

অনুশীলনী - ২.২



অনুশীলনীর সমাধান



- ১ ৪ এর গুণনীয়ক সেট কোনটি?
(ক) $\{8, 16, 24, \dots\}$ (খ) $\{1, 2, 4, 8\}$ (গ) $\{2, 4, 8\}$ (ঘ) $\{1, 2\}$

উত্তর: (খ)

ব্যাখ্যা: কোনো সংখ্যার গুণনীয়ক হচ্ছে যে সংখ্যাগুলো দ্বারা ঐ সংখ্যাটি নিঃশেষে বিভাজ্য।

যেমন: ৪ সংখ্যাটি ১, ২, ৪, ৪ সংখ্যাগুলো দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য। ৪ এর গুণনীয়কগুলো হলো ১, ২, ৪, ৪।

$$\begin{aligned} 8 &= 1 \times 8 \\ &= 2 \times 4 \end{aligned}$$

- ২ সেট C হতে সেট B এ একটি সম্পর্ক R হলে নিচের কোনটি সঠিক?
(ক) $R \subset C$ (খ) $R \subset B$ (গ) $R \subseteq C \times B$ (ঘ) $C \times B \subseteq R$

উত্তর: (গ)

ব্যাখ্যা: সংজ্ঞানুসারে, আমরা জানি, A সেট থেকে B সেটে R একটি সম্পর্ক বা অম্বয় হয় তাহলে $R \subseteq A \times B$ । অনুরূপভাবে C সেট হতে B এ একটি সম্পর্ক R হলে $R \subseteq C \times B$ সত্য।

- ৩ $A = \{1, 2\}$, $B = \{2, 5\}$ হলে $P(A \cap B)$ এর সদস্য সংখ্যা নিচের কোনটি?
(ক) ১ (খ) ২ (গ) ৩ (ঘ) ৪

উত্তর: (খ)

ব্যাখ্যা: $A \cap B = \{1, 2\} \cap \{2, 5\} = \{2\}$ আমরা জানি, কোনো সেটের উপাদান সংখ্যা n হলে, ঐ সেটের শক্তি সেটের উপাদান সংখ্যা হবে 2^n ।

দেখা যাচ্ছে $(A \cap B) = \{2\}$ সেটের সদস্য সংখ্যা $n = 1$ \therefore এর শক্তি সেট $P(A \cap B)$ এর উপাদান সংখ্যা হবে $= 2^1 = 2$ ।

- ৪ নিচের কোনটি $\{x \in N : 13 < x < 17 \text{ এবং } x \text{ মৌলিক সংখ্যা}\}$ সেটটিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করে?
(ক) \emptyset (খ) $\{0\}$ (গ) $\{\emptyset\}$ (ঘ) $\{13, 17\}$

উত্তর: (ক)

ব্যাখ্যা: এখানে, $\{x \in N : 13 < x < 17 \text{ এবং } x \text{ মৌলিক সংখ্যা}\}$

১৩ থেকে বড় এবং ১৭ থেকে ছোট স্বাভাবিক সংখ্যাগুলো হলো ১৪, ১৫, ১৬

এবং এদের মধ্যে কোনো মৌলিক সংখ্যা নেই।

প্রদত্ত সেটে কোনো উপাদান না থাকায় এটি ফাঁকা সেট।

\therefore প্রদত্ত সেটটির তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশিত রূপ হবে: \emptyset বা $\{\}$

লক্ষণীয়:

(খ) অপশনে রয়েছে: $\{0\}$, এটি দ্বারা বুঝায় শূন্য (০) হচ্ছে প্রদত্ত সেটটির একটি উপাদান যা সত্য নয়।

(গ) অপশনে রয়েছে: $\{\emptyset\}$, এটি দ্বারা মূলত ফাঁকা সেটের (\emptyset বা $\{\}$) শক্তি সেটকে বোঝানো হয়। কোনো সেট $A = \emptyset$ হলে এর শক্তি সেট $P(A) = \{\emptyset\}$ অর্থাৎ প্রদত্ত সেটটির শক্তি সেট হলো: $\{\emptyset\}$

- ৫ $A \cup B = \{a, b, c\}$ হলে-
i. $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c\}$ ii. $A = \{a, b, c\}$, $B = \{b, c\}$ iii. $A = \{a, b\}$, $B = \{c\}$
উপর্যুক্ত তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?
(ক) i (খ) ii (গ) i ও ii (ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: (ঘ)

ব্যাখ্যা: $A \cup B$ হলো A ও B এর সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেট। উপরের প্রশ্নে (i), (ii) ও (iii)-এ অর্থাৎ প্রতিটি অপশনেই $A \cup B = \{a, b, c\}$ পাওয়া যায়।

\therefore সঠিক উত্তর (i), (ii) ও (iii)।

- ৬ A ও B দুইটি সসীম সেটের জন্য-
i. $A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ এবং } y \in B\}$ ii. $n(A) = a$, $n(B) = b$ হলে, $n(A \times B) = ab$ iii. $A \times B$ এর প্রতিটি সদস্য একটি ক্রমজোড়
উপর্যুক্ত তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?
(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: (ঘ)

ব্যাখ্যা: নিম্নে উদাহরণটি লক্ষ করি, $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$ হলে পাই, $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$

এ থেকে বুঝা যায় A ও B দুইটি সসীম সেটের কার্ভেসীয় গুণজ $A \times B$ এর ক্ষেত্রে

(i) নং সঠিক। কারণ, প্রতিটি ক্রমজোড়ের ১ম উপাদান হবে A সেটের এবং ২য় উপাদান হবে B সেটের।

(ii) নং সঠিক। কারণ, A ও B সেটের উপাদান সংখ্যার গুণফল (ab) হবে $n(A \times B)$ এর উপাদান সংখ্যা (উল্লিখিত উদাহরণ- $n(A) = a = 2$, $n(B) = b = 2$ এবং $n(A \times B) = 4 = 2 \times 2$)

(iii) নং সঠিক কারণ, $A \times B$ এর সদস্যগুলোকে ক্রমজোড় আকারে লেখা হয়।

- $A = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ হলে, নিচের ৭ - ৯ প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:

- ৭ A সেটের সঠিক প্রকাশ কোনটি?
(ক) $\{x \in N : 6 < x < 13\}$ (খ) $\{x \in N : 6 \leq x < 13\}$ (গ) $\{x \in N : 6 \leq x \leq 13\}$ (ঘ) $\{x \in N : 6 < x \leq 13\}$

উত্তর: (গ)

ব্যাখ্যা: আমরা জানি, স্বাভাবিক সংখ্যা, $N = \{1, 2, 3, \dots\}$

A এর প্রত্যেকটি উপাদান স্বাভাবিক সংখ্যার অন্তর্ভুক্ত এবং সংখ্যাগুলো ৬

থেকে শুরু করে ক্রমান্বয়ে ১৩ পর্যন্ত বিস্তৃত। তাই-

(ক) নং সত্য হবেনা কারণ, A এর উপাদান '৬' ও '১৩' বিদ্যমান নেই।

(খ) নং সত্য হবেনা কারণ, A এর উপাদান '৬' বিদ্যমান থাকলে ও '১৩' বিদ্যমান নেই।

(গ) নং সত্য হবে কারণ, ৬ থেকে ১৩ পর্যন্ত সকল স্বাভাবিক সংখ্যা এতে বিদ্যমান অর্থাৎ A সেটকে সিদ্ধ করে।

(ঘ) নং অসত্য কারণ, A সেটের উপাদান '৬' অন্তর্ভুক্ত নয়।

৮. A সেটের মৌলিক সংখ্যাগুলোর সেট কোনটি?

(ক) $\{6, 8, 10, 12\}$

(খ) $\{7, 9, 11, 13\}$

(গ) $\{7, 11, 13\}$

(ঘ) $\{9, 12\}$

উত্তর: (গ)

ব্যাখ্যা: মৌলিক সংখ্যা: 1 থেকে বড় যে সকল সংখ্যার 1 ও ঐ সংখ্যাটি ব্যতীত অন্য কোনো গুণনীয়ক নেই তাই মৌলিক সংখ্যা। A সেটে সংখ্যাগুলোর মধ্যে 7, 11 ও 13 সংখ্যা তিনটির 1 ও সংখ্যাটি বাদে অন্য কোনো গুণনীয়ক নেই। সুতরাং A সেটের মৌলিক সংখ্যাগুলোর সেট = $\{7, 11, 13\}$

৯. A সেটের 3 এর গুণিতকগুলোর সেট কোনটি?

(ক) $\{6, 9\}$

(খ) $\{6, 11\}$

(গ) $\{9, 12\}$

(ঘ) $\{6, 9, 12\}$

উত্তর: (ঘ)

ব্যাখ্যা: কোনো সংখ্যার গুণিতক হলো সংখ্যাটি দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য সকল সংখ্যা। যেমন- 3 এর গুণিতক হলো 3 দ্বারা নিঃশেষে বিভাজ্য সকল সংখ্যা

অর্থাৎ $\{3, 6, 9, 12, \dots\}$ ।

আবার, $A = \{6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}$ । অতএব A সেটে 3 এর গুণিতকগুলো হলো 6, 9 ও 12,

সুতরাং A সেটে 3 এর গুণিতকের সেট = $\{6, 9, 12\}$ ।

$$3 \times 1 = 3$$

$$3 \times 2 = 6$$

$$3 \times 3 = 9$$

$$3 \times 4 = 12$$

১০. যদি $A = \{3, 4\}$, $B = \{2, 4\}$, $x \in A$ এবং $y \in B$ হয়, তবে A ও B এর উপাদানগুলোর মধ্যে $x > y$ সম্পর্ক বিবেচনা করে অম্বয়টি নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $A = \{3, 4\}$ ও $B = \{2, 4\}$

প্রশ্নানুসারে, $R = \{(x, y) : x \in A, y \in B \text{ এবং } x > y\}$

এখানে, $A \times B = \{3, 4\} \times \{2, 4\} = \{(3, 2), (3, 4), (4, 2), (4, 4)\}$

ক্রমজোড়গুলোর মধ্যে $x > y$ সম্পর্ক বিবেচনা করে পাই, $R = \{(3, 2), (4, 2)\}$ (Ans.)

১১. যদি $C = \{2, 5\}$, $D = \{4, 6, 7\}$, $x \in C$ এবং $y \in D$ হয়, তবে C ও D এর উপাদানগুলোর মধ্যে $x + 1 < y$ সম্পর্কটি বিবেচনায় থাকে তবে অম্বয়টি নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $C = \{2, 5\}$ ও $D = \{4, 6, 7\}$

প্রশ্নানুসারে, $R = \{(x, y) : x \in C, y \in D \text{ এবং } x + 1 < y\}$

এখানে, $C \times D = \{2, 5\} \times \{4, 6, 7\} = \{(2, 4), (2, 6), (2, 7), (5, 4), (5, 6), (5, 7)\}$

ক্রমজোড়গুলোর মধ্যে $x + 1 < y$ সম্পর্ক বিবেচনা করে পাই, $R = \{(2, 4), (2, 6), (2, 7), (5, 7)\}$ (Ans.)

১২. $f(x) = x^4 + 5x - 3$ হলে, $f(-1)$, $f(2)$ এবং $f\left(\frac{1}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x) = x^4 + 5x - 3$

$$\therefore f(-1) = (-1)^4 + 5(-1) - 3$$

$$= 1 - 5 - 3$$

$$= 1 - 8 = -7 \text{ (Ans.)}$$

$$\therefore f(2) = (2)^4 + 5(2) - 3$$

$$= 16 + 10 - 3$$

$$= 26 - 3$$

$$= 23 \text{ (Ans.)}$$

$$\therefore f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + 5\left(\frac{1}{2}\right) - 3$$

$$= \frac{1}{16} + \frac{5}{2} - 3$$

$$= \frac{1 + 40 - 48}{16}$$

$$= \frac{1 - 8}{16} = \frac{-7}{16} \text{ (Ans.)}$$

১৩. যদি $f(y) = y^3 + ky^2 - 4y - 8$ হয়, তবে k এর কোন মানের জন্য $f(-2) = 0$ হবে?

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(y) = y^3 + ky^2 - 4y - 8$

$$\therefore f(-2) = (-2)^3 + k(-2)^2 - 4(-2) - 8$$

$$= -8 + 4k + 8 - 8$$

$$= 4k - 8$$

আবার, $f(-2) = 0$ হবে যদি $4k - 8 = 0$

$$\text{বা, } 4k = 8$$

$$\therefore k = 2$$

$\therefore k$ এর মান 2 হলে, $f(-2) = 0$ হবে। (Ans.)

১৪. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ হয়, তবে x এর কোন মানের জন্য $f(x) = 0$ হবে?

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$

এখন, $f(x) = 0$

$$\text{বা, } x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$$

$$\text{বা, } x^3 - x^2 - 5x^2 + 5x + 6x - 6 = 0$$

$$\text{বা, } x^2(x - 1) - 5x(x - 1) + 6(x - 1) = 0$$

$$\text{বা, } (x - 1)(x^2 - 5x + 6) = 0$$

হয়, $x - 1 = 0$ অথবা, $x^2 - 5x + 6 = 0$

$$\therefore x = 1$$

$$\text{বা, } x^2 - 2x - 3x + 6 = 0$$

$$\text{বা, } x(x - 2) - 3(x - 2) = 0$$

$$\text{বা, } (x - 2)(x - 3) = 0$$

$$\text{হয়, } x - 2 = 0 \quad \text{অথবা, } x - 3 = 0$$

$$\therefore x = 2$$

$$\therefore x = 3$$

\therefore নির্ণেয় x এর মান 1 অথবা 2 অথবা 3

◆◆ অনুশীলনীর ১৪ নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

<p>$P = \{0, -1, 2, -3\}$ এবং $f(x) = 2x^3 - kx^2 + 3x - 1$.</p> <p>ক. $P(P)$ বের কর।</p> <p>খ. $R = \{(x, y) : x \in P \text{ এবং } y \in P \text{ এবং } x = y + 1 \text{ হলে, } R \text{ কে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর এবং ডোম } R \text{ ও রেঞ্জ } R \text{ বের কর।}$</p> <p>গ. k এর মান কত হলে $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ হবে?</p>	<p>নিজে নিজে চেষ্টা কর।</p> <p>(খ) ডোম, $R = \{0, -1\}$ এবং রেঞ্জ $R = \{-1, -2\}$</p> <p>(গ) 3</p>
--	---

<p>১৫ যদি $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$ হয়, তবে $\frac{f\left(\frac{1}{x^2}\right)+1}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)-1}$ এর মান নির্ণয় কর।</p>
--

সমাধান: দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{2x+1}{2x-1}$

$$\therefore f\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2\left(\frac{1}{x^2}\right)+1}{2\left(\frac{1}{x^2}\right)-1}$$

$$\text{বা, } f\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\frac{2}{x^2}+1}{\frac{2}{x^2}-1}$$

$$\text{বা, } f\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{\frac{2+x^2}{x^2}}{\frac{2-x^2}{x^2}}$$

$$\text{বা, } f\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2+x^2}{2-x^2} \times \frac{x^2}{x^2}$$

$$\text{বা, } f\left(\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2+x^2}{2-x^2}$$

$$\text{বা, } \frac{f\left(\frac{1}{x^2}\right)+1}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)-1} = \frac{2+x^2+2-x^2}{2+x^2-2+x^2} \text{ [যোজন-বিয়োজন করে]}$$

$$\text{বা, } \frac{f\left(\frac{1}{x^2}\right)+1}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)-1} = \frac{4}{2x^2}$$

$$\therefore \frac{f\left(\frac{1}{x^2}\right)+1}{f\left(\frac{1}{x^2}\right)-1} = \frac{2}{x^2}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় মান} = \frac{2}{x^2}$$

<p>১৬ $g(x) = \frac{1+x^2+x^4}{x^2}$ হলে, দেখাও যে, $g\left(\frac{1}{x^2}\right) = g(x^2)$.</p>

সমাধান: প্রদত্ত ফাংশন $g(x) = \frac{1+x^2+x^4}{x^2}$

বামপক্ষ $= g\left(\frac{1}{x^2}\right)$

$$= \frac{1 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{x^2}\right)^4}{\left(\frac{1}{x^2}\right)^2}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^8}}{\frac{1}{x^4}}$$

$$= \frac{x^8 + x^4 + 1}{x^8} \times \frac{x^4}{1}$$

$$= \frac{x^8 + x^4 + 1}{x^4}$$

ডানপক্ষ $= g(x^2)$

$$= \frac{1 + (x^2)^2 + (x^2)^4}{(x^2)^2}$$

$$= \frac{x^8 + x^4 + 1}{x^4} = \text{বামপক্ষ}$$

$$\therefore g\left(\frac{1}{x^2}\right) = g(x^2) \text{ (দেখানো হলো)}$$

◆◆ অনুশীলনীর ১৫ ও ১৬ নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

<p>$g(x) = \frac{3x+1}{3x-1}$ এবং $h(t) = \frac{t^2+t^2+1}{t^2}$ দুইটি বীজগাণিতিক রাশি।</p> <p>ক. $g(0)$ এবং $h(1)$ এর মান নির্ণয় কর।</p> <p>খ. $\frac{g\left(\frac{1}{x}\right)+1}{g\left(\frac{1}{x}\right)-1}$ এর মান নির্ণয় কর।</p> <p>গ. প্রমাণ কর যে, $h(t^2) = h\left(\frac{1}{t^2}\right)$</p>	<p>নিজে নিজে চেষ্টা কর।</p> <p>উত্তর: (ক) -1 এবং 3; (খ) $\frac{3}{x}$</p>
--	--

১৭ নিচের অন্য়গুলো থেকে ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর:

(ক) $R = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

(খ) $S = \{(-2, -4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$

(গ) $F = \left\{\left(\frac{1}{2}, 0\right), (1, 1), (1, -1), \left(\frac{5}{2}, 2\right), \left(\frac{5}{2}, -2\right)\right\}$

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, $R = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

R অন্য়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহ ২, ২, ২ এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহ ১, ২, ৩.

\therefore ডোম $R = \{2\}$ এবং রেঞ্জ $R = \{1, 2, 3\}$ (Ans.)

☒ দৃষ্টব্য: ডোম $R = \{2, 2, 2\}$ বা $\{2\}$ যে কোনো একটি লিখলেই হবে কারণ সেটের উপাদানগুলোর ক্রম বদলালে বা কোনো উপাদানের পুনরাবৃত্তি করলে সেটের কোনো পরিবর্তন হয় না। একে সেটের সমতা বলে।

খ প্রদত্ত S অন্য়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানের সেট $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ এবং দ্বিতীয় উপাদানের সেট $\{-4, 1, 0, 1, 4\}$

\therefore অন্য়ের ডোমেন $= \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

এবং অন্য়ের রেঞ্জ $= \{-4, 1, 0, 1, 4\} = \{-4, 0, 1, 4\}$

\therefore ডোম $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ এবং রেঞ্জ $\{-4, 0, 1, 4\}$

(Ans.)

গ দেওয়া আছে, $F = \left\{\left(\frac{1}{2}, 0\right), (1, 1), (1, -1), \left(\frac{5}{2}, 2\right), \left(\frac{5}{2}, -2\right)\right\}$

F অন্য়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহ $\frac{1}{2}, 1, 1, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}$ এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহ $0, 1, -1, 2, -2$

\therefore ডোম $F = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}\right\}$ এবং রেঞ্জ $\{0, 1, -1, 2, -2\}$

১৮ নিচের অন্য়গুলোকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

ক. $R = \{(x, y) : x \in A, y \in A \text{ এবং } x + y = 1\}$ যেখানে $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

খ. $F = \{(x, y) : x \in C, y \in C \text{ এবং } y = 2x\}$ যেখানে $C = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, $R = \{(x, y) : x \in A, y \in A \text{ এবং } x + y = 1\}$

এবং $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

R এর বর্ণিত শর্ত থেকে পাই, $x + y = 1$

$\therefore y = 1 - x.$

এখন, $x \in A$ এর জন্য y এর মান নির্ণয় করি:

x	-2	-1	0	1	2
y	3	2	1	0	-1

কিন্তু $3 \notin A \therefore (-2, 3) \notin R$

$\therefore R = \{(-1, 2), (0, 1), (1, 0), (2, -1)\}$ (Ans.)

কোনো অন্য়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহের সেটকে এর ডোমেন এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেটকে এর রেঞ্জ বলা হয়।

\therefore ডোমেন $R = \{-1, 0, 1, 2\}$ এবং রেঞ্জ $R = \{2, 1, 0, -1\}$ (Ans.)

খ দেওয়া আছে, $F = \{(x, y) : x \in C, y \in C \text{ এবং } y = 2x\}$ এবং $C = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

এখন, $x \in C$ এর জন্য $y = 2x$ নির্ণয় করি।

x	-1	0	1	2	3
y	-2	0	2	4	6

কিন্তু $-2, 4, 6 \notin C \therefore (-1, -2), (2, 4), (3, 6) \notin F$

$\therefore F = \{(0, 0), (1, 2)\}$ (Ans.)

\therefore ডোমেন $F = \{0, 1\}$ এবং রেঞ্জ $F = \{0, 2\}$ (Ans.)

◆◆ অনুশীলনীর ১৮ নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

$A = \{x \in N : x < 9 \text{ এবং } x \text{ বিজোড় সংখ্যা}\}, B = \{4, 5, 6\}$

এবং $R = \{(x, y) : x \in A, y \in B \text{ এবং } y = x + 1\}$

ক. $A \cup B$ নির্ণয় কর।

খ. $P(B)$ নির্ণয় করে দেখাও যে, $P(B)$ এর উপাদান সংখ্যা 2^n কে সমর্থন করে।

গ. R অন্য়টিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ করে তার ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

নিজে নিজে চেষ্টা কর।

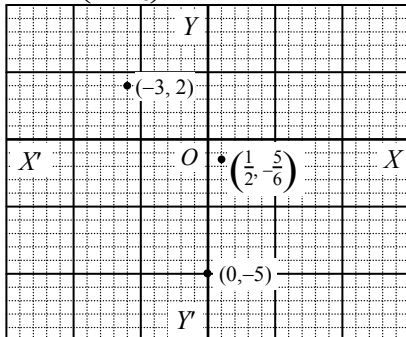
উত্তর: (ক) $\{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$

(গ) ডোম $R = \{3, 5\}$ এবং রেঞ্জ $R = \{4, 6\}$

১৯ ছক কাগজে $(-3, 2)$, $(0, -5)$, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}\right)$ বিন্দুগুলো স্থাপন কর।

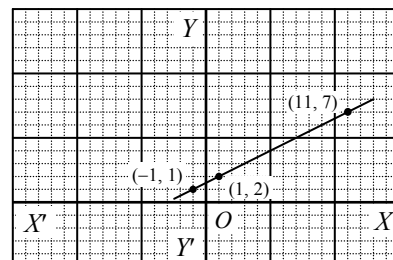
সমাধান: ছক কাগজে উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম ২ বর্গঘর সমান এক একক ধরে

$(-3, 2)$, $(0, -5)$ ও $\left(\frac{1}{2}, -\frac{5}{6}\right)$ বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করা হলো:



২০ ছক কাগজে $(1, 2)$, $(-1, 1)$, $(11, 7)$ বিন্দু তিনটি স্থাপন করে দেখাও যে, বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত।

সমাধান: ছক কাগজে x অক্ষ ও y অক্ষ উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম ১ বর্গঘর সমান একক ধরে বিন্দুগুলো স্থাপন করা হলো। স্থাপিত বিন্দুগুলো সংযোগ করলে একটি সরলরেখা পাওয়া যায়।



সুতরাং বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত।

◆◆ অনুশীলনীর ১৭ ও ২০ নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

$S = \{(-3, -6), (-2, -4), (-1, -2), (0, 0), (1, 2), (2, 4), (3, 6)\}$ একটি অস্বর।

ক. S অস্বরের ডোমেন ও রেঞ্জ লিখ।

খ. S অস্বরের ফাংশনটি লিখ।

গ. ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।

উত্তর: (ক) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$,
 $\{-6, -4, -2, 0, 2, 4, 6\}$
 (খ) $y = 2x$

- ২১ সার্বিক সেট $U = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ এবং } x \text{ বিজোড় সংখ্যা}\}$
 $A = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ এবং } 2 \leq x \leq 7\}$
 $B = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ এবং } 3 < x < 6\}$
 $C = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ এবং } x^2 > 5 \text{ এবং } x^3 < 130\}$
 ক. A সেটকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।
 খ. A' এবং $C \setminus B$ নির্ণয় কর।
 গ. $B \times C$ এবং $P(A \cap C)$ নির্ণয় কর।

সমাধান:

- ক এখানে, $U = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ এবং } x \text{ বিজোড় সংখ্যা}\}$
 $= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$
 $A = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ এবং } 2 \leq x \leq 7\}$
 ২ থেকে ৭ পর্যন্ত স্বাভাবিক সংখ্যাগুলো হলো ২, ৩, ৪, ৫, ৬, ৭
 যেহেতু A, U এর উপসেট [আলোচনাধীন সকল সেট সার্বিক সেটের উপসেট]
 $\therefore A = \{3, 5, 7\}$
 খ 'ক' নং হতে পাই, $U = \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\}$
 এবং $A = \{3, 5, 7\}$
 $\therefore A' = U \setminus A$
 $= \{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, \dots\} - \{3, 5, 7\}$
 $= \{1, 9, 11, 13, \dots\}$

$B = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ এবং } 3 < x < 6\}$
 ৩ অপেক্ষা বড় এবং ৬ অপেক্ষা ছোট স্বাভাবিক সংখ্যা হল ৪, ৫
 B, U এর উপসেট \therefore আলোচনাধীন সকল সেট সার্বিক সেটের উপসেট
 $\therefore B = \{5\}$

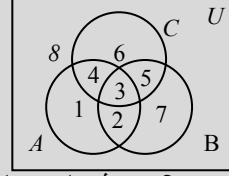
আবার $C = \{x : x \in \mathbb{N} \text{ এবং } x^2 > 5 \text{ এবং } x^3 < 130\}$
 C, U এর উপসেট \therefore আলোচনাধীন সকল সেট সার্বিক সেটের উপসেট
 $\therefore U$ এর উপাদানগুলো বিবেচনা করে পাই,
 $x = 1$ হলে, $x^2 = 1^2 = 1 \not> 5$ এবং $x^3 = 1^3 = 1 < 130$
 $x = 3$ হলে, $x^2 = 3^2 = 9 > 5$ এবং $x^3 = 3^3 = 27 < 130$
 $x = 5$ হলে, $x^2 = 5^2 = 25 > 5$ এবং $x^3 = 5^3 = 125 < 130$
 $x = 7$ হলে, $x^2 = 7^2 = 49 > 5$ এবং $x^3 = 7^3 = 343 > 130$
 শর্তানুসারে গ্রহণযোগ্য মান সমূহ ৩, ৫

সুতরাং $C = \{3, 5\}$
 $\therefore C \setminus B = \{3, 5\} - \{5\}$
 $= \{3\}$

- গ 'ক' হতে প্রাপ্ত, $A = \{3, 5, 7\}$
 'খ' হতে প্রাপ্ত, $B = \{5\}$
 এবং $C = \{3, 5\}$
 $\therefore B \times C = \{5\} \times \{3, 5\}$
 $= \{(5, 3), (5, 5)\}$
 $A \cap C = \{3, 5, 7\} \cap \{3, 5\}$
 $= \{3, 5\}$
 $\therefore P(A \cap C) = \{\{3, 5\}, \{3\}, \{5\}, \emptyset\}$

☒ জেনে নোও: আলোচনা সংশ্লিষ্ট সকল সেট সার্বিক সেটের উপসেট। তাই সার্বিক সেটে নেই এমন উপাদান কখনোই অন্যান্য সেটগুলোতে থাকতে পারে না। এখানে সার্বিক সেট হলো বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যার সেট। তাই আলোচনাধীন A, B ও C সেটের মান শর্তানুসারে সিদ্ধ হয় শুধুমাত্র এমন বিজোড় সংখ্যাই নেওয়া হয়েছে।

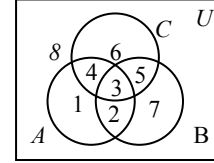
২২



- ক. B সেটকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।
 খ. উদ্দীপক ব্যবহার করে $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ সম্পর্কটির সত্যতা যাচাই কর।
 গ. $S = (B \cup C)^c \times A$ হলে, ডোম S নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক



ভেনচিত্র হতে পাই, $B = \{2, 3, 5, 7\}$
 B সেটের উপাদানগুলো হলো ২ থেকে ৭ পর্যন্ত সকল মৌলিক সংখ্যা
 $\therefore B = \{x \in \mathbb{N} : 2 \leq x \leq 7 \text{ এবং } x \text{ মৌলিক সংখ্যা}\}$
 বিকল্প: $B = \{x \leq 7 \text{ এবং } x \text{ মৌলিক সংখ্যা}\}$

- খ উদ্দীপকের ভেনচিত্র হতে পাই, $A = \{1, 2, 3, 4\}$
 $B \cap C = \{3, 5\}$
 $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$
 $A \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 $\therefore A \cup (B \cap C) = \{1, 2, 3, 4\} \cup \{3, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 $(A \cup B) \cap (A \cup C) = \{1, 2, 3, 4, 5, 7\} \cap \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
 $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$
 $\therefore A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ সম্পর্কটি সত্য।
 গ উদ্দীপক অনুসারে, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$
 $B \cup C = \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
 $\therefore (B \cup C)^c = U \setminus (B \cup C)$
 $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\} - \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
 $= \{1, 8\}$
 $\therefore S = (B \cup C)^c \times A$
 $= \{1, 8\} \times \{1, 2, 3, 4\}$
 $= \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (8, 1), (8, 2), (8, 3), (8, 4)\}$
 S অস্বরের ক্রমজোড়ের ১ম উপাদানসমূহের সেট
 $= \{1, 1, 1, 1, 8, 8, 8, 8\}$ বা $\{1, 8\}$
 $\therefore S$ অস্বরের ডোমেন $= \{1, 8\}$

☒ বিদ্র: কোনো সেটের উপাদানগুলো পুনরাবৃত্তি হলে সেটের মানের কোনো পরিবর্তন হয় না।

তাই, $\{1, 1, 1, 1, 8, 8, 8, 8\} = \{1, 8\}$ একই অর্থ বহন করে।

২৩ $y = f(x) = \frac{4x-7}{2x-4}$ একটি ফাংশন।

- ক. $f\left(-\frac{1}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।
 খ. $\frac{f(x)+2}{f(x)-1}$ এর মান নির্ণয় কর।
 গ. দেখাও যে, $f(y) = x$

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, $f(x) = \frac{4x-7}{2x-4}$

$$\therefore f\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{4\left(-\frac{1}{2}\right)-7}{2\left(-\frac{1}{2}\right)-4} = \frac{-2-7}{-1-4} = \frac{-9}{-5} = \frac{9}{5} \quad (\text{Ans.})$$

খ $\frac{f(x)+2}{f(x)-1} = \frac{\frac{4x-7}{2x-4}+2}{\frac{4x-7}{2x-4}-1}$

$$= \frac{\frac{4x-7+4x-8}{2x-4}}{\frac{4x-7-2x+4}{2x-4}} = \frac{8x-15}{2x-3} \quad (\text{Ans.})$$

গ এখানে, $y = f(x) = \frac{4x-7}{2x-4}$

তাহলে, $f(x) = \frac{4x-7}{2x-4}$

বা, $f(y) = \frac{4y-7}{2y-4} \dots \dots (i)$

আবার, $y = \frac{4x-7}{2x-4}$

বা, $2xy - 4y = 4x - 7$

বা, $2xy - 4x = -7 + 4y$

বা, $x(2y - 4) = 4y - 7$

বা, $x = \frac{4y-7}{2y-4}$

বা, $x = f(y)$; [(i) নং হতে পাই]

$\therefore f(y) = x$ (দেখানো হলো)

২৪ নিচের ফাংশনগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

- ক) $y = 3x + 5$
খ) $x + y = 2$

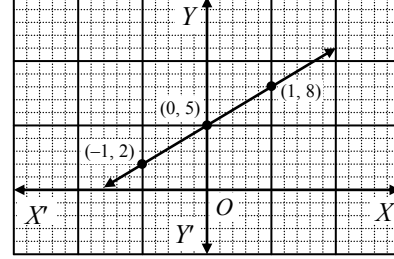
সমাধান:

ক প্রদত্ত ফাংশন $y = 3x + 5$

x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করি

x	0	1	-1
$y = 3x + 5$	5	8	2

ছক কাগজে বিন্দুগুলো বসিয়ে যোগ করে প্রাপ্ত চিত্রই প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র। x অক্ষকে ক্ষুদ্রতম 5 ঘর একক ও y অক্ষকে ক্ষুদ্রতম 1 ঘর একক ধরে।



জেনে রাখা ভালো: যেকোনো সরলরেখা অঙ্কনে মাত্র দুইটি বিন্দুই যথেষ্ট। আবার, কোনো ফাংশনের চলকের ঘাত বা পাওয়ার 1 (এক) হতে ফাংশনের লেখ সর্বদা সরলরেখা।

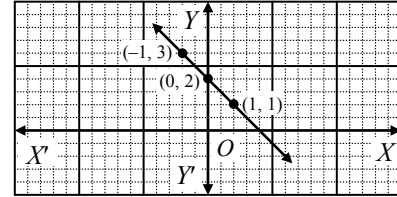
খ প্রদত্ত ফাংশন: $x + y = 2$

বা, $y = 2 - x$

x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর মান নির্ণয় করি

x	0	1	-1
$y = 2 - x$	2	1	3

ছক কাগজে (x, y) বিন্দুগুলো বসিয়ে যোগ করে প্রাপ্ত চিত্রই প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র। x ও y অক্ষকে ক্ষুদ্রতম 2 ঘর একক ধরে।



পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

কাজ

পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-৩৪

যদি $C = \{2, 5, 6\}$, $D = \{4, 5\}$ এবং C ও D এর উপাদানগুলো মধ্যে $x \leq y$ সম্পর্ক বিবেচনায় থাকে তবে সংশ্লিষ্ট অন্তর নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $C = \{2, 5, 6\}$
 $D = \{4, 5\}$

প্রশ্নানুসারে, অন্তর $R = \{(x, y) : x \in C, y \in D \text{ এবং } x \leq y\}$

এখানে, $C \times D = \{2, 5, 6\} \times \{4, 5\}$

$$= \{(2, 4), (2, 5), (5, 4), (5, 5), (6, 4), (6, 5)\}$$

ক্রমজোড়গুলোর মধ্যে $x \leq y$ সম্পর্ক বিবেচনা করে পাই,

$$R = \{(2, 4), (2, 5), (5, 5)\}$$

\therefore নির্ণেয় অন্তর $\{(2, 4), (2, 5), (5, 5)\}$

কাজ

পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-৩৫

ক) $S = \{(-3, 8), (-2, 3), (-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 3)\}$ হলে, S এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে,

$$S = \{(-3, 8), (-2, 3), (-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 3)\}$$

S অন্তরের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহ $-3, -2, -1, 0, 1, 2$

এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহ $8, 3, 0, -1, 0, 3$

কোনো অন্তরের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহের সেটকে এর ডোমেন এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেটকে এর রেঞ্জ বলা হয়।

$$\therefore \text{ডোম } S = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2\}$$

$$\text{এবং রেঞ্জ } S = \{8, 3, 0, -1\}$$

খ) $S = \{(x, y) : x, y \in A \text{ এবং } y - x = 1\}$, যেখানে $A = \{-3, -2, -1, 0\}$ হলে, ডোম S ও রেঞ্জ S নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A \text{ এবং } y - x = 1\}$

যেখানে $A = \{-3, -2, -1, 0\}$

S এর বর্ণিত শর্ত থেকে পাই, $y - x = 1$

$$\text{বা, } y = x + 1$$

এখন, প্রত্যেক $x \in A$ এর জন্য $y = x + 1$ এর মান নির্ণয় করি।

x	-3	-2	-1	0
$y = x + 1$	-2	-1	0	1

$$[\because x \in A, y \in A]$$

যেহেতু $1 \notin A$, কাজেই $(0, 1) \notin S$

$$\therefore S = \{(-3, -2), (-2, -1), (-1, 0)\}$$

কোনো অন্তরের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহের সেটকে এর ডোমেন এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেটকে এর রেঞ্জ বলা হয়।

$$\therefore \text{ডোম } S = \{-3, -2, -1\}$$

$$\text{এবং রেঞ্জ } S = \{-2, -1, 0\}$$