ f^{-1} = \{(a,a)(b,b)(c,c)\} = Id_B$

FUNCIÓN IDENTIDAD La función que asigna a cada elemento de A el mismo elemento, se llama función identidad en A. Es decir,

$$I_A : A \to A \quad \text{tal que} \quad I_A(x) = x$$

i_A

PROPIEDADES

1:) Sea $f: A \to B$ una función cualquiera, y sean $I_A : A \to A$ y $I_B : B \to B$ las funciones identidad en A y en B, respectivamente. Entonces se tiene

$$I_B \circ f = f \quad \text{y} \quad f \circ I_A = f$$

Es decir,

$$(I_B \circ f)(x) = I_B \circ (f(x)) = f(x)$$

$$(f \circ I_A)(x) = f(I_A(x)) = f(x)$$

$I_B(f(x)) = f(x)$

2:) Sea $f: A \to B$ una función invertible, tal que $f^{-1}: B \to A$, entonces

$$f^{-1} \circ f = I_A \quad \text{y} \quad f \circ f^{-1} = I_B$$

$f^{-1} \circ f: A \to A$

$f \circ f^{-1}: B \to B$

Si B = A, resulta $\quad f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I_A$

3:) Sea $f: A \to B$ y $g: B \to C$ funciones invertibles. Entonces

[redacted]

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

$g \circ f: A \to C$

$(g \circ f)^{-1}: C \to A$

$g^{-1}: C \to B$ y $f^{-1}: B \to A$

$f^{-1} \circ g^{-1}: C \to A$

Propiedad.

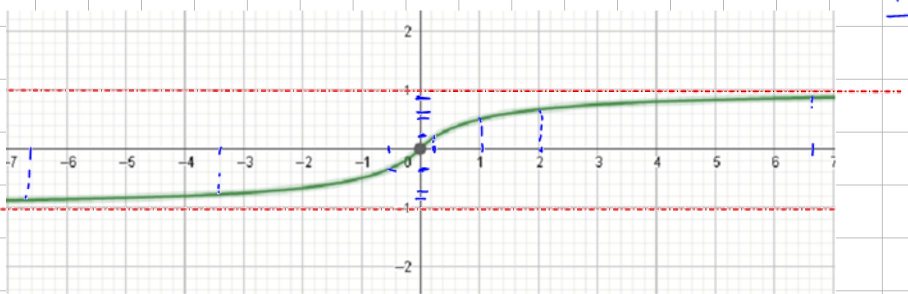
Una función admite inversa si y sólo si es biyectiva

Si $f: A \to B$ es biyectiva, entonces la función $f^{-1}: B \to A$, es única y biyectiva. f^{-1} se llama inversa de f.

Ejm. Probar que $f: \mathbb{R} \to (-1, 1)$ definida por

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$$ admite inversa. $\exists f^{-1}$?

1 – 1



$Im(f) = Cd(f)$

$(-1, 1) = (-1, 1)$

Veamos si f es inyectiva. $\quad f(a) = f(b)$

$$\frac{a}{1+|a|} = \frac{b}{1+|b|}$$

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

$$a + a|b| = b + b|a|$$

def. $\boxed{|x| = x \cdot \mathrm{sgn}(x)}$

$$a + \cancel{a \cdot b}\,\overbrace{\mathrm{sgn}(b)} = b + \cancel{a \cdot b}\,\overbrace{\mathrm{sgn}(a)} \quad , \text{con } \mathrm{sgn}(a) = \mathrm{sgn}(b)$$

$$a = b$$

$\therefore$ f es inyectiva.

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

f sobreyectiva.

$\forall y \in (-1,1) \; \underline{\exists x \in \mathbb{R}} : f(x) = y$

$$y = \frac{x}{1+|x|} \Rightarrow y + y \cdot |x| = x \quad , \text{con } \mathrm{sgn}(x) = \mathrm{sgn}(y)$$

$$y + y \cdot x \cdot \underline{\mathrm{sgn}(x)} = x$$

$$y + \underline{y} \cdot x\, \underline{\mathrm{sgn}(y)} = x$$

$$y + x \cdot |y| = x$$

$$x|y| - x = -y$$

$$x\left(|y| - 1\right) = -y$$

$$x = \frac{-y}{|y|-1} = \frac{-y}{-(1-|y|)}$$

$$x = \frac{y}{1-|y|} \in \mathbb{R}$$

Así $\exists x = \dfrac{y}{1-|y|} \in \mathbb{R}$. tq.

$$\frac{x}{|x|}$$

$$f(x) = f\left(\frac{y}{1-|y|}\right) = \frac{\frac{y}{1-|y|}}{1 + \left|\frac{y}{1-|y|}\right|}$$

$$= \frac{\frac{y}{1-|y|}}{1+\frac{|y|}{|1-|y||}} = \frac{\frac{y}{\cancel{1-|y|}}}{\frac{1-\cancel{|y|}+\cancel{|y|}}{\cancel{1-|y|}}} = \frac{y}{1}$$

$$= y$$

$\therefore$ f es sobreyectiva

Así f es biyectiva ✓

entonces admite inversa

$y \in (-1,1)$

$\underline{1-|y|} > 0 \Leftarrow |1-|y|| \geq 0$

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 = (\nexists)^2$$

$$\sqrt{x^2} = x$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

con $\overparen{sgn(x) = sgn(y)}$

$$|x| = x \cdot sgn(x)$$

Consecuencia.

La función $f: A \to B$ es inyectiva si y sólo si existe $f^{-1}: B \to A$ tal que

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = Id.$$

Ejm. Sea $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función definida por

$f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$, determina si existe f^{-1}, si existe calcula f^{-1}.

Sol.

Veamos si f es inyectiva

Sea $f(a) = f(b)$

$$\frac{a+1}{a-2} = \frac{b+1}{b-2}$$

$$(a+1)(b-2) = (b+1)(a-2)$$

$$\cancel{ab} - 2a + b \cancel{-2} = \cancel{ab} - 2b + a \cancel{-2}$$

$$-2a - a = -2b - b$$

$$-3a = -3b \Rightarrow a = b \Rightarrow f \text{ es } 1\text{-}1.$$

Así existe $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Calculemos f^{-1}

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

$$y = \frac{x+1}{x-2} \qquad \text{C.V.: } x \leftrightarrow y$$

$$x = \frac{y+1}{y-2}$$

despejamos "y": $xy - 2x = y + 1$

$$xy - y = 2x + 1 \Rightarrow$$

$$y(x-1) = 2x+1$$

$$y = \frac{2x+1}{x-1}$$

$$\boxed{f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}}$$

$$f^{-1}(0) = -1$$

Verificar. $(f \circ f^{-1})_{(x)} = x$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x))$$

$$= f\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) + 1}{\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) - 2}$$

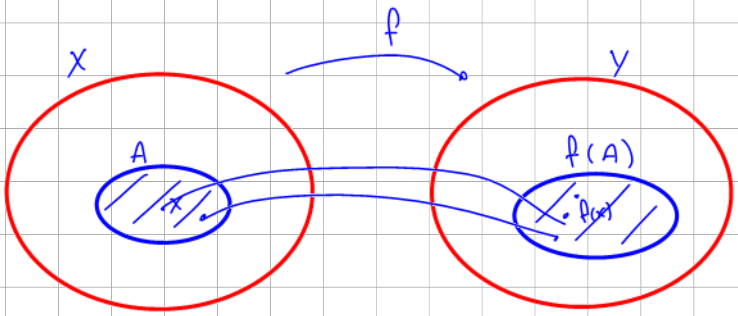
$$= \frac{\frac{2x+\cancel{1} + x-\cancel{1}}{x-1}}{\frac{2x+1-2(x-1)}{x-1}} = \frac{\frac{3x}{\cancel{x-1}}}{\frac{\cancel{2x}+1-\cancel{2x}+2}{\cancel{x-1}}}$$

$$= \frac{3x}{3}$$

$$= x$$

Imágenes de subconjuntos del dominio

Sean $f: X \longrightarrow Y$ y A un subconjunto de X. Las imágenes de todos los elementos de A determinan un subconjunto de Y, llamado imagen de A por f. Denotado por $f(A)$.



Def.

La imagen del subconjunto $A \subset X$ es el conjunto cuyos elementos son las imágenes de los elementos de A.

$$f(A) = \{ f(x) : x \in A \}$$

o $$f(A) = \{ y \in Y : \exists\, x \in A \wedge f(x) = y \}$$

El símbolo $f(A)$ se lee "imagen de A por f"

Así $\quad y \in f(A) \iff \exists\, x \in A : y = f(x)$

Si $A = X$, $f(X)$ es la imagen de f. Además $f(\emptyset) = \emptyset$

Propiedades

Sean $f: X \to Y$ y A, B subconjuntos del dominio.

a) Si $A \subset B$ entonces $\boxed{f(A) \subset f(B)}$

Dem. Si $z \in f(A) \Rightarrow \exists\, x \in A : z = f(x)$, def. de $f(A)$

$\Rightarrow \exists\, x \in B : z = f(x)$, $A \subset B$

$\Rightarrow z \in f(B)$, def. $f(B)$

b) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$ $A \subset X$, $B \subset X$

i) $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$

Sea $z \in f(A \cup B) \Rightarrow \exists\, \underline{x \in A \cup B} : z = f(x)$ ✓ def. imagen de $A \cup B$

$\Rightarrow \exists x / (x \in A \vee x \in B) \wedge z = f(x)$

$\Rightarrow \exists x / [x \in A \wedge z = f(x)] \vee \exists x / [x \in B \wedge z = f(x)]$

$\Rightarrow z \in f(A) \vee z \in f(B)$

$\Rightarrow z \in f(A) \cup f(B)$ $\therefore$ $f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$ ①

ii $f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$

Como $A \subset A \cup B \Rightarrow f(A) \subset f(A \cup B)$

$B \subset A \cup B \Rightarrow f(B) \subset f(A \cup B)$

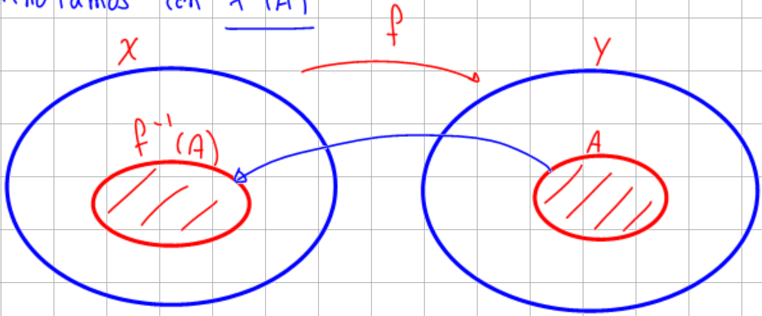
$\Rightarrow f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$ ②

Así de ① y ② $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$

c) $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$ 😃

Imágenes inversas de subconjuntos del codominio

Sean $f: X \to Y$ y $A \subset Y$. Interesa conocer los elementos del dominio cuyas imágenes pertenecen a A. Tales elementos forman un subconjunto de X, llamado imagen inversa o preimagen de A por f. La denotamos con $\underline{f^{-1}(A)}$



Def. La imagen inversa o preimagen de $A \subset Y$. es el conjunto formado por los $x \in X$ tal que $f(x) = y \in A$.

$$f^{-1}(A) = \{ x \in X : f(x) \in A \}$$

o $\qquad x \in f^{-1}(A) \iff f(x) \in A$

Ejm.

Sean $A = \{\underline{-3}, \underline{-2}, \underline{-1}, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, y sea

$f : A \to B$ tal que $f(x) = \dfrac{x + |x|}{2}$

Entonces la imagen de:

$A_1 = \{-3, -2, -1\} \underline{\subset A}$ es $f(A_1) = \{0\}$

$A_2 = \{0\} \subset A$ es $f(A_2) = \{0\}$

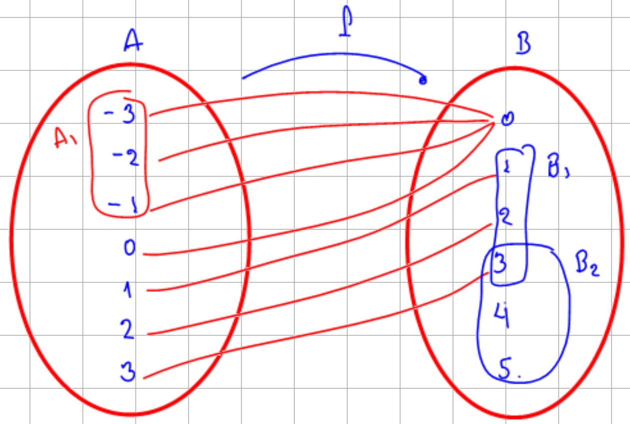
$A_3 = \{1, 2, 3\} \subset A$ es $f(A_3) = \{1, 2, 3\}$

La imagen inversa de:

$B_1 = \{1, 2, 3\} \subset B$ es $f^{-1}(B_1) = \{1, 2, 3\}$

$B_2 = \{3, 4, 5\} \subset B$ es $f^{-1}(B_2) = \{3\}$

$B_3 = \{4, 5\} \subset B$ es $f^{-1}(B_3) = \emptyset$



$f(x) = \dfrac{x + |x|}{2}$

$f(-3) = 0$

Ejm. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto \boxed{f(x) = x^2}$

Determine la preimagen de $A = (-\infty, -1]$, $B = (-1, 1]$ y $C = [4, 9]$

Sol. $f^{-1}(A) =$

tomemos $x \in f^{-1}(A) \iff f(x) \in A$

$\iff f(x) \in (-\infty, -1]$

$\iff -\infty < \underline{f(x)} \leq -1$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) \leq -1$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 \leq -1$$

$$\Leftrightarrow \quad \nexists x \in \mathbb{R} : \quad x^2 \leq -1$$

$$\therefore \quad f^{-1}(A) = \emptyset$$

ii) $\underline{f^{-1}(B)} =$

$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) \in (-1, 1]$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 < f(x) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 < x^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq x^2 \leq 1 \qquad // \sqrt{\ }$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 \leq |x| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad |x| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \quad x \in [-1, 1]$$

$$\therefore \quad f^{-1}(B) = [-1, 1]$$

$\underline{\underline{f^{-1}(C)}}$:

$$x \in f^{-1}(C) \Leftrightarrow f(x) \in C$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x) \in [4, 9]$$

$$\Leftrightarrow \quad 4 \leq f(x) \leq 9$$

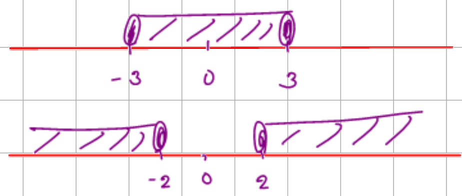
$$\Longleftrightarrow \quad 4 \leq x^2 \leq 9$$

$$\Longleftrightarrow \quad 4 \leq x^2 \quad \wedge \quad x^2 \leq 9$$

$$x^2 - 9 \leq 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad 0 \leq x^2 - 4 \quad \wedge \quad (x-3)(x+3) \leq 0$$

$$0 \leq (x-2)(x+2) \quad \wedge$$



$$\Longleftrightarrow \quad x \in [-3,-2] \cup [2,3]$$

$$\therefore \quad f^{-1}(C) = [-3,-2] \cup [2,3]$$