Ejm. En $\mathbb{R}$ considere R una relación definida por
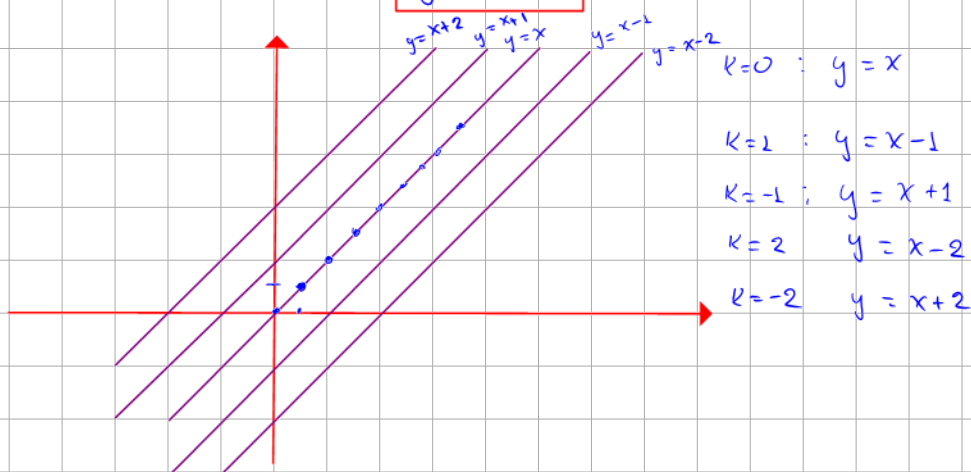
$$x R y \iff x - y \in \mathbb{Z}$$

a) Representar R

$\boxed{3.1} \; R \; \boxed{1.1}$

$3.105 \; R \; 0.105$

$3.1 - 1.1 = 2 \in \mathbb{Z}$

b) Clasificar R

Sol. a) Como $x R y \iff x - y = K$, $K \in \mathbb{Z}$

$\iff \boxed{y = x - K}$

$K = 0 : y = x$

$K = 1 : y = x - 1$

$K = -1 : y = x + 1$

$K = 2 \quad y = x - 2$

$K = -2 \quad y = x + 2$

Así $\quad R = \bigcup_{K \in \mathbb{Z}} \{ (x, y) : y = x - K \}$

b) Clasificamos R.

Reflexiva: $\forall x \in \mathbb{R} : x R x$ pues $x - x = 0 \in \mathbb{Z}$

Simetría: Sea $x R y \Rightarrow x - y = K \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow y - x = -K \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow y R x$

Transitividad. Sea $x R y \wedge y R z \Rightarrow \overset{\frown}{x - y} = K \wedge \overset{\frown}{y - z} = t$, $K, t \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x - y + y - z = K + t$

$\Rightarrow x - z = r, \quad r = K + t \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x R z$

RELACIÓN DE EQUIVALENCIA

Sea $R \subset A^2$, R es una rel. de equivalencia

si: R es <u>reflexiva</u>, <u>simétrica</u> y <u>transitiva</u>.

Ejm. Determine si R es una rel. de equivalencia.

1. Sea $A = \{1, 2, 3\}$ y

$$R = \{(1,1)(2,2)(1,2)(3,3)(2,1)\}$$
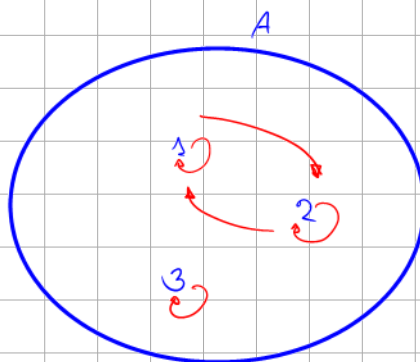
Sol.

R reflexiva. $\forall x \in A$, $x R x$

R simétrica. Si $1R1 \Rightarrow 1R1$

$1R2 \Rightarrow 2R1$

$2R1 \Rightarrow 1R2$

R transitiva. $x R y \wedge y R z \Rightarrow x R z$

$1R2 \wedge 2R1 \Rightarrow 1R1$

$1R1 \wedge 1R2 \Rightarrow 1R2$

$2R2 \wedge 2R1 \Rightarrow 2R1$

$2R1 \wedge 1R2 \Rightarrow 2R2$

$3R3 \wedge 3R3 \Rightarrow 3R3$

$\therefore R$ es una rel. de equivalencia.

En diagramas de Venn.

Obs. Si R es una rel. de equivalencia, la denotaremos con $\sim$

$$\sim = \{(1,1)(2,2)(1,2)(3,3)(2,1)\}$$

Clases de equivalencia.

Sea ~ una relación de equivalencia en $A \neq \emptyset$.

Definición (Clase de equivalencia)

La clase de equiv. de $\underline{a} \in A$ es el conjunto de todos los elementos de A
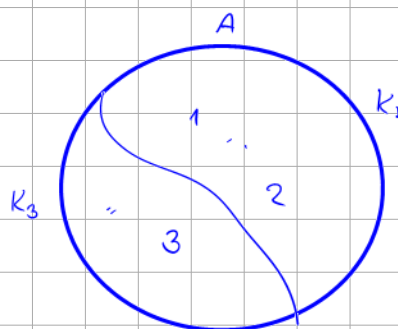
equivalentes a "a"

$$K_a = \{ x \in A : x \sim a \}$$

En el ejemplo anterior.

$$K_1 = \{ 1, 2 \} = K_2$$
$$K_2 = \{ 2, 1 \}$$
$$K_3 = \{ 3 \}$$

con lo que se genera dos subconjuntos disjuntos de A, K_1 y K_3

de manera que. $K_1 \cup K_3 = A$

$$K_1 \cap K_3 = \emptyset$$

Conjunto de indices. $I = \{ 1, 3 \}$
$J = \{ 2, 3 \}$

Conjunto cociente. $\dfrac{A}{\sim} = \{ K_a, a \in I \}$

$$\dfrac{A}{\sim} = \{ K_1, K_3 \}$$

Ejercicio. Sea $A = \{1, 2, 3\}$

$$x \mathrel{R} y \iff x = y \;\lor\; x + y = 4.$$

a) Determine si R es una rel. de equivalencia

b) Determine I, $A/{\sim}$

c) Determina la partición de A.