Ejm.

En A = {ϕ, {a}, {a, b}, {a, b, c}, {a, b, c, d}}, consideramos la relación de inclusión definida por

$$X R Y \Leftrightarrow X \subset Y$$

a) Demuestra que R es una relación de orden amplio y total.

b) Realiza el diagrama de Hasse.

Sol. a) R es de O. amplio $\Leftrightarrow$ ref.
Antisim.
Trans.

Reflexiva. $x R x \Leftrightarrow x \subset x$ lo cual es V.

Antisimétrica. $x R y \wedge y R x \Leftrightarrow x \subset y \wedge y \subset x$

[def. = conjuntos $A = B \Leftrightarrow A \subset B \wedge B \subset A$]

$\Leftrightarrow x = y$

$\Leftrightarrow$ R es antisim.

Transitividad.

$$\underline{x R y \wedge y R z} \Leftrightarrow x \subset y \wedge y \subset z$$

$$\Leftrightarrow x \subset z$$

$$\Leftrightarrow \underline{x R z}$$

$$\Leftrightarrow R \text{ es transitiva}$$

$\therefore$ R es de orden amplio.

Orden parcial. $\exists x, \exists y \in A : x \not R y \wedge y \not R x$

$$A = \{ \overset{x}{\phi}, \overset{y}{\{a\}} \ \{a,b\} \ \{a,b,c\} \ \{a,b,c,d\} \}$$

$$\underline{x \not R y \wedge y \not R x} \Rightarrow \underbrace{\underbrace{\phi \not\subset \{a\}}_{F} \wedge \underbrace{\{a\} \not\subset \phi}_{V}}_{F}$$

$\therefore$ no es cierto que $(\exists x, \exists y \in A : x \not R y \wedge y \not R x)$

entonces R no es de orden parcial.

Orden Total. $\forall x \neq y : xRy \vee yRx$

En $A = \{\emptyset, \{a\} \{a,b\} \{a,b,c\} \{a,b,c,d\}\}$

sean $\emptyset$ y $\{a\}$ de manera que

$$\emptyset R \{a\} \quad \vee \quad \{a\} R \emptyset$$

$$\emptyset \subset \{a\} \quad \vee \quad \{a\} \subset \emptyset$$

$$V \quad \vee \quad F$$

$$V$$

$\therefore \forall x, y \in A$ con $x \neq y$, $xRy \vee yRx$

Así R es de orden total.

b) $A = \{\emptyset, \{a\} \{a,b\} \{a,b,c\} \{a,b,c,d\}\}$

Su diagrama de Hasse es:

$$\emptyset \longrightarrow \{a\} \longrightarrow \{a,b\} \longrightarrow \{a,b,c\} \longrightarrow \{a,b,c,d\}$$

ORDEN ESTRICTO Sea $R \subset A^2$

R es de orden estricto $\Leftrightarrow$ R es arreflexiva, asimétrica y transitiva.

R Arreflexiva $\Leftrightarrow \forall x \in A : x \not R x$

R. asimétrica $\Leftrightarrow \forall. xRy \Rightarrow y \not R x$

R transitiva $\Leftrightarrow \forall xRy \wedge yRz \Rightarrow xRz$.

Una relación de orden estricto puede ser total o parcial.

Ejm.

1. La relación "menor que" en $\mathbb{R}$ es de orden estricto y total.

Sol. Veamos si cumple las propiedades.

$$\boxed{\begin{array}{l} R \subset \mathbb{R}^2 \\ xRy \iff x < y \end{array}}$$

Arreflexiva. $\forall x \in \mathbb{R}$, $x \not{R} x \iff x \nless x$ es V.

Así R es arreflexiva.

Asimetría $\forall$ $xRy \iff x < y$

$\iff y \nless x$

$\iff y \not{R} x$

$\iff R$ es asimétrica

Transitiva $\forall$ $xRy \wedge yRz \iff x < y \wedge y < z$

$\iff x < z$

$\iff xRz$

$\iff R$ es trans.

$\therefore$ R es de orden estricto.

R de orden total $\forall x \neq y \Rightarrow xRy \vee yRx$

Sea $x \neq y \Rightarrow x < y \vee x > y$ ✓

$\Rightarrow x < y \vee y < x$ ✓

$\Rightarrow xRy \vee yRx$

$\Rightarrow R$ es de O. total.

ELEMENTOS DISTINGUIDOS DE UN CONJUNTO ORDENADO

Sea A un conjunto ordenado con una relación de orden $\prec$

donde $\prec$ es la relación de preceder

Es decir. $a \prec b \iff a$ precede a b

donde $\prec$ es reflexiva, Antisimétrica, Transitiva y lineal.

$$\begin{cases} \text{Reflexiva.} & \forall a \in A \Rightarrow a \prec a \\ \text{Antisim.} & a \prec b \wedge b \prec a \Rightarrow a = b \\ \text{Trans.} & a \prec b \wedge b \prec c \Rightarrow a \prec c \end{cases}$$

linealidad $\quad a \neq b \Rightarrow a \prec b \vee b \prec a$

Primer elemento Un elemento $a \in A$ se llama primer elemento sii precede a todos los demás.

Es decir. $a \in A$ es primer elem. $\iff \forall x \in A \Rightarrow a \prec x$

Último elemento El elemento $b \in A$. se llama último elemento sii todo elemento de A precede a b.

Es decir, $b \in A$ es último elem. $\iff \forall x \in A \Rightarrow x \prec b$

Elementos minimales El elemento m de A es un elem. minimal sii no existe un elemento distinto que lo preceda

Es decir, $m \in A$ es minimal $\iff \forall x \in A : x \prec m \Rightarrow m = x$

Elementos maximales El elemento M de A es un elem. maximal sii no existe un elemento distinto que lo siga

Es decir, $m \in A$ es maximal $\iff \forall x \in A: m \prec x \Rightarrow x = m$