সপ্তম অধ্যায়

অসীম ধারা

অনুশীলনী - ৭

এক নজরে সূত্রাবলি

সমান্তর ধারা / অনুক্রম এর ক্ষেত্রে:

nতম পদ $U_n = a + (n-1)d$

n টি পদের সমষ্টি $S_n = \frac{n}{2}\{2a + (n-1)d\}$

এখানে,
a = ধারা বা অনুক্রমের ১ম পদ
d = ধারা বা অনুক্রমের সাধারণ অন্তর
n = পদসংখ্যা

গুণোত্তর ধারার ক্ষেত্রে:

n তম পদ $U_n = ar^{n-1}$

n টি পদের সমষ্টি

$S_n = a.\frac{r^n - 1}{r - 1}$, যখন $r > 1$এবং

$S_n = a.\frac{1 - r^n}{1 - r}$, যখন $r < 1$

এখানে,
a = গুণোত্তর ধারার ১ম পদ
r = ধারাটির সাধারণ অনুপাত
n = পদসংখ্যা

গুণোত্তর ধারার অসীমতক সমষ্টি:

$$S_\infty = \frac{a}{1-r}$$ **[উল্লেখ্য যে, $|r| < 1$ বা $-1 < r < 1$ হলে গুণোত্তর ধারাটির অসীমতক সমষ্টি পাওয়া সম্ভব]**

অনুক্রম (Sequence): যখন কতকগুলো রাশি একটা বিশেষ নিয়মে ক্রমান্বয়ে এমনভাবে সাজানো হয় যে প্রত্যেক রাশি এর পূর্বের ও পরের পদের সাথে সম্পর্কিত থাকে, তখন সাজানো রাশিগুলোর সেটকে অনুক্রম (Sequence) বলে। যেমন: 1, 3, 5, ...

সমান্তর অনুক্রম: সমান্তর অনুক্রমে যেকোনো পদ ও এর পূর্ববর্তী পদের পার্থক্য সব সময় সমান থাকে এবং এ পার্থক্যকে সাধারণ অন্তর বলা হয়। যেমন: 1, 3, 5, 7, 9 অনুক্রমের প্রথম পদ 1, দ্বিতীয় পদ 3, তৃতীয় পদ 5, চতুর্থ পদ 7 এবং পঞ্চম পদ 9.

এখানে, দ্বিতীয় পদ – প্রথম পদ = 3 – 1 = 2,
তৃতীয় পদ – দ্বিতীয় পদ = 5 – 3 = 2,

এই অনুক্রমের যেকোনো পদ ও এর পূর্ববর্তী পদের অন্তর সর্বদা সমান। উল্লিখিত সাধারণ অন্তর 2। সুতরাং এটি একটি সমান্তর অনুক্রম।

সমান্তর অনুক্রমের সাধারণ পদ:

সমান্তর অনুক্রমের ক্ষেত্রে প্রথম পদ = a, সাধারণ অন্তর d হলে, n তম পদ (সাধারণ পদ) = $a + (n-1)d$

উদাহরণ: 1, 4, 7, 10, ... অনুক্রমের সাধারণ পদ নির্ণয়:

এখানে, প্রথম পদ, $a = 1$, সাধারণ অন্তর, $d = (4 - 1) = 3$

$\therefore$ n তম পদ (সাধারণ পদ) $= a + (n-1)d$
$= 1 + (n-1)3$
$= 1 + 3n - 3$
$= 3n - 2$

$\therefore$ অনুক্রমটির সাধারণ পদ = $3n - 2$

উদাহরণ: $\frac{2}{3}, \frac{4}{4}, \frac{6}{5}$, ...অনুক্রমের সাধারণ পদ নির্ণয় কর?

সাধারণ পদ (n তম পদ) = $\frac{\text{লবের সাধারণ পদ}}{\text{হরের সাধারণ পদ}}$

$= \frac{2 + (n-1)2}{3 + (n-1)1}$

$= \frac{2 + 2n - 2}{3 + n - 1} = \frac{2n}{n+2}$

গুণোত্তর অনুক্রম: গুণোত্তর অনুক্রমে যেকোনো পদ ও এর পূর্ববর্তী পদের অনুপাত সবসময় সমান থাকে এবং এ অনুপাতকে সাধারণ অনুপাত বলা হয়। যেমন: 1, 3, 9, 27, ... অনুক্রমটির প্রথম পদ 1, দ্বিতীয় পদ 3, তৃতীয় পদ 9, চতুর্থ পদ 27।

এখানে, দ্বিতীয় পদের সাথে প্রথম পদের অনুপাত $= \frac{3}{1} = 3$,

তৃতীয় পদের সাথে দ্বিতীয় পদের অনুপাত $= \frac{9}{3} = 3$

এই অনুক্রমের যেকোনো পদ ও এর পূর্ববর্তী পদের অনুপাত সর্বদা সমান। উল্লিখিত অনুক্রমের সাধারণ অনুপাত 3। সুতরাং, অনুক্রমটি একটি গুণোত্তর অনুক্রম।

গুণোত্তর অনুক্রমের সাধারণ পদ:

গুণোত্তর অনুক্রমের ক্ষেত্রে প্রথম পদ $= a$, সাধারণ অনুপাত q হলে, n তম পদ (সাধারণ পদ) $= aq^{n-1}$

উদাহরণ:

1, 3, 9, 27, ... অনুক্রমের সাধারণ পদ নির্ণয়:

এখানে, প্রথম পদ, $a = 1$, সাধারণ অনুপাত, $q = \frac{3}{1} = 3$

$\therefore$ n তম পদ (সাধারণ পদ) $= aq^{n-1}$

$= 1 \times 3^{n-1}$

$= 3^{n-1}$

$\therefore$ অনুক্রমটির সাধারণ পদ $= 3^{n-1}$

উদাহরণ: $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{9}{8}$, ...অনুক্রমের সাধারণ পদ নির্ণয় কর?

$\therefore n$ তম পদ $= \frac{\text{লবের সাধারণ পদ}}{\text{হরের সাধারণ পদ}}$

$= \frac{1.3^{n-1}}{2.2^{n-1}}$

$= \frac{3^{n-1}}{2^n}$

মিশ্র অনুক্রম:

কোনো অনুক্রমে রাশিগুলো ভগ্নাংশ হলে এর হরগুলো এবং লবগুলো ভিন্ন ভিন্ন অনুক্রম আকারে থাকতে পারে। এরকমের অনুক্রমগুলোকে আমরা মিশ্র অনুক্রম হিসেবে বিবেচনা করি। যেমন: কোনো অনুক্রমে হরগুলো সমান্তর অনুক্রম এবং লবগুলো গুণোত্তর অনুক্রম হতে পারে। সেক্ষেত্রে এই অনুক্রমটিকে মিশ্র অনুক্রম হিসেবে বিবেচনা করা হয়।

উদাহরণ: $\frac{1}{3}, \frac{2}{9}, \frac{3}{27}$, ...

উপরের অনুক্রমটিতে দেখা যায় যে, অনুক্রমটির লবের পদগুলো সমান্তর অনুক্রম অনুসরণ করছে এবং হরের পদগুলো গুণোত্তর অনুক্রম করছে।

$\therefore$ n তম পদ (সাধারণ পদ) $= \frac{1 + (n-1)\, d}{aq^{n-1}}$

$= \frac{1 + (n-1)\, 1}{3.3^{n-1}}$

$= \frac{n}{3^n}$

সুতরাং অনুক্রমটির সাধারণ পদ $= \frac{n}{3^n}$

ধনাত্মক ও ঋণাত্মক চিহ্নের ক্ষেত্রে নিয়মসমূহ:

- প্রতিটি পদের পূর্বেই ধনাত্মক চিহ্ন থাকলে সাধারণ পদটি ধনাত্মক চিহ্ন বিশিষ্ট হবে। যেমন: $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}$ ... ... অনুক্রমটির প্রতিটি পদ ধনাত্মক চিহ্নবিশিষ্ট। তাই এর সাধারণ পদ হবে $\frac{n}{n+1}$.
- প্রতিটি পদের পূর্বেই ঋণাত্মক চিহ্ন থাকলে সাধারণ পদটি ঋণাত্মক চিহ্নবিশিষ্ট হবে। যেমন: $-\frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, -\frac{4}{5}$ ... ... অনুক্রমের প্রতিটি পদ ঋণাত্মক চিহ্নবিশিষ্ট। তাই এর সাধারণ পদ হবে $-\frac{n+1}{n+2}$.

- বিজোড় পদগুলোতে ঋণাত্মক চিহ্ন ও জোড় পদগুলোতে ধনাত্মক চিহ্ন থাকলে সাধারণ পদে $(-1)^n$ থাকবে। যেমনঃ $-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, -\frac{3}{4}, \frac{4}{5} \ldots$ … … অনুক্রমটির সাধারণ পদ $(-1)^n \frac{n}{n+1}$.
- বিজোড় পদগুলোতে ধনাত্মক চিহ্ন ও জোড় পদগুলোতে ঋণাত্মক চিহ্ন থাকলে সাধারণ পদে $(-1)^{n+1}$ থাকবে। যেমনঃ $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5} \ldots \ldots$ অনুক্রমটির সাধারণ পদ.$(-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}$.

ধারা (Series): কোনো অনুক্রমের পদগুলো পরপর '+' চিহ্ন দ্বারা যুক্ত করলে একটি ধারা (Series) পাওয়া যায়। যেমন- $2 + 4 + 6 + 8 + \ldots \ldots$ একটি ধারা। ধারাটির পরপর দুইটি পদের পার্থক্য সমান। আবার $2 + 4 + 8 + 16 + \ldots \ldots \ldots$ একটি ধারা। এর পরপর দুইটি পদের অনুপাত সমান। সুতরাং যেকোনো ধারার পরপর দুইটি পদের মধ্যে সম্পর্কের উপর নির্ভর করে ধারাটির বৈশিষ্ট্য। বৈশিষ্ট্যের উপর ভিত্তি করে ধারাকে প্রধানত দুইটি ভাগে ভাগ করা যায়। যথা- সমান্তর ধারা ও গুণোত্তর ধারা।

কোনো ধারার রাশি বা পদের সংখ্যার ওপর নির্ভর করে ধারাকে দুইভাবে ভাগ করা যায়। যথা-

(i) সসীম ধারা বা সান্ত ধারা (Finite Series)

(ii) অসীম ধারা বা অনন্ত ধারা (Infinite Series)

সসীম ধারা বা সান্ত ধারা: যে ধারার রাশি বা পদের সংখ্যা নির্দিষ্ট তাকে সসীম বা সান্ত ধারা বলে।

অসীম ধারা বা অনন্ত ধারা: যে ধারার রাশি বা পদের সংখ্যা নির্দিষ্ট নয় তাকে অসীম বা অনন্ত ধারা বলে।

অসীম গুণোত্তর ধারার সমষ্টি (Sum of Infinite Series in Geometric Progression):

$a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots \ldots \ldots$ গুণোত্তর ধারাটির প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r.

সুতরাং, ধারাটির n তম পদ $= ar^{n-1}$, যেখানে $n \in N$ এবং $r \neq 1$ হলে

ধারাটির n তম আংশিক সমষ্টি $S_n = a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots \ldots \ldots + ar^{n-1}$

$$= a.\frac{r^n - 1}{r - 1}, \text{ যখন } r > 1$$

এবং $S_n = a.\frac{1 - r^n}{1 - r}$, যখন $r < 1$

প্রয়োজনীয় তথ্য:

(i) $|r| < 1$ হলে, অর্থাৎ, $-1 < r < 1$ হলে, n এর মান বৃদ্ধি করলে ($n \to \infty$ হলে) $|r^n|$ এর মান হ্রাস পায় এবং n এর মান যথেষ্ট বড় করলে $|r^n|$ এর মান 0 এর কাছাকাছি হয়। অর্থাৎ r^n এর প্রান্তীয় মান (Limiting Value) 0 হয়। ফলে S_n এর প্রান্তীয় মান,

$$S_n = \frac{a(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r} - \frac{ar^n}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}$$

এক্ষেত্রে, $a + ar + ar^2 + \ldots \ldots \ldots$ অসীম ধারাটির সমষ্টি $S_\infty = \frac{a}{1 - r}$

(ii) $|r| > 1$ হলে, অর্থাৎ $r > 1$ অথবা $r < -1$ হলে, n এর মান বৃদ্ধি করলে $|r^n|$ এর মান বৃদ্ধি পায় এবং n কে যথেষ্ট বড় করে $|r^n|$ এর মান যথেষ্ট বড় করা যায়। সুতরাং এমন কোনো নির্দিষ্ট সংখ্যা S পাওয়া যায় না, যাকে, S_n এর প্রান্তীয় মান ধরা যায়।
অর্থাৎ, এক্ষেত্রে অসীম ধারাটির কোনো সমষ্টি নাই।

(iii) $r = -1$ হলে, S_n এর প্রান্তীয় মান পাওয়া যায় না। কেননা, n জোড় সংখ্যা হলে $(-1)^n = 1$ এবং n বিজোড় সংখ্যা হলে $(-1)^n = -1$
এক্ষেত্রে ধারাটি হবে, $a - a + a - a + a - a + \ldots \ldots \ldots$ সুতরাং, এই অসীম ধারাটির কোনো সমষ্টি নাই।

$|r| < 1$ অর্থাৎ, $-1 < r < 1$ হলে, $a + ar + ar^2 + \ldots \ldots \ldots$ অসীম গুণোত্তর ধারাটির সমষ্টি $S_\infty = \frac{a}{1 - r}$ ।

সুতরাং r এর মান 1 অপেক্ষা বড় অথবা -1 অপেক্ষা ছোট হলে গুণোত্তর ধারার অসীমতক সমষ্টি পাওয়া যায়না।

অনুশীলনীর সমাধান

১ 1, 3, 5, 7, অনুক্রমটির 12 তম পদ কোনটি?
(ক) 12 (খ) 13 (গ) 23 (ঘ) 25

উত্তর: (গ)

ব্যাখ্যা: প্রদত্ত অনুক্রমটি সমান্তর অনুক্রম যার ১ম পদ $a = 1$
সাধারণ অন্তর $d = 3 - 1 = 2$
আমরা জানি, সমান্তর অনুক্রমের n তম পদ $= a + (n-1)\,d$
$\therefore$ 12 তম পদ $= a + (12-1)d$
$= 1+(12-1).2 = 1 + 11 \times 2 = 1 + 22 = 23$

২ কোনো একটি অনুক্রমের n তম পদ $= \dfrac{1}{n\,(n+1)}$ হলে এর তৃতীয় পদ কোনটি?
(ক) $\frac{1}{3}$ (খ) $\frac{1}{6}$ (গ) $\frac{1}{12}$ (ঘ) $\frac{1}{20}$

উত্তর: (গ)

ব্যাখ্যা: দেওয়া আছে, n তম পদ $= \dfrac{1}{n(n+1)}$
$\therefore$ ৩য় পদ $= \dfrac{1}{3(3+1)} = \dfrac{1}{3\times 4} = \dfrac{1}{12}$ [$\because$ ৩য় পদের জন্য $n = 3$]

৩ কোনো একটি অনুক্রমের n তম পদ $= \dfrac{1-(-1)^n}{2}$ হলে 20 তম পদ কোনটি?
(ক) 0 (খ) 1 (গ) –1 (ঘ) 2

উত্তর: (ক)

ব্যাখ্যা: দেওয়া আছে, n তম পদ $= \dfrac{1-(-1)^n}{2}$
$\therefore$ 20 তম পদ $= \dfrac{1-(-1)^{20}}{2}$ [$\because$ 20 তম পদের জন্য $n = 20$]
$= \dfrac{1-1}{2} = 0$

৪ কোনো একটি অনুক্রমের n তম পদ $u_n = \dfrac{1}{n}$ এবং $u_n < 10^{-4}$ হলে n এর মান হবে -
i. $n < 10^3$
ii. $n < 10^4$
iii. $n > 10^4$
নিচের কোনটি সঠিক?
(ক) iii (খ) i, iii (গ) ii, iii (ঘ) i, ii, iii

উত্তর: (ক)

ব্যাখ্যা: $u_n = \dfrac{1}{n}$ এবং $u_n < 10^{-4}$
$\therefore \dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{10^4}$ $\left[\because 10^{-4} = \dfrac{1}{10^4}\right]$
বা, $n > 10^4$ [বিপরীতকরণ করে]

বি.দ্র: অসমতার ক্ষেত্রে বিপরীতকরণের ফলে অসমতার চিহ্ন পাল্টে যায়।

৫ কোনো একটি অনুক্রমের nতম পদ $u_n = 1 - (-1)^n$ হলে, এর
(i) 10 তম পদ 0
(ii) 15 তম পদ 2
(iii) প্রথম 12 পদের সমষ্টি 12
নিচের কোনটি সঠিক?
(ক) i, ii (খ) i, iii (গ) ii, iii (ঘ) i, ii, iii

উত্তর: (ঘ)

ব্যাখ্যা: অনুক্রমের n তম পদ $u_n = 1 - (-1)^n$
$\therefore$ 10 তম পদ, $u_{10} = 1 - (-1)^{10} = 1 - 1 = 0$
15 তম পদ, $u_{15} = 1 - (-1)^{15} = 1 - (-1) = 1 + 1 = 2$
ধারার পদগুলো হলো: 2, 0, 2, 0 ... ...
$\therefore$ প্রথম 12টি পদের সমষ্টি $= 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 12$
[$\because$ জোড় পদগুলির মান শূন্য]
সুতরাং (i), (ii) ও (iii) নং সঠিক।

■ পার্শ্বের ধারাটি লক্ষ কর এবং (৬-৮) নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাও: $4 + \dfrac{4}{3} + \dfrac{4}{9} + \ldots$

৬ ধারাটির 10 তম পদ কোনটি?
(ক) $\frac{4}{3^{10}}$ (খ) $\frac{4}{3^9}$ (গ) $\frac{4}{3^{11}}$ (ঘ) $\frac{4}{3^{12}}$

উত্তর: (খ)

ব্যাখ্যা: প্রদত্ত ধারাটি একটি গুণোত্তর ধারা যার,
১ম পদ $a = 4$, সাধারণ অনুপাত, $r = \dfrac{1}{3}$ এবং n তম পদ $= ar^{n-1}$
$\therefore$ 10 তম পদ $= ar^{10-1} = 4\left(\dfrac{1}{3}\right)^{10-1}$
$= 4\left(\dfrac{1}{3}\right)^9 = \dfrac{4}{3^9}$

৭ ধারাটির ১ম 5 পদের সমষ্টি কত?
(ক) $\frac{160}{27}$ (খ) $\frac{484}{81}$ (গ) $\frac{12}{9}$ (ঘ) $\frac{20}{9}$

উত্তর: (খ)

ব্যাখ্যা: আমরা জানি, প্রথম n পদের সমষ্টি $S_n = a.\dfrac{1-r^n}{1-r}$ যখন $r < 1$
এখানে $a = 4$ এবং $r = \dfrac{1}{3} < 1$
$\therefore$ প্রথম 5 পদের সমষ্টি, $S_5 = a.\dfrac{1-r^5}{1-r}$
$$= 4\,\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^5}{1-\frac{1}{3}}$$
$$= 4 \times \frac{1-\frac{1}{243}}{\frac{3-1}{3}}$$
$$= 4 \times \frac{242}{243} \times \frac{3}{2} = \frac{484}{81}$$

৮ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি কত?
(ক) 0 (খ) 5 (গ) 6 (ঘ) 7

উত্তর: (গ)

ব্যাখ্যা: ধারাটির অসীমতক সমষ্টি $S_\infty = \dfrac{a}{1-r}$
$$= \frac{4}{1-\frac{1}{3}} = \frac{4}{\frac{2}{3}}$$
$$= 4 \times \frac{3}{2}$$
$$= 6$$

৯ **প্রদত্ত অনুক্রমের 10 তম পদ, 15 তম পদ এবং r তম পদ নির্ণয় কর:**

ক) 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...

খ) $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}$, ...

গ) অনুক্রমটির n তম পদ $= \frac{1}{n(n+1)}, n \in N$

ঘ) 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...

ঙ) $5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \frac{5}{27}, \frac{5}{81}$, ...

চ) অনুক্রমটির n তম পদ $= \frac{1-(-1)^{3n}}{2}$

<u>সমাধান:</u>

ক **2, 4, 6, 8, 10, 12, ...**

প্রদত্ত অনুক্রমটি হলো 2, 4, 6, 8, 10, 12, ...
অনুক্রমটির পাশাপাশি যে কোনো দুটি পদের পার্থক্য সর্বদা সমান।
$\therefore$ প্রদত্ত অনুক্রমটি একটি সমান্তর অনুক্রম যার
প্রথম পদ $a = 2$ এবং সাধারণ অন্তর $d = 4 - 2 = 2$
আমরা জানি, সমান্তর অনুক্রমের n তম পদ $u_n = a + (n-1)d$
$\therefore$ অনুক্রমটির r তম পদ $u_r = 2 + (r-1)2 = 2 + 2r - 2 = 2r$
$\therefore$ অনুক্রমটির 10 তম পদ $u_{10} = 2 \times 10 = 20$
$\therefore$ অনুক্রমটির 15 তম পদ $u_{15} = 2 \times 15 = 30$
Ans: 20, 30 এবং $2r$

খ **$\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}$, ...**

অনুক্রমটির পাশাপাশি যে কোনো দুটি পদের পার্থক্য সর্বদা সমান।
$\therefore$ প্রদত্ত অনুক্রমটি একটি সমান্তর অনুক্রম যার
প্রথম পদ $a = \frac{1}{2}$ এবং সাধারণ অন্তর $d = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
আমরা জানি, সমান্তর অনুক্রমের n তম পদ $u_n = a + (n-1)d$
$\therefore$ অনুক্রমটির r তম পদ $u_r = \frac{1}{2} + (r-1)\frac{1}{2}$
$= \frac{1}{2} + \frac{r}{2} - \frac{1}{2} = \frac{r}{2}$
$\therefore$ অনুক্রমটির 10 তম পদ $u_{10} = \frac{10}{2} = 5$
$\therefore$ অনুক্রমটির 15 তম পদ $u_{15} = \frac{15}{2}$
Ans: 5, $\frac{15}{2}$ এবং $\frac{r}{2}$

গ অনুক্রমের n তম পদ $= \frac{1}{n(n+1)}, n \in N$

দেওয়া আছে, অনুক্রমটির n তম পদ $u_n = \frac{1}{n(n+1)}, n \in N$
$\therefore$ অনুক্রমটির r তম পদ $u_r = \frac{1}{r(r+1)}$
$\therefore$ অনুক্রমটির 10 তম পদ $u_{10} = \frac{1}{10(10+1)} = \frac{1}{110}$
$\therefore$ অনুক্রমটির 15 তম পদ $u_{15} = \frac{1}{15(15+1)} = \frac{1}{240}$
Ans: $\frac{1}{110}, \frac{1}{240}$ এবং $\frac{1}{r(r+1)}$

ঘ **0, 1, 0, 1, 0, 1, ...**

দেওয়া আছে, 0, 1, 0, 1, 0, 1, ...
প্রদত্ত অনুক্রমটি থেকে দেখা যায় যে,
বিজোড় স্থানের পদগুলো 0 (শূন্য) এবং জোড় স্থানের পদগুলো 1.
এখন যদি r জোড় হয় তবে r তম পদ, $u_r = 1$
এবং যদি r বিজোড় হয় তবে r তম পদ, $u_r = 0$
$\therefore$ অনুক্রমটির 10 তম পদ, $u_{10} = 1$ [$\because$ 10 জোড় স্থানীয় পদ]
$\therefore$ অনুক্রমটির 15 তম পদ, $u_{15} = 0$ [$\because$ 15 বিজোড় স্থানীয় পদ]
Ans: 1, 0 এবং 1 (r জোড় হলে) ও 0 (r বিজোড় হলে)

ঙ **$5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \frac{5}{27}, \frac{5}{81}$, ...**

প্রদত্ত অনুক্রমটি হলো, $5, \frac{5}{3}, \frac{5}{9}, \frac{5}{27}, \frac{5}{81}$, ...
অনুক্রমটির পাশাপাশি যে কোনো দুটি পদের অনুপাত সর্বদা সমান।
$\therefore$ প্রদত্ত অনুক্রমটি একটি গুণোত্তর অনুক্রম যার
প্রথম পদ $a = 5$ এবং সাধারণ অনুপাত $q = \frac{1}{3}$
আমরা জানি, গুণোত্তর অনুক্রমের n তম পদ $u_n = aq^{n-1}$
$\therefore$ অনুক্রমটির r তম পদ $u_r = 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{r-1} = \frac{5}{3^{r-1}}$
$\therefore$ অনুক্রমটির 10 তম পদ $u_{10} = 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{10-1} = \frac{5}{3^9}$
$\therefore$ অনুক্রমটির 15 তম পদ $u_{15} = 5 \times \left(\frac{1}{3}\right)^{15-1} = \frac{5}{3^{14}}$
Ans: $\frac{5}{3^9}, \frac{5}{3^{14}}$ এবং $\frac{5}{3^{r-1}}$

চ **অনুক্রমটির n তম পদ $= \frac{1-(-1)^{3n}}{2}$**

দেওয়া আছে, অনুক্রমটির n তম পদ $u_n = \frac{1-(-1)^{3n}}{2}$
$\therefore$ অনুক্রমটির r তম পদ $u_r = \frac{1-(-1)^{3r}}{2}$
এখানে, r জোড় হলে $3r$ জোড় হবে তাহলে
$$u_r = \frac{1-(-1)^{3r}}{2} = \frac{1-1}{2} = \frac{0}{2} = 0$$
এবং, r বিজোড় হলে $3r$ বিজোড় হবে তাহলে
$$u_r = \frac{1-(-1)^{3r}}{2} = \frac{1-(-1)}{2} = \frac{2}{2} = 1$$
$\therefore$ অনুক্রমটির 10 তম পদ $u_{10} = 0$
$\therefore$ অনুক্রমটির 15 তম পদ $u_{15} = 1$
Ans: 0, 1 এবং $\frac{1-(-1)^{3r}}{2}$

◆◆ অনুশীলনীর ৯(চ)নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

***i*) একটি ধারার *n* তম পদ $2(-1)^{n-1}$** ক. ধারাটি নির্ণয় কর। খ. ধারাটির যদি অসীমতক সমষ্টি থাকে তবে- তা নির্ণয় কর। গ. ধারাটির ১ম দশটি পদের সমষ্টি কত?	নিজে নিজে চেষ্টা কর। (ক) $2-2+2-2+$; (খ) ধারাটির অসীমতক সমষ্টি নেই; (গ) 0
***ii*) একটি অনুক্রমের *n* তম পদ $U_n = \frac{1}{n(n+1)}$** ক. ধারাটি নির্ণয় করে সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর। খ. ধারাটির 15 তম পদ এবং ১ম 10 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। গ. ধারাটির অসীমতক সমষ্টি নির্ণয় কর এবং *n* এর মান যথেষ্ট ছোট হলে U_n এর প্রান্তীয় মান সম্পর্কে কি বলা যায়?	নিজে নিজে চেষ্টা কর। (ক) $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\ldots, \frac{1}{3}$; (খ) $\frac{1}{240}, \frac{10}{11}$ (গ) n এর মান যথেষ্ট ছোট হলে U_n এর মান 1/2 এর দিকে ধাবিত হয়

১০ একটি অনুক্রমের n তম পদ $u_n = \frac{1}{n}$

ক) $u_n < 10^{-5}$ হলে, n এর মান কিরূপ হবে?
খ) $u_n > 10^{-5}$ হলে, n এর মান কিরূপ হবে?
গ) u_n এর প্রান্তীয় মান (n যথেষ্ট বড় হলে) সম্পর্কে কী বলা যায়?

সমাধানঃ

ক **$u_n < 10^{-5}$ হলে, n এর মান কিরূপ হবে?**

এখানে, $u_n < 10^{-5}$

$\therefore \frac{1}{n} < 10^{-5}$ $\quad [\because u_n = \frac{1}{n}]$

বা, $\frac{1}{n} < \frac{1}{10^5}$

$\therefore n > 10^5$ [বিপরীতকরণ করে]

$\therefore u_n = \frac{1}{n} < 10^{-5}$ হলে $n > 10^5$ হবে

বি.দ্রঃ বিপরীতকরণ করলে অসমতার দিক পরিবর্তিত হয়।

খ **$u_n > 10^{-5}$ হলে, n এর মান কিরূপ হবে?**

এখানে, $u_n > 10^{-5}$

$\therefore \frac{1}{n} > 10^{-5}$ $\quad [\because u_n = \frac{1}{n}]$

বা, $\frac{1}{n} > \frac{1}{10^5}$

$\therefore n < 10^5$ [বিপরীতকরণ করে]

$\therefore u_n = \frac{1}{n} > 10^{-5}$ হলে $n < 10^5$ হবে

গ **u_n এর প্রান্তীয় মান (n যথেচ্ছ বড় হলে) সম্পর্কে কী বলা যায়?**

দেওয়া আছে, অনুক্রমটির n তম পদ, $u_n = \frac{1}{n}$

$u_n = \frac{1}{n}$ সমীকরণে n এর মান যত বড় হবে u_n এর মান তত ছোট হবে। এভাবে n এর মান যথেচ্ছ বড় হতে থাকলে u_n এর মান এক সময় শূন্য (0) হবে।

$\therefore$ n যথেচ্ছ বড় হলে $u_n = \frac{1}{n}$ এর প্রান্তীয় মান শূন্যের (0) দিকে ধাবিত হয়।

১১ প্রদত্ত অসীম গুণোত্তর ধারার (অসীমতক) সমষ্টি যদি থাকে, তবে তা নির্ণয় করঃ

ক) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\ldots$ **খ) $\frac{1}{5}-\frac{2}{5^2}+\frac{4}{5^3}-\frac{8}{5^4}+\ldots\ldots$** **গ) $8+2+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\ldots\ldots$**

ঘ) $1+2+4+8+16+\ldots\ldots$ **ঙ) $\frac{1}{2}+\left(-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}\right)+\left(-\frac{1}{16}\right)+\ldots\ldots$**

সমাধানঃ

ক **$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\ldots$**

এখানে, প্রথম পদ $a = 1$, সাধারণ অনুপাত $r = \frac{1}{2}$

এখানে, $r = \frac{1}{2}$ $\therefore |r| < 1$

সুতরাং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি আছে।

$\therefore S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$ **(Ans.)**

খ **$\frac{1}{5}-\frac{2}{5^2}+\frac{4}{5^3}-\frac{8}{5^4}+\ldots\ldots$**

এখানে, প্রথম পদ $a = \frac{1}{5}$, সাধারণ অনুপাত $r = -\frac{2}{5^2} \div \frac{1}{5} = -\frac{2}{5}$

এখানে, $r = -\frac{2}{5}$ $\therefore |r| < 1$

সুতরাং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি আছে।

$\therefore S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{5}}{1-\left(-\frac{2}{5}\right)} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{5+2}{5}} = \frac{1}{5} \times \frac{5}{7} = \frac{1}{7}$ **(Ans.)**

গ **$8+2+\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{32}+\ldots\ldots$**

এখানে, প্রথম পদ $a = 8$, সাধারণ অনুপাত $r = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$

এখানে, $r = \frac{1}{4}$ $\therefore |r| < 1$

সুতরাং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি আছে।

$\therefore S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{8}{1-\frac{1}{4}} = \frac{8}{\frac{4-1}{4}} = 8 \times \frac{4}{3} = \frac{32}{3}$ **(Ans.)**

◆◆ অনুশীলনীর ১১(গ) নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

$8 + 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} \ldots \ldots \ldots$ ক. ধারাটির দশম পদটি কত? খ. ধারাটির প্রথম ষোলটি পদের সমষ্টি নির্ণয় কর। গ. প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি আছে কি-না? থাকলে নির্ণয় কর।	**সমাধান** নিজে নিজে চেষ্টা কর। **উত্তর:** (ক) $\frac{1}{32768}$; (খ) $\frac{32}{3}$; (গ) $\frac{32}{3}$

ঘ $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \ldots \ldots$

এখানে, প্রথম পদ $a = 1$, সাধারণ অনুপাত $r = 2$

এখানে, $r = 2 \therefore |r| > 1$

সুতরাং প্রদত্ত গুণোত্তর ধারাটির অসীমতক সমষ্টি নেই। **(Ans.)**

ঙ $\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8}\right) + \left(-\frac{1}{16}\right) + \ldots \ldots$

এখানে, প্রথম পদ, $a = \frac{1}{2}$, সাধারণ অনুপাত $r = -\frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$

এখানে, $r = -\frac{1}{2} \therefore |r| < 1$

সুতরাং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি আছে।

$$S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \text{ (Ans.)}$$

১২ নিচের ধারাগুলোর প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় কর:

ক) 7 + 77 + 777 + ... খ) 5 + 55 + 555 + ...

সমাধান:

ক $7 + 77 + 777 + \ldots \ldots$

প্রদত্ত ধারা, $7 + 77 + 777 + \ldots \ldots \ldots$

মনে করি, প্রদত্ত ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল S_n

$\therefore S_n = 7 + 77 + 777 + \ldots \ldots \ldots n$ তম পদ পর্যন্ত

বা, $S_n = 7(1 + 11 + 111 + \ldots \ldots \ldots n$ তম পদ পর্যন্ত)

বা, $S_n = \frac{7}{9}$ $(9 + 99 + 999 + \ldots \ldots \ldots n$ তম পদ পর্যন্ত)

বা, $\frac{9}{7} S_n = 9 + 99 + 999 + \ldots \ldots \ldots n$ তম পদ পর্যন্ত)

$= (10-1) + (100-1) + (1000-1) + \ldots\ n$ তম পদ পর্যন্ত

$= (10 + 10^2 + 10^3 + \ldots.. + 10^n) -$ $(1 + 1 + 1 + \ldots\ n$ তম পদ পর্যন্ত)

$= 10(1 + 10 + 10^2 + \ldots \ldots 10^{n-1}) - n$

$= 10.\left(1.\frac{10^n - 1}{10 - 1}\right) - n$ $\left[\frac{a(r^n - 1)}{r - 1}\right.$ সূত্র প্রয়োগ করে]

বা, $\frac{9}{7} S_n = \frac{10}{9}(10^n - 1) - n$

$\therefore S_n = \frac{10}{9} \times \frac{7}{9}(10^n - 1) - \frac{7n}{9}$

বা, $S_n = \frac{70}{81}(10^n - 1) - \frac{7n}{9}$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম n পদের যোগফল $= \frac{70}{81}(10^n - 1) - \frac{7n}{9}$

খ $5 + 55 + 555 + \ldots \ldots \ldots$

প্রদত্ত ধারা, $5 + 55 + 555 + \ldots \ldots \ldots$

মনে করি, প্রদত্ত ধারার প্রথম n সংখ্যক পদের যোগফল S_n

$\therefore S_n = 5 + 55 + 555 + \ldots \ldots \ldots n$ তম পদ পর্যন্ত

$= 5(1 + 11 + 111 + \ldots \ldots \ldots n$ তম পদ পর্যন্ত)

$= \frac{5}{9}(9 + 99 + 999 + \ldots \ldots \ldots n$ তম পদ পর্যন্ত)

$= \frac{5}{9}\{(10-1) + (100-1) + (1000-1) + \ldots$ n তম পদ পর্যন্ত}

$= \frac{5}{9}\{(10 + 10^2 + 10^3 + \ldots \ldots \ldots 10^n) -$ $(1 + 1 + 1 + \ldots \ldots \ldots n$ তম পদ পর্যন্ত)}

$= \frac{5}{9} \times 10(1 + 10 + 10^2 + \ldots \ldots 10^{n-1}) - \frac{5n}{9}$

$= \frac{5}{9} \times 10.\frac{(10^n - 1)}{10 - 1} - \frac{5n}{9}$ $\left[S_n = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}\right]$

$= \frac{50}{9 \times 9}(10^n - 1) - \frac{5n}{9}$

$\therefore S_n = \frac{50}{81}(10^n - 1) - \frac{5n}{9}$

$\therefore$ ধারাটির প্রথম n পদের যোগফল $= \frac{50}{81}(10^n - 1) - \frac{5n}{9}$

◆◆ অনুশীলনীর ১২(খ) নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

$8 + 88 + 888 + \ldots \ldots \ldots$ ক. প্রথম ধারাটির অসীমতক সমষ্টি আছে কী? ব্যাখ্যা দাও। খ. প্রদত্ত ধারার প্রথম **n**-সংখ্যক পদের যোগফল নির্ণয় কর। গ. প্রদত্ত ধারার অসীমতক সমষ্টি নির্ণয় কর: $\frac{4}{7} - \frac{5}{7^2} + \frac{4}{7^3} - \frac{5}{7^4} + \frac{4}{7^5} - \frac{5}{7^6} + \ldots \ldots$	নিজে নিজে চেষ্টা কর (ক) অসীমতক সমষ্টি নেই (খ) $\frac{80}{81}(10^n - 1). \frac{8n}{9}$; (গ) $\frac{23}{48}$

১৩ **x এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}+\ldots\ldots$ অসীম ধারাটির (অসীমতক) সমষ্টি থাকবে এবং সেই সমষ্টি নির্ণয় কর।**

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}+\ldots\ldots$

ধারাটির প্রথম পদ $a=\frac{1}{x+1}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r=\frac{1}{(x+1)^2}\div\frac{1}{(x+1)}$

$=\frac{1}{(x+1)(x+1)}\times(x+1)=\frac{1}{x+1}$

এখন প্রদত্ত ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে, যদি এবং কেবল যদি $|r|<1$ হয়

অর্থাৎ $\left|\frac{1}{x+1}\right|<1$ হয়।

এখন, $\frac{1}{x+1}$ অঋণাত্মক হলে পাই,

$\frac{1}{x+1}<1$

বা, $x+1>1$ [বিপরীতকরণ করে]

বা, $x+1-1>1-1$

$\therefore x>0$

আবার, $\frac{1}{x+1}$ ঋণাত্মক হলে পাই,

$-\left(\frac{1}{x+1}\right)<1$

বা, $-(x+1)>1$

বা, $-x-1>1$

বা, $-x-1+1>1+1$

বা, $-x>2$

$\therefore x<-2$

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি, $x<-2$ অথবা $x>0$ হয়।

$\therefore$ অসীমতক সমষ্টি $S_\infty=\frac{a}{1-r}$

$=\frac{\frac{1}{x+1}}{1-\frac{1}{x+1}}$

$=\frac{\frac{1}{x+1}}{\frac{x+1-1}{x+1}}$

$=\frac{1}{x+1}\times\frac{x+1}{x}$

$=\frac{1}{x}$

$\therefore$ যখন $x>0$ অথবা $x<-2$, তখন ধারাটির (অসীমতক) সমষ্টি $\frac{1}{x}$

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

প্রদত্ত ধারা $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{(x+1)^3}\ldots\ldots\ldots$

ধারাটির প্রথম পদ $a=\frac{1}{x+1}$

এবং সাধারণ অনুপাত $r=\frac{1}{(x+1)^2}\div\frac{1}{x+1}$

$=\frac{1}{(x+1)^2}\times\frac{x+1}{1}=\frac{1}{x+1}$

এখন প্রদত্ত ধারার (অসীমতক) সমষ্টি থাকবে যদি $|r|<1$ হয়,

অর্থাৎ $\left|\frac{1}{x+1}\right|<1$ হয়

বা, $\left|\frac{1}{x+1}\right|^2<1^2$ [বর্গ করে]

বা, $\frac{1}{(x+1)^2}<1$

বা, $(x+1)^2>1$ [বিপরীতকরণ করে]

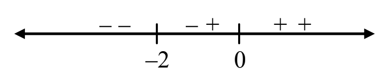
বা, $x^2+2x+1>1$

বা, $x^2+2x>0$

$\therefore x(x+2)>0$

এখন, $x(x+2)>0$ হবে যদি x এবং $(x+2)$ উভয়ই ধনাত্মক হয় অথবা উভয়ই ঋণাত্মক হয়।

লক্ষ করি,



$x>0$ হলে x এবং $(x+2)$ উভয়ই ধনাত্মক হয়

আবার, $x<-2$ হলে x এবং $(x+2)$ উভয়ই ঋণাত্মক হয়

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে যদি, $x<-2$ অথবা $x>0$ হয়।

$\therefore S_\infty=\frac{a}{1-r}=\frac{\frac{1}{x+1}}{1-\frac{1}{x+1}}=\frac{1}{x+1}\times\frac{x+1}{x}=\frac{1}{x}$

$\therefore$ যখন $x>0$ অথবা $x<-2$ তখন ধারাটির অসীমতক সমষ্টি $\frac{1}{x}$

◆◆ অনুশীলনীর ১৩নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

$1+\frac{1}{1+y}+\frac{1}{(1+y)^2}+\frac{1}{(1+y)^3}+\ldots\ldots\ldots\ldots$ *ক. উদাহরণসহ সমান্তর ধারার সংজ্ঞা দাও।* *খ. $y=2$ হলে, ধারাটির ১ম 10 পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।* *গ. y - এর উপর কী শর্ত আরোপ করলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি থাকবে এবং সমষ্টি নির্ণয় কর।*	নিজে নিজে চেষ্টা কর। (খ) $\frac{29524}{19683}$; (গ) $y>0$ বা $y<-2$

১৪ **প্রদত্ত পৌনঃপুনিক দশমিকগুলোকে মূলদীয় ভগ্নাংশে প্রকাশ কর:**
ক) $0.\dot{2}\dot{7}$ খ) $2.\dot{3}0\dot{5}$ গ) $0.0\dot{1}2\dot{3}$ ঘ) $3.0\dot{4}0\dot{3}$

সমাধান:

ক $0.\dot{2}\dot{7}$

$0.\dot{2}\dot{7} = 0.272727 \ldots \ldots \ldots$

$= 0.27 + 0.0027 + 0.000027 + \ldots \ldots \ldots$; যা একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা।

ধারাটির প্রথম পদ $a = 0.27$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \dfrac{0.0027}{0.27} = 0.01$

$\therefore 0.\dot{2}\dot{7} = \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{0.27}{1-0.01} = \dfrac{0.27}{0.99} = \dfrac{27}{99} = \dfrac{3}{11}$ **(Ans.)**

খ $2.\dot{3}0\dot{5}$

$2.\dot{3}0\dot{5} = 2.305305305 \ldots \ldots \ldots$

$= 2 + (0.305 + 0.000305 + 0.000000305 + \ldots)$

এখানে বন্ধনীর অভ্যন্তরের ধারাটি একটি অসীম গুণোত্তর ধারা।

ধারাটির প্রথম পদ $a = 0.305$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \dfrac{0.000305}{0.305} = 0.001$

$$\therefore 2.\dot{3}0\dot{5} = 2 + \frac{a}{1-r}$$
$$= 2 + \frac{0.305}{1-0.001}$$
$$= 2 + \frac{0.305}{0.999}$$
$$= 2 + \frac{305}{999}$$
$$= \frac{1998+305}{999}$$
$$= \frac{2303}{999}$$
$$= 2\frac{305}{999}$$ **(Ans.)**

গ $0.0\dot{1}2\dot{3}$

$0.0\dot{1}2\dot{3} = 0.0123123123 \ldots \ldots \ldots$

$= 0.0123 + 0.0000123 + 0.0000000123 + \ldots$

যা একটি অসীম গুণোত্তর ধারা।

এখানে ধারাটির প্রথম পদ $a = 0.0123$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \dfrac{0.0000123}{0.0123} = 0.001$

$$\therefore 0.0\dot{1}2\dot{3} = \frac{a}{1-r}$$
$$= \frac{0.0123}{1-0.001} = \frac{0.0123}{0.999} = \frac{123}{9990} = \frac{41}{3330}$$ **(Ans.)**

ঘ $3.0\dot{4}0\dot{3}$

$3.0\dot{4}0\dot{3} = 3.0403403403 \ldots \ldots \ldots$

$= 3 + (0.0403 + 0.0000403 + 0.0000000403 + \ldots)$

এখানে বন্ধনীর অভ্যন্তরের ধারাটি একটি অসীম গুণোত্তর ধারা।

ধারাটির প্রথম পদ $a = 0.0403$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \dfrac{0.0000403}{0.0403} = 0.001$

$$\therefore 3.0\dot{4}0\dot{3} = 3 + \frac{a}{1-r}$$
$$= 3 + \frac{0.0403}{1-0.001}$$
$$= 3 + \frac{0.0403}{0.999}$$
$$= 3 + \frac{403}{9990}$$
$$= 3\frac{403}{9990}$$ **(Ans.)**

১৫ $a + ab + ab^2 + \ldots \ldots \ldots$ **একটি গুণোত্তর ধারা।**

ক. ধারাটির সপ্তম পদ নির্ণয় কর।

খ. $a = 1$ এবং $b = \frac{1}{2}$ হলে, ধারাটির অসীমতক সমষ্টি যদি থাকে তবে তা নির্ণয় কর।

গ. a এর স্থলে 3, ab এর স্থলে 33 এবং ab^2 এর স্থলে 333 বসালে যে ধারা পাওয়া যায় তার প্রথম n সংখ্যক পদের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক প্রদত্ত গুণোত্তর ধারা, $a + ab + ab^2 + \ldots \ldots \ldots$

এখানে, ১ম পদ, $a = a$

সাধারণ অনুপাত, $r = \dfrac{ab}{a} = b$

$\therefore$ ধারাটির সপ্তম পদ $= a.r^{7-1} = ab^6$

খ $a = 1$ এবং $b = \dfrac{1}{2}$ হলে গুণোত্তর ধারাটি

$1 + 1.\dfrac{1}{2} + 1.\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \ldots \ldots$

বা, $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} + \ldots \ldots$

এখানে, প্রথম পদ $a = 1$, সাধারণ অনুপাত $r = \dfrac{1}{2}$

এখানে, $r = \dfrac{1}{2}$ $\therefore |r| < 1$

সুতরাং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি আছে।

$\therefore$ ধারাটির অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{1}{1-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

গ $a = 3, ab = 33$ এবং $ab^2 = 333$ হলে,

ধারাটি হলো: $3 + 33 + 333 + \ldots \ldots \ldots$

ধারাটির n তম পদের সমষ্টি, S হলে,

$S = 3 + 33 + 333 + \ldots \ldots \ldots + n$ তম পদ

বা, $\frac{9S}{3} = 9 + 99 + 999 + \ldots \ldots \ldots + n$ তম পদ

$= (10-1)+(100-1)+(1000-1)+\ldots+n$ তম পদ

$= (10 + 100 + 1000 + \ldots \ldots + n$ তম পদ$) -$

$(1 + 1 + \ldots + n$ তম পদ$)$

$= 10\frac{10^n - 1}{10 - 1} - n$; [ধারাটির প্রথম অংশে, ১ম পদ = 10 এবং সাধারণ অন্তর = 10]

$= \frac{10}{9}(10^n - 1) - n$

---

১৬ একটি গুণোত্তর ধারার তিনটি ক্রমিক পদের সমষ্টি $24\frac{4}{5}$ এবং গুণফল 64।

ক. উদ্দীপকের আলোকে দুইটি সমীকরণ গঠন কর।

খ. ধারাটির প্রথম পদ ও সাধারণ অনুপাত নির্ণয় কর।

গ. সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{5}$ হলে ধারাটির অসীমতক সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক মনে করি, গুণোত্তর ধারার ক্রমিক পদ তিনটি যথাক্রমে a, ar ও ar^2 যেখানে প্রথম পদ $= a$

এবং সাধারণ অনুপাত $= r$

১ম শর্তমতে, $a + ar + ar^2 = 24\frac{4}{5} \ldots \ldots \ldots$ (i)

২য় শর্তমতে, $a.ar.ar^2 = 64 \ldots \ldots \ldots$ (ii)

খ 'ক' হতে পাই, $a + ar + ar^2 = 24\frac{4}{5} \ldots \ldots \ldots$ (i)

এবং $a.ar.ar^2 = 64 \ldots \ldots \ldots$ (ii)

(ii) নং হতে পাই, $a.ar.ar^2 = 64$

বা, $a^3.r^3 = 4^3$

বা, $(ar)^3 = 4^3$

বা, $ar = 4$

$\therefore a = \frac{4}{r} \ldots \ldots \ldots$ (iii)

a এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$\frac{4}{r} + \frac{4}{r}.r + \frac{4}{r}.r^2 = 24\frac{4}{5}$

বা, $\frac{4}{r} + 4 + 4r = \frac{124}{5}$

বা, $\frac{4 + 4r + 4r^2}{r} = \frac{124}{5}$

বা, $20 + 20r + 20r^2 = 124r$

বা, $20r^2 + 20r + 20 - 124r = 0$

বা, $20r^2 - 104r + 20 = 0$

বা, $20r^2 - 100r - 4r + 20 = 0$

বা, $20r(r - 5) - 4(r - 5) = 0$

বা, $(20r - 4)(r - 5) = 0$

বা, $20r - 4 = 0$ অথবা, $r - 5 = 0$

বা, $20r = 4$ বা, $r = 5$

বা, $r = \frac{4}{20}$

$\therefore r = \frac{1}{5}$

$r = \frac{1}{5}$ হলে (iii) নং হতে পাই, $a = \frac{4}{\frac{1}{5}} = 20$

$r = 5$ হলে (iii) নং হতে পাই, $a = \frac{4}{5}$

$\therefore$ ধারাটির ১ম পদ 20 এবং সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{5}$

অথবা, ধারাটির ১ম পদ $\frac{4}{5}$ এবং সাধারণ অনুপাত 5

গ ধারাটির সাধারণ অনুপাত $r = \frac{1}{5}$

ধারার প্রথম পদ, $a = 20$; ['গ' হতে]

ধারার অসীমতক সমষ্টি, $S_\infty = \frac{a}{1 - r}$

$= \frac{20}{1 - \frac{1}{5}}$

$= \frac{20}{\frac{5-1}{5}} = \frac{20 \times 5}{4} = 25$

১৭ চারটি কুকুর এক কিলোমিটার বাহুবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্রের চার কোণায় দাঁড়িয়ে আছে। এবার প্রতিটি কুকুর একই বেগে সরাসরি ডানের কুকুরের দিকে চোখ বন্ধ করে অর্ধেক দূরত্ব অতিক্রম করে। চোখ খুলেই আবার ডানে অবস্থিত কুকুরের দিকে একইভাবে অর্ধেক দূরত্ব দৌড়ায়।

ক. এভাবে দৌড়াতে থাকলে পরিশেষে কুকুরগুলোর অবস্থান কী হবে? তারা প্রত্যেকে কত দূরত্বই বা অতিক্রম করবে?

খ. অর্ধেক দূরত্ব পর দিক পরিবর্তন না করে যদি k ভাগের একভাগ অতিক্রম করে দিক পরিবর্তন করে তাহলে উপরের প্রশ্নের উত্তর দাও।

গ. ক্ষেত্রটি বর্গক্ষেত্র না হয়ে যদি সমবাহু ত্রিভুজ হতো তাহলে উপরের প্রশ্নগুলোর উত্তর দাও।

সমাধানঃ

ক মনে করি, $ABCD$ বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য, $a = 1$ কি.মি.

$ABCD$ বর্গের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু পর্যায়ক্রমে যোগ করে প্রাপ্ত বর্গক্ষেত্র $EFGH$

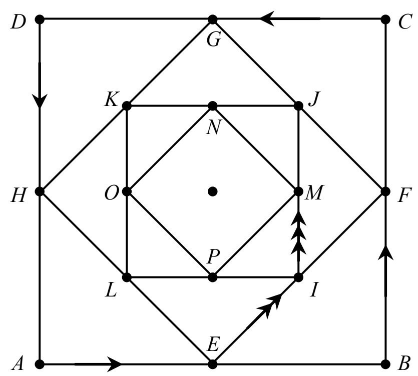
আবার, $EFGH$ বর্গের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু পর্যায়ক্রমে যোগ করে প্রাপ্ত বর্গক্ষেত্র $IJKL$

বর্ণনানুসারে, চারটি কুকুরের প্রাথমিক অবস্থান A, B, C ও D

চোখ বন্ধকালীন সময়ে ২য় অবস্থান E, F, G ও H

আবার, চোখ খুলে তৃতীয় বারের অবস্থান I, J, K ও L

এভাবে কুকুরগুলো একসময় কেন্দ্রে অবস্থান করবে।



এখানে, $ABCD$ বর্গক্ষেত্রের প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য $a = 1$ কি.মি.

$\therefore AB = BC = CD = DA = a$

বা, $2AE = 2BF = 2CG = 2DH = a$

$\therefore AE = BF = CG = DH = \frac{a}{2}$

এখন, সমকোণী ΔAEH-এ $HE^2 = HA^2 + AE^2$

$$\text{বা, } HE = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \quad [HA = DH = \frac{a}{2}]$$

$$= \sqrt{\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4}}$$

$$= \sqrt{\frac{2a^2}{4}}$$

$$= \frac{a}{\sqrt{2}}$$

অর্থাৎ $HE = EF = FG = GH = \frac{a}{\sqrt{2}}$

বা, $\frac{HE}{2} = \frac{EF}{2} = \frac{FG}{2} = \frac{GH}{2} = \frac{a}{2 \times \sqrt{2}}$

বা, $HL = EI = FJ = GK = \frac{a}{2\sqrt{2}}$

সমকোণী ΔLEI-এ $LI^2 = EI^2 + LE^2$

$$= \left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{a}{2\sqrt{2}}\right)^2 \quad \left[\because EI = LE = \frac{HE}{2} = \frac{a}{2\sqrt{2}}\right]$$

$$= \frac{a^2}{8} + \frac{a^2}{8}$$

$$= 2 \cdot \frac{a^2}{8} = \frac{a^2}{4}$$

$$\therefore LI = \sqrt{\frac{a^2}{4}} = \frac{a}{2}$$

$$\therefore IM = IP = \frac{LI}{2} = \frac{a}{2 \times 2} = \frac{a}{4}$$

এখন, একটি কুকুরের ১ম, ২য় ও ৩য় পর্যায়ে অতিক্রান্ত দূরত্ব

যথাক্রমে $AE = \frac{a}{2}$, $EI = \frac{a}{2\sqrt{2}}$ ও $IM = \frac{a}{4}$ দূরত্ব

একইভাবে প্রত্যেকটি কুকুর এ দূরত্ব অতিক্রম করে।

এভাবে দৌড়াতে থাকলে,

প্রত্যেক কুকুরের অতিক্রান্ত দূরত্বের ধারা হবে $= \frac{a}{2} + \frac{a}{2\sqrt{2}} + \frac{a}{4} + \ldots$

যার প্রথম পদ, $p = \frac{a}{2}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{a}{2\sqrt{2}} \div \frac{a}{2} = \frac{a}{2\sqrt{2}} \times \frac{2}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$

$\therefore$ প্রত্যেক কুকুরের অতিক্রান্ত দূরত্বের অসীমতক

সমষ্টি $= \frac{p}{1-r}$

$$= \frac{\frac{a}{2}}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{\frac{a}{2}}{\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}.a}{2(\sqrt{2}-1)}$$

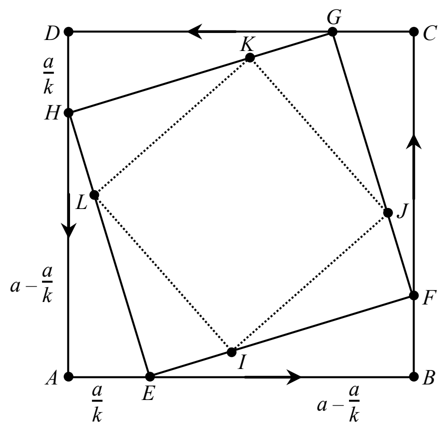
$$= \frac{a}{\sqrt{2}(\sqrt{2}-1)}$$

$$= \frac{1}{2-\sqrt{2}} \quad [\because a = 1]$$

$= 1.7071$ (প্রায়)

$\therefore$ প্রত্যেকটি কুকুর 1.7071 কি.মি. (প্রায়) দূরত্ব অতিক্রম করবে।

খ



যদি অর্ধেক দূরত্বের পর দিক পরিবর্তন না করে $\frac{1}{k}$ অংশ দূরত্ব অতিক্রম করে দিক পরিবর্তন করে তবে $AE = \frac{a}{k} = BF = CG = DH$

এবং $AH = a - \frac{a}{k} = a\left(\frac{k-1}{k}\right)$

সমকোণী ΔHAE-এ $EH^2 = AE^2 + AH^2$

$$= \left(\frac{a}{k}\right)^2 + \left\{a\left(\frac{k-1}{k}\right)\right\}^2$$

$$= \frac{a^2}{k^2}\{1 + (k-1)^2\}$$

$$= \frac{a^2}{k^2}(k^2 - 2k + 2)$$

$$\therefore EH = \frac{a}{k}\sqrt{k^2 - 2k + 2}$$

তাহলে প্রত্যেক কুকুরের ২য় বারের অতিক্রান্ত দূরত্ব $HL = EH$ এর $\frac{1}{k}$

$$= \frac{a}{k}\sqrt{k^2 - 2k + 2} \text{ এর } \frac{1}{k}$$

$$= \frac{a}{k^2}\sqrt{k^2 - 2k + 2}$$

এখন, $EL = EH - HL$

$$= \frac{a}{k}\sqrt{k^2 - 2k + 2} - \frac{a}{k^2}\sqrt{k^2 - 2k + 2}$$

$$= \sqrt{k^2 - 2k + 2} \times a\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k^2}\right)$$

$$= \sqrt{k^2 - 2k + 2} \times a\,\frac{k-1}{k^2}$$

$$= \frac{a(k-1)}{k^2}\sqrt{k^2 - 2k + 2}$$

এখন, $EI = HL = \frac{a}{k^2}\sqrt{k^2 - 2k + 2}$

আমরা জানি, $LI^2 = EL^2 + EI^2$

$$= \left\{\frac{a(k-1)}{k^2}\sqrt{k^2-2k+2}\right\}^2 + \left\{\frac{a}{k^2}\sqrt{k^2-2k+2}\right\}^2$$

$$= \frac{a^2(k-1)^2}{k^4}(k^2-2k+2) + \frac{a^2}{k^4}(k^2-2k+2)$$

$$= \frac{a^2}{k^4}(k^2 - 2k + 2)\{(k-1)^2 + 1)\}$$

$$= \frac{a^2}{k^4}(k^2 - 2k + 2)\{(k^2 - 2k + 1) + 1)\}$$

$$= \frac{a^2}{k^4}(k^2 - 2k + 2)(k^2 - 2k + 2)$$

$$= \frac{a^2}{k^4}(k^2 - 2k + 2)^2$$

$$\therefore LI = \frac{a}{k^2}(k^2 - 2k + 2)$$

৩য় বারের অতিক্রান্ত দূরত্ব $= LI$ এর $\frac{1}{k}$

$$= \frac{a}{k^2}(k^2 - 2k + 2) \text{ এর } \frac{1}{k}$$

$$= \frac{a}{k^3}\left(\sqrt{k^2 - 2k + 2}\right)^2$$

$\therefore$ প্রত্যেক কুকুরের অতিক্রান্ত দূরত্বের ধারা হবে

$$\frac{a}{k} + \frac{a}{k^2}\sqrt{k^2 - 2k + 2} + \frac{a}{k^3}\left(\sqrt{k^2 - 2k + 2}\right)^2 + \ldots$$

যা একটি অনন্ত গুণোত্তর ধারা যার প্রথম পদ, $p = \frac{a}{k}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{a}{k^2}\sqrt{k^2 - 2k + 2} \div \frac{a}{k}$

$$= \frac{\sqrt{k^2 - 2k + 2}}{k} < 1$$

$\therefore$ প্রত্যেক কুকুরের অতিক্রান্ত দূরত্ব $= \frac{p}{1-r}$

$$= \frac{\frac{a}{k}}{1 - \frac{\sqrt{k^2 - 2k + 2}}{k}}$$

$$= \frac{\frac{a}{k}}{\frac{k - \sqrt{k^2 - 2k + 2}}{k}}$$

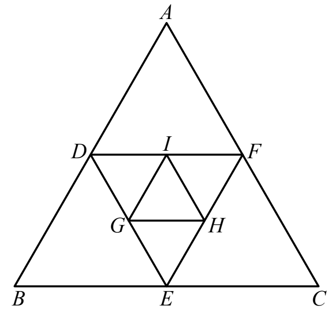
$$= \frac{a}{k - \sqrt{k^2 - 2k + 2}}$$

$$= \frac{1}{k - \sqrt{k^2 - 2k + 2}} \text{ কি.মি.}$$

[$\because a = 1$ কি.মি.]

গ ক্ষেত্রটি বর্গক্ষেত্র না হয়ে সমবাহু ত্রিভুজ হলে পাই,

'ক' নং প্রশ্নের সমাধান:



এখানে, সমবাহু ΔABC-এ $AB = BC = CA = a$

সমবাহু ΔDEF-এ $DE = EF = FD = \frac{a}{2}$

সমবাহু ΔGHI-এ $GH = HI = IG = \frac{a}{4}$

$\therefore$ প্রত্যেক কুকুরের অতিক্রান্ত দূরত্বের ধারা $= \frac{a}{2} + \frac{a}{4} + \frac{a}{8} + \ldots$

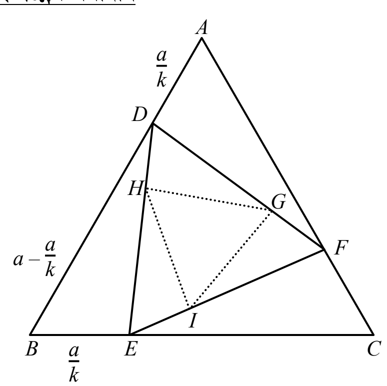
$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots \quad [\because a = 1]$$

এখানে, ১ম পদ, $p = \frac{1}{2}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{4} \div \frac{1}{2} = \frac{1}{2} < 1$

$\therefore$ প্রত্যেক কুকুরের অতিক্রান্ত দূরত্ব $= \frac{p}{1-r} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$ কি.মি.

'খ' নং প্রশ্নের সমাধান:



১ম বার অতিক্রান্ত দুরত্ব, $AD = \frac{a}{k} = BE = CF$

তাহলে $BD = a - \frac{a}{k} = a\left(\frac{k-1}{k}\right)$

এখন ΔBDE এর BD এর লম্ব অভিক্ষেপ $= BD \cos B$

আবার, ΔBDE-এ $\angle B$ সূক্ষ্মকোণ এবং $\angle B$ এর বিপরীত বাহু DE এবং অপর দুই বাহু যথাক্রমে BD ও BE

$\therefore$ সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি অনুসারে পাই,

$DE^2 = BD^2 + BE^2 - 2BE \times BD$ এর লম্ব অভিক্ষেপ

$$= BD^2 + BE^2 - 2BE \times BD \cos B$$

$$= a^2\left(\frac{k-1}{k}\right)^2 + \frac{a^2}{k^2} - 2\frac{a(k-1)}{k} \cdot \frac{a}{k} .\cos 60°$$

[সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেকটি বাহু 60°]

$$= \frac{a^2}{k^2}\left\{(k-1)^2 + 1 - 2(k-1).\frac{1}{2}\right\}$$

$$= \frac{a^2}{k^2}(k^2 - 2k + 1 + 1 - k + 1)$$

$$= \frac{a^2}{k^2}(k^2 - 3k + 3)$$

$\therefore DE = \frac{a}{k}\sqrt{k^2 - 3k + 3}$

২য় বারে অতিক্রান্ত দূরত্ব, $DH = DE$ এর $\frac{1}{k}$

$$= \frac{a}{k}\sqrt{k^2 - 3k + 3} \text{ এর } \frac{1}{k}$$

$$= \frac{a}{k^2}\sqrt{k^2 - 3k + 3}$$

অনুরূপভাবে, $HI = HG = \frac{a}{k^2}\left(\sqrt{k^2 - 3k + 3}\right)^2$

৩য় বারে অতিক্রান্ত দূরত্ব $= HG$ এর $\frac{1}{k}$

$$= \frac{a}{k^2}\left(\sqrt{k^2 - 3k + 3}\right)^2 \text{ এর } \frac{1}{k}$$

$$= \frac{a}{k^3}\left(\sqrt{k^2 - 3k + 3}\right)^2$$

$\therefore$ অতিক্রান্ত দূরত্বের ধারা,

$$= \frac{a}{k} + \frac{a}{k^2}\sqrt{k^2 - 3k + 3} + \frac{a}{k^3}\left(\sqrt{k^2 - 3k + 3}\right)^2 + \ldots$$

যা একটি গুণোত্তর ধারা। যেখানে প্রথম পদ, $p = \frac{a}{k}$

সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{\frac{a}{k^2}\sqrt{k^2 - 3k + 3}}{\frac{a}{k}} = \frac{\sqrt{k^2 - 3k + 3}}{k}$

$\therefore$ অতিক্রান্ত দূরত্ব, $S_\infty = \left(\frac{p}{1-r}\right)$

$$= \frac{\frac{a}{k}}{1 - \frac{1}{k}\sqrt{k^2 - 3k + 3}}$$

$$= \frac{\frac{a}{k}}{\frac{k - \sqrt{k^2 - 3k + 3}}{k}}$$

$$= \frac{a}{k - \sqrt{k^2 - 3k + 3}}$$

$$= \frac{1}{k - \sqrt{k^2 - 3k + 3}} \text{ কি.মি. } [\because a = 1]$$

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৩৭

ক) নিচের অনুক্রমগুলোর সাধারণ পদ নির্ণয় কর:

(১) $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}$ ……… (২) $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}$ ……… (৩) $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2^3}, \frac{4}{2^4}$ ……… (৪) $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2$ ………

সমাধান:

১ $\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, -\frac{4}{5}$ ………

প্রদত্ত অনুক্রমের লব ও হর উভয়ই সমান্তর অনুক্রম। অনুক্রমটির বিজোড় পদগুলোতে ধনাত্মক ও জোড় পদগুলোতে ঋণাত্মক চিহ্ন বিদ্যমান।

$\therefore$ অনুক্রমের সাধারণ পদ (n তম পদ)

$$= (-1)^{n+1}\frac{1+(n-1)1}{2+(n-1)} = (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$$

$\therefore$ অনুক্রমের সাধারণ পদ $= (-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}$

বিকল্প সমাধান:

অনুক্রমের সাধারণ পদ $= -(-1)^n\frac{1+(n-1)1}{2+(n-1)} = -(-1)^n\frac{n}{n+1}$

২ $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}$ …………

প্রদত্ত অনুক্রমের লব ও হর উভয়ই সমান্তর অনুক্রম।

$\therefore$ সাধারণ পদ (n তম পদ) $= \frac{1+(n-1)2}{2+(n-1)2}$

$$= \frac{1+2n-2}{2+2n-2}$$

$$= \frac{2n-1}{2n}$$

সুতরাং অনুক্রমটির সাধারণ $= \frac{2n-1}{2n}$

৩ $\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2^3}, \frac{4}{2^4}$ ………

প্রদত্ত অনুক্রমটিকে সাজিয়ে লিখে পাই, $\frac{1}{2}, \frac{2}{2^2}, \frac{3}{2^3}, \frac{4}{2^4}$ ………

অনুক্রমটি লব সমান্তর অনুক্রম এবং হর গুণোত্তর অনুক্রম।

$\therefore$ অনুক্রমের সাধারণ পদ (n তম পদ) $= \frac{1+(n-1)1}{2(2)^{n-1}}$

$$= \frac{n}{2^{1+n-1}}$$

$$= \frac{n}{2^n}$$

সুতরাং প্রদত্ত অনুক্রমটির সাধারণ পদ $= \frac{n}{2^n}$; $n \in N$

৪ $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2$ ………

প্রদত্ত অনুক্রমটিকে সাজিয়ে লিখে পাই,

$\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{4}$ ………

$\therefore$ অনুক্রমের সাধারণ পদ (n তম পদ) $= \sqrt{1+(n-1)1} = \sqrt{n}$

খ) প্রদত্ত সাধারণ পদ হতে নিচের অনুক্রমগুলো লেখ:

(১) $1+(-1)^n$ (২) $1-(-1)^n$ (৩) $1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ (৪) $\frac{n^2}{\sqrt[n]{\pi}}$ (৫) $\frac{\ln n}{n}$ (৬) $\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

সমাধান:

১ $1+(-1)^n$

অনুক্রমটির সাধারণ পদ, $u_n = 1+(-1)^n$

$\therefore$ $n = 1$ হলে, অনুক্রমটির ১ম পদ $u_1 = 1+(-1)^1 = 0$

$n = 2$ হলে, অনুক্রমটির ২য় পদ $u_2 = 1+(-1)^2 = 2$

$n = 3$ হলে, অনুক্রমটির ৩য় পদ $u_3 = 1+(-1)^3 = 0$

… … … … … … … … … … … … … … … … … … …

… … … … … … … … … … … … … … … … … … …

সুতরাং অনুক্রমটি হলো 0, 2, 0, ...

২ $1-(-1)^n$

অনুক্রমটির সাধারণ পদ $u_n = 1-(-1)^n$

$\therefore$ $n = 1$ হলে, অনুক্রমটির ১ম পদ $u_1 = 1-(-1)^1 = 2$

$n = 2$ হলে, অনুক্রমটির ২য় পদ $u_2 = 1-(-1)^2 = 0$

$n = 3$ হলে, অনুক্রমটির ৩য় পদ $u_3 = 1-(-1)^3 = 2$

… … … … … … … … … … … … … … … … … … …

… … … … … … … … … … … … … … … … … … …

সুতরাং প্রদত্ত অনুক্রমটি হলো 2, 0, 2, ...

৩ $1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

অনুক্রমটির সাধারণ পদ $u_n = 1+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

$\therefore$ $n = 1$ হলে, অনুক্রমটির ১ম পদ $u_1 = 1+\left(-\frac{1}{2}\right)^1 = 1-\frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

$n = 2$ হলে, অনুক্রমটির ২য় পদ $u_2 = 1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 1+\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

$n = 3$ হলে, অনুক্রমটির ৩য় পদ $u_3 = 1+\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = 1-\frac{1}{8} = \frac{7}{8}$

… … … … … … … … … … … … … … … … … …

… … … … … … … … … … … … … … … … … …

সুতরাং অনুক্রমটি হলো $\frac{1}{2}, \frac{5}{4}, \frac{7}{8}$, ………

৪ $\dfrac{n^2}{\sqrt[n]{\pi}}$

অনুক্রমটির সাধারণ পদ $u_n = \dfrac{n^2}{\sqrt[n]{\pi}} = \dfrac{n^2}{\pi^{\frac{1}{n}}}$

$\therefore$ $n = 1$ হলে, অনুক্রমটির ১ম পদ $u_1 = \dfrac{1^2}{\pi^{\frac{1}{1}}} = \dfrac{1}{\pi}$

$n = 2$ হলে, অনুক্রমটির ২য় পদ $u_2 = \dfrac{2^2}{\pi^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{4}{\sqrt{\pi}}$

$n = 3$ হলে, অনুক্রমটির ৩য় পদ $u_3 = \dfrac{3^2}{\pi^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{9}{\sqrt[3]{\pi}}$

... ...

... ...

সুতরাং অনুক্রমটি হলো: $\dfrac{1}{\pi}, \dfrac{4}{\sqrt{\pi}}, \dfrac{9}{\sqrt[3]{\pi}}, \ldots\ldots\ldots$

৫ $\dfrac{\ln n}{n}$

অনুক্রমটির সাধারণ পদ $u_n = \dfrac{\ln n}{n}$

$\therefore$ $n = 1$ হলে, অনুক্রমটির ১ম পদ $u_1 = \dfrac{\ln 1}{1} = \dfrac{0}{1} = 0$

$n = 2$ হলে, অনুক্রমটির ২য় পদ $u_2 = \dfrac{\ln 2}{2}$

$n = 3$ হলে, অনুক্রমটির ৩য় পদ $u_3 = \dfrac{\ln 3}{3}$

... ...

... ...

সুতরাং অনুক্রমটি হলো: $0, \dfrac{\ln 2}{2}, \dfrac{\ln 3}{3}, \ldots\ldots\ldots$

৬ $\cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

অনুক্রমটির সাধারণ পদ $u_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$

$\therefore$ $n = 1$ হলে, অনুক্রমটির ১ম পদ $u_1 = \cos\left(\dfrac{1\times\pi}{2}\right) = 0$

$n = 2$ হলে, অনুক্রমটির ২য় পদ $u_2 = \cos\left(\dfrac{2\times\pi}{2}\right) = -1$

$n = 3$ হলে, অনুক্রমটির ৩য় পদ $u_3 = \cos\left(\dfrac{3\times\pi}{2}\right) = 0$

$n = 4$ হলে, অনুক্রমটির ৪র্থ পদ $u_4 = \cos\left(\dfrac{4\times\pi}{2}\right) = 1$

$n = 5$ হলে, অনুক্রমটির ৫ম পদ $u_5 = \cos\left(\dfrac{5\times\pi}{2}\right) = 0$

$n = 6$ হলে, অনুক্রমটির ৬ষ্ঠ পদ $u_6 = \cos\left(\dfrac{6\times\pi}{2}\right) = -1$

... ...

... ...

সুতরাং অনুক্রমটি হলো, $0, -1, 0, 1, 0, -1, \ldots\ldots\ldots$

গ) তোমরা প্রত্যেকে একটি করে কোন অনুক্রমের সাধারণ পদ লিখে তারপর অনুক্রমটি লেখ।

সমাধান: নিজে নিজে চেষ্টা কর।

কাজ

পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৪০

ক) নিচের প্রত্যেক ক্ষেত্রে একটি অসীম গুণোত্তর ধারার প্রথম পদ a এবং সাধারণ অনুপাত r দেওয়া আছে। ধারাটি লিখ এবং যদি এর অসীমতক সমষ্টি থাকে তাহাও নির্ণয় কর:

(১) $a = 4, r = \dfrac{1}{2}$ (২) $a = 2, r = -\dfrac{1}{3}$ (৩) $a = \dfrac{1}{3}, r = 3$

(৪) $a = 5, r = \dfrac{1}{10^2}$ (৫) $a = 1, r = -\dfrac{2}{7}$ (৬) $a = 81, r = -\dfrac{1}{3}$

সমাধান:

১ $a = 4, r = \dfrac{1}{2}$

অসীম গুণোত্তর ধারার ১মপদ a এবং সাধারণ অনুপাত r হলে ধারাটি হবে $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots\ldots$

এখানে, ধারাটির প্রথম পদ, $a = 4$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \dfrac{1}{2}$

$\therefore$ ধারাটি $= 4 + 4.\left(\dfrac{1}{2}\right) + 4.\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 4.\left(\dfrac{1}{2}\right)^3 + \ldots$

$= 4 + 4.\dfrac{1}{2} + 4.\dfrac{1}{4} + 4.\dfrac{1}{8} + \ldots\ldots\ldots$

$= 4 + 2 + 1 + \dfrac{1}{2} + \ldots\ldots\ldots$

আবার, $r = \dfrac{1}{2}$ $\therefore |r| < 1$

সুতরাং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি আছে।

$\therefore S_\infty = \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{4}{1-\dfrac{1}{2}} = 4 \times \dfrac{2}{1} = 8$ **(Ans.)**

২ $a = 2, r = -\dfrac{1}{3}$

অসীম গুণোত্তর ধারার ১মপদ a এবং সাধারণ অনুপাত r হলে ধারাটি হবে $a + ar + ar^2 + ar^3 + \ldots\ldots\ldots$

ধারাটির প্রথম পদ, $a = 2$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = -\dfrac{1}{3}$

$\therefore$ ধারাটি $= 2. + 2.\left(-\dfrac{1}{3}\right) + 2.\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2 + 2.\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3 + \ldots\ldots$

$= 2 - \dfrac{2}{3} + 2.\dfrac{1}{9} + 2.\left(-\dfrac{1}{27}\right) + \ldots\ldots\ldots$

$= 2 - \dfrac{2}{3} + \dfrac{2}{9} - \dfrac{2}{27} \ldots\ldots\ldots\ldots$

আবার, $r = -\dfrac{1}{3}$ $\therefore |r| < 1$

সুতরাং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি আছে।

$\therefore S_\infty = \dfrac{a}{1-r} = \dfrac{2}{1-\left(-\dfrac{1}{3}\right)} = \dfrac{2}{1+\dfrac{1}{3}} = \dfrac{2}{\dfrac{4}{3}} = \dfrac{3}{2}$ **(Ans.)**

৩ $\boldsymbol{a = \frac{1}{3}, r = 3}$

অসীম গুণোত্তর ধারার ১মপদ a এবং সাধারণ অনুপাত r হলে ধারাটি হবে $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots \dots \dots$

এখানে, ধারাটির প্রথম পদ, $a = \frac{1}{3}$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = 3$

$\therefore$ ধারাটি $= \frac{1}{3} + \frac{1}{3}.(3) + \frac{1}{3}(3)^2 + \frac{1}{3}(3)^3 + \dots \dots$

$= \frac{1}{3} + 1 + 3 + 9 + \dots \dots \dots$

আবার, $r = 3 \quad \therefore |r| > 1$

$\therefore$ ধারাটির কোনো অসীমতক সমষ্টি নেই।

৪ $\boldsymbol{a = 5, r = \frac{1}{10^2}}$

অসীম গুণোত্তর ধারার ১মপদ a এবং সাধারণ অনুপাত r হলে ধারাটি হবে $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots \dots \dots$

এখানে, ধারাটির প্রথম পদ, $a = 5$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = \frac{1}{10^2}$

$\therefore$ ধারাটি $= 5 + 5.\left(\frac{1}{10^2}\right) + 5.\left(\frac{1}{10^2}\right)^2 + 5.\left(\frac{1}{10^2}\right)^3 + \dots$

$= 5 + 5.\frac{1}{100} + 5.\left(\frac{1}{100}\right)^2 + 5.\left(\frac{1}{100}\right)^3 + \dots$

$= 5 + \frac{1}{20} + \frac{1}{2000} + \frac{1}{200000} + \dots$

আবার, $r = \frac{1}{10^2} = \frac{1}{100} \quad \therefore |r| < 1$

সুতরাং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি আছে।

$\therefore S_\infty = \frac{a}{1-r}$

$= \frac{5}{1 - \frac{1}{10^2}}$

$= \frac{5}{\frac{99}{100}}$

$= 5 \times \frac{100}{99}$

$= \frac{500}{99}$ **(Ans.)**

৫ $\boldsymbol{a = 1, r = -\frac{2}{7}}$

অসীম গুণোত্তর ধারার ১মপদ a এবং সাধারণ অনুপাত r হলে ধারাটি হবে $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots \dots \dots$

এখানে, ধারাটির প্রথম পদ, $a = 1$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = -\frac{2}{7}$

$\therefore$ ধারাটি $= 1 + 1.\left(-\frac{2}{7}\right) + 1.\left(\frac{2}{7}\right)^2 + 1.\left(-\frac{2}{7}\right)^3 + \dots$

$= 1 - \frac{2}{7} + \frac{4}{49} - \frac{8}{343} + \dots \dots \dots$

আবার, $r = -\frac{2}{7} \quad \therefore |r| < 1$

সুতরাং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি আছে।

$\therefore S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\left(-\frac{2}{7}\right)}$

$= \frac{1}{1 + \frac{2}{7}} = \frac{1}{\frac{7+2}{7}} = \frac{7}{9}$ **(Ans.)**

৬ $\boldsymbol{a = 81, r = -\frac{1}{3}}$

অসীম গুণোত্তর ধারার ১মপদ a এবং সাধারণ অনুপাত r হলে ধারাটি হবে $a + ar + ar^2 + ar^3 + \dots \dots \dots$

এখানে, ধারাটির প্রথম পদ, $a = 81$

এবং সাধারণ অনুপাত, $r = -\frac{1}{3}$

$\therefore$ ধারাটি $= 81 + 81.\left(-\frac{1}{3}\right) + 81.\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + 81.\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \dots$

$= 81 - 27 + 81.\frac{1}{9} - 81.\frac{1}{27} + \dots \dots \dots$

$= 81 - 27 + 9 - 3 + \dots \dots \dots$

আবার, $r = -\frac{1}{3} \therefore |r| < 1$

সুতরাং ধারাটির অসীমতক সমষ্টি আছে।

$\therefore S_\infty = \frac{a}{1-r} = \frac{81}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)}$

$= \frac{81}{\frac{4}{3}} = 81 \times \frac{3}{4} = \frac{243}{4}$ **(Ans.)**

খ) তোমরা প্রত্যেকে একটি করে অসীম গুনোত্তর ধারা লিখ।

সমাধান: নিজে নিজে চেষ্টা কর।