

Funciones inversas

$$\text{Sea } A = \{a, b, c\} \quad B = \{1, 2, 3\}$$

$$\text{y } f = \{(a, 1)(b, 2)(c, 1)\}$$

de donde $f^{-1} = \{(1, a)(2, b)(1, c)\}$ no es función de B en A

porque para 3 no existe $f(3)$ y además $(1, a)$ y $(1, c)$.

Pero si $f: A \rightarrow B$ dado por $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{a, b, c\}$

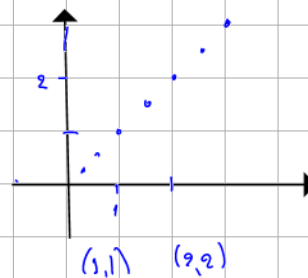
$f = \{(1, a)(2, c)(3, b)\}$ es una función, la relación inversa

$f^{-1} = \{(a, 1)(c, 2)(b, 3)\}$ es una función de B en A , llamada

función inversa de f

$$f^{-1} \circ f = \{(1, 1)(2, 2)(3, 3)\} = Id_A$$

$$\text{y } f \circ f^{-1} = \{(a, a)(b, b)(c, c)\} = Id_B$$



FUNCIÓN IDENTIDAD La función que asigna a cada elemento de A el mismo elemento, se llama función identidad en A . Es decir,

$$I_A : A \rightarrow A \quad \text{tal que } I_A(x) = x$$

i_A

PROPIEDADES

1:) Sea $f: A \rightarrow B$ una función cualquiera, y sean $I_A : A \rightarrow A$ y $I_B : B \rightarrow B$ las funciones identidad en A y en B , respectivamente. Entonces se tiene

Es decir,

$$I_B \circ f = f \quad \text{y} \quad f \circ I_A = f$$

$$(I_B \circ f)(x) = I_B(f(x)) = f(x)$$

$$(f \circ I_A)(x) = f(I_A(x)) = f(x)$$

$$I_B(f(x)) = f(x)$$

2:) Sea $f: A \rightarrow B$ una función invertible, tal que $f^{-1}: B \rightarrow A$, entonces

$$f^{-1} \circ f = I_A \quad \text{y} \quad f \circ f^{-1} = I_B$$

Si $B = A$, resulta $f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = I_A$

$$f^{-1} \circ f: A \rightarrow A$$

$$f \circ f^{-1}: B \rightarrow B$$

3:) Sea $f: A \rightarrow B$ y $g: B \rightarrow C$ funciones invertibles. Entonces

$$(f \circ g)^{-1} = g^{-1} \circ f^{-1}$$

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

$$g \circ f: A \rightarrow C$$

$$(g \circ f)^{-1}: C \rightarrow A$$

$$g^{-1}: C \rightarrow B \quad \text{y} \quad f^{-1}: B \rightarrow A$$

$$\underline{f^{-1} \circ g^{-1}}: C \rightarrow A$$

Propiedad.

Una función admite inversa si y sólo si es biyectiva

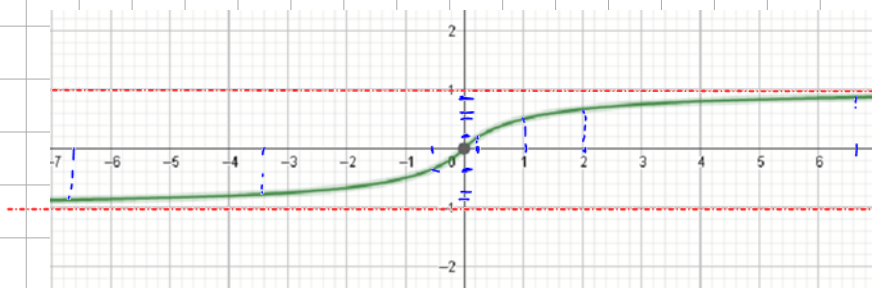
Si $f: A \rightarrow B$ es biyectiva, entonces la función $f^{-1}: B \rightarrow A$, es única y biyectiva. f^{-1} se llama inversa de f .

Ejm. Probar que $f: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ definida por

$$f(x) = \frac{x}{1+|x|} \quad \text{admite inversa.}$$

$\exists f^{-1}?$

$$\frac{1-1}{1+1}$$



$$\text{Im}(f) = \text{Cd}(f) \\ (-1, 1) = (-1, 1)$$

Veamos si f es inyectiva.

$$f(a) = f(b)$$

$$\frac{a}{1+|a|} = \frac{b}{1+|b|}$$

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

$$a + a|b| = b + b|a|$$

def. $|x| = x \cdot \text{sgn}(x)$


$$a + a \cdot \cancel{b \text{sgn}(b)} = b + a \cdot \cancel{b \text{sgn}(a)}, \text{ con } \text{sgn}(a) = \text{sgn}(b)$$

$$a = b$$

$\therefore f$ es inyectiva.

f sobreyectiva.

$$\forall y \in (-1, 1) \exists x \in \mathbb{R} : f(x) = y$$

$$\text{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$


$$y = \frac{x}{1+|x|} \Rightarrow y + y \cdot |x| = x, \text{ con } \text{sgn}(x) = \text{sgn}(y)$$

$$y + y \cdot x \cdot \text{sgn}(x) = x$$

$$y + y \cdot x \cdot \text{sgn}(y) = x$$

$$y + x \cdot |y| = x$$

$$x|y| - x = -y$$

$$x(|y| - 1) = -y$$

$$x = \frac{-y}{|y|-1} = \frac{-y}{-(1-|y|)}$$

$$x = \frac{y}{1-|y|} \in \mathbb{R}$$

Así $\exists x = \frac{y}{1-|y|} \in \mathbb{R}$. t.q.

$$\frac{x}{|x|}$$

$$f(x) = f\left(\frac{y}{1-|y|}\right) = \frac{\frac{y}{1-|y|}}{1 + \left|\frac{y}{1-|y|}\right|}$$

$$= \frac{\frac{y}{1-|y|}}{1 + \frac{|y|}{1-|y|}} = \frac{\frac{y}{\cancel{1-|y|}}}{\frac{\cancel{1-|y|} + |y|}{\cancel{1-|y|}}} = \frac{y}{1}$$

$$= y$$

$\therefore f$ es sobreyectiva

$$y \in (-1, 1)$$

$$\underline{1-|y|} > 0 \Leftrightarrow |1-|y|| > 0$$

Así f es biyectiva ✓

entonces admite inversa

$$\begin{array}{c} (\sqrt{x})^2 = (\cancel{x})^2 \\ \uparrow \\ \sqrt{x^2} = \textcircled{x} \end{array}$$

$$\text{con } \overbrace{\text{sgn}(x) = \text{sgn}(y)}$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$|x| = x \cdot \text{sgn}(x)$$

Consecuencia.

La función $f: A \rightarrow B$ es inyectiva si y sólo si existe $f^{-1}: B \rightarrow A$ tal que

$$f^{-1} \circ f = f \circ f^{-1} = \text{Id.}$$

Ejm. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida por

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}, \text{ determina si existe } f^{-1}, \text{ si existe calcula } f^{-1}.$$

Sol.

Veamos si f es inyectiva

Sea $f(a) = f(b)$

$$\frac{a+1}{a-2} = \frac{b+1}{b-2}$$

$$(a+1)(b-2) = (b+1)(a-2)$$

$$\cancel{ab} - 2a + b - \cancel{2} = \cancel{ab} - 2b + a - \cancel{2}$$

$$-2a - a = -2b - b$$

$$-3a = -3b \Rightarrow a = b \Rightarrow f \text{ es 1-1.}$$

Así existe $f^{-1}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Calculamos f^{-1}

$$f(x) = \frac{x+1}{x-2}$$

$$y = \frac{x+1}{x-2}$$

$$\text{c.v.: } x \leftrightarrow y$$

$$x = \frac{y+1}{y-2}$$

despejamos "y": $xy - 2x = y + 1$

$$xy - y = 2x + 1 \Rightarrow$$

$$y(x-1) = 2x+1$$

$$y = \frac{2x+1}{x-1}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{2x+1}{x-1}$$

$$f^{-1} \swarrow (0) = -1$$

Verificar. $(f \circ f^{-1})(x) = x$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x))$$

$$= f\left(\frac{2x+1}{x-1}\right)$$

$$= \frac{\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) + 1}{\left(\frac{2x+1}{x-1}\right) - 2}$$

$$\frac{2x+1+x-1}{x-1} = \frac{3x}{x-1}$$

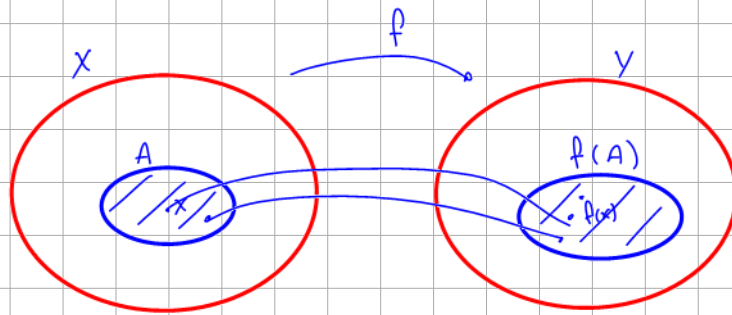
$$= \frac{\frac{3x}{x-1}}{\frac{2x+1-2(x-1)}{x-1}} = \frac{3x}{2x+1-2x+2} = \frac{3x}{3}$$

$$= \frac{3x}{3}$$

$$= x$$

Imágenes de subconjuntos del dominio

Sean $f: X \rightarrow Y$ y A un subconjunto de X . Las imágenes de todos los elementos de A determinan un subconjunto de Y , llamado imagen de A por f . Denotado por $f(A)$.



Def.

La imagen del subconjunto $A \subset X$ es el conjunto cuyos elementos son las imágenes de los elementos de A .

$$f(A) = \{ f(x) : x \in A \}$$

$$\circ \quad f(A) = \{ y \in Y : \exists x \in A \wedge f(x) = y \}$$

El símbolo $f(A)$ se lee "imagen de A por f "

$$\text{Así} \quad y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A : y = f(x)$$

Si $A = X$, $f(X)$ es la imagen de f . Además $f(\emptyset) = \emptyset$

Propiedades

Sean $f: X \rightarrow Y$ y A, B subconjuntos del dominio.

a) Si $A \subset B$ entonces $f(A) \subset f(B)$

Dem. Si $z \in f(A) \Rightarrow \exists x \in A : z = f(x)$, def. de $f(A)$

$$\Rightarrow \exists x \in B : z = f(x) \quad , \quad A \subset B$$

$$\Rightarrow z \in f(B) \quad , \quad \text{def. } f(B)$$

$$b) \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B) \quad A \subset X, B \subset X$$

$$i) \quad f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B)$$

$$\text{Sea } z \in f(A \cup B) \Rightarrow \exists x \in A \cup B : z = f(x) \quad \checkmark \quad \text{def. imagen de } A \cup B$$

$$\Rightarrow \exists x / (x \in A \vee x \in B) \wedge z = f(x)$$

$$\Rightarrow \exists x / [x \in A \wedge z = f(x)] \vee \exists x / [x \in B \wedge z = f(x)]$$

$$\Rightarrow z \in f(A) \vee z \in f(B)$$

$$\Rightarrow z \in f(A) \cup f(B) \quad \therefore f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B) \quad \textcircled{1}$$

$$ii) \quad f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B)$$

$$\text{Como } A \subset A \cup B \Rightarrow f(A) \subset f(A \cup B)$$

$$B \subset A \cup B \Rightarrow f(B) \subset f(A \cup B)$$

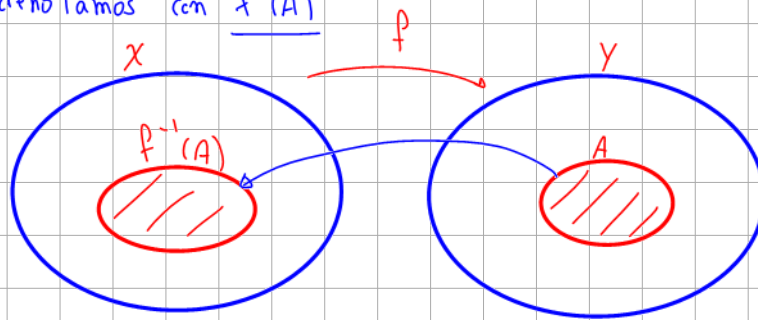
$$\Rightarrow f(A) \cup f(B) \subset f(A \cup B) \quad \textcircled{2}$$

$$\text{Así de } \textcircled{1} \text{ y } \textcircled{2} \quad f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$$

$$c) \quad f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B) \quad \text{😊}$$

Imágenes inversas de subconjuntos del codominio

Sean $f: X \rightarrow Y$ y $A \subset Y$. Interesa conocer los elementos del dominio cuyas imágenes pertenecen a A . Tales elementos forman un subconjunto de X , llamado imagen inversa o preimagen de A por f . La denotamos con $f^{-1}(A)$



Def. La imagen inversa o preimagen de $A \subset Y$ es el conjunto formado por los $x \in X$ tal que $f(x) = y \in A$.

$$f^{-1}(A) = \{x \in X : f(x) \in A\}$$

• $x \in f^{-1}(A) \Leftrightarrow f(x) \in A$

Ejm.

Sean $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$, $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$, y sea

$$f: A \rightarrow B \quad \text{tal que} \quad f(x) = \frac{x+|x|}{2}$$

Entonces la imagen de:

$$A_1 = \{-3, -2, -1\} \subset A \quad \text{es} \quad f(A_1) = \{0\}$$

$$A_2 = \{0\} \subset A \quad \text{es} \quad f(A_2) = \{0\}$$

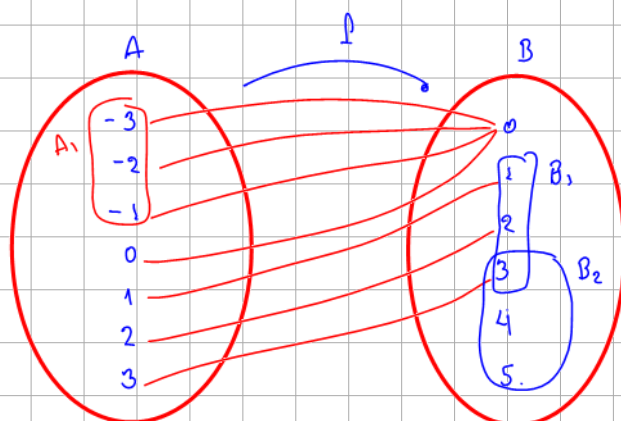
$$A_3 = \{1, 2, 3\} \subset A \quad \text{es} \quad f(A_3) = \{1, 2, 3\}$$

La imagen inversa de:

$$B_1 = \{1, 2, 3\} \subset B \quad \text{es} \quad f^{-1}(B_1) = \{1, 2, 3\}$$

$$B_2 = \{3, 4, 5\} \subset B \quad \text{es} \quad f^{-1}(B_2) = \{3\}$$

$$B_3 = \{4, 5\} \subset B \quad \text{es} \quad f^{-1}(B_3) = \emptyset$$



$$f(x) = \frac{x+|x|}{2}$$

$$f(-3) = 0$$

Ejm. Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto f(x) = x^2$$

Determine la preimagen de $A = (-\infty, -1]$, $B = (-1, 1]$ y $C = [4, 9]$

$$\text{Sol.} \quad f^{-1}(A) =$$

$$\text{tomemos} \quad x \in f^{-1}(A) \Leftrightarrow f(x) \in A$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in (-\infty, -1]$$

$$\Leftrightarrow -\infty < \underline{f(x)} \leq -1$$

$$\Leftrightarrow f(x) \leq -1$$

$$\Leftrightarrow x^2 \leq -1$$

$$\Leftrightarrow \nexists x \in \mathbb{R} : x^2 \leq -1$$

$$\therefore f^{-1}(A) = \emptyset$$

$$\text{ii) } \underline{f^{-1}(B)} =$$

$$x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in (-1, 1]$$

$$\Leftrightarrow -1 < f(x) \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 < x^2 \leq 1$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \quad // \sqrt{}$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq |x| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow |x| \leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$\Leftrightarrow x \in [-1, 1]$$

$$\therefore f^{-1}(B) = [-1, 1]$$

$$\underline{\underline{f^{-1}(C) :}}$$

$$x \in f^{-1}(C) \Leftrightarrow f(x) \in C$$

$$\Leftrightarrow f(x) \in [4, 9]$$

$$\Leftrightarrow 4 \leq f(x) \leq 9$$

$$\Leftrightarrow 4 \leq x^2 \leq 9$$

$$\Leftrightarrow 4 \leq x^2 \quad \wedge \quad x^2 \leq 9$$

$$x^2 - 9 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \leq x^2 - 4 \quad \wedge \quad (x-3)(x+3) \leq 0$$

$$0 \leq (x-2)(x+2) \quad \wedge$$



$$\Leftrightarrow x \in [-3, -2] \cup [2, 3]$$

$$\therefore f^{-1} = [-3, -2] \cup [2, 3]$$