

Ejm. Determine si las siguientes relaciones son o no funciones

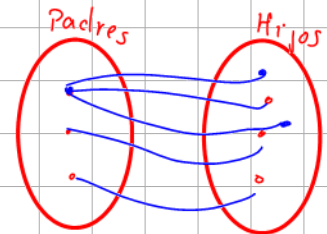
Sea A el conjunto de personas, $R \subset A \times A$

a) $x R y \Leftrightarrow x$ es hijo de y
 $\exists!$

es función.

b) $x S y \Leftrightarrow x$ es padre de y

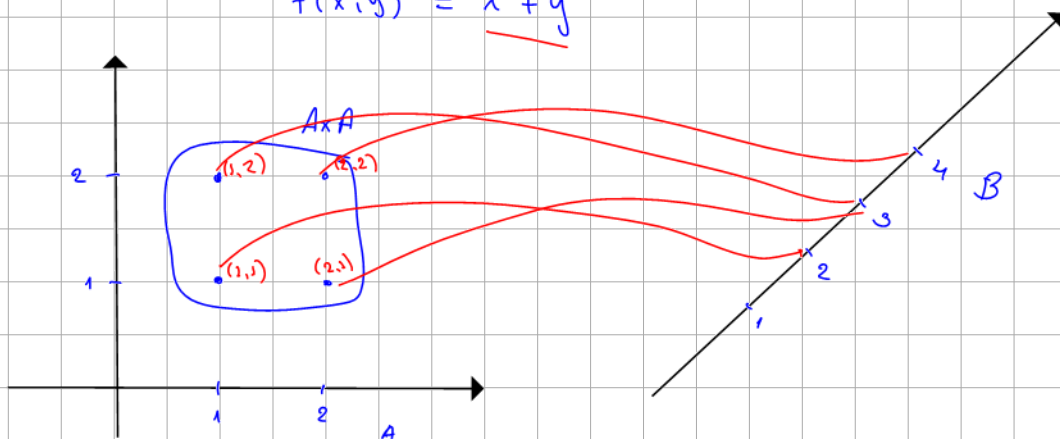
no es función



Ejm. Sean $A = \{1, 2\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4\}$

y $f: A \times A \rightarrow B$

$f(x, y) = x + y$

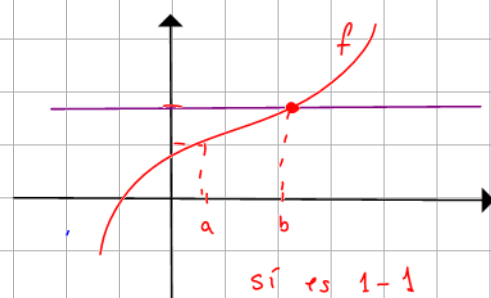
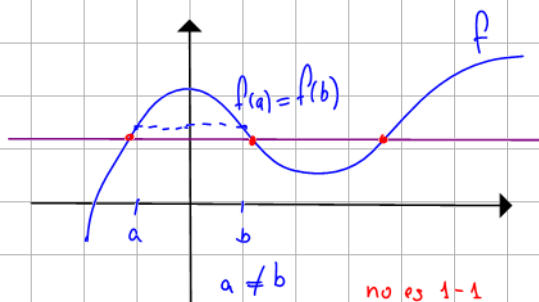


Clasificación de las funciones

Función inyectiva ⁽¹⁻¹⁾ Sea $f: A \rightarrow B$

f es inyectiva $\Leftrightarrow \forall a, b \in A. f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

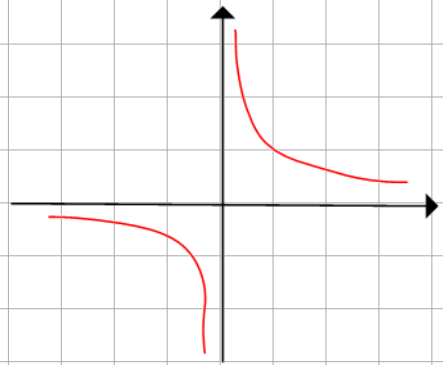
f es inyectiva $\Leftrightarrow \forall a, b \in A. a \neq b \Rightarrow f(a) \neq f(b)$



Ejm. Determina si f es o no inyectiva.

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = \frac{x-1}{x+2}$$



Sol. Sea

$$f(a) = f(b)$$

$$\frac{a-1}{a+2} = \frac{b-1}{b+2}$$

$$(b+2)(a-1) = (a+2)(b-1)$$

$$\cancel{ab} - b + 2a - \cancel{2} = \cancel{ab} - a + 2b - \cancel{2}$$

$$2a + a = 2b + b$$

$$3a = 3b$$

$$a = b$$

$\therefore f$ es 1-1.

Función sobreyectiva Sea $f: A \rightarrow B$

f es sobreyectiva $\Leftrightarrow \forall y \in B, \exists x \in A : f(x) = y$

f es sobreyectiva $\Leftrightarrow \text{Im}(f) = B$

Ejm. Determina si f es o no sobreyectiva.

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$x \mapsto f(x) = 2x + 1$$

Sol. f es sobre si $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y$

$\forall y \in \mathbb{R}$: con $f(x) = y$

$$2x + 1 = y$$

$$2x = y - 1 \Rightarrow x = \frac{y-1}{2}$$

Así $\exists x = \frac{y-1}{2} \in \mathbb{R}$ tal que $f(x)$ $= f\left(\frac{y-1}{2}\right)$

$$= 2\left(\frac{y-1}{2}\right) + 1$$

$$= y - 1 + 1$$

$\therefore f$ es sobre.

$$= y$$

Función biyectiva Sea $f: A \rightarrow B$

f es biyectiva $\Leftrightarrow f$ es 1-1 y f es sobre.

f no es biyectiva $\Leftrightarrow f$ no es 1-1 o f no es sobre.

Ejm. Determina si f es biyectiva.

1. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = x^3$$

Sol. f inyectiva. Si $f(a) = f(b)$

$$a^3 = b^3$$

$$a^3 - b^3 = 0$$

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = 0$$

$$a-b=0$$

$$\underline{a=b}$$

✓

$$a^2+ab+b^2=0$$

✓

$$a = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4b^2}}{2}$$

$$a = \frac{-b \pm \sqrt{-3b^2}}{2}$$

$$a = \frac{-b \pm b\sqrt{-3}}{2}$$

$$0 \neq 0$$

esto ocurre sólo si $a=b=0$

$$ax^2+bx+c=0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$mn^2+cn+b=0$$

$$n = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4mb}}{2m}$$

∴ f es 1-1.

f sobreyectiva. $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y$

$\forall y \in \mathbb{R}$ con $f(x) = y$

$$x^3 = y \Rightarrow x = \sqrt[3]{y} \in \mathbb{R}$$

Así $\exists x = \sqrt[3]{y} \in \mathbb{R}$: $f(x) = f(\sqrt[3]{y})$

$$= (\sqrt[3]{y})^3$$

$$= \underline{y}$$

∴ f es sobre.

Por lo tanto f es biyectiva.

Ejm. Sean $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{1, 2\}$

definimos

$$f: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$$

$$X \mapsto f(X) = X \cap B$$

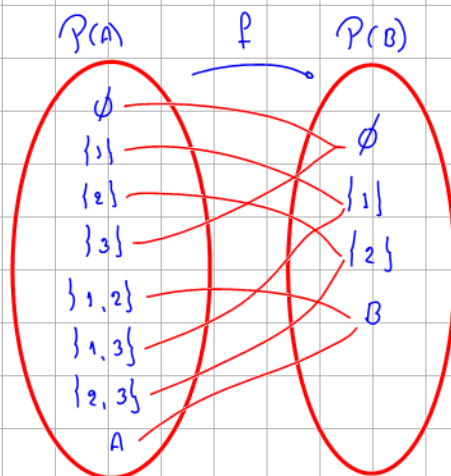
$$\{1\} \neq \{1, 3\}$$

$$f(\{1\}) \neq f(\{1, 3\})$$

$$\{1\} = \{1\}$$

$$f(\emptyset) = \emptyset \cap B$$

$$= \emptyset$$



$$f(\{1\}) = \{1\} \cap B \\ = \{1\} \cap \{1, 2\} = \{1\}$$

$$f(\{3\}) = \{3\} \cap \{1, 2\} \\ = \emptyset$$

$$f(A) = A \cap B \\ = \{1, 2, 3\} \cap \{1, 2\} \\ = \{1, 2\} = B$$

f no es 1-1

f es sobre

$\therefore f$ no es biyectiva

Ejercicio. Demuestra que $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ $x \xrightarrow{f} \underline{f(x)} \in \mathbb{R}$

para $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$, $h: C \rightarrow D$

$$\begin{aligned} \text{Dem. Sea } \forall x \in A : [(h \circ g) \circ f](x) &= (h \circ g)(f(x)) \\ &= h[\underbrace{g(f(x))}] \\ &= h[(g \circ f)(x)] \\ &= (h \circ (g \circ f))(x) \end{aligned}$$

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

$$h \circ g \circ f : A \rightarrow D$$

Composición de funciones inyectivas

Si $\underline{f}: A \rightarrow B$ y $\underline{g}: B \rightarrow C$ son funciones inyectivas, entonces

$\underline{g \circ f}: A \rightarrow C$ es inyectiva.

Dem. Sea $(g \circ f)(a) = (g \circ f)(b)$

$$g(f(a)) = g(\underline{f(b)}),$$

$$\begin{aligned} f(a) &= f(b) \\ \hookrightarrow a &= b \end{aligned}$$

como g es 1-1, $f(a) = f(b)$

$$\begin{aligned} g(m) &= g(n) \\ \hookrightarrow m &= n \end{aligned}$$

como f es 1-1, $a = b \quad \therefore g \circ f$ es 1-1

Ejercicio. Si $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ funciones sobreyectivas.

entonces $g \circ f: A \rightarrow C$ es sobreyectiva.

Dem.

Funciones inversas

Sea $A = \{a, b, c\}$ $B = \{1, 2, 3\}$

y $f = \{(a, 1) (b, 2) (c, 1)\}$ ✓

de donde $f^{-1} = \{(1, a) (2, b) (1, c)\}$ no es función.

entonces para que f^{-1} sea función se necesita que f sea 1-1.