অষ্টম অধ্যায়

বৃত্ত

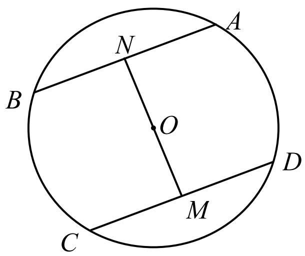
অনুশীলনী - ৮.১

অনুশীলনীর সমাধান

১ প্রমাণ কর যে, দুইটি সমান্তরাল জ্যা এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা কেন্দ্রগামী এবং জ্যাদ্বয়ের ওপর লম্ব।

<u>সমাধানঃ</u>

<u>যখন সমান্তরাল জ্যাদ্বয় কেন্দ্রের বিপরীত পাশে অবস্থান করেঃ</u>



সাধারণ নির্বচনঃ প্রমাণ করতে হবে যে, দুইটি সমান্তরাল জ্যা-এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা কেন্দ্রগামী এবং জ্যাদ্বয়ের উপর লম্ব।

বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি, O কেন্দ্র বিশিষ্ট $ABCD$ একটি বৃত্ত। AB ও CD সমান্তরাল জ্যাদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে N ও M। প্রমাণ করতে হবে যে, MN কেন্দ্রগামী এবং AB ও CD জ্যাদ্বয়ের উপর লম্ব।

অঙ্কনঃ O, M এবং O, N যোগ করি।

প্রমাণঃ

ধাপ ১. O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB জ্যায়ের মধ্যবিন্দু N

$\therefore ON \perp$ জ্যা AB [$\because$ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাস ভিন্ন কোনো জ্যা এর মধ্যবিন্দুর এবং কেন্দ্রের সংযোজক রেখাংশ ঐ জ্যা এর ওপর লম্ব]

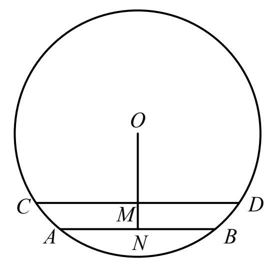
ধাপ ২. আবার, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং CD জ্যায়ের মধ্যবিন্দু M

$\therefore OM \perp$ জ্যা CD [একই কারণে]

অর্থাৎ ON এবং OM, O বিন্দু হতে যথাক্রমে AB ও CD সমান্তরাল জ্যাদ্বয়ের উপর লম্ব। সুতরাং ON এবং OM একই সরলরেখায় অবস্থিত। [(১) ও (২) থেকে]

অর্থাৎ MN কেন্দ্রগামী এবং AB ও CD জ্যাদ্বয়ের উপর লম্ব। **(প্রমাণিত)**

<u>যখন সমান্তরাল জ্যাদ্বয় কেন্দ্রের একই পাশে অবস্থান করেঃ</u>



সাধারণ নির্বচনঃ প্রমাণ করতে হবে যে, দুইটি সমান্তরাল জ্যা-এর মধ্যবিন্দু সংযোজক সরলরেখা কেন্দ্রগামী এবং জ্যাদ্বয়ের উপর লম্ব।

বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি, ABC বৃত্তের কেন্দ্র O। AB ও CD দুইটি সমান্তরাল জ্যা। N এবং M যথাক্রমে AB ও CD-এর মধ্যবিন্দু। MN মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা। প্রমাণ করতে হবে যে, MN কেন্দ্রগামী এবং জ্যাদ্বয়ের উপর লম্ব।

অঙ্কনঃ O, M এবং O, N যোগ করি।

প্রমাণঃ

ধাপ ১. M, জ্যা CD এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore OM \perp CD$ এবং $\angle OMC =$ এক সমকোণ [$\because$ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাস ভিন্ন কোনো জ্যা এর মধ্যবিন্দুর এবং কেন্দ্রের সংযোজক রেখাংশ ঐ জ্যা এর ওপর লম্ব]

ধাপ ২. N, জ্যা AB এর মধ্যবিন্দু।

$\therefore ON \perp AB$ এবং $\angle ONA =$ এক সমকোণ

ধাপ ৩. $\angle OMC = \angle ONA$ [ধাপ-১ ও ধাপ-২ থেকে]

ধাপ ৪. $\because AB \parallel CD$ এবং $\angle OMC = \angle ONA$ [কল্পনা]

সুতরাং OMN হলো AB ও CD সমান্তরাল জ্যাদ্বয়ের ছেদক

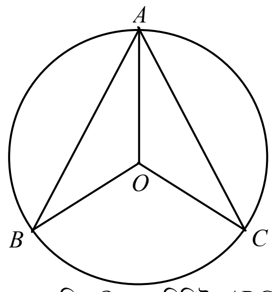
[$\because \angle OMC = \angle ONA$ অনুরূপ কোণ]

$\therefore O, M, N$ একই সরলরেখায় অবস্থিত

সুতরাং N ও M বিন্দুর সংযোজক সরলরেখা কেন্দ্রগামী এবং AB ও CD সমান্তরাল জ্যাদ্বয়ের উপর লম্ব। **(প্রমাণিত)**

২ কোনো বৃত্তের AB এবং AC জ্যা দুইটি A বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের সাথে সমান কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ কর যে, $AB = AC$.

সমাধানঃ



বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তের AB ও AC দুইটি জ্যা। O, A যোগ করি। AB ও AC জ্যা দুইটি A বিন্দুতে অঙ্কিত ব্যাসার্ধ OA-এর সাথে সমান কোণ $\angle OAB$ ও $\angle OAC$ উৎপন্ন করে অর্থাৎ $\angle OAB = \angle OAC$। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB = AC$।

অঙ্কনঃ O, B এবং O, C যোগ করি।

প্রমাণঃ

ধাপ ১. ΔAOB-এ

$OA = OB$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]

$\therefore \angle OBA = \angle OAB$ [$\because$ ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণদ্বয় সমান]

ধাপ ২. আবার, ΔAOC-এ

$OA = OC$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]

$\therefore \angle OCA = \angle OAC$ [$\because$ ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণদ্বয় সমান]

এখন, $\angle OAB = \angle OAC$ [দেওয়া আছে]

$\therefore \angle OBA = \angle OCA$ ... ... (i)

ধাপ ৩. এখন, ΔAOB ও ΔAOC-এর মধ্যে

$OB = OC$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]

$\angle OAB = \angle OAC$ [দেওয়া আছে]

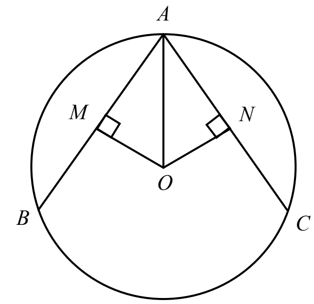
এবং $\angle OBA = \angle OCA$ [(i) নং হতে পাই]

$\therefore \Delta AOB \cong \Delta AOC$ [কোণ-বাহু-কোণ উপপাদ্য]

সুতরাং $AB = AC$ **(প্রমাণিত)**

বিশেষ দ্রষ্টব্যঃ (i) এখানে কোণ-বাহু-কোণ উপপাদ্য প্রয়োগ করা হয়েছে। এর বিস্তারিত বর্ণনা প্রাথমিক আলোচনায় দেওয়া হয়েছে।
(ii) 'সাধারণ নির্বচন' হলো চিত্র নিরপেক্ষ বর্ণনা। আর 'বিশেষ নির্বচন' হলো চিত্রনির্ভর বর্ণনা [*Ref*: পাঠ্যবইয়ের topic - জ্যামিতিক প্রমাণ]। যেহেতু প্রদত্ত প্রশ্নে চিত্রভিত্তিক বর্ণনা দেওয়া আছে, তাই প্রমাণে 'সাধারণ নির্বচন' দেওয়া হয়নি।

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)



বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি, ABC বৃত্তের কেন্দ্র O। AB ও AC জ্যা দুটি OA ব্যাসার্ধের সাথে $\angle BAO = \angle CAO$ উৎপন্ন করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB = AC$।

অঙ্কনঃ O হতে AB- এর উপর OM এবং AC এর উপর ON লম্ব আঁকি।

প্রমাণঃ

ধাপ ১. $OM \perp$ জ্যা AB হওয়ায় M, AB এর মধ্যবিন্দু

$\therefore AM = \frac{1}{2} AB$ [$\because$ কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন কোনো জ্যা এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

অনুরূপভাবে, $AN = \frac{1}{2} AC$ [একই কারণে]

ধাপ ২. এখন, সমকোণী ΔAOM ও ΔAON-এ

$\angle AMO = \angle ANO$ [$\because$ প্রত্যেকে এক সমকোণ]

$\angle MAO = \angle NAO$ [$\because \angle BAO = \angle CAO$]

এবং OA সাধারণ বাহু

$\therefore \Delta AOM \cong \Delta AON$ [কোণ-বাহু-কোণ উপপাদ্য]

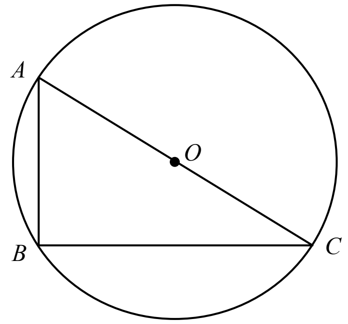
অতএব, $AM = AN$

বা, $\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} AC$ [ধাপ-১ হতে পাই]

$\therefore AB = AC$ **(প্রমাণিত)**

৩ কোনো বৃত্ত একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো দিয়ে যায়। দেখাও যে, বৃত্তটির কেন্দ্র অতিভুজের মধ্যবিন্দু।

সমাধানঃ



সাধারণ নির্বচনঃ কোনো বৃত্ত একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো দিয়ে যায়। দেখাতে হবে যে, বৃত্তটির কেন্দ্র অতিভুজের মধ্যবিন্দু।

বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি, সমকোণী ΔABC-এর $\angle ABC =$ এক সমকোণ এবং AC অতিভুজ। শীর্ষবিন্দু A, B, C দিয়ে যায় এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করা হল। মনে করি, এই বৃত্তের কেন্দ্র O, প্রমাণ করতে হবে যে, O, অতিভুজ AC-এর মধ্যবিন্দু।

অঙ্কনঃ O, B যোগ করি।

প্রমাণঃ

ধাপ ১. যেহেতু বৃত্তটি ΔABC এর শীর্ষবিন্দু A, B, C দিয়ে যায় এবং $\angle ABC =$ এক সমকোণ

$\therefore \angle ABC$, O কেন্দ্র বিশিষ্ট ABC বৃত্তের অর্ধবৃত্তস্থ কোণ হবে।

[$\because$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ]

$\therefore A, B, C$ বিন্দুগামী বৃত্তের ব্যাস AC

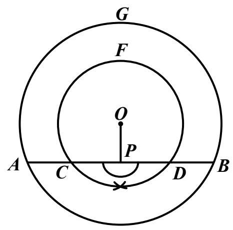
সুতরাং বৃত্তের কেন্দ্র O, ব্যাস AC-এর উপর অবস্থিত

এবং $OA = OC$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলে]

$\therefore O$ অতিভুজ AC-এর মধ্যবিন্দু **(প্রমাণিত)**

৪ দুইটি সমকেন্দ্রিক বৃত্তের একটির জ্যা AB অপর বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $AC = BD$.

সমাধানঃ



বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি, ABG ও CDF বৃত্ত দুইটির কেন্দ্র O। ABG বৃত্তের জ্যা AB, CDF বৃত্তকে C এবং D বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, $AC = BD$।

অঙ্কনঃ O হতে AB এর উপর OP লম্ব আঁকি।

প্রমাণঃ

ধাপ ১. ABG বৃত্তের কেন্দ্র O এবং $OP \perp$ জ্যা AB

$\therefore AP = BP$ ... ... (i) [$\because$ বৃত্তের কেন্দ্র হতে ব্যাস ভিন্ন অন্য কোনো জ্যায়ের উপর অংকিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

আবার, CDF বৃত্তের কেন্দ্র O এবং $OP \perp$জ্যা CD

$\therefore CP = DP$ ... ... (ii) [একই কারণে]

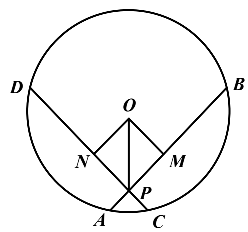
ধাপ ২. $\therefore AP - CP = BP - DP$ [সমীকরণ (i) ও (ii) নং বিয়োগ করে পাই]

বা, $AC = BD$

$\therefore AC = BD$ **(প্রমাণিত)**

৫ বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা পরস্পরকে ছেদ করলে দেখাও যে, তাদের একটির অংশদ্বয় অপরটির অংশদ্বয়ের সমান।

সমাধানঃ



সাধারণ নির্বচনঃ বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা পরস্পরকে ছেদ করলে, দেখাতে হবে যে, তাদের একটির অংশদ্বয় অপরটির অংশদ্বয়ের সমান।

বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি, $ACBD$ বৃত্তের O কেন্দ্র। AB ও CD দুইটি সমান সমান জ্যা P বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, AB জ্যা এর অংশদ্বয় CD জ্যা-এর অংশদ্বয়ের সমান অর্থাৎ $AP = CP$ এবং $DP = BP$।

অঙ্কনঃ O হতে AB-এর উপর OM এবং CD-এর উপর ON লম্ব আঁকি। O, P যোগ করি।

প্রমাণঃ

ধাপ ১. O বৃত্তের কেন্দ্র এবং $OM \perp AB$

$\therefore AM = MB = \frac{1}{2}AB$ ... ... (i) [$\because$ কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন অন্য কোনো জ্যা- এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

অনুরূপভাবে $CN = ND = \frac{1}{2}CD$ ... ... (ii)

ধাপ ২. $\because AB = CD$

বা, $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$ [(i) ও (ii) হতে]

$\therefore MB = ND$ ... ... (iii)

ধাপ ৩. ΔPOM ও ΔPON সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

$OM = ON$ [সমান সমান জ্যা কেন্দ্র হতে সমদূরবর্তী]

অতিভুজ $OP =$ অতিভুজ OP [সাধারণ বাহু]

অতএব, $\Delta POM \cong \Delta PON$ [অতিভুজ-বাহু উপপাদ্য]

$\therefore PM = PN$ ... ... (iv)

ধাপ ৪. $PM + MB = PN + ND$ [(iii) ও (iv) নং যোগ করে]

$\therefore PB = PD$

ধাপ ৫. আবার, $AB = CD$

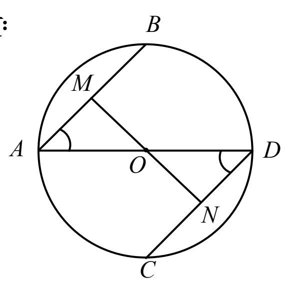
বা, $AP + PB = CP + PD$

বা, $AP + PD = CP + PD$ [$\because PB = PD$]

$\therefore AP = CP$ **(দেখানো হলো)**

৬ দেখাও যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান জ্যা অঙ্কন করলে তারা সমান্তরাল হয়।

সমাধানঃ



সাধারণ নির্বচনঃ প্রমাণ করতে হবে যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান জ্যা অঙ্কন করলে তারা সমান্তরাল হয়।

বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি, $ABDC$ বৃত্তের কেন্দ্র O এবং AD ব্যাস। AB ও CD হলো AD ব্যাসের বিপরীত দিকে দুইটি সমান সমান জ্যা। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB \parallel CD$

অঙ্কনঃ O হতে AB-এর উপর OM এবং CD-এর উপর ON লম্ব আঁকি।

প্রমাণঃ

ধাপ ১. $OM \perp$ জ্যা AB এবং $ON \perp$ জ্যা CD

$\therefore M$ ও N যথাক্রমে AB ও CD জ্যাদ্বয়ের মধ্যবিন্দু

$\therefore AM = \frac{1}{2}AB$ এবং $ND = \frac{1}{2}CD$

আবার, $AB = CD$

বা, $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$

বা, $AM = ND$

ধাপ ২. ΔOAM এবং ΔODN-এর মধ্যে

$OM = ON$ [$\because$ সমান সমান জ্যা কেন্দ্র হতে সমদূরবর্তী]

$OA = OD$ [$\because$ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এবং $AM = ND$ [ধাপ-১ হতে]

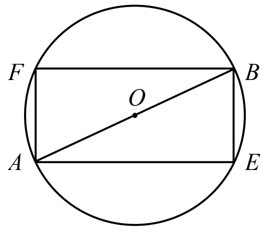
অতএব $\Delta OAM \cong \Delta ODN$ [বাহু-বাহু-বাহু উপপাদ্য]

$\therefore \angle OAM = \angle ODN$

ধাপ ২. কিন্তু $\angle OAM$ এবং $\angle ODN$ একান্তর কোণ যেখানে AB ও CD রেখাদ্বয়ের ছেদক হলো AD

$\therefore AB \parallel CD$ **(দেখানো হলো)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)



সাধারণ নির্বচন: দেখাতে হবে যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান জ্যা অঙ্কন করলে তারা সমান্তরাল হয়।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O বৃত্তের কেন্দ্র, AB তার ব্যাস। AB এর দুই প্রান্ত হতে এর বিপরীত দিকে AE ও BF দুইটি সমান জ্যা অঙ্কন করা হলো $AE = BF$। দেখাতে হবে যে, $AE \parallel BF$

অঙ্কন: A, F ও B, E যোগ করি।

প্রমাণ:

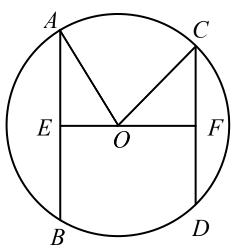
ধাপ ১. AB বৃত্তের ব্যাস।
$\therefore \angle AEB =$ এক সমকোণ [অর্ধবৃত্তস্থ কোণ]
এবং, $\angle AFB =$ এক সমকোণ [অর্ধবৃত্তস্থ কোণ]

ধাপ ২. ΔAEB ও ΔAFB এর মধ্যে
অতিভুজ $AB =$ অতিভুজ AB [সাধারণ বাহু]
$AE = BF$ [অঙ্কনানুসারে]
$\therefore \Delta AEB \cong \Delta AFB$ [অতিভুজ-বাহু উপপাদ্য]
সুতরাং $\angle BAE = \angle ABF$

ধাপ ৩. কিন্তু $\angle BAE$ এবং $\angle ABF$ একান্তর কোণ যেখানে BF এবং AE রেখাদ্বয়ের ছেদক AB
$\therefore AE \parallel BF$ **(প্রমাণিত)**

৭ **দেখাও যে, বৃত্তের দুইটি জ্যা এর মধ্যে বৃহত্তর জ্যা এর ক্ষুদ্রতর জ্যা অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর।**

সমাধান:



সাধারণ নির্বচন: দেখাতে হবে যে, বৃত্তের দুটি জ্যা-এর মধ্যে বৃহত্তর জ্যা-টি ক্ষুদ্রতর জ্যা অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট $ABDC$ একটি বৃত্ত। AB ও CD এর দুটি জ্যা এবং $AB > CD$। OE এবং OF কেন্দ্র হতে যথাক্রমে AB ও CD এর উপর লম্ব। প্রমাণ করতে হবে যে, $OE < OF$।

অঙ্কন: O, A এবং O, C যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. O বৃত্তের কেন্দ্র এবং $OE \perp$ জ্যা AB [$\because$ কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন অন্য কোনো জ্যা- এর উপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
$\therefore AE = BE = \frac{1}{2} AB$ ... ... (i)
আবার, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং $OF \perp$ জ্যা CD
$\therefore CF = DF = \frac{1}{2} CD$ ... ... (ii)

ধাপ ২. এখন, সমকোণী ΔOAE এবং ΔOCF-এর অতিভুজ যথাক্রমে OA এবং OC
$OA^2 = OE^2 + AE^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]
$OC^2 = OF^2 + CF^2$
কিন্তু, $OA = OC$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
বা, $OA^2 = OC^2$
বা, $OE^2 + AE^2 = OF^2 + CF^2$
বা, $AE^2 - CF^2 = OF^2 - OE^2$ ... ... (iii)

ধাপ ৩. এখন $AB > CD$ [কল্পনা অনুসারে]
বা, $\frac{1}{2} AB > \frac{1}{2} CD$ [উভয়পক্ষকে $\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করে]
বা, $AE > CF$ [(i) ও (ii) নং হতে]
বা, $AE^2 > CF^2$ [উভয়ক্ষকে বর্গ করে]
বা, $AE^2 - CF^2 > 0$
বা, $OF^2 - OE^2 > 0$ [(iii) নং থেকে]
বা, $OF^2 > OE^2$
বা, $OF > OE$ [উভয়পক্ষকে বর্গমূল করে]
$\therefore OE < OF$ **(প্রমাণিত)**

◆◆ অনুশীলনীর ৭ ও উপপাদ্য ১৮নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

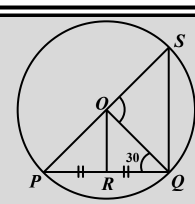
***O* কেন্দ্রবিশিষ্ট *PQRS* বৃত্তে *PQ* ও *RS* দুইটি সমান জ্যা।** **ক. বৃত্তটির ব্যাস 10 সে.মি. হলে বৃত্তটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।** **খ. প্রমাণ কর যে, *PQ* ও *RS* জ্যা দুইটি কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী।** **গ. যদি *PQ* > *RS* হয়, তবে প্রমাণ কর যে, *PQ* জ্যা *RS* জ্যা অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর।**	নিজে নিজে চেষ্টা কর। (ক) 78.54 বর্গ সে.মি.

৮ **O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে জ্যা $PQ = x$ সে.মি. এবং $OR \perp PQ$.**

ক. $\angle QOS$ কোণের পরিমাণ কত?

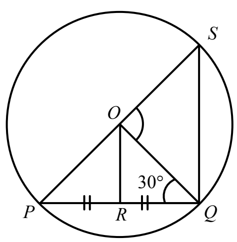
খ. প্রমাণ কর যে, PS জ্যা বৃত্তটির বৃহত্তম জ্যা।

গ. $OR = \left(\frac{x}{2} - 2\right)$ সে.মি. হলে, x এর মান নির্ণয় কর।



সমাধান:

ক



ΔPOQ-এর বহিঃস্থ $\angle QOS =$ অন্তঃস্থ বিপরীত $(\angle OPQ + \angle OQP)$

$= 2\angle OQP$ [$\because$ OP = OQ = বৃত্তের ব্যাসার্ধ হওয়ায় $\angle OPQ = \angle OQP = 30°$]

$= 2 \times 30° = 60°$

বিকল্প সমাধান:

ΔPOQ-এ $\angle POQ + \angle OPQ + \angle OQP = 180°$

বা, $\angle POQ + 30° + 30° = 180°$ [$\because$ OP = OQ = বৃত্তের ব্যাসার্ধ হওয়ায় $\angle OPQ = \angle OQP = 30°$]

$\therefore$ $\angle POQ = (180° - 60°) = 120°$

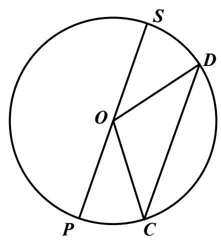
আবার, $\angle POQ + \angle QOS = 180°$ [$\because \angle POS = 1$ সরলকোণ $= 180°$]

বা, $120° + \angle QOS = 180°$

বা, $\angle QOS = 180° - 120°$

$\therefore$ $\angle QOS = 60°$

খ



বৃত্তে PS হলো বৃত্তের ব্যাস।
মনে করি, বৃত্তে CD আরেকটি ব্যাস ভিন্ন জ্যা। প্রমাণ করতে হবে যে, PS জ্যাটি বৃহত্তম জ্যা অর্থাৎ $PS > CD$ প্রমাণই যথেষ্ট।

অঙ্কন: O, C ও O, D যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. $OP = OS = OC = OD$ ... (i) [$\because$ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

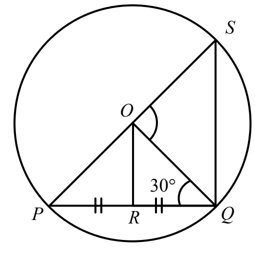
ধাপ ২. ΔOCD-এ, $OC + OD > CD$ [$\because$ ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর]

বা, $OP + OS > CD$ [(i) নং হতে]

বা, $PS > CD$

$\therefore$ PS জ্যা বৃত্তটির বৃহত্তম জ্যা।

গ



$OR \perp PQ$ হওয়ায় ΔORP সমকোণী।

$\therefore$ সমকোণী ΔORP-এ, $\tan\angle OPR = \dfrac{OR}{PR}$

বা, $\tan 30° = \dfrac{\frac{x}{2} - 2}{\frac{x}{2}}$ [$\because PR = QR = \frac{1}{2}PQ = \frac{1}{2}x$]

বা, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{x-4}{x}$

বা, $\sqrt{3}x - 4\sqrt{3} = x$

বা, $\sqrt{3}x - x = 4\sqrt{3}$

বা, $x(\sqrt{3} - 1) = 4\sqrt{3}$

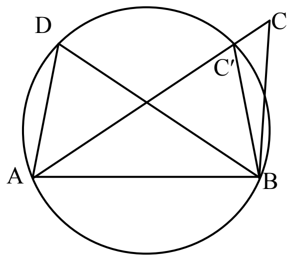
বা, $x = \dfrac{4\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} = \dfrac{4\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$

$= \dfrac{4(\sqrt{3}\times\sqrt{3}+\sqrt{3})}{(\sqrt{3})^2 - (1)^2}$

$= \dfrac{4(3+\sqrt{3})}{2} = 2(3+\sqrt{3}) = 9.464$ সে.মি. (প্রায়)

৯ প্রমাণ কর যে, দুইটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তার একই পাশে অপর দুই বিন্দুতে সমান কোণ উৎপন্ন করলে বিন্দু চারটি সমবৃত্ত হবে।

সমাধান:



সাধারণ নির্বচন: প্রমাণ করতে হবে যে, দুইটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তার একই পাশে অপর দুই বিন্দুতে সমান কোণ উৎপন্ন করলে বিন্দু চারটি সমবৃত্ত হবে।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, A ও B বিন্দু দুইটির সংযোজক রেখা AB তার একই পাশে C ও D বিন্দুতে $\angle ACB = \angle ADB$ উৎপন্ন করে। প্রমাণ করতে হবে যে, A, B, C, D সমবৃত্ত।

অঙ্কন: A, B ও D বিন্দুত্রয় দিয়ে গমনকারী বৃত্ত অঙ্কন করি। তাহলে A, B ও D সমবৃত্ত।

প্রমাণ: যেহেতু A, B ও D সমবৃত্ত। প্রমাণ করতে হবে যে, C বিন্দুটিও বৃত্তের উপর অবস্থিত। তাহলে A, B, C ও D বিন্দুগুলো সমবৃত্ত হবে।

ধরি, C বিন্দুটি বৃত্তের উপর অবস্থিত নয়। তাহলে বৃত্তের ওপর একটি বিন্দু C′ নিই।

ধাপ ১. চাপ AB এর ক্ষেত্রে $\angle ADB = \angle AC'B$ [$\because$ একই চাপের উপর অবস্থিত বৃত্তস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান]

ধাপ ২. কিন্তু $\angle ADB = \angle ACB$ [দেওয়া আছে]

ধাপ ৩. $\angle AC'B = \angle ACB$ [ধাপ-১ ও ধাপ-২ হতে]

ধাপ ৪. $\Delta BCC'$-এ পাই,

বহিঃস্থ $\angle AC'B = \angle C'CB + \angle C'BC$ [$\because$ ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি সমান]

বা, $\angle ACB = \angle ACB + \angle C'BC$

[$\because \angle AC'B = \angle ACB$ এবং $\angle C'CB = \angle ACB$]

বা, $\angle C'BC = \angle ACB - \angle ACB$

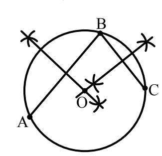
$\therefore$ $\angle C'BC = 0$

$\therefore$ C ও C′ একইবিন্দু।

সুতরাং A, B, C ও D বিন্দুগুলো সমবৃত্ত।

জেনে নাও: সমরেখ নয় এরূপ তিনটি বিন্দু সর্বদাই সমবৃত্ত বিন্দু।

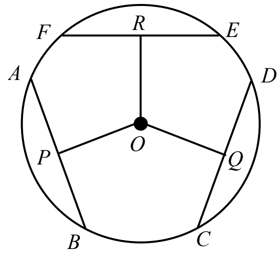
ব্যাখ্যা: সমরেখ নয় এরূপ তিনটি বিন্দু সংযোগ করে তিনটি রেখা পাওয়া যায়। অতঃপর যেকোনো দুইটি রেখার লম্বসমদ্বিখণ্ডের ছেদবিন্দু কেন্দ্র করে বৃত্ত অঙ্কন করলে বৃত্তটি উক্ত তিনটি বিন্দু দিয়ে গমন করবে।



এ ধারণাটি ত্রিভুজের পরিবৃত্তের সাথে সম্পর্কিত।

১০ **প্রমাণ কর যে, বৃত্তের সমান সমান জ্যা এর মধ্যবিন্দুগুলো সমবৃত্ত।**

সমাধান:



সাধারণ নির্বচন: প্রমাণ করতে হবে যে, বৃত্তের সমান সমান জ্যা এর মধ্যবিন্দুগুলো সমবৃত্ত।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের জ্যা AB = জ্যা CD = জ্যা EF। P, Q ও R যথাক্রমে সমান জ্যাত্রয়ের মধ্যবিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, P, Q ও R সমবৃত্ত।

অঙ্কন: O, P; O, Q ও O, R যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. OP হলো AB জ্যায়ের মধ্যবিন্দু ও কেন্দ্রের সংযোজক রেখা

$\therefore OP \perp AB$ [$\because$ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাস ভিন্ন কোনো জ্যা এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ ঐ জ্যা এর উপর লম্ব]

ধাপ ২. একইভাবে, $OQ \perp CD$ এবং $OR \perp EF$

অর্থাৎ OP, OQ এবং OR কেন্দ্র থেকে যথাক্রমে জ্যাগুলোর উপর লম্ব দূরত্ব নির্দেশ করে।

ধাপ ৩. আবার জ্যা AB = জ্যা CD = জ্যা EF হওয়ায় OP = OQ = OR

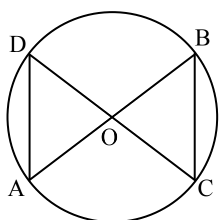
সুতরাং O কে কেন্দ্র করে OP বা OR বা OR এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত অঙ্কন করলে বৃত্তটি P, Q ও R বিন্দু দিয়ে যাবে।

[$\because$ বৃত্তের সকল সমান জ্যা কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী]

$\therefore$ P, Q ও R বিন্দুগুলো সমবৃত্ত।

১১ **দেখাও যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান্তরাল জ্যা আঁকলে তারা সমান হয়।**

সমাধান:



সাধারণ নির্বচন: দেখাতে হবে যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান্তরাল জ্যা আঁকলে তারা সমান হয়।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB ব্যাসের বিপরীত দিকে জ্যা AD || জ্যা BC আঁকা হলো। প্রমাণ করতে হবে যে, AD = BC

অঙ্কন: O, D ও O, C যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. ΔAOD ও ΔBOC-এ

OA = OB [$\because$ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

OD = OC [$\because$ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$\angle AOD = \angle BOC$ [বিপ্রতীপ কোণ]

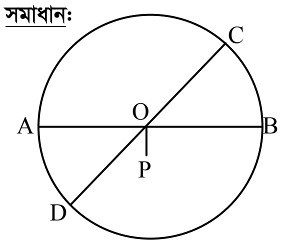
$\therefore \Delta AOD \cong \Delta BOC$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

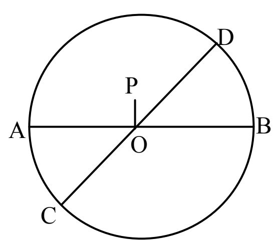
$\therefore$ AD = BC

অর্থাৎ জ্যা AD = জ্যা BC **(প্রমাণিত)**

১২ **প্রমাণ কর যে, কোনো বৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে এদের ছেদবিন্দু বৃত্তটির কেন্দ্র হবে।**

সমাধান:





সাধারণ নির্বচন: প্রমাণ করতে হবে যে, কোনো বৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে এদের ছেদবিন্দু বৃত্তটির কেন্দ্র হবে।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB ও CD জ্যাদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। প্রমাণ করতে হবে যে, বৃত্তের কেন্দ্র O হবে AB ও CD রেখাদ্বয়ের ছেদবিন্দু। মনে করি, AB ও CD জ্যাদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত না হয়ে P বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

অঙ্কন: O, P যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. P বিন্দু AB ও CD উভয় জ্যায়ের মধ্যবিন্দু।

[$\because$ P বিন্দুতে জ্যাদ্বয় পরস্পর সমদ্বিখণ্ডিত হয়]

$\therefore OP \perp AB$ [$\because$ বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাস ভিন্ন কোনো জ্যা এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ ঐ জ্যা এর উপর লম্ব]

আবার, $OP \perp CD$ [একই কারণে]

ধাপ ২. যেহেতু AB ও CD পরস্পরচ্ছেদী রেখা তাই OP উভয় রেখার উপর লম্ব হতে পারে না। সেক্ষেত্রে O ও P একই বা অভিন্ন বিন্দু।

অর্থাৎ জ্যাদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

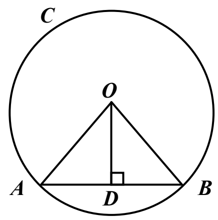
সুতরাং বৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে এদের ছেদবিন্দু বৃত্তটির কেন্দ্র হবে।

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৫৪

উপপাদ্য ১৭ এর বিপরীত উপপাদ্যটি নিম্নরূপ:
বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন অন্য কোনো জ্যা এর ওপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। উপপাদ্যটি প্রমাণ কর।

সমাধান:



সাধারণ নির্বচন: প্রমাণ করতে হবে যে, বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন অন্য কোনো জ্যা এর ওপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তে AB ব্যাস নয় এমন একটি জ্যা এবং কেন্দ্র O থেকে একই জ্যা এর উপর OD লম্ব।

প্রমাণ করতে হবে যে, OD, AB জ্যা-কে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
অর্থাৎ $AD = BD$।

অঙ্কন : O, A এবং O, B যোগ করি।

প্রমাণ :

ধাপ ১. এখন, ΔODA ও ΔODB সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে
অতিভুজ OA = অতিভুজ OB [$\because$ উভয়ে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
এবং $OD = OD$ [সাধারণ বাহু]
$\therefore \Delta ODA \cong \Delta ODB$ [অতিভুজ বাহু উপপাদ্য]
অতএব, $AD = BD$ **(প্রমাণিত)**

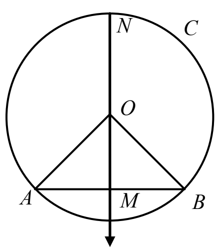
◆◆ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা ১৫৪নং অনুশীলনমূলক কাজের প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

***O* কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে *AB* ও *CD* দুইটি সমান জ্যা। *O* থেকে *AB* ও *CD* এর উপর যথাক্রমে *OP* এবং *OQ* লম্ব।** *ক. 314 বর্গ সে.মি. ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।* *খ. প্রমাণ কর যে, P, AB এর মধ্যবিন্দু।* *গ. প্রমাণ কর যে, OP = OQ.*	নিজে নিজে চেষ্টা কর।

পাঠ্যবইয়ের অনুসিদ্ধান্ত ও সমাধান

অনুসিদ্ধান্ত -১। বৃত্তের যেকোনো জ্যা এর লম্ব-দ্বিখণ্ডক কেন্দ্রগামী। [পাঠ্যবই পৃষ্ঠা- ১৫৪]

সমাধান:



সাধারণ নির্বচন: প্রমাণ করতে হবে যে, বৃত্তের যেকোনো জ্যা এর লম্বদ্বিখণ্ডক কেন্দ্রগামী।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তে ব্যাস নয় এমন একটি জ্যা AB এবং এই জ্যা এর লম্বদ্বিখণ্ডক MN। প্রমাণ করতে হবে যে, MN কেন্দ্র O বিন্দুগামী।

অঙ্কন: O, A এবং O, B যোগ করি।

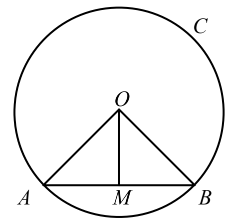
প্রমাণ:

ধাপ ১. $MN \perp AB$ এবং $AM = BM$ [$\because MN, AB$ জ্যায়ের লম্বদ্বিখণ্ডক]
$\therefore MN$ রেখাস্থ সকল বিন্দু হতে A ও B সমদূরবর্তী

ধাপ ২. আবার, $OA = OB$ [$\because$ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
$\therefore MN$ রেখার উপর O একটি বিন্দু

ধাপ ৩. সুতরাং MN রেখা অবশ্যই কেন্দ্র O বিন্দুগামী
অর্থাৎ বৃত্তের যেকোনো জ্যা এর লম্বদ্বিখণ্ডক কেন্দ্রগামী **(প্রমাণিত)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)



সাধারণ নির্বচন: প্রমাণ করতে হবে যে, বৃত্তের যেকোনো জ্যা এর লম্বদ্বিখণ্ডক কেন্দ্রগামী।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তে ব্যাস নয় এমন একটি জ্যা AB এবং এই জ্যা এর মধ্যবিন্দু M। O, M যোগ করি। OM, AB এর লম্বদ্বিখণ্ডক হবে যদি $OM \perp AB$ হয় অর্থাৎ এটি প্রমাণ করাই যথেষ্ট যে, $OM \perp AB$।

অঙ্কন: O, A এবং O, B যোগ করি।

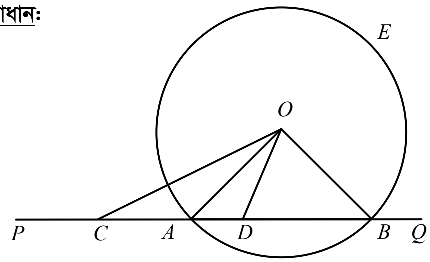
প্রমাণ:

ধাপ ১. ΔOAM ও ΔOBM এ
$AM = BM$ [$\because M, AB$ এর মধ্যবিন্দু]
$OA = OB$ [$\because$ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
এবং $OM = OM$ [সাধারণ বাহু]
সুতরাং $\Delta OAM \cong \Delta OBM$ [বাহু-বাহু-বাহু উপপাদ্য]
$\therefore \angle OMA = \angle OMB$

ধাপ ২. যেহেতু কোণদ্বয় রৈখিক যুগল কোণ এবং তাদের পরিমাণ সমান,
$\therefore \angle OMA = \angle OMB = 1$ সমকোণ
$\therefore OM \perp AB$
অতএব, বৃত্তের যেকোনো জ্যা এর লম্ব দ্বিখণ্ডক কেন্দ্রগামী। **(প্রমাণিত)**

অনুসিদ্ধান্ত - ২। যেকোনো সরলরেখা একটি বৃত্তকে দুইয়ের অধিক বিন্দুতে ছেদ করতে পারে না। [পাঠ্যবই পৃষ্ঠা- ১৫৪]

সমাধানঃ



সাধারণ নির্বচনঃ প্রমাণ করতে হবে যে, যেকোনো সরলরেখা একটি বৃত্তকে দুইয়ের অধিক বিন্দুতে ছেদ করতে পারে না।

বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABE বৃত্তে PQ রেখা বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে।

এখানে, A ও B উভয়ই বৃত্তের উপরস্থ বিন্দু। সুতরাং এটি প্রমাণ করা যথেষ্ট হবে যে, A ও B বিন্দু ব্যতীত PQ রেখাস্থ অন্য কোনো বিন্দু বৃত্তের উপরস্থ বিন্দু নয়।

অঙ্কনঃ PQ রেখার উপরস্থ C ও D বিন্দু দুইটি নিই। O, A; O, B; O, C এবং O, D যোগ করি।

প্রমাণঃ

ধাপ ১. ΔOAB-এ $OA = OB$ [$\because$ ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণ সমান]

$\therefore \angle OAB = \angle OBA$ [$\because \angle OBA = \angle OBD$]

বা, $\angle OAB = \angle OBD$ ... ... (i)

ধাপ ২. D বিন্দু যদি বৃত্তের উপরস্থ একটি বিন্দু হয় তবে

ΔOBD-এ $OB = OD$

$\therefore \angle ODB = \angle OBD$

বা, $\angle ODB = \angle OAB$ [(i) নং হতে মান বসিয়ে]

ধাপ ৩. কিন্তু ΔOAD-এ $\angle ODB > OAB$ যা ধাপ-২ এর শর্তবিরোধী

[$\because$ ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ অন্তস্থ বিপরীত প্রত্যেক কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর]

সুতরাং D, বৃত্তের উপরস্থ বিন্দু নয়

ধাপ ৪. আবার, C বিন্দটি যদি বৃত্তের উপরস্থ বিন্দু হয় তবে

ΔOBC-এ $OB = OC$

$\therefore \angle OCB = \angle OBC$

বা, $\angle OCB = \angle OBD$

বা, $\angle OCB = \angle OAB$ [(i) নং হতে মান বসিয়ে]

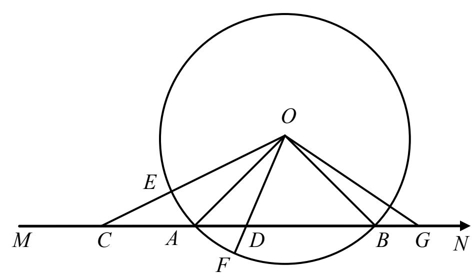
ধাপ ৫. কিন্তু ΔOAC-এ বহিঃস্থ $\angle OAB > \angle OCB$ যা ধাপ-৪ এর শর্তবিরোধী

সুতরাং C বিন্দুটি বৃত্তের উপরস্থ বিন্দু নয়।

অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে, A ও B ব্যতীত PQ রেখাস্থ কোনো বিন্দুই বৃত্তের উপরস্থ বিন্দু নয়।

সুতরাং যেকোনো সরলরেখা একটি বৃত্তকে দুইয়ের অধিক বিন্দুতে ছেদ করতে পারেনা।

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)



সাধারণ নির্বচনঃ প্রমাণ করতে হবে যে, যেকোনো সরলরেখা একটি বৃত্তকে দুইয়ের অধিক বিন্দুতে ছেদ করতে পারে না।

বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তকে MN সরলরেখা A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, A ও B ব্যতীত MN এর উপরস্থ অন্য কোনো বিন্দু বৃত্তটিকে ছেদ করতে পারে না।

অঙ্কনঃ MA, AB, BN রেখার উপরস্থ তিনটি বিন্দু যথাক্রমে C, D, G নিই। O, C; O, D; O, A; O, B; O, G যোগ করি।

প্রমাণঃ

ধাপ ১. $OA = OB = OE = OF$ [$\because$ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

ধাপ ২. $OC = OE + CE$ [$\because OA = OE$]

$= OA + CE$

$\therefore OC > OA$

$\therefore$ C বিন্দুটি বৃত্তের উপরস্থ বিন্দু নয়

ধাপ ৩. আবার, $OF = OD + DF$

বা, $OA = OD + DF$ [$\because$ বৃত্তের ব্যাসার্ধসমূহ পরস্পর সমান]

$\therefore OA > OD$

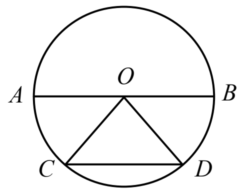
$\therefore$ D বিন্দুটি বৃত্তের উপরস্থ বিন্দু নয়

অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে, G বিন্দুটি বৃত্তের উপরস্থ বিন্দু নয়।

সুতরাং যেকোনো সরলরেখা একটি বৃত্তকে দুইয়ের অধিক বিন্দুতে ছেদ করতে পারে না। **(প্রমাণিত)**

অনুসিদ্ধান্ত - ৩। বৃত্তের ব্যাসই বৃহত্তম জ্যা। [পাঠ্যবই পৃষ্ঠা- ১৫৫]

সমাধানঃ



সাধারণ নির্বচনঃ প্রমাণ করতে হবে যে, বৃত্তের ব্যাসই বৃহত্তম জ্যা।

বিশেষ নির্বচনঃ চিত্রে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট $ABCD$ বৃত্তে AB ব্যাস এবং CD ব্যাস ভিন্ন যেকোনো একটি জ্যা। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB > CD$।

অঙ্কনঃ O, C এবং O, D যোগ করি।

প্রমাণঃ

ধাপ ১. $OA = OB = OC = OD$ ... ... (i) [$\because$ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এখন, ΔOCD-এ

$OC + OD > CD$ [$\because$ ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর]

বা, $OA + OB > CD$ [(i) নং হতে]

অর্থাৎ, $AB > CD$ **(প্রমাণিত)**