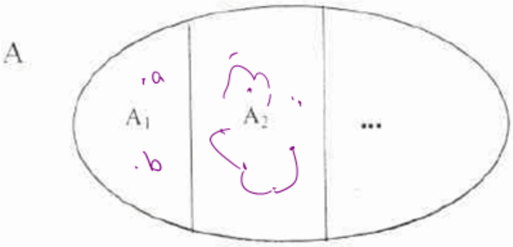
Teorema Toda partición de un conjunto A permite definir en éste una relación de equivalencia "~" en la que las clases de equivalencia son los bloques de la partición.



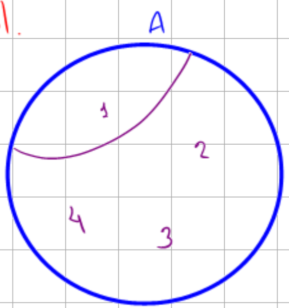
Si $\{A_1, A_2, \ldots\}$ es una partición de A, entonces según el teorema cada A_i es una clase de equivalencia de A. En donde la relación de equivalencia se define como sigue:

$$a \sim b \Leftrightarrow a \text{ y } b \text{ son miembros del mismo bloque}$$

Ejm. Sea $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y sea $\{\{1\}\ \{2, 3, 4\}\}$ una partición de A.

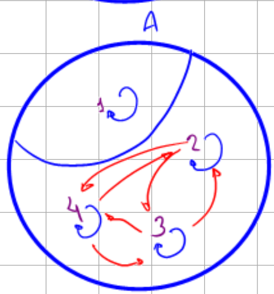
Determine la relación de equivalencia $\sim$ en A.

Sol.



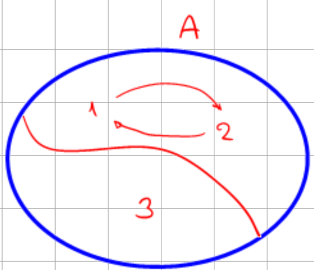
Luego

$$\sim\ = \{(1,1)\ (2,2)\ (3,3)\ (4,4)\ (2,3)\ (3,2)\ (2,4)\ (4,2)\ (3,4)\ (4,3)\}$$



Así $\sim$ es una rel. de equivalencia.

Ej.



$$x R y \iff x = y \lor x + y = 3$$

$$\sim\ = \{(1,1)\ (2,2)\ (3,3)\ (1,2)\ (2,1)\}$$

$1 \sim 1 \land 1 \sim 2 \Rightarrow 1 \sim 2$

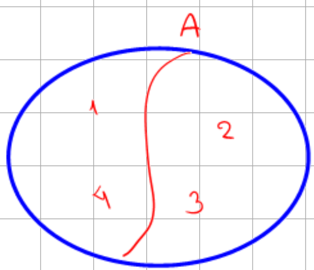
$2 \sim 2 \land 2 \sim 1 \Rightarrow 2 \sim 1$

$1 \sim 2 \land 2 \sim 1 \Rightarrow 1 \sim 1$

$2 \sim 1 \land 1 \sim 2 \Rightarrow 2 \sim 2$

$3 \sim 3 \Rightarrow 3 \sim 3$ ✓

$1 \sim 1 \Rightarrow 1 \sim 1$ ✓



$$\sim\ = \{(1,1)\ (2,2)\ (3,3)\ (4,4)\ (2,3)\ (3,2)\ (1,4)\ (4,1)\}$$

$A = \{1, 2, 3, 4\}$

$$x R y \iff x = y \lor x + y = 5$$

Ejm. En $\mathbb{Z}$ se define la rel. de equiv. $\sim$ mediante

$$x \sim y \iff 5 \mid x-y \qquad (5 \text{ divide a } x-y \text{ ó } x-y = 5\cdot k,\ k\in\mathbb{Z}$$

a) Determine las clases de equivalencia
b) Determine el conjunto de índices $\qquad k_a = \{y \in \mathbb{Z} : a \sim y\}$
c) Determine el conjunto cociente.

$5 \mid a-y$

Sol. $R = \{(0,0)(1,1)(2,2) \ldots (-1,-1)(-2,-2)$

Reflexiva: xRx porque $5 \mid x-x$
$5 \mid 0 \quad \checkmark$

Simétrica. $\underline{xRy} \iff 5 \mid x-y \qquad x-y = -(y-x)$

$\iff 5 \mid -(y-x) \qquad 5 \mid -10$

$5 \mid 10$

$\iff 5 \mid y-x \iff yRx$

Transitividad $xRy \wedge yRz \iff 5 \mid \underline{x-y} \wedge 5 \mid \underline{y-z}$

$a \mid b \wedge a \mid c \qquad \iff 5 \mid (x-\cancel{y})+(\cancel{y}-z)$

$a \mid b+c \qquad \iff 5 \mid x-z$

$\iff xRz$

Así R es de equivalencia.

Luego $\sim = \{(x,y) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} : 5 \mid x-y\}$

Así x es equivalente a y si 5 divide a $x-y$

Entonces, las clases de equivalencia serán:

$k_0 = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, \ldots\} = k_5 = k_{10}$

$k_1 = \{\ldots, -9, -4, 1, 6, 11, 16, 21, \ldots\} = k_6 = k_{11}$

$k_2 = \{\ldots, -8, -3, 2, 7, 12, 17, 22, \ldots\} = k_7 = k_{12}$

$K_3 = \{\ldots, -7, -2, 3, 8, 13, 18, \ldots\} = K_8$

$K_4 = \{\ldots, -6, -1, 4, 9, 14, 19, \ldots\} = K_9$

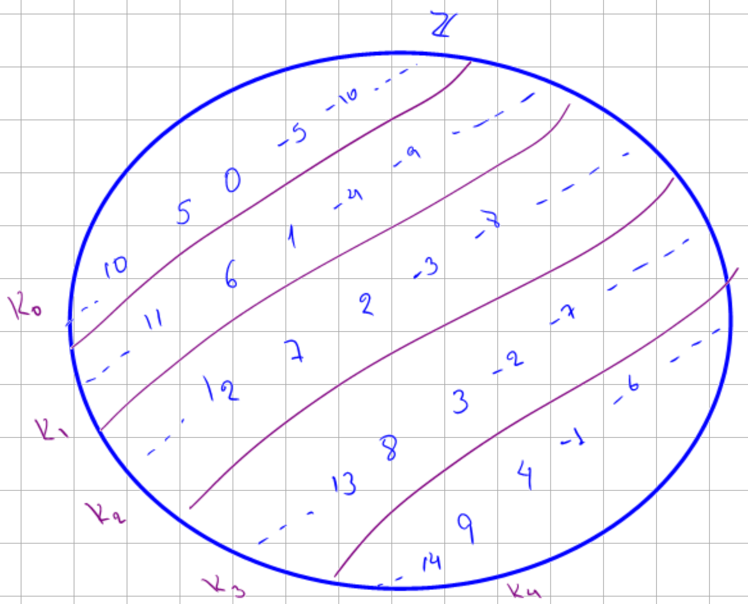
$K_5 = \{\ldots, -10, -5, 0, 5, 10, 15, 20, \ldots\} = K_0$

Así se tiene 5 clases distintas.

$$K_0, K_1, K_2, K_3, K_4$$

b) $I = \{0, 1, 2, 3, 4\}$

c) $\mathbb{Z}/_{\sim} = \{K_0, K_1, K_2, K_3, K_4\}$

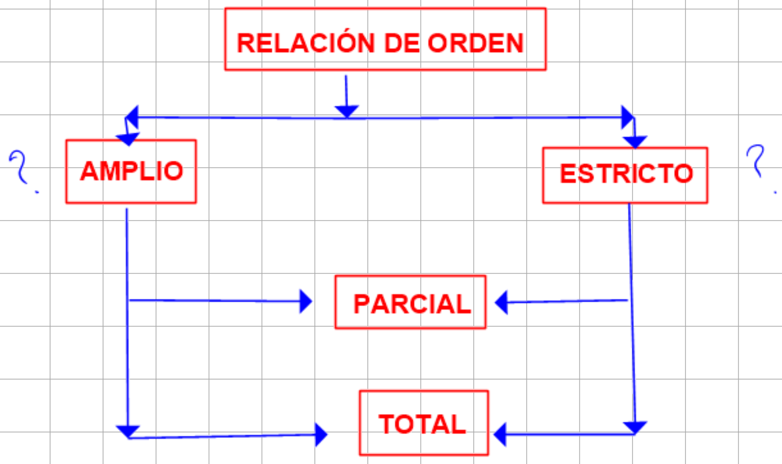


RELACIONES DE ORDEN

Cuando queremos referirnos a un orden cualquiera, usaremos el término genérico "preceder"

$$x R y \iff x \text{ precede a } y$$

se dice que es de orden amplio o estricto y en cada caso, es de orden parcial o total.


RELACIÓN DE ORDEN
¿
AMPLIO
ESTRICTO
¿
PARCIAL
TOTAL