চতুর্থ অধ্যায়

সূচক ও লগারিদম

অনুশীলনী - ৪.১

সূচকের সূত্রসমূহ

1. $a^m \times a^n = a^{m+n}$
2. $a^m \div a^n = a^{m-n}$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$
4. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$
5. $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$
6. $a^\circ = 1$

মনে রাখবে:

- $a > 0, a \neq 1$ শর্তে $a^x = a^y$ হলে, $x = y$. উদাহরণ: $5^x = 5^4$ হলে $x = 4$
- $a > 0, b > 0, x \neq 0$ শর্তে $a^x = b^x$ হলে, $a = b$. উদাহরণ: $3^3 = x^3$ হলে $x = 3$

অনুশীলনীর সমাধান

সরল কর (১-৮):

১ $\dfrac{7^3 \times 7^{-3}}{3 \times 3^{-4}}$

সমাধান: $\dfrac{7^3 \times 7^{-3}}{3 \times 3^{-4}} = \dfrac{7^{3-3}}{3^{1-4}} = \dfrac{7^0}{3^{-3}} = 1 \times \dfrac{27}{1} = 27$ **(Ans.)**

২ $\dfrac{\sqrt[3]{7^2} . \sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}}$

সমাধান: $\dfrac{\sqrt[3]{7^2} . \sqrt[3]{7}}{\sqrt{7}} = \dfrac{7^{\frac{2}{3}} . 7^{\frac{1}{3}}}{7^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{7^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}}{7^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{7^{\frac{3}{3}}}{7^{\frac{1}{2}}}$

$= 7^{1-\frac{1}{2}} = 7^{\frac{2-1}{2}} = 7^{\frac{1}{2}} = \sqrt{7}$ **(Ans.)**

৩ $(2^{-1} + 5^{-1})^{-1}$

সমাধান: $(2^{-1} + 5^{-1})^{-1} = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5}\right)^{-1} = \left(\dfrac{5+2}{10}\right)^{-1} = \left(\dfrac{7}{10}\right)^{-1}$

$= 1 \times \dfrac{10}{7} = \dfrac{10}{7}$ **(Ans.)**

৪ $(2a^{-1} + 3b^{-1})^{-1}$

সমাধান: $(2a^{-1} + 3b^{-1})^{-1}$

$= \left(2 . \dfrac{1}{a} + 3 . \dfrac{1}{b}\right)^{-1}$

$= \left(\dfrac{2b + 3a}{ab}\right)^{-1} = \dfrac{1}{\frac{2b+3a}{ab}} = 1 \times \dfrac{ab}{3a + 2b}$

$= \dfrac{ab}{3a + 2b}$ **(Ans.)**

৫ $\left(\dfrac{a^2 b^{-1}}{a^{-2} b}\right)^2$

সমাধান: $\left(\dfrac{a^2 b^{-1}}{a^{-2} b}\right)^2 = \{a^{2-(-2)} . b^{-1-1}\}^2 = (a^{2+2} . b^{-2})^2$

$= (a^4 . b^{-2})^2 = a^8 . b^{-4} = \dfrac{a^8}{b^4}$ **(Ans.)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

$\left(\dfrac{a^2 b^{-1}}{a^{-2} b}\right)^2 = \dfrac{a^4 b^{-2}}{a^{-4} b^2} = a^{4-(-4)} . b^{-2-2} = a^{4+4} . b^{-4} = a^8 . b^{-4}$

$= \dfrac{a^8}{b^4}$ **(Ans.)**

৬ $\sqrt{x^{-1} y} . \sqrt{y^{-1} z} . \sqrt{z^{-1} x}, (x > 0, y > 0, z > 0)$

সমাধান: $\sqrt{x^{-1} y} . \sqrt{y^{-1} z} . \sqrt{z^{-1} x}, (x > 0, y > 0, z > 0)$

$= \sqrt{\dfrac{1}{x} . y} . \sqrt{\dfrac{1}{y} . z} . \sqrt{\dfrac{1}{z} . x}$

$= \sqrt{\dfrac{y}{x} . \dfrac{z}{y} . \dfrac{x}{z}} = \sqrt{1} = 1$ **(Ans.)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

$\sqrt{x^{-1} y} . \sqrt{y^{-1} z} . \sqrt{z^{-1} x}, (x > 0, y > 0, z > 0)$

$= \left(x^{-1} y\right)^{\frac{1}{2}} . \left(y^{-1} z\right)^{\frac{1}{2}} . \left(z^{-1} x\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \left(x^{-1} y \times y^{-1} z \times z^{-1} x\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \left(x^{-1+1} . y^{-1+1} . z^{-1+1}\right)^{\frac{1}{2}}$

$= \left(x^0 \times y^0 \times z^0\right)^{\frac{1}{2}}$

$= (1 \times 1 \times 1)^{\frac{1}{2}} = 1$ **(Ans.)**

৭ $\dfrac{\mathbf{2^{n+4} - 4.2^{n+1}}}{\mathbf{2^{n+2} \div 2}}$

সমাধান: $\dfrac{2^{n+4} - 4.2^{n+1}}{2^{n+2} \div 2}$

$= \dfrac{2^n.2^4 - 4.2^n.2^1}{2^{n+2-1}}$

$= \dfrac{2^n.16 - 8.2^n}{2^{n+1}} = \dfrac{2^n(16-8)}{2^n.2^1} = \dfrac{2^n.8}{2^n.2} = \dfrac{8}{2} = 4$ **(Ans.)**

৮ $\dfrac{\mathbf{3^{m+1}}}{\mathbf{(3^m)^{m-1}}} \div \dfrac{\mathbf{9^{m+1}}}{\mathbf{(3^{m-1})^{m+1}}}$

সমাধান: $\dfrac{3^{m+1}}{(3^m)^{m-1}} \div \dfrac{9^{m+1}}{(3^{m-1})^{m+1}}$

$= \dfrac{3^{m+1}}{3^{m^2-m}} \div \dfrac{(3^2)^{m+1}}{3^{(m-1)(m+1)}}$

$= \dfrac{3^{m+1}}{3^{m^2-m}} \div \dfrac{3^{2m+2}}{3^{m^2-1}}$

$= 3^{m+1-m^2+m} \div 3^{2m+2-m^2+1}$

$= 3^{2m-m^2+1} \div 3^{2m-m^2+3}$

$= 3^{(2m-m^2+1)-(2m-m^2+3)}$

$= 3^{2m-m^2+1-2m+m^2-3}$

$= 3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$ **(Ans.)**

◆◆ অনুশীলনীর ৬, ৭ ও ৮নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

যদি $P = x^a$, $Q = x^b$ এবং $R = x^c$ হয় তবে, *ক. $P^{bc}.Q^{-ca}$ এর মান নির্ণয় কর।* *খ. $\left(\frac{P}{Q}\right)^{a+b} \times \left(\frac{Q}{R}\right)^{b+c} \div 2(RP)^{a-c}$ এর মান নির্ণয় কর।* *গ. $\left(\frac{P}{Q}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{Q}{R}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{R}{P}\right)^{c^2+ca+a^2}$ এর মান নির্ণয় কর।*	নিজে নিজে চেষ্টা কর। উত্তর: (ক) 1; (খ) $\frac{1}{2}$; (গ) 1

প্রমাণ কর (৯-১৫):

৯ $\dfrac{\mathbf{4^n - 1}}{\mathbf{2^n - 1}} \mathbf{= 2^n + 1}$

সমাধান: বামপক্ষ $= \dfrac{4^n - 1}{2^n - 1}$

$= \dfrac{(2^2)^n - 1}{2^n - 1}$

$= \dfrac{(2^n)^2 - 1}{2^n - 1}$

$= \dfrac{(2^n + 1)(2^n - 1)}{(2^n - 1)}$

$= (2^n + 1) =$ ডানপক্ষ

$\therefore \dfrac{4^n - 1}{2^n - 1} = 2^n + 1$ **(প্রমাণিত)**

১০ $\dfrac{\mathbf{2^{2p+1}.3^{2p+q}.5^{p+q}.6^p}}{\mathbf{3^{p-2}.6^{2p+2}.10^p.15^q}} = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

সমাধান:

বামপক্ষ $= \dfrac{2^{2p+1}.3^{2p+q}.5^{p+q}.6^p}{3^{p-2}.6^{2p+2}.10^p.15^q}$

$= \dfrac{2^{2p+1}.3^{2p+q}.5^{p+q}.(3\times 2)^p}{3^{p-2}.(3\times 2)^{2p+2}.(5\times 2)^p.(3\times 5)^q}$

$= \dfrac{2^{2p+1}.3^{2p+q}.5^{p+q}.3^p.2^p}{3^{p-2}.3^{2p+2}.2^{2p+2}.5^p.2^p.3^q.5^q}$

$= 2^{2p+1+p-(2p+2)-p}.3^{2p+q+p-(p-2)-(2p+2)-q}.5^{p+q-p-q}$

$= 2^{2p+1+p-2p-2-p}.3^{2p+q+p-p+2-2p-2-q}.5^0$

$= 2^{-1}.3^0.5^0$

$= \dfrac{1}{2} \times 1 \times 1$

$= \dfrac{1}{2} =$ ডানপক্ষ

$\therefore \dfrac{2^{2p+1}.3^{2p+q}.5^{p+q}.6^p}{3^{p-2}.6^{2p+2}.10^p.15^q} = \dfrac{1}{2}$ **(প্রমাণিত)**

১১ $\mathbf{\left(\dfrac{a^\ell}{a^m}\right)^n . \left(\dfrac{a^m}{a^n}\right)^\ell . \left(\dfrac{a^n}{a^\ell}\right)^m = 1}$

সমাধান: বামপক্ষ $= \left(\dfrac{a^\ell}{a^m}\right)^n . \left(\dfrac{a^m}{a^n}\right)^\ell . \left(\dfrac{a^n}{a^\ell}\right)^m$

$= (a^{\ell-m})^n . (a^{m-n})^\ell . (a^{n-\ell})^m$

$= a^{\ell n - mn} . a^{\ell m - \ell n} . a^{mn - \ell m}$

$= a^{\ell n - mn + \ell m - \ell n + mn - \ell m}$

$= a^0$

$= 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \left(\dfrac{a^\ell}{a^m}\right)^n . \left(\dfrac{a^m}{a^n}\right)^\ell . \left(\dfrac{a^n}{a^\ell}\right)^m = 1$ **(প্রমাণিত)**

১২ $\mathbf{\dfrac{a^{p+q}}{a^{2r}} \times \dfrac{a^{q+r}}{a^{2p}} \times \dfrac{a^{r+p}}{a^{2q}} = 1}$

সমাধান: বামপক্ষ $= \dfrac{a^{p+q}}{a^{2r}} \times \dfrac{a^{q+r}}{a^{2p}} \times \dfrac{a^{r+p}}{a^{2q}}$

$= a^{p+q-2r} . a^{q+r-2p} . a^{r+p-2q}$

$= a^{p+q-2r+q+r-2p+r+p-2q}$

$= a^0 = 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \dfrac{a^{p+q}}{a^{2r}} \times \dfrac{a^{q+r}}{a^{2p}} \times \dfrac{a^{r+p}}{a^{2q}} = 1$ **(প্রমাণিত)**

১৩ $\mathbf{\left(\dfrac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}} . \left(\dfrac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}} . \left(\dfrac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}} = 1}$

সমাধান: বামপক্ষ $= \left(\dfrac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}} . \left(\dfrac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}} . \left(\dfrac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}}$

$= (x^{a-b})^{\frac{1}{ab}} . (x^{b-c})^{\frac{1}{bc}} . (x^{c-a})^{\frac{1}{ca}}$

$= x^{\frac{a-b}{ab}} . x^{\frac{b-c}{bc}} . x^{\frac{c-a}{ca}}$

$= x^{\frac{a-b}{ab} + \frac{b-c}{bc} + \frac{c-a}{ca}}$

$= x^{\frac{c(a-b) + a(b-c) + b(c-a)}{abc}}$

$= x^{\frac{ac - bc + ab - ca + bc - ab}{abc}}$

$= x^{\frac{0}{abc}} = x^0 = 1 =$ ডানপক্ষ

$\therefore \left(\dfrac{x^a}{x^b}\right)^{\frac{1}{ab}} . \left(\dfrac{x^b}{x^c}\right)^{\frac{1}{bc}} . \left(\dfrac{x^c}{x^a}\right)^{\frac{1}{ca}} = 1$ **(প্রমাণিত)**

১৪ $\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b}.\left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c}.\left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a}=1$

সমাধান: বামপক্ষ $=\left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b}.\left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c}.\left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a}$

$=(x^{a-b})^{a+b}.(x^{b-c})^{b+c}.(x^{c-a})^{c+a}$

$=x^{(a-b)(a+b)}.x^{(b-c)(b+c)}.x^{(c-a)(c+a)}$

$=x^{a^2-b^2}.x^{b^2-c^2}.x^{c^2-a^2}$

$=x^{a^2-b^2+b^2-c^2+c^2-a^2}$

$=x^0=1=$ ডানপক্ষ

$\therefore \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b}.\left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c}.\left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c+a}=1$ **(প্রমাণিত)**

১৫ $\left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q-r}\times\left(\frac{x^q}{x^r}\right)^{q+r-p}\times\left(\frac{x^r}{x^p}\right)^{r+p-q}=1$

সমাধান:

বামপক্ষ $=\left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q-r}\times\left(\frac{x^q}{x^r}\right)^{q+r-p}\times\left(\frac{x^r}{x^p}\right)^{r+p-q}$

$=x^{(p-q)(p+q-r)}.x^{(q-r)(q+r-p)}.x^{(r-p)(r+p-q)}$

$=x^{p^2+pq-pr-pq-q^2+rq}.x^{q^2+qr-pq-rq-r^2+pr}.x^{r^2+pr-qr-pr-p^2+pq}$

$=x^{p^2-q^2-pr+rq}.x^{q^2-r^2-pq+pr}.x^{r^2-p^2-qr+pq}$

$=x^{p^2-q^2-pr+rq+q^2-r^2-pq+pr+r^2-p^2-qr+pq}$

$=x^0=1=$ ডানপক্ষ

$\therefore \left(\frac{x^p}{x^q}\right)^{p+q-r}\times\left(\frac{x^q}{x^r}\right)^{q+r-p}\times\left(\frac{x^r}{x^p}\right)^{r+p-q}=1$ **(প্রমাণিত)**

◆◆ অনুশীলনীর ৮, ১৩ ও ১৫নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

$p=x^a, q=x^b, r=x^c$ ক. $\left(\frac{p}{q}\right)^c\times\left(\frac{q}{r}\right)^a\times\left(\frac{r}{p}\right)^b$ এর মান নির্ণয় কর। খ. $2abc\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1}{ab}}\times\left(\frac{q}{r}\right)^{\frac{1}{bc}}\times\left(\frac{r}{p}\right)^{\frac{1}{ca}}\times\sqrt{a^{-3}b^{-2}c}\times\sqrt{c^{-3}a}$ এর সরলীকরণ কর। গ. দেখাও যে, $\frac{\{(a-b)\log(pq)+(b-c)\log(qr)+(c-a)\log(rp)\}}{\sqrt{a^{-1}b}\times\sqrt{b^{-1}c}\times\sqrt{c^{-1}a}}=0$	নিজে নিজে চেষ্টা কর। **উত্তর:** (ক) 1; (খ) 2

১৬ যদি $a^x=b, b^y=c$ এবং $c^z=a$ হয়, তবে দেখাও যে, $xyz=1$.

সমাধান: $c^z=a$

বা, $(b^y)^z=a$ $[\because b^y=c]$

বা, $b^{yz}=a$

বা, $(a^x)^{yz}=a$ $[\because a^x=b]$

বা, $a^{xyz}=a^1$

$\therefore xyz=1$ **(দেখানো হলো)**

সমাধান কর (১৭-২০):

১৭ $4^x=8$

সমাধান: $4^x=8$

বা, $(2^2)^x=2^3$

বা, $2^{2x}=2^3$

বা, $2x=3$

$\therefore x=\frac{3}{2}$ **(Ans.)**

১৮ $2^{2x+1}=128$

সমাধান: $2^{2x+1}=128$

বা, $2^{2x+1}=2^7$

বা, $2x+1=7$

বা, $2x=7-1$

বা, $2x=6$

বা, $x=\frac{6}{2}$

$\therefore x=3$ **(Ans.)**

১৯ $(\sqrt{3})^{x+1}=(\sqrt[3]{3})^{2x-1}$

সমাধান: $(\sqrt{3})^{x+1}=(\sqrt[3]{3})^{2x-1}$

বা, $\left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{x+1}=\left(3^{\frac{1}{3}}\right)^{2x-1}$

বা, $3^{\frac{x+1}{2}}=3^{\frac{2x-1}{3}}$

বা, $\frac{x+1}{2}=\frac{2x-1}{3}$

বা, $4x-2=3x+3$

বা, $4x-3x=3+2$

$\therefore x=5$ **(Ans.)**

২০ $2^x+2^{1-x}=3$

সমাধান: $2^x+2^{1-x}=3$

বা, $2^x+2^1.2^{-x}=3$

বা, $2^x+\frac{2}{2^x}=3$

বা, $\frac{(2^x)^2+2}{2^x}=3$

বা, $(2^x)^2+2=3.2^x$

বা, $(2^x)^2-3.2^x+2=0$

বা, $(2^x)^2-2.2^x-2^x+2=0$

বা, $2^x(2^x-2)-1(2^x-2)=0$

বা, $(2^x-2)(2^x-1)=0$

$\therefore 2^x-2=0$ | অথবা, $2^x-1=0$

বা, $2^x=2^1$ | বা, $2^x=1=2^0$

$\therefore x=1$ | $\therefore x=0$

$\therefore x=1, 0$ **(Ans.)**

◆◆ অনুশীলনীর ৮ ও ২০নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

$A = 4^{2P+1}$, $B = \frac{5^{m+1}}{(5^m)^{m-1}}$, $C = \frac{25^{m+1}}{(5^{m-1})^{m+1}}$, $D = 3^x + 3^{1-x}$. [ব.বো-'১৬] ক. $A = 128$ হলে P এর মান নির্ণয় কর। খ. প্রমাণ কর যে, $B \div C = \frac{1}{25}$. গ. $D = 4$ হলে x এর মান নির্ণয় কর।	নিজে নিজে চেষ্টা কর। (ক) $\frac{5}{4}$; (গ) 0, 1

২১ $P = x^a$, $Q = x^b$ এবং $R = x^c$

ক. $P^{bc}.Q^{-ca}$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. $\left(\frac{P}{Q}\right)^{a+b} \times \left(\frac{Q}{R}\right)^{b+c} \div 2(RP)^{a-c}$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. দেখাও যে, $\left(\frac{P}{Q}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{Q}{R}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{R}{P}\right)^{c^2+ca+a^2} = 1$

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, $P = x^a$, $Q = x^b$ এবং $R = x^c$

$$\therefore P^{bc}.Q^{-ca} = (x^a)^{bc}.(x^b)^{-ca} = x^{abc}.x^{-abc} = x^{abc-abc} = x^0 = 1 \quad \textbf{(Ans.)}$$

খ
$$\left(\frac{P}{Q}\right)^{a+b} \times \left(\frac{Q}{R}\right)^{b+c} \div 2(RP)^{a-c}$$
$$= \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a+b} \times \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b+c} \div 2(x^c.x^a)^{a-c}$$
$$= (x^{a-b})^{a+b} \times (x^{b-c})^{b+c} \div 2(x^{c+a})^{(a-c)}$$
$$= x^{(a-b)(a+b)} \times x^{(b-c)(b+c)} \div 2x^{(a+c)(a-c)}$$
$$= x^{a^2-b^2} \times x^{b^2-c^2} \div 2x^{a^2-c^2}$$
$$= x^{a^2-b^2+b^2-c^2} \div 2x^{a^2-c^2}$$
$$= x^{a^2-c^2} \times \frac{1}{2.x^{a^2-c^2}}$$
$$= \frac{1}{2} \times x^{a^2-c^2-a^2+c^2}$$
$$= \frac{1}{2} \times x^0$$
$$= \frac{1}{2} \quad \textbf{(Ans.)}$$

গ বামপক্ষ $= \left(\frac{P}{Q}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{Q}{R}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{R}{P}\right)^{c^2+ca+a^2}$
$$= \left(\frac{x^a}{x^b}\right)^{a^2+ab+b^2} \times \left(\frac{x^b}{x^c}\right)^{b^2+bc+c^2} \times \left(\frac{x^c}{x^a}\right)^{c^2+ca+a^2}$$
$$= (x^{a-b})^{a^2+ab+b^2} \times (x^{b-c})^{b^2+bc+c^2} \times (x^{c-a})^{c^2+ca+a^2}$$
$$= x^{(a-b)(a^2+ab+b^2)} \times x^{(b-c)(b^2+bc+c^2)} \times x^{(c-a)(c^2+ca+a^2)}$$
$$= x^{a^3-b^3} \times x^{b^3-c^3} \times x^{c^3-a^3}$$
$$= x^{a^3-b^3+b^3-c^3+c^3-a^3}$$
$$= x^0$$
$= 1 =$ ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

২২ $X = (2a^{-1} + 3b^{-1})^{-1}$, $Y = \sqrt[pq]{\frac{x^p}{x^q}} \times \sqrt[qr]{\frac{x^q}{x^r}} \times \sqrt[rp]{\frac{x^r}{x^p}}$

এবং $Z = \frac{5^{m+1}}{(5^m)^{m-1}} \div \frac{25^{m+1}}{(5^{m-1})^{m+1}}$, যেখানে $x, p, q, r > 0$

ক. X এর মান নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, $Y + \sqrt[4]{81} = 4$

গ. দেখাও যে, $Y \div Z = 25$

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, $X = (2a^{-1} + 3b^{-1})^{-1}$
$$= \left(2.\frac{1}{a} + 3.\frac{1}{b}\right)^{-1}$$
$$= \left(\frac{2}{a} + \frac{3}{b}\right)^{-1}$$
$$= \left(\frac{2b+3a}{ab}\right)^{-1}$$
$$= \frac{ab}{3a+2b} \quad \textbf{(Ans.)}$$

খ এখানে, $Y = \sqrt[pq]{\frac{x^p}{x^q}} \times \sqrt[qr]{\frac{x^q}{x^r}} \times \sqrt[rp]{\frac{x^r}{x^p}}$

$$\therefore Y + \sqrt[4]{81} = \sqrt[pq]{\frac{x^p}{x^q}} \times \sqrt[qr]{\frac{x^q}{x^r}} \times \sqrt[rp]{\frac{x^r}{x^p}} + \sqrt[4]{81}$$
$$= (x^{p-q})^{\frac{1}{pq}} \times (x^{q-r})^{\frac{1}{qr}} \times (x^{r-p})^{\frac{1}{rp}} + \sqrt[4]{3^4}$$
$$= x^{\frac{p-q}{pq}} \times x^{\frac{q-r}{qr}} \times x^{\frac{r-P}{pr}} + 3$$
$$= x^{\frac{p-q}{pq} + \frac{q-r}{qr} + \frac{r-P}{pr}} + 3$$
$$= x^{\frac{pr-qr+pq-pr+qr-pq}{pqr}} + 3$$
$$= x^{\frac{0}{pqr}} + 3$$
$$= x^0 + 3$$
$$= 1 + 3$$
$$= 4$$

$\therefore Y + \sqrt[4]{81} = 4$ **(দেখানো হলো)**

গ বামপক্ষ $= Y \div Z$
$$= \sqrt[pq]{\frac{x^p}{x^q}} \times \sqrt[qr]{\frac{x^q}{x^r}} \times \sqrt[rp]{\frac{x^r}{x^p}} \div \left(\frac{5^{m+1}}{(5^m)^{m-1}} \div \frac{25^{m+1}}{(5^{m-1})^{m+1}}\right)$$
$= 1 \div \left(\frac{5^{m+1}}{5^{m^2-m}} \div \frac{5^{2m+2}}{5^{m^2-1}}\right)$; ['খ' নং হতে পাই, $Y = 1$]
$$= 1 \div (5^{m+1-m^2+m} \div 5^{2m+2-m^2+1})$$
$$= 1 \div (5^{2m-m^2+1} \div 5^{2m-m^2+3})$$
$$= 1 \div 5^{2m-m^2+1-2m+m^2-3}$$
$$= 1 \div 5^{-2}$$
$$= 1 \div \frac{1}{5^2}$$
$$= 1 \times 5^2$$
$= 25 =$ ডানপক্ষ

$\therefore Y \div Z = 25$ **(প্রমাণিত)**

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-৭৬

খালি ঘর পূরণ কর :

একই সংখ্যা বা রাশির ক্রমিক গুণ	সূচকীয় রাশি	ভিত্তি	ঘাত বা সূচক
$2 \times 2 \times 2$	2^3	2	3
$3 \times 3 \times 3 \times 3$		3	
$a \times a \times a$	a^3		
$b \times b \times b \times b \times b$			5

সমাধান:

একই সংখ্যা বা রাশির ক্রমিক গুণ	সূচকীয় রাশি	ভিত্তি	ঘাত বা সূচক
$2 \times 2 \times 2$	2^3	2	3
$3 \times 3 \times 3 \times 3$	3^4	3	4
$a \times a \times a$	a^3	a	3
$b \times b \times b \times b \times b$	b^5	b	5

এখানে, a^3 এ 3 হল ঘাত বা সূচক, a হল ভিত্তি আর $a \times a \times a = a^3$.

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-৭৮

খালিঘর পূরণ কর:

(ক) $3{\times}3{\times}3{\times}3 = 3^{\square}$ **(খ)** $5^{\square} \times 5^3 = 5^5$

(গ) $a^2 \times a^{\square} = a^{-3}$ **(ঙ)** $(-5)^0 = \square$ **(ঘ)** $\dfrac{4}{4^{\square}} = 1$

সমাধান:

(ক) $3{\times}3{\times}3{\times}3 = 3^{1+1+1+1} = 3^4 = 3^{\boxed{4}}$

(খ) ধরি, $5^x \times 5^3 = 5^5$

বা, $5^{x+3} = 5^5$

বা, $x + 3 = 5$

বা, $x = 5 - 3 = 2$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $5^{\boxed{2}} \times 5^3 = 5^5$

(গ) খালি ঘরে সংখ্যাটি x হলে, $a^2 \times a^x = a^{-3}$

বা, $a^{x+2} = a^{-3}$

বা, $x + 2 = -3$

বা, $x = -3 - 2$

বা, $x = -5$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $a^2 \times a^{\boxed{-5}} = a^{-3}$

(ঘ) ধরি, $(-5)^0 = x$ বা, $x = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $(-5)^0 = \boxed{1}$

(ঙ) ধরি, $\dfrac{4}{4^x} = 1$

বা, $4^{1-x} = 1$

বা, $4^{1-x} = 4^0$

বা, $1 - x = 0$

বা, $x = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\dfrac{4}{4^{\boxed{1}}} = 1$

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-৮০

সরল কর: **(ক)** $\dfrac{2^4.2^2}{32}$ **(খ)** $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{5}{2}} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\frac{5}{2}}$ **(গ)** $8^{\frac{3}{4}} \div 8^{\frac{1}{2}}$

সমাধান:

(ক) $\dfrac{2^4{\cdot}2^2}{32} = \dfrac{2^{4+2}}{2^5} = \dfrac{2^6}{2^5} = 2^{6-5} = 2^1 = 2$ **(Ans.)**

(খ) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{\frac{5}{2}} \times \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-\frac{5}{2}}$

$= \dfrac{2^{\frac{5}{2}}}{3^{\frac{5}{2}}} \times \dfrac{2^{-\frac{5}{2}}}{3^{-\frac{5}{2}}} = \dfrac{2^{\frac{5}{2}}.2^{-\frac{5}{2}}}{3^{\frac{5}{2}}.3^{-\frac{5}{2}}} = \dfrac{2^{\frac{5}{2}-\frac{5}{2}}}{3^{\frac{5}{2}-\frac{5}{2}}} = \dfrac{2^0}{3^0} = 1$ **(Ans.)**

(গ) $8^{\frac{3}{4}} \div 8^{\frac{1}{2}} = 8^{\frac{3}{4}-\frac{1}{2}} = 8^{\frac{3-2}{4}} = 8^{\frac{1}{4}} = (2^3)^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{3}{4}}$ **(Ans.)**