

RELACIÓN SIMÉTRICA

Sea R una relación en A

$$R \text{ es simétrica} \Leftrightarrow \forall x, y : x R y \Rightarrow y R x$$

Por ejem. si $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$$R = \{(1, 4) (2, 2) (2, 3) (4, 1) (3, 2)\} \text{ es simétrica.}$$

RELACIÓN NO SIMÉTRICA

$$R \text{ es no simétrica} \Leftrightarrow \exists x \exists y \in A : x R y \Rightarrow y \not R x$$

Por ejem. si $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$$R = \{(1, 4) (2, 2) \underline{(2, 3)} (4, 1)\}, R \text{ es no simétrica.}$$

RELACIÓN ASIMÉTRICA

$$R \text{ es asimétrica} \Leftrightarrow \forall x, y \in A : x R y \Rightarrow y \not R x$$

Por ejem. si $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$$R = \{(1, 4) (2, 3) (2, 4) (3, 4) (1, 3)\} \text{ es asimétrica.}$$

RELACIÓN TRANSITIVA

Sea R una relación en A .

$$R \text{ es una relación transitiva} \Leftrightarrow \forall x, y, z \in A : x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$$

RELACIÓN NO TRANSITIVA

$$R \text{ es no transitiva} \Leftrightarrow \exists x, y, z \in A : x R y \wedge y R z \Rightarrow x \not R z$$

RELACIÓN ATRANSITIVA

$$R \text{ es atransitiva} \Leftrightarrow \forall x, y, z \in A : x R y \wedge y R z \Rightarrow x \not R z$$

Ejm. Sea $A = \{a, b, c, d\}$ y $R \subset A^2$

1. $R = \{(a, b)(a, d)(b, d)(c, c)\}$

$$a R b \wedge b R d \Rightarrow a R d \quad \checkmark$$

$$c R c \wedge c R c \Rightarrow c R c \quad \checkmark$$

$\therefore R$ es transitiva \checkmark

2. $R = \{(a, d)(b, c)(c, b)(d, b)\}$

$$a R d \wedge d R b \Rightarrow a \cancel{R} b$$

$$b R c \wedge c R b \Rightarrow b \cancel{R} b$$

$$d R b \wedge b R c \Rightarrow d \cancel{R} c$$

$$c R b \wedge b R c \Rightarrow c \cancel{R} c$$

$\therefore R$ es atransitiva

3. $R = \{(a, a)(b, d)(d, a)(c, b)\}$

$$d R a \wedge a R a \Rightarrow d R a \quad \checkmark$$

$$c R b \wedge b R d \Rightarrow c \cancel{R} d$$

$$b R d \wedge d R a \Rightarrow b \cancel{R} a$$

$\therefore R$ es no transitiva

RELACIÓN ANTISIMÉTRICA

$$R \text{ es antisimétrica} \Leftrightarrow \forall x, y \in A : x R y \wedge y R x \Rightarrow x = y$$

Por ejm. si $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$$R = \{(\underline{1, 2})(2, 2)(3, 4)(4, 1)\}$$

$$\begin{array}{l} 1R2 \wedge 2R1 \Rightarrow 1=2 \quad \checkmark \\ \hline \underbrace{\quad \quad \quad}_F \Rightarrow F \end{array}$$

$$3R4 \wedge 4R3 \Rightarrow 3=4 \quad \checkmark$$

$$4R1 \wedge 1R4 \Rightarrow 1=4 \quad \checkmark$$

$\therefore R$ es antisimétrica.

$$xRy \Leftrightarrow x \leq y$$

$$\begin{array}{l} xRy \wedge \underline{yRx} \Rightarrow \overline{x \leq y} \wedge \overline{y \leq x} \\ \Rightarrow x = y \end{array}$$

Ejercicios. Clasifica las siguientes relaciones.

1. Sea $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$$R = \{(1, 2)(1, 3)(4, 2)(4, 5)\}$$

R es arreflexiva, porque todos los elementos de A
no están relacionados consigo mismo.

porque. $\forall x \in A: x \not R x$

R es asimétrica, porque $\forall x, y \in A: xRy \Rightarrow y \not R x$

R es transitiva. $\forall x, y, z \in A: \underline{xRy \wedge yRz} \Rightarrow xRz$

$$\underbrace{1R2 \wedge 2R3}_{F} \Rightarrow \underbrace{1R3}_V$$

$$\underbrace{1R2 \wedge 2R4}_{F} \Rightarrow \underbrace{1R4}_V$$

2. Sea $A = \mathbb{N}$, definimos R mediante

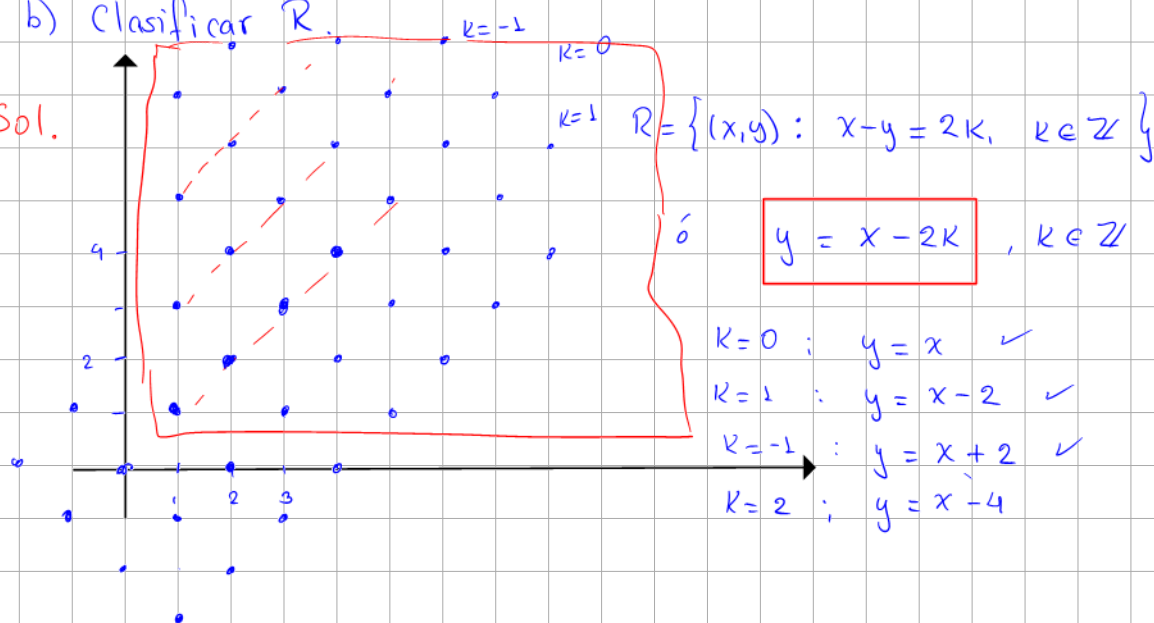
$$x R y \Leftrightarrow 2 \mid x - y$$

$$a \mid b \Leftrightarrow b = a \cdot t$$

a) Representar R .

b) Clasificar R .

Sol.



b) $x R y \Leftrightarrow 2 \mid x - y$
 $x - y = 2k$
 $y = x - 2k$

R es reflexiva porque $x R x \Leftrightarrow 2 \mid x - x$

$$\Leftrightarrow 2 \mid 0$$

$$\Leftrightarrow 0 = 2 \cdot t$$

\checkmark

R es simétrica, porque $x R y \Rightarrow 2 \mid x-y$

$$\Rightarrow 2 \mid y-x$$

$$\Rightarrow y R x$$

R transitiva, porque $x R y \wedge y R z \Rightarrow 2 \mid x-y \wedge 2 \mid y-z$

$$\Rightarrow x-y=2t \wedge y-z=2k, t, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x-y+y-z=2t+2k$$

$$\Rightarrow x-z=2(t+k)$$

$$\Rightarrow 2 \mid x-z$$

$$\Rightarrow x R z$$

R antisimétrica.. veamos, $x R y \wedge y R x \Rightarrow 2 \mid x-y \wedge 2 \mid y-x$

$$\Rightarrow x-y=2t \wedge y-x=2(-t)$$

$$\Rightarrow (x-y)-(y-x)=2t-2(-t)$$

$$\Rightarrow x-y-y+x=2(t+t)$$

$$\Rightarrow 2x-2y=2(2t)$$

$$\Rightarrow 2(x-y)=2(2t)$$

$$\Rightarrow x-y=2t$$

$$\Rightarrow x=y, \text{ si } t=0$$

Como no es $\forall t$, entonces R no es antisimétrica.

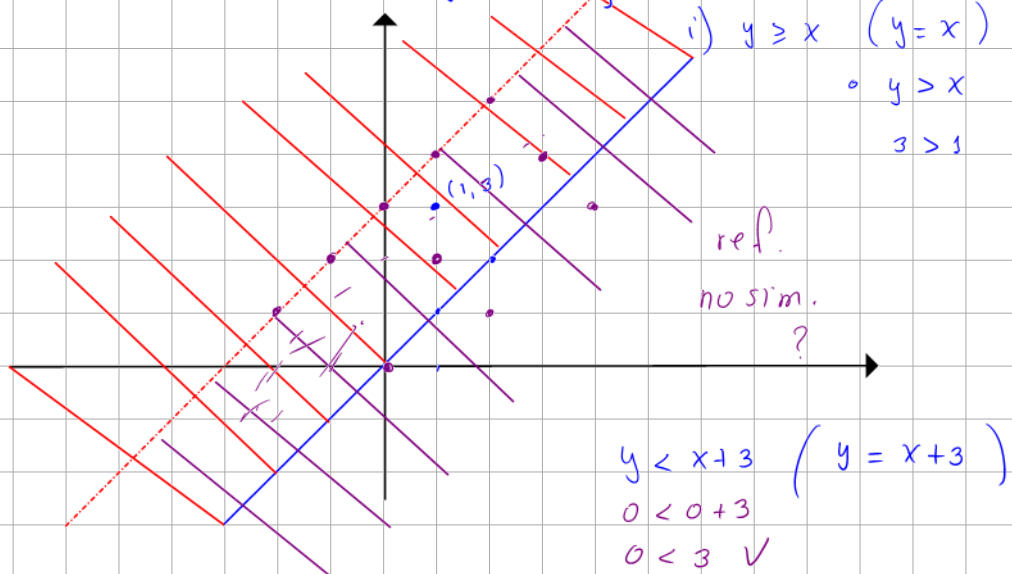
3. En \mathbb{R} definimos R mediante

$$x R y \Leftrightarrow \underbrace{x \leq y < x+3}$$

a) Representar R

b) Clasificar R .

Sol. a) $R = \{(x, y) : y \geq x \wedge y < x+3\}$



TAREA. CLASIFICAR LA RELACIÓN