77. Las siguientes cuestiones hacen referencia a congruencias (mód 7)

(a) Enlista tres enteros positivos y cuatro enteros negativos de $\overline{5}$.

Enteros positivos congruentes a 5 (mod 7)

5 ($5 \equiv 5 \pmod 7$)

12 ($12 \equiv 5 \pmod 7$)

19 ($19 \equiv 5 \pmod 7$)

Enteros negativos congruentes a 5 (mod 7)

−2 ($-2 \equiv 5 \pmod 7$)

−9 ($-9 \equiv 5 \pmod 7$)

−16 ($-16 \equiv 5 \pmod 7$)

−23 ($-23 \equiv 5 \pmod 7$)

(b) Enlista cuatro enteros positivos y tres enteros negativos de $\overline{-3}$.

Congruentes positivos a −3 (mod 7)

4 ($-3 \equiv 4 \pmod 7$)

11 ($11 \equiv 4 \pmod 7$)

18 ($18 \equiv 4 \pmod 7$)

25 ($25 \equiv 4 \pmod 7$)

Enteros negativos congruentes a −3 (mod 7)

−10 ($-10 \equiv -3 \pmod 7$)

−17 ($-17 \equiv -3 \pmod 7$)

−24 ($-24 \equiv -3 \pmod 7$)

(c) Determinar la forma general de un entero en $\overline{5}$.

$y \equiv 5 \pmod 7$

→ 5 mas un multiplo de 7 → Si sumamos ó restamos un multiplo de 7 a 5. tendremos un entero congruente a 5 (mod 7)

−2, 5, 12, 19, 26, 23...

→ Si sumamos / restamos 7 a partir del entero 5 se tendra una secuencia de enteros congruentes a 5 (mod 7)

(d) ¿Cuál es la forma general de un entero en $\overline{-3}$?

− La forma General, entero congruente a − 2 (mod 7) es:

$$x \equiv -3 \pmod 7$$

→ Por ejemplo:

Algunos enteros que cumplen esta congruencia

$x = \{-3, 4, 11, 18, 25, 32, \}$

Congruentes a −3 (mod 7)

78. Estas cuestiones hacen referencia a congruencias (mód 13)

(a) Enlista cinco enteros positivos y cuatro enteros negativos de $\overline{3}$.

(5) enteros positivos

$3 \, (3 \equiv 3 \pmod{13})$
$16 \, (16 \equiv 3 \pmod{13})$
$29 \, (29 \equiv 3 \pmod{13})$
$42 \, (42 \equiv 3 \pmod{13})$
$55 \, (55 \equiv 3 \pmod{13})$

(4) enteros negativos

$-10 \, (-10 \equiv 3 \pmod{13})$
$-23 \, (-23 \equiv 3 \pmod{13})$
$-36 \, (-36 \equiv 3 \pmod{13})$
$-49 \, (-49 \equiv 3 \pmod{13})$

(b) Enlista cuatro enteros positivos y cinco enteros negativos de $\overline{-2}$.

Enteros Positivos

$11 \, (-2 \equiv 11 \pmod{13})$
$24 \, (24 \equiv -2 \pmod{13})$
$37 \, (37 \equiv -2 \pmod{13})$
$50 \, (50 \equiv -2 \pmod{13})$

Enteros Negativos

$-15 \, (-15 \equiv -2 \pmod{13})$
$-28 \, (-28 \equiv -2 \pmod{13})$
$-41 \, (-41 \equiv -2 \pmod{13})$
$-54 \, (-54 \equiv -2 \pmod{13})$
$-67 \, (-67 \equiv -2 \pmod{13})$

(c) Determinar la forma general de un entero en $\overline{3}$.

Expresion de Forma General

$$x \equiv 3 \pmod{13}$$

$$x = \{-10, 3, 16, 29, 42, 55\}$$

→ Se obtiene la secuencia de enteros que son consiguientes a $3 \pmod{13}$

(d) ¿Cuál es la forma general de un entero en $\overline{-2}$?

→ $X \equiv -2 \pmod{13}$

$$x = \{-2, 11, 24, 37, 50, 63 \cdots\}$$

→ Enteros que cumplen con la congruencia y obtenemos la secuencia de los enteros. del $-2 \pmod{13}$

79. Encontrar a (mód n) en cada uno de los siguientes casos.

(a) $a = 1\,286$, $n = 39$

$1286 \pmod{39}$

$1286 = 39(32) + 38$

$1286 = 1286$

$$\begin{array}{r|l} 1286 & 39 \\ \cline{2-2} -117 & 32 \\ \hline 116 & \\ -78 & \\ \hline (38) & \end{array}$$

$\therefore 1286 \pmod{39} = 38$ //

(b) $a = 43\,197$, $n = 333$

$43197 \pmod{333}$

$43197 = 333(129) + 240$

$43197 = 43197$

$$\begin{array}{r|l} 43497 & 333 \\ \cline{2-2} -333 & 129 \\ \hline 0989 & \\ -666 & \\ \hline 3237 & \\ -2997 & \\ \hline (240) & \end{array}$$

$43197 \pmod{333} = 240$ //

(c) $a = -545\,608,\ n = 51$

$-545608 \pmod{51}$

$$\begin{array}{r|l} 545608 & 51 \\ \hline -356 & -10699 \\ 306 & \\ \hline -500 & \\ 459 & \\ \hline -418 & \\ 459 & \\ \hline (41) & \end{array}$$

$-545608 = 51(-10699) + 41$
$= -545608$

$\therefore -545608 \pmod{51} = 41$

(d) $a = -125\,617,\ n = 315$

$-125617 \pmod{315}$

$$\begin{array}{r|l} -125617 & 345 \\ \hline -945 & -399 \\ \hline -3111 & \\ -2835 & \\ \hline -2767 & \\ +2835 & \\ \hline 68 & \end{array}$$

$-125617 = 315(-399) + 68$

$\therefore -125617 \pmod{315} = 68$

(e) $a = 11\,111\,111\,111,\ n = 1\,111$

$11\ 111\ 111\ 111 \pmod{1111}$

$$\begin{array}{r|l} 11\ 111\ 111\ 111 & 1111 \\ \hline 01\ 111 & 10001000 \\ 0\ 111 & \\ (111) & \end{array}$$

$11\ 111\ 111\ 111 = 1111(10001000) + 111$
$= 11\ 111\ 111\ 111$

$\therefore 11\ 111\ 111\ 111 \pmod{1111} \Rightarrow \boxed{111}$

80. ¿Verdadero o falso? Dar una razón para cada respuesta.

(a) $\overline{2} = \overline{18} \pmod{10}$

$$\begin{array}{r|l} 2 & 10 \\ \hline (2) & 0 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 10 \\ \hline 8 & 1 \end{array}$$

Para que dos numeros sean congruentes deben dar el mismo resto en este caso $2 \neq 8$
$\therefore$ Es Falso

(b) $7 \in \overline{-13} \pmod{5}$

$7 \equiv -13 \pmod{5}$

$$\begin{array}{r|l} 7 & 5 \\ \hline 2 & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 13 & 5 \\ \hline 15 & -3 \\ \hline 2 & \end{array}$$

En este caso ambos residuos son iguales $2=2$

$\therefore$ Es verdadero la congruencia.

(c) $-8 = 44 \pmod{13}$

$$\begin{array}{r|l} -8 & 13 \\ \hline 13 & -1 \\ \hline 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} -44 & 13 \\ \hline 39 & 3 \\ \hline 5 & \end{array}$$

En este caso ambos residuos son iguales $5=5$
$\therefore$ Es verdadera la congruencia.

(d) $\overline{17} \cap \overline{423} = \emptyset \pmod{29}$

Ya que $\overline{17} \neq \overline{423}$, pero $\overline{17} \cap \overline{423} = \phi$

Entonces no hay elementos congruentes solamente el ϕ

$\therefore$ Es verdadera la congruencia.

(e) $-18 \notin \overline{400} \pmod{19}$

$-18 \cancel{\notin} \overline{400} \pmod{19}$

$-18 = 1 (\text{mód } 19)$

$-18 \in \overline{1} \pmod{19}$

$$\begin{array}{r|l} -18 & 19 \\ \hline (1) & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 1 & 19 \\ \hline (1) & 0 \end{array}$$

$\therefore$ Es verdadero

por que $-18 \notin \overline{400}$, ya que $-18 \in \overline{1}$.

85. Encontrar todos los enteros x, $0 \leq x < n$, que satisfacen cada una de las siguientes congruencias. Sí tal x no existe explicar el porque.

(a) $x^2 \equiv 4 \pmod{13}$

$x \equiv 2 \pmod{13} \Rightarrow x = 13K + 2$

$x \equiv -2 \pmod{13} \Rightarrow x \equiv 11 \pmod{13} \Rightarrow x = 13H + 11$

Entonces tendremos que x es de la Forma $13K + 2$ para $K \in \mathbb{Z}$ o $13M + 11$

(b) $(2x + 1)(3x + 4) \equiv 0 \pmod{17}$

$2x + 1 \equiv 0 \bmod 17$; $3x + 4 \equiv 0 \pmod{17}$

$2x \equiv 16 \pmod{17}$; $17x + 4 \equiv -4 \pmod{17}$

mod $(2, 17) = 1 \Rightarrow$; $-4 \equiv -4 \pmod{17}$

$\frac{2x}{2} \equiv \frac{16}{2} \pmod{17}$; $-17x + 3x \equiv -4 \bmod 17$

$x \equiv 8 \pmod{17}$; $3x \equiv 13 \bmod 17$

$3x \equiv 30 \bmod 17$

mod $(3, 17)$

$\Rightarrow \frac{\cancel{3}x}{\cancel{3}} \equiv \frac{30}{3} \bmod 17$

$x \equiv 10 \bmod 17$

$x \equiv 3 \bmod 17$

$x \equiv 10 \bmod 17$

$\Rightarrow$

$\boxed{\begin{array}{l} x \text{ tiene la Forma} \\ x = 17A + 8 \\ x = 17B + 10 \end{array}}$

(c) $3x^2 + 14x - 5 \equiv 0 \pmod{57}$

$$\begin{array}{ccc} x & & 5 \\ 3x & & -1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15x \\ -x \\ \hline 14x \end{array}$$

$(x+5)(3x-1) \equiv 0 \mod 57$

$x+5 \equiv 0 \mod 57$; $3x-1 \equiv 0 \mod 57$

$x+5 \equiv 0 \mod 57$; $3x-1 \equiv 0 \mod 57$

$\underbrace{x+5 \equiv 0 \mod 3}_{1}$; $\underbrace{x+5 \equiv 0 \mod 19}_{2}$; $\underbrace{3x-1 \equiv 0 \mod 3}_{3}$; $\underbrace{3x-1 \equiv 0 \mod 19}_{4}$

(1) $x \equiv -5 \mod 3$
$x \equiv 1 \mod 3$

(2) $x \equiv -5 \mod 19$
$x \equiv 14 \mod 19$

(5) $x = 3K + 1$

(6) $x = 19M + 14$

(5) $x \equiv 1 \mod 3 \Rightarrow x = 3K+1$
(6) $x \equiv 14 \mod 19$

$\Downarrow$

$3K+1 \equiv 14 \mod 19$
$3K \equiv 13 \mod 19$
$3K \equiv 32 \mod 19$
$3K \equiv 51 \mod 19$
$\mathrm{mcd}(3,19) = 1$
$\frac{3K}{3} \equiv \frac{51}{3} \mod 19$
$K \equiv 17 \mod 19$
$K = 19a + 17$

$x = 3K+1$
$x = 3(19Q+17)+1$
$x = 57Q + 51 + 1$
$x = 57Q + 52$
$x \equiv 52 \mod 57$

(3) $3x - 1 \equiv 0 \mod 3$
$3x \equiv 1 \mod 3$
(7) $x \equiv 1 \mod 3$
$\Downarrow$
$x = 3T + 1$

(4) $3x - 1 \equiv 0 \mod 19$
$3x \equiv 1 \mod 19$
$3x \equiv 20 \mod 19$
$3x \equiv 39 \mod 19$
$\mathrm{mcd}(3,19) = 1$
$\frac{3x}{3} \equiv \frac{39}{3} \mod 19$
(8) $x \equiv 13 \mod 19$

$x \equiv 13 \mod 19$
$3T + 1 \equiv 13 \mod 19$
$3T \equiv 12 \mod 19$
$\mathrm{mcd}(3,19) = 1$
$\frac{\cancel{3}T}{\cancel{3}} \equiv \frac{12}{3} \mod 19$
$T \equiv 4 \mod 19$

$x = 3T+1$
$T \equiv 4 \mod 19$
$T \equiv 19N + 4$
$x = 3(19N+4)+1$
$x = 57N + 13 \Rightarrow$

$x \equiv 13 \mod 57$
$\therefore x \equiv 52 \mod 57$
$\vee$
$x \equiv 13 \mod 57$

(d) $x^2 \equiv 2 \pmod{6}$

$\Rightarrow x^2 \equiv 2 \mod 3$ (1)
$\Rightarrow x^2 \equiv 2 \mod 2$ (2)

$\Rightarrow$ (2) $x^2 \equiv \cancel{2} \mod \cancel{2}$
$x^2 \equiv 0 \mod 2$
$x \equiv \pm 0 \mod 2 \Rightarrow x \equiv 0 \mod 2$
$x = 2A + 0$

$\Rightarrow$ (1)
$x^2 \equiv 2 \mod 3$
$x^2 + 1 \equiv (2+1) \mod 3$
$x^2 + 1 \equiv \cancel{3} \mod 3$
$x^2 + 1 \equiv 0 \mod 3$
$x^2 \equiv -1 \mod 3$
$x \equiv \sqrt{-1} \mod 3$

$\therefore$ No existe x^4 que a) son divisibles entre 8 tenga resto 2

$(4)^2 \equiv 2 \mod (5)$

$$\begin{array}{r|l} 16 & 6 \\ \hline 12 & 2 \\ (4) & \end{array}$$

(e) $4x^2 + 3x + 7 \equiv 0 \pmod 5$

$4x^2+3x+7 \equiv 0 \bmod 5$

$4x^2+3x \equiv 3 \bmod 5$

$\cancel{5}x^2 - x^2 + \cancel{5}x - 2x \equiv 3 \bmod 5$

$-x^2 - 2x \equiv 3 \bmod 5 \ // -1$

$x^2 + 2x \equiv -3 \bmod 5$

$x(x+2) \equiv 2 \bmod 5$

$x \equiv 2 \bmod 5 \ ; \ x+2 \equiv 2 \bmod 5$

$x \equiv 2 \bmod 5 \ ; \ x \equiv 0 \bmod 5$

$\therefore \ x = 5K+2 \quad o \quad x = 5M$

87. Si $a \equiv b \pmod n$, mostrar que $\operatorname{mcd}(a,n) = \operatorname{mcd}(b,n)$.

$a \equiv b \pmod n \Rightarrow mod(a,n) = mcd(b,n)$

Solución

$a \equiv b \bmod n \Rightarrow n \mid (a-b)$

$d1 = mcd(a,n)$

$d2 = mcd(b,n)$

d1

$d1 = mcd(a,n) \Rightarrow d_1 / a \wedge d_1 / n$

pero $n(a-b) \Rightarrow d_1/a \quad d_1 \mid a-b$

$\Rightarrow d_1 \mid [a-(a-b)] \Rightarrow d_1 \mid b \wedge d_1 \mid m$

$\Rightarrow d_1 \mid d_2$

d2

$d_2 = mcd(b,m) \Rightarrow d_2 \mid b \wedge d_2 / n$

con $n \mid (a-b) \Rightarrow d2 \mid b \wedge d2 \mid a-b$

$\Rightarrow d_2 \mid [b + (a-b)] \Rightarrow d_2 \mid a \wedge d_2 / n$

$\Rightarrow d_2 \mid d_1$

$\therefore$ Como $d_1 \mid d_2 \ \wedge \ d_2 \mid d_1 \Rightarrow d_1 = d_2 \Rightarrow mcd(a,n) = mcd(b,n)$

89. Suponga que a y b son enteros, $n > 1$ número natural y $a \equiv b \pmod n$. ¿Verdadero o falso? En cada caso, probar o dar un contraejemplo.

(a) $a3 \equiv b^2 \pmod n$

Con $a = 7$

$b = 2$

$n = 5$

$7 \equiv 2 \pmod 5$ (V)

$\Rightarrow (7)^3 \equiv (2)^2 \pmod n$

$343 \equiv 4 \pmod 5$

$$
\begin{array}{r|l}
343 & 5 \\
\cline{2-2}
-30 & 68 \\
\hline
43 & \\
-40 & \\
\hline
3 &
\end{array}
$$

$(3) \neq (4) \Rightarrow \therefore$ Falso

(b) $a^2 \equiv b^2 \pmod n$

$a \equiv b \pmod n$

Por propiedad

Si $a \equiv b \pmod n$ y $c \equiv d \pmod m \Rightarrow ac \equiv bd \pmod n$

Con $c = a$

$d = b$

$\Rightarrow$

$a \equiv b \pmod n \wedge a \equiv b \pmod n$

$\Rightarrow ac \equiv bd \pmod n \Rightarrow a^2 \equiv b^2 \pmod n$

(c) $a^2 \equiv b^3 \pmod{n}$ $\Rightarrow a^2 \equiv b^3 (\text{mod } n)$

con $a = 7$
$b = 2$
$n = 5$

$\Rightarrow 7 \equiv 2 (\text{mod } 5)$

$\Rightarrow (7)^2 \equiv (2)^3 (\text{mod } 5)$

$49 \equiv 8 (\text{mod } 5)$

$$\begin{array}{r|l} 49 & 5 \\ \hline 45 & 9 \\ \hline (4) & \end{array}$$

$(8) \neq$

$\therefore$ Falso

(d) $a^2 \equiv b^2 \pmod{n^2}$

con $a = 7$
$b = 2$
$n = 5$

$(7)^2 \equiv (2)^2 (\text{mod } 5^2)$

$49 \equiv 8 (\text{mod } 25)$

$$\begin{array}{r|l} 49 & 25 \\ \hline 25 & 1 \\ (8) \neq (24) & \end{array}$$

$\therefore$ Falso

90. Encontrar todos los enteros x, $0 \leq x < n$, que satisfacen cada una de las siguientes congruencias

(a) $x^2 \equiv 1 \pmod{n}$, $n = 5$

Probaremos x desde 0 hasta 4

Para $x = 0$: $0^2 \equiv 0 (\text{mod } 5) \neq 1 (\text{mod } 5)$

Para $x = 1$: $1^2 \equiv 1 (\text{mod } 5)$

Para $x = 2$: $2^2 \equiv 4 (\text{mod } 5) \neq 1 (\text{mod } 5)$

Para $x = 3$: $3^2 \equiv 9 (\text{mod } 5) \equiv 4 (\text{mod } 5) \neq 1 (\text{mod } 5)$

Para $x = 4$: $4^2 \equiv 16 (\text{mod } 5) \equiv 1 (\text{mod } 5)$

$x = 1 \wedge x = 4$ cumplen con la congruencia $x^2 \equiv 1 (\text{mod } 5)$

$\therefore$ Los enteros x que satisfagan la congruencia $x^2 \equiv 1 (\text{mod } 5)$, $0 \leq x < 5$, son $x = 1 \wedge x = 4$

(b) $x^2 \equiv 1 \pmod{n}$, $n = 7$

Probaremos x desde 0 hasta 6

Para $x=0: 0^2 \equiv 0 \pmod 7 \neq 1 \pmod 7$

Para $x=1: 1^2 \equiv 1 \pmod 7$

Para $x=2: 2^2 \equiv 4 \pmod 7 \neq 1 \pmod 7$

Para $x=3: 3^2 \equiv 9 \pmod 7 \equiv 2 \pmod 7 \neq 1 \pmod 7$

Para $x=4: 4^2 = 16 \pmod 7 \equiv 2 \pmod 7 \neq 1 \pmod 7$

Para $x=5: 5^2 = 25 \pmod 7 \equiv 4 \pmod 7 \neq 1 \pmod 7$

Para $x=6: 6^2 = 36 \pmod 7 \equiv 1 \pmod 7$

$\therefore$ Por lo tanto los enteros x que satisfacen la congruencia $x^2 \equiv 1 \pmod 7$, donde $0 \leq x < 7$ son $x = 1 \wedge x = 6$.

(c) $x^2 \equiv 1 \pmod{n}$, $n = 13$

Probaremos x desde 0 hasta 12

Para $x=0: 0^2 \equiv 0 \pmod{13} \neq 1 \pmod{13}$
Para $x=1: 1^2 \equiv 1 \pmod{13}$
Para $x=2: 2^2 \equiv 4 \pmod{13} \neq 1 \pmod{13}$
Para $x=3: 3^2 \equiv 9 \pmod{13} \neq 1 \pmod{13}$
Para $x=4: 4^2 \equiv 16 \pmod{13} \equiv 3 \pmod{13} \neq 1 \pmod{13}$
Para $x=5: 5^2 \equiv 25 \pmod{13} \equiv 12 \pmod{13} \neq 1 \pmod{13}$
Para $x=6: 6^2 \equiv 36 \pmod{13} \equiv 10 \pmod{13} \neq 1 \pmod{13}$
Para $x=7: 7^2 \equiv 49 \pmod{13} \equiv 10 \pmod{13} \neq 1 \pmod{13}$
Para $x=8: 8^2 \equiv 64 \pmod{13} \equiv 12 \pmod{13} \neq 1 \pmod{13}$
Para $x=9: 9^2 \equiv 81 \pmod{13} \equiv 3 \pmod{13} \neq 1 \pmod{13}$
Para $x=10: 10^2 \equiv 100 \pmod{13} \equiv 4 \pmod{13} \neq 1 \pmod{13}$
Para $x=11: 11^2 \equiv 121 \pmod{13} \equiv 1 \pmod{13}$
Para $x=12: 12^2 \equiv 144 \pmod{13} \equiv 1 \pmod{13}$

$\therefore$ Por lo tanto, los enteros x que satisfacen la congruencia $x^2 \equiv 1 \pmod{13}$, donde $0 \leq x < 13$ son $x = 1, 11$ y 12

---

96. El conjunto $\mathbb{Z}_n$ contiene sólo n elementos. Para resolver una ecuación en $\mathbb{Z}_n$ basta con reemplazar estos n elementos en la ecuación y ver cuales la resuelven. Resolver las ecuaciones:

(a) $x^2 = 1$ en $\mathbb{Z}_8$

$\mathbb{Z}_8$ que son los numeros del 0 al 7

Para $x=0: 0^2 \equiv 0 \pmod 8 \neq 1 \pmod 8$
Para $x=1: 1^2 \equiv 1 \pmod 8$
Para $x=2: 2^2 \equiv 4 \pmod 8 \neq 1 \pmod 8$
Para $x=3: 3^2 \equiv 9 \pmod 8 \equiv 1 \pmod 8$
Para $x=4: 4^2 \equiv 16 \pmod 8 \equiv 0 \pmod 8 \neq 1 \pmod 8$
Para $x=5: 5^2 \equiv 25 \pmod 8 \equiv 1 \pmod 8$
Para $x=6: 6^2 \equiv 36 \pmod 8 \equiv 4 \pmod 8 \neq 1 \pmod 8$
Para $x=7: 7^2 \equiv 49 \pmod 8 \equiv 1 \pmod 8$

$\therefore$ Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $x^2 = 1$ en $\mathbb{Z}_8$ son $x = 1, 3, 5$ y 7.

(b) $x^4 = 1$ en $\mathbb{Z}_5$

$\mathbb{Z}_5$ que son los numeros del 0 al 4.

Para $x=0: 0^4 \equiv 0 \pmod 5 \neq 1 \pmod 5$
Para $x=1: 1^4 \equiv 1 \pmod 5$
Para $x=2: 2^4 \equiv 16 \pmod 5 \equiv 1 \pmod 5$
Para $x=3: 3^4 \equiv 81 \pmod 5 \equiv 1 \pmod 5$
Para $x=4: 4^4 \equiv 256 \pmod 5 \equiv 1 \pmod 5$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuacion $x^4 = 1$ en $\mathbb{Z}_5$ son $x = 1, 2, 3$ y 4.

(c) $x^2 + 3x + 2 = 0$ en $\mathbb{Z}_6$

$\mathbb{Z}_6$ que son los numeros del 0 al 5

Para $x=0: 0^2 + 3(0) + 2 \equiv 2 \pmod 6 \neq 0 \pmod 6$
Para $x=1: 1^2 + 3(1) + 2 \equiv 1+3+2 \equiv 6 \pmod 6 \equiv 0 \pmod 6$
Para $x=2: 2^2 + 3(2) + 2 \equiv 4+6+2 \equiv 12 \pmod 6 \equiv 0 \pmod 6$
Para $x=3: 3^2 + 3(3) + 2 \equiv 9+9+2 \equiv 20 \pmod 6 \equiv 2 \pmod 6 \neq 0 \pmod 6$
Para $x=4: 4^2 + 3(4) + 2 \equiv 16+12+2 \equiv 30 \pmod 6 \equiv 0 \pmod 6$
Para $x=5: 5^2 + 3(5) + 2 = 25+15+2 \equiv 42 \pmod 6 \equiv 0 \pmod 6$

$\therefore$ Por lo tanto, las soluciones de la ecuacion $x^2 + 3x + 2 = 0$ en $\mathbb{Z}_6$ son $x = 1, 2, 4$ y 5

(d) $x^2 + 1 = 0$ en $\mathbb{Z}_{12}$

$\mathbb{Z}_{12}$ que son los numeros del 0 al 11

Para $x = 0: 0^2 + 1 \equiv 1 \pmod{12} \neq 0 \pmod{12}$
Para $x = 1: 1^2 + 1 \equiv 1+1 \equiv 2 \pmod{12} \neq 0 \pmod{12}$
Para $x = 2: 2^2 + 1 \equiv 4+1 \equiv 5 \pmod{12} \neq 0 \pmod{12}$
Para $x = 3: 3^2 + 1 \equiv 9+1 \equiv 10 \pmod{12} \neq 0 \pmod{12}$
Para $x = 4: 4^2 + 1 \equiv 16+1 \equiv 17 \pmod{12} \equiv 5 \pmod{12} \neq 0 \pmod{12}$
Para $x = 5: 5^2 + 1 \equiv 25+1 \equiv 26 \pmod{12} \equiv 2 \pmod{12} \neq 0 \pmod{12}$
Para $x = 6: 6^2 + 1 \equiv 36+1 \equiv 37 \pmod{12} \equiv 1 \pmod{12} \neq 0 \pmod{12}$
Para $x = 7: 7^2 + 1 \equiv 49+1 \equiv 50 \pmod{12} \equiv 2 \pmod{12} \neq 0 \pmod{12}$
Para $x = 8: 8^2 + 1 \equiv 64+1 \equiv 65 \pmod{12} \equiv 5 \pmod{12} \neq 0 \pmod{12}$
Para $x = 9: 9^2 + 1 \equiv 82+1 \equiv 82 \pmod{12} \equiv 10 \pmod{12} \neq 0 \pmod{12}$
Para $x = 10: 10^2 + 1 \equiv 100+1 \equiv 101 \pmod{12} \equiv 5 \pmod{12} \neq 0 \pmod{12}$
Para $x = 11: 11^2 + 1 \equiv 121+1 \equiv 122 \pmod{12} \equiv 2 \pmod{12} \neq 0 \pmod{12}$

Por lo tanto, las soluciones de la ecuación $x^2 + 1 = 0$ en $\mathbb{Z}_{12}$ son $x = 5$ y $x = 7$.