অনুশীলনী - ১১.২

ত্রিভুজের ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল: তিনটি ভিন্ন বিন্দু একই সরলরেখায় অবস্থান না করলে ঐ তিনটি বিন্দুকে সরলরেখা দ্বারা যোগ করলে ত্রিভুজক্ষেত্র পাওয়া যায়।

বাহুর দৈর্ঘ্যের সাহায্য ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়:

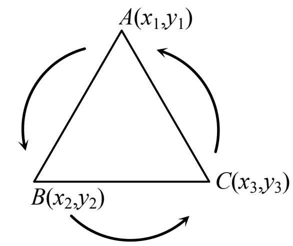
ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b ও c হলে পরিসীমা $2s = a + b + c$

ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ একক

বি.দ্র: ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের এ সূত্রকে আবিষ্কারকের নামানুসারে Heron's Formula বলা হয়।

স্থানাঙ্কের মাধ্যমে ক্ষেত্রফল নির্ণয়:

চিত্রে, A, B ও C বিন্দুত্রয় দ্বারা গঠিত ত্রিভুজের আবদ্ধ এলাকা $ABCA$ যা ΔABC এর ক্ষেত্রফল নির্দেশ করে।



$\therefore$ **ΔABC এর ক্ষেত্রফল নির্ণয়ের সূত্র:** $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_1 \end{vmatrix}$ [$\because$ আবদ্ধ ক্ষেত্র $ABCA$]

$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 - x_1y_3)\}$

বি.দ্র: বিন্দুগুলোকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে চিহ্নিত করা হয়েছে।

ত্রিভুজের প্রকৃতির মাধ্যমে ক্ষেত্রফল:

ত্রিভুজের প্রকৃতির নির্ণয় বা জানা থাকলে সূত্রের সাহায্যে এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়। যেমন-

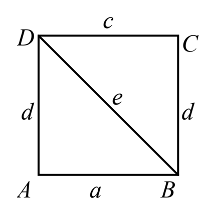
i. সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}}{4}$ (বাহুর দৈর্ঘ্য)

ii. সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ লম্ব $\times$ ভূমি

চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয়:

বাহুগুলোর দৈর্ঘ্যের সাহায্যে চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল:

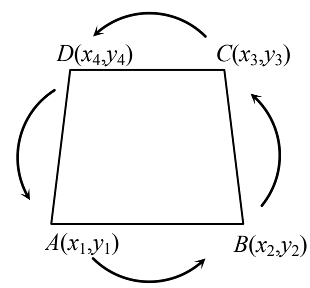
চতুভুর্জের যেকোনো একটি কর্ণ দ্বারা চতুর্ভুজটিকে দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে, পৃথকভাবে ত্রিভুজদ্বয়ের ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে। চিত্রে চতুর্ভুজ $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $= \Delta$ ক্ষেত্র $ABD + \Delta$ ক্ষেত্র BCD



স্থানাঙ্কের সাহায্যে ক্ষেত্রফল নির্ণয়:

A, B, C ও D চারটি বিন্দু দ্বারা গঠিত চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix}$ [$\because$ আবদ্ধ অংশ $ABCDA$]



হিসাবের নিয়ম: $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_1 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 & y_1 \end{vmatrix}$

↘ চিহ্নিত অংশগুলো যোগ ↗ চিহ্নিত অংশগুলো বিয়োগ

$= \frac{1}{2}\{(x_1y_2 + x_2y_3 + x_3y_4 + x_4y_1) - (x_2y_1 + x_3y_2 + x_4y_3 + x_1y_4)\}$

চতুর্ভুজের প্রকৃতির মাধ্যমে ক্ষেত্রফল নির্ণয়:

চতুর্ভুজটি কোন ধরনের তা নির্ণয় করে সূত্রের মাধ্যমে ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়। যেমন:

i. আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=$ (দৈর্ঘ্য $\times$ প্রস্থ)

ii. বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=$ (এক বাহুর দৈর্ঘ্য)^2

iii. রম্বসের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ কর্ণদ্বয়ের গুণফল

চতুর্ভুজ চেনার উপায়:

i. **সমান্তরিক:** কোনো চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো সমান হলে তা সমান্তরিক। অথবা সবগুলো বাহু সমান হলে তা সামান্তরিক।

ii. **আয়ত:** কোনো চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় সমান হলে চতুর্ভুজটি আয়ত।

iii. **রম্বস:** কোনো চতুর্ভুজের বাহুগুলোর দৈর্ঘ্য সমান হলে তা রম্বস।

iv. **বর্গ:** কোনো চতুভুর্জের বাহুগুলো সমান এবং একটি কোণ সমকোণ হলেই চতুভুজটি বর্গ। অথবা

জেনে নাও: (i) প্রত্যেক বর্গই আয়ত।

(ii) আয়ত, রম্বস, বর্গ প্রত্যেকেই সামান্তরিক।

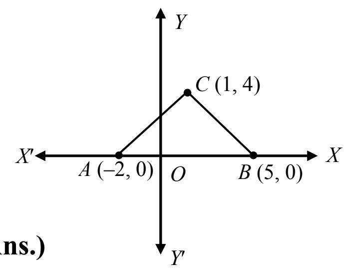
(iii) প্রত্যেক বর্গই রম্বস।

অনুশীলনীর সমাধান

১ **$A(-2, 0), B(5, 0)$ এবং $C(1, 4)$ যথাক্রমে ΔABC এর শীর্ষ বিন্দু।**
ক) AB, BC, CA বাহুর দৈর্ঘ্য এবং ΔABC এর পরিসীমা নির্ণয় কর।
খ) ত্রিভুজটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, প্রদত্ত শীর্ষ বিন্দুসমূহ $A(-2, 0)$, $B(5, 0)$ এবং $C(1, 4)$। এখন xy সমতলে বিন্দুগুলো স্থাপন করে ABC ত্রিভুজ গঠন করা হলো:



এখন ABC ত্রিভুজের,

AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5+2)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{7^2 + 0^2} = 7$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(1-5)^2 + (4-0)^2}$
$= \sqrt{(-4)^2 + 4^2} = \sqrt{16+16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$ একক

CA বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-2-1)^2 + (0-4)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$ একক

এখন, ΔABC এর পরিসীমা $= AB + BC + CA = (7 + 4\sqrt{2} + 5) = 12 + 4\sqrt{2}$ একক **(Ans.)**

খ ত্রিভুজটির পরিসীমা $2s = 12 + 4\sqrt{2}$ একক

ত্রিভুজটির অর্ধপরিসীমা $s = \dfrac{12 + 4\sqrt{2}}{2}$ একক $= \dfrac{2(6 + 2\sqrt{2})}{2}$ একক $= 6 + 2\sqrt{2}$ একক

$\therefore ABC$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{(6+2\sqrt{2})(6+2\sqrt{2}-4\sqrt{2})(6+2\sqrt{2}-5)(6+2\sqrt{2}-7)}$ বর্গ একক

$= \sqrt{(6+2\sqrt{2})(6-2\sqrt{2})(2\sqrt{2}+1)(2\sqrt{2}-1)}$ বর্গ একক

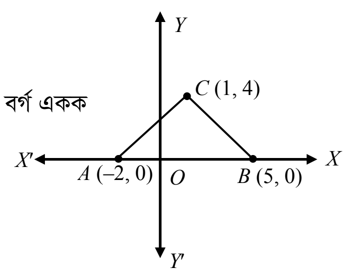
$= \sqrt{\{6^2 - (2\sqrt{2})^2\}\{(2\sqrt{2})^2 - 1^2\}}$ বর্গ একক

$= \sqrt{(36 - 4\times 2)(4\times 2 - 1)}$

$= \sqrt{(36-8)(8-1)} = \sqrt{28\times 7} = \sqrt{196} = 14$ বর্গ একক। **(Ans.)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

<u>ক্ষেত্রফল নির্ণয়:</u> $A(-2, 0)$, $B(5, 0)$ এবং $C(1, 4)$ শীর্ষ তিনটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে বিবেচনা করে পাই,



ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 5 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \dfrac{1}{2}[(-2\times 0 + 5\times 4 + 1\times 0) - \{0\times 5 + 0\times 1 + 4\times(-2)\}]$ বর্গ একক

$= \dfrac{1}{2}\{(0+20+0) - (0+0-8)\}$ বর্গ একক

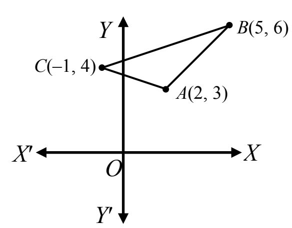
$= \dfrac{1}{2}(20+8)$

$= \dfrac{1}{2}\times 28 = 14$ বর্গ একক **(Ans.)**

২ **নিম্নোক্ত প্রতিক্ষেত্রে ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর:**
ক) $A(2, 3), B(5, 6)$ এবং $C(-1, 4)$ খ) $A(5, 2), B(1, 6)$ এবং $C(-2, -3)$;

সমাধান:

ক xy সমতলে $A(2,3)$, $B(5,6)$ এবং $C(-1,4)$ বিন্দু তিনটি স্থাপন করে ত্রিভুজ অঙ্কন করা হলো:
$A(2, 3)$, $B(5, 6)$ ও $C(-1, 4)$ শীর্ষ তিনটি ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে বিবেচনা করে পাই,



ΔABC-এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2}\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 & 2 \\ 3 & 6 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \dfrac{1}{2}[\{2\times 6 + 5\times 4 + (-1)\times 3\} - \{3\times 5 + 6\times(-1) + 4\times 2\}]$ বর্গ একক

$= \dfrac{1}{2}[(12+20-3) - (15-6+8)]$ বর্গ একক

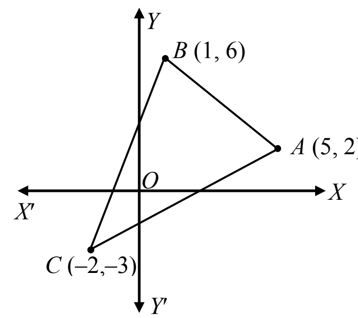
$= \dfrac{1}{2}(29-17)$ বর্গ একক

$= \dfrac{1}{2}\times 12$ বর্গ একক $= 6$ বর্গ একক **(Ans.)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

xy সমতলে $A\ (2,3)$, $B\ (5,6)$ এবং $C(-1,4)$ বিন্দু তিনটি স্থাপন করে ত্রিভুজ অঙ্কন করা হলো:
এখন, ΔBC ত্রিভুজের
AB বাহুর দৈর্ঘ্য, $c = \sqrt{(5-2)^2 + (6-3)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} = 4.243$
BC বাহুর দৈর্ঘ্য, $a = \sqrt{(-1-5)^2 + (4-6)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (-2)^2} = \sqrt{36+4} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10} = 6.325$ একক
AC বাহুর দৈর্ঘ্য, $b = \sqrt{(-1-2)^2 + (4-3)^2} = \sqrt{9+1} \quad = \sqrt{10}$ একক $= 3.162$ একক
$\therefore$ ABC ত্রিভুজের পরিসীমা $= a + b + c = (6.325 + 3.162 + 4.243) = 13.73$ একক
অর্ধপরিসীমা $= \dfrac{13.73}{2} = 6.865$ একক
$\therefore$ ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s\ (s-a)\ (s-b)\ (s-c)}$
$= \sqrt{6.865\ (6.865 - 6.325)\ (6.865 - 3.162)\ (6.865 - 4.243)}$
$= \sqrt{6.865 \times 0.54 \times 3.703 \times 2.622}$
$= \sqrt{35.99}$ বর্গ একক $= 6$ বর্গ একক (প্রায়)

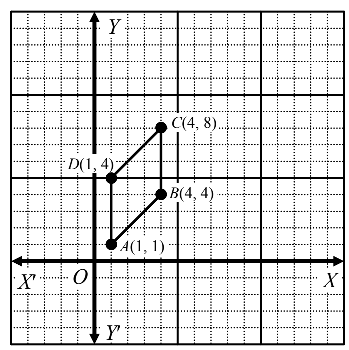
খ xy সমতলে $A\ (5, 2)$, $B(1, 6)$ এবং $C(-2, -3)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করে ত্রিভুজটি আঁকি এবং ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে আমরা পাই,



ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \dfrac{1}{2} \begin{vmatrix} 5 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & 6 & -3 & 2 \end{vmatrix}$
$= \dfrac{1}{2}[\{5\times6+1\times(-3)+(-2)\times2\} - \{2\times1+6\times(-2)+(-3)\times5\}]$
$= \dfrac{1}{2}[(30-3-4)-(2-12-15)]$
$= \dfrac{1}{2}(23+25) = \dfrac{1}{2}\times 48 = 24$ বর্গ একক

৩ **দেখাও যে, $A(1, 1)$, $B(4, 4)$, $C(4, 8)$ এবং $D(1, 5)$ বিন্দুগুলো একটি সামান্তরিকের শীর্ষ বিন্দু। AC ও BD কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর। সামান্তরিকটির ক্ষেত্রফল ত্রিভুজের মাধ্যমে তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত নির্ণয় কর।**

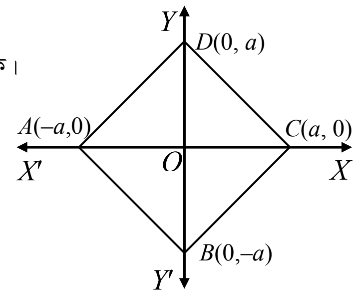
সমাধান: কোনো চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো পরস্পর সমান হলে তা একটি সামান্তরিক।
xy হলে $A(1, 1)$, $B(4, 4)$, $C(4, 8)$ এবং $D(1, 5)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করে চতুর্ভুজ $ABCD$ গঠন করি।
এখন, $ABCD$ চতুর্ভুজের



AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(4-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$ একক
BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(4-4)^2 + (8-4)^2} = \sqrt{0^2 + 4^2} = \sqrt{16} = 4$ একক
CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(1-4)^2 + (5-8)^2} = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$ একক
AD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(1-1)^2 + (5-1)^2} = \sqrt{0+4^2} = \sqrt{16} = 4$ একক
এখানে AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= CD$ বাহুর দৈর্ঘ্য [বিপরীত বাহু]
BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= AD$ বাহুর দৈর্ঘ্য [বিপরীত বাহু]
$ABCD$ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো পরস্পর সমান।
$\therefore$ $ABCD$ একটি সামান্তরিক সুতরাং A, B, C, D একটি সামান্তরিকের শীর্ষবিন্দু। **(দেখানো হলো)**
AC কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(4-1)^2 + (8-1)^2} = \sqrt{3^2 + 7^2} = \sqrt{9+49} = \sqrt{58}$ একক
BD কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(1-4)^2 + (5-4)^2} = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$ একক **(Ans.)**
$AC = \sqrt{58}$ এবং $BD = \sqrt{10}$
ΔABC এর অর্ধপরিসীমা $s = \dfrac{AB + BC + AC}{2} = \dfrac{\sqrt{18} + 4 + \sqrt{58}}{2} = 7.9292$ একক
ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s(s-a)\ (s-b)\ (s-c)}$
$= \sqrt{7.9292 \times (7.9292 - \sqrt{18})\ (7.9292 - 4)\ (7.9292 - \sqrt{58})}$
$= \sqrt{7.9292 \times (7.9292 - 4.243)\ (7.9292 - 4)\ (7.9292 - 7.616)}$
$= \sqrt{7.9292 \times 3.6862 \times 3.9292 \times 0.3132}$
$= 5.99992$ বর্গ একক
$\therefore$ $ABCD$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $= 2 \times$ (ABC ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল) [$\because$ সামান্তরিকের কর্ণ একে সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে]
$= 2 \times 5.99992 = 11.999$ বর্গ একক **(Ans.)**

লক্ষণীয়: পাঠ্যবইতে ‘আসন্ন মান’ নির্ণয় করতে বলা হয়নি। তাই শুধুমাত্র তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত মান নির্ণয় করা হয়েছে। তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত **আসন্ন মান** বিবেচনা করতে বলা হলে উত্তরটি হতো 12.000 বর্গ একক।

৪ **$A(-a, 0), B(0, -a), C(a, 0)$ এবং $D(0, a)$ শীর্ষবিশিষ্ট চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল কত?**



সমাধান: এখানে $ABCD$ চতুর্ভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো হলো:

$A(-a, 0), B(0, -a), C(a, 0), D(0, a)$

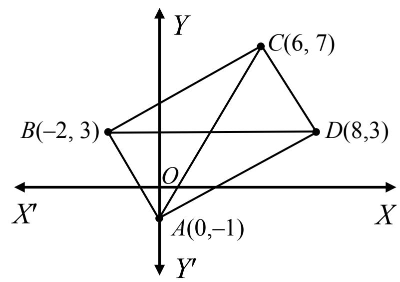
xy সমতলে $A(-a, 0), B(0, -a), C(a, 0)$ ও $D(0, a)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করে $ABCD$ চতুর্ভুজটি আঁকি। বিন্দুসমূহকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে বিবেচনা করে পাই,

$\therefore ABCD$ চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -a & 0 & a & 0 & -a \\ 0 & -a & -0 & a & 0 \end{vmatrix}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}\{(a^2 + 0 + a^2 + 0) - (0 - a^2 - 0 - a^2)\}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(2a^2 + 2a^2) = \frac{1}{2} \times 4a^2 = 2a^2$ বর্গ একক। **(Ans.)**

৫ **দেখাও যে, $A(0, -1), B(-2, 3), C(6, 7)$ এবং $D(8, 3)$ বিন্দুগুলো একটি আয়তক্ষেত্রের চারটি শীর্ষ। কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য এবং আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।**



সমাধান: দেওয়া আছে, শীর্ষ বিন্দু চারটি $A\ (0, -1), B\ (-2, 3), C(6, 7), D(8, 3)$।
পাশের চিত্রে বিন্দুপাতনের মাধ্যমে $ABCD$ চতুর্ভুজটি দেখানো হলো যার AB, BC, CD এবং DA চারটি বাহু এবং AC ও BD চতুর্ভুজটির দুইটি কর্ণ।

এখন, $ABCD$ চতুর্ভুজ।

AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(-2-0)^2 + (3+1)^2}$

$= \sqrt{(-2)^2 + 4^2}$

$= \sqrt{4 + 16}$

$= \sqrt{20}$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(6+2)^2 + (7-3)^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80}$ একক

CD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(8-6)^2 + (3-7)^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}$ একক

AD বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(8-0)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{8^2 + 4^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80}$ একক

দেখা যাচ্ছে যে, $ABCD$ চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো পরস্পর সমান অর্থাৎ

$AB = DC = \sqrt{20}$ একক ও $AD = BC = \sqrt{80}$ একক

$\therefore$ চতুর্ভুজটি একটি সামান্তরিক বা আয়ত। এখন কর্ণদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান হলে চতুর্ভুজটি আয়ত হবে।

আবার, AC কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(6-0)^2 + (7+1)^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = \sqrt{36 + 64} = \sqrt{100} = 10$ একক

BD কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(8+2)^2 + (3-3)^2} = \sqrt{10^2 + 0^2} = \sqrt{100} = 10$ একক

$ABCD$ চতুর্ভুজের AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= CD$ বাহুর দৈর্ঘ্য, BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= AD$ বাহুর দৈর্ঘ্য, AC কর্ণের দৈর্ঘ্য $= BD$ কর্ণের দৈর্ঘ্য।

$\therefore$ প্রদত্ত বিন্দুগুলোর একটি আয়তক্ষেত্রের চারটি শীর্ষবিন্দু।

যেহেতু $ABCD$ একটি আয়তক্ষেত্র।

$\therefore ABCD$ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = সন্নিহিত বাহুদ্বয়ের গুণফল $= AB \times BC$

$= \sqrt{20} \times \sqrt{80} = \sqrt{20 \times 80} = \sqrt{1600} = 40$ বর্গ একক। **(Ans.)**

৬ **তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $A(-2, 1), B(10, 6)$ এবং $C(a, -6)$। $AB = BC$ হলে a এর সম্ভাব্য মানসমূহ নির্ণয় কর। a এর মানের সাহায্যে যে ত্রিভুজ গঠিত হয় এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।**

সমাধান: এখানে, তিনটি বিন্দুর স্থানাংক $A(-2, 1), B(10, 6)$ এবং $C(a, -6)$

এখন, A এবং B বিন্দুর দূরত্ব, $AB = \sqrt{(10+2)^2 + (6-1)^2} = \sqrt{(12)^2 + 5^2} = \sqrt{144 + 25} = \sqrt{169} = 13$ একক

B এবং C বিন্দুর দূরত্ব, $BC = \sqrt{(a-10)^2 + (-6-6)^2} = \sqrt{(a-10)^2 + (-12)^2} = \sqrt{a^2 - 20a + 100 + 144}$

$= \sqrt{a^2 - 20a + 244}$

দেওয়া আছে, $AB = BC$

বা, $\sqrt{a^2 - 20a + 244} = 13$

বা, $a^2 - 20a + 244 = 169$

বা, $a^2 - 20a + 244 - 169 = 0$

বা, $a^2 - 20a + 75 = 0$

বা, $a^2 - 15a - 5a + 75 = 0$

বা, $a(a - 15) - 5(a - 15) = 0$

বা, $(a - 15)(a - 5) = 0$

$\therefore a - 15 = 0$ অথবা $a - 5 = 0$

$\therefore a = 15$ বা, $a = 5$

এখন $a = 5$ হলে বিন্দু তিনটির স্থানাংক হয় $A(-2, 1)$, $B(10, 6)$, $C(5,-6)$। বিন্দুগুলো ঘড়ি কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে পাই,

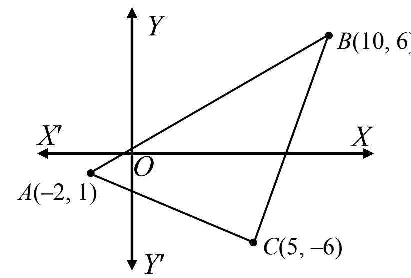
ΔACB এর ক্ষেত্রফল $\frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 5 & 10 & -2 \\ 1 & -6 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}[12 + 30 + 10 - 5 + 60 + 12]$

$= \frac{1}{2}(124 - 5)$

$= \frac{1}{2} \times 119$

$= \frac{119}{2}$ বর্গ একক।



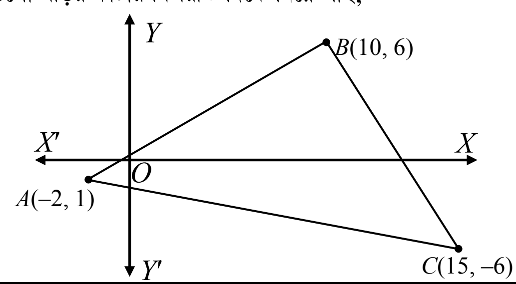
আবার, $a = 15$ হলে বিন্দু তিনটির স্থানাংক $A(-2,1)$, $B(10,6)$, $C(15, -6)$ বিন্দুগুলো ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে পাই,

ΔACB এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} -2 & 15 & 10 & -2 \\ 1 & -6 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}(12 + 90 + 10 - 15 + 60 + 12)$

$= \frac{1}{2}(184 - 15)$

$= \frac{169}{2}$ **(Ans.)**



৭ ***A, B, C* তিনটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $A(a, a + 1)$, $B(-6, -3)$ এবং $C(5, -1)$। *AB* এর দৈর্ঘ্য *AC* এর দৈর্ঘ্যের দ্বিগুণ হলে *a* এর সম্ভাব্য মান এবং *ABC* ত্রিভুজটির বৈশিষ্ট্য বর্ণনা কর।**

সমাধান: এখানে, A, B, C তিনটি বিন্দুর স্থানাংক যথাক্রমে $A(a, a + 1)$, $B(-6,-3)$ এবং $C(5,-1)$

$\therefore$ AB এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(a+6)^2 + (a+1+3)^2} = \sqrt{(a+6)^2 + (a+4)^2} = \sqrt{a^2 + 12a + 36 + a^2 + 8a + 16}$

$= \sqrt{2a^2 + 20a + 52}$

AC এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(a-5)^2 + (a+1+1)^2} = \sqrt{(a-5)^2 + (a+2)^2} = \sqrt{a^2 - 10a + 25 + a^2 + 4a + 2^2}$

$= \sqrt{a^2 - 10a + 25 + a^2 + 4a + 4}$

$= \sqrt{2a^2 - 6a + 29}$

প্রশ্নমতে, $AB = 2AC$

বা, $\sqrt{2a^2 + 20a + 52} = 2\sqrt{2a^2 - 6a + 29}$

বা, $\left(\sqrt{2a^2 + 20a + 52}\right)^2 = \left(2\sqrt{2a^2 - 6a + 29}\right)^2$

বা, $2a^2 + 20a + 52 = 4(2a^2 - 6a + 29)$

বা, $2a^2 + 20a + 52 = 8a^2 - 24a + 116$

বা, $2a^2 + 20a + 52 - 8a^2 + 24a - 116 = 0$

বা, $-6a^2 + 44a - 64 = 0$

বা, $-2(3a^2 - 22a + 32) = 0$

বা, $3a^2 - 22a + 32 = 0$

বা, $3a^2 - 6a - 16a + 32 = 0$

বা, $3a(a-2) - 16(a-2) = 0$

বা, $(3a - 16)(a - 2) = 0$

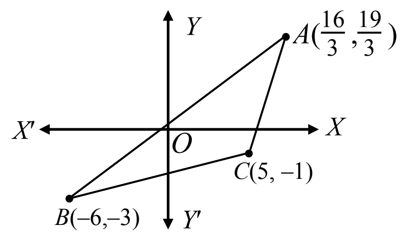
$\therefore 3a - 16 = 0$ অথবা, $a - 2 = 0$

বা, $3a = 16$ বা, $a = 2$

বা, $a = \frac{16}{3}$

$\therefore a = 5\frac{1}{3}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $a = 5\frac{1}{3}$ অথবা 2



এখন, $a = \frac{16}{3}$ হলে $a + 1 = \frac{16}{3} + 1 = \frac{19}{3}$, সুতরাং A বিন্দুর স্থানাংক $A\left(\frac{16}{3}, \frac{19}{3}\right)$

xy সমতলে $A\left(\frac{16}{3}, \frac{19}{3}\right)$, $B(-6, -3)$ এবং $C(5, -1)$ এর সম্ভাব্য বিন্দুগুলো স্থাপন করে ত্রিভুজ অঙ্কন করা হলো:

ABC ত্রিভুজের

AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{\left(\frac{16}{3}+6\right)^2 + \left(\frac{19}{3}+3\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{34}{3}\right)^2 + \left(\frac{28}{3}\right)^2} = \sqrt{(11.333)^2 + (9.333)^2} = \sqrt{215.542} = 14.681$ একক (প্রায়)

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5+6)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{(11)^2 + 2^2} = \sqrt{125} = 11.180$ একক (প্রায়)

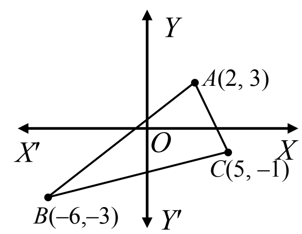
AC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{\left(\frac{16}{3}-5\right)^2 + \left(\frac{19}{3}+1\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{22}{3}\right)^2} = \sqrt{(0.333)^2 + (7.333)^2} = \sqrt{0.111 + 53.773}$

$= \sqrt{53.884} = 7.341$ একক

যেহেতু $AB \neq BC \neq AC$ $\therefore$ ABC একটি বিষমবাহু ত্রিভুজ।

আবার, $a = 2$ হলে পাই, $a + 1 = 2 + 1 = 3$, সুতরাং A বিন্দুর স্থানাংক $A(2, 3)$

xy সমতলে $A(2,3)$, $B(-6, -3)$ এবং $C(5, -1)$ এর সম্ভাব্য বিন্দুগুলো স্থাপন করে ত্রিভুজ অঙ্কন করা হলো:



এখন, ABC ত্রিভুজে,

AB বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(2+6)^2 + (3+3)^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = \sqrt{64 + 36} = \sqrt{100}$ একক

BC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5+6)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{(11)^2 + 2^2} = \sqrt{121 + 4} = \sqrt{125}$ একক

AC বাহুর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{(5-2)^2 + (-1-3)^2} = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25}$ একক

এখানে, $AB^2 + AC^2 = (\sqrt{100})^2 + (\sqrt{25})^2 = 100 + 25 = 125$

আবার, $BC^2 = (\sqrt{125})^2 = 125$

$\therefore AB^2 + AC^2 = BC^2$

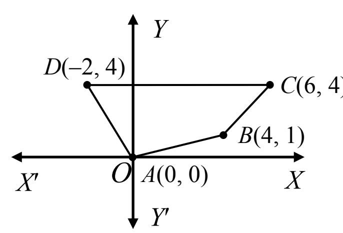
$\therefore$ $a = 2$ হলে ABC ত্রিভুজটি সমকোণী যার অতিভুজ AC এবং $\angle BAC$ সমকোণ। **(Ans.)**

৮ নিম্নোক্ত চতুর্ভুজসমূহের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর [পদ্ধতি ২ ব্যবহার কর] :

ক) (0, 0), (–2, 4), (6, 4), (4, 1)   খ) (1, 4), (–4, 3), (1, –2), (4, 0)   গ) (0, 1), (–3, –3), (4, 3), (5, 1)

<u>সমাধান:</u>

ক মনে করি, বিন্দু চারটি $A(0,0)$, $B(4, 1)$, $C(6, 4)$ এবং $D(-2, 4)$



$\therefore$ বিন্দুসমূহকে xy সমতলে স্থাপন করে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে পাই,

চতুর্ভুজ $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 4 & 6 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 4 & 0 \end{vmatrix}$

$= \frac{1}{2}(0 + 16 + 24 + 0 - 0 - 6 + 8 - 0)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \times 42 = 21$ বর্গ একক।

$\therefore$ চতুর্ভুজটির ক্ষেত্রফল $= 21$ বর্গ একক। **(Ans.)**

বি.দ্র: এ ধরনের অঙ্কের সমাধানে খাতায় একটি রাফ চিত্র আকলেই হবে।

খ মনে করি, বিন্দু চারটি $A(1, 4)$, $B(-4, 3)$, $C(1, -2)$ এবং $D(4, 0)$ বিন্দু সমূহকে xy সমতলে স্থাপন করে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে পাই,

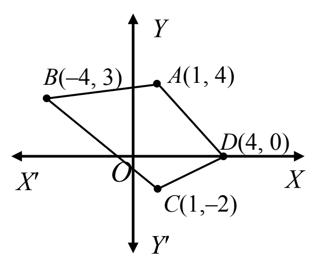
চতুর্ভুজ $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 & 4 & 1 \\ 4 & 3 & -2 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

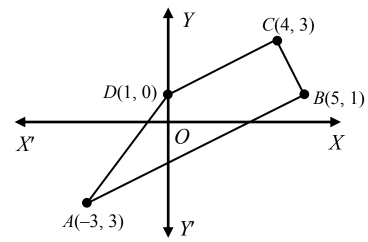
$= \frac{1}{2}\{1 \times 3 + (-4) \times (-2) + 1 \times 0 + 4 \times 4 - (-4) \times 4 - 1 \times 3 - 4 \times (-2) - 1 \times 0\}$

$= \frac{1}{2}(3 + 8 + 0 + 16 + 16 - 3 + 8 - 0)$

$= \frac{1}{2} \times 48 = 24$ বর্গ একক। **(Ans.)**



গ প্রদত্ত বিন্দু সমূহকে $A(-3, -3)$, $B(5, 1)$, $C(4, 3)$ এবং $D(0, 1)$ দ্বারা চিহ্নিত করে, বিন্দুসমূহকে xy সমতলে স্থাপন করে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে পাই,



চতুর্ভুজ $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\left|\begin{array}{ccccc} -3 & 5 & 4 & 0 & -3 \\ -3 & 1 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right|$ বর্গ একক

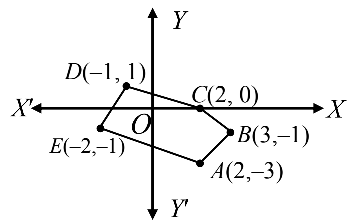
$= \frac{1}{2}(-3 + 15 + 4 + 0 + 15 - 4 - 0 + 3)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \times 30$ বর্গ একক

$= 15$ বর্গ একক **(Ans.)**

৯ **দেখাও যে, $A(2, -3), B(3, -1), C(2, 0), D(-1, 1)$ এবং $E(-2, -1)$ শীর্ষবিশিষ্ট বহুভুজের ক্ষেত্রফল 11 বর্গ একক।**

<u>সমাধান</u>: বহুভুজটির শীর্ষ বিন্দুগুলো $A(2, -3)$, $B(3, -1)$, $C(2, 0)$, $D(-1, 1)$ এবং $E(-2, -1)$
এখানে, শীর্ষবিন্দু পাঁচটি। সুতরাং বহুভুজটি একটি পঞ্চভুজ।
বিন্দুসমূহকে xy সমতলে স্থাপন করে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে



$ABCDE$ পঞ্চভুজ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\left|\begin{array}{cccccc} 2 & 3 & 2 & -1 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & 0 & 1 & -1 & -3 \end{array}\right|$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}\{2 \times (-1) + 3 \times 0 + 2 \times 1 + (-1) \times (-1) + (-2) \times (-3) - (-3) \times 3 - (-1) \times 2 - 0 \times (-1)(-1) \times (-2) - (-1) \times 2\}$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}(-2 + 0 + 2 + 1 + 6 + 9 + 2 + 0 + 2 + 2) = \frac{1}{2} \times 22 = 11$ বর্গ একক। **(Ans.)**

১০ **একটি চতুর্ভুজের চারটি শীর্ষ $A(3, 4), B(-4, 2), C(6, -1)$ এবং $D(p, 3)$ এবং শীর্ষসমূহ ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে আবর্তিত। $ABCD$ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ হলে p এর মান নির্ণয় কর।**

<u>সমাধান</u>: এখানে, $A(3, 4)$, $B(-4, 2)$, $C(6, -1)$ এবং $D(p, 3)$ বিন্দুসমূহকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে চতুর্ভুজক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল:

$= \frac{1}{2}\left|\begin{array}{ccccc} 3 & -4 & 6 & p & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 3 & 4 \end{array}\right|$

$= \frac{1}{2}\{3 \times 2 + (-4) \times (-1) + 6 \times 3 + p \times 4 - 4 \times (-4) - 2\times6 - (-1) \times p - 3 \times 3\}$

$= \frac{1}{2}(6 + 4 + 18 + 4p + 16 - 12 + p - 9) = \frac{1}{2}(23 + 5p)$

আবার, $A(3, 4)$, $B(-4, 2)$ এবং $C(6, -1)$ বিন্দু সমূহকে ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে নিয়ে

ত্রিভুজ ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}\left|\begin{array}{cccc} 3 & -4 & 6 & 3 \\ 4 & 2 & -1 & 4 \end{array}\right|$

$= \frac{1}{2}\{3 \times 2 + (-4) \times (-1) + 6 \times 4 - 4 \times (-4) - 2 \times 6 - (-1) \times 3\}$

$= \frac{1}{2}(6 + 4 + 24 + 16 - 12 + 3) = \frac{1}{2} \times 41 = \frac{41}{2}$

প্রশ্নমতে, $ABCD$ চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল $= 2 \times ABC$ ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$\therefore \frac{1}{2}(23 + 5p) = 2 \times \frac{41}{2}$

বা, $23 + 5p = 82$

বা, $5p = 82 - 23$

বা, $5p = 59$

$\therefore p = \frac{59}{5}$ **(Ans.)**