**RELACIÓN SIMÉTRICA**    Sea $R$ una relación en $A$

$$R \text{ es simétrica} \iff \forall x, \forall y : x R y \implies y R x$$

Por ejem. si $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$$R = \{(1,4)(2,2)(2,3)(4,1)(3,2)\} \quad \text{es simétrica.}$$

**RELACIÓN NO SIMÉTRICA**

$$R \text{ es no simétrica} \iff \exists x \, \exists y \in A : x R y \implies y \cancel{R} x$$

Por ejem. si $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$$R = \{(1,4)(2,2)\underline{\underline{(2,3)}}(4,1)\}, \quad R \text{ es no simétrica.}$$

**RELACIÓN ASIMÉTRICA**

$$R \text{ es asimétrica} \iff \forall x, \forall y \in A : x R y \implies y \cancel{R} x$$

Por ejem. si $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$$R = \{(1,4)(2,3)(2,4)(3,4)(1,3)\} \quad \text{es asimétrica.}$$

**RELACIÓN TRANSITIVA**    Sea $R$ una relación en $A$.

$$R \text{ es una relación transitiva} \iff \forall x, \forall y, \forall z \in A : x R y \wedge y R z \implies \underline{\underline{x R z}}$$

**RELACIÓN NO TRANSITIVA**

$$R \text{ es no transitiva} \iff \exists x, \exists y, \exists z \in A : x R y \wedge y R z \implies x \cancel{R} z$$

**RELACIÓN ATRANSITIVA**

$$R \text{ es atransitiva} \iff \forall x, \forall y, \forall z \in A : x R y \wedge y R z \implies x \cancel{R} z$$

Ejm.   Sea   $A = \{a, b, c, d\}$   y   $R \subset A^2$

1.   $R = \{(a, b)(a, d)(b, d)(c, c)\}$

   $aRb \wedge bRd \Rightarrow aRd$   ✓

   $cRc \wedge cRc \Rightarrow cRc$   ✓

   ∴ $R$ es   transitiva ✓

2.   $R = \{(a, d)(b, c)(c, b)(d, b)\}$

   $aRd \wedge dRb \Rightarrow a\cancel{R}b$

   $bRc \wedge cRb \Rightarrow b\cancel{R}b$

   $dRb \wedge bRc \Rightarrow d\cancel{R}c$

   $cRb \wedge bRc \Rightarrow c\cancel{R}c$

   ∴ $R$ es   atransitiva

3.   $R = \{(a, a)(b, d)(d, a)(c, b)\}$

   $dRa \wedge aRa \Rightarrow dRa$   ✓

   $cRb \wedge bRd \Rightarrow c\cancel{R}d$

   $bRd \wedge dRa \Rightarrow b\cancel{R}a$

   ∴ $R$ es no transitiva

**RELACIÓN ANTISIMÉTRICA**

$R$ es antisimétrica $\iff \forall x, \forall y \in A : xRy \wedge yRx \Rightarrow x = y$

Por ejm.    si  $A = \{1,2,3,4\}$

$$R = \{(1,2)(2,2)(3,4)(4,1)\}$$

$1 R 2 \land 2 R 1 \Rightarrow 1 = 2$    V

$3 R 4 \land 4 R 3 \Rightarrow 3 = 4$    V

$4 R 1 \land 1 R 4 \Rightarrow 1 = 4$    V

$\therefore R$ es antisimétrica.

$x R y \iff x \leq y$

$x R y \land y R x \Rightarrow x \leq y \land y \leq x$

$\Rightarrow x = y$

Ejercicios. Clasifica las siguientes relaciones.

1. Sea $A = \{1,2,3,4,5\}$

$$R = \{(1,2)(1,3)(4,2)(4,5)\}$$

$R$ es arreflexiva, porque todos los elementos de A

no estan relacionados consigo mismo.

porque. $\forall x \in A: x \cancel{R} x$

$R$ es asimétrica, porque $\forall x, \forall y \in A: x R y \Rightarrow y \cancel{R} x$

$R$ es    transitiva.    $\forall x, \forall y \forall z \in A: x R y \land y R z \Rightarrow x \cancel{R} z$

$$\underbrace{1\,R\,2 \;\wedge\; \overbrace{2\,R\,3}} \;\Rightarrow\; \underline{1\,R\,3}$$

$$\phantom{xxxx} F \phantom{xxxxx} \Rightarrow \phantom{x} V$$

$$V$$

$$\underbrace{1\,R\,2 \;\wedge\; \overbrace{2\,R\,4}} \;\Rightarrow\; 1\,R\,4$$

$$\phantom{xxxx} F \phantom{xxxx} \Rightarrow \phantom{xx} F$$

$$V$$

2.  Sea $A = \mathbb{N}$, definimos $R$ mediante

$$x\,R\,y \;\Longleftrightarrow\; 2\,|\,x-y \qquad\qquad a\,|\,b \;\Longleftrightarrow\; b = a\cdot t$$

a) Representar $R$.

b) Clasificar $R$.

Sol.



$k=-1$, $k=0$, $k=1$

$$R = \{(x,y): \; x-y = 2k, \; k \in \mathbb{Z}\}$$

ó $\boxed{y = x - 2k}$ , $k \in \mathbb{Z}$

$k = 0$ ; $y = x$ ✓
$k = 1$ : $y = x - 2$ ✓
$k = -1$ : $y = x + 2$ ✓
$k = 2$ ; $y = x - 4$
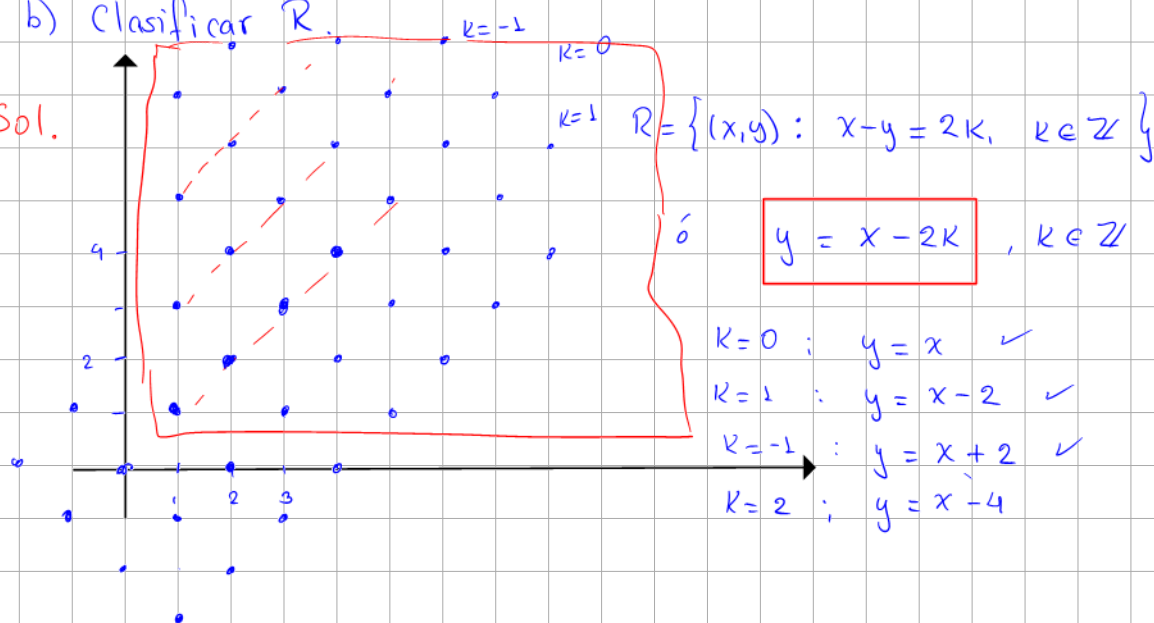
b) $\quad x\,R\,y \Longleftrightarrow 2\,|\,x-y$

$$x - y = 2k$$
$$y = x - 2k.$$

$R$ es reflexiva porque $\quad x\,R\,x \Longleftrightarrow 2\,|\,x-x$

$$\Longleftrightarrow 2\,|\,0$$
$$\Longleftrightarrow 0 = 2\boxed{t} \qquad V$$

$R$ es simétrica, porque $x R y \Rightarrow 2 \mid x-y$

$$\Rightarrow 2 \mid y-x$$

$$\Rightarrow y R x$$

$R$ transitiva, porque $x R y \wedge y R z \Rightarrow 2 \mid x-y \wedge 2 \mid y-z$

$$\Rightarrow x-y = 2t \wedge y-z = 2 \cdot k \quad, \quad t, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x-y+y-z = 2t+2k$$

$$\Rightarrow x-z = 2(t+k)$$

$$\Rightarrow 2 \mid x-z$$

$$\Rightarrow x R z$$

$R$ antisimétrica. veamos, $x R y \wedge y R x \Rightarrow 2 \mid x-y \wedge 2 \mid y-x$

$$\Rightarrow x-y = 2t \wedge y-x = 2(-t)$$

$$\Rightarrow (x-y)-(y-x) = 2t-2(-t)$$

$$\Rightarrow x-y-y+x = 2(t+t)$$

$$\Rightarrow 2x-2y = 2(2t)$$

$$\Rightarrow 2(x-y) = 2(2t)$$

$$\Rightarrow x-y = 2t$$

$$\Rightarrow x=y, \quad si \quad \boxed{t=0}$$

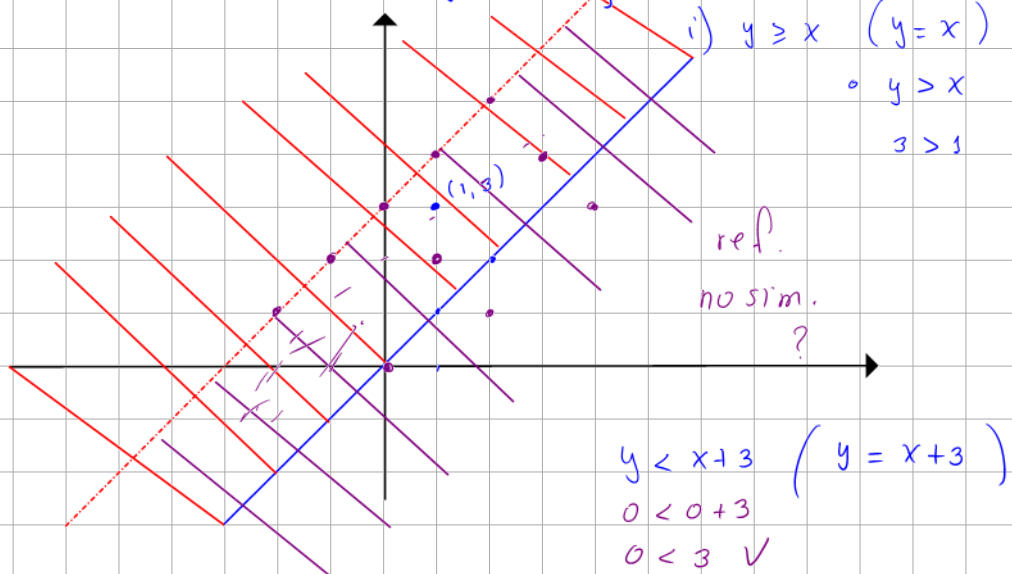Como no es $\forall t$, entonces $R$ no es antisimétrica.

3. En $\mathbb{R}$ definimos $\mathcal{R}$ mediante

$$x\,\mathcal{R}\,y \iff x \leq y < x + 3$$

a) Representar $\mathcal{R}$

b) Clasificar $\mathcal{R}$.

Sol. a) $\mathcal{R} = \{(x,y): y \geq x \;\wedge\; y < x+3\}$



i) $y \geq x$  $(y = x)$
$\circ\; y > x$
$3 > 1$

ref.
no sim.
?

$y < x+3$  $\left( y = x+3 \right)$
$0 < 0+3$
$0 < 3$ $\checkmark$

**TAREA. CLASIFICAR LA RELACIÓN**