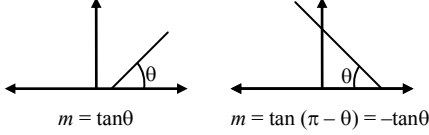


# অনুশীলনী- ১১.৩

**ঢাল:** কোনো রেখা  $x$  অক্ষের ধনাত্মক দিকের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তার

মানই হলো সমীকরণের ঢাল। সমীকরণের ঢালকে  $m$  দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

গাণিতিকভাবে  $m = \tan\theta$



**ঢালের পরিমাণ:** দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক  $A(x_1, y_1)$  ও  $B(x_2, y_2)$  হলে

$$AB \text{ রেখার ঢাল} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{\text{কোটিদ্বয়ের অন্তর}}{\text{ভূজদ্বয়ের অন্তর}}$$

**গুরুত্বপূর্ণ তথ্য:**

- কোনো রেখার ঢাল শূন্য হলে রেখাটি  $x$  অক্ষের সমান্তরাল বা  $y$  অক্ষের ওপর লম্ব।
- ঢাল  $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$  এখানে  $x_1 = x_2$  হলে ঢাল নির্ণয় সম্ভব নয়। প্রকৃতপক্ষে, এক্ষেত্রে ঢালের মান অসীম হয়।
- $A, B$  ও  $C$  বিন্দুত্রয় সমরেখ হলে  $AB$  ও  $BC$  রেখার ঢাল সমান অথবা  $AB$  ও  $AC$  রেখার ঢাল সমান।
- দুইটি রেখার ঢালের মান সমান হলে রেখাদ্বয় সমান্তরাল।
- $y = a$  সরলরেখার সমীকরণ ঢাল শূন্য।
- $x = b$  সরলরেখার সমীকরণের ঢাল নির্ণয় সম্ভব নয়। এক্ষেত্রে ঢালের মান অসীম।

☒ **জেনে রাখা ভালো:** দুইটি রেখা পরস্পর লম্ব হলে, রেখাদ্বয়ের ঢালের গুণফল  $= -1$  হবে।



## অনুশীলনীর সমাধান

১ নিম্নের প্রতিটি ক্ষেত্রে  $A$  ও  $B$  বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল নির্ণয় কর।

- ক)  $A(5, -2)$  এবং  $B(2, 1)$       খ)  $A(3, 5)$  এবং  $B(-1, -1)$   
গ)  $A(t, t)$  এবং  $B(t^2, t)$       ঘ)  $A(t, t+1)$  এবং  $B(3t, 5t+1)$

**সমাধান:**

ক)  $A(5, -2)$  এবং  $B(2, 1)$  বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল নির্ণয়:

আমরা জানি,

$$(x_1, y_1) \text{ ও } (x_2, y_2) \text{ বিন্দুগামী কোনো সরলরেখার ঢাল, } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\therefore (5, -2) \text{ ও } (2, 1) \text{ বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল} = \frac{1 - (-2)}{2 - 5} = \frac{1 + 2}{-3} = \frac{3}{-3} = -1$$

সুতরাং  $A(5, -2)$  ও  $B(2, 1)$  বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল  $-1$  (Ans.)

খ)  $A(3, 5)$  এবং  $B(-1, -1)$  বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল নির্ণয়:

আমরা জানি,

$$(x_1, y_1) \text{ ও } (x_2, y_2) \text{ বিন্দুগামী কোনো সরলরেখার ঢাল, } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\therefore (3, 5) \text{ ও } (-1, -1) \text{ বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল} = \frac{-1 - 5}{-1 - 3} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

সুতরাং  $A(3, 5)$  ও  $B(-1, -1)$  বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল  $\frac{3}{2}$  (Ans.)

গ)  $A(t, t)$  এবং  $B(t^2, t)$  বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল নির্ণয়:

আমরা জানি,

$$(x_1, y_1) \text{ ও } (x_2, y_2) \text{ বিন্দুগামী কোনো সরলরেখার ঢাল, } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\therefore (t, t) \text{ ও } (t^2, t) \text{ বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল} = \frac{t - t}{t^2 - t} = \frac{0}{t(t-1)} = 0$$

সুতরাং  $A(t, t)$  ও  $B(t^2, t)$  বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল  $0$  (Ans.)

ঘ)  $A(t, t+1)$  এবং  $B(3t, 5t+1)$  বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল নির্ণয়:

আমরা জানি,

$$(x_1, y_1) \text{ ও } (x_2, y_2) \text{ বিন্দুগামী কোনো সরলরেখার ঢাল, } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\therefore (t, t+1) \text{ ও } (3t, 5t+1) \text{ বিন্দুগামী সরলরেখার}$$

$$\text{ঢাল} = \frac{(5t+1) - (t+1)}{3t - t} = \frac{5t + 1 - t - 1}{2t} = \frac{4t}{2t} = 2$$

সুতরাং  $A(t, t+1)$  ও  $B(3t, 5t+1)$  বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল  $2$

(Ans.)

২  $A(t, 1)$ ,  $B(2, 4)$  এবং  $C(1, t)$  তিনটি ভিন্ন বিন্দু সমরেখ হলে  $t$  এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান:  $A$ ,  $B$  ও  $C$  সমরেখ হওয়ায়  $AB$  ও  $BC$  রেখার ঢাল একই হবে।  
আমরা জানি,

$$(x_1, y_1) \text{ ও } (x_2, y_2) \text{ বিন্দুগামী কোনো সরলরেখার ঢাল, } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\therefore AB \text{ রেখার ঢাল} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{4 - 1}{2 - t} = \frac{3}{2 - t}$$

$$\text{এবং } BC \text{ রেখার ঢাল} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{t - 4}{1 - 2} = \frac{t - 4}{-1} = -(t - 4) = 4 - t$$

$$\text{প্রশ্নানুসারে, } \frac{3}{2 - t} = 4 - t$$

$$\text{বা, } 3 = (2 - t)(4 - t)$$

$$\text{বা, } 8 - 2t - 4t + t^2 = 3$$

$$\text{বা, } t^2 - 6t + 8 - 3 = 0$$

$$\text{বা, } t^2 - 6t + 5 = 0$$

$$\text{বা, } t^2 - 5t - t + 5 = 0$$

$$\text{বা, } t(t - 5) - 1(t - 5) = 0$$

$$\text{বা, } (t - 5)(t - 1) = 0$$

$$\text{হয়, } t - 5 = 0 \quad \text{অথবা, } t - 1 = 0$$

$$\therefore t = 5 \quad \therefore t = 1$$

$t = 1$  হলে  $A$  ও  $C$  একই বিন্দু হবে। কিন্তু প্রশ্নানুসারে,  $A$ ,  $B$  ও  $C$  ভিন্ন বিন্দু। সুতরাং  $t = 1$  হতে পারে না।

$$\therefore t = 5 \quad (\text{Ans.})$$

$A$ ,  $B$  ও  $C$  সমরেখ অর্থ বিন্দু তিনটি একই রেখার ওপর অবস্থিত। যার ফলে এদের ঢাল সমান হয় এবং এভাবে ত্রিভুজ গঠিত হয় না বলে বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য হয়।

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

যেহেতু  $A$ ,  $B$  এবং  $C$  বিন্দুত্রয় সমরেখ হওয়ায় বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল শূন্য হবে।

$$\therefore \frac{1}{2} \begin{vmatrix} t & 2 & 1 & t \\ 1 & 4 & t & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{বা, } 4t + 2t + 1 - 2 - 4 - t^2 = 0$$

$$\text{বা, } 6t - 5 - t^2 = 0$$

$$\text{বা, } t^2 - 6t + 5 = 0$$

$$\text{বা, } t^2 - 5t - t + 5 = 0$$

$$\text{বা, } t(t - 5) - 1(t - 5) = 0$$

$$\text{বা, } (t - 5)(t - 1) = 0$$

$$\text{হয়, } t - 5 = 0 \quad \text{অথবা, } t - 1 = 0$$

$$\therefore t = 5 \quad \therefore t = 1$$

$$\therefore t = 5 \quad \text{অথবা } 1$$

কিন্তু  $t = 1$  হলে  $A$  ও  $C$  বিন্দু একই হয়।

$$\therefore t = 1 \text{ গ্রহণযোগ্য নহে।}$$

$$\text{সুতরাং } t = 5 \quad (\text{Ans.})$$

৩ দেখাও যে,  $A(0, -3)$ ,  $B(4, -2)$  এবং  $C(16, 1)$  বিন্দু তিনটি সমরেখ।

সমাধান:  $A$ ,  $B$  ও  $C$  সমরেখ হবে যদি  $AB$  ও  $BC$  রেখার ঢাল একই হয়।

$$\text{আমরা জানি, } (x_1, y_1) \text{ ও } (x_2, y_2) \text{ বিন্দুগামী কোনো সরলরেখার ঢাল, } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\therefore AB \text{ রেখার ঢাল} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - (-3)}{4 - 0} = \frac{-2 + 3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\text{এবং } BC \text{ রেখার ঢাল} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-2)}{16 - 4} = \frac{1 + 2}{12} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

$$\therefore AB \text{ এবং } BC \text{ রেখার ঢাল একই।}$$

সুতরাং  $A$ ,  $B$ ,  $C$  বিন্দু তিনটি সমরেখ।  $(\text{Ans.})$

বিকল্প: তিনটি বিন্দু দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য হলে বিন্দুত্রয় সমরেখ। নিজে নিজে সমাধানের চেষ্টা কর।

৪  $A(1, -1)$ ,  $B(t, 2)$  এবং  $C(t^2, t + 3)$  সমরেখ হলে  $t$  এর সম্ভাব্য মান নির্ণয় কর।

সমাধান:  $A$ ,  $B$  ও  $C$  সমরেখ হওয়ায়  $AB$  ও  $BC$  রেখার ঢাল একই হবে।  
আমরা জানি,

$$(x_1, y_1) \text{ ও } (x_2, y_2) \text{ বিন্দুগামী কোনো সরলরেখার ঢাল, } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\therefore AB \text{ রেখার ঢাল } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{2 - (-1)}{t - 1} = \frac{2 + 1}{t - 1} = \frac{3}{t - 1}$$

$$\text{এবং } BC \text{ রেখার ঢাল} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{t + 3 - 2}{t^2 - t} = \frac{t + 1}{t^2 - t}$$

$$\text{প্রশ্নানুসারে, } \frac{3}{t - 1} = \frac{t + 1}{t^2 - t}$$

$$\text{বা, } 3(t^2 - t) = (t + 1)(t - 1)$$

$$\text{বা, } 3t^2 - 3t = t^2 - 1$$

$$\text{বা, } 3t^2 - 3t - t^2 + 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2t^2 - 3t + 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2t^2 - 2t - t + 1 = 0$$

$$\text{বা, } (t - 1)(2t - 1) = 0$$

$$\text{হয়, } t - 1 = 0$$

$$\therefore t = 1$$

$$\text{অথবা, } 2t - 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2t = 1$$

$$\therefore t = \frac{1}{2}$$

$$\therefore t = 1, \frac{1}{2} \quad (\text{Ans.})$$

## সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

প্রদত্ত  $A(1, -1)$ ,  $B(t, 2)$  এবং  $C(t^2, t+3)$  বিন্দুত্রয় সমরেখ।  
 $\therefore \triangle ABC$  এর ক্ষেত্রফল শূন্য হবে।

$$\text{অর্থাৎ } \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & t & t^2 & 1 \\ -1 & 2 & t+3 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{বা, } 2 + t(t+3) - t^2 + t - 2t^2 - (t+3) &= 0 \\ \text{বা, } 2 + t^2 + 3t - t^2 + t - 2t^2 - t - 3 &= 0 \\ \text{বা, } -1 + 3t - 2t^2 &= 0 \\ \text{বা, } 2t^2 - 3t + 1 &= 0 \end{aligned}$$

$$\text{বা, } 2t^2 - 2t - t + 1 = 0$$

$$\text{বা, } 2t(t-1) - 1(t-1) = 0$$

$$\text{বা, } (t-1)(2t-1) = 0$$

$$\text{হয়, } t-1 = 0$$

$$\text{অথবা, } 2t-1 = 0$$

$$\therefore t = 1$$

$$\text{বা, } 2t = 1$$

$$\therefore t = \frac{1}{2}$$

$$\therefore t = 1, \frac{1}{2} \text{ (Ans.)}$$

৫  $A(3, 3p)$  এবং  $B(4, p^2 + 1)$  বিন্দুগামী রেখার ঢাল  $-1$  হলে  $p$  এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে,  $A(3, 3p)$  এবং  $B(4, p^2 + 1)$  বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল  $-1$ ।

আমরা জানি,

$$(x_1, y_1) \text{ ও } (x_2, y_2) \text{ বিন্দুগামী কোনো সরলরেখার ঢাল, } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\begin{aligned} \therefore AB \text{ রেখার ঢাল} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{p^2 + 1 - 3p}{4 - 3} = \frac{p^2 - 3p + 1}{1} = p^2 - 3p + 1 \end{aligned}$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } p^2 - 3p + 1 = -1$$

$$\text{বা, } p^2 - 3p + 1 + 1 = 0$$

$$\text{বা, } p^2 - 3p + 2 = 0$$

$$\text{বা, } p^2 - 2p - p + 2 = 0$$

$$\text{বা, } p(p-2) - 1(p-2) = 0$$

$$\text{বা, } (p-2)(p-1) = 0$$

$$\therefore p = 2 \quad p = 1$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় মান } p = 1, 2 \text{ (Ans.)}$$

৬ প্রমাণ কর যে,  $A(a, 0)$ ,  $B(0, b)$  এবং  $C(1, 1)$  সমরেখ হবে, যদি  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$  হয়।

সমাধান:  $A, B$  ও  $C$  সমরেখ হওয়ায়  $AB$  ও  $BC$  রেখার ঢাল একই হবে।

আমরা জানি,

$$(x_1, y_1) \text{ ও } (x_2, y_2) \text{ বিন্দুগামী কোনো সরলরেখার ঢাল, } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\text{এখন } AB \text{ রেখার ঢাল} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{b - 0}{0 - a} = -\frac{b}{a}$$

$$BC \text{ রেখার ঢাল} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - b}{1 - 0} = \frac{1 - b}{1} = 1 - b$$

$$\text{প্রশ্নমতে, } -\frac{b}{a} = 1 - b$$

$$\text{বা, } -b = a - ab$$

$$\text{বা, } a + b = ab$$

$$\text{বা, } \frac{a+b}{ab} = 1$$

$$\text{বা, } \frac{a}{ab} + \frac{b}{ab} = 1$$

$$\therefore \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1$$

$$\therefore A, B, C \text{ সমরেখ হবে যদি } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = 1 \text{ হয়। (প্রমাণিত)}$$

৭  $A(a, b)$ ,  $B(b, a)$  এবং  $C\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right)$  সমরেখ হলে প্রমাণ কর যে,  $a + b = 0$ ।

সমাধান:  $A, B$  ও  $C$  সমরেখ হওয়ায়  $AB$  ও  $BC$  রেখার ঢাল একই হবে।

$$\text{আমরা জানি, } A(x_1, y_1) \text{ ও } B(x_2, y_2) \text{ বিন্দুগামী সরলরেখার ঢাল } m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$\begin{aligned} \therefore AB \text{ রেখার ঢাল} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{a - b}{b - a} \\ &= \frac{-(b - a)}{(b - a)} = -1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} BC \text{ রেখার ঢাল} &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{\frac{1}{b} - a}{\frac{1}{a} - b} = \frac{\frac{1 - ab}{b}}{\frac{1 - ab}{a}} = \frac{(1 - ab)}{b} \times \frac{a}{(1 - ab)} = \frac{a}{b} \end{aligned}$$

$$\text{শর্তমতে, } -1 = \frac{a}{b}$$

$$\text{বা, } a = -b$$

$$\therefore a + b = 0 \text{ (প্রমাণিত)}$$

বিকল্প: বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল শূন্য ধরে করলেও  $a + b = 0$  প্রমাণ করা যায়। নিজে নিজে চেষ্টা কর।