Ejm. En $\mathbb{R}$ considere R una relación definida por

$$x R y \iff x - y \in \mathbb{Z}$$

$3.1 \; R \; 1.1$

$3.105 \; R \; 0.105$

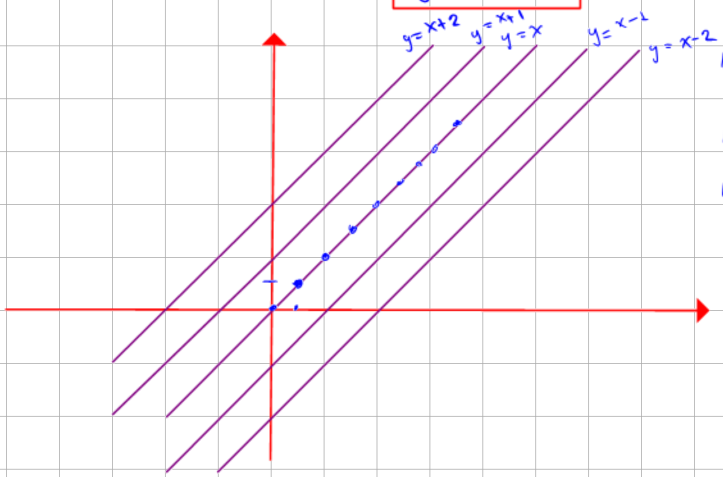
$3.1 - 1.1 = 2 \in \mathbb{Z}$

a) Representar R

b) Clasificar R

Sol. a) Como $x R y \iff x - y = k$, $k \in \mathbb{Z}$

$\iff \boxed{y = x - k}$



$k = 0$: $y = x$

$k = 1$: $y = x - 1$

$k = -1$; $y = x + 1$

$k = 2$ $y = x - 2$

$k = -2$ $y = x + 2$

Así $R = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \{(x,y) : y = x - k\}$

b) Clasificamos R.

Reflexiva: $\forall x \in \mathbb{R}$: $x R x$ pues $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$

Simetría: Sea $x R y \Rightarrow x - y = k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow y - x = -k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow y R x$

Transitividad. Sea $x R y \wedge y R z \Rightarrow x - y = k \wedge y - z = t$, $k, t \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x - y + y - z = k + t$

$\Rightarrow x - z = r$, $r = k + t \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x R z$

RELACIÓN DE EQUIVALENCIA

Sea $R \subset A^2$, R es una rel. de equivalencia

si: R es reflexiva, simétrica y transitiva.

Ejm. Determine si R es una rel. de equivalencia.

1. Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y

$$R = \{(1,1)(2,2)(1,2)(3,3)(2,1)\}$$

Sol.

R reflexiva. $\forall x \in A, \quad xRx$

R simétrica. Si

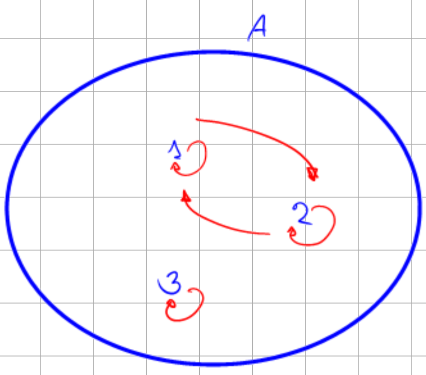
$$\begin{aligned} 1R1 &\Rightarrow 1R1 \\ 1R2 &\Rightarrow 2R1 \\ 2R1 &\Rightarrow 1R2 \end{aligned}$$

R transitiva. $xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$

$$\begin{aligned} 1R2 \wedge 2R1 &\Rightarrow 1R1 \\ 1R1 \wedge 1R2 &\Rightarrow 1R2 \\ 2R2 \wedge 2R1 &\Rightarrow 2R1 \\ 2R1 \wedge 1R2 &\Rightarrow 2R2 \\ 3R3 \wedge 3R3 &\Rightarrow 3R3 \end{aligned}$$

$\therefore$ R es una rel. de equivalencia.

En diagramas de Venn.



Obs. Si R es una rel. de equivalencia, la denotaremos con $\sim$

$$\sim = \{(1,1)(2,2)(1,2)(3,3)(2,1)\}$$

Clases de equivalencia.

Sea $\sim$ una relación de equivalencia en $A \neq \emptyset$.

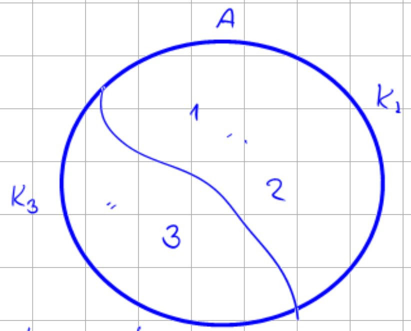
Definición (Clase de equivalencia)

La clase de equiv. de $\underline{a} \in A$ es el conjunto de todos los elementos de A equivalentes a "a"

$$K_a = \{ x \in A : x \sim a \}$$

En el ejemplo anterior.

$$K_1 = \{1, 2\} = K_2$$
$$K_2 = \{2, 1\}$$
$$K_3 = \{3\}$$



con lo que se genera dos subconjuntos disjuntos de A, K_1 y K_3 de manera que.

$$K_1 \cup K_3 = A$$

$$K_1 \cap K_3 = \emptyset$$

Conjunto de índices. $I = \{1, 3\}$

$J = \{2, 3\}$

Conjunto cociente. $A/_\sim = \{ K_a , a \in I \}$

$$A/_\sim = \{ K_1, K_3 \}$$

Ejercicio. Sea $A = \{1, 2, 3\}$

$$xRy \iff x = y \lor x + y = 4.$$

a) Determine si R es una rel. de equivalencia

b) Determine I , $A/\sim$

c) Determina la partición de A.