EJERCICIOS VARIADOS

EJEMPLO

$A = B \iff A \subset B \wedge B \subset A$

Demostrar: $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

Dem.

Sea $(x,y) \in (A \cup B) \times C \iff x \in (A \cup B) \wedge y \in C$, def prod. cart.

$\iff (x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C$, def. unión

$\iff (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C)$, dist. $\wedge \vee$

$\iff (x,y) \in (A \times C) \vee (x,y) \in B \times C$, def. prod cart

$\iff (x,y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$, def unión

$\therefore (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

23. Para $n \in \mathbb{Z}$, sea $A_n = \{a \in \mathbb{Z} | a \leq n\}$.
Encontrar los siguientes conjuntos.

(a) $A_3 \cup A_{-3}$ (c) $A_3 \cap (A_{-3})^c$

(b) $A_3 \cap A_{-3}$ (d) $\cap_{i=0}^{4} A_i$

$A_0 = \{a \in \mathbb{Z} / a \leq 0\}$

$A_0 = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$

$A_5 = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

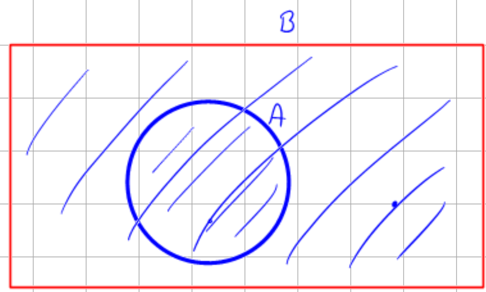
Sol.

a) $A_3 \cup A_{-3} = A_3$

porque $A_{-3} \subset A_3$ ✓

b) $A_3 \cap A_{-3} = A_{-3}$

porque $A_{-3} \subset A_3$ ✓



c) $A_3 \cap (A_{-3})^c = A_3 - A_{-3}$

i) $A \subset B$ ✓

$A \cup B = B$

$A \cap B = A$

Como $A_3 = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

$A_{-3} = \{\ldots -4, -3\}$

$(A_{-3})^c = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\} \Rightarrow A_3 \cap (A_{-3})^c = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

d) $\bigcap_{i=0}^{4} A_i = \{[(A_0 \cap A_1) \cap A_2] \cap A_3\} \cap A_4$, $A_0 \subset A_1 \Rightarrow A_0 \cap A_1 = A_0$

$A_0 \subset A_2$

$A_0 \subset A_3$

$A_0 \subset A_4$

$= \{[A_0 \cap A_2] \cap A_3\} \cap A_4$

$= \{A_0 \cap A_3\} \cap A_4$

$= A_0 \cap A_4$

$= A_0$

24. Sean A y B conjuntos tales que

(a) $A \cap B = A$. (b) $A \cup B = A$.

¿Qué puedes concluir? ¿Por qué?

a) $A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$ ✓

$x \in A \Rightarrow x \in A \cap B$, hipótesis

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in B$, def. inter.

$\Rightarrow x \in B$, L. simplif.

$\therefore A \subset B$

b) $x \in B \Rightarrow x \in A \vee x \in B$, L. adición

$\Rightarrow x \in A \cup B$ def unión

$\Rightarrow x \in A$, hip.

$\therefore B \subset A$

35. Sean A, B, C y D subconjuntos de algún conjunto universal U. Use las identidades de la teoría de conjuntos para simplificar las expresiones

(a) $[(A \cup B)^c \cap (A^c \cup C)^c]^c \setminus D^c = D$ ✓✓✓

(b) $\{[C \cup (B \setminus A^c)] \cap [B \setminus (C \cup A)]^c\} \cup B = B \cup C$

(c) $\{(A \cup B) \cap [(B \setminus A) \cup (A \cap B)]\} \cap [A \cup (A \cup B)^c] = A \cap B$ ✓

(d) $[(A \cup B^c) \oplus (B \setminus A)]^c \cup [(A \cap B)^c - (B \setminus A)] = A \cup B^c$ ✓✓

b) $\{[C \cup (B \cap A)] \cap [B \cap (C \cup A)^c]^c\} \cup B$

$= \{[C \cup (A \cap B)] \cap [B^c \cup (C \cup A)]\} \cup B$

$=$

$= \{[C \cup (A \cap B)] \cup B\} \cap \{[B^c \cup C \cup A] \cup B\}$

$= [C \cup B] \cap U = B \cup C$

$\{B^c \cup C \cup A \cup B\}$

$(B^c \cup B) \cup (C \cup A)$

$U \cup (C \cup A)$

U

$\left\{[(A\cup B^c)\cup(B\setminus A)]\setminus[(A\cup B^c)\cap(B\setminus A)]\right\}^c \cup [(A\cap B)^c\cap(B\cap A^c)^c]$

$= \left\{[(A\cup B^c)\cup(B\cap A^c)]\cap[(A\cup B^c)\cap(B\cap A^c)]^c\right\}^c \cup [(A\cap B)^c\cap(B^c\cup A)]$

$= \left\{[(A\cup B^c)\cup(B\cap A^c)]^c \cup [(A\cup B^c)\cap(B\cap A^c)]\right\} \cup [(A^c\cup B^c)\cap(B^c\cup A)]$

$(A^c\cap B)^c\cap(B\cap A^c)$

$= \left\{[(A\cup B^c)^c\cap(B\cap A^c)^c]\cup[(A\cap B\cap A^c)\cup(B^c\cap B\cap A^c)]\right\} \cup \left\{[(A^c\cup B^c)\cap B^c]\cup[(A^c\cup B^c)\cap A]\right\}$

$\{[B^c]\cup[(A^c\cap A)\cup(B^c\cap A)]\}$

$\{B^c\cup[\emptyset\cup(B^c\cap A)]\}$

$\{B^c\cup(B^c\cap A)\}$

B^c

$\boxed{\text{Corrección del ejercicio... Había un error}}$

$= \{[(A^c\cap B)\cap(A^c\cap B)^c]\cup[\emptyset\cup\emptyset]\}\cup B^c$

$= \{\emptyset\cup\emptyset\}\cup B^c = \emptyset\cup B^c = B^c$

46. Sean los conjuntos A y B, tales que

(a) $|A\oplus B| = 10$ y $|A\cup B| = 25$. ¿Cuántos elementos tiene $A\cap B$?

(b) $|A\cup B| = 18$ y $|A\cap B| = 7$. ¿Cuántos elementos tiene $A\oplus B$?

cardinal de A $\quad n(A)$ $\quad |A|$

$n(A\cup B) = n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

a) $n(A\Delta B) = n(A\cup B) - n(A\cap B)$

$10 = 25 - n(A\cap B) \Rightarrow n(A\cap B) = 25-10 = 15$

72. Demostrar que $\bigcup_\alpha$ y $\bigcap_\alpha$ se distribuyen sobre el producto cartesiano:

a) $$\left(\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha\right)\times\left(\bigcup_{\beta\in J} B_\beta\right) = \bigcup_{\substack{\alpha\in I\\ \beta\in J}}(A_\alpha\times B_\beta),$$

b) $$\left(\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha\right)\times\left(\bigcap_{\beta\in J} B_\beta\right) = \bigcap_{\substack{\alpha\in I\\ \beta\in J}}(A_\alpha\times B_\beta).$$

$\bigcup_{i\in J} A_i \qquad J=\{1,2,3\}$

$= A_1\cup A_2\cup A_3$

a)

Sea $(x,y)\in\left(\bigcup_{\alpha\in J} A_\alpha\right)\times\left(\bigcup_{\beta\in J} B_\beta\right) \Leftrightarrow x\in\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha \wedge y\in\bigcup_{\beta\in J}B_\beta$

$\Leftrightarrow x\in A_\alpha$, para algun $\alpha\in J$ $\wedge$ $y\in B_\beta$ para algún $\beta\in J$.

$\Leftrightarrow (x,y)\in A_\alpha\times B_\beta$, para algun $\alpha\in J$, $\beta\in J$

$\Leftrightarrow (x,y)\in\bigcup_{\substack{\alpha\in J\\ \beta\in J}}(A_\alpha\times B_\beta)$