PROPIEDADES DE LA COMPOSICION DE RELACIONES

Sean R, S y T relaciones bien definidas.

i) $(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$

ii) $(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

Dem Sean $R \subset A \times B$ y $S \subset B \times C$

$(a,b) \in S \circ R \Leftrightarrow \exists m \in B : (a,m) \in R \wedge (m,b) \in S$

$(S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$?

Sea $(x,z) \in (S \circ R)^{-1} \Leftrightarrow (z,x) \in S \circ R$

$\Leftrightarrow \exists y \in B : (z,y) \in R \wedge (y,x) \in S$

$\Leftrightarrow \exists y \in B : (y,z) \in R^{-1} \wedge (x,y) \in S^{-1}$

$\Leftrightarrow \exists y \in B : (x,y) \in S^{-1} \wedge (y,z) \in R^{-1}$

$\Leftrightarrow (x,z) \in R^{-1} \circ S^{-1}$

$\therefore (S \circ R)^{-1} = R^{-1} \circ S^{-1}$

i) Sean $R \subset A \times B$, $S \subset B \times C$, $T \subset C \times D$

$(T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$

Sea $(a,d) \in (T \circ S) \circ R \Leftrightarrow \exists b \in B : (a,b) \in R \wedge (b,d) \in (T \circ S)$

$\Leftrightarrow \exists b \in B : (a,b) \in R \wedge [\exists c \in C : (b,c) \in S \wedge (c,d) \in T]$

$\Leftrightarrow \exists b \in B, \exists c \in C : (a,b) \in R \wedge [(b,c) \in S \wedge (c,d) \in T]$

$\Leftrightarrow \exists b \in B, \exists c \in C : [(a,b) \in R \wedge (b,c) \in S] \wedge (c,d) \in T$

$\Leftrightarrow \exists c \in C ; [\exists b \in B : (a,b) \in R \wedge (b,c) \in S] \wedge (c,d) \in T$

$\Leftrightarrow \exists c \in C : (a,c) \in S \circ R \wedge (c,d) \in T$

$\Leftrightarrow (a,d) \in T \circ (S \circ R)$

$$\therefore \quad (T \circ S) \circ R = T \circ (S \circ R)$$

RELACIONES DEFINIDAS EN UN CONJUNTO

Sea R una relación de A en B. Si $B = A$, entonces $R \subset A \times A = A^2$

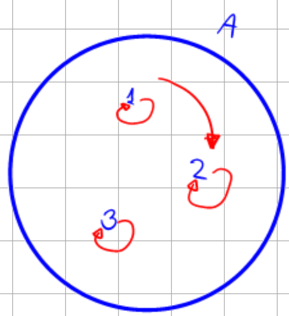
Ejm. Sea $A = \{1, 2, 3\}$ definimos $R \subset A^2$ mediante

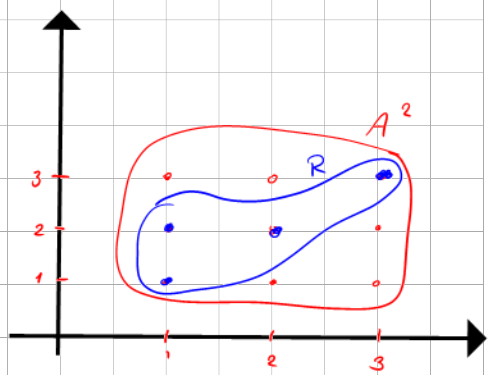
$$x R y \iff y = x \ \vee \ y = 2x$$

Escribe R por extensión.

Sol. $R = \{(1,1)(2,2)(3,3)(1,2)\}$

En diag. de Venn





Ejm. En $\mathbb{R}$ definimos R mediante $(R \subset \mathbb{R}^2)$

$$x R y \iff x^2 - x = y^2 - y$$

Representa gráficamente R.

Vamos que "x", "y" satisfacen la ecuación

$$x^2 - x = y^2 - y$$

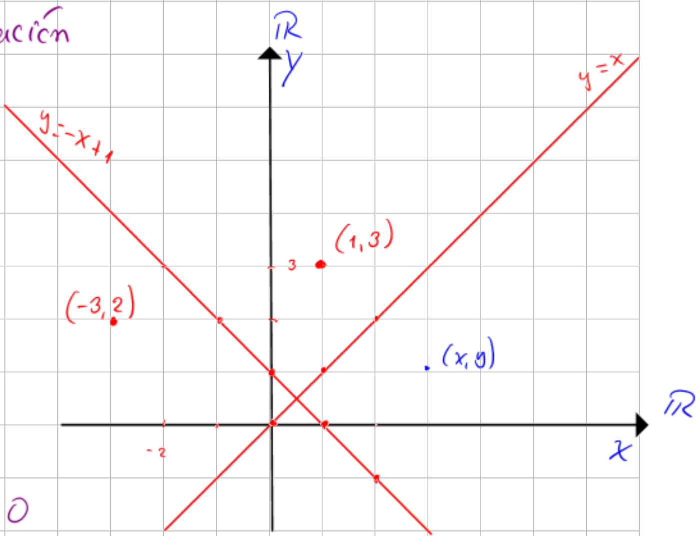
$$\underbrace{x^2 - y^2} - x + y = 0$$

$$(x-y)(x+y) - (x-y) = 0$$

$$(x-y)(x+y-1) = 0$$

$$x - y = 0 \qquad x + y - 1 = 0$$

$$y = x \qquad y = -x + 1$$



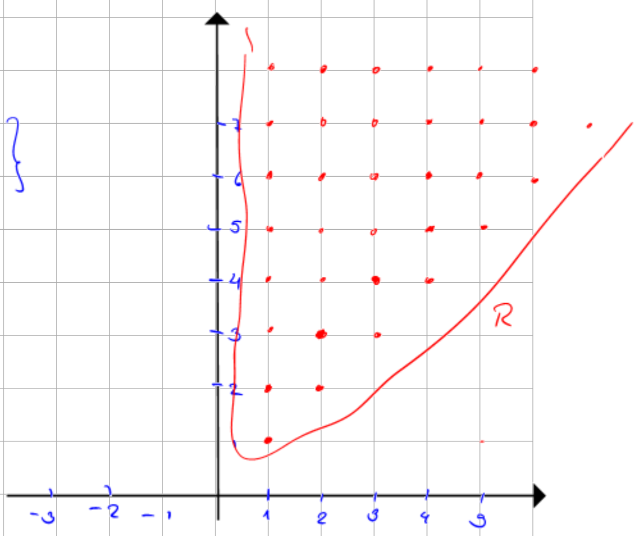
Así $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x \ \vee \ y = -x + 1\}$

Ej. Sea $A = \mathbb{N}$ y $R \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} = \mathbb{N}^2$

definimos R mediante

$$R = \{ (x,y) \in A^2 : x \leq y \}$$

Representa gráficamente R.



PROPIEDADES DE LAS RELACIONES

Sea R una relación en A, es decir $R \subset A^2$.

Las relaciones en un conjunto satisfacen ciertas propiedades.

R. reflexiva
R. no reflexiva
R. arreflexiva

R. simétricas
R. no simétricas
R. asimétricas

R. transitivas
R. no transitivas
R. atransitivas

R. Antisimétrica.

RELACIÓN REFLEXIVA

Una relación R en A es reflexiva si todo elemento de A está relacionado consigo mismo.

$$R \text{ es reflexiva} \Leftrightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow x R x$$

Por ejemplo, si $A = \{a, b, c, d\}$

$R = \{ (a,a)(b,b)(c,c)(d,d)(a,c)\ (c,d) \}$, es reflexiva.

RELACIÓN NO REFLEXIVA

$$R \text{ es no reflexiva} \Leftrightarrow \exists x \,/\, x \in A \wedge x \not{R} x.$$

Por ejemplo si $A = \{a, b, c\}$

y $R = \{(a,a)\,(b,c)\,(a,c)\}$

$\exists\, b \in A : b \not{R}\, b$ ✓

$\exists\, c \in A : c \not{R}\, c$ ✓

RELACIÓN ARREFLEXIVA

R es arreflexiva $\Leftrightarrow \forall x : x \in A \Rightarrow x \not{R}\, x$

Por ejemplo si $A = \{a, b, c\}$

y $R = \{(a,b)\,(b,c)\,(a,c)\,(c,a)\,(b,a)\,(c,b)\}$

(a,a) ✓

(b,b) ✓

(c,c) ✓

Ejercicio $A = \{1, 2, 3, 4\}$

$R = \{(1,1)(2,2)\,(3,4)\,(4,1)\}$ no ref.

$S = \{(1,1)\,(2,2)\,(3,3)\,(4,4)\,(4,1)\,(2,4)\}$

$T = \{(1,2)\,(3,2)\,(4,1)\,(3,4)\,(1,1)\}$