Ejemplo

Demostrar la validez del siguiente razonamiento:

Si el reloj está adelantado, entonces Juan llegó antes de las diez y vio partir el coche de Andrés. Si Andrés dice la verdad entonces Juan no vio partir el coche de Andrés. Andrés dice la verdad o estaba en el edificio en el momento del crimen. El reloj está adelantado. Por tanto Andrés estaba en el edificio en el momento del crimen.

Simbólicamente

p: el reloj está adelantado
q: Juan llegó antes de las diez
r: Juan vio partir el coche de Andrés
s: Andrés dice la verdad
t: Andrés estaba en el edif. en el momento del crimen.

Luego

1.	$p \Rightarrow (q \wedge r)$		
2.	$s \Rightarrow \sim r$		
3.	$s \vee t$		
4.	p	$\therefore t$	
5.	$q \wedge r$	1 y 4	MPP
6.	q	5	L.C.
7.	r	5	L.C.
8.	$\sim s$	2 y 7	MTT
9.	t	3 y 8	MTP

Métodos de Demostración

Toda afirmación en matemática requiere ser demostrada, y en muchos casos, realizar la demostración de una proposición no es una tarea fácil.

El objetivo de este capitulo es proporcionar al estudiante las estrategias y herramientas necesarias para poder realizar demostraciones y así poder transmitir ideas a otras personas.

En el proceso de demostrar una proposición se debe, en lo posible, expresarla en forma de una proposición condicional o implicación. En esta forma, el termino de partida se denomina hipótesis y puede estar compuesta por una o mas proposiciones, y el termino de llegada se la conoce como tesis o conclusion.

1. Método Directo (Progresivo)
2. Método Directo (Progresivo - Regresivo)
3. Método por contradicción
4. Método del contrarecíproco
5. Método de la bicondicional

Método Directo (Progresivo)

Las proposiciones que se demuestran con este método son de la forma

$$p \Rightarrow q$$

El trabajo comienza al suponer que p es V y, de alguna manera, usar esta información para obtener otra proposición p_1, continuando este proceso se debe obtener la proposición p_2, y así sucesivamente hasta obtener la conclusion q. En este caso el proceso de deducción es progresivo.

$$p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow p_k \Rightarrow q$$

Donde las proposiciones $p_1, p_2, \ldots, p_k$ se obtienen mediante definiciones, axiomas o teoremas ya demostrados que tienen relación con la premisa p y con la tesis q.

Ejemplo. *Demuestra que, el cuadrado de todo entero impar es impar.*

Reescribiendo:

Si x es impar entonces x^2 es impar

Como x es impar, $\Rightarrow x = 2k+1, \quad k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow x^2 = (2k+1)^2$

$\Rightarrow x^2 = 4k^2 + 4k + 1$

$\Rightarrow x^2 = 2\underbrace{(2k^2+2k)}_{m} + 1$

$\Rightarrow x^2 = 2m+1, \quad m \in \mathbb{Z}$

Así x^2 es impar.

Método Directo (Regresivo) **Progresivo - Regresivo**

Para demostrar la proposición

$$p \Rightarrow q$$

se parte de la hipótesis p, la cuál es V, y obtener proposiciones

$$p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow p_k$$

Luego debemos partir de la conclusión q y obtener, regresivamente, proposiciones

$$p_k \Rightarrow p_{k+1} \Rightarrow p_{k+2} \Rightarrow \ldots \Rightarrow p_j \Rightarrow q$$

para luego unirlas y construir las implicaciones.

$$p \Rightarrow p_1 \Rightarrow p_2 \Rightarrow \ldots \Rightarrow p_k \Rightarrow, \ldots, p_j \Rightarrow q$$

que demuestran la proposición deseada.

Ejemplo Demuestra que para todo $a, b \in \mathbb{R}^+$; $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Reescribiendo: Si $a, b \in \mathbb{R}^+$ entonces $\dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$

Como $a, b \in \mathbb{R}_0^+$, existe $\sqrt{a}, \sqrt{b} \in \mathbb{R}_0^+$

Luego $(\sqrt{a} - \sqrt{b}) \in \mathbb{R}$

y por Teorema

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0 \Rightarrow a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$$

$$\Rightarrow a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$\Rightarrow \frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \quad // \cdot 2 > 0$$

$$a + b \geq 2\sqrt{ab}$$

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0$$

$$(\sqrt{a})^2 - 2\sqrt{a}\sqrt{b} + (\sqrt{b})^2 \geq 0$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

Método por Contradicción

Este método consiste en suponer que la conclusion de la proposición $p \Rightarrow q$ es falsa y agregarla como hipótesis, para luego aplicar el método directo hasta obtener una proposición de la forma $r \wedge \sim r$, la cuál es una contradicción. Por lo tanto, ya que la suposición de que la conclusion es falsa nos lleva a contradicciones, entonces debe ser verdadera.

Así, para demostrar la proposición

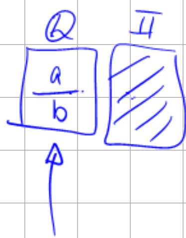
$$p \Rightarrow q$$

demostramos su negación

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

hasta obtener una contradicción. Luego la proposición inicial $p \Rightarrow q$ es verdadera.

Ejemplo. *Demuestra que $\sqrt{2}$ es irracional.*



Aplicamos el mét. por contradicción

Es decir suponemos que $\sqrt{2}$ es racional

entonces $\sqrt{2}$ tiene forma fraccionaria irreducible

Es decir $\sqrt{2} = \dfrac{p}{q}$,

Luego $2 = \dfrac{p^2}{q^2} \Rightarrow 2q^2 = p^2$

$\Rightarrow p^2 = 2 \cdot q^2$,

$\Rightarrow p^2$ es par

$\Rightarrow p$ es par) ejercicio

$\Rightarrow p = 2k$, $k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow (2k)^2 = 2q^2$

$\Rightarrow 4k^2 = 2q^2$

$\Rightarrow q^2 = 2 \cdot k^2$

$\Rightarrow q^2$ es par

$\Rightarrow q$ es par

$\Rightarrow \quad q = 2m \quad , m \in \mathbb{Z}$

Lo cual es una contradicción

(porque hemos supuesto que $\frac{p}{q}$ es irreducible

y acabamos de ver que $\frac{p}{q} = \frac{2k}{2m}$ es decir

se puede reducir)

Así $\sqrt{2}$ es irracional.

Método del contrarrecíproco

Este método consiste en demostrar la proposición equivalente de la implicación, es decir:

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

de este modo la hipótesis es la proposición $\sim q$ y la conclusión es $\sim p$, luego podemos aplicar los métodos mencionados anteriormente.

Ejemplo. *Demostrar que si $\underbrace{n^2 \text{ es par}}_{p}$ entonces $\underbrace{n \text{ es par}}_{q}$.* $\quad p \Rightarrow q$

El contrarrecíproco: Si n no es par entonces n^2 no es par.

Si n es impar entonces n^2 es impar $\quad (\sim q \Rightarrow \sim p)$

Como n es impar $\Rightarrow n = 2k+1$

$\Rightarrow n^2 = (2k+1)^2$

$\Rightarrow n^2 = 4k^2+4k+1$

$\Rightarrow n^2 = 2(2k^2+2k)+1$

$\Rightarrow n^2 = 2m+1$

$\Rightarrow n^2$ es impar.

Método de la bicondicional

Para demostrar la proposición $p \Leftrightarrow q$. Debemos usar la equivalencia:

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

Es decir que debemos demostrar dos implicaciones, cada una de las cuales pueden demostrarse utilizando los métodos anteriores.

Otros métodos

Otras proposiciones, que se presenten a menudo, pueden demostrarse utilizando equivalencias lógicas y los métodos vistos anteriormente. Algunas de ellas son:

- Para demostrar la proposición $p \Rightarrow (q \vee r)$ se debe demostrar $(p \wedge \sim q) \Rightarrow r$ o bien $(p \wedge \sim r) \Rightarrow q$
- Para demostrar la proposición $p \Rightarrow (q \wedge r)$ se deben demostrar $p \Rightarrow q$ y $p \Rightarrow r$
- Para demostrar la proposición $(p \vee q) \Rightarrow r$ se deben demostrar $p \Rightarrow r$ y $q \Rightarrow r$

Ejm. Demuestra que

Si $a \cdot b = 0$, entonces $\underline{a = 0} \vee b = 0$

i) $ab = 0 \wedge a \neq 0 \Rightarrow b = 0$

Si $ab = 0 \wedge a \neq 0$, $\exists a^{-1}$

$ab = 0 \quad // \cdot a^{-1}$

$a^{-1}(ab) = a^{-1} \cdot 0$

$(a^{-1} \cdot a) b = 0$

$1 \cdot b = 0$

$b = 0$

ii) $ab = 0 \wedge \underline{b \neq 0} \Rightarrow \underline{a = 0}$

$ab = 0 \quad // \cdot b^{-1}$

$(ab) b^{-1} = 0 \cdot b^{-1}$

$a = 0$