NEGACIÓN DE UNA IMPLICACIÓN

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv (p \wedge \sim q)$$

Ejemplo. Escriba la negación de cada implicación

1. Si estudio, entonces apruebo.

Sol. Sea p: estudio

q: apruebo

Simbólicamente: $p \Rightarrow q$

negación: $p \wedge \sim q$

Lenguaje común: Estudio y no apruebo.

2. Te acompaño al cine, si me ayudas con mis tareas.

Sol. Reescribiendo la proposición.

Si me ayudas con mis tareas, entonces te acompaño al cine.

Luego, p: me ayudas con mis tareas

q: te acompaño al cine.

Simbólicamente: $p \Rightarrow q$

Negación: $p \wedge \sim q$

Leng. Común: Me ayudas con mis tareas y no te acompaño al cine.

3. Estaré feliz siempre que deje de llover.

Sol.

Reescribiendo la proposición: Si deja de llover, entonces estaré feliz.

Sean p: deja de llover

q: estaré feliz.

Simbólicamente. $p \Rightarrow q$

Negación: $p \wedge \sim q$

Leng. Común: Deja de llover y no estoy feliz.

5. *ALGEBRA DE PROPOSICIONES*

Son operaciones lógicas que se realizan en una fórmula proposicional, aplicando adecuadamente ciertas reglas básicas llamadas leyes lógicas. Es decir, al igual que en álgebra básica donde la simplificación de expresiones algebraicas es muy importante, en lógica también existe la necesidad de simplificar fórmulas proposicionales complejas, a través de ciertas equivalencias llamadas leyes lógicas, que a continuación se listan.

5.1. *LEYES LÓGICAS*

Son fórmulas proposicionales lógicamente equivalentes, estas son:

1) Leyes de idempotencia: $p \wedge p \equiv p$; $p \vee p \equiv p$

2) Leyes conmutativas: $p \wedge q \equiv q \wedge p$; $p \vee q \equiv q \vee p$

3) Leyes asociativas:

$$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$$

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

4) Leyes de negación:

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

$$p \wedge \sim p \equiv F \quad ; \quad p \vee \sim p \equiv V$$

5) Leyes de identidad: $p \wedge V \equiv p$; $p \vee F \equiv p$

6) Leyes de De Morgan:

$$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

7) Definición de implicación: $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

8) Leyes distributivas:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

9) Leyes de absorción:

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p \quad ; \quad p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

$$p \wedge F \equiv F \quad ; \quad p \vee V \equiv V$$

10) Definición de doble implicación: $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

5.2. *SIMPLIFICACIÓN DE FÓRMULAS PROPOSICIONALES*

Se trata de trasformar una fórmula proposicional en otra equivalente a ella pero lo más reducida posible. Para lo cual se debe usar oportuna y correctamente las leyes lógicas. Así mismo, deben especificarse en cada paso la ley o leyes que fueron utilizados.

Ejemplos: En cada uno de los siguientes incisos, simplificar la proposición dada:

a) Simplificar : $p \wedge (q \vee \sim q)$

como $q \vee \sim q \equiv V$ por la ley de negación (L. neg.)

luego se tiene:

$p \wedge (q \vee \sim q) \equiv p \wedge V$

$\equiv P$, según la ley de identidad (L. ident.)

b) Simplificar : $\sim q \vee (\sim p \wedge p)$

como $\sim p \wedge p \equiv F$, según la ley de negación (L. neg.)

luego se tiene:

$\sim q \vee (\sim p \wedge p) \equiv \sim q \vee F$

$\equiv \sim q$, según la ley de identidad (L.ident.)

c) Simplificar : $\sim (p \wedge \sim q) \vee q$

Por la ley de De Morgan (L. D M), $\sim (p \wedge \sim q) \equiv \sim p \vee q$

luego se tiene:

$\sim (p \wedge \sim q) \vee q \equiv (\sim p \vee q) \vee q$

$\equiv \sim p \vee (q \vee q)$, según la ley asociativa (L.asoc.)

$\equiv \sim p \vee q$, según la ley de idempotencia (L. Idem.)

d) Simplificar : $\sim (p \rightarrow \sim q) \wedge p$

Por la definición de implicación (d.imp.), $p \rightarrow \sim q \equiv \sim p \vee \sim q$

luego se tiene:

$\sim (p \rightarrow \sim q) \wedge p \equiv \sim (\sim p \vee \sim q) \wedge p$

Según la Ley de De Morgan (L.D.M.), $\sim (\sim p \vee \sim q) \equiv p \wedge q$.

Por tanto,

$\sim (p \rightarrow \sim q) \wedge p \equiv (p \wedge q) \wedge p$

$\equiv (p \wedge p) \wedge q$, según la Ley asociativa (L.asoc.)

$\equiv p \wedge q$, según la ley idempotencia (L.Idem)

e) Simplificar : $q \wedge (\sim p \rightarrow \sim q)$

Por definición de implicación (D.Imp.), $\sim p \rightarrow \sim q \equiv p \vee \sim q$

luego se tiene:

$q \wedge (\sim p \rightarrow \sim q) \equiv q \wedge (p \vee \sim q)$

$\equiv (q \wedge p) \vee (q \wedge \sim q)$, según la Ley distributiva (L.dist)

$\equiv (q \wedge p) \vee F$, según la ley de negación (L. Neg.)

$\equiv q \wedge p$, según la ley de identidad (L. ident)

f) Simplificar : $(\sim p \rightarrow q) \wedge (p \vee \sim q)$

por la definición de implicación (D. Imp), $\sim p \rightarrow q \equiv p \vee q$

luego se tiene:

$(\sim p \rightarrow q) \wedge (p \vee \sim q) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee \sim q)$

$\equiv p \vee (q \wedge \sim q)$, según la Ley distributiva (L. dist.)

$\equiv p \vee F$, según la ley de negación (L. neg.)

$\equiv p$, según la ley de idempotencia (L. Idem)

g) Simplificar : $p \vee \sim (p \rightarrow r)$

como $p \rightarrow r \equiv \sim p \vee r$, según definición de implicación (D.Imp.)

luego

$p \vee \sim (p \rightarrow r) \equiv p \vee \sim (\sim p \vee r)$

$\equiv p \wedge (p \wedge \sim r)$, según la L. de De Morgan (L.D.M)

$\equiv p$, según la Ley de absorción (L. Abs)

Ejercicios.

Página 36 del libro: Algebra Moderna, Sebastian Lazo.

Ej. 30, 35, 40 y 45