নবম অধ্যায়

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

অনুশীলনী - ৯.১

প্রয়োজনীয় সূত্রসমূহঃ

১। $\sin\theta = \dfrac{\text{বিপরীত বাহু (লম্ব)}}{\text{অতিভুজ}}$ এবং $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{\text{অতিভুজ}}{\text{বিপরীত বাহু (লম্ব)}}$

২। $\cos\theta = \dfrac{\text{সন্নিহিত বাহু (ভূমি)}}{\text{অতিভুজ}}$ এবং $\sec\theta = \dfrac{\text{অতিভুজ}}{\text{সন্নিহিত বাহু (ভূমি)}}$

৩। $\tan\theta = \dfrac{\text{বিপরীত বাহু (লম্ব)}}{\text{সন্নিহিত বাহু (ভূমি)}}$ এবং $\cot\theta = \dfrac{\text{সন্নিহিত বাহু (ভূমি)}}{\text{বিপরীত বাহু (লম্ব)}}$

৪। $\sin\theta = \dfrac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$ বা, $\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$

৫। $\cos\theta = \dfrac{1}{\sec\theta}$ বা, $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

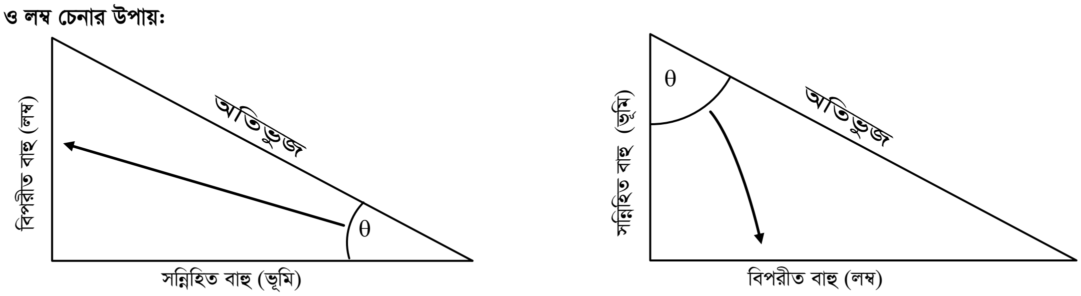
৬। (i) $\tan\theta = \dfrac{1}{\cot\theta}$ বা, $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ (ii) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$; $\cot = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

৭। $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ বা, $\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$ বা, $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$

৮। $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$ বা, $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ বা, $\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$

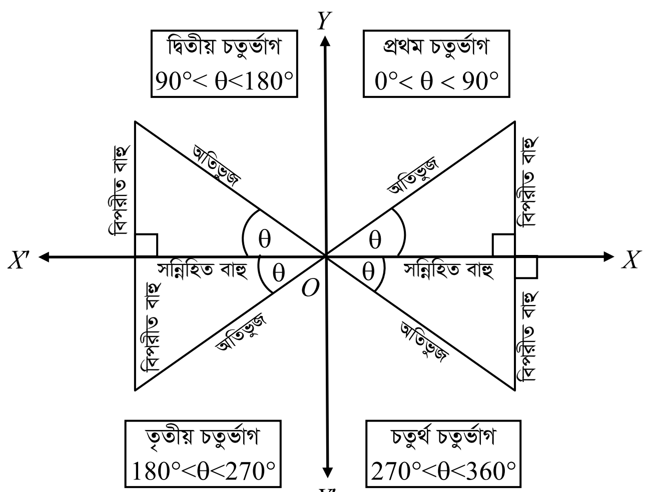
৯। $\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$ বা, $\operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$ বা, $\cot^2\theta = \operatorname{cosec}^2\theta - 1$

❑ **ভূমি ও লম্ব চেনার উপায়ঃ**



সূক্ষ্মকোণ সংলগ্ন বাহু সর্বদা ভূমি। অতিভুজ সর্বদা বৃহত্তম বাহু আর বিদ্যমান অপর বাহুটি লম্ব।

❑ **ত্রিকোণেমিতিক অনুপাতের মানঃ** ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলো বাহুর অনুপাত বলে এদের মান কখন ও ঋণাত্মক হয় না এ ধারণা সঠিক নয়। কারণ অনুপাতগুলোর মান ধনাত্মক ও ঋণাত্মক উভয়ই হতে পারে। নিম্নে উদাহরণসহ ব্যাখ্যা দেওয়া হলো।



প্রথম চতুর্ভাগ: [ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণের ($0° < \theta < 90°$) ক্ষেত্রে]

θ কোণের সন্নিহিত বাহু x অক্ষের ধনাত্মক বরাবর অবস্থিত

θ কোণের বিপরীত বাহু y অক্ষের ধনাত্মক বরাবর অবস্থিত

$\therefore$ সন্নিহিত বাহুর মান ধনাত্মক, বিপরীত বাহুর মান ধনাত্মক এবং অতিভুজের মান সর্বদা ধনাত্মক।

$\sin\theta = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{\text{ধনাত্মক }(+)}{\text{ধনাত্মক }(+)} =$ ধনাত্মক ; $\therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ }(+)}{\text{বিপরীত বাহু }(+)} =$ ধনাত্মক

$\cos\theta = \frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{\text{ধনাত্মক }(+)}{\text{ধনাত্মক }(+)} =$ ধনাত্মক ; $\therefore \sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ }(+)}{\text{সন্নিহিত বাহু }(+)} =$ ধনাত্মক

$\tan\theta = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সন্নিহিত বাহু}} = \frac{\text{ধনাত্মক }(+)}{\text{ধনাত্মক }(+)} =$ ধনাত্মক ; $\therefore \cot\theta = \frac{\text{সন্নিহিত বাহু }(+)}{\text{বিপরীত বাহু }(+)} =$ ধনাত্মক

সুতরাং ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণের জন্য সকল ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান ধনাত্মক।

বি.দ্র : পাঠ্যবইয়ের সকল অংশে ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণের ধারণা ব্যবহার করা হয়েছে। তাই ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর শুধুমাত্র ধনাত্মক মান বিবেচনা করা হয়েছে।

দ্বিতীয় চতুর্ভাগ: [$90° < \theta < 180°$ কোণের ক্ষেত্রে]

θ কোণের সন্নিহিত বাহু x অক্ষের ঋণাত্মক বরাবর অবিস্থত।

θ কোণের বিপরীত বাহু y অক্ষের ধনাত্মক বরাবর অবস্থিত।

$\therefore$ সন্নিহিত বাহুর মান ঋণাত্মক, বিপরীত বাহুর মান ধনাত্মক এবং অতিভুজ সর্বদা ধনাত্মক।

$\sin\theta = \frac{\text{বিপরীত বাহু }(+)}{\text{অতিভুজ }(+)} =$ ধনাত্মক ; $\therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ }(+)}{\text{বিপরীত বাহু }(+)} =$ ধনাত্মক

$\cos\theta = \frac{\text{সন্নিহিত বাহু }(-)}{\text{অতিভুজ }(+)} =$ ঋণাত্মক ; $\therefore \sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ }(+)}{\text{সন্নিহিত বাহু }(-)} =$ ঋণাত্মক

$\tan\theta = \frac{\text{বিপরীত বাহু }(+)}{\text{সন্নিহিত বাহু }(-)} =$ ঋণাত্মক ; $\therefore \cot\theta = \frac{\text{সন্নিহিত বাহু }(-)}{\text{বিপরীত বাহু }(+)} =$ ঋণাত্মক

সুতরাং θ এর মান $90°$ থেকে বড় এবং $180°$ থেকে ছোট হলে শুধুমাত্র $\sin\theta$ ও $\operatorname{cosec}\theta$ এর মান ধনাত্মক। কিন্তু অন্যান্য সকল অনুপাত ঋণাত্মক।

তৃতীয় চতুর্ভাগ: [$180° < \theta < 270°$ কোণের ক্ষেত্রে]

θ কোণের সন্নিহিত বাহুর x অক্ষের ঋণাত্মক দিক বরাবর অবস্থিত

θ কোণের বিপরীত বাহুর y অক্ষের ঋণাত্মক বরাবর অবস্থিত এবং অতিভুজ সর্বদা ধনাত্মক।

$\sin\theta = \frac{\text{বিপরীত বাহু }(-)}{\text{অতিভুজ }(+)} =$ ঋণাত্মক ; $\therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ }(+)}{\text{বিপরীত বাহু }(-)} =$ ঋণাত্মক

$\cos\theta = \frac{\text{সন্নিহিত বাহু }(-)}{\text{অতিভুজ }(+)} =$ ঋণাত্মক ; $\therefore \sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ }(+)}{\text{সন্নিহিত বাহু }(-)} =$ ঋণাত্মক

$\tan\theta = \frac{\text{বিপরীত বাহু }(-)}{\text{সন্নিহিত বাহু }(-)} =$ ধনাত্মক ; $\therefore \cot\theta = \frac{\text{সন্নিহিত বাহু }(-)}{\text{বিপরীত বাহু }(-)} =$ ধনাত্মক

চতুর্থ চতুর্ভাগ: [যখন ($270° < \theta < 360°$) কোণের ক্ষেত্রে]

θ কোণের সন্নিহিত বাহুর মান ধনাত্মক

θ কোণের বিপরীত বাহুর মান ঋণাত্মক

$\sin\theta = \frac{\text{বিপরীত বাহু }(-)}{\text{অতিভুজ }(+)} =$ ঋণাত্মক ; $\therefore \operatorname{cosec}\theta = \frac{\text{অতিভুজ }(+)}{\text{বিপরীত বাহু }(-)} =$ ঋণাত্মক

$\cos\theta = \frac{\text{সন্নিহিত বাহু }(+)}{\text{অতিভুজ }(+)} =$ ধনাত্মক ; $\therefore \sec\theta = \frac{\text{অতিভুজ }(+)}{\text{সন্নিহিত বাহু }(+)} =$ ধনাত্মক

$\tan\theta = \frac{\text{বিপরীত বাহু }(-)}{\text{সন্নিহিত বাহু }(+)} =$ ঋণাত্মক ; $\therefore \cot\theta = \frac{\text{সন্নিহিত বাহু }(+)}{\text{বিপরীত বাহু }(-)} =$ ঋণাত্মক

সুতরাং চতুর্থ চতুর্ভাগে শুধুমাত্র $\cos\theta$ ও $\sec\theta$ এর মান ধনাত্মক কিন্তু অন্যান্য সকল ত্রিকোণমিতিক কোণের অনুপাত ঋণাত্মক।

অনুশীলনীর সমাধান

১ নিচের গাণিতিক উক্তিগুলোর সত্য-মিথ্যা যাচাই কর। তোমার উত্তরের পক্ষে যুক্তি দাও।

ক) $\tan A$ এর মান সর্বদা 1 এর চেয়ে কম।

খ) $\cot A$ হলো cot ও A এর গুণফল।

গ) A এর কোন মানের জন্য $\sec A = \frac{12}{5}$

ঘ) cos হলো cotangent এর সংক্ষিপ্ত রূপ।

সমাধান:

ক $\tan A$ এর মান সর্বদা 1 এর চেয়ে কম, উক্তিটি মিথ্যা।

যুক্তি: $\tan A$ এর মান যেমন 1 চেয়ে ছোট হতে পারে তেমনি 1 এর সমান এবং 1 এর চেয়ে বড়ও হতে পারে।

A ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হলে $\tan A = \frac{\text{বিপরীত বাহু (লম্ব)}}{\text{সন্নিহিত বাহু (ভূমি)}}$।

কোনো সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ হলো বৃহত্তম বাহু। অপর দুই বাহু বিপরীত বাহু ও সন্নিহিত বাহুর মধ্যে যেকোনোটি বড় হতে পারে। যখন-

i. বিপরীত বাহু = সন্নিহিত বাহু হলে $\tan A = 1$ হবে।

ii. বিপরীত বাহু > সন্নিহিত বাহু হলে $\tan A$ এর মান 1 অপেক্ষা বড় হবে।

iii. বিপরীত বাহু < সন্নিহিত বাহু হলে $\tan A$ এর মান 1 অপেক্ষা ছোট হবে।

সুতরাং $\tan A$ এর মান সর্বদা 1 এর চেয়ে কম, উক্তিটি মিথ্যা।

উদাহরণ: $\tan 45° = 1$ এবং $\tan 60° = \sqrt{3} = 1.732....$

খ $\cot A$ হলো cot ও A এর গুণফল উক্তিটি সঠিক নয়।

যুক্তি: $\cot A$ প্রতীকটি A কোণের cotan*gent* এর অনুপাতকে বোঝায়। cot ও A এর গুণফলকে নয়। A বাদে cot আলাদা কোনো অর্থ বহন করে না।

গ দেওয়া আছে, $\sec A = \frac{12}{5}$

বা, $\frac{1}{\cos A} = \frac{12}{5}$ $\left[\because \cos A = \frac{1}{\sec A}\right]$

বা, $\cos A = \frac{5}{12}$

বা, $\cos A = \cos 65.4°$

$\therefore A = 65.4°$

$\sec A = \frac{12}{5}$ হতে পারে। এটির স্বপক্ষে যুক্তি নিম্নরূপ:

জানা আছে, A ধনাত্মক সূক্ষ্মকোণ হলে, $\sec A = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{সন্নিহিত বাহু}}$

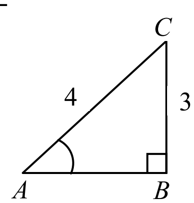
যেহেতু অতিভুজ যেকোনো ত্রিভুজের বৃহত্তম বাহু, তাই $\sec A$ এর মান সর্বদা 1 অপেক্ষা বড় হবে। সুতরাং $\sec A = \frac{12}{5}$ গ্রহণযোগ্য।

ঘ cos হলো cotangent এর সংক্ষিপ্ত রূপ; উক্তিটি মিথ্যা।

যুক্তি: cos হলো cosine এর সংক্ষিপ্ত রূপ এবং cot হলো cotangent এর সংক্ষিপ্ত রূপ।

২ **$\sin A = \frac{3}{4}$ হলে, A কোণের অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় কর।**

সমাধান: দেওয়া আছে, $\sin A = \frac{3}{4} = \frac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$



অতএব, ABC সমকোণী ত্রিভুজের,

A কোণের বিপরীত বাহু $BC = 3$

এবং অতিভুজ = 4

$\therefore$ সন্নিহিত বাহু, $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$

$= \sqrt{4^2 - 3^2}$

$= \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$

সুতরাং $\cos A = \frac{\text{সন্নিহিত বাহু}, AB}{\text{অতিভুজ}, AC} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\tan A = \frac{\text{বিপরীত বাহু}, BC}{\text{সন্নিহিত বাহু}, AB} = \frac{3}{\sqrt{7}}$

$\cot A = \frac{\text{সন্নিহিত বাহু}, AB}{\text{বিপরীত বাহু}, BC} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

$\sec A = \frac{\text{অতিভুজ}, AC}{\text{সন্নিহিত বাহু}, AB} = \frac{4}{\sqrt{7}}$

এবং $\operatorname{cosec} A = \frac{\text{অতিভুজ}, AC}{\text{বিপরীত বাহু}, BC} = \frac{4}{3}$

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

দেওয়া আছে, $\sin A = \frac{3}{4}$

$\therefore \cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} = \sqrt{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{16 - 9}{16}} = \frac{\sqrt{7}}{4}$

$\therefore \operatorname{cosec} A = \frac{1}{\sin A} = \frac{4}{3}$

$\sec A = \frac{1}{\cos A} = \frac{4}{\sqrt{7}}$

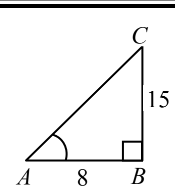
$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{3}{4} \times \frac{4}{\sqrt{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$

$\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{\frac{\sqrt{7}}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{\sqrt{7}}{3}$

৩ **দেওয়া আছে, $15\cot A = 8$, $\sin A$ ও $\sec A$ এর মান বের কর।**

সমাধান: দেওয়া আছে, $15 \cot A = 8$

$\therefore \cot A = \frac{8}{15} = \frac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{বিপরীত বাহু}}$



অতএব, A কোণের সন্নিহিত বাহু, $AB = 8$

A কোণের বিপরীত বাহু, $BC = 15$

$\therefore$ অতিভুজ, $AC = \sqrt{AB^2 + BC^2}$

$= \sqrt{15^2 + 8^2} = \sqrt{225 + 64} = \sqrt{289} = 17$

সুতরাং, $\sin A = \frac{\text{বিপরীত বাহু}, BC}{\text{অতিভুজ}, AC} = \frac{15}{17}$

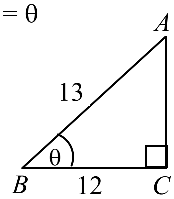
$\sec A = \frac{\text{অতিভুজ}, AC}{\text{সন্নিহিত বাহু}, AB} = \frac{17}{8}$

৪ ***ABC* সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ সমকোণ, $AB = 13$ সে.মি., $BC = 12$ সে.মি. এবং $\angle ABC = \theta$ হলে, $\sin\theta, \cos\theta$ ও $\tan\theta$ এর মান বের কর।**

সমাধান: দেওয়া আছে, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ সমকোণ,
$AB = 13$ সে.মি., $BC = 12$ সে.মি. এবং $\angle ABC = \theta$
তথ্যানুসারে চিত্রটি অঙ্কন করে পাই,

অতিভুজ, $AB = 13$ সে.মি.
সন্নিহিত বাহু, $BC = 12$ সে.মি.

$\therefore$ বিপরীত বাহু, $AC = \sqrt{13^2 - 12^2}$
$= \sqrt{169 - 144}$
$= \sqrt{25} = 5$



সুতরাং, $\sin\theta = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{5}{13}$

$\cos\theta = \dfrac{BC}{AB} = \dfrac{12}{13}$

$\tan\theta = \dfrac{AC}{BC} = \dfrac{5}{12}$

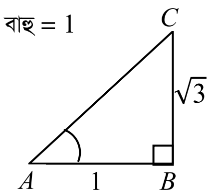
৫ ***ABC* সমকোণী ত্রিভুজের $\angle B$ কোণটি সমকোণ। $\tan A = \sqrt{3}$ হলে, $\sqrt{3}\sin A\cos A = \dfrac{3}{4}$ এর সত্যতা যাচাই কর।**

সমাধান: দেওয়া আছে, $\tan A = \sqrt{3}$
অতএব, A কোণের বিপরীত বাহু $= \sqrt{3}$, সন্নিহিত বাহু $= 1$

$\therefore$ অতিভুজ $= \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2}$
$= \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2$

সুতরাং, $\sin A = \dfrac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$\cos A = \dfrac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{1}{2}$



বামপক্ষ $= \sqrt{3}\sin A.\cos A$
$= \sqrt{3} \times \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{1}{2}$
$= \dfrac{3}{4}$ = ডানপক্ষ

$\therefore \sqrt{3}\sin A\cos A = \dfrac{3}{4}$ সত্য।

প্রমাণ কর (৬-২০):

৬ (ক) $\dfrac{1}{\sec^2 A} + \dfrac{1}{\text{cosec}^2 A} = 1$ (খ) $\dfrac{1}{\cos^2 A} - \dfrac{1}{\cot^2 A} = 1$ (গ) $\dfrac{1}{\sin^2 A} - \dfrac{1}{\tan^2 A} = 1$

সমাধান:

ক $\dfrac{1}{\sec^2 A} + \dfrac{1}{\text{cosec}^2 A} = 1$

বামপক্ষ $= \dfrac{1}{\sec^2 A} + \dfrac{1}{\text{cosec}^2 A}$
$= \cos^2 A + \sin^2 A$
$= 1$= ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

খ $\dfrac{1}{\cos^2 A} - \dfrac{1}{\cot^2 A} = 1$

বামপক্ষ $= \dfrac{1}{\cos^2 A} - \dfrac{1}{\cot^2 A}$
$= \sec^2 A - \tan^2 A$
$= 1$ = ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

গ $\dfrac{1}{\sin^2 A} - \dfrac{1}{\tan^2 A} = 1$

বামপক্ষ $= \dfrac{1}{\sin^2 A} - \dfrac{1}{\tan^2 A}$
$= \text{cosec}^2 A - \cot^2 A$
$= 1$ = ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

৭ (ক) $\dfrac{\sin A}{\text{cosec } A} + \dfrac{\cos A}{\sec A} = 1$ (খ) $\dfrac{\sec A}{\cos A} - \dfrac{\tan A}{\cot A} = 1$ (গ) $\dfrac{1}{1+\sin^2 A} + \dfrac{1}{1+\text{cosec}^2 A} = 1$

সমাধান:

ক $\dfrac{\sin A}{\text{cosec}A} + \dfrac{\cos A}{\sec A} = 1$

বামপক্ষ $= \dfrac{\sin A}{\text{cosec}A} + \dfrac{\cos A}{\sec A}$
$= \sin A.\dfrac{1}{\text{cosec}A} + \cos A.\dfrac{1}{\sec A}$
$= \sin A.\sin A + \cos A.\cos A$
$= \sin^2 A + \cos^2 A$
$= 1$ $[\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1]$
= ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

খ $\dfrac{\sec A}{\cos A} - \dfrac{\tan A}{\cot A} = 1$

বামপক্ষ $= \dfrac{\sec A}{\cos A} - \dfrac{\tan A}{\cot A}$
$= \sec A.\dfrac{1}{\cos A} - \tan A.\dfrac{1}{\cot A}$
$= \sec A.\sec A - \tan A.\tan A$
$= \sec^2 A - \tan^2 A$
$= 1$ = ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

গ $\dfrac{1}{1+\sin^2 A} + \dfrac{1}{1+\text{cosec}^2 A} = 1$

বামপক্ষ $= \dfrac{1}{1+\sin^2 A} + \dfrac{1}{1+\text{cosec}^2 A}$
$= \dfrac{1}{1+\sin^2 A} + \dfrac{1}{1+\dfrac{1}{\sin^2 A}}$
$= \dfrac{1}{1+\sin^2 A} + \dfrac{1}{\dfrac{\sin^2 A + 1}{\sin^2 A}}$
$= \dfrac{1}{1+\sin^2 A} + \dfrac{\sin^2 A}{1+\sin^2 A} = \dfrac{1+\sin^2 A}{1+\sin^2 A}$
$= 1$ = ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

৮ (ক) $\dfrac{\tan A}{1-\cot A}+\dfrac{\cot A}{1-\tan A}=\sec A\operatorname{cosec}A+1$ (খ) $\dfrac{1}{1+\tan^2 A}+\dfrac{1}{1+\cot^2 A}=1$

সমাধান:

ক $\dfrac{\tan A}{1-\cot A}+\dfrac{\cot A}{1-\tan A}=\sec A\operatorname{cosec}A+1$

বামপক্ষ $=\dfrac{\tan A}{1-\cot A}+\dfrac{\cot A}{1-\tan A}$

$=\dfrac{\tan A}{1-\dfrac{1}{\tan A}}+\dfrac{\dfrac{1}{\tan A}}{1-\tan A}$

$=\dfrac{\tan A}{\dfrac{\tan A-1}{\tan A}}-\dfrac{\dfrac{1}{\tan A}}{\tan A-1}$

$=\dfrac{\tan^2 A}{\tan A-1}-\dfrac{1}{\tan A(\tan A-1)}$

$=\dfrac{\tan^3 A-1}{\tan A(\tan A-1)}$

$=\dfrac{(\tan A-1)(\tan^2 A+\tan A+1)}{\tan A(\tan A-1)}$

$=\dfrac{1+\tan^2 A+\tan A}{\tan A}$

$=\dfrac{\sec^2 A+\tan A}{\tan A}$

$=\dfrac{\sec^2 A}{\tan A}+\dfrac{\tan A}{\tan A}$

$=\dfrac{\dfrac{1}{\cos^2 A}}{\dfrac{\sin A}{\cos A}}+1$

$=\left(\dfrac{1}{\cos^2 A}\times\dfrac{\cos A}{\sin A}\right)+1$

$=\dfrac{1}{\cos A\sin A}+1$

$=\dfrac{1}{\cos A}\times\dfrac{1}{\sin A}+1$

$=\sec A\operatorname{cosec}A+1=$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

বামপক্ষ $=\dfrac{\tan A}{1-\cot A}+\dfrac{\cot A}{1-\tan A}$

$=\dfrac{\dfrac{\sin A}{\cos A}}{1-\dfrac{\cos A}{\sin A}}+\dfrac{\dfrac{\cos A}{\sin A}}{1-\dfrac{\sin A}{\cos A}}$

$=\dfrac{\dfrac{\sin A}{\cos A}}{\dfrac{\sin A-\cos A}{\sin A}}+\dfrac{\dfrac{\cos A}{\sin A}}{\dfrac{\cos A-\sin A}{\cos A}}$

$=\dfrac{\sin A}{\cos A}\times\dfrac{\sin A}{\sin A-\cos A}+\dfrac{\cos A}{\sin A}\times\dfrac{\cos A}{\cos A-\sin A}$

$=\dfrac{\sin^2 A}{\cos A(\sin A-\cos A)}+\dfrac{\cos^2 A}{-\sin A(\sin A-\cos A)}$

$=\dfrac{\sin^2 A}{\cos A(\sin A-\cos A)}-\dfrac{\cos^2 A}{\sin A(\sin A-\cos A)}$

$=\dfrac{\sin^3 A-\cos^3 A}{\sin A.\cos A(\sin A-\cos A)}$

$=\dfrac{(\sin A-\cos A)(\sin^2 A+\sin A.\cos A+\cos^2 A)}{\sin A.\cos A(\sin A-\cos A)}$

$[\because a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)]$

$=\dfrac{\sin^2 A+\cos^2 A+\sin A.\cos A}{\sin A.\cos A}$

$=\dfrac{1+\sin A.\cos A}{\sin A.\cos A}$ $[\because \sin^2 A+\cos^2 A=1]$

$=\dfrac{1}{\sin A.\cos A}+\dfrac{\sin A.\cos A}{\sin A.\cos A}$

$=\dfrac{1}{\sin A.\cos A}+1=\dfrac{1}{\sin A}\times\dfrac{1}{\cos A}+1$

$=\operatorname{cosec}A\sec A+1$

$=\sec A\operatorname{cosec}A+1=$ ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

খ $\dfrac{1}{1+\tan^2 A}+\dfrac{1}{1+\cot^2 A}=1$

বামপক্ষ $=\dfrac{1}{1+\tan^2 A}+\dfrac{1}{1+\cot^2 A}$

$=\dfrac{1}{\sec^2 A}+\dfrac{1}{\operatorname{cosec}^2 A}$

$=\cos^2 A+\sin^2 A$

$=1=$ ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

৯ $\dfrac{\cos A}{1-\tan A}+\dfrac{\sin A}{1-\cot A}=\sin A+\cos A$

সমাধান: বামপক্ষ $=\dfrac{\cos A}{1-\tan A}+\dfrac{\sin A}{1-\cot A}$

$=\dfrac{\cos A}{1-\dfrac{\sin A}{\cos A}}+\dfrac{\sin A}{1-\dfrac{\cos A}{\sin A}}$

$=\dfrac{\cos A}{\dfrac{\cos A-\sin A}{\cos A}}+\dfrac{\sin A}{\dfrac{\sin A-\cos A}{\sin A}}$

$=\dfrac{\cos^2 A}{\cos A-\sin A}+\dfrac{\sin^2 A}{\sin A-\cos A}$

$=\dfrac{\cos^2 A}{\cos A-\sin A}-\dfrac{\sin^2 A}{\cos A-\sin A}$

$=\dfrac{\cos^2 A-\sin^2 A}{\cos A-\sin A}$

$=\dfrac{(\cos A+\sin A)(\cos A-\sin A)}{\cos A-\sin A}$

$=\sin A+\cos A$

$=$ ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

বামপক্ষ $= \dfrac{\cos A}{1-\tan A} + \dfrac{\sin A}{1-\cot A}$

$= \dfrac{\cos A}{1-\tan A} + \dfrac{\sin A}{1-\dfrac{1}{\tan A}}$

$= \dfrac{\cos A}{1-\tan A} + \dfrac{\sin A}{\dfrac{\tan A - 1}{\tan A}}$

$= \dfrac{\cos A}{1-\tan A} - \dfrac{\sin A \tan A}{1-\tan A}$

$= \dfrac{\cos A - \dfrac{\sin^2 A}{\cos A}}{1-\tan A}$

$= \dfrac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos A\,(1-\tan A)}$

$= \dfrac{(\cos A + \sin A)(\cos A - \sin A)}{\cos A - \dfrac{\sin A}{\cos A} \times \cos A}$

$= \dfrac{(\cos A + \sin A)(\cos A - \sin A)}{(\cos A - \sin A)}$

$= \sin A + \cos A =$ ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

◆◆ অনুশীলনীর ৮ ও ৯নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

$x = \tan A$ এবং $y = \cot A$ হলে- ক. $\dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1+y^2}$ এর মান কত? খ. দেখাও যে, $\dfrac{x}{1-y} + \dfrac{y}{1-x} = \sec A \operatorname{cosec} A + 1$ গ. প্রমাণ কর যে, $\dfrac{\cos A}{1-x} + \dfrac{\sin A}{1-y} = \sin A(1+y)$	**উত্তর:** (ক) 1

১০ $\tan A \sqrt{1-\sin^2 A} = \sin A$

সমাধান: বামপক্ষ $= \tan A\sqrt{1-\sin^2 A}$

$= \tan A\sqrt{\cos^2 A}$ $[\because \sin^2 A + \cos^2 = 1]$

$= \dfrac{\sin A}{\cos A} . \cos A$

$= \sin A =$ ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

১১ $\dfrac{\sec A + \tan A}{\operatorname{cosec} A + \cot A} = \dfrac{\operatorname{cosec} A - \cot A}{\sec A - \tan A}$

সমাধান:

বামপক্ষ $= \dfrac{\sec A + \tan A}{\operatorname{cosec} A + \cot A}$

$= \dfrac{(\sec A + \tan A) \times 1}{(\operatorname{cosec} A + \cot A) \times 1}$

$= \dfrac{(\sec A + \tan A)(\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A)}{(\operatorname{cosec} A + \cot A)(\sec^2 A - \tan^2 A)}$

$[\because \operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$ এবং $\sec^2 - \tan^2 A = 1]$

$= \dfrac{(\sec A + \tan A)(\operatorname{cosec} A + \cot A)(\operatorname{cosec} A - \cot A)}{(\operatorname{cosec} A + \cot A)(\sec A + \tan A)(\sec A - \tan A)}$

$= \dfrac{\operatorname{cosec} A - \cot A}{\sec A - \tan A} =$ ডানপক্ষ (প্রমাণিত)

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

বামপক্ষ $= \dfrac{\sec A + \tan A}{\operatorname{cosec} A + \cot A}$

$= \dfrac{(\sec A + \tan A)(\sec A - \tan A)(\operatorname{cosec} A - \cot A)}{(\operatorname{cosec} A + \cot A)(\sec A - \tan A)(\operatorname{cosec} A - \cot A)}$

[লব ও হরকে $(\sec A - \tan A)(\operatorname{cosec} A - \cot A)$ গুণ করে]

$= \dfrac{(\sec^2 A - \tan^2 A)(\operatorname{cosec} A - \cot A)}{(\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A)(\sec A - \tan A)}$

$= \dfrac{\operatorname{cosec} A - \cot A}{\sec A - \tan A}$

$=$ ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

সমাধান (তৃতীয় পদ্ধতি)

প্রমাণ করতে হবে যে,

$\dfrac{\sec A + \tan A}{\operatorname{cosec} A + \cot A} = \dfrac{\operatorname{cosec} A - \cot A}{\sec A - \tan A}$

বা, $\dfrac{\sec A + \tan A}{\operatorname{cosec} A + \cot A} - \dfrac{\operatorname{cosec} A - \cot A}{\sec A - \tan A} = 0$

বামপক্ষ $= \dfrac{\sec A + \tan A}{\operatorname{cosec} A + \cot A} - \dfrac{\operatorname{cosec} A - \cot A}{\sec A - \tan A}$

$= \dfrac{(\sec^2 A - \tan^2 A) - (\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A)}{(\operatorname{cosec} A + \cot A)(\sec A - \tan A)}$

$= \dfrac{1-1}{(\operatorname{cosec} A + \cot A)(\sec A - \tan A)}$

$= 0 =$ ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

১২ $\dfrac{\text{cosec}A}{\text{cosec}A-1}+\dfrac{\text{cosec}A}{\text{cosec}A+1}=2\sec^2A$

সমাধান: বামপক্ষ $=\dfrac{\text{cosec}A}{\text{cosec}A-1}+\dfrac{\text{cosec}A}{\text{cosec}A+1}$

$=\text{cosec}A\left(\dfrac{1}{\text{cosec}A-1}+\dfrac{1}{\text{cosec}A+1}\right)$

$=\text{cosec}A\left[\dfrac{\text{cosec}A+1+\text{cosec}A-1}{(\text{cosec}A-1)(\text{cosec}A+1)}\right]$

$=\text{cosec}A\left(\dfrac{2\text{cosec}^2A}{\text{cosec}^2A-1}\right)$

$=\dfrac{2\text{ cosec}^2A}{\cot^2A}$ $[\because \text{cosec}^2A-1=\cot^2A]$

$=2\times\dfrac{\frac{1}{\sin^2A}}{\frac{\cos^2A}{\sin^2A}}=\dfrac{2}{\sin^2A}\times\dfrac{\sin^2A}{\cos^2A}$

$=\dfrac{2}{\cos^2A}=2\times\dfrac{1}{\cos^2A}=2\sec^2A$

= ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

বামপক্ষ $=\dfrac{\text{cosec}A}{\text{cosec}A-1}+\dfrac{\text{cosec}A}{\text{cosec}A+1}$

$=\dfrac{\text{cosec}A}{\text{cosec}A(1-\sin A)}+\dfrac{\text{cosec}A}{\text{cosec}A(1+\sin A)}$

$=\dfrac{1}{1-\sin A}+\dfrac{1}{1+\sin A}$

$=\dfrac{1+\sin A+1-\sin A}{(1+\sin A)(1-\sin A)}$

$=\dfrac{2}{1-\sin^2A}$

$=\dfrac{2}{\cos^2A}$

$=2\sec^2A$ = ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

সমাধান (তৃতীয় পদ্ধতি)

বামপক্ষ $=\dfrac{\text{cosec}A}{\text{cosec}A-1}+\dfrac{\text{cosec}A}{\text{cosec}A+1}$

$=\dfrac{\text{cosec}^2A+\text{cosec}A+\text{cosec}^2A-\text{cosec}A}{(\text{cosec}A+1)(\text{cosec}A-1)}$

$=\dfrac{2\text{cosec}^2A}{\text{cosec}^2A-1}$

$=2\text{cosec}^2A\times\dfrac{1}{\text{cosec}^2A-1}$

$=\dfrac{2}{\sin^2A}\times\dfrac{1}{\frac{1}{\sin^2A}-1}=\dfrac{2}{\sin^2A}\times\dfrac{\sin^2A}{1-\sin^2A}$

$=2\times\dfrac{1}{\cos^2A}=2\sec^2A$ = ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

◆◆ অনুশীলনীর ১০, ১১ ও ১২নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

***p* = tan*A* এবং *q* = sin*A* হলে,** *ক.* $p\sqrt{1-q^2}$ *এর মান কত?* *খ.* $\dfrac{\frac{p}{q}+p}{\frac{1}{q}+\frac{1}{p}}$ *এর মান নির্ণয় কর।* *গ. দেখাও যে,* $\dfrac{\frac{1}{p}}{\frac{1}{q}-1}+\dfrac{\frac{1}{q}}{\frac{1}{q}+1}=2(1+p^2)$	**উত্তর:** (ক) $\sin A$; (খ) $\dfrac{\cos A-\cot A}{\sec A-\tan A}$

১৩ $\dfrac{1}{1+\sin A}+\dfrac{1}{1-\sin A}=2\sec^2A$

সমাধান: বামপক্ষ $=\dfrac{1}{1+\sin A}+\dfrac{1}{1-\sin A}$

$=\dfrac{(1-\sin A)+(1+\sin A)}{(1+\sin A)(1-\sin A)}$

$=\dfrac{1-\sin A+1+\sin A}{1-\sin^2A}$

$=\dfrac{2}{\cos^2A}$; $[\because 1-\sin^2A=\cos^2A]$

$=2\times\dfrac{1}{\cos^2A}$

$=2\sec^2A$ = ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

১৪ $\dfrac{1}{\text{cosec}A-1}-\dfrac{1}{\text{cosec}A+1}=2\tan^2A$

সমাধান: বামপক্ষ $=\dfrac{1}{\text{cosec}A-1}-\dfrac{1}{\text{cosec}A+1}$

$=\dfrac{(\text{cosec}A+1)-(\text{cosec}A-1)}{(\text{cosec}A-1)(\text{cosec}A+1)}$

$=\dfrac{\text{cosec}A+1-\text{cosec}A+1}{\text{cosec}^2A-1}$

$=\dfrac{2}{\text{cosec}^2A-1}$

$=\dfrac{2}{\cot^2A}$ $[\because \text{cosce}^2A-1=\cot^2A]$

$=2\times\dfrac{1}{\cot^2A}=2\tan^2A$ = ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

১৫ $\dfrac{\sin A}{1-\cos A} + \dfrac{1-\cos A}{\sin A} = 2\operatorname{cosec} A$

সমাধান: বামপক্ষ $= \dfrac{\sin A}{1-\cos A} + \dfrac{1-\cos A}{\sin A}$

$= \dfrac{\sin^2 A + (1-\cos A)^2}{\sin A\,(1-\cos A)}$

$= \dfrac{\sin^2 A + 1 - 2\cos A + \cos^2 A}{\sin A\,(1-\cos A)}$

$= \dfrac{(\sin^2 A + \cos^2 A) + 1 - 2\cos A}{\sin A\,(1-\cos A)}$

$= \dfrac{1 + 1 - 2\cos A}{\sin A\,(1-\cos A)}$ [$\because \sin^2 A + \cos^2 A = 1$]

$= \dfrac{2 - 2\cos A}{\sin A\,(1-\cos A)}$

$= \dfrac{2\,(1-\cos A)}{\sin A\,(1-\cos A)}$

$= \dfrac{2}{\sin A}$

$= 2 \times \dfrac{1}{\sin A}$

$= 2\operatorname{cosec} A$ = ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

বামপক্ষ $= \dfrac{\sin A}{1-\cos A} + \dfrac{1-\cos A}{\sin A}$

$= \dfrac{\sin A(1+\cos A)}{(1+\cos A)(1-\cos A)} + \dfrac{1-\cos A}{\sin A}$

[১ম পদে লব ও হরকে $(1+\cos A)$ দ্বারা গুণ করে]

$= \dfrac{\sin A(1+\cos A)}{1-\cos^2 A} + \dfrac{1-\cos A}{\sin A}$

$= \dfrac{\sin A(1+\cos A)}{\sin^2 A} + \dfrac{1-\cos A}{\sin A}$

$= \dfrac{1+\cos A}{\sin A} + \dfrac{1-\cos A}{\sin A}$

$= \dfrac{1+\cos A + 1 - \cos A}{\sin A}$

$= \dfrac{2}{\sin A} = 2\operatorname{cosec} A$ = ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

১৬ $\dfrac{\tan A}{\sec A + 1} - \dfrac{\sec A - 1}{\tan A} = 0$

সমাধান: বামপক্ষ $= \dfrac{\tan A}{\sec A + 1} - \dfrac{\sec A - 1}{\tan A}$

$= \dfrac{\tan^2 A - (\sec A - 1)(\sec A + 1)}{(\sec A + 1)\tan A}$

$= \dfrac{\tan^2 A - (\sec^2 A - 1)}{(\sec A + 1)\tan A}$

$= \dfrac{\tan^2 A - \tan^2 A}{(sceA + 1)\tan A}$ [$\because \sec^2 A - 1 = \tan^2 A$]

$= \dfrac{0}{(sceA + 1)\tan A}$

$= 0$ = ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

বামপক্ষ $= \dfrac{\tan A}{\sec A + 1} - \dfrac{\sec A - 1}{\tan A}$

$= \dfrac{\tan A(\sec A - 1)}{(\sec A + 1)(\sec A - 1)} - \dfrac{\sec A - 1}{\tan A}$

[১ম পদে লব ও হরকে $(\sec A - 1)$ দ্বারা গুণ করে]

$= \dfrac{\tan A(\sec A - 1)}{\sec^2 A - 1} - \dfrac{\sec A - 1}{\tan A}$

$= \dfrac{\tan A(\sec A - 1)}{\tan^2 A} - \dfrac{\sec A - 1}{\tan A}$ [$\because \tan^2 A = \sec^2 A - 1$]

$= \dfrac{\sec A - 1}{\tan A} - \dfrac{\sec A - 1}{\tan A}$

$= 0$ = ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

১৭ $(\tan\theta + \sec\theta)^2 = \dfrac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}$

সমাধান: বামপক্ষ $= (\tan\theta + \sec\theta)^2$

$= \left(\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{1}{\cos\theta}\right)^2$ [$\because \tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ এবং $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$]

$= \left(\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2$

$= \dfrac{(1+\sin\theta)^2}{\cos^2\theta}$

$= \dfrac{(1+\sin\theta)^2}{1-\sin^2\theta}$ [$\because \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$]

$= \dfrac{(1+\sin\theta)^2}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$ [$\because a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$]

$= \dfrac{(1+\sin\theta)(1+\sin\theta)}{(1+\sin\theta)(1-\sin\theta)}$

$= \dfrac{(1+\sin\theta)}{(1-\sin\theta)}$ = ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

◆◆ অনুশীলনীর ১৬ ও ১৭নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

$p = \sec A$ এবং $q = \tan A$ ক. $p^2 - q^2 =$ কত? খ. দেখাও যে, $\frac{q}{p+1} - \frac{p-1}{q} = 0$ গ. প্রমাণ কর যে, $(p+q)^2 = \frac{1+\sin A}{1-\sin A}$	উত্তর: (ক) 1

১৮ $\frac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A} = \cot A.\tan B$

সমাধান: বামপক্ষ $= \frac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A}$

$= \frac{\cot A + \tan B}{\frac{1}{\tan B} + \frac{1}{\cot A}}$ $\left[\because \tan A = \frac{1}{\cot A} \text{ এবং } \cot B = \frac{1}{\tan B}\right]$

$= \frac{\cot A + \tan B}{\frac{\cot A + \tan B}{\tan B.\cot A}}$

$= (\cot A + \tan B) \times \frac{\cot A.\tan B}{(\cot A + \tan B)}$

$= \cot A.\tan B =$ ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

বামপক্ষ $= \frac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A}$

$= \frac{\frac{1}{\tan A} + \tan B}{\frac{1}{\tan B} + \tan A} = \frac{\frac{1 + \tan A \tan B}{\tan A}}{\frac{1 + \tan A \tan B}{\tan B}}$

$= \frac{(1 + \tan A \tan B)}{\tan A} \times \frac{\tan B}{(1 + \tan A \tan B)}$

$= \frac{1}{\tan A} . \tan B = \cot A.\tan B =$ ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

১৯ $\sqrt{\frac{1 - \sin A}{1 + \sin A}} = \sec A - \tan A$

সমাধান: বামপক্ষ $= \sqrt{\frac{1 - \sin A}{1 + \sin A}}$

$= \sqrt{\frac{(1 - \sin A)(1 - \sin A)}{(1 + \sin A)(1 - \sin A)}}$

[$\because$ হর ও লবকে $\sqrt{1 - \sin A}$ দ্বারা গুণ করে]

$= \sqrt{\frac{(1 - \sin A)^2}{1 - \sin^2 A}}$

$= \sqrt{\frac{(1 - \sin A)^2}{\cos^2 A}}$ $[\because 1 - \sin^2 A = \cos^2 A]$

$= \frac{1 - \sin A}{\cos A}$

$= \frac{1}{\cos A} - \frac{\sin A}{\cos A}$

$= \sec A - \tan A =$ ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

◆◆ অনুশীলনীর ১৯ ও উদাহরণ ১১নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

$a = \tan A, b = \sin A$ ক. $\frac{1}{1 + a^2} + \frac{1}{1 + \frac{1}{a^2}} =$ কত? খ. দেখাও যে, $\sqrt{\frac{1-b}{1+b}} = \sec A(1-b)$ গ. $a + b = x, a - b = y$ হলে প্রমাণ কর যে, $x^2 - y^2 = 4\sqrt{xy}$	উত্তর: (ক) 1

২০ $\sqrt{\frac{\sec A + 1}{\sec A - 1}} = \cot A + \operatorname{cosec} A$

সমাধান: বামপক্ষ $= \sqrt{\frac{\sec A + 1}{\sec A - 1}}$

$= \sqrt{\frac{(\sec A + 1)(\sec A + 1)}{(\sec A - 1)(\sec A + 1)}}$

[লব ও হরকে $\sqrt{\sec A + 1}$ দ্বারা গুণ করে]

$= \sqrt{\frac{(\sec A + 1)^2}{\sec^2 A - 1}}$

$= \sqrt{\frac{(\sec A + 1)^2}{\tan^2 A}}$

$= \frac{\sec A + 1}{\tan A}$

$= \frac{\sec A}{\tan A} + \frac{1}{\tan A}$

$= \frac{1}{\cos A} \times \frac{\cos A}{\sin A} + \cot A$

$= \frac{1}{\sin A} + \cot A$

$= \operatorname{cosec} A + \cot A =$ ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

২১ $\cos A + \sin A = \sqrt{2}\cos A$ **হলে, তবে প্রমাণ কর যে,** $\cos A - \sin A = \sqrt{2}\sin A$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\cos A + \sin A = \sqrt{2}\cos A$

বা, $\sin A = \sqrt{2}\cos A - \cos A$

বা, $\sin A = (\sqrt{2} - 1)\cos A$

বা, $\sin A = \cos A\,(\sqrt{2} - 1)$

বা, $\sin A = \cos A \dfrac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)}$

[লব ও হরকে $(\sqrt{2} + 1)$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\sin A = \cos A \left\{\dfrac{(\sqrt{2})^2 - (1)^2}{(\sqrt{2}+1)}\right\}$

বা, $(\sqrt{2} + 1)\sin A = \cos A(2 - 1)$

বা, $\sqrt{2}\sin A + \sin A = \cos A$

$\therefore \cos A - \sin A = \sqrt{2}\sin A$ **(প্রমাণিত)**

২২ **যদি** $\tan A = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ **হয়, তবে** $\dfrac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A}$ **এর মান নির্ণয় কর।**

সমাধান: দেওয়া আছে, $\tan A = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\dfrac{\sin A}{\cos A} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A} = \dfrac{1}{3}$ [উভয়পক্ষে বর্গ করে]

বা, $\sin^2 A.\dfrac{1}{\cos^2 A} = \dfrac{1}{3}$

বা, $\dfrac{1}{\operatorname{cosec}^2 A}.\sec^2 A = \dfrac{1}{3}$

বা, $\dfrac{\sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A} = \dfrac{1}{3}$

বা, $\dfrac{\operatorname{cosec}^2 A}{\sec^2 A} = \dfrac{3}{1}$ [বিপরীতকরণ করে]

বা, $\dfrac{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A} = \dfrac{3+1}{3-1}$ [যোজন -বিয়োজন করে]

বা, $\dfrac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A} = \dfrac{3-1}{3+1}$ [বিপরীতকরণ করে]

বা, $\dfrac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A} = \dfrac{2}{4}$

$\therefore \dfrac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A} = \dfrac{1}{2}$ **(Ans.)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

দেওয়া আছে, $\tan A = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ তাহলে $\cot A = \sqrt{3}$

$\therefore \sec^2 A = 1 + \tan^2 A$

$= 1 + \left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = 1 + \dfrac{1}{3} = \dfrac{4}{3}$

$\therefore \operatorname{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A$

$= 1 + (\sqrt{3})^2$

$= 1 + 3 = 4$

প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A}$

$= \dfrac{4 - \frac{4}{3}}{4 + \frac{4}{3}}$ [মান বসিয়ে]

$= \dfrac{\frac{12-4}{3}}{\frac{12+4}{3}} = \dfrac{\frac{8}{3}}{\frac{16}{3}} = \dfrac{8}{3} \times \dfrac{3}{16} = \dfrac{1}{2}$ **(Ans.)**

◆◆ অনুশীলনীর ২১ ও ২২নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

a **=** $\sin A$**, b =** $\cos A$ ক. $\dfrac{1}{b^2} - \left(\dfrac{a}{b}\right)^2 =$ **কত?** *খ.* $a + b = \sqrt{2}b$ *হলে দেখাও যে,* $b - a = \sqrt{2}a$ *গ.* $\dfrac{a}{b} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ *হলে,* $\dfrac{\operatorname{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\operatorname{cosec}^2 A + \sec^2 A}$ *এর মান নির্ণয় কর।*	উত্তর: (ক) 1; (গ) $\dfrac{1}{2}$

২৩ $\operatorname{cosec} A - \cot A = \dfrac{4}{3}$ **হলে,** $\operatorname{cosec} A + \cot A$ **এর মান কত?**

সমাধান: দেওয়া আছে, $\operatorname{cosec} A - \cot A = \dfrac{4}{3}$

আমরা জানি, $\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = 1$

বা, $(\operatorname{cosec} A + \cot A)(\operatorname{cosec} A - \cot A) = 1$

বা, $(\operatorname{cosec} A + \cot A)\dfrac{4}{3} = 1$

$\therefore (\operatorname{cosec} A + \cot A) = \dfrac{3}{4}$ **(Ans.)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

দেওয়া আছে, $\operatorname{cosec}A - \cot A = \dfrac{4}{3}$

বা, $\dfrac{(\operatorname{cosec}A - \cot A)(\operatorname{cosec}A + \cot A)}{\operatorname{cosec}A + \cot A} = \dfrac{4}{3}$

[লব ও হরকে $(\operatorname{cosec}A + \cot A)$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\dfrac{\operatorname{cosec}^2A - \cot^2A}{\operatorname{cosec}A + \cot A} = \dfrac{4}{3}$

বা, $\dfrac{1}{\operatorname{cosec}A + \cot A} = \dfrac{4}{3}$ $[\because \operatorname{cosec}^2A - \cot^2A = 1]$

বা, $\operatorname{cosec}A + \cot A = \dfrac{3}{4}$ [বিপরীতকরণ করে]

$\therefore \operatorname{cosec}A + \cot A = \dfrac{3}{4}$ **(Ans.)**

২৪ $\cot A = \dfrac{b}{a}$ হলে, $\dfrac{a \sin A - b \cos A}{a \sin A + b \cos A}$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: দেওয়া আছে, $\cot A = \dfrac{b}{a}$

বা, $\dfrac{\cos A}{\sin A} = \dfrac{b}{a}$

বা, $\dfrac{b}{a} \times \dfrac{\cos A}{\sin A} = \dfrac{b}{a} \times \dfrac{b}{a}$ [উভয়পক্ষকে $\dfrac{b}{a}$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\dfrac{b \cos A}{a \sin A} = \dfrac{b^2}{a^2}$

বা, $\dfrac{a \sin A}{b \cos A} = \dfrac{a^2}{b^2}$ [বিপরীতকরণ করে]

বা, $\dfrac{a \sin A + b \cos A}{a \sin A - b \cos A} = \dfrac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}$ [যোজন-বিয়োজন করে]

বা, $\dfrac{a \sin A - b \cos A}{a \sin A + b \cos A} = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ [বিপরীতকরণ করে]

$\therefore \dfrac{a \sin A - b \cos A}{a \sin A + b \cos A}$ এর মান $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ **(Ans.)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

দেওয়া আছে, $\cot A = \dfrac{b}{a}$

$\therefore \dfrac{a \sin A - b\cos A}{a \sin A + b \cos A}$

$$= \frac{\dfrac{a \sin A - b \cos A}{a \sin A}}{\dfrac{a \sin A + b \cos A}{a \sin A}} = \frac{\dfrac{a \sin A}{a \sin A} - \dfrac{b \cos A}{a \sin A}}{\dfrac{a \sin A}{a \sin A} + \dfrac{b \cos A}{a \sin A}}$$

$$= \frac{1 - \dfrac{b}{a}.\cot A}{1 + \dfrac{b}{a}\cot A} = \frac{1 - \dfrac{b}{a} \times \dfrac{b}{a}}{1 + \dfrac{b}{a} \times \dfrac{b}{a}} = \frac{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}{1 + \dfrac{b^2}{a^2}} = \frac{\dfrac{a^2 - b^2}{a^2}}{\dfrac{a^2 + b^2}{a^2}}$$

$= \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ **(Ans.)**

সমাধান (তৃতীয় পদ্ধতি)

দেওয়া আছে, $\cot A = \dfrac{b}{a} = \dfrac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{বিপরীত বাহু}}$

$\therefore$ অতিভুজ $= \sqrt{a^2 + b^2}$

$\therefore \sin A = \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ এবং $\cos A = \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

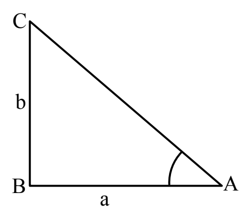
প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{a \sin A - b\cos A}{a \sin A + b \cos A}$

$$= \frac{a \times \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} - b \times \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{a \times \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + b \times \dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

$= \dfrac{\dfrac{a^2 - b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}}{\dfrac{a^2 + b^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}} = \dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$ **(Ans.)**

◆◆ অনুশীলনীর ২৪নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

$\boldsymbol{\cot A = \dfrac{b}{a}}$



ক. AC এর মান কত?

খ. $\dfrac{a\sin A - b\cos A}{a\sin A + b\cos A}$ *এর মান নির্ণয় কর।*

গ. প্রমাণ কর যে, $\sin A = \pm \dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

উত্তর: (ক) $\sqrt{a^2 + b^2}$; (খ) $\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$

২৫ $\operatorname{cosec}A - \cot A = \dfrac{1}{x}$ হলে,

ক. $\operatorname{cosec}A + \cot A$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, $\sec A = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 - 1}$

গ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\tan A + \cot A = \sec A \operatorname{cosec} A$

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, $\operatorname{cosec}A - \cot A = \dfrac{1}{x}$

বা, $(\operatorname{cosec}A + \cot A)(\operatorname{cosec}A - \cot A) = \dfrac{1}{x}(\operatorname{cosec}A + \cot A)$

বা, $\operatorname{cosec}^2 A - \cot^2 A = \dfrac{1}{x}(\operatorname{cosec}A + \cot A)$

বা, $1 = \dfrac{1}{x}(\operatorname{cosec}A + \cot A)$

$\therefore \operatorname{cosec}A + \cot A = x$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, $\operatorname{cosec}A - \cot A = \dfrac{1}{x}$

বা, $\dfrac{1}{\sin A} - \dfrac{\cos A}{\sin A} = \dfrac{1}{x}$

বা, $\dfrac{1-\cos A}{\sin A} = \dfrac{1}{x}$

বা, $\dfrac{(1-\cos A)^2}{\sin^2 A} = \left(\dfrac{1}{x}\right)^2$ [বর্গ করে]

বা, $\dfrac{(1-\cos A)^2}{1-\cos^2 A} = \dfrac{1}{x^2}$

বা, $\dfrac{(1-\cos A)^2}{(1+\cos A)(1-\cos A)} = \dfrac{1}{x^2}$

বা, $\dfrac{1-\cos A}{1+\cos A} = \dfrac{1}{x^2}$

বা, $\dfrac{1-\cos A + 1 + \cos A}{1-\cos A - 1 - \cos A} = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$ [যোজন-বিয়োজন]

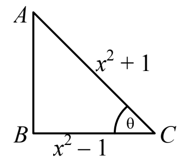
বা, $\dfrac{2}{-2\cos A} = \dfrac{1+x^2}{1-x^2}$

বা, $-\dfrac{1}{\cos A} = -\dfrac{(x^2+1)}{(x^2-1)}$

$\therefore \sec A = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

গ $\operatorname{cosec}A - \cot A = \dfrac{1}{x}$ উদ্দীপকের আলোকে পাই,

$\sec A = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ [খ নং এ প্রাপ্ত]



যেহেতু $\sec A = \dfrac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}}$

সমকোণী ΔABC- এ $AB = \sqrt{AC^2 - BC^2}$

$= \sqrt{(x^2+1)^2 - (x^2-1)^2}$

$= \sqrt{x^4 + 2x^2 + 1 - x^4 + 2x^2 - 1}$

$= \sqrt{4x^2}$

$= 2x$

বামপক্ষ $= \tan A + \cot A = \dfrac{AB}{BC} + \dfrac{BC}{AB}$

$= \dfrac{2x}{x^2-1} + \dfrac{x^2-1}{2x}$

$= \dfrac{4x^2 + (x^2-1)^2}{2x(x^2-1)}$

$= \dfrac{4x^2 + x^4 - 2x^2 + 1}{2x(x^2-1)}$

$= \dfrac{x^4 + 2x^2 + 1}{2x(x^2-1)}$

$= \dfrac{(x^2+1)^2}{2x(x^2-1)}$

$\therefore$ ডানপক্ষ $= \sec A . \operatorname{cosec}A$

$= \dfrac{x^2+1}{x^2-1} \cdot \dfrac{x^2+1}{2x}$ $\left[\because \operatorname{cosec}A = \dfrac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}} = \dfrac{x^2+1}{2x}\right]$

$= \dfrac{(x^2+1)^2}{2x(x^2-1)}$

$\therefore$ বামপক্ষ $=$ ডানপক্ষ **(প্রমাণিত)**

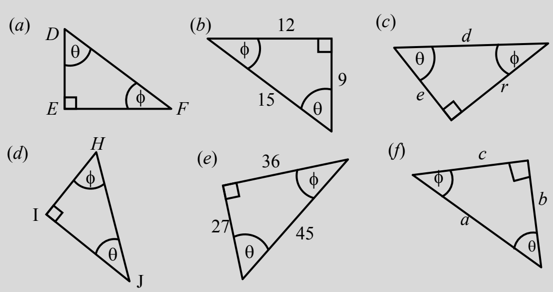
পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

কাজ

পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৭৬

θ ও ϕ কোণের জন্য অতিভুজ, সন্নিহিত বাহু ও বিপরীত বাহু নির্দেশ কর।

(i) কোণ θ **(ii) কোণ ϕ**



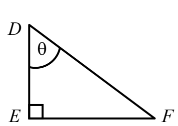
সমাধান:

a (i) θ কোণের জন্য:

অতিভুজ DF

বিপরীত বাহু EF ও

সন্নিহিত বাহু DE

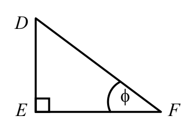


(ii) ϕ কোণের জন্য:

অতিভুজ DF

বিপরীত বাহু DE ও

সন্নিহিত বাহু EF

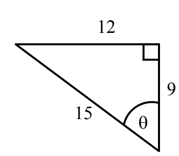


b (i) θ কোণের জন্য:

অতিভুজ 15 একক

বিপরীত বাহু 12 একক

সন্নিহিত বাহু 9 একক

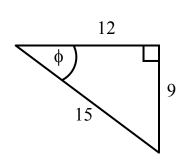


(ii) ϕ কোণের জন্য:

অতিভুজ 15 একক

বিপরীত বাহু 9 একক

সন্নিহিত বাহু 12 একক

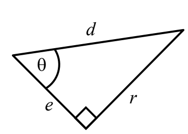


c (i) θ কোণের জন্য:

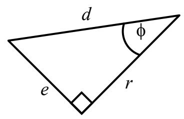
অতিভুজ d

বিপরীত বাহু r

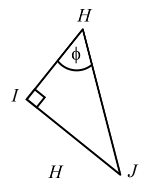
সন্নিহিত বাহু e



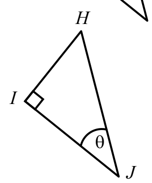
(ii) ϕ কোণের জন্য:
অতিভুজ d
বিপরীত বাহু e
সন্নিহিত বাহু r



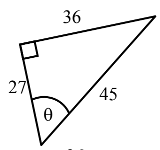
d (i) ϕ কোণের জন্য:
অতিভুজ HJ
বিপরীত বাহু JI
সন্নিহিত বাহু HI



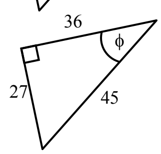
(ii) θ কোণের জন্য:
অতিভুজ HJ
বিপরীত বাহু HI
সন্নিহিত বাহু IJ



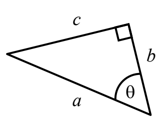
e (i) θ কোণের জন্য:
অতিভুজ 45 একক
বিপরীত বাহু 36 একক
সন্নিহিত বাহু 27 একক



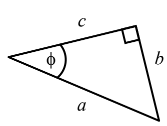
(ii) ϕ কোণের জন্য:
অতিভুজ 45 একক
বিপরীত বাহু 27 একক
সন্নিহিত বাহু 36 একক



f (i) θ কোণের জন্য:
অতিভুজ a
বিপরীত বাহু c
সন্নিহিত বাহু b



(ii) ϕ কোণের জন্য:
অতিভুজ a
বিপরীত বাহু b
সন্নিহিত বাহু c

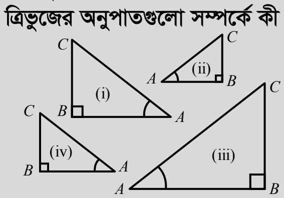


দৃষ্টি আকর্ষণ: সমকোণী ত্রিভুজে তিনটি বাহু চিহ্নিত করার সহজ উপায়

i. বৃহত্তম বাহু সর্বদা অতিভুজ
ii. কোণের সাথে থাকে সন্নিহিত বাহু (∵ সন্নিহিত অর্থ সাথে থাকা বা সংলগ্ন)
iii. অপর বাহুটি হলো বিপরীত বাহু।

কাজ *পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৭৬*

নিচের চারটি সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য মেপে সারণিটি পূরণ কর। ত্রিভুজের অনুপাতগুলো সম্পর্কে কী লক্ষ কর?



বাহুর দৈর্ঘ্য			অনুপাত (কোণের সাপেক্ষে)		
BC	*AB*	*AC*	*BC/AC*	*AB/AC*	*BC/AB*

সমাধান: চারটি সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য মেপে (সে.মি.) সারণিটি পূরণ হলো:

চিত্র	বাহুর দৈর্ঘ্য			অনুপাত (কোণের সাপেক্ষে)		
	BC	*AB*	*AC*	*BC/AC*	*AB/AC*	*BC/AB*
i.	1.3 সে.মি.	2 সে.মি.	2.4সে.মি.	0.5	0.85	0.6
ii.	0.5 সে.মি.	0.85সে.মি.	1 সে.মি.	0.5	0.85	0.6
iii.	2.5 সে.মি.	4.1 সে.মি.	4.8 সে.মি.	0.5	0.85	0.6
iv.	0.8 সে.মি.	1.2 সে.মি.	1.5 সে.মি.	0.5	0.85	0.6

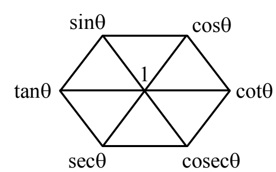
উপরের সারণি হতে দেখতে পাই যে, চারটি ত্রিভুজের বাহুর অনুপাত সমান।
অতএব, সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলোর অনুপাত ধ্রুবক।

কাজ *পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৮০*

নিচের ত্রিকোণমিতিক সূত্রগুলো সহজে মনে রাখার জন্য তালিকা তৈরি কর।

$\mathrm{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$ $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$	$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$	$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ $\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$ $\mathrm{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

সমাধান: নিচের চিত্রটি মনে রাখলেই উপরের ত্রিকোণমিতিক সূত্রগুলো সহজেই মনে রাখা যায়।



বিপরীত সম্পর্ক:

$\tan\theta$ এর বিপরীত পার্শ্বে আছে $\cot\theta$

$\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$ এবং $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

$\sin\theta$ এর বিপরীত পার্শ্বে আছে $\mathrm{cosec}\theta$

$\sin\theta = \frac{1}{\mathrm{cosec}\theta}$ এবং $\mathrm{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

$\cos\theta$ এর বিপরীত পার্শ্বে আছে $\sec\theta$

$\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$ এবং $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

পাশাপাশি সম্পর্ক:

ঘড়ির কাঁটার দিকে (Clockwise) বিবেচনা করলে,

$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$ [পাশাপাশি তিনটি বিবেচনা করলে]

$\sin\theta = \frac{\cos\theta}{\cot\theta}$

$\cos\theta = \frac{\cot\theta}{\mathrm{cosec}\theta}$

ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে (Anticlockwise) বিবেচনা করলে,

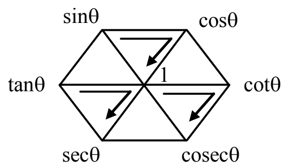
$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$\tan\theta = \frac{\sec\theta}{\mathrm{cosec}\theta}$

$\mathrm{cosec}\theta = \frac{\cot\theta}{\cos\theta}$

$a^2 + b^2 = c^2$ সম্পর্ক:

তীরের প্রথমটির বর্গ এবং মাঝেরটির বর্গ যোগ করলে তীরের শেষপ্রান্তের বর্গ পাওয়া যায়।



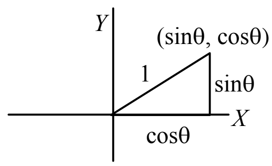
$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$\tan^2\theta + 1 = \sec^2\theta$

$1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$

বিকল্পভাবে উপরের সূত্রগুলো মনে রাখা যেতে পারে:

সমকোণী ত্রিভুজের সন্নিহিত বাহুর বরাবর $\cos\theta$, বিপরীত বাহু বরাবর $\sin\theta$ এবং অতিভুজ 1 চিন্তা করলে, পিথাগোরাসের সূত্রানুযায়ী-



$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

সমীকরণটিকে $\cos^2\theta$ দ্বারা ভাগ করলে,

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$

সমীকরণটিকে $\sin^2\theta$ দ্বারা ভাগ করলে,

$1 + \cot^2\theta = \text{cosec}^2\theta$

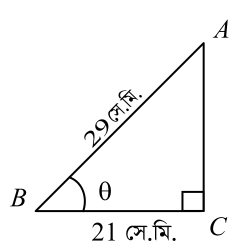
কাজ *পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৮০*

***ABC* সমকোণী ত্রিভুজের $\angle C$ সমকোণ, $AB = 29$ সে.মি., $BC = 21$ সে.মি. এবং $\angle ABC = \theta$ হলে, $\cos^2\theta - \sin^2\theta$ এর মান বের কর।**

<u>সমাধান</u>: দেওয়া আছে, $AB = 29$ সে.মি., $BC = 21$ সে.মি এবং $\angle ABC = \theta$. ABC সমকোণী ত্রিভুজে

অতিভুজ, $AB = 29$ সে.মি.

সন্নিহিত বাহু, $BC = 21$ সে.মি.



প্রদত্ত রাশি $= \cos^2\theta - \sin^2\theta$

$= \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta)$ $[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

$= \cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta$

$= 2\cos^2\theta - 1$

$= 2\left(\dfrac{BC}{AB}\right)^2 - 1$

$= 2\left(\dfrac{21}{29}\right)^2 - 1$

$= 2 \times \dfrac{441}{841} - 1$

$= \dfrac{882 - 841}{841}$

$= \dfrac{41}{841}$

সুতরাং, $\cos^2\theta - \sin^2\theta = \dfrac{41}{841}$

কাজ *পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৮৩*

ক) $\cot^4 A - \cot^2 A = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\cos^4 A + \cos^2 A = 1$

<u>সমাধান</u>: দেওয়া আছে, $\cot^4 A - \cot^2 A = 1$

বা, $\dfrac{\cos^4 A}{\sin^4 A} - \dfrac{\cos^2 A}{\sin^2 A} = 1$

বা, $\dfrac{\cos^4 A - \cos^2 A \,.\, \sin^2 A}{\sin^4 A} = 1$

বা, $\cos^4 A - \cos^2 A \,.\, \sin^2 A = \sin^4 A$

বা, $\cos^4 A = \sin^4 A + \cos^2 A \,.\, \sin^2 A$

বা, $\cos^4 A = \sin^2 A(\sin^2 A + \cos^2 A)$

বা, $\cos^4 A = \sin^2 A$ $[\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1]$

বা, $\cos^4 A = 1 - \cos^2 A$.

$\therefore \cos^4 A + \cos^2 A = 1$ **(প্রমাণিত)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

দেওয়া আছে, $\cot^4 A - \cot^2 A = 1$

বা, $\cot^4 A = 1 + \cot^2 A$

বা, $\cot^4 A = \text{cosec}^2 A$ $[\because \text{cosec}^2 A = 1 + \cot^2 A]$

বা, $\dfrac{\cos^4 A}{\sin^4 A} = \dfrac{1}{\sin^2 A}$

বা, $\cos^4 A = \dfrac{\sin^4 A}{\sin^2 A}$

বা, $\cos^4 A = \sin^2 A$

বা, $\cos^4 A = 1 - \cos^2 A$ $[\because \sin^2 A = 1 - \cos^2 A]$

$\therefore \cos^4 A + \cos^2 A = 1$ **(প্রমাণিত)**

খ) $\sin^2 A + \sin^4 A = 1$ হলে, প্রমাণ কর যে, $\tan^4 A - \tan^2 A = 1$

<u>সমাধান</u>: দেওয়া আছে, $\sin^2 A + \sin^4 A = 1$

বা, $\dfrac{\sin^2 A + \sin^4 A}{\cos^4 A} = \dfrac{1}{\cos^4 A}$ [$\cos^4 A$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\dfrac{\sin^2 A}{\cos^4 A} + \dfrac{\sin^4 A}{\cos^4 A} = \dfrac{1}{\cos^4 A}$

বা, $\dfrac{\sin^2 A}{\cos^2 A} \cdot \dfrac{1}{\cos^2 A} + \tan^4 A = \sec^4 A$

বা, $\tan^2 A \,.\, \sec^2 A + \tan^4 A = \sec^4 A$

বা, $\tan^4 A = \sec^4 A - \tan^2 A.\sec^2 A$

বা, $\tan^4 A = \sec^2 A(\sec^2 A - \tan^2 A)$

বা, $\tan^4 A = \sec^2 A$ $[\because \sec^2 A - \tan^2 A = 1]$

বা, $\tan^4 A = 1 + \tan^2 A$

$\therefore \tan^4 A - \tan^2 A = 1$ **(প্রমাণিত)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

দেওয়া আছে, $\sin^2 A + \sin^4 A = 1$

বা, $\sin^4 A = 1 - \sin^2 A$

বা, $\sin^4 A = \cos^2 A$ $[\because 1 - \sin^2 A = \cos^2 A]$

বা, $\dfrac{\sin^4 A}{\cos^4 A} = \dfrac{\cos^2 A}{\cos^4 A}$ [উভয়পক্ষকে $\cos^4 A$ দ্বারা ভাগ করে]

বা, $\tan^4 A = \dfrac{1}{\cos^2 A}$

বা, $\tan^4 A = \sec^2 A$ $[\because \dfrac{1}{\cos A} = \sec A]$

বা, $\tan^4 A = 1 + \tan^2 A$ $[\because \sec^2 A = 1 + \tan^2 A]$

$\therefore \tan^4 A - \tan^2 A = 1$ **(প্রমাণিত)**