

## ELEMENTOS DISTINGUIDOS DE UN CONJUNTO ORDENADO

Sea  $(A, \leq)$  un conjunto ordenado.

- ❖  $m \in A$  es **maximal** de  $A$  si no existe  $x \in A$  tal que  $m < x$ .
- ❖  $m \in A$  es **minimal** de  $A$  si no existe  $x \in A$  tal que  $x < m$ .
- ❖  $m \in A$  es **máximo** de  $A$  si  $\forall x \in A, x \leq m$ .
- ❖  $m \in A$  es **mínimo** de  $A$  si  $\forall x \in A, m \leq x$ .

Sea  $S$  un subconjunto no vacío del conjunto ordenado  $(A, \leq)$ .

- ❖  $c \in A$  es **cota superior** de  $S$  si  $\forall x \in S, x \leq c$ .  $(1, 2)$
- ❖  $c \in A$  es **cota inferior** de  $S$  si  $\forall x \in S, c \leq x$ .  $(1, 2)$
- ❖  $S$  está **acotado** si tiene una cota superior y una cota inferior.  $(1, \infty)$
- ❖  $s \in A$  es **supremo** (o **mínima cota superior**) de  $S$  si es cota superior de  $S$  y  $\forall$  cota superior  $c$  de  $S$  se tiene que  $s \leq c$ .
- ❖  $i \in A$  es **ínfimo** (o **máxima cota inferior**) de  $S$  si es cota inferior de  $S$  y  $\forall$  cota inferior  $c$  de  $S$  se tiene que  $c \leq i$ .

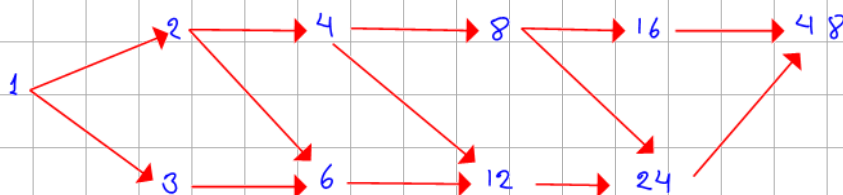
### Ejemplo

Representar el diagrama de Hasse del conjunto ordenado  $(D_{48}, |)$  y hallar los maximales y minimales, las cotas superiores e inferiores, el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo (si los hay) del subconjunto  $A = \{2, 3, 4, 6, 12\}$  en el conjunto ordenado  $(D_{48}, |)$ .

### Solución

$D_{48}$  = conjunto de los divisores del 48

Como  $D_{48} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$



Luego con  $A = \{2, 3, 4, 6, 12\}$

~~2/3~~

• Elemento maximal: 12

elemento minimal: 2 y 3

elemento máximo: 12

elemento mínimo: ~~A~~

$\forall x \in A: x \mid 12$

~~x~~ · ~~2/3~~

cotas superiores:  $\{12, 16, 24, 48\}$

cotas inferiores:  $\{1\}$

$D_{48}$

supremo: 12

ínfimo: 1

### Ejemplo

Hallar el supremo, ínfimo, máximo y mínimo (si los hay) del intervalo  $A = [-3, 2)$ .

$$A = [-3, 2)$$

$$\{2, 3, 4, \dots\}$$

$$\sup A = 2$$

$$\text{máximo } A = \nexists \quad 2 \in A ?$$

$$\inf A = -3$$

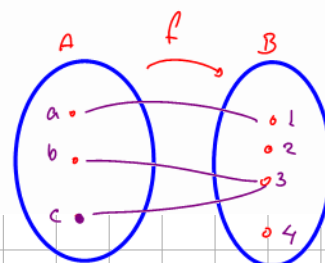
$$\text{mínimo } A = -3$$

Dados dos conjuntos no vacíos  $A$  y  $B$ , una función  $f$  de  $A$  en  $B$ , que se escribe  $f: A \rightarrow B$  y se lee " $f$  es una función o aplicación de  $A$  en  $B$ ", es un subconjunto de  $A \times B$  tal que todo  $x \in A$  está relacionado a un solo elemento  $y \in B$ . Es decir, en una función no se tienen dos pares ordenados distintos con la misma primera componente. Así, pues, toda función  $f$  es una relación especial de  $A$  en  $B$ .

Dado un par  $(x, y) \in f$  se escribe  $y = f(x)$  y se dice que  $y$  es la imagen de  $x$  por  $f$ , o que  $y$  es el valor de  $f$  en  $x$ , o bien que  $f$  transforma  $x$  en  $y$ .

**DEFINICIÓN**  $f$  es una función o aplicación de  $A$  en  $B$  sí y sólo si  $f$  es una relación entre  $A$  y  $B$ , que satisface las siguientes condiciones:

- i)  $\forall x \in A, \exists y \in B / (x, y) \in f$   
 ii)  $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z$

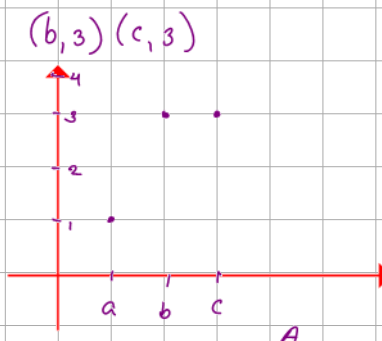


### Ejemplo

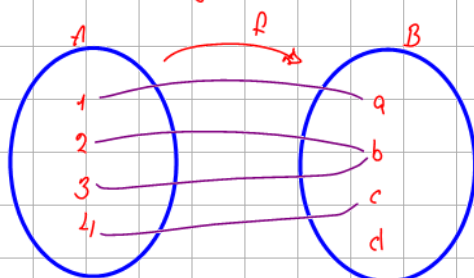
Determine si cada relación es o no una función.

1. Sean  $A = \{1, 2, 3, 4\}$  y  $B = \{a, b, c, d\}$  y sea  $f = \{(1, a), (2, b), (3, b), (4, c)\}$

Sol. Sí es función.



$$\forall x \in A, \exists y \in B: (x, y) \in f$$

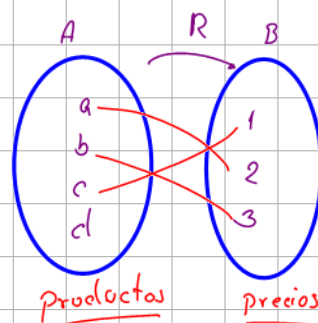


2. Sean  $A = \{a, b, c, d\}$  y  $B = \{1, 2, 3\}$  y sea la relación

$$R = \{(a, 2), (b, 3), (c, 1)\}$$

Sol. No es función.

porque  $\exists d \in A : \nexists y \in B : (d, y) \in R$



3. Sean  $A = \{a, b, c, d\}$  y  $B = \{1, 2, 3\}$  y sea la relación

$$S = \{(a, 1), (a, 3), (b, 2), (c, 2), (d, 3)\}$$

Sol. No es función.

porque  $(a, 1), (a, 3)$  y  $1 \neq 3$

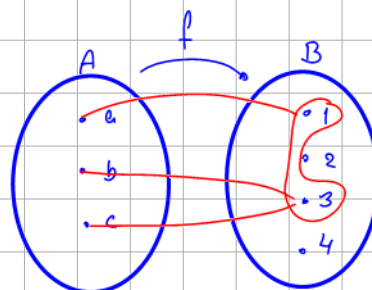
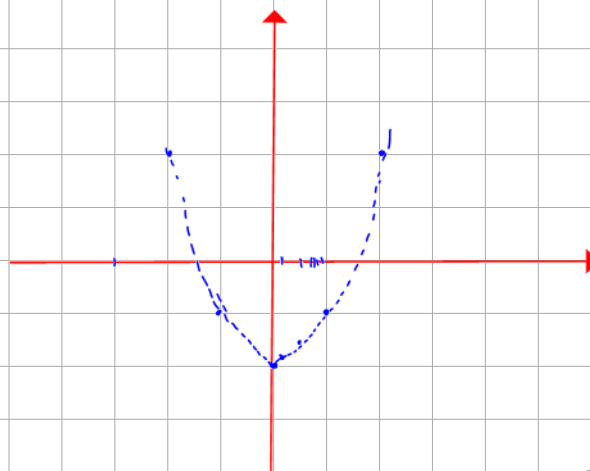
### Representación cartesiana de funciones

**Ejemplo** Sea  $f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  definida por  
 $f(x) = x^2 - 2$

Realiza su gráfica.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(x) = x^2 - 2$$



### Domino, codominio e Imagen de una función

Sea  $f: A \rightarrow B$  una función.

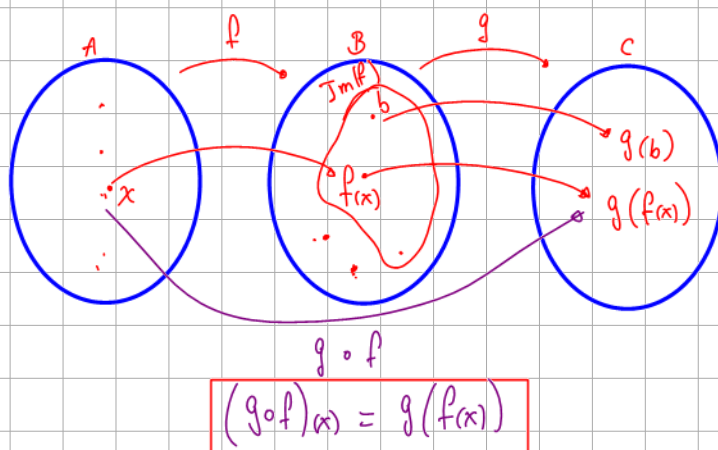
El dominio de  $f$   $D_f = A$

El codominio de  $f$   $Cd_f = B$

la imagen de  $f$  es un subconjunto de  $B$  que está formado por los elementos de llegada de  $f$ .

## Composición de funciones

Sean  $f: A \rightarrow B$  y  $g: B \rightarrow C$  dos funciones tales que el codominio de  $f$  coincide con el dominio de  $g$  (o bien  $I(f) = D(g)$ ): puede entonces definirse una nueva función  $g \circ f$  de  $A$  en  $C$  llamada función compuesta de  $f$  y  $g$ , como se muestra en el siguiente diagrama.



## Propiedades

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

, ° Asociativa

$$g \circ f \neq f \circ g$$

, ° no es conmutativa

$$f: A \rightarrow B$$

$$g: B \rightarrow C$$

$$f \circ g: B \rightarrow C$$

$$g \circ f: A \rightarrow C$$

## Ejemplo

Sean  $A = \{1, 3, 5\}$ ,  $B = \{-4, -5, -6, -7\}$ ,  $C = \{2, 4, 6\}$ , y sean

$f: A \rightarrow B$  y  $g: B \rightarrow C$  definidas por

$f = \{(1, -5), (3, -5), (5, -7)\}$  ,  $g = \{(-4, 2), (-5, 4), (-6, 6), (-7, 6)\}$

Entonces  $g \circ f = \{(1, 4), (3, 4), (5, 6)\}$

