FUNCIONES PROPOSICIONALES Y SU CUANTIFICACIÓN

FUNCIONES PROPOSICIONALES

Una función proposicional en una variable X es toda expresión en la que X representa al sujeto u objeto perteneciente a cierto conjunto. La cual se convierte en proposición para cada especificación de X. Es decir, si P(X) es una expresión que se convierte en proposición al sustituir la variable X por un objeto matemático, se dice que P es una función proposicional. Asimismo hay funciones proposicionales con más de una variable.

Por ejm. i) $P(x)$: x es par. (función proposicional)

$P(3)$: 3 es par F

$P(0)$: 0 es par V

ii) $P(x,y)$: "x" es mayor que "y" (f.p.)

$P(3,3)$: 3 es mayor que 3 F

$P(2,1)$: 2 es mayor que 1 V

CUANTIFICADORES

A partir de funciones proposicionales se puede obtener proposiciones generales mediante un proceso llamado de cuantificación. Para ello, introducimos los símbolos ∀ y ∃, llamados cuantificadores universal y existencial, respectivamente. Los cuales asociados a la variable x expresan lo siguiente:

∀ x, para expresar "para todo x", o "cualquiera que sea x"

∃ x, para expresar "existe algún x, tal que", o "existe al menos un x, tal que"

Si p(x) es siempre una proposición verdadera, para cualquiera que sea el objeto matemático que sustituye a x, entonces se podrá escribir:

$\boxed{\forall\, x: \quad p(x),}$ se lee "para todo x, se verifica p(x)"

Si p(x) es alguna vez una proposición verdadera, al sustituir x por al menos un cierto objeto matemático, entonces se podrá escribir:

$\boxed{\exists\, x / \quad p(x)}$ se lee "existe algún x, tal que se verifica p(x)"

Negación

La negación de estas funciones proposicionales cuantificadas, para cada caso, son:

$$\sim(\forall\, x : p\,(x)) \equiv \exists\, x \,/ \sim p\,(x)$$

$$\sim(\exists\, x \,/\, p\,(x)) \equiv \forall\, x : \sim p\,(x)$$

Ejm. Escribe simbólicamente la proposición, niégala y escribe la negación en el lenguaje común.

1. "Todos los jóvenes estan felices" / Algunos jovenes no estan felices

Sol. $P(x)$: Los jóvenes estan felices

Simbólicamente : $\forall x : P(x)$

Negación: $\sim(\forall x : P(x)) \equiv \exists x \,/ \sim P(x)$

Leng. común : Existe al menos un joven que no esta feliz

Existe al menos un joven que está triste.

2. "Toda persona que estudia tiene más oportunidades"

Toda persona si estudia entonces tiene mas oportunidades.

Sol. Sea $P(x)$: Persona que estudia

$q(x)$: tiene más oportunidades

Simbólicamente : $\forall x : (P(x) \Rightarrow q(x))$

Negación: $\sim[\forall x : (P(x) \Rightarrow q(x))] \equiv \exists x \,/\, P(x) \wedge \sim q(x)$

Leng. común : Existe al menos una persona que estudia y no tiene oportunidades.

3. "Todo el que estudia triunfa"

Reescribir. Toda persona si estudia, entonces triunfa. F

Simbólicamente $\forall x: P(x) \Rightarrow q(x)$

$P(x)$: Persona que estudia
$q(x)$: persona que triunfa

Negación. $\exists x / P(x) \wedge \sim q(x)$

Leng. Común. V

4. "Existen números primos pares".

$P(x)$: x es un número primo

$q(x)$: x es un número par

Simb. $\exists x / P(x) \wedge q(x)$

Neg. $\forall x: \sim P(x) \vee \sim q(x)$

L. Común. Todo número no es primo o no es par.

" " es impar

INFERENCIA LÓGICA

Se debe entender por inferencia lógica a un razonamiento en el que a partir de un conjunto de proposiciones llamadas premisas se obtiene un resultado llamado conclusión. Un razonamiento es válido sí, y solamente sí, la conjunción de las premisas implica la conclusión, o la conclusión es consecuencia de las premisas. Es decir, si las premisas son todas verdaderas, entonces las conclusiones que se derivan de ellas lógicamente han de ser verdaderas. Sin embargo, si una o más de las premisas es falsa, la conjunción de todas las premisas es falsa; por tanto, la conclusión puede ser verdadera o falsa.

Es decir.

$$\left.\begin{array}{c} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ \vdots \\ P_n \end{array}\right\} \text{premisas} \quad (V)$$

$$\left.\begin{array}{c} \hline q \end{array}\right\} \text{conclusión} \quad (V)$$

REGLAS DE INFERENCIA

Se le llaman reglas de inferencia a todo argumento universalmente correcto (o formas correctas de razonamiento) que representan métodos generales de razonamiento válido. Las siguientes son formas correctas de razonamiento:

1. Modus Ponendo Ponens (MPP)

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline q \end{array}$$

	p	$\Rightarrow$	q
1°	V	V	V
3ª	F	V	V
4ª	$\boxed{F}$	$\boxed{V}$	$\boxed{F}$

2. Modus Tollendo Tollens (MTT)

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \sim q \\ \hline \sim p \end{array}$$

3. Modus Tollendo Ponens (MTP)

$$\begin{array}{l} p \vee q \\ \sim p \\ \hline q \end{array} \qquad \begin{array}{l} p \vee q \\ \sim q \\ \hline p \end{array}$$

p	$\vee$	q
V	V	V
V	V	F
$\boxed{F}$	$\boxed{V}$	$\boxed{V}$

Ley del silogismo hipotético (SH)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline p \rightarrow r \end{array}$$

Ley de simplificación (LS)

a) $\dfrac{p \wedge q}{p}$ b) $\dfrac{p \wedge q}{q}$

Ley de conjunción (LC)

$$\begin{array}{l} p \\ q \\ \hline p \wedge q \end{array}$$

Ley de adición (LA)

$$\begin{array}{l} p \\ \hline p \vee A \end{array}$$

Dilema constructivo (DC)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow t \\ p \vee r \\ \hline q \vee t \end{array}$$

Dilema destructivo (DD)

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ r \rightarrow t \\ \sim q \vee \sim t \\ \hline \sim p \vee \sim r \end{array}$$

Ejemplo: Demostrar: $\sim q$

1) $\sim p \rightarrow r$
2) t
3) $q \rightarrow \sim r$
4) $p \rightarrow \sim t$ $\therefore \sim q$

5) $\sim p$ MTT 4 y 2
6) r MPP 1 y 5
7) $\sim q$ MTT 3 y 6

Ejemplo: Demostrar : r

1) $q \rightarrow \sim p$
2) $\sim t$
3) $p \vee r$
4) $\sim q \rightarrow t$ $\therefore r$

5. q 4 y 2 MTT
6. $\sim p$ 5 y 1 MPP
7. r 6 y 3 MTP

Ejercicio 15. (de la práctica)

b) $\sim[(p \Rightarrow q) \wedge (p \wedge \sim q)] \equiv \sim[(\sim p \vee q) \wedge (p \wedge \sim q)]$

$\equiv \sim[\underline{\underline{(\sim p \vee q)}} \wedge \sim\underline{\underline{(\sim p \vee q)}}]$

$$\equiv \sim [F]$$

$$\equiv V$$