Ejm.

En A = {ϕ, {a}, {a, b}, {a, b, c}, {a, b, c, d}}, consideramos la relación de inclusión definida por

$$X R Y \Leftrightarrow X \subset Y$$

a) Demuestra que R es una relación de orden amplio y total.

b) Realiza el diagrama de Hasse.

Sol. a) R es de O. amplio $\Leftrightarrow$ ref.
Antisim.
Trans.

Reflexiva. $X R X \Leftrightarrow X \subset X$ lo cual es V.

Antisimétrica. $X R Y \wedge Y R X \Leftrightarrow X \subset Y \wedge Y \subset X$

[def. = conjuntos $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$]

$\Leftrightarrow X = Y$

$\Leftrightarrow$ R es antisim.

Transitividad.

$$\underline{X R Y \wedge Y R Z} \Leftrightarrow X \subset Y \wedge Y \subset Z$$

$$\Leftrightarrow X \subset Z$$

$$\Leftrightarrow \underline{X R Z}$$

$\Leftrightarrow$ R es transitiva

$\therefore$ R es de orden amplio.

Orden parcial. $\exists X, \exists Y \in A : X \not R Y \wedge Y \not R X$

$$A = \{ \overset{X}{\phi}, \overset{Y}{\{a\}} \{a,b\} \{a,b,c\} \{a,b,c,d\}\}$$

$$\underline{X \not R Y \wedge Y \not R X} \Rightarrow \underset{F}{\phi \not\subset \{a\}} \underset{\underset{F}{\wedge}}{\wedge} \underset{V}{\{a\} \not\subset \phi}$$

$\therefore$ no es cierto que $(\exists x, \exists y \in A : x \not R y \wedge y \not R x)$

entonces R no es de orden parcial.

Orden Total. $\forall\, x \neq y : xRy \vee yRx$

En $A = \{\emptyset, \{a\}\ \{a,b\}\ \{a,b,c\}\ \{a,b,c,d\}\}$

sean $\emptyset$ y $\{a\}$ de manera que

$$\emptyset\, R\, \{a\} \quad \vee \quad \{a\}\, R\, \emptyset$$

$$\emptyset \subset \{a\} \quad \vee \quad \{a\} \subset \emptyset$$

$$V \quad \vee \quad F$$

$$V$$

$\therefore\ \forall\, x, y \in A$ con $x \neq y$, $\ xRy \vee yRx$

Así R es de orden total.

b) $A = \{\emptyset, \{a\}\ \{a,b\}\ \{a,b,c\}\ \{a,b,c,d\}\}$

Su diagrama de Hasse es:

$$\emptyset \longrightarrow \{a\} \longrightarrow \{a,b\} \longrightarrow \{a,b,c\} \longrightarrow \{a,b,c,d\}$$

ORDEN ESTRICTO Sea $R \subset A^2$

R es de orden estricto $\Leftrightarrow$ R es arreflexiva, asimétrica y transitiva.

R Arreflexiva $\Leftrightarrow \forall x \in A : x \not R x$

R. asimétrica $\Leftrightarrow \forall.\ xRy \Rightarrow y \not R x$

R transitiva $\Leftrightarrow \forall\ xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

Una relación de orden estricto puede ser total o parcial.

Ejm.

1. La relación "menor que" en $\mathbb{R}$ es de orden estricto y total.

Sol. Veamos si cumple las propiedades.

$\boxed{\begin{array}{l} R \subset \mathbb{R}^2 \\ x R y \iff x < y \end{array}}$

Arreflexiva. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \not R x \iff x \not< x$ es V.

Así R es arreflexiva.

Asimetría $\forall\ x R y \iff x < y$

$\iff y \not< x$

$\iff y \not R x$

$\iff R$ es asimétrica

Transitiva $\forall\ x R y \wedge y R z \iff x < y \wedge y < z$

$\iff x < z$

$\iff x R z$

$\iff R$ es trans.

$\therefore$ R es de orden estricto.

R de orden total $\forall x \neq y \Rightarrow x R y \vee y R x$

Sea $x \neq y \Rightarrow x < y \vee x > y$ ✓

$\Rightarrow x < y \vee y < x$ ✓

$\Rightarrow x R y \vee y R x$

$\Rightarrow R$ es de O. total.

ELEMENTOS DISTINGUIDOS DE UN CONJUNTO ORDENADO

Sea A un conjunto ordenado con una relación de orden $\prec$

donde $\prec$ es la relación de preceder

Es decir. $a \prec b \Leftrightarrow a$ precede a b

donde $\prec$ es reflexiva, Antisimétrica, Transitiva y lineal.

Reflexiva. $\forall a \in A \Rightarrow a \prec a$

Antisim. $a \prec b \wedge b \prec a \Rightarrow a = b$

Trans. $a \prec b \wedge b \prec c \Rightarrow a \prec c$

linealidad $a \neq b \Rightarrow a \prec b \vee b \prec a$

Primer elemento Un elemento $a \in A$ se llama primer elemento sii precede a todos los demás.

Es decir. $a \in A$ es primer elem. $\Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow a \prec x$

Último elemento El elemento $b \in A$. se llama último elemento sii todo elemento de A precede a b.

Es decir, $b \in A$ es último elem. $\Leftrightarrow \forall x \in A \Rightarrow x \prec b$

Elementos minimales El elemento m de A es un elem. minimal sii no existe un elemento distinto que lo preceda

Es decir, $m \in A$ es minimal $\Leftrightarrow \forall x \in A : x \prec m \Rightarrow m = x$

Elementos maximales El elemento M de A es un elem. maximal sii no existe un elemento distinto que lo siga

Es decir, $m \in A$ es maximal $\Longleftrightarrow \forall x \in A: m \prec x \Rightarrow x = m$