EJERCICIOS VARIADOS

EJEMPLO

$A = B \iff A \subset B \wedge B \subset A$

$(p \vee q) \wedge r \equiv (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$

Demostrar: $(A \cup B)\text{x } C = (A \text{ x } C) \cup (B \text{ x } C)$

Dem.

Sea $(x,y) \in (A \cup B) \times C \iff x \in (A \cup B) \wedge y \in C$, def prod. cart.

$\iff (x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C$, def. unión

$\iff (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C)$, dist. $\wedge \vee$

$\iff (x,y) \in (A \times C) \vee (x,y) \in B \times C$, def. prod cart

$\iff (x,y) \in (A \times C) \cup (B \times C)$, def unión

$\therefore (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

23. Para $n \in \mathbb{Z}$, sea $A_n = \{a \in \mathbb{Z} | a \leq n\}$. Encontrar los siguientes conjuntos.

(a) $A_3 \cup A_{-3}$

(b) $A_3 \cap A_{-3}$

(c) $A_3 \cap (A_{-3})^c$

(d) $\cap_{i=0}^{4} A_i$

$A_0 = \{a \in \mathbb{Z} / a \leq 0\}$

$A_0 = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}$

$A_5 = \{\ldots -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

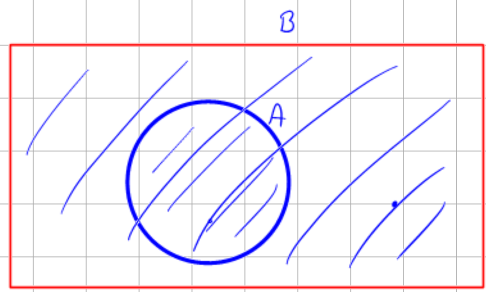
Sol.

a) $A_3 \cup A_{-3} = A_3$

porque $A_{-3} \subset A_3$ ✓

b) $A_3 \cap A_{-3} = A_{-3}$

porque $A_{-3} \subset A_3$ ✓



c) $A_3 \cap (A_{-3})^c = A_3 - A_{-3}$

i) $A \subset B$ ✓

$A \cup B = B$

$A \cap B = A$

Como $A_3 = \{\ldots -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

$A_{-3} = \{\ldots -4, -3\}$

$(A_{-3})^c = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \ldots\} \Rightarrow A_3 \cap (A_{-3})^c = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

d) $\bigcap_{i=0}^{4} A_i = \{[(A_0 \cap A_1)\cap A_2]\cap A_3\}\cap A_4$, $A_0 \subset A_1 \Rightarrow A_0 \cap A_1 = A_0$

$A_0 \subset A_2$

$A_0 \subset A_3$

$A_0 \subset A_4$

$= \{[A_0 \cap A_2]\cap A_3\}\cap A_4$

$= \{A_0 \cap A_3\}\cap A_4$

$= A_0 \cap A_4$

$= A_0$

24. Sean A y B conjuntos tales que

(a) $A \cap B = A$. (b) $A \cup B = A$.

¿Qué puedes concluir? ¿Por qué?

a) $A \cap B = A \Rightarrow A \subset B$ ✓

$x \in A \Rightarrow x \in A \cap B$, hipótesis

$\Rightarrow x \in A \wedge x \in B$, def. inter.

$\Rightarrow x \in B$, L. simplif.

$\therefore A \subset B$

b) $x \in B \Rightarrow x \in A \vee x \in B$, L. adición

$\Rightarrow x \in A \cup B$, def unión

$\Rightarrow x \in A$, hip.

$\therefore B \subset A$

35. Sean A, B, C y D subconjuntos de algún conjunto universal U. Use las identidades de la teoría de conjuntos para simplificar las expresiones

(a) $[(A \cup B)^c \cap (A^c \cup C)^c]^c \setminus D^c$ $= D$ ✓✓✓

(b) $\{[C \cup (B \setminus A^c)] \cap [B \setminus (C \cup A)]^c\} \cup B$ $= B \cup C$

(c) $\{(A\cup B)\cap[(B\setminus A)\cup(A\cap B)]\}\cap[A\cup(A\cup B)^c]$ $= A \cap B$ ✓

(d) $[(A \cup B^c) \oplus (B \setminus A)]^c \cup [(A \cap B)^c - (B \setminus A)]$ $= A \cup B^c$ ✓✓

b) $\{[C \cup (B \cap A)] \cap [B \cap (C \cup A)^c]^c\} \cup B$

$= \{[C \cup (A \cap B)] \cap [B^c \cup (C \cup A)]\} \cup B$

$=$

$= \{[C \cup (A \cap B)] \cup B\} \cap \{[B^c \cup C \cup A] \cup B\}$

$= [C \cup B] \cap U = B \cup C$

$\{B^c \cup C \cup A \cup B\}$

$(B^c \cup B) \cup (C \cup A)$

$U \cup (C \cup A)$

U

$$\left\{[(A\cup B^c)\cup(B\setminus A)]\setminus[(A\cup B^c)\cap(B\setminus A)]\right\}^c\cup\left[(A\cap B)^c\cap\underline{(B\cap A^c)}^c\right]$$

$$=\left\{[(A\cup B^c)\cup(B\cap A^c)]\cap[(A\cup B^c)\cap(B\cap A^c)]^c\right\}^c\cup\left[(A\cap B)^c\cap(B^c\cup A)\right]$$

$$=\left\{[(A\cup B^c)\cup(B\cap A^c)]^c\cup[(A\cup B^c)\cap(B\cap A^c)]\right\}\cup\left[(A^c\cup B^c)\cap(B^c\cup A)\right]$$

$(A^c\cap B)^c\cap(B\cap A^c)$

$$=\left\{[(A\cup B^c)^c\cap(B\cap A^c)^c]\cup[(A\cap B\cap A^c)\cup(B^c\cap B\cap A^c)]\right\}\cup\underbrace{\left\{[(A^c\cup B^c)\cap B^c]\cup[(A^c\cup B^c)\cap A]\right\}}$$

Corrección del ejercicio...
Había un error.

$\{[B^c]\cup[(A^c\cap A)\cup(B^c\cap A)]$

$\{B^c\cup[\emptyset\cup(B^c\cap A)]$

$\{B^c\cup(B^c\cap A)\}$

B^c

$$=\left\{[(A^c\cap B)\cap(A^c\cap B)^c]\cup[\emptyset\cup\emptyset]\right\}\cup B^c$$

$$=\{\emptyset\cup\emptyset\}\cup B^c=\emptyset\cup B^c=B^c$$

46. Sean los conjuntos A y B, tales que

(a) $|A\oplus B|=10$ y $|A\cup B|=25$. ¿Cuántos elementos tiene $A\cap B$?

(b) $|A\cup B|=18$ y $|A\cap B|=7$. ¿Cuántos elementos tiene $A\oplus B$?

cardinal de A $\quad \eta(A)$

$|A|$

$\eta(A\cup B)=\eta(A)+\eta(B)-\eta(A\cap B)$

a) $\eta(A\Delta B)=\eta(A\cup B)-\eta(A\cap B)$

$10=25-\eta(A\cap B)\Rightarrow\eta(A\cap B)=25-10=15$

72. Demostrar que $\bigcup_\alpha$ y $\bigcap_\alpha$ se distribuyen sobre el producto cartesiano:

a) $$\left(\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha\right)\times\left(\bigcup_{\beta\in J}B_\beta\right)=\bigcup_{\substack{\alpha\in I\\ \beta\in J}}(A_\alpha\times B_\beta),$$

b) $$\left(\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha\right)\times\left(\bigcap_{\beta\in J}B_\beta\right)=\bigcap_{\substack{\alpha\in I\\ \beta\in J}}(A_\alpha\times B_\beta).$$

$\bigcup_{i\in J}A_i \qquad J=\{1,2,3\}$

$=A_1\cup A_2\cup A_3$

a)

Sea $(x,y)\in\left(\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha\right)\times\left(\bigcup_{\beta\in J}B_\beta\right)\Leftrightarrow x\in\bigcup_{\alpha\in J}A_\alpha\wedge y\in\bigcup_{\beta\in J}B_\beta$

$\Leftrightarrow \underline{x\in A_\alpha}$, para algun $\alpha\in J\wedge\underline{y\in B_\beta}$ para algún $\beta\in J$.

$\Leftrightarrow(x,y)\in\underline{A_\alpha\times B_\beta}$, para algun $\alpha\in J$, $\beta\in J$

$\Leftrightarrow(x,y)\in\bigcup_{\substack{\alpha\in J\\ \beta\in J}}(A_\alpha\times B_\beta)$

66. Si $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \cdots \subseteq A_n$, demuestre

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_n, \quad \text{y} \quad \bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1$$

$A \subset B \Rightarrow A \cup B = B$

$A \cap B = A$

$A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow x \in A_1 =$

$\Rightarrow x \in A_2$

$A_1 \cap A_2 = A_1$

Sol. $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1$

Sea $x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \iff x \in (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_n)$

$\iff \underbrace{x \in A_1 \wedge x \in A_2}_{} \wedge \ldots \wedge x \in A_n$

$\iff \underbrace{x \in A_1 \wedge \ldots}_{} \wedge x \in A_n$

$\iff x \in A_1 \wedge \ldots \wedge x \in A_n$

$\iff x \in A_1$

$x \in \bigcap_{i=1}^{n} A_i \iff \forall i = \{1, \ldots, n\} \; x \in A_i$, como $A_1 \subseteq A_i$

$\iff \forall i = \{1, \ldots, n\} \; x \in A_1 \cap A_i$

$\iff x \in A_1$

INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Es un método de demostración. Se aplica para demostrar propiedades matemáticas con números naturales.

La demostración consiste en 3 pasos.

1. Verificar que la propiedad sea verdadera para $n = 1$ ✓

2. Suponer que la propiedad se cumple para $\boxed{n = k}$

   entonces demostrar que se cumple $\boxed{n = k+1}$

3. Concluir que la prop. se cumple para $n \in \mathbb{N}$

Ejm. Demostrar que $1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$P(n): 1+2+3+\ldots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dem.

1. Verificar para $n=1$

$$P(1): 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$1 = 1 \quad [V]$$

2. Suponemos verdad para $n=k$

$$P(k): \underbrace{1+2+3+\ldots+k}_{} = \frac{k(k+1)}{2} \quad \text{[hipótesis]}$$

entonces veamos si es verdad para $n=k+1$.

$$P(k+1): 1+2+3+\ldots+k+(k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \; ?$$

Dem.

$$\underbrace{1+2+3+\ldots+k}_{}+(k+1) = \frac{k(k+1)}{2}+(k+1)$$

$$= \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

3. $\therefore$ $P(n)$ se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$

Ejm. Dem. que.

$$P(n): 2+4+6+8+\ldots+2n = n(n+1)$$

Dem. por inducción mat.

1. Verif. para $n=1$;

$$P(1): 2 = 1(1+1)$$

$$2 = 2 \quad V$$

2. Sup. $n = k$.

$P(k): 2+4+6+\dots+2k = k(k+1)$ [Hipótesis]

entonces veamos para $n = k+1$

$P(k+1): 2+4+6+\dots+2(k)+(2k+2) = (k+1)(k+2)$?

Dem.

$$\underbrace{2+4+6+\dots+2(k)}_{\text{Hip.}}+(2k+2) = k(k+1)+(2k+2)$$

$$= k(k+1)+2(k+1)$$

$$= (k+1)(k+2)$$

3. $\therefore P(n)$ es V, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ejm. Dem. que si $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \subseteq A_n$

entonces $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1$

Demostramos por inducción matemática.

1. Verif. para $n=1$

$$A_1 = A_1 \quad V$$

2. Sup. cierto para $n = k$.

$$\boxed{\bigcap_{i=1}^{k} A_i = A_1}$$ [Hipótesis]

entonces. veamos para $n = k+1$

$$\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i = A_1 \ ?$$

Dem. $\displaystyle\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i = \left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \cap A_{k+1}$

$$\underbrace{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k}_{\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right)} \cap A_{k+1}$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^{k} A_i\right) \cap A_{k+1}$$

$= A_1 \cap A_{k+1}$, [hipótesis]

$= A_1$, $\underline{A_1 \subseteq A_{k+1}}$

3 $\therefore$ $\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Notación sumatoria $\sum_{i=1}^{5} a_i = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}$

Dem. que $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Demostramos por inducción

1. Verif para $n=1$

$$\sum_{i=1}^{1} i = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$1 = 1 \quad V$$

2. Sup. cierto para $n=k$.

$$\sum_{i=1}^{k} i = \frac{k(k+1)}{2} \qquad \text{[Hipótesis]}$$

entonces veamos para $n = k+1$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad ?$$

Dem.

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \sum_{i=1}^{k} i + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{i=1}^{3} a_i + a_4 \qquad \sum_{i=1}^{m} 3 \cdot i = \sum_{i=1}^{m-1} 3i + \underline{3m}$$

$$\sum_{i=1}^{4} 2^i = \sum_{i=1}^{3} 2^i + 2^4 \qquad \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} + \frac{1}{n+1}$$

74. Demuestre que un conjunto con n elementos tiene 2^n subconjuntos.

Dem. Sea $A = \{a, b, c\} \Rightarrow P(A)$ tiene $2^3 = \boxed{8}$ elem.

Sea A un conjunto con n elementos.

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}, \; n \geq 0$$

Subconj de 0 elementos

Subconj de 1 elem ...

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n}$$

$$= \binom{n}{0} 1^n + \binom{n}{1} 1^{n-1} \cdot 1^1 + \binom{n}{2} 1^{n-2} \cdot 1^2 + \cdots + \binom{n}{n} \cdot 1^n$$

$$= (1 + 1)^n$$

$= 2^n$ subconjuntos de A

$\emptyset \rightarrow \binom{3}{0} = 1$

$\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$ $\rightarrow \binom{3}{1} = 3$

$\{a, b\}$, $\{a, c\}$, $\{b, c\}$ $\rightarrow \binom{3}{2} = 3$ ✓

$\{a, b, c\} = A \rightarrow \binom{3}{3} = 1$ ✓

Demostrar que si el producto ab de dos números enteros es par, entonces a es par o b es par

Ejm. Demuestra que

$$\boxed{1+nx \leq (1+x)^n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Dem.

1. Verif. para $n=1$: $1+x \leq (1+x)^1$

$1+x \leq 1+x$ V

2. Sup. cierto para $n=k$

$\underline{1+kx} \leq \underline{(1+x)^k}$ [Hipotesis]

entonces veamos para $n=k+1$ $\left[1+(k+1)x \leq (1+x)^{k+1} \right]$

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k \cdot (1+x) \geq (1+kx)(1+x)$$

$$= 1+kx + (1+kx)\cdot x$$

$$= 1+kx + x + kx^2$$

$$= 1+(k+1)x + kx^2$$

$x^2 \geq 0$
$k \in \mathbb{N}$

$$\geq 1+(k+1)x$$

· **Ejercicios**

Dem. que $1+2n \leq 3^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Verif. para $n=1$.

$1+2 \leq 3^1$

$3 \leq 3$ V

2. Sup. cierto para $n=k$, $k \in \mathbb{N}$

$1+2k \leq 3^k$ [Hip.]

entonces veamos para $n=k+1$

$$1+2(k+1) \leq 3^{k+1} \quad ?$$

Dem.

$$3^{k+1} = 3^k \cdot 3 \geq (1+2k)\cdot 3$$

$$= 3 + 6k$$

$$= 1 + \underline{2k} + 4k + \underline{2}$$

$$= 1 + 2(k+1) + 4k \quad , \quad k \in \mathbb{N}, \ \underline{4k} \in \mathbb{N}$$

$$\geq 1 + 2(k+1)$$

2. **n^2 +n es número par para todo n natural**

Es decir. $P(n): n^2 + n = 2t \ , \ t \in \mathbb{N}$

1. Verif. para $n = 1$

$$1 + 1 = 2 = 2 \cdot 1 \ , \ \exists 1 \in \mathbb{N}$$

2. Sup. cierto para $n = k$.

$$k^2 + k = 2t \ , \ \exists t \in \mathbb{N} \qquad [Hip].$$

entonces veamos para $n = k+1$

$$(k+1)^2 + (k+1) = 2 \cdot r \qquad \exists r \in \mathbb{N} \ ?$$

Dem

$$(k+1)^2 + (k+1) = \underline{k^2} + 2k + 1 + \underline{k} + 1$$

$$= \underbrace{k^2 + k}_{Hip} + 2k + 2$$

$$= 2t + 2k + 2$$

$$= 2\underbrace{(t + k + 1)}_{r}$$

$$= 2r \ , \ \exists r \in \mathbb{N}$$

jueves a hrs 20:00 se recuperará una clase