

EJERCICIOS VARIADOS

EJEMPLO

Demostrar: $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Dem.

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

$$(P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$$

Sea $(x, y) \in (A \cup B) \times C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge y \in C$, def. prod. cart.

$$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C, \text{ def. unión}$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C), \text{ dist. } \wedge \vee$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \vee (x, y) \in (B \times C), \text{ def. prod. cart.}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C), \text{ def. unión}$$

$$\therefore (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

23. Para $n \in \mathbb{Z}$, sea $A_n = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \leq n\}$.
Encontrar los siguientes conjuntos.

(a) $A_3 \cup A_{-3}$

(c) $A_3 \cap (A_{-3})^c$

(b) $A_3 \cap A_{-3}$

(d) $\bigcap_{i=0}^4 A_i$

$$A_0 = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \leq 0\}$$

$$A_0 = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$$

$$A_5 = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Sol.

a) $A_3 \cup A_{-3} = A_3$

porque $A_{-3} \subset A_3$ ✓

b) $A_3 \cap A_{-3} = A_{-3}$

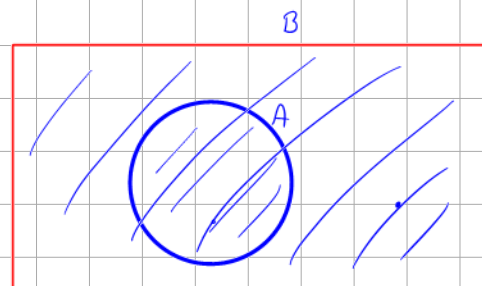
porque $A_{-3} \subset A_3$ ✓

c) $A_3 \cap (A_{-3})^c = A_3 - A_{-3}$

Como $A_3 = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

$$A_{-3} = \{\dots, -4, -3\}$$

$$(A_{-3})^c = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\} \Rightarrow A_3 \cap (A_{-3})^c = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$



i) $A \subset B$ ✓

$$A \cup B = B$$

$$A \cap B = A$$

$$\begin{aligned}
 d) \quad \bigcap_{i=0}^4 A_i &= \{[(A_0 \cap A_1) \cap A_2] \cap A_3\} \cap A_4, & A_0 \subset A_1 &\Rightarrow A_0 \cap A_1 = A_0 \\
 &= \{[A_0 \cap A_2] \cap A_3\} \cap A_4 & A_0 &\subset A_2 \\
 &= \{A_0 \cap A_3\} \cap A_4 & A_0 &\subset A_3 \\
 &= A_0 \cap A_4 & A_0 &\subset A_4 \\
 &= A_0
 \end{aligned}$$

24. Sean A y B conjuntos tales que

(a) $A \cap B = A$.

(b) $A \cup B = A$.

¿Qué puedes concluir? ¿Por qué?

a) $\overbrace{A \cap B = A} \Rightarrow A \subset B$ ✓
 $x \in A \Rightarrow x \in A \cap B$, hipótesis
 $\Rightarrow x \in A \wedge x \in B$, def. inter.
 $\Rightarrow x \in B$, L. simplif.
 $\therefore A \subset B$

b) $x \in B \Rightarrow x \in A \vee x \in B$, L. adición
 $\Rightarrow x \in A \cup B$, def. unión
 $\Rightarrow x \in A$, hip.
 $\therefore B \subset A$

35. Sean A , B , C y D subconjuntos de algún conjunto universal U . Use las identidades de la teoría de conjuntos para simplificar las expresiones

(a) $[(A \cup B)^c \cap (A^c \cup C)^c]^c \setminus D^c$

$= \underline{D}$ ✓✓

b) $\{[C \cup (B \setminus A^c)] \cap [B \setminus (C \cup A)]^c\} \cup B$

$= B \cup C$

(c) $\{(A \cup B) \cap [(B \setminus A) \cup (A \cap B)]\} \cap [A \cup (A \cup B)^c] = \underline{A \cap B}$ ✓

(d) $[(A \cup B^c) \oplus (B \setminus A)]^c \cup [(A \cap B)^c - (B \setminus A)] = \underline{A \cup B^c}$ ✓✓

b) $\{[C \cup (B \cap A)] \cap [B \cap (C \cup A)^c]^c\} \cup B$

$= \{[C \cup (A \cap B)] \cap [B^c \cup (C \cup A)]\} \cup B$

$= \{[C \cup (A \cap B)] \cup B\} \cap \{[B^c \cup C \cup A] \cup B\}$

$= [C \cup B] \cap U = B \cup C$

$\{B^c \cup C \cup A \cup B\}$
 $(B \cup B) \cup (C \cup A)$
 $U \cup (C \cup A)$
 U

$$\begin{aligned}
 & \left\{ [(A \cup B^c) \cup (B \cap A)] \cap [(A \cup B^c) \cap (B \cap A)]^c \right\}^c \cup \left\{ [(A \cap B)^c \cap (B \cap A^c)^c] \right\} \\
 &= \left\{ [(A \cup B^c) \cup (B \cap A)] \cap [(A \cup B^c) \cap (B \cap A)]^c \right\}^c \cup \left\{ (A \cap B)^c \cap (B^c \cup A) \right\} \\
 &= \left\{ [(A \cup B^c) \cup (B \cap A)]^c \cup [(A \cup B^c) \cap (B \cap A)] \right\} \cup \left\{ (A^c \cup B^c) \cap (B^c \cup A) \right\} \\
 &= \left\{ [(A \cup B^c)^c \cap (B \cap A)^c] \cup [(A \cap B \cap A^c) \cup (B^c \cap B \cap A^c)] \right\} \cup \left\{ (A^c \cup B^c) \cap B^c \cup (A^c \cup B^c) \cap A \right\}
 \end{aligned}$$

Corrección del ejercicio...
Había un error.

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ [(A^c \cap B) \cap (A^c \cap B)^c] \cup [\emptyset \cup \emptyset] \right\} \cup B^c \\
 &= \{ \emptyset \cup \emptyset \} \cup B^c = \emptyset \cup B^c = B^c
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \{ B^c \} \cup \{ (A^c \cap A) \cup (B^c \cap A) \} \\
 & \{ B^c \} \cup \{ \emptyset \cup (B^c \cap A) \} \\
 & \{ B^c \} \cup \{ B^c \cap A \} \\
 & B^c
 \end{aligned}$$

46. Sean los conjuntos A y B , tales que

(a) $|A \oplus B| = 10$ y $|A \cup B| = 25$. ¿Cuántos elementos tiene $A \cap B$?

cardinal de A $\eta(A)$
 $|A|$

(b) $|A \cup B| = 18$ y $|A \cap B| = 7$. ¿Cuántos elementos tiene $A \oplus B$?

$$\eta(A \cup B) = \eta(A) + \eta(B) - \eta(A \cap B)$$

$$a) \quad \eta(A \oplus B) = \eta(A \cup B) - \eta(A \cap B)$$

$$10 = 25 - \eta(A \cap B) \Rightarrow \eta(A \cap B) = 25 - 10 = 15$$

72. Demostrar que $\bigcup_{\alpha} y \bigcap_{\alpha}$ se distribuyen sobre el producto cartesiano:

$$a) \quad \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha} \right) \times \left(\bigcup_{\beta \in J} B_{\beta} \right) = \bigcup_{\substack{\alpha \in I \\ \beta \in J}} (A_{\alpha} \times B_{\beta}),$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

$$I = \{1, 2, 3\}$$

$$b) \quad \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha} \right) \times \left(\bigcap_{\beta \in J} B_{\beta} \right) = \bigcap_{\substack{\alpha \in I \\ \beta \in J}} (A_{\alpha} \times B_{\beta}).$$

$$= A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

a)

$$\text{Sea } (x, y) \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha} \right) \times \left(\bigcup_{\beta \in J} B_{\beta} \right) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha} \wedge y \in \bigcup_{\beta \in J} B_{\beta}$$

$$\Leftrightarrow \underline{x \in A_{\alpha}}, \text{ para algun } \alpha \in I \wedge \underline{y \in B_{\beta}} \text{ para algun } \beta \in J.$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in \underline{A_{\alpha} \times B_{\beta}}, \text{ para algun } \alpha \in I \wedge \beta \in J$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in \bigcup_{\substack{\alpha \in I \\ \beta \in J}} (A_{\alpha} \times B_{\beta})$$

66. Si $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n$, demuestre

$$\bigcup_{i=1}^n A_i = A_n, \quad \text{y} \quad \bigcap_{i=1}^n A_i = A_1$$

$$A \subseteq B \Rightarrow A \cup B = B$$

$$A \cap B = A$$

$$A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow x \in A_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x \in A_2$$

$$A_1 \cap A_2 = A_1$$

Sol. $\bigcap_{i=1}^n A_i = A_1$

Sea $x \in \bigcap_{i=1}^n A_i \Leftrightarrow x \in (A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap \dots \cap A_n)$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \dots \wedge x \in A_n}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x \in A_1 \wedge \dots \wedge x \in A_n}$$

$$\Leftrightarrow x \in A_1 \wedge \dots \wedge x \in A_n$$

$$\Leftrightarrow x \in A_1$$

$$x \in \bigcap_{i=1}^n A_i \Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad x \in A_i, \quad \text{como } A_1 \subseteq A_i$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in \{1, \dots, n\} \quad x \in A_1 \cap A_i$$

$$\Leftrightarrow x \in A_1$$

INDUCCIÓN MATEMÁTICA

Es un método de demostración. Se aplica para demostrar propiedades matemáticas con números naturales.

La demostración consiste en 3 pasos.

1. Verificar que la propiedad sea verdadera para $n=1$

✓

2. Suponer que la propiedad se cumple para $n=k$

entonces demuestra que se cumple $n=k+1$

3. Concluir que la prop. se cumple para $n \in \mathbb{N}$

Ejm. Demostrar que $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$P(n): 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Dem.

1. Verificar para $n=1$

$$P(1): 1 = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$1 = 1 \quad [V]$$

2. Suponemos verdad para $n=k$

$$P(k): \underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + k} = \frac{k(k+1)}{2} \quad [\text{hipótesis}]$$

entonces veamos si es verdad para $n=k+1$.

$$P(k+1): 1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad ?$$

Dem.

$$\begin{aligned} \underbrace{1 + 2 + 3 + \dots + k} + (k+1) &= \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) \\ &= \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

3. $\therefore P(n)$ se cumple $\forall n \in \mathbb{N}$

Ejm. Dem. que.

$$P(n): 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n = n(n+1)$$

Dem. por inducción mat.

1. Verif. para $n=1$:

$$P(1): 2 = 1(1+1)$$

$$2 = 2 \quad V$$

2. Sup. $n = k$.

$$P(k) : 2 + 4 + 6 + \dots + 2k = k(k+1) \quad [\text{Hipótesis}]$$

entonces veamos para $n = k+1$

$$P(k+1) : 2 + 4 + 6 + \dots + 2(k) + (2k+2) = (k+1)(k+2) \quad ?$$

Dem.

$$\begin{aligned} \underbrace{2 + 4 + 6 + \dots + 2(k)}_{\text{Hip.}} + (2k+2) &= k(k+1) + (2k+2) \\ &= k(k+1) + 2(k+1) \\ &= (k+1)(k+2) \end{aligned}$$

3. $\therefore P(n)$ es $\forall, \forall n \in \mathbb{N}$.

Ejm. Dem. que si $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \subseteq A_n$

$$\text{entonces } \bigcap_{i=1}^n A_i = A_1$$

Demostremos por inducción matemática.

1. Verif. para $n=1$

$$A_1 = A_1 \quad \checkmark$$

2. Sup. cierto para $n = k$.

$$\boxed{\bigcap_{i=1}^k A_i = A_1} \quad [\text{Hipótesis}]$$

entonces. veamos para $n = k+1$

$$\bigcap_{i=1}^{k+1} A_i = A_1 \quad ?$$

$$\begin{aligned} \text{Dem. } \bigcap_{i=1}^{k+1} A_i &= \left(\bigcap_{i=1}^k A_i \right) \cap A_{k+1} \\ &= \underbrace{A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_k}_{\left(\bigcap_{i=1}^k A_i \right)} \cap A_{k+1} \end{aligned}$$

$$= A_1 \cap A_{k+1}, \quad [\text{hipótesis}]$$

$$= A_1, \quad \underline{A_1 \subseteq A_{k+1}}$$

$$3. \quad \text{e.o.} \quad \bigcap_{i=1}^n A_i = A_1, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Notación sumatoria $\sum_{i=1}^5 a_i = \underbrace{a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5}$

Dem. que $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$

Demostramos por inducción

1. Verif para $n=1$

$$\sum_{i=1}^1 i = \frac{1(1+1)}{2}$$

$$1 = 1 \quad \checkmark$$

2. Sup. cierto para $n=k$.

$$\sum_{i=1}^k i = \frac{k(k+1)}{2} \quad [\text{Hipótesis}]$$

entonces veamos para $n=k+1$

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2} \quad ?$$

Dem.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k+1} (i) &= \sum_{i=1}^k i + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} \\ &= \frac{(k+1)(k+2)}{2} \end{aligned}$$

$$\sum_{i=1}^4 a_i = \sum_{i=1}^3 a_i + a_4$$

$$\sum_{i=1}^4 2^i = \sum_{i=1}^3 2^i + 2^4$$

$$\sum_{i=1}^m (3 \cdot i) = \sum_{i=1}^{m-1} 3i + \underline{3m}$$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{i} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} + \left(\frac{1}{n+1} \right)$$

74. Demuestre que un conjunto con n elementos tiene 2^n subconjuntos.

Dem. Sea $A = \{a, b, c\} \Rightarrow P(A)$ tiene $2^3 = 8$ elem.

Sea A un conjunto con n elementos.

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}, n \geq 0$$

Subconj de
0 elementos

Subconj de
1 elem

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n}$$

$$= \binom{n}{0} \cdot 1^n + \binom{n}{1} \cdot 1^{n-1} \cdot 1 + \binom{n}{2} \cdot 1^{n-2} \cdot 2 + \dots + \binom{n}{n} \cdot 1^n$$

$$= (1 + 1)^n$$

$$= 2^n \text{ subconjuntos de } A$$

$$\emptyset \rightarrow \binom{3}{0} = 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \{a\} \\ \{b\} \\ \{c\} \end{array} \right\} \rightarrow \binom{3}{1} = 3$$

$$\left. \begin{array}{l} \{a, b\} \\ \{a, c\} \\ \{b, c\} \end{array} \right\} \rightarrow \binom{3}{2} = 3$$

$$\{a, b, c\} = A \rightarrow \binom{3}{3} = 1$$

Demostrar que si el producto ab de dos números enteros es par, entonces a es par o b es par

Ejm. Demuestra que

$$1 + nx \leq (1+x)^n$$

para todo $n \in \mathbb{N}$

Dem.

1. Verif. para $n=1$: $1+x \leq (1+x)^1$

$$1+x \leq 1+x \quad \checkmark$$

2. Sup. cierto para $n=k$

$$\underline{1+kx} \leq \underline{(1+x)^k} \quad [\text{Hipotesis}]$$

entonces veamos para $n=k+1$

$$\left[1+(k+1)x \leq (1+x)^{k+1} \right]$$

$$(1+x)^{k+1} = (1+x)^k \cdot (1+x) \geq (1+kx)(1+x)$$

$$= 1+kx + (1+kx) \cdot x$$

$$= 1+kx + x + kx^2$$

$$= 1+(k+1)x + kx^2$$

$$x^2 \geq 0$$

$$k \in \mathbb{N}$$

$$\geq 1+(k+1)x$$

Ejercicios

Dem. que $1+2n \leq 3^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

1. Verif. para $n=1$.

$$1+2 \leq 3^1$$

$$3 \leq 3 \quad \checkmark$$

2. Sup. cierto para $n=k$, $k \in \mathbb{N}$

$$1+2k \leq 3^k \quad [\text{Hip.}]$$

entonces veamos para $n=k+1$

$$1 + 2(k+1) \leq 3^{k+1} \quad ?$$

Dem.

$$3^{k+1} = 3^k \cdot 3 \geq (1+2k) \cdot 3$$

$$= 3 + 6k$$

$$= 1 + \underline{2k} + 4k + \underline{2}$$

$$= 1 + 2(k+1) + 4k$$

$$\geq 1 + 2(k+1)$$

, $k \in \mathbb{N}$
 $\underline{4k \in \mathbb{N}}$

2. $n^2 + n$ es número par para todo n natural

Es decir. $P(n): n^2 + n = 2t$, $t \in \mathbb{N}$

1. Verid. para $n=1$

$$1+1 = 2 = 2 \cdot 1, \exists 1 \in \mathbb{N}$$

2. Sup. cierto para $n=k$.

$$k^2 + k = 2t, \exists t \in \mathbb{N} \quad [\text{Hip}]$$

entonces veamos para $n=k+1$

$$\text{Dem} \quad (k+1)^2 + (k+1) = 2 \cdot r \quad \exists r \in \mathbb{N} \quad ?$$

$$(k+1)^2 + (k+1) = \underline{k^2} + 2k + 1 + \underline{k+1}$$

$$= \underbrace{k^2 + k + 2k + 2}_{\text{Hip}}$$

$$= 2t + 2k + 2$$

$$= 2(\underbrace{t+k+1}_r)$$

$$= 2r, \exists r \in \mathbb{N}$$

jueves a hrs 20:00 se
recuperará una clase