

# ষষ্ঠ অধ্যায়

## অসমতা

### অনুশীলনী - ৬.১

**অসমতা:** অসমতা একটি সম্পর্ক। যে সমস্ত গাণিতিক সংখ্যা বা বাক্য  $\neq, >, <, \leq, \geq$  চিহ্নগুলি ব্যবহৃত হয় তাকে অসমতা বলে।

যেমন:  $a, b$  এর চেয়ে ছোট হলে একে  $a < b$  দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

**দ্রষ্টব্য:** সংখ্যার ক্ষেত্রে কেবলমাত্র দুটি বাস্তব সংখ্যার মধ্যে  $>$  অথবা  $<$  প্রয়োগ যোগ্য। জটিল সংখ্যার ক্ষেত্রে ইহা প্রয়োগ যোগ্য নয়।

দুই শ্রেণির অসমতা বিদ্যমান: (i) শর্ত সাপেক্ষ অসমতা এবং (ii) শর্তহীন অসমতা

**i. শর্ত সাপেক্ষ অসমতা:** যে সমস্ত অসমতা কেবলমাত্র সম্পর্কযুক্ত চলকের একাধিক মানের জন্য সত্য তাকে শর্ত সাপেক্ষ অসমতা বলে।

যেমন:  $x + 3 > 5$  একটি শর্ত সাপেক্ষ অসমতা কারণ ইহা কেবলমাত্র  $x > 2$  এর জন্য সত্য।

**ii. শর্তহীন অসমতা:** যে অসমতা সম্পর্কযুক্ত অথবা সম্পর্কযুক্ত নয় চলকের প্রত্যেক মানের জন্য সত্য তাকে শর্তহীন অসমতা বলে।

যেমন:  $x + 5 > x, 8 > 5$  এবং  $(x - 2)^2 + 3 > 2$  অসমতা তিনটি শর্তহীন অসমতা।

**অসমতার সমাধানে লক্ষণীয় বিষয়:**

সাধারণভাবে বলা যায়, যদি $a < b$ হয়, তবে	$a + c < b + c$	$c$ এর যেকোনো মানের জন্য	<b>মন্তব্য:</b> অসমতার উভয়পক্ষে কোনো সংখ্যা যোগ করলে অসমতার চিহ্ন পরিবর্তন হয় না।
	$a - c < b - c$	$c$ এর যেকোনো মানের জন্য	<b>মন্তব্য:</b> অসমতার উভয়পক্ষে কোনো সংখ্যা বিয়োগ করলে অসমতার চিহ্ন পরিবর্তন হয় না।
	$ac < bc$	$c$ এর ধনাত্মক মানের জন্য	<b>মন্তব্য:</b> অসমতার উভয়পক্ষে কোনো ধনাত্মক সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে অসমতার চিহ্ন পরিবর্তন হয় না।
	$ac > bc$	$c$ এর ঋণাত্মক মানের জন্য	<b>মন্তব্য:</b> অসমতার উভয়পক্ষে কোনো ঋণাত্মক সংখ্যা দ্বারা গুণ করলে অসমতার চিহ্ন পরিবর্তন হয়।
	$\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$	$c$ এর ধনাত্মক মানের জন্য	<b>মন্তব্য:</b> অসমতার উভয়পক্ষে কোনো ধনাত্মক সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে অসমতার চিহ্ন পরিবর্তন হয় না।
	$\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$	$c$ এর ঋণাত্মক মানের জন্য	<b>মন্তব্য:</b> অসমতার উভয়পক্ষে কোনো ঋণাত্মক সংখ্যা দ্বারা ভাগ করলে অসমতার চিহ্ন পরিবর্তন হয়।

**অসমতার সমাধান:** সমীকরণের সমাধান যেমন একটি সমীকরণ (সমতা) দ্বারা প্রকাশ পায়, তেমনি অসমতার সমাধান একটি অসমতা দ্বারা প্রকাশ পায়।

উদাহরণ:  $x < 3, x > -5$  ইত্যাদি।

**অসমতার সমাধান সেট:** অসমতার সমাধান সেট (সাধারণত) বাস্তব সংখ্যার (Real Number) অসীম উপসেট। বাস্তব সংখ্যার সেটকে  $R$  দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

উদাহরণ: অসমতার সমাধান  $x < 3$  হলে সমাধান সেট,  $S = \{x \in R : x < 3\}$

**সমাধান সেটের সংখ্যারেখা:** অসমতার সমাধান সেট (সাধারণত) বাস্তব সংখ্যার অসীম উপসেট। ফলে অসমতার সমাধান সেটের সংখ্যারেখা সুনির্দিষ্ট দিকে বিস্তৃত থাকে।

নিম্নোক্ত উদাহরণগুলো লক্ষ কর:

সমাধান সেট	ব্যবধি	সংখ্যারেখা
$S = \{x \in \mathbb{R} : -a \leq x \leq a\}$	$[-a, a]$	
$S = \{x \in \mathbb{R} : -a < x < a\}$	$(-a, a)$ বা $]-a, a[$	
$S = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$	$(-\infty, a]$	
$S = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$	$(-\infty, a)$ বা $]-\infty, a[$	
$S = \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$	$[a, \infty)$	
$S = \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$	$(a, \infty)$	
$S = \{x \in \mathbb{R} : x \leq -a\}$	$(-\infty, -a]$	
$S = \{x \in \mathbb{R} : x < -a\}$	$(-\infty, -a)$	
$S = \{x \in \mathbb{R} : x \geq -a\}$	$[-a, \infty)$	
$S = \{x \in \mathbb{R} : x > -a\}$	$(-a, \infty)$	

লক্ষণীয়: i. সংখ্যারেখায় যেকোনো সংখ্যার অবস্থান থেকে ডানদিকে সংখ্যাগুলোর মান ক্রমাগত বৃদ্ধি পায় এবং বামদিকে সংখ্যাগুলোর মান ক্রমাগত হ্রাস পায়।

ii. ' $\leq$ ' ও ' $\geq$ ' চিহ্ন থাকলে বৃত্তটি ভরাট হবে এবং ' $<$ ' ও ' $>$ ' চিহ্ন থাকলে বৃত্তটি ভরাট হবে না।

iii. ব্যবধির ক্ষেত্রে তৃতীয় বন্ধনী '[' বা ']' চিহ্ন দ্বারা আবদ্ধ প্রান্তিক সংখ্যা ব্যবধির অন্তর্ভুক্ত। আবার প্রথম বন্ধনী '(' বা ')' এবং খোলা বন্ধনী '[' বা ']' দ্বারা আবদ্ধ প্রান্তিক সংখ্যাগুলো ব্যবধির অন্তর্ভুক্ত নয়।



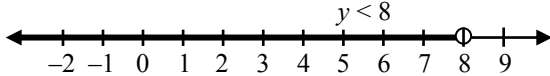
## অনুশীলনীর সমাধান

অসমতাগুলো সমাধান কর এবং সংখ্যারেখায় সমাধান সেট দেখাও:

১.  $y - 3 < 5$

সমাধান: দেওয়া আছে,  $y - 3 < 5$ বা,  $y - 3 + 3 < 5 + 3$  [উভয়পক্ষে 3 যোগ করে]বা,  $y < 8$  $\therefore$  নির্ণেয় সমাধান  $y < 8$  (Ans.)এখানে সমাধান সেট,  $S = \{y \in \mathbb{R} : y < 8\}$ 

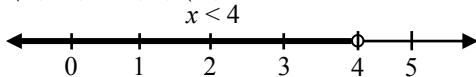
৪ অপেক্ষা ছোট সকল বাস্তব সংখ্যা প্রদত্ত অসমতার সমাধান যা নিচে অঙ্কিত সংখ্যারেখায় দেখানো হলো।



২.  $3(x - 2) < 6$

সমাধান: দেওয়া আছে,  $3(x - 2) < 6$ বা,  $\frac{3(x - 2)}{3} < \frac{6}{3}$  [উভয়পক্ষে 3 দ্বারা ভাগ করে]বা,  $x - 2 < 2$ বা,  $x - 2 + 2 < 2 + 2$  [উভয়পক্ষে 2 যোগ করে]বা,  $x < 4$  $\therefore$  নির্ণেয় সমাধান  $x < 4$  (Ans.)এখানে সমাধান সেট  $S = \{x \in \mathbb{R} : x < 4\}$ 

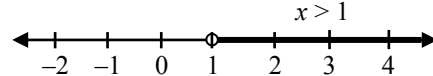
৪ অপেক্ষা ছোট সকল বাস্তব সংখ্যা প্রদত্ত অসমতার সমাধান যা নিচে অঙ্কিত সংখ্যারেখায় দেখানো হলো।



৩.  $3x - 2 > 2x - 1$

সমাধান: দেওয়া আছে,  $3x - 2 > 2x - 1$ বা,  $3x - 2 - 2x > 2x - 1 - 2x$ [উভয়পক্ষে থেকে  $2x$  বিয়োগ করে]বা,  $x - 2 > -1$ বা,  $x - 2 + 2 > -1 + 2$  [উভয়পক্ষে 2 যোগ করে]বা,  $x > 1$  $\therefore$  নির্ণেয় সমাধান  $x > 1$  (Ans.)এখানে সমাধান সেট  $S = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\}$ 

১ অপেক্ষা বড় সকল বাস্তব সংখ্যা প্রদত্ত অসমতার সমাধান যা নিচে অঙ্কিত সংখ্যারেখায় দেখানো হলো।

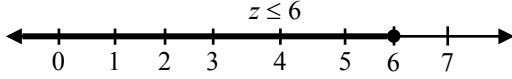


৪.  $z \leq \frac{1}{2}z + 3$

সমাধান: দেওয়া আছে,  $z \leq \frac{1}{2}z + 3$ বা,  $z - \frac{1}{2}z \leq \frac{1}{2}z + 3 - \frac{1}{2}z$  [উভয়পক্ষে থেকে  $\frac{1}{2}z$  বিয়োগ করে]বা,  $\frac{1}{2}z \leq 3$ বা,  $\frac{1}{2}z \times 2 \leq 3 \times 2$  [উভয়পক্ষে 2 দ্বারা গুণ করে]বা,  $z \leq 6$  $\therefore$  নির্ণেয় সমাধান  $z \leq 6$  (Ans.)

এখন সমাধান সেট,  $S = \{z \in \mathbf{R} : z \leq 6\}$

6 এবং 6 অপেক্ষা ছোট সকল বাস্তব সংখ্যা প্রদত্ত অসমতার সমাধান যা নিচে অঙ্কিত সংখ্যারেখায় দেখানো হলো।



$$৫ \quad 8 \geq 2 - 2x$$

সমাধান: দেওয়া আছে,  $8 \geq 2 - 2x$

বা,  $8 + 2x \geq 2 - 2x + 2x$  [উভয়পক্ষে  $2x$  যোগ করে]

বা,  $8 + 2x \geq 2$

বা,  $8 + 2x - 8 \geq 2 - 8$  [উভয়পক্ষ থেকে 8 বিয়োগ করে]

বা,  $2x \geq -6$

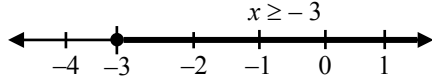
বা,  $\frac{2x}{2} \geq \frac{-6}{2}$  [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

বা,  $x \geq -3$

$\therefore$  নির্ণেয় সমাধান  $x \geq -3$  (Ans.)

এখন সমাধান সেট,  $S = \{x \in \mathbf{R} : x \geq -3\}$

(-3) এবং (-3) অপেক্ষা বড় সকল বাস্তব সংখ্যা প্রদত্ত অসমতার সমাধান যা নিচে অঙ্কিত সংখ্যারেখায় দেখানো হলো।



$$৬ \quad x \leq \frac{x}{3} + 4$$

সমাধান: দেওয়া আছে,  $x \leq \frac{x}{3} + 4$

বা,  $x - \frac{x}{3} \leq \frac{x}{3} + 4 - \frac{x}{3}$  [উভয়পক্ষ থেকে  $\frac{x}{3}$  বিয়োগ করে]

বা,  $\frac{3x - x}{3} \leq 4$

বা,  $\frac{2x}{3} \leq 4$

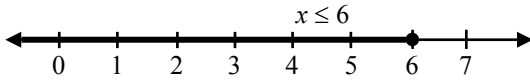
বা,  $\frac{2x}{3} \times \frac{3}{2} \leq 4 \times \frac{3}{2}$  [উভয়পক্ষকে  $\frac{3}{2}$  দ্বারা গুণ করে]

বা,  $x \leq 6$

$\therefore$  নির্ণেয় সমাধান  $x \leq 6$  (Ans.)

এখন সমাধান সেট,  $S = \{x \in \mathbf{R} : x \leq 6\}$

6 এবং 6 অপেক্ষা ছোট সকল বাস্তব সংখ্যা প্রদত্ত অসমতার সমাধান যা নিচে অঙ্কিত সংখ্যারেখায় দেখানো হলো।



$$৭ \quad 5(3 - 2t) \leq 3(4 - 3t)$$

সমাধান: দেওয়া আছে,  $5(3 - 2t) \leq 3(4 - 3t)$

বা,  $15 - 10t \leq 12 - 9t$

বা,  $15 - 10t + 9t \leq 12 - 9t + 9t$  [উভয়পক্ষে  $9t$  যোগ করে]

বা,  $15 - t \leq 12$

বা,  $15 - t - 15 \leq 12 - 15$  [উভয়পক্ষ থেকে 15 বিয়োগ করে]

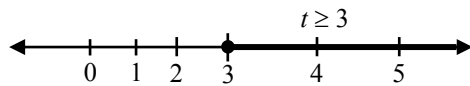
বা,  $-t \leq -3$

বা,  $t \geq 3$  [উভয়পক্ষকে  $-1$  দ্বারা গুণ করে]

$\therefore$  নির্ণেয় সমাধান  $t \geq 3$  (Ans.)

এখন সমাধান সেট,  $S = \{t \in \mathbf{R} : t \geq 3\}$

3 এবং 3 অপেক্ষা বড় সকল বাস্তব সংখ্যা প্রদত্ত অসমতার সমাধান যা নিচে অঙ্কিত সংখ্যারেখায় দেখানো হলো।



বিদ্র: ঋণাত্মক সংখ্যা দিয়ে ভাগ বা গুণ করলে অসমতার দিক পাাল্টে যায়।

$$৮ \quad \frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} > \frac{47}{60}$$

সমাধান: দেওয়া আছে,  $\frac{x}{3} + \frac{x}{4} + \frac{x}{5} > \frac{47}{60}$

বা,  $\frac{20x + 15x + 12x}{60} > \frac{47}{60}$

বা,  $\frac{47x}{60} > \frac{47}{60}$

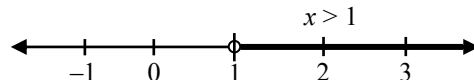
বা,  $\frac{47x}{60} \times \frac{60}{47} > \frac{47}{60} \times \frac{60}{47}$  [উভয়পক্ষকে  $\frac{60}{47}$  দ্বারা গুণ করে]

বা,  $x > 1$

$\therefore$  নির্ণেয় সমাধান,  $x > 1$  (Ans.)

এখন সমাধান সেট,  $S = \{x \in \mathbf{R} : x > 1\}$

1 অপেক্ষা বড় সকল বাস্তব সংখ্যা প্রদত্ত অসমতার সমাধান যা নিচে অঙ্কিত সংখ্যারেখায় দেখানো হলো।



## পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

### কাজ

পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১২৪

ক) তোমাদের শ্রেণির যে সকল ছাত্র-ছাত্রীর উচ্চতা 5 ফুটের চেয়ে বেশি এবং 5 ফুটের চেয়ে কম তাদের উচ্চতা অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর।

সমাধান: মনে করি, আমাদের শ্রেণিতে  $x$  জন ছাত্র-ছাত্রীর উচ্চতা 5 ফুটের চেয়ে বেশি। ফলে  $x$  জন ছাত্র-ছাত্রীর মোট উচ্চতা,  $5x$  অপেক্ষা বেশি।

অর্থাৎ, 5 ফুটের চেয়ে বেশি উচ্চতা বিশিষ্ট  $x$  জন ছাত্র-ছাত্রীদের মোট উচ্চতাকে অসমতায় প্রকাশ করলে,

$x$  জন ছাত্র-ছাত্রীর মোট উচ্চতা  $> 5x$

আবার, মনে করি, আমাদের শ্রেণিতে  $y$  জন ছাত্র-ছাত্রীর উচ্চতা 5 ফুটের চেয়ে কম। ফলে  $y$  জন ছাত্র-ছাত্রীর মোট উচ্চতা,  $5y$  অপেক্ষা কম।

$\therefore$  5 ফুটের চেয়ে কম উচ্চতা বিশিষ্ট  $y$  জন ছাত্র-ছাত্রীর মোট উচ্চতাকে অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ করলে,

$y$  জন ছাত্র-ছাত্রীর মোট উচ্চতা  $< 5y$

খ) কোনো পরীক্ষার মোট নম্বর 1000 হলে, একজন পরীক্ষার্থীর প্রাপ্ত নম্বর অসমতার মাধ্যমে প্রকাশ কর।

সমাধান: এখানে, মোট নম্বর = 1000

ধরি, প্রাপ্ত নম্বর =  $x$

এখন পরীক্ষার্থী 0 থেকে 1000 এর মধ্যে যেকোনো নম্বর পেতে পারে।

$\therefore$  নির্ণেয় অসমতা,  $0 \leq x \leq 1000$  (Ans.)