অনুশীলনী - ৮.৫

অনুশীলনীর সমাধান

১ **কোন বৃত্তের অধিচাপে অন্তর্লিখিত কোণ -**

(ক) সূক্ষ্মকোণ (খ) স্থূলকোণ (গ) সমকোণ (ঘ) পূরককোণ

উত্তর: (ক)

ব্যাখ্যা: কোনো বৃত্তের অধিচাপে অন্তর্লিখিত কোণ সূক্ষ্মকোণ। [*Ref:* অনুসিদ্ধান্ত-২, পৃষ্ঠা-১৩৯]

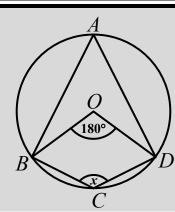
২ ***O* কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তে *x* এর মান কত?**

(ক) $126°$

(খ) $108°$

(গ) $72°$

(ঘ) $54°$



উত্তর: (ক)

ব্যাখ্যা: চিত্রে, BD চাপের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle BOD$ এবং বৃত্তস্থ $\angle BAD$

$\therefore \angle BOD = 2\angle BAD = 2\angle A$

বা, $108° = 2\angle A$

$\therefore \angle A = \dfrac{108°}{2} = 54°$

আবার, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে $ABCD$ অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ

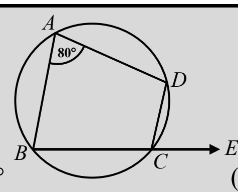
$\therefore \angle A + \angle C = 180°$ [বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি $180°$ (*Ref:* উপপাদ্য-৭, পৃষ্ঠা: ১৪৭)]

বা, $54° + x = 180°$

বা, $x = 180° - 54°$

$\therefore x = 126°$

৩ **পাশের চিত্রে $\dfrac{1}{2}\angle ECD$ = কত ডিগ্রী?**



(ক) $40°$ (খ) $50°$ (গ) $80°$ (ঘ) $100°$

উত্তর: (ক)

ব্যাখ্যা: চিত্রে $ABCD$ চতুর্ভুজটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত

$\therefore \angle BAD + \angle BCD = 180°$

বা, $80° + \angle BCD = 180°$

বা, $\angle BCD = 180° - 80° = 100°$

আবার, চিত্রানুসারে, $\angle BCD + \angle ECD = 180° = 1$ সমকোণ

বা, $100° + \angle ECD = 180°$

বা, $\angle ECD = 180° - 100°$

বা, $\angle ECD = 80°$

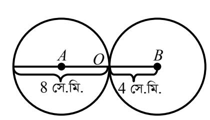
$\therefore \dfrac{1}{2}\angle ECD = 40°$

৪ **দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করে। এদের একটির ব্যাস 8 সে.মি. এবং অপরটির ব্যাসার্ধ 4 সে.মি. হলে, এদের কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব কত সে.মি. হবে।**

(ক) 0 (খ) 4 (গ) 8 (ঘ) 12

উত্তর: (গ)

ব্যাখ্যা: বর্ণনানুসারে চিত্রটি হবে-



তাহলে কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যবর্তী দূরত্ব, $AB = OA + OB = \left(\dfrac{8}{2} + 4\right) = 8$ সে.মি.

৫ ***O* কেন্দ্র বিশিষ্ট কোনো বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু *P* থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক *PQ* ও *PR* টানা হলে ΔPQR হবে -**

i. সমবাহু

ii. সমদ্বিবাহু

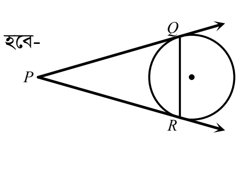
iii. সমকোণী

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i (খ) i ও ii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: (ক)

ব্যাখ্যা: তথ্যানুসারে চিত্রটি হবে-



এখানে, $PQ = PR$ [$\because$ কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের দূরত্ব সমান (*Ref:* উপপাদ্য-২৬, পৃষ্ঠা: ১৬৫)]

$\therefore \Delta PQR$ সমদ্বিবাহু

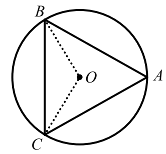
উল্লেখ্য যে, ΔPQR সমবাহু কিংবা সমকোণী এ ব্যাপারে কোনো সুনির্দিষ্ট তথ্য নেই।

৬ *ABC* **সমবাহু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O হলে, $\angle BOC$ = কত ডিগ্রী?**

(ক) $30°$ (খ) $60°$ (গ) $90°$ (ঘ) $120°$

উত্তর: (ঘ)

ব্যাখ্যা: *ABC* সমবাহু ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র *O* হলে চিত্রটি হবে-



এখন, *B*, *O* ও *C*, *O* যোগ করি।

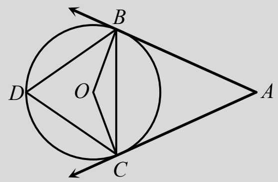
আমরা পাই, *BC* চাপের দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle BOC$ এবং বৃত্তস্থ $\angle BAC$

$\therefore \angle BOC = 2 \times \angle BAC$

$= 2 \times 60°$ [$\because \Delta ABC$ সমবাহু]

$= 120°$

■



AB ও *AC* রেখাদ্বয় *BCD* বৃত্তের স্পর্শক। বৃত্তের কেন্দ্র *O* এবং $\angle BAC = 60°$**এই তথ্যের আলোকে (৭-৮) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:**

৭ $\angle BOC$ **এর মান কত?**

(ক) $300°$ (খ) $270°$ (গ) $120°$ (ঘ) $90°$

উত্তর: (গ)

ব্যাখ্যা: *O* কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে *AB* ও *AC* স্পর্শক।

$\therefore \angle OCA = 90°$ এবং $\angle OBA = 90°$ [$\because OC \perp AC$ এবং $OB \perp AB$]

এখন, *OBAC* চতুর্ভুজে $\angle OBA + \angle OCA = 90° + 90° = 180°$

তাহলে, *OABC* চতুর্ভুজে অপর দুই কোণের সমষ্টি $180°$

অর্থাৎ $\angle BOC + \angle BAC = 180°$

বা, $\angle BOC + 60° = 180°$

$\therefore \angle BOC = 180° - 60° = 120°$

৮ ***D*, *BDC* চাপের মধ্যবিন্দু হলে-**

i. $\angle BDC = \angle BAC$

ii. $\angle BAC = \dfrac{1}{2} \angle BOC$

iii. $\angle BOC = \angle DBC + \angle BCD$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: (ঘ)

ব্যাখ্যা: *BC* চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle BOC$ এবং বৃত্তস্থ $\angle BDC$

$\therefore \angle BOC = 2\angle BDC$;

[বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

বা, $\angle BDC = \dfrac{\angle BOC}{2} = \dfrac{120°}{2} = 60°$ [৭নং হতে $\angle BOC = 120°$ বসিয়ে]

$\therefore \angle BDC = \angle BAC = 60°$ [(i) নং সঠিক]

আবার, ৭নং হতে পাই, $\angle BOC = 120°$

$\therefore \angle BAC = \dfrac{1}{2} \times \angle BOC = \dfrac{1}{2} \times 120° = 60°$ **[(ii) নং সঠিক]**

D, *BDC* চাপের মধ্যবিন্দু হলে পাই, চাপ *BD* = চাপ *CD*

$\therefore$ জ্যা *BD* = জ্যা *CD* ; [বৃত্তের সমান সমান চাপ সমান জ্যা ছিন্ন করে]

আবার, ΔBCD-এ $\angle BDC = 60°$ এবং $BD = CD$;

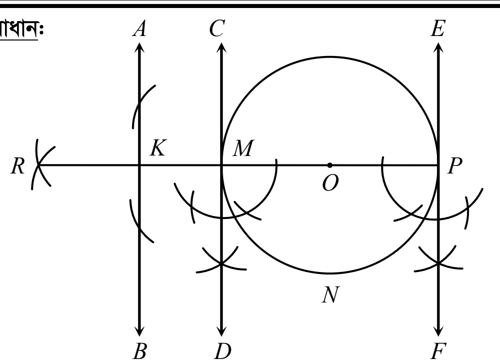
$\therefore \angle BCD = \angle CBD$

$\therefore \Delta BCD$ সমবাহু যার $\angle DBC + \angle BCD = 60° + 60° = 120°$

$\therefore \angle BOC = \angle DBC + \angle BCD$ [$\because \angle BOC = 120°$] **[(iii) নং সঠিক]**

৯ **কোনো বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁক যেন তা নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল হয়।**

সমাধান:



সাধারণ নির্বচন: কোনো বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁকতে হবে, যেন তা কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল হয়।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, *O* কেন্দ্র বিশিষ্ট *MNP* একটি বৃত্ত এবং *AB* একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। *MNP* বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁকতে হবে, যা *AB* সরলরেখার সমান্তরাল হবে।

অঙ্কন:

(১) *O* বিন্দু থেকে *AB* এর উপর *RO* লম্ব আঁকি। *OR*, *AB* রেখাকে *K* বিন্দুতে এবং বৃত্তকে *M* বিন্দুতে ছেদ করে।

(২) *RO* কে বর্ধিত করলে তা বৃত্তটির *P* বিন্দুর সাথে ছেদ করে।

(৩) *MP* রেখার উপর *M* ও *P* বিন্দুতে যথাক্রমে *CD* ও *EF* লম্ব টানি। তাহলে, *CD* বা *EF*-ই নির্ণেয় স্পর্শক হবে।

প্রমাণ: *CD* এবং *EF* যথাক্রমে *MP* এর *M* ও *P* বিন্দুতে লম্ব।

সুতরাং *CD* এবং *EF* উভয়ই যথাক্রমে *M* ও *P* বিন্দুতে বৃত্তের দুটি স্পর্শক।

কিন্তু অঙ্কনানুসারে, $\angle OMD = \angle MKB$ = এক সমকোণ। কিন্তু তারা অনুরূপ কোণ।

$\therefore CD \parallel AB$

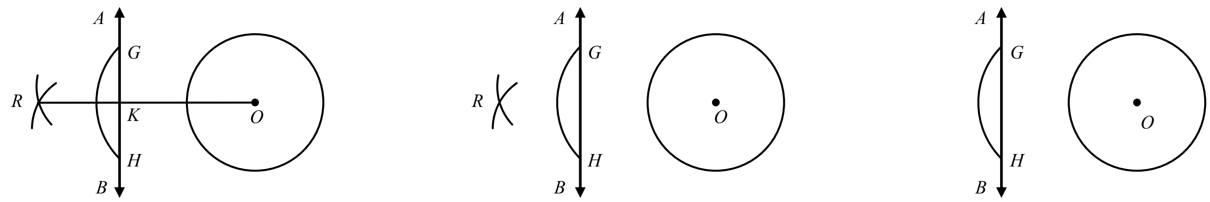
আবার, $\angle OPE = \angle OKB$ = এক সমকোণ। কিন্তু তারা একান্তর কোণ।

$\therefore EF \parallel AB$

অর্থাৎ, *CD* এবং *EF* স্পর্শকদ্বয় উভয়ই *AB* রেখার সমান্তরাল।

অতএব *CD* বা *EF*-ই নির্ণেয় স্পর্শক। **(প্রমাণিত)**

লক্ষণীয়: কেন্দ্র O বিন্দু থেকে AB রেখার ওপর লম্ব অঙ্কন পদ্ধতি:



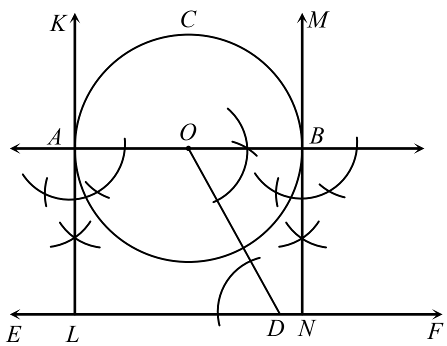
O, R যোগ করি। যা বৃত্তকে K বিন্দুতে ছেদ করেছে। $\therefore$ OK সরলরেখাই হলো AB এর ওপর লম্ব সরলরেখা।

G ও H কে কেন্দ্র করে GH চাপের অর্ধেকের বেশি ব্যাসার্ধ নিয়ে GH এর একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপদ্বয় R বিন্দুতে ছেদ করে।

O কে কেন্দ্র করে AB রেখার ওপর বৃত্তচাপ আঁকি যা AB রেখা G ও H বিন্দুতে ছেদ করে।

১০ কোনো বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁক যেন তা নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর লম্ব হয়।

সমাধান:



সাধারণ নির্বচন: কোন বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁকতে হবে, যেন তা কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার উপর লম্ব হয়।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত। EF একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। ABC বৃত্তে এরূপ একটি স্পর্শক আঁকতে হবে, যা নির্দিষ্ট সরলরেখা EF এর উপর লম্ব।

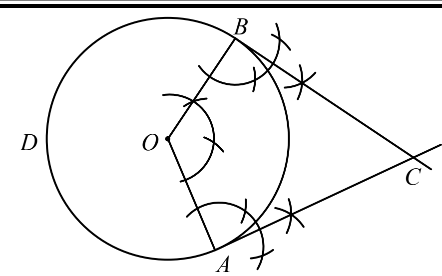
অঙ্কন:

(১) EF রেখার উপর যেকোনো বিন্দু D নেই। O, D যোগ করি।
(২) OD রেখার O বিন্দুতে $\angle EDO = \angle DOB$ আঁকি। OB রশ্মি বৃত্তটিকে B বিন্দুতে ছেদ করে।
(৩) BO কে বর্ধিত করলে তা বৃত্তটিকে A বিন্দুতে ছেদ করে।
(৪) AB রেখার A ও B বিন্দুতে যথাক্রমে KL ও MN দু'টি লম্ব আঁকি।
(৫) KL ও MN লম্বদ্বয় EF কে যথাক্রমে L ও N বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে KL বা MN-ই নির্ণেয় স্পর্শক।

প্রমাণ: অঙ্কনানুসারে, $\angle EDO = \angle DOB$, কিন্তু তারা একান্তর কোণ।
$\therefore AB \parallel EF$
আবার, MN রেখা AB ও EF সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের ছেদক।
$\therefore \angle OBN = \angle BNF$ [একান্তর কোণ]
$\therefore \angle BNF = 90°$ [$\because \angle OBN = 90°$]
অর্থাৎ MN, EF এর উপর লম্ব। অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, KL, EF এর উপর লম্ব। কিন্তু MN এবং KL যথাক্রমে বৃত্তের OB এবং OA ব্যাসার্ধের উপর লম্ব।
$\therefore$ MN এবং KL উভয়ই যথাক্রমে B এবং A বিন্দুতে বৃত্তের দুটি স্পর্শক।
অতএব, MN বা KL-ই নির্ণেয় স্পর্শক। **(প্রমাণিত)**

১১ কোনো বৃত্তে এমন দুইটি স্পর্শক আঁক যেন তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° হয়।

সমাধান:



সাধারণ নির্বচন: কোনো বৃত্তে এমন দুইটি স্পর্শক আঁকতে হবে, যেন তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $60°$ হয়।

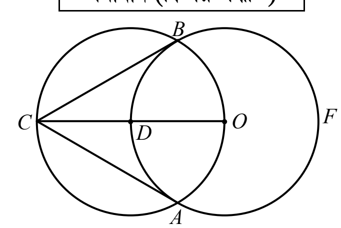
বিশেষ নির্বচন: মনে করি O কেন্দ্র বিশিষ্ট ABD একটি বৃত্ত। ABD বৃত্তে এরূপ দু'টি স্পর্শক আঁকতে হবে যাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $60°$ হয়।

অঙ্কন:

(১) OA যেকোনো ব্যাসার্ধ নিই এবং $\angle AOB = 120°$ আঁকি। OB রশ্মি বৃত্তটিকে B বিন্দুতে ছেদ করে।
(২) OB রেখার উপর B বিন্দুতে এবং OA রেখার উপর A বিন্দুতে দুইটি লম্ব আঁকি। মনে করি এই লম্ব রশ্মিদ্বয় C বিন্দুতে মিলিত হয়।
তাহলে, AC ও BC-ই নির্ণেয় স্পর্শকদ্বয়, যাদের অন্তর্ভুক্ত $\angle ACB = 60°$ হবে।

প্রমাণ: চতুর্ভুজ $OACB$ এর, $\angle AOB = 120°$; $\angle OBC = 90°$ এবং $\angle OAC = 90°$ [$\because OB \perp BC$ এবং $OA \perp AC$]
এখন, চতুর্ভুজ $OACB$-এর, $\angle ACB + \angle AOB + \angle OAC + \angle OBC = 360°$
[$\because$ চতুর্ভুজের চার কোণের সমষ্টি $360°$]
বা, $\angle ACB + 120° + 90° + 90° = 360°$
বা, $\angle ACB = 360° - 300°$
$\therefore \angle ACB = 60°$
আবার, প্রদত্ত বৃত্তের OB ব্যাসার্ধ এবং পরিধিস্থ B বিন্দুতে $BC \perp OB$
$\therefore$ BC স্পর্শক।
তদ্রুপ, প্রদত্ত বৃত্তের OA ব্যাসার্ধ এবং পরিধিস্থ A বিন্দুতে $AC \perp OA$
$\therefore$ AC স্পর্শক।
অতএব, AC ও BC-ই নির্ণেয় স্পর্শকদ্বয়, যাদের অন্তর্ভুক্ত $\angle ACB = 60°$ **(প্রমাণিত)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)



সাধারণ নির্বচন: কোনো বৃত্তে এমন দুইটি স্পর্শক আঁকতে হবে, যেন তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $60°$ হয়।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি O কেন্দ্র বিশিষ্ট ABF একটি বৃত্ত। ABF বৃত্তে এরূপ দু'টি স্পর্শক আঁকতে হবে যাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $60°$ হয়।

অঙ্কন:

(১) OD ব্যাসার্ধ নিই এবং OD কে C পর্যন্ত বর্ধিত করি যাতে $OD = CD$ হয়।
(২) OC কে ব্যাস ধরে একটি বৃত্ত অঙ্কন করি যা ABF বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।
(৩) C, A এবং C, B যোগ করি।
তাহলে CA ও CB -ই নির্ণেয় স্পর্শকদ্বয় যাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle ACB = 60°$।

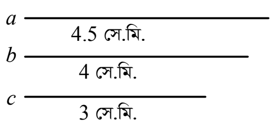
প্রমাণ: ΔOBD-এ $OD = OB = BD$ [সমান-সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
$\therefore\ \angle BOD = 60°$
অনুরূপভাবে সমবাহু ΔODA-এ $\angle AOD = 60°$
$\therefore\ \angle AOB = \angle AOD + \angle BOD = 60° + 60° = 120°$

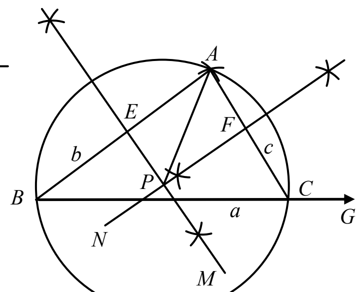
এখন, চতুর্ভুজ $AOBC$-এ $\angle A = 90°, \angle B = 90°, \angle O = 120°$
$\therefore\ \angle C = 360° - (90° + 90° + 120° = 60°)$

বি.দ্র: CA ও CB স্পর্শক এটি বোঝার জন্য সম্পাদ্য-৮ (পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৬৮) দেখে নাও।

১২ 3 সে.মি., 4 সে.মি. ও 4.5 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের পরিবৃত্ত আঁক এবং এই বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান:

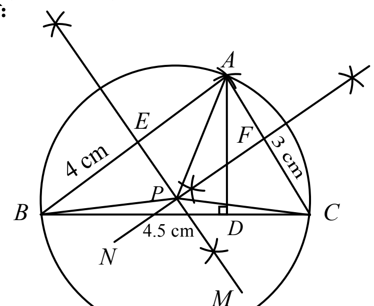




বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $a = 4.5$ সে.মি., $b = 4$ সে.মি., $c = 3$ সে.মি.। ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত অঙ্কন করতে হবে এবং পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় করতে হবে।

অঙ্কন:
(১) যেকোনো রশ্মি BG থেকে $BC = 4.5$ সে.মি. অংশ কেটে নিই।
(২) BC রেখাংশের B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে b ও c এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BC রেখাংশের একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি এবং বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে।
(৩) A, B ও A, C যোগ করে ΔABC অঙ্কন করা হলো।
(৪) AB ও AC বাহুর লম্বদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে EM ও FN রেখা আঁকি। তারা পরস্পরকে P বিন্দুতে ছেদ করে।
(৫) P কে কেন্দ্র করে PA ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকি।
তাহলে, এই বৃত্তই নির্ণেয় বৃত্ত।

বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয়:

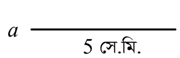


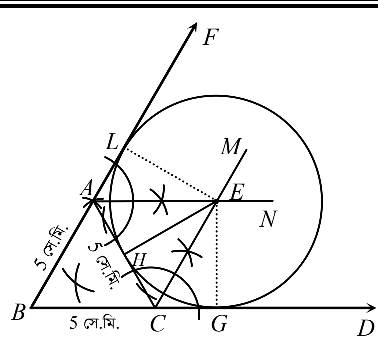
B, P ও C, P যোগ করি এবং $BC \perp AD$ আঁকি।
$s = \frac{1}{2}(4 + 3 + 4.5)$ সে.মি. $= 5.75$ সে.মি.
ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$
বা, $\frac{1}{2} \times BC \times AD = \sqrt{5.75(5.75-4)(5.75-3)(5.75-4.5)}$
বা, $\frac{1}{2} \times 4.5 \times AD = 5.88$
বা, $AD = 2.614$ সে.মি.
সমকোণী ΔABD-এ
$\therefore\ \sin \angle ABD = \frac{AD}{AB} = \frac{2.614}{4}$
বা, $\angle ABD = \sin^{-1}(0.6535)$
বা, $\angle ABD = 40.804 = \angle ABC$
বা, $\angle ABC = 40.804\quad [\because \angle ABD = \angle ABC]$
AC চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle APC = 2 \times$ বৃত্তস্থ $\angle ABC$ ... (i)
আবার, ΔAPC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং $PF \perp AC$ হওয়ায় PF রেখা $\angle APC$ কোণের সমদ্বিখণ্ডক
$\therefore\ \angle APC = 2\angle APF$ ... ... (ii)
(i) ও (ii) হতে পাই,
$2\angle APF = 2 \times \angle ABC$
বা, $\angle APF = 40.804°$
এখন সমকোণী ΔAPF-এ $\sin \angle APF = \frac{AF}{AP}$
বা, $AF = \frac{AF}{\sin \angle APF} = \frac{1.5}{\sin 40.804°} = 2.295$ সে.মি.
[$\because AC$ বাহুর লম্বদ্বিখণ্ডক AF]

প্রমাণ: $A, P; B, P$ এবং C, P যোগ করি।
P বিন্দুটি AB এর লম্বদ্বিখণ্ডকের উপর অবস্থিত।
$\therefore\ PA = PB$, একইভাবে, $PA = PC$
$\therefore\ PA = PB = PC$
সুতরাং, P কে কেন্দ্র করে PA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তটি A, B ও C বিন্দু দিয়ে যাবে।
অতএব, এই বৃত্তটিই ΔABC এর পরিবৃত্ত। **(প্রমাণিত)**

১৩ 5 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC এর AC বাহুকে স্পর্শ করিয়ে একটি বহির্বৃত্ত আঁক।

সমাধান:





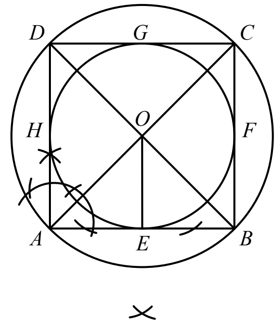
বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ যার প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 5 সে.মি.। এই ত্রিভুজের CA বাহুকে স্পর্শ করে একটি বহির্বৃত্ত আঁকতে হবে।

অঙ্কন:
(১) যেকোনো রশ্মি BD থেকে $BC = a = 5$ সে.মি. অংশ কেটে নিই।
(২) BC রেখাংশের B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে BC রেখাংশের একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি এবং বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে।
(৩) A, B ও A, C যোগ করে সমবাহু ΔABC অঙ্কন করা হলো।
(৪) BC ও BA বাহুকে যথাক্রমে D ও F পর্যন্ত বর্ধিত করি।
(৫) $\angle DCA$ এবং $\angle FAC$ এর সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে CM ও AN রশ্মি আঁকি এবং মনে করি, তারা E বিন্দুতে ছেদ করে। E থেকে AC এর উপর EH লম্ব আঁকি।
(৬) E কে কেন্দ্র করে EH এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি।
তাহলে, এই বৃত্তই নির্ণেয় বহির্বৃত্ত।

প্রমাণ: E হতে BD ও BF এর উপর যথাক্রমে EG ও EL লম্ব টানি। E বিন্দুটি $\angle DCA$ এর সমদ্বিখন্ডকের উপর অবস্থিত।
$\therefore\ EH = EG$, একইভাবে, $EH = EL$
$\therefore\ EH = EG = EL$
সুতরাং, E কে কেন্দ্র করে EH এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত H, G এবং L বিন্দু দিয়ে যাবে।
আবার, EH, EG ও EL এর একটি প্রান্তবিন্দুতে যথাক্রমে CA, CD এবং AF রেখাংশ তিনটি লম্ব।
সুতরাং, বৃত্তটি রেখাংশ তিনটিকে যথাক্রমে H, G ও L বিন্দু তিনটিতে স্পর্শ করে।
অতএব, HGL বৃত্তটিই নির্ণেয় বহির্বৃত্ত হবে। **(প্রমাণিত)**

১৪ একটি বর্গের অন্তর্বৃত্ত ও পরিবৃত্ত আঁক।

সমাধানঃ



সাধারণ নির্বচনঃ একটি বর্গের অন্তর্বৃত্ত ও পরিবৃত্ত আঁকতে হবে।

বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি, $ABCD$ একটি বর্গ। এই বর্গের অন্তর্বৃত্ত ও পরিবৃত্ত আঁকতে হবে।

অঙ্কনঃ

(১) A, C এবং B, D যোগ করি। AC ও BD কর্ণদ্বয় O বিন্দুতে ছেদ করে।

(২) O হতে AB এর উপর OE লম্ব আঁকি।

(৩) O কে কেন্দ্র করে OE এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। বৃত্তটি AB, BC, CD ও DA বাহুগুলোকে যথাক্রমে E, F, G ও H বিন্দুতে স্পর্শ করে।
তাহলে, $EFGH$-ই নির্ণেয় অন্তর্বৃত্ত।

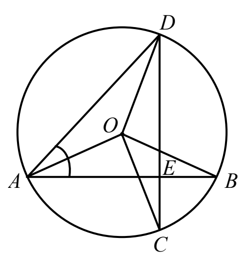
(৪) আবার O কে কেন্দ্র করে OA-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। বৃত্তটি বর্গের শীর্ষবিন্দু A, B, C ও D দিয়ে যায়। এই বৃত্তই $ABCD$ বর্গের নির্ণেয় পরিবৃত্ত।

প্রমাণঃ যেহেতু বর্গের কর্ণ ইহার কোণগুলিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং O বিন্দু হতে AB, BC, CD, DA বাহুর দূরত্ব (লম্বদূরত্ব) সমান।
যেহেতু, O কে কেন্দ্র করে OE ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকলে বৃত্তটি AB, BC, CD, DA বাহুকে স্পর্শ করবে।
অতএব, $EFGH$ ই নির্ণেয় অন্তর্বৃত্ত।
আবার, বর্গের কর্ণদ্বয় সমান এবং তারা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
সুতরাং, $OA = OB = OC = OD$
সুতরাং O কে কেন্দ্র করে OA ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত A, B, C, D বিন্দু দিয়ে যায়।
অতএব, $ABCD$-ই নির্ণেয় পরিবৃত্ত। **(প্রমাণিত)**

১৫ O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, $\angle AEC = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle AOC)$

সমাধানঃ বিশেষ নির্বচনঃ দেওয়া আছে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরে পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে। O, A; O, D; O, B; ও O, C যোগ করা হলো। প্রমাণ করতে হবে যে,

$\angle AEC = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle AOC)$



অঙ্কনঃ A, D যোগ করি।

প্রমাণঃ

ধাপ ১. বৃত্তের AC চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle AOC$ এবং বৃত্তস্থ $\angle ADC$

$\therefore \angle ADC = \frac{1}{2}\angle AOC$ [একই চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক]

ধাপ ২. আবার, বৃত্তের BD চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle BOD$ এবং বৃত্তস্থ $\angle DAB$

$\therefore \angle DAB = \frac{1}{2}\angle BOD$

ধাপ ৩. ΔADE এ, বহিঃস্থ $\angle AEC$ = বিপরীত অন্তঃস্থ $(\angle DAE + \angle ADE)$

[$\because$ ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ এর অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]

অর্থাৎ $\angle AEC = \angle DAB + \angle ADC$

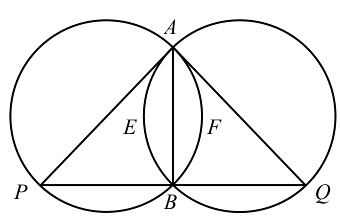
$= \frac{1}{2}\angle BOD + \frac{1}{2}\angle AOC$ [ধাপ-১ ও ধাপ-২ হতে]

$= \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle AOC)$

$\therefore \angle AEC = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle AOC)$ **(প্রমাণিত)**

১৬ দুইটি সমান ব্যাসবিশিষ্ট বৃত্তের সাধারণ জ্যা AB। B বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত কোনো সরলরেখা যদি বৃত্ত দুইটির সাথে P ও Q বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ΔPAQ সমদ্বিবাহু। [সংশোধিত]

সমাধানঃ



বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি, $APBF$ ও $AQBE$ দুইটি সমান ব্যাসবিশিষ্ট বৃত্ত। বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে। সুতরাং AB বৃত্ত দুইটির সাধারণ জ্যা। B বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত সরলরেখা বৃত্ত দুইটিকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। P, A ও Q, A যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, ΔPAQ সমদ্বিবাহু।

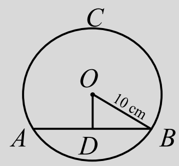
প্রমাণঃ

ধাপ ১. $\therefore$ চাপ AEB = চাপ AFB [$\because$ সমান সমান ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তে সমান জ্যা সমান সমান চাপ ছিন্ন করে]
সমান সমান চাপ AFB ও AEB এর উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণদ্বয় যথাক্রমে, $\angle APB$ এবং $\angle AQB$
সুতরাং $\angle APB = \angle AQB$ [সমান সমান ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তে সমান সমান চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান]
বা, $\angle APQ = \angle AQP$

ধাপ ২. এখন, ΔPAQ এ,
$\angle APQ = \angle AQP$
$\therefore AQ = AP$ [$\because$ ত্রিভুজের সমান সমান কোণের বিপরীত বাহুদ্বয় সমান]
সুতরাং ΔPAQ সমদ্বিবাহু। **(প্রমাণিত)**

দৃষ্টি আকর্ষণঃ পাঠ্যবইয়ে ΔOAQ ভুল ছাপা হয়েছে; ΔOAQ এর পরিবর্তে ΔPAQ হবে।

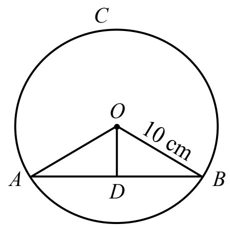
১৭ ***O*** **কেন্দ্রবিশিষ্ট** ***ABC*** **বৃত্তে জ্যা** $\boldsymbol{AB = x}$ **সে.মি.** $\boldsymbol{OD \perp AB}$**।**
পাশের চিত্র অনুযায়ী নিচের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও:
ক. বৃত্তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।
খ. দেখাও যে, $\boldsymbol{D, AB}$ **এর মধ্যবিন্দু।**
গ. $\boldsymbol{OD = \left(\frac{x}{2} - 2\right)}$ **সে.মি. হলে** $\boldsymbol{x}$ **এর মান নির্ণয় কর।**



সমাধান:

ক এখানে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $r = 10$ সে.মি. [$\because OB = 10\ cm$]
আমরা জানি, বৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গ একক
$\therefore$ বৃত্তটির ক্ষেত্রফল $= 3.1416 \times (10)^2$ বর্গ সে.মি.
$= 314.16$ বর্গ সে.মি. (প্রায়)

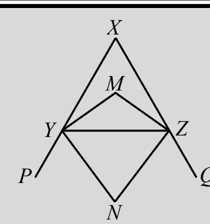
খ



মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তে জ্যা AB এবং $OD \perp AB$।
প্রমাণ করতে হবে যে, D, AB এর মধ্যবিন্দু।
অঙ্কন: O, A এবং O, B যোগ করি।
প্রমাণ:
ধাপ ১. $\angle ODA = \angle ODB =$ এক সমকোণ [$OD \perp AB$]
ধাপ ২. এখন, ΔODA ও ΔODB সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে
অতিভুজ $OA =$ অতিভুজ OB [উভয়ে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
এবং $OD = OD$ [সাধারণ বাহু]
$\therefore \Delta ODA \cong \Delta ODB$
[সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা উপপাদ্য]
অতএব, $AD = BD$
অর্থাৎ, D, AB এর মধ্যবিন্দু **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, জ্যা এর দৈর্ঘ্য, $AB = x$ সে.মি. এবং লম্বের দৈর্ঘ্য $OD = \left(\frac{x}{2} - 2\right)$ সে.মি.
$\therefore$ অর্ধ জ্যা, $BD = \frac{1}{2} AB = \frac{x}{2}$ সে.মি.
বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $OB = 10$ সে.মি.
$\therefore$ সমকোণী ΔOBD-এ $OB^2 = OD^2 + BD^2$
বা, $(10)^2 = \left(\frac{x}{2} - 2\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^2$
বা, $100 = \frac{x^2}{4} - 2.\frac{x}{2}.2 + 4 + \frac{x^2}{4}$
বা, $100 = 2 \times \frac{x^2}{4} - 2x + 4$
বা, $100 = \frac{x^2}{2} - 2x + 4$
বা, $100 = \frac{x^2 - 4x + 8}{2}$
বা, $x^2 - 4x + 8 = 200$
বা, $x^2 - 4x + 8 - 200 = 0$
বা, $x^2 - 4x - 192 = 0$
বা, $x^2 - 16x + 12x - 192 = 0$
বা, $x(x - 16) + 12(x - 16) = 0$
বা, $(x - 16)(x + 12) = 0$
$\therefore x - 16 = 0$ অথবা, $x + 12 = 0$
$x - 16 = 0$ হলে, $x = 16$
আবার, $x + 12 = 0$ হলে, $x = -12$
যেহেতু দৈর্ঘ্য ঋণাত্মক হতে পারেনা $\therefore x = 16$

১৮ **চিত্রে** $\boldsymbol{YM}$ **ও** $\boldsymbol{ZM}$ **যথাক্রমে** $\boldsymbol{\angle Y}$ **ও** $\boldsymbol{\angle Z}$ **এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক এবং** $\boldsymbol{YN}$ **ও** $\boldsymbol{ZN}$ **যথাক্রমে** $\boldsymbol{\angle Y}$ **ও** $\boldsymbol{\angle Z}$ **এর বহির্দ্বিখণ্ডক।**



ক. দেখাও যে, $\boldsymbol{\angle MYZ + \angle NYZ = 90°}$**।**
খ. প্রমাণ কর যে, $\boldsymbol{\angle YNZ = 90° - \frac{1}{2} \angle X}$**।**
গ. প্রমাণ কর যে, $\boldsymbol{Y, M, Z}$ **ও** $\boldsymbol{N}$ **বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।**

সমাধান:

ক চিত্রে YM ও ZM যথাক্রমে $\angle Y$ ও $\angle Z$ এর অন্তর্দ্বিখণ্ডক এবং YN ও ZN যথাক্রমে $\angle Y$ ও $\angle Z$ এর বহির্দ্বিখণ্ডক।
প্রমাণ:
ধাপ ১. $\angle MYZ = \frac{1}{2} \angle XYZ$ [$\because$ YM, $\angle XYZ$ এর সমদ্বিখণ্ডক]
এবং $\angle NYZ = \frac{1}{2} \angle PYZ$ [$\because$ YN, $\angle PYZ$ এর বহির্দ্বিখণ্ডক]
ধাপ ২. এখন, $\angle MYZ + \angle NYZ = \frac{1}{2} (\angle XYZ + \angle PYZ)$
বা, $\angle MYZ + \angle NYZ = \frac{1}{2} \times 180°$
[$\because \angle XYZ$ I $\angle PYZ$ একই সরলরেখায় অবস্থিত সন্নিহিত কোণ]
$\therefore \angle MYZ + \angle NYZ = 90°$ **(প্রমাণিত)**

খ **প্রমাণ:**
ধাপ ১. ΔXYZ এ বহিঃস্থ
$\angle PYZ = \angle YXZ + \angle XZY$ [ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]
এবং বহিঃস্থ $\angle QZY = \angle YXZ + \angle XYZ$
ধাপ ২. ΔNYZ-এ
$\angle YNZ + \angle NYZ + \angle NZY = 180°$
বা, $\angle YNZ + \frac{1}{2} \angle PYZ + \frac{1}{2} \angle QZY = 180°$
[$\because \angle NYZ = \frac{1}{2} \angle PYZ$ এবং $\angle NZY = \frac{1}{2} QZY$]
বা, $\angle YNZ + \frac{1}{2} (\angle PYZ + \angle QZY) = 180°$
বা, $\angle YNZ + \frac{1}{2}(\angle YXZ + \angle XZY + \angle YXZ + \angle XYZ) = 180°$
[ধাপ-১ হতে]

বা, $\angle YNZ+\frac{1}{2}(\angle X+\angle XZY+\angle YXZ+\angle XYZ)=180°$

বা, $\angle YNZ+\frac{1}{2}\angle X+\frac{1}{2}(\angle XYZ+\angle YZX+\angle YXZ)=180°$

বা, $\angle YNZ+\frac{1}{2}\angle X+\frac{1}{2}\times 180°=180°$

[$\because$ ΔXYZ-এ $\angle XYZ+\angle YZX+\angle YXZ=180°$]

বা, $\angle YNZ+\frac{1}{2}\angle X+90°=180°$

বা, $\angle YNZ=180°-90°-\frac{1}{2}\angle X$

$\therefore\ \angle YNZ=90°-\frac{1}{2}\angle X$ **(প্রমাণিত)**

গ প্রমাণ করতে হবে যে, Y, M, Z ও N বিন্দু চারটি সমবৃত্ত

প্রমাণঃ

ধাপ ১. $\angle MYZ+\angle NYZ=90°$ ['ক' হতে পাই]

বা, $\angle MYN=90°$

অনুরূপভাবে দেখানো যায় $\angle MZN=90°$

ধাপ ২. $MYNZ$ চতুর্ভুজে

$\angle MYN+$ বিপরীত $\angle MZN=90°+90°$

বা, $\angle MYN+\angle MZN=180°$

তাহলে, $\angle YMZ+\angle YNZ=180°$

$\therefore$ $MYNZ$ চতুর্ভুজটি বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ

Y, M, Z ও N বিন্দু চারটি সমবৃত্ত **(প্রমাণিত)**

১৯ একটি ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 4 সে.মি. 5 সে.মি. ও 6 সে.মি.। ওপরের তথ্য অনুযায়ী নিম্নের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাওঃ

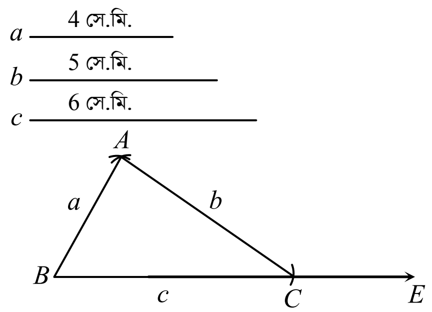
ক. ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

খ. ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত অঙ্কন কর।

গ. ত্রিভুজের পরিবৃত্তের বাহিরে যেকোনো একটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে বৃত্তের দুইটি স্পর্শক অঙ্কন করে দেখাও যে, স্পর্শকদ্বয়ের দূরত্ব সমান হয়।

সমাধানঃ

ক



মনে করি, কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে $a=4$ সে.মি., $b=5$ সে.মি. এবং $c=6$ সে.মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনঃ

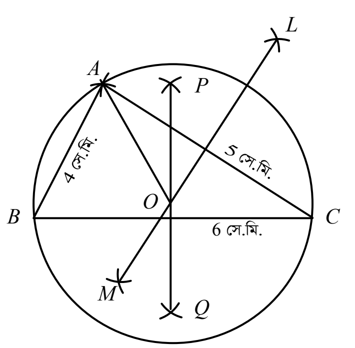
(১) যেকোনো রশ্মি BE থেকে c এর সমান নিয়ে BC অংশ কেটে নিই।

(২) BC রেখাংশের B ও C বিন্দুতে যথাক্রমে a ও b এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে B ও C এর একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপ দুইটি পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করেছে।

(৩) A, B ও A, C যোগ করি।

তাহলে, ΔABC-ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

খ



ত্রিভুজ ABC এর তিনটি বাহু $AB=4$ সে.মি., $AC=5$ সে.মি. এবং $BC=6$ সে.মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত অঙ্কন করতে হবে।

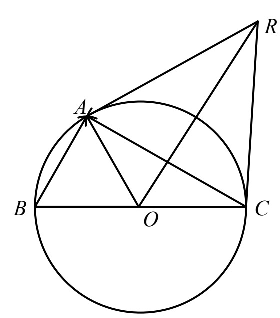
অঙ্কনঃ

(১) BC বাহুর লম্বদ্বিখন্ডক PQ এবং AC বাহুর লম্বদ্বিখন্ডক LM অঙ্কন করি। PQ ও LM পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে।

(২) এখন, O কে কেন্দ্র করে OC বা OB বা OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। বৃত্তটি A, B, C বিন্দু দিয়ে যাবে।

তাহলে নির্ণেয় বৃত্তটি ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্ত।

গ



মনে করি, ABC পরিবৃত্তের বাইরে R যেকোনো একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং RA ও RC রশ্মিদ্বয় পরিবৃত্তের A ও C বিন্দুতে দুইট স্পর্শক। প্রমাণ করতে হবে যে, $RA=RC$।

অঙ্কনঃ O, R যোগ করি।

প্রমাণঃ

ধাপ ১. যেহেতু RA স্পর্শক এবং OA স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ, সেহেতু $RA\perp OA$ [স্পর্শক স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের ওপর লম্ব]

$\therefore\ \angle RAO=$ এক সমকোণ

অনুরূপভাবে, $\angle RCO=$ এক সমকোণ

ধাপ ২. এখন, ΔRAO ও ΔRCO সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে,

অতিভুজ $OR=$ অতিভুজ OR [সাধারণ বাহু]

এবং $OA=OC$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$\therefore\ \Delta RAO\cong\Delta RCO$ [সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ-বাহু সর্বসমতা]

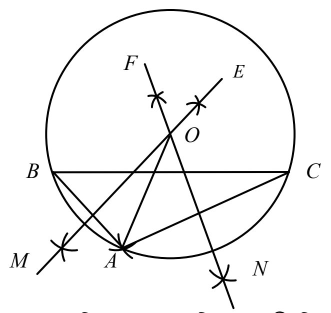
$\therefore\ RA=RC$ **(দেখানো হলো)**

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৬৯

ওপরের চিত্রে একটি সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্ত আঁকা হয়েছে। স্থূলকোণী এবং সমকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন কর।

সমাধানঃ **(i) স্থূলকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্ত নিচে আঁকা হলোঃ**



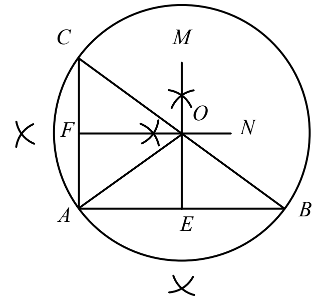
বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি, ABC একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজ। এর পরিবৃত্ত আঁকতে হবে। অর্থাৎ এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে, যা ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু A, B ও C বিন্দু দিয়ে যায়।

অঙ্কনঃ

(১) AB ও AC রেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে EM ও FN রেখাংশ আঁকি। ধরি, তারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

(২) A, O যোগ করি। O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। তাহলে বৃত্তটি A, B ও C বিন্দুগামী হবে এবং এই বৃত্তটিই ΔABC এর নির্ণেয় পরিবৃত্ত।

(ii) সমকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্ত আঁকা হলোঃ



বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ। এর পরিবৃত্ত আঁকতে হবে। অর্থাৎ এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে, যা ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু A, B ও C দিয়ে যায়।

অঙ্কনঃ

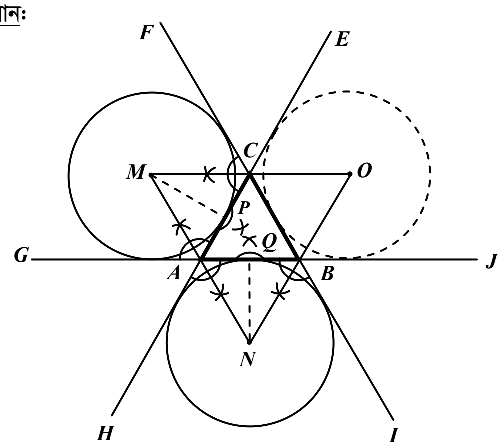
(১) AB ও AC রেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে EM ও FN রেখাংশ আঁকি। ধরি, তারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

(২) A, O যোগ করি। O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। তাহলে, বৃত্তটি A, B ও C বিন্দুগামী হবে এবং এই বৃত্তটিই ΔABC এর নির্ণেয় পরিবৃত্ত।

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৭০

ত্রিভুজের অপর দুইটি বহির্বৃত্ত আঁক।

সমাধানঃ



বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ। যার BC বাহুকে স্পর্শকারী বহির্বৃত্ত দেওয়া আছে। অপর দুইটি বাহু AC ও AB স্পর্শ করে এরূপ দুটি বহির্বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কনঃ

(১) BC ও BA বাহুকে যথাক্রমে F ও G পর্যন্ত বর্ধিত করি। $\angle ACF$ ও $\angle CAG$ এর সমদ্বিখণ্ডক M বিন্দুতে ছেদ করে। $MP \perp AC$ আঁকি। এখন M কে কেন্দ্র করে MP ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত অঙ্কন করি যা ABC ত্রিভুজের একটি বহির্বৃত্ত।

(২) CA ও CB বাহুকে যথাক্রমে H ও I পর্যন্ত বর্ধিত করি। $\angle AB$I ও $\angle HAB$ এর সমদ্বিখণ্ডক N বিন্দুতে ছেদ করে। $NQ \perp AB$ আঁকি। এখন N কে কেন্দ্র করে NQ ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত অঙ্কন করি যা ABC ত্রিভুজের অপর আরেকটি বহির্বৃত্ত।