Tema nº 1

Calculo I

Aplicamos los acciomas de los numeros reales demostrar los siguientes incisos

a) Si $x+z+y+z$, entonces $x=y$

Por hipotesis

$$x+z=y+z$$

$$x+z+(-z)=y+z+(-z) \quad \text{por } A4$$

$$x+[z+(-z)]=y+[z+(-z)] \quad \text{por } A1$$

$$x+0=y+0 \quad \text{por } A4$$

$$x=y \quad \text{por } A3$$

b) Si $x \cdot z = y \cdot z$ y $z \neq 0$, entonces $x=y$

Sol: Segun la hipotesis $Z=0$, entonces axioma M4 existe el numero real z^{-1} tal que $zz^{-1}=1$ por otro lado

$$xz=yz \quad \text{hipotesis}$$

$$xzz^{-1}=yzz^{-1} \quad \text{por } M4 \ (z\neq 0)$$

$$x(zz^{-1})=y(zz^{-1}) \quad \text{por } M1$$

$$x(1)=y(1) \quad \text{por } M4$$

$$x=y \quad \text{por } M3$$

Demostrar que $ab=0$ entonces $a=0$ a $b=0$

Solución

Si $ab=0$ entonces $a=0$ $b=0$

Por hipotesis como $a\neq 0$ entonces por el acciomа M4 existe el numero real a^{-1} tal que $aa^{-1}=1$ por otro lado

$ab = 0$ por hipotesis

$a^{-1}\ ab = a^{-1}(0)$ por M4

1 $b = 0$ por M4

$b = 0$ por M3

$$x^{-1} - x - 6 - 0$$

F

For

si $\underbrace{(x+2)}_{a}\ \underbrace{(x-3)}_{b} = 0$ entonces

$\underbrace{x+2}_{a} = 0$ ó $\underbrace{x-3}_{b} = 0$

$$x^2 - x - 6 = 0$$
$$(x+2)(x-3) = 0$$

$x+2$ ó $x - 3 = 0$

$x = -2$ ó $x = 2$

1.3 Desigualdades y valor absoluto

a) Valor absoluto

Definición: Sea a un numero real el valor absoluto de a se define

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a < 0 \end{cases}$$

ó

$$|a| = \text{máx}\{a, -a\}$$

Ejemplo: determinar el valor absoluto de las siguientes numeros $(-2\ ;\ -5)$

Sol: $=|-2|$ $\max\{(-2);-(2)\}$

$\max\{-2,2\}$

y

$|7|=\max\{7,-7\}=7$

y

$|x|=\max\{x,-x\}$

) Desigualdades de los numeros naturales

Definición: Si a y m de numeros naturales entonces $n<m$ si existe un numeros natural E tal que $m=n+k$

$1<2 \qquad 2=1+1$

$2<1 \qquad 1=2$

Ejemplo

1. Si n,m sean numeros reales entonces $n<m$ implica que $n+s<m+s$
2. Si n,m y S son numeros naturales, entonces $n<m$ implica $ns<ms$

Para el conjunto de los numeros enteros ($\mathbb{Z}$)

$n<m$ si $\exists\, s\in\mathbb{N}$ ∂• $m=n+s$

$a<b$ si $\exists\, s\in\mathbb{N}$ ∂• $b=a+s$

$1<2$ si $\exists\, 1\in\mathbb{N}$ ∂• $2=1+1$

$-2<0$ si $\exists\, 2\in\mathbb{N}$ ∂• $0=2+(-2)$

$0<1$ si $\exists\, 1\in\mathbb{N}$ ∂• $1=1+0$

Desigualdades en el conjunto de los numeros enteros ($\mathbb{Z}$)

Definición: Si a y b son dos numeras enteros, entonces se dice que el numero entero a es menor que el numero entero b $(a<b)$ si existe un numero natural S tal que $b=s+a$

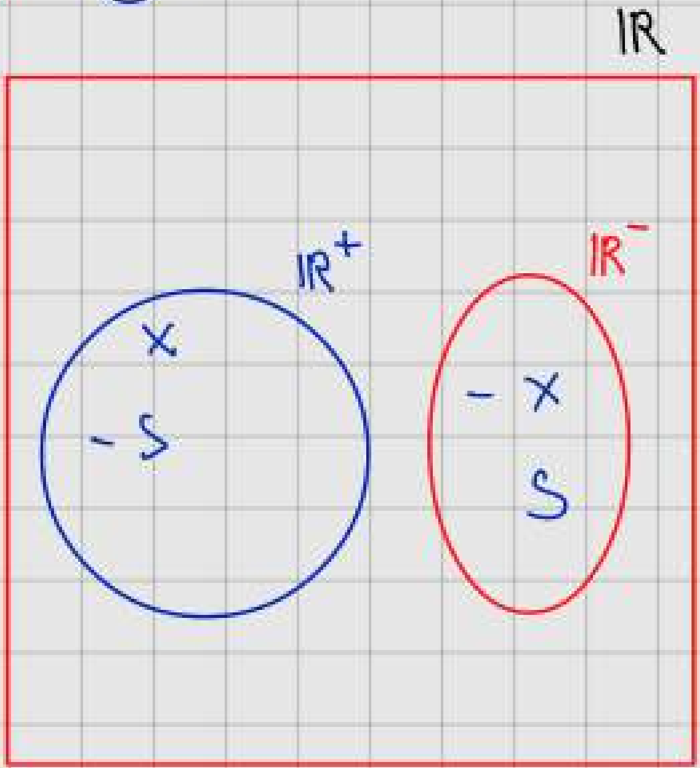
Desigualdades en el conjunto de los numeros racionales ($\mathbb{Q}$)

Definición: Si a/b y c/d son numeros racionales, entonces se dice que el numero racional a/b es menor que el numero racional c/d $((a/b) < (c/d))$ si $ad < bc$

Ejemplos

$$\frac{1}{2} < \frac{3}{4} \quad \text{sí} \quad 1(4) < 2(3)$$

$$\frac{3}{4} < \frac{1}{2} \quad \text{sí} \quad 2(3) < 1(4)$$



$2x - 3 < 5$

$2x - 3 + 3 < 5 + 3$

$2x < 8 \;;\; \frac{1}{2} > 0$

$\frac{1}{2}(2x) < \frac{1}{2}(8)$

$x < 9$

$-2x + 1 < 3$

$-2x + 1 + (-1) < 3 + (-1)$

$-2x < 2 \;;\; -\frac{1}{2} < 0$

$(-\frac{1}{2})(-2x) > (-\frac{1}{2})^2$

$x > -1$

$-3x+1<0$

$-3x+1-1<-1$

$-3x<-1$

$x>\frac{-1}{-3}$; $-3<0$

$x>\frac{1}{3}$

$2x+5<-3x-1$

$2x+3x+5<-1$

$5x+5<-1$

$5x+5-5<-1-5$

$5x<-6$

$x<\frac{-6}{5}$

$-5<0$

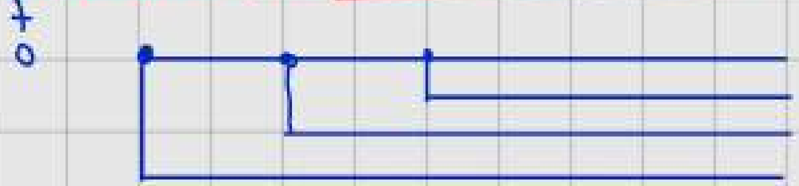
$\boxed{5>0}$

si $5>0$ el signo no cambia
pero si $-5<0$ ay si cambia el signo a $>$

Proporcicion Si $x>0$, entonces $x^{-1}>0$
(tarea)
Valor Absoluto con desigualdades:
(tarea !)
Topologia en el conjunto $\mathbb{R}$
Los intervalos: (Tarea)
Punto de acumulacion, aislados y puntos de aderencia:

$|3 - 4| \sim 7$

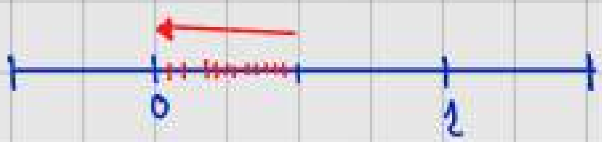
Ejemplo del Lic



xs - ts

$v = \frac{x_1 - x_0}{t_1 - t_0}$ $\quad v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{x_4 - x_0}{t_8 - t_2}$

lim



$\frac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}$ $\quad \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$

1

$\frac{1}{2} = 0,5$

$\frac{1}{3} = 0,3$

$\frac{1}{1000} = 0,001$

$\frac{1}{n} = 0$

$\lim_{1 \to 100} \frac{1}{n} - \frac{1}{\infty}$

$\boxed{|x - 2|} < 3$

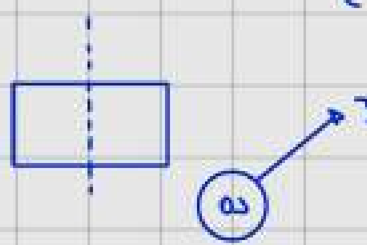
C1 $\quad x - 2 \geq 0$

C2 $\quad x - 2 < 0$

$|x - 2| < 3 \longrightarrow -3 < x - 2 < 3$

$-3 + 2 < x < 3 + 2$

$(1, 5)$



Teorema ....

D_1

a

Teorema: Si $|x-a| < \delta$ entonces $-\delta + a < x < \delta + a$

Dj: Por definicion de valor absoluto $|x-a| = \max\{x-a, -(x-a)\}$

$$\max\{x-a, -x+a\}$$

Pero $|x-a| < \delta$ asi $-\max\{x-a, -x+a\} < \delta$

y por definición de maximo

$$x-a < \delta \quad y \quad -x+a < \delta$$

$$x-a < \delta \quad y \quad -x+a < \delta$$

$$x-a+a < \delta + a \quad y \quad -x+a+x < \delta + x$$

$$x < \delta + a \quad y \quad a < \delta + x$$

$$x < \delta + a \quad y \quad a - \delta < \delta + x + (-\delta)$$

$$x < \delta + a \quad y \quad a - \delta < x$$

$$x < \delta + a \quad y \quad -\delta + a < x$$

$$-\delta + a < x \quad y \quad x < \delta + a$$

Por definición

$$-\varepsilon + a < x < \delta + a$$

Ejercicio: Resolver la desigualdad $\left|\frac{1}{x} - 2\right| < 3$

Sol Por el anterior teorema se tendra

$$\left|\frac{1}{x} - 2\right| < 3$$

$$-3 < \frac{1}{x} - 2 < 3$$

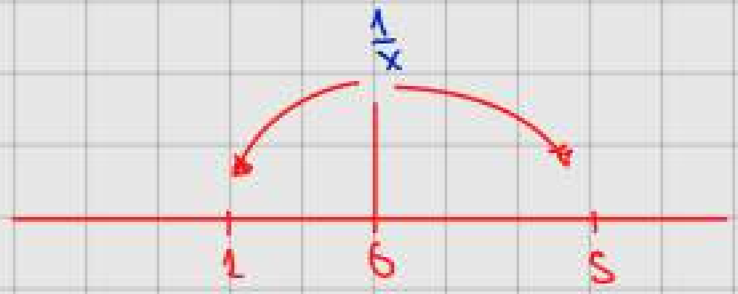
$$-3+2 < \frac{1}{x} - 2 + 2 < 3+2$$

$$-1 < \frac{1}{x} < 5$$

Por definición

$$-1 < \frac{1}{x} \quad y \quad \frac{1}{x} < 5$$

tambien



Caso 1. Supongamos que $\frac{1}{x} = 0$ y multiplicado por x se tendra

$$x\left(\frac{1}{x}\right) = x(0)$$

$$1 = 0 \quad \text{Falso}$$

Por tanto $\frac{1}{x} \neq 0$

Caso 2: Supongamos que

$$0 < \frac{1}{x} < 5 \qquad \frac{p \wedge q}{q}$$

$$0 < \frac{1}{x} \quad y \quad \frac{1}{x} < 5$$

asi $0 < \frac{1}{x}$ o $\frac{1}{x} > 0$ entonces $\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)^{-1}}_{\frac{1}{\frac{1}{x}}} > 0$

$x > 0 \longrightarrow x^{-1} > 0$

de donde $x > 0$, pero

$0 < \frac{1}{x} < 5$ / multiplicando por

$x(0) < x\left(\frac{1}{x}\right) < x(5)$

$0 < 1 < 5x$

así

$0 < 1 \quad \wedge \quad 1 < 5x$

Por tanto

$1 < 5x \; / \; 5 > 0$ entonces $\frac{1}{5} > 0$

$\frac{1}{5}(1) < \frac{1}{5}(5x)$

$\frac{1}{5} < x$

Así el conjunto solución es $\left(\frac{1}{5}, +\infty\right)$

Caso 3 Supongamos que $-1 < \frac{1}{x} < 0$, entonces

$-1 < \frac{1}{x} \quad y \quad \frac{1}{x} < 0$

Como $\frac{1}{x} < 0$ entonces por una proposición $x < 0$

así

$-1 < \frac{1}{x} < 0$ // multiplicando $\underbrace{x < 0}$

$-1(x) > \frac{1}{x}(x) > 0(x)$

$-x > 1 > 0$

así

$-x > 1 \quad y \quad 1 > 0$

así

$-x > 1$ // no multiplicando $(-1) < 0$

$(-1)(-x) < (-1)(1)$

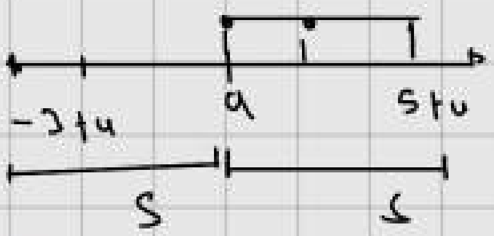
$$x < -1$$

a si el conjunto solución es $(-\infty, -1)$
De los casos ② y ③ el conjunto solución sera

$$(-\infty, -1) \underbrace{\cup}_{\text{ó}} \left(\frac{1}{5}, +\infty\right)$$

OBS

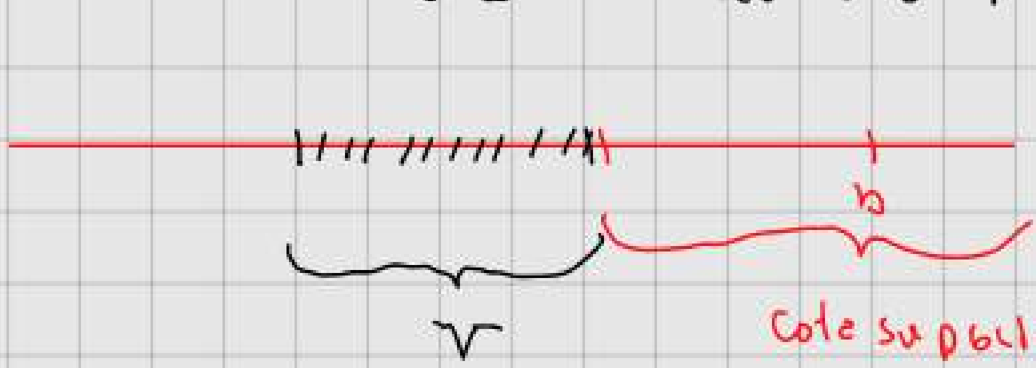
$|x-x| \leq \delta$, entonces $\underbrace{-\delta + a < x < \delta + a}$



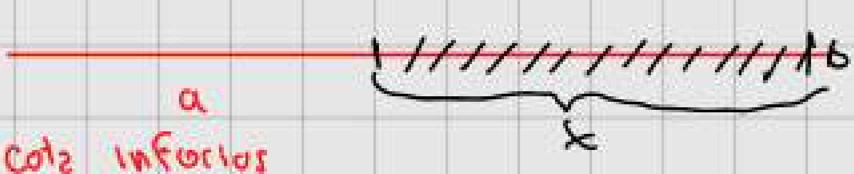
$x \in (-\delta + a, \delta + a)$

Como $\frac{1}{x} < 0$ ento asi

7) $\mathbb{R}$ es un cuerpo ordenado y completo:
Definición
i) El subconjunto no vacio X del conjunto $\mathbb{R}$ este subconjunto superiormente si existe un numero real b tal que $x \leq b$ para el $x \in X$ este numero b es denominado cota superior de X



ii) El conjunto no vacio X del conjunto $\mathbb{R}$ esta acotado inferiormente si existe un numero real a tal que $a \leq x$ para todo $x \in X$



Axioma del supremo

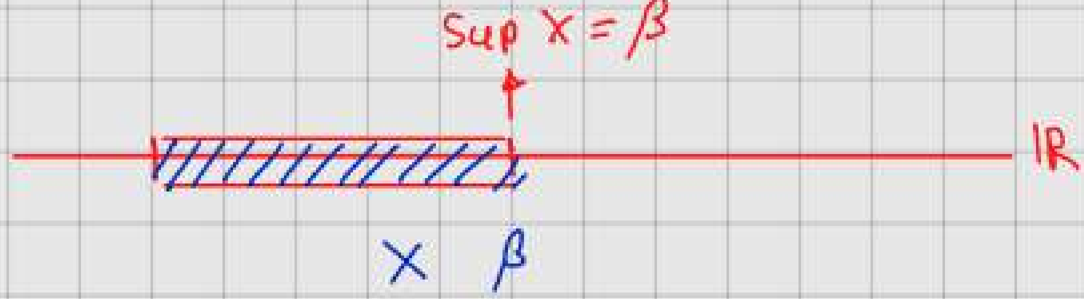
Definición Si X es un subconjunto de los numeros reales no vacio y acotado superiormente, en entonces el numero real β es denominado supremo de X si

i) Para todo $x \circ X$ se tiene que $x \in \beta$

ii) Si $s \in \mathbb{R}$ es tal que $x \leq c$ para todo $x \in X$, entonces $\beta \leq c$

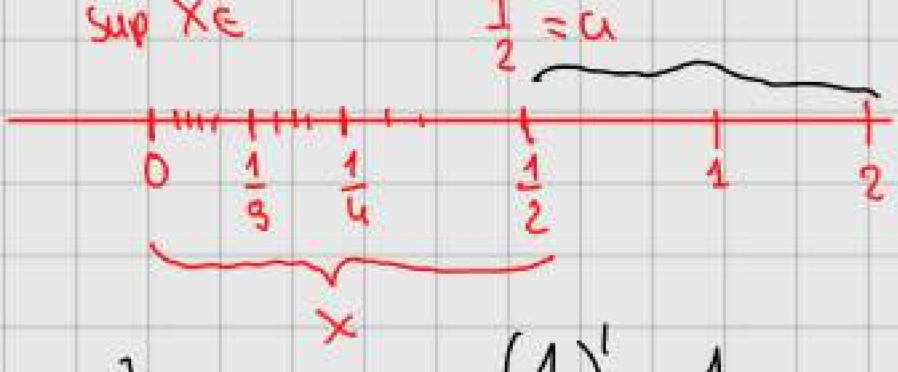
y el numero β se le denota por βx se le denota

$\beta = \operatorname{supr} X$



Axioma del supremo: Si $X \in \mathbb{R}$ no vacio y acotado, superiormente, entonces X posee un supremo

$$X = \{a^n \,/\, 0 < a < 1 \text{ y } R \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{R}$$



$$\frac{\frac{1}{2}+1}{2} = \frac{\frac{1}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Ejemplos

$$0 < a < 1 \iff 0 < a \text{ y } a < 1$$

$$0 < \cdots < a^n < \cdots < a^3 < a^2 < a < 1$$

$0 < a \qquad a < 1$

$0 < a \qquad a^2 < a \qquad \Big\} \; a^3 < a^2 < a < 1$

$0 < a^2 \qquad a^3 < a^2$

$0 < a^3$

Definición: Si X es un subconjunto de los numeros $\mathbb{R}$ es vacio y acotado inferiormente, entonces el numero real α se denomina infimo de X si α es el mayor de todas las cotas inferiores de X si

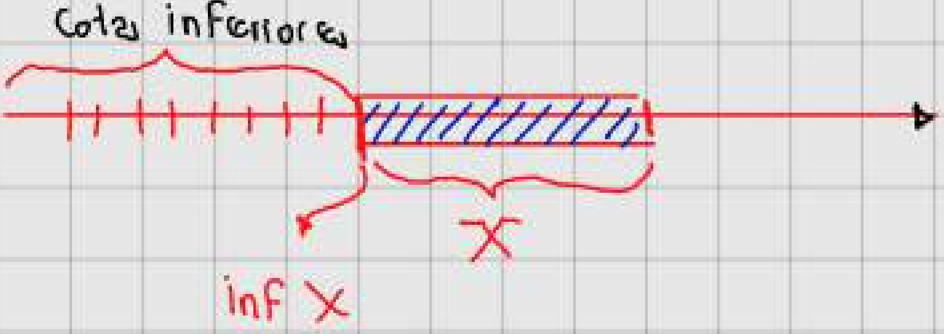
i) Para todo $x \in X$ se tiene que $\alpha \leq x$

ii) Si $d \in \mathbb{R}$ tal que $d \leq x$ para todo $x \in X$, entonces $d \leq \alpha$

al numero α lo denotamos por

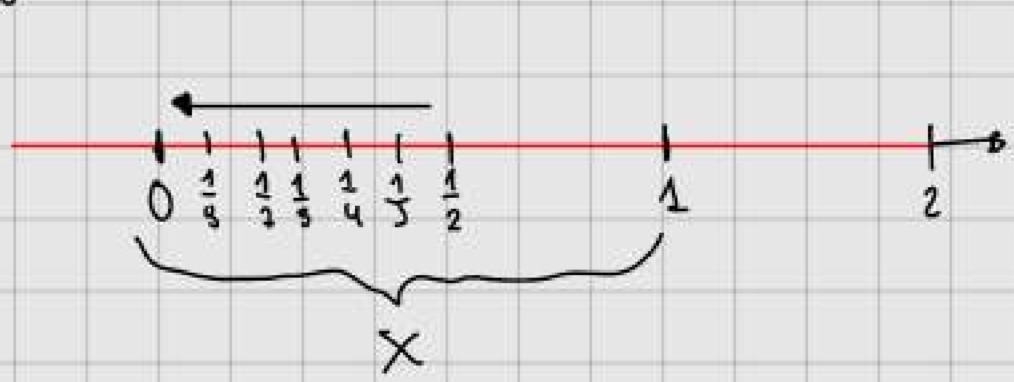
$$\alpha = \text{infimo } X$$

Axioma del infimo: Si $X \in \mathbb{R}$ no vacio y acotado inferiormente, entonces X poseen infimo



Ejemplo: Ver si el conjunto $X = \{ \frac{1}{n} / n \in \mathbb{N} \}$ poseen infimo en supremo

Sol:



Observando el grafico anterior el conjunto es acotado inferiormente, pues $n \in \mathbb{N}$ entonces $n > 0$, por tanto $n^{-1} > 0$ es decir $0 < \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y esto significa que 0 es una cota inferior de X por tanto todo numero menor que 0 es una cota inferior de X

Tambien X es acotado superiormente, pues

D: $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$, $x, y \geq 0$

Dj: es verdad que $(x-y)^2 \geq 0$

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

$$x^2 - 2xy + y^2 + 4xy \geq 0 + 4x1$$

$$x^2 + 2xy + x^2 \geq 4xy$$

$$(x+y)^2 \geq 4xy$$

$$\sqrt{(x+y)^2} \geq \sqrt{4xy}$$

$$x+y \geq 2\sqrt{xy}$$

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

De donde Parto

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$$

$$\frac{(x+y)^2}{4} \geq xy$$

$$(x+x)^2 \geq 4xy$$

$$x^2 + 2xy + y^2 \geq 4xy$$

$$x^2 - 2xy + y^2 \geq 0$$

$$\boxed{(x-y)^2 \geq 0}$$

Tambien X es acotado superiormente pues para todo $n \in \mathbb{N}$ implica que $n \geq 1$, pero $n > 0$ entonces $n^{-1} > 0$ asi

$$n \geq 1$$
$$n^{-1} n \geq n^{-1} (1)$$

$$1 \geq \frac{1}{n} \text{ para todo } \mathbb{N}$$

es decir

$$\frac{1}{n} \leq 1 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

es decir 1 e una cota superior de X por tanto todo numero mayor e igual que 1 e cota superior de X

Por otro lado afirmamos que $\inf X = 0$

Sea $\varepsilon > 0$, entonces por la propiedad arquimediana existe un numero natural n_0 tal que $n_0 \varepsilon > 1$, es decir

$$1 < n_0 \varepsilon \qquad\qquad 0 < 1 < n_0 \varepsilon$$
$$0 < 1 < n_0 \varepsilon$$

pero $n_0 > 0$ entonces $n_0^{-1} > 0$ asi

$$0 (n_0^{-1}) < 1 (n_0^{-1}) < (n_0^{-1}) n_0 \varepsilon$$
$$0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

La relación anterior nos indica que el 0 es la maxima de las cotas inferiores del conjunto X, por tanto

$$\inf X = 0$$

Por otro lado afirmamos que el supremo $X = 1$ pues, segun la definicion ii) si $c \in \mathbb{R}$ es tal que $\frac{1}{n} \leq c$ para todo $\frac{1}{n} \in X$ con $n \in \mathbb{N}$, notemos que

$$\frac{1}{n} \leq c \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

en particular tomemos $n = 1$ asi $\underbrace{\frac{1}{1}}_{1} < c$ es decir $\sup X = 1$

$$X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$$
$$n \mapsto x_n$$

) Sucesiones y Series:

Definicion: Una sucesión es una función donde denotamos de esta forma que lo denotamos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ o (x_n) y donde x_n es el n-esimo termino de la sucesion (x_n)

1) $x_n = \frac{1}{n}$ en este caso la sucesion es

$$\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots\right)$$

2) $x_n = n$, en este caso la sucesión es

$$(1, 2, 3, 4, \ldots)$$

3) $x_n = \frac{1}{2^n}$ en este caso la sucesion es

$$\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \ldots\right)$$

④ $X_n = a^n$ en este caso la sucesión es

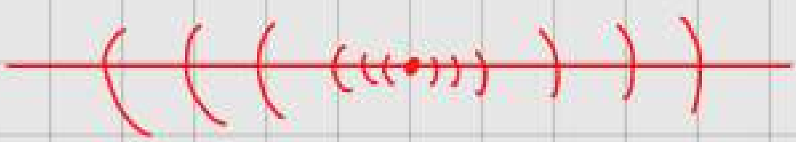
$$(a, a^2, a^3, a^4, a^5, \dots)$$

Para $a = \mathbb{R}$

Definicion: La sucesión (x_n) convergo al numero real a si $\forall \varepsilon > 0;\ \exists n_0 \in \mathbb{N}$ to $n > n_0$ implica $|x_n - a| < \varepsilon$

La relación anterior se denota de la siguiente manera

$$\lim_{n \to +0} x_n = a \qquad \underbrace{|x_n - a| = \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon + a < x_n < \varepsilon + a}_{x_n \in (-\varepsilon + a,\ \varepsilon + a)}$$



Siempre se acerca al punto 0 y los ejes siempre se hacen mas pequeño

bien

$$\boxed{\lim_{n \to +1} \frac{1}{n} = ?}$$

mal

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = \frac{1}{+\infty} = 0}$$

OBS: La notación $\lim_{n \to +\infty} x_n = a$ es equivalente a

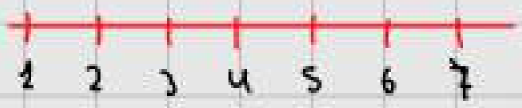
$$\lim_{n \to \infty} x_n = a \qquad X_n \to a$$

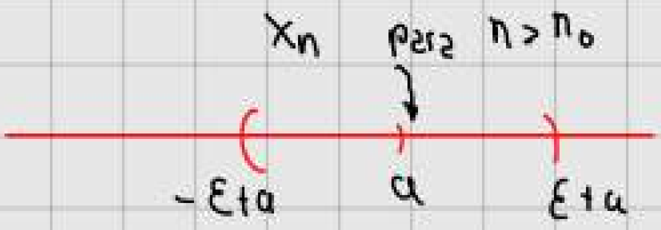
① **Teorema:** Una sucesión no puede converger a dos numeros diferentes.

Demostración: Supongamos que la sucesión (X_n) convergo al ponto a, es decir por definición

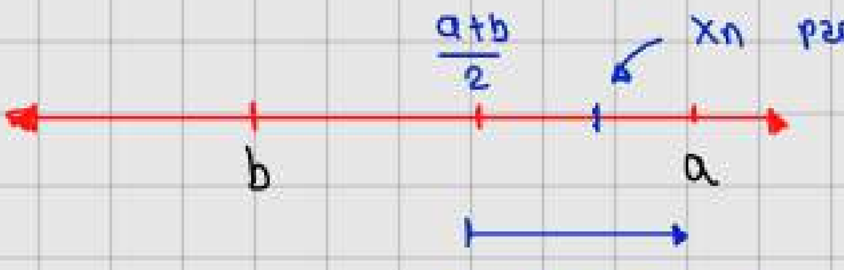
$$\lim_{n\to+\infty} X_n = a \iff \forall_{\varepsilon>0}, \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \text{d.} \ n>n_0 \to |X_n - a| < \varepsilon$$

graficamente





Si b es un numero real tal que $b \neq a$



$$\varepsilon = \left|\frac{a+b}{2} - a\right| > 0$$

$\boxed{X_1, X_2, X_3, \dots,}$ finito

Segon este grafico se observa que va existir un intervalo do centro b tal que los elementos de la sucesión (X_n) no van a estar en el intervalo (es decir existe $\delta>0$ tal que $X_n \notin (-\delta+b, b+\delta)$)

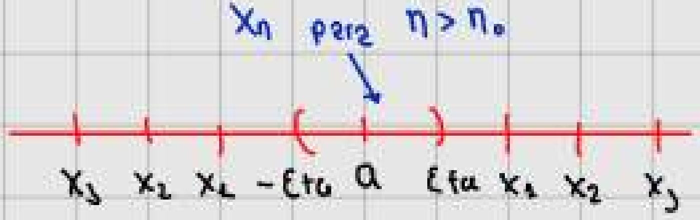
Por tanto (X_n) el ponto de convergencia de una sucesión es unica.

② **Teorema:** Toda sucecion convergente es acotada

Ejemplo: Supongamos que la sucesión (X_n) converge al ponto a, es decir por definicion

$\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a \Leftrightarrow \forall_\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} \ \text{ą} \ n > n_0 \to |x_n - a| < \varepsilon$

Graficamente



Sea

$b = \min\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n_0}, -\varepsilon + a, \varepsilon + a\}$

y

$c = \max\{x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n_0}, -\varepsilon + a, \varepsilon + a\}$

así $b \leq x_n \leq c$ para todo $n \in \mathbb{N}$ es decir la sucesión (x_n) es acotado.

Obs: El teorema anterior es equivalente a:

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$ entonces la sucesión (x_n) es acotado

$$p \to q \Leftrightarrow \sim q \to \sim p$$

Y este enunciado es equivalente a Si la sucesión (x_n) no es acotado, entonces la sucesión (x_n) no converge

$\lim\limits_{n \to +\infty} a^n$ existe o no existe y si existe determinar limite donde

$a > 1$

$0 < 1 < a \longrightarrow a > 0$

$1 < a$ $\quad 1 < a < a^2 < a^3 < a^4 < \dots < a^n < \dots$

$a < a^2$ $\quad \lim\limits_{n \to +\infty} a^n = a^{+\infty}$

$a^2 < a^3$

$a^3 < a^4$

$\vdots$

Si la sucesión (X_n) no es acotado entonces la sucesión (X_n) no converge

(X_n) no es acotado superiormente

ó

(X_n) no es acotado inferiormente

Ejemplo:

① La sucesión $X_n = a^n$ para $a > 1$ no es convergente pues, como $a > 1$, entonces $a > 0$

$$1 < a$$
$$a < a^2$$
$$a^2 < a^3$$
$$\vdots$$

así

$$1 < a < a^2 < a^3 < \dots < a^n < \dots$$

es decir la sucesión no esta acotado superiormente

② La sucesión $X_n = 1 + (-1)^{n+1}$, es

$$X_1 = 2$$
$$X_2 = 0$$
$$X_3 = 2$$
$$X_4 = 0$$
$$\vdots$$

así la sucesión (X_n) es acotado ya que

$$0 \leq X_n \leq 2 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

así

$$\lim_{n \to +\infty} 1 + (-1)^{n+1} \text{ no existe}$$

Definición: (Subsección) Dada la sucesión (x_n) $\left(\text{o} \quad \begin{aligned} x: \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto x_n \end{aligned} \right)$, una

Subsucesión es una función

$$\begin{aligned} x': \mathbb{N}' &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto x'_n \end{aligned}$$

Donde: $\mathbb{N}' = \{ n \in \mathbb{N} / n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots \}$

Las sucesiones $x_{2n} = 1 + (-1)^{2n}$ y $x_{2n+1} = 1 + (-1)^{2n+1}$ son subsucesiones de la sucesión $x_n = 1 + (-1)^n$

Notemos $x_n = 1 + (-1)^n$

$x_1 = 0$

$x_2 = 2$

$x_3 = 0$

$x_4 = 2$

Pero $x_{2n} = 1 + (-1)^{2n}$

$x_2 = 2$

$x_4 = 2$

$x_6 = 2$

$\vdots$

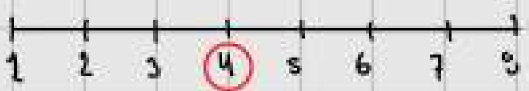
tambien $x_{2n+1} = 1 + (-1)^{2n+1}$

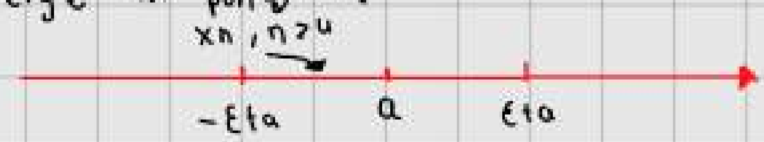
$n = 1 \qquad x_3 = 0$

$n = 2 \qquad x_3 = 0$

$n = 3 \qquad x_1 = 0$

Teorema: Si $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$, entonces toda subsucesión de (x_n) converge al punto a





La contrarecíproca del teorema anterior indicaría:
Si existen al menos dos subsucesión, digamos (x_n) y (x'_n) tal que convergen a puntos diferentes entonces la sucesión (x_n) es divergente (no converge)

Ejemplo: En la sucesión $X_n = 1 + (-1)^n$ existen las subsucesiones $X_{2n} = 1 + (-1)^{2n}$ y $X_{2n+1} = 1 + (-1)^{2n+1}$

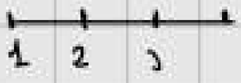
tal que $\lim_{n \to +\infty} X_{2n} = 2$ y $\lim_{n \to +\infty} X_{2n+1} = 0$

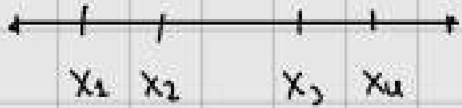
Por tanto

$\lim_{n \to +\infty} X_n$ no existe

$\dots < x_4 < x_3 < x_2 < x_1$

Función:





Definición: (Susesiones suceciones)

Es sucesión (X_n) es:

i) Monotona creciente si $X_n \leq X_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

ii) Monotona decreciente $X_{n+1} \leq X_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$

iii) Monotona estrictamente creciente $X_n < X_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

iv) Monotona estrictamente decreciente $X_{n+1} < X_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$

Teorema: Toda sucesion monotona y acotada es convergente

Ejemplo: La sucesión $X_n = \frac{1}{n}$ es monotona estrictamento decreciente.

Según la definición anterior una sucesión que su formato de la forma $X_{n+1} < X_n$ es monotona estrictamente decreciente. Segun los numeros naturales

$$n < n+1 \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

$$X_{n+1} < X_n \quad \text{para todo } n \in \mathbb{N}$$

Por otro lado en el anterior capitulo se observa $X_n = \frac{1}{n} \in (0, 1]$, asi por el teorema anterior la sucesión $X_n = \frac{1}{n}$ converge

Corolario: Si la sucesión (x_i) es monotona creciente o estrictamente creciente y acotada entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \sup X$ donde $X = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$

Pero si la sucesion (x_n) es monotona decreciente o es estrictamente decreciente y acotada entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = \operatorname{Inf} X$ donde

$X = \{x_n / n \in \mathbb{N}\}$

Teorema (Teorema del sandwich) Si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = a$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} Z_n = a$

si $x_n \leq y_n \leq z_n$ para todo n suficientemente grande entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = \infty$

$$\text{Si } x_n \leq y_n \leq z_n \text{ y } \lim_{n\to+\infty} x_n = \lim_{n\to+\infty} Z_n = a$$

entonces

$$\underbrace{\lim_{n\to+\infty} x_n}_{a} \leq \lim_{n\to+\infty} y_n \leq \underbrace{\lim_{n\to+\infty} Z_n}_{a}$$

Tener cuidado con los libros de calculo 1

así $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = a$

Ejercicio Calcular el limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right)$$

Sol:

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) = e$$

?) Operaciones con limites :

Si $\lim_{n \to +\infty} x_n = a$ y $\lim_{n \to +\infty} Y = b$, entonces

i) $\lim_{n \to +\infty} (x_n\ Y_n) = a\,b$

Obs :

$$\lim_{n \to +\infty} (x_n\ Y_n) = \left(\lim_{n \to +\infty} (x_n + Y_n) = ab \right.$$

ii) $\lim_{n \to +\infty} (x_n + Y_n) = a + b$

iii) $\lim_{n \to +\infty} (x_n - Y_n) = a - b$

iv) $\lim_{n \to +\infty} \left(\dfrac{x_n}{Y_n} \right) = \dfrac{a}{b}$ para $b \neq 0$

Si $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$ y la sucesión (Y_n) es acotado

entonces $\lim_{n \to +\infty} (x_n \cdot Y_n) = 0$, por ejemplo

la sucesión $Y_n = \operatorname{sen}(n)$ esta acotado por -1 y

Recordemos

Si $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n = a$ y $\lim\limits_{n \to +\infty} y_n = b$

$$\lim_{n \to +\infty} (x_n \pm y_n) = \lim_{n \to +\infty} x_n \pm \lim_{n \to +\infty} y_n$$

si los dos existiesen puedo distribuir

Entonces

i) $\lim\limits_{n \to +\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$

ii) $\lim\limits_{n \to \infty} (x_n\, y_n) = ab$

ó

$$\lim_{n \to +\infty} (x_n\, y_n) = \left(\lim_{n \to +\infty} x_n\right)\left(\lim_{n \to +\infty} y_n\right)$$

iii) Si $b \neq 0$ entonces

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{a}{b}$$

ó

$$\lim_{n \to +0} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{\lim\limits_{n \to \infty} x_n}{\lim\limits_{n \to \infty} y_n}$$

Ejemplo: Calcular el $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n^3}{n+1}$

Sol:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{n^2}{n^2}}{\frac{n+1}{n^2}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\frac{n}{n^2} + \frac{1}{n^2}}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{\frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n}\right)\left(\frac{1}{n}\right)} \qquad \frac{1}{0} \text{ no es } \#$$

no es factible dividir n^2

$\lim\limits_{n \to +\infty} 1 = ?\ 1 \quad x_n = 1$

Sol:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n^2}{n}}{\frac{n+1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^{=x_n}}{\underbrace{1+\frac{1}{n}}_{z_n}=y_n}$$ no existe

Ejercicio Calcule el limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}$$

Solución:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{n}{n}}{\frac{n+1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{n}{n}+\frac{1}{n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{n}} = \frac{1}{1+0} = \frac{1}{1}$$

Criterios: Si $X_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y

$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a$, con $a < 1$, entonces $\lim_{n\to+\infty} X_n = 0$

Ejercicio: Calcule el limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = \lim_{n\to\infty}$$ así $X_n > 0$

pero $X_{n+1} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}$ así

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{X_{n+1}}{X_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n (n+1)!}{(n+1)^{n+1}\, n!}$$

$$(n+1)! = n!\,(n+1)$$

$$n! = \underbrace{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 \cdots n}_{\underbrace{(1\cdot 2\cdot 3 \cdots (n-1))}_{(n-1)!\,n} n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^n (n+1)\cancel{n!}}{(n+1)(n+1)^n \cancel{n!}} = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n^n}{(n+1)^n}\right)\left(\cancel{\frac{n+1}{n+1}}\right)^{1}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\frac{n}{n}}{\frac{n+1}{n}}\right)^n = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}}\right)^n$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1^n}{(1+\frac{1}{n})^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} = 0$$

auxiliar

La sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ se dispara al infinito para n suficientemente grande

así

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{X_{n+1}}{X_n} = 0 \quad \text{pero } 0<1$$

Por tanto

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$$

Ejemplo: Que no se hace 0 y no lo cumple

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$$

$$x_n = \frac{n}{n+1} > 0 \, , \; x_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}$$

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{\frac{n+1}{n+2}}{\frac{n}{n+2}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{(n+1)(n+1)}{(n+1)\, n} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2+2n+1}{n^2+2n}$$

$$\lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{n^2+2n} = \lim_{n \to +\infty} 1 + \frac{1}{n} ($$

Ejercicio: Si $a > 0$ entonces

$$\lim_{n \to +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$$

$$x_n \quad x'_{n'} \qquad \left.\begin{array}{l} \lim_{n \to +\infty} x_n = b \\ \\ \lim_{n \to +\infty} x'_{n'} = b \end{array}\right\} \lim$$

Ejercicio: Determinar el limite

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^k}{a^n}$$

Sol Criterios: Si ① $x_n > 0$, ② $\lim_{n \to \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a$, ③ $a < 1$ por tanto

entonces $\lim_{n \to +\infty} x_n = 0$

Veamos el ejercicio notemos que

$$x_n = \frac{n^k}{a^n}$$

así para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $n > 0$ y para cualquier $k \in \mathbb{N}$ implica que $n^k \geq n$ así

$$n^k \geq n \quad y \quad n > 0$$

por tanto $n^k > 0$

por otro lado

$$a > 1 \quad y \quad 1 > 0$$

por tanto $a > 0$ y así

$$1 < a$$
$$a < a^2$$
$$a^2 < a^3$$
$$a^3 < a^4$$
$$\vdots$$

así

$$0 < 1 < a < a^2 < a^3 < \cdots < a^n < \cdots$$

así $\boxed{a^n > 0}$ para todo $n \in \mathbb{N}$

pero

$$x_n = \frac{\boxed{n^k}}{a^n} > 0$$

Por otro lado

$$x_n = \frac{n^k}{a^n} \quad y \quad x_{n+1} = \frac{(n+1)^k}{a^{n+1}}$$

de donde

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{(n+1)^k}{a^{n+1}}}{\frac{n^k}{a^n}}$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{a^n (n+1)^k}{n^k a^n a}$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{a} \left(\frac{(n+1)^k}{n^k} \right)$$

$$= \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{a}\right) \left(\frac{n+1}{n}\right)^k$$

$$= \lim_{\boxed{n \to +\infty}} \boxed{\left(\frac{1}{a}\right)} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k$$

$$= \frac{1}{a} \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k$$

$$= \frac{1}{a} \underbrace{\left(\lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdots \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) \right)}_{k \text{ veces}}$$

$$= \frac{1}{a}$$

$$1 < a$$
$$1(a^{-1}) < a a^{-1}$$
$$\frac{1}{a} < 1$$

pero $a > 1$ entonces $a > 0$

así $a^{-1} > 0$ de donde

Pregunta de examen

así
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{a}$$

así por el criterio
$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^k}{a^n} = 0$$

Ejercicio : Determinar el límite
$\lim_{n\to+\infty} x_n$ donde $x_n = 1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n$ para $0<a<1$

Solución : Notemos que

$$1+a+a^2+a^3+\cdots+a^n = \frac{1-a^n}{1-a}$$

$$\lim_{n\to+\infty} (1+a+a^2+\cdots a^n) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-a^{n+1}}{1-a}$$
$$= \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{1-a}\right)\left(1-a^{n+1}\right)$$
$$= \frac{1}{1-a} \lim_{n\to+\infty} \left(1-a^{n+1}\right)$$

puede salir si no tiene "n"

O.A. $\lim_{n\to+\infty} a^{n+1} = ?$

Notamos que $0<a<1$ entonces $0<a$ y $a<1$

Por tanto

$a<1$
$a^2<a$
$a^3<a^2$
$a^4<a^3$
$a^5<a^4$
$\vdots$

Por tanto

$$\cdots < a^{n+1} < \cdots < a^3 < a^2 < a < 1$$

gracias a esto se tiene que
$$\lim_{n\to+\infty} a^{n+1} = 0$$

$$= \frac{1}{1-a}\left[\lim_{n\to+\infty} 1 = \lim_{n\to+\infty} a^{n+1}\right] = \frac{1}{1-a}$$

por tanto

$$\lim_{n\to+\infty}\left(1+a+a^2+\cdots+a^n\right) = \frac{1}{1-a}$$

O.A $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{n+1} = ?$

Notemos que $0<a<1$ entonces $0<a$ y $\boxed{a<1}$

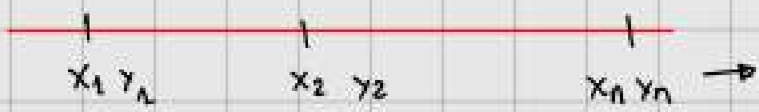
Ejercicio: Verificar que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a} = 1$

Teorema:

i) si $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ y (y_n) es acotado inferiormente entonces $\lim\limits_{n\to+\infty}(x_n+y_n) = +\infty$

OBS: $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$

por tanto



ii) $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n = +\infty$ y existe $C>0$ tal que $y_n > C$ entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n y_n = +\infty$

iii) Si $y_n > C > 0$, $y_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n = 0$, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{x_n}{y_n} = +\infty$

iv) Si (X_n) está acotada y $\lim_{n\to+\infty} Y_n = +\infty$, entonces

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{X_n}{Y_n} = 0$$

tiene que ser una constante $0 < \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0 \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{a}{n^k} = 0$$

tiene que dispararse a $+\infty$ que sea mayor

Sucesiones

$x_1 = 1$
$x_2 = 2$
$x_3 = 3$
$x_n = n$
$\vdots$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \cdots \frac{1}{n} + \cdots = \sum_{i=1}^{\infty} = \frac{1}{i}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{}$$

P) Series

Sean (X_n) una sucesición de numeros reales, las sumas parciales de una sucesion (X_n) se define de la forma

$$S_1 = X_1$$
$$S_2 = X_1 + X_2$$
$$S_3 = X_1 + X_2 + X_3$$
$$\vdots$$
$$S_n = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_n$$

gracias a estas sumas parciales se obtiene la siguiente succesición (S_n) una serie se define

$$\sum_{n=1}^{\infty} X_n = \lim_{n\to+\infty} S_n$$

La serie $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ es convergente si $\lim_{n\to+\infty} S_n$ existe y es divergente si $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$ no existe

Ejemplos:

La serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^n$ para $0 < a < 1$ convergo.

ejemplo

$$\frac{1-a^2}{1-a} = 1+a$$

$$\frac{1-a^5}{1-a} = 1+a+a^2+a^3+a^4$$

Segun la definición de series se tendrá.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = 1 + a + a^2 + \cdots + a^n + \cdots$$

$S = 1$

$S_1 = 1+a$

$S_2 = 1+a+a^2$

$\vdots$

$S_n = 1+a+a^2+\cdots a^n + \cdots$

$$= \lim_{n \to \infty} S_n$$

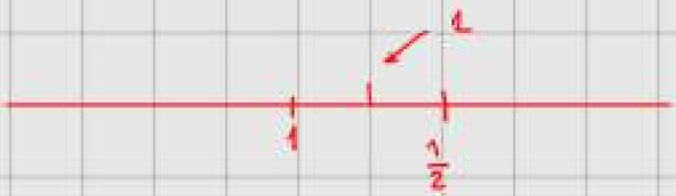
$$= \lim_{n \to \infty} (1 + a + a^2 + \cdots + a^n)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1-a^n}{1-a}\right)$$

$$= \frac{1}{1-a} \lim_{n \to +\infty} (1-a^n)$$

$$= \frac{1}{1-a} \left(\lim_{n \to +\infty} 1 - \lim_{n \to +\infty} a^n\right)$$

$1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$



entonces $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a^n = \boxed{\frac{1}{1-a}}$

Por ejemplo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots = 2$$

Tambien $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$, es decir

$$\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} = e$$

La serie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n}$ converge o diverge, es decir

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \begin{cases} \nearrow \text{Converge} \\ \text{ó} \\ \searrow \text{Diverge} \end{cases}$$

Supongamos que la serie converge

así $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{a} = a$ por otro lado

si $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} = b$ y $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n} = c$

pero

$$a = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}}_{a} \frac{1}{n} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty}}_{b} \frac{1}{2n-1} + \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}}_{c} \frac{1}{2n}$$

Por tanto $a = b + c$

pero si una sucesión converge a un punto entonces toda sucesión converge al mismo punto, por tanto $a = b = c$

Por otro lado

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n-1} =$$

$$\frac{1}{n} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n}$$

$$\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} = \frac{1}{2n-1 \cdot 2n}$$

$$b - c = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$$

$$b - c = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \right) \Rightarrow = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 > 0}{(2n-1)(2n) > 0}$$

$$> 0$$

Por tanto $b-c>0$ es decir $b>c$ así $b \neq c$ (contradicción)
Por tanto

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4} = \text{convergente}$$

Teorema (Criterio de Comparación)
Sean $\sum_{n=}^{\infty} x_n$ y $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ dos series tal que $x_n \geq 0$, $y_n \geq 0$ Si existe $c>0$ tal que $x_n \leq c\, y_n$ para todo $n>n_0$
entonces la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$ implica la convergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$, mientras que la divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ implica la divergencia de la serie $\sum_{n=1}^{\infty} y_n$

$\in$ = Pertenece

Ejemplo: Si $r<1$, entonces $\frac{1}{n}<\frac{1}{n^r}$ para todo $n>n_0$

$r<1$:

- $r=\frac{1}{2}$: $0<r<1 \rightarrow \frac{1}{n} \quad \overset{?}{} \quad \frac{1}{n^r}$
- $r=0 \rightarrow \frac{1}{n} \quad \frac{1}{n^r}$ ✓
- $-1<r<0 \rightarrow \frac{1}{n} \quad \frac{1}{n^r}$ ✓
- $r=-1 \rightarrow \frac{1}{n} \quad \frac{1}{n^r}$ ✓
- $r<-1 \rightarrow \frac{1}{n} \quad \frac{1}{n^r}$ ✓

Así mediante la relación anterior se tiene la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$ pero la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge así por el teorema anterior la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r} \quad \text{para } r<1 \quad \text{diverge}$$

Ver si la $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^r}$

Teorema: El termino general de una serie convergente tiene 0 como limite

Obs: Notemos el teorema anterior indica si $\sum_{n=1}^{\infty} \boxed{X_n}$ converge, entonces $\lim_{n \to +\infty} X_n = 0$ $\propto$

Ejemplo: La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ converge si $0<a<1$, es decir

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-a} \quad \text{para } 0<a<1$$

una forma de convalidar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \underset{x_n}{\frac{1}{n^r}} < \begin{array}{l} \text{di} \\ \text{con} \end{array} \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n^r} = 0$$

así:

$$\lim_{n \to \infty} a^n = 0$$

$\propto$ Segun la contrareciproca es equivalente a

Si $\lim_{n \to +\infty} X_n \neq 0$, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ diverge

Ejemplos: Notemos que

$$\lim_{n \to +\infty} \overset{x_n}{\boxed{n}} = +\infty$$

Por tanto $\lim_{n \to +\infty} \overset{x_n}{\boxed{n}} \neq 0$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} n$ diverge

$$\sum_{n=1}^{\infty} n = 1+2+3+4+\ldots+n$$

$\sum X_n$

$\lim_{n \to +\infty} X_n \neq 0$ es divergente si o si si en caso de no ser así no podriemos saber si converge o diverge

Definición: La serie $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ es absolutamente convergente si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |X_n|$ Converge

Ejemplo: Ver si la serie es absolutamente convergente para $-1<a<0$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n$$

Segun la definicion para que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ ($-1<a<1$) sea absolutamente convergente la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a^n|$ tiene que converger, es decir

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |a|^n, \text{ ahora sea } b=|a| \text{ así}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} = |a^n| = \sum_{n=0}^{\infty} b^n$$

Por otro lado $-1<a<1$ es equivalente a $\overset{b}{\boxed{|a|}}<1$

$0<\boxed{|a|}^{b}<1$

Caso 1: Si $0<b<1$ entonce

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a^n| = \sum_{n=0}^{\infty} b^n = \frac{1}{1-b}$$

$0<b<1$

es decir

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a^n| = \frac{1}{1-|a|}$$

Caso 2: $b=0$ es decir $|a|=0$ esto implica que $a=0$ por tanto

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a^n| = \sum_{n=0}^{\infty} |0^n| = \sum_{n=0}^{\infty} = 0$$

así la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |a^n|$ converge, por lo tanto la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ es

absolutamente para $-1<a<1$

Teorema: Toda serie absolutamente convergente es convergente

Obs: Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ es absolutamente convergente, entonces la serie $\sum_{n=0}^{\infty} |X_n|$ converge así por el teorema anterior la serie $\sum_{n=0}^{\infty} X_n$ convergo

Ejemplo: La serie $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ para $-1<a<1$ es absolutamente convergente, así la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a^n$ para $-1<a<1$ es convergente, es mas

$$\sum_{n=1}^{\infty} a^n = \frac{1}{1-|a|} \quad \text{si } -1<a<0 \text{ y } 0<a<1$$

Teorema (Leibniz): Si (x_n) es una sucesión monotona decreciente que tiende a cero, entonces la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x_n \text{ es convergente}$$

Ejemplos Ver si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ es convergento o divergente

Solu: Notemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \underbrace{\boxed{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}}_{x_n}$$

asi $x_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ ahora veamos:

a) ¿la sucesion x_n sera monotona decreciente?

R. La sucesión (x_n) es monotona decreciente si

$$x_{n+1} < x_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Notemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ implica que

$$n < n+1$$

Y como $n > 0$, $n+1 > 0$ entonces

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

ó

$$1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{n}$$

ó

$$\underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)}_{x_{n+1}} < \underbrace{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}_{x_n}$$

de donde

$$x_{n+1} < x_n \text{ para todo } n \in \mathbb{N}$$

Lic rudy

$$x_{n+1} < x_n$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right) < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$1+\frac{1}{n+1} < 1+\frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{n}$$

$$n < n+1$$

asi la sucesión (X_n) es monotona decreciente.

b) ¿Se sabe que $\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=0$?

R. $\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) =$

Obs: En limites se verifica $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right)$

donde f es una de las funciones valor absoluto, sen, cos, tan
ln, log, e^x
Asi por el teorema anterior la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$
converge

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = \ln\left(\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$= \ln(1+0)$$
$$= 0$$

Teorema: Sea $\sum_{n=1}^{\infty} Y_n$ una serie absolutamente convergente tal que $Y_n \neq 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$ si la sucesión $\left(\frac{X_n}{Y_n}\right)$ esta acotada, entonces la serie:
$\sum_{n=1} X_n$ es absolutamente convergente

Corolario (Criterio de d'Alembert)
Sea $X_n \neq 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$, Si existe una constante c tal que

$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right| \leq C \leq$ para todo n.

Suficientemente grande, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ es absolutamente convergente.

Obs: Si $X_n \neq 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$ y $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{X_{n+1}}{X_n}\right| < 1$ entonces $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ converge.

Por otro lado si $x_n \neq 0$ y $\lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \right| > 1$

entonces $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ diverge.

Ejercicio: Ver si la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \underbrace{\dfrac{n^k}{a^n}}_{x_n}$ para $0<|a|<1$ diverge o converge

Sol: Segun el criterio de d Alembert calcule el siguiente limite

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)^k}{a^{n+1}}}{\frac{n^k}{a^n}} \right|$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a^n (n+1)^k}{a^{n+1} n^k} \right| = \lim_{n\to+\infty} \left| \frac{a^n (n+1)^k}{a^n a n^k} \right|$$

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{1}{a} \left(\frac{n+1}{n}\right)^k \right| = \lim_{\boxed{n\to+\infty}} \left| \frac{1}{a} \right| \left| \frac{n+1}{n} \right|^k$$

$$= \left| \frac{1}{a} \right| \lim_{n\to+\infty} \left| 1 + \frac{1}{n} \right|^k = \left| \frac{1}{a} \right| \left| \lim_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right|^k$$

$$= \left| \frac{1}{a} \right| |1|^k = \left| \frac{1}{a} \right| = \frac{|1|}{|a|} = \frac{1}{|a|} < 1$$

$0<|a|<1$

Por tanto $\lim\limits_{n\to+\infty} \left| \dfrac{x_{n+1}}{x_n} \right| < 1$ asi la serie $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^k}{a^n}$ converge

Los criterios

Capitulo 3

Funciones

3.1) Concepto de Funciones:

Def: (Función) Si f es una relación de A en B ($f \subseteq A \times B$) entonces f es una función si:

i) Para todo $x \in A$ existe $y \in B$ tal que $x f y$ (o $(x,y) \in f$ ó $\underbrace{f(x)}_{\text{se lee } f \text{ de } x} = y$)

ii) Si $(x,y) \in f$ y $(x,z) \in f$ entonces $y = z$

Nota: En la materia ay que trabajar con funciones de variable real, es decir con funciones de la forma $f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, Las funciones en general se los simboliza de la siguiénte forma:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$$

Def: (Dominio de una función)

El dominio $D_{(f)}$ de la función real de variable real $f: D_{(f)} \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ se define

$$D_{(f)} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, f_{(x)} \text{ es un numero real}\}$$

Ejercicios: Determinar el dominio de las siguientes funciones

a) $$\begin{aligned} f: D_{(x)} \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \frac{1}{x^2-1} \end{aligned}$$

Sol: Notemos que $f_{(x)} = \dfrac{1}{x^2-1}$ asi por definición de dominio $D_{(f)} = \{x \in \mathbb{R} \,/\, f_{(x)} \text{ sea un numero real}\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / \dfrac{1}{x^2-1}$ sea un numero real

$= \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 \neq 0\}$
$= \{x \in \mathbb{R} / \sim (x^2 - 1 = 0\}$
$= \{x \in \mathbb{R} / \sim [(x-1)(x+1) = 0]\}$
$= \{x \in \mathbb{R} / \sim [x = 1 = 0 \vee x+1 = 0]\}$
$= \{x \in \mathbb{R} / \sim [x = 1 \vee x = -1]\}$
$= \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1 \wedge x \neq -1\}$

asi

$D_{(f)} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$

Por tanto la funcion sera

$$f : \mathbb{R} - \{-1, 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{1}{x^2-1}$$

b) $f : D_{(x)} \in \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{x-1}+2}$$

$D_{(f)} = \{x \in \mathbb{R} / f_{(x)}$ sea un numero real $\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / \dfrac{x}{\sqrt{x-1}+2}$ sea un numero real $\}$

$= \{x \in \mathbb{R} / \sqrt{x-1}+2 \neq 0 \wedge x - 1 \geq 0\}$
$= \{x \in \mathbb{R} / \sim (\sqrt{x-1}+2 = 0) \wedge x \geq 1\}$
$= \{x \in \mathbb{R} / \sim [\sqrt{x-1} = -2] \wedge x \geq 1\}$
$= \{x \in \mathbb{R} / \sim [(\sqrt{x-1})^2 = (-2)^2] \wedge x \geq 1\}$
$= \{x \in \mathbb{R} / \sim [x - 1 = 4] \wedge x \geq 1\}$
$= \{x \in \mathbb{R} / \sim (x = 5) \wedge x \geq 1\}$
$= \{x \in \mathbb{R} / x \neq 5 \wedge x \geq 1\}$

$= [1, +\infty) = \{5\}$

$= [1, 5) \cup (5, +\infty)$

Por tanto la función es:

$$f : [1,5) \cup (5, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x}{\sqrt{x-1}+2}$$

Definición (función inyectiva) La función real de variable real $f : D(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es inyectiva (o 1 a 1) si $\underbrace{f(x) = f(y)}_{H}$ entonces $\underbrace{x = y}_{C}$

Ejemplo: Ver si la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x+2 \quad f(x)$$

es inyectiva

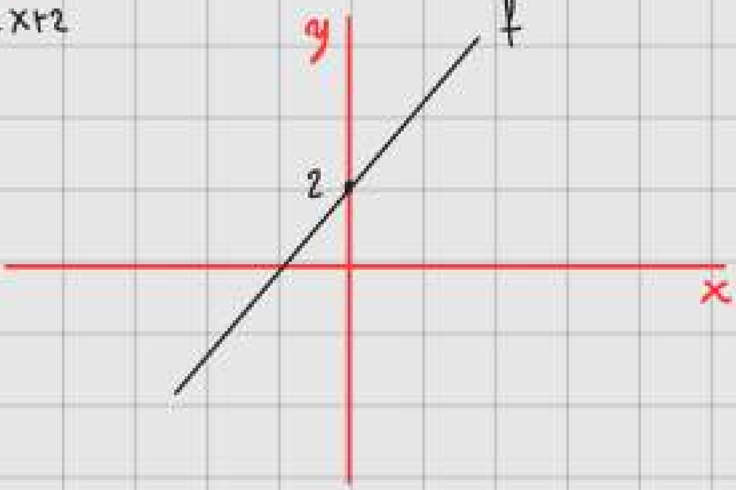
Sol: Para definición de inyectividad

$$f(x) = f(y)$$
$$x+2 = y+2 \quad y-2$$
$$\boxed{x = y}$$

Así la función es inyectiva

gráfica: $f(x) = x-2 \quad (y = f(x))$

así $y = x+2$



Ejemplo: Ver si la función $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x^2$$

Sol: Por definición de inyectividad

$$f(x) = f(y) \qquad a^2 = b^2 \to a = b \text{ ó } a = -b$$

$$x^2 = y^2$$

$$x^2 - y^2 = 0$$

$$(x+y)(x-y) = 0$$

$$x+y = 0 \text{ ó } x-y = 0$$

$$y = -x \text{ o } y = x$$

Veamos que $f(-2) = (-2)^2 = 4$ y

$$f(2) = (2)^2 = 4$$

así $f(-2) = f(2)$ pero $-2 \neq 2$ por tanto la función no es inyectiva

Definición: (Imagen de una función) La imagen $(Im(f))$ de la función $f: D(f) \subseteq \mathbb{R} \to Im(f) \subseteq \mathbb{R}$ se define

$Im(f) = \{ y \in \mathbb{R} \,/\, \text{existe } x \in D(f) \text{ tal que } \boxed{f(x) = y}$

Ejemplo: Hallar la imagen de las funciones

a) $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto x+2 \quad f(x)$$

por definición de imagen

$$Im(f) = \{ y \in \mathbb{R} \,/\, \text{existe } x \in D(f) \text{ tal que } \boxed{f(x) = y} \}$$

así $f(x) = y$

$x + 2 = y$

despejando x

$x = \boxed{y - 2}$

así $\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}$

Definición (Imagen de una Función) Si $f : D(f) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una Función real de variable real, entonces la imagen de la función f se define

$\operatorname{Im}(f) = \{ y \in \mathbb{R} \mid \text{existe } x \in D(f) \text{ tal que } f(x) = y \}$

Ejemplo: Determinar la imagen de la función

$$f : \mathbb{R} - \{-\tfrac{1}{2}\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longrightarrow \frac{x+1}{2x+1} \quad f(x)$$

Sol: Segun la definición anterior

$\operatorname{Im}(f) = \{ y \in \mathbb{R} \mid \text{existe } x \in \mathbb{R} - \{-\tfrac{1}{2}\} \text{ tal que } \boxed{f(x) = y} \}$

así

$$f(x) = y$$

$$\frac{x+1}{2x+1} = y$$

De la ecuación despejamos la variable x

$$x + 1 = y(2x + 1)$$
$$x + 1 = 2xy + y$$
$$x - 2xy = y - 1$$
$$x(1 - 2y) = y - 1$$
$$x = \boxed{\frac{y-1}{1-2y}}$$

¿Cuando $\frac{y-1}{1-2y}$ es un numero real?

Para que $\frac{y-1}{1-2y}$ sea un numero real el dominador tiene que ser diferente de cero es decir

$$1-2y \neq 0$$
$$\sim(1-2y=0)$$
$$\sim\left(y=\frac{1}{2}\right)$$

$$y \neq \frac{1}{2}$$

así

$$Im(f) = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

así la Función f será

$$\begin{array}{cccc} & \text{Dominio} & & \text{Imagen} \\ f: & \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} & \longrightarrow & \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{2x+1} \end{array}$$

$x = 0$ 3

$$f:(x) = 3$$

$$\frac{-\frac{2}{5}+1}{2\left(\frac{2}{5}\right)+1} = 3$$

Definición (Funcion Sobreyectiva): La Funcion real de variable real $f: D_{(f)} \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ es Sobreyectiva si para todo $y \in \mathbb{R}$ existe $x \in D_{(f)}$ tal que $f_{(x)} = y$

OBS: La Función real de variable real

$$f: D_{(f)} \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow Im(f) \subseteq \mathbb{R}$$

ya es sobreyectiva

Definición (biyectividad) Si la función real de variable real f es inyectiva y sobreyectiva, entonces la función f es biyectiva.

OBS: Si la Función $f: D(f) \subseteq \mathbb{R} \longrightarrow Im(f) \subseteq \mathbb{R}$ es biyectiva, entonces existe una función

$$f^{-1}: \overset{\text{dominio } f^{-1}}{Im(f)} \longrightarrow \overset{\text{Imagen } f^{-1}}{D(f)}$$

Denominado función inversa

Ejemplo: Hallar la Función inversa de la Función

$$f(x): \frac{x+1}{2x-1}$$

Sol: Notemos que la función es

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} - \left\{-\tfrac{1}{2}\right\} &\longrightarrow \mathbb{R} - \left\{\tfrac{1}{2}\right\} \\ x &\longmapsto \frac{x+1}{2x-1} \end{aligned}$$

y ya se verifico que es la Función es inyectiva y Sobreyectiva por tanto es biyectiva asi por lo anterior definición existe la función inversa de f que es

$$\begin{aligned} f^{-1}: \mathbb{R} - \left\{\tfrac{1}{2}\right\} &\longrightarrow \mathbb{R} - \left\{-\tfrac{1}{2}\right\} \\ x &\longmapsto \frac{x-1}{1-2x} \end{aligned}$$

La regla de la función (f^{-1}) se determine despejando x de la ecuación $f(x) = y$

) Algebra de Funciones:

Sean $\begin{aligned} f: D(f) \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto f(x) \end{aligned}$ y

$\begin{aligned} g: D(g) \subseteq \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto g(x) \end{aligned}$ dos Funciones reales de variable real,

entonces

i) Suma de Funciones

$$\begin{aligned} f+g : D_{(f)} \cap D_{(g)} &\to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (f+g)_{(x)} \end{aligned}$$

donde $(f+g)_{(x)} = f_{(x)} + g_{(x)}$

ii) Resta de Funciones:

$$\begin{aligned} f-g : D_{(f)} \cap D_{(g)} &\to \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (f-g)_{(x)} \end{aligned}$$

donde $(f-g)_{(x)} = f_{(x)} - g_{(x)}$

iii) Producto de Funciones

$$\begin{aligned} f\,g : D_{(f)} \cap D_{(g)} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto (f \cdot g)_{(x)} \end{aligned}$$

donde $(f \cdot g)_{(x)} = f_{(x)}\, g_{(x)}$

iv) Division de Funciones

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} : D_{(f)} \cap \left[D_{(g)} - \{ g_{(x)} = 0 \}\right] &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \left(\frac{f}{g}\right)_{(x)} \end{aligned}$$

donde $\left(\frac{f}{g}\right)_{(x)} = \dfrac{f_{(x)}}{g_{(x)}}$

Ejemplo de composición

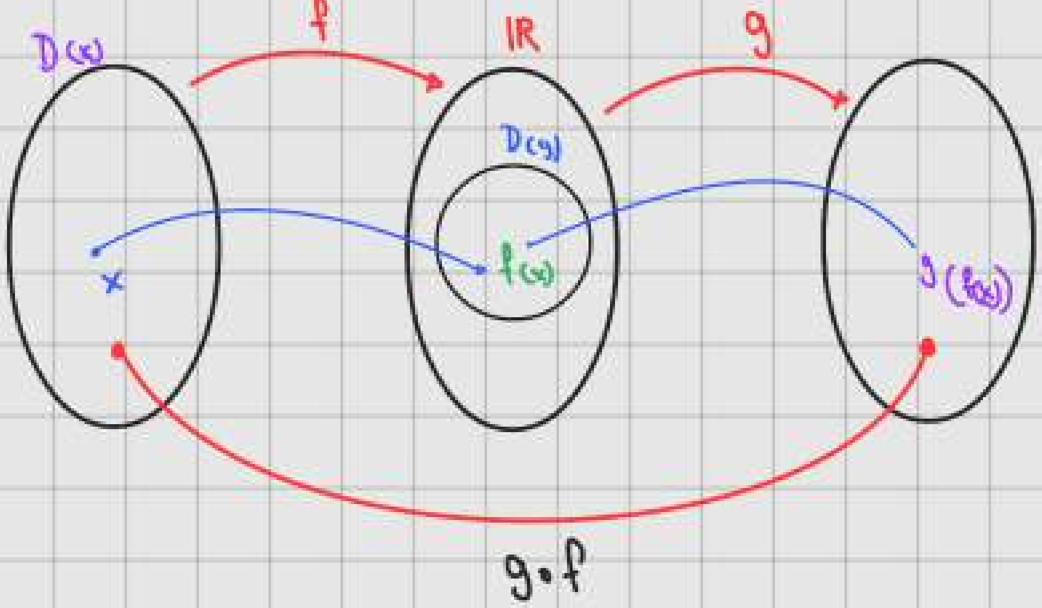
$$f_{(x)} = \ln(x)$$

$$g_{(x)} = 1 + \frac{1}{x}$$

$$(f \circ g)_{(x)} = f(g_{(x)}) = f\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$$\lim_{x \to a} f(g_{(x)}) = f\left(\lim_{x \to a} g_{(x)}\right)$$

iv) Composición de funciones



$$g \circ f : D(g \circ f) \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto (g \circ f)_{(x)}$$

donde $(g \circ f)_{(x)} = g(f_{(x)})$ y

$$D(g \circ f) = \{ x \in D_{(f)} \,/\, f_{(x)} \in Im_{(f)} \cap D_{(g)} \}$$

Ejemplo: Si $f_{(x)} = \sqrt{x}$ y $g_{(x)} = x^2 + 2x + 1$
determinar $g \circ f$ y $f \circ g$

Sol Para $g \circ f$ segun definición de composición

$$(g \circ f)_{(x)} = g(f_{(x)}) = g(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 + 2(\sqrt{x}) + 1$$

para $f \circ g$, segun definición de composición

$$(f \circ g)_{(x)}\ f(g_{(x)}) = f(x^2 + 2x + 1) = \sqrt{x^2 + 2x + 1}$$

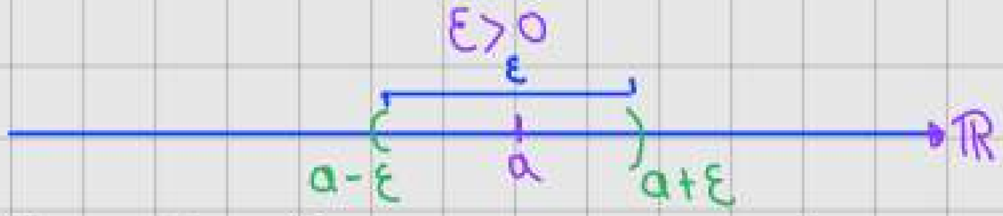
OBS: Segun este ejemplo la composición de funciones no es conmutativa pero si es asociativa

Capitulo 4

Limite de funciones y deribadas

4.1) Limite de Funciones

Definición (Punto de acumulación):



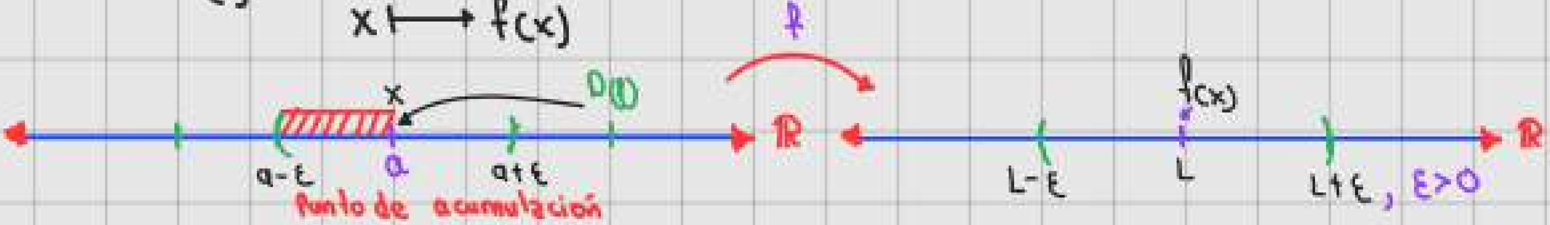
Sea $f: D_{(f)} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real de variable

El punto a es un punto de acumulación del conjunto $D_{(f)}$ si $\underbrace{\text{para todo } \varepsilon > 0}_{\forall \varepsilon > 0}$ el intervalo $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ intersectado con $D_{(f)}$ es no vacio es decir

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap D_{(f)} \neq \emptyset, \text{ para cualquier } \varepsilon > 0$$

Definición: (Limites de una función):

Sea $f\ D_{(f)} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real de variable real
$x \longmapsto f(x)$



$x \to a$

Sea $f: D_{(f)} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real de variable real y a un punto de acumulación del $D_{(f)}$ el punto L es el limite de la función f (o la función $f(x)$ converge a L) si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ \ni\ 0 < |x-a| < \delta \to |f(x) - L| < \varepsilon$$

en este caso se usa la notación $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$

$$\underbrace{\lim_{x\to a}}_{\text{punto de acumulación}} f(x) = L \text{ si } \forall \varepsilon_{(x)} > 0, \underbrace{\exists \delta > 0}_{\delta(\varepsilon)} \ni \underbrace{0 < |x-a| < \delta}_{\text{Hipotesis}} \rightarrow \underbrace{|f(x) - L| \overset{?}{<} \varepsilon}_{\text{Solución}}$$

Ejemplo: verificar que el limite de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto x^2$ cuando x tiende para 2 ($x \to 2$) es 4

$$\lim_{x\to 2} x^2 - 4$$

Solución: Segun la definición

$$\lim_{x\to a} x^2 = 4 \text{ si } \forall \varepsilon_{(x)} > 0, \exists \delta > 0 \ni 0 < |x-2| < \delta \rightarrow |x^2 - 4| < \varepsilon$$

así $|x^2-4| = |(x-a)(x+2)|$

$|a \cdot b| = |a||b|$

$$= |x-2||x+2|$$
$$= |x-2||x-2+2+2|$$
$$= |x-2||(x-2)+4|$$

$|a+b| \leq |a| + |b|$

$$\leq |x-2|\left[|x-2| + |4|\right]$$
$$< \underbrace{\delta[\delta+4]}_{\varepsilon}$$

así $\delta(\delta+4) = \varepsilon$

$$\delta^2 + 4\delta - \varepsilon = 0$$

de donde

$$\delta = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4(1)(-\varepsilon)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16+4\varepsilon}}{2}$$
$$= -2 \pm \sqrt{4+\varepsilon}$$

así $\delta = -2 \pm \sqrt{4+\varepsilon}$

Ejemplo: Verificar que $\lim_{x \to a} x = a$

Sol:

$\lim_{x \to a} x = a$ si $\forall \varepsilon_{(x)} > 0, \exists \delta > 0 \ni 0 < |x-a| < \delta \to |x-a| < \varepsilon$

así $|x-a| < \underbrace{\delta}_{\varepsilon}$ de donde $\delta > \varepsilon$

Ejemplo: Verificar que $\lim_{x \to a} c = c$ donde c es una constante

Sol:

$\lim_{x \to a} c = c$ si $\forall \varepsilon_{(x)} > 0, \exists \delta > 0 \ni 0 < |x-a| < \delta \to |c-c| < \varepsilon$

así: $|c-c| = |0| = 0 < \varepsilon$ de donde $\delta = \varepsilon$

Segun los anteriores ejemplos se tiene

$\lim_{x \to a} c = c$	$\lim_{x \to a} x^n = a^n$, para $n \in \mathbb{N}$
$\lim_{x \to a} x = a$	
$\lim_{x \to a} x^2 = a^2$	

Propiedades: Si $\lim_{x \to a} f_{(x)} = L_1$ y $\lim_{x \to a} g_{(x)} = L_2$ entonces

i) $\lim_{x \to a} (f_{(x)} + g_{(x)}) = Li + L_2$

Obs $\lim_{x \to a} (f_{(x)} + g_{(x)} = \lim_{x \to a} f_{(x)} \pm \lim_{x \to a} g_{(x)}$

ii) $\lim (f_{(x)} g_{(x)}) = L_1 L_2$

Obs:

$$\lim_{x \to a} (f_{(x)} g_{(x)}) = \left(\lim_{x \to a} f_{(x)} \right) \left(\lim_{x \to a} g_{(x)} \right)$$

iii) $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ si $L_2 \neq 0$

obs:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)} \quad \text{para} \quad \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

Ejercicio:

$$\lim_{x \to a} x^3 = \lim x^2 x = \left(\lim_{x \to a} x^2\right)$$

$$= a^2 \cdot a = a^3$$

Ejemplo: Determinar el limite

$$\lim_{x \mapsto 2} 2x^2 + x^4$$

Sol: Recordemos que $\lim\limits_{x \mapsto a} c = c$

$$\lim_{x \mapsto a} x = a \ , \ \lim_{x \to a} x^2 = a^2$$

asi

$$\lim_{x \to 2} (2x^3 + x^4) = \lim_{x \mapsto 2} (2x^2 + x^2 x^2)$$

$$= \lim_{x \mapsto 2} 2x^2 + \lim_{x \to 2} x^2 x^2$$

$$= \left(\lim_{x \mapsto 2} 2\right)\left(\lim_{x \to 2} x^2\right) + \left(\lim_{x \to 2} x^2\right)\left(\lim_{x \to 2} x^2\right)$$

$$= 2(2^2) + (2^2)(2^2)$$

$$= 24$$

asi $\lim\limits_{x \mapsto 2} (2x^2 + x^4) = 24$

Sea $P: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un polinomio definida

$P(x) = C_n x^n + C_{n-1} x^{n-1} + \cdots + C_1 x + C_0$ y $C_i \in \mathbb{R}$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, entonces

$$\lim_{x \to a} P(x) = \lim_{x \to a} \left(c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0\right)$$

Punto de acumulación

$$\lim_{x \to a} c_n x^n + \lim_{x \to a} c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + \lim_{x \to a} c_1 x + \lim_{x \to a} c_0$$

$$= \left(\lim_{x \to a} c_n\right)\left(\lim_{x \to a} x^n\right) + \left(\lim_{x \to a} c_{n-1}\right)\left(\lim_{x \to a} x^{n-1}\right) + \cdots + \left(\lim_{x \to a} c_1\right)\left(\lim_{x \to a} x\right) + \lim_{x \to a} c_0$$

$$= \underbrace{c_n a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \cdots + c_1 a + c_0}_{P(x)}$$

En resumen

$$\lim_{x \to a} \underbrace{\left(c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0\right)}_{P(x)} = \underbrace{a^n + c_{n-1} a^{n-1} + \cdots + c_1 a + c_0}_{P(x)}$$

o equivalente $\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$, por ejemplo

a) Calcular los limites

i) $\lim_{x \to 2} x^5 + 2x - 1 = ?$

ii) $\lim_{x \to 1} x^{30} - 2x + 1 = ?$

Sol para i)

$$\lim_{x \to 2} \underbrace{\left(x^5 + 2x - 1\right)}_{P(x)} = 2^5 + 2(2) - 1 = 35$$

Para ii)

$$\lim_{x \to 1} \underbrace{\left(x^{30} - 2x + 1\right)}_{P(x)} = \left(1^{30} - 2(1) + 1\right) = 0$$

Definición: Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones polinomicas entonces una función racional se define

$$r(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \quad \text{donde } g(x) \neq 0$$

Ejercicio: Calcular el limite $\displaystyle\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$

Sol: $\lim\limits_{x \to 1} \boxed{\dfrac{x^2-1}{x-1}}_{f(x)} = \lim\limits_{x \to 1} \underbrace{h(x)}_{1 \in D(h)}$

Nat 9a

$r = (\mathbb{R} - \{1\}) \times \mathbb{R}$

i) $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$, existe $y \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = y$

ii)

Punto de acumulación

$$f: \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x^2-1}{x-1}$$

así

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x \to 1} \underbrace{(x+1)}_{h(x)} = 1+1 \boxed{= 2} \quad 1 \in D(x)$$

$$f: \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{x-1}{x-1} \qquad x \longmapsto x+1$$

Ejercicio: Calcular el limite $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^5-1}{x-1}$

$$\lim_{x \to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^4+x^3+x^2+x^1+1)}{\cancel{x-1}}$$

$$1+1+1+1+1$$

$$5$$

Ejercicio: Calcular el limite $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^{20}-1}{x-1}$

Sol

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^{20}-1}{\underbrace{x-1}_{r(x)}} = \lim_{x \to 1} \underbrace{(x^{19}+x^{18}+\dots+x+1)}_{h(x)}$$

$1 \notin D(r)$

$$= 1^{19}+1^{18}+\dots 1+1 = 20$$

$1 \in D(h) = \mathbb{R}$

$$\begin{array}{l|l} x^{20}+0x^{19}+0x^{18}+\dots+0x-1 & x-1 \\ \hline -x^{20}+x^{19} & x^{19}+x^{18}+\dots+1 \\ \quad x^{19} & \\ \quad \ddots & \\ \qquad +x & \\ \qquad x & \\ \qquad -x+1 & \\ \qquad (0)\,? & \end{array}$$

Averiguar teorema del resto

Solución 2

Primero calculemos el limite del denominador

$$\lim_{\boxed{x\to 1}} (x-1) = (1-1) = 0$$

$x-1$ es factor del polinomio

Es decir $(x-1) = (x-1)\,1$

Por otro lado, calculemos el limite del numerador

$$\lim_{\boxed{x\to 1}} (x^{20}-1) = 1^{20}-1 = 0$$

$x-1$ es factor del polinomio $x^{20}-1$

es decir

$$x^{20}-1 = (x-1)\,q_{(x)}$$

así $x^{20}-1 = (x-1)\underbrace{(x^{19}+x^{18}+\cdots+x+1)}_{q_{(x)}}$

Por tanto

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{20}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x^{19}+x^{18}+\cdots+x+1)}{\cancel{(x-1)}\,1}$$

$$= \lim_{x\to 1} x^{19}+x^{18}+x^{17}+\cdots+x+1) \boxed{=20}$$

Ejercicios: Calculemos el limite $\lim_{x\to 1} \frac{x^{30}-2x+1}{x^{20}-2x+1}$

Sol: Notemos

$$\lim_{\boxed{x\to 1}} (x^{20}-2x+1) = 1^{20}-2(1)+1 = 0$$

$x-1$ es factor

también

$$\lim_{\boxed{x\to 1}} (x^{30}-2x+1) = 1^{30}-2(1)+1 = 0$$

$x-1$ es factor

asi

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^{30}-2x+1}{x^{20}-2x+1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^t\, q_1(x)}{(x-1)^k\, q_2(x)}$$

Por tanto

$$\begin{array}{l|l}
x^{30}+0x^{29}+x^{28}+\cdots+0x^2-2x+1 & x-1 \\ \hline
-x^{30}+x^{29} & x^{29}+x^{28}+\cdots+x-1 \\
\quad x^{29} & \\
\quad\quad \ddots & \\
\quad\quad\quad x^2 & \\
\quad\quad\quad -x^2+x & \\
\quad\quad\quad\quad \cancel{-x} & \\
\quad\quad\quad\quad \cancel{+x}\cancel{-1} & \\
\quad\quad\quad\quad (0) &
\end{array}$$

asi $x^{30}-2x+1=(x-1)^1(x^{29}+x^{28}+\cdots+x-1)$

tambien

$$\begin{array}{l|l}
x^{20}+0x^{19}+\cdots+0x^2-2x+1 & x-1 \\
-x^{20}+x^{19} & x^{19}+x^{18}+\cdots+x-1 \\
0 \quad x^{19} & \\
\quad\quad \ddots & \\
\quad\quad\quad (0) &
\end{array}$$

asi

$$x^{20}-2x+1=(x-1)^1(x^{19}+x^{18}+\cdots+x-1)$$

asi

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{30}-2x+1}{x^{20}-2x+1} = \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x^{29}+x^{28}+\cdots+x-1)}{\cancel{(x-1)}(x^{19}+x^{18}+\cdots+x-1)}$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{29}+x^{28}+\cdots+x-1}{x^{19}+x^{18}+\cdots+x-1}$$

$$=\frac{1^{29}+1^{28}+\cdots+1-1}{1^{19}+1^{18}+\cdots+1-1} \Rightarrow \frac{28}{18} = \boxed{\frac{14}{9}}$$

así $\lim_{x \to 1} \dfrac{x^{30} - 2x + 1}{x^{20} - 2x + 1} = \dfrac{14}{14}$

Recordemos:

Para determinar $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ donde las funciones f y g son polinomios

se recomienda determinar los limites del denominador y numerador si

$$\lim_{x \to a} g(x) = 0$$

$x - a$

Significa que el polinomio g tiene como Factor a $(x-a)^k$ así

$$g(x) = (x-a)^k \, q_2(x)$$

y $$\lim_{x \to a} f(x) = 0$$

esto significa que el polinomio f tiene como factor $(x-a)^t$ así

Polinomio teorema del resto $f(x) = (x-a)^t \, q_1(x)$

Por tanto

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{(x-a)^t q_1(x)}{(x-a)^k q_2(x)}$$

Caso 1 Si $t = k$, entonces

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{\cancel{(x-a)^t} q_1(x)}{\cancel{(x-a)^k} q_2(x)}$$

$$= \lim_{x \to a} \frac{q_1(x)}{q_2(x)}$$

$$\frac{q_1(a)}{q_2(a)}$$

Por ejemplo:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

Notemos

$\lim_{x \to 1} (x-1) = 1 - 1 = 0$ esto significa que

$(x-1) = (x-1)\,1$

tambien

$$\lim_{x\to 1} (x^2-1) = 1^2 - 1 = 0$$

y esto significa

$$x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$$

asi

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)\,1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{1}$$

$$= \frac{1+1}{1} \Rightarrow \boxed{2}$$

Caso 2 Si $t > k$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)^t\, q_1(x)}{(x-a)^k\, q_2(x)}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{(x-a)^s\, q(x)}{q_2(x)}$$

$$= \frac{0}{q_2(a)} = 0$$

Por ejemplo:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-1}$$

Notemos: $\lim_{x\to 1} \boxed{(x^2-1)} = 1^2 - 1 = 0$

Por tanto: $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

tambien:

$$\lim_{x\to 1} x^2 - 2x + 1 = 1^2 - 2(1) + 1 = 0$$

Por tanto: $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

así

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-2x+1}{x^2-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2}{(x-1)(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)}{x+1}$$

$$= \frac{1-1}{1+1} = \frac{0}{2} = 0$$

Caso 3: Si $t<k$, entonces

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{(x-a)^t q_1(x)}{(x-a)^k q_2(x)}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{q_1(x)}{(x-a)^k q_2(x)} = ?$$

Ejercicio: Calcular el límite $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

Sol: Notemos $\lim_{x\to 1} \boxed{(\sqrt{x}-1)} = 3$

$f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$

$x \longmapsto \sqrt{x}-1$

Por otro lado:

$$\lim_{x\to 1} (x-1) = 1-1 = 0$$

$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

así:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(\sqrt{x}+1)}{(\sqrt{x})^2-1^2}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}{\cancel{x-1}}$$

$$= \lim_{x\to 1} (\sqrt{x}+1) = \sqrt{1}+1 = \boxed{2}$$

Ejercicio: Calcule el limite $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-2}{x-1}$

Sol: Notemos $\lim_{x\to 1} (x-1) = 0$ asi $x-1 = (x-1)\,1$

tambien:

$$\lim_{x\to 1} (\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-2) = \sqrt[3]{1}+\sqrt{1}-2 = 0$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt{x}-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(\sqrt[3]{x}-1)+\sqrt{x}-1)}{x-1}$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} + \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}\left(\frac{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}\cdot 1+1^2}{(\sqrt[3]{x})^2+\sqrt[3]{x}\cdot 1+1^2}\right) + \frac{\sqrt{x}-1}{x-1}\left(\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}\right)\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{(\sqrt[3]{x})^3-1^3}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} + \frac{(\sqrt{x}^2)-1^2}{(x-1)(\sqrt{x}+1)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)} + \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(\sqrt{x}+1)}\right]$$

$$= \lim_{x\to 1}\left[\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} + \frac{1}{\sqrt{x}+1}\right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt[3]{1}^2+\sqrt[3]{1}+1} + \frac{1}{\sqrt{1}+1}$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{5}{6} \;//$$

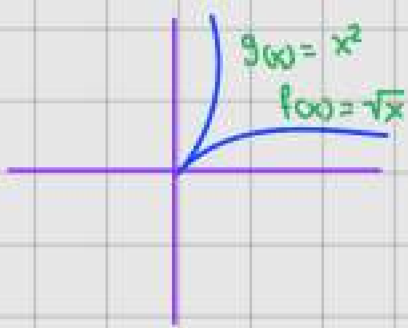
Definición (Función continua) La función real de variable real $f: D(f) \to \mathbb{R}$ es continua en el punto de acumulación $a \in D(f)$ si

$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \ni |x-a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Observacion: La anterior definición tambien es equivalente a

$\lim_{x\to a} f(a) = f(a)$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, |x-a| < \delta \to |f(x) - f(a)| < \varepsilon$

Ejercicio: Verificar que la Función



$f(x) = \sqrt{x}$ es continua $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Teorema:

Ejercicio Verifica si la función $f(x) = \sqrt{x}$ es continua en el conjunto $\mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

Sol Para la solución del ejercicio es recomendable el siguiente teorema

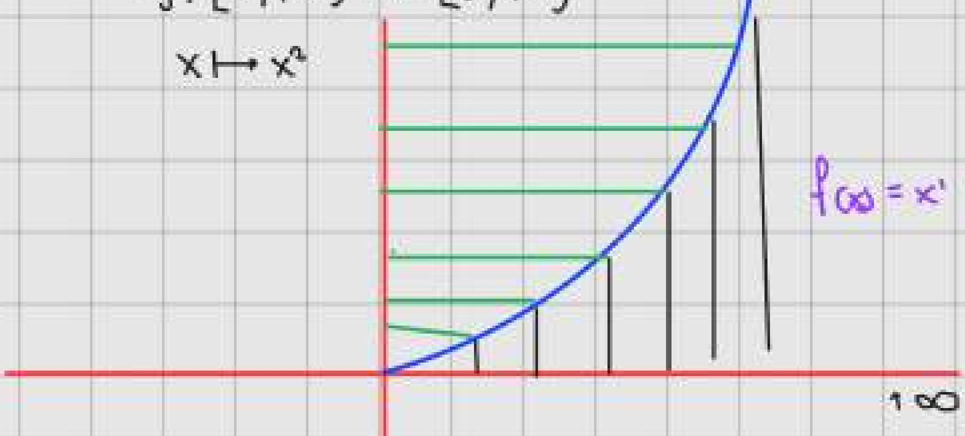
Teorema: Si la función real de variable real $f[a,b] \to [c,d]$ es inversible (con inversa $f^{-1}:[c,d] \to [a,b]$), estrictamente creciente y continua, entonces la Función inversa $f^{-1}[c,d] \to [a,b]$ es, estrictamente creciente y continua

La definición de raiz cuadrada indica

$$\sqrt{x} = y \text{ si y solo si } \underbrace{y^2}_{g(x)} = x$$

Notemos que la Función $g: x \longmapsto x^2$

$$g: [0,+\infty) \to [0,+\infty)$$
$$x \mapsto x^2$$



es inyectiva y sobreyectiva por todo biyectiva asi la Función y es inversible

Por otro lado

$$\underbrace{a<b}_{\text{hipotesis}} \text{ entonces } \underbrace{\overbrace{g(a)}^{a^2} < g(b)}_{\text{conclusión}} \text{ para todo } a,b \in [0,+\infty)$$

Por hipotesis $a<b$ para $a,b\in[0,+\infty)$ es decir $0\leq a$, $a\leq b$, así $0\leq a<b$ entonces $a^2<b^2$

es decir

$$a<b \text{ entonces } g(a)<g(b)$$

Para todo $a,b\in[0,+\infty)$ por tanto g es estrictamente

Tambien

$$\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} x^2 = a^2 = \boxed{g(a)}$$

así $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$, así g es continua

Por otro lado la inversa de g sera

$$g(x)=x^2$$
$$y=x^2$$
No se coloca $\pm\sqrt{y}=x$
$$x=\sqrt{y}$$

así la función inversa de g es

$$g^{-1}:[0,\infty)\to[0,+\infty)$$
$$x\mapsto\sqrt{x}$$

y por el teorema esta función es estrictamente creciente y continua es decir la $\sqrt{x}$ es continua en $[a,+\infty)$

Obs:

$$\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$$
$$=\sqrt{\lim_{x\to a} x}$$

Ejercicio: Verificar que la función $f(x)=\sqrt[x]{x}$ es continua

$\sqrt[n]{x}=y$ si y solo si $y^n=x$

→ Conceptual

→ Operativo

$\sqrt[n]{x}$

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

Ejercicio: Calcular el limite

$$\lim_{x\to -8} \frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}$$

Solu: Notemos

$$\lim_{x\to-8}(2+\sqrt[3]{x}) = \lim_{x\to-8} 2 + \lim_{x\to-8}\sqrt[3]{x}$$

$$= 2+\sqrt{\lim_{x\to-8} x} = 2+\sqrt[3]{-8}$$

$$= 2+(-2)=0$$

Tambien

$$\lim_{x\to-8}(\sqrt{1-x}-3) = \lim_{x\to-8}\sqrt{1-x} - \lim_{x\to-8} 3$$

$$= \lim_{x\to 8}(1-8) - 3 = \sqrt{1-(8)}-3$$

$$= \sqrt{9}-3=3-3=0$$

Por tanto

$$\lim_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}} = \lim_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x}-3}{2+\sqrt[3]{x}}\left(\frac{\sqrt{1-x}+3}{\sqrt{1-8}+3}\right)\left(\frac{2^2-2(\sqrt[3]{x})+(\sqrt[3]{x^2})}{2^2-2(\sqrt[3]{x})+(\sqrt[3]{x^2})}\right)$$

$$\lim_{x\to-8}\frac{\sqrt{1-x})^3-3^2}{2^3+(\sqrt[3]{x})^3}\left(\frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1-x}+3}\right)$$

$$\lim_{x\to-8}\left(\frac{(1-x)-9}{x+x}\right)\left(\frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1-x}+3}\right)$$

$$\lim_{x\to-8}\frac{\cancel{(x+8)}}{\cancel{(x+8)}}\left(\frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[8]{x^2}}{\sqrt{(-x}+3}\right)$$

$$\lim_{x\to-8} = \frac{4-2\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{1-x}+3} = \frac{4-2^3\sqrt{8}+\sqrt[3]{8^2}}{\sqrt{1-8}+3}$$

$$= -\frac{12}{6} = -2$$

F) Limites laterales

Definición (Limite lateral derecha)

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L \quad \text{si } \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 \text{ tq } 0<x-a<\delta \rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

Definición (Limite lateral izquierdo)

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = L \quad \text{si } \forall \varepsilon>0, \exists \delta>0 \text{ tq } -\delta<x-a<0 \rightarrow |f(x)-L|<\varepsilon$$

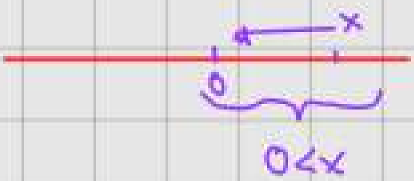
Ejemplo Calcular los limites

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x}$$

Sol:

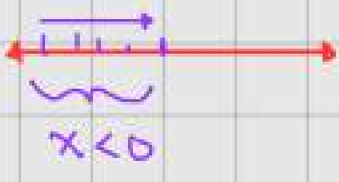
$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x}$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$



Para

$$\lim_{\boxed{x\to 0^-}} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{-x}{x} = \lim_{x\to 0} -1 = -1$$



Teorema:

Recordemos Ya se verifico que

$(c)'=0$; $(x)'=1$; $(x^2)'=2x$;

$(x^3)'=3x^2$; ... ; $(x^n)'=nx^{n-1}$

$$P_{(x)}=a_0+a_1+a_1x^2+\dots+a_nx^n$$

Seria

$$\begin{aligned}P'_{(x)}&=(a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n)'\\&=(a_0)'+(a_1x)'+(a_2x^2)'+\dots+(a_nx^n)'\\&=0+a_1(x)'+a_2(x^2)'+\dots+a_n\,x^n)'\\&=a_1 1+a_2(2x^2)+\dots+a_n(nx^{n-1})\end{aligned}$$

asi:

$$P'_{(x)}=a_1+2a_2x+3a_3x^2+\dots+na_nx^{n-1}$$

Por ejemplo, si $P_{(x)}=2x^5+3x-1$ asi

$$\begin{aligned}P'_{(x)}&=(2x^5+3x-1)'=(2x^5)'+(3x)'-(1)'\\&=2(x^5)'+3(x)'=0\\&=2(5x^4)+3(1)\end{aligned}$$

asi $P'_{(x)}=10x^4+3$

Ejercicio: Derivar la función racional $r_{(x)}=\dfrac{2x^5-x^3+2}{x^{10}-5}$

$$r'(x)=\left(\frac{2x^5-x^3+2}{x^{10}-5}\right)'$$

$$\frac{f_{(x)}}{g_{(x)}}\quad\frac{f'_{(x)}\cdot g_{(x)}-f_{(x)}\cdot g_{(x)}'}{(g_{(x)})^2}$$

$$=\frac{(2x^5-x^3+2)'(x^{10}-5)-(2x^5-x^3+2)(x^{10}-5)'}{(x^{10}-5)^2}$$

$$= \frac{(10x^4 - 3x^2)(x^{10}-5) - (2x^5 - x^3 + 2)(10x^9)}{(x^{10}-5)^2}$$

Ejercicio: Derivar la función $f_{(x)} = \sqrt[n]{x}$

Teorema: (Teorema de la función inversa)

$$(f^{-1}_{(x)})^1 = \frac{1}{f^{-1}(f^{-1}_{(x)})}$$

f Inversa

$\underbrace{\exists f^{-1}}$

$f \circ f = I,\ f^{-1} \circ f =$

Notemos que en el ejercicio anterior

$$f: D_{(f)} \longrightarrow Im(f)$$
$$x \longmapsto \sqrt[n]{x}$$

Así el dominio $D(f)$ y la imagen $Im(f)$

Se denomina según el valor de n, es decir si n es par o impar de esta forma la función f será inversible con inversa

$$f^{-1}: Im(f) \longrightarrow D(f)$$

$$x \longmapsto x^n$$

así $g'_{(x)} = (x^n)' = n x^{n-1}$

así por el teorema de la función inversa

$$(g^{-1}_{(x)})^1 = \frac{1}{g'(g'_{(x)})}$$

$$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n(g^{-1}_{(x)})^{n-1}}$$

$$= \frac{1}{n\left(\sqrt[n]{x}\right)^{n-1}}$$

$$= \left(\frac{1}{n}\right)\left(\sqrt[n]{x}\right)^{1-n}$$

$$= \frac{1}{n}\ (x)^{\frac{1-n}{n}}$$

$$= \frac{1}{n}\ x^{\frac{1}{n}-1}$$

así $\left(\sqrt[n]{x}\right)' = \frac{1}{n}\ x^{\frac{1}{n}-1}$ es decir

$$\left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n}\ x^{\frac{1}{n}-1}$$

Ejemplo: Derivar la función $f(x) = \dfrac{2\sqrt[3]{x} - \sqrt{2}}{\sqrt{x}}$

Sol:

$$f'(x) = \left(\frac{2\sqrt[3]{x} - \sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{\left(2\sqrt[3]{x} - \sqrt{2}\right)' \cdot \left(\sqrt{x}\right) - \left(2\sqrt[3]{x} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}\right)'}{\left(\sqrt{x}\right)^2}$$

$$= \frac{\left(2\left(\sqrt[3]{x}\right)' - 0\right)\sqrt{x} - \left(2\sqrt[3]{x} - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{x}\right)'}{|x|}$$

$$= \frac{2\boxed{\left(x^{\frac{1}{3}}\right)'}\sqrt{x} - \left(2\sqrt[3]{x} - \sqrt{2}\right)\boxed{\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'}}{|x|}$$

0. Aux

$$\left(\sqrt[3]{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2x^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x^1}}$$

así:

$$\left(\frac{2\sqrt[3]{x}-\sqrt{2}}{\sqrt{x}}\right)' = \frac{2\left(\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}\right)\sqrt{x} - \left(2\sqrt[3]{x}-\sqrt{2}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)}{|x|}$$

Ejemplo Derivar la función $f(x) = |x|$

segun yo

$$(x^2) \quad \boxed{2x}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)^2 \quad \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2 \quad \left(x^{\frac{1}{2}\cdot 2}\right) \quad \left(x^{\frac{2}{2}}\right)' \quad (x^1) \quad (x)$$

$$\left(\left(\sqrt{x}\right)^2\right)' \quad 2(\sqrt{x}) \quad 2\sqrt{x} \quad x^{\frac{1}{2}-1} \quad x^{-\frac{1}{2}}$$

Sol

$$(|x|)' = \left(\sqrt{x^2}\right)' = (g\circ h)'(x)$$

$g(x) = \sqrt{x}$

$h(x) = x^2$

$$= g'(h(x))\, h'(x)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{h(x)}}(x^2)'$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x^2}}(2x)$$

$$= \frac{x}{\sqrt{x^2}}$$

Por tanto

$$(|x|)' = \frac{x}{\sqrt{x^2}} = \frac{x}{|x|}$$

es decir

$$(|x|)' = \frac{x}{|x|}\left(\frac{|x|}{|x|}\right) = \frac{x|x|}{|x|^2} = \frac{x|x|}{x^2} = \frac{|x|}{x}$$

Ejercicio: Determinar la derivada de la función

función $f(x) = e^x$

Sol: Notemos que

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$
$$x \longmapsto e^x$$

Sea $a \in \mathbb{R}$ un punto de acumulación así por definición de rinde

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{\boxed{x \to a}} \frac{e^x - e^a}{x - a}$$

$y = x - a$

$$\lim_{y \to 0} \frac{e^{y+a} - e^a}{y}$$

Aux $x \to a$ entonces $y \to ?$

$$\lim_{x \to a} y = \lim_{x \to a} (x-a) = a - a = 0$$

$$= \lim_{y \to 0} e^y e^a - e^a$$

$$= \lim_{y \to 0} e^a\left(\frac{e^y - 1}{y}\right)$$

$$= e^a \lim_{y \to} \frac{e^y - 1}{y} = e^a(1) = e^a$$

así $f'(a) = e^a$ y como a es cualquier numero real no perdemos generalidad al cambiar a por x es decir $f'(x) = e^x$ pero $f(x)$ e^x así $(e^x)' = e^x$

Notemos que, la inversa de la Función

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$$
$$x \mapsto e^x$$

es la función

$$\ln: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$$
$$f^{-1} \quad x \mapsto \ln x \rightsquigarrow f^{-1}_{(x)}$$

$$e^{\ln y} = y$$
$$\ln(e^y) = y$$

Por el teorema de la Funcion inversa se tendra

$$\left(f^{-1}_{(x)}\right) = \frac{1}{f^{-1}(f^{-1}_{(x)})}$$

asi

$$(\ln x)' = \frac{1}{e^{f^{-1}(x)}} = \frac{1}{x}$$

asi $(\ln x)' = \frac{1}{x}$

Ejercicio: Derivar las Funciones

a) $f_{(x)} = \log_3 x$

b) $f_{(x)} = \log_b x$

Para el inciso a)

$$f'_{(x)} = (\log_3 x)' =$$

$$\log_b x = \frac{\log_? x}{\log_? x}$$

$$\left(\frac{\log_e x}{\log_e 3}\right)' = \left(\frac{\ln x}{\ln 3}\right)' = \left[\left(\frac{1}{\ln 3}\right) \ln x\right]' = \frac{1}{\ln 3} (\ln x)'$$

$$= \frac{1}{\ln 3} \left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \left(\frac{1}{\ln 3}\right) = \frac{1}{x} \left[\frac{\frac{1}{\log_3 3}}{\log_3 e}\right]$$

$$= \frac{1}{x}\left(\frac{1}{\frac{1}{\log_3 e}}\right) = \frac{1}{x} \left(\log_3 e\right)$$