Universidad Mayor de San Andrés

Facultad de Ciencias Puras y Naturales

Carrera de Informática

PRACTICA#4

ALGEBRA

APELLIDO: MAMANI QUEA

NOMBRES: JHAMIL CALIXTO

CI: 9914119LP

PARALELO: “E”

DOCENTE: EUGENIO CASTAÑOS CALLE

LA PAZ - BOLIVIA

2023

FUNCIONES

1. Determina si cada una de las siguientes relaciones es una función con dominio $\{1,2,3,4\}$. Explicar la respuesta.

(a) $f = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(3,3)\}$

En este caso "f" no es una función ya que por teoria un elemento del dominio es primer componente de un par y sale de uno y como podemos apreciar 3 del dominio esta en dos partes distintas $(3,1)$ y $(3,3)$

(b) $f = \{(1,2),(2,3),(4,2)\}$

En esta función podemos decir que $\forall a \in$ Dominio tiene una unica imagen en el codominio entonces $f: \{1,2,3,4\} \Rightarrow$ codominio

(c) $f = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}$

En esta función podemos decir que $\forall a \in$ Dominio tiene una unica imagen es el codominio entonces $f: \{1,2,3,4\} \Rightarrow$ codominio

(d) $f = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$

Sucede lo mismo en el ejercicio "a)" 1 tenemos la imagen

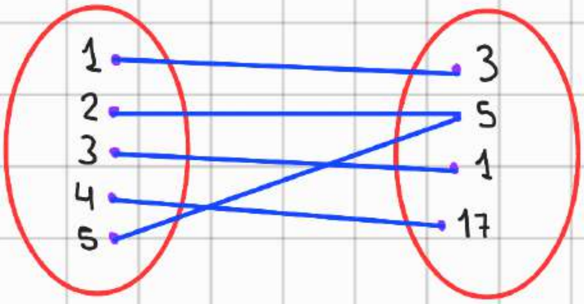
(e) $f = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$

En este caso esta función tiene un dominio en $\{1,2,3,4\}$

4. Con el conjunto $S = \{1,2,3,4,5\}$ se define $f : S \to \mathbb{Z}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x^2+1 & \text{, si } x \text{ es par,} \\ 2x-5 & \text{, si } x \text{ es impar.} \end{cases}$$

Expresar f como un subconjunto de $S \times \mathbb{Z}$. ¿Será f uno-uno?



Es de $\iff \forall x' \, \forall x'' \in S : x' \neq x'' \Rightarrow f(x') \neq f(x'')$ uno a uno

Contrareciproca $\iff \forall x' \, x'' \in S : f(x') = f(x'') \Rightarrow f(x'') \Rightarrow x' = x''$

Para $x' = 2K \; ; \; x'' = 2K_2 + 1$

$f(x') = f(x'')$

$x^2 + 1 = 2x - 5$

$(2K)^2 + 1 = 2(2K_2 + 1) - 5$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow 4K_1^2 + 1 = 4K_2 + 2 - 5$

$4K_1^2 + 1 = 4K_2 - 3$

$4K_1^2 + 1 \neq 4K_2 - 3$

Para $x = 2K$

$x^2 + 1 = 2x - 5$

$(2K_1)^2 + 1 = 2(2K_2) - 5$

$4K_1^2 + 1 \neq 4K_2 - 5$

Para $x - 2k + 1$

$(2k+1)^2 + 1 = 2(2k_2 + 1) - 5$

$4k_1^2 + 4k_1 + 1 + 1 = 4k_2 + 1 - 5$

$4(k_1^2 + k_1) + 2 = 4k_2 - 4$

$4(k_1^2 + k_1) + 2 \neq 4(k_2 - 1)$

∴ No es una función de uno a uno

6. Se define $g : \mathbb{Z} \to B$ por $g(x) = |x| + 1$. Determinar sí g es uno-uno o sobre en cada uno de los siguientes casos.

(a) B es el conjunto $\mathbb{Z}$.

$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

g es uno a uno $\Longleftrightarrow g(x_1) = g(x_1) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$g(x_1) = g(x_2)$$

$$|x_1| + 1 = |x_2| + 1 \quad // (\ )^2$$

$$|x_1|^2 = |x_2|^2$$

$$x_1^2 = x_2^2$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$$

$$x_1 - x_2 = 0 \quad \wedge \quad x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 = x_2 \qquad\qquad x_1 = -x_2$$

∴ Como tenemos dos resultados la función no es inyectiva o uno a uno.

Analicemos

$|x| + 1 =$ no es inyectiva ya que por ejemplo:

$x = 2$ y $x = -2$ nos daría $3 \Rightarrow$ tenemos de $(-2, 3)$ $(2, 3)$

ya no es uno a uno.

(b) B es el conjunto $\mathbb{N}$.

$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$

es uno a uno $\Longleftrightarrow g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$g(x_1) = g(x_2)$$

$$|x_1| + 1 = |x_2| + 1$$

$$|x_1| = |x_2|$$
$$|x_1|^2 = |x_2|^2 \quad // ()^2$$
$$x_1^2 = x_2^2$$
$$x_1^2 - x_2^2 = 0$$
$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$$
$$x_1 - x_2 = 0 \quad \wedge \quad x_1 + x_2 = 0$$
$$x_1 = x_2 \quad \wedge \quad x_1 = -x_2$$

Analizamos

∴ No es 1 a 1 ya que como en el anterior caso tenemos dos respuestas hace 2 relaciones de $(-3,4)$ $(3,4)$

7. Se define $f : A \to A$ por $f(x) = 3x + 5$. Determinar sí f es uno-uno o sobre en cada uno de los siguientes casos.

(a) A es el conjunto $\mathbb{Q}$.

Siendo que $x_1 != x_2$

$f(x_1), f(x_2) \to x_1 = x_2$

Considerando dos numeros racionales entonces

$\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ $[(a,b,c,d \in \mathbb{Z}, -\{c,d \neq 0\}]$

$$3\left(\frac{a}{b}\right) + 5 = 3\left(\frac{c}{d}\right) + 5$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$ ∴ Es uno - uno //

* Sobreyectiva supongamos que:

$$y \in \mathbb{Q} \wedge x \in \mathbb{Q}$$
$$f(x) = y$$
$$x = \frac{y - 6}{3}$$

es decir

$$\forall y \in \mathbb{Q} = x \in \mathbb{Q}$$

∴ Es sobre //

(b) A es el conjunto $\mathbb{N}$.

* Uno - Uno

Siendo que $x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2)$

$3x_1 + 5 = 3x_2 + 5$ // -5

$3x_1 = 3x_2$ // $1/3$

$x_1 = x_2$

$\therefore$ Es uno-uno

* Sobreyectiva

Siendo que

$\exists x \in \mathbb{N} \rightarrow f(x) = y$

entonces

$x = \dfrac{y-5}{3}$

$f(x) = \cancel{3}\left(\dfrac{y-5}{\cancel{3}}\right) + 5 = y - 5 + 5 = y$

$y = y$

$\therefore$ Es sobre

8. Se define $h : A \to A$ por $h(x) = x^2 + 2$ determinar sí h es uno-uno o sobre en cada uno de los siguientes casos.

(a) A es el conjunto $\mathbb{Z}$.

* Uno - Uno

Siendo que:

$h(x_1) = h(x_2) \longrightarrow x_1 = x_2$

$x_1^2 + 2 = x_2^2 + 2 \longrightarrow x_1^2 = x_2^2$

$\rightarrow$ No son iguales

$h(3) = 11$

$h(-3) = 11$

pero $3 \neq -3$

$\therefore$ No es uno - uno

* Sobreyectiva

Siendo que

$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

$h(x) = y$

$y \in \mathbb{Z}$ pero

$x^2 + 2 \geqslant 2$

$\therefore \nexists\, h(x) = 1$

$\therefore$ No es sobre

(b) A es el conjunto $\mathbb{N}$.

* Uno - Uno

$h(x_1) = h(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$

$x_1^2 + 2 = x_2^2 + 2 \rightarrow x_1^2 = x_2^2$

dado que estamos en

$x_1 = x_2$

no hay negativos

$\therefore$ Es uno - uno

* Sobreyectiva

$\exists x \in h(x) = y$

$y \in \mathbb{N}$

$h(x) = x^2 + 2 = y$

$y = 2 \rightarrow x = 0$

$y = 3 \rightarrow x = 1$

$\therefore$ Es sobre

10. Se define $f : A \to B$ por $f(x) = x^2 + 14x - 51$. Determinar sí f es uno-uno o sobre en cada uno de los siguientes casos.

(a) $A = \mathbb{N}$, $B = \{b \in \mathbb{Z} | \, b \geq -100\}$.

Uno - Uno

$X_1 = X_2 \to A$

$f(x_1), f(x_2) = x_1 \neq x_2$

$x_1^2 + 14x_1 \cancel{-51} = x_2^2 + 14x_2 \cancel{-51}$

Factorizando

$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 14) = 0$

$x_1 - x_2 = 0 \leftarrow$ Contradicción

$x_1 + x_2 = 14 \ngeq 0$

$\therefore$ Es uno - uno

Sobreyectiva

$b \in B$

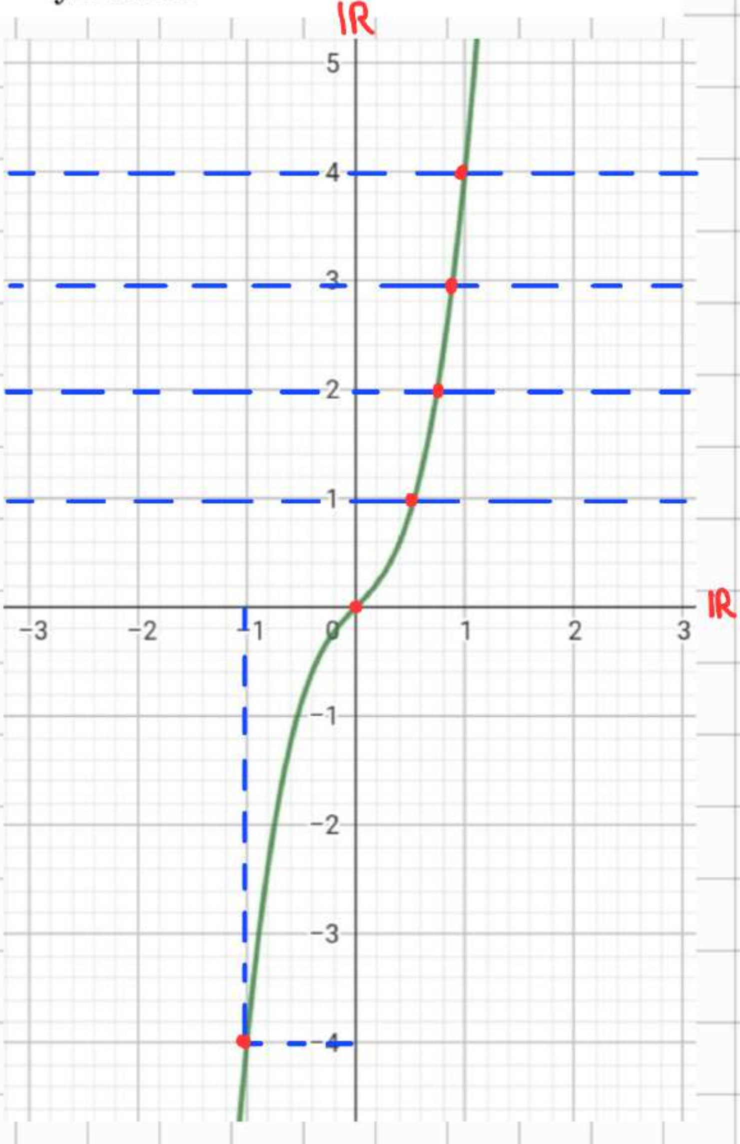
$x \in A \to f(x) = b$

$x^2 \leftarrow$ por propiedad de sobre

$\therefore$ No es sobre

13. Se define la función:

(a) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) = 3x^3 + x$. Gráficar g para determinar sí la función es uno-uno y/o sobre.

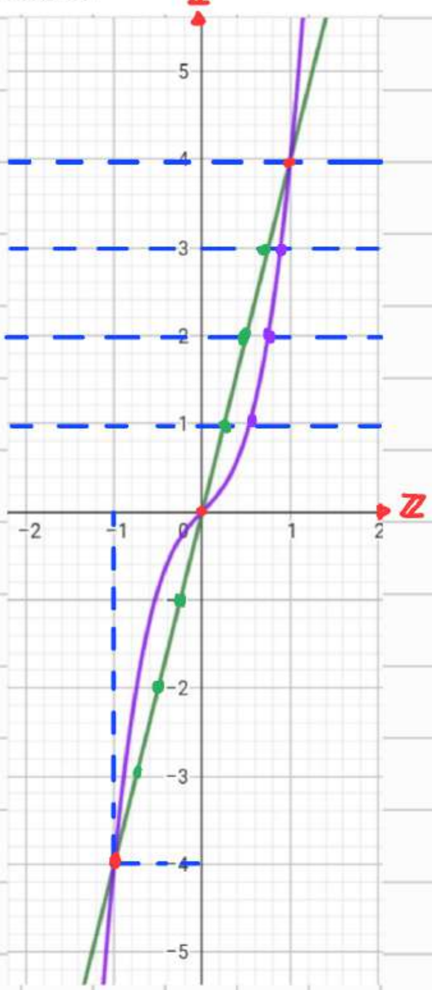


x	g(x)
-1	-4
0	0
1	4
2	26
3	84

* Como la linea $\longrightarrow$ pasa por un punto es inyectiva

* Como podemos ver en la tabla g(x) es sobre, ya que la funcion se extiende hacia el infinito en ambos lados pero no es uno a uno.

(b) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ por $g(x) = 3x^3 + x$. Gráficar g para determinar sí la función es uno-uno y/o sobre.



$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

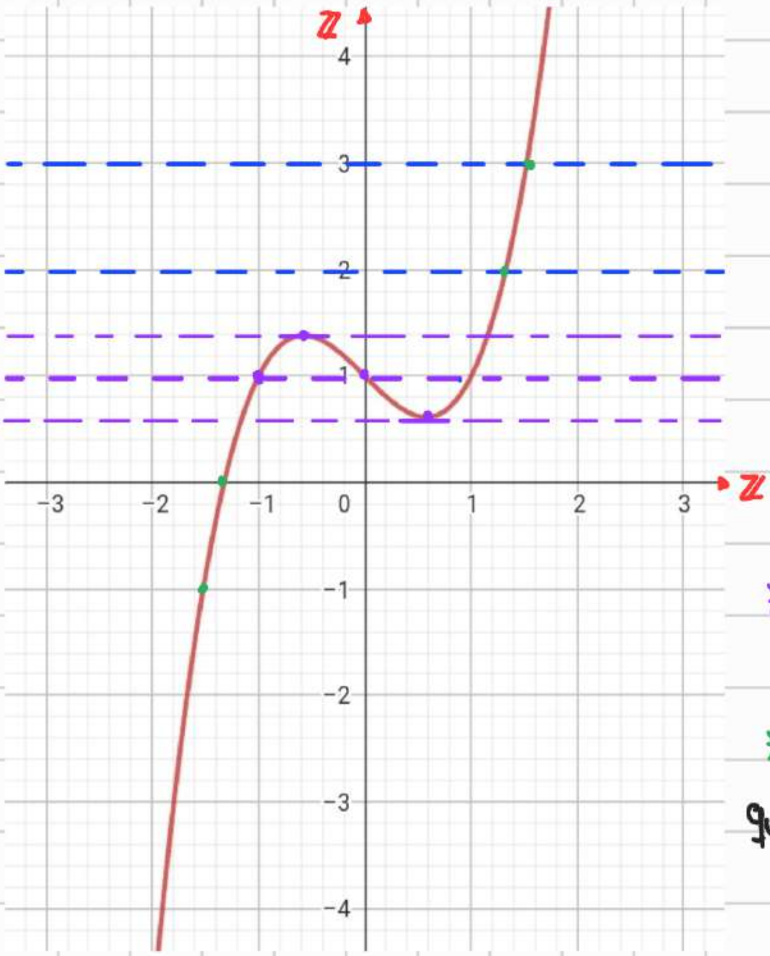
$g(x) = 3x + x$

x	$g(x)$
-1	-4
0	0
1	4

* → Inyectiva por que pasa por una linea

* La función g(x) es sobre, ya que la función se extiende al ∞ pero no es uno-uno

(c) Repetir (b) para la función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $g(x) = x^3 - x + 1$.



$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$g(x) = x^3 - x + 1$

x	$g(x)$
-2	-5
-1	1
0	1
1	1
2	7
3	25

* → No es inyectiva ya que pasa por mas de un punto

* La función g(x) es sobre, ya que la función se extiende al ∞

14. Determinar sí cada una de las siguientes reglas de correspondencia define una función uno-uno y/o sobre. Dar una demostración o exhibir un contraejemplo para justificar su respuesta.

(a) $f(n,m) = 2n + 3m$; $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Dem por contradicción:

Asumimos que hay dos pares distintos (n_1, m_1) y (n_2, m_2) en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que tienen el mismo resultado.

Entonces: $2n_1 + 3m_1 = 2n_2 + 3m_2$

$$2n_1 - 2n_2 + 3m_1 - 3m_2 = 0$$

$$m_2 = \frac{2n_1 - 2n_2 + 3m_1}{3}$$

Por tanto, se observa que no tendran el mismo resultado.

$\therefore$ Asi, la función es uno - uno.

Dem: Sobreyectiva

Dado un valor K en $\mathbb{N}$; $n = K/2$ y $m = 0$

$\Rightarrow f(n,m) = 2n + 3m = 2(K/2) + 3(0) = K$

Asi se tiene que, para cada valor de salir K en $\mathbb{N}$, existe al menos (n,m).

$\therefore$ Asi, la función es sobreyectiva

(b) $f(n,m) = 2n + 3m$; $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

Sea $(n_1, m_1), (m_1, m_2)$ en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ entonces:

$$2n_1 + 3m_1 = 2n_2 + 3m_2$$

$$2n_1 - 2n_2 = 3m_2 - 3m_1$$

$$2(n_1 - n_2) = 3(m_2 - m_1)$$

2 no divide a 3

$\therefore$ La Funcion es uno a uno $n_1 = n_2$ y $m_2 = m_1$

- Demostrar que es sobre:

para cada elemento $y \in \mathbb{Z}, \exists (n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \,/\, f(n,m) = y$

$y \in \mathbb{Z}$, $(n,m) = (y/2, (y - y/2)/3$

$$f(n,m) = 2n + 3m$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{y}{2}\right) + 3 \left(\frac{y - \frac{y}{2}}{3}\right) \Rightarrow y$$

$\therefore$ $y \in \mathbb{Z}, \exists (n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, $f(n,m) = y$ La función es sobreyectiva

(d) $f(n,m) = 89n + 246m$; $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

Sea $(n_1 + m_1)$ y $(n_2 + m_2)$ en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \Rightarrow$

$$89n_1 + 246m_1 = 89n_2 + 246m_2$$

$$89n_1 - 89n_2 = 246m_2 - 246m_1$$

$$89(n_1 - n_2) = 246(m_2 - m_2)$$

$$(n1 = n2) = \frac{246(m2 - m_1)}{89} \Rightarrow 2.5m2 = 2.5m1$$

$$(n1 = n2) = (2.5m2 = 2.5m1)$$

$\therefore$ La Función es uno a uno

17. Sean A un conjunto y $f : A \to A$ uno función. Para $x, y \in A$, se define $x \sim y$ si $f(x) = f(y)$.

(a) Probar que $\sim$ define una relación de equivalencia sobre A.

Reflexividad:

$x \in A$, $x \sim x \Rightarrow f(x) = f(x)$

Por lo tanto $x \sim x$

$\therefore$ Si es reflexiva

Simetria

Sean $x, y \in A$, $x \sim y \Rightarrow f(x) = f(x)$

Por lo tanto $x \sim y$

$\therefore$ Si es simetria

Transitiva

$\forall x, y, z \in A$, $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow f(x) = f(z)$

Por lo tanto $x \sim z$

$\therefore$ Si es transitiva

$\therefore$ Por lo tanto, $\sim$ define una relación de equivalencia sobre A.

(b) Para $A = \mathbb{R}$ y $f(x) = \lfloor x \rfloor$, encontrar las clases de equivalencia de $0, \frac{7}{5}, -\frac{3}{4}$.

1.- para $x = 0$

$[0] = 0$, $0 \sim x$ $\forall x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0$

el conjunto de todos los numeros reales que tienen parte entera igual a 0

2: Para $x = \frac{7}{5}$

$\left[\frac{7}{5}\right] = \{ y \in \mathbb{R} \mid f(y) = \lfloor y \rfloor = \frac{7}{5} \}$

$\frac{7}{5}$ es 1, la clase de equivalencia sería numeros reales cuya parte entera es 1.

3: Para $x = -\frac{3}{4}$

$[-\frac{3}{4}] = \frac{3}{4}$, $-3/4 \sim x \ \forall x \in \mathbb{R} \mid f(x) = \frac{3}{4}$

$\frac{3}{4} \sim -\frac{3}{4}$

La clase de equivalencia de $-\frac{3}{4}$ es el conjunto $\{-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\}$

(c) Si $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ y $f = \{(1,2),(2,1),(3,1),(4,5),(5,6),(6,1)\}$. Encontrar todas las clases de equivalencia.

$x \sim y$ si $f(x) = f(y)$, $A = \{1,2,3,4,5,6\}$

examinando cada elemento de A.

1. Clase de equivalencia de 1:

$[1] = \{1,2,6,3\}$ ya que $f(1) = f(2) = f(6) = f(3)$

2. Clase de equivalencia de 2:

$[2] = \{1,2,6,3\}$ por que $f(2) = f(1) = f(6) = f(3)$

3. Clase de equivalencia de 3:

$[3] = \{1,2,6,3\}$ debido a que $f(3) = f(1) = f(6) = f(3)$

4. Clase de equivalencia de 4:

$[4] = \{4\}$ ya que $f(4)$ no coincide con $f(y)$ para ningún otro y en A.

5. Clase de equivalencia de 5:

$[5] = \{5\}$ ya que $f(5)$ no coincide con $f(y)$ para ningún otro y en A.

6. Clase de equivalencia de 6:

$[6] = \{1,2,6,3\}$ ya que $f(6) = f(1) = f(6) = f(3)$

Inversas y composición

23. Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, encontrar la inversa de cada una de las siguientes funciones $f : A \to A$.

(a) $f = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,1)\}$

$f = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,1)\}$

$f^{-1} = \{(2,1), (3,2), (4,3), (5,4), (1,5)\}$

(b) $f = \{(1,2), (2,4), (3,3), (4,1), (5,5)\}$

$f = \{(1,2), (2,4), (3,3), (4,1), (5,5)\}$

$f^{-1} = \{(2,1), (4,2), (3,3), (1,4), (5,5)\}$

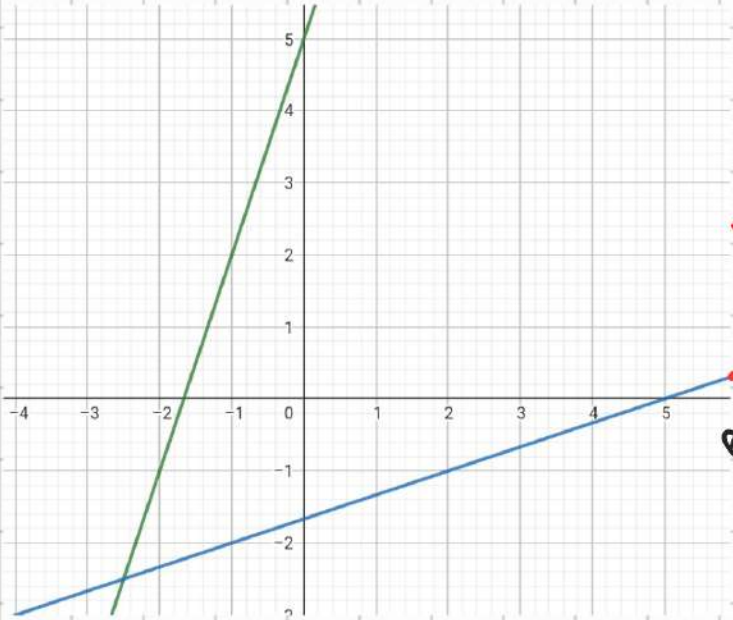
(c) $f = \{(1,1), (2,4), (3,3), (4,2), (5,5)\}$

$f = \{(1,1), (2,4), (3,3), (4,2), (5,5)\}$

$f^{-1} = \{(1,1), (4,2), (3,3), (2,4), (5,5)\}$

24. Gráficar cada una de las siguientes funciones y encontrar sus inversas. Además, especificar el dominio y el rango de cada inversa.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = 3x + 5$.



— $f(x) = 3x + 5$ — $f^{-1}(x) = \frac{x-5}{3}$

Para encontrar la función inversa

$f(x) = 3x + 5$ intercambiamos x e y

$x = 3y + 5 \quad // -5$

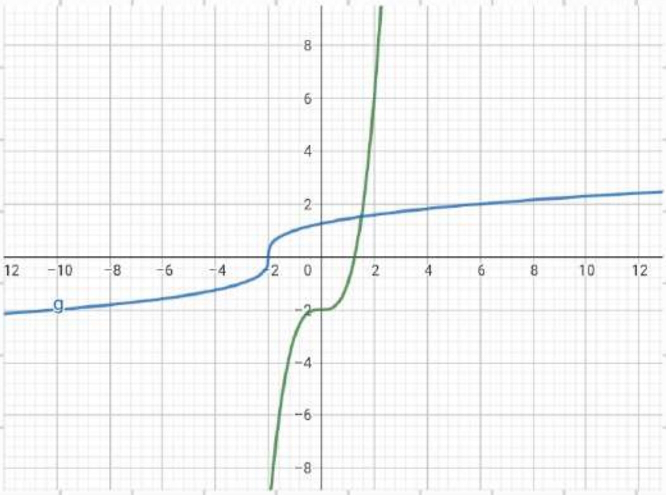
$x - 5 = 3y \quad // \frac{1}{3}$

$\therefore \frac{x-5}{3} = y$

$\therefore$ El dominio de $f(x)$ $\forall \mathbb{R}$ y el rango tambien es $\mathbb{R}$

$\therefore$ Para la inversa, el dominio de $f^{-1}(x)$ es tambien $\mathbb{R}$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = x^3 - 2$.



— $f(x) = x^2 - 2$

— $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+2}$

Para encontrar la función inversa

$f(x) = x^3 - 2$

$y = x^3 - 2 \quad // +2$

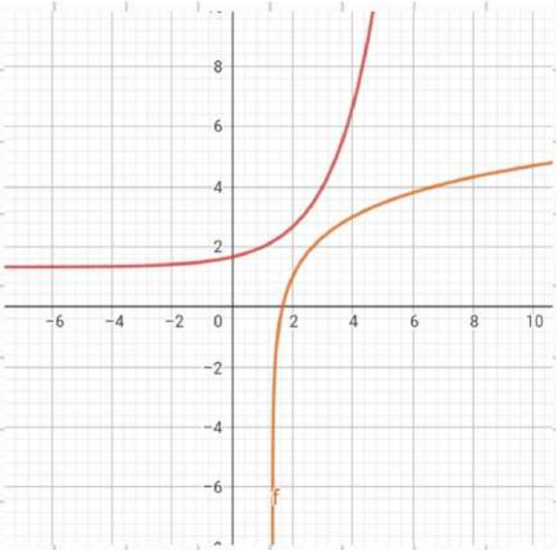
$y + 2 = x^3 \quad // \sqrt[3]{\ }$

$\therefore \sqrt[3]{y+2} = x$

$\therefore$ El dominio de $f(x)$ $\forall \mathbb{R}$, ya que la función es un polinomio. El rango tambien $\mathbb{R}$

$\therefore$ Para la inversa, el dominio de $f^{-1}(x)$ es tambien $\mathbb{R}$ debido a la raiz cubica

(c) $\beta : (\frac{4}{3}, \infty) \to \mathbb{R}$ con $\beta(x) = \log_2(3x - 4)$.



Para encontrar la función inversa

— $f(x) = \log_2(3x-4)$

— $f^{-1}(x) = \dfrac{2^x + 4}{3}$

$x = \log_2(3y - 4)$

$2^x = 3y - 4$

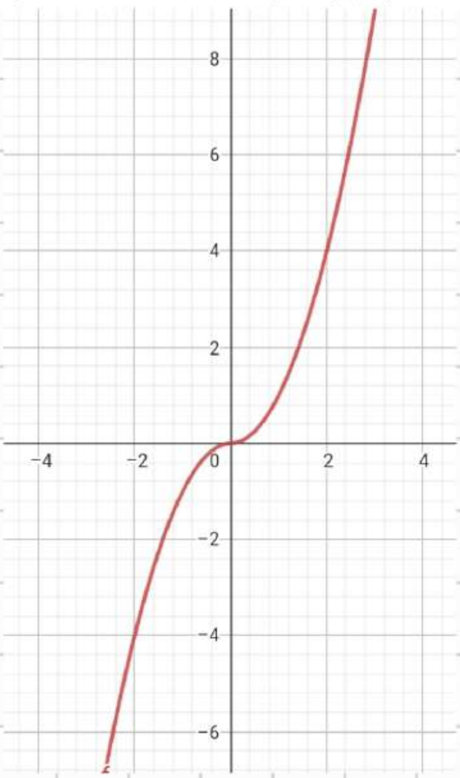
$2^x + 4 = 3y$

$\therefore \dfrac{2^x + 4}{3} = y$

$\therefore$ El dominio de $\beta(x)$ es $(\frac{4}{3}, \infty)$, y el rango $\mathbb{R}$

$\therefore$ Para la inversa, el dominio de $\beta^{-1}(x)$ es $\mathbb{R}$ y el rango $(4/3, \infty)$

(d) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $g(x) = x|x|$.



Para encontrar la función inversa

es una función parabolica con un vertice en $(0,0)$

esta función no es inyectiva por lo que no tiene una inversa unica

$x = y|y|$

obtenemos casos

$y \geqslant 0 : x = y^2$

$y < 0 : x = -y^2$

$\therefore$ La funcion $g(x) = x|x|$ no tiene una inversa unica, su dominio es $\mathbb{R}$ mientras que su rango es $[0, \infty)$

25. Mostrar que cada una de las siguientes funciones $f: A \to \mathbb{R}$ es uno-uno. Encontrar el rango de cada función y una adecuada inversa.

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 4\}$, $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x-4}$

uno a uno $\Leftrightarrow \forall x' \in A\, x' \in A\; \forall x'' \in A;\; f(x') = f(x'') \Rightarrow x$

Rango

$(-\infty, 4) \cup (4, +30)$

$\mathbb{R} - \{4\}$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$1 + \frac{1}{x_1 - 4} = 1 + \frac{1}{x_2 - 4}$$

$$\frac{1}{x_1 - 4} = \frac{1}{x_2 - 4}$$

$$x_2 - 4 = x_1 - 4$$

$$x_2 = x_1$$

$\therefore$ Es uno a uno o es inyectiva

Inversa

$$y = 1 + \frac{1}{x-4}$$

$$x = 1 + \frac{1}{y-4}$$

$$x - 1 = \frac{1}{y-4}$$

$$(x-1)(y-4) = 1$$

$$xy - 4x - y + 4 = 1$$

$$xy - 4x - x + 3 = 0$$

(b) $A = \{x \in \mathbb{R} | x \neq -1\}$, $f(x) = 5 - \dfrac{1}{1+x}$

Rango

$(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty) \Rightarrow \mathbb{R} - \{-1\}$

uno a uno $\Leftrightarrow \forall x' \in A\, x^1 \in A\; \forall x^2 \in A;\; f(x^1) = f(x^2) \Rightarrow x$

$$f(x^1) = f(x^2)$$

$$\cancel{5} - \frac{1}{1+x_1} = \cancel{5} - \frac{1}{1+x_2}$$

$$-(1+x_2) = -(1+x_1)$$

$$-\cancel{1} - x_2 = -\cancel{1} - x_1$$

$$-x_2 = -x_1 \quad //.-1$$

$$x_2 = x_2$$

$\therefore$ Es inyectiva

Inversa

$$f(x) = 5 - \frac{1}{1+x}$$

$$y = 5 - \frac{1}{1+x} \Rightarrow y - 5 = \frac{1}{1+x}$$

$$\frac{1}{y-5} = 1 + x \Rightarrow x = \frac{1}{y-5} - 1$$

$$g(y) = \frac{1}{(y-5)} - 1 \quad \wedge \quad y \neq 5$$

(c) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -\frac{1}{2}\}$, $f(x) = \dfrac{3x}{2x+1}$

Rango

$$(-\infty, -\tfrac{1}{2}) \cup (-\tfrac{1}{2}, +\infty) \Rightarrow \mathbb{R} - \{-\tfrac{1}{2}\}$$

Inyectiva

Es inyectiva $\iff \forall x_1, 2x \in A : f(x_2) = f(x_1) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\frac{3x_1}{2x_1+1} = \frac{3x_2}{2x_2+1}$$

$$(2x_2+1)(3x_1) = 3x_2(2x_1+1)$$

$$6x_2x_1 + 3x_1 = 6x_2x_1 + 3x_2$$

$$\cancel{3}(2x_1x_1 + x_1) = \cancel{3}(2x_2x_1 + x_2)$$

$$2x_1x_2 + x_1 = 2x_1x_2 + x_2$$

$$\cancel{2x_1x_2} + x_1 - \cancel{2x_1x_2} = x_2$$

$$x_1 = x_2$$

$\therefore$ Es inyectiva

Inversa

$$f(x) = \frac{3x}{2x+1}$$

$$y = \frac{3x}{2x+1} \qquad x = \frac{3y}{2y+1}$$

$$y(2y+1) = 3x$$

$$2xy + x = 3x$$

$$2xy - 3y = -x$$

$$y(2x-3) = -x$$

$$y = -\frac{x}{2x-3} \Rightarrow y = \frac{x}{3-2x}$$

26. Se define $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 2|x| & , \text{sí } x < 0 \\ 2x+1 & , \text{sí } x \geq 0 \end{cases}.$$

(a) Mostrar que f tiene una inversa.

Para $2|x|$

si $f(x) = f(y) \Rightarrow \cancel{2}|x| = \cancel{2}|y|$ // $\frac{1}{2}$

$$|x| = |y|$$

Por lo tanto, si $x \neq y$, entonces $|x| \neq |y|$

$\therefore x = y$

Para $2x+1$

$$x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = f(y)$$

$$2x+1 = 2y+1$$

$$2x = 2y$$

$$x = y$$

si $f(x) = f(y)$, entonces $x = y$ demuestra que f es inyectiva

Sobre:

$n \geq 1$

$$\frac{(n-1)}{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2 \cdot \frac{(n-1)}{2+1} = n$$

Para cada numero natural $n \geq 1$, existe un número entero x tal que $2x+1 = n$. f es sobre

$\therefore$ La función f es inyectiva y sobre. Por lo tanto, tiene una inversa

(b) Encontrar $f^{-1}(2586)$.

Dado que f es inyectiva

$f(x) = 2x+1$

$2x+1 = 2586$

$2x = 2585$

$x = 1292$

$\therefore$ Obtenemos $x = 1292$. Por lo tanto $f^{-1}(2586) = 1292$

32. Sean $S = \{1,2,3,4,5\}$ y las funciones $f, g, h : S \to S$ definidas por

$$f = \{(1,2),(2,1),(3,4),(4,5),(5,3)\}, \quad g = \{(1,3),(2,5),(3,1),(4,2),(5,4)\},$$
$$h = \{(1,2),(2,2),(3,4),(4,3),(5,1)\}.$$

$f: S \to S$ donde $f(x) = f(x)$

$f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f(3) = 4$, $f(4) = 5$, $f(5) = 3$

$g: S \to S$ donde $g(x) = g(x)$

$g(1) = 3$, $g(2) = 5$, $g(3) = 1$, $g(4) = 2$, $g(5) = 4$

$h: S \to S$ donde $h(x) = h(x)$

$h(1) = 2$, $h(2) = 2$, $h(3) = 4$, $h(4) = 3$, $h(5) = 1$

- Las f: $g \wedge h$, cada elemento del dominio tiene una sola imagen.
- Las f: $f \wedge h$ son inyectivas, si $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$