Universidad Mayor de San Andrés

Carrera de Informática

M

Ini. Ap. Pat.

INF-114 Álgebra

Grupo: D

Tema: LOGICA PROPOSICIONAL

Apellidos: MAMANI QUEA

Nombres: JHAMIL CALIXTO

Nro. Práctica: 1

Nro. Ejercicios: 57

Nota:

Fecha de entrega: 8/3/2024

S.T.

Lógica proposicional

1. Escriba simbólicamente las siguientes proposiciones:

(c) Hoy no es feriado y mañana tampoco. Sin embargo, si el Sábado hay actividades o el Miércoles no se suspenden las actividades, entonces el Viernes será feriado.

p: Feriado
q: Mañana
r: Sabado hay actividades
s: Miercoles
t: suspenden las actividades
u: viernes

Simbolicamente

$(\sim p \wedge \sim q) \Rightarrow [r \vee (s \vee \sim t)] \Rightarrow (u \wedge p)$

2. Escriba las siguientes implicaciones en la forma "si ... entonces ...":

(b) Arreglé mi aire acondicionado o no pagaré la renta.

∴ Si no pago la renta entonces arreglare mi aire acondicionado

3. Proporcionar las recíprocas de las siguientes proposiciones:

(c) Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

∵ Si $a=0$ y $b=0$, entonces $a \cdot b = 0$

Problema 4. Proporcione las contrarecíprocas del ejercicio anterior.

Si p es primo, entonces $\sqrt{p}$ es irracional.

Si $\sqrt{p}$ no es irracional entonces p no es primo

Si acepto el mundo que me ofrecen y soy feliz, entonces empiezo a cavar mi propia tumba.

Si no empiezo a cavar mi propia tumba entonces no acepto el mundo que me ofrecen y no soy feliz.

Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Si $a \neq 0$ o $b \neq 0$ entonces $a \cdot b \neq 0$

Si $a < 0$, entonces $a^{-1} < 0$.

Si $a^{-1} > 0$ entonces $a > 0$

5. Escribir las siguientes proposiciones en forma simbólica, negarlas, y luego escribir las negaciones en español:

(b) El sol está brillando si, y sólo si no está lloviendo.

p: El sol está brillando
q: Está lloviendo

Simbolicamente: $p \leftrightarrow \sim q$

Negando: $\sim(p \leftrightarrow \sim q)$

tambien $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

En español: El sol esta brillando y está lloviendo, o no esta brillando y no está lloviendo

(d) Si $a > 0$ y $b < 0$, entonces $a \cdot b < 0$.

p: $a > 0$
q: $b < 0$
r: $a \cdot b < 0$
Simbolicamente: $(p \wedge q) \rightarrow (r)$
Negación: $(a>0 \wedge b<0) \wedge \sim(a \cdot b < 0)$
Español: Si $a>0$ y $b<0$, entonces $a \cdot b \geq 0$

Problema 6. Determinar el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

(d) $7 < 2$ si $2 < 1$.

p: $7 < 2$ F
q: $2 < 1$ F

$\underbrace{F \vee F}_{F}$

∴ Le proposición es Falsa

(f) $2 + 1 = 3$ y $3 + 1 = 5$ implica que 4 es impar.

p: $2+1=3$ V
q: $3+1=5$ F
r: 4 es impar F

$p \wedge q \Rightarrow r$

V F F

F ⇒ F

V

∴ La proposición es Verdadera

7. Si p: "7 es un entero par", q: "$3+1=4$", y r: "24 es divisible por 8", traduzca las siguientes proposiciones y asigne valores de verdad.

(b) $\neg(r \wedge q)$.

r: 24 es divisible por 8 V
q: $3+1=4$ V

$\sim(V \wedge V)$
$F \vee F$
F

∴ 24 no es divisible por 8 o $3+1 \neq 4$ F

(d) $\neg q \wedge \neg p$.

q: $3+1=4$ V
p: 7 es un entero par F

$\sim(V) \wedge \sim(F)$
$F \wedge V$
F

∴ $3+1 \neq 4$ y 7 no es un entero par F

Problema 8. Escriba en forma simbólica y asigne valores de verdad:

(b) No es cierto que 7 sea impar o $3 + 1 = 4$.

No = $\sim$
p: es cierto que 7 sea impar V
q: $3+1=4$ V

$\sim p \vee q$
$\sim V \vee V$
$F \vee V$
V

(c) $3 + 1 = 4$ pero 24 no es divisible por 8.

p: $3+1=4$ V
q: 24 no es divisible por 8 F

$\underbrace{V \wedge F}_{F}$

9. Utilizando solamente los conectivos "$\neg$"y "$\vee$", encuentre proposiciones lógicamente equivalentes a las siguientes:

(e) $(p \veebar q) \rightarrow r$.

$((p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)) \rightarrow r$
$(\sim((p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q))) \vee r$
∴ $(\sim(p \wedge \sim q) \wedge \sim(\sim p \wedge q)) \vee r$

(f) $p \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$.

$p \leftrightarrow ((q \wedge p) \vee (\sim q \wedge \sim p))$

$(p \wedge ((q \wedge p) \vee (\sim q \wedge \sim p))) \vee (\sim p \wedge \sim ((q \wedge p) \vee (\sim q \wedge \sim p)))$

$(p \wedge ((q \wedge p) \vee (\sim q \wedge \sim p))) \vee (\sim p \wedge ((\sim q \vee \sim p) \wedge (q \vee p)))$

$(p \wedge (q \wedge p) \vee (p \wedge \sim q \wedge \sim p)) \vee (\sim p \wedge (\sim q \vee \sim p) \wedge (q \vee p))$

$(p \wedge q \wedge p \vee p \wedge \sim q \wedge \sim p) \vee (\sim p \wedge (\sim q \vee \sim p) \wedge (q \vee p))$

$\therefore (p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge (q \vee p))$

Problema 10. Sabiendo que p es verdadera y que $q \Rightarrow (p \wedge r)$ es falsa, indique el valor de verdad de:

(e) $r \Leftrightarrow [q \vee (p \wedge r)]$

$r \Leftrightarrow [q \vee (p \wedge r)]$

$F \Leftrightarrow [F \vee (V \wedge F)]$

$F \Leftrightarrow [F \vee F]$

$F \Leftrightarrow F$

V

(g) $\sim r \wedge [m \vee (t \wedge r)]$.

$t = V$ ó F

$m = V$ ó F

$\sim r \wedge [m \vee (t \wedge r)]$

$\sim F \wedge [V \vee (V \wedge F)]$

$V \wedge [V \vee (V \wedge F)]$

$V \wedge [V \vee F]$

$V \wedge V$

V

11. Determine, si es posible, todos los valores de verdad para p, q, r, s y, t de modo que las siguientes proposiciones sean falsas:

(e) $[(p \wedge q) \wedge r] \rightarrow (\neg r \vee \neg t)$.

$[(V \wedge V) \wedge V] \rightarrow (F \vee F)$

$[V \wedge V] \rightarrow F$

$V \rightarrow F$

F

$p : V$

$q : V$

$r : V$ $\quad \sim r : F$

$\sim t : F$

Problema 12. Encontrar la respuesta a las siguientes cuestiones:

(b) ¿Es la bicondicional asociativa? Es decir, ¿Será

$$[(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r] \Leftrightarrow [p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)]$$

una tautología?

[(p	⇔	q)	⇔	r]	⇔	[p	⇔	(q	⇔	r)]
V	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	F	V	V	F	V	F	F
V	F	F	F	V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	V	V	V	F	V	F
F	F	V	F	V	V	F	F	V	V	V
F	F	V	V	F	V	F	V	V	F	F
F	V	F	V	V	V	F	V	F	F	V
F	V	F	F	F	V	F	F	F	V	F
	1		3		3 y 4		4		2	

$\therefore$ Si es una tautologia

13. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son tautologías?

(c) $\underbrace{3+1=4}_{p}$ o $\underbrace{5+3=7}_{q}$ implica que $\underbrace{3+2=5}_{r}$.

$p \wedge q \Rightarrow r$

$V \wedge F \Rightarrow V$

$\therefore$ No es una tautologia

(p	∧	q)	→	F
V	V	V	V	V
V	V	V	F	F
V	F	F	V	V
V	F	F	V	F
F	F	V	V	V
F	F	V	V	F
F	F	F	V	V
F	F	F	V	F

(e) Rojo es amarillo o rojo es rojo.

$\underbrace{\text{Rojo es amarillo}}_{R} \; \vee \; \underbrace{\text{rojo es rojo}}_{S}$

R	S	R v S
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

∴ No es una tautologia

(g) 4 es impar o, 2 es par y 2 es impar implica que 4 es par.

$\underbrace{\text{4 es impar}}_{p,\ F} \vee \underbrace{\text{2 es par}}_{q,\ V} \wedge \underbrace{\text{2 es impar}}_{r,\ F} \rightarrow \underbrace{\text{4 es par}}_{s,\ V}$

$(p \vee (q \wedge r)) \rightarrow s$

p	q	r	s	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$(p \vee (q \wedge r)) \rightarrow s$
F	V	F	V	F	F	V

∴ Es una tautologia

Problema 14. Simbolice: "Puedes engañar a algunos todo el tiempo, y puedes engañar a todos algún tiempo; pero no puedes engañar a todos todo el tiempo".

p = Puedes engañar
q = todo el tiempo
r = algun tiempo

$(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (\sim p \vee q)$

15. Sin utilizar tablas de verdad, probar que las siguientes proposiciones son tautologías.

(d) $[(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow r)] \rightarrow (p \rightarrow r)$.

Supongamos que la proposición es verdadera

$[(V \rightarrow V) \wedge (V \rightarrow V)] \rightarrow (V \rightarrow V)$

$\sim [(V \rightarrow V) \wedge (V \rightarrow V)] \vee (V \rightarrow V)$

$[\sim (V \rightarrow V) \wedge \sim (V \rightarrow V)] \vee (F \vee V)$

$[(V \vee F) \wedge (V \vee F)] \vee V$

$[V \wedge V] \vee V$

$[V] \vee V$

V

∴ Es una tautologia

(e) $[(p \rightarrow q) \wedge (\neg p \rightarrow q)] \rightarrow q$.

$\sim [(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow q)] \vee q$

$[\sim (p \rightarrow q) \vee \sim (\sim p \rightarrow q)] \vee q$

$[(p \vee \sim q) \vee (\sim p \vee \sim q)] \vee q$

$[(p \vee \sim p) \vee (\sim q \vee \sim q)] \vee q$

$[V \vee \sim q] \vee q$

$[V] \vee q$

V

∴ Es una tautologia

(h) $[(\neg p \vee \neg q) \rightarrow (p \wedge q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q)$.

$[\sim (\sim p \vee \sim q) \vee (p \wedge q \wedge r)] \leftrightarrow (p \wedge q)$

$[(p \wedge q) \vee ((p \wedge q) \wedge r)] \leftrightarrow (p \wedge q)$

$\underbrace{[p \wedge q]}_{V,\ F} \underbrace{\leftrightarrow}_{V,\ V} \underbrace{(p \wedge q)}_{V,\ F}$

V

∴ Es una tautologia

Problema 16. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son tautologías?

(d) $[(\sim p \wedge q) \Rightarrow (p \vee \sim q)] \Leftrightarrow [p \Rightarrow (\sim q \wedge p)]$.

[(~p	∧	q)	⇒	(p	∨	~q)]	⟺	[p	⇒	(~q	∧	p)]
F	F	V	V	V	V	F	F	V	F	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	F	F	F	F	F	F	V	F	F	F
V	F	F	V	F	V	V	V	F	V	V	F	F
	①		⑤		②		⑤ y ④		④		③	

∴ Es una contingencia

(h) $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$.

(p	∧	~q)	∨	(~p	∧	q)	∨	(~p	∧	~q)
V	F	F	F	F	F	V	F	F	F	F
V	V	V	V	F	F	F	V	F	F	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	F	F
F	F	V	F	V	F	F	V	V	V	V
	①		① y ② ④		②		④ y ③		③	

∴ Es una contingencia.

(j) $[(\sim p \wedge q) \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow (p \wedge q)$.

[(~p	∧	q)	∧	(p	⇒	q)]	⇒	(p	∧	q)
F	F	V	F	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	V	F	F	V	V	F	F
V	V	V	V	F	V	V	F	F	F	V
V	F	F	F	F	V	F	V	F	F	F
	①		④		③		⑤		②	

∴ Es una contingencia

(m) $p \vee q \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q)$.

p	∨	q	∨	(~p	∧	~q	∧	r)	⟺	(p	∨	q)
V	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V	V	V
V	V	V	V	F	F	F	F	F	V	V	V	V
V	V	F	V	F	F	V	V	V	V	V	V	F
V	V	F	V	F	F	V	F	F	V	V	V	F
F	V	V	V	V	F	F	F	V	V	F	V	V
F	V	V	V	V	F	F	F	F	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V	V	V	F	F	F	F
F	F	F	F	V	F	V	F	F	V	F	F	F
	④		④ ③ ⑤		③		②		⑥		①	

∴ Es una contigencia

(n) $p \wedge [(\sim q \Rightarrow r) \vee \sim \{q \vee ((r \wedge s) \vee (r \Rightarrow s))\}]$.

p	∧	[(~q	⇒	r)	∨	~	{q	∨	((r	∧	s)	∨	(r	⇒	s))}]
V	V	F	V	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	V	V	V	F	F	F	V	F	F
V	V	F	V	F	V	F	V	V	F	F	V	V	F	V	V
V	V	F	V	F	V	F	V	V	F	F	F	V	F	V	F
V	V	V	V	V	V	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V
V	V	V	V	V	V	V	F	F	V	F	F	F	V	F	F
V	F	V	F	F	F	F	F	V	F	F	V	V	F	V	V
V	F	V	F	F	F	F	F	V	F	F	F	V	F	V	F
F	F	F	V	V	V	F	V	V	V	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	V	V	F	V	V	V	F	F	F	V	F	F
F	F	F	V	F	V	F	V	V	F	F	V	V	F	V	V
F	F	F	V	F	V	F	V	V	F	F	F	V	F	V	F
F	F	V	V	V	V	F	F	V	V	V	V	V	V	V	V
F	F	V	V	V	V	V	F	F	V	F	F	F	V	F	F
F	F	V	F	F	F	F	F	V	F	F	V	V	F	V	V
F	F	V	F	F	F	F	F	V	F	F	F	V	F	V	F
	⑦		⑤		⑥			④				③			

∴ Es una contigencia

17. Construya demostraciones formales de los siguientes teoremas:

(a)

① $\neg p \vee q$
② p

∴ q

∴ ③ q ① y ② M.T.P

(g)

① $p \to q$
② $\neg q \to \neg r$
③ $s \to (p \vee r)$
④ s

∴ q

⑤ p v r ③ y ④ M.P.P
⑥ r → q ② L. Transpo
⑦ q v q ⑤ ① y ⑥ S.D.
∴ ⑧ q ⑦ L.S.D.

Silo Disyuntivo

p v r
p → q
r → q
q v q

(h)

① $\neg(q \vee r) \to \neg p$
② $p \to \neg q$
③ $s \to \neg r$
④ p

∴ $\neg s \vee \neg p$

⑤ ~q ② y ④ M.P.P
⑥ p → (q v r) ① L. Transposición
⑦ q v r ⑥ y ④ M.P.P
⑧ ~p v ~s ⑦ ② ③ Dil. Destructivo
∴ ⑨ ~s v ~p ⑧ L. Conmutativa

Dilema destructivo

q v r
p → ~q
s → ~r
~p v ~s

Problema 18. Construya demostraciones formales de los siguientes teoremas:

(b) Si $\sim (p \Rightarrow \sim q), q \Rightarrow \sim (p \wedge \sim t), r \vee s$; entonces $t \vee s$.

1. $\sim(p \to \sim q)$
2. $q \to \sim(p \wedge \sim t)$
3. $r \vee s$

$\therefore t \vee s$

4. $\sim(\sim p \vee \sim q)$ — 1 Implicación
5. $p \wedge q$ — 4 L. Morgan Doble Neg
6. $\sim q \vee (\sim p \vee t)$ — 2 Implicación, LM, DN
7. $(\sim p \vee \sim q) \vee t$ — 6 L. Asociativa
8. $\sim(p \wedge q) \vee t$ — 7 L. Morgan
9. $(p \wedge q) \to t$ — 8 Implicación
10. t — 5 9 M.P.P
11. $\sim r \to s$ — 3 Implicación
12. $t \vee \sim r$ — 10 L. Adición
13. $\sim t \to \sim r$ — 12 Implicación
14. $\sim t \to s$ — 11, 13 SH

$\therefore t \vee s$

(d) Si $p \Rightarrow q, \sim r \Rightarrow s, \sim q \vee \sim s$; entonces $p \Rightarrow r$.

1. $p \Rightarrow q$
2. $\sim r \Rightarrow s$
3. $\sim q \vee \sim s$
4. $\sim p \vee r$ — 1 2 3 Dilema destructivo
5. $p \Rightarrow r$ — 4 L. Equivalencia

Auxiliar

$\sim q \vee \sim s$
$p \Rightarrow q$
$\sim r \Rightarrow s$
$\sim p \vee r$

19. Escriba en lenguaje formal las siguientes inferencias demostrándolas si son válidas y especificando las reglas de inferencia utilizadas:

(a) Si salgo a la calle me visto. He salido a la calle. Por tanto voy vestido.

p: Salgo a la calle
q: Me visto
r: Voy vestido

1. $p \to q$ ("Si salgo a la calle, entonces me visto."
2. p ("He salido a la calle
3. q — 1 2 M.P.P

$\therefore$ Finalmente, dado que q significa "Me visto", podemos concluir r ("Voy vestido")

(h) Si José ganó la carrera, entonces Pedro fue el segundo o Ramón fue el segundo. Si Pedro fue el segundo, entonces José gano la carrera. Si Carlos fue el segundo, entonces Ramón no fue el segundo. José gano la carrera. Luego, Carlos no fue el segundo.

J: Jose gano la carrera
P: Pedro fue el segundo
R: Ramon fue el segundo
C: Carlos fue es segundo

1. $J \to (P \vee R)$
2. $P \to J$
3. $C \to \sim R$
4. J

$\therefore \sim C$

5. $P \vee R$ — 1 4 M.P.P
6. R — 2 5 Resolucion aplicada
7. $\sim C$ — 3 6 M.T.T

$\therefore$ Jose gano la carrera y carlos no fue el segundo

(i) Mi padre me alaba si yo estoy orgulloso de mí mismo. O me va bien en deportes o no puedo estar orgulloso de mí mismo. Si estudio bastante, entonces no me va bien en deportes. Por tanto, si mi padre me alaba, entonces no estudio bastante.

A: Mi padre me alaba
O: Estoy orgulloso de mi mismo
D: Me va bien en deportes
E: Estudio bastante

1. $A \to O$
2. $O \vee \sim D$
3. $E \to \sim D$

$\therefore A \to \sim E$

4. O — 1 A M.P.
5. $O \vee \sim D$ — 4 adicion
6. $\sim D$ — 5 simplificacion
7. $E \to \sim D$ — 3 M.P.
8. $\sim E$ — 7 M.T.
9. $A \to \sim E$ — 1 8 contrapositiva

$\therefore$ Dado que si mi padre me alaba entonces no estudio bastante

1.2. Lógica cuantificada.

Problema 20. Negar la siguiente proposición: Todos los estudiantes de esta clase han aprobado algún examen en marzo.

∴ No todos los estudiantes de esta clese han aprobado algun examen en marzo.

21. Escribir en forma simbólica las siguientes proposiciones de tal forma que, al final, ningún cuantificador esté precedido por una negación:

(a) No todos los españoles son periodistas.

E: es español
P: es periodista

$E \wedge \sim P$

∴ Existe al menos un español que no es periodista

no esta procedido por una negación

(b) Si algún caminante bosteza, todos los caminantes bostezan.

C: es un caminante
B: bosteza

$C \wedge B$

∴ Para todo caminante, si es un caminante, entonces bosteza

no esta procedido por una negación

Problema 22. Escriba formalmente las siguientes proposiciones, luego determine sus negaciones y traduzca estas al lenguaje natural.

(b) Todos los habitantes de Madrid viajan en metro.

p: los habitantes de Madrid
q: viajan en metro

$p \Rightarrow q$

Si negamos: $p \wedge \sim q$

∴ Todos los habitantes de Madrid no viajan en metro.

23. Proporcione un contraejemplo para las siguientes afirmaciones:

(b) Todo entero mayor que 6 es múltiplo de 2 o de 3.

Contraejemplo: $n=7$, ya que 7 es un entero mayor que 6 pero no es multiplo de 2 ni de 3

(c) $100n + 1 > n^2$ para todo entero n.

$n = 10$

$100 \cdot 10 + 1 = 1001$

$10^2 = 100$

Entonces la afirmación no se cumple para $n=10$, ya que $1001 \not< 100$

Problema 24. Dado el conjunto $A = \{1, 3, 5, 7\}$, determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

(b) $(\exists x \in A)(2x + 3 = 5x) \vee (\exists x \in A)(2x = x)$.

① $(\exists x \in A)(2x+3=5x)$

$2x + 3 = 5x$

$3 = 5x - 2x$

$3 = 3x$

$\frac{3}{3} = x$

$1 = x$

El numero 1 esta en el conjunto A por lo tanto ay un valor que satisface la ecuación

② $(\exists x \in A)(2x = x)$

$2x = x \quad // \frac{1}{x}$

$2\cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} = \cancel{x} \frac{1}{\cancel{x}}$

$x \cdot 1 = 1$

$x = 1$

Remplazando

$2x = x$

$2 \cdot 1 = 1$

$2 = 1$

F

La cual 2 no es igual a 1

Evaluamos:

$$(\exists x \in A)(2x+3=5x) \vee (\exists x \in A)(2x=x)$$

V V F

V

∴ La expresión completa es Verdadera

25. Considere el siguiente predicado

$$p(x): \quad x^2+1 \leq 0.$$

¿Hay algún número real x que lo haga cierto? ¿Algún número complejo?

$x = i$ imaginario

$i^2 = -1$ $\qquad i = \sqrt{-1}$

$-1+1 \leq 0$

$0 \leq 0$

∴ Por lo tanto $P(i)$ es verdadero

Problema 26. Considerando los números enteros como universo de discurso, sean los siguientes predicados: Si

$$p(x): x > 0.$$
$$q(x): x \text{ es par.}$$
$$r(x): x \text{ es un cuadrado perfecto.}$$
$$s(x): x \text{ es divisible por } 4.$$
$$t(x): x \text{ es divisible por } 5.$$

Escriba en forma simbólica.

(b) Existe al menos un entero positivo y par.

$\exists x > 0 \; q(x)$

(d) Ningún entero par es divisible entre 5.

$\sim q(x) \wedge t(x)$

27. Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de los números naturales y sea $P(r,s)$ el predicado "r divide a s". Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

(a) $P(\underset{r}{2},\underset{s}{3})$.

2 divide a 3

∴ La proposición es Falsa

(h) $(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(P(m,n))$.

m que divide a todos $\mathbb{N}$ n

$m=1$ cumple con la condición $P(m,n)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$

∴ Por lo tanto, la proposición es verdadera

(i) $(\exists n \in \mathbb{N})(\forall m \in \mathbb{N})(P(m,n))$.

$n=0$ 0 es divisible por cualquier numero natural

Demostraciones

28. Demostrar por contradicción: Si $m+n$ es impar, entonces m es impar o n es impar.

$\underbrace{\text{Si } m+n \text{ es impar}}_{p}$ entonces $\underbrace{m \text{ es impar o } n \text{ es impar}}_{q}$

$\Longrightarrow$

Si negamos

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \vee \sim q$$

Si m+n es impar y tanto m como n son pares

$m = 2a$ | $m+n = 2a+2b$
$n = 2b$ | $= 2(a+b)$ ∴ es un resultado par

∴ Lo cual contradice la suposición inicial de que m+n es impar
Podemos concluir que la proposición original es verdadera

29. Demuestre o refute:

(f) $\sqrt{2}$ no es racional.

Por contradicción

Supongamos que $\sqrt{2}$ es racional se puede expresar como el cociente de dos enteros a y b

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b} \quad // ()^2$$

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \Rightarrow 2b^2 = a^2 \qquad a^2 = \text{es par}$$

$$2b^2 = (2k)^2$$

∴ No es racional

$$b^2 = 2k^2 \qquad b^2 = \text{es par}$$

$(\sqrt{2})^2 = (a/b)^2$
$2 = (a^2/b^2) \longrightarrow 2b^2 = 2a^2$
$a = 2k$
$b^2 = 2k^2 \longrightarrow \sqrt{2}$
∴ F

∴ Conclusión de que tanto a como b son pares por lo que al inicio asumimos que $\frac{a}{b}$ estaba en su forma mas simple sin factores primos comunes, lo cual es una contradicción.

(h) El producto de un entero par con un entero impar es par.

– La afirmación es correcta

$m = 2k$
$n = 2l+1$ } donde k y l son enteros

Por $(\Rightarrow \Leftarrow)$ p y q ⇐ Primos r - la suma de p y q

$p+q > 1 \Leftarrow p+q+r > 2$
$(\Rightarrow \Leftarrow)$
∴ F

Ahora, el producto mn es:

$$m \cdot n = (2k)(2l+1) = 4kl + 2k$$

Si factorizamos 2 $\Rightarrow 2\underbrace{(2kl+k)}_{\text{es un entero}}$

∴ Por lo tanto, mn es divisible por 2 y por definición es un numero par

30. Demostrar que:

(a) Si a es un entero impar, entonces $a^2 + 3a + 5$ es impar.

Supongamos que a es un tero par

Ahora, evaluamos a^2+3a+5

$$\begin{aligned} a^2+3a+5 &= (2k+1)^2+3(2k+1)+5 \\ &= 4k^2+4k+1+6k+3+5 \\ &= 4k^2+10k+9 \\ &= 2(2k^2+5k)+9 \end{aligned}$$

— Notamos que a^2+3a+5 es igual a 2 veces un numero entero 9, que es impar

∴ hemos demostrado que a^2+3a+5 es impar

31. Usando la contrarecíproca demostrar que: Para todo $m, n \in \mathbb{Z}$, si $m \cdot n$ es impar, entonces ambos m y n son impares.

Supongamos que $m = 2k$

Ahora, consideramos $m \cdot n$

$$\begin{aligned} m \cdot n &= (2k) \cdot n \\ &= 2(k \cdot n) \end{aligned}$$

Donde $k \cdot n$ es un numero entero. Entonces, $m \cdot n$ es divisible por 2 y por lo tanto es par.

∴ Demostramos: Si m o n es par, esto implica que si $m \cdot n$ es impar, entonces ambos m y n debe ser impares.

Problema 32. Sea n un entero. Probar que n es par si, y sólo si $31n + 12$ es par.

$31n+12$ con $2k$ y $2k+1$

$31+12 = 31(2k+1)+12 = 62k+31+12 = 62k+43$

$\boxed{31n+12}$ ⇐ es impar

Por otro lado

$31n+12 = 31(2k)+12 = 62k+12$

$\boxed{31n+12}$ tambien es par

∴ n es par $\Leftrightarrow$ $31n+12$ es par

33. Un número real r es racional si existen enteros p y $q \neq 0$ tales que $r = p/q$. Por el método directo, demostrar que:

(b) si r es un número racional, entonces rs es racional.

r es racional $r = \frac{p}{q}$ $q \neq 0$

consideremos el producto $r \cdot s$

$$r \cdot s = \left(\frac{p}{q}\right) \cdot s = \frac{ps}{q} \qquad ps \in \mathbb{Z} \quad q \neq 0$$

∴ Demostramos por el metodo directo que si r es un numero racional, entonces rs tambien es racional.

Problema 34. Sean m y n números enteros. Realizando una demostración directa demostrar que:

(b) Si n es impar, entonces $n^2 + 3n + 5$ también es impar.

Hipotesis : n es impar

n^2+3n+5 es impar

$n = (2K+1)$

$n^2+3n+5 = (2K+1)^2 + 3(2K+1) + 5$

Simplificando $= 4K^2 + 4K + 1 + 6K + 3 + 5$

$= 4K^2 + 10K + 9$

$= \underbrace{4K^2 + 10K}_{\text{es multiplo de 2}} \Rightarrow 2(2K^2+5K)$ 9 es un numero impar

∴ Por lo tanto demostramos que n^2+3n+5 es impar dado que n es impar.

(d) Si n y m son pares, entonces nm es par.

Hipotesis

n y m son pares

$n = 2p$

$m = 2q$

$n \cdot m = 2p \cdot 2q$

$= 4pq$

$4pq$ es un multiplo de 2, podemos factorizar $2(2pq)$

∴ Demostramos que si n y m son pares, entonces nm es par

35. Un entero a divide al entero b (denotado $a|b$) si $b = ka$ para algún entero k. Si a, b, c y n son números enteros, entonces demuestre:

(a) Si $a|b$ y $a|c$, entonces $a|(b+c)$.

$a|b \in \mathbb{Z}\ K_1 \quad b = a \cdot K_1$

$a|c \quad \mathbb{Z}\ K_2 \quad c = a \cdot K_2$

$b + c = a \cdot K_1 + a \cdot K_2 = a \cdot (K_1 + K_2)$

Donde $K_1 + K_2$ es un entero entonces son enteros

∴ Hemos expresado $b+c$ como a multiplicado por otro entero. Esto significa que $a|(b+c)$.

(c) Si n es impar, entonces $4|(n^2 - 1)$.

$n = 2K+1$ impar

$n^2 - 1 \equiv (2K+1)^2 - 1$

$\equiv 4K^2 + 4K + 1 - 1$

$\equiv 4K^2 + 4K$

$\equiv 4K(K+1)$

Ya que el producto de dos enteros consecutivos siempre es divisible por 2

Podemos expresar $n^2 - 1$ como 4 multiplicado por otro entero $K(K+1)$

∴ Por lo tanto, $4|(n^2-1)$ cuando n es impar.

Problema 36. Aplicando la forma contrarrecíproca de una implicación, probar que:

(b) Si $a \nmid bc$, entonces $a \nmid b$.

∴ Si a/b, entonces a/bc.

37. Demostrar que los siguientes predicados son falsos:

(a) $\forall n \in \mathbb{N} : 2n^2 - 4n + 31$ es primo.

Consideremos que $n = 1$

$2(1)^2 - 4 \cdot 1 + 31 = 29$

Como 29 es un numero primo, no nos sirve de contraejemplo

$n = 2$

$2(2)^2 - 4(2) + 31 = 8 - 8 + 31 = 31$

31 tambien es un numero primo por lo que no es un contraejemplo

∴ En resumen, el predicado $\forall n \in \mathbb{N} : 2n^2 - 4n + 31$ es Falso

Problema 38. Determinar el valor de verdad de cada una de las siguientes proposiciones:

(b) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ ó $\cos(\pi) = 0$.

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ $\quad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$ y no a 0

$\therefore$ Falsa

2) $\cos(\pi) = 0$ Esta proposición es verdadera

$\therefore$ Verdadera

F V V

V

$\therefore$ Verdadera

39. Demostrar que:

(a) Si x es impar, entonces $x+1$ es impar.

Suponemos $x+1$ es par

$x + 1 = 2K$ para algún entero K

Si restamos -1

$x+\cancel{1}-\cancel{1} = 2K-1$

$x = 2K - 1$

$\therefore$ Demostramos la contraposición: Si $x+1$ es par, entonces x es par.
Implica que si x es impar, entonces $x+1$ es impar.

(b) Si $x = 2$, entonces $x^2 > 3$.

$x = 2$

$2^2 > 3$

$4 > 3$

V

$\therefore$ Pudimos demostrar que si $x=2$ entonces $x^2 > 3$

Problema 40. Sean p y q proposiciones. La disyunción exclusiva de p y q, denotada por $p \veebar q$ es falso si p y q (ambos) tienen el mismo valor de verdad, en otros casos es verdadero. Construir la tabla de verdad de:

(c) $p \veebar (q \Rightarrow r)$.

p	$\veebar$	$(q$	$\Rightarrow$	$r)$
V	F	V	V	V
V	V	V	F	F
V	F	F	V	V
V	F	F	V	F
F	V	V	V	V
F	F	V	F	F
F	V	F	V	V
F	V	F	V	F

(d) Demostrar que $p \veebar q \equiv (p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$.

$(p$	$\vee$	$q)$	$\wedge$	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$q)$
V	V	V	F	F	V	V	V
V	V	F	V	V	V	F	F
F	V	V	V	V	F	F	V
F	F	F	F	V	F	F	F

$$
\begin{aligned}
(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q) &\equiv p \veebar q \\
&\equiv \sim (p \Leftrightarrow q) \\
&\equiv \sim ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)) \\
&\equiv (\sim (p \Rightarrow q) \vee \sim (q \Rightarrow p)) \\
&\equiv ((p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)) \\
&\equiv ((p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q))
\end{aligned}
$$

41. Encuentre la negación de las siguientes proposiciones:

(b) $\{(p \leftrightarrow r) \leftrightarrow s\} \leftrightarrow t.$

$\sim(\{(p \leftrightarrow r) \leftrightarrow s\} \leftrightarrow t)$

$\sim[(\{(p \leftrightarrow r) \leftrightarrow s\} \Rightarrow t) \wedge (t \Rightarrow (\{(p \leftrightarrow r) \leftrightarrow s\})]$

$\sim(\{(p \leftrightarrow r) \leftrightarrow s\} \Rightarrow t) \vee \sim(t \Rightarrow (\{(p \leftrightarrow r) \leftrightarrow s\})$

$\therefore \{(p \leftrightarrow r) \leftrightarrow s\} \wedge \sim t \vee t \wedge \sim(\{(p \leftrightarrow r) \leftrightarrow s\})$

Problema 42. Sea $x \in \mathbb{R}$. Encuentre la negación de las siguientes proposiciones:

(d) $2 \leq x < 3$.

$\therefore 2 > x \geqslant 3$

43. Demostrar que:

(b) $p \leftrightarrow q \equiv \neg p \leftrightarrow \neg q$.

Simplificar $p \leftrightarrow q$

$p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

Simplificamos $\sim p \leftrightarrow \sim q$

$\sim p \leftrightarrow \sim q \equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee (p \wedge q)$

$\therefore$ Observamos que ambas expresiones son identicas despues de la simplificación.

Problema 44. Sea t una tautología y c una contradicción. Demostrar que las siguientes afirmaciones son tautologías:

(b) $c \Rightarrow p$.

$c \Rightarrow p$ $\qquad c = F$

$F \Rightarrow p$

$\sim(F) \vee p$

$V \vee p$

V $\therefore$ es una tautologia

45. Construir la tabla de verdad de la proposición $(p \vee q) \wedge (\neg p \wedge \neg q)$. Determinar si esta proposición es una tautología, contradicción o contingencia.

p	q	(p	∨	q)	∧	(~p	∧	~q)
V	V		V		F	F	F	F
V	F		V		F	F	F	V
F	V		V		F	V	F	F
F	F		F		F	V	V	V

F

$\therefore$ Es una contradicción

Problema 46. Si p y q son proposiciones verdaderas y r es falsa, determine el valor de verdad de:

(d) $[(p \Leftrightarrow \sim q) \Rightarrow \sim r] \vee (\sim q \Leftrightarrow r)$.

$[(V \Leftrightarrow \sim V) \Rightarrow \sim F] \vee (\sim V \Leftrightarrow F)$

$[(V \Leftrightarrow F) \Rightarrow V] \vee (F \Leftrightarrow F)$

$[F \Rightarrow V] \vee V$

$V \vee V$

$\therefore V$

47. Que valores de verdad deben tener p, q y r para que sea

(e) $(p \leftrightarrow \neg q) \wedge (q \to r)$ falsa

p	q	r	(p	↔	~q)	∧	(q	→	r)
V	V	V		F	F	F		V	
V	V	F		F	F	F		F	
V	F	V		V	V	V		V	
V	F	F		V	V	V		V	
F	V	V		V	F	V		V	
F	V	F		V	F	F		F	
F	F	V		F	V	F		V	
F	F	F		F	V	F		V	

∴ Los valores son $p \equiv V$, $q \equiv V$, $r \equiv V$ pero tiene mas posivilidades los que estan con en la tabla son sus posivilidades

Problema 48. Se sabe que la proposición:

$$[(p \vee q) \wedge p] \Rightarrow [(r \vee q) \Leftrightarrow p]$$

es falsa. Determinar el valor de verdad de la proposición:

$$[(p \vee \sim q) \Rightarrow (r \wedge p)] \Leftrightarrow [\sim q \wedge (r \vee p)].$$

Daremos valores : $p = V$; $q = F$; $r = F$

$[(p \vee q) \wedge p] \Rightarrow [(r \vee q) \Leftrightarrow p]$ Sabiendo que esta proposicion es falsa llegemos al resultado F

$[(V \vee F) \wedge V] \Rightarrow [(F \vee F) \Leftrightarrow V]$

$[V \wedge V] \Rightarrow [F \Leftrightarrow V]$

$V \Rightarrow F$

F

Dado que le asignamos valores veridicos podemos afirmar que esta bien

$[(p \vee \sim q) \Rightarrow (r \wedge p)] \Leftrightarrow [\sim q \wedge (r \vee p)]$

$[(V \vee \sim F) \Rightarrow (F \wedge V)] \Leftrightarrow [\sim F \wedge (F \vee V)]$

$[(V \vee V) \Rightarrow (F \vee V)] \Leftrightarrow [V \wedge (F \vee V)]$

$[(V) \Rightarrow (V)] \Leftrightarrow [V \wedge V]$

$V \Leftrightarrow V$

∴ V

49. Determinar cuales de los siguientes enunciados son una tautología, contradicción o contingencia.

(c) $p \wedge q \to \neg p$.

p	q	p	∧	q	→	~q
V	V		V		F	F
V	F		F		V	V
F	V		F		V	F
F	F		F		V	V

∴ Contingencia

(e) $(p \leftrightarrow \neg p) \wedge q$.

p	q	(p	↔	~p)	∧	q
V	V		F	F	F	
V	F		F	F	F	
F	V		F	V	F	
F	F		F	V	F	

∴ Es una contradiccion

50. Mediante el álgebra de proposiciones, demuestre que

(c) $(p \to (q \to r) \equiv (p \wedge \neg r) \to \neg q$.

$$\begin{aligned}
(p \to (q \to r)) &\equiv (p \wedge \sim r) \to \sim q \\
&\equiv \sim(p \wedge \sim r) \vee \sim q && \text{L.E} \\
&\equiv (\sim p \vee r) \vee \sim q && \text{Morgen} \\
&\equiv \sim p \vee (\sim q \vee r) && \text{L. Aso} \\
&\equiv \sim p \vee (q \to r) && \text{L.E} \\
&\equiv p \to (q \to r) && \text{L.E}
\end{aligned}$$

51. Demostrar las reglas de inferencia:

(b) Modus tollens (MT).

Si por M.P.P llegemos a M.T.T

P_1 $p \Rightarrow q$

P_2 p

$\therefore \sim p$

P_3 $\sim q \Rightarrow \sim p$ (P_1) L.T

P_4 $\sim q$ $(P_2)(P_2)$ M.P.P

P_5 $\sim p$ $(P_3)(P_4)$ M.P.P

M.T.T

$p \to q$

$\sim q$

$\therefore \sim p$

Problema 52. Construya demostraciones formales de los siguientes teoremas:

(a)

(1) $p \Rightarrow q$

(2) $\sim p \Rightarrow r$

$\therefore$ $q \vee r$

(3) $\sim q \Rightarrow \sim p$ (2) Transpo

(4) $\sim q \Rightarrow r$ (3) y (2) S. Hip.

(5) $q \vee r$ (4) L. Equive

(b)

(1) $\sim (r \wedge s)$

(2) $\sim s \Rightarrow \sim q$

$\therefore$ $r \Rightarrow \sim q$

(3) $\sim r \vee \sim s$ (1)

(4) $r \Rightarrow \sim s$ (3) L. Equi

(5) $r \Rightarrow \sim q$ (4) y (2) Silogismo hipotetico

53. Simbolizar los siguientes razonamientos y demostrar que la conclusión es una consecuencia lógica.

(a) Si 2 es mayor que 1, entonces 3 es mayor que 1. Si 3 es mayor que 1, entonces 3 es mayor que 0. 2 es mayor que 1. Por tanto, 3 es mayor que 0.

$P_1 : 2 > 1$

$P_2 : 3 > 1$

$P_3 : 3 > 0$

$P_1 \to P_2$ V/ por la relacion de los numeros 2 y 3

$P_2 \to P_3$ V/ al comparar los numeros 1 y 0

P_1 V/

$\therefore P_3$ M.P.P dos veces

P_1 y $P_2 \to P_2$

P_2 y $P_2 \to P_3$

$\therefore$ Hemos demostrado que la conclusión P_3 es una consecuencia logica de las premisas dadas

Problema 54. Dados los conjuntos $A = \{1, 2, 3/2\}$ y $B = \{3, 4, 3/2\}$, determinar el valor de verdad de:

(a) $\exists x \in \mathbb{N} : x \in A \wedge x \in B$.

$A = \{1, 2, 3/2\}$
$B = \{3, 4, 3/2\}$

el numero $\frac{3}{2}$ estan en ambos conjuntos de A y B

$\mathbb{N}: 1, 2, 3, 4$ pero $\frac{3}{2}$ no existe en los $\mathbb{N}$

$\therefore \exists x \in \mathbb{N} : x \in A \wedge x \in B$ es Falsa

55. Determinar el valor de verdad de los siguientes predicados y escribir su negación:

(b) $\exists x \in \mathbb{Z} :\ x^2 - 6x + 8 < 0.$

Factorizemos la expresión

$x^2 - 6x + 8$

$(x-2)(x-4) < 0$ Para que le expresion sea cero

los intervelos donde $x-2$ y $x-4$ tienen signos opuestos

x esta en el intervalo $(2,4)$

$\therefore$ es verdadero para los valores de x en el intervalo abierto $(2,4)$

Para la negación

$\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 - 6x + 8 < 0 \equiv \forall x \in \mathbb{Z} : x^2 - 6x + 8 \geqslant 0$

$\therefore$ Lo que significa que para todo $\mathbb{Z}$ siempre sera $\geqslant 0$

(c) $\exists x \in \mathbb{Z} :\ x^2 - 3x + 2 < 0.$

Factorizando

$x^2 - 3x + 2$

$\underbrace{(x-2)(x-1)}$ < 0

Para que sea 0 seria los opuestos

los intervalos de x $(2,1)$

$\therefore$ es verdadero para los valores de x en el intervalo abierto $(2,1)$

Para la negación

$\exists x \in \mathbb{Z} : x^2 - 3x + 2 < 0 \equiv \forall x \in \mathbb{Z} : x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$

$\therefore$ Es verdad para todo $\mathbb{Z} : x^2 - 3x + 2 \geqslant 0$

Problema 56. Determinar la negación de los siguientes predicados:

(a) $\exists x : P(x) \vee \sim Q(x)$.

$\sim(\exists x : P(x) \vee \sim Q(x))$

$\forall x : \sim P(x) \wedge \sim(\sim Q(x))$

$\forall x : \sim P(x) \wedge Q(x)$

$\therefore$ Los valores de x, $P(x)$ es Falso y $Q(x)$ es verdadero al mismo tiempo.

57. Sea $P(x, y) :\ x < 2 \rightarrow y > 3$, donde $x, y \in \mathbb{R}$. Determinar el valor de verdad de los siguientes predicados:

(a) $P(2, y) \rightarrow [P(1, 2) \rightarrow P(x, 4)]$.

evaluemos

$P(2, y) \equiv \underbrace{2 < 2 \text{ (F)} \Rightarrow x > 3}_{\text{(V)}}$

$P(1, 2) \equiv \underbrace{1 < 2 \text{ (V)} \Rightarrow 2 > 3 \text{ (F)}}_{\text{(F)}}$

$P(x, 4) \equiv \underbrace{x < 2 \Rightarrow 4 > 3 \text{ (V)}}_{\text{(V)}}$

Por la implicacion nos da sus valores

$V \rightarrow (F \rightarrow V)$

$V \rightarrow V$

(V)

$\therefore$ El valor de $P(2, y) \rightarrow [P(1, 2) \rightarrow P(x, 4)]$ es verdadera.