Ejemplo Determinar el conjunto dc partes de:

$$A = \{a, b, c\}$$

$P(A)$ tiene 8 elem.

$$P(A) = \{\emptyset, A, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}\}$$

Determina el valor de verdad de cada proposición.

1.	$a \in A$,	V	11.	$a \in P(A)$	F
2.	$\{a\} \in A$,	F	12	$\{a\} \in P(A)$	V ✓
3.	$a \subset A$,	F	13	$\{a\} \subset P(A)$	F
4.	$\{a\} \subset A$,	V	14	$\{a, b\} \in P(A)$	V
5.	$\phi \in A$,	F	15	$\phi \subset P(A)$	V ✓
6.	$\phi \subset A$,	V	16	$\phi \in P(A)$	V ✓
7.	$A \in A$,	F	17	$A \in P(A)$	V
8.	$A \subset A$,	V	18	$A \subset P(A)$	F
9.	$o \in \phi$,	F	19	$\{\phi\} \subset P(A)$	V
10	$\{\{a\}\} \subset P(A)$,	V	20	$\{c\} \subset P(A)$	F

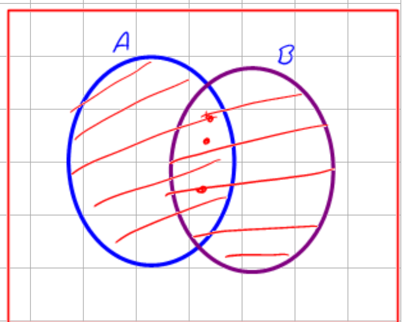
OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS:

En esta sección se analizarán varias operaciones que combinan dos o más conjuntos mediante reglas bien definidas para formar nuevos conjuntos. A esta combinación de conjuntos se le llaman operaciones entre los mismos, y son: unión, intersección, complementación, diferencia, diferencia simétrica y combinaciones de las mismas.

Unión de conjuntos Sean A y B dos conjuntos en un mismo universo. La unión de A y B es el conjunto formado por los elementos de A o de B, o de ambos. Lo denotamos por $A \cup B$

Es decir. $A \cup B = \{x / x \in A \lor x \in B\}$

o $x \in A \cup B \Leftrightarrow x \in A \lor x \in B$



$A \cup B$

Propiedades

i) $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$; (inclusión)

ii) $A \cup B = B \cup A$ (conmutatividad);

iii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (asociatividad)

Dem. i) $\quad A \subset B \iff \forall x: x \in A \Rightarrow x \in B$

a) $A \subset A \cup B$

Sea $x \in A \Rightarrow x \in A \vee \underline{x \in B}$

$\Rightarrow x \in A \cup B$

b) $B \subset A \cup B$

Sea $x \in B \Rightarrow x \in B \vee x \in A$

$\Rightarrow x \in B \cup A$

$\Rightarrow x \in A \cup B$

iii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, $\quad \boxed{A = B \iff A \subset B \wedge B \subset A}$

a) $(A \cup B) \cup C \subset A \cup (B \cup C)$ $\quad$ b) $A \cup (B \cup C) \subset (A \cup B) \cup C$

Sea $x \in (A \cup B) \cup C \iff x \in (A \cup B) \vee x \in C$, def. $\cup$

$\iff (\underline{x \in A} \vee \underline{x \in B}) \vee \underline{x \in C}$

$\iff x \in A \vee (x \in B \vee x \in C)$

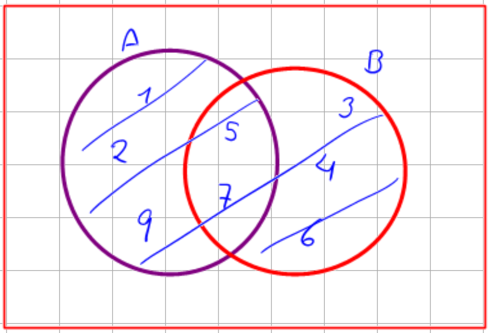
$\iff x \in A \vee x \in (B \cup C)$

$\iff x \in A \cup (B \cup C)$

Ejm. Sean $A = \{1, 2, 5, 7, 9\}$

$B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$

entonces. $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$

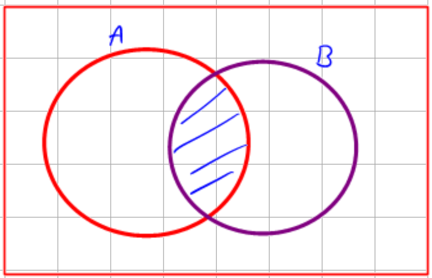


Intersección de dos conjuntos

Sean A y B dos conjuntos en un mismo universo.
Definimos $A \cap B$ como la intersección de A y B. Los elementos de $A \cap B$ son los elementos que estan en A y estan en B.

Es decir. $A \cap B = \{x / x \in A \wedge x \in B\}$

o $\boxed{x \in A \cap B \iff x \in A \wedge x \in B}$



$A \cap B$

Propiedades

iv) $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$;
v) $A \cap B = B \cap A$ (conmutatividad);
vi) $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (asociatividad)

$A \cap B \subset A \subset A \cup B$
$A \cap B \subset A \cup B$

Dem. $A \cap B \subset A$

Sea $x \in A \cap B \iff \underline{x \in A} \wedge \underline{x \in B}$

$\Rightarrow x \in A$

$\therefore A \cap B \subset A$

$\dfrac{p \wedge q \quad V}{p \quad V}$ $\dfrac{p \wedge q}{q \quad V}$

Obs. A y B son disjuntos $\leftrightarrow A \cap B = \phi$

Proposición Sean A, B y C conjuntos. Entonces las propiedades

vii) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
viii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,

$p \wedge (q \vee r) = (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
$p \vee (q \wedge r) =$

Dem. $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Sea $x \in A \cap (B \cup C) \iff x \in A \wedge x \in (B \cup C)$
$\iff x \in A \wedge (x \in B \vee x \in C)$
$\iff (x \in A \wedge x \in B) \vee (x \in A \wedge x \in C)$
$\iff x \in (A \cap B) \vee x \in (A \cap C)$
$\iff x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

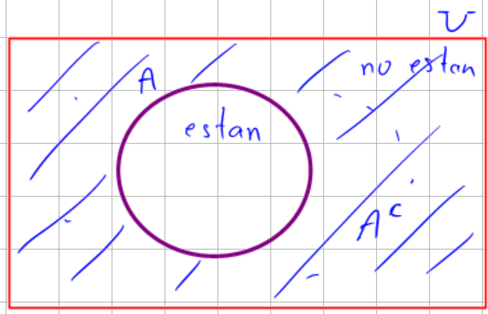
Complemento de un conjunto

Sea A un conjunto en el universo U.

Definimos el complemento de A, como el conjunto de los elementos de U que no estan en A. Denotamos por A^c

Es decir. $A^c = \{x \,/\, x \notin A\}$

o $x \in A^c \iff x \notin A$



Propiedades

ix) $(A^c)^c = A$; $\sim(\sim p) \equiv p$

😄 x) $A \cup A^c = \cancel{M}$; U

😄 xi) $A \cap A^c = \phi$.

Dem. $(A^c)^c = A$ ✓

Sea $x \in (A^c)^c \iff x \notin A^c$

$\iff x \in A$

$\therefore (A^c)^c = A$

Proposición 2 (leyes de De Morgan): *Para cualquier pareja de conjuntos A y B valen las propiedades*

xii) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$;

xiii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$.

Dem. $\boxed{(A \cap B)^c = A^c \cup B^c}$

Sea $x \in (A \cap B)^c \iff x \notin A \cap B$

$\iff x \notin A \wedge x \notin B$ ①

$x \in A^c \cup B^c \iff x \in A^c \vee x \in B^c$

$\iff x \notin A \vee x \notin B$

$\iff \sim(x \in A) \vee \sim(x \in B)$

$\iff \sim(x \in A \wedge x \in B)$

$\Leftrightarrow \sim(\overbrace{x \in A \cap B})$

$\Leftrightarrow x \notin A \cap B$

$\Leftrightarrow x \notin A \wedge x \notin B$ (2)

$\therefore \boxed{(A \cap B)^c = A^c \cup B^c}$

Diferencia de dos conjuntos

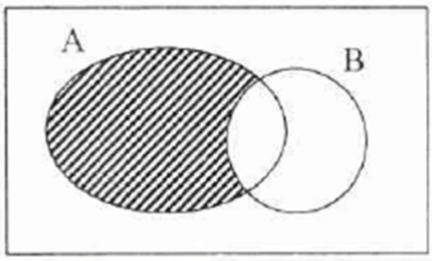
Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. La diferencia de conjuntos A - B es el conjunto formado por todos los elementos de A que no pertenecen a B.

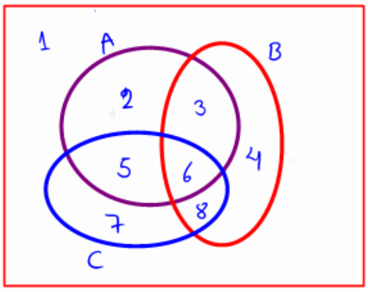
En símbolos : $A - B = \{ x \,/\, x \in A \wedge x \notin B \}$

o bien $x \in (A - B) \leftrightarrow x \in A \wedge x \notin B \Leftrightarrow x \in A \wedge x \in B^c$

Luego se verifica que: $\boxed{A - B = A \cap B^c}$

El diagrama de Venn correspondiente es:





Diferencia simétrica de dos conjuntos

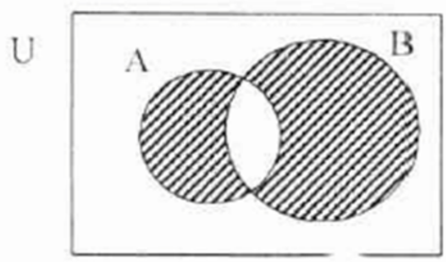
$A - B = 2$ y 5
$B - A = 4$ y 8
$A - C = 2$ y 3
$B - C = 3$ y 4
$(A \cup B) - C = 2, 3$ y 4

Dados dos conjuntos A y B, cualesquiera de un universo U, la diferencia simétrica entre estos conjuntos es un conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o B, pero no a ambos. También se puede definir como la unión de los conjuntos A-B y B-A. Se denota por $A \triangle B$.

En símbolos: $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$

o bien $A \triangle B = (A \cap B^C) \cup (B \cap A^C)$

o bien: $A \triangle B = (A \cup B) - (A \cap B)$



Ejemplo Sean los conjuntos $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

$A = \{2, 4, 5, 6, 8, 9\}$

$B = \{1, 3, \cancel{4}, \cancel{5}, \cancel{8}, \cancel{9}\}$

Calcula

$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$

$(A \cup B)^c = \{7\}$

$A^c = \{1, 3, 7\}$

$A - B = \{2, 6\}$ ✓

$B - A = \{1, 3\}$ ✓

$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

$= \{1, 2, 3, 6\}$

$A \cap B = \{4, 5, 8, 9\}$

TAREA 3.

1. **DEMOSTRAR LAS PROPIEDADES QUE NO SE DEMOSTRARON EN CLASES**

2. **Ejercicio**

Dados los conjuntos :

$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$, $A = \{a, c, d, f, h\}$, $B = \{b, c, e, f\}$, $C = \{a, c, d, e\}$

Hallar: a) A^c, B^c, C^c.

b) $A \cap B^c$, $B \cap A^c$, $(A-B) \cup (B-A)$

c) $A \cap B$, $A \cup B$, $A - B$, $B - A$, $A \Delta B$ y $A^c \Delta B^c$.