Universidad Mayor de San Andrés
Facultad de Ciencias Puras y Naturales
Carrera de Informática

PRACTICA#4

FUNCIONES

APELLIDO: MAMANI QUEA
NOMBRES: JHAMIL CALIXTO
CI: 9914119LP
DOCENTE: Lic. MIRIAM JULIA CUSI RODRIGUEZ
PARALELO: D

LA PAZ - BOLIVIA
2024

FUNCIONES

1. Determina si cada una de las siguientes relaciones es una función con dominio $\{1,2,3,4\}$. Explicar la respuesta.

(a) $f = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(3,3)\}$

En este caso "f" no es una función ya que por teoria un elemento del dominio es primer componente de un par y sale de uno y como podemos apreciar 3 del dominio esta en dos partes distintas (3,1) y (3,3)

(b) $f = \{(1,2),(2,3),(4,2)\}$

En esta función podemos decir que $\forall a \in$ Dominio tiene una unica imagen en el codominio entonces $f: \{1,2,3,4\} \Rightarrow$ codominio

(c) $f = \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1)\}$

En esta función podemos decir que $\forall a \in$ Dominio tiene una unica imagen es el codominio entonces $f: \{1,2,3,4\} \Rightarrow$ codominio

(d) $f = \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4)\}$

Sucede lo mismo en el ejercicio "a)" 1 tenemos la imagen

(e) $f = \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$

En este caso esta función tiene un dominio en $\{1,2,3,4\}$

3. Dar un ejemplo de función $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que

(a) sea uno-uno pero no sobre;

$f(x) = x^2$, $x \in N$

Uno a uno

dos valores distintos $x1$ y x^2 en el dominio de f

$$f(x1) = f(x2)$$

$$x1^2 = x2^2$$

Despejando $x1$: $x1 = \pm\sqrt{x2^2}$

Existe dos posibles soluciones la cuales son

$$\boxed{x1 = x^2} \quad o \quad x1 = -x^2$$

∴ La unica posibilidad que $x1 = x^2$ existe un valor 1 a 1

No sobre

$f(x) = x^2$ no es sobre

rango de f consiste en $\{1, 4, 9, 16, 25, \ldots\}$

Existe numero $\mathbb{N}$ que no son x^2

$$1, 4, 9, 16, 25$$

∴ Por lo tanto la funcion no es sobre

(b) sea sobre pero no uno-uno;

Existe almenos un numero $\mathbb{N}$ n tal que $f(n) = m$

Ejemplo

- Si $m = 4$, entonces $f(2) = 2^2 = 4$

  9, entonces $f(3) = 3^2 = 9$

  16, entonces $f(4) = 4^2 = 16$

  ⋮

Sin embargo no es inyectiva por que hay distintos valores de n que se asignan al mismo valor de $f(n)$

Por ejemplo

$$f(2) = 2^2 = 4$$

$$f(-2) = -2^2 = 4$$

∴ Por lo tanto aunque es sobreyectiva, no es inyectiva (uno - a - uno)

(c) no sea uno-uno ni sobre;

$f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ que no es inyectiva (uno - a - uno) ni sobreyectiva (sobre):

$$f(n) = n + 1, \text{ para } n \text{ par}$$

$$f(n) = n - 1, \text{ para } n \text{ impar}$$

No es inyectiva por que hay distintos valores de n que se asigna al mismo valor de f(n).

Por ejemplo:

$$f(2) = 2 + 1 = 3$$

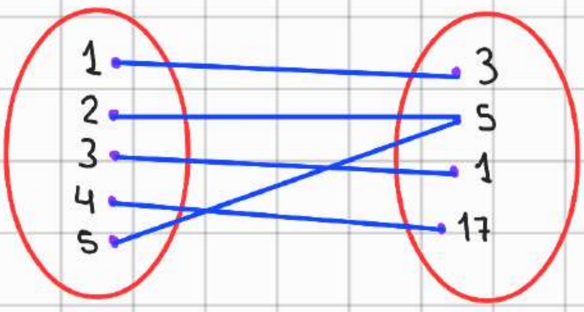
$$f(1) = 1 - 1 = 0$$

Ambos valores, 2 y 1, se asignan a 3 y 0 respectivamente

4. Con el conjunto $S = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ se define $f : S \to \mathbb{Z}$ por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{, si } x \text{ es par,} \\ 2x - 5 & \text{, si } x \text{ es impar.} \end{cases}$$

Expresar f como un subconjunto de $S \times \mathbb{Z}$. ¿Será f uno-uno?



Es de $\iff \forall x' \forall x'' \in S : x' \neq x'' \Rightarrow f(x') \neq f(x'')$ uno a uno

Contrarecíproca $\iff \forall x'\ x'' \in S : f(x') = f(x'') \Rightarrow f(x'') \Rightarrow x' = x''$

Para $x' = 2k \ ; \ x'' = 2k_2 + 1$

$$f(x') = f(x'')$$

$$x^2 + 1 = 2x - 5$$

$$(2k)^2 + 1 = 2(2k_2 + 1) - 5$$

$\Rightarrow$

$\Rightarrow 4k_1^2 + 1 = 4k_2 + 2 - 5$

$$4k_1^2 + 1 = 4k_2 - 3$$

$$4k_1^2 + 1 \neq 4k_2 - 3$$

Para $x = 2k$

$x^2 + 1 = 2x - 5$

$(2k_1)^2 + 1 = 2(2k_2) - 5$

$4k_1^2 + 1 \neq 4k_2 - 5$

Para $x - 2k + 1$

$(2k+1)^2 + 1 = 2(2k_2 + 1) - 5$

$4k_1^2 + 4k_1 + 1 + 1 = 4k_2 + 1 - 5$

$4(k_1^2 + k_1) + 2 = 4k_2 - 4$

$4(k_1^2 + k_1) + 2 \neq 4(k_2 - 1)$

$\therefore$ No es una función de uno a uno

5. La adición y multiplicación de números reales son las funciones $\mathrm{adi}, \mathrm{mul} : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, donde

$$\mathrm{adi}(x, y) = x + y; \qquad \mathrm{mul}(x, y) = xy$$

(a) ¿Será adi uno-uno? ¿Será sobre?

Suma de uno a uno $\Leftrightarrow \forall (x_1, y_1)\ (x_1, y_1) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$:

$\mathrm{adi}(x_1, y_1) = \mathrm{adi}(x_2, y_2) \Rightarrow (x_1\ y_1) = (x_2, y_2)$

$\mathrm{multi}(x_1, y_1) = \mathrm{multi}(x_2, y_2) \Rightarrow (x_1\ y_1) = (x_2, y_2)$

$\mathrm{adi}(x_1, y_1) = \mathrm{adi}(x_2, y_2)$

$x_1 + y_1 = x_2 + y_2$ (1) $\Rightarrow x_1 = x_2 + y_2 - y_1$ (3)

$\mathrm{mul}(x_1, y_1) = \mathrm{mul}(x_2, y_2)$

$x_1\ y_1 = x_2\ y_2$ (2) $\Rightarrow x_1 = \dfrac{x_2 y_2}{y_1}$

Remplazamos (4) en (1)

$$\frac{x_2\ y_2}{y_1} + y_2 = x_2 + y_2$$

$$X_2 Y_2 = (X_2 + Y_2 - Y_1) Y_1$$
$$X_2 Y_2 = X_2 Y_1 + Y_2 Y_1 - Y_1^2$$
$$0 = X_2 Y_1 + Y_2 Y_1 - Y_1^2 - X_2 Y_2$$
$$0 = X_2 (Y_1 - Y_2) + Y_1 (Y_2 - Y_1)$$
$$0 = X_2 (Y_1 - Y_2) - Y_1 (Y_1 - Y_2)$$
$$0 = (Y_1 - Y_2)(X_2 - Y_1)$$
$$Y_1 = X_2 \quad (6)$$

Reemplazamos 6 en (1)

$$X_1 + Y_1 = X_2 + Y_2$$
$$X_1 + Y_1 = Y_1 + Y_2$$
$$X_1 = Y_2 \quad (7)$$

Remplazamos $Y_2 = X_1$

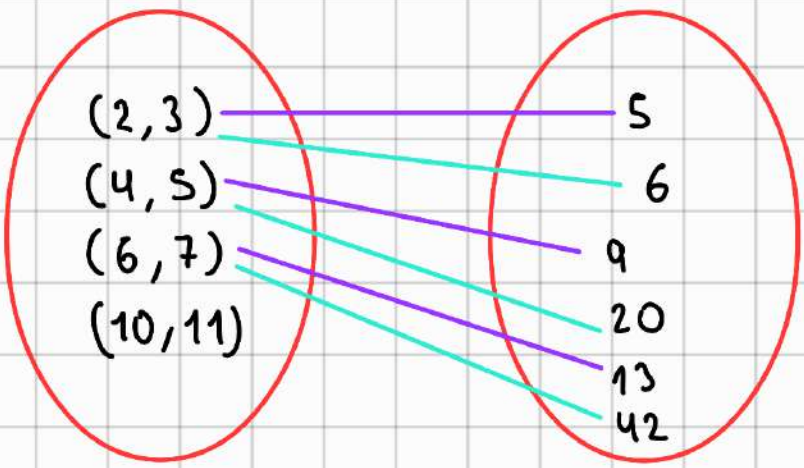
$$X_1 + Y_1 = X_2 + Y_2$$
$$X_1 + Y_1 = Y_1 + X_1$$

Tambien

$$X_1 , Y_1 = Y_1 \ X_1$$

∴ Si es una función de 1 a 1 ady ∧ mul

(b) ¿Será mul uno-uno? ¿Será sobre?



Como conocimiento tenemos $\forall a,b \in \mathbb{R}, ab \in \mathbb{R}$

$\forall a,b \in \mathbb{R}, a+b \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ Como sabemos esto adi (x_1, y_1) tiene imagen en los $\mathbb{R}$ tambien mul $(x_1, y_1) \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ nuestra imagen en $\mathbb{R}$ siempre tendran un antecedente

6. Se define $g : \mathbb{Z} \to B$ por $g(x) = |x| + 1$. Determinar sí g es uno-uno o sobre en cada uno de los siguientes casos.

(a) B es el conjunto $\mathbb{Z}$.

$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

g es uno a uno $\Leftrightarrow g(x_1) = g(x_1) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$g(x_1) = g(x_2)$$
$$|x_1| + 1 = |x_2| + 1 \quad // (\ )^2$$
$$|x_1|^2 = |x_2|^2$$
$$x_1^2 = x_2^2$$
$$x_1^2 - x_2^2 = 0$$
$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$$
$$x_1 - x_2 = 0 \quad \wedge \quad x_1 + x_2 = 0$$
$$x_1 = x_2 \qquad\qquad x_1 = -x_2$$

$\therefore$ Como tenemos dos resultados la Función no es inyectiva o uno a uno.

Analicemos

$|x| + 1 =$ no es inyectiva ya que por ejemplo:

$x = 2$ y $x = -2$ nos daria $3 \Rightarrow$ tenemos de $(-2, 3)$ $(2, 3)$ ya no es uno a uno.

(b) B es el conjunto $\mathbb{N}$.

$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$

es uno a uno $\Longleftrightarrow g(x_1) = g(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$g(x_1) = g(x_2)$$
$$|x_1| + 1 = |x_2| + 1$$

$$|x_1| = |x_2|$$

$$|x_1|^2 = |x_2|^2 \quad // (\ )^2$$

$$x_1^2 = x_2^2$$

$$x_1^2 - x_2^2 = 0$$

$$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$$

$$x_1 - x_2 = 0 \quad \wedge \quad x_1 + x_2 = 0$$

$$x_1 = x_2 \quad \wedge \quad x_1 = -x_2$$

Analizamos

$\therefore$ No es 1 a 1 ya que como en el anterior caso tenemos dos respuestas hace 2 relaciones de $(-3,4)$ $(3,4)$

7. Se define $f : A \to A$ por $f(x) = 3x + 5$. Determinar sí f es uno-uno o sobre en cada uno de los siguientes casos.

(a) A es el conjunto $\mathbb{Q}$.

Siendo que $x_1 != x_2$

$f(x_1), f(x_2) \to x_1 = x_2$

Considerando dos numeros racionales entonces

$\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ $[(a,b,c,d \in \mathbb{Z}, -\{c,d \neq 0\}]$

$$3\left(\frac{a}{b}\right) + 5 = 3\left(\frac{c}{d}\right) + 5$$

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$ $\therefore$ Es uno-uno //

* Sobreyectiva supongamos que:

$$y \in \mathbb{Q} \wedge x \in \mathbb{Q}$$

$$f(x) = y$$

$$x = \frac{y-6}{3}$$

es decir

$$\forall y \in \mathbb{Q} = x \in \mathbb{Q}$$

$\therefore$ Es sobre //

(b) A es el conjunto $\mathbb{N}$.

* Uno - Uno

Siendo que $x_1 = x_2$

$f(x_1) = f(x_2)$

$3x_1 + 5 = 3x_2 + 5 \quad // -5$

$3x_1 = 3x_2 \quad // \ 1/3$

$x_1 = x_2$

$\therefore$ Es uno-uno

* Sobreyectiva

Siendo que

$\exists x \in \mathbb{N} \rightarrow f(x) = y$

entonces

$x = \dfrac{y-5}{3}$

$f(x) = \cancel{3}\left(\dfrac{y-5}{\cancel{3}}\right) + 5 = y - 5 + 5 = y$

$y = y$

$\therefore$ Es sobre

8. Se define $h : A \rightarrow A$ por $h(x) = x^2 + 2$ determinar sí h es uno-uno o sobre en cada uno de los siguientes casos.

(a) A es el conjunto $\mathbb{Z}$.

* Uno - Uno

Siendo que:

$h(x_1) = h(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$

$x_1^2 + 2 = x_2^2 + 2 \rightarrow x_1^2 = x_2^2$

$\rightarrow$ No son iguales

$h(3) = 11$

$h(-3) = 11$

pero $3 \neq -3$

$\therefore$ No es uno - uno

* Sobreyectiva

Siendo que

$\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$

$h(x) = y$

$y \in \mathbb{Z}$ pero

$x^2 + 2 \geqslant 2$

$\therefore \nexists\, h(x) = 1$

$\therefore$ No es sobre

(b) A es el conjunto $\mathbb{N}$.

* Uno - Uno

$h(x_1) = h(x_2) \rightarrow x_1 = x_2$

$x_1^2 + 2 = x_2^2 + 2 \rightarrow x_1^2 = x_2^2$

dado que estamos en

$x_1 = x_2$

no hay negativos

$\therefore$ Es uno - uno

* Sobreyectiva

$\exists x \in h(x) = y$

$y \in \mathbb{N}$

$h(x) = x^2 + 2 = y$

$y = 2 \rightarrow x = 0$

$y = 3 \rightarrow x = 1$

$\therefore$ Es sobre

9. Se define $g : A \to A$ por $g(x) = 3x^2 + 14x - 51$. Determinar sí g es uno-uno o sobre en cada uno de los siguientes casos.

(a) A es el conjunto $\mathbb{Z}$.

$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

g es uno a uno $\Leftrightarrow g(x_1) = g(x_1) \Rightarrow x_1 = x_1$

$$3x_1^2 + 14x_1 - \cancel{81} = 3x_2^2 + 14x_2 - \cancel{81} \quad //(\;)^1$$
$$(3x_1^2 + 14x_1)' = (3x_2^2 + 14x_2)'$$
$$6x_1 + \cancel{14'} = 6x_2 + \cancel{14}$$
$$\cancel{6}x_1 = \cancel{6}x_2$$
$$x_1 = x_2$$

$\therefore$ Es uno a uno //

(b) A es el conjunto $\mathbb{R}$.

A es el conjunto $\mathbb{R}$

uno a uno $\Leftrightarrow g(x_1) - g(x_2) \Rightarrow x_1 - y_2$

$$3x^2 + 14x - 51 = 3x_1^2 + 14x_2 - 51$$
$$3x_1^2 + 14x = 3x_1^2 + 14x_2 \quad //(\;)'$$
$$(3x_1^2 + 14x)' = (3x_1^2 + 14x_2)'$$
$$6x_1 = 6x_2$$
$$\boxed{x_1 = x_2}$$

$\therefore$ Es uno a uno

10. Se define $f : A \to B$ por $f(x) = x^2 + 14x - 51$. Determinar sí f es uno-uno o sobre en cada uno de los siguientes casos.

(a) $A = \mathbb{N}$, $B = \{b \in \mathbb{Z} | \, b \geq -100\}$.

Uno - Uno

$X_1 = X_2 \to A$

$f(x_1), f(x_2) = x_1 \neq x_2$

$x_1^2 + 14x_1 - \cancel{51} = x_2^2 + 14x_2 - \cancel{51}$

Factorizando

$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 14) = 0$

$x_1 - x_2 = 0 \leftarrow$ Contradicción

$x_1 + x_2 = 14 \ngtr 0$

$\therefore$ Es uno - uno

Sobreyectiva

$b \in B$

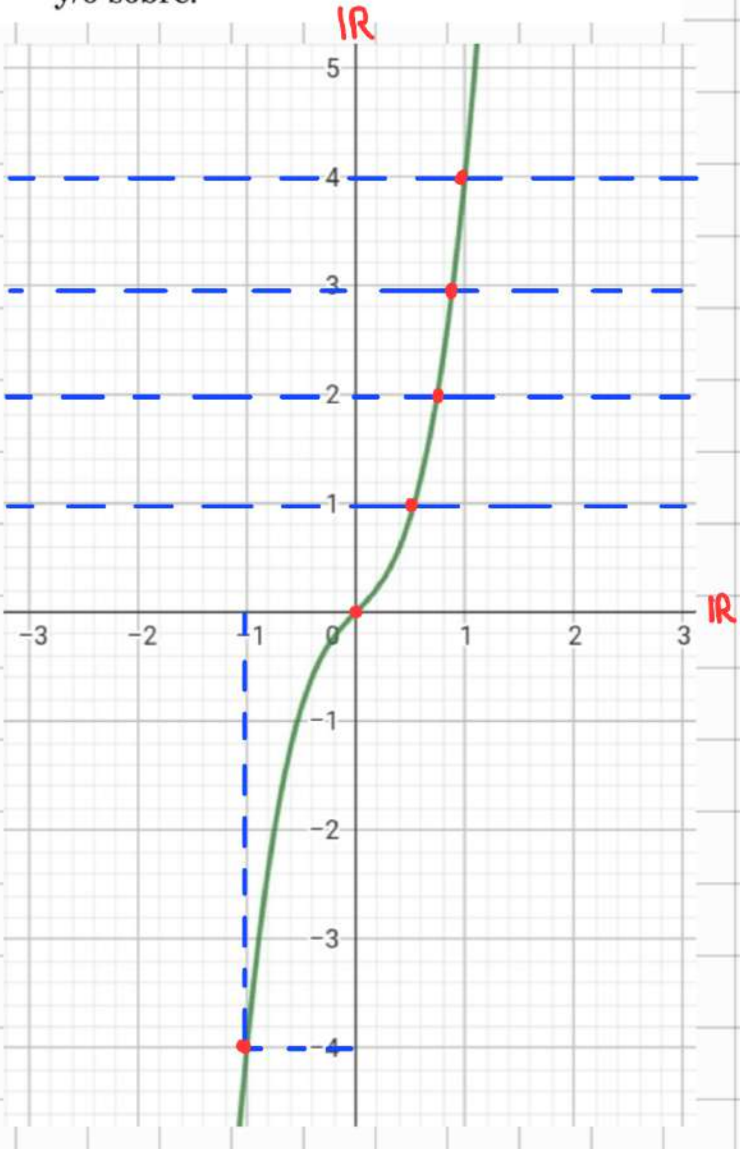
$x \in A \to f(x) = b$

$x^2 \leftarrow$ por propiedad de sobre

$\therefore$ No es sobre

13. Se define la función:

(a) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $g(x) = 3x^3 + x$. Gráficar g para determinar sí la función es uno-uno y/o sobre.

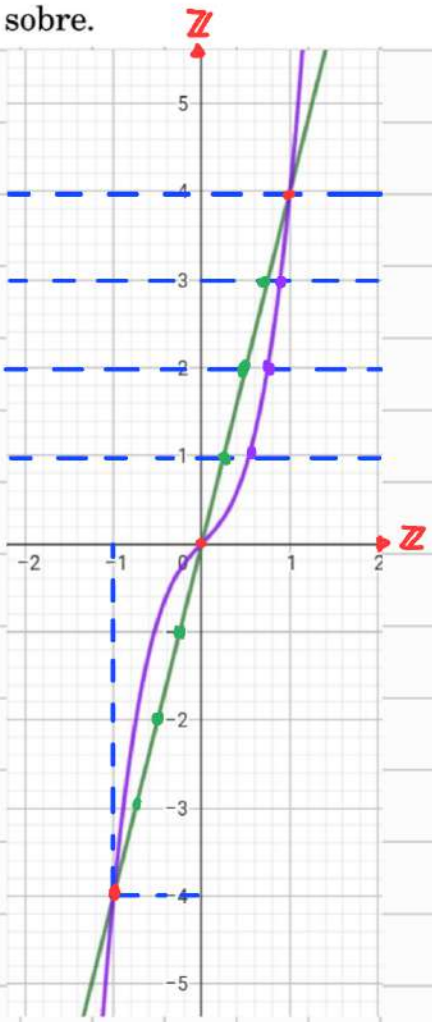


x	g(x)
-1	-4
0	0
1	4
2	26
3	84

* Como la linea $\longrightarrow$ pasa por un punto es inyectiva

* Como podemos ver en la tabla g(x) es sobre, ya que la funcion se extiende hacia el infinito en ambos lados pero no es uno a uno.

(b) $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ por $g(x) = 3x^3 + x$. Gráficar g para determinar sí la función es uno-uno y/o sobre.



$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

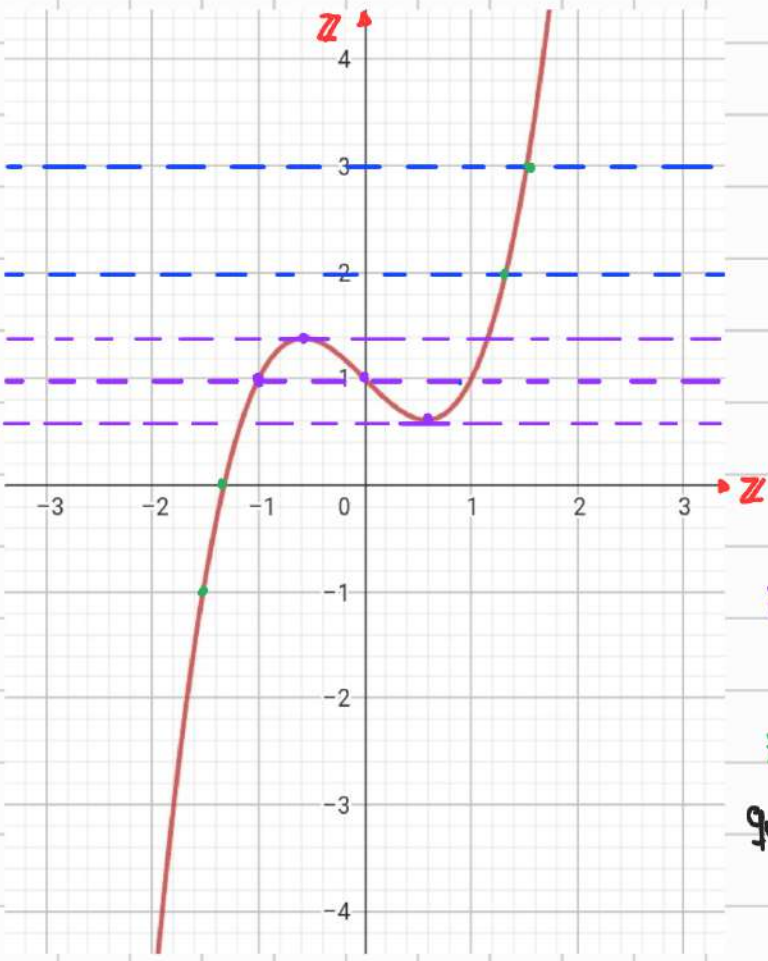
$g(x) = 3x + x$

x	$g(x)$
-1	-4
0	0
1	4

* → Inyectiva por que pasa por una linea

* La función $g(x)$ es sobre, ya que la función se extiende al ∞ pero no es uno-uno

(c) Repetir (b) para la función $g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definida por $g(x) = x^3 - x + 1$.



$g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$

$g(x) = x^3 - x + 1$

x	$g(x)$
-2	-5
-1	1
0	1
1	1
2	7
3	25

* → No es inyectiva ya que pasa por mas de un punto

* La función $g(x)$ es sobre, ya que la función se extiende al ∞

14. Determinar sí cada una de las siguientes reglas de correspondencia define una función uno-uno y/o sobre. Dar una demostración o exhibir un contraejemplo para justificar su respuesta.

(a) $f(n, m) = 2n + 3m$; $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Dem por contradicción:

Asumimos que hay dos pares distintos (n_1, m_1) y (n_2, m_2) en $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ que tienen el mismo resultado.

Entonces: $2n_1 + 3m_1 = 2n_2 + 3m_2$

$$2n_1 - 2n_2 + 3m_1 - 3m_2 = 0$$

$$m_2 = \frac{2n_1 - 2n_2 + 3m_1}{3}$$

Por tanto, se observa que no tendran el mismo resultado.

$\therefore$ Asi, la función es uno-uno.

Dem: Sobreyectiva

Dado un valor K en $\mathbb{N}$; $n = K/2$ y $m = 0$

$\Rightarrow f(n,m) = 2n + 3m = 2(K/2) + 3(0) = K$

Asi se tiene que, para cada valor de salir K en $\mathbb{N}$, existe al menos (n, m).

$\therefore$ Asi, la Función es sobreyectiva

(b) $f(n, m) = 2n + 3m$; $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

Sea (n_1, m_1), (m_1, m_2) en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ entonces:

$$2n_1 + 3m_1 = 2n_2 + 3m_2$$

$$2n_1 - 2n_2 = 3m_2 - 3m_1$$

$$2(n_1 - n_2) = 3(m_2 - m_1)$$

2 no divide a 3

$\therefore$ La Funcion es uno a uno $n_1 = n_2$ y $m_2 = m_1$

- Demostrar que es sobre:

para cada elemento $y \in \mathbb{Z}, \exists (n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid f(n,m) = y$

$y \in \mathbb{Z}$, $(n,m) = (y/2, (y - y/2)/3$

$$f(n,m) = 2n + 3m$$

$$= 2 \cdot \left(\frac{y}{2}\right) + 3\left(\frac{y - \frac{y}{2}}{3}\right) \Rightarrow y$$

$\therefore y \in \mathbb{Z}, \exists (n,m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, f(n,m) = y$ La función es sobreyectiva

(d) $f(n, m) = 89n + 246m$; $f : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

Sea $(n_1 + m_1)$ y $(n_2 + m_2)$ en $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \Rightarrow$

$$89n_1 + 246m_1 = 89n_2 + 246m_2$$

$$89n_1 - 89n_2 = 246m_2 - 246m_1$$

$$89(n_1 - n_2) = 246(m_2 - m_2)$$

$$(n1 = n2) = \frac{246(m2 - m_1)}{89} \Rightarrow 2.5m2 = 2.5m1$$

$$(n1 = n2) = (2.5m2 = 2.5m1)$$

$\therefore$ La Función es uno a uno

17. Sean A un conjunto y $f : A \to A$ uno función. Para $x, y \in A$, se define $x \sim y$ si $f(x) = f(y)$.

(a) Probar que $\sim$ define una relación de equivalencia sobre A.

Reflexividad:

$x \in A$, $x \sim x \Rightarrow f(x) = f(x)$

Por lo tanto $x \sim x$

$\therefore$ Si es reflexiva

Simetria

Sean $x, y \in A$, $x \sim y \Rightarrow f(x) = f(x)$

Por lo tanto $x \sim y$

$\therefore$ Si es simetria

Transitiva

$\forall x, y, z \in A$, $x \sim y \wedge y \sim z \Rightarrow f(x) = f(z)$

Por lo tanto $x \sim z$

$\therefore$ Si es transitiva

$\therefore$ Por lo tanto, $\sim$ define una relación de equivalencia sobre A.

(b) Para $A = \mathbb{R}$ y $f(x) = \lfloor x \rfloor$, encontrar las clases de equivalencia de $0, \frac{7}{5}, -\frac{3}{4}$.

1.- para $x = 0$

$[0] = 0$, $0 \sim x \ \forall x \in \mathbb{R} \mid f(x) = 0$

el conjunto de todos los numeros reales que tienen parte entera igual a 0

2: Para $x = \frac{7}{5}$

$$\left[\frac{7}{5}\right] = \{ y \in \mathbb{R} \mid f(y) = \lfloor y \rfloor = \frac{7}{5} \}$$

$\frac{7}{5}$ es 1, la clase de equivalencia sería numeros reales cuya parte entera es 1.

3: Para $x = -\frac{3}{4}$

$[-\frac{3}{4}] = \frac{3}{4}$, $-3/4 \sim x \ \forall x \in \mathbb{R} \mid f(x) = \frac{3}{4}$

$\frac{3}{4} \sim -\frac{3}{4}$

La clase de equivalencia de $-\frac{3}{4}$ es el conjunto $\{-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\}$

(c) Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ y $f = \{(1, 2), (2, 1), (3, 1), (4, 5), (5, 6), (6, 1)\}$. Encontrar todas las clases de equivalencia.

$x \sim y$ si $f(x) = f(y)$, $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

examinando cada elemento de A.

1. Clase de equivalencia de 1:

$[1] = \{1, 2, 6, 3\}$ ya que $f(1) = f(2) = f(6) = f(3)$

2. Clase de equivalencia de 2:

$[2] = \{1, 2, 6, 3\}$ por que $f(2) = f(1) = f(6) = f(3)$

3. Clase de equivalencia de 3:

$[3] = \{1, 2, 6, 3\}$ debido a que $f(3) = f(1) = f(6) = f(3)$

4. Clase de equivalencia de 4:

$[4] = \{4\}$ ya que $f(4)$ no coincide con $f(y)$ para ningún otro y en A.

5. Clase de equivalencia de 5:

$[5] = \{5\}$ ya que $f(5)$ no coincide con $f(y)$ para ningún otro y en A.

6. Clase de equivalencia de 6:

$[6] = \{1, 2, 6, 3\}$ ya que $f(6) = f(1) = f(6) = f(3)$

Inversas y composición

23. Si $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, encontrar la inversa de cada una de las siguientes funciones $f : A \to A$.

(a) $f = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5), (5, 1)\}$

$f = \{(1,2), (2,3), (3,4), (4,5), (5,1)\}$

$f^{-1} = \{(2,1), (3,2), (4,3), (5,4), (1,5)\}$

(b) $f = \{(1, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 1), (5, 5)\}$

$f = \{(1,2), (2,4), (3,3), (4,1), (5,5)\}$

$f^{-1} = \{(2,1), (4,2), (3,3), (1,4), (5,5)\}$

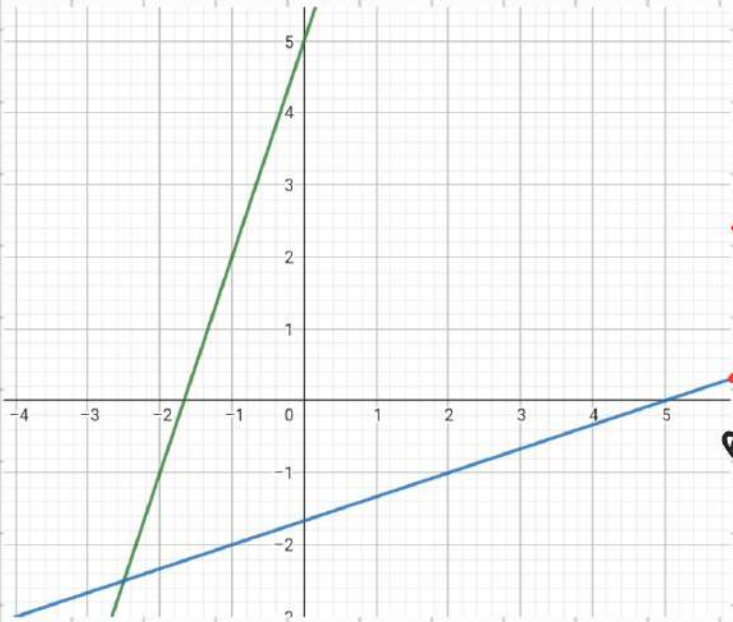
(c) $f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 5)\}$

$f = \{(1,1), (2,4), (3,3), (4,2), (5,5)\}$

$f^{-1} = \{(1,1), (4,2), (3,3), (2,4), (5,5)\}$

24. Gráficar cada una de las siguientes funciones y encontrar sus inversas. Además, especificar el dominio y el rango de cada inversa.

(a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = 3x + 5$.



— $f(x) = 3x+5$ — $f^{-1}(x) = \dfrac{x-5}{3}$

Para encontrar la función inversa

$f(x) = 3x + 5$ intercambiamos x e y

$x = 3y + 5$ // -5

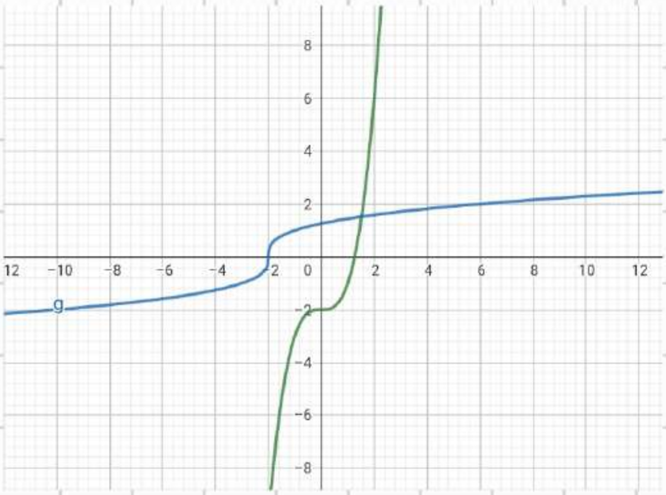
$x - 5 = 3y$ // $\frac{1}{3}$

$\therefore \dfrac{x-5}{3} = y$

$\therefore$ El dominio de $f(x)$ $\forall \mathbb{R}$ y el rango tambien es $\mathbb{R}$

$\therefore$ Para la inversa, el dominio de $f^{-1}(x)$ es tambien $\mathbb{R}$

(b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $f(x) = x^3 - 2$.



— $f(x) = x^2 - 2$

— $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+2}$

Para encontrar la función inversa

$f(x) = x^3 - 2$

$y = x^3 - 2 \quad // +2$

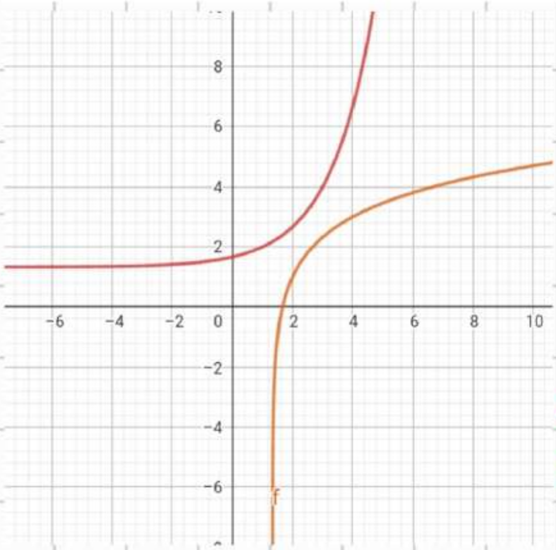
$y + 2 = x^3 \quad // \sqrt[3]{\ }$

$\therefore \sqrt[3]{y+2} = x$

$\therefore$ El dominio de $f(x)$ $\forall \mathbb{R}$, ya que la función es un polinomio. El rango tambien $\mathbb{R}$

$\therefore$ Para la inversa, el dominio de $f^{-1}(x)$ es tambien $\mathbb{R}$ debido a la raiz cubica

(c) $\beta : (\frac{4}{3}, \infty) \to \mathbb{R}$ con $\beta(x) = \log_2(3x - 4)$.



Para encontrar la función inversa

— $f(x) = \log_2 (3x-4)$

— $f^{-1}(x) = \dfrac{2^x + 4}{3}$

$x = \log_2 (3y - 4)$

$2^x = 3y - 4$

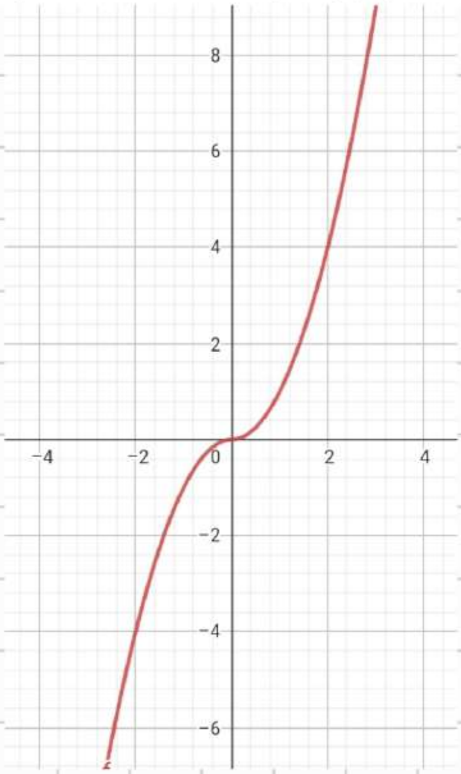
$2^x + 4 = 3y$

$\therefore \dfrac{2^x + 4}{3} = y$

$\therefore$ El dominio de $\beta(x)$ es $(\frac{4}{3}, \infty)$, y el rango $\mathbb{R}$

$\therefore$ Para la inversa, el dominio de $\beta^{-1}(x)$ es $\mathbb{R}$ y el rango $(4/3, \infty)$

(d) $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dado por $g(x) = x|x|$.



Para encontrar la función inversa

es una función parabolica con un vertice en $(0,0)$ esta función no es inyectiva por lo que no tiene una inversa unica

$x = y|y|$

obtenemos casos

$y \geq 0 : x = y^2$

$y < 0 : x = -y^2$

$\therefore$ La funcion $g(x) = x|x|$ no tiene una inversa unica, su dominio es $\mathbb{R}$ mientras que su rango es $[0, \infty)$

25. Mostrar que cada una de las siguientes funciones $f: A \to \mathbb{R}$ es uno-uno. Encontrar el rango de cada función y una adecuada inversa.

(a) $A = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 4\}$, $f(x) = 1 + \frac{1}{x-4}$

uno a uno $\Leftrightarrow \forall x' \in A\, x' \in A\ \forall x'' \in A;\ f(x') = f(x'') \Rightarrow x$

Rango

$(-\infty, 4) \cup (4, +30)$

$\mathbb{R} - \{4\}$

$f(x_1) = f(x_2)$

$1 + \frac{1}{x_1 - 4} = 1 + \frac{1}{x_2 - 4}$

$\frac{1}{x_1 - 4} = \frac{1}{x_2 - 4}$

$x_2 - 4 = x_1 - 4$

$x_2 = x_1$

$\therefore$ Es uno a uno o es inyectiva

Inversa

$y = 1 + \frac{1}{x-4}$

$x = 1 + \frac{1}{y-4}$

$x - 1 = \frac{1}{y-4}$

$(x-1)(y-4) = 1$

$xy - 4x - y + 4 = 1$

$xy - 4x - x + 3 = 0$

(b) $A = \{x \in \mathbb{R} | x \neq -1\}$, $f(x) = 5 - \frac{1}{1+x}$

Rango

$(-\infty, -1) \cup (-1, +\infty) \Rightarrow \mathbb{R} - \{-1\}$

uno a uno $\Leftrightarrow \forall x' \in A\, x^1 \in A\ \forall x^2 \in A;\ f(x') = f(x^2) \Rightarrow x$

$f(x^1) = f(x^2)$

$\cancel{5} - \frac{1}{1+x_1} = \cancel{5} - \frac{1}{1+x_2}$

$-(1+x_2) = -(1+x_1)$

$\cancel{-1} - x_2 = \cancel{-1} - x_1$

$-x_2 = -x_1 \quad //.-1$

$x_2 = x_2$

$\therefore$ Es inyectiva

Inversa

$f(x) = 5 - \frac{1}{1+x}$

$y = 5 - \frac{1}{1+x} \Rightarrow y - 5 = \frac{1}{1+x}$

$\frac{1}{y-5} = 1 + x \Rightarrow x = \frac{1}{y-5} - 1$

$g(y) = \frac{1}{(y-5)} - 1 \quad \wedge \quad y \neq 5$

(c) $A = \{x \in \mathbb{R} | \, x \neq -\frac{1}{2}\}$, $f(x) = \dfrac{3x}{2x+1}$

Rango

$$(-\infty, -\tfrac{1}{2}) \cup (-\tfrac{1}{2}, +\infty) \Rightarrow \mathbb{R} - \{-\tfrac{1}{2}\}$$

Inyectiva

Es inyectiva $\iff \forall x_1, 2x \in A : f(x_2) = f(x_1) \Rightarrow x_1 = x_2$

$$f(x_1) = f(x_2)$$

$$\frac{3x_1}{2x_1+1} = \frac{3x_2}{2x_2+1}$$

$$(2x_2+1)(3x_1) = 3x_2(2x_1+1)$$

$$6x_2x_1 + 3x_1 = 6x_2x_1 + 3x_2$$

$$\cancel{3}(2x_1x_1 + x_1) = \cancel{3}(2x_2x_1 + x_2)$$

$$2x_1x_2 + x_1 = 2x_1x_2 + x_2$$

$$\cancel{2x_1x_2} + x_1 - \cancel{2x_1x_2} = x_2$$

$$x_1 = x_2$$

$\therefore$ Es inyectiva

Inversa

$$f(x) = \frac{3x}{2x+1}$$

$$y = \frac{3x}{2x+1} \qquad x = \frac{3y}{2y+1}$$

$$y(2y+1) = 3x$$

$$2xy + x = 3x$$

$$2xy - 3y = -x$$

$$y(2x-3) = -x$$

$$y = -\frac{x}{2x-3} \Rightarrow y = \frac{x}{3-2x}$$

26. Se define $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$ por

$$f(x) = \begin{cases} 2|x| & \text{, sí } x < 0 \\ 2x+1 & \text{, sí } x \geq 0 \end{cases}.$$

(a) Mostrar que f tiene una inversa.

Para $2|x|$

si $f(x) = f(y) \Rightarrow \cancel{2}|x| = \cancel{2}|y| \quad // \; \frac{1}{2}$

$$|x| = |y|$$

Por lo tanto, si $x \neq y$, entonces $|x| \neq |y|$

$$\therefore x = y$$

Para $2x+1$

$$x, y \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x) = f(y)$$

$$2x+1 = 2y+1$$

$$2x = 2y$$

$$x = y$$

si $f(x) = f(y)$, entonces $x = y$ demuestra que f es inyectiva

Sobre:

$$n \geqslant 1$$

$$\frac{(n-1)}{2} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2 \cdot \frac{(n-1)}{2+1} = n$$

Para cada numero natural $n \geqslant 1$, existe un número entero x tal que $2x+1 = n$. f es sobre

$\therefore$ La función f es inyectiva y sobre. Por lo tanto, tiene una inversa

(b) Encontrar $f^{-1}(2586)$.

Dado que f es inyectiva

$f(x) = 2x + 1$

$2x + 1 = 2586$

$2x = 2585$

$x = 1292$

$\therefore$ Obtenemos $x = 1292$. Por lo tanto $f^{-1}(2586) = 1292$

32. Sean $S = \{1,2,3,4,5\}$ y las funciones $f, g, h : S \to S$ definidas por

$$f = \{(1,2),(2,1),(3,4),(4,5),(5,3)\},$$

$$g = \{(1,3),(2,5),(3,1),(4,2),(5,4)\},$$

$$h = \{(1,2),(2,2),(3,4),(4,3),(5,1)\}.$$

$f : S \to S$ donde $f(x) = f(x)$

$f(1) = 2$, $f(2) = 1$, $f(3) = 4$, $f(4) = 5$, $f(5) = 3$

$g : S \to S$ donde $g(x) = g(x)$

$g(1) = 3$, $g(2) = 5$, $g(3) = 1$, $g(4) = 2$, $g(5) = 4$

$h : S \to S$ donde $h(x) = h(x)$

$h(1) = 2$, $h(2) = 2$, $h(3) = 4$, $h(4) = 3$, $h(5) = 1$

- Las f: $g \wedge h$, cada elemento del dominio tiene una sola imagen.
- Las f: $f \wedge h$ son inyectivas, si $f(a) = f(b) \Rightarrow a = b$

33. Sean los conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 2\}$ y $B = \{x \in \mathbb{R} | x \neq 1\}$, se definen $f : A \to B$ y $g : B \to A$ por

$$f(x) = \frac{x}{x-2}, \qquad g(x) = \frac{2x}{x-1}$$

(a) Encontrar $(f \circ g)(x)$.

$g(x) = \dfrac{2x}{(x-1)}$

$(f \circ g)(x) = f(g(x))$

$= (g(x)) / (g(x) - 2)$

$= (2x/(x-1)) / ((2x/(x-1)) - 2)$

$= (2x) / (2x - x + 1)$

$= (2x) / (x + 1)$

$\therefore$ Por lo tanto $(f \circ g)(x) = (2x)/(x+1)$

(b) ¿Son f y g inversas? Explicar.

$(f \circ g)(x)$

$(f \circ g)(x) = (2x)/(x+1) \neq x$ para todo $x \neq 2$

Verificamos $(g \circ f)(x)$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

$$= g\left(\frac{x}{x-2}\right)$$

$$= \frac{2\left(\frac{x}{x-2}\right)}{\left(\frac{x}{x-2}\right)-1}$$

$$= \frac{2x}{x-2(x-2)}$$

$$= \frac{2x}{x-2x+4}$$

$$= \frac{2x}{-x+4}$$

$\neq x$ para todo $x \neq 4$

Como podemos ver, ni $(f \circ g)(x)$ ni $(g \circ f)(x)$ son iguales a x $\forall x$ en sus dominios

35. Demostrar que

(a) la composición de funciones uno-uno es otra función uno-uno.

Una función $h: X \to Y$ es invectiva si para cualquiera $x_1, x_2 \in X$, si $h(x_1) = h(x_2)$, entonces $x_1 = x_2$.

$$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \quad x_1, x_2 \in A$$

$$g(f(x_1)) = (g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$$

f es inyectiva $\quad f(x_1) = f(x_2)$

$$x_1 = x_2$$

Por lo tanto, si $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$

Esto demuestra que la composicion $g \circ f$ es inyectiva

37. Se define $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ por

$$f(n) = \begin{cases} n-2 & \text{, sí } n \geq 1000, \\ f(f(n+4)) & \text{, sí } n < 1000. \end{cases}$$

(a) Encontrar el valor de $f(1000)$, $f(999)$, $f(998)$, $f(997)$ y $f(996)$.

$f(n) = \{n-2, \text{ si } n \geq 1000 \{f\{f(n+4))\}, \text{ si } n < 1000$

$f(10000) = 1000 - 2 = 998$

$f(999) = f(f(999+4)) = f(f(1003)) = f(1001) = 1001-2 = 999$
$f(998) = f(f(998+4)) = f(f(1002)) = f(1000) = 998$
$f(997) = f(f(997+4)) = f(f(1001)) = f(999) = 999$
$f(996) = f(f(996+4)) = f(f(1000)) = f(998) = 998$

(b) Conjetura una formula para $f(n)$.

- Para $n \geq 100$, $f(n) = n-2$
- Para $n < 1000$, $f(n)$ tiene un comportamiento periodico con periodo 4

$f(996) = f(998) = 998$ $f(997) = f(999) = 999$ $f(998) = f(1000)$
$= 998$ $f(999) = f(1001) = 999$

una posible formula para $f(n)$: de conjetura

$$f(n) = \begin{cases} n-2, & \text{si } n \geq 1000 \\ \{n-2+4K\}, & \text{si } n < 1000 \end{cases}$$

Donde K es el entero mas grande tal que $n-2+4K < 100$

(c) Conjetura el rango de f.

- Para $n \geq 1000$, $f(n) = n-2$, Rango incluye $\mathbb{Z} \geq 998$
- Para $n < 1000$, $f(n)$ toma los valores 998 y 999

Conjetura de f es

Rango $(f) = \{998, 999, 1000, 1001, 1002, \ldots\}$

- El rango de f es el conjunto de los numeros enteros a partir 998.

39. A primera vista, los cuadrados perfectos -1, 4, 9, 16, 25, 36, …- parece ser un subconjunto de $\mathbb{N}$ muy disperso. Sin embargo, Galileo afirmó que hay tantos cuadrados perfectos como numeros naturales.

¿Cuál pudo ser el razonamiento que lo llevo a esta afirmación?

1: Cada numero natural n, cuando se eleva al cuadrado, produce un cuadrado perfecto n^2.

2: Esta correspondencia es biyectiva, es decir, a cada numero natural le corresponde un unico cuadradado perfecto y viceversa.

3: Dado que los numeros naturales y los cuadrados perfecto están en correspondencia biyectiva, deben tener la misma cardinilidad (el mismo "tamaño" o "cardinilidad" de elementos).

41. Suponga que $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ es una función sobre y uno-uno

(a) Probar que la función $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N} \times \mathbb{Z}$ definida por $g(m,n) = (m, f(n))$es uno-uno y sobre.

Inyectividad

$$g(m_1, n_1) = g(m_2, n_2) \Rightarrow (m_1, n_1) = (m_2, n_2)$$

$$g(m_1, n_1) = g(m_2, n_2) \Rightarrow (m_1, f(n_1)) = (m_2, f(n_2))$$

Para que dos pares ordenados sean iguales,

$$m_1 = m_2$$
$$f(n_1) = f(n_2)$$

implica que $n_1 = n_2 \Rightarrow m_1 = m_2$ y $n_1 = n_2$

$$(m_1, n_1) = (m_2, n_2)$$

$\therefore$ Por tanto g es inyectiva

Sobreyectividad

g es sobre

$(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \; \exists (m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : g(m,n) = (a,b)$

Sea $(a,b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \Rightarrow$ necesitamos $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tal que:

$$g(m,n) = (a,b)$$

$$(m, f(n)) = (a,b)$$

Tenemos dos condiciones

$$m = a \quad \text{y} \quad f(n) = b$$

Dado que f es sobre $\forall b \in \mathbb{Z}, \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $f(n) = b$ podemos elegir el n y poner $m = a$

43. Suponga que S es un conjunto y que para todo $A, B \in \mathcal{P}(S)$, definimos $A \preceq B$ como $|A| \leq |B|$. ¿Es esta relación un orden parcial sobre $\mathcal{P}(S)$? Explica

Reflexividad

$\forall A \in P(S)$, se cumple $A \preceq A$ $\quad |A| \leq |A|$

- $|A| \leq |A|$ es verdadero por que cualquier numero es menos o igual a si mismo

$\therefore$ La relacion $\preceq$ es reflexiva

Antisimetría

$\forall A, B \in P(S)$, si $A \preceq B$ y $B \preceq A$, entonces $A = B$

$|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |A| \Rightarrow A = B$

- Sin embargo, $|A| = |B|$ no implica $A = B$

Ejemplo

$A = \{1\}$ y $B = \{2\} \Rightarrow |A| = |B| = 1$, pero $A \neq B$

∴ La relación $\preceq$ no es antisimetrica

Transitividad

$\forall A, B, C \in P(S)$, $A \preceq B$ y $B \preceq C \Rightarrow A \preceq C$

$|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |C|$

$|A| \leq |C|$

- Si $|A| \leq |B|$ y $|B| \leq |C| \Rightarrow |A| \leq |C|$ propiedad transitiva

∴ La relación $\preceq$ es transitiva.

47. Probar que $\mathbb{R}$ y el intervalo (a, b) (con $a < b$) tienen la misma cardinalidad.

Inyectividad

$f : (a, b) \to R$

$f(x) = x - r1$

$x1 = x2$

$f(x1) = x1 - r1 \neq x2 - r1 = f(x2)$

Sobreyectividad

$$g : R \to (a,b)$$
$$g(x) = y + r1$$
$$g(x) = y + r2 \in (a,b)$$

Conclusión

Como hemos demostrado que la función f es inyectiva y la función g es suprayectiva, entonces existe un biyección entre los conjuntos R y (a, b).

51. Sean S un conjunto infinito, y x un elemento que no esta en S. Probar que S y $S \cup \{x\}$ son conjuntos con la misma cardinalidad.

Inyectiva

$$f : S \to S \cup \{x\} \text{ tal que: } f(s) = s$$

Para cualquier par de elementos $s1$ y $s2 \subset S$

$$s1 \neq s2 \Rightarrow f(s1) = s1 \neq s2 = f(s2)$$

Sobreyectividad

$$S \cup \{x\}$$
$$f(y) = y$$

Si y es el elemento x, entonces podemos asignarlo al elemento y en S que no esta en S:

$$f(x) = y$$

∴ Esta función es suprayectiva porque $S \cup \{x\}$, existe un elemento s en S tal que $f(s) = y$

Conclusión

Hemos demostrado que la función f es inyectiva y sobreyectiva, entonces existe una biyección entre los conjuntos S y $S \cup \{x\}$

- significa que los dos conjuntos tiene la misma cardinalidad

53. Si S es el conjunto de todos los números reales en el intervalo $(0, 1)$ cuyas expansiones decimales muestren sólo ceros y unos. Probar que S es no-numerable.

Definición del conjuntos

$$0.a_1 a_2 a_3 a_4 \ldots$$

donde $a_i \in \{0, 1\}$ para cada i

Suposición de que S es numerable

$$s_1, s_2, s_3, s_4, \ldots$$

Construimos el numero usando el argumento diagonal de Cantor

$$\begin{array}{lllll}
s_1 = 0.a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \ldots \\
s_2 = 0.a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \ldots \\
s_3 = 0.a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \ldots \\
s_4 = 0.a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & \ldots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{array}$$

t no esta en la lista

t diferente de s_1 en el primer digito $(b_1 \neq a_{11})$.
t diferente de s_2 en el segundo digito $(b_2 \neq a_{22})$.
" " " S_3 en el tercer digito $(b_3 \neq a_{33})$.

y asucesivamente