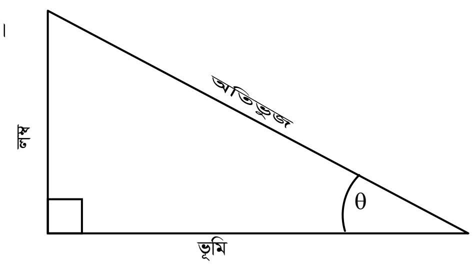
দশম অধ্যায়

দূরত্ব ও উচ্চতা

অনুশীলনী - ১০

গুরুত্বপূর্ণ তথ্যসমূহ: (বহুনির্বাচনি প্রশ্নোত্তর এর জন্য খুবই গুরুত্বপূর্ণ)

☑ **ভূ-রেখা** হচ্ছে ভূমি তলে অবস্থিত যেকোনো সরলরেখা। একে শয়নরেখাও বলা হয়।
☑ **উর্ধ্বরেখা** বা **উলম্ব রেখাও** হচ্ছে ভূমি তলের উপর লম্ব যেকোনো সরলরেখা।
☑ ভূমি তলের উপর লম্বভাবে অবস্থিত পরস্পরচ্ছেদী ভূ-রেখা ও উর্ধ্বরেখা একটি তল নির্দিষ্ট করে। এ তলকে **উলম্ব তল** বলে।
☑ সমকোণী ত্রিভুজে, $30°$ কোণ অঙ্কনের ক্ষেত্রে ভূমি $>$ লম্ব হবে।
☑ সমকোণী ত্রিভুজে, $45°$ কোণ অঙ্কনের ক্ষেত্রে ভূমি $=$ লম্ব হবে।
☑ সমকোণী ত্রিভুজে, $60°$ কোণ অঙ্কনের ক্ষেত্রে ভূমি $<$ লম্ব হবে।



সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলো চিহ্নিতকরণ:

☑ সমকোণের বিপরীত বাহু তথা বৃহত্তম বাহু সর্বদা **অতিভুজ**। অন্যভাবে সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজ সর্বদা বৃহত্তম বাহু।
☑ θ কোণের বিপরীতটি হলো **লম্ব** এবং অপরটি হলো **ভূমি**।

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত:

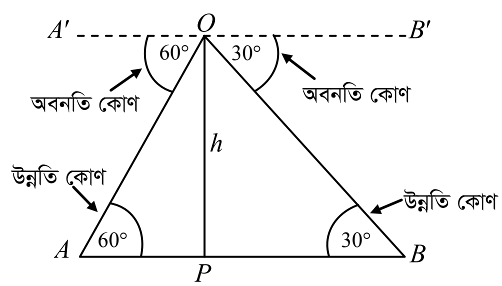
1. $\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$ এবং $\text{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}}$
2. $\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$ এবং $\sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}}$
3. $\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$ এবং $\cot\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}}$

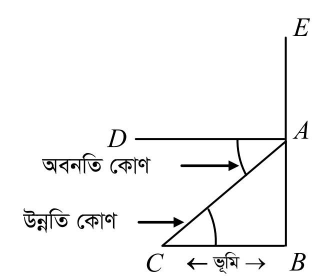
অনুপাতগুলো মনে রাখার জন্য কিছু সহজ পদ্ধতি অবলম্বন করা যায়। যেমন:

☑ $\frac{\text{সাগরে}}{\sin}\ \frac{\text{লবণ}}{\text{লম্ব}}\ \frac{\text{আছে}}{\text{অতিভুজ}}$ অর্থাৎ, $\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$
☑ $\frac{\text{কবরে}}{\cos}\ \frac{\text{ভূত}}{\text{ভূমি}}\ \frac{\text{আছে}}{\text{অতিভুজ}}$ অর্থাৎ, $\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$
☑ $\frac{\text{ট্যারা}}{\tan}\ \frac{\text{লম্বা}}{\text{লম্ব}}\ \frac{\text{ভূত}}{\text{ভূমি}}$ অর্থাৎ, $\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$

অন্যান্য অনুপাত যথা $\text{cosec}\theta, \sec\theta$ ও $\cot\theta$ যথাক্রমে $\sin\theta, \cos\theta, \tan\theta$ এর উল্টো অনুপাত হবে।

উন্নতি কোণ ও অবনতি কোণ চেনার উপায়:





☑ ভূতলের উপরের কোনো বিন্দু ভূমির সমান্তরাল রেখার সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে **উন্নতি কোণ** বলা হয়।
☑ ভূতলের সমান্তরাল রেখার নিচের কোনো বিন্দু ভূরেখার সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে **অবনতি কোণ** বলা হয়।

অনুশীলনীর সমাধান

১ **একটি দণ্ডের দৈর্ঘ্যের বর্গ তার ছায়ার দৈর্ঘ্যের বর্গের এক তৃতীয়াংশ হলে ছায়ার প্রান্ত বিন্দুতে সূর্যের উন্নতি কোণ কত?** [সংশোধিত]
(ক) $15°$ (খ) $30°$ (গ) $45°$ (ঘ) $60°$

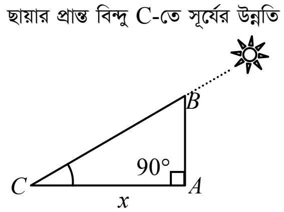
উত্তর: (খ)

ব্যাখ্যা: মনে করি, AB দণ্ডের ছায়া AC এবং ছায়ার প্রান্ত বিন্দু C-তে সূর্যের উন্নতি কোণ $\angle ACB$

$AC = x$ হলে শর্তানুসারে,

$AB^2 = \frac{1}{3}.AC^2 = \frac{x^2}{3}$

$\therefore AB = \pm\frac{x}{\sqrt{3}}$



বা, $AB = \frac{x}{\sqrt{3}}$; [$\because$ দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না]

এখন, সমকোণী ΔBAC-এ $\tan\angle ACB = \frac{AB}{AC}$

বা, $\tan\angle ACB = \frac{\frac{x}{\sqrt{3}}}{x}$

বা, $\tan\angle ACB = \frac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\angle ACB = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 30°$

$\therefore$ ছায়ার প্রান্ত বিন্দুতে সূর্যের উন্নতি কোণ $\angle ACB = 30°$

লক্ষণীয়: পাঠ্যবইয়ের প্রশ্নে উল্লেখ রয়েছে, **"একটি দণ্ডের দৈর্ঘ্যের বর্গ তার ছায়ার দৈর্ঘ্যের এক তৃতীয়াংশ হলে ছায়ার প্রান্ত বিন্দুতে সূর্যের উন্নতি কোণ কত?"** এক্ষেত্রে দণ্ডের দৈর্ঘ্যে (AB)-এর বর্গ, ছায়ার দৈর্ঘ্যের (AC) এক তৃতীয়াংশ হলে চিত্রানুসারে পাই,

$AB^2 = \frac{1}{3} AC$ বা, $AB = \frac{\sqrt{AC}}{\sqrt{3}}$

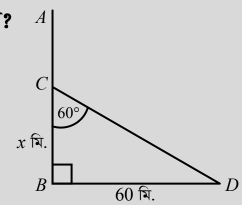
$\therefore$ ছায়ার প্রান্তবিন্দু C-তে সূর্য কর্তৃক উৎপন্ন উন্নতি কোণ $\angle BCA$ হলে,

$$\tan\angle BCA = \frac{AB}{AC} = \frac{\frac{\sqrt{AC}}{\sqrt{3}}}{AC} = \frac{1}{\sqrt{3AC}} \quad ; [\because AB = \frac{\sqrt{AC}}{\sqrt{3}}]$$

$$\therefore \angle BCA = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3AC}}\right)$$

এক্ষেত্রে, $\angle BCA$ এর অনন্য কোনো মান পাওয়া সম্ভব নয়।
AC এর মানের ভিন্নতার সাথে সাথে $\angle BCA$-এর অসংখ্য মান পাওয়া যাবে (যথা: $10°, 15°, 30°, 45°, 60°, 75°$ ইত্যাদি)। অর্থাৎ সেক্ষেত্রে প্রদত্ত চারটি অপশনের সবগুলোই সঠিক হবে।
তাই প্রশ্নটির সম্ভাব্য সংশোধিত রূপটি উল্লেখ করা হয়েছে।

২ **পাশের চিত্রে *x* এর মান নিচের কোনটি?**



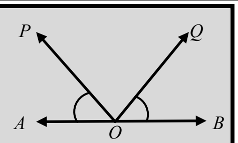
(ক) $\frac{\sqrt{3}}{60}$ (খ) $\frac{60}{\sqrt{3}}$
(গ) $60\sqrt{2}$ (ঘ) $60\sqrt{3}$

উত্তর: (খ)

ব্যাখ্যা: চিত্রে সমকোণী ΔCBD এ $\tan\angle BCD = \frac{BD}{BC}$

বা, $\tan 60° = \frac{60}{x}$ বা, $\sqrt{3} = \frac{60}{x}$ বা, $x = \frac{60}{\sqrt{3}}$

৩ **পাশের চিত্রে *O* বিন্দুতে *P* বিন্দুর উন্নতি কোণ কোনটি?**



(ক) $\angle QOB$ (খ) $\angle POA$
(গ) $\angle QOA$ (ঘ) $\angle POB$

উত্তর: (খ)

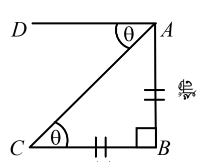
ব্যাখ্যা: ভূতলের উপরের কোনো বিন্দু ভূমির সমান্তরাল রেখার সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে উন্নতি কোণ বলা হয়। তাই O বিন্দুতে P বিন্দুর উন্নতি কোণ $\angle POA$।

৪ **অবনতি কোণের মান কত ডিগ্রি হলে একটি খুঁটির দৈর্ঘ্য ও ছায়ার দৈর্ঘ্য সমান হবে?**

(ক) 30° (খ) 45° (গ) 60° (ঘ) 90°

উত্তর: (খ)

ব্যাখ্যা: ধরি, AB খুঁটি = BC খুঁটির ছায়া। অবনতি কোণ $\angle DAC = \theta$
এখানে, $\angle DAC = \angle ACB = \theta$



$\therefore \Delta ABC$-এ $\tan\angle ACB = \frac{AB}{BC}$

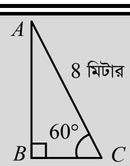
বা, $\tan\theta = \frac{AB}{AB}$; $[\because AB = BC]$

বা, $\tan\theta = 1 = \tan 45°$

$\therefore \theta = 45°$

সুতরাং অবনতি কোণের মান 45° হলে একটি খুঁটির দৈর্ঘ্য ও ছায়ার দৈর্ঘ্য সমান হবে।

■ **পাশের চিত্র অনুযায়ী ৫নং- ৬নং প্রশ্ন দুইটির উত্তর দাও।**



৫ ***BC* এর দৈর্ঘ্য হবে-**

(ক) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ মিটার (খ) 4 মিটার
(গ) $4\sqrt{2}$ মিটার (ঘ) $4\sqrt{3}$ মিটার

উত্তর: (খ)

ব্যাখ্যা: $\cos\angle ACB = \frac{BC}{AC}$ বা, $\cos 60° = \frac{BC}{8}$ বা, $\frac{1}{2} = \frac{BC}{8}$ $\therefore BC = 4$

৬ ***AB* এর দৈর্ঘ্য হবে?**

(ক) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ মিটার (খ) 4 মিটার
(গ) $4\sqrt{2}$ মিটার (ঘ) $4\sqrt{3}$ মিটার

উত্তর: (ঘ)

ব্যাখ্যা: ΔABC-এ

$\tan\angle ACB = \frac{AB}{BC}$ বা, $\tan 60° = \frac{AB}{4}$ $\therefore AB = 4 \times \tan 60° = 4\sqrt{3}$

৭ **উন্নতি কোণ-**

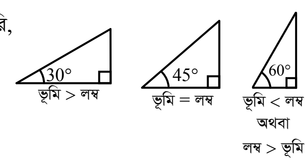
i. 30° হলে, ভূমি > লম্ব হবে
ii. 45° হলে, ভূমি = লম্ব হবে
iii. 60° হলে, লম্ব < ভূমি হবে

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

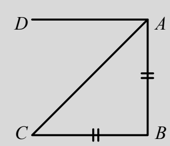
উত্তর: (ক)

ব্যাখ্যা: নিচের চিত্রগুলো লক্ষ করি,



$\therefore$ (i) ও (ii) নং সত্য কিন্তু (iii) নং সত্য নয়।

৮ **পাশের চিত্রে -**



i. $\angle DAC$ অবনতি কোণ
ii. $\angle ACB$ উন্নতি কোণ
iii. $\angle DAC = \angle ACB$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: (ঘ)

ব্যাখ্যা: ভূতলের উপরের কোনো বিন্দু ভূমির সমান্তরাল রেখার সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে **উন্নতি কোণ** বলে। অপরদিকে ভূতলের সমান্তরাল রেখার নিচের কোনো বিন্দু ভূ-রেখার সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে তাকে **অবনতি কোণ** বলে। চিত্রে CB হচ্ছে ভূরেখা BA উর্ধ্বরেখা এবং DA হচ্ছে ভূ-তলের সমান্তরাল রেখা।

(i) নং সঠিক। এখানে ভূতলের (CB) সমান্তরাল রেখা DA রেখা এবং DA রেখা ভূতলের সাথে A বিন্দুতে $\angle DAC$ উৎপন্ন করেছে। সুতরাং সংজ্ঞানুসারে $\angle DAC$ অবনতি কোণ।

(ii) নং সঠিক। কারণ, ভূরেখা CB এর C বিন্দুতে উৎপন্ন কোণ $\angle ACB$। তাই $\angle ACB$ উন্নতি কোণ।

(iii) নং সঠিক। কারণ, $CB \parallel DA$ এবং AC ছেদক হওয়ায় $\angle DAC$ = একান্তর $\angle ACB$।

৯ **ভূরেখার অপর নাম কী?**

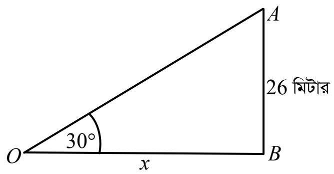
(ক) লম্বরেখা (খ) সমান্তরাল রেখা
(গ) শয়ন রেখা (ঘ) উর্ধ্ব রেখা

উত্তর: (গ)

ব্যাখ্যা: ভূ-রেখা হচ্ছে ভূমি তলে অবস্থিত যেকোনো সরলরেখা। এজন্য ভূরেখার অপর নাম শয়ন রেখা।

১০ একটি মিনারের পাদদেশ থেকে কিছু দূরে একটি স্থানে মিনারটির শীর্ষের উন্নতি $30°$ এবং মিনারটির উচ্চতা 26 মিটার হলে, মিনার থেকে ঐ স্থানটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি, মিনারটির পাদবিন্দু B, ভূতলের নির্দিষ্ট স্থান O এবং শীর্ষ বিন্দু A।



আবার, মনে করি, মিনারটি থেকে নির্দিষ্ট স্থানের দূরত্ব $BO = x$ মিটার।

$\therefore$ মিনারের শীর্ষের উন্নতি $\angle AOB = 30°$ এবং
মিনারের উচ্চতা $BA = 26$ মিটার

এখন, সমকোণী ত্রিভুজ OAB-এ $\tan \angle AOB = \dfrac{AB}{OB}$

বা, $\tan 30° = \dfrac{26}{x}$

বা, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{26}{x}$ $\left[\because \tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right]$

বা, $x = 26\sqrt{3}$

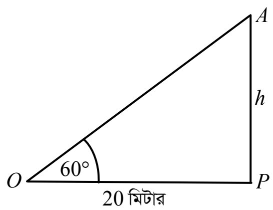
নির্ণেয় দূরত্ব $BO = x$ মিটার

$= 26\sqrt{3}$ মিটার $= 45.033$ মিটার (প্রায়)

$\therefore$ মিনার থেকে ঐ স্থানটির দূরত্ব 45.033 মিটার (প্রায়) **(Ans.)**

১১ একটি গাছের পাদদেশ থেকে 20 মিটার দূরে ভূতলের কোনো বিন্দুতে গাছের চূড়ার উন্নতি কোণ $60°$ হলে, গাছটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধানঃ



মনে করি,
AP গাছের পাদদেশ P থেকে ভূতলের O বিন্দুর দূরত্ব $PO = 20$ মিটার।
এবং গাছের উচ্চতা $AP = h$ মিটার।
গাছের শীর্ষের উন্নতি কোণ $\angle POA = 60°$
POA সমকোণী ত্রিভুজে

এখন, $\tan \angle POA = \dfrac{AP}{OP}$

বা, $\tan 60° = \dfrac{h}{20}$

বা, $\sqrt{3} = \dfrac{h}{20}$ $[\therefore \tan 60° = \sqrt{3}]$

বা, $h = 20\sqrt{3}$

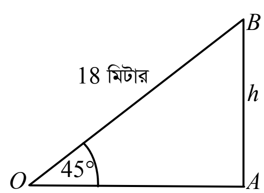
$\therefore$ গাছের উচ্চতা $AP = h$ মিটার $= 20\sqrt{3}$ মিটার

$= 34.641$ মিটার (প্রায়)

$\therefore$ গাছটির উচ্চতা 34.641 মিটার (প্রায়) **(Ans.)**

১২ 18 মিটার দৈর্ঘ্যের একটি মই ভূমির সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে দেওয়ালের ছাদ স্পর্শ করে। দেওয়ালটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধানঃ
মনে করি, দেওয়ালের উচ্চতা $AB = h$ মিটার।



মইয়ের দৈর্ঘ্য, $OB = 18$ মিটার এবং ভূমির সাথে মইয়ের উৎপন্ন কোণ $\angle AOB = 45°$

এখন, সমকোণী ΔABC-এ $\sin \angle AOB = \dfrac{AB}{OB}$

বা, $\sin 45° = \dfrac{h}{18}$

বা, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{h}{18}$ $\left[\therefore \sin 45° = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right]$

বা, $h = \dfrac{18}{\sqrt{2}} = \dfrac{18 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \dfrac{18\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}$

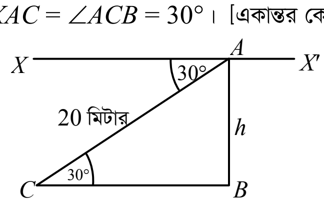
দেওয়ালের উচ্চতা $AB = h$ মিটার

$= 9\sqrt{2}$ মিটার $= 12.728$ মিটার (প্রায়)

$\therefore$ দেওয়ালটির উচ্চতা 12.728 মিটার (প্রায়) **(Ans.)**

১৩ একটি ঘরের ছাদের কোনো বিন্দুতে ঐ বিন্দু থেকে 20 মিটার দূরের ভূতলস্থ একটি বিন্দুর অবনতি কোণ $30°$ হলে, ঘরটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ঘরটির উচ্চতা $AB = h$ মিটার, ঘরের ছাদের A বিন্দু থেকে $AC = 20$ মিটার দূরে। ভূতলস্থ C বিন্দু অবনতি $\angle CAX = 30°$। যেহেতু $XA \parallel BC$ এবং AC তাদের ছেদক।
সুতরাং $\angle XAC = \angle ACB = 30°$। [একান্তর কোণ বলে]



ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\sin \angle ACB = \dfrac{AB}{AC}$

বা, $\sin 30° = \dfrac{h}{20}$

বা, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{h}{20}$; $\left[\because \sin 30° = \dfrac{1}{2}\right]$

বা, $2h = 20$

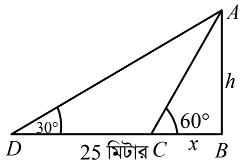
$\therefore h = 10$

ঘরটির উচ্চতা $AB = h$ মিটার $= 10$ মিটার

$\therefore$ ঘরটির উচ্চতা 10 মিটার। **(Ans.)**

১৪ ভূতলে কোনো স্থানে একটি স্তম্ভের শীর্ষের উন্নতি কোণ 60°। ঐ স্থান থেকে 25 মিটার পিছিয়ে গেলে স্তম্ভটির উন্নতি কোণ 30° হয়। স্তম্ভটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, স্তম্ভের উচ্চতা $AB = h$ মিটার এবং শীর্ষের উন্নতি $\angle ACB = 60°$ এবং C স্থান থেকে $CD = 25$ মিটার পিছিয়ে গেলে উন্নতি $\angle ADB = 30°$ হয়।



ধরি, $BC = x$ মিটার

$\therefore\ BD = BC + CD = (x + 25)$ মিটার

এখন, ΔABD-এ $\tan \angle ADB = \dfrac{AB}{BD}$

বা, $\tan 30° = \dfrac{h}{x + 25}$

বা, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{h}{x + 25}$ $[\because \tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}]$

বা, $x + 25 = h\sqrt{3}$ ... ... (i)

আবার, সমকোণী ΔABC-এ $\tan\angle ACB = \dfrac{AB}{BC}$

বা, $\tan 60° = \dfrac{h}{x}$

বা, $\sqrt{3} = \dfrac{h}{x}$ $[\because \tan 60° = \sqrt{3}]$

বা, $h = x\sqrt{3}$ ... ... (ii)

h এর মান সমীকরণ (i)-এ বসিয়ে পাই,

$x + 25 = x\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

বা, $x + 25 = 3x$

বা, $3x - x = 25$

বা, $2x = 25$

বা, $x = \dfrac{25}{2} = 12.5$

এখন, x এর মান সমীকরণ (ii)-এ বসিয়ে পাই,

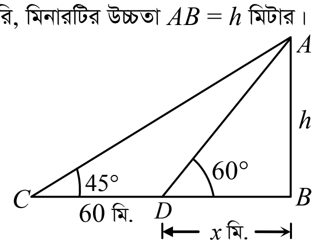
$h = x\sqrt{3} = 12.5 \times \sqrt{3} = 21.651$ (প্রায়)

স্তম্ভের উচ্চতা $AB = h$ মিটার $= 21.651$ মিটার (প্রায়)

$\therefore$ স্তম্ভটির উচ্চতা 21.651 মিটার (প্রায়)। **(Ans.)**

১৫ কোনো স্থান থেকে একটি মিনারের দিকে 60 মিটার এগিয়ে আসলে মিনারের শীর্ষ বিন্দুর উন্নতি 45° থেকে 60° হয়। মিনারটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, মিনারটির উচ্চতা $AB = h$ মিটার।



এবং C বিন্দুতে মিনারের শীর্ষের উন্নতি $\angle ACB = 45°$, C বিন্দু থেকে মিনারের দিকে এগিয়ে গেলে শীর্ষের উন্নতি $\angle ADB = 60°$ হয়।

$\therefore\ CD = 60$ মিটার

ধরি, $BD = x$ মিটার

$\therefore\ BC = (60 + x)$ মিটার [চিত্রানুযায়ী]

এখন, সমকোণী ΔACB হতে আমরা পাই,

$\tan\angle ACB = \dfrac{AB}{BC}$

বা, $\tan 45° = \dfrac{h}{60 + x}$

বা, $1 = \dfrac{h}{60 + x}$ $[\because \tan 45° = 1]$

$\therefore\ h = 60 + x$ ... ... (i)

আবার, সমকোণী ΔADB হতে আমরা পাই,

$\tan\angle ADB = \dfrac{AB}{BD}$

বা, $\tan 60° = \dfrac{h}{x}$

বা, $\sqrt{3} = \dfrac{h}{x}$ $[\because \tan 60° = \sqrt{3}]$

$\therefore\ h = x\sqrt{3}$ ... ... (ii)

(i) নং এবং (ii) নং সমীকরণ হতে পাই,

$x\sqrt{3} = x + 60$

বা, $x\sqrt{3} - x = 60$

বা, $x(\sqrt{3} - 1) = 60$

বা, $x = \dfrac{60}{\sqrt{3} - 1}$

$= \dfrac{60(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)}$ [লব ও হরকে $(\sqrt{3} + 1)$ দ্বারা গুণ করে]

$= \dfrac{60(\sqrt{3} + 1)}{(\sqrt{3})^2 - 1^2} = \dfrac{60(\sqrt{3} + 1)}{3 - 1} = \dfrac{60(\sqrt{3} + 1)}{2}$

$\therefore\ x = 30(\sqrt{3} + 1)$

এখন, x এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$h = 60 + 30(\sqrt{3} + 1) = 60 + 81.962 = 141.962$ (প্রায়)

মিনারটির উচ্চতা $AB = h$ মিটার $= 141.962$ মিটার (প্রায়)

$\therefore$ মিনারটির উচ্চতা 141.962 মিটার (প্রায়) **(Ans.)**

১৬ একটি নদীর তীরে কোনো এক স্থানে দাঁড়িয়ে একজন লোক দেখল যে, ঠিক সোজাসোজি অপর তীরে অবস্থিত একটি টাওয়ারের উন্নতি কোণ 60°। ঐ স্থান থেকে 32 মিটার পিছিয়ে গেলে উন্নতি কোণ 30° হয়। টাওয়ারের উচ্চতা এবং নদীর বিস্তার নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, নদীর এক তীরে P বিন্দুতে লোকটি দাঁড়িয়ে আছেন এবং অপর তীরে অবস্থিত AB টাওয়ারের শীর্ষ A এবং পাদবিন্দু B।

ধরা যাক, টাওয়ারের উচ্চতা $AB = h$ মিটার এবং নদীর প্রস্থ $BP = x$ মিটার

প্রশ্নমতে, টাওয়ারের শীর্ষ A কর্তৃক P বিন্দুতে উৎপন্ন উন্নতি কোণ $\angle BPA = 60°$

আবার, প্রশ্নানুসারে P বিন্দু থেকে $PO = 32$ মিটার পিছিয়ে গেলে টাওয়ারের শীর্ষ A কর্তৃক O বিন্দুতে উৎপন্ন উন্নতি কোণ $\angle AOB = 30°$ হয়।

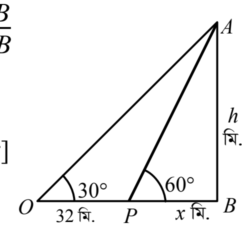
$\therefore\ BO = (BP + PO) = (x + 32)$ মিটার

এখন, সমকোণী ΔAOB-এ $\tan\angle AOB = \dfrac{AB}{OB}$

বা, $\tan 30° = \dfrac{h}{x + 32}$

বা, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{h}{x + 32}$ $[\because \tan 30° = \dfrac{1}{\sqrt{3}}]$

বা, $x + 32 = h\sqrt{3}$ ... ... (i)



আবার, সমকোণী ΔAPB-এ $\tan\angle BPA = \dfrac{AB}{BP}$

বা, $\tan 60° = \dfrac{h}{x}$

বা, $\sqrt{3} = \dfrac{h}{x}$ $[\because \tan 60° = \sqrt{3}]$

বা, $h = x\sqrt{3}$ ... ... (ii)

সুতরাং, (i) ও (ii) নং থেকে আমরা পাই,

$x + 32 = x\sqrt{3} \times \sqrt{3}$

বা, $x + 32 = 3x$

বা, $3x - x = 32$

বা, $2x = 32$

বা, $x = \dfrac{32}{2}$

$\therefore x = 16$

x এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$h = x\sqrt{3} = 16 \times \sqrt{3} = 27.713$ (প্রায়)

$\therefore$ নদীর প্রস্থ $BP = x$ মিটার $= 16$ মিটার

এবং টাওয়ারের উচ্চতা $= h$ মিটার $= 27.713$ মিটার (প্রায়)

$\therefore$ টাওয়ারের উচ্চতা 27.713মিটার (প্রায়) এবং নদীর বিস্তার 16 মিটার।

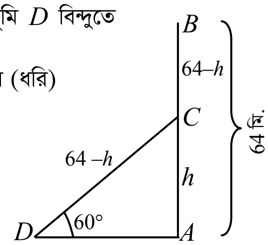
(Ans.)

১৭ **64 মিটার লম্বা একটি খুঁটি ভেঙে গিয়ে সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন না হয়ে ভূমির সাথে 60° উৎপন্ন করে। খুঁটিটির ভাঙা অংশের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।**

সমাধান: মনে করি, AB খুঁটি h উচ্চতায় C বিন্দুতে ভাঙ্গে। ভাঙ্গা অংশ BC সম্পূর্ণ বিচ্ছিন্ন না হয়ে ভূমি D বিন্দুতে $\angle CDA = 60°$ কোণ উৎপন্ন করে।

এখানে, $AB = 64$ মিটার, $AC = h$ মিটার (ধরি)

$\therefore BC = CD = 64 - h$ মিটার



ADC সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,

$\sin\angle ADC = \dfrac{AC}{CD}$

বা, $\sin 60° = \dfrac{h}{64 - h}$

বা, $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{h}{64 - h}$ $[\because \sin 60° = \dfrac{\sqrt{3}}{2}]$

বা, $2h = 64\sqrt{3} - \sqrt{3}h$

বা, $2h + \sqrt{3}h = 64\sqrt{3}$

বা, $h(2 + \sqrt{3}) = 64\sqrt{3}$

বা, $h = \dfrac{64\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = \dfrac{64\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})}{(2 + \sqrt{3})(2 - \sqrt{3})}$

$= \dfrac{128\sqrt{3} - 64 \times 3}{2^2 - (\sqrt{3})^2}$

$= 128\sqrt{3} - 192 = 29.702$ (প্রায়)

$\therefore$ খুঁটিটির ভাঙ্গা অংশের দৈর্ঘ্য $= (64 - 29.702)$ মিটার (প্রায়)

$= 34.298$ মিটার (প্রায়)

$\therefore$ খুঁটিটির ভাঙ্গা অংশের দৈর্ঘ্য 34.298 মিটার (প্রায়) **(Ans.)**

১৮ **একটি গাছ ঝড়ে এমনভাবে ভেঙে গেল যে, অবিচ্ছিন্ন ভাঙা অংশ দণ্ডায়মান অংশের সাথে 30° কোণ করে গাছের গোড়া থেকে 12 মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করে। সম্পূর্ণ গাছটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।**

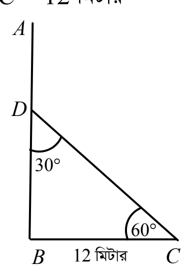
সমাধান: ধরি, AB একটি গাছ, তা ঝড়ে D বিন্দুতে ভেঙ্গে দণ্ডায়মান BD অংশের সাথে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে।

অর্থাৎ $\angle BDC = 30°$

$\therefore \angle BCD = 60°$

এবং গাছের গোড়া থেকে মাটিতে স্পর্শ বিন্দুর দূরত্ব $BC = 12$ মিটার

সমকোণী ΔBDC-এ $\sec 60° = \dfrac{CD}{BC}$



বা, $2 = \dfrac{CD}{12 \text{ মিটার}}$

বা, $CD = 12 \times 2$ মিটার

$\therefore CD = 24$ মিটার

সমকোণী ΔBCD-এ $\tan\angle DCB = \dfrac{BD}{BC}$

বা, $\dfrac{BD}{BC} = \tan 60°$

বা, $\dfrac{BD}{12 \text{ মিটার}} = \sqrt{3}$ $[\because \tan 60° = \sqrt{3}]$

বা, $BD = (12 \times \sqrt{3})$ মিটার

$\therefore BD = 20.785$ মিটার (প্রায়)

$\therefore$ গাছটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য, $AB = (24 + 20.785)$ মিটার (প্রায়)

$= 44.785$ মিটার (প্রায়)

$\therefore$ গাছটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য, 44.785 মিটার (প্রায়)। **(Ans.)**

১৯ **একটি নদীর এক তীরে কোনো স্থানে দাঁড়িয়ে একজন লোক দেখলো যে, ঠিক সোজাসোজি অপর তীরে অবস্থিত 150 মিটার লম্বা একটি গাছের শীর্ষের উন্নতি কোণ 30°। লোকটি একটি নৌকাযোগে গাছটিকে লক্ষ্য করে যাত্রা শুরু করলো। কিন্তু পানির স্রোতের কারণে লোকটি গাছ থেকে 10 মিটার দূরে তীরে পৌছল।**

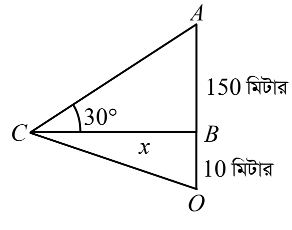
ক. উপরোক্ত বর্ণনাটি চিত্রের মাধ্যমে দেখাও।

খ. নদীর বিস্তার নির্ণয় কর।

গ. লোকটির যাত্রা স্থান থেকে অবতরণের স্থানের দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক মনে করি, নদীর দুই তীরের বিন্দুদ্বয় C ও B। তীরে B বিন্দুতে AB গাছের উচ্চতা 150 মিটার এবং C বিন্দুর



গাছটির শীর্ষ B এর উন্নতি কোণ $\angle ACB = 30°$

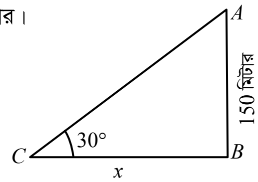
ধরি, লোকটি স্রোতের কারণে অপর তীরে O বিন্দুতে পৌছাল যা গাছ হতে 10 মিটার দূরে।

অর্থাৎ $OB = 10$ মিটার।

খ ধরি, নদীটির বিস্তার $BC = x$ মিটার।

সমকোণী ΔABC হতে,

$$\tan \angle ACB = \frac{AB}{BC}$$



বা, $\tan 30° = \frac{150}{x}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{150}{x}$ [$\because \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$]

বা, $x = 150\sqrt{3}$

বা, $x = 259.808$ (প্রায়)

নদীটির বিস্তার $BC = x$ মিটার $= 259.808$ মিটার (প্রায়)

$\therefore$ নদীটির বিস্তার 259.808 মিটার (প্রায়) **(Ans.)**

গ ধরি, লোকটির যাত্রার স্থান হতে অবতরণ স্থানের মধ্যবর্তী দূরত্ব,

$OC = S$ মিটার।

ΔOBC এর $\angle OBC$ সমকোণ,

$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী পাই,

$OC^2 = OB^2 + BC^2$

বা, $S^2 = (10)^2 + (259.808)^2$ ['খ' হতে]

বা, $S^2 = 100 + 67500$

বা, $S^2 = 67600$

বা, $S = \sqrt{67600}$

$\therefore S = 260$

$OC = S$ মিটার $= 260$ মিটার

$\therefore$ লোকটির যাত্রা হতে অবতরণ স্থানের দূরত্ব 260 মিটার। **(Ans.)**

২০ **16 মিটার দীর্ঘ একটি মই লম্বভাবে দণ্ডায়মান একটি দেওয়ালের ছাদ বরাবর ঠেস দিয়ে রাখা হলো। ফলে এটি ভূমির সাথে 60° কোণ উৎপন্ন করল।**

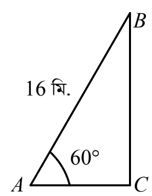
ক. উদ্দীপক অনুসারে সংক্ষিপ্ত বর্ণনাসহ চিত্র অঙ্কন কর।

খ. দেওয়ালটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

গ. দেওয়ালের সাথে ঠেস দিয়ে রাখা অবস্থায় মইটিকে পূর্বের অবস্থান থেকে ভূমি বরাবর আর কতদূর সরালে মইটি ভূমির সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করবে?

সমাধান:

ক মনে করি, $AB = 16$ মিটার দীর্ঘ একটি মই লম্বভাবে দণ্ডায়মান BC দেওয়ালের ছাদ B বরাবর ঠেস দিয়ে রাখা হলো। ফলে মইটি ভূমির সাথে $\angle BAC = 60$ উৎপন্ন করল। বর্ণনানুসারে চিত্রটি হবে:



খ 'ক' হতে পাই, দেওয়ালের উচ্চতা $= BC$, $AB = 16$ মি. এবং $\angle BAC = 60°$

সমকোণী ΔACB হতে পাই, $\sin\angle BAC = \frac{BC}{AB}$

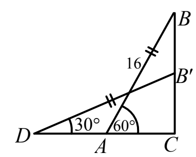
বা, $\sin 60° = \frac{BC}{16}$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{BC}{16}$

বা, $BC = \frac{16\sqrt{3}}{2}$ মি.

$\therefore BC = 8\sqrt{3}$ মি.

গ মনে করি, মইটিকে দেওয়ালের সাথে ঠেস দিয়ে রাখা অবস্থায় এটিকে ভূমি (AC) বরাবর x (AD) দূরত্বে সরালে মইটি ভূমির সাথে 30° কোণ ($B'DC$) উৎপন্ন করবে।



ΔBAC-এ $\cos\angle BAC = \frac{AC}{AB}$

বা, $\cos 60° = \frac{AC}{16}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{AC}{16}$

বা, $AC = 8$ মি.

এখন, $\Delta B'DC$- এ $\cos\angle B'DC = \frac{DC}{B'D}$

বা, $\cos 30° = \frac{x + AC}{AB}$; [$\because B'D = AB = 16$ মি.]

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x+8}{16}$

বা, $x + 8 = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 16$

বা, $x = (8\sqrt{3} - 8)$ মি.

বা, $x = 8(\sqrt{3} - 1)$ মি.

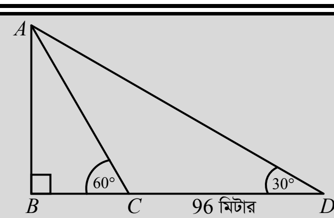
বা, $x = 5.8565$ মি. **(Ans.)**

২১ **চিত্রে, $CD = 96$ মিটার।**

ক. $\angle CAD$ এর ডিগ্রি পরিমাপ নির্ণয় কর।

খ. BC এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

গ. ΔACD এর পরিসীমা নির্ণয় কর।



সমাধান:

ক চিত্রানুসারে, $\angle ACB + \angle ACD = 180°$; [$\because \angle BCD$ সরলকোণ]

বা, $60° + \angle ACD = 180°$

বা, $\angle ACD = 120°$

এখন, ΔABD-এ $\angle CAD + \angle ACD + \angle CDA = 180°$

বা, $\angle CAD + 120° + 30° = 180°$

বা, $\angle CAD = 180° - 150°$

$\therefore \angle CAD = 30°$

খ মনেকরি, $BC = x$ মি.

'ক' হতে পাই, ΔABD-এ $\angle CAD = \angle CDA = 30°$

$\therefore CD = AC = 96$ মি.

এখন, সমকোণী ΔABC-এ $\cos\angle ACB = \dfrac{BC}{AC}$

বা, $\cos 60° = \dfrac{x}{96}$

বা, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{x}{96}$

বা, $x = 48$ মি.

$\therefore$ BC এর দৈর্ঘ্য 48 মিটার

গ সমকোণী ΔABC-এ $\tan\angle ACB = \dfrac{AB}{BC}$

বা, $\tan 60° = \dfrac{AB}{48}$

বা, $\sqrt{3} = \dfrac{AB}{48}$

$\therefore AB = 48\sqrt{3}$

সমকোণী ΔADB-এ $AD^2 = AB^2 + BD^2$

বা, $AD = \sqrt{(48\sqrt{3})^2 + (BC + CD)^2}$ [$\because$ AD দৈর্ঘ্য]

$= \sqrt{6912 + (48 + 96)^2}$ মি.

$= \sqrt{6912 + 20736}$ মি.

$= \sqrt{27648}$ মি.

$= 166.28$ মি. (প্রায়)

$\therefore$ ΔACD-এর পরিসীমা $= (AC + CD + AD)$ একক

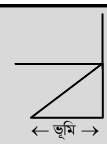
$= (96 + 96 + 166.28)$ মি.

$= 358.28$ মি. (প্রায়)

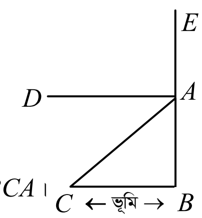
পাঠ্যবইয়ের অনুশীলনমূলক কাজের সমাধান

কাজ *পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৯৮*

চিত্রটি চিহ্নিত কর এবং ভূ-রেখা, ঊর্ধ্বরেখা, উল্লম্বতল, উন্নতি কোণ ও অবনতি কোণ নির্দেশ কর।



সমাধানঃ



চিত্রে, CB রেখা হচ্ছে ভূ-রেখা,

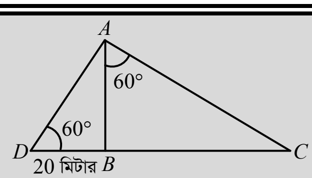
BA রেখা হচ্ছে ঊর্ধ্বরেখা,

ABC তলটি ভূমির উপর লম্ব যা উল্লম্ব তল।

এখানে, C বিন্দুতে A বিন্দুর উন্নতি কোণ হচ্ছে $\angle BCA$।

C বিন্দুর অবনতি কোণ হচ্ছে $\angle CAD$।

কাজ *পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৯৯*



চিত্রে AB একটি গাছ। চিত্রে প্রদত্ত তথ্য থেকে –

ক) গাছটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

খ) গাছটির পাদদেশ থেকে ভূতলস্থ C বিন্দুর দূরত্ব নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

ক মনে করি, গাছটির উচ্চতা, $AB = h$ মিটার।

গাছটির পাদদেশ B থেকে $BD = 20$ মিটার দূরে ভূতলস্থ D বিন্দুতে গাছটির শীর্ষ A বিন্দুর উন্নতি $\angle ADB = 60°$

সমকোণী ΔABD থেকে পাই,

$\tan\angle ADB = \dfrac{AB}{BD}$

বা, $\tan 60° = \dfrac{h}{20}$

বা, $\sqrt{3} = \dfrac{h}{20}$ [$\because \tan 60° = \sqrt{3}$]

বা, $h = 20\sqrt{3}$

$\therefore$ $h = 34.64$ (প্রায়)।

$\therefore$ গাছটির উচ্চতা $AB = h$ মিটার $= 34.64$ মিটার (প্রায়)। **(Ans.)**

খ মনে করি, গাছটির পাদদেশ থেকে ভূতলস্থ C বিন্দুর দূরত্ব, $BC = x$ মিটার।

গাছটির উচ্চতা, $AB = 34.64$ মিটার [১নং হতে]

এবং A বিন্দুতে গাছটির শীর্ষ বিন্দুর অবনতি $\angle BAC = 60°$

এখন, ΔABC থেকে পাই,

$\tan\angle BAC = \dfrac{BC}{AB}$

বা, $\tan 60° = \dfrac{x}{34.64}$

বা, $\sqrt{3} = \dfrac{x}{34.64}$ [$\because \tan 60° = \sqrt{3}$]

বা, $x = 34.64\sqrt{3}$

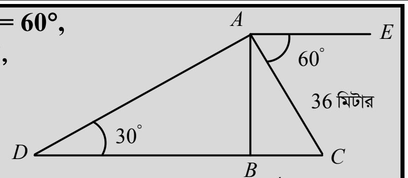
$\therefore$ $x = 60$

$BC = x$ মিটার $= 60$ মিটার

$\therefore$ গাছটির পাদদেশ থেকে ভূতলস্থ C বিন্দুর দূরত্ব $BC = 60$ মিটার

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২০০

চিত্রে অবনতি $\angle CAE = 60°$,
উন্নতি $\angle ADB = 30°$,



$AC = 36$ মিটার, $AB \perp DC$ এবং D, B, C একই সরলরেখায় অবস্থিত হলে, AB, AD এবং CD বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

<u>সমাধান</u>ঃ দেওয়া আছে, অবনতি $\angle CAE = 60°$, উন্নতি $\angle ADB = 30°$
$AC = 36$ মিটার।

যেহেতু, $AE \parallel BC$ এবং AC তাদের ছেদক

$\therefore \angle CAE = \angle ACB = 60°$ [একান্তর কোণ বলে]

এখন, ΔABC হতে পাই, $\sin\angle ACB = \frac{AB}{AC}$

বা, $\sin 60° = \frac{AB}{36 \text{ মিটার}}$

বা, $\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{AB}{36 \text{ মিটার}}$

বা, $AB = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times 36\right)$ মিটার

বা, $AB = 18\sqrt{3}$ মিটার

আবার, ΔADB হতে পাই,

$\sin\angle ADB = \frac{AB}{AD}$

বা, $\sin 30° = \frac{18\sqrt{3} \text{ মিটার}}{AD}$

বা, $\frac{1}{2} = \frac{18\sqrt{3} \text{ মিটার}}{AD}$ [$\because \sin 30° = \frac{1}{2}$]

বা, $AD = (2 \times 18\sqrt{3})$ মিটার

$\therefore AD = 36\sqrt{3}$ মিটার

আবার, ΔABC হতে পাই, $\tan\angle ACB = \frac{AB}{BC}$

বা, $\tan 60° = \frac{18\sqrt{3} \text{ মিটার}}{BC}$

বা, $\sqrt{3} = \frac{18\sqrt{3} \text{ মিটার}}{BC}$

বা, $BC = \frac{18\sqrt{3} \text{ মিটার}}{\sqrt{3}}$

$\therefore BC = 18$ মিটার

এবং, ΔADB হতে পাই,

$\tan\angle ADB = \frac{AB}{BD}$

বা, $\tan 30° = \frac{18\sqrt{3} \text{ মিটার}}{BD}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{18\sqrt{3} \text{ মিটার}}{BD}$

বা, $BD = (\sqrt{3} \times 18\sqrt{3})$ মিটার

$\therefore BD = 54$ মিটার

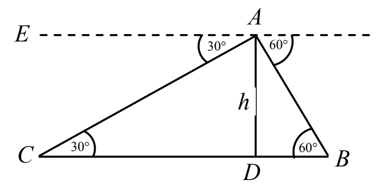
সুতরাং, $CD = BC + BD = (18 + 54)$ মিটার $= 72$ মিটার

সুতরাং, $AB = 18\sqrt{3}$ মিটার
$AD = 36\sqrt{3}$ মিটার
$CD = 72$ মিটার

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২০২

দুইটি মাইল পোস্টের মধ্যবর্তী কোনো স্থানের উপরে একটি বেলুন উড়ছে। বেলুনের স্থানে ঐ মাইল পোস্ট দুইটির অবনতি কোণ যথাক্রমে 30° ও 60° হলে, বেলুনটির উচ্চতা মিটারে নির্ণয় কর।

<u>সমাধান</u>ঃ



মনে করি, A বেলুনের অবস্থান। C ও B এক মাইল দূরবর্তী দুইটি পোস্টের চূড়া।

দুইটি পোস্টের মধ্যবর্তী দূরত্ব $BC = 1$ মাইল $= 1.61$ কি.মি. (প্রায়)
$= 1610$ মিটার

এবং A বিন্দুতে পোস্ট দুইটি অবনতি কোণ যথাক্রমে $\angle FAB = 60°$ ও $\angle EAC = 30°$

মনে করি, বেলুনটির উচ্চতা $AD = h$ মিটার
এবং $CD = x$ মিটার
$\therefore BD = (1610 - x)$ মিটার।

যেহেতু, $AF \parallel BD$ এবং AB এদের ছেদক।

$\therefore \angle FAB = \angle ABD = 60°$

এবং, $AE \parallel CD$ এবং AC এদের ছেদক।

$\therefore \angle EAC = \angle ACD = 30°$

এখন, ΔABD হতে পাই,

$\tan\angle ABD = \frac{AD}{BD}$

বা, $\tan 60° = \frac{h}{1610 - x}$

বা, $\sqrt{3} = \frac{h}{1610 - x}$ [$\because \tan 60° = \sqrt{3}$]

বা, $1610 - x = \frac{h}{\sqrt{3}}$ ... ... (i)

আবার, ΔACD হতে পাই,

$\tan\angle ACD = \frac{AD}{CD}$

বা, $\tan 30° = \frac{h}{x}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{h}{x}$ [$\because \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$]

বা, $x = h\sqrt{3}$ ... ... (ii)

এখন, (i) ও (ii) হতে পাই,

$1610 - h\sqrt{3} = \frac{h}{\sqrt{3}}$

বা, $1610 = h\sqrt{3} + \frac{h}{\sqrt{3}}$

বা, $h\left(\frac{3 + 1}{\sqrt{3}}\right) = 1610$

বা, $h = \frac{1610\sqrt{3}}{4} = 697.15$ (প্রায়)

বেলুনটির উচ্চতা $AD = h$ মিটার $= 697.15$ মিটার (প্রায়)

$\therefore$ বেলুনটির উচ্চতা 697.15 মিটার (প্রায়) **(Ans.)**