CAP. 2

CONJUNTOS

En este capítulo se estudian los conceptos básicos de la teoría intuitiva de conjuntos, notaciones, subconjuntos, sus operaciones y sus aplicaciones. Para alcanzar los fines prácticos que nos interesan se completa con bastante cantidad de ejemplos ilustrativos.

2. *CONCEPTO Y NOTACIÓN DE CONJUNTO*

Un conjunto es una colección de objetos.

A los conjuntos los denotaremos con las letras mayúsculas

A, B, C, D, etc

a los elementos de un conjuntos, los denotamos con

a, b, c, d, etc.

Los siguientes símbolos son conocidos y significan:

$\in$	pertenece
$<$	menor que
$\geq$	mayor o igual que.
$/$	tal que
$:$	tal que
$\mid$	divide a
$\subset$	

y para indicar que el elemento "a" está en el conjunto A, escribiremos $a \in A$. Si "a" no está en A, escribimos $a \notin A$

Ejm. Sean los elementos a, b, c, d y e que estan en A.

En este caso escribimos

$$A = \{a, b, c, d, e\}$$

y $a \in A$, $d \in A$, $f \notin A$, $\{a, b\} \notin A$ $\{a\} \notin A$

2.1. NOTACIÓN DE CONJUNTOS NUMÉRICOS

Las notaciones usuales para caracterizar conjuntos numéricos son las siguientes:

Conjunto de los números naturales $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$

Conjunto de los números enteros $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Conjunto de los números racionales $Q = \left\{\ldots, -\frac{3}{5}, \frac{2}{3}, 0, 1, 2, \ldots\right\} = \left\{\frac{a}{b},\ b \neq 0,\ a, b \in \mathbb{Z}\right\}$

Conjunto de los números irracionales $I = \left\{\ldots, \sqrt{2}, \pi, e, \sqrt{3}, \ldots\right\}$

Conjunto de los números reales, que se denota por $\mathbb{R}$, está formado por la unión de los números racionales e irracionales

DETERMINACIÓN DE UN CONJUNTO

Un conjunto se puede determinar por extensión y comprensión.

Por extensión Es cuando se puede enlistar a todos los elementos de un conjunto

Por ejemplo $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

Por compresión Es cuando se da una propiedad que caracteriza a todos los elementos de un conjunto.

Por ejemplo: $A = \{x \in \mathbb{N} : x \mid 12\}$

$A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$

Ejm. Determina por extensión o comprensión cada conjunto.

1. $A = \{x \in \mathbb{Z} : |x| \leq 2\}$ $\quad A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$
2. $B = \{1, 2, 3, 6\}$ $\quad B = \{x \in \mathbb{N} : x \mid 6\}$
3. $C = \{x \in \mathbb{N} : x^2 = 2x\}$ $\quad C = \{2\}$
4. $D = \{5, 6, 7, 8, 9\}$ $\quad D = \{x \in \mathbb{N} : 5 \leq x \leq 9\}$
5. $E = \{2, 4, 8, 16\}$ $\quad E = \{x \in \mathbb{N} : x = 2^t,\ t = 1, 2, 3, 4\}$

CONJUNTOS ESPECIALES

Conjunto unitario Es el conjunto que tiene un solo elemento

Por ejemplo $A = \{x \in \mathbb{N} : x^2 = 3x\}$

$A = \{3\}$

Conjunto vacio Es el conjunto que no tiene elementos. Se denota por

$\emptyset$, $\{\ \}$

Por ejemplo $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 0\}$

$A = \emptyset$

Conjunto universo o universal Es el conjunto del cual se eligen algunos elementos para generar nuevos conjuntos. Se denota por U.

Por ejemplo Sea $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

y $A = \{x \in U : x \text{ es par}\}$

$A = \{2, 4, 6, 8\}$

$B = \{x \in U : x \mid 15\}$

$B = \{1, 3, 5\}$

$C = \{x \,/\, |x| \leq 3\}$

$C = \{1, 2, 3\}$

RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

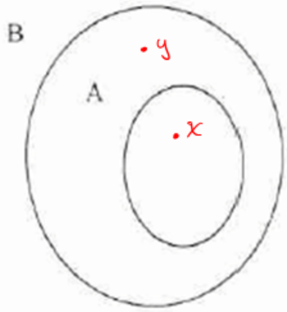
Se sabe que el símbolo $\in$ (pertenencia) se utiliza para relacionar un elemento con un conjunto. Asimismo, se puede relacionar dos conjuntos definidos en un mismo universo. Los cuales se definen a continuación.

Inclusión de conjuntos

Sean A y B dos conjuntos definidos en un mismo universo. Se dice que A está incluido en B, o que A es un subconjunto de B, si todos los elementos del conjunto A pertenecen al conjunto B; se denota por $A \subset B$, que se lee "A está incluido en B" o bien "B incluye a A" o bien "A es subconjunto de B"

En símbolos: $\boxed{A \subset B} \leftrightarrow \forall x : x \in A \rightarrow x \in B$

Su diagrama de Venn es:



$y \in B \not\Rightarrow y \in A$

$x \in A \Rightarrow x \in B$

$x \in B \qquad A \subset B$

Observación

1. $\in$ permite relacionar elemento con conjunto
   $\subset$ permite relacionar conjunto con conjunto
2. $\emptyset \subset A$ ✓ $\qquad \forall x: x \in \emptyset \Rightarrow x \in A \qquad$ ¿V?
   $F \Rightarrow \frac{V}{F}$
   V
3. $A \subset A$

Ejm. Sean los conjuntos: $A = \{1, 2, 3, 5, 7\}$
$B = \{2, 4, 5, 6, 8\}$
$C = \{2, 5\}$

Los valores de verdad de las siguientes proposiciones son:

$2 \in A$	V	$\{2,5\} \in C$	F	$\emptyset \subset B$	V
$C \in A$	F	$\{2,5\} \subset C$	V	$B \subset B$	V
$\{2,5\} \subset B$	V	$\emptyset \in A$	F	$\{1,2,3,5\} \subset A$	V
				$\{2,4,6,7\} \subset B$	

Conjunto de partes

Dado un conjunto A, se entiende por conjunto de partes de A al conjunto formado por todos los subconjuntos de A, y se denota por P(A). $\mathcal{P}(A)$

En símbolos: $P(A) = \{ X / X \subset A \}$

O bien: $\boxed{X \in P(A) \leftrightarrow X \subset A}$

Es decir, si se consideran todos los subconjuntos de A, ellos dan origen a un nuevo conjunto, que se llama conjunto de partes de A. El número de elementos del conjunto partes de A es 2^n, en donde n es el número de elementos de A.

Ejm. Sea $A = \{1, 2, 3\}$. Determine $\mathcal{P}(A)$

$\mathcal{P}(A)$ tiene $2^3 = \underline{\underline{8}}$ elementos.

$\emptyset \subset A$ $\{1\} \subset A$ $\{1,2\} \subset A$

$A \subset A$ $\{2\} \subset A$ $\{1,3\} \subset A$

$\{3\} \subset A$ $\{2,3\} \subset A$

Luego

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, A, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{2,3\}\}$$

Ej. Determine el valor de verdad de cada proposición.

$A \in \mathcal{P}(A)$	V	1.	$3 \in \mathcal{P}(A)$	F
$\{1,2\} \in A$	F	2.	$3 \in A$	V
$\emptyset \subset A$	V	3.	$\{3\} \in \mathcal{P}(A)$	V
$\emptyset \subset \mathcal{P}(A)$	V		$\{3\} \in A$	F
$\emptyset \in \mathcal{P}(A)$	V		$\{3\} \subset A$	V