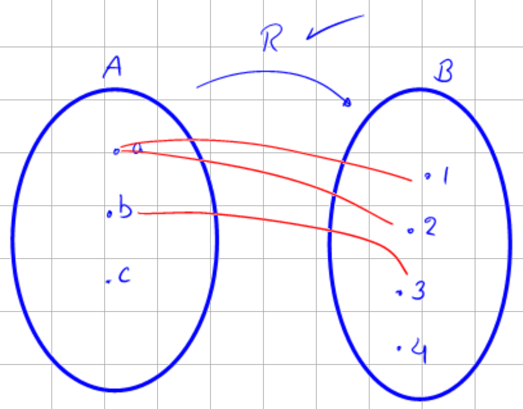
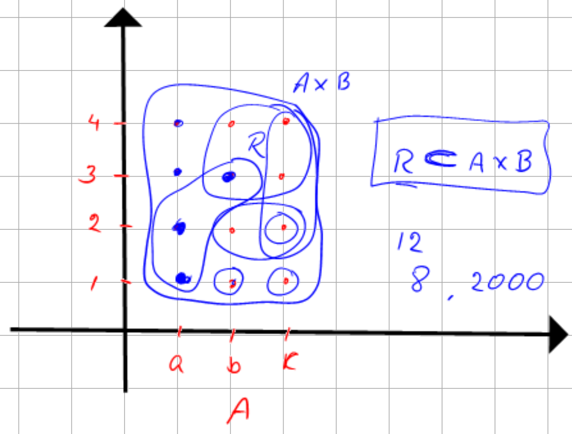
CAPÍTULO 3 RELACIONES





$\boxed{R \subset A \times B}$

12
8 , 2000

$R_1 = \{(a,1)(a,2)(b,3)\} \subset A \times B$

$R_2 = \{(a,1)(a,2)(a,3)(a,4)\} \subset A \times B$

$R_3 = \{(c,2)(c,1)(b,3)\} \subset A \times B$

$R_4 = \{(b,1)\} \subset A \times B$

$R_5 = \{(a,\underline{1})(b,\underline{1})\}$

$A = \{a,b,c\}$
$B = \{1,2,3,4\}$

$A \times B = \{ \qquad \}$ tiene $\underline{12}$ elem.

Hay 2^{12} subconjuntos o relaciones de $A \times B$

DEFINICIÓN DE UNA RELACIÓN

2.1 ***DEFINICIÓN*** Sean A y B dos conjuntos. Una relación R de A en B es cualquier subconjunto del producto cartesiano A x B. Es decir:

$\boxed{\text{R es una relación de A en B} \Leftrightarrow R \subset A \times B.}$

Se dice que "x está relacionado con y por R" y se escribe x R y sí (x, y) $\in$ R.

Si (x, y) $\notin$ R, si puede escribir x $\not{R}$ y , y se lee "x no está relacionado con y por R".

EJERCICIO

Sean los conjuntos $A = \{1, 2\}$ y $B = \{a, b\}$

El producto cartesiano $AxB = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b)\}$

Escribe todas las relaciones de A en B. (2^4 relaciones)

$R_1 = \emptyset$

$R_2 = A \times B$

$R_3 = \{(1,a)\}$

$R_4 = \{(1,b)\}$

$R_5 = \{(2,a)\}$

$R_6 = \{(2,b)\}$

$R_{15} = \{(1,a)(2,a)(2,b)\}$

$R_{16} = \{(1,b)(2,a)(2,b)\}$

$R_7 = \{(1,a)(1,b)\}$

$R_8 = \{(1,a)(2,a)\}$

$R_9 = \{(1,a)(2,b)\}$

$R_{10} = \{(1,b)(2,a)\}$

$R_{11} = \{(1,b)(2,b)\}$

$R_{12} = \{(2,a)(2,b)\}$

$R_{13} = \{(1,a)(1,b)(2,a)\}$

$R_{14} = \{(1,a)(1,b)(2,b)\}$

Observación En general, si A tiene n elementos y B tiene m elementos, entonces AxB tiene nm elementos, y el conjunto de pares de A x B tiene 2^{nm} elementos, es decir, existen 2^{nm} subconjuntos de A x B, o lo que es lo mismo, es posible definir 2^{nm} relaciones en A y B.

DOMINIO, IMAGEN E INVERSA DE UNA RELACIÓN

DOMINIO

IMAGEN

EJEMPLO

Sean los conjuntos $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ y $B = \{2, 4, 6, 8\}$

Se define la siguiente relación R (divisor) de A en B:

$$\boxed{x \; R \; y \Leftrightarrow x \mid y}$$

la relación es un subconjunto de AxB, y pertenecen a ella los pares ordenados (x, y) tales que $x \mid y$, x divide a y, es decir

Luego $R = \{(1,2)(1,4)(1,6)(1,8)(3,6)\}$

$D(R) = \{1, 3\}$ $R^{-1} = \{(2,1)(4,1)(6,1)(8,1)(6,3)\}$

$I(R) = \{2, 4, 6, 8\}$ $D(R^{-1}) = I(R)$

$I(R^{-1}) = D(R)$

Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ y $B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$

Se define la siguiente relación R (mayor que) de A en B:

$$\boxed{x \; R \; y \Leftrightarrow x > y}$$

Luego $R = \{\ \}$

$D(R) = \emptyset$ $I(R) = \emptyset$

3.3 RELACIÓN INVERSA La relación inversa (recíproca) de la relación R de A en B es la relación R^{-1} de B en A que se define como

$$R^{-1} = \{(y, x) / (x, y) \in R\}$$

O bien $(y, x) \in R^{-1} \Leftrightarrow (x, y) \in R$

Ejemplo

Sean los conjuntos $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{3, 4, 5\}$

Se define $R \subset AxB$ mediante

$$\boxed{x \; R \; y \Leftrightarrow x + y = 6}$$

la relación R de A en B está formada por los pares ordenados (x, y) tales que $x + y = 6$, esto es

$R = \{(1,5)(2,4)(3,3)\}$

Obs. $(1,5) \neq (5,1)$ $\qquad A \times B \neq B \times A$

Sean los conjuntos $\quad A = \{x \in \mathbb{N} / 1 < x \leq 5\}$

$B = \{x \in \mathbb{Z} / x^3 - 3x^2 + 2x = 0\}$

$x(x^2 - 3x + 2) = 0$

$x(x-2)(x-1) = 0$

$x = 0, \ x = 2, \ x = 1$

Se define la relación $R \subset AxB$ mediante

$$\boxed{x \, R \, y \Leftrightarrow 3 \mid x + y}$$

a) Definir A, B y R por extensión

b) Representar en forma cartesiana AxB y R

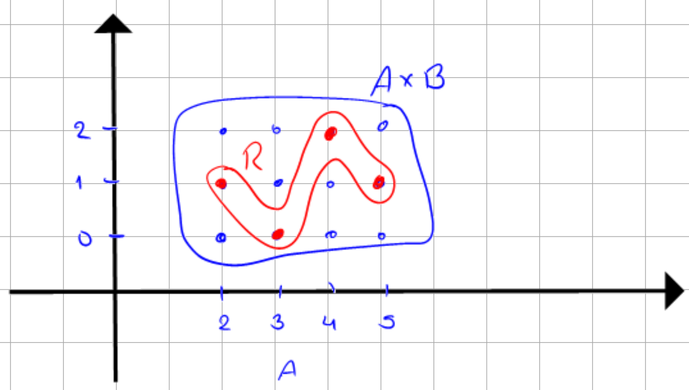
c) Determinar R^{-1}

Sol. a) $A = \{2, 3, 4, 5\}$

$B = \{0, 1, 2\}$

$R = \{(2,1)(3,0)(4,2)(5,1)\}$

b)



c) $R^{-1} = \{(1,2)(0,3)(2,4)(1,5)\}$

Sean los conjuntos

$A = \{0, 1, 2, 3\}$, $\qquad B = \{-1, 2, 4\}$ $\quad$ y $\quad$ $C = \{0, 3, 5, 7\}$

Se definen las relaciones $R \subset AxB$ y $S \subset BxC$ mediante

$\boxed{x \, R \, y \Leftrightarrow y = 2x}$, $\qquad \boxed{y \, S \, z \Leftrightarrow z = y + 1}$

a) Determinar R y S por extensión

b) Definir la composición $S \circ R \subset AxC$ por extensión

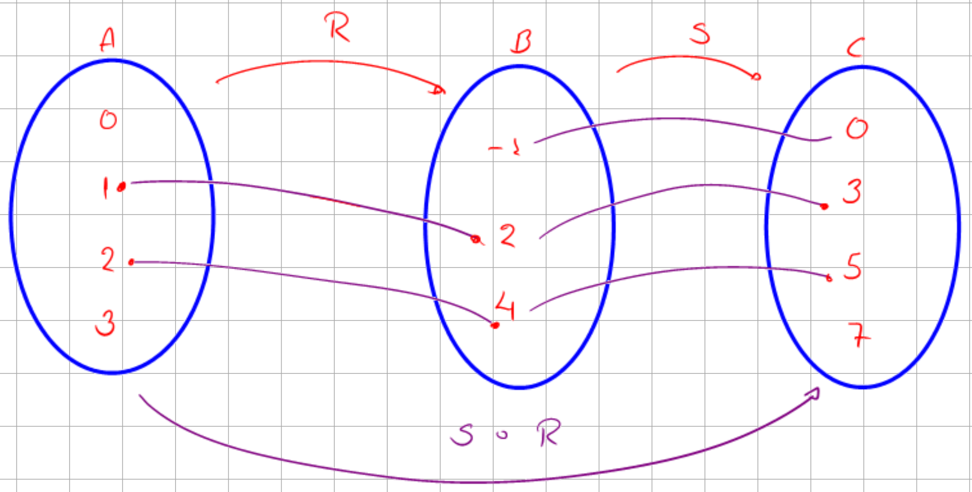
c) Determinar el dominio y la imagen de las tres relaciones

$A = \{0, 1, 2, 3\}$, $B = \{-1, 2, 4\}$ y $C = \{0, 3, 5, 7\}$

a) $R = \{(1, 2)(2, 4)\}$ $S = \{(-1, 0)(2, 3)(4, 5)\}$

$y = 2x$ $z = y + 1$

b) $S \circ R = \{(1, 3)(2, 5)\}$



$\{(1, 3)(2, 5)\}$

EJERCICIO

Sean los conjuntos $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

$B = \{2, 3, 4, 5\}$

$C = \{-1, 1, 3, 5, 7\}$

Se definen las relaciones $R \subset AxB$ y $S \subset BxC$ mediante

$$x \, R \, y \iff y = x^2 + 2 \quad , \qquad y \, S \, z \iff z = 2y - 3$$

a) Determinar R, S y $S \circ R$ por extensión

b) Determinar R^{-1}, S^{-1}, $(S \circ R)^{-1}$ y $R^{-1} \circ S^{-1}$ por extensión