দ্বিতীয় অধ্যায়

সেট ও ফাংশন

অনুশীলনী - ২.১

অনুশীলনীর প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি

সেটের সংযোগ: $A \cup B = A$ ও B এর সকল উপাদান নিয়ে গঠিত সেট $= \{x : x \in A$ অথবা $x \in B\}$

উদাহরণ: $A = \{2, 3, 4\}$ এবং $B = \{3, 4, 5\}$ হলে, $A \cup B = \{2, 3, 4\} \cup \{3, 4, 5\}$
$= \{2, 3, 4, 5\}$ **[A ও B এর সকল সদস্য অন্তর্ভুক্ত]**

সেটের ছেদ : $A \cap B = A$ ও B এর সাধারণ (Common) উপাদান নিয়ে গঠিত সেট $= \{x : x \in A$ এবং $x \in B\}$

উদাহরণ: $A = \{1, 3, 5\}$ এবং $B = \{5, 7, 9\}$ হলে, $A \cap B = \{1, 3, 5\} \cap \{5, 7, 9\}$
$= \{5\}$ **[A ও B এর Common সদস্য অন্তর্ভুক্ত]**

সেটের অন্তর: $A \setminus B = A$ সেট হতে B এর উপাদানগুলো বাদে অবশিষ্ট A এর উপাদান নিয়ে গঠিত সেট $= \{x : x \in A$ এবং $x \notin B\}$

উদাহরণ: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং $B = \{3, 4, 5\}$ হলে, $A \setminus B = \{1, 2, 3, 4\} \setminus \{3, 4, 5\}$
$= \{1, 2\}$ **[B এর সদস্যগুলো বাদে A এর সদস্যগুলো অন্তর্ভুক্ত]**

পূরক সেট: A^c বা $A' = A$ এর উপাদানগুলো বাদে সার্বিক সেটের উপাদানগুলো নিয়ে গঠিত সেট $= \{x : x \in U$ এবং $x \notin A\}$

উদাহরণ: $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ এবং $A = \{4, 5\}$ হলে, A^C বা $A' = \{1, 2, 3, 4, 5\} - \{4, 5\}$
$= \{1, 2, 3\}$ **[A এর সদস্যগুলো বাদে U এর সদস্যগুলো অন্তর্ভুক্ত]**

শক্তি সেট: $P(A) = A$ এর সকল উপসেট নিয়ে গঠিত সেট।

উদাহরণ: $A = \{2, 3\}$ হলে, $P(A) = \{\{2,3\}, \{2\}, \{3\}, \varnothing\}$

MCQ Special Information:

■ যেকোনো সেটের উপাদান সংখ্যা n হলে এর শক্তিসেটের উপাদান সংখ্যা হবে 2^n।

■ যেকোনো সেটের উপাদান সংখ্যা n হলে এর উপসেটের সংখ্যা হবে 2^n এবং প্রকৃত উপসেটের সংখ্যা হবে $2^n - 1$।

এক নজরে সেটে ব্যবহৃত চিহ্নসমূহ

প্রতীক	→ চিহ্নের নাম (বাংলায়)	প্রতীক	→ চিহ্নের নাম (বাংলায়)	প্রতীক	→ চিহ্নের নাম (বাংলায়)
$\subseteq$	→ উপসেট	U	→ সার্বিক সেট	:	→ যেন
$\nsubseteq$	→ উপসেট নয়	A^c বা A'	→ পূরক সেট	$\in$	→ অন্তর্ভুক্তি
$\subset$	→ প্রকৃত উপসেট	$\cup$	→ সংযোগ সেট	$\notin$	→ অন্তর্ভুক্তি নয়
$\not\subset$	→ প্রকৃত উপসেট নয়	$\cap$	→ ছেদ সেট	$\setminus$	→ অন্তর
$\varnothing$ বা { }	→ ফাঁকা সেট	~	→ সমতুল		

মনে জাগ্রত কিছু প্রশ্নের উত্তর জেনে নিই

প্রশ্ন-১: যে কোনো সেট A এর জন্য $A \subseteq A$ এবং $A \subset A$ এর মধ্যে কোনটি সঠিক?

উত্তর: কোনো সেটের উপসেটে ঐ সেটের সমান সংখ্যক অথবা কম সংখ্যক উপাদান থাকে। কিন্তু কোনো সেটের প্রকৃত উপসেটে ঐ সেটের চেয়ে সর্বদা কম সংখ্যক উপাদান থাকে। সুতরাং বলা যায়, সকল প্রকৃত উপসেটই উপসেট কিন্তু সকল উপসেট প্রকৃত উপসেট নয়।

যেমন: $A = \{1, 2, 3\}$ সেটটির ক্ষেত্রে $\{1, 2, 3\} \subseteq \{1, 2, 3\}$ কিন্তু $\{1, 2, 3\} \not\subset \{1, 2, 3\}$

$A \subseteq A$ সত্য কিন্তু $A \subset A$ সত্য নয় কারণ প্রকৃত উপসেটে মূল সেটের চেয়ে কম উপাদান থাকে।

সুতরাং বলা যায়, প্রত্যেক সেট নিজেই নিজের উপসেট, প্রকৃত উপসেট নয়।

প্রশ্ন-২: ফাঁকা সেট ($\varnothing$) যেকোনো সেটের উপসেট নাকি প্রকৃত উপসেট?

উত্তর: ($\varnothing$) সেট একই সাথে যেকোনো সেটের উপসেট এবং প্রকৃত উপসেট। তাই যেকোনো **অশূন্য সেট** A এর ক্ষেত্রে $\varnothing \subseteq A$ এবং $\varnothing \subset A$ উভয়ই সঠিক। আবার যেকোনো সেট নিজেই নিজের উপসেট। তাই $\varnothing \subseteq \varnothing$ বাক্যটিও সত্য।

অনুশীলনীর সমাধান

১ নিচের সেটগুলোকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর:

(ক) $\{x \in N : x^2 > 9$ এবং $x^3 < 130\}$ (খ) $\{x \in Z : x^2 > 5$ এবং $x^3 \leq 36\}$

(গ) $\{x \in N : x, 36$ এর গুণনীয়ক এবং 6 এর গুণিতক$\}$ (ঘ) $\{x \in N : x^3 > 25$ এবং $x^4 < 264\}$

সমাধান:

ক $\{x \in N : x^2 > 9$ এবং $x^3 < 130\}$; এক্ষেত্রে $N =$ সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট।

স্বাভাবিক সংখ্যা বলতে বুঝায় সকল ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা অর্থাৎ 1, 2, 3, 4, 5, ...

এখানে, x এর মান এমন স্বাভাবিক সংখ্যা হবে যার বর্গ 9 থেকে বড় কিন্তু ঘন 130 থেকে ছোট।

$x = 1$ হলে, $x^2 = 1^2 = 1$; যা 9 থেকে ছোট

$\therefore x = 1$ গ্রহণযোগ্য নয়।

$x = 2$ হলে, $x^2 = 2^2 = 4$; যা 9 থেকে ছোট

$\therefore x = 2$ গ্রহণযোগ্য নয়।

$x = 3$ হলে, $x^2 = 3^2 = 9$;

$\therefore x = 3$ গ্রহণযোগ্য নয়।

$x = 4$ হলে, $x^2 = 4^2 = 16$ এবং $x^3 = 4^3 = 64$

$\therefore x = 4$ গ্রহণযোগ্য।

$x = 5$ হলে, $x^2 = 5^2 = 25$ এবং $x^3 = 5^3 = 125$

$\therefore x = 5$ গ্রহণযোগ্য।

$x = 6$ হলে, $x^2 = 6^2 = 36$ এবং $x^3 = 6^3 = 216$; যা 130 থেকে বড়

$\therefore x = 6$ গ্রহণযোগ্য নয়।

সুতরাং শর্তানুসারে গ্রহণযোগ্য মান সমূহ : 4, 5

$\therefore$ নির্ণেয় সেট: $\{4, 5\}$ **(Ans.)**

খ $\{x \in Z : x^2 > 5$ এবং $x^3 \leq 36\}$। এক্ষেত্রে Z = সকল পূর্ণসংখ্যার সেট।

পূর্ণ সংখ্যা সমূহ ... – 4, – 3, – 2, –1, 0, 1, 2, ...

এখানে, x এর মান ঐ সকল পূর্ণ সংখ্যা যার বর্গ 5 থেকে বড় কিন্তু ঘন 36 থেকে ছোট অথবা সমান

$x = -1$ হলে, $x^2 = (-1)^2 = 1$; যা 5 থেকে ছোট

$\therefore x = -1$ গ্রহণযোগ্য নয়।

$x = -2$ হলে, $x^2 = (-2)^2 = 4$; যা 5 থেকে ছোট

$\therefore x = -2$ গ্রহণযোগ্য নয়।

$x = -3$ হলে, $x^2 = (-3)^2 = 9$ এবং $x^3 = (-3)^3 = -27$

$\therefore x = -3$ গ্রহণযোগ্য।

$x = -4$ হলে, $x^2 = (-4)^2 = 16$ এবং $x^3 = (-4)^3 = -64$

$\therefore x = -4$ গ্রহণযোগ্য।

$x = -5$ হলে, $x^2 = (-5)^2 = 25$ এবং $x^3 = (-5)^3 = -125$

$\therefore x = -5$ গ্রহণযোগ্য।

....

....

অর্থাৎ –2 অপেক্ষা ছোট সকল পূর্ণ সংখ্যার জন্য উক্তিটি সত্য।

আবার,

$x = 0$ হলে, $x^2 = 0^2 = 0$; যা 5 থেকে ছোট

$\therefore x = 0$ গ্রহণযোগ্য নয়।

$x = 1$ হলে, $x^2 = 1^2 = 1$; যা 5 থেকে ছোট

$\therefore x = 1$ গ্রহণযোগ্য নয়।

$x = 2$ হলে, $x^2 = 2^2 = 4$; যা 5 থেকে ছোট

$\therefore x = 2$ গ্রহণযোগ্য নয়।

$x = 3$ হলে, $x^2 = 3^2 = 9$ এবং $x^3 = 3^3 = 27$

$\therefore x = 3$ গ্রহণযোগ্য।

$x = 4$ হলে, $x^2 = 4^2 = 16$ এবং $x^3 = 4^3 = 64$; যা 36 থেকে বড়

$\therefore x = 4$ গ্রহণযোগ্য নয়।

$\therefore$ নির্ণেয় সেট : $\{..., -5, -4, -3, 3\}$ **(Ans.)**

গ $\{x \in N : x, 36$ এর গুণনীয়ক এবং 6 এর গুণিতক$\}$।

এক্ষেত্রে N = সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট = {1, 2, 3, ...}

$$36 = 1 \times 36$$
$$= 2 \times 18$$
$$= 3 \times 12$$
$$= 4 \times 9$$
$$= 6 \times 6$$

36 এর গুণনীয়ক স্বাভাবিক সংখ্যাগুলো হলো 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

আবার, 6 এর গুণিতক স্বাভাবিক সংখ্যাগুলো হলো 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, ...

উভয় শর্তকে সিদ্ধ করে এমন সংখ্যাগুলো হলো 6, 12, 18, 36

$\therefore$ নির্ণেয় সেট = {6, 12, 18, 36} **(Ans.)**

ঘ $\{x \in N : x^3 > 25$ এবং $x^4 < 264\}$।

এক্ষেত্রে N = সকল স্বাভাবিক সংখ্যার সেট।

স্বাভাবিক সংখ্যা সমূহ : 1, 2, 3, 4, 5, ...

এখানে, x এর মান এমন সংখ্যা যাতে $x^3 > 25$ এবং $x^4 < 264$

$x = 1$ হলে, $x^3 = 1^3 = 1$; যা 25 থেকে ছোট

$\therefore x = 1$ গ্রহণযোগ্য নয়।

$x = 2$ হলে, $x^3 = 2^3 = 8$; যা 25 থেকে ছোট

$\therefore x = 2$ গ্রহণযোগ্য নয়।

$x = 3$ হলে, $x^3 = 3^3 = 27$ এবং $x^4 = 3^4 = 81$

$\therefore x = 3$ গ্রহণযোগ্য।

$x = 4$ হলে, $x^3 = 4^3 = 64$ এবং $x^4 = 4^4 = 256$

$\therefore x = 4$ গ্রহণযোগ্য।

$x = 5$ হলে, $x^3 = 5^3 = 125$ এবং $x^4 = 5^4 = 625$; যা 264 থেকে বড়

$\therefore x = 5$ গ্রহণযোগ্য নয়।

সুতরাং, গ্রহণযোগ্য মান সমূহ : 3, 4

$\therefore$ নির্ণেয় সেট : {3, 4} **(Ans.)**

২ নিচের সেটগুলোকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর:

(ক) **{3, 5, 7, 9, 11}** (খ) **{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36}**

(গ) **{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40}** (ঘ) **{± 4, ± 5, ± 6}**

সমাধান:

ক {3, 5, 7, 9, 11} সেটের উপাদানগুলো বিজোড় স্বাভাবিক সংখ্যা এবং যাদের মান 1 থেকে বড় কিন্তু 13 থেকে ছোট।

$\therefore$ নির্ণেয় সেট = $\{x \in N : x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $1 < x < 13\}$**(Ans.)**

প্রশ্নটির অনেকগুলো বিকল্প সমাধান করা যেতে পারে।

বিকল্প উত্তর ১: $\{x \in N : x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $2 < x < 13\}$

বিকল্প উত্তর ২: $\{x \in N : x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $3 \leq x < 13\}$

বিকল্প উত্তর ৩: $\{x \in N : x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $1 < x < 12\}$

বিকল্প উত্তর ৪: $\{x \in N : x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $2 < x < 12\}$
বিকল্প উত্তর ৫: $\{x \in N : x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $3 \le x < 12\}$
বিকল্প উত্তর ৬: $\{x \in N : x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $1 < x \le 11\}$
বিকল্প উত্তর ৭: $\{x \in N : x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $2 < x \le 11\}$
বিকল্প উত্তর ৮: $\{x \in N : x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $3 \le x \le 11\}$
বিকল্প উত্তর ৯: $\{x \in Z : x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $1 < x < 13\}$
বিকল্প উত্তর ১০: $\{x \in Z : x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $2 < x < 13\}$
বিকল্প উত্তর ১১: $\{x \in Z : x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $3 \le x < 13\}$
বিকল্প উত্তর ১২: $\{x \in Z : x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $1 < x < 12\}$
বিকল্প উত্তর ১৩: $\{x \in Z : x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $2 < x < 12\}$
বিকল্প উত্তর ১৪: $\{x \in Z : x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $3 \le x < 12\}$
বিকল্প উত্তর ১৫: $\{x \in Z : x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $1 < x \le 11\}$
বিকল্প উত্তর ১৬: $\{x \in Z : x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $2 < x \le 11\}$
বিকল্প উত্তর ১৭: $\{x \in Z : x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $3 \le x \le 11\}$
বিকল্প উত্তর ১৮: $\{x \in N : 3 \le 2x - 1 \le 11\}$
বিকল্প উত্তর ১৯: $\{x \in Z : 3 \le 2x + 1 \le 11\}$
বিকল্প উত্তর ১৮ ও ১৯ এর ন্যায় আরও যেসব সমাধান সম্ভব সেগুলো তোমরা নিজেরা বের কর।

(খ) $\{1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$ সেটের প্রত্যেকটি উপাদান স্বাভাবিক সংখ্যা এবং 36 এর গুণনীয়ক। আবার 36 এর গুণনীয়ক ব্যতীত অন্য কোনো উপাদান নেই।
$\therefore$ নির্ণেয় সেট $= \{x \in N : x, 36$ এর গুণনীয়ক$\}$ **(Ans.)**

(গ) $\{4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40\}$ A সেটের প্রত্যেকটি উপাদান স্বাভাবিক সংখ্যা এবং 4 এর গুণিতক। 4 থেকে শুরু করে 40 পর্যন্ত 4 এর গুণিতক ব্যতীত অন্য কোনো সদস্য A সেটে বিদ্যমান নেই।
$\therefore$ নির্ণেয় সেট $= \{x \in N : x, 4$ এর গুণিতক এবং $x \le 40\}$ **(Ans.)**

(ঘ) $\{\pm 4, \pm 5, \pm 6\}$ সেটের উপাদানসমূহ প্রত্যেকে পূর্ণসংখ্যা, যাদের বর্গের মান 16 এর ছোট নয় এবং 36 এর বড় নয়।
$\therefore$ নির্ণেয় সেট $= \{x \in Z: 16 \le x^2 \le 36\}$ **(Ans.)**

বি.দ্র: পাঠ্যবইতে প্রদত্ত উত্তর হলো $\{x \in Z : x^2 \ge 16$ এবং $x^3 \le 216\}$। এটি সঠিক নয়। কেননা $\{x \in Z : x^2 \ge 16$ এবং $x^3 \le 216\}$ $= \{... ..., -8, -7, \pm 6, \pm 5, \pm 4\}$।
কিন্তু প্রশ্নে প্রদত্ত সেট হলো $\{\pm 4, \pm 5, \pm 6\}$; সেট গঠন পদ্ধতিতে যার সঠিক রূপ হলো $\{x \in Z: 16 \le x^2 \le 36\}$।

৩ **$A = \{2, 3, 4\}, B = \{1, 2, a\}$ এবং $C = \{2, a, b\}$ হলে, নিচের সেটগুলো নির্ণয় কর:**
(ক) $B \backslash C$ (খ) $A \cup B$ (গ) $A \cap C$ (ঘ) $A \cup (B \cap C)$ (ঙ) $A \cap (B \cup C)$

সমাধান:

(ক) দেওয়া আছে, $B = \{1, 2, a\}, C = \{2, a, b\}$
$\therefore B \backslash C = \{1, 2, a\} \backslash \{2, a, b\}$
$= \{1\}$ **(Ans.)**

(খ) দেওয়া আছে, $A = \{2, 3, 4\}, B = \{1, 2, a\}$
$\therefore A \cup B = \{2, 3, 4\} \cup \{1, 2, a\}$
$= \{1, 2, 3, 4, a\}$ **(Ans.)**

(গ) দেওয়া আছে, $A = \{2, 3, 4\}, C = \{2, a, b\}$
$\therefore A \cap C = \{2, 3, 4\} \cap \{2, a, b\} = \{2\}$ **(Ans.)**

(ঘ) দেওয়া আছে, $A = \{2, 3, 4\}, B = \{1, 2, a\}, C = \{2, a, b\}$
এখন, $B \cap C = \{1, 2, a\} \cap \{2, a, b\} = \{2, a\}$
$\therefore A \cup (B \cap C) = \{2, 3, 4\} \cup \{2, a\}$
$= \{2, 3, 4, a\}$ **(Ans.)**

(ঙ) দেওয়া আছে, $A = \{2, 3, 4\}, B = \{1, 2, a\}, C = \{2, a, b\}$
এখন, $B \cup C = \{1, 2, a\} \cup \{2, a, b\} = \{1, 2, a, b\}$
$\therefore A \cap (B \cup C) = \{2, 3, 4\} \cap \{1, 2, a, b\} = \{2\}$ **(Ans.)**

৪ **$U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}, A = \{1, 3, 5\}, B = \{2, 4, 6\}$ এবং $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ হলে, নিম্নলিখিত ক্ষেত্রে সত্যতা যাচাই কর:**
(ক) $(A \cup B)' = A' \cap B'$ (খ) $(B \cap C)' = B' \cup C'$
(গ) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ (ঘ) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$

সমাধান:

(ক) দেওয়া আছে, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$A = \{1, 3, 5\}, B = \{2, 4, 6\}$
এখন, $A \cup B = \{1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6\}$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
আবার, $A' = U - A$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{1, 3, 5\} = \{2, 4, 6, 7\}$
এবং $B' = U - B$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{2, 4, 6\} = \{1, 3, 5, 7\}$
$\therefore$ বামপক্ষ $= (A \cup B)'$
$= U - (A \cup B)$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} = \{7\}$
$\therefore$ ডানপক্ষ $= A' \cap B'$
$= \{2, 4, 6, 7\} \cap \{1, 3, 5, 7\} = \{7\}$
$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ
অর্থাৎ, $(A \cup B)' = A' \cap B'$ **(প্রমাণিত)**

(খ) দেওয়া আছে, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$B = \{2, 4, 6\}, C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
এখন, $B \cap C = \{2, 4, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{4, 6\}$
আবার, $B' = U - B$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{2, 4, 6\} = \{1, 3, 5, 7\}$
এবং $C' = U - C$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{1, 2\}$
$\therefore$ বামপক্ষ $= (B \cap C)' = U - (B \cap C)$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} - \{4, 6\}$
$= \{1, 2, 3, 5, 7\}$
$\therefore$ ডানপক্ষ $= B' \cup C'$
$= \{1, 3, 5, 7\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2, 3, 5, 7\}$
$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ
অর্থাৎ, $(B \cap C)' = B' \cup C'$ **(প্রমাণিত)**

(গ) দেওয়া আছে, $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$A = \{1, 3, 5\}, B = \{2, 4, 6\}$ এবং $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
এখন, $A \cup B = \{1, 3, 5\} \cup \{2, 4, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
আবার, $A \cap C = \{1, 3, 5\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{3, 5\}$
এবং $B \cap C = \{2, 4, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7\} = \{4, 6\}$
$\therefore$ বামপক্ষ $= (A \cup B) \cap C$
$= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \cap \{3, 4, 5, 6, 7\}$
$= \{3, 4, 5, 6\}$
$\therefore$ ডানপক্ষ $= (A \cap C) \cup (B \cap C)$
$= \{3, 5\} \cup \{4, 6\} = \{3, 4, 5, 6\}$
$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ
অর্থাৎ, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$ **(প্রমাণিত)**

ঘ দেওয়া আছে, $A = \{1, 3, 5\}$, $B = \{2, 4, 6\}$ এবং $C = \{3, 4, 5, 6, 7\}$
এখন, $A \cap B = \{1, 3, 5\} \cap \{2, 4, 6\} = \{\ \}$ বা $\varnothing$
আবার, $A \cup C = \{1, 3, 5\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7\}$
$= \{1, 3, 4, 5, 6, 7\}$
এবং $B \cup C = \{2, 4, 6\} \cup \{3, 4, 5, 6, 7\}$
$= \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

$\therefore$ বামপক্ষ $= (A \cap B) \cup C = \{\ \} \cup \{3, 4, 5, 6, 7\}$
$= \{3, 4, 5, 6, 7\}$
$\therefore$ ডানপক্ষ $= (A \cup C) \cap (B \cup C)$
$= \{1, 3, 4, 5, 6, 7\} \cap \{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$
$= \{3, 4, 5, 6, 7\}$
$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ
অর্থাৎ, $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$ **(প্রমাণিত)**

৫ $Q = \{x, y\}$ এবং $R = \{m, n, \ell\}$ হলে, $P(Q)$ এবং $P(R)$ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $Q = \{x, y\}$ এবং $R = \{m, n, \ell\}$। এক্ষেত্রে $P(Q)$ এবং $P(R)$ হচ্ছে যথাক্রমে Q এবং R এর শক্তিসেট।
$\therefore P(Q) = \{\varnothing, \{x\}, \{y\}, \{x, y\}\}$
$\therefore P(R) = \{\varnothing, \{m\}, \{n\}, \{\ell\}, \{m, n\}, \{m, \ell\}, \{n, \ell\}, \{m, n, \ell\}\}$

◆◆ অনুশীলনী ১, ৪ ও ৫নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

সার্বিক সেট $U = \{x : x \in N, x^2 < 50\}$ [য.বো-'১৭] *$A = \{x \in N : x$ মৌলিক সংখ্যা এবং $x < 8\}$* *$B = \{4, 5\}$, $C = \{x \in N : x^2 > 5$ এবং $x^3 < 130\}$* *ক. A ও C সেটকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।* *খ. প্রমাণ কর যে, $(A \cup B) \cap C = (A \cap B) \cup (B \cup C)$* *গ. $P(B' - A')$ নির্ণয় কর।*	**উত্তরঃ** (ক) $A = \{2, 3, 5, 7\}$ এবং $C = \{3, 4, 5\}$ (গ) $\{\varnothing, \{2\}, \{3\}, \{7\}, \{2,3\}, \{2,7\}, \{3,7\}, \{2,3,7\}\}$

৬ $A = \{a,b\}$, $B = \{a,b,c\}$ এবং $C = A \cup B$ হলে, দেখাও যে, $P(C)$ এর উপাদান সংখ্যা 2^n, যেখানে n হচ্ছে C এর উপাদান সংখ্যা।

সমাধানঃ দেওয়া আছে, $A = \{a, b\}$, $B = \{a, b, c\}$ এবং $C = A \cup B$
$\therefore C = \{a, b\} \cup \{a, b, c\} = \{a, b, c\}$
$\therefore P(C) = \{\{a,b,c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \varnothing\}$
এক্ষেত্রে C এর উপাদান 3টি, যথা: a, b এবং c। সুতরাং C এর উপাদান সংখ্যা 'n' হলে, এক্ষেত্রে $n = 3$

আবার, গণনা করে দেখা যায় $P(C)$ এর উপাদান সংখ্যা $= 8 = 2^3 = 2^n$; $[\because n = 3]$
অর্থাৎ $P(C)$ এর উপাদান সংখ্যা 2^n, যেখানে n হচ্ছে C এর উপাদান সংখ্যা।
(দেখানো হলো)

◆◆ অনুশীলনী ১, ৩, ৪ ও ৬নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

(i) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ [রা.বো-'১৬] *$A = \{x \in N : x^2 > 15$ এবং $x^3 < 225\}$* *$B = \{x \in N : 4 \le x \le 7\}$ এবং $C = A \cup B$* *ক. A সেটটি তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।* *খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $(A \cap B)' = A' \cup B'$* *গ. C সেটের উপাদান সংখ্যা n হলে, দেখাও যে, $P(C)$ এর উপাদান সংখ্যা 2^n কে সমর্থন করে।*	নিজে নিজে চেষ্টা কর। **উত্তরঃ** (ক) $A = \{4, 5, 6\}$
(ii) $A = \{4\}$; $B = \{x \in N : x$, 36 এর গুণনীয়ক এবং 6 এর গুণিতক$\}$, $C = B \setminus A$, *$M = \{x : x \in N, -10 < x < 0\}$* *ক. $Y = \{x \in N : x^2 > 9$ এবং $x^3 < 130\}$ কে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।* *খ. C সেটটি নির্ণয় কর।* *গ. দেখাও যে, M এর শক্তি সেটের উপাদান সংখ্যা 2^n কে সমর্থন করে।*	নিজে নিজে চেষ্টা কর। **উত্তরঃ** (ক) $Y = \{4, 5\}$ (খ) $\{6, 12, 18, 36\}$

৭ (ক) $(x - 1, y + 2) = (y - 2, 2x + 1)$ হলে, x এবং y এর মান নির্ণয় কর।
(খ) $(ax - cy, a^2 - c^2) = (0, ay - cx)$ হলে, (x, y) এর মান নির্ণয় কর।
(গ) $(6x - y, 13) = (1, 3x + 2y)$ হলে, (x, y) নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

ক দেওয়া আছে, $(x - 1, y + 2) = (y - 2, 2x + 1)$
ক্রমজোড়ের নিয়ম অনুসারে পাই, $x - 1 = y - 2$ ... ... (i)
$y + 2 = 2x + 1$... ... ...(ii)
(i) নং হতে পাই, $x - 1 = y - 2$
বা, $y = x - 1 + 2$
$\therefore y = x + 1$ ... ... (iii)
y এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,
$(x + 1) + 2 = 2x + 1$
বা, $x + 1 + 2 = 2x + 1$
বা, $x + 3 = 2x + 1$
বা, $x - 2x = 1 - 3$
বা, $-x = -2$
$\therefore x = 2$
x এর মান (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,
$y = 2 + 1 = 3$
$\therefore$ x এবং y এর মান যথাক্রমে 2 এবং 3 **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $(ax - cy, a^2 - c^2) = (0, ay - cx)$

ক্রমজোড়ের নিয়ম অনুসারে পাই–

$ax - cy = 0$ ... ...(i)

$ay - cx = a^2 - c^2$ ... ... (ii)

(i) নং সমীকরণ হতে পাই, $ax - cy = 0$

বা, $ax = cy$

$\therefore y = \frac{ax}{c}$ ... ... (iii)

y এর মান (ii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$a.\frac{ax}{c} - cx = a^2 - c^2$

বা, $x\left(\frac{a^2 - c^2}{c}\right) = a^2 - c^2$

বা, $x = \frac{(a^2 - c^2) \times c}{(a^2 - c^2)}$

$\therefore x = c$

x এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই, $y = \frac{a.c}{c}$

$\therefore y = a$

$\therefore (x, y) = (c, a)$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $(6x - y, 13) = (1, 3x + 2y)$

ক্রমজোড়ের নিয়মানুসারে, $6x - y = 1$ ... ... (i)

এবং $3x + 2y = 13$ ... ... (ii)

(i) নং হতে পাই, $6x - y = 1$

বা, $y = 6x - 1$ ... ... (iii)

y এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই, $3x + 2(6x - 1) = 13$

বা, $3x + 12x - 2 = 13$

বা, $15x = 13 + 2$

বা, $x = \frac{15}{15} = 1$

x এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই, $y = 6 \times 1 - 1$

$= 6 - 1 = 5$

$\therefore (x, y) = (1, 5)$ **(Ans.)**

৮ (ক) **$P = \{a\}, Q = \{b, c\}$ হলে, $P \times Q$ এবং $Q \times P$ নির্ণয় কর।**

(খ) $A = \{3, 4, 5\}, B = \{4, 5, 6\}$ এবং $C = \{x, y\}$ হলে, $(A \cap B) \times C$ নির্ণয় কর।

(গ) $P = \{3, 5, 7\}, Q = \{5, 7\}$ এবং $R = P \setminus Q$ হলে, $(P \cup Q) \times R$ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

ক দেওয়া আছে, $P = \{a\}, Q = \{b, c\}$

$\therefore P \times Q = \{a\} \times \{b, c\} = \{(a, b), (a, c)\}$

এবং $Q \times P = \{b, c\} \times \{a\} = \{(b, a), (c, a)\}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $A = \{3, 4, 5\}, B = \{4, 5, 6\}$ এবং $C = \{x, y\}$

এখন, $A \cap B = \{3, 4, 5\} \cap \{4, 5, 6\} = \{4, 5\}$

$\therefore (A \cap B) \times C = \{4, 5\} \times \{x, y\}$

$= \{(4, x), (4, y), (5, x), (5, y)\}$ **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $P = \{3, 5, 7\}, Q = \{5, 7\}$ এবং $R = P \setminus Q$

$\therefore R = P \setminus Q = \{3, 5, 7\} \setminus \{5, 7\} = \{3\}$

আবার, $P \cup Q = \{3, 5, 7\} \cup \{5, 7\} = \{3, 5, 7\}$

$\therefore (P \cup Q) \times R = \{3, 5, 7\} \times \{3\} = \{(3, 3), (5, 3), (7, 3)\}$ **(Ans.)**

◆◆ অনুশীলনী ১, ৪, ৬, ৮ ও উদা-৫ নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

(i) $f(x) = x^2 + 4x + 3$ [ঢা.বো-'১৭] $A = \{x \in N : x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $x < 6\}$ $B = \{x \in N : x, 21$ এর গুণনীয়ক $\}$ এবং $C = \{x \in N : x, 7$ এর গুণিতক এবং $x < 35\}$ ক. $f(-1)$ এর মান নির্ণয় কর। খ. দেখাও যে, A এর উপাদান সংখ্যা n হলে, $P(A)$ এর উপাদান সংখ্যা 2^n কে সমর্থন করে। গ. দেখাও যে $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$	নিজে নিজে চেষ্টা কর। **উত্তরঃ** (ক) 0
(ii) $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ [সি.বো-'১৫] $A = \{x : x \in N$ এবং $x^2 - (a + b)x + ab = 0\}$ $B = \{x : x \in N; x^2 > 15$ এবং $x^3 < 225\}; C = \{x \in N, 4 < x \leq 7\}$ ক. A সেটকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর। খ. প্রমাণ কর যে, $(B \cup C)' = B' \cap C'$ গ. $A \times (B \cup C)$ এবং $A \times (B \cap C)$ এর মান নির্ণয় কর।	নিজে নিজে চেষ্টা কর। **উত্তরঃ** (ক) $A = \varnothing$ (গ) $A \times (B \cup C) = \varnothing$, $A \times (B \cap C) = \varnothing$
(iii) A সেটের শক্তি সেট $P(A) = \{\varnothing\}; B = \{y, z\}, C = \{x : x$ মৌলিক সংখ্যা, $13 < x < 17\}$। ক. $P = \{x, y, z\}$ এর উপসেটগুলো লিখ এবং সেগুলো থেকে প্রকৃত উপসেট বাছাই কর। খ. A সেট নির্ণয় করে দেখাও যে, A এর উপাদান সংখ্যা n হলে, $P(A)$ এর উপাদান সংখ্যা 2^n কে সমর্থন করে। গ. দেখাও যে, $C \times B = B \times C$.	নিজে নিজে চেষ্টা কর।

৯ **A ও B যথাক্রমে 35 এবং 45 এর সকল গুণনীয়কের সেট হলে, $A \cup B$ ও $A \cap B$ নির্ণয় কর।**

সমাধান: দেওয়া আছে, A = 35 এর সকল গুণনীয়ক
এবং B = 45 এর সকল গুণনীয়ক

$35 = 1 \times 35$
$= 5 \times 7$

$\therefore$ 35 এর গুণনীয়ক সমূহ 1, 5, 7, 35

সুতরাং $A = \{1, 5, 7, 35\}$

$45 = 1 \times 45$
$= 3 \times 15$
$= 5 \times 9$

$\therefore$ 45 এর গুণনীয়ক সমূহ 1, 3, 5, 9, 15, 45

সুতরাং $B = \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$

$\therefore A \cup B = \{1, 5, 7, 35\} \cup \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$
$= \{1, 3, 5, 7, 9, 15, 35, 45\}$ **(Ans.)**

$A \cap B = \{1, 5, 7, 35\} \cap \{1, 3, 5, 9, 15, 45\}$
$= \{1, 5\}$ **(Ans.)**

বি.দ্র: গুণনীয়ক ও গুণিতকের সংজ্ঞানুসারে যেকোনো পূর্ণসংখ্যাই গুণনীয়ক বা গুণিতক হিসেবে বিবেচিত হতে পারে। কিন্তু পাঠ্যবইতে গুণনীয়ক বা গুণিতক হিসেবে শুধুমাত্র ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা বিবেচনা করা হয়েছে; ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা ও শূন্যকে বিবেচনা করা হয়নি। তাই এই গাণিতিক সমস্যাটি সমাধানের ক্ষেত্রে, শূন্য এবং ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যাকে গুণনীয়ক বা গুণিতক হিসেবে বিবেচনায় নেওয়া হয়নি।

১০ **যে সকল স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা 346 এবং 556 কে ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে 31 অবশিষ্ট থাকে, এদের সেট নির্ণয় কর।**

সমাধান: যে সকল স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা 346 এবং 556 কে ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে 31 অবশিষ্ট থাকে, সে সংখ্যাগুলো অবশ্যই 31 অপেক্ষা বড় এবং তারা $(346 - 31) = 315$ ও $(556 - 31) = 525$ এর সাধারণ গুণনীয়ক।

মনে করি, 31 অপেক্ষা বড় 315 এর গুণনীয়কের সেট $= A$
এবং 31 অপেক্ষা বড় 525 এর গুণনীয়কের সেট $= B$

এখন, $315 = 1 \times 315$
$= 3 \times 105$
$= 5 \times 63$
$= 7 \times 45$
$= 9 \times 35$
$= 15 \times 21$

$\therefore$ 31 অপেক্ষা বড় 315 এর গুণনীয়ক সমূহ 35, 45, 63, 105, 315

সুতরাং $A = \{35, 45, 63, 105, 315\}$

$525 = 1 \times 525$
$= 3 \times 175$
$= 5 \times 105$
$= 7 \times 75$
$= 15 \times 35$
$= 21 \times 25$

$\therefore$ 31 অপেক্ষা বড় 525 এর গুণনীয়ক সমূহ 35, 75, 105, 175, 525

সুতরাং $B = \{35, 75, 105, 175, 525\}$

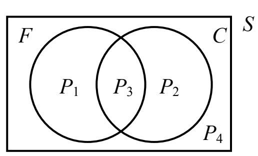
$\therefore$ নির্ণেয় সেট $= A \cap B$
$= \{35, 45, 63, 105, 315\} \cap \{35, 75, 105, 175, 525\}$
$= \{35, 105\}$ **(Ans.)**

◆◆ অনুশীলনী ১০ ও উদা-১৩ নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

কিছু স্বাভাবিক সংখ্যা দ্বারা 311 ও 419 কে ভাগ করলে প্রতিক্ষেত্রে 23 অবশিষ্ট থাকে। তাদের সেট যথাক্রমে A ও B। *ক. 311 ও 419 এর গুণনীয়কসমূহ লিখ।* *খ. দেখাও যে, $A \cap B = \{36\}$* *গ. প্রমাণ কর যে, $(A \cup B)' = A' \cap B'$*	নিজে নিজে চেষ্টা কর। **উত্তর:** (ক) 1, 311 এবং 1, 419

১১ **কোনো শ্রেণির 30 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে 20 জন ফুটবল এবং 15 জন ক্রিকেট খেলা পছন্দ করে। দুইটি খেলাই পছন্দ করে এরূপ শিক্ষার্থীর সংখ্যা 10; কতজন শিক্ষার্থী দুইটি খেলাই পছন্দ করে না তা ভেন চিত্রের সাহায্যে নির্ণয় কর।**

সমাধান:



মনে করি, ভেনচিত্রে আয়তাকার ক্ষেত্রটি 30 জন শিক্ষার্থীর সেট S নির্দেশ করে। যারা ফুটবল ও ক্রিকেট খেলা পছন্দ করে তাদের সেট যথাক্রমে F ও C বৃত্ত দ্বারা নির্দেশ করা হয়েছে। ফলে ভেনচিত্রটি চারটি নিশ্ছেদ সেটে বিভক্ত হয়েছে, যাদেরকে P_1, P_2, P_3, P_4 দ্বারা চিহ্নিত করা হলো।

যারা ফুটবল খেলা পছন্দ করে তাদের সেট F হলে, এর সদস্য সংখ্যা 20 এবং যারা ক্রিকেট খেলা পছন্দ করে তাদের সেট C হলে, এর সদস্য সংখ্যা 15

যারা উভয় খেলা পছন্দ করে তাদের সেট $P_3 = F \cap C$ হলে, এর সদস্য সংখ্যা 10

$\therefore$ যারা শুধু ফুটবল খেলা পছন্দ করে তাদের সেট P_1 হলে, P_1 -এর সদস্য সংখ্যা $= 20 - 10 = 10$

$\therefore$ যারা শুধু ক্রিকেট খেলা পছন্দ করে তাদের সেট P_2 হলে, P_2 -এর সদস্য সংখ্যা $= 15 - 10 = 5$

$\therefore$ যারা যেকোনো একটি খেলা এবং উভয় খেলা পছন্দ করে তাদের সেট $= P_1 \cup P_2 \cup P_3 = F \cup C$, যার সদস্য সংখ্যা $= 10 + 10 + 5 = 25$

$\therefore$ দুইটি খেলাই পছন্দ করে না (অর্থাৎ একটি খেলাও পছন্দ করে না) এমন শিক্ষার্থীর সেট P_4 হলে, এর সদস্য সংখ্যা $= 30 - 25 = 5$

$\therefore$ নির্ণেয় শিক্ষার্থীর সংখ্যা 5

◆◆ অনুশীলনী ৮, ১১ ও উদা-১৪ নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

তোমাদের বিদ্যালয়ের নবম শ্রেণীর 100 জন শিক্ষার্থীদের 55% মিষ্টি, 65% ফল এবং 30% শিক্ষার্থী উভয় প্রকার টিফিন পছন্দ করে। *ক. সংক্ষিপ্ত বিবরণসহ ওপরের তথ্যগুলোকে ভেনচিত্রের সাহায্যে দেখাও।* *খ. শতকরা কতজন শিক্ষার্থী উভয় প্রকার টিফিন পছন্দ করে না তা নির্ণয় কর।* *গ. শুধু মিষ্টি পছন্দ করে এবং শুধু ফল পছন্দ করে এমন শিক্ষার্থী সংখ্যার গুণনীয়কের সেটকে যথাক্রমে A ও B ধরে কার্তেসীয় গুণজের মাধ্যমে প্রকাশ কর। (ক্রমজোড়ে A এর অবস্থান প্রথম বিবেচ্য)।*	**উত্তর:** (খ) 10 জন (গ) $\{(1, 1), (1, 5), (1, 7), (1, 35), (5, 1), (5, 5), (5, 7), (5, 35), (25,1), (25,5), (25,7), (25,35)\}$

১২ **100 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে কোনো পরীক্ষায় 65 শিক্ষার্থী বাংলায়, 48 শিক্ষার্থী বাংলা ও ইংরেজি উভয় বিষয়ে পাশ এবং 15 শিক্ষার্থী উভয় বিষয়ে ফেল করেছে।**

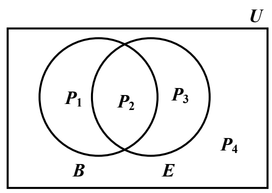
ক. সংক্ষিপ্ত বিবরণসহ ওপরের তথ্যগুলো ভেনচিত্রে প্রকাশ কর।

খ. শুধু বাংলায় ও ইংরেজিতে পাশ করেছে তাদের সংখ্যা নির্ণয় কর।

গ. উভয় বিষয়ে পাশ এবং উভয় বিষয়ে ফেল সংখ্যাদ্বয়ের মৌলিক গুণনীয়কসমূহের সেট দুইটির সংযোগ সেট নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

ক) এখানে আয়তাকার ক্ষেত্র U, 100 জন শিক্ষার্থীর সেট নির্দেশ করে। B এবং E চিহ্নিত বৃত্তাকার ক্ষেত্র দুইটি যথাক্রমে বাংলা এবং ইংরেজি বিষয়ে পাশ শিক্ষার্থীর সেট নির্দেশ করে। ফলে ভেনচিত্রটি চারটি নিশ্ছেদ সেটে বিভক্ত হয়েছে, যাদেরকে P_1, P_2, P_3, P_4 দ্বারা নির্দেশ করা হলো।



খ) এখানে মোট শিক্ষার্থীর সেট U, যার সদস্য সংখ্যা 100

যারা বাংলায় পাশ করেছে তাদের সেট B, যার সদস্য সংখ্যা 65

যারা উভয় বিষয়ে পাশ করেছে তাদের সেট P_2, যার সদস্য সংখ্যা 48

যারা উভয় বিষয়ে ফেল করেছে তাদের সেট P_4, যার সদস্য সংখ্যা 15

$\therefore$ যারা শুধু বাংলায় পাশ করেছে তাদের সেট P_1 হলে এর সদস্য সংখ্যা $(65 - 48) = 17$

যারা শুধু ইংরেজিতে পাশ করেছে তাদের সেট P_3।

P_3 এর সদস্যসংখ্যা x হলে ভেনচিত্র অনুসারে পাই,

$17 + 48 + x + 15 = 100$

বা, $x = 100 - (17 + 48 + 15)$

$\therefore x = 20$

$\therefore$ যারা শুধু ইংরেজিতে পাশ করে তাদের সংখ্যা 20

গ) উভয় বিষয়ে পাশ করে 48 জন

আবার, উভয় বিষয়ে ফেল করে 15 জন

ধরি, 48 এর মৌলিক গুণনীয়কসমূহের সেট A

এবং 15 এর মৌলিক গুণনীয়কসমূহের সেট B

$48 = 1 \times 48 = 2 \times 24 = 3 \times 16 = 4 \times 12 = 6 \times 8$

48 এর মৌলিক গুণনীয়কসমূহ হলোঃ 2, 3 $\quad \therefore A = \{2, 3\}$

আবার, $15 = 1 \times 15 = 3 \times 5$

15 এর মৌলিক গুণনীয়কসমূহ হলোঃ 3, 5 $\quad \therefore B = \{3, 5\}$

A ও B এর সংযোগ সেট $A \cup B$ হলে,

$A \cup B = \{2, 3\} \cup \{3, 5\} = \{2, 3, 5\}$

অর্থাৎ উভয় বিষয়ে পাশ এবং উভয় বিষয়ে ফেল সংখ্যাদ্বয়ের মৌলিক গুণনীয়কসমূহের সেট দুইটির সংযোগ সেট হলো $\{2, 3, 5\}$।

◆◆ অনুশীলনী ৯, ১১, ১২ ও উদা-১৪ নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

200 জন শিক্ষার্থীর মধ্যে কোনো পরীক্ষায় বাংলায় 65% ও 25% বাংলা ও গণিত উভয় বিষয়ে পাশ করেছে এবং 20% শিক্ষার্থী কোনো বিষয়েই পাশ করেনি। *ক. উদ্দীপকের তথ্যগুলো ভেনচিত্রে প্রকাশ কর।* *খ. শুধুমাত্র গণিতে পাশ করেছে কতজন?* *গ. উভয় বিষয়ে পাশ ও ফেল সংখ্যাদ্বয়ের মৌলিক গুণনীয়কসমূহের সেট দুইটির সংযোগ সেট বের কর।*	নিজে নিজে চেষ্টা কর। **উত্তরঃ** (খ) 30 জন (গ) $\{2, 5\}$

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

কাজ *পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২৩*

ক) $C = \{-9, -6, -3, 3, 6, 9\}$ সেটটিকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

খ) $B = \{y : y$ পূর্ণ সংখ্যা এবং $y^3 \leq 18\}$ সেটটিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।

সমাধানঃ

ক) C সেটের উপাদানসমূহ $-9, -6, -3, 3, 6, 9$

এখানে, প্রত্যেকটি উপাদান 3 দ্বারা বিভাজ্য।

আরও লক্ষণীয় যে, উপাদানসমূহ 9 এর চেয়ে বড় নয় এবং -9 এর চেয়ে ছোটও নয়।

$\therefore C = \{x : \frac{x}{3} \in Z, -9 \leq x \leq 9$ এবং $x \neq 0\}$

✉ **জেনে রাখঃ** পাঠ্যবইতে গুণিতক এবং গুণনীয়ক হিসেবে শুধুমাত্র ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা বিবেচনা করা হয়েছে। ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা এবং শূন্যকে বিবেচনা করা হয়নি। যদিও গুণিতক বা গুণনীয়কের সংজ্ঞানুসারে এরা যেকোনো পূর্ণসংখ্যা হতে পারে অর্থাৎ ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা, ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা বা শূন্য হতে পারে।

গুণিতক হিসেবে সকল পূর্ণসংখ্যা অর্থাৎ ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা, শূন্য এবং ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা বিবেচনা করলে উপরোক্ত গাণিতিক সমস্যাটির সমাধান নিম্নরূপে করা যায়।

সমাধানঃ C সেটের উপাদানসমূহ $-9, -6, -3, 3, 6, 9$

এখানে, প্রত্যেকটি উপাদান 3 দ্বারা বিভাজ্য। অর্থাৎ 3 এর গুণিতক।

আরও লক্ষণীয় যে উপাদানসমূহ 9 এর চেয়ে বড় নয় এবং -9 এর চেয়ে ছোটও নয়।

$\therefore C = \{x : x$, 3 এর গুণিতক, $-9 \leq x \leq 9$ এবং $x \neq 0\}$

খ $B = \{y : y$ পূর্ণ সংখ্যা এবং $y^3 \leq 18\}$
পূর্ণ সংখ্যা সমূহ হলোঃ $..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ...$

$y = -1$ হলে, $(-1)^3 = -1 \leq 18$
$\therefore y = -1$ গ্রহণযোগ্য।
$y = -2$ হলে, $(-2)^3 = -8 \leq 18$
$\therefore y = -2$ গ্রহণযোগ্য।
$y = -3$ হলে, $(-3)^3 = -27 \leq 18$
$\therefore y = -3$ গ্রহণযোগ্য।
....
....
অর্থাৎ y এর মান সকল ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যার জন্য $y^3 \leq 18$ সত্য।
আবার, $y = 0$ হলে, $y^3 = 0^3 = 0 \leq 18$
$\therefore y = 0$ গ্রহণযোগ্য।
$y = 1$ হলে, $y^3 = 1^3 = 1 \leq 18$
$\therefore y = 1$ গ্রহণযোগ্য।
$y = 2$ হলে, $y^3 = 2^3 = 8 \leq 18$
$\therefore y = 2$ গ্রহণযোগ্য।
$y = 3$ হলে, $y^3 = 3^3 = 27 \nleq 18$
$\therefore y = 3$ গ্রহণযোগ্য নয়।
অর্থাৎ 2 এর চেয়ে বড় y এর যেকোনো মানের জন্য $y^3 \leq 18$ সত্য নয়।
শর্তানুসারে গ্রহণযোগ্য পূর্ণসংখ্যা সমূহঃ $..., -3, -2, -1, 0, 1, 2$
$\therefore$ নির্ণেয় সেট, $B = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2\}$ **(Ans.)**

কাজ *পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২৪*

সসীম সেট ও অসীম সেট নির্ণয় করঃ
ক) $\{3, 5, 7\}$ খ) $\{1, 2, 2^2, ... 2^{10}\}$ গ) $\{3, 3^2, 3^3, ...\}$
ঘ) $\{x : x$ পূর্ণসংখ্যা এবং $x < 4\}$
ঙ) $\{\frac{p}{q} : p$ ও q পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1\}$
চ) $\{y : y \in N$ এবং $y^2 < 100 < y^3\}$

সমাধানঃ
সসীম সেটঃ যে সেটের উপাদান সংখ্যা গণনা করে নির্ধারণ করা যায় তাকে সসীম সেট বলে।
অসীম সেটঃ যে সেটের উপাদান সংখ্যা গণনা করে শেষ করা যায় না, তাকে অসীম সেট বলে।

ক $\{3, 5, 7\}$ সেটের উপাদান সংখ্যা 3.
অর্থাৎ সেটটির উপাদান সংখ্যা গণনা করে নির্ধারণ করা যায়।
সুতরাং $\{3, 5, 7\}$ একটি সসীম সেট।

খ $\{1, 2, 2^2, ... 2^{10}\}$ এর উপাদানগুলো হলো $1, 2, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6, 2^7, 2^8, 2^9, 2^{10}$
$\therefore$ সেটটির উপাদান সংখ্যা 11
অর্থাৎ সেটটির উপাদান সংখ্যা গণনা করে নির্ধারণ করা যায়।
সুতরাং $\{1, 2, 2^2, ... 2^{10}\}$ একটি সসীম সেট।

গ $\{3, 3^2, 3^3, ...\}$ সেটে অসংখ্য উপাদান আছে যা গণনা করে শেষ করা যায় না।
সুতরাং $\{3, 3^2, 3^3, ...\}$ একটি অসীম সেট।

ঘ পূর্ণ সংখ্যাসমূহ হলোঃ $... -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...$
প্রদত্ত সেট $\{x : x$ পূর্ণসংখ্যা এবং $x < 4\}$ একটি অসীম সেট। কারণ এক্ষেত্রে 4 এর চেয়ে ছোট অসংখ্য পূর্ণ সংখ্যা $(..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3)$ বিদ্যমান, যাদের গণনা করে শেষ করা যায় না।

ঙ $\{\frac{p}{q} : p$ ও q পরস্পর সহমৌলিক এবং $q > 1\}$ এটি একটি অসীম সেট।
কারণ প্রদত্ত সেটটি হলো সকল মূলদ সংখ্যার সেট। যেহেতু মূলদ সংখ্যা গণনা করে শেষ করা যায় না তাই প্রদত্ত সেটের উপাদান সংখ্যা অসীম।

চ প্রদত্ত সেটটি হলোঃ $\{y : y \in N$ এবং $y^2 < 100 < y^3\}$। এখানে N হলো স্বাভাবিক সংখ্যার সেট যার সদস্যসমূহ হলোঃ $1, 2, 3, 4, ...$
প্রদত্ত শর্তানুসারে, y এর মান এমন স্বাভাবিক সংখ্যা যার বর্গ 100 থেকে ছোট কিন্তু যার ঘন 100 থেকে বড়।
$y = 1$ হলে, $y^2 = 1^2 = 1$ এবং $y^3 = 1^3 = 1$; যা 100 থেকে বড় নয়
$\therefore y = 1$ গ্রহণযোগ্য নয়।
$y = 2$ হলে, $y^2 = 2^2 = 4$ এবং $y^3 = 2^3 = 8$; যা 100 থেকে বড় নয়
$\therefore y = 2$ গ্রহণযোগ্য নয়।
$y = 3$ হলে, $y^2 = 3^2 = 9$ এবং $y^3 = 3^3 = 27$; যা 100 থেকে বড় নয়
$\therefore y = 3$ গ্রহণযোগ্য নয়।
$y = 4$ হলে, $y^2 = 4^2 = 16$ এবং $y^3 = 4^3 = 64$; যা 100 থেকে বড় নয়
$\therefore y = 4$ গ্রহণযোগ্য নয়।
$y = 5$ হলে, $y^2 = 5^2 = 25$ এবং $y^3 = 5^3 = 125$
$\therefore y = 5$ গ্রহণযোগ্য।
$y = 6$ হলে, $y^2 = 6^2 = 36$ এবং $y^3 = 6^3 = 216$
$\therefore y = 6$ গ্রহণযোগ্য।
$y = 7$ হলে, $y^2 = 7^2 = 49$ এবং $y^3 = 7^3 = 343$
$\therefore y = 7$ গ্রহণযোগ্য।
$y = 8$ হলে, $y^2 = 8^2 = 64$ এবং $y^3 = 8^3 = 512$
$\therefore y = 8$ গ্রহণযোগ্য।
$y = 9$ হলে, $y^2 = 9^2 = 81$ এবং $y^3 = 9^3 = 729$
$\therefore y = 9$ গ্রহণযোগ্য।
$y = 10$ হলে, $y^2 = 10^2 = 100$ যা 100 থেকে ছোট নয়
$\therefore y = 10$ গ্রহণযোগ্য নয়।
শর্তানুসারে গ্রহণযোগ্য স্বাভাবিক সংখ্যা সমূহঃ 5, 6, 7, 8 ও 9
$\therefore$ নির্ণেয় সেটঃ $\{5, 6, 7, 8, 9\}$

কাজ *পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২৭*

$U = \{1, 3, 5, 9, 7, 11\}$, $E = \{1, 5, 9\}$ এবং $F = \{3, 7, 11\}$ হলে, $E^c \cup F^c$ এবং $E^c \cap F^c$ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ $E^c = U \setminus E = \{1, 3, 5, 9, 7, 11\} \setminus \{1, 5, 9\} = \{3, 7, 11\}$
$F^c = U \setminus F = \{1, 3, 5, 9, 7, 11\} \setminus \{3, 7, 11\} = \{1, 5, 9\}$
$\therefore E^c \cup F^c = \{3, 7, 11\} \cup \{1, 5, 9\}$
$= \{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$ **(Ans.)**
এবং $E^c \cap F^c = \{3, 7, 11\} \cap \{1, 5, 9\} = \{\ \}$ **(Ans.)**

কাজ *পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২৮*

$G = \{1, 2, 3\}$ হলে, $P(G)$ নির্ণয় কর। দেখাও যে, $P(G)$ এর উপাদান সংখ্যা 2^3।

সমাধানঃ $G = \{1, 2, 3\}$। G এর শক্তিসেট $P(G)$ হলে,
$P(G) = \{\{1, 2, 3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \varnothing\}$
গণনা করে দেখা যাচ্ছে $P(G)$ এর উপাদান সংখ্যা $= 8 = 2^3$
অর্থাৎ $P(G)$ এর উপাদান সংখ্যা 2^3 **[দেখানো হলো]**

◆◆ পাঠ্যবইয়ের ২৪ ও ২৮ নং পৃষ্ঠার অনুশীলনমূলক কাজের প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

$A = \{1, 2, 2^2, ..., 2^{10}\}$ $B = \{3, 3^2, 3^3, ...\}$ এবং $C = \{x : x$ পূর্ণ সংখ্যা এবং $x < 4\}$ ক. সসীম ও অসীম সেটগুলো চিহ্নিত কর। খ. $P(B \cap C)$ নির্ণয় কর। গ. দেখাও যে, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$.	নিজে নিজে চেষ্টা কর।

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২৯

ক) $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}, 1\right) = \left(1, \frac{x}{3}+\frac{y}{2}\right)$ হলে, (x, y) নির্ণয় কর।

খ) $P = \{1, 2, 3\}$, $Q = \{3, 4\}$ এবং $R = \{x, y\}$ হলে, $(P \cup Q) \times R$ এবং $(P \cap Q) \times Q$ নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

ক দেওয়া আছে, $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}, 1\right) = \left(1, \frac{x}{3}+\frac{y}{2}\right)$

ক্রমজোড়ের শর্তানুসারে, $\frac{x}{2}+\frac{y}{3} = 1$ ... ... (i)

এবং $\frac{x}{3}+\frac{y}{2} = 1$ ... ... (ii)

(i) নং হতে পাই, $\frac{x}{2}+\frac{y}{3} = 1$

বা, $\frac{3x+2y}{6} = 1$

$\therefore 3x + 2y = 6$ ... ... (iii)

(ii) নং হতে পাই, $\frac{x}{3}+\frac{y}{2} = 1$

বা, $\frac{2x+3y}{6} = 1$

$\therefore 2x + 3y = 6$ ... ... (iv)

সমীকরণ (iii) নং কে 3 দ্বারা এবং সমীকরণে (iv) নং কে 2 দ্বারা গুণ করে প্রাপ্ত সমীকরণদ্বয়ের প্রথমটি থেকে দ্বিতীয়টি বিয়োগ করে পাই-

$(9x + 6y) - (4x + 6y) = 18 - 12$

বা, $5x = 6$

$\therefore x = \frac{6}{5}$

x এর মান (iii) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$3 \times \frac{6}{5} + 2y = 6$

বা, $\frac{18}{5} + 2y = 6$

বা, $2y = 6 - \frac{18}{5} = \frac{30-18}{5} = \frac{12}{5}$

বা, $y = \frac{12}{5\times2} = \frac{6}{5}$

$\therefore y = \frac{6}{5}$

$\therefore (x, y) = \left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5}\right)$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $P = \{1, 2, 3\}, Q = \{3, 4\}$ এবং $R = \{x, y\}$

$\therefore P \cup Q = \{1, 2, 3\} \cup \{3, 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$

$\therefore (P \cup Q) \times R = \{1, 2, 3, 4\} \times \{x, y\}$

$= \{(1, x), (1, y), (2, x), (2, y), (3, x), (3, y), (4, x), (4, y)\}$ **(Ans.)**

আবার, $P \cap Q = \{1, 2, 3\} \cap (3, 4\} = \{3\}$

$\therefore (P \cap Q) \times Q = \{3\} \times \{3, 4\}$

$= \{(3, 3), (3, 4)\}$ **(Ans.)**

◆◆ পাঠ্যবইয়ের ২৯নং পৃষ্ঠার অনুশীলনমূলক কাজের প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

(i) x ও y চলকের ক্রমজোড় $\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}, 1\right) = \left(1, \frac{x}{3}+\frac{y}{2}\right)$ *(ii)* $P = \{1, 2, 3\}, Q = \{3, 4\}, R = \{x : x \in N, 1 < x < 2\}$। *ক.* $\{3, 5, 7, 9, 11\}$ *সেটকে সেট গঠন পদ্ধতিতে প্রকাশ কর।* *খ.* (x, y) *নির্ণয় কর।* *গ. দেখাও যে,* $P \times (Q \cup R) = (P \times Q) \cup (P \times R)$.	**উত্তরঃ** (ক) $\{x \in N : x$ বিজোড় সংখ্যা এবং $1 < x \leq 11\}$ (খ) $(x, y) = \left(\frac{6}{5}, \frac{6}{5}\right)$