

অনুশীলনী - ৪.২

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি

1. $x = \log_a N$ হলে, $a^x = N$ অথবা, $x = \log_a N$ হলে $a^x = N$
2. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
3. $\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
4. $\log_a M^r = r \log_a M$
5. $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$ অথবা, $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$
6. $\log_a a = 1$
7. $\log_a 1 = 0$

মনে রাখবে:

- লগারিদম ভিত্তি কখনও ঋণাত্মক হয় না। উদাহরণ: $\log_x 25 = 2$ হলে লগারিদমের সংজ্ঞানুসারে, $x^2 = 25$ হলে $x = 5$ [$\because x = -5$ গ্রহণযোগ্য নয়]
- শূন্য বা ঋণাত্মক সংখ্যার লগের বাস্তব মান নেই। উদাহরণ: $\log 0$; $\log(-2)$, $\log(-9)$... ইত্যাদি সংখ্যার লগারিদমের বাস্তব মান নেই।
- লগারিদমের ভিত্তির উল্লেখ না থাকলে বীজগাণিতীয় রাশির ক্ষেত্রে e কে এবং সংখ্যার ক্ষেত্রে 10 কে ভিত্তি ধরা হয়। উদাহরণ: $\log x$ বলতে বুঝায় $\log_e x$ এবং $\log 25$ বলতে বুঝায় $\log_{10} 25$ ।



অনুশীলনীর সমাধান

১ মান নির্ণয় কর:

- (ক) $\log_3 81$ (খ) $\log_5 \sqrt[3]{5}$ (গ) $\log_4 2$
 (ঘ) $\log_{2\sqrt{5}} 400$ (ঙ) $\log_5 (\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{5})$

সমাধান:

(ক) $\log_3 81$
 $= \log_3 3^4$
 $= 4 \log_3 3$ [$\because \log_a M^r = r \log_a M$]
 $= 4 \times 1$ [$\because \log_a a = 1$]
 $= 4$ (Ans.)

রাফ

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 81} \\ 3 \overline{) 27} \\ 3 \overline{) 9} \\ 3 \end{array}$$
 $\therefore 81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$

(খ) $\log_5 \sqrt[3]{5}$
 $= \log_5 5^{\frac{1}{3}}$
 $= \frac{1}{3} \log_5 5$ [$\because \log_a M^r = r \log_a M$]
 $= \frac{1}{3} \times 1$ [$\because \log_a a = 1$]
 $= \frac{1}{3}$ (Ans.)

(গ) $\log_4 2$
 $= \log_4 \sqrt{4}$
 $= \log_4 4^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \log_4 4$ [$\because \log_a M^r = r \log_a M$]
 $= \frac{1}{2} \times 1$ [$\because \log_a a = 1$]
 $= \frac{1}{2}$ (Ans.)

(ঘ) $\log_{2\sqrt{5}} 400$
 $= \log_{2\sqrt{5}} (2\sqrt{5})^4$
 $= 4 \log_{2\sqrt{5}} 2\sqrt{5}$ [$\because \log_a M^r = r \log_a M$]
 $= 4 \times 1$ [$\because \log_a a = 1$]
 $= 4$ (Ans.)

রাফ

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 400} \\ 2 \overline{) 200} \\ 2 \overline{) 100} \\ 2 \overline{) 50} \\ 5 \overline{) 25} \\ 5 \end{array}$$
 $\therefore 400 = 2^4 \times 5^2$

(ঙ) $\log_5 (\sqrt[3]{5} \cdot \sqrt{5})$
 $= \log_5 (5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{2}})$
 $= \log_5 5^{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}$
 $= \log_5 5^{\frac{2+3}{6}}$
 $= \log_5 5^{\frac{5}{6}}$
 $= \frac{5}{6} \log_5 5$ [$\because \log_a M^r = r \log_a M$]
 $= \frac{5}{6} \times 1$ [$\because \log_a a = 1$]
 $= \frac{5}{6}$ (Ans.)

২ x এর মান নির্ণয় কর:

- (ক) $\log_5 x = 3$ (খ) $\log_x 25 = 2$ (গ) $\log_x \frac{1}{16} = -2$

সমাধান:

(ক) $\log_5 x = 3$
 $\therefore x = 5^3 = 125$ (Ans.)

(খ) $\log_x 25 = 2$
 $\therefore x^2 = 25$
 বা, $x = \sqrt{25}$
 $\therefore x = 5$ (Ans.)

❖ বিদ্র: যেহেতু ভিত্তি ঋণাত্মক হতে পারে না (লগের সংজ্ঞানুসারে), তাই x এর শুধুমাত্র ধনাত্মক মান নেওয়া হয়েছে।

(গ) $\log_x \frac{1}{16} = -2$
 $\therefore x^{-2} = \frac{1}{16}$
 বা, $x^{-2} = 4^{-2}$
 $\therefore x = 4$ (Ans.)

৩ দেখাও যে

(ক) $5 \log_{10} 5 - \log_{10} 25 = \log_{10} 125$

(খ) $\log_{10} \frac{50}{147} = \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 5 - \log_{10} 3 - 2 \log_{10} 7$

(গ) $3 \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3 + \log_{10} 5 = \log_{10} 360$

সমাধান:

ক বামপক্ষ = $5 \log_{10} 5 - \log_{10} 25$
 $= 5 \log_{10} 5 - \log_{10} 5^2$
 $= 5 \log_{10} 5 - 2 \log_{10} 5$
 $= 3 \log_{10} 5$
 $= \log_{10} 5^3$
 $= \log_{10} 125 = \text{ডানপক্ষ}$

$\therefore 5 \log_{10} 5 - \log_{10} 25 = \log_{10} 125$ (দেখানো হলো)

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

বামপক্ষ = $5 \log_{10} 5 - \log_{10} 25$
 $= \log_{10} 5^5 - \log_{10} 5^2$
 $= \log_{10} \frac{5^5}{5^2}$
 $= \log_{10} 5^{5-2}$
 $= \log_{10} 5^3$
 $= \log_{10} 125 = \text{ডানপক্ষ}$

$\therefore 5 \log_{10} 5 - \log_{10} 25 = \log_{10} 125$ (দেখানো হলো)

সমাধান (তৃতীয় পদ্ধতি)

ডানপক্ষ = $\log_{10} 125 = \log_{10} 5^3 = 3 \log_{10} 5 = 5 \log_{10} 5 - 2 \log_{10} 5 = 5 \log_{10} 5 - \log_{10} 5^2 = 5 \log_{10} 5 - \log_{10} 25 = \text{বামপক্ষ}$
 $\therefore 5 \log_{10} 5 - \log_{10} 25 = \log_{10} 125$ (দেখানো হলো)

খ বামপক্ষ = $\log_{10} \frac{50}{147}$
 $= \log_{10} 50 - \log_{10} 147$
 $= \log_{10} (2 \times 5^2) - \log_{10} (3 \times 7^2)$
 $= \log_{10} 2 + \log_{10} 5^2 - (\log_{10} 3 + \log_{10} 7^2)$
 $= \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 5 - \log_{10} 3 - 2 \log_{10} 7 = \text{ডানপক্ষ}$

$\therefore \log_{10} \frac{50}{147} = \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 5 - \log_{10} 3 - 2 \log_{10} 7$ (দেখানো হলো)

$\begin{array}{r} 2 \overline{) 50} \\ 5 \overline{) 25} \\ \hline 5 \end{array}$ <p>$\therefore 50 = 2 \times 5 \times 5$ $= 2 \times 5^2$</p>	$\begin{array}{r} 3 \overline{) 147} \\ 7 \overline{) 79} \\ \hline 7 \end{array}$ <p>$\therefore 147 = 3 \times 7 \times 7$ $= 3 \times 7^2$</p>
--	--

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

ডানপক্ষ = $\log_{10} 2 + 2 \log_{10} 5 - \log_{10} 3 - 2 \log_{10} 7 = \log_{10} 2 + \log_{10} 5^2 - \log_{10} 3 - \log_{10} 7^2$
 $= \log_{10} 2 + \log_{10} 25 - \log_{10} 3 - \log_{10} 49 = \log_{10} \frac{2 \times 25}{3 \times 49} = \log_{10} \frac{50}{147} = \text{বামপক্ষ}$
 $\therefore \log_{10} \frac{50}{147} = \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 5 - \log_{10} 3 - 2 \log_{10} 7$ (দেখানো হলো)

গ বামপক্ষ = $3 \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3 + \log_{10} 5$
 $= \log_{10} 2^3 + \log_{10} 3^2 + \log_{10} 5$
 $= \log_{10} 8 + \log_{10} 9 + \log_{10} 5$
 $= \log_{10} (8 \times 9 \times 5)$
 $= \log_{10} 360 = \text{ডানপক্ষ}$

$\therefore 3 \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3 + \log_{10} 5 = \log_{10} 360$ (দেখানো হলো)

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

ডানপক্ষ = $\log_{10} 360 = \log_{10} (2^3 \times 3^2 \times 5) = \log_{10} 2^3 + \log_{10} 3^2 + \log_{10} 5 = 3 \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3 + \log_{10} 5 = \text{বামপক্ষ}$
 $\therefore 3 \log_{10} 2 + 2 \log_{10} 3 + \log_{10} 5 = \log_{10} 360$ (দেখানো হলো)

৪ সরল কর:

(ক) $7 \log_{10} \frac{10}{9} - 2 \log_{10} \frac{25}{24} + 3 \log_{10} \frac{81}{80}$

(খ) $\log_7 (\sqrt[5]{7} \cdot \sqrt{7}) - \log_3 \sqrt[3]{3} + \log_4 2$

(গ) $\log_e \frac{a^3 b^3}{c^3} + \log_e \frac{b^3 c^3}{d^3} + \log_e \frac{c^3 d^3}{a^3} - 3 \log_e b^2 c$

সমাধান:

(ক) $7 \log_{10} \frac{10}{9} - 2 \log_{10} \frac{25}{24} + 3 \log_{10} \frac{81}{80}$

$$= 7 \log_{10} \frac{2 \cdot 5}{3^2} - 2 \log_{10} \frac{5^2}{2^3 \cdot 3} + 3 \log_{10} \frac{3^4}{2^4 \cdot 5}$$

$$= \log_{10} \left(\frac{2 \cdot 5}{3^2} \right)^7 - \log_{10} \left(\frac{5^2}{2^3 \cdot 3} \right)^2 + \log_{10} \left(\frac{3^4}{2^4 \cdot 5} \right)^3$$

$$= \log_{10} \frac{2^7 \cdot 5^7}{3^{14}} - \log_{10} \frac{5^4}{2^6 \cdot 3^2} + \log_{10} \frac{3^{12}}{2^{12} \cdot 5^3}$$

$$= \log_{10} \left(\frac{2^7 \cdot 5^7}{3^{14}} \div \frac{5^4}{2^6 \cdot 3^2} \times \frac{3^{12}}{2^{12} \cdot 5^3} \right)$$

$$= \log_{10} \left(\frac{2^7 \cdot 5^7}{3^{14}} \times \frac{2^6 \cdot 3^2}{5^4} \times \frac{3^{12}}{2^{12} \cdot 5^3} \right)$$

$$= \log_{10} \left(\frac{2^{13} \cdot 3^{14} \cdot 5^7}{2^{12} \cdot 3^{14} \cdot 5^7} \right) = \log_{10} (2^{13-12} \times 3^{14-14} \times 5^{7-7}) = \log_{10} (2^1 \times 3^0 \times 5^0) = \log_{10} (2 \times 1 \times 1) = \log_{10} 2 \text{ (Ans.)}$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 24} \\ 2 \overline{) 12} \\ 2 \overline{) 6} \\ 3 \end{array}$$

$$\therefore 24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$$

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 81} \\ 3 \overline{) 27} \\ 3 \overline{) 9} \\ 3 \end{array}$$

$$\therefore 81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$$

$$\begin{array}{r} 2 \overline{) 80} \\ 2 \overline{) 40} \\ 2 \overline{) 20} \\ 2 \overline{) 10} \\ 5 \end{array}$$

$$\therefore 80 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^4 \times 5$$

(খ) $\log_7 (\sqrt[5]{7} \cdot \sqrt{7}) - \log_3 \sqrt[3]{3} + \log_4 2$

$$= \log_7 \left(7^{\frac{1}{5}} \cdot 7^{\frac{1}{2}} \right) - \log_3 3^{\frac{1}{3}} + \log_4 \sqrt{4}$$

$$= \log_7 7^{\frac{1}{5} + \frac{1}{2}} - \log_3 3^{\frac{1}{3}} + \log_4 4^{\frac{1}{2}}$$

$$= \log_7 7^{\frac{2+5}{10}} - \log_3 3^{\frac{1}{3}} + \log_4 4^{\frac{1}{2}}$$

$$= \log_7 7^{\frac{7}{10}} - \log_3 3^{\frac{1}{3}} + \log_4 4^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{7}{10} \log_7 7 - \frac{1}{3} \log_3 3 + \frac{1}{2} \log_4 4 = \frac{7}{10} \times 1 - \frac{1}{3} \times 1 + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{7}{10} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{21 - 10 + 15}{30} = \frac{26}{30} = \frac{13}{15} \text{ (Ans.)}$$

(গ) $\log_e \frac{a^3 b^3}{c^3} + \log_e \frac{b^3 c^3}{d^3} + \log_e \frac{c^3 d^3}{a^3} - 3 \log_e b^2 c$

$$= \log_e \left(\frac{a^3 b^3}{c^3} \times \frac{b^3 c^3}{d^3} \times \frac{c^3 d^3}{a^3} \right) - \log_e (b^2 c)^3 \quad [\because \log_e M + \log_e N = \log_e MN]$$

$$= \log_e b^6 c^3 - \log_e b^6 c^3 = 0 \text{ (Ans.)}$$

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

$$\log_e \frac{a^3 b^3}{c^3} + \log_e \frac{b^3 c^3}{d^3} + \log_e \frac{c^3 d^3}{a^3} - 3 \log_e b^2 c = \log_e \frac{a^3 b^3}{c^3} + \log_e \frac{b^3 c^3}{d^3} + \log_e \frac{c^3 d^3}{a^3} - \log_e (b^2 c)^3$$

$$= \log_e \frac{a^3 b^3}{c^3} + \log_e \frac{b^3 c^3}{d^3} + \log_e \frac{c^3 d^3}{a^3} - \log_e b^6 c^3 = \log_e \left(\frac{a^3 b^3}{c^3} \times \frac{b^3 c^3}{d^3} \times \frac{c^3 d^3}{a^3} \div b^6 c^3 \right)$$

$$= \log_e \left(\frac{a^3 b^3}{c^3} \times \frac{b^3 c^3}{d^3} \times \frac{c^3 d^3}{a^3} \times \frac{1}{b^6 c^3} \right) = \log_e \frac{a^3 b^6 c^6 d^6}{a^3 b^6 c^6 d^3} = \log_e 1 = 0 \text{ (Ans.)}$$

◆◆ অনুশীলনীর ৫ ও ১১নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

<p>(i) $a = \frac{16}{15}, b = \frac{25}{24}, c = \frac{81}{80}$ এবং $d = \sqrt{1000}$</p> <p>ক. d এর 10 ভিত্তিক লগারিদম কত?</p> <p>খ. $16 \log_{10} a + 12 \log_{10} b + 7 \log_{10} c$ এর মান নির্ণয় কর।</p> <p>গ. দেখাও যে, $\log_6(5ab) + \log_6(ac) + \log_3 \sqrt{3} = \log_{10} d$</p>	<p>নিজে নিজে চেষ্টা কর।</p> <p>(খ) $\log 5$</p>
<p>(ii) যদি $p = \frac{x^b}{x^c}, q = \frac{x^c}{x^a}$ এবং $r = \frac{x^a}{x^b}$ হয়, তাহলে</p> <p>ক. pqr এর মান নির্ণয় কর।</p> <p>খ. $p^{b+c-a} \times q^{c+a-b} \times r^{a+b-c}$ এর মান নির্ণয় কর।</p> <p>গ. দেখাও যে, $\log b^2 + bc + c^2 + \log q^{c^2 + ca + a^2} + \log r^{a^2 + ab + b^2} = 0$</p>	<p>নিজে নিজে চেষ্টা কর।</p> <p>উত্তর: (ক) 1; (খ) 1</p>

৫. $x = 2, y = 3, z = 5, w = 7$

ক. $\sqrt{y^3}$ এর ৩ ভিত্তিক লগ নির্ণয় কর।

খ. $w \log \frac{xz}{y^2} - x \log \frac{z^2}{x^2y} + y \log \frac{y^4}{x^4z}$ এর মান নির্ণয় কর।

গ. দেখাও যে, $\frac{\log \sqrt{y^3} + y \log x - \frac{y}{x} \log (xz)}{\log (xy) - \log z} = \log_y \sqrt{y^3}$

সমাধান:

ক. দেওয়া আছে, $y = 3$

$$\begin{aligned} \therefore \sqrt{y^3} \text{ এর } 3 \text{ ভিত্তিক লগ} &= \log_3 \sqrt{y^3} \\ &= \log_3 \sqrt{3^3} \\ &= \log_3 3^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2} \log_3 3 = \frac{3}{2} \cdot 1 = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

খ. দেওয়া আছে, $x = 2, y = 3, z = 5, w = 7$

$$\begin{aligned} \therefore w \log \frac{xz}{y^2} - x \log \frac{z^2}{x^2y} + y \log \frac{y^4}{x^4z} \\ &= 7 \log \frac{2 \cdot 5}{3^2} - 2 \log \frac{5^2}{2^2 \cdot 3} + 3 \log \frac{3^4}{2^4 \cdot 5} \\ &= 7 \log (2.5) - 7 \log 3^2 - 2 \log 5^2 + 2 \log (2^2 \cdot 3) \\ &\quad + 3 \log 3^4 - 3 \log (2^4 \cdot 5) \\ &= 7 \log 2 + 7 \log 5 - 14 \log 3 - 4 \log 5 + 4 \log 2 \\ &\quad + 2 \log 3 + 12 \log 3 - 12 \log 2 - 3 \log 5 \\ &= 7 \log 2 + 4 \log 2 - 12 \log 2 + 7 \log 5 - 4 \log 5 \\ &\quad - 3 \log 5 - 14 \log 3 + 2 \log 3 + 12 \log 3 \\ &= -\log 2 \end{aligned}$$

গ. বামপক্ষ = $\frac{\log \sqrt{y^3} + y \log x - \frac{y}{x} \log (xz)}{\log (xy) - \log z}$

$$\begin{aligned} &= \frac{\log \sqrt{3^3} + 3 \log 2 - \frac{3}{2} \log (2.5)}{\log (2.3) - \log 5} \\ &= \frac{\log 3^{\frac{3}{2}} + 3 \log 2 - \frac{3}{2} (\log 2 + \log 5)}{\log 2 + \log 3 - \log 5} \\ &= \frac{\frac{3}{2} (\log 3 + 2 \log 2 - \log 2 - \log 5)}{(\log 2 + \log 3 - \log 5)} \\ &= \frac{\frac{3}{2} (\log 3 + \log 2 - \log 5)}{(\log 2 + \log 3 - \log 5)} \\ &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

ডানপক্ষ = $\log_y \sqrt{y^3}$

$= \log_3 \sqrt{y^3}$

$= \frac{3}{2}$; [‘ক’ হতে পাই]

$\therefore \frac{\log \sqrt{y^3} + y \log x - \frac{y}{x} \log (xz)}{\log (xy) - \log z} = \log_y \sqrt{y^3}$ (দেখানো হলো)

◆◆ অনুশীলনীর ৫(গ)নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

$a = 2, b = 3, c = 4$ এবং $d = 5$

ক. $a - \{a^{-1} + (b^{-1} - a)^{-1}\}^{-1}$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. $\frac{\log \sqrt{b^3} + \log a^3 - \log \sqrt{(ad)^3}}{\log a^2b - \log ad}$ এর মান কত?

গ. $\frac{b^{x+1}}{(b^x)^{x-1}} \div \frac{(3b)^{x+1}}{(b^{x-1})^{x+1}} \div b^{-2}$ এর মান কত?

নিজে নিজে চেষ্টা কর।

(ক) 12; (খ) $\frac{3}{2}$; (গ) 1



পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

কাজ

পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-৮২

১: লগের মাধ্যমে প্রকাশ কর:	২: ফাঁকা জায়গা পূরণ কর:
(i) $10^2 = 100$	সূচকের মাধ্যমে লগের মাধ্যমে
(ii) $3^{-2} = \frac{1}{9}$	$10^0 = 1$ $\log_{10} 1 = 0$
(iii) $2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$e^0 = \dots$ $\log_e 1 = \dots$
(iv) $\sqrt{2^4} = 4$	$a^0 = 1$ $\dots = \dots$
	$10^1 = 10$ $\log_{10} 10 = 0$
	$e^1 = \dots$ $\dots = \dots$
	$\dots = \dots$ $\log_a a = 1$

সমাধান: $a^x = N, (a > 0, a \neq 1)$ হলে $x = \log_a N$ এর a ভিত্তিক লগ বলা হয় এবং বিপরীতক্রমে $x = \log_a N$ হলে $a^x = N$

কাজ ১:	
(i) $10^2 = 100$	$\log_{10} 100 = 2$
(ii) $3^{-2} = \frac{1}{9}$	$\log_3 \frac{1}{9} = -2$
(iii) $2^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$
(iv) $\sqrt{2^4} = 4$	$\log_2 4 = 2$

কাজ ২:	
সূচকের মাধ্যমে	লগের মাধ্যমে
$10^0 = 1$	$\log_{10} 1 = 0$
$e^0 = 1$	$\log_e 1 = 0$
$a^0 = 1$	$\log_a 1 = 0$
$10^1 = 10$	$\log_{10} 10 = 1$
$e^1 = e$	$\log_e e = 1$
$a^1 = a$	$\log_a a = 1$