অনুশীলনী - ১.২

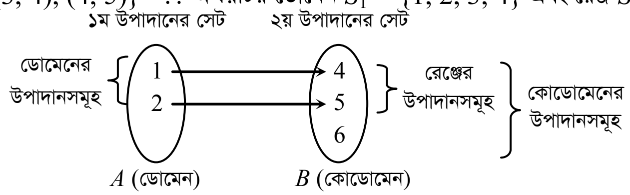
অন্বয়

অন্বয়: গণিতের পরিভাষায় যেকোনো সম্পর্কই হলো অন্বয়। যেমন: মা-ছেলের সম্পর্ক, ভাই-বোনের সম্পর্ক, স্বাভাবিক সংখ্যা 3 ও 9 এর সম্পর্ক ইত্যাদি। যেহেতু যেকোনো ধরনের সম্পর্কই অন্বয়। তাই অন্বয়ে কোনো বাধাধরা নিয়ম নেই।
কোনো অন্বয়কে তালিকাভুক্ত পদ্ধতিতে প্রকাশই হলো অন্বয়ের **ক্রমজোড়**। যেমন:
$S_1 = \{(a, x), (b, y), (c, z)\}$; $S_2 = \{(x, 3), (y, 2), (z, 1)\}$; $S_3 = \{(a, 4), (b, 6), (c, 5)\}$

অন্বয়ের ডোমেন, রেঞ্জ ও কোডোমেন:

অন্বয়ের ডোমেন: কোনো অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর **১ম** উপাদানের সেটকে এর ডোমেন বলে।
অন্বয়ের রেঞ্জ: কোনো অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর **২য়** উপাদানের সেটকে এর রেঞ্জ বলে।
উদাহরণ: $S_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$ $\therefore$ অন্বয়টির ডোমেন $S_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ এবং রেঞ্জ $S_1 = \{2, 3, 4, 5\}$

এসো আরেকটি উদাহরণ লক্ষ করি:



ডোমেন: A সেটের উপাদানসমূহের সেট হচ্ছে ডোমেন। অর্থাৎ ডোমেন $= \{1, 2\}$।
কোডোমেন: B সেটের উপাদানসমূহের সেট হচ্ছে কোডোমেন। অর্থাৎ কোডোমেন $= \{4, 5, 6\}$।
রেঞ্জ: A সেটের উপাদানসমূহ (1 ও 2), B সেটের দুটি (4 ও 5) উপাদানের সাথে সংশ্লিষ্ট। যেখানে $1 \to 4, 2 \to 5$। B সেটের যেসব উপাদান, A সেটের উপাদানের সাথে সংশ্লিষ্ট তাদের সেটকে রেঞ্জ বলে। অর্থাৎ রেঞ্জ $= \{4, 5\}$।

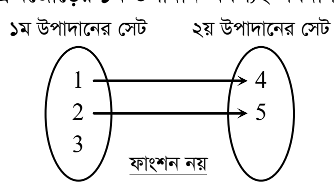
✉ **লক্ষণীয়:** B সেটের '6' উপাদানটি কোডোমেনের অন্তর্ভুক্ত, কিন্তু রেঞ্জের অন্তর্ভুক্ত নয়।

বিপরীত অন্বয় নির্ণয়: কোনো অন্বয়ের প্রতিটি ক্রমজোড়ের উপাদানগুলোর অবস্থান বিনিময়ের মাধ্যমে ঐ অন্বয়ের বিপরীত অন্বয় পাওয়া যায়।
যেমন: $S = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$ অন্বয়ের বিপরীত অন্বয় $S^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4)\}$

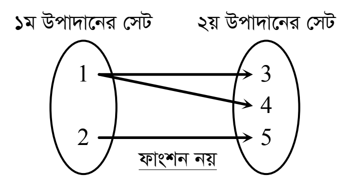
ফাংশন

ফাংশন: যদি x ও y সেট হয় এবং কোনো নিয়মের অধীনে x সেটের প্রত্যেক উপাদানের সঙ্গে y সেটের একটি ও কেবল একটি উপাদানকে সংশ্লিষ্ট করা হয়, তবে ঐ নিয়মকে x থেকে y এর বর্ণিত একটি ফাংশন বলা হয়।
অন্বয় যখন ফাংশন: কোনো অন্বয় ফাংশন হতে হলে নিম্নোক্ত শর্ত দুইটি অবশ্যই মেনে চলতে হবে।

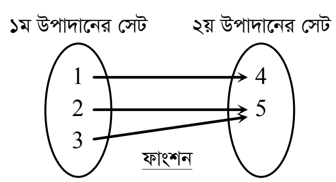
i. অন্বয়ের প্রতিটি ক্রমজোড়ের **১ম** উপাদানের সাথে দ্বিতীয় উপাদানের অবশ্যই সম্পর্ক থাকতে হবে।
ii. প্রতিটি ক্রমজোড়ের **১ম** উপাদান অবশ্যই সর্বদা ভিন্ন হবে।



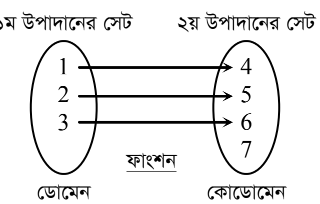
দ্বিতীয় উপাদানের সাথে সম্পর্কহীন প্রথম উপাদান (3)



একই প্রথম উপাদান (1) এর সাথে সম্পর্কিত দুটি দ্বিতীয় উপাদান (3 ও 4)



একই দ্বিতীয় উপাদান (5) এর সাথে সম্পর্কিত দুটি ভিন্ন প্রথম উপাদান (2 ও 3)



প্রথম উপাদান এর সাথে সম্পর্কহীন দ্বিতীয় উপাদান (7)

অসংজ্ঞায়িত রূপ:

i. কোনো ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূলের মান বাস্তব সংখ্যা নয়। যেমন: $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-5}$, $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-16}$ ইত্যাদির মান বাস্তব সংখ্যা নয়। সুতরাং বর্গমূলের ভেতরে অবস্থানকারী সংখ্যা বা রাশিকে অবশ্যই অঋণাত্মক হতে হবে।
ii. কোনো সংখ্যা বা রাশিকে শূন্য দ্বারা ভাগ করলে বাস্তব মান পাওয়া যায় না। যেমন: $\frac{2}{0} = \infty, \frac{x}{0} = \infty, \frac{-1}{0} = \infty, \frac{2x+3}{0} = \infty$

ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়: যেহেতু প্রত্যেক ফাংশন একটি অন্বয় সুতরাং ফাংশনের ডোমেন এবং রেঞ্জ বলতে অন্বয়ের ডোমেন এবং রেঞ্জকেই বোঝাবে। অতএব, $y = f(x)$ ফাংশনের (x, y) ক্রমজোড়গুলোর x এর মানকে ডোমেন এবং y এর মানকে রেঞ্জ বলে।
সহজভাবে বলতে, $y = f(x)$ ফাংশনটি

i. x এর যে সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত তাই ফাংশনের ডোমেন।
ii. আর x এর সকল মানের জন্য y বা $f(x)$ এর যে বাস্তব মান পাওয়া যায় তাই ফাংশনের রেঞ্জ।

নিম্নে উদাহরণের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা হলো:

(a) $f(x) = x$ ফাংশনের ক্ষেত্রে -

i. ফাংশনটি x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত। অতএব, ফাংশনের ডোমেন $= \boldsymbol{R}$

ii. ডোমেনের (x) প্রতিটি উপাদান থেকে যে প্রতিচ্ছবি / ইমেজ পাওয়া যায় তা বাস্তব সংখ্যার সেট নির্দেশ করে। $\therefore$ ফাংশনের রেঞ্জ $= \boldsymbol{R}$

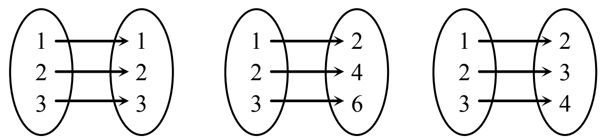
(b) $f(x) = x^2$ ফাংশনের ক্ষেত্রে -

i. ফাংশনটি x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত। অতএব, ফাংশনের ডোমেন $= \boldsymbol{R}$

ii. x এর সকল বাস্তব মানের (ধনাত্মক, অঋণাত্মক) জন্য $f(x)$ এর মান অঋণাত্মক সংখ্যা অর্থাৎ কখনোই শূন্য থেকে ছোট হবে না। অতএব, ফাংশনের রেঞ্জ $= \{f(x) \in R : f(x) \geq 0\}$

এক-এক ফাংশন: $f : x \rightarrow y$ ফাংশনের x এর একটি মানের জন্য y এর কেবলমাত্র একটি মান পাওয়া যায় তাকে এক-এক ফাংশন বলে।

সংজ্ঞা: যদি কোনো ফাংশনের অধীনে ডোমেনের ভিন্ন ভিন্ন সদস্যের ছবি সর্বদা ভিন্ন হয়, তবে ফাংশনটিকে এক-এক ফাংশন বলে।



$y = x$ $y = 2x$ $y = x + 1$

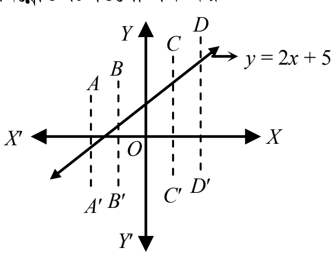
<u>জেনে রাখা ভালো</u>: যে কোনো একঘাত বিশিষ্ট সরলরৈখিক ফাংশন এক-এক ফাংশন। দ্বিঘাত সমীকরণ শর্তসাপেক্ষে এক-এক ফাংশন।

<u>সার্বিক বা অনটু (Onto) ফাংশন চেনার উপায়:</u>

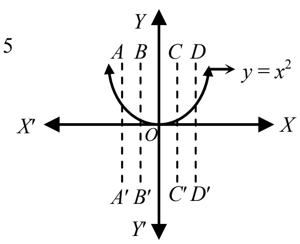
ডোমেন ও কোডোমেন: $f : x \rightarrow y$ এ কোনো ফাংশন বর্ণিত হলে x এর সেটকে ডোমেন এবং y এর সেটকে ফাংশনের কোডোমেন সেট বলে। কোনো ফাংশনের **রেঞ্জ সেট = কোডোমেন সেট** হলেই ফাংশনটি সার্বিক ফাংশন।

লেখচিত্র হতে ফাংশন নির্ণয়: লেখের প্রতিটি বিন্দুর ক্রমজোড়ের **১ম** উপাদানসমূহ ভিন্ন ভিন্ন হলে লেখচিত্রটি ফাংশন নির্দেশ করে। এক্ষেত্রে লেখচিত্রের বিভিন্ন বিন্দুতে y অক্ষের সমান্তরালে অঙ্কিত সরলরেখা লেখের একটি মাত্র বিন্দুতে ছেদ করে।

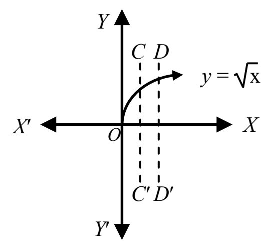
নিম্নোক্ত চিত্রগুলো লক্ষ কর:



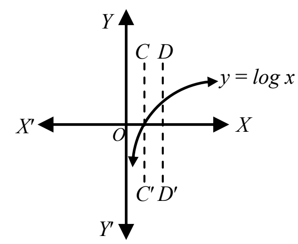
(i) লেখচিত্রের সমীকরণ: $y = 2x + 5$
(ফাংশন)



(ii) লেখচিত্রের সমীকরণ: $x^2 = 4y$
(ফাংশন)

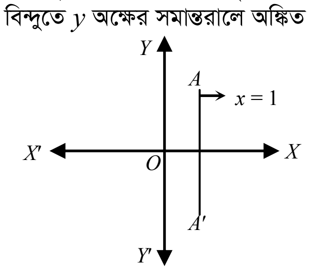


(iii) লেখচিত্রের সমীকরণ: $y = \sqrt{x}$
(ফাংশন)

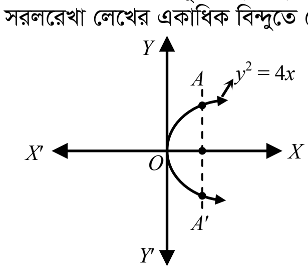


(iv) লেখচিত্রের সমীকরণ: $y = log\ x$
(ফাংশন)

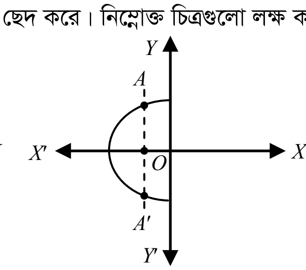
আবার, লেখের প্রতিটি বিন্দুর ক্রমজোড়ের **১ম** উপাদানসমূহ ভিন্ন ভিন্ন না হলে লেখচিত্রটি ফাংশন নির্দেশ করে না। এক্ষেত্রে লেখচিত্রের বিভিন্ন বিন্দুতে y অক্ষের সমান্তরালে অঙ্কিত সরলরেখা লেখের একাধিক বিন্দুতে ছেদ করে। নিম্নোক্ত চিত্রগুলো লক্ষ কর:



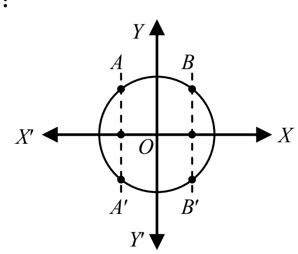
(i) লেখচিত্রের সমীকরণ: $x = 1$
(ফাংশন নয়)



(ii) লেখচিত্রের সমীকরণ: $y^2 = 4x$
(ফাংশন নয়)



(iii) লেখচিত্রের সমীকরণ: $x^2 + y^2 = 9$; $x \leq 0$
(ফাংশন নয়)



(iv) লেখচিত্রের সমীকরণ: $x^2 + y^2 = 4$
(ফাংশন নয়)

<u>MCQ এর জন্য গুরুত্বপূর্ণ তথ্য:</u>

i. সকল ফাংশন অন্বয় কিন্তু সকল অন্বয় ফাংশন নয়।

ii. কোনো ফাংশনের ডোমেনের প্রতিটি উপাদানের ইমেজ ভিন্ন হলে ফাংশনটি এক-এক হয়।

iii. $f : X \rightarrow Y$ বর্ণিত ফাংশনের ডোমেন সেট X এবং কোডোমেন সেট Y।

iv. ফাংশনের রেঞ্জ সেট = কোডোমেন সেট হলে, ফাংশনটি সার্বিক হয়।

v. সকল ফাংশনের বিপরীত অন্বয় ফাংশন নয় (যেমন: $y = x^2$)।

vi. কোনো ফাংশন এক-এক এবং সার্বিক ফাংশনের উভয়টি হলে এর বিপরীত ফাংশন পাওয়া যায়।

vii. সরলরৈখিক ফাংশনের সাধারণ রূপ: $f(x) = mx + b$। যেখানে m ও b বাস্তব সংখ্যা এবং এর লেখচিত্র সর্বদাই সরলরেখা যার ঢাল হলো m এবং y অক্ষের ছেদক b।

viii. দ্বিঘাত সমীকরণের আদর্শরূপ: $y = ax^2 + bx + c$। (যেখানে a, b ও c বাস্তব সংখ্যা এবং $a \neq 0$) এর লেখচিত্র সর্বদা পরাবৃত্ত আকারের।

ix. কেন্দ্র (p, q) ও r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$।

x. কেন্দ্র $(0, 0)$ ও r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 = r^2$।

অনুশীলনীর সমাধান

১ **$\{(2, 2), (4, 2), (2, 10), (7, 7)\}$ অন্বয়ের ডোমেন কোনটি?**

(ক) $\{2, 4, 5, 7\}$ (খ) $\{2, 2, 10, 7\}$

(গ) $\{2, 4, 10, 7\}$ (ঘ) $\{2, 4, 7\}$

উত্তর: (ঘ)

ব্যাখ্যা: কোনো অন্বয়ের অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর প্রথম অংশকগুলোর সেট হচ্ছে অন্বয়টির ডোমেন।

এক্ষেত্রে প্রদত্ত অন্বয়ের অন্তর্ভুক্ত ক্রমজোড়গুলোর প্রথম অংশকগুলোর সেট বা ডোমেন $= \{2, 4, 2, 7\} = \{2, 4, 7\}$;

[যেহেতু '2' সদস্যটির পুনরাবৃত্তি হয়েছে তাই সেটের সমতার সংজ্ঞানুসারে একবার লিখা হয়েছে]

✉ **জেনে নাও:** সেটের সমতার সংজ্ঞানুসারে, কোনো সেটের উপাদানগুলোর পুনরাবৃত্তি হলে সেটের মানের কোনো পরিবর্তন হয় না তাই $\{2, 4, 2, 7\}$ বা, $\{2, 4, 7\}$ একই সেট নির্দেশ করে।

২ **$S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y = x^2\}$ এবং $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ নিচের কোনটি S অন্বয়ের সদস্য?**

(ক) $(2, 4)$ (খ) $(-2, 4)$

(গ) $(-1, 1)$ (ঘ) $(1, -1)$

উত্তর: (গ)

ব্যাখ্যা: দেওয়া আছে, $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y = x^2\}$

এবং $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

প্রদত্ত সম্পর্ক: $y = x^2$

এখন, $x \in A$ এর জন্য প্রতিক্ষেত্রে y এর মান এবং ক্রমজোড়টি নির্ণয় করি।

$x = -2$ হলে, $y = (-2)^2 = 4 \notin A$; $\therefore$ ক্রমজোড় $(-2, 4) \notin S$

$x = -1$ হলে, $y = (-1)^2 = 1 \in A$; $\therefore$ ক্রমজোড় $(-1, 1) \in S$

$x = 0$ হলে, $y = (0)^2 = 0 \in A$; $\therefore$ ক্রমজোড় $(0, 0) \in S$

$x = 1$ হলে, $y = (1)^2 = 1 \in A$; $\therefore$ ক্রমজোড় $(1, 1) \in S$

$x = 2$ হলে, $y = (2)^2 = 4 \notin A$; $\therefore$ ক্রমজোড় $(2, 4) \notin S$

$\therefore S = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$

দেখা যাচ্ছে যে অপশনগুলোর মধ্যে শুধুমাত্র $(-1, 1)$ হলো S অন্বয়ের সদস্য।

অর্থাৎ সঠিক উত্তরটি (গ) $(-1, 1)$

✉ **লক্ষণীয়:** প্রদত্ত শর্তানুসারে $4 \notin A$ হওয়ায় $(-2, 4) \notin S$ এবং $(2, 4) \notin S$

$\therefore$ (ক) ও (খ) নং সঠিক নয়।

আবার শর্তানুসারে $x = 1$ হলে $y = 1^2 = 1$; $x = 1$ এর জন্য y এর মান কখনোই (-1) হবে না। তাই $(1, -1)$ এমন কোনো ক্রমজোড় সম্ভব নয়। তাই (ঘ) নংও সঠিক নয়।

৩ **যদি $S = \{(1, 4), (2, 1), (3, 0), (4, 1), (5, 4)\}$ হয় তবে,**

(*i*) S অন্বয়ের রেঞ্জ $\{4, 1, 0\}$

(*ii*) S অন্বয়ের বিপরীত অন্বয়, $S^{-1} = \{(4, 1), (1, 2), (0, 3), (1, 4), (4, 5)\}$

(*iii*) S অন্বয়টি একটি ফাংশন

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) *i* ও *ii* (খ) *ii* ও *iii*

(গ) *i* ও *iii* (ঘ) *i, ii* ও *iii*

উত্তর: (ঘ)

ব্যাখ্যা: দেওয়া আছে, $S = \{(1, 4), (2, 1), (3, 0), (4, 1), (5, 4)\}$

i. **নং সঠিক:** কোনো অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর দ্বিতীয় অংশকগুলোর সেট হচ্ছে অন্বয়টির রেঞ্জ। প্রদত্ত S অন্বয়ের ক্ষেত্রে 'দ্বিতীয় অংশকগুলোর সেট' বা রেঞ্জ $= \{4, 1, 0, 1, 4\}$

আবার, সেটের সমতার সংজ্ঞানুসারে সেটের উপাদানগুলোর ক্রম বদলালে বা কোনো উপাদানের পুনরাবৃত্তি করলে সেটের কোনো পরিবর্তন হয়না।

যেমন: $\{4, 1, 0, 1, 4\} = \{4, 1, 0\} = \{4, 1, 0, 4\} = \{4, 1, 0, 1\}$ প্রভৃতি রূপগুলোর সবগুলোই সঠিক। তাই লিখা যায়, রেঞ্জ $= \{4, 1, 0, 1, 4\} = \{4, 1, 0\}$; যা (i) নং এর সদৃশ।

ii. **নং সঠিক:** অন্বয়ের প্রতিটি ক্রমজোড়ের প্রথম উপাদানকে দ্বিতীয় উপাদানের স্থলে এবং দ্বিতীয় উপাদানকে প্রথম উপাদানের স্থলে লিখলে নতুন যে ক্রমজোড়ের সেট পাওয়া যায় সেটিই হবে প্রদত্ত অন্বয়ের বিপরীত অন্বয়।

এক্ষেত্রে প্রদত্ত অন্বয়, $S = \{(\underline{1}, \underline{4}), (2, 1), (3, 0), (4, 1), (5, 4)\}$

S অন্বয়ের ১ম ক্রমজোড়ের ১ম উপাদান

S অন্বয়ের ১ম ক্রমজোড়ের ২য় উপাদান

এখন, প্রতিটি ক্রমজোড়গুলোর ১ম উপাদানকে ২য় উপাদানের স্থলে এবং ২য় উপাদানকে ১ম উপাদানের স্থলে লিখলে প্রাপ্ত নতুন ক্রমজোড়সমূহ হচ্ছে: $\{(\underline{4}, \underline{1}), (1, 2), (0, 3), (1, 4), (4, 5)\}$।

S অন্বয়ের ১ম ক্রমজোড়ের ২য় উপাদান

S অন্বয়ের ১ম ক্রমজোড়ের ১ম উপাদান

S অন্বয়ের বিপরীত অন্বয়ের সেট S^{-1}

$\therefore S^{-1} = \{(4, 1), (1, 2), (0, 3), (1, 4), (4, 5)\}$; যা (ii) এর সাথে সাদৃশ্যপূর্ণ।

iii. **নং সঠিক:** কোনো অন্বয়ে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট একাধিক ভিন্ন ক্রমজোড় না থাকলে অন্বয়টিকে ফাংশন বলা যায়।

এক্ষেত্রে অন্বয় $S = \{(1, 4), (2, 1), (3, 0), (4, 1), (5, 4)\}$

প্রদত্ত অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহ হচ্ছে $1, 2, 3, 4, 5$; যারা প্রত্যেকেই ভিন্ন ভিন্ন। তাই বলা যায় প্রদত্ত অন্বয়ে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট একাধিক ভিন্ন ক্রমজোড় নেই। অর্থাৎ অন্বয়টি একটি ফাংশন।

$\therefore$ সঠিক উত্তরটি হবে (ঘ)।

৪ যদি $F(x) = \sqrt{x-1}$ হয় তবে $F(10)$ = কত?

(ক) 9 (খ) 3 (গ) – 3 (ঘ) $\sqrt{10}$

উত্তর: (খ)

ব্যাখ্যা: $F(x) = \sqrt{x-1}$

$\therefore F(10) = \sqrt{10-1} = \sqrt{9} = 3$।

লক্ষণীয়: $F(10) = \sqrt{9} = 3$; কখনোই $\sqrt{9} = \pm 3$ নয়, কারণ যেকোনো ধনাত্মক সংখ্যার বর্গমূল সর্বদাই ধনাত্মক ধরা হয়। অর্থাৎ $\sqrt{9} = 3$ সঠিক।

৫ $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 25 = 0$ এবং $x \geq 0\}$ হলে,

(i) অন্বয়টি ফাংশন নয়।
(ii) অন্বয়টির লেখচিত্র একটি অর্ধবৃত্ত।
(iii) অন্বয়টির লেখচিত্র x অক্ষের উপর অর্ধতলে থাকবে।

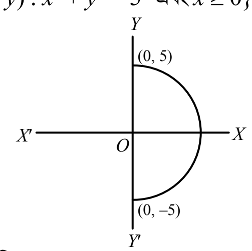
নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i, ii (খ) i, iii
(গ) ii, iii (ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: (ক)

ব্যাখ্যা: প্রদত্ত অন্বয় $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 - 25 = 0$ এবং $x \geq 0\}$

বা, $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 5^2$ এবং $x \geq 0\}$ অন্বয়ের লেখচিত্র হলো:

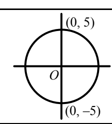
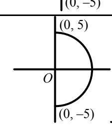
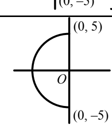
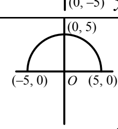
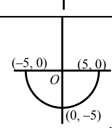


$[\because x \geq 0]$

অন্বয়ের লেখচিত্র হতে বলা যায়-

(i) নং সঠিক, কারণ S অন্বয়ের একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় [যেমন: (0, 5), (0, –5)] থাকায় অন্বয়টি ফাংশন নয়।
(ii) নং সঠিক, কারণ অন্বয়ের লেখচিত্র একটি অর্ধবৃত্ত যার কেন্দ্র (0, 0) এবং ব্যাসার্ধ 5 একক।
(iii) নং সঠিক নয়, কারণ অন্বয়ের লেখচিত্র x অক্ষের নিচের অর্ধতলেও বিস্তৃত।

জেনে রাখা ভালো:

$S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 5^2\}$	
$S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 5^2$ এবং $x \geq 0\}$ অন্বয়ের লেখ শুধুমাত্র x অক্ষের ধনাত্মক দিকে বিস্তৃত।	 $x \geq 0$
$S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 5^2$ এবং $x \leq 0\}$ অন্বয়ের লেখ শুধুমাত্র x অক্ষের ঋণাত্মক দিকে বিস্তৃত।	 $x \leq 0$
$S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 5^2$ এবং $y \geq 0\}$ অন্বয়ের লেখ শুধুমাত্র y অক্ষের ধনাত্মক দিকে বিস্তৃত।	 $y \geq 0$
$S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 5^2$ এবং $y \leq 0\}$ অন্বয়ের লেখ শুধুমাত্র x অক্ষের ঋণাত্মক দিকে বিস্তৃত।	 $y \leq 0$

৬ $F(x) = \sqrt{x-1} = 2$ হলে x এর মান কত?

(ক) 5 (খ) 24 (গ) 25 (ঘ) 26

উত্তর: (ক)

ব্যাখ্যা: উদ্দীপক অনুসারে, $F(x) = \sqrt{x-1} = 2$

বা, $\sqrt{x-1} = 2$

বা, $x - 1 = 4$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

$\therefore x = 4 + 1 = 5$

৭ $F(x) = \sqrt{x-1}$ ফাংশনটির ডোমেন নিচের কোনটি?

(ক) ডোম $F = \{x \in R : x \neq 1\}$ (খ) ডোম $F = \{x \in R : x \geq 1\}$

(গ) ডোম $F = \{x \in R : x \leq 1\}$ (ঘ) ডোম $F = \{x \in R : x > 1\}$

উত্তর: (খ)

ব্যাখ্যা: $F(x) = \sqrt{x-1}$ ফাংশনটি লক্ষ করলে দেখা যায়, $(x - 1)$ অংশটি বর্গমূল চিহ্নের ভেতরে রয়েছে। আর ফাংশনটি বাস্তব মান পেতে হলে বর্গমূল চিহ্নের ভেতরের অংশটিকে সর্বদাই অঋণাত্মক (শূন্যসহ সকল ধনাত্মক সংখ্যা) বাস্তব সংখ্যা হতে হবে। কেননা, ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যার বর্গমূলের মান বাস্তব সংখ্যাা সেটের (R) অন্তর্ভুক্ত নয়। অর্থাৎ বর্গমূলের ভেতরের $(x - 1)$ অংশটি ঋণাত্মক সংখ্যা হলে, এর জন্য $F(x)$ এর কোনো বাস্তব মান পাওয়া সম্ভব নয়।

তাই ফাংশনটির বাস্তব মান পেতে হলে $(x - 1)$ অংশটিকে অঋণাত্মক (শূন্যসহ সকল ধনাত্মক সংখ্যা) হতে হবে।

অর্থাৎ $x - 1 \geq 0$ বা, $x \geq 1$ হবে

$\therefore$ ফাংশনটির ডোমেন, ডোম $F = \{x \in R : x \geq 1\}$

দ্রষ্টব্য: (i) (ঘ) নং অপশনে রয়েছে ডোম $F = \{x \in R : x > 1\}$
$x > 1$ দ্বারা সকল ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যাকে বোঝানো হয়েছে যার জন্য $F(x) = \sqrt{x-1}$ এর বাস্তব মান পাওয়া সম্ভব। তাই এটিও ('ঘ' নং) $F(x)$ এর ডোমেন বলে আপাতদৃষ্টিতে মনে হতে পারে। কিন্তু এটি সঠিক নয়।
'খ' নং এবং 'ঘ' নং অপশনের মাঝে পার্থক্য হলো 'খ' নং অনুসারে ডোমেন $x \geq 1$ (অর্থাৎ $x = 1$ এবং $x > 1$ উভয়ই)। কিন্তু 'ঘ' নং অনুসারে ডোমেন শুধুমাত্র $x > 1; x \neq 1$।
অর্থাৎ (ঘ) নং অপশনকে সঠিক বিবেচনা করলে ডোমেনের একটি উপাদান $(x = 1)$ কম পাওয়া যায়। তাই এটি সঠিক নয়।
তাই সঠিক উত্তর শুধুমাত্র (খ)।
(ii) ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূল বাস্তব নয় বরং জটিল সংখ্যা (Complex Number)। এ বিষয়টি উচ্চতর শ্রেণিতে বিশদভাবে আলোচিত হয়েছে।

৮ **(i) নিচে প্রদত্ত S অন্বয়গুলোর ডোমেন, রেঞ্জ ও বিপরীত অন্বয় নির্ণয় কর।**
(ii) S অথবা S^{-1} অন্বয়গুলো ফাংশন কিনা তা নির্ধারণ কর।
(iii) ফাংশনগুলো এক-এক কিনা নির্ধারণ কর।

(ক) $S = \{(1, 5), (2, 10), (3, 15), (4, 20)\}$
(খ) $S = \{(-3, 8), (-2, 3), (-1, 0), (0, -1), (1, 0), (2, 3), (3, 8)\}$
(গ) $S = \left\{\left(\frac{1}{2}, 0\right), (1, 1), (1, -1), \left(\frac{5}{2}, 2\right), \left(\frac{5}{2}, -2\right)\right\}$
(ঘ) $S = \{(-3, -3), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (3, 3)\}$
(ঙ) $S = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

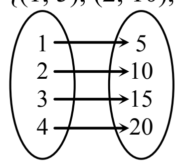
সমাধানঃ

ক $S = \{(1, 5), (2, 10), (3, 15), (4, 20)\}$

(i) ডোমেন, রেঞ্জ ও বিপরীত অন্বয় নির্ণয়:
কোনো অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম অংশকগুলোর সেটকে ডোমেন এবং দ্বিতীয় অংশকগুলোর সেটকে রেঞ্জ বলা হয়।
$\therefore$ S অন্বয়ের ডোমেন, ডোম $S = \{1, 2, 3, 4\}$ **(Ans.)**
এবং রেঞ্জ $S = \{5, 10, 15, 20\}$ **(Ans.)**
আবার, অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রতিটির প্রথম ও দ্বিতীয় উপাদান স্থান বিনিময় করলে বিপরীত অন্বয় পাওয়া যায়।
এখন S অন্বয়ের বিপরীত অন্বয় S^{-1} হলে
$S^{-1} = \{(5, 1), (10, 2), (15, 3), (20, 4)\}$ **(Ans.)**

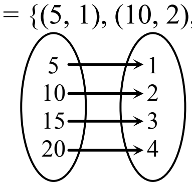
(ii) S অথবা S^{-1} ফাংশন কিনা নির্ধারণ:
ফাংশনের সংজ্ঞানুসারে, কোনো অন্বয়ের ভিন্ন ভিন্ন ক্রমজোড়ের ১ম অংশক ভিন্ন হলে অন্বয়টি ফাংশন।
S অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর ১ম উপাদানসমূহ হচ্ছেঃ 1, 2, 3, 4; যাদের প্রত্যেকেই ভিন্ন ভিন্ন। তাই S অন্বয় ফাংশন।
(a) থেকে প্রাপ্ত S^{-1} অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর ১ম উপাদানসমূহ হচ্ছেঃ 5, 10, 15, 20; যাদের প্রত্যেকেই ভিন্ন ভিন্ন। তাই S^{-1} অন্বয় ফাংশন।

(iii) ফাংশনগুলো এক-এক কিনা যাচাইকরণ:
$S = \{(1, 5), (2, 10), (3, 15), (4, 20)\}$



ডোম S রেঞ্জ S (প্রতিবিম্ব বা ইমেজের সেট)

দেখা যাচ্ছে, ডোম S এর প্রতিটি উপাদানের (1, 2, 3, 4 এর) জন্য প্রাপ্ত প্রতিবিম্ব / ইমেজ ভিন্ন ভিন্ন (অর্থাৎ 5, 10, 15, 20)। তাই S একটি এক-এক ফাংশন।
(a) নং থেকে প্রাপ্ত S অন্বয়ের বিপরীত অন্বয়
$S^{-1} = \{(5, 1), (10, 2), (15, 3), (20, 4)\}$



ডোম S^{-1} রেঞ্জ S^{-1} (প্রতিবিম্ব বা ইমেজের সেট)

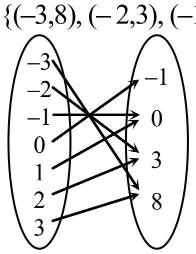
দেখা যাচ্ছে, ডোম S^{-1} এর প্রতিটি উপাদানের (5, 10, 15, 20 এর) জন্য প্রাপ্ত প্রতিবিম্ব / ইমেজ ভিন্ন ভিন্ন (অর্থাৎ 1, 2, 3, 4)। তাই S^{-1} একটি এক-এক ফাংশন।

খ $S = \{(-3,8), (-2,3), (-1,0), (0,-1), (1,0), (2,3), (3,8)\}$

(i) ডোমেন, রেঞ্জ ও বিপরীত অন্বয় নির্ণয়:
কোনো অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম অংশকগুলোর সেটকে ডোমেন এবং দ্বিতীয় অংশকগুলোর সেটকে রেঞ্জ বলা হয়।
$\therefore$ S অন্বয়ের ডোমেন, ডোম $S = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ **(Ans.)**
এবং রেঞ্জ $S = \{8, 3, 0, -1, 0, 3, 8\} = \{8, 3, 0, -1\}$
[সেটের সমতা অনুসারে]
অর্থাৎ রেঞ্জ $S = (-1, 0, 3, 8)$ **(Ans.)**
আবার, অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রতিটির প্রথম ও দ্বিতীয় উপাদান স্থান বিনিময় করলে বিপরীত অন্বয় পাওয়া যায়।
এখন S অন্বয়ের বিপরীত অন্বয় S^{-1} হলে
$S^{-1} = \{(8, -3), (3, -2), (0, -1), (-1, 0), (0, 1), (3, 2), (8, 3)\}$
(Ans.)

(ii) S অথবা S^{-1} ফাংশন কিনা নির্ধারণ:
ফাংশনের সংজ্ঞানুসারে, কোনো অন্বয়ের ভিন্ন ভিন্ন ক্রমজোড়ের ১ম অংশক ভিন্ন হলে অন্বয়টি ফাংশন।
S অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর ১ম উপাদানসমূহ হচ্ছেঃ $-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3$; যাদের প্রত্যেকেই ভিন্ন ভিন্ন।
অতএব S অন্বয়টি ফাংশন।
(a) থেকে প্রাপ্ত S^{-1} অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর ১ম উপাদানসমূহ হচ্ছেঃ $8, 3, 0, -1, 0, 3, 8$; যাদের প্রত্যেকেই ভিন্ন ভিন্ন নয়। বরং 8, 3, 0 একাধিকবার রয়েছে। অর্থাৎ এক্ষেত্রে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় রয়েছে। যথা: $(8, -3)$ ও $(8, 3)$; $(3, -2)$ ও $(3, 2)$; $(0, -1)$ ও $(0, 1)$। তাই S^{-1} অন্বয়টি ফাংশন নয়।

(iii) ফাংশনগুলো এক-এক কিনা যাচাইকরণ:
$S = \{(-3,8), (-2,3), (-1,0), (0,-1), (1,0), (2,3), (3,8)\}$



ডোম S রেঞ্জ S (প্রতিবিম্ব বা ইমেজের সেট)

দেখা যাচ্ছে, ডোম S এর প্রতিটি উপাদানের $(-3, -2, -1, 0, 2, 3, 8)$ এর জন্য প্রাপ্ত প্রতিবিম্ব / ইমেজ ভিন্ন ভিন্ন নয় বরং 0, 3, 8 ইমেজ/ প্রতিবিম্বগুলো একাধিকবার এসেছে। তাই S একটি এক-এক ফাংশন নয়।
যেহেতু S^{-1} অন্বয়টি ফাংশনই নয়, তাই এটি এক-এক ফাংশনও নয়।

গ $S = \left\{\left(\frac{1}{2}, 0\right), (1, 1), (1, -1), \left(\frac{5}{2}, 2\right), \left(\frac{5}{2}, -2\right)\right\}$

(i) ডোমেন, রেঞ্জ ও বিপরীত অন্বয় নির্ণয়:
কোনো অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম অংশকগুলোর সেটকে ডোমেন এবং দ্বিতীয় অংশকগুলোর সেটকে রেঞ্জ বলা হয়।
$\therefore$ S অন্বয়ের ডোমেন, ডোম $S = \left\{\frac{1}{2}, 1, 1, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right\} = \left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{5}{2}\right\}$
(Ans.)
এবং রেঞ্জ $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ **(Ans.)**
আবার, অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রতিটির প্রথম ও দ্বিতীয় উপাদান স্থান বিনিময় করলে বিপরীত অন্বয় পাওয়া যায়।
এখন S অন্বয়ের বিপরীত অন্বয় S^{-1} হলে
$S^{-1} = \left\{\left(0, \frac{1}{2}\right), (1, 1), (-1, 1), \left(2, \frac{5}{2}\right), \left(-2, \frac{5}{2}\right)\right\}$ **(Ans.)**

***(ii)* S অথবা S^{-1} ফাংশন কিনা নির্ধারণ:**

ফাংশনের সংজ্ঞানুসারে, কোনো অন্বয়ের ভিন্ন ভিন্ন ক্রমজোড়ের ১ম অংশক ভিন্ন হলে অন্বয়টি ফাংশন।

S অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর ১ম উপাদানসমূহ হচ্ছে: $\frac{1}{2}, 1, 1, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}$; যাদের প্রত্যেকেই ভিন্ন ভিন্ন নয় বরং $1, \frac{5}{2}$ একাধিকবার এসেছে ।

অতএব S অন্বয়টি ফাংশন নয়।

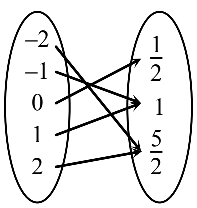
(a) থেকে প্রাপ্ত S^{-1} অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর ১ম উপাদানসমূহ হচ্ছে: $-2, -1, 0, 1, 2$; যাদের প্রত্যেকেই ভিন্ন ভিন্ন, তাই S^{-1} একটি ফাংশন।

***(iii)* ফাংশনগুলো এক-এক কিনা যাচাইকরণ:**

যেহেতু S অন্বয়টি ফাংশন নয়। তাই এটি এক-এক ফাংশন নয়।

(a) নং থেকে প্রাপ্ত S অন্বয়ের বিপরীত অন্বয়

$$S^{-1} = \left\{\left(0, \frac{1}{2}\right), (1, 1), (-1, 1), \left(2, \frac{5}{2}\right), \left(-2, \frac{5}{2}\right)\right\}$$



ডোম S^{-1} রেঞ্জ S^{-1} (প্রতিবিম্ব বা ইমেজের সেট)

দেখা যাচ্ছে, ডোম S^{-1} এর প্রতিটি উপাদানের $(0, 1, -1, 2, -2)$ জন্য প্রাপ্ত প্রতিবিম্ব/ ইমেজ $\left(\frac{1}{2}, 1, 1, \frac{5}{2}, \frac{5}{2}\right)$ ভিন্ন ভিন্ন নয় বরং $1, \frac{5}{2}$ এই ইমেজ বা প্রতিবিম্বগুলো একাধিকবার এসেছে।

তাই S^{-1} একটি এক-এক ফাংশন নয়।

ঘ $S = \{(-3, -3), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (3, 3)\}$

***(i)* ডোমেন, রেঞ্জ ও বিপরীত অন্বয় নির্ণয়:**

কোনো অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম অংশকগুলোর সেটকে ডোমেন এবং দ্বিতীয় অংশকগুলোর সেটকে রেঞ্জ বলা হয়।

$\therefore$ S অন্বয়ের ডোমেন, ডোম $S = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$ **(Ans.)**

এবং রেঞ্জ $S = \{-3, -1, 0, 1, 3\}$ **(Ans.)**

আবার, অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রতিটির প্রথম ও দ্বিতীয় উপাদান স্থান বিনিময় করলে বিপরীত অন্বয় পাওয়া যায়।

এখন S অন্বয়ের বিপরীত অন্বয় S^{-1} হলে

$S^{-1} = \{(-3, -3), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (3, 3)\}$ **(Ans.)**

***(ii)* S অথবা S^{-1} ফাংশন কিনা নির্ধারণ:**

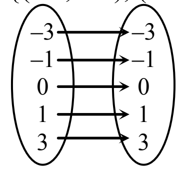
ফাংশনের সংজ্ঞানুসারে, কোনো অন্বয়ের ভিন্ন ভিন্ন ক্রমজোড়ের ১ম অংশক ভিন্ন হলে অন্বয়টি ফাংশন।

S অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর ১ম উপাদানসমূহ হচ্ছে: $-3, -1, 0, 1, 3$; যাদের প্রত্যেকেই ভিন্ন ভিন্ন, তাই S অন্বয় ফাংশন।

(a) থেকে প্রাপ্ত S^{-1} অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর ১ম উপাদানসমূহ হচ্ছে: $-3, -1, 0, 1, 3$; যাদের প্রত্যেকেই ভিন্ন ভিন্ন, তাই S^{-1} অন্বয়টি ফাংশন।

***(iii)* ফাংশনগুলো এক-এক কিনা যাচাইকরণ:**

$S = \{(-3, -3), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (3, 3)\}$

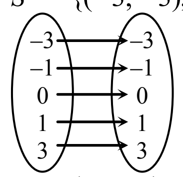


ডোম S রেঞ্জ S (প্রতিবিম্ব বা ইমেজের সেট)

দেখা যাচ্ছে ডোম S এর প্রতিটি উপাদানের $(-3, -1, 0, 1, 3)$ জন্য প্রাপ্ত প্রতিবিম্ব / ইমেজ $(-3, -1, 0, 1, 3)$ ভিন্ন ভিন্ন। তাই S একটি এক-এক ফাংশন।

(a) নং থেকে প্রাপ্ত S অন্বয়ের বিপরীত অন্বয়

$S^{-1} = \{(-3, -3), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (3, 3)\}$



ডোম S^{-1} রেঞ্জ S^{-1} / প্রতিবিম্ব বা ইমেজের সেট

দেখা যাচ্ছে, ডোম S^{-1} এর প্রতিটি উপাদানের $(-3, -1, 0, 1, 3)$ জন্য প্রাপ্ত প্রতিবিম্ব / ইমেজ $(-3, -1, 0, 1, 3)$ ভিন্ন ভিন্ন। তাই S^{-1} একটি এক-এক ফাংশন।

ঙ $S = \{(2, 1), (2, 2), (2, 3)\}$

***(i)* ডোমেন, রেঞ্জ ও বিপরীত অন্বয় নির্ণয়:**

কোনো অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম অংশকগুলোর সেটকে ডোমেন এবং দ্বিতীয় অংশকগুলোর সেটকে রেঞ্জ বলা হয়।

$\therefore$ S অন্বয়ের ডোমেন, ডোম $S = \{2\}$ **(Ans.)**

এবং রেঞ্জ $S = \{1, 2, 3\}$ **(Ans.)**

আবার, অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রতিটির প্রথম ও দ্বিতীয় উপাদান স্থান বিনিময় করলে বিপরীত অন্বয় পাওয়া যায়।

এখন S অন্বয়ের বিপরীত অন্বয় S^{-1} হলে

$S^{-1} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$ **(Ans.)**

***(ii)* S অথবা S^{-1} ফাংশন কিনা নির্ধারণ:**

ফাংশনের সংজ্ঞানুসারে, কোনো অন্বয়ের ভিন্ন ভিন্ন ক্রমজোড়ের ১ম অংশক ভিন্ন হলে অন্বয়টি ফাংশন।

S অন্বয়ের ক্রমজোড়ের ১ম উপাদানের একই (2)।

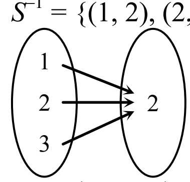
তাই এটি ফাংশন নয়।

(a) থেকে প্রাপ্ত S^{-1} অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর ১ম উপাদানসমূহ হচ্ছে: $1, 2, 3$; যাদের প্রত্যেকেই ভিন্ন ভিন্ন। তাই S^{-1} একটি ফাংশন।

***(iii)* ফাংশনগুলো এক-এক কিনা যাচাইকরণ:**

যেহেতু S অন্বয় ফাংশন নয়। তাই এটি এক-এক ফাংশনও নয়

$S^{-1} = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2)\}$



ডোম S^{-1} রেঞ্জ S^{-1} (প্রতিবিম্ব বা ইমেজের সেট)

দেখা যাচ্ছে, ডোম S^{-1} এর প্রতিটি উপাদানের $(1, 2, 3)$ জন্য প্রাপ্ত প্রতিবিম্ব / ইমেজ একই (2)। তাই S^{-1} একটি এক-এক ফাংশন নয়।

◆◆ অনুশীলনীর ৮নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

$S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ *এবং* $y^2 = x\}$, *যেখানে* $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$	*নিজে নিজে চেষ্টা কর*
ক. সকল $x \in A$ *এর জন্য* y *নির্ণয় কর।*	**(ক) 0, 1, –1;**
খ. S *অন্বয়টিকে তালিকা পদ্ধতিতে প্রকাশ কর। ডোম* S, *রেঞ্জ* S *এবং* S^{-1} *নির্ণয় কর।*	**(খ) {0, 1}, {0, 1, –1}, {(0, 0), (1, 1), (–1, 1)}**
গ. S *অন্বয়টি ফাংশন কি-না এবং এক-এক কি-না তা নির্ধারণ কর।* S *অন্বয়ের লেখের মাধ্যমেও উক্তিটি প্রমাণ কর।*	**(গ) এক-এক নয়**

৯ **$F(x) = \sqrt{x-1}$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের জন্য**
(ক) $F(1), F(5)$, এবং $F(10)$ নির্ণয় কর। **(খ) $F(a^2+1)$ নির্ণয় কর যেখানে $a \in R$।**
(গ) $F(x) = 5$ হলে, x নির্ণয় কর। **(ঘ) $F(x) = y$ হলে, x নির্ণয় কর যেখানে $y \geq 0$।**

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, $F(x) = \sqrt{x-1}$
$\therefore \; F(1) = \sqrt{1-1} = \sqrt{0} = 0$
$F(5) = \sqrt{5-1} = \sqrt{4} = 2$
এবং $F(10) = \sqrt{10-1} = \sqrt{9} = 3$
Ans: 0, 2, 3

খ দেওয়া আছে, $F(x) = \sqrt{x-1}$
সুতরাং $F(a^2+1) = \sqrt{a^2+1-1}$
$= \sqrt{a^2}$
$= |a|$
$\therefore F(a^2+1) = |a|; a \in R$ **(Ans.)**

দৃষ্টি আকর্ষণ: পাঠ্যবইয়ের উত্তরে উল্লেখ রয়েছে $F(a^2+1) = a$ যা সঠিক নয়। উদাহরণের মাধ্যমে তা তুলে ধরা হলো:
পাঠ্যবইয়ের উত্তর অনুসারে $F(a^2+1) = a$ ... ... (i)
$a = -1$ হলে, (i) নং এর
বামপক্ষ $= F(a^2+1) = \sqrt{(-1)^2+1-1} = 1$; ডানপক্ষ $= a = -1$
সুতরাং বামপক্ষ $\neq$ ডানপক্ষ
কিন্তু $F(a^2+1) = |a|$ হলে বামপক্ষ = ডানপক্ষ হয়।
তাই সঠিক উত্তরটি হবে $|a|$

গ দেওয়া আছে, $F(x) = \sqrt{x-1}$
$\therefore 5 = \sqrt{x-1}$ [$\because F(x) = 5$]
বা, $(5)^2 = (\sqrt{x-1})^2$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]
বা, $25 = x - 1$
বা, $25 + 1 = x$
$\therefore x = 26$ **(Ans.)**

ঘ দেওয়া আছে, $F(x) = \sqrt{x-1}$
$\therefore y = \sqrt{x-1}$ [$\because F(x) = y$]
বা, $y^2 = x - 1$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]
$\therefore x = y^2 + 1$ **(Ans.)**

১০ **$F: R \to R, F(x) = x^3$ ফাংশনের জন্য**
(ক) ডোম F এবং রেঞ্জ F নির্ণয় কর। **(খ) দেখাও যে, F এক-এক ফাংশন।**
(গ) F^{-1} নির্ণয় কর। **(ঘ) দেখাও যে, F^{-1} একটি ফাংশন।**

সমাধান:

ক এখানে, $F: R \to R, F(x) = x^3$
ডোমেন নির্ণয়: x এর যে সকল বাস্তব মানের জন্য $F(x)$ এর বাস্তব মান পাওয়া যায় সেগুলোই $F(x)$ এর ডোমেন।
এখানে, x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $F(x) = x^3$ এর বাস্তব মান পাওয়া যায়।
$\therefore$ ডোম $F = R$ **(Ans.)**
রেঞ্জ নির্ণয়: ডোমেন সেটের প্রতিটি উপাদানের যে সকল প্রতিবিম্ব বা ইমেজ পাওয়া যায় সেগুলোই ফাংশনের রেঞ্জ।
$x \in R$ অর্থাৎ x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $F(x) = x^3$ এর বাস্তব মান পাওয়া যায়।
$\therefore$ রেঞ্জ $F = R$ **(Ans.)**

খ $F(x_1) = F(x_2)$ এর জন্য F এক-এক ফাংশন হবে যদি এবং কেবল যদি $x_1 = x_2$ হয়। যখন $x_1, x_2 \in$ ডোম F
এখন, $F(x_1) = F(x_2)$
বা, $x_1^3 = x_2^3$
বা, $x_1 = x_2$; [উভয়পক্ষে ঘনমূল নিয়ে]
সুতরাং F এক-এক ফাংশন।

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

$x_1 = -1, x_2 = 1$ নিয়ে পাই,
$F(x_1) = F(-1) = (-1)^3 = -1$
$F(x_2) = F(1) = (1)^3 = 1$
অর্থাৎ $F(x_1) \neq F(x_2)$
এখানে, $x_1 \neq x_2$ এর জন্য $F(x_1) \neq F(x_2)$
$\therefore F$ এক-এক ফাংশন

গ **F^{-1} নির্ণয়:**
দেওয়া আছে, $F(x) = x^3$ ... ... (i)
ধরি $a = F^{-1}(x)$
তখন $F(a) = x$; [বিপরীত ফাংশনের সংজ্ঞানুসারে]
বা, $a^3 = x$; [(i) নং এ $x = a$ বসিয়ে]
বা, $a = \sqrt[3]{x}$
বা, $F^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$; [$\because a = F^{-1}(x)$]
$\therefore F^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ **(Ans.)**

ঘ প্রদত্ত ফাংশন: $F: R \to R, F(x) = x^3$
'খ' হতে পাই, F ফাংশনটি এক-এক।
আবার, প্রদত্ত ফাংশনের কোডোমেন = R
এখন, $F(x) = x^3$ ফাংশনে x এর সকল বাস্তব মানের জন্য F(x) এর বাস্তব মান পাওয়া যায়।
$\therefore$ F(x) এর রেঞ্জ = R
যেহেতু ফাংশনের কোডোমেন = রেঞ্জ, তাই F(x) ফাংশনটি সার্বিক ফাংশন।
আমরা জানি, কোনো ফাংশনের বিপরীত ফাংশন তখনই বিদ্যমান থাকে যদি এবং কেবল যদি ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক হয়। অর্থাৎ এক্ষেত্রে F^{-1} বিদ্যমান।
কোনো ফাংশন $F(x)$ এক-এক এবং সার্বিক হওয়ার অর্থ হচ্ছে এতে একই **দ্বিতীয়** উপাদান বিশিষ্ট দুটি ভিন্ন ক্রমজোড় নেই। আবার এর বিপরীত অন্বয় $F^{-1}(x)$-এর ক্ষেত্রে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট দুটি ভিন্ন ক্রমজোড় নেই।
সুতরাং F^{-1} একটি ফাংশন।

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

'গ' নং হতে পাই, $F^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$

এখন, $x = 1$ হলে, $F^{-1}(1) = \sqrt[3]{1} = 1$ ∴ ক্রমজোড় $(1,1)$

$x = 8$ হলে, $F^{-1}(8) = \sqrt[3]{8} = 2$ ∴ ক্রমজোড় $(8,2)$

এভাবে ডোমেনের প্রতিটি উপাদানের জন্য কেবলমাত্র একটি ইমেজ পাওয়া যায়।

আমরা জানি, কোনো অন্বয়ে একই ১ম উপাদানবিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় না থাকলে অন্বয়টি ফাংশন।

যেহেতু F^{-1} এ একই ১ম উপাদানবিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় নেই, তাই F^{-1} ফাংশন।

◆◆ অনুশীলনীর ১০নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

$F : R_+ \to R_+$, $F(x) = x^2$ *ক. $F(x) = 100$ হলে x নির্ণয় কর।* *খ. ডোম F, রেঞ্জ F নির্ণয় কর।* *গ. F^{-1} নির্ণয় কর এবং দেখাও যে, F^{-1} এক-এক ফাংশন।*	নিজে নিজে চেষ্টা কর। (ক) 10; (খ) R^+, R^+ (গ) $F^{-1}(x) = \sqrt{x}$

১১ (ক) $f : R \to R$ একটি ফাংশন যা $f(x) = ax + b;\ a, b \in R,\ a \neq 0$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে, দেখাও যে, f এক-এক এবং সার্বিক।
(খ) $f : [0, 1] \to [0, 1]$ ফাংশনটি $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হলে, দেখাও যে, f এক-এক এবং সার্বিক।

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, $f : R \to R, f(x) = ax + b$ ... ... (i)

যেখানে, $a, b \in R;\ a \neq 0$

∴ ডোমেন $= R$

এক-এক ফাংশন যাচাইকরণ:

f এক-এক ফাংশন হবে যদি এবং কেবল যদি $f(x_1) = f(x_2)$ হলে $x_1 = x_2$ হয়। যেখানে $x_1, x_2 \in$ ডোম f

এখন, $f(x_1) = f(x_2)$

বা, $ax_1 + b = ax_2 + b$; [$f(x) = ax + b$]

বা, $ax_1 = ax_2$

∴ $x_1 = x_2$; [উভয়পক্ষকে a দ্বারা ভাগ করে]

সুতরাং f এক-এক ফাংশন।

সার্বিক ফাংশন যাচাইকরণ:

f সার্বিক ফাংশন হবে যদি এর কোডোমেন = রেঞ্জ হয়।

কোডোমেন নির্ণয়:

দেওয়া আছে, $f : R \to R$ এবং $f(x) = ax + b;\ a, b \in R;\ a \neq 0$

অর্থাৎ f এর কোডোমেন $= R$

রেঞ্জ নির্ণয়:

$f(x) = ax + b;\ a, b \in R;\ a \neq 0$

$x \in R$ অর্থাৎ x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর বাস্তব মান পাওয়া যায়।

অর্থাৎ ফাংশনটির রেঞ্জ $= R$

যেহেতু এক্ষেত্রে ফাংশনটির কোডোমেন = রেঞ্জ

তাই বলা যায়, f সার্বিক ফাংশন

∴ f এক-এক এবং সার্বিক ফাংশন।

> **দ্রষ্টব্য:** যদি x সেট হতে y সেটে f একটি ফাংশন হয়, তবে তাকে $f : x \to y$ লিখে প্রকাশ করা হয়। x সেটকে f ফাংশনের ডোমেন এবং y সেটকে f ফাংশনের কোডোমেন বলা হয়।

খ দেওয়া আছে, $f : [0, 1] \to [0, 1]; f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ ... (i)

এখানে, ডোমেন $[0, 1]$ এবং কোডোমেন $= [0, 1]$

এক-এক ফাংশন যাচাইকরণ:

ধরি, $x_1, x_2 \in$ ডোমেন $[0, 1]$

তাহলে, $f(x_1) = \sqrt{1 - x_1^2}$

এখন, $f(x_2) = \sqrt{1 - x_2^2}$

f এক-এক ফাংশন হবে যদি এবং কেবল যদি $f(x_1) = f(x_2)$ হলে $x_1 = x_2$ হয়। যেখানে $x_1, x_2 \in$ ডোম f

এখন, $f(x_1) = f(x_2)$

বা, $\sqrt{1 - x_1^2} = \sqrt{1 - x_2^2}$

বা, $1 - x_1^2 = 1 - x_2^2$ [বর্গ করে]

বা, $x_1^2 = x_2^2$

∴ $x_1 = x_2$ [∵ 0 থেকে 1 ব্যবধিতে x_1 ও x_2 উভয়ই অঋণাত্মক]

সুতরাং f এক-এক ফাংশন।

সার্বিক ফাংশন যাচাইকরণ:

f সার্বিক ফাংশন হবে যদি এর কোডোমেন = রেঞ্জ হয়।

কোডোমেন নির্ণয়:

দেওয়া আছে, $f : [0, 1] \to [0, 1]$ এবং $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

এক্ষেত্রে ফাংশনটির ডোমেন, ডোম $f = [0, 1]$

এবং কোডোমেন $= [0, 1]$

রেঞ্জ নির্ণয়:

$x \in$ ডোম f এর জন্য $f(x)$ এর যেসব প্রতিবিম্ব পাওয়া যায়। সে সবই হচ্ছে ফাংশনটির রেঞ্জ।

এখন, $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$

এখন, $x \in$ ডোম $f = [0, 1]$ এর জন্য $f(x)$ এর প্রান্তিক মান এবং মধ্যবর্তী মান নির্ণয় করি:

$$\therefore\ f(0) = \sqrt{1 - 0^2} = \sqrt{1} = 1$$
$$f(0.5) = \sqrt{1 - (0.5)^2} = \sqrt{0.75} = 0.866$$
$$f(1) = \sqrt{1 - 1^2} = \sqrt{0} = 0$$

দেখা যাচ্ছে যে, $x \in$ ডোম f এর জন্য, $f(x)$ এর প্রাপ্ত মান গুলো (রেঞ্জ সেটের উপাদানসমূহ) প্রকৃতপক্ষে $[0, 1]$ ব্যবধির অন্তর্ভুক্ত এবং এই ব্যবধির দুই প্রান্তিক মান পর্যন্ত বিস্তৃত।

অর্থাৎ $x \in$ ডোম $f = [0, 1]$ এর জন্য $f(x) \in [0, 1]$

সুতরাং রেঞ্জ সেটের ব্যবধির বিস্তৃতি এবং কোডোমেন সেটের ব্যবধির বিস্তৃতি একই।

অর্থাৎ ফাংশনটির রেঞ্জ = কোডোমেন।

সুতরাং $f(x)$ সার্বিক ফাংশন।

◆◆ অনুশীলনীর ১১নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

$f : A \to [0, 2]$, $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ এবং $g : N \to N$, $g(x) = x^2$ দুইটি ফাংশন। *ক. সার্বিক ফাংশন কাকে বলে?* *খ. f ফাংশনের ডোমেন (A) এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।* *গ. দেখাও যে, g ফাংশনটি এক-এক কিন্তু সার্বিক নয়।*	নিজে নিজে চেষ্টা কর। (খ) $[-2, 2]$, $[0, 2]$

১২ (ক) যদি $f : R \rightarrow R$ এবং $g : R \rightarrow R$ ফাংশনদ্বয় $f(x) = x^3 + 5$ এবং $g(x) = (x-5)^{\frac{1}{3}}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, তবে দেখাও যে, $g = f^{-1}$ ।
(খ) যদি $f : R \rightarrow R$ ফাংশনটি $f(x) = 5x - 4$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয়, তবে $y = f^{-1}(x)$ নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, $f : R \rightarrow R; g : R \rightarrow R$

এবং $f(x) = x^3 + 5; g(x) = (x-5)^{\frac{1}{3}}$
ধরি, $y = f^{-1}(x)$
তাহলে, $f(y) = x$; [বিপরীত ফাংশনের সংজ্ঞানুসারে]
বা, $y^3 + 5 = x$; [$\because f(x) = x^3 + 5$]
বা, $y^3 = x - 5$
বা, $y = (x-5)^{\frac{1}{3}}$; [উভয়পক্ষকে ঘনমূল করে]
বা, $y = g(x)$; [$\because g(x) = (x-5)^{\frac{1}{3}}$]
বা, $f^{-1}(x) = g(x)$; [$\because y = f^{-1}(x)$]
$\therefore g = f^{-1}$

খ দেওয়া আছে, $f : R \rightarrow R$ এবং $f(x) = 5x - 4$

এখন, $y = f^{-1}(x)$
বা, $f(y) = x$; [বিপরীত ফাংশনের সংজ্ঞানুসারে]
বা, $5y - 4 = x$; [$\because f(x) = 5x - 4$]
বা, $5y = x + 4$
বা, $y = \frac{x+4}{5}$
$\therefore y = f^{-1}(x) = \frac{x+4}{5}$; [$\because y = f^{-1}(x)$] **(Ans.)**

◆◆ অনুশীলনীর ১২নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

i) $f : R \rightarrow R$ *এবং* $g : R \rightarrow R$ *ফাংশনদ্বয়* $f(x) = x^3 + 5$ *এবং* $g(x) = (x-5)^{\frac{1}{3}}$ *দ্বারা সংজ্ঞায়িত।* *ক. দেখাও যে,* f *এক-এক ফাংশন।* *খ.* $g^{-1}[-2, 0]$ *এর মান নির্ণয় কর।* *গ. প্রমাণ কর যে,* $g = f^{-1}$ *।*	নিজে নিজে চেষ্টা কর। (খ) $[-3, 5]$
ii) $f : R \rightarrow R$ *এবং* $g : R \rightarrow R$ *ফাংশনদ্বয় যথাক্রমে* $f(x) = x^3 + 5$ *এবং* $g(x) = (x-5)^{\frac{1}{3}}$ *দ্বারা সংজ্ঞায়িত।* *ক.* $f(2)$ *এবং* $g(13)$ *এর মান নির্ণয় কর।* *খ.* f *এক-এক কি-না তা নির্ধারণ কর।* *গ. দেখাও যে,* f *এর বিপরীত ফাংশন* g *।*	নিজে নিজে চেষ্টা কর। (ক) 13, 2; (খ) এক-এক

১৩ S অন্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং অন্বয়টি ফাংশন কিনা তা লেখচিত্র থেকে নির্ণয় কর।
(ক) $S = \{(x, y) : 2x - y + 5 = 0\}$ (খ) $S = \{(x, y) : x + y = 1\}$
(গ) $S = \{(x, y) : 3x + y = 4\}$ (ঘ) $S = \{(x, y) : x = -2\}$

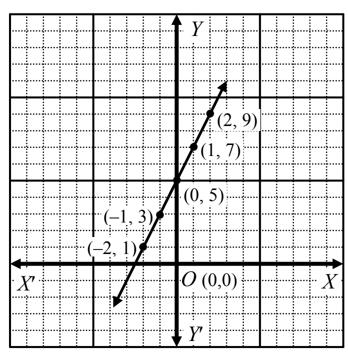
সমাধানের পূর্বে অনুশীলনীর ব্যবচ্ছেদে 'লেখচিত্র হতে ফাংশন নির্ণয়' অংশটি ভালোভাবে পড়ে নিও। খুবই প্রয়োজনীয় বিষয় এটি।
সংক্ষেপে লেখচিত্র হতে ফাংশন যাচাইকরণ: লেখচিত্রের প্রতিটি বিন্দুর ক্রমজোড়ের ১ম উপাদান ভিন্ন ভিন্ন হলে লেখটি ফাংশন নির্দেশ করে।

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, $S = \{(x, y) : 2x - y + 5 = 0\}$
এখানে, S-এর বর্ণনাকারী সমীকরণ: $2x - y + 5 = 0$
বা, $y = 2x + 5$ থেকে x ও y-এর
নিম্নরূপ সংশ্লিষ্ট মান পাওয়া যায়:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2x + 5$	1	3	5	7	9

লেখচিত্রে, XOX'-কে x-অক্ষ এবং YOY'-কে y-অক্ষ এবং O-কে মূলবিন্দু ধরা হয়েছে। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে 1 একক ধরে $(-2, 1)$, $(-1, 3)$, $(0, 5)$, $(1, 7)$, $(2, 9)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করে যোগ করলে সরলরেখা পাওয়া যায়। এটি S অন্বয়টির লেখ।



S অন্বয়টি তখনই ফাংশন হবে যখন লেখচিত্রটিতে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট (x) একাধিক বিন্দু থাকবে না। লেখচিত্র হতে দেখা যায়, সরলরেখাটির প্রতিটি বিন্দুরই প্রথম উপাদান ভিন্ন ভিন্ন। এতে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট একাধিক বিন্দু নেই।
সুতরাং S অন্বয়টি একটি ফাংশন।

খ দেওয়া আছে, $S = \{(x, y) : x + y = 1\}$

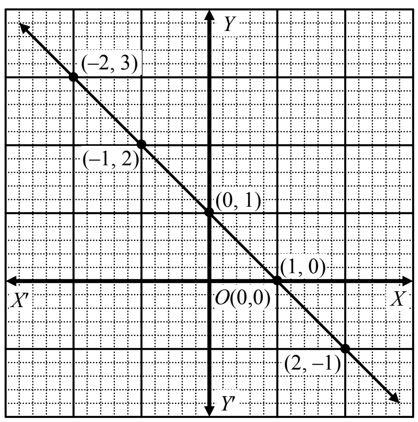
এখানে, S এর বর্ণনাকারী সমীকরণ: $x + y = 1$

বা, $y = 1 - x$ থেকে

x ও y-এর নিম্নরূপ সংশ্লিষ্ট মান পাওয়া যায়:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 1 - x$	3	2	1	0	-1

লেখচিত্রে, XOX'-কে x-অক্ষ এবং YOY'-কে y-অক্ষ এবং O-কে মূলবিন্দু ধরা হয়েছে। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি 5 বাহুর দৈর্ঘ্যকে 1 একক ধরে $(-2, 3), (-1, 2), (0, 1), (1, 0), (2, -1)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করে যোগ করলে সরলরেখা পাওয়া যায়। এটি S অন্বয়টির লেখ।



S অন্বয়টি তখনই ফাংশন হবে যখন লেখচিত্রটিতে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট (x) একাধিক বিন্দু থাকবে না। লেখচিত্র হতে দেখা যায়, সরলরেখাটির প্রতিটি বিন্দুরই প্রথম উপাদান ভিন্ন ভিন্ন। এতে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট একাধিক বিন্দু নেই।

সুতরাং S অন্বয়টি একটি ফাংশন।

গ দেওয়া আছে, $S = \{(x, y) : 3x + y = 4\}$

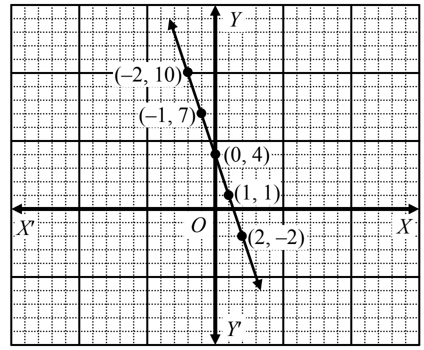
এখানে, S-এর বর্ণনাকারী সমীকরণ: $3x + y = 4$

বা, $y = 4 - 3x$ থেকে

x ও y -এর নিম্নরূপ সংশ্লিষ্ট মান পাওয়া যায়:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 4 - 3x$	10	7	4	1	-2

লেখচিত্রে, XOX'-কে x-অক্ষ এবং YOY'-কে y-অক্ষ এবং O-কে মূলবিন্দু ধরা হয়েছে। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে 1 একক ধরে $(-2, 10), (-1, 7), (0, 4), (1, 1), (2, -2)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করে যোগ করলে সরলরেখা পাওয়া যায়। এটি S অন্বয়টির লেখ।



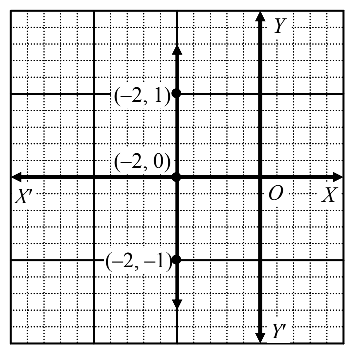
S অন্বয়টি তখনই ফাংশন হবে যখন লেখচিত্রটিতে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট (x) একাধিক বিন্দু থাকবে না। লেখচিত্র হতে দেখা যায়, সরলরেখাটির প্রতিটি বিন্দুরই প্রথম উপাদান ভিন্ন ভিন্ন। এতে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট একাধিক বিন্দু নেই।

সুতরাং S অন্বয়টি একটি ফাংশন।

ঘ দেওয়া আছে, $S = \{(x, y) : x = -2\}$

এখানে, S-এর বর্ণনাকারী সমীকরণ: $x = -2$ এ y যুক্ত কোনো পদ নেই। y-এর মান যাই হোক না কেন x-এর মান সর্বদায় -2 পাওয়া যায়:

x	-2	-2	-2
y	-1	0	1



লেখচিত্রে, XOX'-কে x-অক্ষ এবং YOY'-কে y-অক্ষ এবং O-কে মূলবিন্দু ধরা হয়েছে। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের 5 বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(-2, -1), (-2, 0), (-2, 1)$ বিন্দুটি স্থাপন করে যোগ করলে y-অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা পাওয়া যায়।

এটাই $S = \{(x, y) : x = -2\}$ অন্বয়টির লেখ।

S অন্বয়টি তখনই ফাংশন হবে যখন লেখচিত্রটিতে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট (x) একাধিক বিন্দু থাকবে না। লেখচিত্র হতে দেখা যায়, সরলরেখাটির প্রতিটি বিন্দুরই প্রথম উপাদান একই (-2)। এতে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট একাধিক বিন্দু রয়েছে। যথা: $(-2, 1), (-2, -1), (-2, 0)$ ... ... ইত্যাদি।

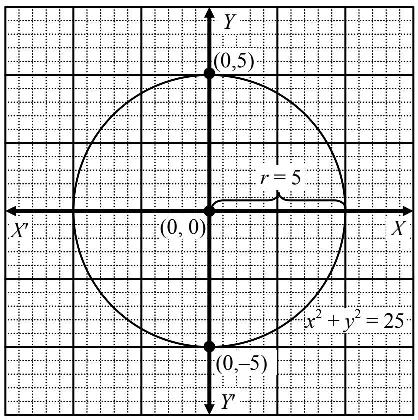
সুতরাং S অন্বয়টি ফাংশন নয়।

> ✉ **জেনে রাখা ভালো:** সকল ফাংশনই সমীকরণ কিন্তু সকল সমীকরণ ফাংশন নাও হতে পারে। যেমন: $x = 2$ একটি সমীকরণ কিন্তু ফাংশন নয়। অপরদিকে $y = 2$ একই সাথে ফাংশন ও সমীকরণ নির্দেশ করে।

১৪ **S অন্বয়ের লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং অন্বয়টি ফাংশন কিনা তা লেখচিত্র থেকে নির্ণয় কর।**
ক) $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 25\}$ **খ) $S = \{(x, y) : x^2 + y = 9\}$**

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 25\}$
প্রদত্ত S অন্বয়ের সমীকরণ: $x^2 + y^2 = 25$
বা, $(x - 0)^2 + (y - 0)^2 = (5)^2$
যা একটি বৃত্তের সমীকরণ।
বৃত্তের সমীকরণ $(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$ এর সাথে তুলনা করে পাই, সমীকরণটি একটি বৃত্তের সমীকরণ যার কেন্দ্র $(0, 0)$ এবং ব্যাসার্ধ 5।
লেখচিত্রে, XOX'-কে x-অক্ষ এবং YOY'-কে y-অক্ষ এবং O-কে মূলবিন্দু ধরা হয়েছে। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের 2 বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরি। এখন, (0, 0) বিন্দুকে কেন্দ্র ধরে এবং 5 একক ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করি। এটিই S অন্বয়টির লেখ।



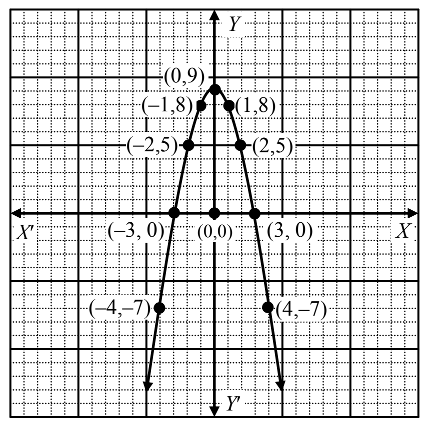
S অন্বয়টি তখনই ফাংশন হবে যখন লেখচিত্রটিতে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট (x) একাধিক বিন্দু থাকবে না। লেখচিত্র হতে দেখা যায়, একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট একাধিক বিন্দু রয়েছে।
যেমন: $(0, 5), (0, -5)$; এরূপ আরো অসংখ্য বিন্দু রয়েছে যাদের প্রথম উপাদান একই।
সুতরাং S অন্বয়টি ফাংশন নয়।

জেনে রাখা ভালো: অন্বয়গুলো লক্ষ কর ও গভীর চিন্তা কর।
(i) $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 25$ এবং $y \geq 0\}$ অন্বয়টি ফাংশন।
(ii) $S = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 25$ এবং $y \leq 0\}$ অন্বয়টি ফাংশন।

খ দেওয়া আছে, $S = \{(x, y) : x^2 + y = 9\}$
প্রদত্ত S অন্বয়ের সমীকরণ: $x^2 + y = 9$
$\therefore y = 9 - x^2$
x ও y এর কয়েকটি সংশ্লিষ্ট মান নিচের ছকে দেখানো হলো:

x	–4	–3	–2	–1	0	1	2	3	4
$y = 9 - x^2$	–7	0	5	8	9	8	5	0	–7

লেখচিত্রে, XOX'-কে x-অক্ষ এবং YOY'-কে y-অক্ষ এবং O-কে মূলবিন্দু ধরা হয়েছে। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি বাহুর দৈর্ঘ্যকে 1 একক ধরে প্রাপ্ত বিন্দুগুলোকে ছক কাগজে স্থাপন করে বিন্দুগুলোকে যুক্ত করলেই S এর লেখ পাওয়া যাবে। নিম্নে তা দেখানো হলো:



S অন্বয়টি তখনই ফাংশন হবে যখন লেখচিত্রটিতে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট (x) একাধিক বিন্দু থাকবে না।
লেখচিত্রে দেখা যায়, y-অক্ষের সমান্তরাল কোনো রেখার ওপর S এর দুইটি বিন্দু নেই অর্থাৎ প্রদত্ত অন্বয়ে একই ১ম উপাদানবিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় নেই। সুতরাং S অন্বয়টি ফাংশন।

১৫ **দেওয়া আছে, $F(x) = 2x - 1$।**
ক. $F(x + 1)$ এবং $F\left(\frac{1}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।
খ. $F(x)$ ফাংশনটি এক-এক কি না তা যাচাই কর, যখন $x, y \in R$।
গ. $F(x) = y$ হলে x এর তিনটি পূর্ণ সাংখ্যিক মানের জন্য y এর মান নির্ণয় কর এবং $y = 2x - 1$ সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।

সমাধান:

ক প্রদত্ত ফাংশন, $F(x) = 2x - 1$
$\therefore F(x + 1) = 2(x + 1) - 1$
$= 2x + 2 - 1$
$= 2x + 1$
$\therefore F(x + 1) = 2x + 1$ **(Ans.)**
আবার, $F\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right) - 1$
$= 1 - 1$
$= 0$
$\therefore F\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ **(Ans.)**

খ ধরি, $x, y \in R$
$\therefore F(x) = 2x - 1$
এবং $F(y) = 2y - 1$
$x, y \in R$ এর জন্য $F(x) = F(y)$ হলে যদি $x = y$ হয় তবে ফাংশনটি এক-এক হবে।
এখন, $F(x) = F(y)$
বা, $2x - 1 = 2y - 1$
বা, $2x = 2y$
$\therefore x = y$
$\therefore$ F(x) ফাংশনটি এক-এক। **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, $F(x) = y$

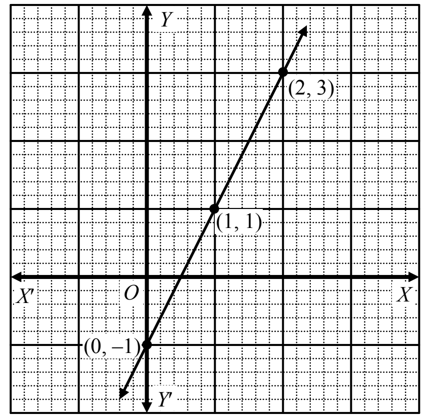
অর্থাৎ, $y = 2x - 1$; [$\because F(x) = 2x - 1$] থেকে

x ও y-এর নিম্নরূপ সংশ্লিষ্ট মান পাওয়া যায়

x	0	1	2
$y = 2x - 1$	-1	1	3

$\therefore$ y এর নির্ণেয় তিনটি মান $-1, 1, 3$। **(Ans.)**

লেখচিত্র: এখন, $y = 2x - 1$ সমীকরণটির লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য ছক কাগজে XOX' কে x-অক্ষ এবং YOY' কে-y অক্ষ এবং O মূলবিন্দু ধরা হয়েছে। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি 5 বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(0, -1)$, $(1, 1)$ $(2, 3)$ বিন্দুগুলো সংযোগ করলেই $y = 2x - 1$ সমীকরণের লেখচিত্র পাওয়া যাবে যা ছক কাগজে দেখানো হলো:



১৬ $f : R \to R$ এবং $g : R \to R$ ফাংশন দুইটি যথাক্রমে, $f(x) = 3x + 3$ এবং $g(x) = \dfrac{x-3}{3}$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

ক. $g^{-1}(-3)$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. $f(x)$ সার্বিক ফাংশন কিনা তা নির্ধারণ কর।

গ. দেখাও যে, $g = f^{-1}$।

সমাধান:

ক **$g^{-1}(-3)$ এর মান নির্ণয়:**

দেওয়া আছে, $g(x) = \dfrac{x-3}{3}$

ধরি, $a = g^{-1}(-3)$

তাহলে, $g(a) = -3$

বা, $\dfrac{a-3}{3} = -3$; [$\because g(x) = \dfrac{x-3}{3}$]

বা, $a - 3 = -9$

বা, $a = -9 + 3$

বা, $a = -6$

$\therefore g^{-1}(-3) = -6$

খ **সার্বিক ফাংশন যাচাইকরণ:**

দেওয়া আছে, $f : R \to R, f(x) = 3x + 3$

ফংশনটির ডোমেন = R এবং কোডোমেন = R

আমরা জানি, রেঞ্জ = কোডোমেন হলে ফাংশনটি সার্বিক হবে।

ফাংশটির রেঞ্জ নির্ণয় করি

x এর যেকোনো বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর বাস্তব মান পাওয়া যায়।

তাই $f(x)$ ফাংশনটির রেঞ্জ = R

আবার, ফাংশনটির কোডোমেন = R

$\therefore$ ফাংশনটির কোডোমেন = রেঞ্জ

তাই ফাংশনটি সার্বিক।

দৃষ্টি আকর্ষণ: কোনো ফাংশনের কোডোমেন = রেঞ্জ হলে, ফাংশনটি সার্বিক/অনটু ফাংশন।

গ **$g = f^{-1}$ এর প্রমাণ:**

মনে করি, $y = f(x) = 3x + 3$

এখন, $y = f(x)$

$\therefore x = f^{-1}(y)$ ... ... (i)

আবার, $y = 3x + 3$

বা, $3x = y - 3$

বা, $x = \dfrac{1}{3}(y - 3)$

বা, $f^{-1}(y) = \dfrac{y-3}{3}$; [(i) নং হতে, $x = f^{-1}(y)$]

$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{3}$

সুতরাং $f^{-1}(x) = g(x)$; $\left[\because g(x) = \dfrac{x-3}{3}\right]$

অতএব, $g = f^{-1}$ **(দেখানো হলো)**

১৭ দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{x-4}$ ।

ক. $f(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর।

খ. $f(x)$ এক-এক ফাংশন কিনা নির্ধারণ কর।

গ. $f^{-1}(x)$ ফাংশন কিনা তা লেখচিত্রের সাহায্যে নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক **$f(x)$ এর ডোমেন নির্ণয়:**

দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{x-4}$

আমরা জানি, ঋণাত্মক রাশির বর্গমূল অসংজ্ঞায়িত।

তাই প্রদত্ত ফাংশনের বাস্তব মান পাওয়া যাবে যদি $x - 4 \geq 0$ হয় বা $x \geq 4$

$\therefore$ ফাংশনের ডোমেন $f = \{x \in R : x \geq 4\}$

খ **$f(x)$ এক-এক ফাংশন কি-না যাচাইকরণ:**

দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{x-4}$

ধরি, $x_1, x_2 \in$ ডোম f

এখন, $f(x)$ ফাংশনটি এক-এক হবে যদি ও কেবল যদি $f(x_1) = f(x_2)$ এর জন্য $x_1 = x_2$ হয়।

মনে করি, $f(x_1) = f(x_2)$

বা, $\sqrt{x_1 - 4} = \sqrt{x_2 - 4}$

বা, $x_1 - 4 = x_2 - 4$; [বর্গ করে]

$\therefore x_1 = x_2$

অর্থাৎ, $f(x_1) = f(x_2)$ এর জন্য $x_1 = x_2$।

অতএব $f(x)$ ফাংশনটি এক-এক।

গ **$f^{-1}(x)$ ফাংশন কি-না তা লেখচিত্রের মাধ্যমে যাচাইকরণ:**

দেওয়া আছে, $f(x) = \sqrt{x-4}$

ধরি, $y = f^{-1}(x)$

তাহলে, $f(y) = x$

বা, $\sqrt{y-4} = x$

বা, $y - 4 = x^2$

বা, $y = x^2 + 4$

$\therefore f^{-1}(x) = x^2 + 4$

এখন, প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \sqrt{x-4}$

এর ডোমেন $= [4, \infty)$ এবং রেঞ্জ $= [0, \infty)$

সেক্ষেত্রে $f^{-1}(x)$ ফাংশনের ডোমেন হবে $[0, \infty)$

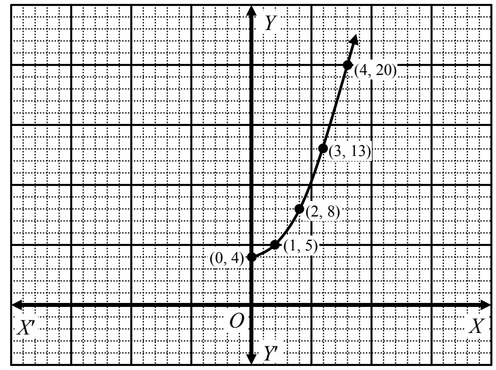
তাই $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কনে x এর মান $[0, \infty)$ ব্যবধি হতেই নিতে হবে।

তাহলে আমরা পাই, $f^{-1}(x) = 4 + x^2$; $x \geq 0$ বা, $x \in [0, \infty)$

এখন $[0, \infty)$ ব্যবধিতে x এর কয়েকটি মানের জন্য $f^{-1}(x)$ এর মান নির্ণয় করি:

x	0	1	2	3	4
$f^{-1}(x) = 4 + x^2$	4	5	8	13	20

ছক কাগজের x-অক্ষ বরাবর প্রতি 2 ঘরকে 1 একক ধরে x চলকের মান এবং y-অক্ষ বরাবর প্রতি 1 ঘরকে 1 একক ধরে $f^{-1}(x)$ এর মান বসিয়ে লেখচিত্রটি অঙ্কন করি।



$f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র হতে দেখা যায় ডোমেনের অন্তর্ভুক্ত x এর প্রতিটি মানের জন্য $f^{-1}(x)$ এর ভিন্ন ভিন্ন মান পাওয়া যায়।

$\therefore f^{-1}(x)$ একটি ফাংশন।

জেনে রাখা ভালো: যেকোনো ফাংশনের ডোমেন = বিপরীত ফাংশনের রেঞ্জ

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২৩

Z সেটে "x হলো y এর বর্গ" অন্বয়টিকে ক্রমজোড়ের সেট রূপে বর্ণনা কর।

সমাধান: এক্ষেত্রে,

Z = পূর্ণ সংখ্যার সেট $= \{..., -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, ...\}$

প্রশ্নমতে, Z সেটে "x হলো y এর বর্গ" অন্বয়টিকে ক্রমজোড়ের সেট রূপে বর্ণনা করতে হবে।

অর্থাৎ "x হলো y এর বর্গ" অন্বয়টির প্রতিটি ক্রমজোড়ের প্রতিটি সদস্য Z সেটের অন্তর্গত হবে, অর্থাৎ $x \in Z$ এবং $y \in Z$ হবে।

প্রদত্ত অন্বয়: x হলো y এর বর্গ অর্থাৎ $x = y^2$

এখন, Z সেটে প্রদত্ত অন্বয়টির ক্রমজোড়ের সেট A হলে

$A = \{(x, y) : x \in Z, y \in Z$ এবং $x = y^2\}$

$= \{(x, y) : x \in Z, y \in Z$ এবং $y = \pm\sqrt{x}\}$

এখন, $x = 0$ হলে $y = \pm\sqrt{0} = 0$; $\therefore$ ক্রমজোড়টি হবে $(0, 0) \in Z$

$x = 1$ হলে $y = \pm\sqrt{1} = \pm 1$

$\therefore$ ক্রমজোড় দুটি হবে $(1, 1) \in Z$ এবং $(1, -1) \in Z$

$x = 4$ হলে $y = \pm\sqrt{4} = \pm 2$

$\therefore$ ক্রমজোড় দুটি হবে $(4, 2)$ এবং $(4, -2) \in Z$

$x = 9$ হলে $y = \pm\sqrt{9} = \pm 3$;

$\therefore$ ক্রমজোড় দুটি হবে $(9, 3) \in Z$ এবং $(9, -3) \in Z$

....

....

$\therefore$ উদ্দিষ্ট সেটটি হবে, $A = \{..., (9, -3), (4, -2), (1, -1), (0, 0), (1, 1), (4, 2), (9, 3), ...\}$

দৃষ্টি আকর্ষণ:

- এক্ষেত্রে $x \in Z$ অর্থাৎ x হলো পূর্ণসংখ্যা সেটের সদস্য। কিন্তু ঋণাত্মক রাশির বর্গমূল অসম্ভব বিধায়, x এর মান ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা হবে না।
- x এর মান হিসেবে $x = 0, 1, 2, 3, 4, ...$ইত্যাদি বিবেচনা করা যায়। x এর এসকল পূর্ণসাংখ্যিক মানের জন্য প্রান্ত y এর প্রাপ্ত মান পূর্ণসাংখ্যিক হলেই অর্থাৎ $x \in Z$ এবং $y \in Z$ হলেই কেবলমাত্র ক্রমজোড়টি উদ্দিষ্ট সেটের (A) সদস্য হবে।
  $x = 2, 3, ...$ প্রভৃতির জন্য y এর মান $(\pm\sqrt{2}, (\pm\sqrt{3}, ...)$ পূর্ণসংখ্যা নয়। তাই এসকল ক্রমজোড় উদ্দিষ্ট সেটের (A) সদস্য বলে বিবেচিত হবে না।
  দেখা যাচ্ছে, x এর মান ধনাত্মক পূর্ণবর্গ সংখ্যা $(0, 1, 4, 9, ...)$ হলেই y এর মান পূর্ণসংখ্যা হয় $(0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, ...)$
  তাই x এর মান হিসেবে শুধুমাত্র ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা বিবেচনা করা হয়েছে।

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২৬

$F = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$ অন্বয়টি কী ফাংশন? এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর। সম্ভব হলে F এর জন্য একটি সূত্র নির্ণয় কর।

সমাধান:

ফাংশন হিসেবে অন্বয়টির পরীক্ষণ:

প্রদত্ত অন্বয় $F = \{(-2, 4), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 4)\}$

আমরা জানি, কোনো অন্বয়ে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট একাধিক ভিন্ন ক্রমজোড় না থাকলে সেই অন্বয়টি ফাংশন হিসেবে বিবেচিত হয়।

প্রদত্ত অন্বয়ে F এর ক্রমজোড় পাঁচটির প্রথম উপাদানসমূহ হলো: $-2, -1, 0, 1, 2$

দেখা যাচ্ছে, প্রথম উপাদানসমূহের প্রতিটিই ভিন্ন ভিন্ন। অর্থাৎ F অন্বয়ে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট একাধিক ভিন্ন ক্রমজোড় নেই।

তাই F অন্বয়টি একটি ফাংশন।

ডোম F ও রেঞ্জ F নির্ণয়:

কোনো ফাংশনের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহের সেট হচ্ছে ফাংশনটির ডোমেন এবং ২য় উপাদানসমূহের সেট হচ্ছে ফাংশটির রেঞ্জ।

এখানে, F ফাংশনের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহের সেট $= \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেট $= \{4, 1, 0, 1, 4\} = \{4, 1, 0\}$ [সেটের সমতার সংজ্ঞানুসারে]

$\therefore$ F ফাংশনটির ডোমেন, ডোম $F = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ এবং রেঞ্জ $F = \{4, 1, 0\}$

F এর সূত্র নির্ণয়:

F অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোকে (x, y) হিসেবে বিবেচনা করি।

এখন $(-2, 4)$ ক্রমজোড়ের ক্ষেত্রে $x = -2$ হলে $y = 4 = (-2)^2 = x^2$

$(-1, 1)$ ক্রমজোড়ের ক্ষেত্রে $x = -1$ হলে $y = 1 = (-1)^2 = x^2$

$(0, 0)$ ক্রমজোড়ের ক্ষেত্রে $x = 0$ হলে $y = 0 = 0^2 = x^2$

$(1, 1)$ ক্রমজোড়ের ক্ষেত্রে $x = 1$ হলে $y = 1 = 1^2 = x^2$

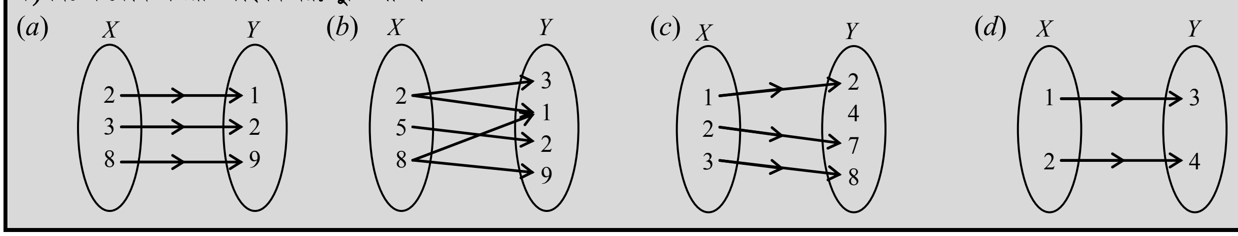
$(2, 4)$ ক্রমজোড়ের ক্ষেত্রে $x = 2$ হলে $y = 4 = 2^2 = x^2$

$\therefore$ F অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোকে (x,y) হিসেবে বিবেচনা করলে F এর জন্য পাই, $y = x^2$

$\therefore$ F এর সূত্র: $F = \{(x, y) : x \in A, y \in A, y = x^2\}$

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২৭

ক) নিচের কোন অন্বয়টি ফাংশন নয়? যুক্তি দাও।



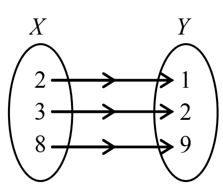
সমাধান: জ্ঞাতব্য: কোনো অন্বয় ফাংশন হতে হলে-

(i) অন্বয়ের প্রতিটি ক্রমজোড়ের ১ম উপাদানের সদস্যসমূহ অবশ্যই ভিন্ন ভিন্ন হবে।

(ii) ক্রমজোড়গুলোর প্রথম অংশক সেটের প্রতিটি উপাদান, দ্বিতীয় অংশক সেটের কেবলমাত্র একটি উপাদানের সাথে অবশ্যই সম্পর্কিত হতে হবে।

অর্থাৎ এমন কোনো প্রথম উপাদান থাকবেনা যা দ্বিতীয় অংশক সেটের কোনো উপাদানের সাথে সম্পর্কিত নয়।

a **প্রদত্ত অন্বয়টি হলো:**



১ম উপাদানসমূহের সেট (X) ২য় উপাদানসমূহের সেট (Y)

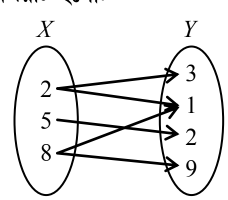
প্রদত্ত অন্বয়ের ক্রমজোড়ের ১ম উপাদানের সেট $\{2, 3, 8\}$ যার প্রতিটি উপাদান ভিন্ন।

আবার, অন্বয়ের ১ম উপাদানের সেটের প্রতিটি সদস্য কেবলমাত্র একটি দ্বিতীয় উপাদানের সেটের সাথে সম্পর্কিত।

$\therefore$ প্রদত্ত অন্বয়টি ফাংশন।

বি.দ্র: ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক ফাংশন।

b **প্রদত্ত অন্বয়টি হলো:**



১ম উপাদানসমূহের সেট (X) ২য় উপাদানসমূহের সেট (Y)

এক্ষেত্রে দেখা যাচ্ছে, অন্বয়টির প্রথম উপাদানসমূহের মধ্যে 2 এবং 8 এর প্রত্যেকেই দুটি করে 'দ্বিতীয় উপাদান' এর সাথে সম্পর্কিত।

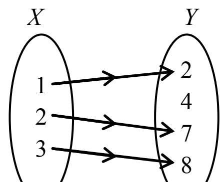
প্রথম উপাদানসমূহের সেটের '2' উপাদানটি দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেটের দুটি উপাদান '3' এবং '1' এর সাথে সম্পর্কিত। $2 \rightarrow 3, 2 \rightarrow 1$

অনুরূপভাবে, প্রথম উপাদানসমূহের সেটের '8' উপাদানটি দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেটের দুটি উপাদান '1' এবং '9' এর সাথে সম্পর্কিত। $8 \rightarrow 1, 8 \rightarrow 9$

অর্থাৎ অন্বয়টিতে একই প্রথম উপাদান বিশিষ্ট একাধিক ভিন্ন ক্রমজোড় [(2, 3) ও (2, 1); (8, 1) ও (8, 9)] রয়েছে যা ফাংশনের সংজ্ঞার সাথে সাদৃশ্যপূর্ণ নয়।

তাই অন্বয়টি ফাংশন নয়।

c



১ম উপাদাসমূহের সেট (X) ২য় উপাদাসমূহের সেট (Y)

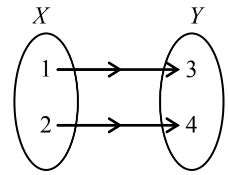
প্রদত্ত অন্বয়ের ক্রমজোড়ের ১ম উপাদানের সেট $\{1, 2, 3\}$ যার প্রতিটি উপাদান ভিন্ন।

আবার, অন্বয়ের ১ম উপাদানের সেটের প্রতিটি সদস্য কেবলমাত্র একটি দ্বিতীয় উপাদানের সেটের সাথে সম্পর্কিত।

$\therefore$ প্রদত্ত অন্বয়টি ফাংশন।

বি.দ্র: এখানে ক্রমজোড়ের ২য় অংশকের সেটের উপাদান 4, ১ম অংশকের উপাদানের সাথে সম্পর্কিত নয়। এরূপ হলেও অন্বয়টি ফাংশন বলে বিবেচিত হবে। কেননা ফাংশনের সংজ্ঞানুযায়ী ১ম অংশকে সেটের প্রতিটি উপাদানকে ২য় অংশকের সেটের একটি উপাদানের সাথে সংশ্লিষ্ট হতে হয়। কিন্তু ২য় অংশকের সেটের সব উপাদান ১ম অংশকের সেটের উপাদানের সাথে সংশ্লিষ্ট নাও হতে পারে। এসব ক্ষেত্রে অন্বয়টি ফাংশন, তবে সার্বিক বা অনটু ফাংশন নয়।

d **প্রদত্ত অন্বয়টি হলো:**



১ম উপাদানসমূহের সেট (X) ২য় উপাদানসমূহের সেট (Y)

প্রদত্ত অন্বয়ের ক্রমজোড়ের ১ম উপাদানের সেট $\{1, 2\}$ যার প্রতিটি উপাদান ভিন্ন।

আবার, অন্বয়ের ১ম উপাদানের সেটের প্রতিটি সদস্য কেবলমাত্র একটি দ্বিতীয় উপাদানের সেটের সাথে সম্পর্কিত।

$\therefore$ প্রদত্ত অন্বয়টি ফাংশন।

বি.দ্র: ফাংশনটি এক-এক এবং সার্বিক ফাংশন।

খ) $f : x \to 4x + 2$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশন যার ডোমেন $D = \{-1, 3, 5\}$। ফাংশনটির রেঞ্জ সেট নির্ণয় কর।

__সমাধান:__ প্রদত্ত ফাংশনটি হলো:

$f : x \to 4x + 2$; যার ডোমেন $D = \{-1, 3, 5\}$

ডোমেন D এর প্রতিটি উপাদানের মান $f(x)$ -এ বসালে $f(x)$ এর যে মান পাওয়া যায় সেটিই হচ্ছে ডোমেনের ঐ উপাদানের প্রতিবিম্ব বা ইমেজ।

আর এই প্রাপ্ত সকল প্রতিবিম্ব বা ইমেজসমূহের সেট হচ্ছে রেঞ্জ সেট।

এক্ষেত্রে $f(x) = 4x + 2$ এবং ডোমেন $D = \{-1, 3, 5\}$

D এর ১ম সদস্য -1 এর প্রতিবিম্ব/ইমেজ $f(-1) = 4(-1) + 2 = -2$

D এর ২য় সদস্য 3 এর প্রতিবিম্ব/ইমেজ $f(3) = 4(3) + 2 = 14$

D এর ৩য় সদস্য 5 এর প্রতিবিম্ব/ইমেজ $f(5) = 4(5) + 2 = 22$

$\therefore$ নির্ণেয় রেঞ্জ সেট/ইমেজ সেট $= \{-2, 14, 22\}$ **(Ans.)**

বি.দ্র: রেঞ্জ সেটকে ইমেজসেট বা প্রতিবিম্ব সেটও বলা হয়।

গ) প্রদত্ত S অন্বয়টিকে তালিকা পদ্ধতিতে বর্ণনা কর এবং কোনগুলো ফাংশন তা নির্ধারণ কর। ডোম S ও রেঞ্জ S নির্ণয় কর। যেখানে $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

(১) $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $x + y = 1\}$
(২) $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $x - y = 1\}$
(৩) $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y = x^2\}$
(৪) $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y^2 = x\}$

__সমাধান:__

১ প্রদত্ত অন্বয়, $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $x + y = 1\}$
এবং $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

প্রদত্ত অন্বয় হতে দেখা যায় x এবং y উভয়কেই A এর সদস্য হতে হবে।

এখন, প্রতিটি $x \in A$ এর জন্য $x + y = 1$ বা $y = 1 - x$ থেকে y এর মান নির্ণয় করি।

$x \in A$	-2	-1	0	1	2
$y = 1 - x$	3	2	1	0	-1

এক্ষেত্রে দেখা যায় $x \in A$ এর জন্য y এর যেসব মান পাওয়া যাচ্ছে তাদের মধ্যে $2, 1, 0, -1$ মানগুলো A এর অন্তর্ভুক্ত; কিন্তু '3' মানটি A এর অন্তর্ভুক্ত নয়। অর্থাৎ $3 \notin A$;

কিন্তু প্রদত্ত শর্তানুসারে, $x \in A$ এবং $y \in A$ অর্থাৎ x এবং y এর প্রতিটি উপাদানকেই A এর অন্তর্ভুক্ত হতে হবে।

যেহেতু $3 \notin A$ সুতরাং $(-2, 3) \notin S$

y এর অন্যসব উপাদানগুলো A এর অন্তর্ভুক্ত হওয়ায়, অন্যান্য সকল ক্রমজোড় S এর সদস্য হবে।

অর্থাৎ $(-1, 2) \in S; (0, 1) \in S; (1, 0) \in S$ এবং $(2, -1) \in S$

$\therefore S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $x + y = 1\}$
$= \{(-1, 2), (0, 1), (1, 0), (2, -1)\}$

__ফাংশন হিসেবে অন্বয়টির পরীক্ষণ:__

কোনো অন্বয়ে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় না থাকলে অন্বয়টি ফাংশন হিসেবে বিবেচিত হয়।

প্রাপ্ত অন্বয় S এর ক্রমজোড় চারটির প্রথম উপাদানসমূহ হলো: $-1, 0, 1, 2$

দেখা যাচ্ছে, প্রথম উপাদানসমূহের প্রতিটিই ভিন্ন ভিন্ন। অর্থাৎ S অন্বয়ে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট একাধিক ভিন্ন ক্রমজোড় নেই।

তাই S অন্বয়টি একটি ফাংশন।

__ডোম S ও রেঞ্জ S নির্ণয়:__ কোনো ফাংশনের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহের সেট হচ্ছে ফাংশনটির ডোমেন এবং ২য় উপাদানসমূহের সেট হচ্ছে ফাংশনটির রেঞ্জ।

এখানে, S ফাংশনের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহের সেট $= \{-1, 0, 1, 2\}$

এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেট $= \{2, 1, 0, -1\}$

$\therefore$ ডোম $S = \{-1, 0, 1, 2\}$

এবং রেঞ্জ $S = \{2, 1, 0, -1\}$
$= \{-1, 0, 1, 2\}$

Ans: $S = \{(-1, 2), (0, 1), (1, 0), (2, -1)\}$; অন্বয়টি একটি ফাংশন যার ডোম $S = \{-1, 0, 1, 2\}$ এবং রেঞ্জ $S = \{-1, 0, 1, 2\}$

লক্ষণীয়: লক্ষ করলে দেখা যায়, ডোম S এর প্রতিটি উপাদানই রেঞ্জ S রয়েছে। অর্থাৎ এক্ষেত্রে ডোম $S =$ রেঞ্জ S।

বিশেষ দ্রষ্টব্য:

$S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $x + y = 1\}$ এর ক্ষেত্রে x হলো স্বাধীন চলক এবং y হলো অধীন চলক।

তাই $x \in A$ এর জন্য প্রতিবিম্ব (ইমেজ) $y = 1 - x$ এর মান নির্ণয় করা হয়েছে।

যদি $S = \{(y, x) : x \in A, y \in A$ এবং $x + y = 1\}$ আকারে দেওয়া থাকতো সেক্ষেত্রে $y \in A$ এর জন্য প্রতিবিম্ব/ইমেজ $x = 1 - y$ এর মান নির্ণয় করতে হতো। কেননা সেক্ষেত্রে $y =$ স্বাধীন চলক এবং $x =$ অধীন চলক।

২ প্রদত্ত অন্বয়, $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $x - y = 1\}$
এবং $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

প্রদত্ত অন্বয় হতে দেখা যায় x এবং y উভয়কেই A এর সদস্য হতে হবে। এখন, প্রতিটি $x \in A$ এর জন্য $x - y = 1$ বা $y = x - 1$ নির্ণয় করি অর্থাৎ y এর মান নির্ণয় করি।

$x \in A$	-2	-1	0	1	2
$y = x - 1$	-3	-2	-1	0	1

এক্ষেত্রে দেখা যায় $x \in A$ এর জন্য y এর যেসব মান পাওয়া যাচ্ছে তাদের মধ্যে $-2, -1, 0, 1$ মানগুলো A এর অন্তর্ভুক্ত; কিন্তু '-3' মানটি A এর অন্তর্ভুক্ত নয়। অর্থাৎ $-3 \notin A$; কিন্তু প্রদত্ত শর্তানুসারে, $x \in A$ এবং $y \in A$ অর্থাৎ x এবং y এর প্রতিটি উপাদানকেই A এর অন্তর্ভুক্ত হতে হবে।

যেহেতু $-3 \notin A$ সুতরাং $(-2, -3) \notin S$

y এর অন্যসব উপাদানগুলো A এর অন্তর্ভুক্ত হওয়ায়, অন্যান্য সকল ক্রমজোড় S এর সদস্য হবে।

অর্থাৎ $(-1, -2) \in S; (0, -1) \in S; (1, 0) \in S$ এবং $(2, 1) \in S$

$\therefore S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $x - y = 1\}$
$= \{(-1, -2), (0, -1), (1, 0), (2, 1)\}$

ফাংশন হিসেবে অন্বয়টির পরীক্ষণ:

কোনো অন্বয়ে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় না থাকলে অন্বয়টি ফাংশন হিসেবে বিবেচিত হয়।

প্রাপ্ত অন্বয় S এর ক্রমজোড় চারটির প্রথম উপাদানসমূহ হলো: $-1, 0, 1, 2$ দেখা যাচ্ছে, প্রথম উপাদানসমূহের প্রতিটিই ভিন্ন ভিন্ন। অর্থাৎ S অন্বয়ে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট একাধিক ভিন্ন ক্রমজোড় নেই। তাই S অন্বয়টি একটি ফাংশন।

ডোম S ও রেঞ্জ S নির্ণয়: কোনো ফাংশনের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহের সেট হচ্ছে ফাংশনটির ডোমেন এবং ২য় উপাদানসমূহের সেট হচ্ছে ফাংশনটির রেঞ্জ।

এখানে, S ফাংশনের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহের সেট $= \{-1, 0, 1, 2\}$

এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেট $= \{-2, -1, 0, 1\}$

$\therefore S$ ফাংশনটির ডোমেন, ডোম $S = \{-1, 0, 1, 2\}$
এবং রেঞ্জ $S = \{-2, -1, 0, 1\}$

Ans: $S = \{(-1, -2), (0, -1), (1, 0), (2, 1)\}$; অন্বয়টি একটি ফাংশন যার ডোম $S = \{-1, 0, 1, 2\}$ এবং রেঞ্জ $S = \{-2, -1, 0, 1\}$

৩ প্রদত্ত অন্বয়, $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y = x^2\}$
এবং $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

প্রদত্ত অন্বয় হতে দেখা যায় x এবং y উভয়কেই A এর সদস্য হতে হবে। এখন, প্রতিটি $x \in A$ এর জন্য $y = x^2$ অর্থাৎ y এর মান নির্ণয় করি।

$x \in A$	-2	-1	0	1	2
$y = x^2$	4	1	0	1	4

এক্ষেত্রে দেখা যায় $x \in A$ এর জন্য y এর যেসব মান পাওয়া যাচ্ছে তাদের মধ্যে $1, 0, 1$ মানগুলো A এর অন্তর্ভুক্ত; কিন্তু '4' মানটি A এর অন্তর্ভুক্ত নয়। অর্থাৎ $4 \notin A$; কিন্তু প্রদত্ত শর্তানুসারে, $x \in A$ এবং $y \in A$ অর্থাৎ x এবং y এর প্রতিটি উপাদানকেই A এর অন্তর্ভুক্ত হতে হবে।

যেহেতু $4 \notin A$ সুতরাং $(-2, 4) \notin S$ এবং $(2, 4) \notin S$

y এর অন্যসব উপাদানগুলো A এর অন্তর্ভুক্ত হওয়ায়, অন্যান্য সকল ক্রমজোড় S এর সদস্য হবে।

অর্থাৎ $(-1, 1) \in S; (0, 0) \in S; (1, 1) \in S$

$\therefore S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y = x^2\}$
$= \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$

ফাংশন হিসেবে অন্বয়টির পরীক্ষণ:

কোনো অন্বয়ে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় না থাকলে সেই অন্বয়টি ফাংশন হিসেবে বিবেচিত হয়।

প্রাপ্ত অন্বয় S এর ক্রমজোড় তিনটির প্রথম উপাদানসমূহ হলো: $-1, 0, 1$ দেখা যাচ্ছে, প্রথম উপাদানসমূহের প্রতিটিই ভিন্ন ভিন্ন। অর্থাৎ S অন্বয়ে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট একাধিক ভিন্ন ক্রমজোড় নেই। তাই S অন্বয়টি একটি ফাংশন।

ডোম S ও রেঞ্জ S নির্ণয়: কোনো অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহের সেট হচ্ছে ফাংশনটির ডোমেন এবং ২য় উপাদানসমূহের সেট হচ্ছে ফাংশনটির রেঞ্জ।

এখানে, S ফাংশনের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহের সেট $= \{-1, 0, 1\}$ এবং

দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেট $= \{1, 0, 1\} = \{0, 1\}$; [সেটের সমতা অনুসারে]

$\therefore S$ ফাংশনটির ডোমেন, ডোম $S = \{-1, 0, 1\}$
এবং রেঞ্জ $S = \{0, 1\}$

Ans: $S = \{(-1, 1), (0, 0), (1, 1)\}$; অন্বয়টি একটি ফাংশন যার ডোম $S = \{-1, 0, 1\}$ এবং রেঞ্জ $S = \{0, 1\}$

৪ প্রদত্ত অন্বয়, $S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y^2 = x\}$
এবং $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$

প্রদত্ত অন্বয় হতে দেখা যায় x এবং y উভয়কেই A এর সদস্য হতে হবে। এখন, প্রতিটি $x \in A$ এর জন্য $y^2 = x$ বা, $y = \pm\sqrt{x}$

অর্থাৎ y এর মান নির্ণয় করি।

$x \in A$	-2	-1	0	1	2
$y = \pm\sqrt{x}$	$\pm\sqrt{-2}$	$\pm\sqrt{-1}$	0	± 1	$\pm\sqrt{2}$

এক্ষেত্রে দেখা যায় $x \in A$ এর জন্য y এর যেসব মান পাওয়া যাচ্ছে তাদের মধ্যে $0, \pm 1$ মানগুলো A এর অন্তর্ভুক্ত; কিন্তু '$\pm\sqrt{-2}$, $\pm\sqrt{-1}$ ও $\pm\sqrt{2}$' মানগুলো A এর অন্তর্ভুক্ত নয়। কিন্তু প্রদত্ত শর্তানুসারে, $x \in A$ এবং $y \in A$ অর্থাৎ x এবং y এর প্রতিটি উপাদানকেই A এর অন্তর্ভুক্ত হতে হবে।

যেহেতু $\pm\sqrt{-2} \notin A$ সুতরাং $(-2, \sqrt{-2}) \notin S$ এবং $(-2, -\sqrt{-2}) \notin S$

আবার, $\pm\sqrt{-1} \notin A$ সুতরাং $(-1, \sqrt{-1}) \notin S$ এবং $(-1, -\sqrt{-1}) \notin S$

এবং $\pm\sqrt{2} \notin A$ সুতরাং $(2, \sqrt{2}) \notin S$ এবং $(2, -\sqrt{2}) \notin S$

তাছাড়া y এর অন্যসব উপাদানগুলো A এর অন্তর্ভুক্ত হওয়ায়, অন্যান্য সকল ক্রমজোড় S এর সদস্য হবে।

অর্থাৎ $(0, 0) \in S; (1, 1) \in S$ এবং $(1, -1) \in S$

$\therefore S = \{(x, y) : x \in A, y \in A$ এবং $y^2 = x\}$
$= \{(0, 0), (1, 1), (1, -1)\}$

ফাংশন হিসেবে অন্বয়টির পরীক্ষণ:

কোনো অন্বয়ে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় না থাকলে সেই অন্বয়টি ফাংশন হিসেবে বিবেচিত হয়।

প্রাপ্ত অন্বয় S এর ক্রমজোড় গুলোর প্রথম উপাদানসমূহ হলো: $0, 1, 1$ দেখা যাচ্ছে, প্রথম উপাদানসমূহের মধ্যে দুইটি উপাদান একই। অর্থাৎ S অন্বয়ে একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় বিদ্যমান। তাই S অন্বয়টি ফাংশন নয়।

ডোম S ও রেঞ্জ S নির্ণয়: কোনো অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহের সেট হচ্ছে অন্বয়টির ডোমেন এবং ২য় উপাদানসমূহের সেট হচ্ছে অন্বয়টির রেঞ্জ।
এখানে, S অন্বয়ের ক্রমজোড়গুলোর প্রথম উপাদানসমূহের সেট $= \{0, 1, 1\} = \{0, 1\}$; [সেটের সমতা অনুসারে]
এবং দ্বিতীয় উপাদানসমূহের সেট $= \{-1, 0, 1\}$
$\therefore$ S ফাংশনটির ডোমেন, ডোম $S = \{0, 1\}$
এবং রেঞ্জ $S = \{-1, 0, 1\}$
Ans: $S = \{(0, 0), (1, 1), (1, -1)\}$; S একটি অন্বয় কিন্তু ফাংশন নয়। অন্বয়ের ডোম $S = \{0, 1\}$ এবং রেঞ্জ $S = \{-1, 0, 1\}$

ঘ) $F(x) = 2x - 1$ দ্বারা বর্ণিত ফাংশনের জন্য
(১) $F(-2)$, $F(0)$ এবং $F(2)$ নির্ণয় কর। **(২) $F\left(\frac{a+1}{2}\right)$ নির্ণয় কর, যেখানে $a \in R$।**
(৩) $F(x) = 5$ হলে, x নির্ণয় কর। **(৪) $F(x) = y$ হলে x নির্ণয় কর, যেখানে $y \in R$।**

সমাধান:

১ দেওয়া আছে, $F(x) = 2x - 1$

$\therefore$ $F(-2) = 2.(-2) - 1 = -4 - 1 = -5$
$F(0) = 2.(0) - 1 = 0 - 1 = -1$
এবং $F(2) = 2 . 2 - 1 = 4 - 1 = 3$

Ans: $-5, -1, 3$

২ দেওয়া আছে, $F(x) = 2x - 1$

$$\therefore F\left(\frac{a+1}{2}\right) = 2\left(\frac{a+1}{2}\right) - 1 = a + 1 - 1 = a$$ **(Ans.)**

৩ দেওয়া আছে, $F(x) = 2x - 1$

$\therefore$ $5 = 2x - 1$; [$\because F(x) = 5$]
বা, $2x = 5 + 1$
বা, $2x = 6$
বা, $x = 3$
$\therefore$ $x = 3$ **(Ans.)**

৪ দেওয়া আছে, $F(x) = 2x - 1$

$\therefore$ $y = 2x - 1$; [$\because F(x) = y$]
বা, $y + 1 = 2x$
বা, $2x = y + 1$
$\therefore$ $x = \dfrac{y+1}{2}$ **(Ans.)**

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-৩০

ক) নিম্নের প্রতিটি এক-এক ফাংশনের জন্য সংশ্লিষ্ট f^{-1} নির্ণয় কর, যদি বিদ্যমান হয়।
(১) $f(x) = \dfrac{3}{x-1}, x \neq 1$ **(২) $f(x) = \dfrac{2x}{x-2}, x \neq 2$** **(৩) $f : x \to \dfrac{2x+3}{2x-1}, x \neq \dfrac{1}{2}$**

লক্ষণীয়: উপরোক্ত প্রশ্নে বলা রয়েছে "নিম্নের প্রতিটি এক-এক ফাংশনের জন্য সংশ্লিষ্ট f^{-1} নির্ণয় কর, **যদি বিদ্যমান হয়**"। এখানে **"যদি বিদ্যমান হয়"** এ অংশটুকু প্রযোজ্য হবে না। এ প্রসঙ্গে নিম্নে আলোকপাত করা হলো-
i) f যদি **অন্বয়** হয় তবে সর্বদাই এর **বিপরীত অন্বয় f^{-1}** বিদ্যমান। এক্ষেত্রে কোনো শর্ত পূরণের প্রয়োজন হয় না। অর্থাৎ সবক্ষেত্রেই f^{-1} বিদ্যমান।
ii) f যদি **ফাংশন** হয় তবে এক্ষেত্রেও সর্বদাই এর **বিপরীত অন্বয় f^{-1}** বিদ্যমান। এক্ষেত্রেও কোনো শর্ত পূরণের প্রয়োজন হয় না। অর্থাৎ সবক্ষেত্রেই f^{-1} বিদ্যমান।
সুতরাং বলা যায়, f অন্বয় বা ফাংশন যাই হোক না কেন এর **বিপরীত অন্বয় f^{-1}** সর্বদাই বিদ্যমান। **বিপরীত অন্বয়** হিসেবে বিবেচিত হতে হলে কোনো ধরনের শর্ত পূরণের প্রয়োজন হয় না। তাই বলা যায় প্রদত্ত প্রশ্নে **"যদি বিদ্যমান হয়"** এ অংশটুকু প্রযোজ্য হবে না।

দ্রষ্টব্য: f^{-1} বলতে প্রকৃতপক্ষে **বিপরীত অন্বয়কে** বুঝায়। এই বিপরীত অন্বয়টি ফাংশন হতেও পারে, নাও হতে পারে। যদি বিপরীত অন্বয়টি (f^{-1}) ফাংশন হয় তবে তাকে বিপরীত ফাংশন বলা হয়। আর বিপরীত ফাংশন হিসেবে f^{-1} কে বিবেচনা করতে হলে নিম্নোক্ত শর্তটি পুরণ করতে হবে।
শর্ত: f ফাংশনটিকে এক এক এবং সার্বিক ফাংশনের উভয়টিই হতে হয়।
তবে f^{-1} কে **বিপরীত অন্বয়** হিসেবে বিবেচনায় নিতে এ ধরনের কোনোরূপ শর্ত পূরণের প্রয়োজন হয় না।

সমাধান:

১ **f^{-1} নির্ণয়:** ধরি, $a = f^{-1}(x)$

তখন $f(a) = x$; [বিপরীত ফাংশনের সংজ্ঞানুসারে] ... ... (i)

প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$; $x \neq 1$

$\therefore$ $f(a) = \dfrac{3}{a-1}$, $a \neq 1$; [$x = a$ বসিয়ে]

বা, $x = \dfrac{3}{a-1}$; [$\because$ (i) নং হতে $f(a) = x$ বসিয়ে]

বা, $a - 1 = \dfrac{3}{x}$

বা, $a = \dfrac{3}{x} + 1$

বা, $a = \dfrac{3+x}{x}$

বা, $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{x}$; [$\because a = f^{-1}(x)$]

$\therefore$ $f^{-1} : x \to \dfrac{x+3}{x}$; $x \neq 0$ **(Ans.)**

দৃষ্টি আর্কষণ: এক্ষেত্রে $x \neq 0$ অবশ্যই উল্লেখ করতে হবে কেননা $x = 0$ হলে $f^{-1}(x)$ এর মান অসংজ্ঞায়িত হয়।
$f^{-1}(0) = \dfrac{0+3}{0} = \dfrac{3}{0}$; যা অসংজ্ঞায়িত।

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

বিপরীত ফাংশনের সংজ্ঞানুসারে, $f(f^{-1}(x)) = x$ ... ... (i)

প্রদত্ত ফাংশন: $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$; $x \neq 1$

বা, $f(f^{-1}(x)) = \dfrac{3}{f^{-1}(x) - 1}$; [$x = f^{-1}(x)$ বসিয়ে পাই]

বা, $x = \dfrac{3}{f^{-1}(x) - 1}$; [(i) নং হতে]

বা, $x.f^{-1}(x) - x = 3$; [আড়গুণন করে]

বা, $xf^{-1}(x) = 3 + x$

বা, $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{x}$; $x \neq 0$

$\therefore f^{-1} : x \rightarrow \dfrac{x+3}{x}$; $x \neq 0$

সমাধান (তৃতীয় পদ্ধতি)

প্রদত্ত ফাংশন: $f(x) = \dfrac{3}{x-1}$; $x \neq 1$ ... ... (i)

ধরি, $y = f(x)$

বা, $y = \dfrac{3}{x-1}$; [(i) নং হতে]

বা, $x - 1 = \dfrac{3}{y}$

বা, $x = \dfrac{3}{y} + 1 = \dfrac{3+y}{y}$

বা, $f^{-1}(y) = \dfrac{3+y}{y}$, $y \neq 0$; [$y = f(x)$ হলে $x = f{-}1(y)$]

বা, $f^{-1}(x) = \dfrac{3+x}{x}$; $x \neq 0$; [$y = x$ বসিয়ে]

$\therefore f^{-1} : x \rightarrow \dfrac{x+3}{x}$; $x \neq 0$

২ **f^{-1} নির্ণয়:** ধরি, $a = f^{-1}(x)$

তখন $f(a) = x$; [বিপরীত ফাংশনের সংজ্ঞানুসারে] ... ... (i)

প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = \dfrac{2x}{x-2}$, $x \neq 2$

$\therefore f(a) = \dfrac{2a}{a-2}$, $a \neq 2$; [$x = a$ বসিয়ে]

বা, $x = \dfrac{2a}{a-2}$; [$\because$ (i) নং হতে $f(a) = x$ বসিয়ে]

বা, $xa - 2x = 2a$

বা, $a(x-2) = 2x$

বা, $a = \dfrac{2x}{x-2}$

বা, $f^{1}(x) = \dfrac{2x}{x-2}$; [$\because a = f^{1}(x)$]

$\therefore f^{1} : x \rightarrow \dfrac{2x}{x-2}$; $x \neq 2$ **(An**

> **দৃষ্টি আর্কষণ:** এক্ষেত্রে $x \neq 2$ অবশ্যই উল্লেখ করতে হবে কেননা $x = 2$ হলে $f^{1}(x)$ এর মান অসংজ্ঞায়িত হয়।
> $f^{1}(2) = \dfrac{2.2}{2-2} = \dfrac{4}{0}$; যা অসংজ্ঞায়িত।

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

বিপরীত ফাংশনের সংজ্ঞানুসারে, $f(f^{1}(x)) = x$ ... ... (i)

প্রদত্ত ফাংশন: $f(x) = \dfrac{2x}{x-2}$; $x \neq 2$

বা, $f(f^{-1}(x)) = \dfrac{2.f^{1}(x)}{f^{1}(x) - 2}$; [$x = f^{1}(x)$ বসিয়ে পাই]

বা, $x = \dfrac{2.f^{1}(x)}{f^{1}(x) - 2}$; [(i) নং হতে]

বা, $xf^{1}(x) - 2x = 2f^{1}(x)$; [আড়গুণন করে]

বা, $xf^{1}(x) - 2f^{1}(x) = 2x$

বা, $f^{1}(x)(x-2) = 2x$

বা, $f^{1}(x) = \dfrac{2x}{x-2}$

$\therefore f^{1} : x \rightarrow \dfrac{2x}{x-2}$; $x \neq 2$

সমাধান (তৃতীয় পদ্ধতি)

প্রদত্ত ফাংশন: $f(x) = \dfrac{2x}{x-2}$; $x \neq 2$ ... ... (i)

ধরি, $y = f(x)$

বা, $y = \dfrac{2x}{x-2}$; [(i) নং হতে]

বা, $xy - 2y = 2x$; [আড়গুণন করে]

বা, $xy - 2x = 2y$

বা, $x(y-2) = 2y$

বা, $x = \dfrac{2y}{y-2}$

বা, $f^{-1}(y) = \dfrac{2y}{y-2}$, $y \neq 2$; $\left[\begin{array}{l} y = f(x) \text{ হলে বিপরীত ফাংশনের} \\ \text{সংজ্ঞানুসারে } x = f^{-1}(y) \end{array}\right]$

বা, $f^{1}(x) = \dfrac{2x}{x-2}$, $x \neq 2$; [$y = x$ বসিয়ে]

$\therefore f^{1} : x \rightarrow \dfrac{2x}{x-2}$; $x \neq 2$

৩ **f^{1} নির্ণয়:** $f : x \rightarrow \dfrac{2x+3}{2x-1}$, $x \neq \dfrac{1}{2}$

ধরি, $a = f^{-1}(x)$

তখন $f(a) = x$; [বিপরীত ফাংশনের সংজ্ঞানুসারে] ... ... (i)

প্রদত্ত ফাংশন, $f(x) = \dfrac{2x+3}{2x-1}$; $x \neq \dfrac{1}{2}$

$\therefore f(a) = \dfrac{2a+3}{2a-1}$, $a \neq \dfrac{1}{2}$; [$x = a$ বসিয়ে]

বা, $x = \dfrac{2a+3}{2a-1}$; [$\because f(a) = x$ বসিয়ে]

বা, $2ax - x = 2a + 3$

বা, $2ax - 2a = 3 + x$

বা, $2a(x-1) = x + 3$

বা, $a = \dfrac{x+3}{2(x-1)}$

বা, $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2(x-1)}$; [$\because a = f^{1}(x)$]

$\therefore f^{-1} : x \rightarrow \dfrac{x+3}{2(x-1)}$; $x \neq 1$ **(Ans.)**

> **দৃষ্টি আর্কষণ:** এক্ষেত্রে $x \neq 1$ অবশ্যই উল্লেখ করতে হবে কেননা $x = 1$ হলে $f^{1}(x)$ এর মান অসংজ্ঞায়িত হয়।
> $f^{-1}(0) = \dfrac{1+3}{2(1-1)} = \dfrac{4}{0}$; যা অসংজ্ঞায়িত।

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

বিপরীত ফাংশনের সংজ্ঞানুসারে, $f(f^{-1}(x)) = x$ ... ... (i)

প্রদত্ত ফাংশন: $f : x \to \dfrac{2x+3}{2x-1}, x \neq \dfrac{1}{2}$

বা, $f(f^{-1}(x)) = \dfrac{2.f^{-1}(x)+3}{2.f^{-1}(x)-1}$; $[x = f^{-1}(x)$ বসিয়ে পাই$]$

বা, $x = \dfrac{2f^{-1}(x)+3}{2f^{-1}(x)-1}$; [(i) নং হতে]

বা, $2x.f^{-1}(x) - x = 2.f^{-1}(x) + 3$; [আড়গুণন করে]

বা, $2x.f^{-1}(x) - 2.f^{-1}(x) = 3 + x$

বা, $2(f^{-1}(x))(x-1) = x + 3$

বা, $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2(x-1)}$; $x \neq 1$

$\therefore f^{-1} : x \to \dfrac{x+3}{2(x-1)}$; $x \neq 1$

সমাধান (তৃতীয় পদ্ধতি)

প্রদত্ত ফাংশন: $f : x \to \dfrac{2x+3}{2x-1}, x \neq \dfrac{1}{2}$ ... ... (i)

ধরি, $y = f(x)$

বা, $y = \dfrac{2x+3}{2x-1}$; [(i) নং হতে]

বা, $y(2x-1) = 2x + 3$

বা, $2xy - y = 2x + 3$

বা, $2xy - 2x = y + 3$

বা, $2x(y-1) = y + 3$

বা, $x = \dfrac{y+3}{2(y-1)}$

বা, $f^{-1}(y) = \dfrac{y+3}{2(y-1)}, y \neq 1$; [$y = f(x)$ হলে বিপরীত ফাংশনের সংজ্ঞানুসারে $x = f^{-1}(y)$]

বা, $f^{-1}(x) = \dfrac{x+3}{2(x-1)}$, $x \neq 1$; [$y = x$ বসিয়ে]

$\therefore f^{-1} : x \to \dfrac{x+3}{2(x-1)}$; $x \neq 1$

খ) বর্ণিত ফাংশন $f(x) = \dfrac{4x-9}{x-2}$, $x \neq 2$ এর ক্ষেত্রে যদি f^{-1} বিদ্যমান হয় তবে
(১) $f^{-1}(-1)$ এবং $f^{-1}(1)$ নির্ণয় কর। (২) x এর মান নির্ণয় কর যেন $4f^{-1}(x) = x$

সমাধান:

ক প্রদত্ত ফাংশন: $f(x) = \dfrac{4x-9}{x-2}$, $x \neq 2$।

ধরি, $a = f^{-1}(x)$

তখন $f(a) = x$; [বিপরীত ফাংশনের সংজ্ঞানুসারে]

বা, $\dfrac{4a-9}{a-2} = x, a \neq 2$; [$x = a$ বসিয়ে]

বা, $ax - 2x = 4a - 9$; [আড়গুণন করে]

বা, $ax - 4a = -9 + 2x$

বা, $a(x-4) = 2x - 9$

বা, $a = \dfrac{2x-9}{x-4}$

বা, $f^{-1}(x) = \dfrac{2x-9}{x-4}$, $x \neq 4$; [$\because a = f^{-1}(x)$]

$\therefore f^{-1}(-1) = \dfrac{2(-1)-9}{(-1)-4}$

$= \dfrac{-2-9}{-1-4}$

$= \dfrac{-11}{-5} = \dfrac{11}{5}$

এবং $f^{-1}(1) = \dfrac{2(1)-9}{(1)-4}$

$= \dfrac{2-9}{1-4}$

$= \dfrac{-7}{-3}$

$= \dfrac{7}{3}$

খ দেওয়া আছে, $4f^{-1}(x) = x$

বা, $4.\dfrac{2x-9}{x-4} = x$

বা, $x^2 - 4x = 8x - 36$; [আড়গুণন করে]

বা, $x^2 - 4x - 8x + 36 = 0$

বা, $x^2 - 12x + 36 = 0$

বা, $x^2 - 2.x.6 + 6^2 = 0$

বা, $(x-6)^2 = 0$

বা, $x - 6 = 0$

$\therefore x = 6$

গ) বর্ণিত ফাংশন $f(x) = \dfrac{2x+2}{x-1}$, $x \neq 1$ এর জন্য যদি f^{-1} বিদ্যমান হয়, তবে
(১) $f^{-1}(3)$ নির্ণয় কর। (২) $f^{-1}(p) = kp$, p এর সাপেক্ষে k কে প্রকাশ কর।

সমাধান:

ক বর্ণিত ফাংশন: $f(x) = \dfrac{2x+2}{x-1}$, $x \neq 1$ ... ... (i)

ধরি, $a = f^{-1}(3)$

তখন, $f(a) = 3$

বা, $\dfrac{2a+2}{a-1} = 3$; [(i) নং এ $x = a$ বসিয়ে]

বা, $3a - 3 = 2a + 2$; [আড়গুণন করে]

বা, $3a - 2a = 2 + 3$

বা, $a = 5$

বা, $f^{-1}(3) = 5$; [$\because a = f^{-1}(3)$]

$\therefore f^{-1}(3) = 5$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $f^{-1}(p) = kp$

তাহলে বিপরীত ফাংশনের সংজ্ঞানুসারে,

$$f(kp) = p$$

$$\text{বা, } \frac{2kp+2}{kp-1} = p$$

বা, $kp^2 - p = 2kp + 2$; [আড়গুণন করে]

বা, $kp^2 - 2kp = p + 2$

বা, $k(p^2 - 2p) = p + 2$

$$\therefore k = \frac{p+2}{p^2-2p}$$

বি.দ্র: বিপরীত ফাংশন নির্ণয়ের ক্ষেত্রে "কাজ পৃষ্ঠা নং ৩০ এর 'ক'-নং"- এ বর্ণিত নিয়মগুলো থেকে যেকোনো উপায়ে অঙ্কটির সমাধান করা যায়।

ঘ) নিম্নোক্ত প্রত্যেক ক্ষেত্রে প্রদত্ত সম্পর্ক F একটি ফাংশন কিনা তা নির্ণয় কর। F ফাংশন হলে উহার ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর, উহা এক-এক কিনা তাও নির্ধারণ কর:

(১) $F = \{(x, y) \in R^2 : y = x\}$ (২) $F = \{(x, y) \in R^2 : y = x^2\}$

(৩) $F = \{(x, y) \in R^2 : y^2 = x\}$ (৪) $F = \{(x, y) \in R^2 : y = \sqrt{x}\}$

<u>সমাধান:</u>

১ ফাংশন নির্ধারণ: প্রদত্ত অন্বয়, $F = \{(x, y) \in R^2 : y = x\}$

$= \{(x, y) \in R \times R : y = x\}$

এখন, $x \in R$ এবং $y \in R$ এর জন্য $y = x$ ফাংশনের কয়েকটি ক্রমজোড় নির্ণয় করি।

$x = 0$ হলে $y = 0$; ক্রমজোড়টি $(0, 0)$

$x = 1$ হলে $y = 1$; ক্রমজোড়টি $(1, 1)$

$x = -1$ হলে $y = -1$; ক্রমজোড়টি $(-1, -1)$

$x = 2$ হলে $y = 2$; ক্রমজোড়টি $(2, 2)$

$x = -2$ হলে $y = -2$; ক্রমজোড়টি $(-2, -2)$,

$\therefore F(x) = \{(x, y) \in R \times R : y = x\}$

$= \{... (-2, -2), (-1, -1), (0, 0), (1, 1), (2, 2), ...\}$

দেখা যাচ্ছে, $x \in R$ এর জন্য অর্থাৎ x এর প্রতিটি বাস্তব মানের জন্য $y = x$ হওয়ায়, y এরও কেবলমাত্র একটি বাস্তব মান পাওয়া যায়। অর্থাৎ একই প্রথম উপাদানবিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় পাওয়া যাবে না।

$\therefore F$ একটি ফাংশন।

ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়: x এর মান যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে। $\therefore$ ফাংশনটির ডোমেন $= R$।

যেহেতু $x \in R$ বা x এর যেকোনো বাস্তব মানের জন্য y এরও যেকোনো একটি বাস্তব মান পাওয়া যায়। অর্থাৎ $y \in R$ হয়।

$\therefore$ ফাংশনটির রেঞ্জ $= R$

এক-এক ফাংশন যাচাইকরণ: এক্ষেত্রে অন্বয় সম্পর্কিত সমীকরণ: $y = x$। অর্থাৎ এক্ষেত্রে x এর প্রতিটি বাস্তব মান এর জন্য শুধুমাত্র একটিই প্রতিবিম্ব বা ইমেজ পাওয়া যায়। সুতরাং F একটি এক-এক ফাংশন।

বিকল্প সমাধান:

যেকোনো $x_1, x_2 \in$ ডোম f এর জন্য $f(x_1) = f(x_2)$ হলে যদি $x_1 = x_2$ হয়, তাহলে ফাংশনটি একটি এক-এক ফাংশন হয়।

এখন মনে করি, $x_1, x_2 \in$ ডোম f

এখন, $f(x_1) = f(x_2)$

বা, $x_1 = x_2$; $[\because y = f(x) = x]$

$\therefore x_1 = x_2$

সুতরাং ফাংশনটি এক-এক ফাংশন।

দ্রষ্টব্য: (i) এক-এক ফাংশনের যাচাইকরণের বহুল প্রচলিত নিয়মটি এক-এক ফাংশনের সংজ্ঞা থেকে প্রতিপাদন করা হয়েছে। নিয়মটি হলো:

একটি ফাংশন $f : A \to B$ [অর্থাৎ $f(A) = B$] এক-এক ফাংশন হবে, যদি ও কেবল যদি $f(x_1) = f(x_2)$ হলে, $x_1 = x_2$ হয়। যেখানে $x_1, x_2 \in A$।

(ii) $(x, y) \in R^2$ কে $(x, y) \in R \times R$ হিসেবে লিখা যায়। এর অর্থ হচ্ছে $x \in R$ এবং $y \in R$; $R =$ সকল বাস্তব সংখ্যার সেট।

<u>**জেনে রাখা ভালো:**</u> প্রকৃত পক্ষে R^n বলতে বুঝায় n-সংখ্যক R এর কার্তেসীয় গুণফল ($R \times R \times R$ ... .. n সংখ্যক R)। অর্থাৎ বাস্তব সংখ্যার জগতে n-মাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা।

- R^3 মানে হলো $(R \times R \times R)$ এর কার্তেসীয় গুণফল। অর্থাৎ ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা (x, y, z)। স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা R^3, তিনটি বাস্তব সংখ্যার সদস্য নিয়ে গঠিত যারা ত্রিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় একটি বিন্দু নির্দেশ করে।
- তদ্রুপ R^2 হলো দ্বিমাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থা (x, y), যা দুটি বাস্তব সংখ্যা নিয়ে গঠিত এবং দ্বি-মাত্রিক স্থানাঙ্ক ব্যবস্থায় একটি বিন্দু নির্দেশ করে।

[***Ref:*** en.wikipedia.org/wiki/Real_number এর contents no: 5. Vocubulary and notation]

২ প্রদত্ত অন্বয়, $F = \{(x, y) \in R^2 : y = x^2\}$

ফাংশন কি-না নির্ধারণ: অন্বয় সম্পর্কিত সমীকরণ: $y = x^2$

$x = -1$ হলে, $y = (-1)^2 = 1$

$x = 1$ হলে, $y = 1^2 = 1$

$x = 0$ হলে, $y = (0)^2 = 0$

$x = -2$ হলে, $y = (-2)^2 = 4$

$x = 2$ হলে, $y = 2^2 = 4$

$\therefore F = \{..., (-1, 1), (1, 1), (0, 0), (-2, 4), (2, 4), ...\}$

দেখা যাচ্ছে যে, অন্বয়ের প্রতিটি ক্রমজোড়ের ১ম উপাদান সমূহ সর্বদা ভিন্ন ভিন্ন এবং প্রতিটি x এর জন্য y এর সুনির্দিষ্ট মান পাওয়া যায়।

$\therefore F$ একটি ফাংশন।

ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়: $y = x^2$ ফাংশনটি x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত তাই ফাংশনের ডোমেন $= R$

আবার, $x \in R$ এর জন্য y এর মান সর্বদা অঋণাত্মক হয় অর্থাৎ $y \geq 0$

$\therefore$ ফাংশনের রেঞ্জ $= \{y \in R : y \geq 0\}$

এক-এক ফাংশন যাচাইকরণ: প্রদত্ত ফাংশনের ক্রমজোড়গুলো লক্ষ করলে দেখা যায়, প্রতিটি ক্রমজোড়ের ১ম উপাদানের ইমেজ ভিন্ন নয় যেমন, -1 ও 1 উভয়ের ইমেজ 1।

$\therefore$ ফাংশনটি এক-এক নয়।

বিকল্প সমাধান:

$x_1, x_2 \in$ ডোম f এর জন্য ফাংশনটি এক-এক হবে যদি এবং কেবল যদি $f(x_1) = f(x_2)$ হলে $x_1 = x_2$ হয়।

এখন, $f(x_1) = f(x_2)$

বা, $x_1^2 = x_2^2$

বা, $x_1 = \pm x_2$

ধনাত্মক চিহ্ন নিয়ে পাই, $x_1 = x_2$

ঋণাত্মক চিহ্ন নিয়ে পাই, $x_1 = -x_2$

$x_1, x_2 \in$ ডোম f এর জন্য $f(x_1) = f(x_2)$ হলে $x_1 \neq x_2$ হয়।

$\therefore$ ফাংশনটি এক-এক ফাংশন নয়।

✉ **জেনে রাখা ভালো:**
ফাংশনের রেঞ্জ R_+ লিখা যাবেনা কারণ $0 \notin R_+$
রেঞ্জ = $\{y \in R : y \geq 0\}$ বা $[0, +\infty)$ কে $R_{\geq 0}$ দ্বারাও নির্দেশ করা হয়। অর্থাৎ রেঞ্জ = $R_{\geq 0}$। তবে পাঠ্যবইতে এর উল্লেখ নেই বিধায়, সমাধানে এটি ব্যবহার করা হয়নি। এ জাতীয় প্রতীকসমূহ নিম্নে তুলে ধরা হলো:

	সেটের প্রকৃতি	প্রতীক	মন্তব্য (0 বা শূন্য এর অন্তভুর্ক্তি)
১	বাস্তব সংখ্যার সেট	$R = (-\infty, \infty)$	এক্ষেত্রে, $0 \in R$: অর্থাৎ 0 এই সেটের একটি সদস্য
২	ঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট	$R_- = (-\infty, 0)$	এক্ষেত্রে, $0 \notin R_-$: অর্থাৎ 0 এই সেটের একটি সদস্য নয়
৩	ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট	$R_+ = (0, +\infty)$	এক্ষেত্রে, $0 \notin R_+$: অর্থাৎ 0 এই সেটের সদস্য নয়
৪	অঋণাত্মক বাস্তব সংখ্যার সেট	$R_{\geq 0} = [0, +\infty)$	এক্ষেত্রে, $0 \in R_{\geq 0}$: অর্থাৎ 0 এই সেটের একটি সদস্য

[***Ref:*** en.wikipedia.org/wiki/Real_number এর contents no: 5. Vocubulary and notation]

৩ প্রদত্ত অন্বয়, $F = \{(x, y) \in R^2 : y^2 = x\}$
$= \{(x, y) \in R \times R : y = \pm\sqrt{x}\}$

ফাংশন কি-না নির্ধারণ: অন্বয় সম্পর্কিত সমীকরণ: $y = \pm\sqrt{x}$
$x = 0$ হলে $y = \pm\sqrt{0} = 0$; ক্রমজোড়টি $(0, 0)$
$x = 1$ হলে $y = \pm\sqrt{1} = \pm 1$; ক্রমজোড়দ্বয় $(1, 1)$ ও $(1, -1)$
দেখা যাচ্ছে, অন্বয়টিতে একই প্রথম উপাদান বিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় রয়েছে। তাই অন্বয়টি ফাংশন নয়।

দ্রষ্টব্য: প্রশ্নে F ফাংশন হলে উহার ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় করতে বলা হয়েছে। এক্ষেত্রে অন্বয়টি ফাংশন না হওয়ায় এর ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করা হয়নি।
এক্ষেত্রে মনে রাখা প্রয়োজন যে, ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় না হলেও অন্বয়টির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় সম্ভব। এক্ষেত্রে যদি অন্বয়টির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় করতে বলা হতো সেক্ষেত্রে ডোমেন = $[0, +\infty)$ অর্থাৎ $R_{\geq 0}$ এবং রেঞ্জ $(-\infty, \infty)$ অর্থাৎ R হতো।

৪ প্রদত্ত অন্বয়, $F = \{(x, y) \in R^2 : y = \sqrt{x}\}$
$= \{(x, y) \in R \times R : y = \sqrt{x}\}$

ফাংশন কি-না নির্ধারণ: অন্বয় সম্পর্কিত সমীকরণ: $y = \sqrt{x}$
$x = 0$ হলে, $y = \sqrt{0} = 0$; ক্রমজোড়টি $(0, 0)$
$x = 1$ হলে, $y = \sqrt{1} = 1$; ক্রমজোড়টি $(1, 1)$
$x = 2$ হলে, $y = \sqrt{2}$; ক্রমজোড়টি $(2, \sqrt{2})$
$\therefore F(x) = \{(x, y) \in R \times R : y = \sqrt{x}\}$
$= \{(0, 0), (1, 1), (2, \sqrt{2}), ...\}$
$y = \sqrt{x}$ হওয়ায় x এর মান ধনাত্মক বা শূন্য হতে হবে। কেননা ঋণাত্মক রাশির বর্গমূল অসংজ্ঞায়িত। দেখা যাচ্ছে যে, x এর প্রতিটি গ্রহণযোগ্য মানের জন্য y এরও কেবলমাত্র একটি মান পাওয়া যায়। অর্থাৎ একই প্রথম উপাদান বিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় পাওয়া যাবে না। অর্থাৎ F একটি ফাংশন।

ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়: $y = \sqrt{x}$ হওয়ায় x এর মান ধনাত্মক বা শূন্য হতে হবে। কেননা ঋণাত্মক রাশির বর্গমূল অসংজ্ঞায়িত।
$\therefore$ ফাংশনটির ডোমেন ডোম $F = \{x \in R : x \geq 0\}$
$y = \sqrt{x}$ হওয়ায় $x \in$ ডোম F অর্থাৎ $x \geq 0$ এর জন্য প্রাপ্ত y এর মানও সর্বদা ধনাত্মক বা শূন্য হবে। কখনোই ঋণাত্মক হবে না। তাই ফাংশনটির রেঞ্জও একই হবে।
$\therefore$ ফাংশনটির রেঞ্জ, রেঞ্জ $F = \{y \in R : y \geq 0\}$

এক-এক ফাংশন যাচাইকরণ: এক্ষেত্রে ফাংশন $y = \sqrt{x}$, x এর ঋণাত্মক মানের জন্য অসংজ্ঞায়িত। আবার x এর অঋণাত্মক বাস্তব মানের জন্য y এর কেবল মাত্র একটি করে বাস্তব মান পাওয়া যাবে। সুতরাং F এক-এক ফাংশন।

বিকল্প সমাধান

ধরি $x_1, x_2 \in$ ডোম F
এখন, $f(x_1) = f(x_2)$
বা, $\sqrt{x_1} = \sqrt{x_2}$; $[\because f(x) = y = \sqrt{x}]$
বা, $(\sqrt{x_1})^2 = (\sqrt{x_2})^2$; [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]
বা, $x_1 = x_2$
$\therefore$ ফাংশনটি এক-এক ফাংশন।

✉ **লক্ষণীয়:** এক্ষেত্রে, ডোম F = রেঞ্জ F
দ্রষ্টব্য: (i) এক-এক ফাংশনের যাচাইকরণের বহুল প্রচলিত নিয়মটি এক-এক ফাংশনের সংজ্ঞা থেকে প্রতিপাদন করা হয়েছে। নিয়মটি হলো:
একটি ফাংশন $f : A \rightarrow B$ (অর্থাৎ $f(A) = B$) এক-এক ফাংশন হবে, যদি ও কেবল যদি $f(x_1) = f(x_2)$ হলে $x_1 = x_2$ হয়। যেখানে $x_1, x_2 \in A$।
(ii) $(x, y) \in R^2$ কে $(x, y) \in R \times R$ হিসেবে লিখা যায়। এর অর্থ হচ্ছে $x \in R$ এবং $y \in R$; R = সকল বাস্তব সংখ্যার সেট।

ঙ) যদি $f : \{-2-1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{-8, -1, 0, 1, 8\}$ ফাংশনটি $f(x) = x^3$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত হয় তবে দেখাও যে, f এক-এক এবং সার্বিক।

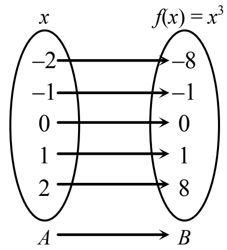
সমাধান:

ঙ দেওয়া আছে, $f : \{-2-1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{-8, -1, 0, 1, 8\}$
অর্থাৎ ফাংশনটির ডোমেন = $\{-2-1, 0, 1, 2\}$
এবং কোডোমেন = $\{-8, -1, 0, 1, 8\}$
আবার, দেওয়া আছে, $f(x) = x^3$
এখন, ডোমেন $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ এর প্রতিটি উপাদানের প্রতিবিম্ব বা ইমেজ নির্ণয় করি। প্রাপ্ত প্রতিবিম্ব বা ইমেজসমূহের সেটটিই হবে রেঞ্জ সেট।
$f(-2) = (-2)^3 = -8$; ক্রমজোড়টি $(-2, -8)$
$f(-1) = (-1)^3 = -1$; ক্রমজোড়টি $(-1, -1)$
$f(0) = (0)^3 = 0$; ক্রমজোড়টি $(0, 0)$
$f(1) = (1)^3 = 1$; ক্রমজোড়টি $(1, 1)$
$f(2) = (2)^3 = 8$; ক্রমজোড়টি $(2, 8)$
$\therefore$ ফাংশনটির রেঞ্জ = $\{-8, -1, 0, 1, 8\}$

এক-এক ফাংশন নির্ণয়: দেখা যাচ্ছে যে, ফাংশনটির ডোমেন $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$ এর প্রতিটি উপাদানের জন্য কেবল মাত্র একটিই প্রতিবিম্ব বা ইমেজ পাওয়া যাচ্ছে যথা: $\{-8, -1, 0, 1, 8\}$ যার প্রত্যেকটি ভিন্ন ভিন্ন।
অর্থাৎ ফাংশনটিতে একই প্রথম উপাদান বিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় নেই। তাই এটি একটি এক-এক ফাংশন।
সার্বিক ফাংশন নির্ণয়: কোনো ফাংশন সার্বিক ফাংশন হবে যদি এর কোডোমেন = রেঞ্জ হয়। এক্ষেত্রে
ফাংশনটির কোডোমেন = $\{-8, -1, 0, 1, 8\}$
এবং রেঞ্জ = $\{-8, -1, 0, 1, 8\}$
ফাংশনটির রেঞ্জ = কোডোমেন হওয়ায় ফাংশনটি সার্বিক।
সুতরাং f এক-এক এবং সার্বিক **(দেখানো হলো)**

(ঙ) এর সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

$f: \{-2, -1, 0, 1, 2\} \rightarrow \{-8, -1, 0, 1, 8\}, f(x) = x^3$
ফাংশনটিকে নিম্নোক্তভাবে প্রকাশ করা যায়।



এখানে A সেটের প্রত্যেকটি উপাদান B সেটের উপাদানের এক-এক মিল রয়েছে আবার B সেটে এমন কোনো উপাদান নেই যা A সেটের সাথে সম্পর্কিত নয়।
সুতরাং f এক-এক এবং সার্বিক ফাংশন।

লক্ষণীয়: এক্ষেত্রে ডোমেন এবং রেঞ্জ প্রতিটিরই 5 টি করে উপাদান রয়েছে এবং ডোমেনের প্রতিটি উপাদানের জন্য প্রাপ্ত প্রতিবিম্ব / ইমেজ ভিন্ন ভিন্ন। খুব সহজেই বোঝা যাচ্ছে এটি একটি এক-এক ফাংশন। এক্ষেত্রে তাই এক-এক ফাংশন যাচাইকরণ পরীক্ষাটি করা হয়নি। যখন ডোমেন, রেঞ্জ তথা কোডোমেনের অনেকগুলো উপাদান থাকলে খুব সহজে এক-এক ফাংশন নির্ণয় করা যায় না। তখনই এক-এক ফাংশন যাচাইকরণের পরীক্ষাটি করা হয়।

চ) (b) $f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow R$ একটি ফাংশন যা $f(x) = 2x + 1$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত। দেখাও যে, f এক-এক ফাংশন কিন্তু সার্বিক ফাংশন নয়।

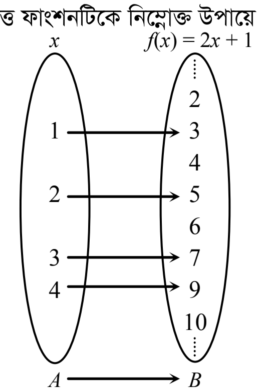
চ দেওয়া আছে, $f: \{1, 2, 3, 4,\} \rightarrow R$
অর্থাৎ ফাংশনটির ডোমেন $= \{1, 2, 3, 4,\}$
এবং কোডোমেন $= R =$ সকল বাস্তব সংখ্যার সেট
আবার, দেওয়া আছে, $f(x) = 2x + 1$
এখন, ডোমেন $\{1, 2, 3, 4,\}$ এর প্রতিটি উপাদানের প্রতিবিম্ব বা ইমেজ নির্ণয় করি। প্রাপ্ত প্রতিবিম্ব বা ইমেজসমূহের সেটটিই হবে ফাংশনটির রেঞ্জ সেট।

$f(1) = 2.1 + 1 = 3$; ক্রমজোড়টি $(1, 3)$
$f(2) = 2.2 + 1 = 5$; ক্রমজোড়টি $(2, 5)$
$f(3) = 2.3 + 1 = 7$; ক্রমজোড়টি $(3, 7)$
$f(4) = 2.4 + 1 = 9$; ক্রমজোড়টি $(4, 9)$

ফাংশনটির রেঞ্জ $= \{3, 5, 7, 9\}$
এক-এক ফাংশন নির্ণয়: দেখা যাচ্ছে যে, ফাংশনটির ডোমেন $\{1, 2, 3, 4\}$ এর প্রতিটি উপাদানের জন্য কেবলমাত্র একটিই প্রতিবিম্ব বা ইমেজ পাওয়া যাচ্ছে যথা: $\{3, 5, 7, 9\}$ যার প্রত্যেকটি ভিন্ন ভিন্ন। অর্থাৎ ফাংশনটিতে একই প্রথম উপাদান বিশিষ্ট একাধিক ক্রমজোড় নেই। তাই এটি এক-এক ফাংশন।
সার্বিক ফাংশন নির্ণয়: কোনো ফাংশন সার্বিক ফাংশন হবে যদি এর কোডোমেন = রেঞ্জ হয়। এক্ষেত্রে
ফাংশনটির কোডোমেন $= R =$ সকল বাস্তব সংখ্যার সেট
এবং রেঞ্জ $= \{3, 5, 7, 9\}$
দেখা যাচ্ছে যে, ফাংশনটির রেঞ্জ $\neq$ কোডোমেন
$\therefore$ ফাংশনটি সার্বিক ফাংশন নয়। **(দেখানো হলো)**

(চ) এর সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

প্রদত্ত ফাংশনটিকে নিম্নোক্ত উপায়ে প্রকাশ করা যায়।



এখানে A সেটের প্রত্যেকটি উপাদান B সেটের কেবলমাত্র একটি উপাদানের সাথে সম্পর্কিত বিধায় এটি এক-এক ফাংশন।
আবার, B সেটে অসংখ্য উপাদান আছে (যেমন চিত্রে 2, 4, 6, 8, 10 ... ...) যেগুলো A সেটের কোনো উপাদানের সাথে সম্পর্কিত নয়। তাই f ফাংশনটি এক-এক হলেও সার্বিক ফাংশন নয়।

বি.দ্র: কোনো ফাংশন সার্বিক হবে যখন ফাংশনটির কোডোমেন = রেঞ্জ হবে। এক্ষেত্রে কোডোমেনের প্রতিটি উপাদান ডোমেন সেটের সাথে সম্পর্কিত হবে।

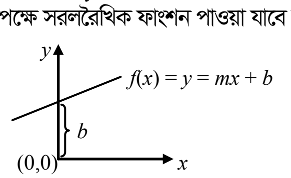
কাজ

পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-৩৩

ক) নিম্নের প্রত্যেক ক্ষেত্রে প্রদত্ত সমীকরণ থেকে y কে x এর ফাংশন রূপে প্রকাশ কর।

(১) $y - 2 = 3(x - 5)$ (২) $y - 5 = -2(x + 1)$ (৩) $y - 2 = \frac{1}{2}(x + 3)$ (৪) $y - 5 = \frac{4}{3}(x - 3)$

প্রশ্নটিতে বলা হয়েছে, প্রদত্ত সমীকরণ থেকে y কে x এর ফাংশন রূপে প্রকাশ করতে (ক), (খ), (গ), (ঘ) সমীকরণগুলো লক্ষ করলে দেখা যায় প্রত্যেকটি সমীকরণেই x ও y প্রত্যেকের সর্বোচ্চ ঘাত 1। অর্থাৎ এ সমীকরণগুলো সরলরেখার সমীকরণ এবং এ সমীকরণগুলো থেকে y কে x এর ফাশংশনরূপে প্রকাশ করলে প্রকৃতপক্ষে সরলরৈখিক ফাংশন পাওয়া যাবে যার সাধারণ রূপ হলো $f(x) = y = mx + b$



যেখানে, $m =$ সরলরেখার ঢাল
$b = y$ অক্ষ থেকে সরলরেখাটি দ্বারা ছেদকৃত অংশ
এবং m ও b উভয়েই বাস্তব সংখ্যা।

উপরোক্ত আলোচনা থেকে বলা যায় প্রশ্নে প্রদত্ত সমীকরণগুলোকে প্রকৃতপক্ষে সরলরৈখিক ফাংশনের সাধারণ রূপে $(y = mx + b)$ প্রকাশ করতে বলা হয়েছে।

সমাধান:

১ প্রদত্ত সমীকরণ: $y - 2 = 3(x - 5)$
বা, $y - 2 = 3x - 15$
বা, $y = 3x - 15 + 2$
বা, $y = 3x - 13$
$\therefore$ নির্ণেয় ফাংশন: $y = 3x - 13$

বি.দ্র: প্রাপ্ত $y = 3x - 13 = 3x + (-13)$ হলে সরলরৈখিক ফাংশন $y = mx + b$ এর একটি রূপ যেখানে $m =$ সরলরেখার ঢাল $= 3$ এবং $b = y$ অক্ষ থেকে ছেদকৃত অংশ $= -13$।

২ প্রদত্ত সমীকরণ: $y - 5 = -2(x + 1)$

বা, $y - 5 = -2x - 2$

বা, $y = -2x - 2 + 5$

বা, $y = -2x + 3$

$\therefore y = (-2)x + 3$

$\therefore$ নির্ণেয় ফাংশন: $y = -2x + 3$

> **বি.দ্র:** প্রাপ্ত $y = (-2)x + 3$ হলো সরলরৈখিক ফাংশন $y = mx + b$ এর একটি রূপ যেখানে m = সরলরেখার ঢাল $= (-2)$ এবং $b = y$ অক্ষ থেকে ছেদকৃত অংশ $= 3$

৩ প্রদত্ত সমীকরণ: $y - 2 = \frac{1}{2}(x + 3)$

বা, $y - 2 = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

বা, $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} + 2$

$\therefore y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ **(Ans.)**

> **বি.দ্র:** প্রাপ্ত $y = \frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$ হলে সরলরৈখিক ফাংশন $y = mx + b$ এর একটি রূপ যেখানে m = সরলরেখার ঢাল $= \frac{1}{2}$ এবং $b = y$ অক্ষ থেকে ছেদকৃত অংশ $= \frac{7}{2}$ ।

৪ প্রদত্ত সমীকরণ: $y - 5 = \frac{4}{3}(x - 3)$

বা, $y - 5 = \frac{4}{3}x - 4$

বা, $y = \frac{4}{3}x - 4 + 5$

$\therefore y = \frac{4}{3}x + 1$

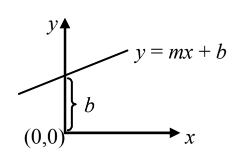
$\therefore$ নির্ণেয় ফাংশন: $y = \frac{4}{3}x + 1$

খ) লেখচিত্র অঙ্কন কর:

(১) $y = 3x - 1$ **(২) $x + y = 3$** **(৩) $x^2 + y^2 = 9$** **(৪) $y = \frac{1}{3}x + 1$**

(১), (২) ও (৪) সমীকরণের লেখচিত্রের সঠিকতা যাচাইকরণ:

এ সমীকরণত্রয় হচ্ছে সরলরেখার সমীকরণ অর্থাৎ সরলরৈখিক ফাংশন $y = mx + b$ এর একটি বিশেষ রূপ যেখানে m = সরলরেখার ঢাল; $b = y$ অক্ষ থেকে সরলরেখাটি দ্বারা ছেদকৃত অংশ।
b এর মান সমীকরণটি থেকেই পাওয়া যায়, (১নং এর কাজসমূহের বিশেষ দ্রষ্টব্য)।
অর্থাৎ লেখচিত্র আঁকার পর মিলিয়ে নেওয়া যেতে পারে যে, রেখাটি y-অক্ষ থেকে b এর সমপরিমাণ অংশ ছেদ করেছে কিনা। যদি মিলে যায় তবে লেখচিত্রটি সঠিকভাবে অঙ্কিত হয়েছে বলা যায়। b এর তিন ধরনের মান হতে পারে-

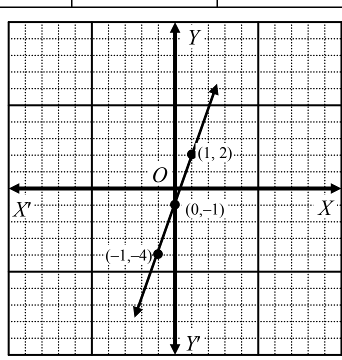


(i) b এর মান ধনাত্মক $\rightarrow$ y অক্ষের ধনাত্মক দিক থেকে ছেদকৃত অংশ
(ii) b এর মান ঋণাত্মক $\rightarrow$ y অক্ষের ঋণাত্মক দিক থকে ছেদকৃত অংশ
(iii) $b = 0 \rightarrow y$ অক্ষ থেকে খণ্ডিত অংশ নেই। অর্থাৎ রেখাটি মূল বিন্দুগামী।

সমাধান:

১ $y = 3x - 1$ প্রদত্ত সম্পর্ক থেকে লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি:

x	-1	0	1
$y = 3x - 1$	-4	-1	2



মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(-1, -4)$, $(0, -1)$, $(1, 2)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি। এই বিন্দুগুলো যোগ করে একটি সরলরেখা পাওয়া গেল। এটিই $y = 3x - 1$ এর লেখ।

> **লক্ষণীয়:** $y = 3x - 1 = 3x + (-1)$ সমীকরণ থেকে বলা যায়, সরলরেখাটি দ্বারা y অক্ষ থেকে ছেদকৃত অংশ হবে $b = -1$; লেখচিত্রটি থেকেও দেখা যায় এটি y অক্ষ থেকে (-1) অংশ ছেদ করেছে। অর্থাৎ এটি $(0, -1)$ বিন্দুগামী। সুতরাং অঙ্কিত লেখচিত্রটি সঠিক।

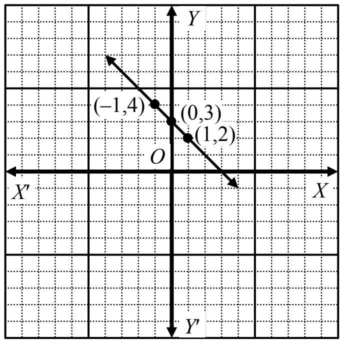
২ **প্রদত্ত সমীকরণ:**

$x + y = 3$

বা, $y = 3 - x$

এ সম্পর্ক থেকে লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি:

x	-1	0	1
$y = 3 - x$	4	3	2



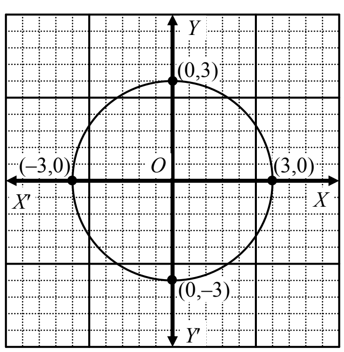
মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(-1, 4)$, $(0, 3)$, $(1, 2)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি। এই বিন্দুগুলো যোগ করে উভয় দিকে বর্ধিত করে একটি সরলরেখা পাওয়া গেল। এটিই $x + y = 3$ এর লেখ।

> ☒ **লক্ষণীয়:** $y = -x + 3$ সমীকরণ থেকে বলা যায়, সরলরেখাটি দ্বারা y অক্ষ থেকে ছেদকৃত অংশ হবে, $b = 3$; লেখচিত্রটি থেকেও দেখা যায় এটি y অক্ষ থেকে (3) অংশ ছেদ করেছে। অর্থাৎ এটি $(0, 3)$ বিন্দুগামী। সুতরাং অঙ্কিত লেখচিত্রটি সঠিক।

৩ **প্রদত্ত সমীকরণ:** $x^2 + y^2 = 9$

বা, $(x-0)^2 + (y-0)^2 = 3^2$

প্রদত্ত সমীকরণের লেখচিত্র একটি বৃত্ত, যাকে বৃত্তের সমীকরণ $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$ এর সাথে তুলনা করে পাই, বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(0, 0)$ অর্থাৎ কেন্দ্র মূলবিন্দুতে এবং ব্যাসার্ধ 3 একক।



ছক কাগজের XOX' বরাবর x-অক্ষ YOY' বরাবর y-অক্ষ এর ক্ষুদ্রতম বর্গের দুই বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(0, 0)$ বিন্দুটি ছক কাগজে স্থাপন করি। মনে করি উহা, O বিন্দু। O বিন্দুকে কেন্দ্র করে 3 একক ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। ইহাই প্রদত্ত $x^2 + y^2 = 9$ এর লেখ।

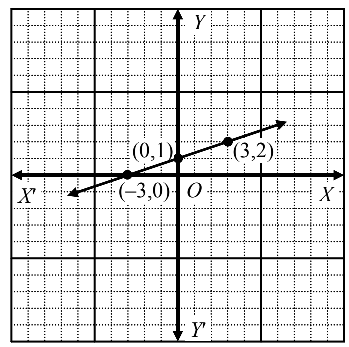
> ☒ **লক্ষণীয়:** বৃত্তের সমীকরণের সাধারণ রূপের একটি হলো:
> $$(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2 ।$$
> যেখানে (p, q) হলো বৃত্তের কেন্দ্র; r বৃত্তের ব্যাসার্ধ $\neq 0$
> তাই প্রদত্ত সমীকরণকে এরূপ আকারে প্রকাশ করে বৃত্তের কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ নির্ণয় করা হয়েছে এবং সেই কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্তটি আঁকা হয়েছে।

৪ **প্রদত্ত সমীকরণ:**

$$y = \frac{1}{3}x + 1$$

এ সম্পর্ক থেকে লেখের কয়েকটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করি:

x	-3	0	3
y	0	1	2



মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(-3, 0)$, $(0, 1)$, $(3, 2)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি। এই বিন্দুগুলো যোগ করে একটি সরল রেখা পাওয়া গেল। এটিই $y = \frac{1}{3}x + 1$ এর লেখ।

> ☒ **লক্ষণীয়:** $y = \frac{1}{3}x + 1$ সমীকরণ থেকে বলা যায়, সরলরেখাটি দ্বারা y অক্ষ থেকে ছেদকৃত অংশ হবে $= 1$; লেখচিত্রটি থেকেও দেখা যায় এটি y অক্ষ থেকে (1) অংশ ছেদ করেছে। অর্থাৎ এটি $(0, 1)$ বিন্দুগামী। সুতরাং অঙ্কিত লেখচিত্রটি সঠিক।

প্রয়োজনীয় তথ্য (অধ্যায় সংশ্লিষ্ট):

i. সরলরৈখিক ফাংশন: $f(x) = y = mx + b$
যেখানে m = সরলরেখার ঢাল; $b = y$-অক্ষ থেকে সরলরেখাটি দ্বারা ছেদকৃত অংশ এবং m ও b উভয়েই বাস্তব সংখ্যা।

ii. দ্বিঘাত ফাংশন: $y = ax^2 + bx + c$; $a \neq 0$; a, b, c প্রত্যেকেই বাস্তব সংখ্যা।

iii. বৃত্তীয় ফাংশন: $(x-p)^2 + (y-q)^2 = r^2$। বৃত্তটির কেন্দ্র (p, q) এবং r বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r \neq 0$ এবং p, q, r প্রত্যেকেই ধ্রুবক।