অনুশীলনী - ৬.৩

দুই চলকবিশিষ্ট সরল একঘাত অসমতা: যে অসমতার সমীকরণে একঘাতবিশিষ্ট দুইটি চলক থাকলে তাকে দুই চলকবিশিষ্ট সরল অসমতার সমীকরণ বলে।

উদাহরণ: $x - y > -10;\ 2x - y < 6$

সরলরেখার সমীকরণ: দুই চলকবিশিষ্ট $y = mx + c$ (যার সাধারণ আকার $ax + by + c = 0$) আকারের সরল প্রত্যেক সমীকরণের লেখচিত্রই একটি সরলরেখা। অর্থাৎ একঘাতবিশিষ্ট সকল সমীকরণের লেখচিত্র সরলরেখা।

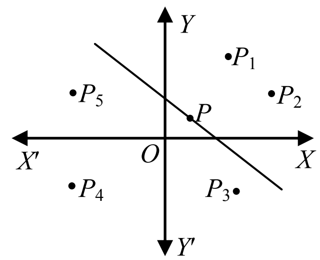
লেখচিত্রের বিশ্লেষণ: বাস্তব লেখচিত্রের বহিঃস্থ সকল বিন্দু লেখ দ্বারা দুইটি অর্ধতলে বিভক্ত হয়।

যেমন: $f(x) = 0$ কোনো সমীকণের লেখের

(i) লেখস্থিত P বিন্দুর জন্য $f(P) = 0$

(ii) উপরি অর্ধতলে ($P_1, P_2 \ldots$) সকল বিন্দুর জন্য $f(P_1) > 0, f(P_2) > 0 \ldots$

(iii) নিম্নে অর্ধতলে সকল ($P_3, P_4, P_5 \ldots$) বিন্দুর জন্য $f(P_3) < 0, f(P_4) < 0, f(P_5) < 0$



দুই চলকবিশিষ্ট অসমতার লেখচিত্র অঙ্কন: লেখচিত্র অঙ্কন করতে নিম্নোক্ত ধাপগুলো মনে রাখা জরুরি।

(i) অসমতার সমীকরণকে সাধারণ সমীকরণ করে সমীকরণের যেকোনো দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে।

(ii) অতঃপর দুইট বিন্দু দিয়ে সরলরেখা অঙ্কন করে অসমতার অনুকূল এলাকা নির্ধারণ করতে হবে।

অসমতার অনুকূল এলাকা নির্ধারণ

অসমতার অনুকূল এলাকা নির্ণয়ে নিম্নোক্ত দুইটির যেকোনো একটি পদ্ধতি অবলম্বন করা যেতে পারে।

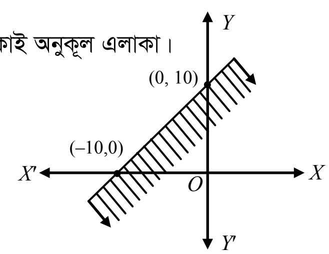
পদ্ধতি-১:

(i) (0, 0) বা মূলবিন্দুর জন্য কোনো অসমতা সত্য হলে লেখের যে পাশে মূলবিন্দু আছে সে পাশের এলাকাই অনুকূল এলাকা।

উদাহরণ: $x - y + 10 > 0$ অসমতাটি (0, 0) বিন্দুর জন্য

$0 - 0 + 10 > 0$ বা, $10 > 0$ সত্য।

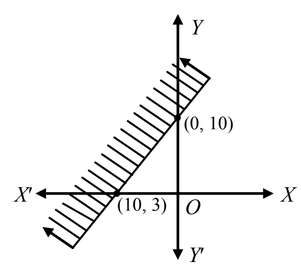
তাই মূলবিন্দুর পাশের অর্ধতল এলাকাই হবে অনুকূল এলাকা।



(ii) (0, 0) বিন্দুর জন্য অসমতাটি সত্য না হলে লেখের যে পাশে মূলবিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত পাশের ঊর্ধ্বতল এলাকাই অনুকূল এলাকা।

উদাহরণ: $x - y + 10 < 0$ অসমতাটি (0, 0) বিন্দুর জন্য $0 - 0 + 10 < 0$ বা, $10 < 0$ সত্য নয়।

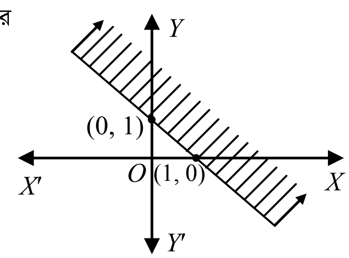
তাই মূলবিন্দুর বিপরীত পাশের ঊর্ধ্বতল এলাকা অনুকূল এলাকা।



পদ্ধতি-২: প্রতিটি অসমতার সমীকরণকে $y = mx + c$ আকারে প্রকাশ করে অসমতার চিহ্ন অনুসারে অনুকূল এলাকা নির্ধারণ করতে হবে।

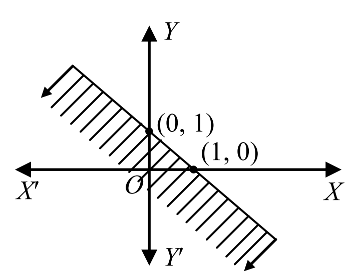
(i) $y > mx + c$ আকারে থাকলে উপর অর্ধতল অনুকূল এলাকা

উদাহরণ: $y > -x + 1$ এর উপরি অর্ধতল অনুকূল এলাকা।

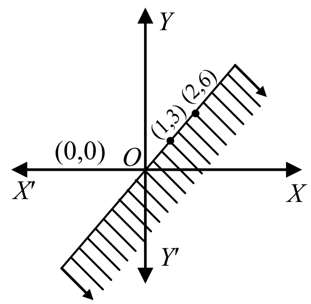


(ii) $y < mx + c$ আকারে থাকলে নিম্ন অর্ধতল অনুকূল এলাকা

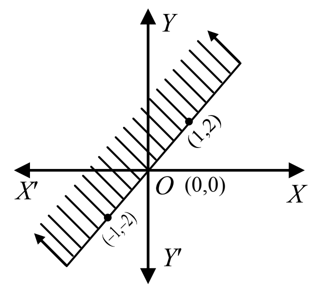
উদাহরণ: $y < -x + 1$ অসমাতর নিম্ন অর্ধতল এলাকা অনুকূল এলাকা।



মূলবিন্দুগামী অসমতার অনুকূল এলাকা:
লেখচিত্র রেখার বিন্দুগুলো ব্যতীত নিচের অংশের অথবা উপরের অংশের বিন্দুর জন্য-

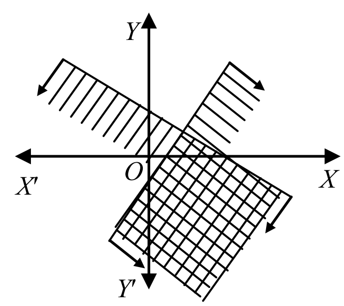


(i) যদি অসমতাটি সত্য হয় তবে যে পাশে বিন্দুটি অবস্থিত সেই পাশের এলাকাই অনুকূল এলাকা।
উদাহরণ: $3x - y \geq 0$ অসমতাটিতে $(1, 1)$ বিন্দুর জন্য $3.1 - 1 = 3 - 1 = 2 > 0$ সত্য। তাই $(1, 1)$ বিন্দু যে পাশে অবস্থিত সেই এলাকাই হবে অনুকূল এলাকা।



(ii) যদি অসমতাটি সত্য না হয় তবে যে পাশের বিন্দুটি অবস্থিত তার বিপরীত পাশের উর্ধ্বতল এলাকাই অনুকূল এলাকা।
উদাহরণ: $y - 2x \geq 0$ অসমতাটি $(1,0)$ বিন্দুর জন্য $0 - 2.1 = -2 < 0$ যা সত্য নয়।

জেনে রাখা আবশ্যিক:
(i) '$<$' ও '$>$' চিহ্নবিশিষ্ট অসমতার সমীকরণ লেখের উপরিস্থিত কোনো বিন্দুর জন্য সিদ্ধ নয়। তাই লেখচিত্রের উপরস্থ এলাকা অনুকূল এলাকা নির্দেশ করেনা।
(ii) '$\leq$' ও '$\geq$' চিহ্নবিশিষ্ট অসমতার সমীকরণ লেখের উপরিস্থিত বিন্দুসহ অনুকূল এলাকার সকল বিন্দুর জন্য সিদ্ধ হয়। তাই লেখের উপরিস্থিত সকল বিন্দু অনুকূল এলাকার অন্তর্ভূক্ত।



অসমতার যুগলের যুগপৎ সমাধান: একঘাতবিশিষ্ট অসমতার সমীকরণের লেখচিত্র সর্বদাই সরলরেখা। দুইটি সরলরেখা কেবলমাত্র একটি বিন্দুতে ছেদ করে। এ ছেদবিন্দুই অসমতাযুগলের যুগপৎ সমাধান হবে যদি
(i) ছেদবিন্দুটি অবশ্যই উভয় অসমতার অনুকূল এলাকায় অবস্থিত হতে হবে।
(ii) অসমতার লেখ দুইটির সংশ্লিষ্ট অংশসহ এই দুইভাবে চিহ্নিত অংশের ছেদাংশই অসমতা দুইটি যুগপৎ সমাধানের লেখচিত্র।

চিত্রে  চিহ্নিত অংশ যুগপৎ সমাধানের লেখচিত্র।

অনুশীলনীর সমাধান

১ $5x + 5 > 25$ অসমতাটির সমাধান সেট কোনটি?
(ক) $S = \{x \in \boldsymbol{R} : x > 4\}$ (খ) $S = \{x \in \boldsymbol{R} : x < 4\}$
(গ) $S = \{x \in \boldsymbol{R} : x \leq 4\}$ (ঘ) $S = \{x \in \boldsymbol{R} : x \geq 4\}$

উত্তর: (ক)
ব্যাখ্যা: এখানে, $5x + 5 > 25$ বা, $5x > 20 \therefore x > 4$
সুতরাং, সমাধান সেট $S = \{x \in \boldsymbol{R} : x > 4\}$
জেনে নাও: অসমতার সেট সমাধান সেট সাধারণত বাস্তব সংখ্যার অসীম উপসেট অর্থাৎ অসমতার সমাধান সর্বদাই একটি ব্যাবধি নির্দেশ করে।

২ $x + y = -2$ সমীকরণটিতে x এর কোন মানের জন্য $y = 0$ হবে?
(ক) 2 (খ) 0 (গ) 4 (ঘ) -2

উত্তর: (ঘ)
ব্যাখ্যা: $y = 0$ হলে পাই, $x + 0 = -2 \therefore x = -2$
$\therefore x = -2$ এর জন্য $y = 0$ হবে।

৩ $2xy + y = 3$ সমীকরণটির সঠিক স্থানাংক কোনগুলো?
(ক) $(1, -1), (2, -1)$ (খ) $(1, 1), (-1, -3)$
(গ) $(1, 1), (-2, 1)$ (ঘ) $(-1, 1), (2, -1)$

উত্তর: (খ)
ব্যাখ্যা: যেসব বিন্দু দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় সেসব বিন্দুই সমীকরণের জন্য সঠিক স্থানাংক। অপশনে $(1, 1)$ এর জন্য সমীকরণটির
বামপক্ষ $= 2.1.1 + 1 = 3 =$ ডানপক্ষ
আবার, $(-1, -3)$ এর জন্য সমীকরণটির
বামপক্ষ $= 2.(-1).(-3) - 3 = 3 =$ ডানপক্ষ
সুতরাং $(-1, 1), (-1, -3)$ বিন্দুর জন্য সমীকরণটি সঠিক।

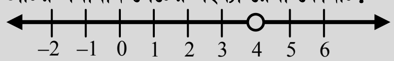
■ **নিম্নে অসমতাটি থেকে ৪ ও ৫ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও:**
$x \le \frac{x}{4} + 3$

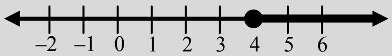
৪ **অসমতাটির সমাধান সেট কোনটি?**
(ক) $S = \{x \in \boldsymbol{R} : x > 4\}$ (খ) $S = \{x \in \boldsymbol{R} : x < 4\}$
(গ) $S = \{x \in \boldsymbol{R} : x \le 4\}$ (ঘ) $S = \{x \in \boldsymbol{R} : x \ge 4\}$

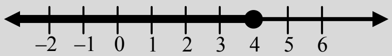
উত্তর: (গ)

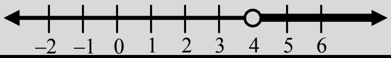
ব্যাখ্যা: এখানে, $x \le \frac{x}{4} + 3$ বা, $4x \le x + 12$ বা, $3x \le 12 \therefore x \le 4$
অতএব সমাধান সেট, $S = \{x \in \boldsymbol{R} : x \le 4\}$

৫ **অসমতাটির সমাধান সেটের সংখ্যা রেখা কোনটি?**

(ক) 

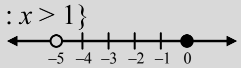
(খ) 

(গ) 

(ঘ) 

উত্তর: (গ)

ব্যাখ্যা: ৪ নং প্রশ্ন থেকে পাই 4 বা 4 থেকে ছোট সকল বাস্তব সংখ্যাই অসমতাটির সমাধান। অসমতাটি '≤' চিহ্নযুক্ত হওয়ায় ('4') বৃত্তটি ভরাট করা হয়েছে।

৬ **$3x + 6 > 9$ অসমতাটির-**
i. উভয়পক্ষে 3 দ্বারা ভাগ করলে $x + 2 > 3$ পাওয়া যায়
ii. সমাধান সেট = $\{x \in R : x > 1\}$
iii. সংখ্যারেখায় সমাধান সেট 

নিচের কোনটি সঠিক?
(ক) i ও ii (খ) i ও iii
(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: (ক) i ও ii

ব্যাখ্যা: প্রদত্ত অসমতা, $3x + 6 > 9$

বা, $\frac{3x+6}{3} > \frac{9}{3}$ [উভয়পক্ষে 3 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\frac{3(x+2)}{3} > 3$

বা, $x + 2 > 3$ ……… (1)

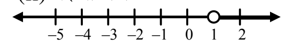
বা, $x > 3 - 2$

$\therefore x > 1$

$\therefore$ **সমাধান সেট = $\{x \in \boldsymbol{R} : x > 1\}$** ……… (2)

(1) ও (2) নং থেকে বলা যায়, (i) ও (ii) নং সঠিক।

সংখ্যারেখায় সমাধান সেটটি পার্শ্বরূপ যা প্রদত্ত সংখ্যারেখার সাথে সাদৃশ্যপূর্ণ নয়।



$\therefore$ (iii) নং সঠিক নয়।

৭ **রিতা, মিতা ও বীথির বয়স যথাক্রমে x, $2x$ ও $3x$ বছর এবং তাদের তিন জনের বয়সের সমষ্টি অনূর্ধ্ব 60 বছর হলে**
i. সমস্যাটির গাণিতিক প্রকাশ $x + 2x + 3x \le 60$
ii. রিতার বয়স ≤ 10 বছর
iii. মিতার বয়স > 20 বছর

নিচের কোনটি সঠিক?
(ক) i, ii (খ) i, iii (গ) ii, iii (ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: (ক)

ব্যাখ্যা: তিনজনের বয়স যথাক্রমে x, $2x$ ও $3x$ এবং বয়সের সমষ্টি অনূর্ধ্ব 60 বছর
শর্তানুসারে, $x + 2x + 3x \le 60$
বা, $6x \le 60$
$\therefore$ **$x \le 10$**
$\therefore$ **রিতার বয়স ≤ 10** বছর, **মিতার বয়স $= 2x \le 2.10 \le 20$** বছর
সুতরাং (i) ও (ii) নং সঠিক কিন্তু (iii) নং সঠিক নয়।

৮ **a, b ও c তিনটি বাস্তব সংখ্যা। $a > b$ এবং $c \ne 0$ হলে**
i. $ac > bc$ যখন $c > 0$
ii. $ac < bc$ যখন $c < 0$
iii. $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ যখন $c > 0$

নিচের কোনটি সঠিক?
(ক) i, ii (খ) i, iii (গ) ii, iii (ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: (ঘ)

ব্যাখ্যা: দেওয়া আছে, a, b ও c বাস্তব সংখ্যা।
$a > b$ এবং $c \ne 0$ হলে পাই,

(i) $ac > bc$; যখন $c > 0$ [c ধনাত্মক হওয়ায় অসমতার চিহ্নের পরিবর্তন হয়নি]

(ii) $ac < bc$; যখন $c < 0$ [c ঋণাত্মক হওয়ায় অসমতার চিহ্নের পরিবর্তন হয়েছে]

(iii) $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$; যখন $c > 0$ [c ধনাত্মক হওয়ায় অসমতার চিহ্নের পরিবর্তন হয়নি]

অর্থাৎ, (i), (ii) ও (ii) এর প্রত্যেকটিই সঠিক।

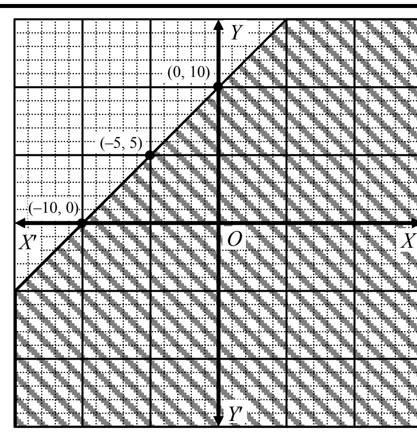
৯ **নিম্নের প্রত্যেক অসমতার সমাধান সেটের লেখচিত্র অঙ্কন কর:**
(ক) $x - y > -10$ **(খ) $2x - y < 6$** **(গ) $3x - y \ge 0$** **(ঘ) $3x - 2y \le 12$** **(ঙ) $y < -2$**
(চ) $x \ge 4$ **(ছ) $y > x + 2$** **(জ) $y < x + 2$** **(ঝ) $y \ge 2x$** **(ঞ) $x + 3y < 0$**

সমাধান:

ক $x - y > -10$ অসমতাটিকে $x - y + 10 > 0$ আকারে লেখা যায়। এখন, $x - y + 10 = 0$
অর্থাৎ $y = x + 10$
সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি। সমীকরণটি থেকে পাই,

x	-10	-5	0
y	0	5	10

স্থানাঙ্কায়িত ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(-10, 0)$, $(-5, 5)$, $(0, 10)$ বিন্দুগুলোকে স্থাপন করে লেখচিত্র রেখাটি অঙ্কন করা হলো।



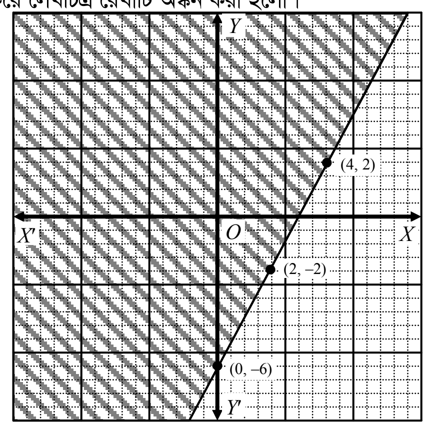
$x - y + 10 > 0$ অসমতায় মূলবিন্দু $(0, 0)$ এর মান বসালে পাই $10 > 0$, যা অসমতাকে সিদ্ধ করে। সুতরাং অসমতাটির ছায়াচিত্র হবে $x - y + 10 = 0$ রেখাটির যে পাশে মূলবিন্দু রয়েছে সে পাশে। অতএব, $x - y + 10 > 0$ অসমতার সমাধান সেট হবে $x - y + 10 = 0$ সমীকরণের লেখচিত্র রেখার উপর স্পর্শবিন্দু বাদে যে পাশে মূল বিন্দু অবস্থিত সে পাশের সকল বিন্দুর স্থানাঙ্কের সমন্বয়ে গঠিত।

জেনে রাখা ভালো:
১. সরলরেখার লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য দুইটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয়ই যথেষ্ট।
২. '>' বা '<' চিহ্ন বিশিষ্ট অসমতা সমাধান সেটে লেখের উপরস্থ বিন্দুগুলো অন্তর্ভুক্ত নয়।
৩. '≥' বা '≤' চিহ্ন বিশিষ্ট অসমতার সমাধান সেটে লেখের উপরস্থ বিন্দুগুলো অন্তর্ভুক্ত।

খ $2x - y < 6$ অসমতাটিকে $2x - y - 6 < 0$ আকারে লেখা যায়।
এখন, $2x - y - 6 = 0$
অর্থাৎ, $y = 2x - 6$
সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি। সমীকরণটি থেকে পাই,

x	0	2	4
y	-6	-2	2

স্থানাঙ্কায়িত ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি দুই বাহু দৈর্ঘ্যেকে দ্বিগুণকে একক ধরে $(0, -6)$, $(2, -2)$, $(4, 2)$ বিন্দুগুলোকে স্থাপন করে লেখচিত্র রেখাটি অঙ্কন করা হলো।

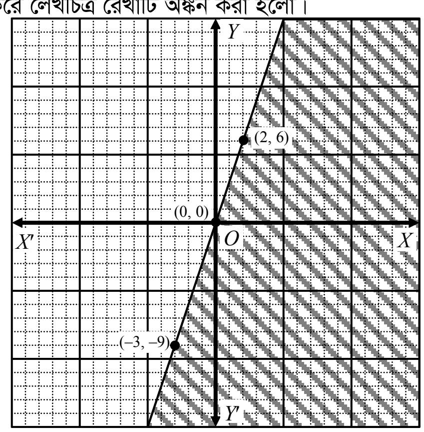


$2x - y - 6 < 0$ অসমতায় মূলবিন্দু $(0,0)$ এর মান বসালে পাই $-6 < 0$ যা অসমতাটিকে সিদ্ধ করে। সুতরাং অসমতাটির ছায়াচিত্র হবে $2x - y - 6$ রেখাটির যে পাশে মূলবিন্দু রয়েছে সে পাশে।
অতএব, $2x - y - 6 < 0$ অসমতার সমাধান সেট হবে $2x - y - 6 = 0$ সমীকরণের লেখচিত্র রেখার উপরস্থ বিন্দুগুলো বাদে যে পাশে মূলবিন্দু অবস্থিত সে পাশের সকল বিন্দুর স্থানাঙ্কের সমন্বয়ে গঠিত।

গ প্রদত্ত অসমতা, $3x - y \geq 0$
এখন, $3x - y = 0$ বা, $y = 3x$
সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি। সমীকরণটি থেকে পাই,

x	0	2	-3
y	0	6	-9

স্থানাঙ্কায়িত ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যেকে দ্বিগুণকে একক ধরে $(0, 0)$, $(2, 6)$ $(-3, -9)$, বিন্দুগুলোকে স্থাপন করে লেখচিত্র রেখাটি অঙ্কন করা হলো।

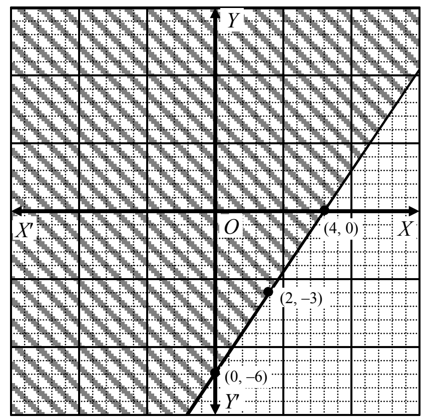


$(0, 0)$ বিন্দু ছাড়াও লেখচিত্রের ডানপাশে $(2, 6)$ বিন্দুর জন্য $3x - y \geq 0$ অসমতাটি সত্য।
লেখরেখাসহ লেখ হতে মূলবিন্দুর ডানপাশে বিন্দুগুলোর সমন্বয়ে গঠিত সমতলের অংশটুকুই প্রদত্ত অসমতার লেখচিত্র।

ঘ $3x - 2y \leq 12$ অসমতাটিকে $3x - 2y - 12 \leq 0$ আকারে লেখা যায়।
এখন, $3x - 2y - 12 = 0$ বা, $y = \dfrac{3x - 12}{2}$
সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি। সমীকরণটি থেকে পাই,

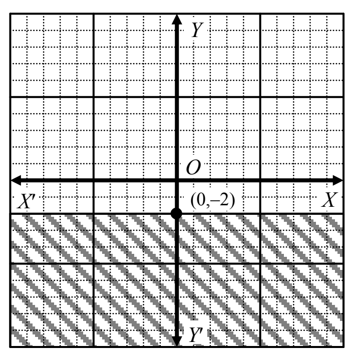
x	0	2	4
y	-6	-3	0

স্থানাঙ্কায়িত ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের দৈর্ঘ্যে দ্বিগুণকে একক ধরে $(0, -6)$, $(2, -3)$, $(4, 0)$ বিন্দুগুলোকে স্থাপন করে লেখচিত্র রেখাটি অঙ্কন করা হলো।



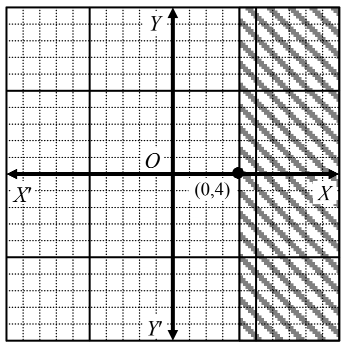
$3x - 2y - 12 \leq 0$ অসমতায় মূলবিন্দু $(0,0)$ এর মান বসালে পাই, $-12 \leq 0$ যা অসমতাটিকে সিদ্ধ করে।
অতএব, $3x - 2y - 12 \leq 0$ অসমতার সমাধান সেট $3x - 2y - 12 = 0$ সমীকরণের লেখচিত্রস্থিত সকল বিন্দুর এবং লেখচিত্রের যে পাশে মূলবিন্দু অবস্থিত সে পাশের সকল বিন্দুর স্থানাঙ্কের সমন্বয়ে গঠিত।

ঙ $y < -2$ অসমতাটিকে $y + 2 < 0$ আকারে লেখা যায়।
এখন স্থানাঙ্কায়িত (x, y) সমতলে $y + 2 = 0$ বা, $y = -2$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(0, -2)$ বিন্দু দিয়ে X-অক্ষের সমান্তরাল করে লেখচিত্র রেখাটি অঙ্কন করি।



$y + 2 < 0$ অসমতায় মুলবিন্দু $(0, 0)$ এর মান বসালে $2 < 0$ যা অসমতাটিকে সিদ্ধ করে না। সুতরাং অসমতাটির ছায়াচিত্র হবে, $y + 2 = 0$ রেখাটির যে পাশে মূলবিন্দু তার বিপরীত পাশে।
অতএব, $y + 2 < 0$ অসমতার সমাধান সেট $y = -2$ সমীকরণের লেখচিত্র রেখার উপর সকল বিন্দু বাদে যে পাশে মূলবিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর স্থানাঙ্কের সমন্বয়ে গঠিত।

চ $x \geq 4$ অসমতাটিকে $x - 4 \geq 0$ আকারে লেখা যায়।
এখন স্থানাঙ্কায়িত (x, y) সমতলে $x - 4 = 0$ বা, $x = 4$ সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(4, 0)$ বিন্দু দিয়ে y- অক্ষের সমান্তরাল করে লেখচিত্র রেখাটি অঙ্কন করি।



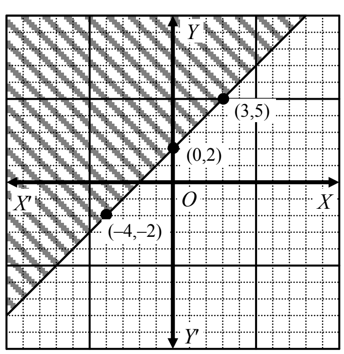
$x - 4 \geq 0$ অসমতায় মূল বিন্দু $(0,0)$ এর মান বসালে পাই, $-4 \geq 0$ যা সত্য নয়। সুতরাং অসমতাটির ছায়াচিত্র হবে রেখাটির যে পাশে মূলবিন্দু তার বিপরীত পাশে।

অতএব, $x - 4 > 0$ অসমতার সমাধান সেট $x - 4 = 0$ সমীকরণের লেখচিত্রস্থিত সকল বিন্দু এবং লেখচিত্রের যে পাশে মূলবিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর স্থানাঙ্কের সমন্বয়ে গঠিত।

ছ $y > x + 2$ অসমতাটিকে $y - x - 2 > 0$ আকারে লেখা যায়।
এখন, $y - x - 2 = 0$ বা, $y = x + 2$
সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি। সমীকরণটি থেকে পাই,

x	-4	0	3
y	-2	2	5

স্থানাঙ্কায়িত ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহু দৈর্ঘ্যে একক ধরে $(-4, -2)$, $(0, 2)$, $(3, 5)$ বিন্দুগুলোকে স্থাপন করে লেখচিত্র রেখাটি অঙ্কন করা হলো।



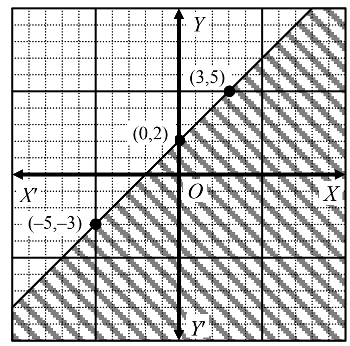
$y - x - 2 > 0$ অসমতায় মূল বিন্দু $(0, 0)$ এর মান বসালে পাই, $-2 > 0$ যা সত্য নয়। সুতরাং অসমতাটির ছায়াচিত্র হবে $y - x - 2 = 0$ রেখাটি যে পাশে মূলবিন্দু রয়েছে তার বিপরীত পাশে।

$y - x - 2 > 0$ অসমতার সমাধান সেট $y - x - 2 = 0$ সমীকরণের লেখচিত্র রেখার উপর সকল বিন্দু বাদে যে পাশে মূল বিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর স্থানাঙ্কের সমন্বয়ের গঠিত।

জ $y < x + 2$ অসমতাটিকে $y - x - 2 < 0$ আকারে লেখা যায়।
এখন, $y - x - 2 = 0$ বা, $y = x + 2$
সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি। সমীকরণটি থেকে পাই,

x	-5	0	3
y	-3	2	5

স্থানাঙ্কায়িত ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(-5, -3)$, $(0, 2)$, $(3, 5)$ বিন্দুগুলোকে স্থাপন করে লেখচিত্র রেখাটি অঙ্কন করা হলো।



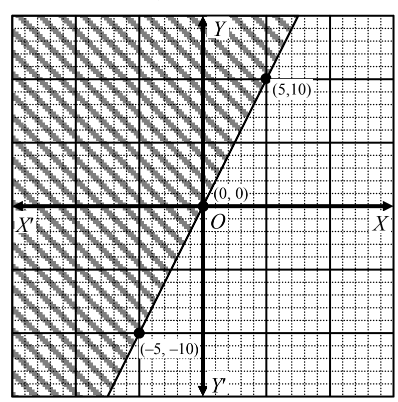
$y - x - 2 < 0$ অসমতায় মূল বিন্দু $(0, 0)$ এর মান বসালে পাই, $-2 < 0$ যা সত্য। সুতরাং অসমতাটির ছায়াচিত্র হবে $y - x - 2 = 0$ রেখাটির যে পাশে মূলবিন্দু রয়েছে সে পাশে।

$y - x - 2 < 0$ অসমতার সমাধান সেট $y - x - 2 = 0$ সমীকরণের লেখের উপরস্থ বিন্দুগুলো বাদে যে পাশে মূল বিন্দু অবস্থিত সে পাশের সকল বিন্দুর স্থানাঙ্কের সমন্বয়ে গঠিত।

জ $y \geq 2x$ অসমতাটিকে $y - 2x \geq 0$ আকারে লেখা যায়।
এখন, $y - 2x = 0$ বা, $y = 2x$
সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি। সমীকরণটি থেকে পাই,

x	-5	0	5
y	-10	0	10

স্থানাঙ্কায়িত ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যেকে একক ধরে $(-5, -10)$, $(0, 0)$, $(5, 10)$ বিন্দুগুলোকে স্থাপন করে লেখচিত্র রেখাটি অঙ্কন করা হলো।



লেখচিত্রটি মূল বিন্দুগামী হওয়ায় লেখের বামে বা ডানে যেকোনো একটি বিন্দু নির্বাচন করি যেমন $(-1, -1)$ এখন এ বিন্দুর জন্য $y - 2x \geq 0$ সমীকরণ সিদ্ধ হয়।
সুতরাং লেখচিত্র রেখাটি ও তার উপরের অংশ (অর্থাৎ, যে অংশে $(-1, -1)$ বিন্দুটি অবস্থিত) সমন্বয়ে গঠিত সমতলের অংশটুকুই প্রদত্ত অসমতার লেখচিত্র।

ঞ অসমতাটি $x + 3y < 0$

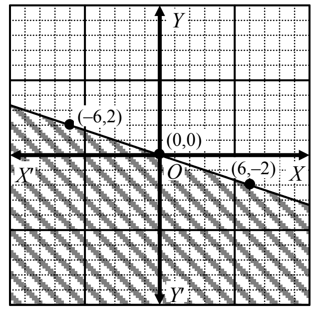
এখন, $3y = -x$

বা, $y = -\frac{x}{3}$

সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি। সমীকরণটি থেকে পাই,

x	-6	0	6
y	2	0	-2

স্থানাঙ্কায়িত ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(-6, 2)$, $(0, 0)$, $(6, -2)$ বিন্দুগুলোকে স্থাপন করে লেখচিত্র রেখাটি অঙ্কন করা হলো।



$(1, 1)$ বিন্দুটি লেখচিত্র রেখার "উপরের অংশে" আছে। এই বিন্দুতে $x + 3y = 1 + 3 = 4$, যা ধনাত্মক।
সুতরাং লেখচিত্র রেখা ব্যতীত তার নিচের অংশ (অর্থাৎ, যে অংশে $(1, 1)$ বিন্দুটি অবস্থিত) সমন্বয়ে গঠিত সমতলের অংশটুকু প্রদত্ত অসমতার লেখচিত্র।

১০ **হযরত শাহজালাল বিমান বন্দর থেকে সিঙ্গাপুর বিমান বন্দরের দূরত্ব 2900 কি.মি.। বাংলাদেশ বিমানের সর্বোচ্চ গতিবেগ 500 কি.মি./ঘণ্টা। কিন্তু হযরত শাহাজালাল বিমান বন্দর থেকে সিঙ্গাপুর যাবার পথে প্রতিকূলে 60 কি.মি./ঘণ্টা বেগে বায়ু প্রবাহের সম্মুখীন হয়।**

ক. উদ্দীপকের সমস্যাটির প্রয়োজনীয় সময় t ঘণ্টা ধরে সমস্যাটিকে অসমতায় দেখাও।

খ. হযরত শাহজালাল বিমানবন্দর থেকে সিঙ্গাপুর বিমান বন্দর পর্যন্ত বিরতিহীন উড্ডয়নের প্রয়োজনীয় সময় ১০ক তে বর্ণিত অসমতা থেকে নির্ণয় কর এবং সংখ্যা রেখায় দেখাও।

গ. সিঙ্গাপুর থেকে হযরত শাহজালাল বিমানবন্দরে ফেরার পথে বিরতিহীন উড্ডয়নের প্রয়োজনীয় সময়কে x ধরে সমস্যাটিকে অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ করে লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর।

সমাধানঃ

ক ধরি, শাহজালাল বিমানবন্দর হতে সিঙ্গাপুর যেতে প্রয়োজনীয় সময় t ঘণ্টা। দেওয়া আছে, বাংলাদেশ বিমানের সর্বোচ্চ গতিবেগ 500 কি.মি./ ঘণ্টা এবং বায়ু প্রবাহের বেগ 60 কি.মি./ঘণ্টা।

এখন, বায়ুর প্রতিকূলে বিমানের গতিবেগ $\leq (500 - 60)$ কি.মি./ ঘণ্টা
≤ 440 কি.মি./ ঘণ্টা

অর্থাৎ বায়ুর প্রতিকূলে বিমানটি 1 ঘণ্টায় যায় ≤ 440 কি.মি.

$\therefore$ t ঘণ্টায় বিমানটির অতিক্রান্ত দূরত্ব কি.মি.

বা, $2900 \leq 440t$ [$\because$ হযরত শাহজালাল বিমান বন্দর থেকে সিঙ্গাপুর বিমান বন্দরের দূরত্ব 2900 কি.মি.]

$\therefore$ প্রয়োজনীয় সময় t হলে নির্ণেয় অসমতা, $440t \geq 2900$

খ 'ক' হতে প্রাপ্ত অসমতা, $440t \geq 2900$

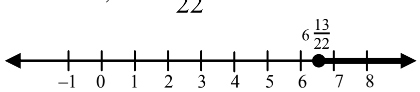
বা, $\frac{440t}{440} \geq \frac{2900}{440}$ [উভয় পক্ষকে 440 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $t \geq \frac{145}{22}$

বা, $t \geq 6\frac{13}{22}$

উড্ডয়নের প্রয়োজনীয় সময়, $t \geq 6\frac{13}{22}$ ঘণ্টা

সংখ্যা রেখাটি:



গ সিঙ্গাপুর থেকে শাহজালাল বিমানবন্দর ফেরার পথে প্রয়োজনীয় সময় x ঘণ্টা
আবার, সিঙ্গাপুর থেকে ফেরার পথে বায়ুর অনুকূলে বিমানের গতিবেগ $\leq (500 + 60)$ কি.মি./ ঘণ্টা
≤ 560 কি.মি./ ঘণ্টা।

অর্থাৎ 1 ঘণ্টায় বিমানটির অতিক্রান্ত দূরত্ব $\leq 560x$ কি.মি.

$\therefore$ x ঘণ্টায় বিমানটির অতিক্রান্ত দূরত্ব $\leq 560x$ কি.মি.

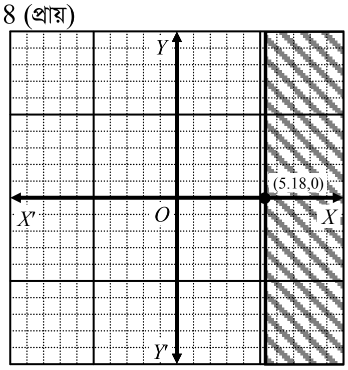
বা, $2900 \leq 560x$

বা, $\frac{2900}{560} \leq \frac{560x}{560}$ [উভয়পক্ষকে 560 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\frac{2900}{560} \leq x$

বা, $x \geq \frac{2900}{560}$

বা, $x \geq 5.18$ (প্রায়)



$x \geq 5.18$ অসমতাটিকে $x = 5.18$ সমীকরণের বিবেচনা করে লেখ অঙ্কন করি। স্থানাঙ্কায়িত ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(5.18, 0)$ বিন্দু দিয়ে y-অক্ষের সমান্তরাল লেখচিত্র রেখাটি অঙ্কন করা হলো।

$x - 5.18 \geq 0$ অসমতায় মূল বিন্দু $(0, 0)$ এর মান বসালে পাই, $-5.18 \geq 0$ যা সত্য নয়।

$\therefore$ $x - 5.18 \geq 0$ অসমতার সমাধান $x - 5.18 = 0$ সমীকরণের লেখচিত্রস্থিত সকল বিন্দু এবং লেখচিত্রের যে পাশে মূলবিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর স্থানাঙ্কের সমন্বয়ে গঠিত।

১১ **দুইটি সংখ্যার ১ম সংখ্যাটির 3 গুণ থেকে ২য় সংখ্যাটির 5 গুণ বিয়োগ করলে 5 অপেক্ষা বৃহত্তর হয়। আবার ১ম সংখ্যা থেকে ২য় সংখ্যার 3 গুণ বিয়োগ করলে অনূর্ধ্ব 9 হয়।**

ক. উদ্দীপকের সমস্যাগুলোকে অসমতায় দেখাও।

খ. ১ম সংখ্যাটির 5 গুণ, ১ম সংখ্যার দ্বিগুণ এবং 15 এর সমষ্টি অপেক্ষা ছোট হলে সংখ্যাটির সম্ভাব্য মান অসমতায় প্রকাশ কর।

গ. ক) এ প্রাপ্ত অসমতা যুগলের সমাধান সেটের লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান:

ক মনে করি, প্রথম সংখ্যাটি x এবং দ্বিতীয় সংখ্যাটি y

প্রশ্নানুসারে, $3x - 5y > 5$

এবং $x - 3y \leq 9$

খ 'ক' হতে যেহেতু ১ম সংখ্যাটি x

তাহলে শর্তানুসারে,

$5x < 2x + 15$

বা, $5x - 2x < 2x + 15 - 2x$ [উভয়পক্ষ থেকে $2x$ বিয়োগ করে]

বা, $3x < 15$

বা, $x < 5$ [উভয়পক্ষকে $\frac{1}{3}$ দ্বারা গুণ করে]

$\therefore x < 5$

গ 'ক' হতে, $3x - 5y > 5$

বা, $3x - 5y - 5 > 0$

বা, $x - 3y \leq 9$ বা, $x - 3y - 9 \leq 0$

$3x - 5y = 5$ ... ... (i)

$x - 3y = 9$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) নং অসমতাযুগলের লেখচিত্র অঙ্কন:

(i) হতে পাই, $-5y = 5 - 3x$

বা, $y = -\frac{1}{5}(5 - 3x)$

বা, $y = \frac{1}{5}(3x - 5)$ সমীকরণটির কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি:

x	0	-10	10
y	-1	-7	5

(ii) হতে পাই, $x - 3y = 9$

বা, $-3y = 9 - x$

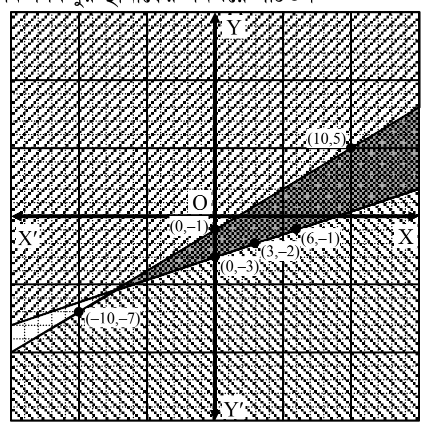
বা, $y = -\frac{1}{3}(9 - x)$

বা, $y = \frac{1}{3}(x - 9)$ সমীকরণের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি:

x	0	3	6
y	-3	-2	-1

এখন ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(0, -1)$, $(-10, -7)$, $(10, 5)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করে (i) নং সমীকরণের লেখচিত্র ও $(0, -3)$, $(3, -2)$, $(6, -1)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করে (ii) নং সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করি।

$3x - 5y - 5 > 0$ অসমতায় মূলবিন্দু $(0, 0)$ এর মান বসালে পাই, $-5 > 0$ যা সত্য নয়। সুতরাং $3x - 5y - 5 > 0$ অসমতার সমাধান সেট হবে $3x - 5y - 5 = 0$ সমীকরণের লেখচিত্র রেখার উপর সকল বিন্দু বাদে যে পাশে মূলবিন্দু অবস্থিত তার বিপরীত পাশের সকল বিন্দুর স্থানাঙ্কের সমন্বয়ে গঠিত।



আবার, $x - 3y - 9 \leq 0$ অসমতায় মূলবিন্দু $(0, 0)$ এর মান বসালে পাই, $-9 < 0$ যা সত্য। সুতরাং $x - 3y - 9 \leq 0$ অসমতার সমাধান সেট হবে $x - 3y - 9 = 0$ সমীকরণের লেখচিত্রস্থিত সকল বিন্দু এবং লেখচিত্রের যে পাশে মূলবিন্দু অবিস্থত সে পাশের সকল বিন্দুর স্থানাঙ্কের সমন্বয়ে গঠিত।

সুতরাং $x - 3y = 9$ লেখ-রেখাসহ (ছেদবিন্দু ছাড়া) চিহ্নিত অংশদ্বয়ের ছেদাংশই প্রদত্ত অসমতাদ্বয়ের সমাধান সেটের লেখচিত্র। চিত্রে গাঢ়ভাবে চিহ্নিত অংশই সমাধান সেটের লেখচিত্র।

১২ একটি কলম, একটি রাবার ও একটি খাতার মূল্য 100 টাকা। খাতার মূল্য দুইটি কলমের মূল্যের থেকে বেশি। তিনটি কলমের মূল্য চারটি রাবারের থেকে বেশি এবং তিনটি রাবারের মূল্য একটি খাতার মূল্যের থেকে বেশি। যদি সকল মূল্যই পূর্ণ টাকায় হয় তাহলে প্রত্যেকটির মূল্য কত?

সমাধান: মনে করি, একটি খাতার মূল্য x টাকা

একটি কলমের মূল্য y টাকা

একটি রাবারের মূল্য z টাকা

প্রশ্নমতে, $x + y + z = 100$ … … … (i)

আবার, $x > 2y$ … … … (ii)

$3y > 4z$ … … … (iii)

$3z > x$ … … … (iv)

যেখানে x, y, z প্রত্যেকই পূর্ণসংখ্যা।

(i) নং হতে পাই, $z = 100 - x - y$

z এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই,

$3y > 4(100 - x - y)$

বা, $3y + 4x + 4y > 400$

বা, $4x + 7y > 400$ … … … (v)

z এর মান (iv) নং এ বসিয়ে পাই,

$3(100 - x - y) > x$

বা, $-3x - 3y - x > -300$

বা, $-4x - 3y > -300$

বা, $4x + 3y < 300$ … … … (vi)

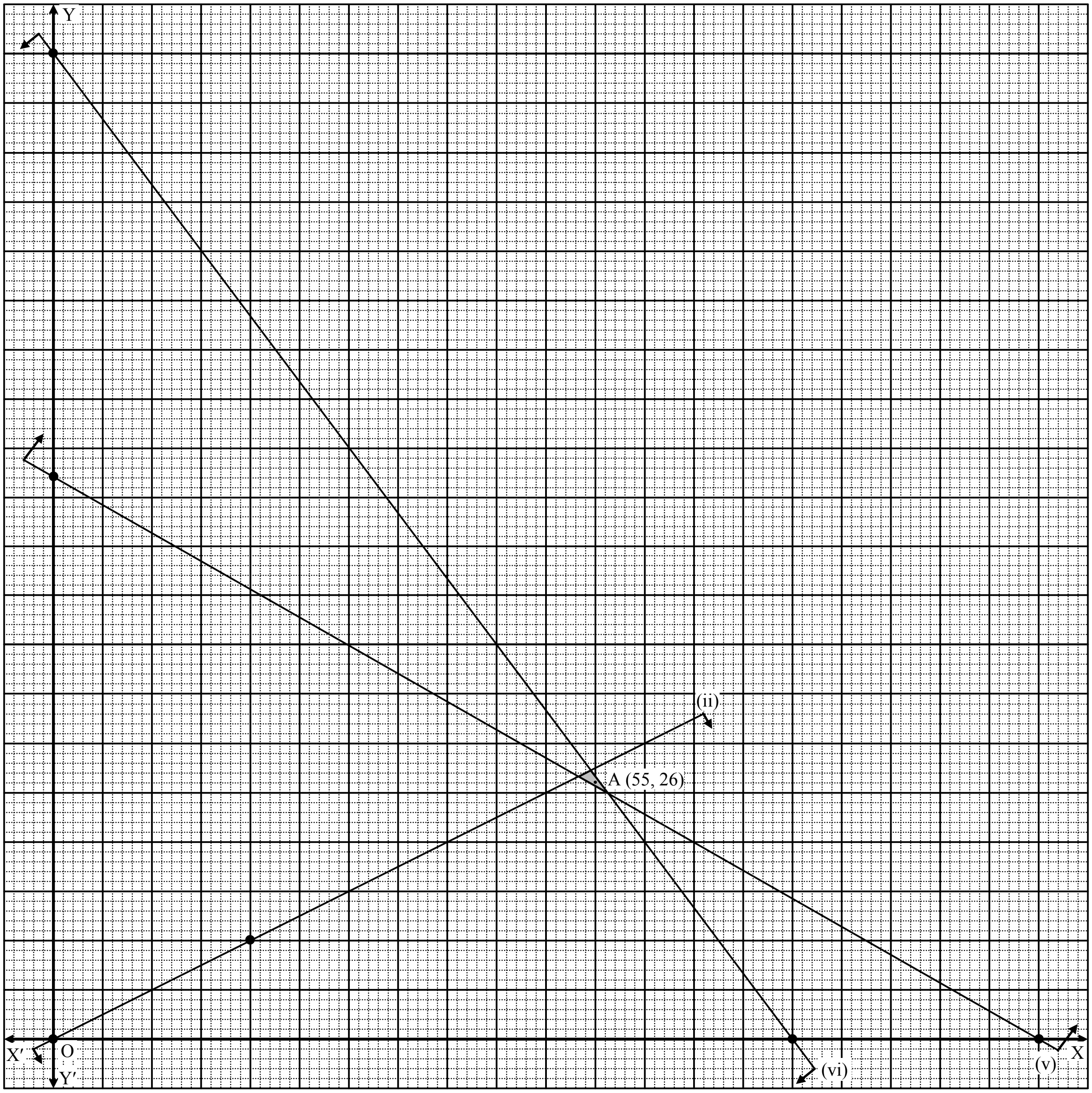
এখন x ও y চলক সম্বলিত সমীকরণগুলো হলো:

$x = 2y$ … … … (ii)

$4x + 7y = 400$ … … … (v)

$4x + 3y = 300$ … … … (vi)

সমীকরণগুলোর লেখচিত্র নিম্নে অঙ্কন করা হলো:



লেখচিত্র অনুসারে এ তিনটি সমীকরণ দ্বারা আবদ্ধ এলাকায় সমাধান পাওয়া যাবে।

যেহেতু x, y প্রত্যেকেই পূর্ণ সংখ্যা। লেখচিত্র দ্বারা আবদ্ধ অনুকূল এলাকায় পূর্ণসংখ্যা আকারে A বিন্দুটি পাওয়া যায় যার স্থানাঙ্ক হলো (55, 26)

$\therefore x = 55$ এবং $y = 26$

x ও y এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$55 + 26 + z = 100$$

বা, $z = 100 - 81 = 19$

সুতরাং প্রত্যেক খাতার মূল্য 55 টাকা, কলমের মূল্য 26 টাকা এবং রাবারের মূল্য 19 টাকা।

Ans: রাবার, কলম ও খাতার মূল্য যথাক্রমে 19, 26 ও 55 টাকা।

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

মনে করি, একটি কলমের মূল্য P টাকা
একটি রাবারের মূল্য R টাকা
একটি খাতার মূল্য B টাকা

১ম শর্তমতে, $P + R + B = 100 \ldots\ldots\ldots$ (i)
২য় শর্তমতে, $B > 2P \ldots\ldots\ldots$ (ii)
৩য় শর্তমতে, $3P > 4R \ldots\ldots\ldots$ (iii)
৪র্থ শর্তমতে, $3R > B \ldots\ldots\ldots$ (iv)
যেখানে, P, R ও B প্রত্যেকেই পূর্ণসংখ্যা

<u>P এর মাধ্যমে প্রকাশিত R এর অসমতা নির্ণয়:</u>

(iii) × 3 ও (iv) × 4 করে পাই,
$9P > 12R \ldots\ldots\ldots$ (v)
এবং $12R > 4B \ldots\ldots\ldots$ (vi)
(v) ও (vi) নং তুলনা করে পাই, $9P > 4B$
বা, $4B < 9P$
বা, $B < \frac{9}{4}P \ldots\ldots\ldots$ (vii)

(vii) ও (ii) নং এর সাথে তুলনা করে পাই,
$2P < B < \frac{9}{4}P \ldots\ldots\ldots$ (viii)

<u>P এর মাধ্যমে প্রকাশিত R এর অসমতা নির্ণয়:</u>

(ii) ও (iv) নং তুলনা করে পাই,
$3R > 2P$
বা, $R > \frac{2}{3}P \ldots\ldots\ldots$ (ix)
আবার (iii) নং থেকে পাই,
$3P > 4R$
বা, $R < \frac{3}{4}P \ldots\ldots\ldots$ (x)
(ix) ও (x) নং তুলনা করে পাই,
$\frac{2}{3}P < R < \frac{3}{4}P \ldots\ldots\ldots$ (xi)

<u>P, R, B এর মান নির্ণয়:</u>

(i) নং থেকে পাই,
$P + R + B = 100$
বা, $P + \frac{2}{3}P + 2P < 100$; [(viii) ও (xi) নং থেকে যথাক্রমে B এবং R উভয়ের নিম্নসীমা ব্যবহার করে]
বা, $\frac{3P + 2P + 6P}{3} < 100$
বা, $\frac{11P}{3} < 100$
বা, $11P < 300$
বা, $P < \frac{300}{11}$
$\therefore P < 27\frac{3}{11} \ldots\ldots\ldots$ (xii)

আবার, $P + R + B = 100$
বা, $P + \frac{3}{4}P + \frac{9P}{4} > 100$; [(viii) ও (xi) নং থেকে যথাক্রমে B এবং R উভয়ের উর্ধ্বসীমা ব্যবহার করে]
বা, $\frac{4P + 3P + 9P}{4} > 100$
বা, $\frac{16P}{4} > 100$
বা, $4P > 100$
বা, $P > 25 \ldots\ldots\ldots$ (xiii)

(xii) ও (xiii) নং তুলনা করে পাই,
$25 < P < 27\frac{3}{11}$
প্রশ্নানুসারে, P পূর্ণসংখ্যা। তাই P এর মান অসমতা অনুসারে 26 অথবা 27 হতে পারে।

<u>$P = 26$ এর ক্ষেত্রে:</u>

$P = 26$ হলে (xi) নং অসমতা দাঁড়ায় $\frac{2}{3} \times 26 < R < \frac{3}{4} \times 26$
বা, $17.33 < R < 19.5$
যেহেতু R পূর্ণসংখ্যা। অতএব, অসমতা অনুসারে $R = 18$ বা 19 হবে।

- $R = 18$ হলে, (i) নং হতে পাই,
$P + R + B = 100$
বা, $26 + 18 + B = 100$; $[P = 26]$
বা, $B = 100 - 26 - 18$
বা, $B = 56$
অর্থাৎ $(P, R, B) = (26, 18, 56)$
কিন্তু সেক্ষেত্রে (iv) নং সমীকরণ অর্থাৎ $3R > B$ সিদ্ধ হয় না। তাই এটি গ্রহণযোগ্য নয়।
- আবার, $R = 19$ হলে (i) নং হতে পাই,
এখন, $P + R + B = 100$
বা, $26 + 19 + B = 100$; $[P = 26]$
বা, $B = 100 - 45 = 55$
অর্থাৎ $(P, R, B) = (26, 19, 55)$ যা সকল অসমতাকে সিদ্ধ করে।

<u>$P = 27$ এর ক্ষেত্রে:</u>

$P = 27$ হলে (xi) নং অসমতা দাঁড়ায় $\frac{2}{3} \times 27 < R < \frac{3}{4} \times 27$
বা, $18 < R < 20.25$
যেহেতু R পূর্ণসংখ্যা। অতএব, অসমতা অনুসারে $R = 19$ অথবা 20

- $R = 19$ এর জন্য, $P + R + B = 100$
বা, $27 + 19 + B = 100$
বা, $B = 100 - 46 = 54$
কিন্তু $P = 27$ এবং $R = 19$, (ii) নং অসমতাকে অর্থাৎ $B > 2P$ কে সিদ্ধ করে না।
- আবার, $R = 20$ হলে পাই, $P + R + B = 100$
বা, $27 + 20 + B = 100$
বা, $B = 100 - 47 = 53$
কিন্তু $P = 27$ এবং $B = 54$, (ii) নং অসমতাকে অর্থাৎ $B > 2P$ কে সিদ্ধ করে না।

সুতরাং একমাত্র গ্রহণযোগ্য সমাধান হলো: $(P, R, B) = (26, 19, 55)$

১৩ তিনটি পূর্ণসংখ্যার গুণফল 720 হলে সবচেয়ে ছোট সংখ্যাটি কত বড় হতে পারে?

সমাধান:
মনে করি, সবচেয়ে ছোট পূর্ণসংখ্যাটির সর্বোচ্চ মান x। x এর মান তখনই সর্বোচ্চ হবে যখন x এর সাথে অন্য পূর্ণসংখ্যা দুটির পার্থক্য ন্যূনতম হবে।
সুতরাং অপর দুইটি পূর্ণসংখ্যার ন্যূনতম মান হবে যথাক্রমে $(x + 1)$ ও $(x + 2)$
শর্তমতে, $x(x + 1)(x + 2) = 720$
বা, $(x^2 + x)(x + 2) = 720$
বা, $x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x - 720 = 0$
বা, $x^3 + 3x^2 + 2x - 720 = 0$
ধরি, $f(x) = x^3 + 3x^2 + 2x - 720$
$f(8) = 8^3 + 3.8^2 + 2.8 - 720 = 720 - 720 = 0$
সুতরাং ভাগশেষ উপপাদ্য অনুসারে $(x - 8)$, $f(x)$ একটি উৎপাদক।
প্রদত্ত সমীকরণ,
$x^3 + 3x^2 + 2x - 720 = 0$
বা, $x^3 - 8x^2 + 11x^2 - 88x + 90x - 720 = 0$
বা, $x^2(x - 8) + 11x(x - 8) + 90(x - 8) = 0$
বা, $(x - 8)(x^2 + 11x + 90) = 0$

$\therefore x - 8 = 0$

বা, $x = 8$

অথবা, $x^2 + 11x + 90 = 0$

বা, $x = \dfrac{-11 \pm \sqrt{(11)^2 - 4 \times 1 \times 90}}{2.1}$

$= \dfrac{-11 \pm \sqrt{121 - 360}}{2}$

$= \dfrac{-11 \pm \sqrt{-239}}{2}$

এক্ষেত্রে x এর বাস্তব মান পাওয়া সম্ভব নয়।

$x = 8$ হলে সংখ্যা তিনটি যথাক্রমে, $8, (8 + 1)$ ও $(8 + 2)$

বা, $8, 9$ ও 10

এক্ষেত্রে সবচেয়ে ছোট সংখ্যাটি 8 হতে পারে।

সুতরাং তিনটি ক্রমিক সংখ্যার গুণফল 720 হলে সবচেয়ে ছোট সংখ্যাটি 8 পর্যন্ত বড় হতে পারে।

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

মনে করি, পূর্ণসংখা তিনটি যথাক্রমে, a, b ও c

শর্তমতে, $abc = 720$

যদি $a = b = c$ হয়

তাহলে পাই, $a.a.a = 720$

বা, $a^3 = 720$

$\therefore a = \sqrt[3]{720} = 8.962$

অর্থাৎ $a = b = c = 8.962$

ধরি, a হলো সবচেয়ে ছোট পূর্ণসংখ্যা

তাহলে, $a < b$

$a < c$

আবার, $\sqrt[3]{720} = 8.962$ থেকে ছোট, সবচেয়ে বড় পূর্ণসংখ্যাটি হলো 8।

এখন, $a = 8$ হলে পাই, $abc = 720$

বা, $8 \times bc = 720$

বা, $bc = 90$

এখন, b ও c এর গুণফল 90। আবার, b ও c উভয়েই 8 থেকে বড় হবে।

এখন, $90 = 6 \times 15$

$= 9 \times 10$

$= 18 \times 5$

তাই 8 থেকে বড় এমন দুইটি পূর্ণসংখ্যার গুণফল 90 হতে হলে b ও c এর মান হবে যথাক্রমে 9 ও 10

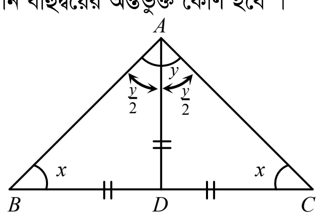
$\therefore$ ছোট সংখ্যাটিকে 8 পর্যন্ত বড় করা যাবে।

সুতরাং তিনটি ক্রমিক সংখ্যার গুণফল 720 হলে সবচেয়ে ছোট সংখ্যাটি 8 পর্যন্ত বড় করা যাবে।

১৪ একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের কোনো একটি কোণের সমদ্বিখণ্ডক দিয়ে ত্রিভুজকে দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে বিভক্ত করা হলো। প্রথম সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের একটি কোণ কত বড় হতে পারে? প্রথম সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের একটি কোণ কত ছোট হতে পারে?

সমাধান:

প্রথম সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সবচেয়ে বড় কোণ নির্ণয়: প্রথম সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সর্বোচ্চ কোণটি তখনই পাওয়া যাবে যখন অপেক্ষাকৃত বড় কোণটি সমান সমান বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ হবে ।



মনে করি, ΔABC এর $AB = AC$ এবং $\angle A$ হলো বৃহত্তম কোণ। আরও ধরি, $\angle B = \angle C = x$ এবং $\angle A = y$।

এক্ষেত্রে বৃহত্তর বাহু BC এর বিপরীত কোণ $\angle A = y$ এর সমদ্বিখন্ডক AD, ত্রিভুজ ABC-কে দুটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ΔABD ও ΔACD-এ বিভক্ত করে যার $AD = BD$ এবং $AD = CD$। এক্ষেত্রে $\angle BAD = \angle CAD = \dfrac{y}{2}$ হবে।

ΔABD এর $AD = BD$

$\therefore \angle ABD = \angle BAD$

বা, $x = \dfrac{y}{2}$; [$\because \angle ABD = x$ এবং $\angle BAD = \dfrac{y}{2}$]

বা, $y = 2x$ ... ... (i)

এখন, ΔABC-এ

$\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180°$

বা, $x + x + y = 180°$

বা, $x + x + 2x = 180°$ [(i) নং হতে]

বা, $4x = 180°$

বা, $x = \dfrac{180°}{4}$

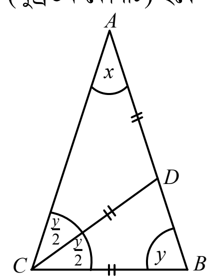
বা, $x = 45°$

(i) নং হতে পাই, $y = 2x = 2 \times 45° = 90°$। অর্থাৎ বৃহত্তম কোণ $y = \angle A = 90°$।

অনুরূপভাবে, ΔACD বিবেচনা করলেও $x = 45°$ এবং $y = 90°$ পাওয়া যায়।

$\therefore$ প্রথম সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সর্বোচ্চ কোণ $90°$ হতে পারে। **(Ans.)**

প্রথম সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সবচেয়ে ছোট কোণ নির্ণয়: প্রথম সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সবচেয়ে ছোট কোণটি তখনই পাওয়া যাবে যখন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজটির সমান সমান কোণদ্বয় অপর কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হবে। এক্ষেত্রে অপর কোণটিই (ক্ষুদ্রতম কোণটি) হবে সবচেয়ে ছোট কোণ।



মনে করি, ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে $AB = AC$ এবং $\angle A$ হলো ক্ষুদ্রতম কোণ। আরও ধরি, $\angle A = \angle BAC = x$ এবং $\angle ABC = \angle ACB = y$

এক্ষেত্রে ΔABC এর $\angle ACB = y$ এর সমদ্বিখণ্ডক CD, ΔABC কে দুটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ΔBCD ও ΔACD-এ বিভক্ত করে যার $BC = CD$ এবং $CD = AD$।

এখন ΔBCD-এ $BC = CD$

$\therefore \angle BDC = \angle DBC$ [$\because$সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সমান]

বা, $\angle BDC = y$ [$\because \angle DBC = \angle ABC = y$]

ΔABC-এ $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180°$

বা, $x + y + y = 180°$

বা, $x + 2y = 180°$ ... ... (ii)

আবার, ΔBCD-এ $\angle DBC + \angle BCD + \angle BDC = 180°$

বা, $y + \dfrac{y}{2} + y = 180°$

বা, $\dfrac{2y + y + 2y}{2} = 180°$

বা, $\dfrac{5y}{2} = 180°$

বা, $5y = 360°$

বা, $y = \dfrac{360°}{5}$

$\therefore y = 72°$

(ii) নং এ $y = 72°$ বসিয়ে পাই,

$x + 2 \times 72° = 180°$

বা, $x + 144° = 180°$

বা, $x = 180° - 144°$

$\therefore x = 36°$

অর্থাৎ ক্ষুদ্রতম কোণ $x = \angle BAC = 36°$।

অনুরূপভাবে, ΔACD বিবেচনা করলেও $x = 36°$ এবং $y = 72°$ পাওয়া যায়।

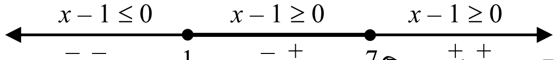
$\therefore$ প্রথম সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সর্বনিম্ন কোণ $36°$ হতে পারে। **(Ans.)**

লক্ষণীয়: পাঠ্যবইয়ের উত্তরে আংশিক ভুল রয়েছে।
জেনে রাখা ভালো: সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রে, অপেক্ষাকৃত ছোট বাহুর বিপরীত কোণের সমদ্বিখণ্ডক দিয়ে ত্রিভুজকে দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে বিভক্ত করা যায় না। তাই ΔABC এর অপেক্ষাকৃত ছোট বাহুর বিপরীত কোণের সমদ্বিখণ্ডক বিবেচনায় নেওয়া হয়নি।

১৫ একটি আয়তাকার ঘরে এক বর্গ মিটার ক্ষেত্রফলের 7টি টেবিল বসানো যায়। ঘরের পরিসীমা 16 মিটার। তার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ কত হতে পারে?

সমাধান:
মনে করি, আয়তাকার ঘরের দৈর্ঘ্য x মিটার এবং প্রস্থ y মিটার।
$\therefore$ আয়তাকার ঘরের ক্ষেত্রফল $= xy$ বর্গমিটার
1 বর্গমিটার ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট 7টি টেবিলের মোট ক্ষেত্রফল $= 7$ বর্গমিটার
প্রশ্নমতে, $xy \geq 7$ ……… (i)
এবং $2(x+y) = 16$ ……… (ii)
(ii) নং হতে পাই, $2(x+y) = 16$
বা, $x + y = 8$
বা, $y = 8 - x$ ……… (iii)
y এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,
$x(8-x) \geq 7$
বা, $8x - x^2 \geq 7$
বা, $8x - x^2 - 7 \geq 0$
বা, $x^2 - 8x + 7 \leq 0$; [উভয়পক্ষকে (-1) দ্বারা গুণ করে]
বা, $x^2 - 7x - x + 7 \leq 0$
বা, $x(x-7) - 1(x-7) \leq 0$
বা, $(x-7)(x-1) \leq 0$
$(x-7)(x-1) \leq 0$ সত্য হবে যদি এবং কেবল যদি $(x-7)$ ও $(x-1)$ এর যেকোনো একটি ধনাত্মক এবং অপরটি ঋণাত্মক হয়।
লক্ষ করি:

$x - 7 \leq 0$	$x - 7 \leq 0$	$x - 7 \geq 0$
$x - 1 \leq 0$	$x - 1 \geq 0$	$x - 1 \geq 0$



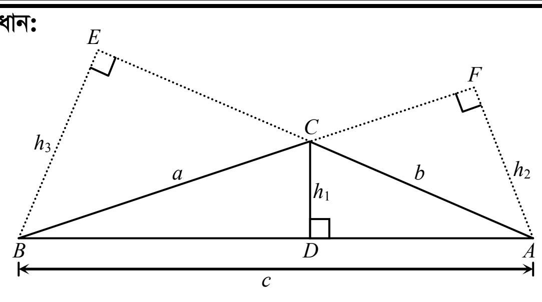
এখানে দেখা যাচ্ছে যে, x এর গ্রহণযোগ্য অসমতাটি হলো $1 \leq x \leq 7$
$1 \leq x \leq 7$ ব্যবধিতে x এর কয়েকটি মানের জন্য y এবং xy এর মান নির্ণয় করি।

x	1	2	3	4	5	6	7
$y = 8 - x$	7	6	5	4	3	2	1
xy	7	12	15	16	15	12	7

দেখা যাচ্ছে x ও y এর উভয়ের মান 1 থেকে 7 পর্যন্ত হতে পারে। উভয়ক্ষেত্রেই $xy \geq 7$।
তাই বলা যায়, দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের একটি $x = 1$ থেকে 7 মিটার এবং অপরটি $(8-x)$ মিটার। **(Ans.)**

১৬ এমন কোনো ত্রিভুজ আছে কি যার কোনো শীর্ষ থেকে অঙ্কিত উচ্চতাই 1 সে.মি. এর বেশি নয় কিন্তু ক্ষেত্রফল 100 বর্গ সে.মি.?

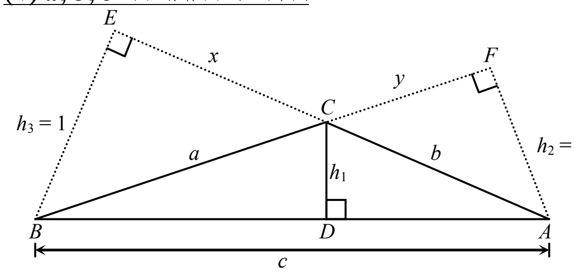
সমাধান:



মনে করি, ABC ত্রিভুজের তিনটি বাহু $BC = a$, $AC = b$ ও $AB = c$ এবং তিনটি উচ্চতা h_1, h_2 ও h_3।
প্রশ্নমতে, ΔABC-এর যে কোনো শীর্ষ অর্থাৎ A, B, C এর যে কোনোটি থেকে অঙ্কিত উচ্চতা 1 সে.মি. এর বেশি নয়।
সুতরাং h_1, h_2 ও h_3 এর কোনোটিই 1 cm এর বেশি নয়।
অর্থাৎ $h_1 \leq 1$ সে.মি. ; $h_2 \leq 1$ সে.মি. ; $h_3 \leq 1$ সে.মি.
আবার দেওয়া আছে, ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল 100 বর্গ সে.মি.।
অর্থাৎ $\frac{1}{2} \times a \times h_1 = \frac{1}{2} \times b \times h_2 = \frac{1}{2} \times c \times h_3 = 100$ …… (i)
এখন, $\frac{1}{2} \times a \times h_1 = 100$
বা, $a \times h_1 = 200$
বা, $a = \frac{200}{h_1}$
$\therefore a \geq 200 \quad [\because h \leq 1]$
অনুরূপভাবে, (i) নং থেকে বলা যায়, $b \geq 200$ এবং $c \geq 200$ হবে।
অর্থাৎ $a \geq 200$ সে.মি.; $b \geq 200$ সে.মি.; $c \geq 200$ সে.মি.
এখন, a ও b এর প্রত্যেকের সর্বনিম্ন মান (= 200 সে.মি.) বিবেচনা করে c এর মান নির্ণয় করি।
যেহেতু ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল = 100 বর্গ সে.মি.
$\therefore \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = 100$ ……… (ii)
বা, $\sqrt{\left(200+\frac{c}{2}\right)\left(200+\frac{c}{2}-200\right)\left(200+\frac{c}{2}-200\right)\left(200+\frac{c}{2}-c\right)} = 100$
[এখানে, $a = b = 200$ সে.মি. এবং অর্ধপরিসীমা $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{200+200+c}{2} = \frac{400+c}{2} = 200 + \frac{c}{2}$]
বা, $\left(200+\frac{c}{2}\right)\left(200+\frac{c}{2}-200\right)\left(200+\frac{c}{2}-200\right)\left(200+\frac{c}{2}-c\right) = 100^2$
[উভয়পক্ষকে বর্গ করে]
বা, $\left(200+\frac{c}{2}\right)\left(\frac{c}{2}\right)\left(\frac{c}{2}\right)\left(200-\frac{c}{2}\right) = 10000$
বা, $\left(\frac{400+c}{2}\right)\left(\frac{c}{2}\right)\left(\frac{c}{2}\right)\left(\frac{400-c}{2}\right) = 10000$
বা, $\frac{(400+c)(400-c).c^2}{16} = 10000$
বা, $(400^2 - c^2)c^2 = 160000$; $[\because (a+b)(a-b) = a^2 - b^2]$
বা, $160000c^2 - c^4 = 160000$
বা, $c^4 - 160000c^2 = -160000$; [উভয়পক্ষকে (-1) দ্বারা গুণ করে]
বা, $(c^2)^2 - 2.c^2.80000 + (80000)^2 - (80000)^2 = -160000$
বা, $(c^2 - 80000)^2 = (80000)^2 - 160000$
বা, $c^2 - 80000 = \sqrt{(80000)^2 - 160000}$
বা, $c^2 = 80000 + \sqrt{(80000)^2 - 160000}$
বা, $c^2 = 159999$
$\therefore c = 399.99875$; [$\because$ বাহুর দৈর্ঘ্য ধনাত্মক রাশি]
অর্থাৎ $a = b = 200$ সে.মি. হলে $c = 399.99875$ সে.মি. হয়।
সুতরাং এমন ত্রিভুজ রয়েছে যার কোনো শীর্ষ থেকে অঙ্কিত উচ্চতাই 1 সে.মি. এর বেশি নয় কিন্তু ক্ষেত্রফল 100 বর্গ সে.মি.।
$a \geq 200$, $b \geq 200$ শর্তে a ও b এর মান পরিবর্তন করে (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে c এর মান নির্ণয় করলে a, b, c বাহুবিশিষ্ট অসংখ্য ত্রিভুজ পাওয়া সম্ভব যাদের কোনো শীর্ষ থেকে অঙ্কিত উচ্চতাই 1 সে.মি. এর বেশি নয় কিন্তু ক্ষেত্রফল 100 বর্গ সে.মি.।

দৃষ্টি আকর্ষণ:

(ক) a, b, c এর সাধারণ শর্ত নির্ণয়:



ধরি, $BE = AF = h_3 = h_2 = 1$ সে.মি., $CE = x$ সে.মি., $CF = y$ সে.মি.

আমরা জানি, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর সমষ্টি তার তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

$\therefore$ ΔABE-এ $c + 1 > x + b$ ... ... (i)

এবং ΔABF-এ $c + 1 > y + a$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$2c + 2 > x + y + a + b$

বা, $2(c + 1) > (a - 1) + (b - 1) + a + b$;

$\left[\begin{array}{l}\because \Delta BCE\text{-এ } x + 1 > a \text{ বা, } x > a - 1 \\ \text{এবং } \Delta ACF\text{-এ } y + 1 > b \text{ বা, } y > b - 1\end{array}\right]$

বা, $2(c + 1) > 2(a + b - 1)$

বা, $c + 1 > a + b - 1$

বা, $c + 2 > a + b$

বা, $a + b < c + 2$

অর্থাৎ প্রশ্নে প্রদত্ত সকল শর্তানুসারে ত্রিভুজ গঠন করতে হলে a, b, c এর সাধারণ শর্ত হলো $a + b < c + 2$।

১৬নং এর সমাধানে, $a = b = 200$ সে.মি. এবং $c = 399.99875$ সে.মি.

$\therefore$ $a + b - c = 200 + 200 - 399.99875 = 0.00125$

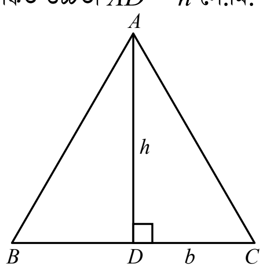
বা, $a + b = c + 0.00125$

অর্থাৎ সমাধানটি সাধারণ শর্তটি মেনে চলে।

(খ) কোনো শীর্ষ থেকে অঙ্কিত উচ্চতাই 1 cm এর বেশি নয় বলতে ত্রিভুজটির তিনটি উচ্চতার কোনোটিই 1 cm এর বেশি হতে পারে না- এটি বুঝানো হয়েছে। যদি ত্রিভুজের শুধুমাত্র একটি উচ্চতার কথা বোঝানো হতো সেক্ষেত্রে প্রশ্ন ও সমাধান হতো নিম্নরূপ:

"এমন কোনো ত্রিভুজ আছে কি যার একটি শীর্ষ থেকে অঙ্কিত উচ্চতা 1 সে.মি. এর বেশি নয় কিন্তু ক্ষেত্রফল 100 বর্গ সে.মি.?"

সমাধান: মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ যার ভূমি $BC = b$ সে.মি. এবং A শীর্ষ হতে অঙ্কিত উচ্চতা $AD = h$ সে.মি.।



প্রশ্নমতে, $h \le 1$ ... ... (i)

আবার, ΔABC এর ক্ষেত্রফল = 100 বর্গ সে.মি.

বা, $\frac{1}{2} \times b \times h = 100$

বা, $h = \frac{200}{b}$

h এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$\frac{200}{b} \le 1$

বা, $200 \le b$

$\therefore$ $b \ge 200$

অর্থাৎ $h \le 1$, $b \ge 200$ শর্তে ΔABC এর ক্ষেত্রফল 100 বর্গ সে.মি.।

সুতরাং ত্রিভুজের ভূমি 200 সে.মি. বা তার বেশি হলে এবং উচ্চতা অনুর্ধ্ব 1 সে.মি. হলেও ক্ষেত্রফল 100 বর্গ সে.মি. হতে পারে।

Ans: উপর্যুক্ত শর্তমতে অসংখ্য ত্রিভুজ বিদ্যমান।

১৭ **সতেজ ও সজীব জমজ ভাই। তাদের দৌড়ানোর বেগ সমান এবং হাঁটার বেগও সমান। একদিন স্কুলে যেতে সতেজ অর্ধেক পথ হাঁটলো আর বাকী অর্ধেক দৌড়ালো। কিন্তু সজীব অর্ধেক সময় হাঁটলো আর বাকী অর্ধেক সময় দৌড়ালো। স্কুলে যেতে কি তাদের সমান সময় লাগবে?**

সমাধান:

মনে করি, স্কুলের দূরত্ব d মিটার

তাদের হাঁটার বেগ a মিটার/সেকেন্ড এবং তাদের দৌড়ানোর বেগ b মিটার/সেকেন্ড, যেখানে $b > a$

ধরি, সতেজ t_1 সময়ে স্কুলে পৌঁছে।

সতেজের প্রথম অর্ধেক পথ যাওয়ার সময় $= \dfrac{\frac{d}{2}}{a} = \dfrac{d}{2a}$

এবং বাকি অর্ধেক পথ যাওয়ার সময় $= \dfrac{\frac{d}{2}}{b} = \dfrac{d}{2b}$

$\therefore$ মোট সময়, $t_1 = \dfrac{d}{2a} + \dfrac{d}{2b}$

$\therefore$ $t_1 = \dfrac{d}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}\right)$ ... ... (i)

আবার, সজীব t_2 সময়ে স্কুলে পৌঁছে

সজীবের প্রথম অর্ধেক সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব $= a \times \dfrac{t_2}{2}$

এবং বাকি অর্ধেক সময়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব $= b \times \dfrac{t_2}{2}$

মোট দূরত্ব, $d = \dfrac{at_2}{2} + \dfrac{bt_2}{2}$

বা, $d = \dfrac{t_2}{2}(a + b)$

$\therefore$ $t_2 = \dfrac{2d}{a + b}$ ... ... (ii)

(i) নং কে (ii) নং দ্বারা ভাগ করে পাই,

$$\frac{t_1}{t_2} = \frac{d}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \div \frac{2d}{a + b}$$

$$= \frac{d}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right) \times \frac{a + b}{2d}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a + b}{ab}\right) \times \frac{a + b}{2}$$

$$= \frac{(a + b)^2}{4ab}$$

$$= \frac{(a + b)^2}{(a + b)^2 - (a - b)^2} \text{ ... ... (iii) } [\because 4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2]$$

স্পষ্টত $(a + b)^2 > \{(a + b)^2 - (a - b)^2\}$;[$b > a$ হওয়ায় $a \ne b$]

অর্থাৎ $\dfrac{(a + b)^2}{(a + b)^2 - (a - b)^2} > 1$

বা, $\dfrac{t_1}{t_2} > 1$; [(iii) নং হতে পাই, $\dfrac{(a + b)^2}{(a + b)^2 - (a - b)^2} = \dfrac{t_1}{t_2}$]

বা, $t_1 > t_2$ যখন $b > a$

অর্থাৎ সতেজের স্কুলে পৌছানোর সময় > সজীবের স্কুলে পৌছানোর সময়।

সুতরাং $b > a$ হলে অর্থাৎ তাদের হাটার বেগের চেয়ে দৌড়ানোর বেগ বেশি হওয়ার শর্তে সজীব সর্বদা আগে স্কুলে পৌছবে।