তৃতীয় অধ্যায়

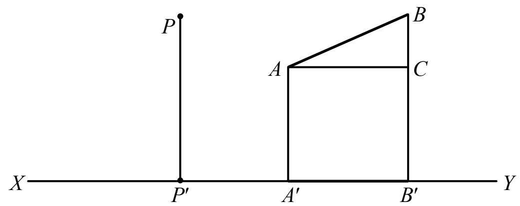
জ্যামিতি

অনুশীলনী - ৩.১

লম্ব অভিক্ষেপ:

বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ: কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর কোনো বিন্দু থেকে অঙ্কিত লম্বের পাদবিন্দুতে ঐ বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ বলে। P বিন্দু হতে XY রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব PP' এর পাদবিন্দু P'। সুতরাং P' হলো P বিন্দুর লম্ব অভিক্ষেপ।

রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ: AB রেখাংশের প্রান্ত বিন্দু A ও B হতে XY রেখার উপর অঙ্কিত লম্বদ্বয় AA' ও BB' এর পাদবিন্দু A' এবং B'। এই $A'B'$ রেখাংশই XY রেখাংশের উপর AB রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ।

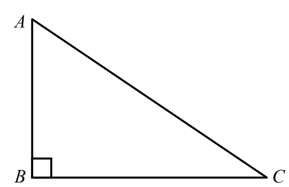


লক্ষণীয়: ✪ কোনো রেখার উপর ঐ রেখার লম্ব রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপ একটি বিন্দু। যার দৈর্ঘ্য শূন্য।
✪ কোনো রেখার উপর ঐ রেখার সমান্তরাল কোনো রেখাংশের লম্ব অভিক্ষেপের দৈর্ঘ্য ঐ রেখাংশের দৈর্ঘ্যের সমান।

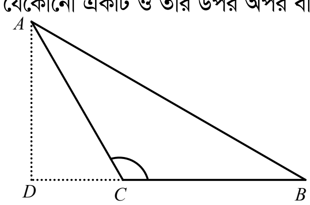
উপপাদ্য-১ ও ২:

পিথাগোরাসের উপপাদ্য: একটি সমকোণী ত্রিভুজে অতিভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল উপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।
ΔABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ = এক সমকোণ হলে পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে, $AC^2 = AB^2 + BC^2$।

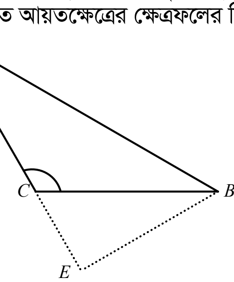
পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিপরীত প্রতিজ্ঞা: কোনো ত্রিভুজের একটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান হলে শেষোক্ত বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণটি সমকোণ হবে।
ABC ত্রিভুজের $AC^2 = AB^2 + BC^2$ হলে, $\angle B$ = এক সমকোণ হবে।



উপপাদ্য-৩: স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূলকোণের বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র ঐ কোণের সন্নিহিত অন্য দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফল এবং ঐ দুই বাহুর যেকোনো একটি ও তার উপর অপর বাহুর লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণের সমষ্টির সমান।



চিত্র-১



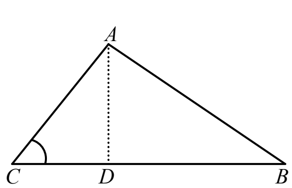
চিত্র-২

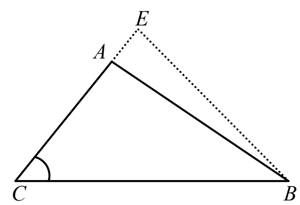
ABC ত্রিভুজের $\angle C$ স্থূলকোণ হলে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD = AC^2 + BC^2 + 2AC.CE$

(স্থূলকোণের বিপরীত বাহুর উপর লম্ব)^2 = দুই বাহুর বর্গের সমষ্টি + 2 × একটি বাহু × উক্ত বাহুর উপর অপর বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ

✉ **লক্ষ কর:** চিত্র-১ এর ক্ষেত্রে BC বাহুর উপর AC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ CD এবং চিত্র-২ এ AC বাহুর উপর BC বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ CE।

উপপাদ্য-৪:

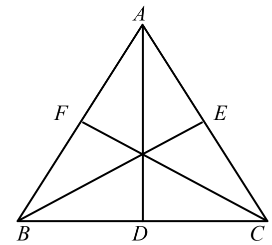




ABC ত্রিভুজের $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ হলে,
(সূক্ষ্মকোণের বিপরীত বাহুর উপর লম্ব)^2 = অপর দুই বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গের সমষ্টি − 2 × একটি বাহু × উক্ত বাহুর উপর অপর বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ
$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD = AC^2 + BC^2 - 2AC.CE$

✉ **লক্ষ কর:** উপপাদ্য-৩.৩ শুধুমাত্র স্থূলকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রেই প্রযোজ্য কিন্তু উপপাদ্য-৩.৪ সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের সাথে সাথে স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূলকোণ ব্যতীত অপর দুই সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রেও প্রযোজ্য।

উপপাদ্য-৫ (এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য):



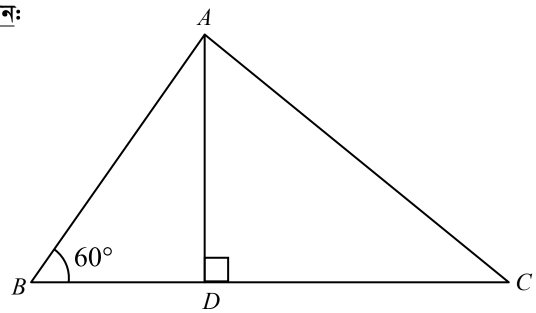
(i) ABC ত্রিভুজে AD মধ্যমা হলে, $AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$
(ii) ABC ত্রিভুজে BE মধ্যমা হলে, $AB^2 + BC^2 = 2(BE^2 + CE^2)$
(iii) ABC ত্রিভুজে CF মধ্যমা হলে, $AC^2 + BC^2 = 2(CF^2 + BF^2)$

অনুসিদ্ধান্ত: ΔABC এর AB, BC ও CA বাহুর উপর মধ্যমাত্রয় যথাক্রমে CF, AD ও BE হলে, $3(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2)$
আবার, ΔABC এর $\angle B =$ এক সমকোণ হলে এবং AD, BE ও CF তিনটি মধ্যমা হলে, $2(AD^2 + BE^2 + CF^2) = 3AC^2$

অনুশীলনীর সমাধান

১ ΔABC এর $\angle B = 60°$ হলে প্রমাণ কর যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - AB.BC$।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: ΔABC এর $\angle B = 60°$ হলে
প্রমাণ করতে হবে যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - AB.BC$
অঙ্কন: $AD \perp BC$ অঙ্কন করি।
প্রমাণ: এখন, ΔABC সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ $\angle ABC$ এর বিপরীত বাহু AC এবং অপর বাহুদ্বয় AB ও BC। BC বাহুতে AB এর লম্ব অভিক্ষেপ BD
$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC.BD$

এখন সমকোণী ΔABD-এ, $\cos \angle ABD = \dfrac{BD}{AB}$

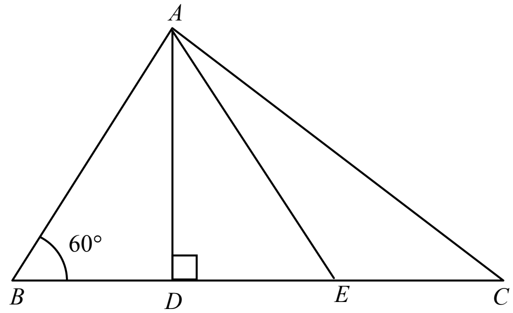
বা, $\cos 60° = \dfrac{BD}{AB}$

বা, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{BD}{AB}$

$\therefore BD = \dfrac{1}{2} AB$

(ii) নং সমীকরণ হতে পাই, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2.BC.\dfrac{1}{2}.AB$
$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2 - AB.BC$ **(প্রমাণিত)**

দ্বিতীয় পদ্ধতি



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এর $\angle B = 60°$।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - AB.BC$

অঙ্কন: $AD \perp BC$ অঙ্কন করি এবং $DE = BD$ অংশ নিই। A, E যোগ করি।

প্রমাণ: ΔABD ও ΔADE-এ

$BD = ED$ [অঙ্কনানুসারে]

$AD = AD$ [সাধারণ বাহু]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ADB =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle ADE$ [প্রত্যেকে এক সমকোণ]

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ADE$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

সুতরাং $\angle ABD = \angle AED$

অর্থাৎ $\angle ABE = \angle AEB = 60°$

ΔABE-এ $\angle BAE + \angle ABE + \angle AEB = 180°$

[$\because$ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি $180°$]

বা, $\angle BAE + 60° + 60° = 180°$

বা, $\angle BAE = 180° - 120° = 60°$

$\therefore \Delta ABE$-এ $\angle BAE = \angle ABE = \angle AEB = 60°$

$\therefore \Delta ABE$ একটি সমবাহু ত্রিভুজ। [$\because$ কোনো ত্রিভুজের তিনটি কোণ পরস্পর সমান হলে, তা একটি সমবাহু ত্রিভুজ]

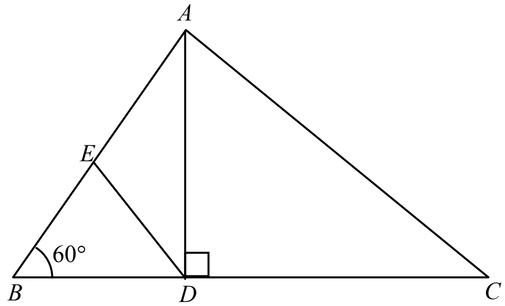
আবার, $AB = BE = 2BD$ [$\because D, BE$ এর মধ্যবিন্দু]

এখন, ΔABC সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণ $\angle ABC$ এর বিপরীত বাহু AC, অপর দুই বাহু AB ও BC এবং BC এর উপর AB এর লম্ব অভিক্ষেপ BD

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC.BD$

$= AB^2 + BC^2 - AB.BC$ [$\because 2BD = AB$] **(প্রমাণিত)**

তৃতীয় পদ্ধতি



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC এর $\angle B = 60°$।
প্রমাণ করতে হবে যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - AB.BC$

অঙ্কন: A বিন্দু হতে BC-এর উপর AD লম্ব আঁকি। BA হতে BD- এর সমান করে BE অংশ কেটে নিই। E, D যোগ করি।

প্রমাণ: ΔBDE-এ $BD = BE$ হওয়ায় $\angle BED = \angle EDB$

আবার, ΔBDE-এ $\angle BED + \angle EDB + \angle EBD = 180°$

বা, $\angle BED + \angle BED + 60° = 180°$

বা, $2\angle BED = 180° - 60°$

বা, $\angle BED = \dfrac{120°}{2} = 60°$

$\therefore$ ΔBDE-এ $\angle BDE = \angle BED = \angle EBD = 60°$

অর্থাৎ ΔBDE সমবাহু ত্রিভুজ

$\therefore$ $\angle ADE = \angle ADB - \angle BDE = 90° - 60° = 30°$

ΔABD-এ $\angle BAD + \angle ABD + \angle ADB = 180°$

বা, $\angle BAD + 60° + 90° = 180°$

বা, $\angle BAD = 180° - 150° = 30°$

$\therefore$ ΔADE-এ $\angle ADE = \angle EAD = 30°$ বলে, $AE = DE$

সুতরাং $AE = DE = BE = BD$ [$\because$ ΔBDE সমবাহু ত্রিভুজ]

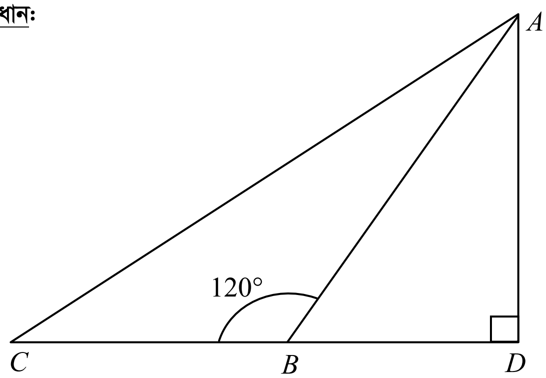
আবার $AB = AE + BE = BD + BD = 2BD$

এখন, $AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2BC.BD$

$= AB^2 + BC^2 - AB.BC$ [$\because 2BD = AB$] **(প্রমাণিত)**

২ ΔABC এর $\angle B = 120°$ হলে প্রমাণ কর যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB.BC$।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এর $\angle B = 120°$।
প্রমাণ করতে হবে যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB.BC$

অঙ্কন: CB এর বর্ধিতাংশের ওপর AD লম্ব টানি।

প্রমাণ: এখন ΔABC-এ, $\angle ABC = 120°$ অর্থাৎ একটি স্থূলকোণ, এর বিপরীত বাহু AC এবং ঐ কোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় যথাক্রমে AB ও BC এবং BD, AB এর লম্ব অভিক্ষেপ।

$\therefore$ $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.BD$ ... ... (i)

এখন, $\angle ABC$ ও $\angle ABD$ একই সরলরেখার উপর অবস্থিত সন্নিহিত কোণ বিধায়,

$\angle ABC + \angle ABD = 180°$

বা, $\angle ABD = 180° - \angle ABC$

$= 180° - 120°$ [$\because$ $\angle ABC = 120°$]

$= 60°$

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজ ABD-এ $\cos\angle ABD = \dfrac{BD}{AB}$

বা, $\cos 60° = \dfrac{BD}{AB}$

বা, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{BD}{AB}$

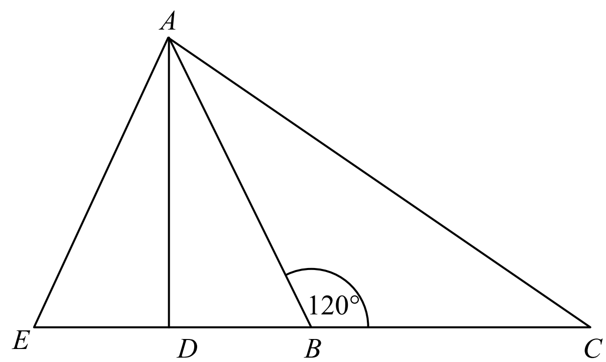
$\therefore$ $BD = \dfrac{1}{2}AB$

(i) নং সমীকরণ হতে পাই, $AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BC.BD$

$= AB^2 + BC^2 + 2BC.\dfrac{1}{2}.AB$

$\therefore$ $AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB.BC$ **(প্রমাণিত)**

দ্বিতীয় পদ্ধতি



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এর $\angle B = 120°$।
প্রমাণ করতে হবে যে, $AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB.BC$

অঙ্কন: A বিন্দু হতে CB-এর বর্ধিতাংশের ওপর AD লম্ব আঁকি। BD কে DE পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করি যেন $DE = BD$ হয়। A, E যোগ করি।

প্রমাণ: $\angle ABC + \angle ABE = 180°$ [পরস্পর সম্পূরক কোণ]

$\therefore$ $120° + \angle ABE = 180°$ [$\angle B = \angle ABC = 120°$]

$\therefore$ $\angle ABE = 180° - 120° = 60°$

এখন, ΔADE ও ΔADB-এ

$DE = DB$; [অঙ্কনানুসারে]

$AD = AD$ [সাধারণ বাহু]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ADE =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle ADB$; [প্রত্যেকে এক সমকোণ]

$\therefore$ $\Delta ADE \cong \Delta ADB$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

$\angle ABE = \angle AEB = 60°$; [$\because$ $\angle ABE = 60°$]

ΔABE-এ $\angle BAE + \angle AEB + \angle ABE = 180°$

বা, $\angle BAE + 60° + 60° = 180°$

বা, $\angle BAE = 180° - 120°$

$\therefore$ $\angle BAE = 60°$

সুতরাং ABE একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

$\therefore$ $AB = BE = 2BD$; [$\because$ D, BE এর মধ্যবিন্দু]

জানা আছে, স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূলকোণের বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র ঐ কোণের সন্নিহিত অন্য দুই বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফল এবং ঐ দুই বাহুর যেকোনো একটি ও তার ওপর অপর বাহুর লম্ব অভিক্ষেপের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল দ্বিগুণের সমষ্টির সমান।

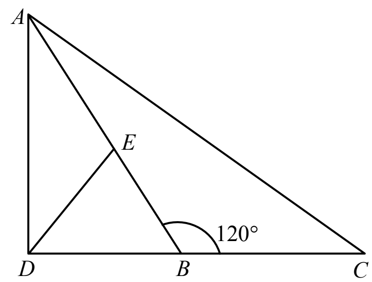
ABC স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূলকোণ $\angle ABC$ এর বিপরীত বাহু AC এবং উক্ত কোণের সন্নিহিত অপর দুই বাহু AB ও BC, CB বাহুর বর্ধিতাংশের AB-এর লম্ব অভিক্ষেপ BD

$\therefore AC^2 = AB^2 + BC^2 + 2BD.\,BC$

অর্থাৎ $AC^2 = AB^2 + BC^2 + AB.\,BC$; $[\because 2BD = AB]$

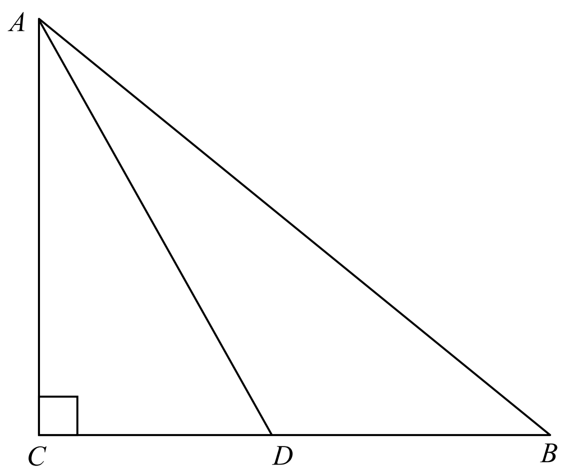
(প্রমাণিত)

দৃষ্টি আকর্ষণ: ১নং প্রশ্নের তৃতীয় পদ্ধতির অনুরূপভাবেও এ প্রশ্নটি সমাধান করা যেতে পারে। সেক্ষেত্রে A বিন্দু থেকে BC এর (বর্ধিতাংশের) উপর AD লম্ব আঁকতে হবে, BA হতে $BE = BD$ অংশ কাটতে হবে। D, E যোগ করতে হবে। চিত্রটি হবে নিম্নরূপ:



৩ **ΔABC এর $\angle C = 90°$ এবং BC এর মধ্যবিন্দু D। প্রমাণ কর যে, $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$।**

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC এর $\angle C = 90°$। D, BC-এর মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করতে হবে, $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$

প্রমাণ: সমকোণী ত্রিভুজ ACD-এ, $AD^2 = AC^2 + CD^2$

[পিথাগোরাসের সূত্রানুযায়ী]

বা, $AC^2 = AD^2 - CD^2$

$= AD^2 - BD^2$ ... ... (i) $[\because CD = BD]$

ΔABC-এ AD মধ্যমা হওয়ায়, এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে

$AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$

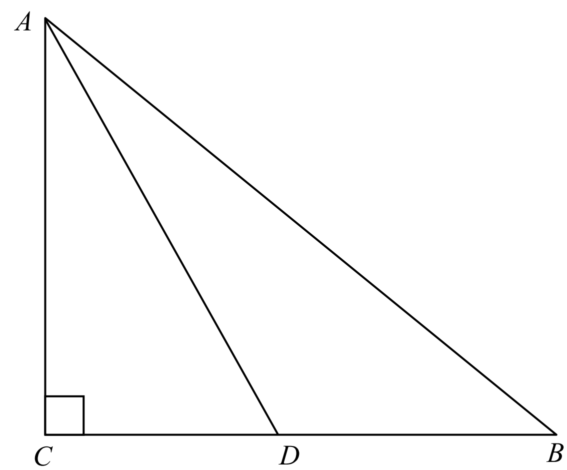
বা, $AB^2 = 2BD^2 + 2AD^2 - AC^2$

$= 2BD^2 + 2AD^2 - (AD^2 - BD^2)$ [(i) নং হতে]

$\therefore AB^2 = 2AD^2 - AD^2 + 2BD^2 + BD^2$

সুতরাং $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$ **(প্রমাণিত)**

দ্বিতীয় পদ্ধতি



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC এর $\angle C = 90°$ এবং BC বাহুর মধ্যবিন্দু D। A, D যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে, $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$

প্রমাণ: ΔABC-এ $\angle C =$ এক সমকোণ

$\therefore ACD$ সমকোণী ত্রিভুজে পিথাগোরাসের উপপাদ্যনুসারে পাই,

$AD^2 = AC^2 + CD^2$

বা, $AC^2 = AD^2 - CD^2$

আবার, ACB সমকোণী ত্রিভুজে পিথাগোরাসের উপপাদ্যনুসারে পাই,

$AB^2 = AC^2 + BC^2$

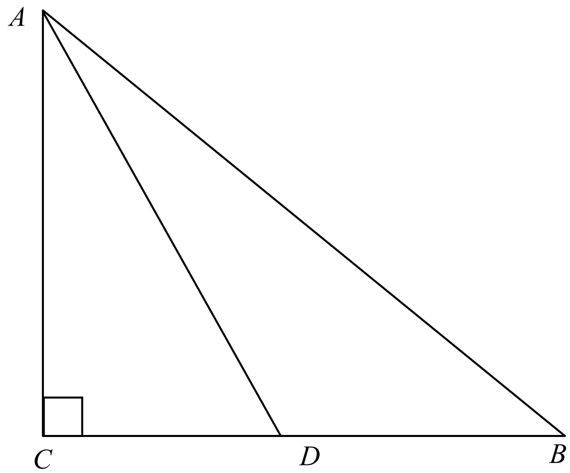
বা, $AB^2 = (AD^2 - CD^2) + BC^2$; $[\because AC^2 = AD^2 - CD^2]$

বা, $AB^2 = AD^2 - BD^2 + (2BD)^2$; $[\because BD = CD$ এবং $BC = 2BD]$

বা, $AB^2 = AD^2 - BD^2 + 4BD^2$

সুতরাং, $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$ **(প্রমাণিত)**

তৃতীয় পদ্ধতি



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC এর $\angle C = 90°$ এবং BC বাহুর মধ্যবিন্দু D। A, D যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে, $AB^2 = AD^2 + 3BD^2$

প্রমাণ: ΔACD-এ $\angle ACD = 90°$

$\therefore$ $\angle ADC$ হলো সূক্ষ্মকোণ।

তাহলে, সূক্ষ্মকোণ $\angle ADC$ এর সম্পূরক কোণ $\angle ADB$ হলো স্থূলকোণ।

এখন, স্থূলকোণী ΔADB-এ স্থূলকোণ $\angle ADB$ এর বিপরীত বাহু AB, অপর সন্নিহিত বাহুদ্বয় AD ও BD

এবং BD বাহুর বর্ধিতাংশে AD বাহুর লম্ব অভিক্ষেপ CD

$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD.\ CD$

বা, $AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD.\ BD$

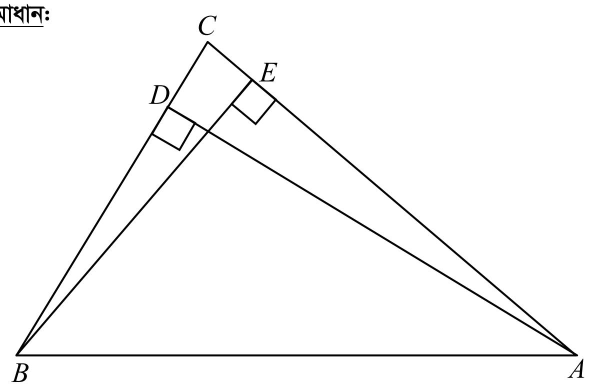
[$\because BD = CD$ কারণ D, BC এর মধ্যবিন্দু]

বা, $AB^2 = AD^2 + BD^2 + 2BD^2$

$\therefore AB^2 = AD^2 + 3BD^2$ **(প্রমাণিত)**

৪ **ΔABC এ AD, BC বাহুর উপর লম্ব এবং BE, AC এর উপর লম্ব। দেখাও যে, $BC.CD = AC.CE$।**

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এর AD, BC-এর উপর লম্ব এবং BE, AC-এর উপর লম্ব।

প্রমাণ করতে হবে, $BC.CD = AC.CE$

প্রমাণ: ΔADC-এ $AD \perp BC$ হওয়ায় $\angle ACD = \angle ACB$ সূক্ষ্মকোণ

ΔABC-এ সূক্ষ্মকোণ $\angle ACB$ এর বিপরীত AB এবং উক্ত কোণের সন্নিহিত বাহুদ্বয় AC ও BC এবং BC এর উপর AC এর লম্ব অভিক্ষেপ CD

$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$ ... ... (i)

আবার, AC বাহুর উপর BC এর লম্ব অভিক্ষেপ CE

$\therefore AB^2 = BC^2 + AC^2 - 2AC.CE$ ... ... (ii)

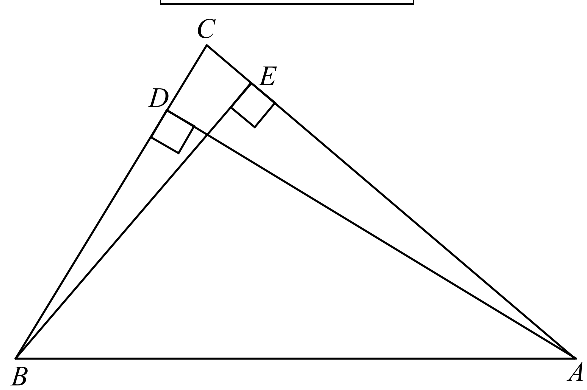
(i) ও (ii) নং সমীকরণ হতে পাই,

$AC^2 + BC^2 - 2BC.CD = BC^2 + AC^2 - 2AC.CE$

বা, $-2BC.CD = -2AC.CE$

$\therefore BC.CD = AC.CE$ **(দেখানো হলো)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এর AD, BC-এর উপর লম্ব এবং BE, AC-এর উপর লম্ব।

প্রমাণ করতে হবে, $BC.CD = AC.CE$

প্রমাণ: ΔBEC ও ΔADC-এ

$\angle BEC = \angle ADC$; [প্রত্যেকে এক সমকোণ]

$\angle BCE = \angle ACD$; [সাধারণ কোণ]

এবং অবশিষ্ট $\angle EBC$ = অবশিষ্ট $\angle DAC$

$\therefore$ ΔBEC ও ΔADC সদৃশকোণী ও তাই সদৃশ।

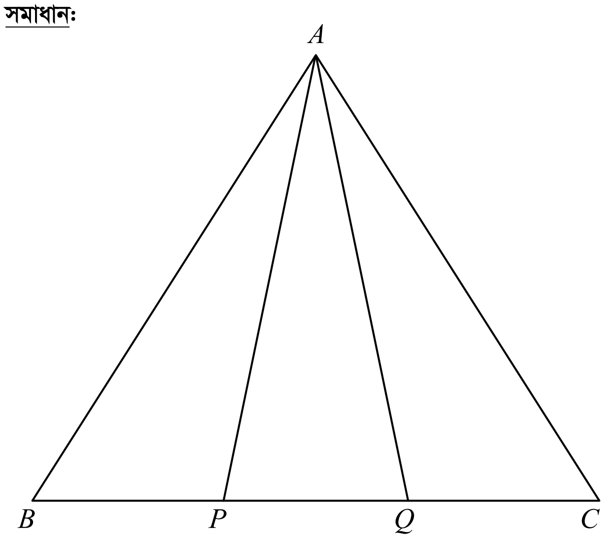
সুতরাং উহাদের অনুরূপ কোণের বিপরীত বাহুর অনুপাতগুলি সমান।

$$\therefore \frac{BC}{AC} = \frac{CE}{CD}$$

সুতরাং $BC.CD = AC.CE$ **(প্রমাণিত)**

৫ ΔABC এর BC বাহু P ও Q বিন্দুতে তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে। প্রমাণ কর যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$।
[সংকেত: $BP = PQ = QC$; ΔABQ এর মধ্যমা AP।
$AB^2 + AQ^2 = 2(BP^2 + AP^2) = 2PQ^2 + 2AP^2$।
ΔAPC এর মধ্যমা AQ। $\therefore AP^2 + AC^2 = 2PQ^2 + 2AQ^2$।]

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের BC বাহু P ও Q বিন্দুতে $BP = PQ = QC$ এই তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হয়েছে।
প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$

প্রমাণ: ΔABQ-এ $BP = PQ$ [অঙ্কনানুসারে]
তাহলে, AP, ΔABQ-এর মধ্যমা যা BQ-কে P বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে

$$AB^2 + AQ^2 = 2(AP^2 + PQ^2) \ldots \ldots \ldots (i)$$

আবার, AQ, ΔAPC-এর মধ্যমা যা PC-কে Q বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে

$$AC^2 + AP^2 = 2(AQ^2 + PQ^2) \ldots \ldots \ldots (ii)$$

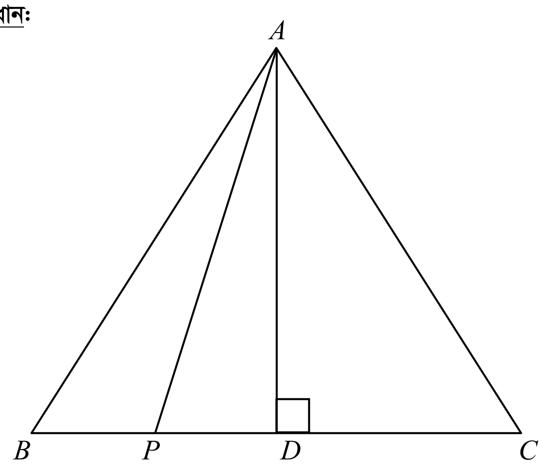
(i) ও (ii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$$AB^2 + AQ^2 + AC^2 + AP^2 = 2AP^2 + 2PQ^2 + 2AQ^2 + 2PQ^2$$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AP^2 - AP^2 + 2AQ^2 - AQ^2 + 4PQ^2$
$\therefore AB^2 + AC^2 = AP^2 + AQ^2 + 4PQ^2$ **(প্রমাণিত)**

৬ ΔABC এর $AB = AC$। ভূমি BC এর উপর P যেকোনো বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $AB^2 - AP^2 = BP.PC$। [সংকেত BC এর উপর AD লম্ব আঁক। তাহলে $AB^2 = BD^2 + AD^2$ এবং $AP^2 = PD^2 + AD^2$।]

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: ΔABC এর $AB = AC$। ভূমি BC এর উপর P যেকোনো বিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 - AP^2 = BP.PC$।
অঙ্কন: A, P যোগ করি এবং A হতে ভূমি BC-এর উপর AD লম্ব আঁকি।
প্রমাণ: সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ হতে অঙ্কিত লম্ব ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ABC-এ AD, ভূমি BC এর উপর লম্ব হওয়ায় $BD = CD$
APD সমকোণী ত্রিভুজে,

$$AP^2 = AD^2 + PD^2 \ldots \ldots \ldots (i)$$

আবার, ABD সমকোণী ত্রিভুজে,

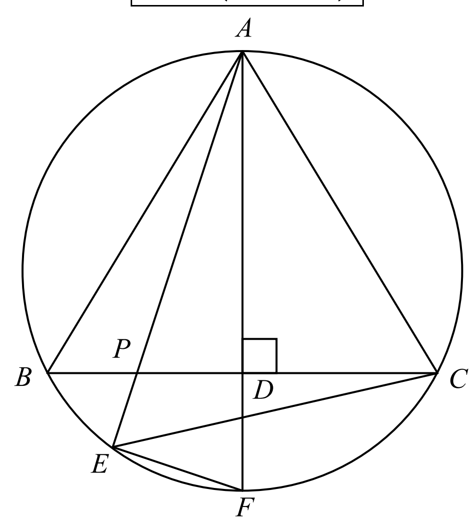
$$AB^2 = AD^2 + BD^2 \ldots \ldots \ldots (ii)$$

(ii) নং সমীকরণ হতে (i) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$$AB^2 - AP^2 = AD^2 + BD^2 - AD^2 - PD^2$$

বা, $AB^2 - AP^2 = BD^2 - PD^2$
বা, $AB^2 - AP^2 = (BD + PD)(BD - PD)$
বা, $AB^2 - AP^2 = (CD + PD).BP$
বা, $AB^2 - AP^2 = BP.PC$ **(প্রমাণিত)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজে $AB = AC$। ভূমি BC এর উপর P যেকোনো বিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 - AP^2 = BP.PC$

অঙ্কন: ΔABC এর পরিবৃত্ত অঙ্কন করি। A, P যোগ করে বর্ধিত করি যেন তা পরিবৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করে।

A বিন্দু হতে BC এর উপর AD লম্ব আঁকি। বর্ধিত AD পরিবৃত্তকে F বিন্দুতে ছেদ করে। E, F যোগ করি।

প্রমাণ: ΔABD ও ΔPEC-এ

$\angle ABC = \angle PEC = \angle AEC$ [একই চাপ AC এর ওপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ]

$\angle APB = \angle EPC$ [বিপ্রতীপ কোণ]

অবশিষ্ট $\angle BAD$ = অবশিষ্ট $\angle PCE$

$\therefore$ ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী এবং সদৃশ।

$\therefore \dfrac{AP}{BP} = \dfrac{PC}{PE}$

$\therefore AP.PE = BP.PC$ ... ... (i)

এখন, সমকোণী ΔABD ও সমকোণী ΔADC-এ [$\because AD \perp BC$]

অতিভুজ AB = অতিভুজ AC এবং AD সাধারণ বাহু

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ADC$ [অতিভুজ-বাহু উপপাদ্য]

$\therefore BD = DC$

সুতরাং AD রেখা ব্যাস ভিন্ন জ্যা BC এর লম্বদ্বিখণ্ডক। অর্থাৎ AD এর বর্ধিত রূপ AF রেখা হলো পরিবৃত্তের ব্যাস।

আমরা জানি, কোনো ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাস এবং ঐ বাহুদ্বয়ের সাধারণ বিন্দু থেকে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান।

সুতরাং ΔABC-এ $AB.AC = AD.AF$

বা, $AB^2 = AD.AF$; [$\because AB = AC$]

আবার, $\angle AEF$ = অর্ধবৃত্তস্থ কোণ = এক সমকোণ

এখন, ΔAEF এবং ΔADP-এ

$\angle AEF = \angle ADP$; [$\because$ প্রত্যেকে এক সমকোণ]

$\angle EAF = \angle PAD$ [সাধারণ কোণ]

$\therefore \Delta AEF$ এবং ΔADP সদৃশকোণী ও তাই সদৃশ।

সুতরাং তাদের অনুরূপ বাহুগুলো সমানুপাতিক।

$\therefore \dfrac{AF}{AP} = \dfrac{AE}{AD}$

বা, $AD.AF = AP.AE$

বা, $AD.AF = (AE - PE).AE$; ... .. (ii) [$\because AP = AE - PE$]

বা, $AD.AE = AE^2 - AE.PE$

বা, $AB^2 = AE^2 - AE.PE$; [$\because AB^2 = AD.AF$]

এখন, $AB^2 - AP^2 = AB^2 - (AE - PE)^2$; [$\because AP = AE - PE$]

$= AE^2 - AE.PE - AE^2 - PE^2 + 2AE.PE$ [(ii) নং হতে]

$= AE.PE - PE^2$

$= PE(AE - PE)$

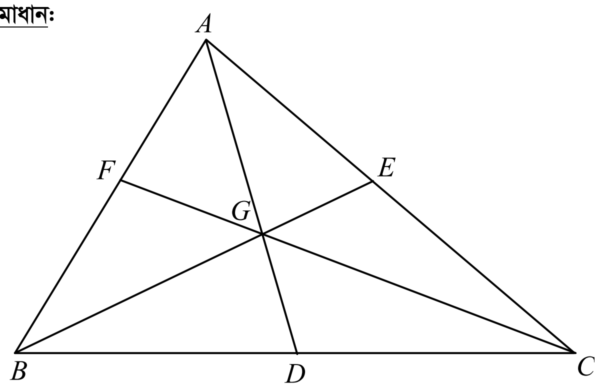
$= AP.PE$; [$\because AP = AE - PE$]

সুতরাং $AB^2 - AP^2 = BP.PC$ [(i) নং হতে] **(প্রমাণিত)**

৭ ΔABC এর মধ্যমাত্রয় G বিন্দুতে মিলিত হলে প্রমাণ কর যে, $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$।

[সংকেত: এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্যের আলোকে গৃহীত সিদ্ধান্তসমূহ ব্যবহার করতে হবে অর্থাৎ, ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য ও মধ্যমার সম্পর্ক ব্যবহার করতে হবে]

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এর AD, BE ও CF মধ্যমাত্রয় G বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

প্রমাণ: ΔABC-এ AD, BE ও CF মধ্যমাত্রয় পরস্পর G বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। সুতরাং G বিন্দুটি প্রত্যেকটি মধ্যমাকে $2 : 1$ অনুপাতে বিভক্ত করে।

$\therefore AG : GD = 2 : 1$

বা, $GD = \dfrac{1}{2} AG$

অনুরূপে $GE = \dfrac{1}{2} GB$ এবং $GF = \dfrac{1}{2} GC$

ΔABG-এ GF মধ্যমা। এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$\therefore GA^2 + GB^2 = 2GF^2 + 2AF^2$

বা, $GA^2 + GB^2 = 2\left(\dfrac{1}{2} GC\right)^2 + 2\left(\dfrac{1}{2} AB\right)^2$

বা, $GA^2 + GB^2 = \dfrac{1}{2} GC^2 + \dfrac{1}{2} AB^2$

$\therefore \dfrac{1}{2} AB^2 = GA^2 + GB^2 - \dfrac{1}{2} GC^2$ ... ... (i)

অনুরূপভাবে, $\dfrac{1}{2} BC^2 = GB^2 + GC^2 - \dfrac{1}{2} GA^2$ ... ... (ii)

$\dfrac{1}{2} AC^2 = GC^2 + GA^2 - \dfrac{1}{2} GB^2$ ... ... (iii)

(i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

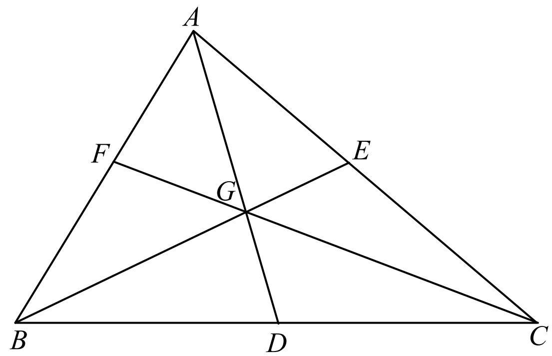
$$\frac{1}{2} AB^2 + \frac{1}{2} BC^2 + \frac{1}{2} AC^2 = GA^2 + GB^2 - \frac{1}{2} GC^2 + GB^2 + GC^2 - \frac{1}{2} GA^2 + GC^2 + GA^2 - \frac{1}{2} GB^2$$

বা, $\dfrac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 2GA^2 - \dfrac{1}{2} GA^2 + 2GB^2 - \dfrac{1}{2} GB^2 + 2GC^2 - \dfrac{1}{2} GC^2$

বা, $\dfrac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + AC^2) = \dfrac{3}{2}(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

$\therefore AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$ **(প্রমাণিত)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের AD, BE ও CF মধ্যমাত্রয় G বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

প্রমাণ: ΔABC-এ AD মধ্যমা। এ্যাপোলেনিয়াসের উপপাদ্য অনুসারে,

$$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2CD^2$$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2\left(\frac{1}{2}BC\right)^2$

[$\because$ AD মধ্যমা হওয়ায় $CD = BD = \frac{1}{2}BC$]

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + 2.\frac{1}{4}BC^2$

বা, $AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + \frac{1}{2}BC^2$

বা, $2AD^2 = AB^2 + AC^2 - \frac{1}{2}BC^2$

বা, $AD^2 = \dfrac{2\,AB^2 + 2\,AC^2 - BC^2}{4}$

অনুরূপভাবে, $BE^2 = \dfrac{2\,AB^2 + 2\,BC^2 - AC^2}{4}$

এবং $CF^2 = \dfrac{2\,BC^2 + 2\,AC^2 - AB^2}{4}$

$$\therefore AD^2 + BE^2 + CF^2 = \frac{2\,AB^2 + 2\,AC^2 - BC^2}{4} + \frac{2\,AB^2 + 2\,BC^2 - AC^2}{4} + \frac{2\,BC^2 + 2\,AC^2 - AB^2}{4}$$

বা, $AD^2 + BE^2 + CF^2 = \dfrac{3(AB^2 + BC^2 + AC^2)}{4}$

বা, $4(AD^2 + BE^2 + CF^2) = 3(AB^2 + BC^2 + AC^2)$ ... ... (1)

এখন, $AG = \frac{2}{3}AD$

[$\because$ ভরকেন্দ্র G বিন্দুতে মধ্যমাত্রয় $2 : 1$ অনুপাতে বিভক্ত হয়]

বা, $3AG = 2AD$

$\therefore 9AG^2 = 4AD^2$ [উভয় পক্ষ বর্গ করি]

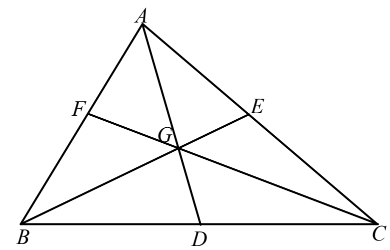
অনুরূপভাবে, $4BE^2 = 9BG^2$ এবং $4CF^2 = 9CG^2$

(1) নং সমীকরণে এই মানগুলো বসিয়ে পাই,

$3(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 9(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

সুতরাং $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$ **(প্রমাণিত)**

সমাধান (তৃতীয় পদ্ধতি)



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এর মধ্যমাত্রয় G বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

প্রমাণ: ΔABC-এর AD, BE ও CF তিনটি মধ্যমা।

এ্যাপোলোনিয়াসের উপপাদ্য অনুযায়ী,

$AB^2 + AC^2 = 2(AD^2 + BD^2)$ ... ... (i)

$AB^2 + BC^2 = 2(BE^2 + CE^2)$ ... ... (ii)

এবং $BC^2 + AC^2 = 2(CF^2 + BF^2)$ ... ... (iii)

(i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$$2AB^2 + 2BC^2 + 2AC^2 = 2AD^2 + 2BD^2 + 2BE^2 + 2CE^2 + 2CF^2 + 2BF^2$$

বা, $2(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 2(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 2(BD^2 + CE^2 + BF^2)$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + 4(BD^2 + CE^2 + BF^2)$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + (2BD)^2 + (2CE)^2 + (2BF)^2$

বা, $4(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 4(AD^2 + BE^2 + CF^2) + BC^2 + AC^2 + AB^2$

[$\because$ D, E, F যথাক্রমে BC, AC ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু,

$\therefore 2BD = BC, 2CE = AC, 2BF = AB$]

$\therefore 3(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 4AD^2 + 4BE^2 + 4CF^2$ ... (iv)

আমরা জানি, ত্রিভুজের মধ্যমাগুলো সম্পাত বিন্দুতে $2 : 1$ অনুপাতে বিভক্ত হয়।

তাহলে AD মধ্যমা G বিন্দুতে $2 : 1$ অনুপাতের বিভক্ত হয়।

$\therefore \dfrac{AG}{GD} = \dfrac{2}{1}$

বা, $\dfrac{GD}{AG} = \dfrac{1}{2}$

বা, $\dfrac{GD + AG}{AG} = \dfrac{1+2}{2}$ [যোজন করে]

বা, $\dfrac{AD}{AG} = \dfrac{3}{2}$

বা, $2AD = 3AG$

বা, $4AD^2 = 9AG^2$ [বর্গ করে]

অনুরূপভাবে, $4BE^2 = 9BG^2$ এবং $4CF^2 = 9CG^2$

সুতরাং, (iv) নং সমীকরণ হতে পাই,

$3(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 9AG^2 + 9BG^2 + 9CG^2$

বা, $3(AB^2 + BC^2 + AC^2) = 9(GA^2 + GB^2 + GC^2)$

$\therefore AB^2 + BC^2 + AC^2 = 3(GA^2 + GB^2 + GC^2)$ **(প্রমাণিত)**