ELEMENTOS DISTINGUIDOS DE UN CONJUNTO ORDENADO

$<$

Sea (A, $\leq$) un conjunto ordenado.

- $m \in$ A es **maximal** de A si no existe $x \in$ A tal que $m < x$.
- $m \in$ A es **minimal** de A si no existe $x \in$ A tal que $x < m$.
- $m \in$ A es **máximo** de A si $\forall\, x \in$ A, $x \leq m$.
- $m \in$ A es **mínimo** de A si $\forall\, x \in$ A, $m \leq x$.

Sea S un subconjunto no vacío del conjunto ordenado (A, $\leq$).

- $c \in$ A es **cota superior** de S si $\forall\, x \in$ S, $x \leq c$. (1,2)
- $c \in$ A es **cota inferior** de S si $\forall\, x \in$ S, $c \leq x$. (1, 2)
- S está **acotado** si tiene una cota superior y una cota inferior. $(1, \infty)$
- $s \in$ A es **supremo (o mínima cota superior)** de S si es cota superior de S y $\forall$ cota superior c de S se tiene que $s \leq c$.
- $i \in$ A es **ínfimo (o máxima cota inferior)** de S si es cota inferior de S y $\forall$ cota inferior c de S se tiene que $c \leq i$.

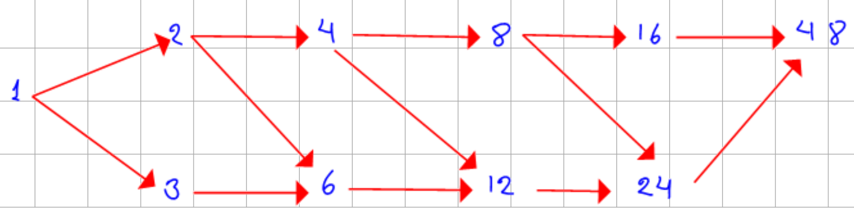
Ejemplo

Representar el diagrama de Hasse del conjunto ordenado $(D_{48}, |)$ y hallar los maximales y minimales, las cotas superiores e inferiores, el supremo, el ínfimo, el máximo y el mínimo (si los hay) del subconjunto A = {2, 3, 4, 6, 12} en el conjunto ordenado $(D_{48}, |)$.

Solución

D_{48} = conjunto de los divisores del 48

Como $D_{48} = \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 16, 24, 48\}$



Luego con $A = \{2, 3, 4, 6, 12\}$ $\cancel{2} \mid 3$

- Elemento maximal: 12

elemento máximo: 12

$\forall x \in A: x \mid 12$

cotas superiores: $\{12, 16, 24, 48\}$

supremo: 12

elemento minimal: 2 y 3

elemento mínimo: $\nexists$

$\forall x \quad 2 \nmid 3$

cotas inferiores: $\{1\}$

$\overline{D_{48}}$

ínfimo: 1

Ejemplo

Hallar el supremo, ínfimo, máximo y mínimo (si los hay) del intervalo $A = [-3, 2)$.

$A = [-3, 2)$ $\{2, 3, 4, \ldots\ldots$

$\sup A = 2$ máximo $A = \nexists$ $2 \in A$?

$\inf A = -3$ mínimo $A = -3$

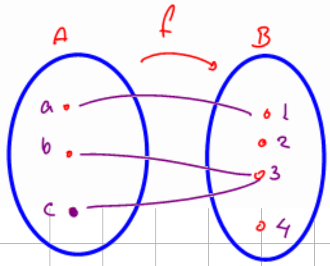
Dados dos conjuntos no vacíos A y B, una función f de A en B, que se escribe $f: A \to B$ y se lee "f es una función o aplicación de A en B", es un subconjunto de AxB tal que todo $x \in A$ está relacionado a un solo elemento $y \in B$. Es decir, en una función no se tienen dos pares ordenados distintos con la misma primera componente. Así, pues, toda función f es una relación especial de A en B.

Dado un par $(x, y) \in f$ se escribe $y = f(x)$ y se dice que y es la imagen de x por f, o que y es el valor de f en x, o bien que f transforma x en y.

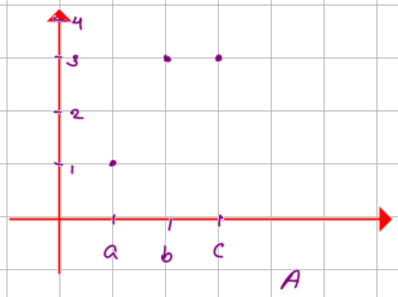
DEFINICIÓN f es una función o aplicación de A en B sí y sólo si f es una relación entre A y B, que satisface las siguientes condiciones:

i) $\forall x \in A, \exists y \in B / (x, y) \in f$

ii) $(x, y) \in f \wedge (x, z) \in f \Rightarrow y = z$



$(b,3)\ (c,3)$



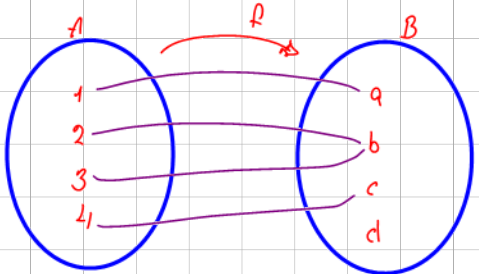
Ejemplo

Determine si cada relación es o no una función.

1. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $B = \{a, b, c, d\}$ y sea $f = \{(1, a), (2, b), (3, b), (4, c)\}$

Sol. Sí es función.

$\forall x \in A,\ \exists y \in B: (x,y) \in f$

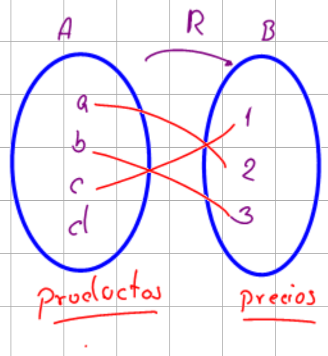


2. Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$ y sea la relación

$R = \{(a, 2), (b, 3), (c, 1)\}$

Sol. No es función.

porque $\exists\, d \in A : \nexists\, y \in B : (d, y) \in R$



3. Sean $A = \{a, b, c, d\}$ y $B = \{1, 2, 3\}$ y sea la relación

$S = \{(a, 1), (a, 3), (b, 2), (c, 2), (d, 3)\}$

Sol. No es función.

porque $(a, 1), (a, 3)$ y $1 \neq 3$

Representación cartesiana de funciones

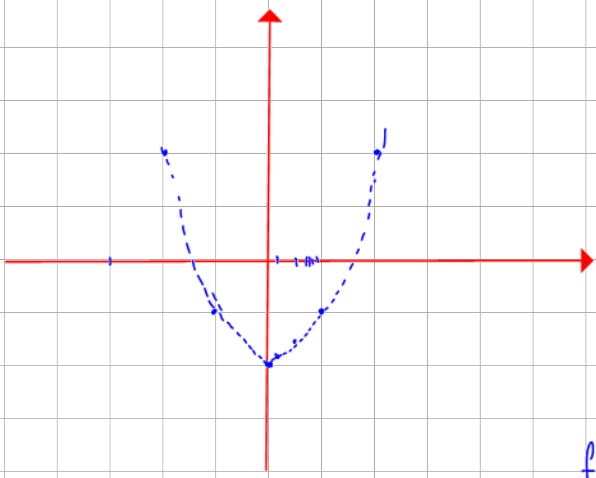
Ejemplo Sea $f : \boxed{\mathbb{Z}} \to \boxed{\mathbb{Z}}$ definida por

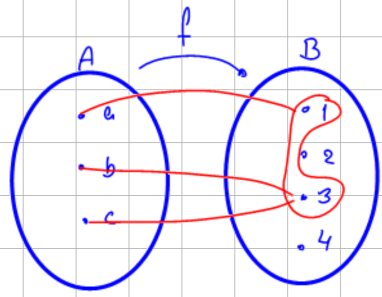
$f(x) = x^2 - 2$

Realiza su gráfica.

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$x \mapsto f(x) = x^2 - 2$





Dominio, codominio e Imagen de una función

Sea $f : A \to B$ una función.

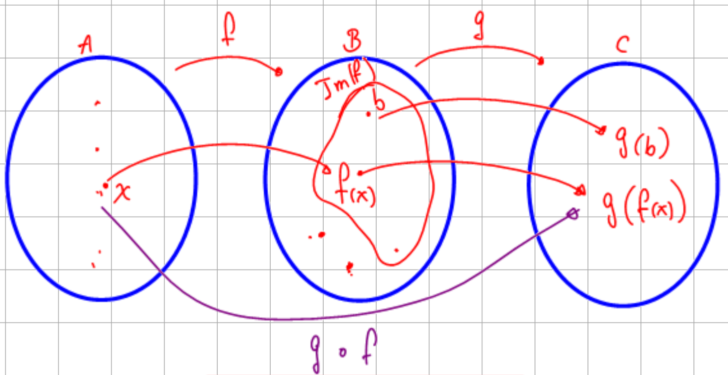
El dominio de f $D_f = A$

El codominio de f $Cd_f = B$

la imagen de f: es un subconjunto de B que esta formado por los elementos de llegada de f.

Composición de funciones

Sean $f: A \to B$ y $g: B \to C$ dos funciones tales que el codominio de f coincide con el dominio de g (o bien $I(f) = D(g)$): puede entonces definirse una nueva función $g \circ f$ de A en C llamada función compuesta de f y g, como se muestra en el siguiente diagrama.



$$\boxed{(g \circ f)_{(x)} = g(f_{(x)})}$$

Propiedades

$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$, ∘ Asociativa

$g \circ f \neq f \circ g$, ∘ no es conmutativa

$f: A \to B$

$g: B \to C$

$f \circ g : B \to \cancel{C}$

$\circ f : A \to \quad \to C$

Ejemplo

Sean $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{-4, -5, -6, -7\}$, $C = \{2, 4, 6\}$, y sean

$f: A \to B$ y $g: B \to C$ definidas por

$f = \{(1, -5), (3, -5), (5, -7)\}$, $g = \{(-4, 2), (-5, 4), (-6, 6), (-7, 6)\}$

Entonces $g \circ f$: $= \{(1, 4)(3, 4)(5, 6)\}$