Wahrscheinlichkeit und Statistik für Business und Datenforschung

- Teil 2: Wahrscheinlichkeiten

Wahrscheinlichkeit

Was ist Wahrscheinlichkeit?

- Die **Wahrscheinlichkeit** ist ein Wert zwischen 0 und 1, bei dem ein bestimmtes Ereignis eintritt
- Zum Beispiel beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass eine geworfene faire Münze auf Kopf oder Zahl fällt, 0,5
- Mathematisch schreiben wir:

$$\boldsymbol{P(E_{Kopf}) = 0,5}$$

Was ist Wahrscheinlichkeit?

- In dem Einführungs-Beispiel wird das Werfen der Münze als **Versuch** (en: trial) bezeichnet.
- Bei einer Vielzahl von Versuchen sollte eine Münze die Hälfte der Zeit auf "Kopf„ landen.

Versuche haben keine Erinnerung!

- Wenn eine Münze also 5 Mal nacheinander auf die selbe Seite fällt, besteht dennoch weiterhin die Wahrscheinlichkeit mit **0,5** auf Kopf zu landen.

- Eine Reihe unabhängiger Ereignisse reichen daher nicht aus, um die erwartete Wahrscheinlichkeit „aufzuholen“.

- Jeder Versuch ist von den anderen unabhängig.

Zufallsexperimente und Ergebnismengen

- Jeder Versuch, eine Münze zu werfen, kann als **Zufallsexperiment** bezeichnet werden
- Jedes sich gegenseitig ausschließende Ergebnis wird als **Elemtarereignis** bezeichnet
- Die **Ergebnismenge** ist die Summe aller möglichen einfachen Ereignisse

Zufallsexperimente und Ergebnismengen

- Stell dir vor einen Würfel zu werfen
- Jeder Wurf ist ein Zufallsexperiment
- Die Zufallsvorgänge sind:

$$E_1=1 \quad E_2=2 \quad E_3=3$$
$$E_4=4 \quad E_5=5 \quad E_6=6$$

- Daher ist die Ergebnismenge:

$$S = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$$

Zufallsexperimente und Ergebnismengen

- Die Wahrscheinlichkeit eine sechs zu Würfeln:

Das **Zufallsereignis** ist:

$E_6 = 6$ (*ein Ereignis*)

Die **Ergebnismenge** ist:

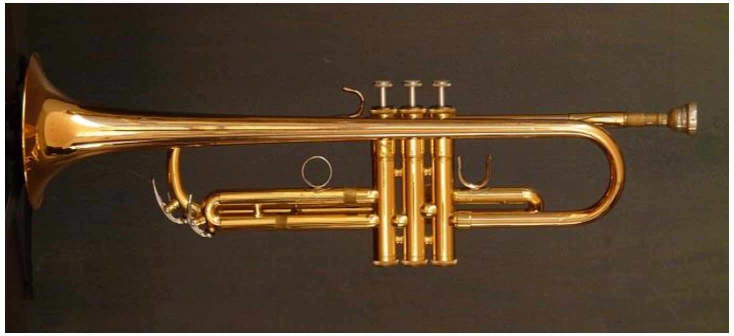
$S = \{E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6\}$ (*sechs mögliche Ergebnisse*)

Die **Wahrscheinlichkeit**:

$P(\text{Wurf mit } 6) = 1/6$

Übung Wahrscheinlichkeit

- Ein Unternehmen stellt insgesamt 50 Trompetenventile her
- Es wird festgestellt, dass eines der Ventile defekt ist
- Wenn drei Ventile in einer Trompete verbaut sind, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Trompete ein defektes Ventil hat?



Übung Wahrscheinlichkeit

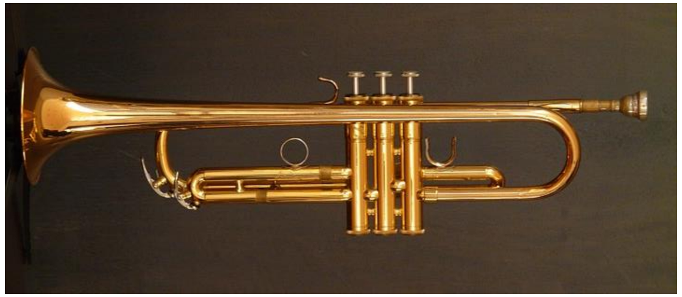
1. Kalkuliere die Wahrscheinlichkeit eines defekten Ventils:

$$\boldsymbol{P\left(E_{defektes\,Ventil}\right) = \frac{1}{50} = 0.02}$$

Übung Wahrscheinlichkeit

1. Berechne die Wahrscheinlichkeit einer daraus resultierenden defekten Trompete:

$$P\left(E_{defekte\ Trompete}\right) = 3 \times P\left(E_{defektes\ Ventil}\right)$$



$$= \frac{1}{50} + \frac{1}{50} + \frac{1}{50} = \mathbf{0.06}$$

Permutationen

Permutationen

- Eine **Permutation** sind die Kombinationen einer Anordnung von Objekten in einer bestimmten Reihenfolge
- Die möglichen Permutationen der Buchstaben a, b und c sind:

abc	acb	bac	bca	cab	cba

Permutationen

- Für einfache Beispiele wie abc berechnen wir die Anzahl der möglichen Permutationen als $n!$ *(„n faktoriell")*
- abc = 3 Items
- $n! = 3! = 3 \times 2 \times 1 = 6$ Permutationen

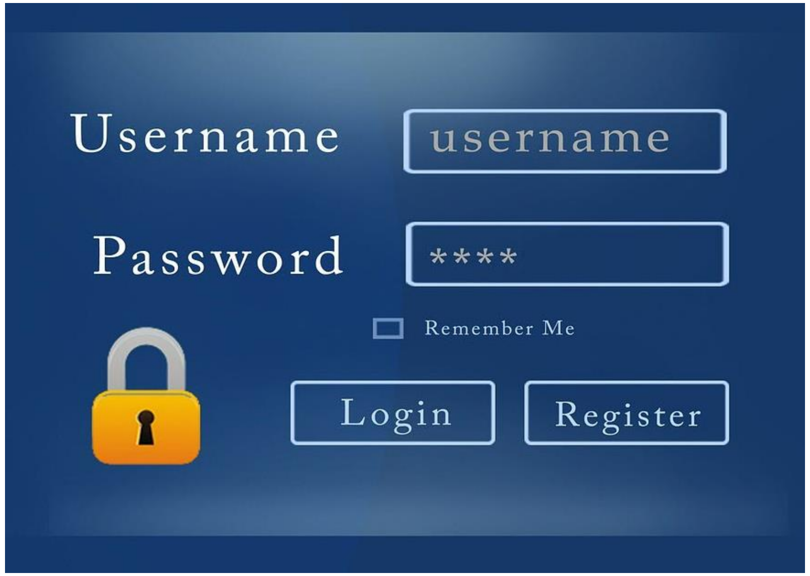
Permutationen

- Man kann auch eine Teilmenge von Elementen in einer Permutation verwenden
- Die Anzahl der Permutationen einer Menge n-Elemente mit r gleichzeitig verwendeter Elemente, wird durch die folgende Formel ermittelt:

$$ {}_{n}P_{r} = \frac{n!}{(n-r)!} $$

Permutationen Beispiel #1

- Eine Website benötigt ein 4-stelliges Passwort
- Zeichen können entweder Kleinbuchstaben (ohne Umlaute) oder die Ziffern 0-9 sein.
- Kein Buchstabe oder **kein Zeichen darf mehrfach** verwendet werden
- Wie viele verschiedene Passwörter kann es geben?



Permutationen Lösung #1

- Wir ermitteln also, dass n oder die Anzahl der Objekte

  26 Buchstaben + 10 Zahlen = 36 ist
- r, oder die Anzahl der gleichzeitig zu verwendenden Zeichen ist 4
- Diese Zahlen setzen wir nun in die Formel ein:

$$ {}_{36}P_4 = \frac{36!}{(36-4)!} $$

Permutationen Lösung #1

$$ {}_{36}P_4 = \frac{36!}{(36-4)!} = \frac{36 \times 35 \times 34 \times 33 \times \cancel{32 \times 31} \ldots}{\cancel{32 \times 31} \ldots} $$

$$ = 36 \times 35 \times 34 \times 33 = \mathbf{1.413.720}\ \text{Permutationen} $$

Permutation mit Wiederholung

- Die Anzahl der Permutationen einer Menge $\boldsymbol{n}$-Items mit $\boldsymbol{r}$ gleichzeitig verwendeter Items **mit Wiederholung** wird beschrieben in:

$$\boldsymbol{n^r}$$

Permutationen Beispiel #2

- Wie viele 4-stellige Nummernschilder kann es mit den Ziffern 0 bis 9 geben, bei **erlaubter Wiederholung der Ziffern**?

Permutationen Lösung #2

- Wir können also 10 Ziffern verwenden, 4 von ihnen jeweils gleichzeitig.
- Das setzen wir nun wieder in die Formel ein:

$$\boldsymbol{n^r = 10^4 = \textbf{Permutationen}}$$

Permutationen: Formeln

- Anzahl der Permutationen einer Reihe

$$\boldsymbol{n}!$$

- Permutationen mit $\boldsymbol{r}$ gleichzeitig verwendeten Sets $\boldsymbol{N}$ **(ohne Wiederholungen)**

$$_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})!}$$

- Permutationen mit $\boldsymbol{r}$ gleichzeitig verwendeten Sets $\boldsymbol{N}$ **(mit Wiederholungen)**

$$\boldsymbol{n}^{\boldsymbol{r}}$$

Kombinationen

Kombinationen

- **Ungeordnete** Anordnungen von Objekten werden als **Kombinationen** bezeichnet.
- Eine Gruppe von Personen, die ein Team bilden, bleiben die gleiche Gruppe, unabhängig der Reihenfolge.

Kombinationen

- **Ungeordnete** Anordnungen von Objekten werden als **Kombinationen** bezeichnet.
- Eine Pizza, die halb Tomate und halb Spinat ist, ist die gleiche wie eine Pizza die halb Spinat und halb Tomate ist

=

Kombinationen

- Die Anzahl der Kombinationen von $\boldsymbol{n}$ Objekten, mit $\boldsymbol{r}$ gleichzeitig verwendeter Objekte, ist gegeben durch:

$$ {}_{\boldsymbol{n}}\boldsymbol{C}_{\boldsymbol{r}} = \frac{\boldsymbol{n}!}{\boldsymbol{r}!(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r})!} $$

Kombinationen vs. Permutation

- Wie viele 3-Buchstaben-Kombinationen können aus den Buchstaben ABCDE gebildet werden?

1. Permutationen:

$$_5P_3 = \frac{5!}{(5-3)!} = 5 \times 4 \times 3 = \mathbf{60}$$

ABC	ACB	BAC	BCA	CAB	CBA
ABD	ADB	BAD	BDA	DAB	DBA
ABE	AEB	BAE	BEA	EAB	EBA
ACD	ADC	CAD	CDA	DAC	DCA
ACE	AEC	CAE	CEA	EAC	ECA
ADE	AED	DAE	DEA	EAD	EDA
BCD	BDC	CBD	CDB	DBC	DCB
BCE	BEC	CBE	CEB	EBC	ECB
BDE	BED	DBE	DEB	EBD	EDB
CDE	CED	DCE	DEC	ECD	EDC

Kombinationen vs. Permutation

- Wie viele 3-Buchstaben-Kombinationen können aus den Buchstaben ABCDE gebildet werden?

2. Wie man erkennt, enthält jede Zeile die selben Buchstaben

ABC	ACB	BAC	BCA	CAB	CBA
ABD	ADB	BAD	BDA	DAB	DBA
ABE	AEB	BAE	BEA	EAB	EBA
ACD	ADC	CAD	CDA	DAC	DCA
ACE	AEC	CAE	CEA	EAC	ECA
ADE	AED	DAE	DEA	EAD	EDA
BCD	BDC	CBD	CDB	DBC	DCB
BCE	BEC	CBE	CEB	EBC	ECB
BDE	BED	DBE	DEB	EBD	EDB
CDE	CED	DCE	DEC	ECD	EDC

Kombinationen vs. Permutation

- Wie viele 3-Buchstaben-Kombinationen können aus den Buchstaben ABCDE gebildet werden?

3. Kombinationen:

$$ {}_{n}C_{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} $$

$$ = \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2} = 10 $$

ABC	ACB	BAC	BCA	CAB	CBA
ABD	ADB	BAD	BDA	DAB	DBA
ABE	AEB	BAE	BEA	EAB	EBA
ACD	ADC	CAD	CDA	DAC	DCA
ACE	AEC	CAE	CEA	EAC	ECA
ADE	AED	DAE	DEA	EAD	EDA
BCD	BDC	CBD	CDB	DBC	DCB
BCE	BEC	CBE	CEB	EBC	ECB
BDE	BED	DBE	DEB	EBD	EDB
CDE	CED	DCE	DEC	ECD	EDC

Kombinationen Beispiel #1

- Für eine Studie werden 4 Personen zufällig aus einer Gruppe von 10 Personen ausgewählt.
- Wie viele Möglichkeiten der Auswahl gibt es?

Kombinationen Lösung #1

- Da es sich unabhängig von der Reihenfolge, in der die Personen letztlich ausgewählt werden, um die selben Personen handelt, kann man hierbei von einer Kombinationen sprechen:

$$\boldsymbol{{}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = 210}$$

Kombinationen Beispiel #1a

- Für eine Pizza werden 4 Zutaten aus insgesamt 10 Zutaten ausgewählt.
- Wie viele verschiedene Kombinationen von Pizzen können wir uns zusammenstellen? Jede Zutat soll dabei nur einmal verwendet werden.

Kombinationen Lösung #1a

- Wir können aus den Zutaten 210 verschiedene Pizzen backen:

$$ {}_{n}C_{r} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{10!}{4!(10-4)!} = 210 $$

Kombinationen Lösung #1a

- Aber was passiert wenn wir Zutaten mehrfach verwenden können und uns eine Pizza mit dreimal Peperoni und einmal Tomate belegen?

Kombinationen mit Wiederholungen

- Die Anzahl der Kombinationen, mit $\boldsymbol{r}$ gleichzeitig verwendeter Objekte, aus einer Anzahl $\boldsymbol{n}$ mit Wiederholung:

$$_{n+r-1}C_r = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!}$$

Kombinationen Beispiel #2

- Bei einer Pizza werden 4 Zutaten zufällig aus 10 möglichen Zutaten ausgewählt.
- Wie viele verschiedene Pizzabelag-Kombinationen gibt es?

Kombinationen Lösung #2

- Die Lösungsformel für 4 Zutaten, ausgewählt aus 10 möglichen Zutaten, <u>mit</u> möglichen Wiederholung lautet:

$$ {}_{n+r-1}C_r = \frac{(n+r-1)!}{r!(n-1)!} = \frac{13!}{4!(9)!} = 715 $$

Permutationen und Kombinationen in Excel

Reihenfolge wichtig?	Wiederholung?	Formel	In Excel
Ja (Permutation)	Nein	${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$	=PERMUT(n,r) (engl.) =VARIATIONEN(n,r)
Nein (Kombination)	Nein	${}_nC_r = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$	=COMBIN(n,r) (engl.) =KOMBINATIONEN(n,r)
Ja (Permutation)	Ja	n^r	=PERMUTATIONA(n,r) =VARIATIONEN2(n,r)
Nein (Kombination)	Ja	${}_{n+r-1}C_r = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$	=COMBINA(n,r) (engl.) =KOMBINATIONEN2(n,r)

Kombinationen mit und ohne Wiederholung

- Wie viele 3-Buchstaben-Kombinationen können aus den Buchstaben ABCDE gemacht werden?

- ohne Wiederholung:

$$_{n}C_{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = \mathbf{10}$$

- mit Wiederholung:

$$_{n+r-1}C_{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!} = \frac{7!}{3!\,(4)!} = \mathbf{35}$$

ABC	ABD	ABE	ACD	ACE
ADE	BCD	BCE	BDE	CDE

ABC	ABD	ABE	ACD	ACE
ADE	BCD	BCE	BDE	CDE
AAA	AAB	AAC	AAD	AAE
BBA	BBB	BBC	BBD	BBE
CCA	CCB	CCC	CCD	CCE
DDA	DDB	DDC	DDD	DDE
EEA	EEB	EEC	EED	EEE

Schnittmengen, Vereinigungsmengen und Komplementärmenge

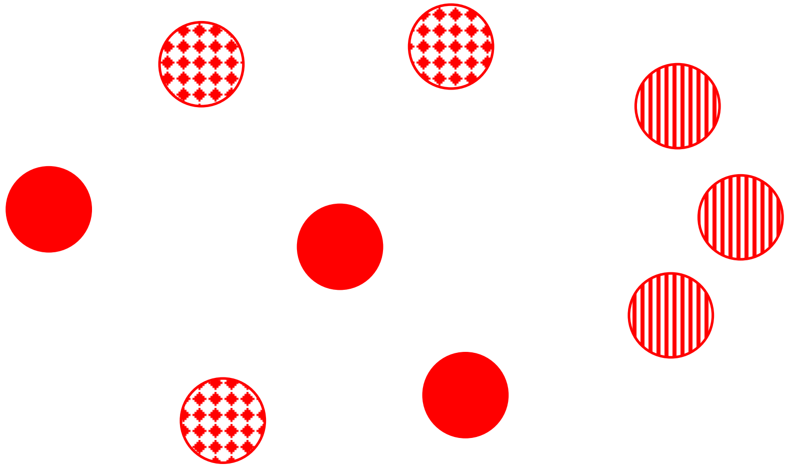
Schnittmengen

- In der Wahrscheinlichkeit beschreibt eine **Schnittmenge** den Bereich, in dem zwei Ereignisse **gleichzeitig** eintreten. Man spricht von einer Verbundwahrscheinlichkeit

- Betrachten wir eine Schachtel mit gemusterten, farbigen Kugeln

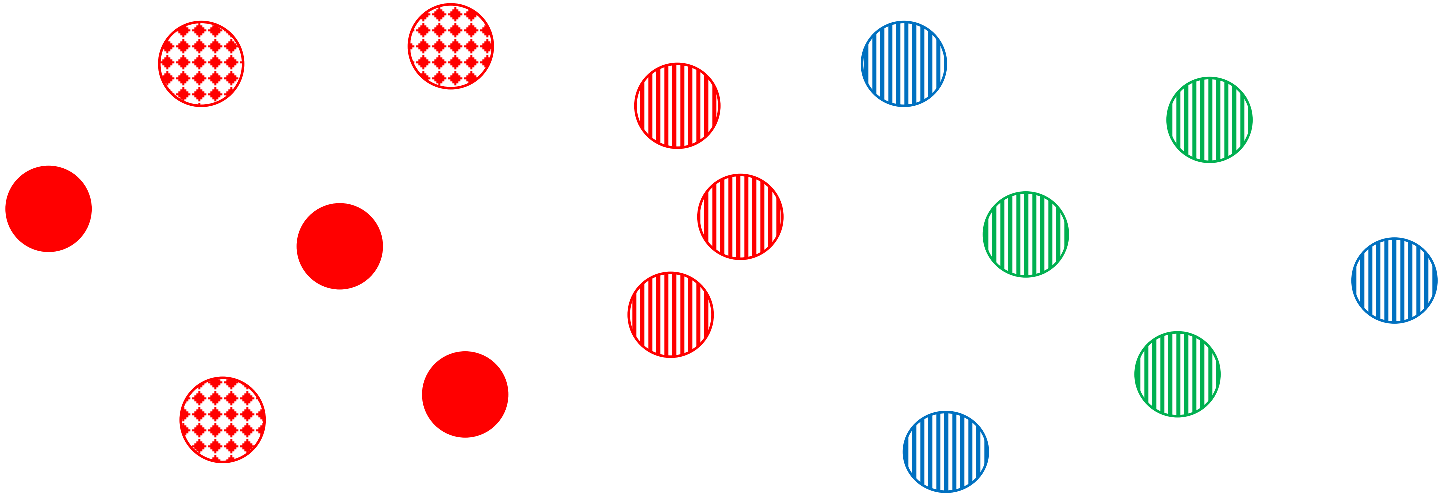
Schnittmengen

- 9 der Bälle sind rot:



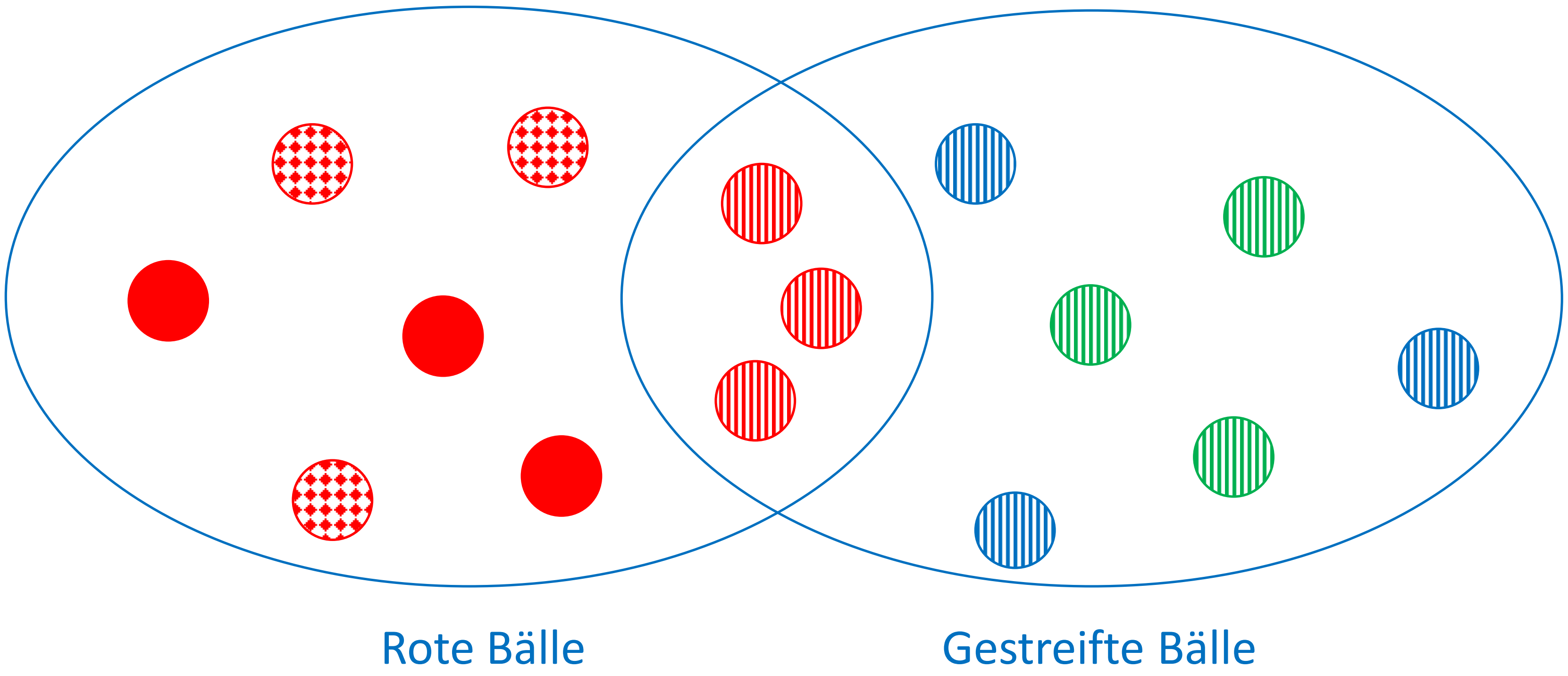
Schnittmengen

- 9 der Bälle sind gestreift:



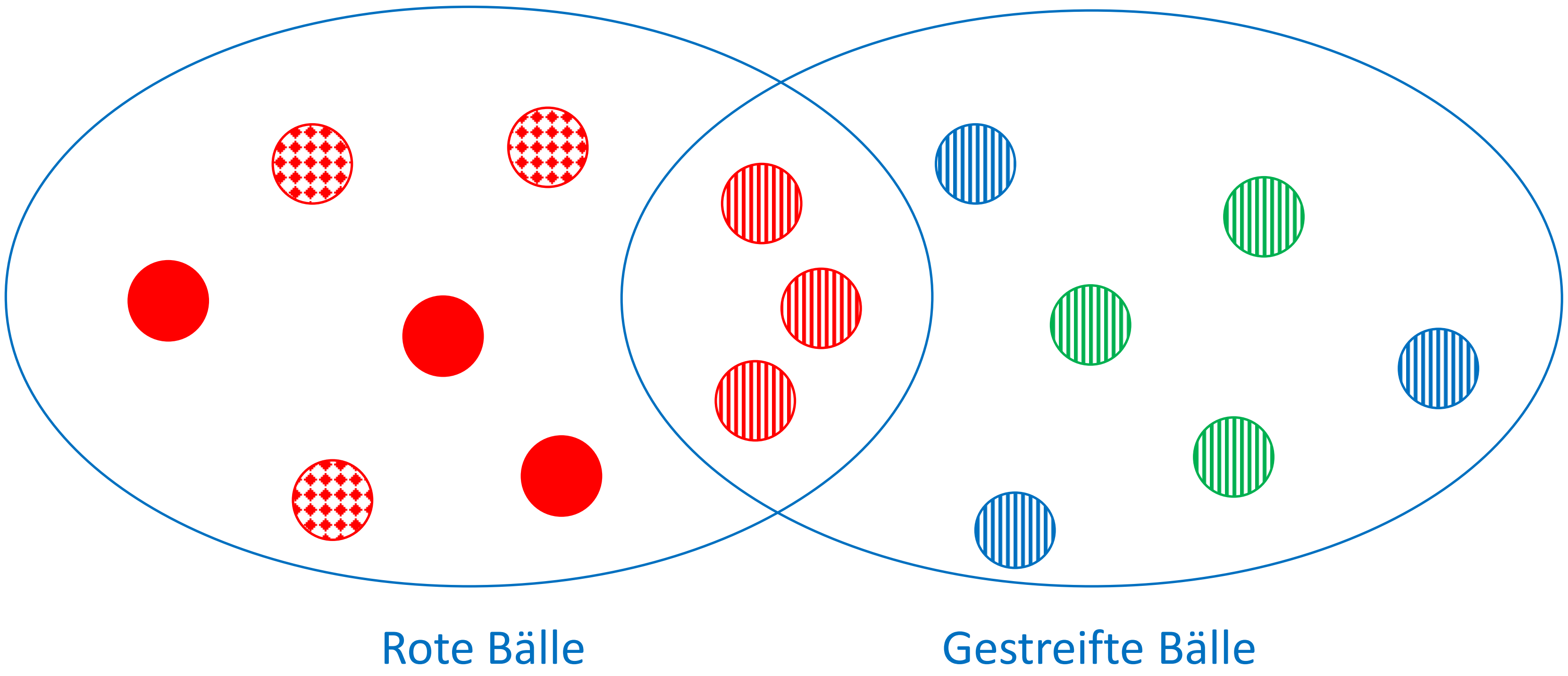
Schnittmengen

- 3 der Bälle sind sowohl rot als auch gestreift:

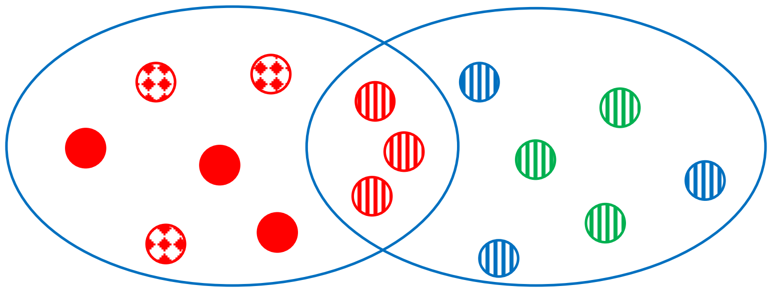


Schnittmengen

- Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit eines roten, gestreiften Balls?



Schnittmengen



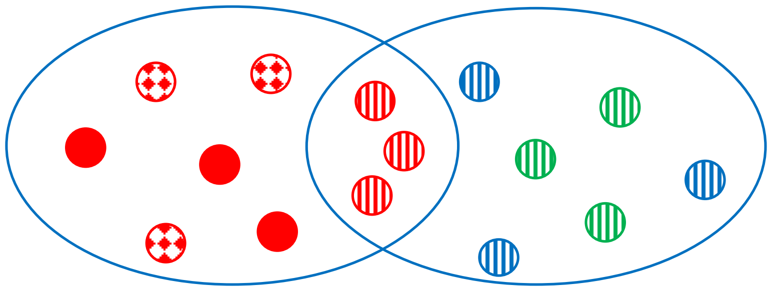
- Wenn wir **A** als Ereignis den roten Bällen zuordnen, und **B** als Ereignis den gestreiften Bällen, dann ist die Schnittmenge von **A und B**:

$$A \cap B$$

- Die Reihenfolge spielt dabei keine Rolle

$$A \cap B = B \cap A$$

Schnittmengen



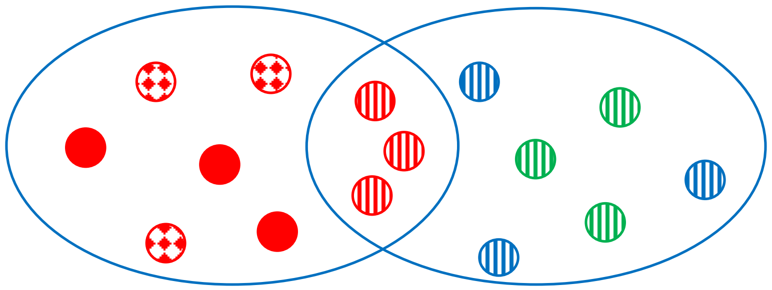
- Die Wahrscheinlichkeit von **A und B** ist gegeben

$$P(A \cap B)$$

- In diesem Fall

$$P(A \cap B) = \frac{3}{15} = \mathbf{0.2}$$

Vereinigungsmengen



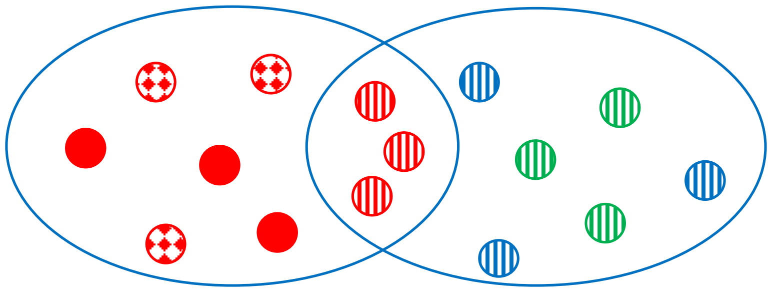
- Die **Vereinigungsmenge** ist die Menge aller Elemente, die **zu A oder zu B** oder zu beiden Mengen gehören. Die Additionsregel lautet:

$$A \cup B$$

- Bitte nochmals beachten, Reihenfolge spielt auch hier keine Rolle:

$$A \cup B = B \cup A$$

Vereinigungsmenge



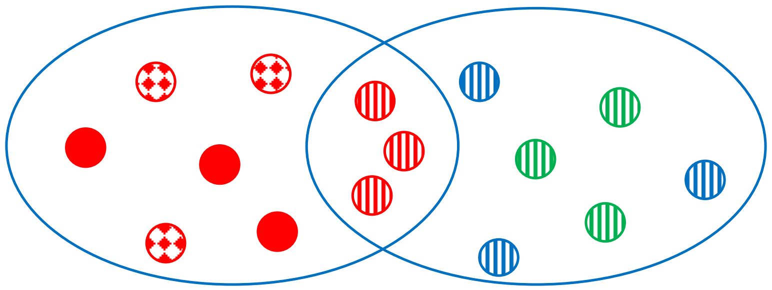
- Die Wahrscheinlichkeit von **A oder B** ist gegeben als:

$$\boldsymbol{P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)}$$

- In diesem Fall:

$$P(A \cup B) = \frac{9}{15} + \frac{9}{15} - \frac{3}{15} = \frac{15}{15} = \mathbf{1.0}$$

Komplementärmenge



- Die **Komplementärmenge** eines Ereignisses berücksichtigt alles **außerhalb** des Ereignisses, gegeben durch:

$$\bar{A}$$

- Die Wahrscheinlichkeit von **nicht** A ist:

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) = \frac{15}{15} - \frac{9}{15} = \frac{6}{15} = \mathbf{0.4}$$

Unabhängige und abhängige Ereignisse

Unabhängige Ereignisse

- Eine Reihe **unabhängiger** Ereignissen tritt auf, wenn das Ergebnis eines Ereignisses keinen Einfluss auf das Ergebnis eines anderen Ereignisses hat.
- Ein Beispiel ist das zweimalige Werfen einer Münze
- Die Wahrscheinlichkeit, beim zweiten Wurf Kopf zu werfen, ist unabhängig vom Ergebnis des ersten Wurfes.

Unabhängige Ereignisse

- Die Wahrscheinlichkeit, mit zwei Würfen, zweimal Kopf zu werfen ist:

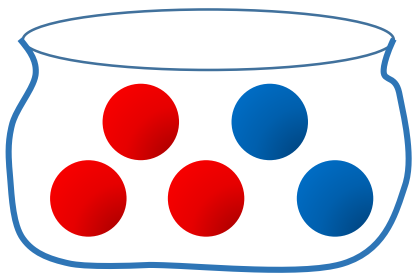
$$P(K_1K_2) = P(K_1) \times P(K_2)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

1. Wurf	2. Wurf
H	H
H	T
T	H
T	T

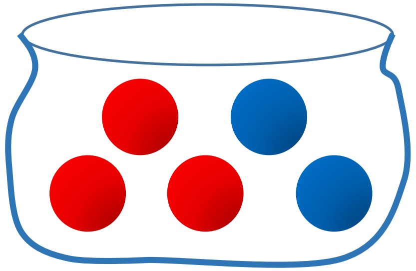
Abhängige Ereignisse

- Ein **abhängiges** Ereignis tritt auf, wenn das Ergebnis des ersten Ereignisses die Wahrscheinlichkeit eines zweiten Ereignisses beeinflusst.
- Ein schönes Beispiel ist das Entnehmen von farbigen Kugeln aus einem Sack *ohne zurücklegen*.



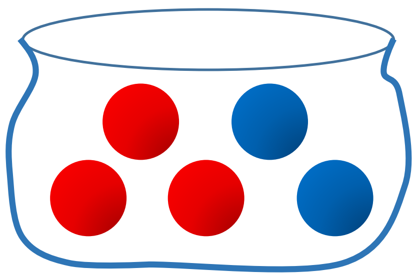
Abhängige Ereignisse

- Stell dir vor, eine Tasche enthält 2 blaue Kugeln und 3 rote Kugeln.
- Wenn du zwei Murmeln aus der Tasche nimmst, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie beide rot sind?



Abhängige Ereignisse

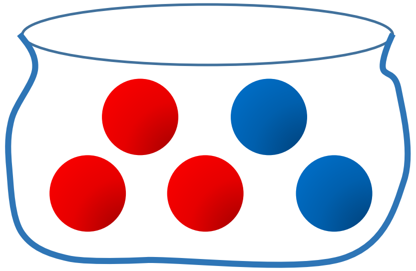
- Hier beeinflusst die Farbe der ersten Entnahme die Wahrscheinlichkeit, ob die zweite Kugel beispielsweise rot ist.



Abhängige Ereignisse

- Die Wahrscheinlichkeit, die erste Kugel zu ziehen ist noch recht einfach:

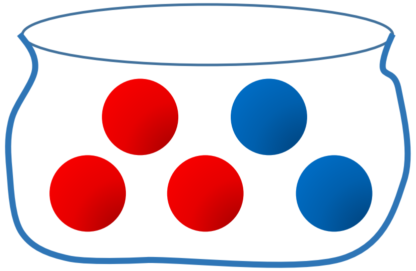
$$P(R_1) = \frac{3}{5}$$



Abhängige Ereignisse

- Die Wahrscheinlichkeit, dass die zweite gezogene Kugel rot ist, *unter der Annahme, dass* die erste Kugel auch rot gewesen sei lautet:

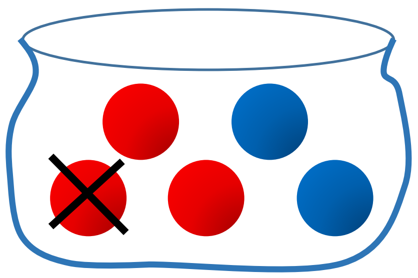
$$\boldsymbol{P(R_2|R_1)}$$



Abhängige Ereignisse

- Nach der Entnahme einer roten Kugel wäre das also:

$$P(R_2|R_1) = \frac{2}{4}$$

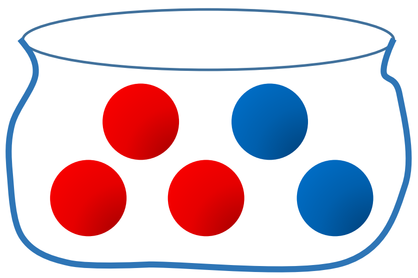


Abhängige Ereignisse

- Die Wahrscheinlichkeit also, zwei rote Kugeln zu ziehen, sieht wie folgt aus:

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2|R_1)$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{2}{4} = \frac{6}{20} = \mathbf{0.3}$$



Bedingte Wahrscheinlichkeit

Bedingte Wahrscheinlichkeit

- Die Wahrscheinlichkeiten von Ereignis **A** kann sich verändern, **vorausgesetzt** das Ereignis **B** ist bereits eingetreten. Hier spricht man von einer **bedingten Wahrscheinlichkeit**.
- Die Formel hierzu lautet

$$P\,(A\mid B)$$

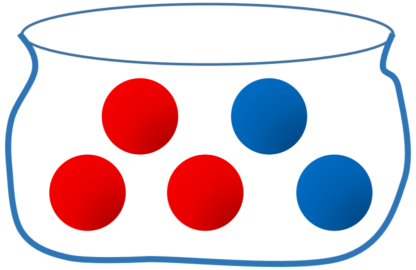
Bedingte Wahrscheinlichkeit

- Zurück zu abhängigen Ereignissen ist die Wahrscheinlichkeit, zwei rote Kugeln zu ziehen:

$$P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \cdot P(R_2|R_1)$$

- Die Bedingung in dieser Gleichung ist:

$$P(R_2|R_1)$$



Bedingte Wahrscheinlichkeit

- Das Umstellen der Formel ergibt:

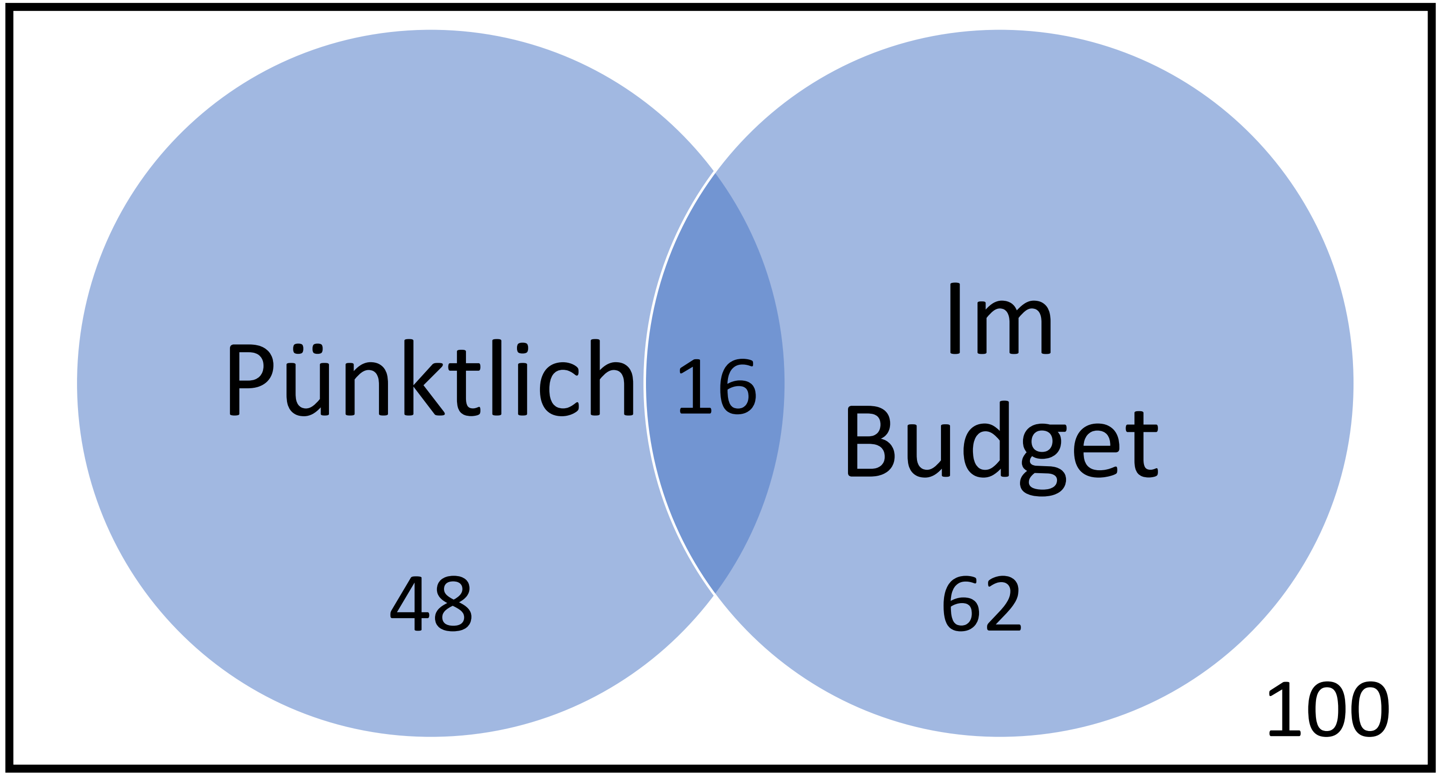
$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Das heißt, die Wahrscheinlichkeit von **A unter der Bedingung, dass B** eingetreten ist,
  ist gleich der Wahrscheinlichkeit von **A und B**
  dividiert durch die Wahrscheinlichkeit von **B**

Bedingte Wahrscheinlichkeit Übung

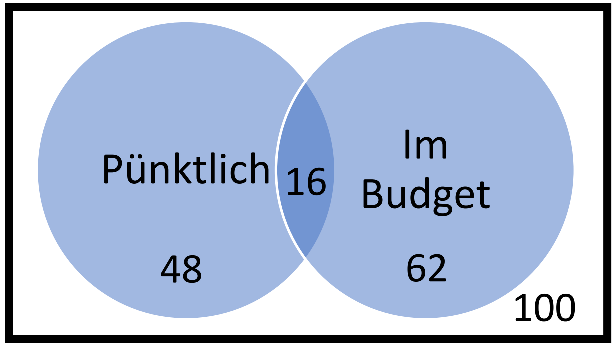
- Ein Unternehmen stellt fest, dass von 100 Projekten **48 pünktlich** fertiggestellt, **62 im Rahmen des Budgets** abgeschlossen und **16 pünktlich und im Rahmen des Budgets** abgeschlossen werden.
- Wenn ein Projekt pünktlich fertiggestellt wird, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es unter dem Budget liegt?

Bedingte Wahrscheinlichkeit Übung



Bedingte Wahrscheinlichkeit Übung

- Wenn ein Projekt zum Zeitpunkt **B** abgeschlossen ist, wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es unter dem Budget **A** liegt?

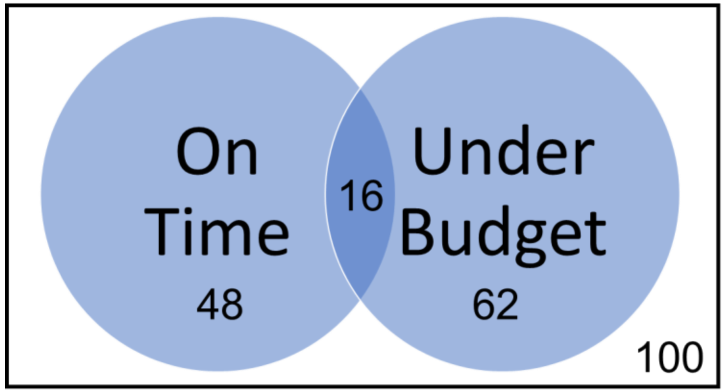


$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

$$= \frac{16}{48} = \mathbf{0.33}$$

Additions- und Multiplikationsregeln

Additionsregel



- Aus unserem Beispiel:
  Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit dass ein Projekt pünktlich **oder** unter Budget abgeschlossen wird?
- Erinnern Sie sich an den Abschnitt über die Vereinigungsmengen:

$$P\,(A \cup B) = P\,(A) + P\,(B) - P\,(A \cap B)$$

- Dies ist die **Additionsregel**

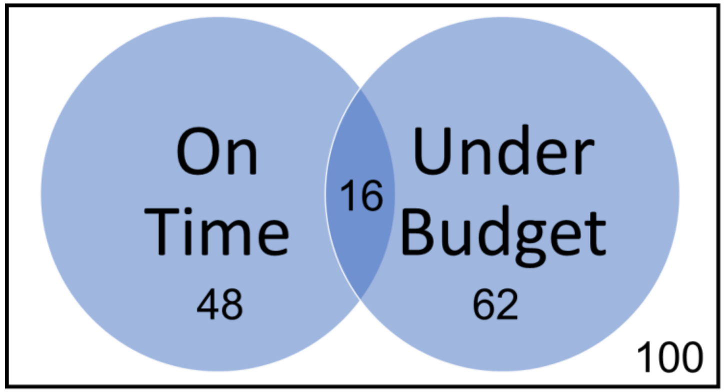
Additionsregel

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

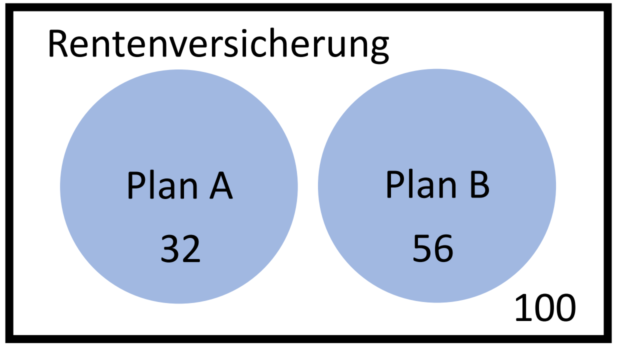
$$= \frac{48}{100} + \frac{62}{100} - \frac{16}{100}$$

$$= 0.48 + 0.62 - 0.16$$

$$= \mathbf{0.94}$$



Additionsregel für sich gegenseitig ausschließende Ereignisse



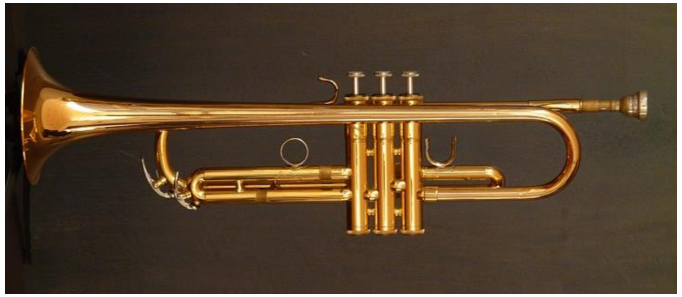
- Wenn zwei Ereignisse nicht gleichzeitig auftreten können,
  sind diese **sich gegenseitig ausschließend.**
- In diesem Fall wird die Additionsregel:

$$P\,(A\cup B) = P\,(A) + P\,(B)\;\cancel{-P(A\cap B)}$$

Additionsregel für sich gegenseitig ausschließende Ereignisse

- Zum Beispiel unsere defekten Trompetenventile
- Ein defektes Ventil kann nicht zwei Plätze auf der gleichen Trompete einnehmen

$$P(E_{defective\ trumpet}) = \frac{1}{50} + \frac{1}{50} + \frac{1}{50} = \frac{3}{50} = \mathbf{0.06}$$



Multiplikationsregel

- Aus dem Abschnitt über abhängige Ereignisse haben wir gesehen, dass die Wahrscheinlichkeit von **A und B** ist:

$$P\,(A \cap B) = P\,(A) \cdot P\,(B \mid A)$$

- Dies ist die **Multiplikationsregel**

Multiplikationsregel Übung

- Bei einem Standarddeck mit 52 Karten - wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, 4 Asse zu ziehen?

$$P(A \cap B \cap C \cap D) = P(A) \cdot P(B|A) \cdot P(C|AB) \cdot P(D|ABC)$$

$$= \frac{4}{52} \times \frac{3}{51} \times \frac{2}{50} \times \frac{1}{49} = \frac{24}{6{,}497{,}400} = \frac{1}{270{,}725}$$

Bayes Theorem

Bayes Theorem

- Wir haben uns die bedingte Wahrscheinlichkeit bereits angesehen:

$$\boldsymbol{P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \; gegeben\, sei\, P(B) > 0}$$

$$\boldsymbol{P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B|A) \; gegeben\, sei\, P(A) > 0}$$

Bayes Theorem

- Wir können nun die beiden Formeln zur bedingten Wahrscheinlichkeit in Beziehung setzen, und erhalten das Bayes Theorem:

$$\boldsymbol{P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)} \; gegeben\, sei\, P(A), P(B) > 0}$$

Bayes Theorem

- Das Bayes-Theorem wird verwendet, um die Wahrscheinlichkeit eines **Parameters** bei einem bestimmten Ereignis zu bestimmen.
- Die allgemeine Formel lautet:

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

Bayes Theorem Übung

- Ein Unternehmen erfährt, dass 1 von 500 oder 0,2% ihrer Produkte defekt ist.
- Das Unternehmen kauft ein Diagnose-Tool, das ein fehlerhaftes Teil zu 99% korrekt identifiziert.
- Wenn ein Teil als defekt diagnostiziert wird, wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es **wirklich** defekt ist?

Bayes Theorem Übung

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

- $\boldsymbol{P\,(A \mid B)}$ = Wahrscheinlichkeit, tatsächlich defekt zu sein, wenn positiv getestet wird
- $\boldsymbol{P\,(B \mid A)}$ = Wahrscheinlichkeit positiv zu testen, wenn tatsächlich defekt
- $\boldsymbol{P\,(A)}$ = Wahrscheinlichkeit, defekt zu sein
- $\boldsymbol{P\,(B)}$ = Wahrscheinlichkeit, positiv zu testen

Bayes Theorem Übung

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

- $P\,(A \mid B)$ = ?
- $P\,(B \mid A)$ = 0,99
- $P\,(A)$ = 0,002
- $P\,(B)$ = zu ermittelnder Wert

Bayes Theorem Übung

Kurzer Hinweis!

- **Echt Positiv** = Produkt ist defekt und wird als defekt eingestuft
- **Falsch Positiv** = Produkt ist **nicht** defekt, wird aber trotzdem als fehlerhaft eingestuft

Bayes Theorem Übung

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$$

- $P\ (B)$ = Wahrscheinlichkeit, positiv zu testen

  = P (echt positive) + P (falsch positive)

  $= P(B|A) \cdot P(A) + P(B|-A) \cdot P(-A)$

  $P(B|-A) = 1 - P(B|A) = 1 - .99 = 0.01$

  $P(-A) = 1 - P(A) = 1 - .002 = 0.998$

Bayes Theorem Übung

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|-A) \cdot P(-A)}$$

$$= \frac{0.99 \times 0.002}{0.99 \times 0.002 + 0.01 \times 0.998}$$

$$= 0{,}165$$

- Ein positiver Test hat eine Wahrscheinlichkeit von 16,5%, ein defektes Teil korrekt zu identifizieren

Bayes Theorem Übung

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|-A) \cdot P(-A)}$$

$$= \frac{0.99 \times \cancel{0.002}\ 0.165}{0.99 \times \cancel{0.002} + 0.01 \times \cancel{0.998}\ 0.835}$$

0.165

$= \cancel{0,165}$ 0.951

- Was ist wenn wir noch einen Test durchführen und dieser **wieder** positiv ist?

Bayes Theorem Übung

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|-A) \cdot P(-A)}$$

$$= \frac{0.99 \times \cancel{0.002}\ 0.165}{0.99 \times \cancel{0.002}_{0.165} + 0.01 \times \cancel{0.998}\ 0.835}$$

$$= \cancel{0{,}165}\ 0.951$$

- Nach zweimal Testen steht die Wahrscheinlichkeit bei 95,1%, dass das Ventil wirklich defekt ist.

Als nächstes: Verteilungen