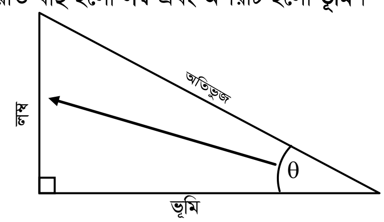
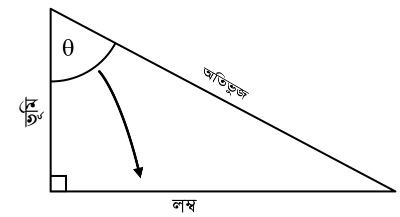
অনুশীলনী - ৮.২

সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলো চিহ্নিতকরণ:

☑ সমকোণের বিপরীত বাহু তথা বৃহত্তম বাহু সর্বদা **অতিভুজ**।

☑ θ কোণের বিপরীত বাহু হলো **লম্ব** এবং অপরটি হলো **ভূমি**।





ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ও সেগুলোর মনেরাখার কিছু সহজ পদ্ধতি:

ত্রিকোনোমিতিক অনুপাত	মনেরাখার রাখার সহজ পদ্ধতি		
$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$	$\frac{\text{সাগরে}}{\sin}$	$\frac{\text{লবণ}}{\text{লম্ব}}$	$\frac{\text{আছে}}{\text{অতিভুজ}}$
$\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$	$\frac{\text{কবরে}}{\cos}$	$\frac{\text{ভূত}}{\text{ভূমি}}$	$\frac{\text{আছে}}{\text{অতিভুজ}}$
$\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$	$\frac{\text{ট্যারা}}{\tan}$	$\frac{\text{লম্বা}}{\text{লম্ব}}$	$\frac{\text{ভূত}}{\text{ভূমি}}$

অন্যান্য অনুপাত যথা $\text{cosec}\theta$, $\sec\theta$ ও $\cot\theta$ যথাক্রমে $\sin\theta$, $\cos\theta$, $\tan\theta$ এর উল্টো অনুপাত হবে।

$\text{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}}$ $\quad [\because \text{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}]$

$\sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}}$ $\quad [\because \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}]$

$\cot\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}}$ $\quad [\because \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}]$

আদর্শ কোণসমূহের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ:

মনে রাখার কৌশল	কোণ / অনুপাত	0°	30°	45°	60°	90°
0, 1, 2, 3 এবং 4 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 4 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলের বর্গমূল নিলে যথাক্রমে sin 0°, sin 30°, sin 45°, sin 60° এবং sin 90° এর মান পাওয়া যায়।	**sin**	$\sqrt{\frac{0}{4}} = 0$	$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{\frac{4}{4}} = 1$
		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\text{cosec}\ \theta = \frac{1}{\sin\theta}$ সম্পর্ক ব্যবহার করে	**cosec**	অসংজ্ঞায়িত	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1
4, 3, 2, 1, 0 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 4 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলের বর্গমূল নিলে যথাক্রমে cos 0°, cos 30°, cos 45°, cos 60° এবং cos 90°এর মান পাওয়া যায়।	**cos**	$\sqrt{\frac{4}{4}} = 1$	$\sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$	$\sqrt{\frac{0}{4}} = 0$
		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$\sec\ \theta = \frac{1}{\cos\theta}$ সম্পর্ক ব্যবহার করে	**sec**	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	অসংজ্ঞায়িত
0, 1, 3 এবং 9 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 3 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলগুলোর বর্গমূল নিলে যথাক্রমে tan 0°, tan 30°, tan 45° এবং tan 60° মান পাওয়া যায়। উল্লেখ্য, tan 90° এর অসংজ্ঞায়িত।	**tan**	$\sqrt{\frac{0}{3}} = 0$	$\sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{\frac{3}{3}} = 1$	$\sqrt{\frac{9}{3}} = \sqrt{3}$	–
		0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	অসংজ্ঞায়িত
$\cot\ \theta = \frac{1}{\tan\theta}$ সম্পর্ক ব্যবহার করে	**cot**	অসংজ্ঞায়িত	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

বি.দ্রঃ শূন্য দ্বারা কোনো কিছুকে ভাগ করা যায় না বিধায় cosec 0°, sec 90°, tan 90° ও cot 0° সংজ্ঞায়িত করা যায় না।

✉ **লক্ষণীয়:** $\sin\theta$, $\cos\theta$ ও $\tan\theta$ অনুপাতের মান বিপরীতকরণ করে যথাক্রমে $\text{cosec}\theta$, $\sec\theta$ ও $\cot\theta$ পাওয়া যায়। এবং $\sin\theta$ এর অনুপাতের মানগুলোকে বিপরীতক্রম অনুসারে সাজালে $\cos\theta$ এর মানগুলো পাওয়া যায়। অনুরূপভাবে ($\tan\theta$ ও $\cot\theta$) এবং ($\sec\theta$ ও $\text{cosec}\theta$) এর মানগুলো পরস্পর বিপরীতকমে সজ্জিত রয়েছে। যেমন: $\sin 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$, $\sec 60° = \text{cosec} 30° = 2$

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের চিহ্নের ধরন: ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো মূলত বাহুর অনুপাত, তাই এদের মান কখনো ধনাত্মক এবং কখনো ঋণাত্মক হয়। কারণ বিভিন্ন চতুর্ভাগে লম্ব ও ভূমির চিহ্নের ধরন ভিন্ন হতে পারে। অতিভুজ সর্বদা ধনাত্মক ধরা হয়। নিম্নে চিত্রের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা হলো।

দ্বিতীয় চতুর্ভাগ

এই চতুর্ভাগে ভূমি ঋণাত্মক কিন্তু লম্ব ও অতিভুজ ধনাত্মক হওয়ায় sinθ ও cosecθ ব্যতিত সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ঋণাত্মক।

$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব } (+)}{\text{অতিভুজ } (+)} = \text{ধনাত্মক}$; $\therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ } (+)}{\text{লম্ব } (+)} = \text{ধনাত্মক}$

$\cos\theta = \frac{\text{ভূমি } (-)}{\text{অতিভুজ } (+)} = \text{ঋণাত্মক}$; $\therefore \sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ } (+)}{\text{ভূমি } (-)} = \text{ঋণাত্মক}$

$\tan\theta = \frac{\text{লম্ব } (+)}{\text{ভূমি } (-)} = \text{ঋণাত্মক}$; $\therefore \cot\theta = \frac{\text{ভূমি } (-)}{\text{লম্ব } (+)} = \text{ঋণাত্মক}$

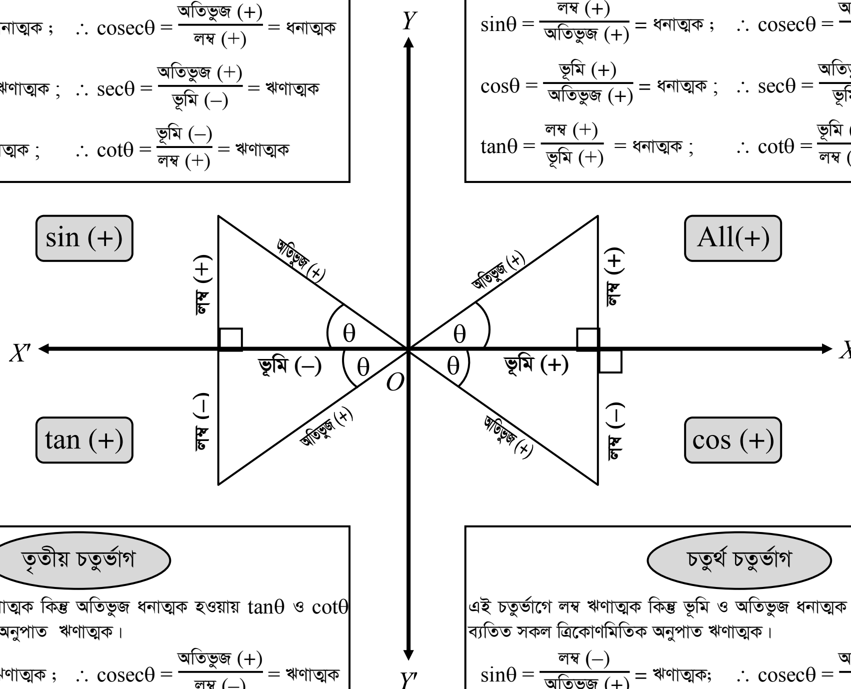
প্রথম চতুর্ভাগ

এই চতুর্ভাগে ভূমি লম্ব ও অতিভুজ তিনটি ধনাত্মক হওয়ায় সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ধনাত্মক।

$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব } (+)}{\text{অতিভুজ } (+)} = \text{ধনাত্মক}$; $\therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ } (+)}{\text{লম্ব } (+)} = \text{ধনাত্মক}$

$\cos\theta = \frac{\text{ভূমি } (+)}{\text{অতিভুজ } (+)} = \text{ধনাত্মক}$; $\therefore \sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ } (+)}{\text{ভূমি } (+)} = \text{ধনাত্মক}$

$\tan\theta = \frac{\text{লম্ব } (+)}{\text{ভূমি } (+)} = \text{ধনাত্মক}$; $\therefore \cot\theta = \frac{\text{ভূমি } (+)}{\text{লম্ব } (+)} = \text{ধনাত্মক}$



তৃতীয় চতুর্ভাগ

এই চতুর্ভাগে ভূমি ও লম্ব ঋণাত্মক কিন্তু অতিভুজ ধনাত্মক হওয়ায় tanθ ও cotθ ব্যতিত সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ঋণাত্মক।

$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব } (-)}{\text{অতিভুজ } (+)} = \text{ঋণাত্মক}$; $\therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ } (+)}{\text{লম্ব } (-)} = \text{ঋণাত্মক}$

$\cos\theta = \frac{\text{ভূমি } (-)}{\text{অতিভুজ } (+)} = \text{ঋণাত্মক}$; $\therefore \sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ } (+)}{\text{ভূমি } (-)} = \text{ঋণাত্মক}$

$\tan\theta = \frac{\text{লম্ব } (-)}{\text{ভূমি } (-)} = \text{ধনাত্মক}$; $\therefore \cot\theta = \frac{\text{ভূমি } (-)}{\text{লম্ব } (-)} = \text{ধনাত্মক}$

চতুর্থ চতুর্ভাগ

এই চতুর্ভাগে লম্ব ঋণাত্মক কিন্তু ভূমি ও অতিভুজ ধনাত্মক হওয়ায় cosθ ও secθ ব্যতিত সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ঋণাত্মক।

$\sin\theta = \frac{\text{লম্ব } (-)}{\text{অতিভুজ } (+)} = \text{ঋণাত্মক}$; $\therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ } (+)}{\text{লম্ব } (-)} = \text{ঋণাত্মক}$

$\cos\theta = \frac{\text{ভূমি } (+)}{\text{অতিভুজ } (+)} = \text{ধনাত্মক}$; $\therefore \sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ } (+)}{\text{ভূমি } (+)} = \text{ধনাত্মক}$

$\tan\theta = \frac{\text{লম্ব } (-)}{\text{ভূমি } (+)} = \text{ঋণাত্মক}$; $\therefore \cot\theta = \frac{\text{ভূমি } (+)}{\text{লম্ব } (-)} = \text{ঋণাত্মক}$

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সমূহের মানের সীমা:

θ এর যেকোনো মানের জন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সমূহের মানের সীমা নিম্নে দেওয়া হলো:

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত	মানের সীমা
sinθ ও cosθ	–1 থেকে + 1
tanθ ও cotθ	যেকোনো বাস্তব মান (R)
secθ ও cosecθ	+1 অপেক্ষা বড় এবং –1 অপেক্ষা ছোট (যেকোনো মান)

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের মধ্যকার কিছু সম্পর্ক:

১। $\sin\theta = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$ বা, $\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$	২। $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$ বা, $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$	৩। $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$ বা, $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$
৪। $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ বা, $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ বা, $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$		
৫। $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ বা, $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ বা, $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$		
৬। $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$ বা, $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$ বা, $\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - 1$		

অনুশীলনীর সমাধান

১ ক্যালকুলেটর ব্যবহার না করে মান নির্ণয় কর:

(ক) $\dfrac{\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3}}$ (খ) $\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}.\tan\frac{\pi}{3}$

সমাধান:

ক $\dfrac{\cos\frac{\pi}{4}}{\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{3}}=\dfrac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}}$

$$=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}}=\frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{2\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{2}{2\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{6}}$$

(Ans.)

খ $\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{6}.\tan\frac{\pi}{3}$

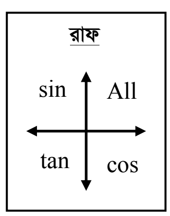
$=1+\frac{1}{\sqrt{3}}.\sqrt{3}$

$=1+1$

$=2$ **(Ans.)**

২ $\cos\theta=-\frac{4}{5}$ এবং $\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$ হলে $\tan\theta$ এবং $\sin\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\cos\theta=-\frac{4}{5}$ যেহেতু $\cos\theta$ এর মান ঋণাত্মক তাই θ কোণটি অবশ্যই ২য় অথবা ৩য় চতুর্ভাগে অবস্থিত হবে।



কিন্তু θ এর সীমা হলো $\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$ বা, $180°<\theta<270°$। তাই θ তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থিত।

আমরা জানি, $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$

বা, $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$

$$=1-\left(-\frac{4}{5}\right)^2=1-\frac{16}{25}=\frac{25-16}{25}=\frac{9}{25}$$

$\therefore \sin\theta=\pm\sqrt{\frac{9}{25}}=\pm\frac{3}{5}$

কিন্তু θ তৃতীয় চতুর্ভাগে এবং তৃতীয় চতুর্ভাগে $\sin\theta$ ঋণাত্মক,

$\therefore \sin\theta=-\frac{3}{5}$

আবার, $\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=\dfrac{-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{5}\times\left(-\frac{5}{4}\right)=\frac{3}{4}$

$\therefore \tan\theta=\frac{3}{4}$ [তৃতীয় চতুর্ভাগে $\tan\theta$ ধনাত্মক]

$\therefore \sin\theta=-\frac{3}{5}$ এবং $\tan\theta=\frac{3}{4}$ **(Ans.)**

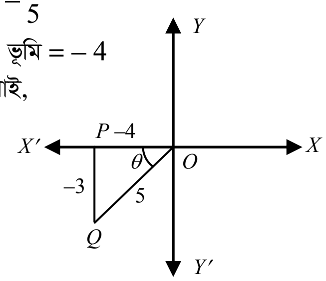
সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

দেওয়া আছে, $\cos\theta=-\frac{4}{5}$ এবং $\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$

আমরা জানি, $\cos\theta=\frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}=-\frac{4}{5}$

যেহেতু অতিভুজ সর্বদা ধনাত্মক $\therefore$ ভূমি $=-4$

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য হতে পাই,



$PQ=\pm\sqrt{OQ^2+OP^2}$

$=\pm\sqrt{5^2+(-4)^2}$

$=\pm\sqrt{25+16}$

$=\pm\sqrt{9}$

$=\pm 3$

এখানে, তৃতীয় চতুর্ভাগে $PQ=-3$

$\therefore \tan\theta=\frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}=\frac{PQ}{OP}=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4}$

এবং $\sin\theta=\frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}=\frac{PQ}{OQ}=\frac{-3}{5}=-\frac{3}{5}$

সমাধান (তৃতীয় পদ্ধতি)

দেওয়া আছে, $\cos\theta=-\frac{4}{5}$

বা, $\cos^2\theta=\left(\frac{-4}{5}\right)^2$ [বর্গ করে]

বা, $\cos^2\theta=\frac{16}{25}$

বা, $\frac{1}{\sec^2\theta}=\frac{16}{25}$

বা, $\sec^2\theta=\frac{25}{16}$ [বিপরীত করণ করে]

বা, $1+\tan^2\theta=\frac{25}{16}$

বা, $\tan^2\theta=\frac{25}{16}-1=\frac{25-16}{16}=\frac{9}{16}$

$\therefore \tan\theta=\pm\frac{3}{4}$

এখানে, $\tan\theta\neq\frac{-3}{4}$; কারণ $\pi<\theta<\frac{3\pi}{2}$

অর্থাৎ ৩য় চতুর্ভাগে $\tan\theta$ এর মান ধনাত্মক।

$\therefore \tan\theta=\frac{3}{4}$

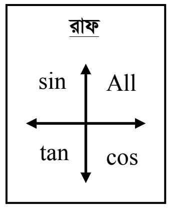
আবার, $\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

বা, $\sin\theta=\tan\theta.\cos\theta$

বা, $\sin\theta=\frac{3}{4}\times\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{3}{5}$

$\therefore \tan\theta=\frac{3}{4}$, $\sin\theta=-\frac{3}{5}$ **(Ans.)**

৩ $\sin A = \frac{2}{\sqrt{5}}$ **এবং** $\frac{\pi}{2} < A < \pi$ **এর ক্ষেত্রে** $\cos A$ **এবং** $\tan A$ **এর মান কত?**



সমাধান: দেওয়া আছে, $\sin A = \frac{2}{\sqrt{5}}$, যেহেতু $\sin\theta$ এর মান ধনাত্মক তাই θ কোণটি অবশ্যই ১ম অথবা ২য় চতুর্ভাগে অবস্থিত হবে। কিন্তু θ এর সীমা হলো $\frac{\pi}{2} < A < \pi$ বা, $90° < \theta < 180°$। তাই θ ২য় চতুর্ভাগে অবস্থিত।

আমরা জানি, $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

বা, $\cos^2 A = 1 - \sin^2 A$

$= 1 - \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1 - \frac{4}{5} = \frac{5-4}{5} = \frac{1}{5}$

$\therefore \cos A = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

কিন্তু A দ্বিতীয় চতুর্ভাগে এবং এখানে $\cos A$ ঋণাত্মক

$\therefore \cos A = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

আবার, $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{-\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{-\sqrt{5}}{1} = -2$

[$\sin A$ ও $\cos A$ এর মান বসিয়ে]

$\therefore \tan A = -2$ [দ্বিতীয় চতুর্ভাগে $\tan A$ ঋণাত্মক]

$\therefore \cos A = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\tan A = -2$ **(Ans.)**

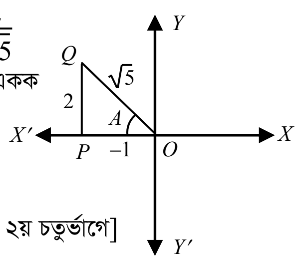
সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

দেওয়া আছে, $\sin A = \frac{2}{\sqrt{5}}$ এবং $\frac{\pi}{2} < A < \pi$

এখানে A কোণটি ২য় চতুর্ভাগে অবস্থিত।

আমরা জানি, $\sin A = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\therefore$ লম্ব 2 একক এবং অতিভুজ $\sqrt{5}$ একক



$OP = \pm\sqrt{OQ^2 - PQ^2}$

$= \pm\sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2^2}$

$= \pm\sqrt{5-4}$

এক্ষেত্রে $OP = -1$ [$\because$ A কোণটি ২য় চতুর্ভাগে]

$\therefore \cos A = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{OP}{OQ} = \frac{-1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\tan A = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{PQ}{OP} = \frac{2}{-1} = -2$

$\therefore \cos A = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ ও $\tan A = -2$ **(Ans.)**

সমাধান (তৃতীয় পদ্ধতি)

দেওয়া আছে, $\sin A = \frac{2}{\sqrt{5}}$ এবং $\frac{\pi}{2} < A < \pi$

এখানে A কোণটি ২য় চতুর্ভাগে অবস্থিত।

এখন, $\sin A = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\therefore \operatorname{cosec} A = \frac{\sqrt{5}}{2}$

বা, $\operatorname{cosec}^2 A = \left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2$

বা, $1 + \cot^2 A = \frac{5}{4}$

বা, $\cot^2 A = \frac{5}{4} - 1$

বা, $\cot A = \pm\sqrt{\frac{5-4}{4}}$

বা, $\cot A = -\sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{-1}{2}$ [$\because$ ২য় চতুর্ভাগে cot অনুপাত ঋণাত্মক]

বা, $\tan A = -2$

আবার, আমরা জানি, $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$

বা, $-2 = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\cos A}$

বা, $\cos A = -\frac{2}{\sqrt{5} \times 2}$

$\therefore \cos A = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

Ans: $\cos A = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ ও $\tan A = -2$

৪ **দেওয়া আছে,** $\cos A = \frac{1}{2}$ **এবং** $\cos A$ **ও** $\sin A$ **একই চিহ্নবিশিষ্ট।** $\sin A$ **এবং** $\tan A$ **এর মান কত?**

সমাধান: এখানে, $\cos A = \frac{1}{2}$

বা, $\cos^2 A = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ [বর্গ করে]

বা, $1 - \sin^2 A = \frac{1}{4}$

বা, $1 - \frac{1}{4} = \sin^2 A$

বা, $\frac{3}{4} = \sin^2 A$

বা, $\sin A = \pm\sqrt{\frac{3}{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

যেহেতু, $\cos A$ ধনাত্মক সুতরাং $\sin A$ ধনাত্মক হবে।

[$\because$ $\cos A$ ও $\sin A$ একই চিহ্নবিশিষ্ট]

$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$

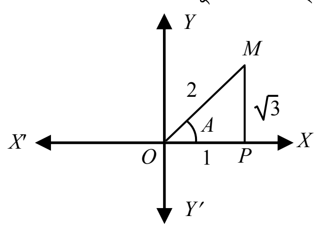
এবং $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$

Ans: $\sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\tan A = \sqrt{3}$

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

দেওয়া আছে, $\cos A = \frac{1}{2}$ এবং $\cos A$ ও $\sin A$ একই চিহ্ন বিশিষ্ট।

$\therefore$ $\sin A$ এর মান ধনাত্মক। শুধুমাত্র ১ম চতুর্ভাগে $\cos A$ ও $\sin A$ উভয় ধনাত্মক। $\therefore$ A কোণটি ১ম চতুর্ভাগে অবস্থিত।



পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী,

$$PM = \sqrt{OM^2 - OP^2} = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$$

$$\therefore \sin A = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{PM}{OM} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\tan A = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{PM}{OP} = \frac{\sqrt{3}}{1} = \sqrt{3}$$

$\therefore \sin A = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan A = \sqrt{3}$ **(Ans.)**

৫ দেওয়া আছে, $\tan A = -\frac{5}{12}$ এবং $\tan A$ ও $\cos A$ বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট। $\sin A$ এবং $\cos A$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: আমরা জানি, $\sec^2 A = 1 + \tan^2 A$

$$= 1 + \left(-\frac{5}{12}\right)^2 = 1 + \frac{25}{144} = \frac{169}{144}$$

$$\therefore \sec A = \pm\sqrt{\frac{169}{144}} = \pm\frac{13}{12}$$

$$\therefore \cos A = \pm\frac{12}{13}$$

যেহেতু $\tan A$ ও $\cos A$ বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট এবং $\tan A = -\frac{5}{12}$ যা ঋণাত্মক; সুতরাং $\cos A$ ধনাত্মক হবে।

$$\therefore \cos A = \frac{12}{13}$$

আমরা জানি, $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

বা, $\sin^2 A = 1 - \cos^2 A$

$$= 1 - \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1 - \frac{144}{169} = \frac{25}{169}$$

$$\therefore \sin A = \pm\sqrt{\frac{25}{169}} = \pm\frac{5}{13}$$

তৃতীয় ও চতুর্থ চতুর্ভাগে $\tan A$ ও $\cos A$ বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট। কিন্তু যেহেতু $\tan A = -\frac{5}{12}$ এবং $\cos A = \frac{13}{12}$, তাই A কোণটি চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত এবং চতুর্থ চতুর্ভাগে $\sin A$ ঋণাত্মক।

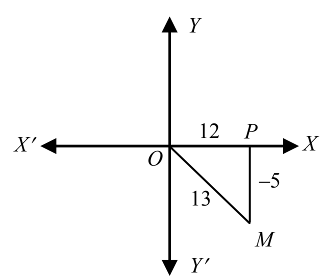
$$\therefore \sin A = -\frac{5}{13}$$

Ans: $\sin A = -\frac{5}{13}, \cos A = \frac{12}{13}$

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

দেওয়া আছে, $\tan A = -\frac{5}{12}$ এবং $\tan A$ ও $\cos A$ বিপরীত চিহ্ন বিশিষ্ট।

সুতরাং $\cos A$ ধনাত্মক। শুধুমাত্র ৪র্থ চতুর্ভাগে $\tan A$ ঋণাত্মক এবং $\cos A$ ধনাত্মক। $\therefore$ A কোণটি ৪র্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত।



চিত্র হতে,

$$OM = \sqrt{OP^2 + PM^2}$$

$$= \sqrt{(12)^2 + (-5)^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$$

এখন, $\sin A = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{PM}{OM} = \frac{-5}{13} = -\frac{5}{13}$

$$\cos A = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{OP}{OM} = \frac{12}{13}$$

$\therefore \sin A = -\frac{5}{13}, \cos A = \frac{12}{13}$ **(Ans.)**

৬ নিম্নলিখিত অভেদসমূহ প্রমাণ কর:

(ক) $\tan A + \cot A = \sec A \operatorname{cosec} A$

(খ) $\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \sqrt{\frac{\sec\theta + 1}{\sec\theta - 1}}$

(গ) $\sqrt{\frac{1 - \sin A}{1 + \sin A}} = \sec A - \tan A$

(ঘ) $\sec^4\theta - \sec^2\theta = \tan^4\theta + \tan^2\theta$

(ঙ) $(\sec\theta - \cos\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \sin\theta)(\tan\theta + \cot\theta) = 1$

(চ) $\frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \tan\theta + \sec\theta$

সমাধান:

ক $\tan A + \cot A = \sec A \operatorname{cosec} A$

বামপক্ষ $= \tan A + \cot A$

$= \frac{\sin A}{\cos A} + \frac{\cos A}{\sin A}$ $[\because \tan A = \frac{\sin A}{\cos A}$ এবং $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A}]$

$= \frac{\sin^2 A + \cos^2 A}{\cos A.\sin A}$

$= \frac{1}{\cos A.\sin A}$ $[\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1]$

$= \sec A.\operatorname{cosec} A$ $[\because \sec A = \frac{1}{\cos A}$ এবং $\operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A}]$

= ডানপক্ষ

$\tan A + \cot A = \sec A.\operatorname{cosec} A$ **(প্রমাণিত)**

(*i*) এর দ্বিতীয় পদ্ধতি

$\tan A + \cot A$

$= \tan A\left(1 + \frac{\cot A}{\tan A}\right)$

$= \tan A.(1 + \cot^2 A)$ $[\because \frac{1}{\tan A} = \cot A]$

$= \tan A.\operatorname{cosec}^2 A$

$= \frac{\sin A}{\cos A} \cdot \frac{1}{\sin^2 A} = \frac{1}{\cos A} \cdot \frac{1}{\sin A} = \sec A \operatorname{cosec} A$ **(প্রমাণিত)**

(*i*) এর তৃতীয় পদ্ধতি

$\tan A + \cot A$

$= \cot A\left(\frac{\tan A}{\cot A} + 1\right)$

$= \cot A(1 + \tan^2 A)$

$= \cot A.\ sec^2 A$

$= \frac{\cos A}{\sin A} \cdot \frac{1}{\cos^2 A} = \frac{1}{\cos A} \cdot \frac{1}{\sin A} = \sec A.\ \operatorname{cosec} A$ **(প্রমাণিত)**

(*i*) এর চতুর্থ পদ্ধতি

$\tan A + \cot A$

$= \tan A + \frac{1}{\tan A}$

$= \frac{\tan^2 A + 1}{\tan A}$

$= \frac{\sec^2 A}{\tan A}$

$= \sec A.\ \frac{\sec A}{\tan A}$

$= \sec A.\ \frac{\sec A}{\sin A.\ \sec A} = \sec A.\frac{1}{\sin A} = \sec A.\operatorname{cosec} A$ **(প্রমাণিত)**

খ $\sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \sqrt{\frac{\sec\theta + 1}{\sec\theta - 1}}$

বামপক্ষ $= \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta}}$

$= \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta}} \cdot \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{1 + \cos\theta}}$

[এখানে হর ও লবকে $\sqrt{1 + \cos\theta}$ দ্বারা গুণ করে]

$= \sqrt{\frac{(1 + \cos\theta)(1 + \cos\theta)}{(1 - \cos\theta)(1 + \cos\theta)}}$

$= \sqrt{\frac{(1 + \cos\theta)^2}{1 - \cos^2\theta}}$

$= \sqrt{\frac{(1 + \cos\theta)^2}{\sin^2\theta}}$

$= \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}$

$= \frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$= \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$ $[\because \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \cot\theta]$

= মধ্য অংশ

আবার বামপক্ষ $= \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta}}$

$= \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{\sec\theta}}{1 - \frac{1}{\sec\theta}}}$ $\left[\because \cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}\right]$

$= \sqrt{\frac{\frac{\sec\theta + 1}{\sec\theta}}{\frac{\sec\theta - 1}{\sec\theta}}}$

$= \sqrt{\frac{\sec\theta + 1}{\sec\theta} \times \frac{\sec\theta}{\sec\theta - 1}}$

$= \sqrt{\frac{\sec\theta + 1}{\sec\theta - 1}}$ = ডানপক্ষ

$\therefore \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \sqrt{\frac{\sec\theta + 1}{\sec\theta - 1}}$ **(প্রমাণিত)**

(*ii*) এর দ্বিতীয় পদ্ধতি

$\sqrt{\frac{\sec\theta + 1}{\sec\theta - 1}} = \frac{\left(\sqrt{\sec\theta + 1}\right)\left(\sqrt{\sec\theta + 1}\right)}{\left(\sqrt{\sec\theta - 1}\right)\left(\sqrt{\sec\theta + 1}\right)}$

$= \frac{\sqrt{(\sec\theta + 1)^2}}{\sqrt{(\sec\theta + 1)(\sec\theta - 1)}}$

$= \frac{\sqrt{(\sec\theta + 1)^2}}{\sqrt{\sec^2\theta - 1}}$

$= \frac{\sec\theta + 1}{\tan\theta}$

$= \frac{\sec\theta}{\tan\theta} + \frac{1}{\tan\theta}$

$= \frac{1}{\cos\theta} \times \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \cot\theta$

$= \frac{1}{\sin\theta} + \cot\theta$

$= \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta$

$\therefore \sqrt{\frac{1 + \cos\theta}{1 - \cos\theta}} = \operatorname{cosec}\theta + \cot\theta = \sqrt{\frac{\sec\theta + 1}{\sec\theta - 1}}$ **(প্রমাণিত)**

গ $\sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}} = \sec A - \tan A$

$$\text{বামপক্ষ} = \sqrt{\frac{1-\sin A}{1+\sin A}}$$
$$= \sqrt{\frac{1-\sin A}{1+\sin A}} \cdot \sqrt{\frac{1-\sin A}{1-\sin A}}$$
[এখানে হর ও লবকে $\sqrt{1-\sin A}$ দ্বারা গুণ করে]
$$= \sqrt{\frac{(1-\sin A)(1-\sin A)}{(1+\sin A)(1-\sin A)}}$$
$$= \sqrt{\frac{(1-\sin A)^2}{1-\sin^2 A}}$$
$$= \sqrt{\frac{(1-\sin A)^2}{\cos^2 A}} \quad \left[\begin{array}{l}\text{আমরা জানি, } \sin^2 A + \cos^2 A = 1\\ \therefore \cos^2 A = 1 - \sin^2 A\end{array}\right]$$
$$= \frac{1-\sin A}{\cos A}$$
$$= \frac{1}{\cos A} - \frac{\sin A}{\cos A} = \sec A - \tan A = \text{ডানপক্ষ}$$
$\therefore \sqrt{\dfrac{1-\sin A}{1+\sin A}} = \sec A - \tan A$ **(প্রমাণিত)**

বি.দ্রঃ ডানপক্ষ $\sec A - \tan A$ থেকে শুরু করে অর্থাৎ সমাধানকৃত অঙ্কটির নিচ থেকে ক্রমান্বয়ে উপরের দিকে গেলেও কাঙ্খিত সমাধান পাওয়া যায় অর্থাৎ ডানপক্ষ থেকে বামপক্ষ প্রমাণ করা যায়।

ঘ $\sec^4\theta - \sec^2\theta = \tan^4\theta + \tan^2\theta$

$$\text{বামপক্ষ} = \sec^4\theta - \sec^2\theta$$
$$= \sec^2\theta\,(\sec^2\theta - 1)$$
$$= (1+\tan^2\theta)(1+\tan^2\theta - 1) \quad [\because \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta]$$
$$= (1+\tan^2\theta)\tan^2\theta$$
$$= \tan^2\theta + \tan^4\theta$$
$$= \tan^4\theta + \tan^2\theta = \text{ডানপক্ষ}$$
$\therefore \sec^4\theta - \sec^2\theta = \tan^4\theta + \tan^2\theta$ **(প্রমাণিত)**

(*iv*) এর দ্বিতীয় পদ্ধতি

$$\text{বামপক্ষ} = \sec^4\theta - \sec^2\theta$$
$$= (\sec^2\theta)^2 - \sec^2\theta$$
$$= (1+\tan^2\theta)^2 - (1+\tan^2\theta)$$
$$= 1 + 2\tan^2\theta + (\tan^2\theta)^2 - 1 - \tan^2\theta$$
$$= \tan^4\theta + 2\tan^2\theta - \tan^2\theta$$
$$= \tan^4\theta + \tan^2\theta = \text{ডানপক্ষ}$$
$\therefore \sec^4\theta - \sec^2\theta = \tan^4\theta + \tan^2\theta$ **(প্রমাণিত)**

(*iv*) এর তৃতীয় পদ্ধতি

$$\text{বামপক্ষ} = \sec^4\theta - \sec^2\theta$$
$$= \frac{1}{\cos^4\theta} - \frac{1}{\cos^2\theta}$$
$$= \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^4\theta}$$
$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos^4\theta}$$
$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} \cdot \frac{1}{\cos^2\theta}$$
$$= \tan^2\theta.\sec^2\theta$$
$$= \tan^2\theta(1+\tan^2\theta) = \tan^4\theta + \tan^2\theta$$
$\therefore \sec^4\theta - \sec^2\theta = \tan^4\theta + \tan^2\theta$ **(প্রমাণিত)**

ঙ $(\sec\theta - \cos\theta)(\mathrm{cosec}\,\theta - \sin\theta)(\tan\theta + \cot\theta) = 1$

$$\text{বামপক্ষ} = (\sec\theta - \cos\theta)(\mathrm{cosec}\,\theta - \sin\theta)(\tan\theta + \cot\theta)$$
$$= \left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)\left(\frac{1}{\sin\theta} - \sin\theta\right)\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$$
$$= \left(\frac{1-\cos^2\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{1-\sin^2\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos\theta.\sin\theta}\right)$$
$$= \left(\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin\theta}\right)\left(\frac{1}{\cos\theta.\sin\theta}\right)$$
$$\left[\begin{array}{l}\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1;\ \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta\\ \text{এবং } \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta\end{array}\right]$$
$$= \frac{\sin^2\theta.\cos^2\theta}{\cos^2\theta.\sin^2\theta} = 1 = \text{ডানপক্ষ}$$
$\therefore (\sec\theta - \cos\theta)(\mathrm{cosec}\,\theta - \sin\theta)(\tan\theta + \cot\theta) = 1$ **(প্রমাণিত)**

চ $\dfrac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \tan\theta + \sec\theta$

$$\text{বামপক্ষ} = \frac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$
$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - (\sec^2\theta - \tan^2\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1} \quad [\because \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1]$$
$$= \frac{(\tan\theta + \sec\theta) - (\sec\theta + \tan\theta)(\sec\theta - \tan\theta)}{\tan\theta - \sec\theta + 1}$$
$$= \frac{(\sec\theta + \tan\theta)(1 - \sec\theta + \tan\theta)}{(1 - \sec\theta + \tan\theta)}$$
$$= \sec\theta + \tan\theta$$
$\therefore \dfrac{\tan\theta + \sec\theta - 1}{\tan\theta - \sec\theta + 1} = \tan\theta + \sec\theta$ **(প্রমাণিত)**

৭ যদি $\mathrm{cosec}\,A = \dfrac{a}{b}$ হয়, যেখানে $a > b > 0$, তবে প্রমাণ কর যে, $\tan A = \dfrac{\pm b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

<u>**সমাধান:**</u> দেওয়া আছে, $\mathrm{cosec}\,A = \dfrac{a}{b}$

বা, $\mathrm{cosec}^2 A = \dfrac{a^2}{b^2}$ [বর্গ করে]

বা, $1 + \cot^2 A = \dfrac{a^2}{b^2}$ $[\because \mathrm{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1]$

বা, $\cot^2 A = \dfrac{a^2}{b^2} - 1$

বা, $\dfrac{1}{\tan^2 A} = \dfrac{a^2 - b^2}{b^2}$

বা, $\tan^2 A = \dfrac{b^2}{a^2 - b^2}$ [বিপরীতকরণ করে]

বা, $\tan A = \pm\sqrt{\dfrac{b^2}{a^2 - b^2}}$

$\therefore \tan A = \dfrac{\pm b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ **(প্রমাণিত)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

দেওয়া আছে, $\text{cosec}A = \frac{a}{b}$

$\therefore \sin A = \frac{b}{a}$

আমরা জানি, $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$

$\therefore \cos A = \pm\sqrt{1 - \sin^2 A}$

$= \pm\sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$

$= \pm\sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}$

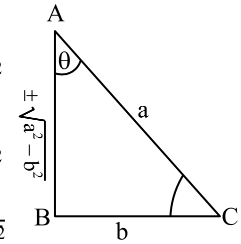
$= \pm\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$

এখন, $\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{b}{a} \times \left(\pm\frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right)$

$\therefore \tan A = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ **(প্রমাণিত)**

সমাধান (তৃতীয় পদ্ধতি)

দেওয়া আছে, $\text{cosec}A = \frac{a}{b} = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}}$



সমকোণী ΔABC-এ $AB^2 = AC^2 - BC^2$

বা, $AB^2 = a^2 - b^2$

$\therefore AB = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$

ΔABC-এ $\tan A = \frac{BC}{AB} = \frac{b}{\pm\sqrt{a^2 - b^2}}$

$\therefore \tan A = \pm\frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ **(প্রমাণিত)**

বি.দ্রঃ বাহুর দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না কিন্তু ত্রিকোণমিতিতে বাহুর দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক দেওয়া থাকলে তা শুধু অবস্থান নির্দেশে ব্যবহৃত হয়। এখানে প্রমাণের স্বার্থে বাহুর দৈর্ঘ্যে ঋণাত্মক চিহ্ন বসানো হয়েছে।

◆◆ অনুশীলনীর ৭নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

a* sin*θ* = *b* cos*θ *ক.* $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta}$ *এর মান নির্ণয় কর।* *খ. দেখাও যে,* $\cos\theta = \pm\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ *গ. প্রমাণ কর যে,* $\text{cosec}^2\theta - \sec^2\theta = \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^2}{a^2}$	**নিজে নিজে চেষ্টা কর।** (ক) $\frac{b + a}{b - a}$

৮ যদি $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$ হয়, তবে দেখাও যে, $\cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$

বা, $\cos\theta = \sqrt{2}\sin\theta + \sin\theta$

বা, $\cos\theta = (\sqrt{2} + 1)\sin\theta$

বা, $(\sqrt{2} - 1)\cos\theta = (\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1)\sin\theta$

[উভয়পক্ষকে $(\sqrt{2} - 1)$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $(\sqrt{2} - 1)\cos\theta = (2 - 1)\sin\theta$

বা, $\sqrt{2}\cos\theta - \cos\theta = \sin\theta$

$\therefore \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$ **(দেখানো হলো)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

দেওয়া আছে, $\cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta$

বা, $(\cos\theta - \sin\theta)^2 = (\sqrt{2}\sin\theta)^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\cos^2\theta - 2\cos\theta.\sin\theta + \sin^2\theta = 2\sin^2\theta$

বা, $\cos^2\theta + \sin^2\theta - 2\sin^2\theta = 2\cos\theta.\sin\theta$

বা, $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 2\cos\theta.\sin\theta$

বা, $(\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta) = 2\cos\theta.\sin\theta$

বা, $(\cos\theta + \sin\theta).\sqrt{2}\sin\theta = 2\cos\theta.\sin\theta$

$[\because \cos\theta - \sin\theta = \sqrt{2}\sin\theta)$

বা. $\cos\theta + \sin\theta = \frac{2\sin\theta.\cos\theta}{\sqrt{2}\sin\theta}$

$\therefore \cos\theta + \sin\theta = \sqrt{2}\cos\theta$ **(দেখানো হলো)**

৯ $\tan\theta = \frac{x}{y}$, $x \neq y$ হলে, $\frac{x\sin\theta + y\cos\theta}{x\sin\theta - y\sin\theta}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\tan\theta = \frac{x}{y}$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{x}{y}$

বা, $\frac{x\sin\theta}{y\cos\theta} = \frac{x}{y}.\frac{x}{y}$ [উভয়পক্ষকে $\frac{x}{y}$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\frac{x\sin\theta}{y\cos\theta} = \frac{x^2}{y^2}$

$\therefore \frac{x\sin\theta + y\cos\theta}{x\sin\theta - y\sin\theta} = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

$\therefore$ নির্ণেয় মান $\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$ **(Ans.)**

◆◆ অনুশীলনীর ৫ ও ৯নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মাধ্যমে বর্ণিত সমীকরণ: $\tan\theta = \frac{5}{12}$ ক. $\sec\theta$ এর মান নির্ণয় কর। খ. $\sin\theta$ এবং $\cos\theta$ এর মানসমূহ নির্ণয় কর। গ. $\sin\theta$ ঋণাত্মক হলে দেখাও যে, $\frac{-\sin(-\theta)+\cos(-\theta)}{\sec(-\theta)+\tan(-\theta)} = \frac{34}{39}$	নিজে নিজে চেষ্ট কর। (ক) $\pm\frac{13}{12}$; (খ) $\pm\frac{5}{13}$, $\pm\frac{12}{13}$

১০ $\tan\theta + \sec\theta = x$ হলে, দেখাও যে, $\sin\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\tan\theta + \sec\theta = x$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos\theta} = x$ $\left[\because \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \text{ এবং } \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}\right]$

বা, $\frac{1+\sin\theta}{\cos\theta} = x$

বা, $\frac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta} = x^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\frac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta} = x^2$ [$\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ বা, $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$]

বা, $\frac{(1+\sin\theta)(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)} = x^2$

বা, $\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta} = x^2$

বা, $\frac{1+\sin\theta+1-\sin\theta}{1+\sin\theta-1+\sin\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\frac{2}{2\sin\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

বা, $\frac{1}{\sin\theta} = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

$\therefore \sin\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ **(দেখানো হলো)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

দেওয়া আছে, $\tan\theta + \sec\theta = x$

বা, $(\tan\theta + \sec\theta)^2 = x^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $\tan^2\theta + 2\tan\theta.\sec\theta + \sec^2\theta = x^2$

বা, $\frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta} + 2.\frac{\sin\theta}{\cos\theta}.\frac{1}{\cos\theta} + \frac{1}{\cos^2\theta} = x^2$

বা, $\frac{\sin^2\theta + 2\sin\theta + 1}{\cos^2\theta} = x^2$

বা, $\sin^2\theta + 2\sin\theta + 1 = x^2\cos^2\theta$

বা, $\sin^2\theta + 2\sin\theta + 1 = x^2(1-\sin^2\theta)$ [$\because \cos^2\theta = 1-\sin^2\theta$]

বা, $(\sin\theta+1)^2 = x^2(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)$

বা, $\sin\theta + 1 = x^2(1-\sin\theta)$ [উভয়পক্ষকে $(1+\sin\theta)$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\sin\theta + 1 = x^2 - x^2\sin\theta$

বা, $x^2\sin\theta + \sin\theta = x^2 - 1$ [পক্ষান্তর করে]

বা, $(x^2+1)\sin\theta = x^2 - 1$

$\therefore \sin\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ **(দেখানো হলো)**

◆◆ অনুশীলনীর ১০নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

$\tan\theta + \sec\theta = x$ হলে, ক. $\tan\theta - \sec\theta$ এর মান নির্ণয় কর। খ. দেখাও যে, $\sin\theta = \frac{x^2-1}{x^2+1}$ গ. প্রমাণ কর যে, $\text{cosec}\theta + \cot\theta = \frac{x+1}{x-1}$	নিজে নিজে চেষ্ট কর। (ক) $\frac{1}{x}$

১১ $a\cos\theta - b\sin\theta = c$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $a\cos\theta - b\sin\theta = c$

বা, $(a\cos\theta - b\sin\theta)^2 = c^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $a^2\cos^2\theta - 2a\cos\theta.b\sin\theta + b^2\sin^2\theta = c^2$

বা, $a^2(1-\sin^2\theta) - 2a\cos\theta.b\sin\theta + b^2(1-\cos^2\theta) = c^2$ [$\therefore \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$]

বা, $a^2 - a^2\sin^2\theta - 2a\cos\theta.b\sin\theta + b^2 - b^2\cos^2\theta = c^2$

বা, $-(a^2\sin^2\theta + 2a\cos\theta.b\sin\theta + b^2\cos^2\theta) = -(a^2+b^2-c^2)$

বা, $a^2\sin^2\theta + 2a\cos\theta.b\sin\theta + b^2\cos^2\theta = a^2+b^2-c^2$

বা, $(a\sin\theta)^2 + 2.a\sin\theta.b\cos\theta + (b\cos\theta)^2 = a^2+b^2-c^2$

[$\because$ a $\cos\theta$. b $\sin\theta$ = ab $\sin\theta\cos\theta$ = a $\sin\theta$. b $\cos\theta$]

বা, $(a\sin\theta + b\cos\theta)^2 = a^2+b^2-c^2$

$\therefore a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$ **(প্রমাণিত)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

দেওয়া আছে, $a\cos\theta - b\sin\theta = c$ ... ... (i)

ধরি, $a\sin\theta + b\cos\theta = y$ ... ... (ii)

সমীকরণ (i) ও (ii) বর্গ করে যোগ করি,

$(a\cos\theta - b\sin\theta)^2 + (a\sin\theta + b\cos\theta)^2 = c^2 + y^2$

বা, $a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta - 2ab\sin\theta\cos\theta + a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta + 2ab\sin\theta\cos\theta = c^2 + y^2$

বা, $a^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + b^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = c^2 + y^2$

বা, $c^2 + y^2 = a^2 + b^2$

বা, $y^2 = a^2 + b^2 - c^2$

বা, $y = \pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$

$\therefore a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2+b^2-c^2}$ **(প্রমাণিত)**

◆◆ অনুশীলনীর ১১নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

$P = a\cos\theta$ এবং $Q = b\sin\theta$ ক. $\frac{P^2}{a^2} + \frac{Q^2}{b^2}$ এর মান নির্ণয় কর। খ. $P - Q = c$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a\sin\theta + b\cos\theta = \pm\sqrt{a^2 + b^2 - c^2}$ গ. $a^2 = 3, b^2 = 7$ এবং $Q^2 + P^2 = 4$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\tan\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$	নিজে নিজে চেষ্টা কর। (ক) 1

১২ মান নির্ণয় করঃ

(ক) $\sin^2\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{4} + \tan^2\frac{\pi}{3} + \cot^2\frac{\pi}{6}$

(খ) $3\tan^2\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cot^2\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}\sec^2\frac{\pi}{4}$

(গ) $\tan^2\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{3}\tan^2\frac{\pi}{6}\tan^2\frac{\pi}{3}\,.\cos^2\frac{\pi}{4}$

(ঘ) $\frac{\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{6}}{1 + \tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{6}} + \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}$

সমাধানঃ

ক $\sin^2\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{4} + \tan^2\frac{\pi}{3} + \cot^2\frac{\pi}{6}$

$= \left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^2 + \left(\cos\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(\tan\frac{\pi}{3}\right)^2 + \left(\cot\frac{\pi}{6}\right)^2$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 3 + 3$

$= \frac{1 + 2 + 12 + 12}{4} = \frac{27}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= \frac{27}{4}$ **(Ans.)**

(*i*) এর দ্বিতীয় পদ্ধতি

প্রদত্ত রাশি $= \sin^2\frac{\pi}{6} + \cos^2\frac{\pi}{4} + \tan^2\frac{\pi}{3} + \cot^2\frac{\pi}{6}$

$= \sin^2\frac{180°}{6} + \cos^2\frac{180°}{4} + \tan^2\frac{180°}{3} + \cot^2\frac{180°}{6}$

$= \sin^2 30° + \cos^2 45° + \tan^2 60° + \cot^2 30°$

$= (\sin 30°)^2 + (\cos 45°)^2 + (\tan 60°)^2 + (\cot 30°)^2$

$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (\sqrt{3})^2 + (\sqrt{3})^2$

$= \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + 3 + 3 = \frac{1+2}{4} + 6 = \frac{3 + 24}{4} = \frac{27}{4}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= \frac{27}{4}$ **(Ans.)**

খ $3\tan^2\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{3} - \frac{1}{2}\cot^2\frac{\pi}{6} + \frac{1}{3}\sec^2\frac{\pi}{4}$

$= 3\left(\tan\frac{\pi}{4}\right)^2 - \left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\cot\frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\sec\frac{\pi}{4}\right)^2$

$= 3(1)^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}(\sqrt{3})^2 + \frac{1}{3}(\sqrt{2})^2$

$= 3 - \frac{3}{4} - \frac{3}{2} + \frac{2}{3}$

$= \frac{36 - 9 - 18 + 8}{12} = \frac{17}{12}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= \frac{17}{12}$ **(Ans.)**

গ $\tan^2\frac{\pi}{4} - \sin^2\frac{\pi}{3}\tan^2\frac{\pi}{6}\tan^2\frac{\pi}{3}\,.\cos^2\frac{\pi}{4}$

$= 1^2 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 . \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 . (\sqrt{3})^2 . \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$

$= 1 - \frac{3}{4} . \frac{1}{3} . 3 . \frac{1}{2} = 1 - \frac{3}{8} = \frac{8 - 3}{8} = \frac{5}{8}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= \frac{5}{8}$ **(Ans.)**

ঘ $\frac{\tan\frac{\pi}{3} - \tan\frac{\pi}{6}}{1 + \tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{6}} + \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}$

$= \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \sqrt{3}.\frac{1}{\sqrt{3}}} + \frac{1}{2} . \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{1}{2}$

$= \frac{\frac{3-1}{\sqrt{3}}}{1 + 1} + \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}$

$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{2} + 2.\frac{\sqrt{3}}{4}$

$= \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$

$= \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 + 3}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{2\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2\sqrt{3}.\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{2.3} = \frac{5\sqrt{3}}{6}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= \frac{5\sqrt{3}}{6}$ **(Ans.)**

১৩ সরল কর: $\dfrac{1-\sin^2\frac{\pi}{6}}{1+\sin^2\frac{\pi}{4}} \times \dfrac{\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{6}}{\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{2}-\cot^2\frac{\pi}{2}} \div \left(\sin\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{6}\right)+\left(\sec^2\frac{\pi}{6}-\tan^2\frac{\pi}{6}\right)$

সমাধান: $\dfrac{1-\sin^2\frac{\pi}{6}}{1+\sin^2\frac{\pi}{4}} \times \dfrac{\cos^2\frac{\pi}{3}+\cos^2\frac{\pi}{6}}{\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{2}-\cot^2\frac{\pi}{2}} \div \left(\sin\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{6}\right)+\left(\sec^2\frac{\pi}{6}-\tan^2\frac{\pi}{6}\right)$

$$=\frac{1-\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^2}{1+\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2} \times \frac{\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{6}\right)^2}{\left(\operatorname{cosec}\frac{\pi}{2}\right)^2-\left(\cot\frac{\pi}{2}\right)^2} \div \left(\sin\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{6}\right)+\left\{\left(\sec\frac{\pi}{6}\right)^2-\left(\tan\frac{\pi}{6}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} \times \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{(1)^2-0} \div \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\left\{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{1-\frac{1}{4}}{1+\frac{1}{2}} \times \left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right) \div \frac{1}{2}+\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{3}\right) = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{2}} \times \frac{4}{4} \div \frac{1}{2}+\frac{3}{3} = \frac{3}{4}\times\frac{2}{3}\times 2+1 = 1+1 = 2$$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলমান $= 2$ **(Ans.)**

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

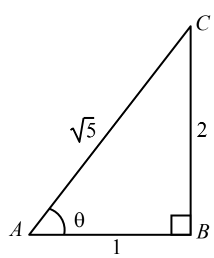
কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৬২

***ABC* একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং $\sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$। অন্য ত্রিকোণমিতি অনুপাতসমূহ নির্ণয় কর।**

সমাধান: ধরি, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

অতিভুজ $= AC$, ভূমি $= AB$,

লম্ব $= BC$ এবং $\angle BAC = \theta$



দেওয়া আছে, $\sin\theta = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

বা, $\sin\theta = \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\therefore$ BC লম্ব $= 2$ একক এবং AC অতিভুজ $= \sqrt{5}$ একক।

পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী

ভূমি $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$

$= \sqrt{(\sqrt{5})^2 - 2^2}$

$= \sqrt{5-4}$

$= \sqrt{1}$

$= 1$ একক।

$\therefore$ অন্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ

$\cos\theta = \dfrac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{AB}{AC} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\sec\theta = \dfrac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}} = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$

$\tan\theta = \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{2}{1} = 2$

$\cot\theta = \dfrac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}} = \dfrac{AB}{BC} = \dfrac{1}{2}$

$\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

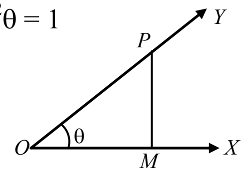
বি.দ্র: $\sin\theta$, $\cos\theta$ ও $\tan\theta$ এর মানগুলো বিপরীতকরণ করলে যথাক্রমে $\operatorname{cosec}\theta$, $\sec\theta$ ও $\cot\theta$ এর মান পাওয়া যায়। এ প্রক্রিয়া অবলম্বন করে ও সমাধান বের করা যায়।

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৬৫

প্রমাণ কর যে, (চিত্রের সাহায্যে):
(ক) $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ (খ) $\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$

সমাধান:

i $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$



প্রমাণ: মনে করি, OX রশ্মি তার আদি অবস্থান OX হতে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে OY অবস্থানে এসে $\angle XOY$ উৎপন্ন করে। ধরি, $\angle XOY = \theta$, OY-এর উপর কোনো বিন্দু P হতে $PM \perp OX$ আঁকি।
POM সমকোণী ত্রিভুজে $\angle POM = \theta$
θ কোণের প্রেক্ষিতে PM লম্ব, OM ভূমি এবং OP অতিভুজ।

তাহলে, $\sec\theta = \dfrac{OP}{OM}$ এবং $\tan\theta = \dfrac{PM}{OM}$

এখন, POM সমকোণী ত্রিভুজে

$PM^2 + OM^2 = OP^2$

বা, $\dfrac{PM^2}{OM^2} + \dfrac{OM^2}{OM^2} = \dfrac{OP^2}{OM^2}$ [উভয়পক্ষকে OM^2 দ্বারা ভাগ করে]

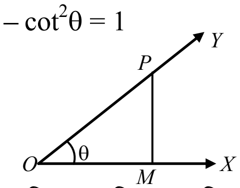
বা, $\left(\dfrac{PM}{OM}\right)^2 + \left(\dfrac{OM}{OM}\right)^2 = \left(\dfrac{OP}{OM}\right)^2$

বা, $(\tan\theta)^2 + (1)^2 = (\sec\theta)^2$

বা, $\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$\therefore \sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ **(প্রমাণিত)**

ii $\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$



প্রমাণ: মনে করি, OX রশ্মি তার আদি অবস্থান OX হতে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে ঘুরে OY অবস্থানে এসে $\angle XOY$ উৎপন্ন করে।
ধরি, $\angle XOY = \theta$, OY-এর উপর কোনো বিন্দু P হতে $PM \perp OX$ আঁকি।
POM সমকোণী ত্রিভুজে $\angle POM = \theta$
θ কোণের প্রেক্ষিতে PM লম্ব, OM ভূমি এবং OP অতিভুজ।

তাহলে, $\csc\theta = \dfrac{OP}{PM}$ এবং $\cot\theta = \dfrac{OM}{PM}$

এখন, POM সমকোণী ত্রিভুজে

$PM^2 + OM^2 = OP^2$

বা, $\dfrac{PM^2}{PM^2} + \dfrac{OM^2}{PM^2} = \dfrac{OP^2}{PM^2}$ [উভয়পক্ষকে PM^2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\left(\dfrac{PM}{PM}\right)^2 + \left(\dfrac{OM}{PM}\right)^2 = \left(\dfrac{OP}{PM}\right)^2$

বা, $(1)^2 + (\cot\theta)^2 = (\csc\theta)^2$

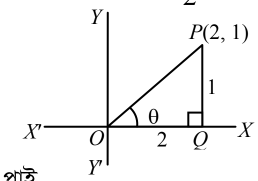
বা, $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

$\therefore \csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$ **(প্রমাণিত)**

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৭১

θ স্থূলকোণ $\left(\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi\right)$ এবং $\tan\theta = \dfrac{1}{2}$ হলে, অপর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ সমকোণী ত্রিভুজ এবং ত্রিকোণমিতিক অভেদ এর সাহায্যে নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$ এবং $\tan\theta = \dfrac{1}{2}$



সমকোণী ত্রিভুজ POQ হতে পাই,

$OP^2 = PQ^2 + OQ^2 = 1^2 + 2^2 = 5$

$\therefore OP = \sqrt{5}$

যেহেতু $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ সুতরাং θ ১ম চতুর্ভাগে অবস্থিত এবং ১ম চতুর্ভাগে সকল অনুপাতের মান ধনাত্মক।

$\therefore \sin\theta = \dfrac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\csc\theta = \dfrac{\text{অতিভুজ}}{\text{বিপরীত বাহু}} = \dfrac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$

$\cos\theta = \dfrac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$\sec\theta = \dfrac{\text{অতিভুজ}}{\text{সন্নিহিত বাহু}} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

এবং $\cot\theta = \dfrac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{বিপরীত বাহু}} = \dfrac{2}{1} = 2$

ত্রিকোণমিতি অভেদের সাহায্যে -

আমরা জানি, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

বা, $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

বা, $\sec^2\theta = 1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2$

বা, $\sec^2\theta = 1 + \dfrac{1}{4}$

বা, $\sec^2\theta = \dfrac{5}{4}$

বা, $\sec\theta = \pm\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$\therefore \sec\theta = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$ $[\because 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}]$

$\therefore \cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$

$= \dfrac{1}{\frac{\sqrt{5}}{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

আবার, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

বা, $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

বা, $\sin^2\theta = 1 - \left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)^2$

বা, $\sin^2\theta = 1 - \dfrac{4}{5}$

বা, $\sin^2\theta = \dfrac{5-4}{5}$

বা, $\sin^2\theta = \dfrac{1}{5}$

বা, $\sin\theta = \pm\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\therefore \sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ $[\because 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}]$

$0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ সুতরাং θ ১ম চতুর্ভাগে অবস্থিত এবং ১ম চতুর্ভাগে sin ধনাত্মক।

$\therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = \sqrt{5}$

এবং $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{\frac{1}{\sqrt{5}}} = \frac{2}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{1} = 2$

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৭২

ক) $\sin^2\frac{\pi}{4}\cos^2\frac{\pi}{3} + \tan^2\frac{\pi}{6}\sec^2\frac{\pi}{3} + \cot^2\frac{\pi}{3}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{4}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

প্রদত্ত রাশি, $\sin^2\frac{\pi}{4}\cos^2\frac{\pi}{3} + \tan^2\frac{\pi}{6}\sec^2\frac{\pi}{3} + \cot^2\frac{\pi}{3}\operatorname{cosec}^2\frac{\pi}{4}$

$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 . \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 . 2^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 . (\sqrt{2})^2$

$= \frac{1}{2} . \frac{1}{4} + \frac{1}{3} . 4 + \frac{1}{3} . 2$

$= \frac{1}{8} + \frac{4}{3} + \frac{2}{3}$

$= \frac{3 + 32 + 16}{24}$

$= \frac{51}{24} = \frac{17}{8}$ **(Ans.)**

খ) সরল কর: $\dfrac{\sin^2\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3}} - \dfrac{\sin^2\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3}}$

সমাধানঃ $\dfrac{\sin^2\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3}} - \dfrac{\sin^2\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{3}}{\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3}}$

$$= \frac{\left(\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3}\right)\left(\sin^2\frac{\pi}{3} + \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{3}\right) - \left(\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3}\right)\left(\sin^2\frac{\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3} + \cos^2\frac{\pi}{3}\right)}{\left(\sin\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{3}\right)\left(\sin\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{3}\right)}$$

$$= \frac{\sin^3\frac{\pi}{3} - \cos^3\frac{\pi}{3} - \left(\sin^3\frac{\pi}{3} + \cos^3\frac{\pi}{3}\right)}{\sin^2\frac{\pi}{3} - \cos^2\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{\sin^3\frac{\pi}{3} - \cos^3\frac{\pi}{3} - \sin^3\frac{\pi}{3} - \cos^3\frac{\pi}{3}}{\sin^2\frac{\pi}{3} - \cos^2\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{-2\cos^3\frac{\pi}{3}}{\sin^2\frac{\pi}{3} - \cos^2\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{-2\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} \quad \left[\because \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \text{ এবং } \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$$

$$= \frac{-2 \times \frac{1}{8}}{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{-\frac{1}{4}}{\frac{3-1}{4}} = -\frac{1}{4} \times \frac{4}{2} = -\frac{1}{2} \quad \textbf{(Ans.)}$$

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৭৪

$A = \frac{\pi}{3}$ ও $B = \frac{\pi}{6}$ এর জন্য নিম্নোক্ত অভেদসমূহ প্রমাণ কর:

(ক) $\sin(A - B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$

(খ) $\cos(A + B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

(গ) $\cos (A - B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

(ঘ) $\tan 2B = \frac{2\tan B}{1 - \tan^2 B}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $A = \frac{\pi}{3}$ ও $B = \frac{\pi}{6}$

ক $\sin(A - B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$

বামপক্ষ $= \sin (A - B)$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{2\pi - \pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \quad \left[\because \sin\frac{\pi}{6} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}\right]$$

ডানপক্ষ $= \sin A\cos B - \cos A\sin B$

$$= \sin\frac{\pi}{3} . \cos\frac{\pi}{6} - \cos\frac{\pi}{3} . \sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{3-1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$\therefore \sin (A - B) = \sin A\cos B - \cos A\sin B$ **(প্রমাণিত)**

খ $\cos(A + B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$

বামপক্ষ $= \cos(A + B)$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{2\pi + \pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{3\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \left[\because \cos\frac{\pi}{2} = \cos 90^\circ = 0\right]$$

ডানপক্ষ $= \cos A\cos B - \sin A\sin B$

$$= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} = 0$$

$\therefore \cos(A + B) = \cos A\cos B - \sin A\sin B$ **(প্রমাণিত)**

গ $\cos (A - B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$

বামপক্ষ $= \cos (A - B)$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{2\pi - \pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

ডানপক্ষ $= \cos A\cos B + \sin A\sin B$

$$= \cos\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} . \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore \cos(A - B) = \cos A\cos B + \sin A\sin B$ **(প্রমাণিত)**

ঘ $\tan 2B = \frac{2\tan B}{1 - \tan^2 B}$

বামপক্ষ $= \tan (2B)$

$$= \tan\left(2 \times \frac{\pi}{6}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} \quad \left[\because \tan\frac{\pi}{3} = \tan 60^\circ = \sqrt{3}\right]$$

ডানপক্ষ $= \frac{2\tan B}{1 - \tan^2 B}$

$$= \frac{2\tan\frac{\pi}{6}}{1 - \left(\tan\frac{\pi}{6}\right)^2} = \frac{2 \times \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} \quad \left[\because \tan\frac{\pi}{6} = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}\right]$$

$$= \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{3-1}{3}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \times \sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$$

$\therefore \tan 2B = \frac{2\tan B}{1 - \tan^2 B}$ **(প্রমাণিত)**