

EJERCICIOS VARIADOS

EJEMPLO

Demostrar: $(A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$

Dem.

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$$

$$(P \vee Q) \wedge R \equiv (P \wedge R) \vee (Q \wedge R)$$

Sea $(x, y) \in (A \cup B) \times C \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \wedge y \in C$, def. prod. cart.

$$\Leftrightarrow (x \in A \vee x \in B) \wedge y \in C, \text{ def. unión}$$

$$\Leftrightarrow (x \in A \wedge y \in C) \vee (x \in B \wedge y \in C), \text{ dist. } \wedge \vee$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \vee (x, y) \in (B \times C), \text{ def. prod. cart.}$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in (A \times C) \cup (B \times C), \text{ def. unión}$$

$$\therefore (A \cup B) \times C = (A \times C) \cup (B \times C)$$

23. Para $n \in \mathbb{Z}$, sea $A_n = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \leq n\}$.
Encontrar los siguientes conjuntos.

(a) $A_3 \cup A_{-3}$

(c) $A_3 \cap (A_{-3})^c$

(b) $A_3 \cap A_{-3}$

(d) $\bigcap_{i=0}^4 A_i$

$$A_0 = \{a \in \mathbb{Z} \mid a \leq 0\}$$

$$A_0 = \{\dots, -3, -2, -1, 0\}$$

$$A_5 = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

Sol.

a) $A_3 \cup A_{-3} = A_3$

porque $A_{-3} \subset A_3 \checkmark$

b) $A_3 \cap A_{-3} = A_{-3}$

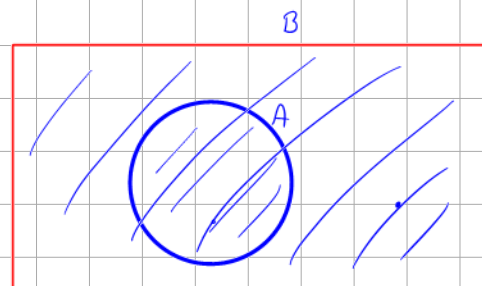
porque $A_{-3} \subset A_3 \checkmark$

c) $A_3 \cap (A_{-3})^c = A_3 - A_{-3}$

Como $A_3 = \{\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

$$A_{-3} = \{\dots, -4, -3\}$$

$$(A_{-3})^c = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\} \Rightarrow A_3 \cap (A_{-3})^c = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$



i) $A \subset B \checkmark$

$$A \cup B = B$$

$$A \cap B = A$$

$$\begin{aligned}
 d) \quad \bigcap_{i=0}^4 A_i &= \{[(A_0 \cap A_1) \cap A_2] \cap A_3\} \cap A_4, & A_0 \subset A_1 &\Rightarrow A_0 \cap A_1 = A_0 \\
 &= \{[A_0 \cap A_2] \cap A_3\} \cap A_4, & A_0 &\subset A_2 \\
 &= \{A_0 \cap A_3\} \cap A_4, & A_0 &\subset A_3 \\
 &= A_0 \cap A_4, & A_0 &\subset A_4 \\
 &= A_0
 \end{aligned}$$

24. Sean A y B conjuntos tales que

(a) $A \cap B = A$.

(b) $A \cup B = A$.

¿Qué puedes concluir? ¿Por qué?

a) $\overbrace{A \cap B = A} \Rightarrow A \subset B$ ✓
 $x \in A \Rightarrow x \in A \cap B$, hipótesis
 $\Rightarrow x \in A \wedge x \in B$, def. inter.
 $\Rightarrow x \in B$, L. simplif.
 $\therefore A \subset B$

b) $x \in B \Rightarrow x \in A \vee x \in B$, L. adición
 $\Rightarrow x \in A \cup B$, def. unión
 $\Rightarrow x \in A$, hip.
 $\therefore B \subset A$

35. Sean A , B , C y D subconjuntos de algún conjunto universal U . Use las identidades de la teoría de conjuntos para simplificar las expresiones

(a) $[(A \cup B)^c \cap (A^c \cup C)^c]^c \setminus D^c$

$= \underline{D}$ ✓✓

b) $\{[C \cup (B \setminus A^c)] \cap [B \setminus (C \cup A)]^c\} \cup B$

$= B \cup C$

(c) $\{(A \cup B) \cap [(B \setminus A) \cup (A \cap B)]\} \cap [A \cup (A \cup B)^c]$

$= \underline{A \cap B}$ ✓

(d) $[(A \cup B^c) \oplus (B \setminus A)]^c \cup [(A \cap B)^c - (B \setminus A)]$

$= \underline{A \cup B^c}$ ✓✓

$$\begin{aligned}
 b) \quad & \{[C \cup (B \cap A)] \cap [B \cap (C \cup A)^c]^c\} \cup B \\
 &= \{[C \cup (A \cap B)] \cap [B^c \cup (C \cup A)]\} \cup B \\
 &= \{[C \cup (A \cap B)] \cup B\} \cap \{[B^c \cup (C \cup A)] \cup B\} \\
 &= [C \cup B] \cap U = B \cup C
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \{B^c \cup C \cup A \cup B\} \\
 &= (B \cup B) \cup (C \cup A) \\
 &= U \cup (C \cup A) \\
 &= U
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\{ [(A \cup B^c) \cup (B \cap A)] \cap [(A \cup B^c) \cap (B \cap A)]^c \right\}^c \cup \left\{ [(A \cap B)^c \cap (B \cap A^c)^c] \right\} \\
&= \left\{ [(A \cup B^c) \cup (B \cap A)] \cap [(A \cup B^c) \cap (B \cap A)]^c \right\}^c \cup \left\{ [(A \cap B)^c \cap (B^c \cup A)] \right\} \\
&= \left\{ [(A \cup B^c) \cup (B \cap A)]^c \cup [(A \cup B^c) \cap (B \cap A)] \right\} \cup \left\{ (A^c \cup B^c) \cap (B^c \cup A) \right\} \\
&= \left\{ [(A \cup B^c)^c \cap (B \cap A)^c] \cup [(A \cap B \cap A^c) \cup (B^c \cap B \cap A^c)] \right\} \cup \left\{ (A^c \cup B^c) \cap B^c \cup (A^c \cup B^c) \cap A \right\}
\end{aligned}$$

Corrección del ejercicio...
Había un error.

$$\begin{aligned}
&= \left\{ [(A^c \cap B) \cap (A^c \cap B)^c] \cup [\emptyset \cup \emptyset] \right\} \cup B^c \\
&= \{ \emptyset \cup \emptyset \} \cup B^c = \emptyset \cup B^c = B^c
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\{ B^c \} \cup \{ (A^c \cap A) \cup (B^c \cap A) \} \\
&\{ B^c \} \cup \{ \emptyset \cup (B^c \cap A) \} \\
&\{ B^c \} \cup \{ B^c \cap A \} \\
&B^c
\end{aligned}$$

46. Sean los conjuntos A y B , tales que

(a) $|A \oplus B| = 10$ y $|A \cup B| = 25$. ¿Cuántos elementos tiene $A \cap B$?

cardinal de A $\eta(A)$
 $|A|$

(b) $|A \cup B| = 18$ y $|A \cap B| = 7$. ¿Cuántos elementos tiene $A \oplus B$?

$$\eta(A \cup B) = \eta(A) + \eta(B) - \eta(A \cap B)$$

$$a) \quad \eta(A \oplus B) = \eta(A \cup B) - \eta(A \cap B)$$

$$10 = 25 - \eta(A \cap B) \Rightarrow \eta(A \cap B) = 25 - 10 = 15$$

72. Demostrar que $\bigcup_{\alpha} A_{\alpha}$ y $\bigcap_{\alpha} A_{\alpha}$ se distribuyen sobre el producto cartesiano:

$$a) \quad \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha} \right) \times \left(\bigcup_{\beta \in J} B_{\beta} \right) = \bigcup_{\substack{\alpha \in I \\ \beta \in J}} (A_{\alpha} \times B_{\beta}),$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i$$

$$I = \{1, 2, 3\}$$

$$b) \quad \left(\bigcap_{\alpha \in I} A_{\alpha} \right) \times \left(\bigcap_{\beta \in J} B_{\beta} \right) = \bigcap_{\substack{\alpha \in I \\ \beta \in J}} (A_{\alpha} \times B_{\beta}).$$

$$= A_1 \cup A_2 \cup A_3$$

a)

$$\text{Sea } (x, y) \in \left(\bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha} \right) \times \left(\bigcup_{\beta \in J} B_{\beta} \right) \Leftrightarrow x \in \bigcup_{\alpha \in I} A_{\alpha} \wedge y \in \bigcup_{\beta \in J} B_{\beta}$$

$$\Leftrightarrow \underline{x \in A_{\alpha}}, \text{ para algún } \alpha \in I \wedge \underline{y \in B_{\beta}} \text{ para algún } \beta \in J.$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in \underline{A_{\alpha} \times B_{\beta}}, \text{ para algún } \alpha \in I, \beta \in J$$

$$\Leftrightarrow (x, y) \in \bigcup_{\substack{\alpha \in I \\ \beta \in J}} (A_{\alpha} \times B_{\beta})$$

