অনুশীলনী - ১৩.২

❖ **গুণোত্তর ধারার সূত্রাবলি**

গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r হলে

☑ গুণোত্তর ধারাটি: $\boldsymbol{a + ar + ar^2 + \dots \dots}$

☑ গুণোত্তর ধারার n তম পদ (সাধারণ পদ) $= \boldsymbol{ar^{n-1}}$

☑ n সংখ্যক পদের সমষ্টি, $\boldsymbol{S_n = a.\dfrac{r^n - 1}{r - 1}}$; যখন $r > 1$ এবং $\boldsymbol{S_n = a.\dfrac{1 - r^n}{1 - r}}$; যখন $r < 1$

☑ $1 + 2 + 3 + \dots \dots + n = \dfrac{\boldsymbol{n(n+1)}}{\boldsymbol{2}}$ [প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি]

☑ $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots \dots + n^2 = \dfrac{\boldsymbol{n(n+1)(2n+1)}}{\boldsymbol{6}}$ [প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি]

☑ $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots \dots + n^3 = \left\{\dfrac{\boldsymbol{n(n+1)}}{\boldsymbol{2}}\right\}^2$ [প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি]

অনুশীলনীর সমাধান

১ ***a, b, c*** **ও** ***d*** **সমান্তর ধারার চারটি ক্রমিক পদ হলে নিচের কোনটি সঠিক?**

(ক) $b = \dfrac{c+d}{2}$ (খ) $a = \dfrac{b+c}{2}$ (গ) $c = \dfrac{b+d}{2}$ (ঘ) $d = \dfrac{a+c}{2}$

উত্তর: (গ)

ব্যাখ্যা: যেকোনো সমান্তর ধারার ক্ষেত্রে যে একটি পদের মান হয়, পদটির আগের ও পরের পদের গড়ের সমান। অর্থাৎ পদটির আগের ও পরের পদ যোগ করে দুই দিয়ে ভাগ করলে পদটি পাওয়া যাবে। তাই $c = \dfrac{b+d}{2}$ সঠিক।

২ **$n \in N$ এর জন্য-**

i. $\sum n = \dfrac{n^2 + n}{2}$ ii. $\sum n^2 = \dfrac{1}{6}n(n+1)(n+2)$ iii. $\sum n^3 = \dfrac{n^2(n^2 + 2n + 1)}{4}$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: (খ)

ব্যাখ্যা: (i) নং সঠিক কারণ, $n \in N$ এর জন্য $\sum n = 1 + 2 + 3 + \dots \dots + n$ যা n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি নির্দেশ করে। [$N = 1, 2, 3, \dots \dots n$]

আমরা জানি, n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি $= \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n^2 + n}{2}$

(ii) নং সঠিক নয়। কারণ, $n \in N$ এর জন্য $\sum n^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$

সূত্রানুসারে, n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি $= \dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(iii) নং সঠিক। কারণ, $n \in N$ এর জন্য $\sum n^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3$

সূত্রানুসারে, n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি $= \left\{\dfrac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

$= \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$

$= \dfrac{n^2(n^2 + 2n + 1)}{4}$

■ **নিচের ধারাটির ভিত্তিতে ৩ ও ৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:**

$\log 2 + \log 4 + \log 8 + \dots \dots \dots$

৩ **ধারাটির সাধারণ অন্তর কোনটি?**

(ক) 2 (খ) 4 (গ) log 2 (ঘ) 2 log 2

উত্তর: (গ)

ব্যাখ্যা: সাধারণ অন্তর $= \log 4 - \log 2 = \log 2^2 - \log 2 = 2 \log 2 - \log 2 = \log 2$

৪ **ধারাটির সপ্তম পদ কোনটি?**

(ক) log 32 (খ) log 64 (গ) log 128 (ঘ) log 256

উত্তর: (গ)

ব্যাখ্যা: সমান্তর ধারাটির প্রথম পদ $a = \log 2$ এবং সাধারণ অন্তর $d = \log 2$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার n তম পদ $= a + (n-1)d$

$\therefore$ ধারাটির 7ম পদ $= a + (7-1)d$

$= \log 2 + (7-1) \log 2$

$= \log 2 + 6 \log 2 = 7 \log 2 = \log 2^7 = \log 128$

৫ 64 + 32 + 16 + 8 + ... ধারাটির অষ্টম পদ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধারাটির প্রথম পদ $a = 64$

সাধারণ অনুপাত $r = \frac{32}{64} = \frac{1}{2}$

ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা।

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n তম পদ $= ar^{n-1}$

$\therefore$ ধারাটির অষ্টম পদ $= ar^{8-1} = 64.\left(\frac{1}{2}\right)^7 = 64 \times \frac{1}{128} = \frac{1}{2}$

$\therefore$ ধারাটির অষ্টম পদ $\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

৬ 3 + 9 + 27 + ... ধারাটির প্রথম চৌদ্দটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান: ধারাটির প্রথম পদ $a = 3$

সাধারণ অনুপাত $r = \frac{9}{3} = 3 > 1$

ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা।

এখানে পদ সংখ্যা $n = 14$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n সংখ্যক পদের সমষ্টি $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$; যখন $r > 1$

$\therefore$ ১ম চৌদ্দটি পদের সমষ্টি $S_{14} = \frac{3(3^{14} - 1)}{3 - 1}$

$= \frac{3}{2}(3^{14} - 1)$

ধারাটির প্রথম চৌদ্দটি পদের সমষ্টি $\frac{3}{2}(3^{14} - 1)$ **(Ans.)**

৭ 128 + 64 + 32 + ... ধারাটির কোন পদ $\frac{1}{2}$?

সমাধান: ধারাটির প্রথম পদ $a = 128$

সাধারণ অনুপাত $r = \frac{64}{128} = \frac{1}{2}$

ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা।

মনে করি, ধারাটির n তম পদ $\frac{1}{2}$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n তম পদ $= ar^{n-1}$

$\therefore ar^{n-1} = \frac{1}{2}$

বা, $128.\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2}$

বা, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{256}$

বা, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^8$

বা, $n - 1 = 8$

বা, $n = 8 + 1$

$\therefore n = 9$

$\therefore$ ধারাটির নবম পদ $\frac{1}{2}$ **(Ans.)**

৮ একটি গুণোত্তর ধারার পঞ্চম পদ $\frac{2\sqrt{3}}{9}$ এবং দশম পদ $\frac{8\sqrt{2}}{81}$ হলে ধারাটির তৃতীয় পদ কত?

সমাধান: মনে করি, ধারাটির প্রথম পদ $= a$

সাধারণ অনুপাত $= r$

$\therefore$ পঞ্চম পদ $ar^{5-1} = \frac{2\sqrt{3}}{9}$

বা, $ar^4 = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ ... ... (i)

দশম পদ $ar^{10-1} = \frac{8\sqrt{2}}{81}$

বা, $ar^9 = \frac{8\sqrt{2}}{81}$ ... ... (ii)

সমীকরণ (ii) কে (i) দ্বারা ভাগ করে পাই,

$\frac{ar^9}{ar^4} = \frac{8\sqrt{2}}{81} \div \frac{2\sqrt{3}}{9}$

বা, $r^5 = \frac{8\sqrt{2}}{81} \times \frac{9}{2\sqrt{3}}$

বা, $r^5 = \frac{4\sqrt{2}}{9\sqrt{3}}$

বা, $r^5 = \frac{(\sqrt{2})^4.\sqrt{2}}{(\sqrt{3})^4.\sqrt{3}}$

বা, $r^5 = \frac{(\sqrt{2})^5}{(\sqrt{3})^5} = \left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^5$

$\therefore r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ ধারাটির তৃতীয় পদ $= ar^{3-1}$

$= ar^2$

$= \frac{ar^4}{r^2}$

$= \frac{\frac{2\sqrt{3}}{9}}{\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2}$; [$\because ar^4 = \frac{2\sqrt{3}}{9}$ এবং $r = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$]

$= \frac{2\sqrt{3}}{9} \times \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{3}.\sqrt{3}}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ ধারাটির তৃতীয় পদ $\frac{1}{\sqrt{3}}$ **(Ans.)**

a এর মান বের করেও অঙ্কটি করা যায়। r বের করার পর, r এর মান (i) নং এ বসিয়ে নিজেই অঙ্কটি কর।

◆◆ অনুশীলনীর ৮নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

একটি গুণোত্তর ধারার অষ্টম পদ -27 এবং একাদশ পদ $81\sqrt{3}$. [রা.বো-'১৫] *ক. প্রদত্ত তথ্যগুলো সমীকরণ আকারে প্রকাশ কর।* *খ. ধারাটির 14 তম পদ নির্ণয় কর।* *গ. ধারাটির প্রথম দশটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।*	নিজে নিজে চেষ্টা কর। (ক) $ar^7 = -27$ $ar^{10} = 81\sqrt{3}$ (খ) -729; (গ) $\frac{-121\sqrt{3}(\sqrt{3}-1)}{3}$

৯ $\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \sqrt{2} - ...$ **ধারাটির কোন পদ $8\sqrt{2}$?**

সমাধান: মনে করি, ধারাটির n তম পদ $8\sqrt{2}$

ধারাটির প্রথম পদ $a = \frac{1}{\sqrt{2}}$

এবং সাধারণ অনুপাত $r = -1 \div \frac{1}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}$

ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা।

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n তম পদ $= ar^{n-1}$

প্রশ্নমতে, $ar^{n-1} = 8\sqrt{2}$

বা, $\frac{1}{\sqrt{2}}.(-\sqrt{2})^{n-1} = 8.\sqrt{2}$

বা, $(-\sqrt{2})^{n-1} = 8.\sqrt{2} \times \sqrt{2}$

বা, $(-\sqrt{2})^{n-1} = 16$

বা, $(-\sqrt{2})^{n-1} = (-\sqrt{2})^8$

বা, $n - 1 = 8$

বা, $n = 8 + 1$

$\therefore n = 9$

$\therefore$ ধারাটির নবম পদ $8\sqrt{2}$ **(Ans.)**

◆◆ অনুশীলনীর ৯নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

$\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \sqrt{2} - ......$ *একটি গুণোত্তর ধারা।* [চ.বো-'১৬] *ক. ধারাটির সাধারণ অনুপাত এবং ৪র্থ পদ কত?* *খ. ধারাটির কোন পদ $8\sqrt{2}$?* *গ. ধারাটির 10 তম পদ এবং প্রথম দশটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।*	নিজে নিজে চেষ্টা কর। (ক) -2; (খ) 9 তম; (গ) -16 ও $\frac{31(\sqrt{2}-2)}{2}$

১০ **$5 + x + y + 135$ গুণোত্তর ধারাভুক্ত হলে, x এবং y এর মান নির্ণয় কর।**

সমাধান: মনে করি, গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ $a = 5$ এবং সাধারণ অনুপাত $= r$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n তম পদ $= ar^{n-1}$

$\therefore$ চতুর্থ পদ $ar^{4-1} = 135$

বা, $5.r^3 = 135$

বা, $r^3 = \frac{135}{5}$

বা, $r^3 = 27$

$\therefore r = 3$

$\therefore$ দ্বিতীয় পদ $x = ar^{2-1} = ar = 5 \times 3 = 15$

তৃতীয় পদ $y = ar^{3-1} = ar^2 = 5 \times 3^2 = 45$

$\therefore x = 15$ এবং $y = 45$ **(Ans.)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

ধারাটির প্রথম পদ $a = 5$ এবং সাধারণ অনুপাত $r = \frac{x}{5} = \frac{y}{x}$ ...... (i)

$\therefore$ ধারাটির চতুর্থ পদ $= ar^{4-1} = ar^3 = 5\left(\frac{x}{5}\right)^3 = \frac{5x^3}{5^3}$

প্রশ্নমতে, $\frac{5x^3}{5^3} = 135$

বা, $x^3 = \frac{5^3 \times 135}{5} = 5^3 \times 27 = 5^3 \times 3^3 = (3 \times 5)^3$

$\therefore x = 5 \times 3 = 15$

সমীকরণ (i) এ x এর মান বসিয়ে পাই,

$\frac{15}{5} = \frac{y}{15}$

বা, $y = \frac{15 \times 15}{5}$

$\therefore y = 45$

$\therefore x = 15$ এবং $y = 45$ **(Ans.)**

◆◆ অনুশীলনীর ৬ ও ১০নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

$7 + x + y + 189$ একটি গুণোত্তর ধারা। [চ.বো-'১৭] *ক. ধারাটির চতুর্থ পদকে সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ কর যেখানে প্রথম পদ **a** এবং সাধারণ অনুপাত **r**।* *খ. **x** এবং **y** এর মান নির্ণয় কর।* *গ. প্রদত্ত ধারার প্রথম পদকে ১ম পদ এবং সাধারণ অনুপাতকে সাধারণ অন্তর ধরে সমান্তর ধারাটি নির্ণয় করে এর প্রথম 16টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।*	নিজে নিজে চেষ্টা কর। (ক) $ar^3 = 189$; (খ) 21 এবং 63 (গ) 472

১১ **$3 + x + y + z + 243$ গুণোত্তর ধারাভুক্ত হলে, x, y এবং z এর মান নির্ণয় কর।**

সমাধান: মনে করি, গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ $a = 3$ এবং সাধারণ অনুপাত $= r$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n তম পদ $= ar^{n-1}$

$\therefore$ পঞ্চম পদ $ar^{5-1} = 243$

বা, $ar^4 = 243$

বা, $3r^4 = 243$

বা, $r^4 = 81$ [উভয়পক্ষকে 3 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $r^4 = 3^4$

$\therefore r = 3$

$\therefore$ ২য় পদ $x = ar^{2-1} = ar = 3 \times 3 = 9$

৩য় পদ $y = ar^{3-1} = ar^2 = 3 \times 3^2 = 3 \times 9 = 27$

৪র্থ পদ $z = ar^{4-1} = ar^3 = 3 \times 3^3 = 3 \times 27 = 81$

$\therefore x = 9, y = 27$ এবং $z = 81$

◆◆ অনুশীলনীর ১০ ও ১১নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

$6 + x + y + z + 96 + \ldots$ একটি গুণোত্তর ধারা। *[সি.বো-'১৫]* *ক. সমান্তর ধারা ও অনুক্রম এর মধ্যে দুইটি পার্থক্য লিখ।* *খ. x, y এবং z এর মান নির্ণয় কর।* *গ. উদ্দীপকের ধারাটি লেখ। ধারাটি প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি 3066 হলে, n-এর মান কত?*	নিজে নিজে চেষ্টা কর।

১২ $2 - 4 + 8 - 16 + \ldots \ldots$ ধারাটির প্রথম সাতটি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান: ধারাটির প্রথম পদ $a = 2$

সাধারণ অনুপাত $r = \frac{-4}{2} = -2 < 1$

ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা।

এখানে, পদ সংখ্যা $n = 7$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার প্রথম n পদের সমষ্টি $= \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$; যখন $r < 1$

$\therefore$ প্রথম সাতটি পদের সমষ্টি $S_7 = \frac{2\{1 - (-2)^7\}}{1 - (-2)}$

$= \frac{2(1 + 128)}{1 + 2}$

$= \frac{2 \times 129}{3} = 86$

$\therefore$ প্রথম সাতটি পদের সমষ্টি 86 **(Ans.)**

১৩ $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots \ldots \ldots$ ধারাটি $(2n + 1)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান: ধারাটির প্রথম পদ $a = 1$

সাধারণ অনুপাত $r = \frac{-1}{1} = -1 < 1$

ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা।

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার প্রথম n পদের সমষ্টি $= \frac{a(1 - r^n)}{1 - r}$; যখন $r < 1$

$\therefore (2n + 1)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $= \frac{a(1 - r^{2n+1})}{1 - r}$

$= \frac{1\{1 - (-1)^{2n+1}\}}{1 - (-1)}$

$= \frac{1\{1 - (-1)\}}{1 - (-1)}$

[$\because (2n + 1)$ বিজোড় সংখ্যা]

$= \frac{1(1 + 1)}{1 + 1}$

$= \frac{2}{2} = 1$ **(Ans.)**

১৪ $\log 2 + \log 4 + \log 8 + \ldots \ldots \ldots$ ধারাটির প্রথম দশটি পদের সমষ্টি কত?

সমাধান: প্রদত্ত ধারাটি $= \log 2 + \log 4 + \log 8 + \ldots\ldots\ldots\ldots 10$টি পদ

$= \log 2 + \log 2^2 + \log 2^3 + \log 2^4 + \ldots\ldots\ldots\ldots 10$টি পদ

$= \log 2 + 2 \log 2 + 3 \log 2 + 4 \log 2 + \ldots\ldots\ldots 10$টি পদ

$= (1 + 2 + 3 + \ldots\ldots\ldots\ldots + 10) \log 2$

$= \frac{10(10 + 1)}{2} \log 2$ $\quad [\because 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \frac{n(n + 1)}{2}]$

$= 5 \times 11 \log 2$

$= 55 \log 2$

$\therefore$ প্রথম দশটি পদের সমষ্টি $55 \log 2$ **(Ans.)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

প্রদত্ত ধারা $= \log 2 + \log 4 + \log 8 + \ldots \ldots$

$= \log 2 + \log 2^2 + \log 2^3 + \ldots \ldots$

$= \log 2 + 2 \log 2 + 3 \log 2 + \ldots \ldots$

ধারাটির সাধারণ অন্তর $= 2 \log 2 - \log 2 = \log 2$

আবার, তৃতীয় পদ – দ্বিতীয় পদ $= 3 \log 2 - 2 \log 2 = \log 2$

$\therefore$ ধারাটি একটি সমান্তর ধারা।

এখানে, প্রথম পদ $a = \log 2$

সাধারণ অন্তর $d = \log 2$

পদ সংখ্যা $n = 10$

আমরা জানি,

সমান্তর ধারার n সংখ্যক পদের সমষ্টি $= \frac{n}{2}\{2a + (10 - 1)d\}$

$\therefore$ সমান্তর ধারাটি ১ম দশটি পদের সমষ্টি $= \frac{10}{2}\{2 \times \log 2 + 9 \times \log 2\}$

$= 5(2 \log 2 + 9 \log 2)$

$= 5 \times 11 \log 2$

$= 55 \log 2$

১৫ $\log 2 + \log 16 + \log 512 + \ldots \ldots \ldots$ ধারাটির প্রথম বারটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রদত্ত ধারাটি $= \log 2 + \log 16 + \log 512 + \ldots \ldots$ 12টি পদ

$= \log 2 + \log 2^4 + \log 2^9 + \ldots\ldots$ 12টি পদ

$= \log 2 + 4 \log 2 + 9 \log 2 + \ldots\ldots$ 12টি পদ

$= (1 + 4 + 9 + \ldots\ldots\ldots$ 12টি পদ$) \log 2$

$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + 12^2) \log 2$

আমরা জানি, $1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots \ldots \ldots + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$

অতএব প্রথম 12টি পদের সমষ্টি, $S_{12} = \left\{\frac{12(12 + 1)(2 \times 12 + 1)}{6}\right\} \log 2$

$= \left\{\frac{12 \times 13 \times 25}{6}\right\} \log 2$

$= 650 \log 2$

$\therefore$ প্রথম বারটি পদের সমষ্টি $650 \log 2$ **(Ans.)**

১৬ $2 + 4 + 8 + 16 + \ldots \ldots$ ধারাটির n সংখ্যক পদের সমষ্টি 254 হলে, n এর মান কত?

সমাধান: প্রথম পদ $a = 2$ এবং সাধারণ অনুপাত $r = \frac{4}{2} = 2 > 1$

ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা।

$\therefore n$ পদের সমষ্টি $a.\frac{r^n - 1}{r - 1} = 254$

বা, $2.\frac{2^n - 1}{2 - 1} = 254$

বা, $\frac{2^n - 1}{1} = \frac{254}{2}$

বা, $2^n - 1 = 127$

বা, $2^n = 128$

বা, $2^n = 2^7$

$\therefore n = 7$

◆◆ অনুশীলনীর ১৬নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

একটি সমান্তর ধারার ১ম পদ 5 এবং সাধারণ অন্তর 6। *[ব.বো-'১৬]* *ক. ধারাটি নির্ণয় কর।* *খ. ধারাটির ১ম **n** সংখ্যক পদের সমষ্টি 705 হলে **n** এর মান নির্ণয় কর।* *গ. ধারাটির সাধারণ অন্তরকে ১ম পদ এবং ১ম পদকে সাধারণ অনুপাত ধরে গঠিত গুণোত্তর ধারার ১ম 7 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।*	নিজে নিজে চেষ্টা কর।

১৭ $2 - 2 + 2 - 2 + \ldots\ldots\ldots$ ধারাটির $(2n + 2)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি কত?

সমাধান: প্রদত্ত ধারার ১ম পদ $a = 2$

সাধারণ অনুপাত $r = \frac{-2}{2} = -\frac{2}{2} = -1 < 1$

সুতরাং এটি একটি গুণোত্তর ধারা এবং পদ সংখ্যা, $m = 2n + 2$

আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার m পদের সমষ্টি $S = \frac{a(1-r^m)}{1-r}$; যখন $r < 1$

$\therefore$ ধারাটির $(2n + 2)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি $= \frac{2\{1-(-1)^{2n+2}\}}{1-(-1)}$

$= \frac{2(1-1)}{1+1}$

$= \frac{2 \times 0}{2} = 0$

$\therefore$ ধারাটির $(2n + 2)$ পদের সমষ্টি 0 (শূন্য)

◆◆ অনুশীলনীর ১৩ ও ১৭নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

নিম্নের ধারা দুইটি লক্ষ কর: *(i) $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots\ldots\ldots$* *(ii) $2 - 2 + 2 - 2 + \ldots\ldots\ldots$* *ক. ধারাগুলো কোন ধরনের?* *খ. (i) নং ধারার $(2n + 1)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি কত?* *গ. দেখাও যে, উভয় ধারার $(2n + 2)$ সংখ্যক পদের সমষ্টি সমান।*	নিজে নিজে চেষ্টা কর। উত্তর: (ক) গুণোত্তর ধারা; (খ) 1

১৮ প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি 441 হলে, n এর মান নির্ণয় কর এবং ঐ সংখ্যাগুলোর সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান: আমরা জানি,

প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি $= \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

প্রশ্নমতে, $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 = 441$

বা, $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 = (21)^2$

বা, $\frac{n(n+1)}{2} = 21$

বা, $n(n + 1) = 42$

বা, $n^2 + n - 42 = 0$

বা, $n^2 + 7n - 6n - 42 = 0$

বা, $n(n + 7) - 6(n + 7) = 0$

বা, $(n + 7)(n - 6) = 0$

$\therefore n + 7 = 0$ অথবা, $n - 6 = 0$

বা, $n = -7$ বা, $n = 6$

[$\because n = -7$ গ্রহণযোগ্য নয় কারণ পদ সংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না]

$S = \frac{n(n+1)}{2}$

$\therefore$ ঐ সংখ্যাগুলোর সমষ্টি $= \frac{6 \times 7}{2}$

$= 21$

$\therefore n = 6$ এবং সমষ্টি, $S = 21$

১৯ প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি 225 হলে, n এর মান কত? ঐ সংখ্যাগুলোর বর্গের সমষ্টি কত?

সমাধান: আমরা জানি n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি $= \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$

প্রশ্নমতে, $\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 = 225 = (15)^2$

বা, $\frac{n(n+1)}{2} = 15$

বা, $n^2 + n = 30$

বা, $n^2 + n - 30 = 0$

বা, $n^2 + 6n - 5n - 30 = 0$

বা, $n(n + 6) - 5(n + 6) = 0$

বা, $(n + 6)(n - 5) = 0$

$\therefore n + 6 = 0$ অথবা, $n - 5 = 0$

বা, $n = -6$ বা, $n = 5$

সুতরাং $n = 5$ [কেননা পদ সংখ্যা (n) ঋণাত্মক হতে পারে না]

আবার, n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$\therefore$ ঐ সংখ্যগুলোর বর্গের সমষ্টি $= \frac{5(5+1)(2.5+1)}{6}$

$= \frac{5 \times 6 \times 11}{6} = 55$

$\therefore n = 5$ এবং বর্গের সমষ্টি 55

২০ দেখাও যে, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots\dots\dots + 10^3 = (1 + 2 + 3 + \dots\dots\dots + 10)^2$

সমাধান: বামপক্ষ $= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots\dots\dots + 10^3$

প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots\dots\dots + n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2$$

$$\therefore 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots\dots\dots + 10^3 = \left\{\frac{10(10+1)}{2}\right\}^2 = \left\{\frac{10 \times 11}{2}\right\}^2 = (55)^2 = 3025$$

ডানপক্ষ $= (1 + 2 + 3 + \dots\dots + 10)^2$

প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার সমষ্টি

$$1 + 2 + 3 + 4 + \dots\dots\dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\therefore 1 + 2 + 3 + 4 + \dots\dots\dots + 10 = \frac{10(10+1)}{2} = 5 \times 11 = 55$$

সুতরাং $(1 + 2 + 3 + \dots\dots + 10)^2 = (55)^2 = 3025$

অতএব, $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 = (1 + 2 + 3 + \dots\dots + 10)^2$

(দেখানো হলো)

২১ $\dfrac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots\dots + n^3}{1 + 2 + 3 + \dots\dots + n} = 210$ হলে n এর মান কত?

সমাধান:

দেওয়া আছে, $\dfrac{1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots\dots + n^3}{1 + 2 + 3 + \dots\dots + n} = 210$

বা, $\dfrac{\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2}{\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}} = 210$ $\left[\because 1^3+2^3+3^3+\dots+n^3 = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 \text{ এবং } 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}\right]$

বা, $\dfrac{n(n+1)}{2} = 210$

বা, $n^2 + n = 420$

বা, $n^2 + n - 420 = 0$

বা, $n^2 + 21n - 20n - 420 = 0$

বা, $n(n+21) - 20(n + 21) = 0$

বা, $(n + 21)(n - 20) = 0$

$\therefore n + 21 = 0$ অথবা, $n - 20 = 0$

বা, $n = -21$ বা, $n = 20$

কিন্তু $n \neq -21$ [কারণ পদ সংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না]

সুতরাং n এর মান 20

◆◆ অনুশীলনীর ২০ ও ২১নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

নিচের ধারা দুইটি লক্ষ কর: $S_1 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots\dots\dots n^3$ $S_2 = (1 + 2 + 3 \ \dots\dots\dots + n)^2$ *ক. গুণোত্তর ধারার ক্ষেত্রে সাধারণ অনুপাত কী?* *খ. দেখাও যে, $S_1 = S_2$ যখন $n = 10$* *গ. $\dfrac{S_1}{\sqrt{S_2}} = 210$ হলে n এর মান কত?*	নিজে নিজে চেষ্টা কর। উত্তর: (গ) 20

২২ 1 মিটার দৈর্ঘ্যবিশিষ্ট একটি লৌহ দন্ডকে 10টি টুকরায় বিভক্ত করা হলো যাতে টুকরাগুলোর দৈর্ঘ্য গুণোত্তর ধারা গঠন করে। যদি বৃহত্তম টুকরাটি ক্ষুদ্রতম টুকরার 10 গুণ হয়, তবে ক্ষুদ্রতম টুকরাটির দৈর্ঘ্যের মান আসন্ন মিলিমিটারে নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, ক্ষুদ্রতম টুকরাটির দৈর্ঘ্য $= a$ মি.মি.

সাধারণ অনুপাত $= r$

আরও ধরি, গুণোত্তর ধারাটির ১ম পদ = ক্ষুদ্রতম টুকরাটির দৈর্ঘ্য $= a$ মি.মি.

যেহেতু, টুকরাগুলোর দৈর্ঘ্য গুণোত্তর ধারা গঠন করে, তাই গুণোত্তর ধারা অনুসারে, বৃহত্তম টুকরাটির দৈর্ঘ্য = 10 তম টুকরার দৈর্ঘ্য

$= ar^{10-1}$ মি.মি. $[\because n$ তম পদ $= ar^{n-1}]$

$= ar^9$ মি.মি.

দেওয়া আছে, বৃহত্তম টুকরাটি ক্ষুদ্রতম টুকরার 10 গুণ

$\therefore ar^9 = 10a$

বা, $r^9 = 10$

বা, $r = 10^{\frac{1}{9}} = 1.2915 > 1$

আবার, গুণোত্তর ধারার n পদের সমষ্টি $= \dfrac{a(r^n - 1)}{r - 1}$ $[\because r > 1]$

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে, $\dfrac{a(1.2915^{10} - 1)}{1.2915 - 1} = 1000$ [1 মি. = 1000 মি.মি.]

বা, $a = \dfrac{1000 \times 0.2915}{12.91 - 1}$ $[\because n = 10, r = 1.2915]$

বা, $a = \dfrac{291.5}{11.91}$

$\therefore a = 24.47$ মি.মি.

$\therefore$ ক্ষুদ্রতম টুকরাটির দৈর্ঘ্য = 24.47 মি.মি. (প্রায়)

দ্বিতীয় পদ্ধতি

মনে করি, বৃহত্তম টুকরাটির দৈর্ঘ্য $= x$ মি.মি.

সাধারণ অনুপাত $= r$

আরও ধরি, গুণোত্তর ধারাটির ১ম পদ = বৃহত্তম টুকরাটির দৈর্ঘ্য $= x$ মি.মি.

যেহেতু, টুকরাগুলোর দৈর্ঘ্য গুণোত্তর ধারা গঠন করে, তাই গুণোত্তর ধারা অনুসারে, ক্ষুদ্রতম টুকরাটির দৈর্ঘ্য = 10 তম টুকরার দৈর্ঘ্য

$= xr^{10-1}$ মি.মি. $[\because n$ তম পদ $= ar^{n-1}]$

$= xr^9$ মি.মি.

দেওয়া আছে, বৃহত্তম টুকরাটি ক্ষুদ্রতম টুকরার 10 গুণ।

অর্থাৎ বৃহত্তম টুকরাটির দৈর্ঘ্য = 10 × ক্ষুদ্রতম টুকরাটির দৈর্ঘ্য

বা, $x = 10 \times (xr^9)$

বা, $1 = 10r^9$ [x দ্বারা ভাগ করে]

বা, $r^9 = \dfrac{1}{10}$

বা, $r = \left(\dfrac{1}{10}\right)^{\frac{1}{9}} = 0.7743 < 1$

আবার, গুণোত্তর ধারার n পদের সমষ্টি $= \dfrac{a(1 - r^n)}{1 - r}$ $[\because r < 1]$

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে, $\dfrac{x(1 - 0.7743^{10})}{1 - 0.7743} = 1000$ [1 মি. = 1000 মি.মি.]

বা, $x = \dfrac{1000 \times 0.2257}{1 - 0.0775}$ $[\because n = 10, r = 0.7743]$

বা, $x = \dfrac{225.7}{0.9225}$

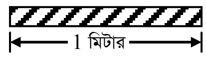
$\therefore x = 244.7$ মি.মি.

$\therefore$ বৃহত্তম টুকরাটির দৈর্ঘ্য = 244.7 মি.মি. (প্রায়)

যেহেতু বৃহত্তম টুকরাটি ক্ষুদ্রতম টুকরাটির 10 গুণ, সুতরাং ক্ষুদ্রতম টুকরাটির দৈর্ঘ্য $= \dfrac{244.7}{10}$ মি.মি. (প্রায়) = 24.47 মি.মি. (প্রায়)

◆◆ অনুশীলনীর ২২নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

একটি তামার তারকে কেটে ছোট ছোট টুকরো করতে হবে। তামার তারটির মোট দৈর্ঘ্য 1 মিটার (চিত্র দ্রষ্টব্য)। তামার তারটিকে মোট 10 টি টুকরায় বিভক্ত করা হলো যাতে টুকরাগুলোর দৈর্ঘ্য গুণোত্তর ধারা গঠন করে যার সাধারণ অনুপাত > 1। এক্ষেত্রে বৃহত্তম টুকরার দৈর্ঘ্য, ক্ষুদ্রতম টুকরার 10 গুণ।



ক. গুণোত্তর ধারা এবং সাধারণ অনুপাত কাকে বলে?
খ. তারটি হতে প্রাপ্ত টুকরোগুলোর দৈর্ঘ্য দ্বারা গঠিত গুণোত্তর ধারাটির সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর।
গ. বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতম টুকরাদ্বয়ের দৈর্ঘ্য মিলিমিটারে নির্ণয় কর।

নিজে নিজে চেষ্টা কর।
(ক) 1.29 (প্রায়);
(খ) 246.6 মি.মি. (প্রায়)

২৩ একটি গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a, সাধারণ অনুপাত r, ধারাটির চতুর্থ পদ -2 এবং নবম পদ $8\sqrt{2}$
ক. উপরোক্ত তথ্যগুলোকে দুইটি সমীকরণের মাধ্যমে প্রকাশ কর।
খ. ধারাটির 12 তম পদ নির্ণয় কর।
গ. ধারাটি নির্ণয় করে প্রথম 7টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ $= a$
সাধারণ অনুপাত $= r$
ধারাটির চতুর্থ পদ $= -2$
নবম পদ $= 8\sqrt{2}$
আমরা জানি, গুণোত্তর ধারার n তম পদ $= ar^{n-1}$
ধারাটির চতুর্থ পদ, $ar^{4-1} = -2$
বা, $ar^3 = -2$ ... ... (i)
এবং ধারাটির নবম পদ, $ar^{9-1} = 8\sqrt{2}$
বা, $ar^8 = 8\sqrt{2}$ ... ... (ii)

খ ধারাটির 12 তম পদ $= ar^{12-1}$
'ক' হতে প্রাপ্ত সমীকরণ (ii) ÷ (i) হতে পাই,
$$\frac{ar^8}{ar^3} = \frac{8\sqrt{2}}{-2}$$
বা, $r^5 = -4\sqrt{2}$
বা, $r^5 = -2^2\sqrt{2}$
বা, $r^5 = -(\sqrt{2})^4.\sqrt{2}$
বা, $r^5 = (-\sqrt{2})^5$
বা, $r = -\sqrt{2}$
'ক' হতে প্রাপ্ত (i) নম্বর সমীকরণে r এর মান বসিয়ে পাই,
$a.(-\sqrt{2})^3 = -2$
বা, $a = \dfrac{-\sqrt{2}.\sqrt{2}}{-\sqrt{2}.\sqrt{2}.\sqrt{2}}$
বা, $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
অতএব, 12 তম পদ $= ar^{12-1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}.(-\sqrt{2})^{11}$
$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}.(-\sqrt{2})^{10}.(-\sqrt{2})$
$= \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-32\sqrt{2})$
$= -32$
$\therefore$ ধারাটির 12 তম পদ -32

গ 'খ' হতে পাই ধারাটির প্রথম পদ $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$
সাধারণ অনুপাত $r = -\sqrt{2}$
$\therefore$ ধারাটির দ্বিতীয় পদ $= ar^{2-1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2}) = -1$
তৃতীয় পদ $= ar^{3-1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2})^2 = \dfrac{1\times 2}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}.\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$
চতুর্থ পদ $= ar^{4-1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(-\sqrt{2})^3 = -2$
....
....
$\therefore$ নির্ণেয় ধারাটি $\dfrac{1}{\sqrt{2}} - 1 + \sqrt{2} - 2 + \ldots\ldots\ldots$
আমরা জানি,
গুণোত্তর ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি $S_n = \dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$; যখন $r < 1$
সুতরাং ধারাটির প্রথম 7টি পদের সমষ্টি
$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}\{1-(-\sqrt{2})^7\}}{1-(-\sqrt{2})}$$
$$= \frac{1+8\sqrt{2}}{\sqrt{2}(1+\sqrt{2})}$$
$$= \frac{1+8\sqrt{2}}{\sqrt{2}+2}$$
$$= \frac{(1+8\sqrt{2})(\sqrt{2}-2)}{(\sqrt{2}+2)(\sqrt{2}-2)}$$
$$= \frac{\sqrt{2}-2+16-16\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2-2^2}$$
$$= \frac{14-15\sqrt{2}}{-2}$$
$$= \frac{14-15\times 1.4142}{-2}$$
$$= \frac{14-21.213}{-2}$$
$$= \frac{-7.213}{-2}$$
$= 3.61$ (প্রায়)
$\therefore$ 7টি পদের সমষ্টি 3.61 (প্রায়)

২৪ **কোনো ধারার n তম পদ $2n - 4$**

ক. ধারাটি নির্ণয় কর।

খ. ধারাটির 10তম পদ এবং প্রথম 20টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

গ. প্রাপ্ত ধারাটির প্রথম পদকে প্রথম পদ এবং সাধারণ অন্তরকে সাধারণ অনুপাত ধরে একটি নতুন ধারা তৈরি কর এবং সূত্র প্রয়োগ করে ধারাটির প্রথম 8 টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, ধারাটির n তম পদ $2n - 4$

$\therefore n = 1, 2, 3, \ldots\ldots$বসিয়ে পাই-

$\therefore n = 1$ হলে ধারাটির ১ম পদ $2.\ 1 - 4 = -2$

$n = 2$ হলে ধারাটির ২য় পদ $2.\ 2 - 4 = 0$

$n = 3$ হলে ধারাটির ৩য় পদ $2.\ 3 - 4 = 2$

$n = 4$ হলে ধারাটির ৪র্থ পদ $2.\ 4 - 4 = 4$

....

....

$\therefore$ নির্ণেয় ধারা: $-2 + 0 + 2 + 4 + \ldots\ \ldots\ \ldots$

খ দেওয়া আছে, n তম পদ $= 2n - 4$

$\therefore$ ধারাটির 10 তম পদ $2.10 - 4 = 16$

'ক' হতে প্রাপ্ত ধারাটির, প্রথম পদ $a = -2$

সাধারণ অন্তর, $d = 0 - (-2) = 2$

আমরা জানি, সমান্তর ধারার n সংখ্যক পদের সমষ্টি $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

সুতরাং ধারাটির 20টি পদের সমষ্টি, $S_{20} = \frac{20}{2}\{2(-2) + (20-1)2\}$

$= 10(-4 + 19 \times 2)$

$= 10(-4 + 38)$

$= 10 \times 34$

$= 340$

$\therefore$ ধারাটির 20টি প্রথম পদের সমষ্টি 340 **(Ans.)**

গ 'ক' হতে, প্রাপ্ত ধারাটির প্রথম পদ $a = -2$

সাধারণ অন্তর $d = 0 - (-2) = 2$

প্রাপ্ত ধারার প্রথম পদকে প্রথম পদ ও সাধারণ অন্তরকে সাধারণ অনুপাত ধরে পাই,

$\therefore$ গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ $ar^{1-1} = (-2).\ 2^0 = -2$

দ্বিতীয় পদ $ar^{2-1} = -2 \times 2 = -4$

তৃতীয় পদ $ar^{3-1} = -2 \times 2^2 = -8$

চতুর্থ পদ $ar^{4-1} = -2 \times 2^3 = -16$

....

....

$\therefore$ নির্ণেয় ধারা: $-2 - 4 - 8 - 16 \ldots\ \ldots\ \ldots\ n$ পর্যন্ত

আমরা জানি,

গুণোত্তর ধারার n সংখ্যক পদের সমষ্টি $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$; যখন $r > 1$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম 8টি পদের সমষ্টি, $S_8 = \frac{-2(2^8 - 1)}{2 - 1}$

$= -2(256 - 1)$

$= -2 \times 255$

$= -510$

$\therefore$ নির্ণেয় ধারাটির প্রথম 8টি পদের সমষ্টি -510 **(Ans.)**

◆◆ অনুশীলনীর ২৪নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

একটি ধারায় n তম পদ $2n - 1, n \in N$ *[ব.বো-'১৭]* *ক. ধারাটি গঠন কর।* *খ. ধারাটির কততম পদ 169?* *গ. ধারাটির প্রথম পদ এবং সাধারণ অন্তরকে যথাক্রমে প্রথম পদ ও সাধারণ অনুপাত ধরে একটি গুণোত্তর ধারা গঠন করে নতুন ধারাটির প্রথম 10টি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।*	নিজে নিজে চেষ্টা কর। (ক) $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots$ (খ) 85 তম; (গ) 1023

২৫ **দুপুর 1 টা 15 মিনিটে 1 জন এস.এস.সি পরীক্ষার ফলাফল জানতে পারল। 1 টা 20 মিনিটে জানল 8 জন, 1 টা 25 মিনিটে জানলো 27 জন। এভাবে ফলাফল ছড়িয়ে পড়ল।**

ক. উদ্দীপকের আলোকে প্যাটার্ন দুইটি লেখ।

খ. ঠিক 2টা 10 মিনিটে কত জন এবং 2 : 10 পর্যন্ত মোট কত জন ফলাফল জানতে পারবে?

গ. কয়টার সময় 6175225 জন ফলাফল জানতে পারবে?

সমাধান:

ক উদ্দীপকের আলোকে দুটি প্যাটার্ন বিদ্যমান। যথা: (i) সময়ের প্যাটার্ন, (ii) ফলাফল জানা শিক্ষার্থীর প্যাটার্ন।

(i) সময়ের প্যাটার্ন: 1 টা 15 মিনিটকে সূচনা সময় (সময় = 0) ধরে নিয়ে সময়ের প্যাটার্নটি নির্ণয় করি। অর্থাৎ সময়ের প্যাটার্নের ১ম পদ = 0।

উদ্দীপকে উল্লিখিত পরবর্তী প্রতি ক্ষেত্রে সময়ের ব্যবধান হচ্ছে 5 মিনিট।

সুতরাং 5 মিনিট পর 1 টা 20 মিনিটকে প্যাটার্নে $0 + 5 = 5$ বিবেচনা করতে হবে, যা প্যাটার্নটির দ্বিতীয় পদ।

তদ্রুপ প্যাটার্নের তৃতীয় পদটি হবে $5 + 5 = 10$।

অর্থাৎ সময়ের প্যাটার্নটি হবে: $0, 5, 10, 15, \ldots\ \ldots$

(ii) ফলাফল জানা শিক্ষার্থীর প্যাটার্ন: দুপুর 1 টা 15 মিনিটে 1 জন, 1 টা 20 মিনিটে 8 জন, 1 টা 25 মিনিটে 27 জন পরীক্ষার ফলাফল জানতে পারে এবং এভাবে ফলাফল ছড়িয়ে পড়ে।

সুতরাং ফলাফল জানা শিক্ষার্থীর প্যাটার্ন: $1, 8, 27, \ldots\ \ldots\ \ldots$

বা, $1^3, 2^3, 3^3, \ldots\ \ldots\ \ldots$

সার্বিকভাবে 1টা 15 মিনিটকে সূচনা সময় (সময় = 0 মিনিট) ধরে নিয়ে পাই,

প্রদত্ত সময়:	1 : 15,	1 : 20,	1 : 25, …
সময়ের প্যার্টান:	0,	5,	10, …
ফলাফল জানা শিক্ষার্থীর প্যাটার্ন:	1^3,	2^3,	3^3, …

লক্ষণীয়: প্যাটার্ন বলতে অনুক্রমকে বোঝানো হয়। এছাড়া সিক্যুয়েন্স (Sequence) দ্বারাও অনুক্রমকে নির্দেশ করা হয়।

খ 'ক' হতে প্রাপ্ত সময়ের প্যাটার্ন বা অনুক্রমটি হলো: 0, 5, 10, 15, … ।
অনুক্রমটির ১ম পদ, a = 0 এবং
সাধারণ অন্তর, d = 5 – 0 = 10 – 5 = 5
তাই এটি একটি সমান্তর অনুক্রম।
এখন, 1 টা 15 মিনিট থেকে 2 টা 10 মিনিটের মধ্যবর্তী সময় ব্যবধান = (2 টা 10 মিনিট – 1 টা 15 মিনিট) = 55 মিনিট
ধরি, সমান্তর অনুক্রমটির, n তম পদ = 55
বা, $a + (n-1)d = 55$
বা, $0 + (n-1)5 = 55$
বা, $n - 1 = 11$
$\therefore n = 12$
অর্থাৎ 1 টা 15 মিনিট থেকে শুরু করে 2 টা 10 মিনিট পর্যন্ত মোট 12 টি ধাপে (n = 12) শিক্ষার্থীরা ফলাফল জানতে পারবে।
সুতরাং, এই 12 ধাপে ফলাফল জানা শিক্ষার্থীর প্যাটার্ন: $1^3, 2^3, 3^3, \ldots \ldots 12^3$
ঠিক 2টা 10 মিনিটে অর্থাৎ 12 তম ধাপে ফলাফল জানবে $= 12^3$ জন
$= 1728$ জন
এখন 1 টা 15 মিনিট থেকে শুরু করে 2টা 10 মিনিট পর্যন্ত ফলাফল জানা শিক্ষার্থীর ধারা:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots\ldots + 12^3$$

$$= \left\{\frac{12(12+1)}{2}\right\}^2 \qquad \left[\because n \text{ সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি} = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2\right]$$

$$= (6 \times 13)^2$$
$$= 6084$$

গ ফলাফল জানা শিক্ষার্থীর ধারা: $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots\ldots$
যা n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টির ধারার অনুরূপ।
আমরা জানি, প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক সংখ্যার ঘনের সমষ্টি $S_n = \left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 \ldots$ (i)
মনে করি, n তম ধাপে 6175225 জন ফলাফল জানতে পারবে
∴ (i) নং হতে পাই,

$$\left\{\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2 = 6175225$$

বা, $\frac{n(n+1)}{2} = \sqrt{6175225} \ldots\ldots\ldots$ (ii)
বা, $\frac{n(n+1)}{2} = 2485$
বা, $n^2 + n - 4970 = 0$
বা, $n^2 + 71n - 70n - 4970 = 0$
বা, $n(n+71) - 70(n+71) = 0$
বা, $(n+71)(n-70) = 0$
বা, $n + 71 = 0$ অথবা $n - 70 = 0$
$\therefore n = -71$ বা, $n = 70$
যেহেতু ধাপ সংখ্যা ঋণাত্মক হতে পারে না।
$\therefore n = 70$
প্রতি ধাপে 5 মিনিট ব্যবধানে 70 তম ধাপে
মোট সময় = {(70 – 1) × 5} মিনিট
= (69 × 5) মিনিট
= 345 মিনিট
= (5 × 60 + 45) মিনিট
= 5 ঘণ্টা 45 মিনিট
দুপুর 1টা 15 মিনিট থেকে 5 ঘণ্টা 45 মিনিট অতিক্রান্ত হলে ঘড়িতে বাজবে সন্ধ্যা 7 টা 00 মিনিট অর্থাৎ সন্ধ্যা 7 টা।
∴ সন্ধ্যা 7 টার সময় 6175225 জন ফলাফল জানতে পারবে।

লক্ষণীয়:
■ এক্ষেত্রে মোট সময় নির্ণয়ে সময় ব্যবধান 5 মিনিটের সাথে ধাপসংখ্যা 70 গুণ করা হয়নি বরং 70 – 1 = 69 গুণ করা হয়েছে।
কেননা প্রথম ধাপ থেকে সময় গণনা শুরু হয়েছে অর্থাৎ প্রথম ধাপের ক্ষেত্রে সময় ব্যবধান 0। এর পরবর্তীতে প্রতি ধাপে সময় ব্যবধান 5 মিনিট। তাই মোট সময় গণনার ক্ষেত্রে, মোট ধাপ সংখ্যা 70 হলেও একটি ধাপের সময় ব্যবধান বাদ দিয়ে বাকি 70 – 1 = 69 টি ধাপের মোট সময় গণনা করা হয়েছে।
■ (ii) নং এ $\frac{n(n+1)}{2} = \pm\sqrt{6175225}$ বিবেচনা না করে শুধুমাত্র $\frac{n(n+1)}{2} = \sqrt{6175225}$ বিবেচনা করা হয়েছে।
এক্ষেত্রে $\frac{n(n+1)}{2} = -\sqrt{6175225}$ গ্রহণযোগ্য নয়। কেননা 'n' বা ধাপ সংখ্যার মান তথা $\frac{n(n+1)}{2}$ এর মান কখনো ঋণাত্মক, 0, জটিল সংখ্যা হতে পারে না।

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২৫৯

ক)। প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক জোড় সংখ্যার সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক জোড় সংখ্যাগুলো হলো 2, 4, 6, 8, ...
∴ ধারাটি $2 + 4 + 6 + \ldots\ldots\ldots$ n তম পদ পর্যন্ত
ধারাটির প্রথম পদ, $a = 2$
সাধারণ অন্তর $d = 4 - 2 = 2$
ধারাটি একটি সমান্তর ধারা।
∴ ধারাটির n তম পদ $= a + (n-1)d$
$= 2 + (n-1).2$
$= 2 + 2n - 2$
$= 2n$
∴ ধারাটি $= 2 + 4 + 6 + \ldots\ldots + 2n$
$= 2(1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n)$
$= 2.\frac{n(n+1)}{2}$
$= n(n+1)$
∴ n সংখ্যক স্বাভাবিক জোড় সংখ্যার সমষ্টি $n(n+1)$

খ) প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক বিজোড় সংখ্যার বর্গের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান: প্রথম n সংখ্যক স্বাভাবিক বিজোড় সংখ্যার বর্গের ধারাটি $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots\ldots\ldots$ n তম পদ পর্যন্ত
মনে করি, n সংখ্যক বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার বর্গের সমষ্টি S_n
$\therefore S_n = 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots\ldots + (2n-1)^2$
ধারাটির n তম পদ $(2n-1)^2$
আমরা জানি, $(2r-1)^2 = 4r^2 - 4r + 1$
এখন, $r = 1, 2, 3, \ldots\ldots\ldots n$ বসিয়ে পাই,

$$1^2 = 4.\ 1^2 - 4.\ 1 + 1$$
$$3^2 = 4.\ 2^2 - 4.\ 2 + 1$$
$$5^2 = 4.\ 3^2 - 4.\ 3 + 1$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1$$

যোগ করে পাই,

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2n-1)^2 = 4(1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots + n^2) - 4(1 + 2 + 3 + \ldots + n) + (1 + 1 + 1 + \ldots + 1)$$

বা, $S_n = 4.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - 4.\frac{n(n+1)}{2} + n$
$= \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} - 2n(n+1) + n$

$= 2n(n+1)\left(\frac{2n+1}{3} - 1\right) + n$

$= 2n(n+1)\left(\frac{2n+1-3}{3}\right) + n$

$= 2n(n+1)\,\frac{2(n-1)}{3} + n$

$= \frac{4n(n^2-1)}{3} + n$

$= n\left[\frac{4(n^2-1)}{3} + 1\right]$

$= \frac{n(4n^2-4+3)}{3}$

$= \frac{n(4n^2-1)}{3} = \frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় n সংখ্যক স্বাভাবিক বিজোড় সংখ্যার বর্গের সমষ্টি $\frac{n(2n+1)(2n-1)}{3}$

কাজ *পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২৫৯*

নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে গুণোত্তর ধারাগুলো লেখ:

(ক) প্রথম পদ 4, সাধারণ অনুপাত 10 **(খ) প্রথম পদ 9, সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{3}$**

(গ) প্রথম পদ 7, সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{10}$ **(ঘ) প্রথম পদ 3, সাধারণ অনুপাত 1**

(ঙ) প্রথম পদ 1, সাধারণ অনুপাত $-\frac{1}{2}$ **(চ) প্রথম পদ 3, সাধারণ অনুপাত –1**

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ $a = 4$

সাধারণ অনুপাত $r = 10$

দ্বিতীয় পদ $= ar^{2-1} = 4.\ 10^1 = 40$

তৃতীয় পদ $= ar^{3-1} = 4.\ 10^2 = 400$

চতুর্থ পদ $= ar^{4-1} = 4.10^3 = 4000$

....

....

$\therefore$ নির্ণেয় ধারা: $4 + 40 + 400 + 4000 + \ldots\ldots\ldots n$ পর্যন্ত

খ দেওয়া আছে, গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ $a = 9$

সাধারণ অনুপাত $r = \frac{1}{3}$

দ্বিতীয় পদ $= ar^{2-1} = 9.\left(\frac{1}{3}\right)^1 = 3$

তৃতীয় পদ $= ar^{3-1} = 9.\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1$

চতুর্থ পদ $= ar^{4-1} = 9.\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{3}$

....

....

$\therefore$ নির্ণেয় ধারা: $9 + 3 + 1 + \frac{1}{3} + \ldots\ldots\ldots n$ পর্যন্ত

গ দেওয়া আছে, গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ $a = 7$

সাধারণ অনুপাত $r = \frac{1}{10}$

দ্বিতীয় পদ $= ar^{2-1} = 7.\left(\frac{1}{10}\right)^1 = 0.7$

তৃতীয় পদ $= ar^{3-1} = 7.\left(\frac{1}{10}\right)^2 = 0.07$

চতুর্থ পদ $= ar^{4-1} = 7.\left(\frac{1}{10}\right)^3 = 0.007$

....

....

$\therefore$ নির্ণেয় ধারা: $7 + 0.7 + 0.07 + 0.007 + \ldots\ldots\ldots n$ পর্যন্ত

ঘ দেওয়া আছে, গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ $a = 3$

সাধারণ অনুপাত $r = 1$

দ্বিতীয় পদ $= ar^{2-1} = 3.(1)^1 = 3$

তৃতীয় পদ $= ar^{3-1} = 3.(1)^2 = 3$

চতুর্থ পদ $= ar^{4-1} = 3.(1)^3 = 3$

....

....

$\therefore$ নির্ণেয় ধারা: $3 + 3 + 3 + 3 + \ldots\ldots\ldots n$ পর্যন্ত

ঙ দেওয়া আছে, গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ $a = 1$

সাধারণ অনুপাত $r = -\frac{1}{2}$

দ্বিতীয় পদ $= ar^{2-1} = 1.\left(-\frac{1}{2}\right)^1 = -\frac{1}{2}$

তৃতীয় পদ $= ar^{3-1} = 1.\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

চতুর্থ পদ $= ar^{4-1} = 1.\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$

....

....

$\therefore$ নির্ণেয় ধারা: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\ \ldots\ldots\ldots n$ পর্যন্ত

চ দেওয়া আছে, গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ $a = 3$

সাধারণ অনুপাত $r = -1$

দ্বিতীয় পদ $= ar^{2-1} = 3.\ (-1)^1 = -3$

তৃতীয় পদ $= ar^{3-1} = 3.\ (-1)^2 = 3$

চতুর্থ পদ $= ar^{4-1} = 3.\ (-1)^3 = -3$

....

....

$\therefore$ নির্ণেয় ধারা: $3 - 3 + 3 - 3 + \ldots\ldots\ldots n$ পর্যন্ত

কাজ *পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২৬১*

ক তার ছেলেকে স্কুলে নেয়া-আনার জন্য এক ব্যক্তিকে ১লা এপ্রিল থেকে এক মাসের জন্য নিয়োগ করলেন। তার পারিশ্রমিক ঠিক করা হলো- প্রথম দিন এক পয়সা, দ্বিতীয় দিন প্রথম দিনের দ্বিগুণ অর্থাৎ দুই পয়সা, তৃতীয় দিন দ্বিতীয় দিনের দ্বিগুণ অর্থাৎ চার পয়সা। এই নিয়মে পারিশ্রমিক দিলে সাপ্তাহিক ছুটির দিনসহ এক মাস পর ঐ ব্যক্তি কত টাকা পাবেন?

সমাধান: যেহেতু পারিশ্রমিক প্রতিদিন পূর্বের দ্বিগুণ পরিমান বৃদ্ধি পায় অতএব, স্কুলে নেয়া-আনার পারিশ্রমিক একটি গুণোত্তর ধারা এবং ধারাটি হবে $1 + 2 + 4 + \ldots\ \ldots\ \ldots$

প্রথম পদ $a = 1$ পয়সা

সাধারণ অনুপাত $r = 2$

পদসংখ্যা $n = 30$ (ছুটির দিনসহ)

$\therefore$ সমষ্টি অর্থাৎ 1 মাসের পারিশ্রমিক, $S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$; যখন $r > 1$

$= \frac{1(2^{30} - 1)}{2 - 1}$

$= 2^{30} - 1$

$= (1073741824 - 1)$ পয়সা

$= 1073741823$ পয়সা

$= 10737418.23$ টাকা

$\therefore$ নির্ণেয় পারিশ্রমিক 10737418.23 টাকা। **(Ans.)**