পঞ্চম অধ্যায়

সমীকরণ

অনুশীলনী - ৫.১

সমীকরণ: কোনো অজ্ঞাত রাশি বা রাশিমালা যখন কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যার বা মানের সমান লিখা হয় তখন তাকে সমীকরণ বলে।
যেমন: $2x^2 + 9x + 9 = 0, (x-2)^2 = 0$ ইত্যাদি।

সমীকরণের মূল: চলকের যে মান বা মানগুলোর জন্য সমীকরণের উভয় পক্ষ সমান হয় অর্থাৎ সমীকরণটি সিদ্ধ হয়, ঐ মান বা মানগুলোকে সমীকরণটির বীজ বা মূল (Root) বলে।
যেমন: $x^2 - 5x + 6 = 0$ একটি সমীকরণ।
$x = 3, 2$ এর জন্য সমীকরণটির উভয়পক্ষ সমান হয়।
সুতরাং $x = 3$ এবং $x = 2$ হলো সমীকরণটির মূল।

বি.দ্র: সমীকরণের মূল বা বীজ হচ্ছে সমীকরণের সমাধান।

দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ: এক চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ $ax^2 + bx + c = 0$। এখানে a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$।

দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান:

$ax^2 + bx + c = 0$ এর সমাধান: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ [সমাধান মুখস্থ রাখতে হবে এবং প্রয়োজনে সরাসরি ব্যবহার করা যাবে]

অতএব, সমাধান হিসেবে x এর দুইটি মান পাওয়া গেল এবং মান দুইটি হচ্ছে,

$\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ এবং $\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

উপরের সমীকরণে $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$ কে দ্বিঘাত সমীকরণটির **নিশ্চায়ক** বলে কারণ ইহা সমীকরণটির মূলদ্বয়ের ধরন ও প্রকৃতির নির্ণয় করে।

বি.দ্র: উপরোক্ত দ্বিঘাত সমীকরণের সর্বপ্রথম সমাধান নির্ণয় করেন ভারতীয় গণিতবিদ শ্রী-ধর আচার্য্য। এজন্য এ পদ্ধতি শ্রী-ধর আচার্য্যের পদ্ধতি নামে পরিচিত।

নিশ্চায়কের অবস্থাভেদে দ্বিঘাত সমীকরণের $(ax^2 + bx + c = 0)$ মূলদ্বয়ের ধরন ও প্রকৃতি:

i. $b^2 - 4ac > 0$ এবং পূর্ণবর্গ। যেমন: $b^2 - 4ac = 9 = 3^2 > 0$ হলে, $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{3^2}}{2a}$ এবং $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{3^2}}{2a}$

$\therefore\ x_1 = \dfrac{-b+3}{2a}$ এবং $x_2 = \dfrac{-b-3}{2a}$; এখানে প্রাপ্ত মূলদ্বয়ের মান বাস্তব তথা মূলদ সংখ্যা কিন্তু অসমান।

সিদ্ধান্ত: $b^2 - 4ac > 0$ এবং পূর্ণবর্গ হলে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও মূলদ।

ii. $b^2 - 4ac > 0$ কিন্তু পূর্ণবর্গ নয়। যেমন: $b^2 - 4ac = 5 > 0$ হলে, $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{5}}{2a}$ এবং $x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{5}}{2a}$ এখানে $\sqrt{5}$ অমূলদ সংখ্যা।

সিদ্ধান্ত: $b^2 - 4ac > 0$ এবং পূর্ণবর্গ না হলে সমীকরণটির মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান ও অমূলদ।

iii. $b^2 - 4ac = 0$ হলে, $x_1 = \dfrac{-b+0}{2a}$ এবং $x_2 = \dfrac{-b-0}{2a}$ বা, $x_1 = \dfrac{-b}{2a}$ এবং $x_2 = \dfrac{-b}{2a}$; এখানে মূলদ্বয় পরস্পর সমান $(x_1 = x_2)$

সিদ্ধান্ত: $b^2 - 4ac = 0$ হলে সমীকরণের মূলদ্বয় বাস্তব ও পরস্পর সমান হবে। এক্ষেত্রে $x = \dfrac{-b}{2a}, \dfrac{-b}{2a}$

iv. $b^2 - 4ac < 0$ যেমন: $b^2 - 4ac = -2 < 0$ হলে, $x_1 = \dfrac{-b + \sqrt{-2}}{2a}, x_2 = \dfrac{-b - \sqrt{-2}}{2a}$

সিদ্ধান্ত: যেহেতু $\sqrt{-2}$ এর মান কোনো বাস্তব সংখ্যা নয় তাই মূলদ্বয় জটিল সংখ্যা। সুতরাং $b^2 - 4ac < 0$ অর্থাৎ ঋণাত্মক হলে মূলদ্বয় জটিল সংখ্যা হয়।

জেনে রাখা ভালো: জটিল সংখ্যা অথবা রাশির একটি অংশ বাস্তব এবং একটি অংশ কাল্পনিক থাকে। যেমন: $2 \pm \sqrt{-5}$ সংখ্যাটিতে 2 বাস্তব অংশ এবং $\sqrt{-5}$ কাল্পনিক অংশ।

দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ

$ax^2 + bx + c = 0$

এখানে, a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$

↓

সমাধানঃ (দুটি মূল বা বীজ)

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

↓

নিশ্চায়কঃ $b^2 - 4ac$

↓

- $b^2 - 4ac > 0$ এবং $b^2 - 4ac$ এর মান পূর্ণবর্গ নয় → মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান, অমূলদ
- $b^2 - 4ac > 0$ এবং $b^2 - 4ac$ এর মান পূর্ণবর্গ → মূলদ্বয় বাস্তব, অসমান, মূলদ
- $b^2 - 4ac = 0$ → মূলদ্বয় বাস্তব ও পরস্পর সমান
- $b^2 - 4ac < 0$ → মূলদ্বয় জটিল সংখ্যা

দ্বিঘাত সমীকরণ ($ax^2 + bx + c = 0$) এর প্রয়োজনীয় অনুসিদ্ধান্তঃ

শর্ত	$ax^2 + bx + c = 0$ এর ফলাফল
$a = 0$	দ্বিঘাত সমীকরণটি একঘাত বিশিষ্ট সমীকরণে পরিণত হয়।
$c = 0$	সমীকরণের একটি মূল অবশ্যই শূন্য হবে
$b = 0$	(i) মূলদ্বয় বাস্তব হবে যখন a ও c পরস্পর বিপরীত চিহ্ন যুক্ত হয় (ii) কাল্পনিক বা জটিল হবে যখন a ও c পরস্পর একই চিহ্ন যুক্ত হয়
$b = c = 0$	সমীকরণের মূলদ্বয় অবশ্যই শূন্য হবে
দ্বিঘাত সমীকরণে সর্বদাই $a \neq 0$ শর্ত প্রযোজ্য	

দ্বিঘাত সমীকরণ গঠনঃ দ্বিঘাত সমীকরণের মূল দুইটি জানা থাকলে সমীকরণটি হবে

$x^2 - x$ (মূলদ্বয়ের যোগফল) + মূলদ্বয়ের গুণফল $= 0$।

যেমনঃ মূলদ্বয় α ও β হলে সমীকরণটি হবে $x^2 - x(\alpha + \beta) + \alpha\beta = 0$

এ হিসেবে 2 ও 3 মূলবিশিষ্ট সমীকরণটি হবে, $x^2 - x(2 + 3) + 2 \times 3 = 0$ বা, $x^2 - 5x + 6 = 0$

অনুশীলনীর সমাধান

সূত্রের সাহায্যে নিচের সমীকরণগুলোর সমাধান করঃ

১ $2x^2 + 9x + 9 = 0$

সমাধানঃ প্রদত্ত সমীকরণঃ $2x^2 + 9x + 9 = 0$

দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 2, b = 9$ এবং $c = 9$

আমরা জানি, $ax^2 + bx + c = 0$ এর সমাধান, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

অতএব সমীকরণটির সমাধান

$$\therefore x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4.2.9}}{2.2} = \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 72}}{4} = \frac{-9 \pm \sqrt{9}}{4} = \frac{-9 + 3}{4}, \frac{-9 - 3}{4}$$

$\therefore x_1 = -\frac{3}{2}$ এবং $x_2 = -3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধানঃ $-\frac{3}{2}, -3$

২ $3 - 4x - 2x^2 = 0$

সমাধানঃ $3 - 4x - 2x^2 = 0$

বা, $-2x^2 - 4x + 3 = 0$ ... ... (i)

দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে (i) নং এর তুলনা করে পাই, $a = -2$; $b = -4$; $c = 3$

আমরা জানি, $ax^2 + bx + c = 0$ এর সমাধান, $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

অতএব সমীকরণটির সমাধান

$$x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.(-2).3}}{2(-2)} = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 24}}{-4} = \frac{4 \pm \sqrt{40}}{-4} = \frac{4 \pm \sqrt{4 \times 10}}{-4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{10}}{-4} = \frac{2(2 \pm \sqrt{10})}{-4} = \frac{2 \pm \sqrt{10}}{-2} = \frac{2 + \sqrt{10}}{-2}, \frac{2 - \sqrt{10}}{-2}$$

অতএব, $x_1 = -1 - \frac{\sqrt{10}}{2}$ এবং $x_2 = -1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধানঃ $-1 - \frac{\sqrt{10}}{2}, -1 + \frac{\sqrt{10}}{2}$

৩ $4x - 1 - x^2 = 0$

সমাধান: $4x - 1 - x^2 = 0$

বা, $-x^2 + 4x - 1 = 0$ ... ... (i)

দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে (i) নং এর তুলনা করে পাই, $a = -1$; $b = 4$; $c = -1$

আমরা জানি, $ax^2 + bx + c = 0$ এর সমাধান, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

অতএব সমীকরণটির সমাধান

$$x = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.(-1).(-1)}}{2(-1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16-4}}{-2} = \frac{-4 \pm \sqrt{12}}{-2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4 \times 3}}{-2} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{3}}{-2} = \frac{2(-2 \pm \sqrt{3})}{-2} = -(-2 \pm \sqrt{3})$$

অর্থাৎ $x_1 = 2 - \sqrt{3}$ এবং $x_2 = 2 + \sqrt{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $2 - \sqrt{3}, 2 + \sqrt{3}$

৪ $2x^2 - 5x - 1 = 0$

সমাধান: $2x^2 - 5x - 1 = 0$ কে দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 2$; $b = -5$; $c = -1$

আমরা জানি, $ax^2 + bx + c = 0$ এর সমাধান, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

অতএব সমীকরণটির মূলদ্বয়

$$x = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4.2(-1)}}{2.2} = \frac{5 \pm \sqrt{25+8}}{4} = \frac{5 \pm \sqrt{33}}{4}$$

অর্থাৎ $x_1 = \frac{1}{4}(5 + \sqrt{33})$ এবং $x_2 = \frac{1}{4}(5 - \sqrt{33})$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\frac{1}{4}(5 + \sqrt{33})$, $\frac{1}{4}(5 - \sqrt{33})$

৫ $3x^2 + 7x + 1 = 0$

সমাধান: $3x^2 + 7x + 1 = 0$ কে দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 3$; $b = 7$; $c = 1$

আমরা জানি, $ax^2 + bx + c = 0$ এর সমাধান, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

অতএব সমীকরণটির মূলদ্বয়

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4.3.1}}{2.3} = \frac{-7 \pm \sqrt{37}}{6}$$

$\therefore x_1 = \frac{1}{6}(-7 + \sqrt{37})$ এবং $x_2 = \frac{1}{6}(-7 - \sqrt{37})$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\frac{1}{6}(-7 + \sqrt{37})$, $\frac{1}{6}(-7 - \sqrt{37})$

৬ $2 - 3x^2 + 9x = 0$

সমাধান: $2 - 3x^2 + 9x = 0$

বা $-3x^2 + 9x + 2 = 0$ ... ... (i)

দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে (i) নং এর তুলনা করে পাই, $a = -3$; $b = 9$; $c = 2$

আমরা জানি, $ax^2 + bx + c = 0$ এর সমাধান, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

অতএব সমীকরণটির সমাধান

$$x = \frac{-9 \pm \sqrt{(9)^2 - 4.(-3).2}}{2.(-3)} = \frac{-9 \pm \sqrt{81+24}}{-6} = \frac{-9 \pm \sqrt{105}}{-6} = \frac{-9 + \sqrt{105}}{-6}, \frac{-9 - \sqrt{105}}{-6}$$

অর্থাৎ, $x_1 = \dfrac{9 - \sqrt{105}}{6}$ এবং $x_2 = \dfrac{9 + \sqrt{105}}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\frac{1}{6}(9 - \sqrt{105})$, $\frac{1}{6}(9 + \sqrt{105})$

৭ $x^2 - 8x + 16 = 0$

সমাধান: $x^2 - 8x + 16 = 0$ কে দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 1$; $b = -8$; $c = 16$

আমরা জানি, $ax^2 + bx + c = 0$ এর সমাধান, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

অতএব সমীকরণটির মূলদ্বয়

$$\therefore x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4.1.16}}{2.1} = \frac{8 \pm \sqrt{64-64}}{2} = \frac{8 \pm 0}{2} = \frac{8+0}{2}, \frac{8-0}{2}$$

অর্থাৎ, $x_1 = 4$ এবং $x_2 = 4$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: 4, 4

> ✉ **জেনে রাখা ভালো:** $x^2 - 8x + 16$ সমীকরণটি একটি দ্বিঘাত সমীকরণ যার নিশ্চয়ক $b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4.1.16 = 64 - 64 = 0$
> $\therefore$ সমীকরণটির দুইটি মূল হবে এবং মূলদ্বয় সমান।

৮ $2x^2 + 7x - 1 = 0$

সমাধান: $2x^2 + 7x - 1 = 0$ কে দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 2$; $b = 7$; $c = -1$

আমরা জানি, $ax^2 + bx + c = 0$ এর সমাধান, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

অতএব সমীকরণটির সমাধান

$$\therefore x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4.2.(-1)}}{2.2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49+8}}{4} = \frac{-7 \pm \sqrt{57}}{4}$$

অর্থাৎ $x_1 = \dfrac{-7 + \sqrt{57}}{4}$ এবং $x_2 = \dfrac{-7 - \sqrt{57}}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\frac{1}{4}(-7 + \sqrt{57})$, $\frac{1}{4}(-7 - \sqrt{57})$

৯ $7x - 2 - 3x^2 = 0$

সমাধান: $7x - 2 - 3x^2 = 0$ বা $-3x^2 + 7x - 2 = 0$ ... ... (i)
দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে (i) নং তুলনা করে পাই, $a = -3$; $b = 7$; $c = -2$

আমরা জানি, $ax^2 + bx + c = 0$ এর সমাধান, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

অতএব সমীকরণটির সমাধান

$$\therefore x = \frac{-7 \pm \sqrt{7^2 - 4.(-3).(-2)}}{2.(-3)} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 24}}{-6} = \frac{-7 \pm \sqrt{25}}{-6} = \frac{-7+5}{-6}, \frac{-7-5}{-6}$$

অর্থাৎ $x_1 = \dfrac{1}{3}$ এবং $x_2 = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান: $\dfrac{1}{3}, 2$

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

কাজ

পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-৯৯

উপরের (2) ও (3) নং সূত্রের সাহায্যে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণ হতে মূল x_1 এবং x_2 এর মান নির্ণয় কর যখন
(ক) $b = 0$ (খ) $c = 0$ (গ) $b = c = 0$ (ঘ) $a = 1$ (ঙ) $a = 1, b = c = 2p$

সমাধান: আমরা জানি, $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের মূলদ্বয়,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ এবং } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

ক $b = 0$ হলে,

$$x_1 = \frac{-0 + \sqrt{0^2 - 4ac}}{2a} = \frac{\sqrt{-4ac}}{2a} \qquad \text{এবং } x_2 = \frac{-0 - \sqrt{0^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-\sqrt{-4ac}}{2a}$$

মন্তব্য: $ax^2 + bx + c = 0$ দ্বিঘাত সমীকরণে $b = 0$ হলে সমীকরণের মূলদ্বয় কাল্পনিক সংখ্যা হবে যখন a ও c উভয়ই একই চিহ্ন বিশিষ্ট এবং বাস্তব হবে যদি a ও c বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট হয়।

খ $c = 0$ হলে,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4a.0}}{2a} = \frac{-b + \sqrt{b^2}}{2a} = \frac{-b + b}{2a} = \frac{0}{2a} = 0$$

$$\text{এবং } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4a.0}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{b^2}}{2a} = \frac{-b - b}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

অর্থাৎ $c = 0$ হলে $x_1 = 0$ এবং $x_2 = -\dfrac{b}{a}$

মন্তব্য: $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণে $c = 0$ হলে একটি মূল অবশ্যই শূন্য (0) হবে।

গ $b = c = 0$ হলে,

$$x_1 = \frac{-0 + \sqrt{0^2 - 4.a.0}}{2a} = \frac{0}{2a} = 0 \qquad \text{এবং } x_2 = \frac{-0 - \sqrt{0^2 - 4.a.0}}{2a} = \frac{0}{2a} = 0$$

$\therefore b = c = 0$ হলে $x_1 = 0$ এবং $x_2 = 0$

মন্তব্য: $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণে $b = c = 0$ হলে উভয় মূলই শূন্য (0) হবে।

ঘ $a = 1$ হলে,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4.1.c}}{2.1} = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \qquad \text{এবং } x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4.1.c}}{2.1} = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2}$$

ঙ $a = 1, \quad b = c = 2p$ হলে,

$$x_1 = \frac{-2p + \sqrt{(2p)^2 - 4.1.2p}}{2.1} = \frac{-2p + \sqrt{4p^2 - 8p}}{2} = \frac{-2p + \sqrt{4(p^2 - 2p)}}{2} = \frac{-2p + 2\sqrt{p^2 - 2p}}{2} = \frac{2(-p + \sqrt{p^2 - 2p})}{2} = -p + \sqrt{p^2 - 2p}$$

$$\text{এবং } x_2 = \frac{-2p - \sqrt{(2p)^2 - 4.1.2p}}{2.1} = \frac{-2p - \sqrt{4p^2 - 8p}}{2} = \frac{-2p - \sqrt{4(p^2 - 2p)}}{2} = \frac{-2p - 2\sqrt{p^2 - 2p}}{2} = \frac{2(-p - \sqrt{p^2 - 2p})}{2} = -p - \sqrt{p^2 - 2p}$$

অর্থাৎ, $a = 1, b = c = 2p$ হলে,
$x_1 = -p + \sqrt{p^2 - 2p}$ এবং $x_2 = -p - \sqrt{p^2 - 2p}$