

অনুশীলনী - ৫.৪

দুই চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ জোড়: যে সমীকরণ জোড়ের উভয় সমীকরণই দ্বিঘাত এদেরকে দুই চলকবিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণ জোড় বলে।

$$\left. \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 25 \\ xy = 12 \end{array} \right\} \text{ [দ্বিঘাত সমীকরণ জোড়]}$$

সমীকরণের ঘাত: সমীকরণের প্রতিটি পদের চলকগুলোর ঘাত যোগ করে যে পদে সর্বোচ্চ মান পাওয়া যায় তাই সমীকরণের ঘাত।

$$xy = 1 \text{ সমীকরণের ঘাত } 2। \text{ কেননা } x \text{ এর ঘাত } 1, y \text{ এর ঘাত } 1 \therefore x^1 y^1 \text{ এর ঘাত } = 1 + 1 = 2$$

লক্ষণীয়: i. $x^2 + y^2$ এর মান সর্বদা ধনাত্মক, কারণ দুইটি সংখ্যার বর্গের যোগফল কখনও ঋণাত্মক হয় না।

ii. xy এর মান ঋণাত্মক হলে x অথবা y এর যেকোনো একটি ঋণাত্মক। যেমন: $xy = -30$ এখানে x অথবা y এর যেকোনো একটি ঋণাত্মক হবে।

iii. xy এর মান ধনাত্মক হলে x এবং y উভয়ই ধনাত্মক অথবা উভয়ই ঋণাত্মক হবে। যেমন: $xy = 12$ এখানে x এবং y উভয়ই ধনাত্মক অথবা হতে পারে উভয়ই ঋণাত্মক হতে পারে। [যেমন: $3 \times 4 = 12$ অথবা $(-3) \times (-4) = 12$]

iv. $(x + y)$ ও $(x - y)$ উভয় রাশির মানই ধনাত্মক কিংবা ঋণাত্মক যেকোনোটি অথবা উভয়ই হতে পারে।

$$\text{যেমন: } (x + y)^2 = 4 \text{ হলে } x + y = \pm 2 \text{ আবার, } (x - y)^2 = 16 \text{ হলে পাই, } x - y = \pm 4$$



অনুশীলনীর সমাধান



১ $(2x + 3)(y - 1) = 14, (x - 3)(y - 2) = -1$

সমাধান: $(2x + 3)(y - 1) = 14 \dots \dots \dots$ (i)

$(x - 3)(y - 2) = -1 \dots \dots \dots$ (ii)

(i) থেকে, $y - 1 = \frac{14}{2x + 3}$ বা, $y = \frac{14}{2x + 3} + 1 \dots \dots \dots$ (iii)

(iii) থেকে y এর মান (ii)-এ বসিয়ে পাই,

$$(x - 3)\left(\frac{14}{2x + 3} + 1 - 2\right) = -1$$

$$\text{বা, } (x - 3)\left(\frac{14}{2x + 3} - 1\right) = -1$$

$$\text{বা, } (x - 3)\left(\frac{14 - 2x - 3}{2x + 3}\right) = -1$$

$$\text{বা, } (x - 3)(11 - 2x) = -(2x + 3)$$

$$\text{বা, } 11x - 2x^2 - 33 + 6x = -2x - 3$$

$$\text{বা, } -2x^2 + 17x - 33 + 2x + 3 = 0$$

$$\text{বা, } -2x^2 + 19x - 30 = 0$$

$$\text{বা, } 2x^2 - 19x + 30 = 0$$

$$\text{বা, } 2x^2 - 15x - 4x + 30 = 0$$

$$\text{বা, } x(2x - 15) - 2(2x - 15) = 0$$

$$\text{বা, } (2x - 15)(x - 2) = 0$$

$$\therefore 2x - 15 = 0 \quad \text{অথবা, } x - 2 = 0$$

$$\text{বা, } x = \frac{15}{2}$$

$$\text{বা, } x = 2$$

যখন $x = \frac{15}{2}$ তখন (iii) থেকে,

$$y = \frac{14}{2 \times \frac{15}{2} + 3} + 1 = \frac{14}{18} + 1 = \frac{14 + 18}{18} = \frac{32}{18} = \frac{16}{9}$$

যখন $x = 2$ তখন (iii) থেকে,

$$y = \frac{14}{2 \times 2 + 3} + 1 = \frac{14}{7} + 1 = 2 + 1 = 3$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান } (x, y) = \left(\frac{15}{2}, \frac{16}{9}\right), (2, 3)$$

২ $(x - 2)(y - 1) = 3, (x + 2)(2y - 5) = 15$

সমাধান: $(x - 2)(y - 1) = 3 \dots \dots \dots$ (i)

$(x + 2)(2y - 5) = 15 \dots \dots \dots$ (ii)

(i) থেকে,

$$x - 2 = \frac{3}{y - 1}$$

$$\text{বা, } x = \frac{3}{y - 1} + 2 \dots \dots \dots$$
 (iii)

(iii) থেকে x এর মান (ii)-এ বসিয়ে পাই,

$$\left(\frac{3}{y - 1} + 2 + 2\right)(2y - 5) = 15$$

$$\text{বা, } \left(\frac{3}{y - 1} + 4\right)(2y - 5) = 15$$

$$\text{বা, } \left(\frac{3 + 4y - 4}{y - 1}\right)(2y - 5) = 15$$

$$\text{বা, } (4y - 1)(2y - 5) = 15(y - 1)$$

$$\text{বা, } 8y^2 - 20y - 2y + 5 = 15y - 15$$

$$\text{বা, } 8y^2 - 20y - 2y + 5 - 15y + 15 = 0$$

$$\text{বা, } 8y^2 - 37y + 20 = 0$$

$$\text{বা, } 8y^2 - 5y - 32y + 20 = 0$$

$$\text{বা, } y(8y - 5) - 4(8y - 5) = 0$$

$$\text{বা, } (8y - 5)(y - 4) = 0$$

$$\therefore 8y - 5 = 0 \quad \text{অথবা, } y - 4 = 0$$

$$\text{বা, } y = \frac{5}{8}$$

$$\text{বা, } y = 4$$

যখন $y = \frac{5}{8}$ তখন (iii) থেকে,

$$x = \frac{3}{\frac{5}{8} - 1} + 2 = \frac{3}{-\frac{3}{8}} + 2 = -8 + 2 = -6$$

যখন $y = 4$ তখন (iii) থেকে,

$$x = \frac{3}{4 - 1} + 2 = \frac{3}{3} + 2 = 1 + 2 = 3$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান } (x, y) = (3, 4), \left(-6, \frac{5}{8}\right)$$

$$\boxed{7} \quad x^2 = 7x + 6y, \quad y^2 = 7y + 6x$$

সমাধান: $x^2 = 7x + 6y \dots \dots \dots$ (i)

$$y^2 = 7y + 6x \dots \dots \dots$$
 (ii)

(i) থেকে (ii) বিয়োগ করে পাই,

$$x^2 - y^2 = x - y$$

$$\text{বা, } (x - y)(x + y) - (x - y) = 0$$

$$\text{বা, } (x - y)(x + y - 1) = 0$$

$$\therefore x - y = 0$$

$$\text{অথবা, } x + y - 1 = 0$$

$$\text{বা, } x = y \dots \dots \dots$$
 (iii)

$$\text{বা, } x = 1 - y \dots \dots \dots$$
 (iv)

(iii) থেকে x এর মান (i)-এ বসিয়ে,

$$y^2 = 7y + 6y$$

$$\text{বা, } y^2 = 13y$$

$$\text{বা, } y^2 - 13y = 0$$

$$\text{বা, } y(y - 13) = 0$$

$$\therefore y = 0$$

$$\text{অথবা, } y - 13 = 0$$

$$\text{বা, } y = 0$$

$$\text{বা, } y = 13$$

(iii) থেকে,

$$y = 0 \text{ হলে পাই, } x = 0$$

$$y = 13 \text{ হলে পাই, } x = 13$$

(iv) থেকে x এর মান (i) এ বসিয়ে পাই, $(x = 1 - y)$

$$(1 - y)^2 = 7(1 - y) + 6y$$

$$\text{বা, } 1 - 2y + y^2 = 7 - 7y + 6y$$

$$\text{বা, } 1 - 2y + y^2 - 7 + 7y - 6y = 0$$

$$\text{বা, } y^2 - y - 6 = 0$$

$$\text{বা, } y^2 - 3y + 2y - 6 = 0$$

$$\text{বা, } y(y - 3) + 2(y - 3) = 0$$

$$\text{বা, } (y - 3)(y + 2) = 0$$

$$\therefore y - 3 = 0$$

$$\text{অথবা, } y + 2 = 0$$

$$\text{বা, } y = 3$$

$$\text{বা, } y = -2$$

(iv) থেকে,

$$\text{যখন } y = 3 \text{ তখন } x = 1 - 3 = -2$$

$$\text{যখন } y = -2 \text{ তখন } x = 1 + 2 = 3$$

\therefore নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (0, 0), (13, 13), (3, -2), (-2, 3)$

$$\boxed{8} \quad x^2 = 3x + 2y, \quad y^2 = 3y + 2x$$

সমাধান: $x^2 = 3x + 2y \dots \dots \dots$ (i)

$$y^2 = 3y + 2x \dots \dots \dots$$
 (ii)

(i) থেকে (ii) বিয়োগ করে,

$$x^2 - y^2 = x - y$$

$$\text{বা, } (x - y)(x + y) - (x - y) = 0$$

$$\text{বা, } (x - y)(x + y - 1) = 0$$

$$\therefore x - y = 0$$

$$\text{অথবা, } x + y - 1 = 0$$

$$\text{বা, } x = y \dots \dots \dots$$
 (iii)

$$\text{বা, } x = 1 - y \dots \dots \dots$$
 (iv)

(iii) থেকে x এর মান (i) এ বসিয়ে পাই,

$$y^2 = 3y + 2y$$

$$\text{বা, } y^2 - 5y = 0$$

$$\text{বা, } y(y - 5) = 0$$

$$\therefore y = 0$$

$$\text{অথবা, } y - 5 = 0$$

$$\text{বা, } y = 5$$

(iii) থেকে,

$$y = 0 \text{ হলে পাই, } x = 0$$

$$y = 5 \text{ হলে পাই, } x = 5$$

আবার (iv) থেকে x এর মান (i)-এ বসিয়ে পাই,

$$(1 - y)^2 = 3(1 - y) + 2y$$

$$\text{বা, } 1 - 2y + y^2 = 3 - 3y + 2y$$

$$\text{বা, } 1 - 2y + y^2 - 3 + 3y - 2y = 0$$

$$\text{বা, } y^2 - y - 2 = 0$$

$$\text{বা, } y^2 - 2y + y - 2 = 0$$

$$\text{বা, } y(y - 2) + 1(y - 2) = 0$$

$$\text{বা, } (y - 2)(y + 1) = 0$$

$$\therefore y - 2 = 0$$

$$\text{অথবা, } y + 1 = 0$$

$$\text{বা, } y = 2$$

$$\text{বা, } y = -1$$

(iv) থেকে পাই, যখন $y = 2$ তখন $x = 1 - 2 = -1$

$$\text{যখন } y = -1 \text{ তখন } x = 1 + 1 = 2$$

\therefore নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (0, 0), (5, 5), (-1, 2), (2, -1)$

$$\boxed{9} \quad x + \frac{4}{y} = 1, \quad y + \frac{4}{x} = 25$$

সমাধান: $x + \frac{4}{y} = 1 \dots \dots \dots$ (i)

$$y + \frac{4}{x} = 25 \dots \dots \dots$$
 (ii)

(i) থেকে, $x = 1 - \frac{4}{y} \dots \dots \dots$ (iii)

(iii) থেকে x এর মান (ii)-এ বসিয়ে পাই,

$$y + \frac{4}{1 - \frac{4}{y}} = 25$$

$$\text{বা, } y + \frac{4y}{y - 4} = 25$$

$$\text{বা, } \frac{y(y - 4) + 4y}{y - 4} = 25$$

$$\text{বা, } y(y - 4) + 4y = 25(y - 4)$$

$$\text{বা, } y^2 - 4y + 4y - 25y + 100 = 0$$

$$\text{বা, } y^2 - 25y + 100 = 0$$

$$\text{বা, } y^2 - 20y - 5y + 100 = 0$$

$$\text{বা, } y(y - 20) - 5(y - 20) = 0$$

$$\text{বা, } (y - 20)(y - 5) = 0$$

$$\text{হয়, } y - 20 = 0 \quad \text{অথবা, } y - 5 = 0$$

$$\therefore y = 20$$

$$\therefore y = 5$$

y এর মান (iii)-এ বসিয়ে পাই,

$$\text{যখন } y = 20 \text{ তখন } x = 1 - \frac{4}{20} = \frac{16}{20} = \frac{4}{5}$$

$$\text{যখন } y = 5 \text{ তখন } x = 1 - \frac{4}{5} = \frac{1}{5}$$

\therefore নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = \left(\frac{4}{5}, 20\right), \left(\frac{1}{5}, 5\right)$

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

দেওয়া আছে, $x + \frac{4}{y} = 1 \dots \dots \dots$ (i)

এবং $y + \frac{4}{x} = 25 \dots \dots \dots$ (ii)

(i) থেকে, $xy + 4 = y \dots \dots \dots$ (iii)

(ii) থেকে, $xy + 4 = 25x \dots \dots \dots$ (iv)

(iv) - (iii) করে পাই,

$25x - y = 0$ বা, $y = 25x \dots \dots \dots$ (v)

(i)-এ $y = 25x$ বসিয়ে পাই,

$x + \frac{4}{25x} = 1$

বা, $25x^2 + 4 = 25x$

বা, $25x^2 - 25x + 4 = 0$

বা, $25x^2 - 20x - 5x + 4 = 0$

বা, $5x(5x - 4) - 1(5x - 4) = 0$

বা, $(5x - 4)(5x - 1) = 0$

$\therefore 5x - 4 = 0$ অথবা, $5x - 1 = 0$

বা, $5x = 4$ বা, $5x = 1$

বা, $x = \frac{4}{5}$ বা, $x = \frac{1}{5}$

x -এর মান (v)-এ বসিয়ে পাই,

$x = \frac{4}{5}$ হলে, $y = 25 \cdot \left(\frac{4}{5}\right) = 20$

$x = \frac{1}{5}$ হলে, $y = 25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right) = 5$

\therefore নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = \left(\frac{1}{5}, 5\right), \left(\frac{4}{5}, 20\right)$

৬ $y + 3 = \frac{4}{x}, x - 4 = \frac{5}{3y}$

সমাধান: $y + 3 = \frac{4}{x} \dots \dots \dots$ (i)

$x - 4 = \frac{5}{3y} \dots \dots \dots$ (ii)

(i) থেকে, $y = \frac{4}{x} - 3 \dots \dots \dots$ (iii)

(ii) থেকে y এর মান (ii) এ বসিয়ে পাই,

$x - 4 = \frac{5}{3\left(\frac{4}{x} - 3\right)}$

বা, $x - 4 = \frac{5x}{12 - 9x}$

বা, $(x - 4)(12 - 9x) = 5x$

বা, $12x - 9x^2 - 48 + 36x = 5x$

বা, $-9x^2 + 48x - 48 - 5x = 0$

রাফ:

$9 \times 48 = 432$

$2 \overline{) 432}$

$2 \overline{) 216}$

$2 \overline{) 108}$

$2 \overline{) 54}$

$3 \overline{) 27}$

$3 \overline{) 9}$

3

$\therefore (2 \times 2 \times 2 \times 2) \times (3 \times 3 \times 3) = 432$

বা, $16 \times 27 = 432$

বা, $9x^2 - 43x + 48 = 0$

বা, $9x^2 - 27x - 16x + 48 = 0$

বা, $9x(x - 3) - 16(x - 3) = 0$

বা, $(9x - 16)(x - 3) = 0$

$\therefore 9x - 16 = 0$ অথবা, $x - 3 = 0$

বা, $x = \frac{16}{9}$ বা, $x = 3$

(iii) এ x এর মান বসিয়ে পাই,

$x = \frac{16}{9}, y = \frac{4}{\frac{16}{9}} - 3 = \frac{4 \times 9}{16} - 3 = \frac{9}{4} - 3 = -\frac{3}{4}$

$x = 3, y = \frac{4}{3} - 3 = -\frac{5}{3}$

\therefore নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = \left(\frac{16}{9}, -\frac{3}{4}\right), \left(3, -\frac{5}{3}\right)$

৭ $xy - x^2 = 1, y^2 - xy = 2$

সমাধান: $xy - x^2 = 1 \dots \dots \dots$ (i)

$y^2 - xy = 2 \dots \dots \dots$ (ii)

(i) থেকে, $x(y - x) = 1 \dots \dots \dots$ (iii)

(ii) থেকে, $y(y - x) = 2 \dots \dots \dots$ (iv)

(iii) কে (iv) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\frac{x(y - x)}{y(y - x)} = \frac{1}{2}$

বা, $2x(y - x) = y(y - x)$

বা, $2x(y - x) - y(y - x) = 0$

বা, $(2x - y)(y - x) = 0$

$\therefore 2x - y = 0$ অথবা, $y - x = 0$

বা, $y = 2x \dots \dots \dots$ (v) বা, $y = x \dots \dots \dots$ (vi)

(v) থেকে y এর মান (i) এ বসিয়ে পাই,

$x \cdot 2x - x^2 = 1$

বা, $2x^2 - x^2 = 1$

বা, $x^2 = 1$

বা, $x = \pm 1$

যখন $x = \pm 1$ তখন $y = 2 (\pm 1) = \pm 2$

আবার (vi) থেকে y এর মান (i) এ বসিয়ে পাই,

$x \cdot x - x^2 = 1$

বা, $x^2 - x^2 = 1$

বা, $0 = 1$ যা অসম্ভব।

\therefore এক্ষেত্রে কোন সমাধান নাই।

\therefore নির্ণেয় সমাধান: $(x, y) = (1, 2), (-1, -2)$

☒ **জেনে রাখা ভালো:** দ্বিঘাত সমীকরণের সর্বদা দুইটি মূল পাওয়া যায়। কিন্তু দ্বিঘাত সমীকরণের লেখ x অক্ষকে একটি মাত্র বিন্দুতে স্পর্শ করলে দুইটি সমান মূল পাওয়া যায়। উপরোক্ত সমীকরণদ্বয়ের লেখ x অক্ষকে দুইবার স্পর্শ করে বলে এর দুই জোড়া সমান মূল পাওয়া যায়। তাই সমাধানের ক্ষেত্রে চারটির পরিবর্তে দুইটি মূল পাওয়া যায়।

$$\boxed{৮} \quad x^2 - xy = 14, \quad y^2 + xy = 60$$

সমাধান: $x^2 - xy = 14 \dots \dots (i)$
 $y^2 + xy = 60 \dots \dots (ii)$

(i) থেকে,

$$y = \frac{x^2 - 14}{x}$$

বা, $y = x - \frac{14}{x} \dots \dots (iii)$

(iii) থেকে y এর মান (ii) এ বসিয়ে পাই,

$$\left(x - \frac{14}{x}\right)^2 + x\left(x - \frac{14}{x}\right) = 60$$

বা, $x^2 - 2x \cdot \frac{14}{x} + \left(\frac{14}{x}\right)^2 + x^2 - 14 = 60$

বা, $2x^2 - 28 + \frac{196}{x^2} - 14 = 60$

বা, $2x^2 - 28 + \frac{196}{x^2} - 14 - 60 = 0$

বা, $2x^2 - 102 + \frac{196}{x^2} = 0$

বা, $\frac{2x^4 - 102x^2 + 196}{x^2} = 0$

বা, $2x^4 - 102x^2 + 196 = 0$ [উভয় পক্ষকে x^2 দ্বারা গুণ করে]

বা, $x^4 - 51x^2 + 98 = 0$ [উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $x^4 - 49x^2 - 2x^2 + 98 = 0$

বা, $x^2(x^2 - 49) - 2(x^2 - 49) = 0$

বা, $(x^2 - 49)(x^2 - 2) = 0$

$\therefore x^2 - 49 = 0$ অথবা, $x^2 - 2 = 0$

বা, $x^2 = 49$ বা, $x^2 = 2$

বা, $x = \pm 7$ বা, $x = \pm \sqrt{2}$

x এর মান (iii)-এ বসিয়ে পাই,

যখন $x = 7$ তখন $y = 7 - \frac{14}{7} = \frac{49 - 14}{7} = \frac{35}{7} = 5$

যখন $x = -7$ তখন $y = -7 + \frac{14}{7} = \frac{-49 + 14}{7} = \frac{-35}{7} = -5$

যখন $x = \sqrt{2}$ তখন $y = \sqrt{2} - \frac{14}{\sqrt{2}}$

$$= \sqrt{2} - \frac{14\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$$

$$= \sqrt{2} - \frac{14\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2} - 7\sqrt{2} = -6\sqrt{2}$$

যখন $x = -\sqrt{2}$ তখন $y = -\sqrt{2} - \frac{14}{-\sqrt{2}}$

$$= -\sqrt{2} + \frac{14\sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}$$

$$= -\sqrt{2} + \frac{14\sqrt{2}}{2}$$

$$= -\sqrt{2} + 7\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

\therefore নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (7, 5), (-7, -5), (\sqrt{2}, -6\sqrt{2}), (-\sqrt{2}, 6\sqrt{2})$

$$\boxed{৯} \quad x^2 + y^2 = 25, \quad xy = 12$$

সমাধান: $x^2 + y^2 = 25 \dots \dots (i)$

$xy = 12 \dots \dots (ii)$

(ii) থেকে, $y = \frac{12}{x} \dots \dots (iii)$

(iii) থেকে y এর মান (i) এ বসিয়ে পাই,

$$x^2 + \left(\frac{12}{x}\right)^2 = 25$$

বা, $x^2 + \frac{144}{x^2} = 25$

বা, $\frac{x^4 + 144}{x^2} = 25$

বা, $x^4 + 144 = 25x^2$

বা, $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

বা, $x^4 - 16x^2 - 9x^2 + 144 = 0$

বা, $x^2(x^2 - 16) - 9(x^2 - 16) = 0$

বা, $(x^2 - 16)(x^2 - 9) = 0$

$\therefore x^2 - 16 = 0$ অথবা, $x^2 - 9 = 0$

বা, $x = \pm 4$ বা, $x = \pm 3$

(iii) থেকে,

যখন $x = \pm 4$ তখন $y = \frac{12}{\pm 4} = \pm 3$

যখন $x = \pm 3$ তখন $y = \frac{12}{\pm 3} = \pm 4$

\therefore নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (4, 3), (-4, -3), (3, 4), (-3, -4)$

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

$x^2 + y^2 = 25 \dots \dots (i)$

$xy = 12 \dots \dots (ii)$

এখন, (ii) কে 2 দ্বারা গুণ করে (i) এর সাথে যোগ করে পাই,

$$x^2 + y^2 + 2xy = 25 + 24$$

বা, $(x + y)^2 = 49$

$\therefore x + y = \pm 7 \dots \dots (iii)$

আবার, (ii) কে 2 দ্বারা গুণ করে (i) থেকে বিয়োগ করে পাই,

$$x^2 + y^2 - 2xy = 25 - 24$$

বা, $(x - y)^2 = 1$

বা, $x - y = \pm 1 \dots \dots (iv)$

(iii) ও (iv) থেকে পাই,

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 7 \\ x - y = 1 \end{array} \right\} \dots \dots (v)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = 7 \\ x - y = -1 \end{array} \right\} \dots \dots (vi)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = -7 \\ x - y = 1 \end{array} \right\} \dots \dots (vii)$$

$$\left. \begin{array}{l} x + y = -7 \\ x - y = -1 \end{array} \right\} \dots \dots (viii)$$

উপরের সমীকরণ জোড়গুলো সমাধান করে পাই,

(v) থেকে, $x = 4, y = 3$

(vi) থেকে, $x = 3, y = 4$

(vii) থেকে, $x = -3, y = -4$

(viii) থেকে, $x = -4, y = -3$

\therefore নির্ণেয় সমাধান $(x, y) = (4, 3), (3, 4), (-3, -4), (-4, -3)$

$$\boxed{১০} \quad \frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{10}{3}, \quad x^2 - y^2 = 3$$

সমাধান: $\frac{x+y}{x-y} + \frac{x-y}{x+y} = \frac{10}{3} \dots \dots \dots (i)$
 $x^2 - y^2 = 3 \dots \dots \dots (ii)$

(i) থেকে পাই,

$$\frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{(x-y)(x+y)} = \frac{10}{3}$$

$$\text{বা, } \frac{x^2 + y^2 + 2xy + x^2 + y^2 - 2xy}{x^2 - y^2} = \frac{10}{3}$$

$$\text{বা, } \frac{2(x^2 + y^2)}{x^2 - y^2} = \frac{10}{3}$$

$$\text{বা, } \frac{2(x^2 + y^2)}{3} = \frac{10}{3} \quad [(ii) \text{ থেকে } x^2 - y^2 = 3 \text{ বসিয়ে}]$$

$$\text{বা, } x^2 + y^2 = \frac{3 \times 10}{3 \times 2}$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 5 \dots \dots \dots (iii)$$

(ii) + (iii) করে,

$$2x^2 = 8$$

$$\text{বা, } x^2 = 4$$

$$\therefore x = \pm 2$$

আবার (iii) - (ii) করে,

$$2y^2 = 2$$

$$\text{বা, } y^2 = 1$$

$$\therefore y = \pm 1$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান } (x, y) = (2, 1), (2, -1), (-2, 1), (-2, -1)$$

১১ $x^2 + xy + y^2 = 3, x^2 - xy + y^2 = 7$

সমাধান: $x^2 + xy + y^2 = 3 \dots \dots \dots (i)$
 $x^2 - xy + y^2 = 7 \dots \dots \dots (ii)$

(i) - (ii) করে,

$$2xy = -4$$

$$\text{বা, } xy = -2$$

$$\therefore y = -\frac{2}{x} \dots \dots \dots (iii)$$

(iii) থেকে y এর মান (i) এ বসিয়ে পাই,

$$x^2 + x\left(-\frac{2}{x}\right) + \left(-\frac{2}{x}\right)^2 = 3$$

$$\text{বা, } x^2 - 2 + \frac{4}{x^2} = 3$$

$$\text{বা, } x^2 - 5 + \frac{4}{x^2} = 0$$

$$\text{বা, } \frac{x^4 - 5x^2 + 4}{x^2} = 0$$

$$\text{বা, } x^4 - 5x^2 + 4 = 0 \quad [\because x \neq 0]$$

$$\text{বা, } x^4 - 4x^2 - x^2 + 4 = 0$$

$$\text{বা, } x^2(x^2 - 4) - 1(x^2 - 4) = 0$$

$$\text{বা, } (x^2 - 4)(x^2 - 1) = 0$$

$$\therefore x^2 - 4 = 0 \quad \text{অথবা, } x^2 - 1 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 = 4 \quad \text{বা, } x^2 = 1$$

$$\text{বা, } x = \pm 2 \quad \text{বা, } x = \pm 1$$

(iii) এ x এর মান বসিয়ে পাই,

$$\text{যখন } x = 2 \text{ তখন } y = -\frac{2}{2} = -1$$

$$\text{যখন } x = -2 \text{ তখন } y = -\frac{2}{-2} = 1$$

$$\text{যখন } x = 1 \text{ তখন } y = -\frac{2}{1} = -2$$

$$\text{যখন } x = -1 \text{ তখন } y = -\frac{2}{-1} = 2$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান } (x, y) = (2, -1), (-2, 1), (1, -2), (-1, 2)$$

১২ $2x^2 + 3xy + y^2 = 20, 5x^2 + 4y^2 = 41$

সমাধান: $2x^2 + 3xy + y^2 = 20 \dots \dots \dots (i)$
 $5x^2 + 4y^2 = 41 \dots \dots \dots (ii)$

(i) ÷ (ii) করে পাই,

$$\frac{2x^2 + 3xy + y^2}{5x^2 + 4y^2} = \frac{20}{41}$$

$$\text{বা, } 82x^2 + 123xy + 41y^2 = 100x^2 + 80y^2$$

$$\text{বা, } 82x^2 + 123xy + 41y^2 - 100x^2 - 80y^2 = 0$$

$$\text{বা, } -18x^2 + 123xy - 39y^2 = 0$$

$$\text{বা, } 6x^2 - 41xy + 13y^2 = 0 \quad [-3 \text{ দ্বারা ভাগ করে}]$$

$$\text{বা, } 6x^2 - 39xy - 2xy + 13y^2 = 0$$

$$\text{বা, } 3x(2x - 13y) - y(2x - 13y) = 0$$

$$\text{বা, } (2x - 13y)(3x - y) = 0$$

$$\therefore 2x - 13y = 0 \quad \text{অথবা, } 3x - y = 0$$

$$\text{বা, } y = \frac{2x}{13} \dots \dots \dots (iii) \quad \text{বা, } y = 3x \dots \dots \dots (iv)$$

(iii) থেকে y এর মান (ii) এ বসিয়ে পাই,

$$5x^2 + 4\left(\frac{2x}{13}\right)^2 = 41$$

$$\text{বা, } 5x^2 + 4\frac{4x^2}{169} = 41$$

$$\text{বা, } 845x^2 + 16x^2 = 41 \times 169 \quad [169 \text{ দ্বারা গুণ করে}]$$

$$\text{বা, } 861x^2 = 41 \times 169$$

$$\text{বা, } x^2 = \frac{41 \times 169}{861}$$

$$\text{বা, } x^2 = \frac{169}{21}$$

$$\therefore x = \pm \sqrt{\frac{169}{21}} = \pm \frac{13}{\sqrt{21}}$$

x এর মান (iii) এ বসিয়ে পাই,

$$y = \frac{2}{13} \times \left(\pm \frac{13}{\sqrt{21}}\right) = \pm \frac{2}{\sqrt{21}}$$

আবার (iv) থেকে y এর মান (ii) এ বসিয়ে পাই,

$$5x^2 + 4(3x)^2 = 41$$

$$\text{বা, } 5x^2 + 36x^2 = 41$$

$$\text{বা, } 41x^2 = 41$$

$$\text{বা, } x^2 = 1$$

$$\text{বা, } x = \pm 1$$

x এর এই মান (iv) এ বসিয়ে পাই,

$$y = 3(\pm 1) = \pm 3$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান } (x, y) = \left(\frac{13}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}\right), \left(-\frac{13}{\sqrt{21}}, \frac{2}{\sqrt{21}}\right), (1, 3), (-1, -3)$$



পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

কাজ

পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১০৯

উদাহরণ ২০ এবং ২১ এর সমাধান বিকল্প পদ্ধতিতে নির্ণয় কর।

উদাহরণ-২০। $x^2 = 3x + 6y$, $xy = 5x + 4y$

উদাহরণ-২১। $x^2 + y^2 = 61$, $xy = -30$

উদাহরণ-২০ এর বিকল্প সমাধান:

$$x^2 = 3x + 6y \dots \dots \dots (i)$$

$$\text{এবং } xy = 5x + 4y \dots \dots \dots (ii)$$

$$(ii) \text{ নং হতে পাই, } xy - 4y = 5x$$

$$\text{বা, } y(x - 4) = 5x$$

$$\therefore y = \frac{5x}{x - 4} \dots \dots \dots (iii)$$

$$(i) \text{ নং এ } y = \frac{5x}{x - 4} \text{ বসিয়ে পাই,}$$

$$x^2 = 3x + 6 \left(\frac{5x}{x - 4} \right)$$

$$\text{বা, } x^2 = \frac{3x(x - 4) + 30x}{x - 4}$$

$$\text{বা, } x^3 - 4x^2 = 3x^2 - 12x + 30x$$

$$\text{বা, } x^3 - 4x^2 - 3x^2 - 18x = 0$$

$$\text{বা, } x^3 - 7x^2 - 18x = 0$$

$$\text{বা, } x(x^2 - 7x - 18) = 0$$

$$\text{বা, } x(x^2 - 9x + 2x - 18) = 0$$

$$\text{বা, } x\{x(x - 9) + 2(x - 9)\} = 0$$

$$\text{বা, } x(x - 9)(x + 2) = 0$$

$$\therefore x = 0, -2, 9$$

(iii) নং থেকে

$$x = 0 \text{ হলে, } y = 0$$

$$x = -2 \text{ হলে, } y = \frac{5(-2)}{-2 - 4} = \frac{-10}{-6} = \frac{5}{3}$$

$$\text{এবং } x = 9 \text{ হলে, } y = \frac{5 \cdot 9}{9 - 4} = \frac{45}{5} = 9$$

উদাহরণ-২১ এর বিকল্প সমাধান (১ম পদ্ধতি):

$$x^2 + y^2 = 61 \dots \dots \dots (i)$$

$$xy = -30 \dots \dots \dots (ii)$$

$$(ii) \text{ হতে পাই, } xy = -30 \text{ বা, } y = \frac{-30}{x} \dots \dots \dots (iii)$$

y এর মান (i)-এ বসিয়ে পাই,

$$x^2 + \left(\frac{-30}{x} \right)^2 = 61$$

$$\text{বা, } x^2 + \frac{900}{x^2} = 61$$

$$\text{বা, } x^4 + 900 = 61x^2$$

$$\text{বা, } x^4 - 61x^2 + 900 = 0$$

$$\text{বা, } x^4 - 36x^2 - 25x^2 + 900 = 0$$

$$\text{বা, } x^2(x^2 - 36) - 25(x^2 - 36) = 0$$

$$\text{বা, } (x^2 - 25)(x^2 - 36) = 0$$

$$\therefore x^2 - 25 = 0 \quad \text{অথবা, } x^2 - 36 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 = 25$$

$$\text{বা, } x^2 = 36$$

$$\text{বা, } x = \pm \sqrt{25}$$

$$\text{বা, } x = \pm \sqrt{36}$$

$$\text{বা, } x = \pm 5$$

$$\text{বা, } x = \pm 6$$

$$(iii) \text{ থেকে } x = 5 \text{ হলে, } y = -\frac{30}{5} = -6$$

$$x = -5 \text{ হলে, } y = \frac{-30}{-5} = 6$$

$$x = 6 \text{ হলে, } y = \frac{-30}{6} = -5$$

$$x = -6 \text{ হলে, } y = \frac{-30}{-6} = 5$$

$$\therefore \text{ নির্ণেয় সমাধান: } (5, -6); (-5, 6); (6, -5); (-6, 5)$$

উদাহরণ-২১ এর বিকল্প সমাধান (২য় পদ্ধতি):

$$\text{দেওয়া আছে, } x^2 + y^2 = 61 \dots \dots \dots (i)$$

$$xy = -30 \dots \dots \dots (ii)$$

$$\begin{aligned} \text{এখন, } (x^2 - y^2)^2 &= (x^2 + y^2)^2 - 4x^2y^2 \\ &= (61)^2 - 4(-30)^2 \\ &= 3721 - 3600 \end{aligned}$$

$$\text{বা, } (x^2 - y^2)^2 = 121$$

$$\text{বা, } x^2 - y^2 = \pm \sqrt{121}$$

$$\therefore x^2 - y^2 = \pm 11 \dots \dots \dots (iii)$$

(i) ও (iii) নং যোগ করে পাই,

$$x^2 + y^2 + x^2 - y^2 = 61 \pm 11$$

$$\text{বা, } 2x^2 = 61 + 11; \quad 2x^2 = 61 - 11$$

$$\text{বা, } 2x^2 = 72; \quad 2x^2 = 50$$

$$\text{বা, } x^2 = 36; \quad x^2 = 25$$

$$\text{বা, } x = \pm 6; \quad x = \pm 5$$

x এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$$x = 6 \text{ হলে, } y = -\frac{30}{6} = -5$$

$$x = -6 \text{ হলে, } y = -\frac{30}{(-6)} = 5$$

$$x = 5 \text{ হলে, } y = -\frac{30}{5} = -6$$

$$x = -5 \text{ হলে, } y = -\frac{30}{(-5)} = 6$$

$$\therefore \text{ নির্ণেয় সমাধান: } (5, -6); (-5, 6); (6, -5); (-6, 5)$$