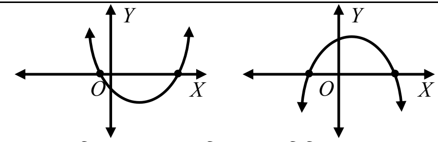
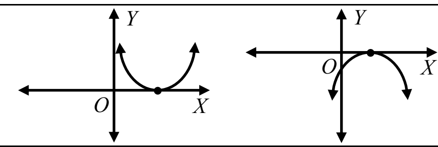
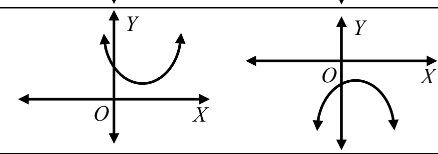
অনুশীলনী - ৫.৭

দ্বিঘাত সমীকরণ: দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ হলো $ax^2 + bx + c = 0$ যেখানে a, b, c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$।
দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান পদ্ধতি: দ্বিঘাত সমীকরণকে নিম্নোক্ত উপায়সমূহের মাধ্যমে সমাধান করা যায়-
i. লেখচিত্রের সাহায্যে; ii. সূত্রের সাহায্যে; iii. উৎপাদক বিশ্লেষণের সাহায্যে।
লেখচিত্রের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান নির্ণয়: $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের লেখচিত্র x-অক্ষকে যে বিন্দুতে ছেদ করে, সেই বিন্দুর ভুজ (x স্থানাঙ্ক) হলো উক্ত সমীকরণের মূল বা সমাধান। নিম্নের দ্বিঘাত সমীকরণের লেখচিত্রগুলো লক্ষ কর:

(i) দ্বিঘাত সমীকরণের লেখ x-অক্ষকে দুইটি ভিন্ন বিন্দুতে ছেদ করলে মূলদ্বয় বাস্তব ও অসমান। এক্ষেত্রে নিশ্চায়ক $b^2 - 4ac > 0$ হয়	 সমাধান বিন্দুগুলো (●) চিহ্ন দ্বারা চিহ্নিত করা হয়েছে
(ii) দ্বিঘাত সমীকরণের লেখ x-অক্ষকে একটি বিন্দুতে স্পর্শ করলে মূলদ্বয় বাস্তব ও সমান। এক্ষেত্রে নিশ্চায়ক $b^2 - 4ac = 0$ হয়	
(iii) দ্বিঘাত সমীকরণের লেখ x-অক্ষকে স্পর্শ বা ছেদ না করলে কোনো বাস্তব মূল নেই। এক্ষেত্রে নিশ্চায়ক $b^2 - 4ac < 0$ হয়	

সূত্রের সাহায্যে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান:

$ax^2 + bx + c = 0$ এর সমাধান: $\boldsymbol{x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$ ... ... (i) [সমাধানকে সূত্র হিসেবে মুখস্থ রাখতে হবে]

অতএব, সমাধান হিসেবে x এর দুইটি মান পাওয়া গেল এবং মান দুইটি হচ্ছে,

$\dfrac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ এবং $\dfrac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

উপরের (i) নং সমীকরণে $\boldsymbol{b^2 - 4ac}$ কে দ্বিঘাত সমীকরণটির **নিশ্চায়ক** বলে কারণ ইহা সমীকরণটির মূলদ্বয়ের ধরন ও প্রকৃতির নির্ণয় করে।

বি.দ্র: আদর্শ দ্বিঘাত সমীকরণের উপরোক্ত পদ্ধতি সর্বপ্রথম নির্ণয় করেন ভারতীয় গণিতবিদ **শ্রী-ধর আচার্য্য**। এজন্য এ পদ্ধতি শ্রী-ধর আচার্য্যের পদ্ধতি নামে পরিচিত।

দ্বিঘাত সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য যা যা করতে হবে: দ্বিঘাত সমীকরণের লেখচিত্র সর্বদাই বক্ররেখা। তাই দ্বিঘাত সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কনের অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু, লেখের মোচড় বা বাঁক বিন্দু সহ একাধিক বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করতে হবে।

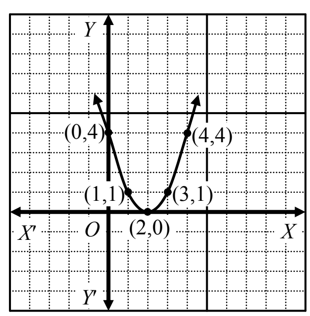
অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয়:
i. সমীকরণে $x = 0$ বসিয়ে অর্থাৎ y-অক্ষের ছেদবিন্দু $(0, y)$ নির্ধারণ করতে হবে।
ii. $y = 0$ বসিয়ে অর্থাৎ x-অক্ষের ছেদবিন্দু (সম্ভব হলে) নির্ধারণ করতে হবে।

সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন বিন্দু (মোচড় বিন্দু) নির্ণয়: লেখের সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন বিন্দুতেই সমীকরণটির লেখ মোচড় বা বাঁক নেয় বলে একে মোচড় বিন্দু (turning point) বলা হয়। এ বিন্দু স্থানাঙ্ক নির্ণয়ের নিয়ম-
i. প্রথমে সমীকরণকে $y = (x - a)^2 + b$ অথবা, $y = -(x - a)^2 + b$ আকারে প্রকাশ করতে হবে। এখানে a ও b বাস্তব সংখ্যা।
ii. অতঃপর $x - a = 0$ অর্থাৎ $x = a$ বসিয়ে y এর মান নির্ণয় করতে হবে।
iii. $x = a$ বসিয়ে পাই, $y = b$; অর্থাৎ $(x, y) = (a, b)$ বিন্দুই হবে সমীকরণের লেখের সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন বিন্দু।
অতঃপর সুবিধামতো একাধিক বিন্দু নির্ণয় করে সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন করা হয়।

জেনে রাখা ভালো: ***i.*** $y = (x - a)^2 + b$ আকারের সমীকরণের লেখের (a, b) বিন্দু হবে সর্বনিম্ন বিন্দু [$x = a$ এর জন্য]।
ii. $y = -(x - a)^2 + b$ আকারের সমীকরণের লেখের (a, b) বিন্দু হবে সর্বোচ্চ বিন্দু [$x = a$ এর জন্য]।
সর্বোচ্চ বা সর্বনিম্ন বিন্দুতে সমীকরণটির লেখ বাঁক বা মোচড় নেয় বলে একে (turning point) বলা হয়।

উপরোক্ত বিষয়গুলো পাঠ্যবইয়ের উদাহরণের আলোকে ব্যাখ্যা করা হলো:

পাঠ্যবই উদাহরণ-২। লেখচিত্রের সাহায্যে $\boldsymbol{x^2 - 4x + 4 = 0}$ এর সমাধান কর।



সমাধান: মনে করি, $y = x^2 - 4x + 4$
অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয়:
(i) $x = 0$ হলে $y = 4$ অর্থাৎ সমীকরণটির লেখ y অক্ষকে $(0, 4)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
(ii) $y = 0$ হলে, $x^2 - 4x + 4 = 0$
বা, $(x - 2)^2 = 0$
$\therefore x = 2$ অর্থাৎ সমীকরণটির লেখ x অক্ষকে $(2, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।
মোচড় বিন্দু নির্ণয়: $y = x^2 - 4x + 4$
বা, $y = x^2 - 2.2x + 2^2$
$= (x - 2)^2 + 0$

$(x-2)^2 = 0$ হবে যদি $x = 2$ হয়, তখন $y = 0$; অতএব মোচড় বিন্দু $(2, 0)$ এবং এ বিন্দুতেই সমীকরণটির **লেখ বাঁক বা মোচড়** নেবে। এখন মোচড় বিন্দুর ডান ও বাম দিকে সুবিধামতো কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি।

x	0	1	2	3	4
y	4	1	0	1	4

বিন্দুগুলো xy সমতলে স্থাপন করে সংযোগ করে লেখচিত্র অঙ্কন করি। দেখা যায় যে, লেখচিত্রটি x অক্ষকে $(2, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। যেহেতু দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি মূল থাকে সুতরাং সমীকরণটির সমাধান $x = 2$ বা, $x = 2$।

বি.দ্রঃ $y = (x-a)^2 + b$ আকারের সমীকরণের সর্বনিম্ন বিন্দু (a, b)

$\therefore y = (x-2)^2 + 0$ আকারের সমীকরণের সর্বনিম্ন বিন্দু $(2, 0)$

তাই $(2, 0)$ বিন্দুর নিচে লেখের কোনো অস্তিত্ব নেই।

অনুশীলনীর সমাধান

১ **$x^2 - x - 12 = 0$ সমীকরণটিকে $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে b এর মান কোনটি?**

(ক) 0 (খ) 1 (গ) – 1 (ঘ) 3

উত্তর: (গ)

ব্যাখ্যা: $x^2 - x - 12 = 0$

বা, $1.x^2 + (-1)x + (-12) = 0$ কে $ax^2 + bx + c = 0$ এর সাথে তুলনা করে পাই, $a = 1, b = -1$ এবং $c = -12$

$\therefore b$ এর মান $= -1$

২ **$16^x = 4^{x+1}$ সমীকরণটির সমাধান কোনটি?**

(ক) 2 (খ) 1 (গ) 4 (ঘ) 3

উত্তর: (খ)

ব্যাখ্যা: $16^x = 4^{x+1}$ বা, $(4^2)^x = 4^{x+1}$ বা, $4^{2x} = 4^{x+1}$ বা, $2x = x + 1$

বা, $2x - x = 1$ বা, $x = 1$

আবার, $x = 1$ এর জন্য বামপক্ষ = 16 ও ডানপক্ষ $= 4^{1+1} = 4^2 = 16$

Technique: অপশনগুলোর মধ্যে শুধুমাত্র 1 এর জন্য সমীকরণের বামপক্ষ = ডানপক্ষ হয়।

৩ **$x^2 - x - 13 = 0$ হলে সমীকরণটির একটি মূল কোনটি?**

(ক) $-\dfrac{-1+\sqrt{+51}}{2}$ (খ) $-\dfrac{-1-\sqrt{51}}{2}$

(গ) $-\dfrac{1+\sqrt{-51}}{2}$ (ঘ) $-\dfrac{1+\sqrt{53}}{2}$

উত্তর: সঠিক উত্তর নেই।

ব্যাখ্যা: $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের সমাধান, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\therefore x^2 - x - 13 = 0$ সমীকরণের সমাধান

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \times 1 \times (-13)}}{2 \times 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 52}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{53}}{2}$$

$\therefore$ মূলদ্বয় $\dfrac{1+\sqrt{53}}{2}$ ও $\dfrac{1-\sqrt{53}}{2}$

Short Technique: যেহেতু সমীকরণের নিশ্চায়ক $= b^2 - 4ac$
$= (-1)^2 - 4.(-1).(-3) = 53$

তাই সমাধানে বর্গমূলের ভিতরে $\sqrt{53}$ সংখ্যাটি অবশ্যই থাকবে।

৪ **$y^x = 9, y^2 = 3^x$ সমীকরণ জোটের একটি সমাধান কোনটি?**

(ক) $(-3, -3)$ (খ) $(2, \frac{1}{3})$

(গ) $(-2, \frac{1}{3})$ (ঘ) $(-2, 3)$

উত্তর: (গ)

ব্যাখ্যা: এখন, $y^x = 9$ বা, $(y^x)^2 = 9^2$

বা, $(y^2)^x = 9^2$

বা, $(3^x)^x = (3^2)^2$ বা, $3^{x^2} = 3^4$ বা, $x^2 = 4$ বা, $x = \pm 2$

$x = -2$ হলে, ২য় সমীকরণে পাই, $y^2 = 3^{-2}$ বা, $y^2 = \frac{1}{9}$ $\therefore y = \pm\frac{1}{3}$

$\therefore$ সমীকরণের একটি সমাধান $(x, y) = (-2, \frac{1}{3})$

Short Technique: যেহেতু, সমীকরণ জোটের সমাধান যুগপৎভাবে উভয় সমীকরণকে সিদ্ধ করে। এজন্য অপশনগুলোতে যে মানের জন্য যেকোনো একটি সমীকরণ সিদ্ধ হবে সেই মানটি হবে সমীকরণজোটটির সমাধান। এক্ষেত্রে অপশন (গ) এর $(-2, \frac{1}{3})$ এর জন্য

* ১ম সমীকরণের বামপক্ষ $= y^x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(\frac{1}{3}\right)^2} = \dfrac{1}{\frac{1}{9}} = 9 =$ ডানপক্ষ

■ **নিচের তথ্যের ভিত্তিতে ৫ ও ৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:**
দুইটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যার বর্গের অন্তর 11 এবং গুণফল 30।

৫ **সংখ্যা দুইটি কী কী?**

(ক) 1 এবং 30 (খ) 2 এবং 15

(গ) 5 এবং 6 (ঘ) 5 এবং – 6

উত্তর: (গ)

ব্যাখ্যা: সংখ্যা দুটি x ও y হলে শর্তমতে,

$x^2 - y^2 = 11$ ... ... (i) ও $xy = 30$

$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 - y^2)^2 + 4x^2y^2$
$= (x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2$
$= (11)^2 + (2 \times 30)^2$
$= 3721 = (61)^2$

$\therefore x^2 + y^2 = 61$ ... ... (ii)

(i) ও (ii) যোগ করে পাই,

$2x^2 = 11 + 61$

বা, $x^2 = \frac{72}{2} = 36$

$\therefore x = 6$

$xy = 30$ হলে, $y = 5$

Short Technique: প্রশ্নের অপশনগুলোর মধ্যে স্বাভাবিক দৃষ্টিকোণ থেকে বিশ্লেষণ করে পাই, $6^2 - 5^2 = 11$ এবং $6 \times 5 = 30$ তাই সঠিক উত্তর (গ)।

৬ **সংখ্যা দুইটির বর্গের সমষ্টি কত?**

(ক) 1 (খ) 5 (গ) 61 (ঘ) $\sqrt{41}$

উত্তর: (গ)

ব্যাখ্যা: ৫নং হতে পাই, সংখ্যা দুটি 5 ও 6

$\therefore$ সংখ্যা দুইটির বর্গের সমষ্টি $= 6^2 + 5^2 = 61$

৭ একটি সংখ্যা ও ঐ সংখ্যার গুণাত্মক বিপরীত সংখ্যার সমষ্টি 6। সম্ভাব্য সমীকরণটি গঠন হবে

i. $x + \frac{1}{x} = 6$
ii. $x^2 + 1 = 6x$
iii. $x^2 - 6x - 1 = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: (ক)

ব্যাখ্যা: মনে করি, সংখ্যাটি x

$\therefore$ x এর গুণাত্মক বিপরীত $= \frac{1}{x}$

$x + \frac{1}{x} = 6$ [(i) সত্য]
বা, $x^2 + 1 = 6x$ [(ii) সত্য]
বা, $x^2 - 6x + 1 = 0$ [(iii) সত্য নয়]

জেনে নাওঃ পরস্পর যোগাত্মক বিপরীত সংখ্যাদ্বয়ের যোগফল শূন্য এবং গুণাত্মক বিপরীত সংখ্যাদ্বয়েল গুণফল $= 1$। তাহলে
i. x এর যোগাত্মক বিপরীত $-x$ কারণ $x + (-x) = 0$
ii. x এর গুণাত্মক বিপরীত $\frac{1}{x}$ কারণ $x . \frac{1}{x} = 1$

৮ $2^{px-1} = 2^{2px-2}$ এর সমাধান কোনটি?

(ক) $\frac{p}{2}$ (খ) p (গ) $-\frac{p}{2}$ (ঘ) $\frac{1}{p}$

উত্তর: (ঘ)

ব্যাখ্যা: $2^{px-1} = 2^{2px-2}$
বা, $px - 1 = 2px - 2$
বা, $2px - 2 = px - 1$
বা, $2px - px = -1 + 2$
বা, $px = 1$
$\therefore x = \frac{1}{p}$

৯। লেখচিত্রের সাহায্যে নিচের সমীকরণগুলোর সমাধান করঃ

ক) $x^2 - 4x + 3 = 0$ খ) $x^2 + 2x - 3 = 0$ গ) $x^2 + 7x = 0$ ঘ) $2x^2 - 7x + 3 = 0$
ঙ) $2x^2 - 5x + 2 = 0$ চ) $x^2 + 8x + 16 = 0$ ছ) $x^2 + x - 3 = 0$ জ) $x^2 = 8$

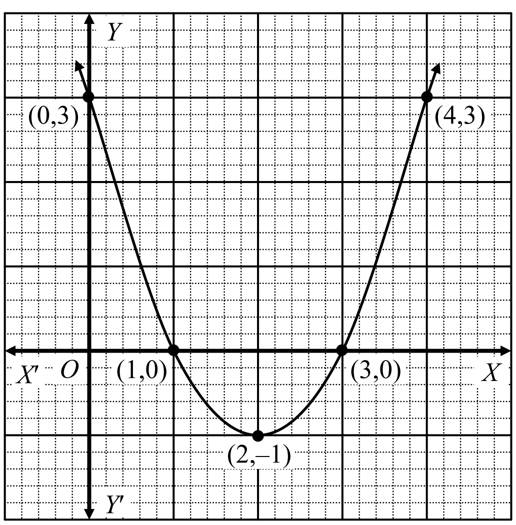
সমাধানঃ

ক প্রদত্ত সমীকরণ $x^2 - 4x + 3 = 0$ ... ... (i)
মনে করি, $y = x^2 - 4x + 3$ ... ... (ii)

x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করে (ii) নং এর লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি:

x	0	1	2	3	4
y	3	0	– 1	0	3

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি পাঁচ বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে উপরের সারণিতে স্থাপিত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে (ii) নং এর লেখচিত্র অঙ্কন করি। লেখচিত্রটি x অক্ষকে যেসব বিন্দুতে ছেদ বা স্পর্শ করে সে বিন্দুর x স্থানাঙ্কই সমীকরণটির সমাধান।



দেখা যায় যে, লেখচিত্রটি x অক্ষকে $(1, 0)$ ও $(3, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
ছেদবিন্দুদ্বয়ের x স্থানাঙ্ক হলো $1, 3$
সুতরাং সমীকরণের সমাধান $x = 1, 3$ **(Ans.)**

জেনে রাখা ভালো: লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান নির্ণয়ের ক্ষেত্রে করণীয়:

i. **অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয়:** $x = 0$ বসিয়ে y-অক্ষের ছেদবিন্দু এবং $y = 0$ বসিয়ে x-অক্ষের ছেদবিন্দু বের করবে।
ii. **বাঁক বা মোচড় বিন্দু** (turning point) বের করবে। (বিস্তারিত অনুশীলনীর ব্যবচ্ছেদ দ্রষ্টব্য)
iii. অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু, মোচড় বিন্দু ও সুবিধামতো আরও 2 থেকে 3টি বিন্দু নিয়ে সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কন করতে হবে।
iv. অঙ্কিত লেখচিত্রের x-অক্ষের ছেদবিন্দু বা স্পর্শবিন্দুর x-এর স্থানাঙ্ক বা ভুজ হলো সমীকরণটির সামাধান।

দ্বিঘাত সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কনে তোমরা আলাদাভাবে নিম্নোক্ত বিন্দুগুলো খসড়া করে নির্ণয় করবে। এতে লেখের বিন্দুগুলো নির্ধারণ সহজ হবে।

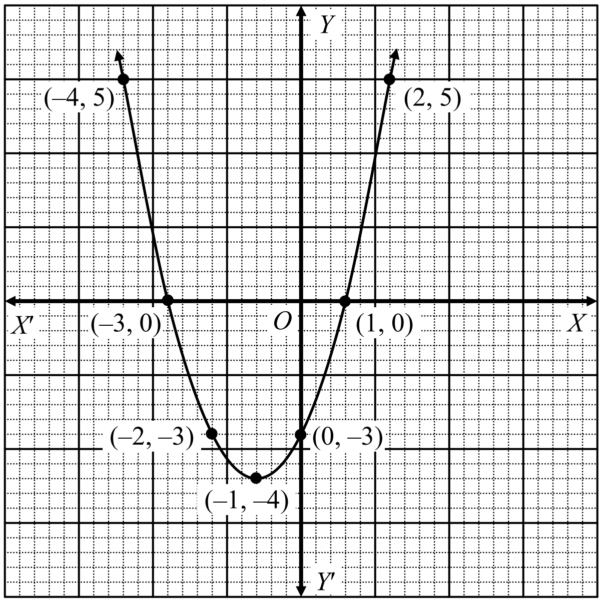
অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয়:
(ii) নং সমীকরণে $x = 0$ হলে $y = 0^2 - 4.0 + 3 = 3$
$\therefore$ সমীকরণটির লেখ y অক্ষকে $(0, 3)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
(ii) নং সমীকরণে $y = 0$ হলে, $x^2 - 4x + 3 = 0$
বা, $(x - 3)(x - 1) = 0$
$\therefore x = 1, 3$
অর্থাৎ সমীকরণটির লেখ x অক্ষকে $(1, 0)$ ও $(3, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
মোচড়বিন্দু নির্ণয়: $y = x^2 - 4x + 3 = x^2 - 2.2.x + 2^2 - 1$
$= (x - 2)^2 - 1$
এখন, $(x - 2)^2 = 0$ বা, $x = 2$ হলে, $y = -1$
$\therefore$ মোচড় বিন্দু $(2, -1)$

খ প্রদত্ত সমীকরণ $x^2 + 2x - 3 = 0$ ... ... (i)
মনে করি, $y = x^2 + 2x - 3$ ... ... (ii)

x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করে (ii) নং এর লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি:

x	– 4	– 3	– 2	– 1	0	1	2
y	5	0	– 3	– 4	– 3	0	5

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি তিন বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে উপরের সারণিতে স্থাপিত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে (ii) নং এর লেখচিত্র অঙ্কন করি। লেখচিত্রটি x অক্ষকে যেসব বিন্দুতে ছেদ বা স্পর্শ করে সে বিন্দুর x স্থানাঙ্কই সমীকরণের সমাধান।



দেখা যায় যে, লেখচিত্রটি x অক্ষকে $(-3, 0)$ ও $(1, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
সুতরাং সমীকরণটির সমাধান $x = -3, 1$ **(Ans.)**

দ্বিঘাত সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কনে তোমরা আলাদাভাবে নিম্নোক্ত বিন্দুগুলো খসড়া করে নির্ণয় করবে। এতে লেখের বিন্দুগুলো নির্ধারণ সহজ হবে।

অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয়:

(ii) নং সমীকরণে $x = 0$ হলে $y = 0^2 + 2.0 - 3 = -3$

অর্থাৎ সমীকরণটির লেখ y অক্ষকে $(0, -3)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(ii) $y = 0$ হলে, $x^2 + 2x - 3 = 0$

বা, $x^2 + 3x - x - 3 = 0$

বা, $x(x + 3) - 1(x + 3) = 0$

বা, $(x + 3)(x - 1) = 0$

$\therefore x = 1, -3$

অর্থাৎ সমীকরণটির লেখ x অক্ষকে $(1, 0)$ ও $(-3, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

মোচড় বিন্দু নির্ণয়: $y = x^2 + 2x - 3$

$= (x^2 + 2x + 1) - 4$

$= (x + 1)^2 - 4$

এখন, $(x + 1)^2 = 0$ বা, $x = -1$ হলে $y = -4$

$\therefore$ মোচড় বিন্দু $(-1, -4)$

◆◆ অনুশীলনীর ৯(খ)নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

$-x^2 + 3x - 2 = 0$ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ। *ক. দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ লিখ এবং প্রদত্ত সমীকরণের সাথে তুলনা করে **a, b, c** নির্ণয় কর।* *খ. সূত্র প্রয়োগ করে সমীকরণটি সমাধান কর।* *গ. সমীকরণটি লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর।*	**নিজে নিজে চেষ্টা কর।** **(ক) –1, 3, 2; (খ) 2, 1** **(গ) 1, 2**

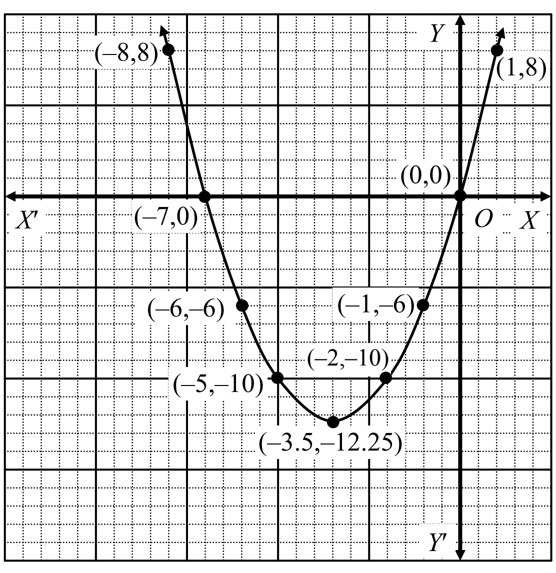
গ প্রদত্ত সমীকরণ $x^2 + 7x = 0$ ... ... (i)

মনে করি, $y = x^2 + 7x$ ... ... (ii)

x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করে (ii) নং লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি:

x	-8	-7	-6	-5	-3.5	-2	-1	0	1
y	8	0	-6	-10	-12.25	-10	-6	0	8

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের x-অক্ষের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে দুই একক এবং y-অক্ষের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে উপরের সারণিতে স্থাপিত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে (ii) নং এর লেখচিত্র অঙ্কন করি। লেখচিত্রটি x অক্ষকে যেসব বিন্দুতে ছেদ বা স্পর্শ করে সে বিন্দুর x স্থানাঙ্কই সমীকরণের সমাধান।



দেখা যায় যে, লেখচিত্রটি x অক্ষকে $(-7, 0)$ ও $(0, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
সুতরাং সমীকরণের সমাধান $x = -7, 0$ **(Ans.)**

দ্বিঘাত সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কনে তোমরা আলাদাভাবে নিম্নোক্ত বিন্দুগুলো খসড়া করে নির্ণয় করবে। এতে লেখের বিন্দুগুলো নির্ধারণ সহজ হবে।

অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয়:

(ii) $x = 0$ হলে $y = 0 + 7.0 = 0$

অর্থাৎ সমীকরণটির লেখ y অক্ষকে $(0, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(ii) $y = 0$ হলে, $x^2 + 7x = 0$

বা, $x(x + 7) = 0$

$\therefore x = 0, -7$

অর্থাৎ সমীকরণটির লেখ x অক্ষকে $(0, 0)$ ও $(-7, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

মোচড়বিন্দু নির্ণয়:

$$y = x^2 + 7x = x^2 + 2.\frac{7}{2}.x + \left(\frac{7}{2}\right)^2 - \left(\frac{7}{2}\right)^2$$

$$= \left(x + \frac{7}{2}\right)^2 - \frac{49}{4}$$

এখন, $\left(x + \frac{7}{2}\right)^2 = 0$ অর্থাৎ $x = -\frac{7}{2}$ হলে $y = -\frac{49}{4}$

$\therefore$ মোচড় বিন্দু $\left(-\frac{7}{2}, -\frac{49}{4}\right)$ বা, $(-3.5, -12.25)$

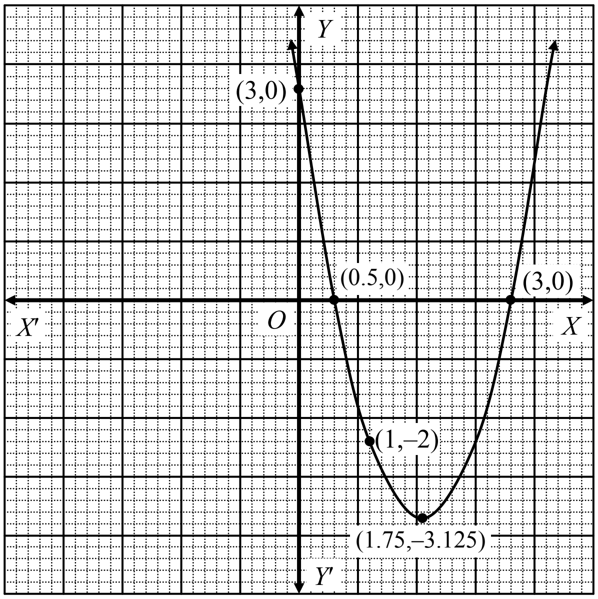
ঘ প্রদত্ত সমীকরণ $2x^2 - 7x + 3 = 0$ ... ... (i)

মনে করি, $y = 2x^2 - 7x + 3$ ... ... (ii)

x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করে (ii) নং এর লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি:

x	0	0.5	1	1.75	3
y	3	0	-2	-3.125	0

ছক কাগজের উভয় অক্ষে ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি ছয় বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে উপরের সারণিতে স্থাপিত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে (ii) নং এর লেখচিত্র অঙ্কন করি। লেখচিত্রটি x অক্ষকে যেসব বিন্দুতে ছেদ বা স্পর্শ করে সে বিন্দুর x স্থানাঙ্কই সমীকরণের সমাধান।



দেখা যায় যে, লেখচিত্রটি x অক্ষকে $(0.5, 0)$ ও $(3, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
সুতরাং (i) নং এর সমাধান $x = 0.5, 3$ **(Ans.)**

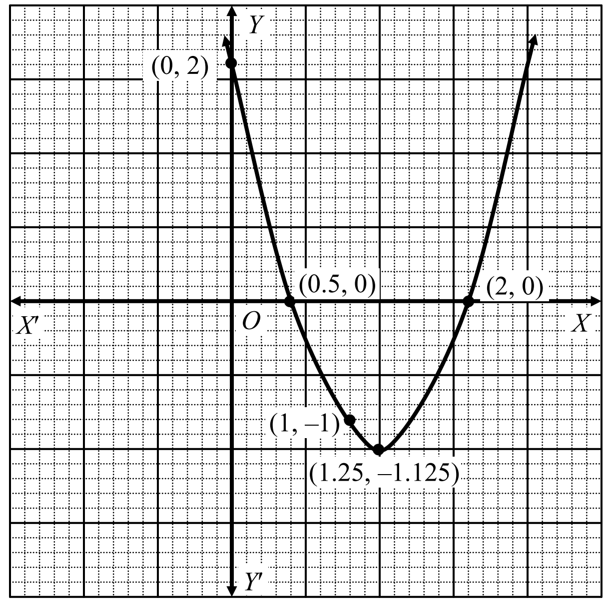
দ্বিঘাত সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কনে তোমরা আলাদাভাবে নিম্নোক্ত বিন্দুগুলো খসড়া করে নির্ণয় করবে। এতে লেখের বিন্দুগুলো নির্ধারণ সহজ হবে।

অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয়:
(ii) $x = 0$ হলে $y = 2.0 - 7.0 + 3 = 3$
অর্থাৎ সমীকরণটির লেখ y অক্ষকে $(0, 3)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
(ii) $y = 0$ হলে, $2x^2 - 7x + 3 = 0$
বা, $2x^2 - 6x - x + 3 = 0$
বা, $2x^2 - x - 6x + 3 = 0$
বা, $x(2x - 1) - 3(2x - 1) = 0$
বা, $(2x - 1)(x - 3) = 0$
$\therefore x = \frac{1}{2}, 3$
অর্থাৎ সমীকরণটির লেখ x অক্ষকে $(0.5, 0)$ ও $(3, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
মোচড়বিন্দু নির্ণয়: $y = 2x^2 - 7x + 3$
$= 2\left(x^2 - \frac{7}{2}.x\right) + 3$
$= 2\left\{x^2 - 2.\frac{7}{4}.x + \left(\frac{7}{4}\right)^2 - \left(\frac{7}{4}\right)^2\right\} + 3$
$= 2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - 2\left(\frac{7}{4}\right)^2 + 3$
$= 2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{8} + 3$
$= 2\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{25}{8}$
এখন, $\left(x - \frac{7}{4}\right) = 0$ অর্থাৎ $x = \frac{7}{4}$ হলে $y = -\frac{25}{8}$
$\therefore$ মোচড় বিন্দু $\left(\frac{7}{4}, \frac{-25}{8}\right)$ বা, $(1.75, -3.125)$

ঙ প্রদত্ত সমীকরণ $2x^2 - 5x + 2 = 0$ ... ... (i)
মনে করি, $y = 2x^2 - 5x + 2$ ... ... (ii)
x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করে (ii) নং এবং লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি:

x	0	0.5	1	1.25	2
y	2	0	– 1	– 1.125	0

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি আট বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে উপরের সারণিতে স্থাপিত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে (ii) নং এর লেখচিত্র অঙ্কন করি। লেখচিত্রটি x অক্ষকে যেসব বিন্দুতে ছেদ বা স্পর্শ করে সে বিন্দুর x স্থানাঙ্কই সমীকরণের সমাধান।



দেখা যায় যে, লেখচিত্রটি x-অক্ষকে $(0.5, 0)$ ও $(2, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
সুতরাং সমীকরণের সমাধান $x = 0.5, 2$ **(Ans.)**

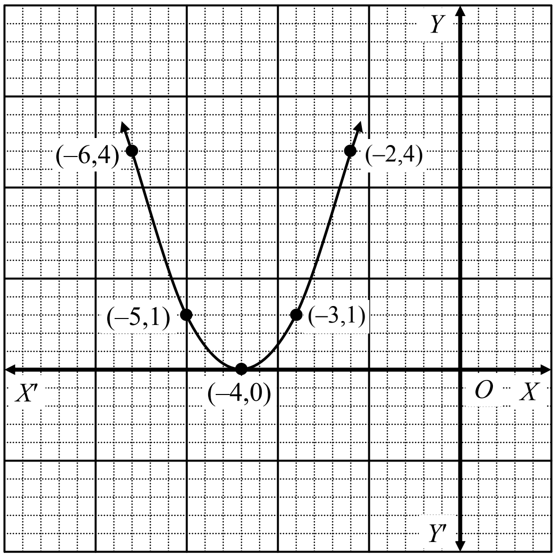
দ্বিঘাত সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কনে তোমরা আলাদাভাবে নিম্নোক্ত বিন্দুগুলো খসড়া করে নির্ণয় করবে। এতে লেখের বিন্দুগুলো নির্ধারণ সহজ হবে।

অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয়:
(ii) $x = 0$ হলে $y = 2.0 - 5.0 + 2 = 2$
অর্থাৎ সমীকরণটির লেখ y অক্ষকে $(0, 2)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
(ii) $y = 0$ হলে, $2x^2 - 5x + 2 = 0$
বা, $2x^2 - 4x - x + 2 = 0$
বা, $2x(x - 2) - 1(x - 2) = 0$
বা, $(2x - 1)(x - 2) = 0 \therefore x = \frac{1}{2}, 2$
অর্থাৎ সমীকরণটির লেখ x অক্ষকে $(0.5, 0)$ ও $(2, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
মোচড়বিন্দু নির্ণয়: $y = 2x^2 - 5x + 2$
$= 2\left(x^2 - \frac{5}{2}.x\right) + 2$
$= 2\left\{x^2 - 2.\frac{5}{4}.x + \left(\frac{5}{4}\right)^2 - \left(\frac{5}{4}\right)^2\right\} + 2$
$= 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - 2.\frac{25}{16} + 2$
$= 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{25}{8} + 2$
$= 2\left(x - \frac{5}{4}\right)^2 - \frac{9}{8}$
এখন, $\left(x - \frac{5}{4}\right) = 0$ অর্থাৎ $x = \frac{5}{4}$ হলে $y = -\frac{9}{8}$
$\therefore$ মোচড় বিন্দু $\left(\frac{5}{4}, -\frac{9}{8}\right)$ বা, $(1.25, -1.125)$

চ প্রদত্ত সমীকরণ $x^2 + 8x + 16 = 0$ ... ... (i)
মনে করি, $y = x^2 + 8x + 16$ ... ... (ii)
x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করে (ii) নং এর লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি:

x	– 6	– 5	– 4	– 3	– 2
y	4	1	0	1	4

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি তিন বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে উপরের সারণিতে স্থাপিত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে (ii) নং এর লেখচিত্র অঙ্কন করি। লেখচিত্রটি x অক্ষকে যেসব বিন্দুতে ছেদ বা স্পর্শ করে সে বিন্দুর x স্থানাঙ্কই সমীকরণের সমাধান।



লেখচিত্রে দেখা যায় যে, এটি x-অক্ষকে $(-4, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে। যেহেতু দ্বিঘাত সমীকরণের দুইটি মূল থাকে।

সুতরাং (i) নং এর সমাধান $x = -4, -4$ **(Ans.)**

দ্বিঘাত সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কনে তোমরা আলাদাভাবে নিম্নোক্ত বিন্দুগুলো খসড়া করে নির্ণয় করবে। এতে লেখের বিন্দুগুলো নির্ধারণ সহজ হবে।

অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয়:

(ii) $x = 0$ হলে $y = 0 + 0 + 16 = 16$

অর্থাৎ সমীকরণটির লেখ y অক্ষকে $(0, 16)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(ii) $y = 0$ হলে, $x^2 + 8x + 16 = 0$

বা, $x^2 + 2.4.x + 4^2 = 0$

বা, $(x + 4)^2 = 0$

$\therefore x = -4$

অর্থাৎ সমীকরণটির লেখ x অক্ষকে $(-4, 0)$ বিন্দুতে স্পর্শ করে।

মোচড়বিন্দু নির্ণয়:

$y = x^2 + 8x + 16$

$= x^2 + 2.4.x + 4^2$

$= (x + 4)^2$

এখন, $(x + 4)^2 = 0$ অর্থাৎ $x = -4$ হলে $y = 0$

$\therefore$ মোচড় বিন্দু $(-4, 0)$

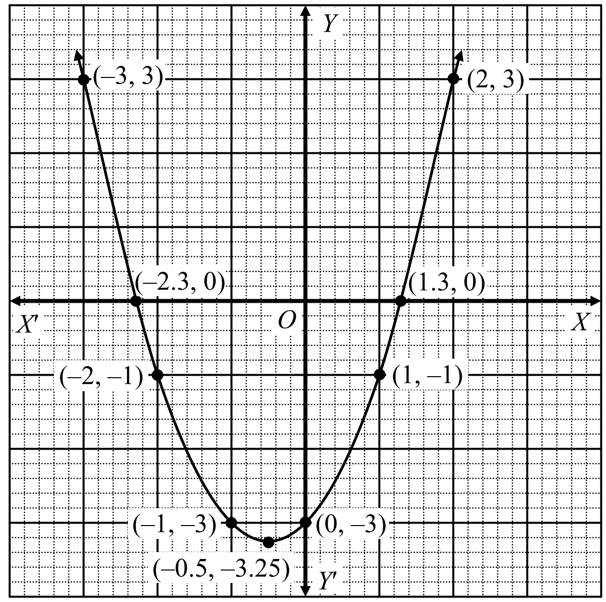
ছ প্রদত্ত সমীকরণ $x^2 + x - 3 = 0$ ... ... (i)

মনে করি, $y = x^2 + x - 3$ ... ... (ii)

x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করে (ii) নং এর লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি:

x	-3	-2.3	-2	-1	-0.5	0	1	1.3	2
y	3	0	-1	-3	-3.25	-3	-1	0	3

ছক কাগজের উভয় অক্ষে ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি পাঁচ বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে উপরের সারণিতে স্থাপিত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে (ii) নং এর লেখচিত্র অঙ্কন করি। লেখচিত্রটি x অক্ষকে যেসব বিন্দুতে ছেদ বা স্পর্শ করে সে বিন্দুর x স্থানাঙ্কই সমীকরণের সমাধান।



দেখা যায় যে, লেখচিত্রটি x-অক্ষকে মোটামুটিভাবে $(-2.3, 0)$ ও $(1.3, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

সুতরাং সমীকরণের সমাধান $x = -2.3$ (আসন্ন) 1.3 (আসন্ন)। **(Ans.)**

দ্বিঘাত সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কনে তোমরা আলাদাভাবে নিম্নোক্ত বিন্দুগুলো খসড়া করে নির্ণয় করবে। এতে লেখের বিন্দুগুলো নির্ধারণ সহজ হবে।

অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয়:

(ii) $x = 0$ হলে $y = 0 + 0 - 3 = -3$

অর্থাৎ সমীকরণটির লেখ y অক্ষকে $(0, -3)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(ii) $y = 0$ হলে $x^2 + x - 3 = 0$

$$\text{বা, } x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4.1.(-3)}}{2.1}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{13}}{2}$$

$$= \frac{-1 + \sqrt{13}}{2}, \frac{-1 - \sqrt{13}}{2}$$

$= 1.3$ (প্রায়) , -2.3 (প্রায়)

অর্থাৎ সমীকরণটির লেখ x অক্ষকে $(1.3, 0)$ ও $(-2.3, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

মোচড়বিন্দু নির্ণয়: $y = x^2 + x - 3$

$$= x^2 + 2.x.\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} - 3 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{13}{4}$$

$\therefore x = -\frac{1}{2}$ এর জন্য $y = -\frac{13}{4}$

$\therefore$ মোচড় বিন্দু $(-0.5, -3.25)$

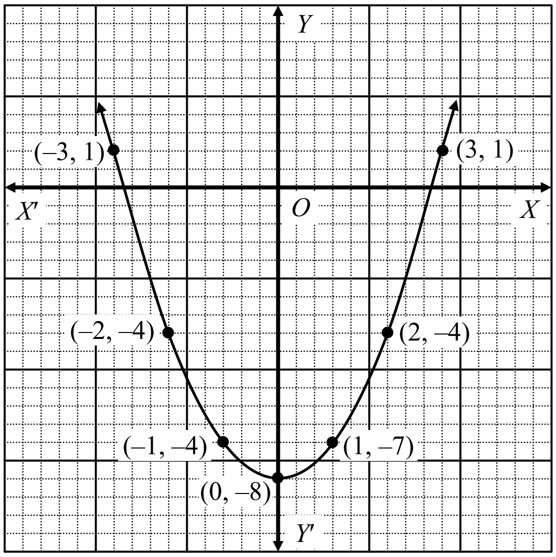
জ প্রদত্ত সমীকরণ $x^2 = 8$ বা, $x^2 - 8 = 0$... ... ... (i)

মনে করি, $y = x^2 - 8$ ... ... (ii)

x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করে (ii) নং এর লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	1	-4	-7	-8	-7	-4	1

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের x-অক্ষের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে তিন একক এবং y-অক্ষের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে দুই একক ধরে উপরের সারণিতে স্থাপিত বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে (ii) নং এর লেখচিত্র অঙ্কন করি। লেখচিত্রটি x অক্ষকে যেসব বিন্দুতে ছেদ বা স্পর্শ করে সে বিন্দুর x স্থানাঙ্কই সমীকরণের সমাধান।



দেখা যায় যে, লেখচিত্রটি x-অক্ষকে $(-2.8, 0)$ ও $(2.8, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।
সুতরাং সমীকরণের সমাধান $x = -2.8$ (আসন্ন), 2.8 (আসন্ন) **(Ans.)**

দ্বিঘাত সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কনে তোমরা আলাদাভাবে নিম্নোক্ত বিন্দুগুলো খসড়া করে নির্ণয় করবে। এতে লেখের বিন্দুগুলো নির্ধারণ সহজ হবে।

অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয়:

(ii) $x = 0$ হলে $y = 0 - 8 = -8$

অর্থাৎ সমীকরণটির লেখ y অক্ষকে $(0, -8)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

(ii) $y = 0$ হলে $x^2 - 8 = 0$

বা, $x^2 - (2\sqrt{2})^2 = 0$

বা, $(x + 2\sqrt{2})(x - 2\sqrt{2}) = 0$

বা, $x = -2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$

$= -2.8$ (প্রায়), 2.8 (প্রায়)

অর্থাৎ সমীকরণটির লেখ x অক্ষকে $(2.8, 0)$ ও $(-2.8, 0)$ বিন্দুতে ছেদ করে।

মোচড়বিন্দু নির্ণয়: $y = x^2 - 8$

$= (x - 0)^2 - 8$

$\therefore$ $x = 0$ হলে $y = -8$

$\therefore$ মোচড় বিন্দু $(0, -8)$

১০ **একটি সংখ্যার বর্গের দ্বিগুণ সংখ্যাটির 5 গুণ থেকে 3 কম। কিন্তু ঐ সংখ্যাটির বর্গের 5 গুণ সংখ্যাটির 2 গুণ থেকে 3 বেশি।**

ক. উদ্দীপকের তথ্যগুলোর সাহায্যে সমীকরণ গঠন কর।

খ. সূত্র প্রয়োগ করে ১ম সমীকরণটি সমাধান কর।

গ. ২য় সমীকরণটি লেখচিত্রের সাহায্যে সমাধান কর।

সমাধান:

ক ধরি, সংখ্যাটি $= x$

শর্তমতে, প্রথম সমীকরণ, $2x^2 = 5x - 3$

এবং দ্বিতীয় সমীকরণ $5x^2 = 2x + 3$

খ প্রথম সমীকরণটি হলো, $2x^2 = 5x - 3$

বা, $2x^2 - 5x + 3 = 0$ ... ... (i)

(i) কে $ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণের সাথে তুলনা করে পাই,
$a = 2, b = -5$ ও $c = 3$

আমরা জানি, $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$= \dfrac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 2 \times 3}}{2 \times 2}$

$= \dfrac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{4}$

$= \dfrac{5 \pm 1}{4}$

সুতরাং একটি মূল $= \dfrac{5 + 1}{4} = \dfrac{6}{4} = \dfrac{3}{2}$

ও অপর মূল $= \dfrac{5 - 1}{4} = \dfrac{4}{4} = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = \dfrac{3}{2}, 1$ **(Ans.)**

গ ২য় সমীকরণটি হলো, $5x^2 = 2x + 3$

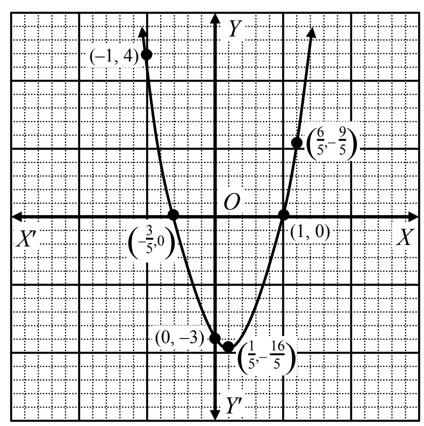
বা, $5x^2 - 2x - 3 = 0$ ... ... (i)

ধরি, $y = 5x^2 - 2x - 3$ ... ... (ii)

x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করে (ii) নং এর লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি।

x	-1	$-\frac{3}{5}$	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$
y	4	0	-3	0	$\frac{-16}{5}$	$\frac{9}{5}$

ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের x-অক্ষের প্রতি পাঁচ বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক এবং y-অক্ষের প্রতি তিন বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে উপরের সারণিতে স্থাপিত বিন্দুগুলো ছক কাগজ স্থাপন করে (ii) নং এর লেখচিত্র অঙ্কন করি। লেখচিত্রটি x-অক্ষকে যেসব বিন্দুতে ছেদ বা স্পর্শ করে সে বিন্দুর x স্থানাঙ্কই সমীকরণের সমাধান।



দেখা যায় যে, লেখচিত্রটি x-অক্ষকে মোটামুটিভাবে $(1,0)$ ও $\left(-\frac{3}{5},0\right)$ বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং সমীকরণের সমাধান $x = -\frac{3}{5}, 1$

দ্বিঘাত সমীকরণের লেখচিত্র অঙ্কনে তোমরা আলাদাভাবে নিম্নোক্ত বিন্দুগুলো খসড়া করে নির্ণয় করবে। এতে লেখের বিন্দুগুলো নির্ধারণ সহজ হবে।

অক্ষদ্বয়ের ছেদবিন্দু নির্ণয়ঃ

(i) $x = 0$ হলে পাই, $y = -3$

(ii) $y = 0$ হলে, $5x^2 - 2x - 3 = 0$

$$\text{বা, } x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.5.(-3)}}{2.5}$$
$$= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 60}}{10} = \frac{2 \pm \sqrt{4+60}}{10}$$
$$= \frac{2 \pm \sqrt{64}}{10}$$
$$= \frac{2 \pm 8}{10}$$
$$= \frac{2 + 8}{10}, \frac{2 - 8}{10}$$
$$= \frac{10}{10}, \frac{-6}{10}$$
$$= 1, \frac{-3}{5}$$

মোচড় বিন্দু নির্ণয়ঃ এখন, $y = 5x^2 - 2x - 3$

$$\text{বা, } y = 5(x^2 - \frac{2}{3}x - \frac{3}{5})$$
$$= 5\left\{x^2 - 2.\frac{1}{5}.x + \left(\frac{1}{5}\right)^2 - \left(\frac{1}{5}\right)^2 - \frac{3}{5}\right\}$$
$$= 5\left\{\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{25} - \frac{3}{5}\right\}$$
$$= 5\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - 5 \times \frac{1}{25} - 5 \times \frac{3}{5}$$
$$= 5\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{1}{5} - 3$$
$$= 5\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 - \frac{16}{5}$$

এখন, $x - \frac{1}{5} = 0$ বা, $x = \frac{1}{5}$ হলে পাই, $y = -\frac{-16}{5}$

$\therefore$ মোচড় বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{1}{5}, \frac{-16}{5}\right)$

১১ **জনাব আশফাক আলীর আয়তাকার এক খণ্ড জমির ক্ষেত্রফল 0.12 হেক্টর। জমিটির অর্ধপরিসীমা এর একটি কর্ণ অপেক্ষা 20 মিটার বেশি। তিনি তাঁর জমি থেকে শ্যাম বাবুর নিকট আয়তাকার এক তৃতীয়াংশ বিক্রি করেন। শ্যাম বাবুর জমির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ অপেক্ষা 5 মিটার বেশি। [1 হেক্টর = 10,000 বর্গ মিটার]**

ক. উদ্দীপকের আলোকে দুইটি সমীকরণ গঠন কর।

খ. আশফাক আলীর জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

গ. শ্যাম বাবুর জমির কর্ণের দৈর্ঘ্য ও পরিসীমা নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

ক মনে করি, আশফাক আলীর আয়তকার জমির দৈর্ঘ্য x মিটার ও প্রস্থ y মিটার।

$\therefore$ জমির ক্ষেত্রফল $= xy$ বর্গ মিটার

জমির পরিসীমা $= 2(x + y)$ মিটার

এবং কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{x^2 + y^2}$ মিটার

আশফাক আলীর জমির ক্ষেত্রফল $= 0.12$ হেক্টর

$= 0.12 \times 10000$ বর্গমিটার

$= 1200$ বর্গ মিটার

প্রথম শর্তানুসারে, $xy = 1200$ ... ... (i)

দ্বিতীয় শর্তানুসারে, $x + y = \sqrt{x^2 + y^2} + 20$ ... ... (ii)

খ (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই,

$x + y = \sqrt{x^2 + y^2} + 20$

বা, $(x + y) - 20 = \sqrt{x^2 + y^2}$

বা, $(x + y)^2 - 2(x + y)\, 20 + (20)^2 = x^2 + y^2$; [বর্গ করে]

বা, $x^2 + 2xy + y^2 - 40x - 40y + 400 = x^2 + y^2$

বা, $2xy - 40(x + y) + 400 = 0$

বা, $2 \times 1200 - 40(x + y) + 400 = 0$; [$\because xy = 1200$]

বা, $2800 - 40(x + y) = 0$

বা, $x + y = \frac{-2800}{-40}$

বা, $x + y = 70$ ... ... (iii)

আবার, $(x - y)^2 = (x + y)^2 - 4xy$

$= (70)^2 - 4 \times 1200$

$= 4900 - 4800$

$= 100$

$\therefore x - y = 10$ ... ... (iv) ; [$\because$ দৈর্ঘ্য > প্রস্থ $\therefore$ দৈর্ঘ্য – প্রস্থ > 0]

(iii) ও (iv) যোগ করে পাই,

$2x = 80$

বা, $x = \frac{80}{2}$

$\therefore x = 40$

(iii) নং এ $x = 40$ বসিয়ে পাই,

$40 + y = 70$

বা, $y = 70 - 40$

$\therefore y = 30$

অতএব আশফাক আলীর জমির দৈর্ঘ্য 40 মিটার ও প্রস্থ 30 মিটার।

গ এখানে, শ্যামবাবুর জমির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{3} \times 1200$ বর্গমিটার

$= 400$ বর্গমিটার

ধরি, শ্যামবাবুর জমির দৈর্ঘ্য $= z$ মিটার

$\therefore$ জমির প্রস্থ $= (z - 5)$ মিটার

সুতরাং, $z(z - 5) = 400$

বা, $z^2 - 5z - 400 = 0$

$$\therefore z = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \times 1 \times (-400)}}{2.1}$$
$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 + 1600}}{2}$$
$$= \frac{5 \pm \sqrt{1625}}{2}$$
$$= \frac{5 \pm 40.31}{2}$$
$$= \frac{5 + 40.31}{2}, \frac{5 - 40.31}{2}$$

$= 22.66$; [$\because$ জমির দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারে না]

$\therefore$ দৈর্ঘ্য $= z$ মিটার $= 22.66$ মিটার

এবং প্রস্থ $= (22.66 - 5)$ মিটার $= 17.66$ মিটার।

এখন, কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(\text{দৈর্ঘ্য})^2 + (\text{প্রস্থ})^2}$

$= \sqrt{(22.66)^2 + (17.66)^2}$

$= 28.73$ মিটার **(Ans.)**

আবার, পরিসীমা $= 2$ (দৈর্ঘ্য + প্রস্থ)

$= 2(22.66 + 17.66)$ মিটার

$= 80.64$ মিটার। **(Ans.)**

১২ $f(x) = x^2 - 6x + 15$ **এবং** $g(x) = x^2 - 6x + 13$

ক. $f(x) = 7$ **হলে,** x **এর মান নির্ণয় কর।**

খ. $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = \sqrt{10} - \sqrt{8}$ **হলে, সমীকরণটি সমাধান কর।**

গ. $g(x)$ **এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।**

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, $f(x) = x^2 - 6x + 15$

এখন, $f(x) = 7$ হলে পাই,

$x^2 - 6x + 15 = 7$

বা, $x^2 - 6x + 15 - 7 = 0$

বা, $x^2 - 6x + 8 = 0$

বা, $x^2 - 4x - 2x + 8 = 0$

বা, $x(x - 4) - 2(x - 4) = 0$

বা, $(x - 4)(x - 2) = 0$

বা, $x - 4 = 0$ অথবা $x - 2 = 0$

$\therefore x = 4, 2$

খ এখানে, $\sqrt{f(x)} - \sqrt{g(x)} = \sqrt{10} - \sqrt{8}$

বা, $\sqrt{x^2 - 6x + 15} - \sqrt{x^2 - 6x + 13} = \sqrt{10} - \sqrt{8}$

এখন, $x^2 - 6x + 13 = y$ ধরলে প্রদত্ত সমীকরণ হবে

$\sqrt{y + 2} - \sqrt{y} = \sqrt{10} - \sqrt{8}$

বা, $\sqrt{y + 2} + \sqrt{8} = \sqrt{y} + \sqrt{10}$

বা, $(\sqrt{y + 2})^2 + 2.\sqrt{y + 2}.\sqrt{8} + (\sqrt{8})^2 = (\sqrt{y} + \sqrt{10})^2$

বা, $y + 2 + 8 + 2\sqrt{8y + 16} = y + 10 + 2\sqrt{10y}$ [বর্গ করে]

বা, $\sqrt{8y + 16} = \sqrt{10y}$

বা, $8y + 16 = 10y$; [বর্গ করে]

বা, $2y = 16$

বা, $y = 8$

বা, $x^2 - 6x + 13 = 8$; [y এর মান বসিয়ে]

বা, $x^2 - 6x + 5 = 0$

বা, $x^2 - 5x - x + 5 = 0$

বা, $x(x - 5) - 1(x - 5) = 0$

বা, $(x - 1)(x - 5) = 0$

$\therefore x = 1$ অথবা 5

শুদ্ধি পরীক্ষা: $x = 1$ হলে, বামপক্ষ $= \sqrt{10} - \sqrt{8} =$ ডানপক্ষ

$x = 5$ হলে, বামপক্ষ $= \sqrt{10} - \sqrt{8} =$ ডানপক্ষ

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $x = 1, 5$

বি.দ্র: 'খ' নং প্রশ্নটি পাঠ্যবই উদাহরণ-৯ পৃষ্ঠা-১০১-এ সমাধান দেওয়া হয়েছে।

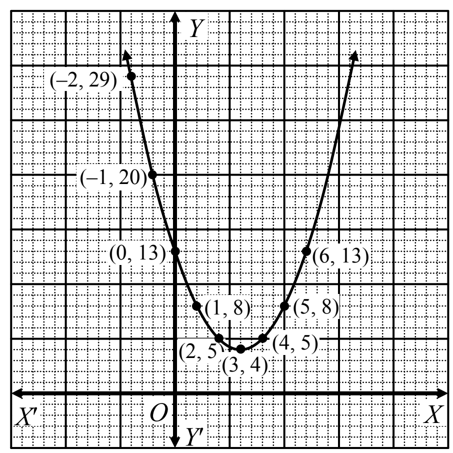
গ প্রদত্ত সমীকরণ $g(x) = x^2 - 6x + 13$ ... ... (i)

মনে করি, $y = g(x) = x^2 - 6x + 13$ ... ... (ii)

x এর বিভিন্ন মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করে (ii) নং এর লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি:

x	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
y	29	20	13	8	5	4	5	8	13

ছক কাগজের x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 ঘরের দৈর্ঘ্যকে 1 একক ধরে এবং y-অক্ষ বরাবর প্রতি 1 ঘরের দৈর্ঘ্যকে এক একক ধরে উপরের সারণিতে স্থাপিত বিন্দুগুলো স্থাপন করে (ii) নং সমীকরণ এর সাপেক্ষে লেখচিত্র অঙ্কন করি।



১৩ **পাঁচটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যার অঙ্কগুলোর যোগফল কি পরবর্তী পাঁচটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যার অঙ্কগুলোর যোগফল দিয়ে গুণ করলে গুণফল 120635 হতে পারে?** [সংশোধিত]

সমাধান: মনে করি, ১ম ক্রমিক সংখ্যা $= x$

$\therefore$ পাঁচটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যাগুলো হলো $x, x + 1, x + 2, x + 3$ ও $x + 4$

তাহলে পরবর্তী পাঁচটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যাগুলো হবে $x + 5, x + 6, x + 7, x + 8$ ও $x + 9$

$\therefore$ পাঁচটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যার অঙ্কগুলোর যোগফল

$= (x + x + 1 + x + 2 + x + 3 + x + 4)$

$= 5x + 10$

পরবর্তী পাঁচটি ক্রমিক সংখ্যার অঙ্কগুলোর যোগফল

$= (x + 5 + x + 6 + x + 7 + x + 8 + x + 9)$

$= 5x + 35$

শর্তমতে, $(5x + 10) \times (5x + 35) = 120635$

বা, $25x^2 + 175x + 50x + 350 = 120635$

বা, $25x^2 + 225x + 350 - 120635 = 0$

বা, $25x^2 + 225x - 120285 = 0$

বা, $5x^2 + 45x - 24057 = 0$

বা, $x = \dfrac{-45 \pm \sqrt{(45)^2 - 4 \times 5 \times (-24057)}}{2 \times 5}$

$= \dfrac{-45 \pm \sqrt{2025 + 481140}}{10}$

$= \dfrac{-45 \pm \sqrt{483165}}{10}$

$= \dfrac{-45 \pm 695.1}{10}$

$= 65.01, -74.01$

প্রাপ্ত x এর মান দুইটির কোনোটিই পূর্ণসংখ্যা নয়। তাই এমন কোনো পাঁচটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা নেই যার যোগফল এবং পরবর্তী পাঁচটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যার যোগফল দিয়ে গুণ করলে গুণফল 120635 হতে পারে।

বি.দ্র: পূর্ণসংখ্যা হিসেবে 65 বা -74 কে গণ্য করলে উভয়ক্ষেত্রেই গুণফল 120600 হয়।

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

ধরি, প্রথম পাঁচটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা যথাক্রমে $x, x+1, x+2, x+3, x+4$
পরবর্তী পাঁচটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা যথাক্রমে $x+5, x+6, x+7, x+8, x+9$
$\therefore$ প্রথম পাঁচটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যার যোগফল

$$= x + (x+1) + (x+2) + (x+3) + (x+4)$$
$$= 5x + 10 = 5(x+2)$$

পরবর্তী পাঁচটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যার যোগফল

$$= (x+5) + (x+6) + (x+7) + (x+8) + (x+9)$$
$$= 5x + 35 = 5(x+7)$$

উভয় যোগফলের গুণফল 120635 হতে পারে যদি 120635 সংখ্যাটি 5×5 বা 25 দিয়ে নিঃশেষে বিভাজ্য হয় কারণ উভয় যোগফল 5 এর গুণিতক।
এখন, $120635 \div 25 = 4825.4$
$\therefore$ 120635 সংখ্যাটি 25 দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য নয়।
অতএব, উভয় যোগফলের গুণফল 120635 হতে পারে না।

১৪ একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের ব্যবধান 1 সেমি। তার ক্ষেত্রফলের শেষ অঙ্ক যদি 6 হয় তাহলে তার কোন বাহুর দৈর্ঘ্য পূর্ণবর্গ হতে পারে কি?

সমাধান: মনে করি, আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য $= x$ সে.মি.
$\therefore$ আয়তক্ষেত্রটির প্রস্থ $= (x-1)$ সে.মি.
$\therefore$ আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $= x(x-1)$ বর্গ সে.মি.
আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের ব্যবধান 1 (সে.মি. এককে) হওয়ায়, দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ (সে.মি. এককে) ক্রমিক সংখ্যা হবে।
$\therefore$ দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের শেষ অঙ্কগুলোও ক্রমিক সংখ্যা হবে।
সুতরাং আয়তক্ষেত্রটির প্রস্থ ও দৈর্ঘ্যের শেষ অঙ্কগুলো হতে পারে যথাক্রমে 0 ও 1 অথবা 1 ও 2 অথবা 2 ও 3 অথবা 3 ও 4 অথবা 4 ও 5 অথবা 5 ও 6 অথবা 6 ও 7 অথবা 7 ও 8 অথবা 8 ও 9 অথবা 9 ও 0।
আবার, প্রশ্নানুসারে, আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফলের (দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের গুণফলের) শেষ অঙ্ক 6 হবে। এক্ষেত্রে দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের শেষ অঙ্কদ্বয়ের গুণফলের শেষ অঙ্কও 6 হবে। অর্থাৎ দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের শেষ অঙ্কগুলোর গুণফল হতে পারে $(10n+6)$ আকারের যেখানে, $n = 0, 1, 2, \dots 9$।
আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফলের শেষ অঙ্ক নির্ণয়ের জন্য দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের শেষ অঙ্কদ্বয়ের গুণফল নির্ণয় করি:

দৈর্ঘ্যের শেষ অঙ্ক	প্রস্থের শেষ অঙ্ক	দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের শেষ অঙ্কের গুণফল	ক্ষেত্রফলের শেষ অঙ্ক
1	0	0	0
2	1	2	2
3	**2**	**6**	**6**
4	3	12	2
5	4	20	0
6	5	30	0
7	6	42	2
8	**7**	**56**	**6**
9	8	72	2
0	9	0	0

সুতরাং প্রশ্নানুসারে আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফলের শেষ অঙ্ক 6 হতে হলে দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের শেষ অঙ্ক হতে পারে যথাক্রমে 3 ও 2 অথবা 8 ও 7 (যেহেতু শুধুমাত্র এ দুই ক্ষেত্রেই ক্ষেত্রফলের শেষ অঙ্ক 6 হয়)।

দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের মান পূর্ণবর্গ হতে পারে কি-না তা যাচাইকরণ:
আবার আমরা জানি, কোনো পূর্ণবর্গ সংখ্যার শেষ অঙ্ক হতে পারে 0, 1, 4, 5, 6, 9। কিন্তু প্রদত্ত আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রে দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের শেষ অঙ্ক হতে পারে 2, 3, 7 বা 8।
সুতরাং আয়তক্ষেত্রটির কোনো বাহুর দৈর্ঘ্যই পূর্ণবর্গ হতে পারে না। কারণ কোনো পূর্ণবর্গ সংখ্যার শেষ অঙ্ক 2, 3, 7 বা 8 হতে পারে না।

দৃষ্টি আকর্ষণ: কোনো পূর্ণবর্গ সংখ্যার শেষ অঙ্ক শুধুমাত্র 0, 1, 4, 5, 6, 9 হতে পারে। এর বাইরে অন্য কোনো অঙ্ক (2, 3, 7, 8) হতে পারে না। উদাহরণ: $1^2 = \underline{1}$; $2^2 = \underline{4}$; $5^2 = 2\underline{5}$; $6^2 = 3\underline{6}$; $10^2 = 10\underline{0}$; $12^2 = 14\underline{4}$; $13^2 = 16\underline{9}$; $25^2 = 62\underline{5}$ ইত্যাদি।

১৫ ঘড়ির ঘণ্টা ও মিনিটের কাঁটা কতবার পরস্পর ঠিক বিপরীত দিকে বসে? সময়গুলো বের কর।

সমাধান:
ধরি, প্রাথমিক অবস্থায় ঘড়িতে 12টি বাজে এবং x টা y মিনিটে ঘণ্টা ও মিনিটের কাঁটা পরস্পর বিপরীত দিকে বসে।
তাহলে এসময় ঘণ্টা ও মিনিটের কাঁটার মধ্যবর্তী কোণ $180°$
আমরা জানি, ঘড়িতে $360° = 60$ ঘর

বা, $1° = \dfrac{60}{360}$ ঘর

$\therefore 180° = \dfrac{60 \times 180}{360}$ ঘর $= 30$ ঘর

$\therefore 180°$ কোণের জন্য ঘণ্টা ও মিনিটের কাঁটার ঘরের ব্যবধান $= 30$ ঘর
শর্তমতে, x টা y মিনিটে
ঘণ্টার কাঁটার অবস্থান $-$ মিনিটের কাঁটার অবস্থান $= 30$ ঘর ... (i)
এখন, ঘণ্টার কাঁটা 1 ঘণ্টায় যায় 5 ঘর
$\therefore$ ঘণ্টার কাঁটা x " " $5x$ ঘর
আবার, ঘণ্টার কাঁটা, 60 মিনিটে অতিক্রম করে 5 ঘর
$\therefore$ ঘণ্টার কাঁটা, 1 " " " $\dfrac{5}{60}$ ঘর
$\therefore$ ঘণ্টার কাঁটা, y " " " $\dfrac{5y}{60}$ ঘর $= \dfrac{y}{12}$ ঘর
$\therefore$ x টা y মিনিটে ঘণ্টার কাঁটা অতিক্রম করে $\left(5x + \dfrac{y}{12}\right)$ ঘর
এখন, মিনিটের কাঁটা 1 মিনিটে অতিক্রম করে 1 ঘর
$\therefore$ মিনিটের কাঁটা y " " " y ঘর
এখন (i) নং হতে পাই,
ঘণ্টার কাঁটার অবস্থান $-$ মিনিটের কাঁটার অবস্থান $= 30$ ঘর

বা, $\left(5x + \dfrac{y}{12}\right) - y = 30 \dots \dots \dots$ (ii)

বা, $5x + \dfrac{y - 12y}{12} = 30$

বা, $5x - \dfrac{11y}{12} = 30$

বা, $5x - 30 = \dfrac{11y}{12}$

বা, $y = \dfrac{12}{11}(5x - 30)$; যেখানে $x = 0, 1, 2, 3, \dots 11$ বোঝাবে ... (i)

এখানে 0 প্রকৃতপক্ষে 12 বোঝাবে।

(i) নং হতে, x এর সম্ভাব্য মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করি।

x	$y = \frac{12}{11}(5x - 30)$	সময়
$x = 0$ (0 প্রকৃতপক্ষে 12 বোঝায়)	$y = -\frac{360}{11} = -32\frac{8}{11}$	সময়: 12 টা $-32\frac{8}{11}$ মিনিট অর্থাৎ 12 টা থেকে $32\frac{8}{11}$ মিনিট কম $=$ 11 টা $27\frac{3}{11}$ মিনিট
$x = 1$	$y = \frac{12 \times (-25)}{11} = -27\frac{3}{11}$	সময়: 1 টা $-27\frac{3}{11}$ মিনিট অর্থাৎ 12 টা $32\frac{8}{11}$ মিনিট
$x = 2$	$y = \frac{12 \times (-20)}{11} = -21\frac{9}{11}$	সময়: 2 টা $-21\frac{9}{11}$ মিনিট অর্থাৎ 1 টা $38\frac{2}{11}$ মিনিট
$x = 3$	$y = \frac{12 \times (-15)}{11} = -16\frac{4}{11}$	সময়: 3 টা $-16\frac{4}{11}$ মিনিট $=$ 2 টা $43\frac{7}{11}$ মিনিট
$x = 4$	$y = \frac{12 \times (-10)}{11} = -10\frac{10}{11}$	সময়: 4 টা $-10\frac{10}{11}$ মিনিট $=$ 3 টা $49\frac{1}{11}$ মিনিট
$x = 5$	$y = \frac{12 \times (-5)}{11} = -5\frac{5}{11}$	সময়: 5 টা $-5\frac{5}{11}$ মিনিট $=$ 4 টা $54\frac{6}{11}$ মিনিট
$x = 6$	$y = \frac{12 \times 0}{11} = 0$	সময়: 6 টা
$x = 7$	$y = \frac{12 \times 5}{11} = \frac{60}{11}$	সময়: 7 টা $+\frac{60}{11}$ মিনিট $=$ 7 টা $5\frac{5}{11}$ মিনিট
$x = 8$	$y = \frac{12 \times 10}{11} = 10\frac{10}{11}$	সময়: 8 টা $+ 10\frac{10}{11}$ মিনিট $=$ 8 টা $10\frac{10}{11}$ মিনিট
$x = 9$	$y = \frac{12 \times 15}{11} = 16\frac{4}{11}$	সময়: 9 টা $+ 16\frac{4}{11}$ মিনিট $=$ 9 টা $16\frac{4}{11}$ মিনিট
$x = 10$	$y = \frac{12 \times 20}{11} = 21\frac{9}{11}$	সময়: 10 টা $21\frac{9}{11}$ মিনিট
$x = 11$	$y = \frac{12 \times 25}{11} = 27\frac{3}{11}$	সময়: 11 টা $27\frac{3}{11}$ মিনিট

এখানে $x = 0$ এবং $x = 11$ এর জন্য একই মান পাওয়া যায়।

$\therefore$ ঘণ্টা ও মিনিটের কাঁটা 11 বার $180°$ কোণ উৎপন্ন করে।

অর্থাৎ ঘণ্টা ও মিনিটের কাঁটা 11 বার পরস্পর ঠিক বিপরীত দিকে বসে।

সময়গুলো হলো: 11 টা $27\frac{3}{11}$ মিনিট; 12 টা $32\frac{8}{11}$ মিনিট; 1 টা $38\frac{2}{11}$ মিনিট; 2 টা $43\frac{7}{11}$ মিনিট; 3 টা $49\frac{1}{11}$ মিনিট; 4 টা $54\frac{6}{11}$ মিনিট; 6 টা; 7 টা $5\frac{5}{11}$ মিনিট; 8 টা $10\frac{10}{11}$ মিনিট; 9 টা $16\frac{4}{11}$ মিনিট; 10 টা $21\frac{9}{11}$ মিনিট।

লক্ষণীয়: $\left(5x + \frac{y}{12}\right) - y = 30$ সমীকরণের ডানপক্ষে ± 30 এর স্থলে শুধুমাত্র $+30$ বিবেচনা করা হয়েছে। কেননা ডানপক্ষ $= +30$ এর জন্য যেসকল সময় পাওয়া যায় ডানপক্ষ $= -30$ এর জন্যও সেই একই সময়সমূহ পাওয়া যায়।

১৬ ঘড়ির ঘণ্টা ও মিনিটের কাঁটা কতবার ঠিক লম্বালম্বি হয়ে বসে? সময়গুলো বের কর।

সমাধান: ধরি, প্রাথমিক অবস্থায় ঘড়িতে 12টি বাজে এবং x টা y মিনিটে ঘণ্টা ও মিনিটের কাঁটা পরস্পর ঠিক লম্বালম্বিভাবে বসে।

তাহলে এ সময় ঘণ্টা ও মিনিটের কাঁটার মধ্যবর্তী কোণ $90°$।

আমরা জানি, ঘড়িতে $360° = 60$ ঘর

বা, $1° = \frac{60}{360}$ ঘর

$\therefore 90° = \frac{60 \times 90}{360}$ ঘর $= 15$ ঘর

$\therefore$ $90°$ কোণের জন্য ঘণ্টা ও মিনিটের কাঁটার ঘরের ব্যবধান $= 15$ ঘর

শর্তমতে, ঘণ্টার কাঁটার অবস্থান $-$ মিনিটের কাঁটার অবস্থান $= 15$ ঘর ...(i)

এখন, ঘণ্টার কাঁটা 1 ঘণ্টায় যায় 5 ঘর

$\therefore$ ঘণ্টার কাঁটা x " " $5x$ ঘর

আবার, ঘণ্টার কাঁটা 60 মিনিটে অতিক্রম করে 5 ঘর

$\therefore$ ঘণ্টার কাঁটা 1 " " " $\frac{5}{60}$ ঘর

$\therefore$ ঘণ্টার কাঁটা y " " " $\frac{5y}{60}$ ঘর $= \frac{y}{12}$ ঘর

$\therefore$ x টা y মিনিটে ঘণ্টার কাঁটা অতিক্রম করে $\left(5x + \frac{y}{12}\right)$ ঘর

এখন, মিনিটের কাঁটা 1 মিনিটে অতিক্রম করে 1 ঘর

$\therefore$ মিনিটের কাঁটা y " " " y ঘর

এখন, (i) নং হতে পাই,

ঘণ্টার কাঁটার অবস্থান $-$ মিনিটের কাঁটার অবস্থান $= 15$ ঘর

বা, $\left(5x + \frac{y}{12}\right) - y = \pm 15$

[মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার ডানে ও বামে অবস্থান করতে পারে বিধায় '$\pm$' চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে]

বা, $5x + \frac{y}{12} - y = \pm 15$

বা, $5x - \frac{11y}{12} = \pm 15$

বা, $\frac{11y}{12} = 5x \pm 15$

$\therefore y = \frac{12}{11}(5x \pm 15)$ যেখানে $x = 0, 1, 2, 3, ..., 11$ বোঝাবে

এখানে 0 প্রকৃতপক্ষে 12 বোঝাবে।

এখন, x এর সম্ভাব্য মানগুলো বসিয়ে y এর মান নির্ণয় করি।

x	$y = \frac{12}{11}(5x + 15)$	$y = \frac{12}{11}(5x - 15)$
$x = 0$ (0 প্রকৃতপক্ষে 12 বোঝায়)	$y = \frac{180}{11} = 16\frac{4}{11}$ সময়: 12টা $16\frac{4}{11}$ মিনিট	$y = \frac{-180}{11} = -16\frac{4}{11}$ সময়: 12টা $- 16\frac{4}{11}$ মিনিট অর্থাৎ 11টা $43\frac{7}{11}$ মিনিট
$x = 1$	$y = \frac{240}{11} = 21\frac{9}{11}$ সময়: 1টা $21\frac{9}{11}$ মিনিট	$y = \frac{-120}{11} = -10\frac{10}{11}$ সময়: 1টা $- 10\frac{10}{11}$ মিনিট অর্থাৎ 12টা $49\frac{1}{11}$ মিনিট
$x = 2$	$y = \frac{300}{11} = 27\frac{3}{11}$ সময়: 2টা $27\frac{3}{11}$ মিনিট	$y = \frac{-60}{11} = -5\frac{5}{11}$ সময়: 2টা $- 5\frac{5}{11}$ মিনিট অর্থাৎ 1টা $54\frac{6}{11}$ মিনিট
$x = 3$	$y = \frac{360}{11} = 32\frac{8}{11}$ সময়: 3টা $32\frac{8}{11}$ মিনিট	$y = \frac{0}{11} = 0$ সময়: 3টা
$x = 4$	$y = \frac{420}{11} = 38\frac{2}{11}$ সময়: 4টা $38\frac{2}{11}$ মিনিট	$y = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}$ সময়: 4টা $5\frac{5}{11}$ মিনিট
$x = 5$	$y = \frac{480}{11} = 43\frac{7}{11}$ সময়: 5টা $43\frac{7}{11}$ মিনিট	$y = \frac{120}{11} = 10\frac{10}{11}$ সময়: 5টা $10\frac{10}{11}$ মিনিট
$x = 6$	$y = \frac{540}{11} = 49\frac{1}{11}$ সময়: 6টা $49\frac{1}{11}$ মিনিট	$y = \frac{180}{11} = 16\frac{4}{11}$ সময়: 6টা $16\frac{4}{11}$ মিনিট
$x = 7$	$y = \frac{600}{11} = 54\frac{6}{11}$ সময়: 7টা $54\frac{6}{11}$ মিনিট	$y = \frac{240}{11} = 21\frac{9}{11}$ সময়: 7টা $21\frac{9}{11}$ মিনিট
$x = 8$	$y = \frac{660}{11} = 60$ সময়: 8টা 60 মিনিট অর্থাৎ 9টা	$y = \frac{300}{11} = 27\frac{3}{11}$ সময়: 8টা $27\frac{3}{11}$ মিনিট
$x = 9$	$y = \frac{720}{11} = 65\frac{5}{11}$ সময়: 9টা + $65\frac{5}{11}$ মিনিট = 9টা + 60 মিনিট + $5\frac{5}{11}$ মিনিট = 9টা + 1 ঘণ্টা + $5\frac{5}{11}$ মিনিট = 10টা $5\frac{5}{11}$ মিনিট	$y = \frac{360}{11} = 32\frac{8}{11}$ সময়: 9টা $32\frac{8}{11}$ মিনিট
$x = 10$	$y = \frac{780}{11} = 70\frac{10}{11}$ সময়: 10টা + $70\frac{10}{11}$ মিনিট = 10টা + 60 মিনিট + $10\frac{10}{11}$ মিনিট = 10টা + 1 ঘণ্টা + $10\frac{10}{11}$ মিনিট = 11টা $10\frac{10}{11}$ মিনিট	$y = \frac{420}{11} = 38\frac{2}{11}$ সময়: 10টা $38\frac{2}{11}$ মিনিট
$x = 11$	$y = \frac{840}{11} = 76\frac{4}{11}$ সময়: 11টা + $76\frac{4}{11}$ মিনিট = 11টা + 60 মিনিট + $16\frac{4}{11}$ মিনিট = 11টা + 1 ঘণ্টা + $16\frac{4}{11}$ মিনিট = 12টা $16\frac{4}{11}$ মিনিট	$y = \frac{480}{11} = 43\frac{7}{11}$ সময়: 11টা $43\frac{7}{11}$ মিনিট

এখানে $x = 0$ এবং $x = 11$ এর জন্য একই মান পাওয়া যায়।

সুতরাং কাঁটা দুইটি 22 বার $90°$ কোণ উৎপন্ন করে।

অর্থাৎ ঘণ্টা ও মিনিটের কাঁটা 22 বার ঠিক লম্বালম্বি হয়ে বসে।

সময়গুলো হলো: 11টা $43\frac{7}{11}$ মিনিট; 12টা $16\frac{4}{11}$ মিনিট; 12টা $49\frac{1}{11}$ মিনিট; 1টা $21\frac{9}{11}$ মিনিট; 1টা $54\frac{6}{11}$ মিনিট; 2টা $27\frac{3}{11}$ মিনিট; 3টা; 3টা $32\frac{8}{11}$ মিনিট; 4টা $5\frac{5}{11}$ মিনিট; 4টা $38\frac{2}{11}$ মিনিট; 5টা $10\frac{10}{11}$ মিনিট; 5টা $43\frac{7}{11}$ মিনিট; 6টা $16\frac{4}{11}$ মিনিট; 6টা $49\frac{1}{11}$ মিনিট; 7টা $21\frac{9}{11}$ মিনিট; 7টা $54\frac{6}{11}$ মিনিট; 8টা $27\frac{3}{11}$ মিনিট; 9টা; 9টা $32\frac{8}{11}$ মিনিট; 10টা $5\frac{5}{11}$ মিনিট; 10টা $38\frac{2}{11}$ মিনিট; 11টা $10\frac{10}{11}$ মিনিট।

১৭ ঘড়ির ঘণ্টা ও মিনিটের কাঁটা পরস্পর স্থান পরিবর্তন করলে সময় শুদ্ধ নাও হতে পারে। যেমন 6টার সময় এই পরিবর্তন করলে ঘন্টার কাঁটা ঠিক 12 টায় আর মিনিটের কাঁটা ঠিক 6 টায় -- সময় না সাড়ে এগারোটা না সাড়ে বারোটা। 12 টার পরে এবং 1 টার পূর্বে এমন একটি সময় বের কর যখন এই পরিবর্তনের পরেও সময় গাণিতিকভাবে শুদ্ধ হবে। এমন সর্বমোট কতগুলো সময় রয়েছে যখন এই কাঁটা পরিবর্তনে শুদ্ধ সময় পাওয়া যাবে? [শ্রুতি রয়েছে রোগশয্যায়-থাকা আইনস্টাইন এরকম একটি প্রশ্ন জিজ্ঞাসার সঙ্গে সঙ্গে উত্তর করেছিলেন]

সমাধানঃ

মনে করি, x টা y মিনিটে ঘণ্টার কাঁটা ও মিনিটের কাঁটা স্থান পরিবর্তন করলে শুদ্ধ সময় পাওয়া যায়।

ঘণ্টার কাঁটা 1 ঘণ্টায় যায় 5 ঘর

$\therefore$ ঘণ্টার কাঁটা x " " $5x$ ঘর

আবার, ঘণ্টার কাঁটা 60 মিনিটে যায় 5 ঘর ; [$\because$ 1 ঘণ্টা = 60 মিনিট]

$\therefore$ ঘণ্টার কাঁটা 1 " " $\frac{5}{60}$ ঘর

$\therefore$ ঘণ্টার কাঁটা y " " $\frac{5y}{60}$ ঘর $= \frac{y}{12}$ ঘর

অর্থাৎ x টা y মিনিটে ঘণ্টার কাঁটার অবস্থান $\left(5x + \frac{y}{12}\right)$ ঘরে এবং মিনিটের কাঁটার অবস্থান y ঘরে। [$\because$ মিনিটের কাঁটা 1 মিনিটে 1 ঘর যায়]

এখন ধরি, কাঁটাদ্বয় স্থান পরিবর্তন করলে নতুন শুদ্ধ সময় হয় x' টা y' মিনিট।

$\therefore$ x' টা y' মিনিটে ঘণ্টার কাঁটার অবস্থান $\left(5x' + \frac{y'}{12}\right)$ ঘরে এবং মিনিটের কাঁটার অবস্থান y' ঘরে।

যেহেতু পূর্বের ঘণ্টার কাঁটার অবস্থান = পরবর্তীতে মিনিটের কাঁটার অবস্থান

$$\therefore 5x + \frac{y}{12} = y' \ \dots\dots\dots \text{(i)}$$

আবার, পূর্বের মিনিটের কাঁটার অবস্থান = পরবর্তীতে ঘণ্টার কাঁটার অবস্থান

$$\therefore y = 5x' + \frac{y'}{12}$$

বা, $\frac{y'}{12} = y - 5x'$

বা, $y' = 12y - 60x' \ \dots\dots\dots$ (ii)

(i) ও (ii) নং তুলনা করে পাই,

$$5x + \frac{y}{12} = 12y - 60x'$$

বা, $\frac{y}{12} - 12y = -60x' - 5x$

বা, $12y - \frac{y}{12} = 60x' + 5x$; [উভয়পক্ষকে (–1) দ্বারা গুণ করে]

বা, $\frac{144y - y}{12} = 60x' + 5x$

বা, $\frac{143y}{12} = 5(12x' + x)$

বা, $y = \frac{12}{143} .5(12x' + x)$

বা, $y = \frac{60}{143}(12x' + x) \ \dots\dots\dots$ (iii)

এক্ষেত্রে x ও x' এর প্রতিটির মান হতে পারে 12টি করে। যথা: 0, 1, 2, 3, … … 11; যেখানে, 0 প্রকৃতপক্ষে 12 টা বোঝাবে।

এখন $x = 0$ এর জন্য, x' এর সকল মান (0, 1, 2, 3, … 11) বসালে (iii) নং থেকে y এর 12টি ভিন্ন মান পাওয়া যায় অর্থাৎ 12টি ভিন্ন সময় পাওয়া যায়।

অনুরূপভাবে, $x = 1$ এর জন্য x' এর সকল মান (0, 1, 2, 3, … 11) বসালে আরও 12টি ভিন্ন সময় পাওয়া যাবে। অর্থাৎ x এর প্রতিটি মানের জন্য 12টি ভিন্ন সময় পাওয়া যায়।

যেহেতু x এর মান হতে পারে মোট 12টি (0, 1, 2, 3, … 11);

$\therefore$ সর্বমোট সময় পাওয়া যাবে (12×12)টি = 144টি

কিন্তু $x = 0$ এবং $x' = 0$ হলে (iii) নং হতে পাই,

$$y = \frac{60}{143}(12 \times 0 + 0) = 0$$

অর্থাৎ সময়টি হলো x টা y মিনিট বা 0 টা 0 মিনিট। অর্থাৎ 12টা [যেহেতু $x = 0$ প্রকৃতপক্ষে 12টা বোঝায়]

আবার, $x = 11$ এবং $x' = 11$ হলে,

$$y = \frac{60}{143}(12 \times 11 + 11)$$
$$= \frac{60}{143} \times 143$$
$$= 60 \text{ মিনিট}$$

অর্থাৎ সময়টি হলো x টা y মিনিট বা 11 টা 60 মিনিট অর্থাৎ 12 টা

সুতরাং $x = 0$, $x' = 0$ এবং $x = 11$, $x' = 11$ উভয় ক্ষেত্রে একই সময় পাওয়া যায়।

$\therefore$ শুদ্ধ সময়ের প্রকৃত সংখ্যা = 144 – 1 = 143

<u>12টার পরে ও 1 টার পূর্বে একটি শুদ্ধ সময় নির্ণয়:</u>

যেহেতু $x = 0$ প্রকৃতপক্ষে 12 টা বোঝায়, অতএব এক্ষেত্রে $x = 0$ হবে।

এখন $x = 0$ ও $x' = 1$ বসালে (iii) নং হতে পাই,

$$y = \frac{60}{143}(12 \times 1 + 0) \text{ মিনিট}$$
$$= \frac{60}{143} \times 12 \text{ মিনিট}$$
$$= \frac{720}{143} \text{ মিনিট}$$
$$= 5\frac{5}{143} \text{ মিনিট}$$
$$= 5 \text{ মিনিট} + \frac{5}{143} \text{ মিনিট}$$
$$= 5 \text{ মিনিট} + \left(\frac{5}{143} \times 60\right) \text{ সেকেন্ড}$$
$$= 5 \text{ মিনিট } 2\frac{14}{143} \text{ সেকেন্ড}$$

$\therefore$ শুদ্ধ সময়টি হলো 12টা 5 মিনিট $2\frac{14}{143}$ সেকেন্ড

অর্থাৎ 12টার পরে ও একটার পূর্বে একটি শুদ্ধ সময় হলো 12টা 5 মিনিট $2\frac{14}{143}$ সেকেন্ড

(Ans.)

✉ **লক্ষণীয়:** 12টার <u>পরে</u> এবং 1টার <u>পূর্বে</u> প্রকৃতপক্ষে মোট (12 – 1) = 11টি মান পাওয়া যাবে।