

অনুশীলনী - ৫.২

সমীকরণের মূল বা বীজ (Root of Equation): চলকের যে মান বা মানগুলোর জন্য সমীকরণের উভয়পক্ষ সমান হয়, ঐ মান বা মানগুলোই সমীকরণের বীজ বা মূল (Root)।

যেমন: $\sqrt{x+1} = 2$ বা, $x+1 = 4$ [বর্গ করে] বা, $x = 4 - 1 = 3$

$x = 3$ এর জন্য সমীকরণটি সত্য। অর্থাৎ $x = 3$ হচ্ছে সমীকরণটির মূল।

☒ **জেনে রাখা ভালো:** সমীকরণের মূল সংখ্যা: যে সমীকরণের সর্বোচ্চ ঘাত সংখ্যা যত তার মূল সংখ্যা তত অর্থাৎ, সমীকরণের ঘাত ও মূল সংখ্যা সমান।

অবান্তর বীজ বা মূল (Extraneous root): যে মূল বা বীজ সমীকরণকে সিদ্ধ করে না তাই সমীকরণের অবান্তর মূল।

সমীকরণে চলকের বর্গমূল সম্বলিত রাশি থাকলে তাকে বর্গ করে বর্গমূল চিহ্নমুক্ত নতুন সমীকরণ পাওয়া যায়। এ ধরনের সমীকরণ সমাধান করে যে বীজ বা মূলগুলো পাওয়া যায় অনেক সময় সবগুলো বীজ প্রদত্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে না। সুতরাং মূলচিহ্ন সংবলিত সমীকরণ সমাধান প্রক্রিয়ায় প্রাপ্ত মূলগুলো প্রদত্ত সমীকরণের মূল কি না তা অবশ্যই পরীক্ষা করে দেখা দরকার। পরীক্ষার পর যে সব মূল উক্ত সমীকরণকে সিদ্ধ করে তাই হবে প্রদত্ত সমীকরণের মূল। যেমন: $x+1 = \sqrt{2x+10}$

$$\text{বা, } x^2 + 2x + 1 = 2x + 10 \quad [\text{বর্গ করে}]$$

$$\text{বা, } x^2 + 2x - 2x = 10 - 1$$

$$\text{বা, } x^2 = 9$$

$$\text{বা, } x = \pm 3$$

$x = -3$ সমীকরণটির মূল নয়, কেননা $x = -3$ হলে সমীকরণটির বামপক্ষ $= -3 + 1 = -2$

$$\text{ডানপক্ষ} = \sqrt{2 \times (-3) + 10} = \sqrt{-6 + 10} = \sqrt{4} = 2$$

∴ বামপক্ষ \neq ডানপক্ষ

সুতরাং $x = -3$ এর জন্য সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না অর্থাৎ অবান্তর মূল $x = -3$ ।

উদাহরণ-৩: $\sqrt{2x+9} - \sqrt{x-4} = \sqrt{x+1}$ সমীকরণটির সমাধান $x = 8$ অথবা $x = -5$

$x = -5$ গ্রহণযোগ্য নয়, কেননা সমীকরণে $x = -5$ বসালে ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূল আসে যা সংজ্ঞায়িত নয়। সুতরাং $x = -5$ হলো সমীকরণটির অবান্তর মূল।

আবার, $\sqrt{x+1} = -1$ সমীকরণের কোনো সমাধান নেই কারণ কোনো বাস্তব সংখ্যার বর্গমূল ঋণাত্মক হতে পারে না।

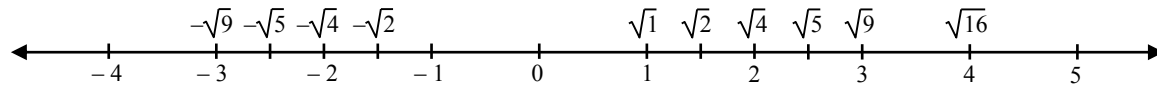
অবান্তর মূলের উদ্ভব: চলক রাশি বর্গমূলযুক্ত হলে তা সমাধানের জন্য বর্গ করতে হয় এ বর্গের কারণে সমীকরণের ঘাত পরিবর্তন হয় বলে অনেক সময় অবান্তর মূলের উদ্ভব হয়।

বর্গমূলের হিসাব: $(\pm 3)^2 = 9$ সঠিক কিন্তু $\sqrt{9} = \pm 3$ সত্য নয়। কারণ বাস্তব সংখ্যার বর্গমূল সর্বদাই ধনাত্মক।

[Ref: Anton calculus “Root of real number is always positive”]

☒ **জেনে রাখা ভালো:** ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূলের কোনো বাস্তব মান নেই। যেমন: $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-4}$ ইত্যাদি। আবার অনেকেই স্বাভাবিকভাবে $\sqrt{16} = \pm 4$, $\sqrt{9} = \pm 3$ লিখলেও $\sqrt{3} = \pm 1.732$ অথবা $\sqrt{5} = \pm 2.236$ লিখি না তাই উল্লেখিত সবগুলোই ভুল।

তাছাড়া সংখ্যারেখা থেকেও বোঝা যায় যে, কোনো বাস্তব সংখ্যার বর্গমূল সর্বদা ধনাত্মক।



এখানে দেখা যায় $\sqrt{4}$, $\sqrt{9}$... সংখ্যাগুলোর অবস্থান সর্বদাই শূন্যের থেকে ডানদিকে অর্থাৎ ধনাত্মক মান।

বর্গযুক্ত সমীকরণের মূল $x^2 = 16$ একটি x চলকের দ্বিঘাত সমীকরণ

$$\text{বা, } x = \pm \sqrt{16} \quad [\sqrt{(\pm 4)^2} \text{ লিখা যাবে না}]$$

$$\text{বা, } x = 4, -4$$

এ সমীকরণের দুইটি মূল কারণ ইহা দ্বিঘাত সমীকরণ।

$$\text{আবার, } \sqrt{x+2} = 4$$

$$\text{বা, } x+2 = 4^2 \quad [\pm 4 \text{ লিখা যাবে না}]$$

$$\text{বা, } x = 16 - 2 = 14$$

সুতরাং বলা যায় যে, $x^2 = 9$ হলে, $x = \pm \sqrt{9}$ বা, $x = \pm 3$, $x^2 = 25$ হলে $x = \pm \sqrt{25}$ বা, $x = \pm 5$ ইত্যাদি সমীকরণের সমাধান দুইটি দ্বিঘাত সমীকরণ হওয়ার জন্য, বর্গমূল ($\sqrt{\quad}$) চিহ্ন থাকার কারণে নয়।



অনুশীলনীর সমাধান



সমাধান কর:

$$1) \sqrt{x-4} + 2 = \sqrt{x+12}$$

সমাধান: $\sqrt{x-4} + 2 = \sqrt{x+12}$

বা, $(\sqrt{x-4} + 2)^2 = (\sqrt{x+12})^2$ [বর্গ করে]

বা, $(\sqrt{x-4})^2 + (2)^2 + 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{x-4} = x + 12$

বা, $x - 4 + 4 + 4\sqrt{x-4} = x + 12$

বা, $4\sqrt{x-4} = x + 12 - x$

বা, $4\sqrt{x-4} = 12$

বা, $\sqrt{x-4} = 3$ [উভয় পক্ষকে ৪ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $(\sqrt{x-4})^2 = 3^2$ [বর্গ করে]

বা, $x - 4 = 9$

বা, $x = 9 + 4$

$\therefore x = 13$

শুদ্ধি পরীক্ষা:

$x = 13$ হলে,

বামপক্ষ = $\sqrt{13-4} + 2 = \sqrt{9} + 2 = 3 + 2 = 5$

ডানপক্ষ = $\sqrt{13+12} = \sqrt{25} = 5$

\therefore নির্ণেয় সমাধান $x = 13$

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

$$\sqrt{x-4} + 2 = \sqrt{x+12}$$

বা, $\sqrt{x-4} = \sqrt{x+12} - 2$

বা, $(\sqrt{x-4})^2 = (\sqrt{x+12} - 2)^2$

বা, $x - 4 = (\sqrt{x+12})^2 - 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{x+12} + 2^2$

বা, $x - 4 = x + 12 - 4\sqrt{x+12} + 4$

বা, $x - 4 = x + 16 - 4\sqrt{x+12}$

বা, $x - 4 - x - 16 + 4\sqrt{x+12} = 0$

বা, $4\sqrt{x+12} - 20 = 0$

বা, $\sqrt{x+12} = 5$

বা, $x + 12 = 5^2$

বা, $x = 25 - 12$

$\therefore x = 13$

শুদ্ধি পরীক্ষা: (১ম পদ্ধতিতে বর্ণিত)

$$2) \sqrt{11x-6} = \sqrt{4x+5} - \sqrt{x-1}$$

সমাধান: $\sqrt{11x-6} = \sqrt{4x+5} - \sqrt{x-1}$

বা, $(\sqrt{11x-6})^2 = (\sqrt{4x+5} - \sqrt{x-1})^2$ [বর্গ করে]

বা, $11x-6 = (\sqrt{4x+5})^2 + (\sqrt{x-1})^2 - 2 \cdot \sqrt{4x+5} \cdot \sqrt{x-1}$

বা, $11x-6 = 4x+5 + x-1 - 2\sqrt{(4x+5)(x-1)}$

বা, $11x-6 = 5x+4 - 2\sqrt{4x^2-4x+5x-5}$

বা, $11x-6-5x-4 = -2\sqrt{4x^2+x-5}$

বা, $6x-10 = -2\sqrt{4x^2+x-5}$

বা, $3x-5 = -\sqrt{4x^2+x-5}$ [2 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $(3x-5)^2 = (-\sqrt{4x^2+x-5})^2$ [বর্গ করে]

বা, $9x^2 - 30x + 25 = 4x^2 + x - 5$

বা, $9x^2 - 30x + 25 - 4x^2 - x + 5 = 0$

বা, $5x^2 - 31x + 30 = 0$

বা, $5x^2 - 6x - 25x + 30 = 0$

বা, $x(5x-6) - 5(5x-6) = 0$

বা, $(5x-6)(x-5) = 0$

$\therefore 5x-6=0$ অথবা, $x-5=0$

বা, $x = \frac{6}{5}$

বা, $x = 5$

শুদ্ধি পরীক্ষা:

$x = \frac{6}{5}$ হলে,

বামপক্ষ = $\sqrt{11 \times \frac{6}{5} - 6} = \sqrt{\frac{66-30}{5}} = \sqrt{\frac{36}{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$

ডানপক্ষ = $\sqrt{4 \times \frac{6}{5} + 5} - \sqrt{\frac{6}{5} - 1}$

= $\sqrt{\frac{24+25}{5}} - \sqrt{\frac{6-5}{5}}$

= $\sqrt{\frac{49}{5}} - \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$

অতএব, $x = \frac{6}{5}$ প্রদত্ত সমীকরণের একটি মূল।

আবার, $x = 5$ হলে,

বামপক্ষ = $\sqrt{11 \times 5 - 6} = \sqrt{55-6} = \sqrt{49} = 7$

ডানপক্ষ = $\sqrt{4 \times 5 + 5} - \sqrt{5-1} = \sqrt{25} - \sqrt{4} = 5 - 2 = 3$

\therefore বামপক্ষ \neq ডানপক্ষ

অতএব, $x = 5$ প্রদত্ত সমীকরণের মূল নয়।

\therefore নির্ণেয় সমাধান $x = \frac{6}{5}$

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

$$\sqrt{11x-6} = \sqrt{4x+5} - \sqrt{x-1}$$

বা, $\sqrt{11x-6} + \sqrt{x-1} = \sqrt{4x+5}$

বা, $(\sqrt{11x-6} + \sqrt{x-1})^2 = (\sqrt{4x+5})^2$

বা, $(\sqrt{11x-6})^2 + (\sqrt{x-1})^2 + 2\sqrt{(11x-6)(x-1)} = 4x+5$

বা, $11x-6 + x-1 + 2\sqrt{11x^2-11x-6x+6} = 4x+5$

বা, $12x-7 + 2\sqrt{11x^2-17x+6} = 4x+5$

বা, $2\sqrt{11x^2-17x+6} = 4x+5-12x+7$

বা, $(2\sqrt{11x^2-17x+6})^2 = (12-8x)^2$

বা, $4(11x^2-17x+6) = 144 + 64x^2 - 2 \cdot 12 \cdot 8x$

বা, $11x^2 - 17x + 6 = 36 + 16x^2 - 48x$ [4 দ্বারা ভাগ করে]

বা, $36 + 16x^2 - 48x - 11x^2 + 17x - 6 = 0$

বা, $5x^2 - 31x + 30 = 0$

অতঃপর ১ম পদ্ধতির মতো করে সমাধান বের কর।

$$\boxed{7} \quad \sqrt{2x+7} + \sqrt{3x-18} = \sqrt{7x+1}$$

সমাধান: $\sqrt{2x+7} + \sqrt{3x-18} = \sqrt{7x+1}$
 বা, $(\sqrt{2x+7} + \sqrt{3x-18})^2 = (\sqrt{7x+1})^2$ [বর্গ করে]
 বা, $(\sqrt{2x+7})^2 + (\sqrt{3x-18})^2 + 2\sqrt{2x+7}\sqrt{3x-18} = 7x+1$
 বা, $2x+7+3x-18+2\sqrt{(2x+7)(3x-18)} = 7x+1$
 বা, $2\sqrt{6x^2-36x+21x-126} = 7x+1-5x+11$
 বা, $2\sqrt{6x^2-15x-126} = 2x+12$
 বা, $\sqrt{6x^2-15x-126} = x+6$ [2 দ্বারা ভাগ করে]
 বা, $(\sqrt{6x^2-15x-126})^2 = (x+6)^2$ [বর্গ করে]
 বা, $6x^2-15x-126 = x^2+12x+36$
 বা, $5x^2-27x-162 = 0$
 বা, $5x^2-45x+18x-162 = 0$
 বা, $5x(x-9)+18(x-9) = 0$
 বা, $(x-9)(5x+18) = 0$
 $\therefore x-9=0$ অথবা, $5x+18=0$

বা, $x=9$ বা, $x=-\frac{18}{5}$

শুদ্ধি পরীক্ষা:

$x=9$ হলে,

$$\text{বামপক্ষ} = \sqrt{2 \cdot 9 + 7} + \sqrt{3 \cdot 9 - 18} = \sqrt{25} + \sqrt{9} = 5 + 3 = 8$$

$$\text{ডানপক্ষ} = \sqrt{7 \cdot 9 + 1} = \sqrt{64} = 8$$

অতএব, $x=9$ প্রদত্ত সমীকরণের একটি মূল।

আবার, $x=-\frac{18}{5}$ হলে,

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= \sqrt{2\left(-\frac{18}{5}\right) + 7} + \sqrt{3\left(-\frac{18}{5}\right) - 18} \\ &= \sqrt{7 - \frac{36}{5}} + \sqrt{-\frac{54}{5} - 18} \\ &= \sqrt{\frac{35-36}{5}} + \sqrt{\frac{-54-90}{5}} \\ &= \sqrt{-\frac{1}{5}} + \sqrt{-\frac{144}{5}} \end{aligned}$$

$x = -\frac{18}{5}$ গ্রহণযোগ্য নয়, কেননা সমীকরণে $x = -\frac{18}{5}$ বসালে ঋণাত্মক

সংখ্যার বর্গমূল আসে যা সংজ্ঞায়িত নয়।

\therefore নির্ণেয় সমাধান $x=9$

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

$\sqrt{2x+7} + \sqrt{3x-18} = \sqrt{7x+1}$
 বা, $\sqrt{2x+7} - \sqrt{7x+1} = -\sqrt{3x-18}$
 বা, $(\sqrt{2x+7} - \sqrt{7x+1})^2 = (-\sqrt{3x-18})^2$
 বা, $(\sqrt{2x+7})^2 + (\sqrt{7x+1})^2 - 2\sqrt{(2x+7)(7x+1)} = 3x-18$
 বা, $2x+7+7x+1-2\sqrt{14x^2+2x+49x+7} = 3x-18$
 বা, $9x+8-2\sqrt{14x^2+51x+7} = 3x-18$
 বা, $-2\sqrt{14x^2+51x+7} = 3x-18-9x-8$
 বা, $-2\sqrt{14x^2+51x+7} = -6x-26$
 বা, $-2\sqrt{14x^2+51x+7} = -2(3x+13)$
 বা, $(\sqrt{14x^2+51x+7})^2 = (3x+13)^2$
 বা, $14x^2+51x+7 = 9x^2+78x+169$
 বা, $14x^2-9x^2+51x-78x+7-169 = 0$
 বা, $5x^2-27x-162 = 0$
 অতঃপর ১ম পদ্ধতির মতো সমাধান কর।

$$\boxed{8} \quad \sqrt{x+4} + \sqrt{x+11} = \sqrt{8x+9}$$

সমাধান: $\sqrt{x+4} + \sqrt{x+11} = \sqrt{8x+9}$
 বা, $(\sqrt{x+4} + \sqrt{x+11})^2 = (\sqrt{8x+9})^2$ [বর্গ করে]
 বা, $x+4+2\sqrt{(x+4)(x+11)}+x+11 = 8x+9$
 বা, $2x+15-8x-9 = -2\sqrt{(x+4)(x+11)}$
 বা, $-6x+6 = -2\sqrt{x^2+15x+44}$
 বা, $-2(3x-3) = -2\sqrt{x^2+15x+44}$
 বা, $3x-3 = \sqrt{x^2+15x+44}$ [-2 দ্বারা বর্গ করে]
 বা, $(3x-3)^2 = (\sqrt{x^2+15x+44})^2$ [পুনরায় বর্গ করে]
 বা, $9x^2-18x+9 = x^2+15x+44$
 বা, $9x^2-x^2-18x-15x+9-44 = 0$
 বা, $8x^2-33x-35 = 0$
 বা, $8x^2-40x+7x-35 = 0$
 বা, $8x(x-5)+7(x-5) = 0$
 বা, $(x-5)(8x+7) = 0$
 $\therefore x-5=0$ অথবা, $8x+7=0$

বা, $x=5$ বা, $x=-\frac{7}{8}$

শুদ্ধি পরীক্ষা:

$x=5$ হলে,

$$\text{বামপক্ষ} = \sqrt{5+4} + \sqrt{5+11} = 3+4 = 7$$

$$\text{এবং ডানপক্ষ} = \sqrt{8 \times 5 + 9} = \sqrt{49} = 7$$

$\therefore x=5$ প্রদত্ত সমীকরণের একটি মূল।

আবার, $x=-\frac{7}{8}$ হলে,

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= \sqrt{-\frac{7}{8}+4} + \sqrt{-\frac{7}{8}+11} \\ &= \sqrt{\frac{-7+32}{8}} + \sqrt{\frac{-7+88}{8}} \\ &= \sqrt{\frac{25}{8}} + \sqrt{\frac{81}{8}} = \frac{5}{\sqrt{8}} + \frac{9}{\sqrt{8}} = \frac{14}{\sqrt{8}} \end{aligned}$$

$$\text{ডানপক্ষ} = \sqrt{8\left(-\frac{7}{8}\right) + 9} = \sqrt{-7+9} = \sqrt{2}$$

\therefore বামপক্ষ \neq ডানপক্ষ

$\therefore x = -\frac{7}{8}$ প্রদত্ত সমীকরণের মূল নয়।

\therefore নির্ণেয় সমাধান $x=5$

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

$\sqrt{x+4} + \sqrt{x+11} = \sqrt{8x+9}$
 বা, $\sqrt{x+11} = \sqrt{8x+9} - \sqrt{x+4}$
 বা, $(\sqrt{x+11})^2 = (\sqrt{8x+9} - \sqrt{x+4})^2$
 বা, $x+11 = (\sqrt{8x+9})^2 + (\sqrt{x+4})^2 - 2\sqrt{(8x+9)(x+4)}$
 বা, $x+11 = 8x+9+x+4-2\sqrt{8x^2+32x+9x+36}$
 বা, $x+11-9x-13 = -2\sqrt{8x^2+41x+36}$
 বা, $-8x-2 = -2\sqrt{8x^2+41x+36}$
 বা, $4x+1 = \sqrt{8x^2+41x+36}$
 বা, $(4x+1)^2 = (\sqrt{8x^2+41x+36})^2$
 বা, $(4x)^2 + 2 \cdot 4x \cdot 1 + 1 = 8x^2 + 41x + 36$
 বা, $16x^2 + 8x + 1 - 8x^2 - 41x - 36 = 0$
 বা, $8x^2 - 33x - 35 = 0$
 অতঃপর ১ম পদ্ধতির মতো সমাধান কর।

$$\text{৫} \quad \sqrt{11x-6} = \sqrt{4x+5} + \sqrt{x-1}$$

সমাধান: $\sqrt{11x-6} = \sqrt{4x+5} + \sqrt{x-1}$
 বা, $(\sqrt{11x-6})^2 = (\sqrt{4x+5} + \sqrt{x-1})^2$ [বর্গ করে]
 বা, $11x-6 = (\sqrt{4x+5})^2 + (\sqrt{x-1})^2 + 2\sqrt{4x+5} \cdot \sqrt{x-1}$
 বা, $11x-6 = 4x+5 + x-1 + 2\sqrt{(4x+5)(x-1)}$
 বা, $11x-6 = 5x+4 + 2\sqrt{4x^2-4x+5x-5}$
 বা, $11x-6-5x-4 = 2\sqrt{4x^2+x-5}$
 বা, $6x-10 = 2\sqrt{4x^2+x-5}$
 বা, $3x-5 = \sqrt{4x^2+x-5}$ [2 দ্বারা ভাগ করে]
 বা, $(3x-5)^2 = (\sqrt{4x^2+x-5})^2$ [বর্গ করে]
 বা, $9x^2-30x+25 = 4x^2+x-5$
 বা, $9x^2-30x+25-4x^2-x+5 = 0$
 বা, $5x^2-31x+30 = 0$
 বা, $5x^2-6x-25x+30 = 0$
 বা, $x(5x-6)-5(5x-6) = 0$
 বা, $(5x-6)(x-5) = 0$
 $\therefore 5x-6 = 0$ অথবা, $x-5 = 0$

$$\text{বা, } x = \frac{6}{5} \quad \text{বা, } x = 5$$

শুদ্ধি পরীক্ষা:

$$x = \frac{6}{5} \text{ হলে,}$$

$$\text{বামপক্ষ} = \sqrt{11 \times \frac{6}{5} - 6} = \sqrt{\frac{66-30}{5}} = \sqrt{\frac{36}{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} \text{ডানপক্ষ} &= \sqrt{4 \times \frac{6}{5} + 5} + \sqrt{\frac{6}{5} - 1} \\ &= \sqrt{\frac{24}{5} + 5} + \sqrt{\frac{6-5}{5}} \\ &= \sqrt{\frac{24+25}{5}} + \sqrt{\frac{1}{5}} = \sqrt{\frac{49}{5}} + \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{7}{\sqrt{5}} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}} \end{aligned}$$

\therefore বামপক্ষ \neq ডানপক্ষ

অতএব, $x = \frac{6}{5}$ প্রদত্ত সমীকরণের মূল নয়।

আবার, $x = 5$ হলে,

$$\text{বামপক্ষ} = \sqrt{11 \times 5 - 6} = \sqrt{55-6} = \sqrt{49} = 7$$

$$\text{ডানপক্ষ} = \sqrt{4 \times 5 + 5} + \sqrt{5-1} = \sqrt{25} + \sqrt{4} = 5 + 2 = 7$$

অতএব, $x = 5$ প্রদত্ত সমীকরণের একটি মূল।

\therefore নির্ণেয় সমাধান $x = 5$

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

$\sqrt{11x-6} = \sqrt{4x+5} + \sqrt{x-1}$
 বা, $\sqrt{11x-6} - \sqrt{x-1} = \sqrt{4x+5}$
 বা, $(\sqrt{11x-6} - \sqrt{x-1})^2 = (\sqrt{4x+5})^2$
 বা, $(\sqrt{11x-6})^2 + (\sqrt{x-1})^2 - 2\sqrt{(11x-6)(x-1)} = 4x+5$
 বা, $11x-6 + x-1 - 2\sqrt{11x^2-11x-6x+6} = 4x+5$
 বা, $12x-7-4x-5 = 2\sqrt{11x^2-17x+6}$
 বা, $8x-12 = 2\sqrt{11x^2-17x+6}$
 বা, $4x-6 = \sqrt{11x^2-17x+6}$
 বা, $(4x-6)^2 = (\sqrt{11x^2-17x+6})^2$
 বা, $16x^2+36-48x = 11x^2-17x+6$
 বা, $16x^2+36-48x-11x^2+17x-6 = 0$
 বা, $5x^2-31x+30 = 0$
 অতঃপর ১ম পদ্ধতির মতো সমাধান কর।

$$\text{৬} \quad \sqrt{x^2-8} + \sqrt{x^2-14} = 6$$

সমাধান: $\sqrt{x^2-8} + \sqrt{x^2-14} = 6$

$$\text{বা, } \sqrt{x^2-8} = 6 - \sqrt{x^2-14}$$

$$\text{বা, } x^2-8 = 36 - 12\sqrt{x^2-14} + x^2-14 \quad ; \text{ [বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } 12\sqrt{x^2-14} = 30$$

$$\text{বা, } 2\sqrt{x^2-14} = 5$$

$$\text{বা, } 4(x^2-14) = 25 \quad ; \text{ [পুনরায় বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } 4x^2-56 = 25$$

$$\text{বা, } 4x^2 = 81$$

$$\text{বা, } x^2 = \frac{81}{4}$$

$$\therefore x = \pm \frac{9}{2}$$

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

$$\sqrt{x^2-8} + \sqrt{x^2-14} = 6$$

$$\text{বা, } (\sqrt{x^2-8} + \sqrt{x^2-14})^2 = (6)^2 \quad \text{[বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } (\sqrt{x^2-8})^2 + 2\sqrt{x^2-8} \cdot \sqrt{x^2-14} + (\sqrt{x^2-14})^2 = 36$$

$$\text{বা, } x^2-8 + 2\sqrt{(x^2-8)(x^2-14)} + x^2-14 = 36$$

$$\text{বা, } 2\sqrt{x^4-14x^2-8x^2+112} + 2x^2-22 = 36$$

$$\text{বা, } \sqrt{x^4-22x^2+112} + x^2-11 = 18 \quad \text{[2 দ্বারা ভাগ করে]}$$

$$\text{বা, } \sqrt{x^4-22x^2+112} = 18 - x^2 + 11$$

$$\text{বা, } \sqrt{x^4-22x^2+112} = 29 - x^2$$

$$\text{বা, } (\sqrt{x^4-22x^2+112})^2 = (29 - x^2)^2 \quad \text{[পুনরায় বর্গ করে]}$$

$$\text{বা, } x^4-22x^2+112 = (29)^2 - 2 \cdot 29 \cdot x^2 + (x^2)^2$$

$$\text{বা, } x^4-22x^2+112 = 841 - 58x^2 + x^4$$

$$\text{বা, } x^4-22x^2+58x^2-x^4 = 841-112$$

$$\text{বা, } 36x^2 = 729$$

$$\text{বা, } x^2 = \frac{729}{36} = \frac{81}{4}$$

$$\text{বা, } x = \pm \sqrt{\frac{81}{4}}$$

$$\therefore x = \pm \frac{9}{2}$$

শুদ্ধি পরীক্ষা:

$$x = \frac{9}{2} \text{ হলে,}$$

$$\text{বামপক্ষ} = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - 8} + \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - 14}$$

$$= \sqrt{\frac{81}{4} - 8} + \sqrt{\frac{81}{4} - 14}$$

$$= \sqrt{\frac{81-32}{4}} + \sqrt{\frac{81-56}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{49}{4}} + \sqrt{\frac{25}{4}}$$

$$= \frac{7}{2} + \frac{5}{2}$$

$$= \frac{7+5}{2} = \frac{12}{2} = 6 = \text{ডানপক্ষ}$$

$$x = -\frac{9}{2} \text{ হলে,}$$

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= \sqrt{\left(\frac{-9}{2}\right)^2 - 8} + \sqrt{\left(\frac{-9}{2}\right)^2 - 14} \\ &= \sqrt{\frac{81}{4} - 8} + \sqrt{\frac{81}{4} - 14} \\ &= \sqrt{\frac{81-32}{4}} + \sqrt{\frac{81-56}{4}} \\ &= \sqrt{\frac{49}{4}} + \sqrt{\frac{25}{4}} \\ &= \frac{7}{2} + \frac{5}{2} \\ &= \frac{7+5}{2} = \frac{12}{2} = 6 = \text{ডানপক্ষ} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান } x = \pm \frac{9}{2}$$

$$\boxed{9} \quad \sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{x^2 - 6x + 6} = 1$$

$$\text{সমাধান: } \sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{x^2 - 6x + 6} = 1$$

এখন $x^2 - 6x = y$ ধরলে প্রদত্ত সমীকরণ হবে

$$\begin{aligned} \sqrt{y+9} - \sqrt{y+6} &= 1 \\ \text{বা, } \sqrt{y+9} &= 1 + \sqrt{y+6} \\ \text{বা, } (\sqrt{y+9})^2 &= (1 + \sqrt{y+6})^2 \quad [\text{বর্গ করে}] \\ \text{বা, } y+9 &= 1 + 2 \cdot 1 \cdot \sqrt{y+6} + (\sqrt{y+6})^2 \\ \text{বা, } -2\sqrt{y+6} &= 1 + y + 6 - y - 9 \\ \text{বা, } -2\sqrt{y+6} &= -2 \\ \text{বা, } \sqrt{y+6} &= 1 \quad [\text{উভয় পক্ষকে } -2 \text{ দ্বারা ভাগ করে}] \\ \text{বা, } (\sqrt{y+6})^2 &= (1)^2 \quad [\text{বর্গ করে}] \\ \text{বা, } y+6 &= 1 \\ \text{বা, } y+5 &= 0 \\ \text{বা, } x^2 - 6x + 5 &= 0 \quad [y \text{ এর মান বসিয়ে}] \\ \text{বা, } x^2 - 5x - x + 5 &= 0 \\ \text{বা, } x(x-5) - 1(x-5) &= 0 \\ \text{বা, } (x-1)(x-5) &= 0 \\ \therefore x-1 &= 0 \quad \text{অথবা, } x-5 = 0 \\ \text{বা, } x &= 1 \quad \text{বা, } x = 5 \end{aligned}$$

শুদ্ধি পরীক্ষা:

$$x = 5 \text{ হলে,}$$

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= \sqrt{5^2 - 6 \cdot 5 + 9} - \sqrt{5^2 - 6 \cdot 5 + 6} \\ &= \sqrt{25 - 30 + 9} - \sqrt{25 - 30 + 6} \\ &= \sqrt{4} - \sqrt{1} = 2 - 1 = 1 = \text{ডানপক্ষ} \end{aligned}$$

আবার, $x = 1$ হলে,

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= \sqrt{1^2 - 6 \cdot 1 + 9} - \sqrt{1^2 - 6 \cdot 1 + 6} \\ &= \sqrt{1 - 6 + 9} - \sqrt{1 - 6 + 6} \\ &= \sqrt{4} - \sqrt{1} = 2 - 1 = 1 = \text{ডানপক্ষ} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান } x = 5, 1$$

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

$$\begin{aligned} \sqrt{x^2 - 6x + 9} - \sqrt{x^2 - 6x + 6} &= 1 \\ \text{বা, } \sqrt{x^2 - 6x + 9} &= 1 + \sqrt{x^2 - 6x + 6} \\ \text{বা, } (\sqrt{x^2 - 6x + 9})^2 &= (1 + \sqrt{x^2 - 6x + 6})^2 \\ \text{বা, } x^2 - 6x + 9 &= 1 + 2\sqrt{x^2 - 6x + 6} + x^2 - 6x + 6 \\ \text{বা, } x^2 - 6x + 9 - 1 - x^2 + 6x - 6 &= 2\sqrt{x^2 - 6x + 6} \\ \text{বা, } 2 &= 2\sqrt{x^2 - 6x + 6} \\ \text{বা, } 1 &= \sqrt{x^2 - 6x + 6} \end{aligned}$$

$$\text{বা, } 1^2 = (\sqrt{x^2 - 6x + 6})^2$$

$$\text{বা, } x^2 - 6x + 6 = 1$$

$$\text{বা, } x^2 - 6x + 6 - 1 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 - 6x + 5 = 0$$

$$\text{বা, } x^2 - 5x - x + 5 = 0$$

$$\text{বা, } x(x-5) - 1(x-5) = 0$$

$$\text{বা, } (x-1)(x-5) = 0$$

$$\therefore x-1 = 0 \quad \text{অথবা, } x-5 = 0$$

$$\text{বা, } x = 1 \quad \text{বা, } x = 5$$

শুদ্ধি পরীক্ষা: (১ম পদ্ধতিতে বর্ণিত)

$$\boxed{8} \quad \sqrt{x-2} - \sqrt{x-9} = 1$$

$$\text{সমাধান: } \sqrt{x-2} - \sqrt{x-9} = 1$$

$$\text{বা, } (\sqrt{x-2} - \sqrt{x-9})^2 = (1)^2 \quad [\text{বর্গ করে}]$$

$$\text{বা, } (\sqrt{x-2})^2 - 2\sqrt{x-2}\sqrt{x-9} + (\sqrt{x-9})^2 = 1$$

$$\text{বা, } x-2 - 2\sqrt{(x-2)(x-9)} + x-9 = 1$$

$$\text{বা, } 2x - 11 - 2\sqrt{(x-2)(x-9)} = 1$$

$$\text{বা, } -2\sqrt{(x-2)(x-9)} = 1 - 2x + 11$$

$$\text{বা, } -2\sqrt{x^2 - 11x + 18} = -2x + 12$$

$$\text{বা, } \sqrt{x^2 - 11x + 18} = x - 6 \quad [-2 \text{ দ্বারা ভাগ করে}]$$

$$\text{বা, } (\sqrt{x^2 - 11x + 18})^2 = (x-6)^2 \quad [\text{বর্গ করে}]$$

$$\text{বা, } x^2 - 11x + 18 = x^2 - 2 \cdot x \cdot 6 + (6)^2$$

$$\text{বা, } x^2 - 11x + 18 = x^2 - 12x + 36$$

$$\text{বা, } x^2 - 11x - x^2 + 12x = 36 - 18$$

$$\therefore x = 18$$

শুদ্ধি পরীক্ষা:

$$x = 18 \text{ হলে,}$$

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= \sqrt{x-2} - \sqrt{x-9} \\ &= \sqrt{18-2} - \sqrt{18-9} \\ &= \sqrt{16} - \sqrt{9} \\ &= 4 - 3 \\ &= 1 = \text{ডানপক্ষ} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান } x = 18$$

$$\boxed{9} \quad 6\sqrt{\frac{2x}{x-1}} + 5\sqrt{\frac{x-1}{2x}} = 13$$

$$\text{সমাধান: } 6\sqrt{\frac{2x}{x-1}} + 5\sqrt{\frac{x-1}{2x}} = 13$$

$$\text{বা, } 6\sqrt{\frac{2x}{x-1}} + 5\sqrt{\frac{1}{\frac{2x}{x-1}}} = 13$$

$$\text{এখন } \frac{2x}{x-1} = y^2 \text{ ধরলে প্রদত্ত সমীকরণ হবে,}$$

$$6\sqrt{y^2} + 5\sqrt{\frac{1}{y^2}} = 13$$

$$\text{বা, } 6y + \frac{5}{y} = 13$$

$$\text{বা, } 6y^2 + 5 = 13y$$

$$\text{বা, } 6y^2 - 13y + 5 = 0$$

$$\text{বা, } 6y^2 - 10y - 3y + 5 = 0$$

$$\text{বা, } 2y(3y-5) - 1(3y-5) = 0$$

$$\text{বা, } (3y-5)(2y-1) = 0$$

$$\therefore 3y-5 = 0 \quad \text{অথবা, } 2y-1 = 0$$

$$\text{বা, } y = \frac{5}{3} \quad \text{বা, } y = \frac{1}{2}$$

$$\text{যখন, } y = \frac{5}{3}$$

$$\text{বা, } y^2 = \frac{25}{9}$$

$$\text{বা, } \frac{2x}{x-1} = \frac{25}{9}$$

$$\text{বা, } 25x - 25 = 18x$$

$$\text{বা, } 7x = 25$$

$$\therefore x = \frac{25}{7}$$

শুদ্ধি পরীক্ষা:

$$x = \frac{25}{7} \text{ হলে, বামপক্ষ}$$

$$= 6\sqrt{\frac{2 \cdot \frac{25}{7}}{\frac{25}{7}-1}} + 5\sqrt{\frac{\frac{25}{7}-1}{2 \cdot \frac{25}{7}}}$$

$$= 6\sqrt{\frac{50}{25-7}} + 5\sqrt{\frac{25-7}{50}}$$

$$= 6\sqrt{\frac{50}{18}} + 5\sqrt{\frac{18}{50}}$$

$$= 6\sqrt{\frac{25}{9}} + 5\sqrt{\frac{9}{25}}$$

$$= \frac{6 \cdot 5}{3} + \frac{5 \cdot 3}{5}$$

$$= 13 = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান } x = \frac{25}{7}, -\frac{1}{7}$$

$$\text{আবার, যখন } y = \frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } y^2 = \frac{1}{4}$$

$$\text{বা, } \frac{2x}{x-1} = \frac{1}{4}$$

$$\text{বা, } 8x = x-1$$

$$\text{বা, } 7x = -1$$

$$\therefore x = -\frac{1}{7}$$

$$\text{আবার, } x = -\frac{1}{7} \text{ হলে, বামপক্ষ}$$

$$= 6\sqrt{\frac{2\left(-\frac{1}{7}\right)}{-\frac{1}{7}-1}} + 5\sqrt{\frac{-\frac{1}{7}-1}{2\left(-\frac{1}{7}\right)}}$$

$$= 6\sqrt{\frac{-2}{-\frac{8}{7}}} + 5\sqrt{\frac{-\frac{8}{7}}{-2}}$$

$$= 6\sqrt{\frac{1}{4}} + 5\sqrt{4}$$

$$= \frac{6}{2} + 5 \cdot 2$$

$$= 3 + 10$$

$$= 13 = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\boxed{50} \quad \sqrt{\frac{x-1}{3x+2}} + 2\sqrt{\frac{3x+2}{x-1}} = 3$$

$$\text{সমাধান: } \sqrt{\frac{x-1}{3x+2}} + 2\sqrt{\frac{3x+2}{x-1}} = 3$$

$$\text{বা, } \sqrt{\frac{x-1}{3x+2}} + 2\sqrt{\frac{1}{\frac{x-1}{3x+2}}} = 3$$

$$\text{এখন, } \frac{x-1}{3x+2} = y^2 \text{ ধরলে প্রদত্ত সমীকরণ হবে}$$

$$\sqrt{y^2} + 2\sqrt{\frac{1}{y^2}} = 3$$

$$\text{বা, } y + \frac{2}{y} = 3$$

$$\text{বা, } y^2 + 2 = 3y$$

$$\text{বা, } y^2 - 3y + 2 = 0$$

$$\text{বা, } y^2 - 2y - y + 2 = 0$$

$$\text{বা, } y(y-2) - 1(y-2) = 0$$

$$\text{বা, } (y-1)(y-2) = 0$$

$$\therefore y-1 = 0 \quad \text{অথবা, } y-2 = 0$$

$$\text{বা, } y = 1$$

$$\text{বা, } y = 2$$

$$\text{যখন, } y = 2$$

$$\text{বা, } y^2 = 4$$

$$\text{বা, } \frac{x-1}{3x+2} = 4$$

$$\text{বা, } 12x + 8 = x - 1$$

$$\text{বা, } 11x = -9$$

$$\therefore x = -\frac{9}{11}$$

শুদ্ধি পরীক্ষা:

$$x = -\frac{9}{11} \text{ হলে,}$$

$$\text{বামপক্ষ} = \sqrt{\frac{-\frac{9}{11}-1}{3\left(-\frac{9}{11}\right)+2}} + 2\sqrt{\frac{3\left(-\frac{9}{11}\right)+2}{-\frac{9}{11}-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{-9-11}{-27+22}} + 2\sqrt{\frac{-27+22}{-9-11}}$$

$$= \sqrt{\frac{-20}{-5}} + 2\sqrt{\frac{-5}{-20}}$$

$$= \sqrt{-\frac{20}{11} \times -\frac{11}{5}} + 2\sqrt{-\frac{5}{11} \times \left(-\frac{11}{20}\right)}$$

$$= \sqrt{4} + 2\sqrt{\frac{1}{4}} = 2 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 2 + 1 = 3 = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\text{অতএব, } x = -\frac{9}{11} \text{ প্রদত্ত সমীকরণের একটি মূল।}$$

$$\text{আবার, } x = -\frac{3}{2} \text{ হলে,}$$

$$\text{বামপক্ষ} = \sqrt{\frac{-\frac{3}{2}-1}{3\left(-\frac{3}{2}\right)+2}} + 2\sqrt{\frac{3\left(-\frac{3}{2}\right)+2}{-\frac{3}{2}-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{-3-2}{-9+4}} + 2\sqrt{\frac{-9+4}{-3-2}}$$

$$= \sqrt{\frac{-5}{-2}} + 2\sqrt{\frac{-2}{-5}}$$

$$= \sqrt{-\frac{5}{2} \times -\frac{2}{5}} + 2\sqrt{-\frac{5}{2} \times -\frac{2}{5}}$$

$$= 1 + 2 \cdot 1 = 3 = \text{ডানপক্ষ}$$

$$\text{অতএব, } x = -\frac{3}{2} \text{ প্রদত্ত সমীকরণের একটি মূল।}$$

$$\therefore \text{নির্ণেয় সমাধান } x = -\frac{9}{11}, -\frac{3}{2}$$



পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

কাজ

পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১০০

$p = \sqrt{\frac{x}{x+16}}$ ধরে $\sqrt{\frac{x}{x+16}} + \sqrt{\frac{x+16}{x}} = \frac{25}{12}$ সমীকরণটির সমাধান করে শুদ্ধি পরীক্ষা কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $p = \sqrt{\frac{x}{x+16}}$

সুতরাং $\frac{1}{p} = \sqrt{\frac{x}{x+16}}$; [বিপরীতকরণ]

এখন প্রদত্ত সমীকরণ, $\sqrt{\frac{x}{x+16}} + \sqrt{\frac{x+16}{x}} = \frac{25}{12}$

$\therefore p + \frac{1}{p} = \frac{25}{12}$ [p এবং $\frac{1}{p}$ এর মান বসিয়ে]

বা, $p^2 + 1 = \frac{25}{12}p$

বা, $12p^2 + 12 = 25p$

বা, $12p^2 - 25p + 12 = 0$

বা, $12p^2 - 16p - 9p + 12 = 0$

বা, $4p(3p - 4) - 3(3p - 4) = 0$

বা, $(3p - 4)(4p - 3) = 0$

$\therefore 3p - 4 = 0$

অথবা, $4p - 3 = 0$

বা, $3p = 4$

বা, $4p = 3$

বা, $p = \frac{4}{3}$

বা, $p = \frac{3}{4}$

বা, $\sqrt{\frac{x}{x+16}} = \frac{4}{3}$

বা, $\sqrt{\frac{x}{x+16}} = \frac{3}{4}$

বা, $\frac{x}{x+16} = \frac{16}{9}$

বা, $\frac{x}{x+16} = \frac{9}{16}$

বা, $9x = 16x + 256$

বা, $16x = 9x + 144$

বা, $9x - 16x = 256$

বা, $16x - 9x = 144$

বা, $-7x = 256$

বা, $7x = 144$

$\therefore x = -\frac{256}{7}$

$\therefore x = \frac{144}{7}$

শুদ্ধি পরীক্ষা:

$x = -\frac{256}{7}$ হলে,

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= \sqrt{\frac{-256}{7}} + \sqrt{\frac{-256}{7} + 16} \\ &= \sqrt{\frac{-256}{7}} + \sqrt{\frac{-256 + 112}{7}} \\ &= \sqrt{\frac{-256}{7}} + \sqrt{\frac{-144}{7}} \\ &= \sqrt{\frac{-256}{7}} + \sqrt{\frac{-144}{7}} = \sqrt{\frac{256}{144}} + \sqrt{\frac{144}{256}} \\ &= \frac{12}{16} + \frac{16}{12} = \frac{64 + 36}{48} = \frac{100}{48} = \frac{25}{12} = \text{ডানপক্ষ} \end{aligned}$$

আবার, $x = \frac{144}{7}$ হলে,

$$\begin{aligned} \text{বামপক্ষ} &= \sqrt{\frac{144}{7}} + \sqrt{\frac{144}{7} + 16} \\ &= \sqrt{\frac{144}{7}} + \sqrt{\frac{144 + 112}{7}} \\ &= \sqrt{\frac{144}{7}} + \sqrt{\frac{256}{7}} \\ &= \sqrt{\frac{144}{256}} + \sqrt{\frac{256}{144}} \\ &= \frac{12}{16} + \frac{16}{12} \\ &= \frac{36 + 64}{48} \\ &= \frac{100}{48} = \frac{25}{12} = \text{ডানপক্ষ} \end{aligned}$$

\therefore নির্ণেয় সমাধান $x = -\frac{256}{7}, \frac{144}{7}$ (Ans.)