

অনুশীলনী - ১২.৪



অনুশীলনীর সমাধান



১ নিচের কোন শর্তে $ax + by + c = 0$ ও $px + qy + r = 0$ সমীকরণজোড়টি সমঞ্জস ও পরস্পর অনির্ভরশীল হবে?

(ক) $\frac{a}{p} \neq \frac{b}{q}$

(খ) $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} = \frac{c}{r}$

(গ) $\frac{a}{p} = \frac{b}{q} \neq \frac{c}{r}$

(ঘ) $\frac{a}{p} = \frac{b}{q}$

উত্তর: (ক)

২ $x + y = 4$, $x - y = 2$ হলে (x, y) এর মান নিচের কোনটি?

(ক) (2, 4)

(খ) (4, 2)

(গ) (3, 1)

(ঘ) (1, 3)

উত্তর: (গ)

ব্যাখ্যা: $x + y = 4$... (1)
 $x - y = 2$... (2)

(1) ও (2) যোগ করে পাই, $2x = 6$ বা, $x = 3$
 x এর মান (1) সমীকরণে বসিয়ে পাই, $3 + y = 4$ বা, $y = 1$

৩ $x + y = 6$ ও $2x = 4$ হলে, y মান কত?

(ক) 2

(খ) 4

(গ) 6

(ঘ) 8

উত্তর: (খ)

ব্যাখ্যা: $x + y = 6$... (1)
 $2x = 4$... (2)

(2) থেকে পাই, $x = \frac{4}{2} = 2$
 x এর মান (1)-এ বসিয়ে পাই, $2 + y = 6$ বা, $y = 4$

৪ নিচের কোনটির জন্য পাশের ছকটি সঠিক?

x	0	2	4
y	-4	0	4

(ক) $y = x - 4$

(খ) $y = 8 - x$

(গ) $y = 4 - 2x$

(ঘ) $y = 2x - 4$

উত্তর: (ঘ)

Note: ছক হতে প্রতিটি ক্রমজোড়ের মান প্রত্যেকটি সমীকরণে বসিয়ে দেখতে হবে বামপক্ষ = ডানপক্ষ হয় কিনা। বামপক্ষ = ডানপক্ষ হলে সেটিই নির্ণেয় সমীকরণ।
এক্ষেত্রে $y = 2x - 4$ প্রতিটি ক্রমজোড়ের জন্য সত্য।

৫ $2x - y = 8$ এবং $x - 2y = 4$ হলে, $x + y =$ কত?

(ক) 0

(খ) 4

(গ) 8

(ঘ) 12

উত্তর: (খ)

ব্যাখ্যা: সমীকরণদ্বয় সমাধান করে পাই, $(x, y) = (4, 0)$

$\therefore x + y = 4 + 0 = 4$

৬ $x - y - 4 = 0$ ও $3x - 3y - 10 = 0$ সমীকরণদ্বয় -

i. পরস্পর নির্ভরশীল

ii. পরস্পর সমঞ্জস

iii. এর কোনো সমাধান নেই

উপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) ii

(খ) iii

(গ) i ও iii

(ঘ) ii ও iii

উত্তর: (খ)

ব্যাখ্যা: সমীকরণ জোড়কে $a_1x + b_1y = c_1$ এবং $a_2x + b_2y = c_2$ আকারে প্রকাশ করে পাই, $x - y = 4$
 $3x - 3y = 10$
সমীকরণ জোড়দ্বয়ের সহগ ও ধ্রুবক তুলনা করে পাই,
 $\frac{a_1}{a_2} = \frac{1}{3}$, $\frac{b_1}{b_2} = \frac{-1}{-3} = \frac{1}{3}$, $\frac{c_1}{c_2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

$\therefore \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$
সুতরাং সমীকরণ জোড়টি পরস্পর অসমঞ্জস, অনির্ভরশীল। এক্ষেত্রে সমীকরণজোড়টির কোনো সমাধান নেই।
 \therefore শুধু (iii) নং সঠিক।
দ্রষ্টব্য: বিস্তারিত অনুশীলনী-১২.১ দ্রষ্টব্য।

■ নিচের তথ্যের ভিত্তিতে ৭-৯ নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

আয়তাকার একটি ঘরের মেঝের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ অপেক্ষা ২ মিটার বেশি এবং মেঝের পরিসীমা ২০ মিটার। ঘরটির মেঝে মোজাইক করতে প্রতি বর্গমিটারে ৯০০ টাকা খরচ হয়।

৭ ঘরটির মেঝের দৈর্ঘ্য কত মিটার?

(ক) 10

(খ) 8

(গ) 6

(ঘ) 4

উত্তর: (গ)

ব্যাখ্যা: ধরি, আয়তাকার ঘরের প্রস্থ x এবং দৈর্ঘ্য $y = x + 2$
 \therefore আয়তাকার ঘরের পরিসীমা $= 2(x + y) = 2(x + x + 2) = 4(x + 1)$

শর্তমতে, $4(x + 1) = 20$ বা, $x + 1 = \frac{20}{4} \therefore x = 4$
 \therefore প্রস্থ $= 4$ মিটার এবং দৈর্ঘ্য $= 4 + 2 = 6$ মিটার

৮ ঘরটির মেঝের ক্ষেত্রফল কত বর্গমিটার?

(ক) 24

(খ) 32

(গ) 48

(ঘ) 80

উত্তর: (ক)

ব্যাখ্যা: আয়তাকার ঘরের ক্ষেত্রফল $= xy = 6 \times 4 = 24$ বর্গমিটার।

৯ ঘরটির মেঝে মোজাইক করতে মোট কত খরচ হবে?
(ক) 72000 (খ) 43200 (গ) 28800 (ঘ) 21600

উত্তর: (ঘ)

ব্যাখ্যা: প্রতি বর্গমিটারে মোজাইক করতে 900 টাকা খরচ হলে মোট খরচ হবে = $900 \times 24 = 21600$ টাকা

সহসমীকরণ গঠন করে সমাধান কর (১০-১৭):

১০ কোনো ভগ্নাংশের লব ও হরের প্রত্যেকটির সাথে 1 যোগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{4}{5}$ হবে। আবার, লব ও হরের প্রত্যেকটি থেকে 5 বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ হবে। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, ভগ্নাংশটির লব x এবং হর y

$$\therefore \text{ভগ্নাংশটি} = \frac{x}{y}$$

$$\text{প্রথম শর্তানুসারে, } \frac{x+1}{y+1} = \frac{4}{5} \dots \dots (1)$$

$$\text{দ্বিতীয় শর্তানুসারে, } \frac{x-5}{y-5} = \frac{1}{2} \dots \dots (2)$$

সমীকরণ (1) হতে পাই,

$$5(x+1) = 4(y+1)$$

$$\text{বা, } 5x+5 = 4y+4$$

$$\text{বা, } 5x-4y = -1 \dots \dots (3)$$

সমীকরণ (2) হতে পাই,

$$2(x-5) = y-5$$

$$\text{বা, } 2x-10 = y-5$$

$$\text{বা, } 2x-y = 5 \text{ বা, } y = 2x-5 \dots \dots (4)$$

y এর মান $(2x-5)$ সমীকরণ (3) এ বসিয়ে পাই,

$$5x-4(2x-5) = -1$$

$$\text{বা, } 5x-8x+20 = -1$$

$$\text{বা, } -3x = -1-20$$

$$\text{বা, } x = \frac{-21}{-3}$$

$$\therefore x = 7$$

x এর মান সমীকরণ (4)-এ বসিয়ে পাই,

$$y = 2 \times 7 - 5 = 9$$

$$\therefore \text{ভগ্নাংশটি } \frac{7}{9}$$

❖ লক্ষণীয়: প্রাপ্ত সমীকরণদ্বয়কে প্রতিস্থাপন/ অপনয়ন/ আড়গুণন যেকোনো পদ্ধতিতে সমাধান করা যেতে পারে।

১১ কোনো ভগ্নাংশের লব থেকে 1 বিয়োগ ও হরের সাথে 2 যোগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{2}$ হয়। আর লব থেকে 7 বিয়োগ এবং হর থেকে 2 বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{3}$ হয়। ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, ভগ্নাংশটির লব x এবং হর y

$$\therefore \text{ভগ্নাংশটি} = \frac{x}{y}$$

$$\text{প্রথম শর্তানুসারে, } \frac{x-1}{y+2} = \frac{1}{2} \dots \dots (1)$$

$$\text{দ্বিতীয় শর্তানুসারে, } \frac{x-7}{y-2} = \frac{1}{3} \dots \dots (2)$$

সমীকরণ (1) হতে পাই,

$$\text{বা, } y+2 = 2x-2$$

$$\therefore y = 2x-4 \dots \dots (3)$$

আবার, সমীকরণ (2) থেকে পাই,

$$3x-21 = y-2$$

$$\therefore 3x = y+19 \dots \dots (4)$$

সমীকরণ (4) এ y এর মান $(2x-4)$ বসিয়ে পাই,

$$3x = 2x-4+19$$

$$\text{বা, } 3x-2x = 15$$

$$\therefore x = 15$$

x এর মান (3) নং এ বসিয়ে পাই,

$$y = 2 \times 15 - 4 = 30 - 4 = 26$$

$$\therefore \text{ভগ্নাংশটি } \frac{15}{26}$$

◆◆ অনুশীলনের ১১নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

কোনো ভগ্নাংশের লব থেকে 1 বিয়োগ এবং হরের সাথে 2 যোগ করলে ভগ্নাংশটি $\frac{1}{3}$ হয়। আবার

লব থেকে 2 বিয়োগ এবং হর থেকে 3 বিয়োগ করলে তা 1 এর সমান হয়।

[সি.বো.-'১৭]

ক. ভগ্নাংশটিকে $\frac{x}{y}$ ধরে সমীকরণ জোট গঠন কর।

খ. ভগ্নাংশটি নির্ণয় কর।

গ. লেখচিত্রের মাধ্যমে প্রাপ্ত সমীকরণ জোট সমাধান কর।

নিজে নিজে চেষ্টা কর।

$$(ক) \frac{x-1}{y+2} = \frac{1}{3} \text{ এবং } \frac{x-2}{y-3} = 1; (খ) \frac{3}{4}$$

১২ দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার একক স্থানীয় অঙ্ক দশক স্থানীয় অঙ্কের তিনগুণ অপেক্ষা 1 বেশি। কিন্তু অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তা অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টির আটগুণের সমান। সংখ্যাটি কত?

সমাধান: মনে করি, দশক স্থানীয় অঙ্কটি x এবং একক স্থানীয় অঙ্কটি y

$$\therefore \text{সংখ্যাটি} = 10 \times \text{দশক স্থানীয় অঙ্ক} + 1 \times \text{একক স্থানীয় অঙ্ক} = 10x + y$$

অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে প্রাপ্ত সংখ্যাটি = $10y + x$

$$\text{প্রথম শর্তানুসারে, } y = 3x + 1 \dots \dots (1)$$

$$\text{দ্বিতীয় শর্তানুসারে, } 10y + x = 8(x + y) \dots \dots (2)$$

সমীকরণ (2)-এ y এর মান $(3x+1)$ বসিয়ে পাই,

$$10(3x+1) + x = 8(x+3x+1)$$

$$\text{বা, } 31x+10 = 32x+8$$

$$\text{বা, } 31x-32x = 8-10$$

$$\text{বা, } -x = -2$$

$$\therefore x = 2$$

x এর মান সমীকরণ (1) এ বসিয়ে পাই,

$$y = 3x + 1 = 3 \times 2 + 1 = 7$$

$$\therefore \text{সংখ্যাটি} = 10x + y = 10 \times 2 + 7 = 27$$

$$\therefore \text{সংখ্যাটি } 27$$

❖ লক্ষণীয়:

দুই অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা = $10 \times \text{দশক স্থানীয় অঙ্ক} + 1 \times \text{একক স্থানীয় অঙ্ক}$

তিন অঙ্কবিশিষ্ট সংখ্যা = $100 \times \text{শতক স্থানীয় অঙ্ক} + 10 \times \text{দশক স্থানীয় অঙ্ক} + 1 \times \text{একক স্থানীয় অঙ্ক}$

১৩ দুই অঙ্কবিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের অন্তর ৪। সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায়, তার ও মূল সংখ্যাটির যোগফল ১১০। সংখ্যাটি নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, একক স্থানীয় অঙ্ক x এবং দশক স্থানীয় অঙ্ক y
 \therefore সংখ্যাটি $= 10y + x$
 অঙ্কদ্বয় স্থান বিনিময় করলে প্রাপ্ত সংখ্যা $10x + y$
 সংখ্যাটির অঙ্কদ্বয়ের অন্তর ৪ দেওয়া আছে। কিন্তু কোন অঙ্কটি বড় তা উল্লেখ নেই।
 তাই, একক স্থানীয় অঙ্ক $<$ দশক স্থানীয় অঙ্ক হতে পারে
 অথবা, একক স্থানীয় অঙ্ক $>$ দশক স্থানীয় অঙ্ক হতে পারে
 প্রথম শর্তানুসারে, $x - y = \pm 4 \dots \dots (1)$
 দ্বিতীয় শর্তানুসারে, $10x + y + 10y + x = 110 \dots \dots (2)$
 সমীকরণ (২) থেকে পাই,
 $11y + 11x = 110$
 বা, $x + y = 10$ [উভয়পক্ষকে ১১ দ্বারা ভাগ করে]
 বা, $x = 10 - y \dots \dots (3)$

x এর মান সমীকরণ (১) বসিয়ে পাই,
 $10 - y - y = \pm 4$
 বা, $2y = 10 \pm 4$
 বা, $y = 5 \pm 2$
 $\therefore y = 7$ অথবা 3
 y এর মান সমীকরণ (৩) এ বসিয়ে পাই,
 $y = 7$ হলে $x = 10 - 7 = 3$
 $y = 3$ হলে, $x = 10 - 3 = 7$
 \therefore সংখ্যাটি $= 10 \times 3 + 7$ অথবা, $10 \times 7 + 3$
 $= 37$ $= 73$
 \therefore সংখ্যাটি ৩৭ অথবা ৭৩

◆◆ অনুশীলনীর ১৩নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

দুই অঙ্ক বিশিষ্ট একটি সংখ্যার অঙ্কদ্বয়ের সমষ্টি ৪; অঙ্ক দুইটি স্থান বিনিময় করলে যে সংখ্যা পাওয়া যায় তা প্রদত্ত সংখ্যা হতে ৩৬ কম।
 ক. দুটি চলক x ও y ধরে তথ্যগুলোকে দুটি সমীকরণে প্রকাশ কর।
 খ. (x, y) নির্ণয় করে সংখ্যাটি নির্ণয় কর।
 গ. লেখের সাহায্যে 'খ' হতে প্রাপ্ত (x, y) এর সত্যতা যাচাই কর।

নিজে নিজে চেষ্টা কর।
 উত্তর: (ক) $x + y = 8$
 $x - y - 4 = 0$
 (খ) ৬২ ; (গ) (২, ৬)

১৪ মাতার বর্তমান বয়স তার দুই কন্যার বয়সের সমষ্টির চারগুণ। ৫ বছর পর মাতার বয়স ঐ দুই কন্যার বয়সের সমষ্টির দ্বিগুণ হবে। মাতার বর্তমান বয়স কত?

সমাধান: মনে করি, দুই কন্যার বর্তমান বয়সের সমষ্টি x বছর
 এবং মাতার বর্তমান বয়স $= y$ বছর
 ৫ বছর পরে মাতার বয়স হবে $(y + 5)$ বছর
 এবং ৫ বছর পরে দুই কন্যার বয়সের সমষ্টি হবে $= (x + 2 \times 5)$ বছর
 $= (x + 10)$ বছর
 ১ম শর্তানুসারে, $y = 4x \dots \dots (1)$
 ২য় শর্তানুসারে, $2(x + 10) = y + 5 \dots \dots (2)$
 y এর মান সমীকরণ (২) এ বসিয়ে পাই,
 $2(x + 10) = 4x + 5$
 বা, $2x + 20 = 4x + 5$

বা, $2x - 4x = 5 - 20$
 বা, $-2x = -15$
 বা, $x = \frac{15}{2}$
 \therefore মাতার বর্তমান বয়স $= y$ বছর $= 4x$ বছর $= 4 \times \frac{15}{2}$ বছর $= 30$ বছর
 \therefore মাতার বর্তমান বয়স ৩০ বছর।

❗ লক্ষণীয়: প্রশ্নে দুই কন্যার বয়সের কথা উল্লেখ করা হয়েছে এজন্য পাঁচ বছর পর দুই কন্যার বয়স বের করতে ৫ কে ২ দ্বারা গুণ করা হয়েছে।

১৫ একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ৫ মিটার কম ও প্রস্থ ৩ মিটার বেশি হলে ক্ষেত্রফল ৯ বর্গমিটার কম হবে। আবার দৈর্ঘ্য ৩ মিটার বেশি ও প্রস্থ ২ মিটার বেশি হলে ক্ষেত্রফল ৬৭ বর্গমিটার বেশি হবে। ক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য x মিটার
 এবং আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ y মিটার
 \therefore আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= xy$ বর্গমিটার
 ১ম শর্তানুযায়ী, $(x - 5)(y + 3) = xy - 9 \dots \dots (1)$
 ২য় শর্তানুযায়ী, $(x + 3)(y + 2) = xy + 67 \dots \dots (2)$
 সমীকরণ (১) থেকে পাই, $xy + 3x - 5y - 15 = xy - 9$
 বা, $3x - 5y = 6 \dots \dots (3)$
 সমীকরণ (২) থেকে পাই, $xy + 2x + 3y + 6 = xy + 67$
 বা, $2x + 3y = 61 \dots \dots (4)$
 সমীকরণ (৩) কে ৩ দ্বারা এবং সমীকরণ (৪) কে ৫ দ্বারা গুণ করে অতঃপর যোগ করে পাই,

$9x - 15y + 10x + 15y = 18 + 305$
 বা, $19x = 323$
 বা, $x = \frac{323}{19}$
 $\therefore x = 17$ মিটার
 সমীকরণ (৪) এ x এর মান বসিয়ে পাই,
 $3y = 61 - 2 \times 17$
 বা, $3y = 61 - 34$
 $\therefore y = \frac{27}{3} = 9$ মিটার
 \therefore আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ১৭ মিটার ও আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ ৯ মিটার।

◆◆ অনুশীলনীর ১৫নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

একটি আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ৫ মিটার কম ও প্রস্থ ৩ মিটার বেশি হলে ক্ষেত্রফল ৯ বর্গমিটার কম হবে। আবার দৈর্ঘ্য ৩ মিটার বেশি ও প্রস্থ ২ মিটার বেশি হলে ক্ষেত্রফল ৬৭ বর্গমিটার বেশি হবে।
 ক. দৈর্ঘ্যকে x এবং প্রস্থকে y ধরে সমীকরণজোড় গঠন কর।
 খ. 'ক' থেকে প্রাপ্ত সমীকরণ বজ্রগুণন পদ্ধতিতে সমাধান করে x ও y এর মান নির্ণয় কর।
 গ. আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ১০% বৃদ্ধি এবং প্রস্থ ১০% হ্রাস পায় তবে আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল শতকরা কত হ্রাস বা বৃদ্ধি পাবে?

নিজে নিজে চেষ্টা কর।
 (ক) $(x - 5)(y + 3) = xy - 9$
 $(x + 3)(y + 2) = xy + 67$;
 (খ) ১৭ মিটার ও ৯ মিটার; (গ) ১% হ্রাস

১৬ একটি নৌকা দাঁড় বেয়ে শ্রোতের অনুকূলে ঘণ্টায় ১৫ কি.মি. যায় এবং শ্রোতের প্রতিকূলে যায় ঘণ্টায় ৫ কি.মি.। নৌকার বেগ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, নৌকার বেগ ঘণ্টায় x কি.মি.

এবং শ্রোতের বেগ ঘণ্টায় y কি.মি.

তাহলে, শ্রোতের অনুকূলে নৌকার বেগ ঘণ্টায় $(x + y)$ কি.মি.

শ্রোতের প্রতিকূলে নৌকার বেগ ঘণ্টায় $(x - y)$ কি.মি.

প্রথম শর্তানুসারে, $x + y = 15$... (1)

দ্বিতীয় শর্তানুসারে, $x - y = 5$... (2)

সমীকরণ (1) এবং (2) যোগ করে পাই,

$$x + y + x - y = 15 + 5$$

বা, $2x = 20$

$$\therefore x = \frac{20}{2} = 10$$

\therefore নৌকার বেগ ঘণ্টায় ১০ কি.মি.

১৭ একজন গার্মেন্টস শ্রমিক মাসিক বেতনে চাকরি করেন। প্রতিবছর শেষে একটি নির্দিষ্ট বেতনবৃদ্ধি পান। তার মাসিক বেতন ৪ বছর পর ৪৫০০ টাকা ও ৮ বছর পর ৫০০০ টাকা হয়। তাঁর চাকরি শুরুর বেতন ও বার্ষিক বেতন বৃদ্ধির পরিমাণ নির্ণয় কর।

সমাধান: মনে করি, ঐ শ্রমিক x টাকা বেতনে চাকরি শুরু করেন এবং তার বার্ষিক বেতন বৃদ্ধি y টাকা।

প্রথম শর্তানুসারে $x + 4y = 4500$... (1)

দ্বিতীয় শর্তানুসারে $x + 8y = 5000$... (2)

সমীকরণ (2) থেকে (1) বিয়োগ করে পাই,

$$8y - 4y = 5000 - 4500$$

বা, $4y = 500$

$$\text{বা, } y = \frac{500}{4} = 125$$

সমীকরণ (1) এ $y = 125$ বসিয়ে পাই,

$$x + 4 \times 125 = 4500$$

বা, $x + 500 = 4500$

বা, $x = 4500 - 500$

বা, $x = 4000$

\therefore ঐ শ্রমিকের চাকরি শুরুর বেতন ৪০০০ টাকা এবং বার্ষিক বেতন বৃদ্ধি ১২৫ টাকা।

১৮ একটি সরল সমীকরণজোড় $x + y = 10$, $3x - 2y = 0$ ক. দেখাও যে, সমীকরণজোড়টি সমঞ্জস। এর কয়টি সমাধান আছে? খ. সমীকরণজোড়টি সমাধান করে (x, y) নির্ণয় কর। গ. সমীকরণদ্বয় দ্বারা নির্দেশিত সরলরেখাদ্বয় x -অক্ষের সাথে যে ত্রিভুজ গঠন করে তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:

$$\text{ক. প্রদত্ত সমীকরণজোড় } x + y = 10 \\ 3x - 2y = 0$$

x এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{1}{3}$

y এর সহগদ্বয়ের অনুপাত $\frac{1}{-2}$

আমরা পাই, $\frac{1}{3} \neq \frac{1}{-2}$

\therefore সমীকরণজোড়টি সমঞ্জস এবং পরস্পর অনির্ভরশীল। সমীকরণজোড়টির একটি মাত্র (অনন্য) সমাধান রয়েছে।

$$\text{খ. প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় } x + y = 10 \dots (1) \\ 3x - 2y = 0 \dots (2)$$

সমীকরণ (1) এর উভয়পক্ষে ২ দ্বারা গুণ করে সমীকরণ (2) এর সাথে যোগ করে পাই,

$$2x + 2y + 3x - 2y = 20 + 0$$

বা, $5x = 20$

$$\text{বা, } x = \frac{20}{5} = 4$$

x এর মান সমীকরণ (1) বসিয়ে পাই,

$$4 + y = 10$$

বা, $y = 10 - 4$

বা, $y = 6$

\therefore সমাধান $(x, y) = (4, 6)$

$$\text{গ. প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় } x + y = 10 \dots (1) \\ 3x - 2y = 0 \dots (2)$$

সমীকরণ (1) থেকে পাই, $x + y = 10$

$$\text{বা, } y = 10 - x \dots (3)$$

সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছকটি পূরণ করি:

x	-2	2	4
y	12	8	6

সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু: $(-2, 12)$, $(2, 8)$, $(4, 6)$

সমীকরণ (2) থেকে পাই, $3x - 2y = 0$

$$\text{বা, } -2y = -3x$$

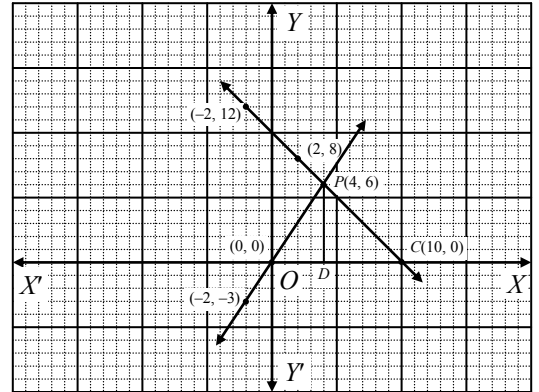
$$\text{বা, } 2y = 3x$$

$$\therefore y = \frac{3x}{2}$$

সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছকটি পূরণ করি:

x	-2	0	4
y	-3	0	6

সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু: $(-2, -3)$, $(0, 0)$, $(4, 6)$



মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে x -অক্ষ ও y -অক্ষ এবং O মূলবিন্দু।

ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরি।

এখন ছক কাগজে সমীকরণ (1) হতে প্রাপ্ত $(-2, 12)$, $(2, 8)$ ও $(4, 6)$

বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও তাদের পরস্পর সংযুক্ত করি। লেখটি একটি

সরলরেখা। একইভাবে সমীকরণ (2) থেকে প্রাপ্ত $(-2, -3)$, $(0, 0)$ ও

$(4, 6)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করে ও তাদের পরস্পর সংযুক্ত করি।

এক্ষেত্রেও লেখটি একটি সরলরেখা।

মনে করি, লেখটিতে সরলরেখা দুটি X অক্ষের সাথে POC ত্রিভুজ গঠন

করে। যার শীর্ষবিন্দু $P(4, 6)$, $O(0, 0)$, $C(10, 0)$ ।

এখানে, ত্রিভুজের উচ্চতা $PD = (6 - 0)$ একক = ৬ একক,

এবং ভূমি $OC = (10 - 0)$ একক = ১০ একক

$$\therefore \text{ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল} = \left(\frac{1}{2} \times \text{ভূমি} \times \text{উচ্চতা}\right) \text{ বর্গ একক}$$

$$= \left(\frac{1}{2} \times 10 \times 6\right) \text{ বর্গ একক} = 30 \text{ বর্গ একক।}$$

১৯ কোনো ভগ্নাংশের লবের সাথে ৭ যোগ করলে ভগ্নাংশটির মান পূর্ণসংখ্যা ২ হয়। আবার হর হতে ২ বিয়োগ করলে ভগ্নাংশটির মান পূর্ণসংখ্যা ১ হয়।

ক. ভগ্নাংশটি $\frac{x}{y}$ ধরে সমীকরণজোট গঠন কর।

খ. সমীকরণজোটটি আড়গুণন পদ্ধতিতে সমাধান করে (x, y) নির্ণয় কর। ভগ্নাংশটি কত?

গ. সমীকরণজোটটির লেখ অঙ্কন করে (x, y) এর প্রাপ্ত মানের সত্যতা যাচাই কর।

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, ভগ্নাংশটি $\frac{x}{y}$

তাহলে, ১ম শর্তমতে, $\frac{x+7}{y} = 2$

২য় শর্তমতে, $\frac{x}{y-2} = 1$

∴ সমীকরণজোট $\frac{x+7}{y} = 2$

এবং $\frac{x}{y-2} = 1$

খ দেওয়া আছে, ভগ্নাংশটি $\frac{x}{y}$

সমীকরণজোট $\frac{x+7}{y} = 2 \dots \dots \dots (1)$

এবং $\frac{x}{y-2} = 1 \dots \dots \dots (2)$

সমীকরণ (1) হতে পাই,

$$\frac{x+7}{y} = 2$$

বা, $x+7 = 2y$

বা, $x - 2y + 7 = 0 \dots \dots \dots (3)$

সমীকরণ (2) হতে পাই,

$$\frac{x}{y-2} = 1$$

বা, $x = y - 2$

বা, $x - y + 2 = 0 \dots \dots \dots (4)$

∴ প্রদত্ত সমীকরণদ্বয় হতে প্রাপ্ত সমীকরণদ্বয়, $x - 2y + 7 = 0$

$$x - y + 2 = 0$$

আড়গুণন পদ্ধতিতে পাই,

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 1 & -2 & 7 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\frac{x}{(-2) \times 2 - (-1) \times 7} = \frac{y}{7 \times 1 - 2 \times 1} = \frac{1}{1 \times (-1) - 1 \times (-2)}$$

$$\text{বা, } \frac{x}{-4 + 7} = \frac{y}{7 - 2} = \frac{1}{-1 + 2}$$

$$\text{বা, } \frac{x}{3} = \frac{y}{5} = 1$$

$$\therefore \frac{x}{3} = 1 \quad \text{বা, } x = 3$$

$$\text{আবার, } \frac{y}{5} = 1 \quad \text{বা, } y = 5$$

$$\therefore \text{সমাধান, } (x, y) = (3, 5)$$

$$\text{এবং ভগ্নাংশটি } \frac{x}{y} = \frac{3}{5}$$

$$\text{গ সমীকরণজোট } \frac{x+7}{y} = 2 \dots \dots \dots (1)$$

$$\frac{x}{y-2} = 1 \dots \dots \dots (2)$$

সমীকরণ (1) হতে পাই,

$$\frac{x+7}{y} = 2$$

বা, $x+7 = 2y$

$$\text{বা, } y = \frac{x+7}{2}$$

সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছকটি পূরণ করি:

x	-1	3	5
y	3	5	6

সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু: $(-1, 3)$, $(3, 5)$, $(5, 6)$

আবার, সমীকরণ (2) থেকে পাই,

$$\frac{x}{y-2} = 1$$

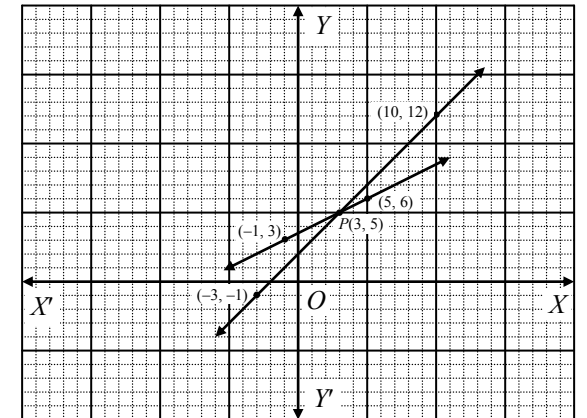
বা, $x = y - 2$

বা, $y = x + 2$

সমীকরণটিতে x এর কয়েকটি মান নিয়ে y এর অনুরূপ মান বের করি ও নিচের ছকটি পূরণ করি:

x	-3	3	10
y	-1	5	12

সমীকরণটির লেখের উপর তিনটি বিন্দু: $(-3, -1)$, $(3, 5)$, $(10, 12)$



মনে করি, XOX' ও YOY' যথাক্রমে x অক্ষ ও y অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের উভয় অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরি। এখন ছক কাগজে সমীকরণ (1) হতে প্রাপ্ত $(-1, 3)$, $(3, 5)$ ও $(5, 6)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি ও তাদের পরস্পর সংযুক্ত করি। লেখটি একটি সরলরেখা। একইভাবে সমীকরণ (2) থেকে প্রাপ্ত $(-3, -1)$, $(3, 5)$ ও $(10, 12)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করে ও তাদের পরস্পর সংযুক্ত করি। এক্ষেত্রেও লেখটি একটি সরলরেখা।

মনে করি, সমীকরণদ্বয় পরস্পর P বিন্দুতে ছেদ করে। চিত্র থেকে দেখা যায় P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(3, 5)$ ।

$$\therefore \text{সমাধান } (x, y) = (3, 5)$$

‘খ’ হতে প্রাপ্ত (x, y) এর মান এবং ‘গ’ হতে প্রাপ্ত (x, y) এর মান সমান।

$$\therefore (x, y) = (3, 5) \text{ মানটি সত্য।}$$

২০ দুইটি বহুভুজের বাহুর সংখ্যা ১৭ এবং এদের কর্ণের সংখ্যা ৫৩ হলে প্রত্যেক বহুভুজের বাহুর সংখ্যা কত?

সমাধান:

মনে করি, একটি বহুভুজের বাহুর সংখ্যা = x

অপর বহুভুজের বাহুর সংখ্যা = $17 - x$

আমরা জানি, কোনো বহুভুজের বাহুর সংখ্যা n হলে এর কর্ণ সংখ্যা $\frac{n(n-3)}{2}$

$\therefore x$ সংখ্যক বহুবিশিষ্ট বহুভুজের কর্ণের সংখ্যা = $\frac{x(x-3)}{2}$ এবং

$(17-x)$ সংখ্যক বহুবিশিষ্ট বহুভুজের কর্ণের সংখ্যা = $\frac{(17-x)(17-x-3)}{2}$
 $= \frac{(17-x)(14-x)}{2}$

শর্তমতে, $\frac{x(x-3)}{2} + \frac{(17-x)(14-x)}{2} = 53$

বা, $\frac{x^2 - 3x + 238 - 17x - 14x + x^2}{2} = 53$

বা, $2x^2 - 34x + 238 = 53 \times 2$

বা, $2x^2 - 34x + 238 - 106 = 0$

বা, $2x^2 - 34x + 132 = 0$

বা, $x^2 - 17x + 66 = 0$

বা, $x^2 - 11x - 6x + 66 = 0$

বা, $x(x-11) - 6(x-11) = 0$

বা, $(x-11)(x-6) = 0$

$\therefore x-11=0$ অথবা, $x-6=0$

বা, $x=11$ বা, $x=6$

এখন $x=11$ হলে, একটি বহুভুজের বাহুর সংখ্যা = 11

\therefore অপর বহুভুজের বাহুর সংখ্যা = $17 - 11 = 6$

আবার, $x=6$ হলে একটি বহুভুজের বাহুর সংখ্যা = 6

\therefore অপর বহুভুজের বাহুর সংখ্যা = $17 - 6 = 11$

অর্থাৎ বহুভুজদ্বয়ের বাহুর সংখ্যা 11 ও 6

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

মনে করি, বহুভুজদ্বয়ের বাহুর সংখ্যা যথাক্রমে x ও y

\therefore ১ম শর্তমতে, $x + y = 17 \dots \dots \dots (i)$

আমরা জানি,

কোনো বহুভুজের বাহুর সংখ্যা n হলে এর কর্ণের সংখ্যা = $\frac{n(n-1)}{2} - n$

২য় শর্তমতে, $\frac{x(x-1)}{2} - x + \frac{y(y-1)}{2} - y = 53$

বা, $\frac{x^2 - x}{2} + \frac{y^2 - y}{2} - (x + y) = 53$

বা, $\frac{1}{2}(x^2 + y^2 - x - y) - 17 = 53$; $[\because (i) \text{ নং হতে } x + y = 17 \text{ বসিয়ে}]$

বা, $\frac{1}{2}\{x^2 + y^2 - (x + y)\} = 53 + 17$

বা, $\frac{1}{2}(x^2 + y^2 - 17) = 70$

বা, $x^2 + y^2 - 17 = 140$

বা, $\frac{(x+y)^2 + (x-y)^2}{2} = 140 + 17$

বা, $(x-y)^2 + (17)^2 = 314$

বা, $(x-y)^2 = 314 - 289$

বা, $(x-y)^2 = 25$

$\therefore x - y = 5 \dots \dots \dots (ii)$

(i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$x + y + x - y = 17 + 5$

বা, $2x = 22$

$\therefore x = 11$

(i) নং হতে পাই, $y = 17 - x = 6$

\therefore বহুভুজদ্বয়ের বাহুর সংখ্যা যথাক্রমে 11 ও 6 (Ans.)

☒ **জেনে নাও:** কোনো বহুভুজের বাহুর সংখ্যা n হলে এর কর্ণ সংখ্যা $\frac{n(n-3)}{2}$ বা $\left\{\frac{n(n-1)}{2} - n\right\}$ হয়। যেমন চতুর্ভুজের 4টি বাহু। এক্ষেত্রে $n = 4$ ।

\therefore এর মোট কর্ণ সংখ্যা হবে = $\frac{n(n-3)}{2} = \frac{4(4-3)}{2} = 2$

তদ্রূপ পঞ্চভুজের 5টি বাহু। অর্থাৎ এক্ষেত্রে $n = 5$ ।

\therefore এর মোট কর্ণ সংখ্যা হবে = $\frac{n(n-3)}{2} = \frac{5(5-3)}{2} = 5$

২১ শিক্ষক বললেন একটি কাজ একা অথবা ছাত্র-ছাত্রীর জুটি করতে পারবে। ছাত্রদের $\frac{2}{3}$ এবং ছাত্রীদের $\frac{3}{5}$ অংশ জুটি বেঁধে কাজটি করলো। শেণির কত ভাগ ছাত্র-ছাত্রী একা কাজটি করলো?

সমাধান:

মনে করি, মোট ছাত্রসংখ্যা x এবং মোট ছাত্রীসংখ্যা y ।

\therefore প্রশ্নানুসারে, জুটি বেধে কাজ করে ছাত্রদের $\frac{2}{3}$ অংশ এবং ছাত্রীদের $\frac{3}{5}$ অংশ অর্থাৎ

জুটি বেধে কাজ করে এমন ছাত্র সংখ্যা $\frac{2x}{3}$ এবং ছাত্রী সংখ্যা $\frac{3y}{5}$ ।

যেহেতু জুটিতে ছাত্র এবং ছাত্রী সংখ্যা পরস্পর সমান

সুতরাং $\frac{2x}{3} = \frac{3y}{5}$

বা, $10x = 9y$

$\therefore x = \frac{9}{10}y$

আবার, বাকী ছাত্রসংখ্যা যারা একা কাজটি করলো = $x - \frac{2x}{3} = \frac{3x - 2x}{3} = \frac{x}{3}$

এবং ছাত্রী সংখ্যা যারা একা কাজটি করলো = $y - \frac{3y}{5} = \frac{5y - 3y}{5} = \frac{2y}{5}$

সুতরাং একা কাজটি করে এমন ছাত্রছাত্রীর অনুপাত

= $\frac{\text{একা কাজটি করে এমন ছাত্র সংখ্যা} + \text{একা কাজটি করে এমন ছাত্রী সংখ্যা}}{\text{মোট ছাত্র ও ছাত্রী সংখ্যার সমষ্টি}}$

= $\frac{\frac{x}{3} + \frac{2y}{5}}{x + y}$

= $\frac{9y}{10 \times 3} + \frac{2y}{5}$

= $\frac{9y}{10} + y$; $[\because x = \frac{9}{10}y]$

= $\frac{3y}{10} + \frac{2y}{5} = \frac{3y + 4y}{10}$

= $\frac{7y}{10} = \frac{7y}{10} \times \frac{10}{19y} = \frac{7}{19}$ (Ans.)

☒ **জেনে নাও:** পাঠ্যবইয়ের উত্তরে ভুল রয়েছে।

২২ 100 ও 200 মিটার দীর্ঘ দুইটি ট্রেন সমবেগে সামনা সামনি অতিক্রম করতে 5 সেকেন্ড সময় লাগে। কিন্তু একই দিকে চললে অতিক্রম করতে 15 সেকেন্ড সময় লাগে। ট্রেন দুইটির বেগ নির্ণয় কর।

সমাধান:

মনে করি, ট্রেন দুইটির বেগ যথাক্রমে u এবং v (যেখানে $u > v$)
 ট্রেনদ্বয় সামনা সামনি অতিক্রম করলে আপেক্ষিক বেগ $= u + v$
 এবং ট্রেন দুইটি একই দিকে অতিক্রম করলে আপেক্ষিক বেগ $= u - v$
 উভয়ক্ষেত্রেই অতিক্রান্ত দূরত্ব $= (100 + 200)$ মিটার
 $= 300$ মিটার
 এখন ট্রেন দুইটি সামনা সামনি $(u + v)$ বেগে 5 সেকেন্ডে 300 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে।
 $\therefore 5(u + v) = 300$; [সমবেগের ক্ষেত্রে, দূরত্ব $=$ বেগ \times সময়]
 বা, $u + v = 60 \dots \dots \dots$ (i)
 আবার, ট্রেন দুইটি একই দিক থেকে $(u - v)$ বেগে 15 সেকেন্ডে 300 মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে।

$\therefore 15(u - v) = 300$; [সমবেগের ক্ষেত্রে, দূরত্ব $=$ বেগ \times সময়]
 বা, $u - v = 20 \dots \dots \dots$ (ii)
 (i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,
 $u + v + u - v = 60 + 20$
 বা, $2u = 80$
 $\therefore u = 40$
 \therefore একটি ট্রেনের বেগ 40 মিটার/সেকেন্ড
 (i) নং হতে পাই,
 $v = 60 - u = (60 - 40)$ মিটার/সেকেন্ড $= 20$ মিটার/সেকেন্ড
 \therefore অপর ট্রেনটির বেগ 20 মিটার/সেকেন্ড
 \therefore ট্রেন দুইটির বেগ যথাক্রমে 40 মিটার / সেকেন্ড ও 20 মিটার / সেকেন্ড

২৩ কমপক্ষে কতগুলো ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা নিলে তার গুণফল অবশ্যই 5040 দ্বারা বিভাজ্য হবে?

সমাধান:

মনে করি, কমপক্ষে n সংখ্যক ক্রমিক পূর্ণসংখ্যার গুণফল অবশ্যই 5040 দ্বারা বিভাজ্য। তাহলে ন্যূনতম n সংখ্যক ক্রমিক পূর্ণসংখ্যার গুণফলের মান অবশ্যই 5040 এর সমান অথবা এর গুণিতক হবে।

ক্ষেত্র-১: $n = 2$ (দুটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা বিবেচনা করে):

x ও $(x + 1)$ দুইটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা হলে এদের গুণফল $= x(x + 1)$

$$\therefore x(x + 1) = 5040$$

$$\text{বা, } x^2 + x - 5040 = 0$$

এখানে ধ্রুবপদ (5040) এর গুণনীয়কগুলোর মধ্যে এমন কোনো পূর্ণসংখ্যা নেই যা দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। অর্থাৎ 2টি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা নিলে তাদের গুণফল 5040 দ্বারা বিভাজ্য হবে না।

ক্ষেত্র-২: $n = 3$ (তিনটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা বিবেচনা করে):

$x, (x + 1)$ ও $(x + 2)$ তিনটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা নিয়ে পাই,

$$x(x + 1)(x + 2) = 5040$$

$$\text{বা, } (x^2 + x)(x + 2) = 5040$$

$$\text{বা, } x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x - 5040 = 0$$

$$\text{বা, } x^3 + 3x^2 + 2x - 5040 = 0$$

এখানে ধ্রুবপদ (5040) এর গুণনীয়কগুলোর মধ্যে এমন কোনো পূর্ণসংখ্যা নেই যা দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। অর্থাৎ 3টি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা নিলে তাদের গুণফল 5040 দ্বারা বিভাজ্য হবে না।

ক্ষেত্র-৩: $n = 4$ (চারটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা বিবেচনা করে):

$x, (x + 1), (x + 2)$ ও $(x + 3)$ চারটি ক্রমিক সংখ্যা নিয়ে পাই,

$$x(x + 1)(x + 2)(x + 3) = 5040$$

$$\text{বা, } x(x + 3)(x^2 + x + 2x + 2) = 5040$$

$$\text{বা, } (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2) = 5040$$

$$\text{বা, } a(a + 2) = 5040 \quad ; [x^2 + 3x = a \text{ ধরে}]$$

$$\text{বা, } a^2 + 2a - 5040 = 0$$

$$\text{বা, } a^2 + 72a - 70a - 5040 = 0$$

$$\text{বা, } a(a + 72) - 70(a + 72) = 0$$

$$\text{বা, } (a - 70)(a + 72) = 0$$

$$\text{বা, } a - 70 = 0 \text{ অথবা } a + 72 = 0$$

$$\therefore a = 70 \quad \text{অথবা, } a = -72$$

$a = 70$ হলে পাই, $x^2 + 3x = 70$; $[\because a = x^2 + 3x]$

$$\text{বা, } x^2 + 3x - 70 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 + 10x - 7x - 70 = 0$$

$$\text{বা, } x(x + 10) - 7(x + 10) = 0$$

$$\text{বা, } (x + 10)(x - 7) = 0$$

$$\text{বা, } x + 10 = 0 \text{ অথবা } x - 7 = 0$$

$$\therefore x = -10, 7$$

আবার, $a = -72$ হলে পাই,

$$x^2 + 3x = -72 \quad ; [\because a = x^2 + 3x]$$

$$\text{বা, } x^2 + 3x + 72 = 0$$

এখানে ধ্রুবপদ '72' এর গুণনীয়কগুলোর মধ্যে এমন কোনো পূর্ণসংখ্যা নেই যা দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

অর্থাৎ $x = -10, 7$ । অর্থাৎ 4টি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা নিলে ($n = 4$ হলে) তাদের গুণফল 5040 দ্বারা বিভাজ্য হবে।

$x = -10$ হলে ক্রমিক পূর্ণসংখ্যাগুলো যথাক্রমে

$$-10, (-10 + 1), (-10 + 2) \text{ ও } (-10 + 3)$$

$$\text{বা, } -10, -9, -8, \text{ ও } -7$$

আবার, $x = 7$ হলে ক্রমিক পূর্ণসংখ্যাগুলো যথাক্রমে 7, (7+1), (7+2) ও (7+3)

$$\text{বা, } 7, 8, 9 \text{ ও } 10$$

সুতরাং কমপক্ষে 4টি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা নিলে তাদের গুণফল 5040 দ্বারা বিভাজ্য হবে।

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

মনে করি, কমপক্ষে n সংখ্যক ক্রমিক পূর্ণসংখ্যার গুণফল অবশ্যই 5040 দ্বারা বিভাজ্য হবে।

তাহলে ন্যূনতম n সংখ্যক ক্রমিক পূর্ণসংখ্যার গুণফলের মান অবশ্যই 5040 এর সমান অথবা এর গুণিতক হবে।

ক্ষেত্র-১: $n = 2$ (দুটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা বিবেচনা করে):

x ও $(x - 1)$ দুইটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা হলে এদের গুণফল $= x(x - 1)$

$$\therefore x(x - 1) = 5040$$

$$\text{বা, } x^2 - x - 5040 = 0$$

এখানে ধ্রুবপদ (5040) এর গুণনীয়কগুলোর মধ্যে এমন কোনো পূর্ণসংখ্যা নেই যা দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। অর্থাৎ 2টি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা নিলে তাদের গুণফল 5040 দ্বারা বিভাজ্য হবে না।

ক্ষেত্র-২: $n = 3$ (তিনটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা বিবেচনা করে):

$(x - 1), x$ ও $(x + 1)$ তিনটি ক্রমিক সংখ্যা নিয়ে পাই,

$$x(x - 1)(x + 1) = 5040$$

$$\text{বা, } x(x^2 - 1) = 5040$$

$$\text{বা, } x^3 - x - 5040 = 0$$

এখানে ধ্রুবপদ (5040) এর গুণনীয়কগুলোর মধ্যে এমন কোনো পূর্ণসংখ্যা নেই যা দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। অর্থাৎ 3টি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা নিলে তাদের গুণফল 5040 দ্বারা বিভাজ্য হবে না।

ক্ষেত্র-৩: $n = 4$ (চারটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা বিবেচনা করে):

$(x-1)$, x , $(x+1)$ ও $(x+2)$ চারটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা নিয়ে পাই,

$$x(x+1)(x-1)(x+2) = 5040$$

$$\text{বা, } (x^2 + 2x)(x^2 - 1) = 5040$$

$$\text{বা, } x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - 5040 = 0$$

এখানে ধ্রুবপদ (5040) এর গুণনীয়কগুলোর মধ্যে $x = 8$ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

∴ ভাগশেষ উপপাদ্য অনুসারে $(x-8)$ বামপক্ষের রাশিটির একটি উৎপাদক।

$$\text{এখন, } x^4 + 2x^3 - x^2 - 2x - 5040 = 0$$

$$\text{বা, } x^4 - 8x^3 + 10x^3 - 80x^2 + 79x^2 - 632x + 630x - 5040 = 0$$

$$\text{বা, } x^3(x-8) + 10x^2(x-8) + 79x(x-8) + 630(x-8) = 0$$

$$\text{বা, } (x-8)(x^3 + 10x^2 + 79x + 630) = 0$$

$$\therefore x-8=0 \quad \text{অথবা } x^3 + 10x^2 + 79x + 630 = 0$$

$$\therefore x=8$$

$$\text{বা, } x^3 + 9x^2 + x^2 + 9x + 70x + 630 = 0$$

$$\text{বা, } x^2(x+9) + x(x+9) + 70(x+9) = 0$$

$$\text{বা, } (x+9)(x^2 + x + 70) = 0$$

$$\therefore x+9=0 \text{ অথবা } x^2 + x + 70 = 0$$

$$\text{যেকোনো বাস্তব পূর্ণসংখ্যার জন্য } x^2 + x + 70 \neq 0$$

$$\text{সুতরাং } x+9=0$$

$$\text{বা, } x=-9$$

অর্থাৎ $x = 8, -9$

অর্থাৎ চারটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা নিলে ($n = 4$ হলে) তাদের গুণফল 5040 দ্বারা বিভাজ্য হবে।

এখন, $x = 8$ বসিয়ে প্রাপ্ত চারটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যাসমূহ যথাক্রমে

$$(8-1), 8, (8+1) \text{ ও } (8+2) \text{ বা, } 7, 8, 9 \text{ ও } 10$$

আবার, $x = -9$ বসিয়ে প্রাপ্ত চারটি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যাসমূহ যথাক্রমে,

$$(-9-1), -9, (-9+1) \text{ ও } (-9+2) \text{ বা, } -10, -9, -8 \text{ ও } -7$$

∴ কমপক্ষে 4টি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যা নিলে তাদের গুণফল অবশ্যই 5040 দ্বারা বিভাজ্য হবে।

❗ লক্ষণীয়: পাঠ্যবইয়ের উত্তরে ভুল রয়েছে।

☒ জেনে রাখা ভালো:

• 5040 সংখ্যাটি প্রথম 7টি ক্রমিক স্বাভাবিক সংখ্যার গুণফলের সমান।

$$\text{যথা: } 5040 = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 = 7!$$

• 5040 সংখ্যাটিকে Superior highly composite number বলা হয়। এর অর্থ হলো 5040 থেকে ছোট সবগুলো সংখ্যা থেকে এর গুণনীয়ক সংখ্যা সবচেয়ে বেশি। 5040 সংখ্যাটির মোট গুণনীয়কের সংখ্যা 120।

ধনাত্মক গুণনীয়ক 60টি এবং ঋণাত্মক গুণনীয়ক 60টি। গুণনীয়কগুলো হলো:

$$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4, \pm 5, \pm 6, \pm 7, \pm 8, \pm 9, \pm 10, \pm 12, \pm 14, \pm 15, \pm 16, \pm 18, \pm 20, \pm 21, \pm 24, \pm 28, \pm 30, \pm 35, \pm 36, \pm 40, \pm 42, \pm 45, \pm 48, \pm 56, \pm 60, \pm 63, \pm 70, \pm 72, \pm 80, \pm 84, \pm 90, \pm 105, \pm 112, \pm 120, \pm 126, \pm 140, \pm 144, \pm 168, \pm 180, \pm 210, \pm 240, \pm 252, \pm 280, \pm 315, \pm 336, \pm 360, \pm 420, \pm 504, \pm 560, \pm 630, \pm 720, \pm 840, \pm 1008, \pm 1260, \pm 1680, \pm 2520, \pm 5040 = \text{মোট } (60 \times 2) = 120 \text{ টি}$$

■ এত অধিক গুণনীয়ক থাকায় বিজ্ঞানী গ্রেটো একে convenient number হিসেবে অভিহিত করেন। কোনো শহর বা গ্রামের 5040 সংখ্যক অধিবাসী থাকলে তাদেরকে যেকোনো জিনিস সুসমভাবে বণ্টন করা সুবিধাজনক হবে।

• 5040 সংখ্যা 1 থেকে 12 পর্যন্ত (শুধু 11 বাদ) সবগুলো পূর্ণসংখ্যা দ্বারা বিভাজ্য।

• 5040 সংখ্যাটি 42টি ক্রমিক পূর্ণসংখ্যার যোগফলের সমান। যথা:

$$(23 + 29 + 31 + 37 + 41 + 43 + 53 + 59 + 61 + 67 + 71 + 73 + 79 + 83 + 89 + 97 + 101 + 103 + 107 + 109 + 113 + 127 + 131 + 137 + 139 + 149 + 151 + 157 + 163 + 167 + 173 + 179 + 181 + 191 + 193 + 197 + 199 + 211 + 223 + 227 + 229)$$

২৪ ঘড়ির ঘণ্টা এবং মিনিটের কাঁটা পরস্পরের সঙ্গে 30 ডিগ্রি কোণ করে কত বার? সময়গুলো নির্ণয় কর।

সমাধান:

ধরি, প্রাথমিক অবস্থায় ঘড়িতে 12 টা বাজে

অর্থাৎ ঘণ্টা ও মিনিটের কাঁটার প্রাথমিক অবস্থান 12 বরাবর

মনে করি, x টা y মিনিটে ঘড়ির ঘণ্টা ও মিনিটের কাঁটা পরস্পর 30° কোণ উৎপন্ন করে।

এখন ঘণ্টার কাঁটা 1 ঘণ্টায় অতিক্রম করে 5 ঘর

$$\therefore \text{ঘণ্টার কাঁটা } x \quad " \quad " \quad " \quad 5x \text{ ঘর}$$

আবার, ঘণ্টার কাঁটা 60 মিনিটে অতিক্রম করে 5 ঘর

$$\therefore \text{ঘণ্টার কাঁটা } 1 \quad " \quad " \quad " \quad \frac{5}{60} \text{ ঘর}$$

$$\therefore \text{ঘণ্টার কাঁটা } y \quad " \quad " \quad " \quad \frac{5y}{60} \text{ ঘর} = \frac{y}{12} \text{ ঘর}$$

$$\therefore x \text{ টা } y \text{ মিনিটে ঘণ্টার কাঁটা অতিক্রম করে } = \left(5x + \frac{y}{12}\right) \text{ ঘর}$$

এখন, মিনিটের কাঁটা 1 মিনিটে অতিক্রম করে 1 ঘর

$$\therefore \text{মিনিটের কাঁটা } y \quad " \quad " \quad " \quad y \text{ ঘর}$$

আমরা জানি, ঘড়িতে $360^\circ = 60$ ঘর

$$\therefore 1^\circ = \frac{60}{360} \text{ ঘর}$$

$$\therefore 30^\circ = \left(\frac{60}{360} \times 30\right) \text{ ঘর} = 5 \text{ ঘর}$$

$$\therefore 30^\circ \text{ কোণের জন্য ঘণ্টা ও মিনিটের কাঁটার ঘরের ব্যবধান} = 5 \text{ ঘর}$$

শর্তমতে,

$$\text{ঘণ্টার কাঁটার অবস্থান} - \text{মিনিটের কাঁটার অবস্থান} = \pm 5 \text{ ঘর}$$

যেহেতু মিনিটের কাঁটা ঘণ্টার কাঁটার ডানে ও বামে অবস্থান করতে পারে বিধায় ‘ \pm ’ চিহ্ন ব্যবহার করা হয়েছে।

$$\therefore \left(5x + \frac{y}{12}\right) - y = \pm 5$$

$$\text{বা, } 5x + \frac{y - 12y}{12} = \pm 5$$

$$\text{বা, } 5x - \frac{11y}{12} = \pm 5$$

$$\text{বা, } 5x \pm 5 = \frac{11y}{12}$$

$$\therefore y = \frac{12}{11}(5x \pm 5); \text{ যেখানে } x = 0, 1, 2, 3 \dots \dots 11$$

এখানে, 0 প্রকৃতপক্ষে 12 বোঝাবে।

$$\therefore y = \frac{12}{11}(5x - 5) \dots \dots \dots (i)$$

$$\text{এবং } y = \frac{12}{11}(5x + 5) \dots \dots \dots (ii)$$

এখন, $x = 0$ (অর্থাৎ ১২ টা) হলে

(i) নং হতে পাই,

$$y = \frac{12}{11} (5 \times 0 - 5) = -\frac{60}{11} \text{ মিনিট} = -5 \frac{5}{11} \text{ মিনিট}$$

সময়: ১২ টা $- 5 \frac{5}{11}$ মিনিট

অর্থাৎ ১২টা অপেক্ষা $5 \frac{5}{11}$ মিনিট কম

$$= 11 \text{ টা } 54 \frac{6}{11} \text{ মিনিট}$$

আবার, $x = 0$ (অর্থাৎ ১২ টা) হলে

(ii) নং হতে পাই,

$$y = \frac{12}{11} (5 \times 0 + 5) = \frac{60}{11} \text{ মিনিট} = 5 \frac{5}{11} \text{ মিনিট}$$

সময়: ১২টা $5 \frac{5}{11}$ মিনিট

অনুরূপভাবে x এর সম্ভাব্য মানগুলো বসিয়ে পাই,

x	$y = \frac{12}{11} (5x - 5)$	$y = \frac{12}{11} (5x + 5)$
$x = 1$	$y = 0$ সময়: ১ টা ০ মিনিট	$y = \frac{120}{11} = 10 \frac{10}{11}$ সময়: ১টা $10 \frac{10}{11}$ মিনিট
$x = 2$	$y = \frac{60}{11} = 5 \frac{5}{11}$ সময়: ২টা $5 \frac{5}{11}$ মিনিট	$y = \frac{180}{11} = 16 \frac{4}{11}$ সময়: ২টা $16 \frac{4}{11}$ মিনিট
$x = 3$	$y = \frac{120}{11} = 10 \frac{10}{11}$ সময়: ৩টা $10 \frac{10}{11}$ মিনিট	$y = \frac{240}{11} = 21 \frac{9}{11}$ সময়: ৩টা $21 \frac{9}{11}$ মিনিট
$x = 4$	$y = \frac{180}{11} = 16 \frac{4}{11}$ সময়: ৪টা $16 \frac{4}{11}$ মিনিট	$y = \frac{300}{11} = 27 \frac{3}{11}$ সময়: ৪টা $27 \frac{3}{11}$ মিনিট

$x = 5$	$y = \frac{240}{11} = 21 \frac{9}{11}$ সময়: ৫টা $21 \frac{9}{11}$ মিনিট	$y = \frac{360}{11} = 32 \frac{8}{11}$ সময়: ৫টা $32 \frac{8}{11}$ মিনিট
$x = 6$	$y = \frac{300}{11} = 27 \frac{3}{11}$ সময়: ৬টা $27 \frac{3}{11}$ মিনিট	$y = \frac{420}{11} = 38 \frac{2}{11}$ সময়: ৬টা $38 \frac{2}{11}$ মিনিট
$x = 7$	$y = \frac{360}{11} = 32 \frac{8}{11}$ সময়: ৭টা $32 \frac{8}{11}$ মিনিট	$y = \frac{480}{11} = 43 \frac{7}{11}$ সময়: ৭টা $43 \frac{7}{11}$ মিনিট
$x = 8$	$y = \frac{420}{11} = 38 \frac{2}{11}$ সময়: ৮টা $38 \frac{2}{11}$ মিনিট	$y = \frac{540}{11} = 49 \frac{1}{11}$ সময়: ৮টা $49 \frac{1}{11}$ মিনিট
$x = 9$	$y = \frac{480}{11} = 43 \frac{7}{11}$ সময়: ৯টা $43 \frac{7}{11}$ মিনিট	$y = \frac{600}{11} = 54 \frac{6}{11}$ সময়: ৯টা $54 \frac{6}{11}$ মিনিট
$x = 10$	$y = \frac{540}{11} = 49 \frac{1}{11}$ সময়: ১০টা $49 \frac{1}{11}$ মিনিট	$y = 60$ সময়: ১০টা ৬০ মিনিট অর্থাৎ ১১ টা
$x = 11$	$y = \frac{600}{11} = 54 \frac{6}{11}$ সময়: ১১টা $54 \frac{6}{11}$ মিনিট	$y = \frac{720}{11} = 65 \frac{5}{11}$ সময়: ১১টা $65 \frac{5}{11}$ মিনিট অর্থাৎ ১২টা $5 \frac{5}{11}$ মিনিট

এখানে $x = 0$ এবং $x = 11$ এর জন্য একই মান পাওয়া যায়।

সুতরাং কাঁটা দুটি ২২ বার 30° কোণে করবে।



পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

কাজ

পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২৪৬

ABC ত্রিভুজে $\angle B = 2x^\circ$, $\angle C = x^\circ$, $\angle A = y^\circ$ এবং
 $\angle A = \angle B + \angle C$ হলে, x ও y এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\angle B = 2x^\circ$; $\angle C = x^\circ$

$$\angle A = y^\circ \text{ এবং } \angle A = \angle B + \angle C$$

আমরা জানি, ত্রিভুজের তিনকোণের সমষ্টি 180°

$$\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$$

$$\text{বা, } y + 2x + x = 180^\circ$$

$$\text{বা, } 3x + y = 180^\circ \dots \dots (1)$$

আবার, দেওয়া আছে, $\angle A = \angle B + \angle C$

$$\text{বা, } y = 2x + x$$

$$\text{বা, } y = 3x \dots \dots (2)$$

সমীকরণ (১)-এ y এর মান $3x$ বসিয়ে পাই,

$$3x + 3x = 180^\circ$$

$$\text{বা, } 6x = 180^\circ$$

$$\text{বা, } x = \frac{180^\circ}{6}$$

$$\text{বা, } x = 30^\circ$$

সমীকরণ (২)-এ x এর মান 30° বসিয়ে পাই,

$$y = 3 \times 30^\circ$$

$$\text{বা, } y = 90^\circ$$

$\therefore x$ এর মান 30° ও y এর মান 90°