দ্বিতীয় অধ্যায়

বীজগাণিতিক রাশি

অনুশীলনী - ২

আংশিক ভগ্নাংশ প্রকাশে যা যা ধরতে হয়:

i. $\dfrac{x+d}{(x+a)(x+b)} = \dfrac{A}{x+a} + \dfrac{B}{x+b}$

ii. $\dfrac{x+d}{(x+a)(x+b)^2} = \dfrac{A}{x+a} + \dfrac{B}{x+b} + \dfrac{C}{(x+b)^2}$

iii. $\dfrac{x+d}{(x+a)(x^2+b)} = \dfrac{A}{x+a} + \dfrac{Bx+C}{x^2+b}$

অধ্যায়ের সবচেয়ে প্রয়োজনীয় সূত্র:

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$
$$= \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\}$$

কতিপয় গুরুত্বপূর্ণ উৎপাদকীকরণ সূত্র:

i. $bc(b-c) + ca(c-a) + ab(a-b) = -(b-c)(c-a)(a-b)$

ii. $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = -(b-c)(c-a)(a-b)$

iii. $a(b^2-c^2) + b(c^2-a^2) + c(a^2-b^2) = (b-c)(c-a)(a-b)$

iv. $a^3(b-c) + b^3(c-a) + c^3(a-b) = -(b-c)(c-a)(a-b)(a+b+c)$

v. $b^2c^2(b^2-c^2) + c^2a^2(c^2-a^2) + a^2b^2(a^2-b^2) = -(b-c)(c-a)(a-b)(b+c)(c+a)(a+b)$

vi. $(ab+bc+ca)(a+b+c) - abc = (a+b)(b+c)(c+a)$

vii. $(b+c)(c+a)(a+b) + abc = (a+b+c)(ab+bc+ca)$

viii. $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3(a+b)(b+c)(c+a)$

অনুশীলনীর সমাধান

১ **নিচের কোন রাশিটি প্রতিসম?**

(ক) $a+b+c$ (খ) $xy-yz+zx$

(গ) $x^2-y^2+z^2$ (ঘ) $2a^2-5bc-c^2$

উত্তর: (ক)

ব্যাখ্যা: একাধিক চলক সম্বলিত কোনো বীজগাণিত রাশির যেকোনো দুইটি চলকের স্থান বিনিময় যদি রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে। তবে রাশিটিকে ঐ চলকসমূহের প্রতিসম (Symmetric) রাশি বলা হয়। এক্ষেত্রে

(ক) $a+b+c$ রাশিটিতে যেকোনো দুইটি চলকের স্থান বিনিময়ে রাশিটির মান পরিবর্তন হয় না তাই এটি প্রতিসম রাশি।

(খ) $xy-yz+zx$ রাশিটির যেকোনো দুইটি চলকের স্থান বিনিময়ে এর মান পরিবর্তিত হয়। তাই এটি প্রতিসম রাশি নয়।

(গ) $x^2-y^2+z^2$ রাশিটি x ও z চলকের প্রতিসম রাশি হলেও যেকোনো দুটি চলকের জন্য রাশিটি প্রতিসম নয়।

(ঘ) $2a^2-5bc-c^2$ রাশিতে যেকোনো চলকের স্থান পরিবর্তনে এর মান পরিবর্তিত হয়। তাই এটি প্রতিসম রাশি নয়।

২ $P(x,y,z) = x^3+y^3+z^3-3xyz$ **হলে-**

i. $P(x,y,z)$ চক্রক্রমিক রাশি

ii. $P(x,y,z)$ প্রতিসম রাশি

iii. $P(1,-2,1) = 0$

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i, ii (খ) i, iii

(গ) ii, iii (ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: (ঘ)

ব্যাখ্যা: (i) নং সঠিক, কারণ রাশিতে চক্রাকারে x এর পরিবর্তে y, y এর পরিবর্তে z এবং z এর পরিবর্তে x বসালে রাশিটি একই একই থাকে অর্থাৎ $P(x,y,z)$ হলো x, y, z চলকের একটি চক্রক্রমিক রাশি।

(ii) নং সঠিক, কারণ রাশিটির যেকোনো দুইটি চলকের স্থান বিনিময় করলেও রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে অর্থাৎ $P(x,y,z)$ রাশিটি x, y, z চলকের প্রতিসম রাশি।

(iii) নং সঠিক, কারণ, $P(x,y,z) = x^3+y^3+z^3-3xyz$

$\therefore P(1,-2,1) = 1^3+(-2)^3+1^3-3.1.(-2).1$

$= 1-8+1+6 = 8-8 = 0$

■ $x^3 + px^2 - x - 7$ এর একটি উৎপাদক $x + 7$ হলে নিচের ৩ এবং ৪নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

৩ p এর মান কত?

(ক) -7 (খ) 7 (গ) $\frac{54}{7}$ (ঘ) 477

উত্তর: (খ)

ব্যাখ্যা: ধরি, $Q(x) = x^3 + Px^2 - x - 7$

যেহেতু, $(x + 7)$, $Q(x)$ এর একটি উৎপাদক, তাই উৎপাদক উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য অনুসারে,

$Q(-7) = 0$

বা, $(-7)^3 + p(-7)^2 - (-7) - 7 = 0$

বা, $-343 + 49p + 7 - 7 = 0$

বা, $49p = 343$

$\therefore p = 7$

৪ বহুপদীটির অপর উৎপাদকগুলোর গুণফল কত?

(ক) $(x-1)(x-1)$ (খ) $(x+1)(x-2)$

(গ) $(x-1)(x+3)$ (ঘ) $(x+1)(x-1)$

উত্তর: (ঘ)

ব্যাখ্যা: প্রদত্ত বহুপদী, $x^3 + px^2 - x - 7$

$= x^3 + 7x^2 - x - 7$ [$\because p = 7$]

$= x^2(x + 7) - 1(x + 7)$

$= (x + 7)(x^2 - 1)$

$= (x + 7)(x + 1)(x - 1)$

$\therefore$ অপর উৎপাদকগুলোর গুণফল $= (x + 1)(x - 1)$

৫ $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - a$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $x - 2$ হলে, দেখাও যে, $a = 4$।

সমাধান: ধরি, $P(x) = x^4 - 5x^3 + 7x^2 - a$

উৎপাদক উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য অনুসারে, যদি $P(x)$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(x - 2)$ হয় তবে $P(2) = 0$ হবে।

এখন, $P(2) = 0$

বা, $(2)^4 - 5(2)^3 + 7(2)^2 - a = 0$

বা, $16 - 5.8 + 7.4 - a = 0$

বা, $16 - 40 + 28 - a = 0$

বা, $44 - 40 - a = 0$

$\therefore a = 4$ **(দেখানো হলো)**

৬ মনে কর, $P(x) \equiv ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a$ যেখানে a, b, c ধ্রুবক এবং $a \neq 0$। দেখাও যে, $x - r$ যদি $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হয়, তবে $P(x)$ এর আরেকটি উৎপাদক হবে $(rx - 1)$।

সমাধান: দেওয়া আছে,

$$P(x) \equiv ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a \;\ldots\ldots\; \text{(i)}$$

যেহেতু $(x - r)$, $P(x)$-এর একটি উৎপাদক, সেহেতু $P(r) = 0$

এখন, $P(r) = ar^5 + br^4 + cr^3 + cr^2 + br + a$

$$\therefore ar^5 + br^4 + cr^3 + cr^2 + br + a = 0 \;\ldots\ldots\ldots\; \text{(ii)}$$

$(rx - 1)$, $P(x)$ বহুপদীর একটি উৎপাদক হবে যদি $P\left(\frac{1}{r}\right) = 0$ হয়।

$$\therefore P\left(\frac{1}{r}\right) = a\left(\frac{1}{r}\right)^5 + b\left(\frac{1}{r}\right)^4 + c\left(\frac{1}{r}\right)^3 + c\left(\frac{1}{r}\right)^2 + b\left(\frac{1}{r}\right) + a$$

$$= \frac{a}{r^5} + \frac{b}{r^4} + \frac{c}{r^3} + \frac{c}{r^2} + \frac{b}{r} + a$$

$$= \frac{a + br + cr^2 + cr^3 + br^4 + ar^5}{r^5}$$

$$= \frac{ar^5 + br^4 + cr^3 + cr^2 + br + a}{r^5}$$

$= 0$ [(ii) নং থেকে মান বসিয়ে]

$\therefore (rx - 1)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক। **(দেখানো হলো)**

৭ উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

(ক) $x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$

(খ) $4a^4 + 12a^3 + 7a^2 - 3a - 2$

(গ) $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

(ঘ) $x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2) + 3xyz$

(ঙ) $(x + 1)^2 (y - z) + (y + 1)^2 (z - x) + (z + 1)^2 (x - y)$

(চ) $b^2c^2(b^2 - c^2) + c^2a^2(c^2 - a^2) + a^2b^2(a^2 - b^2)$

(ছ) $15x^2 + 2xy - 24y^2 - x + 24y - 6$

(জ) $15x^2 - 24y^2 - 6z^2 + 2xy - xz + 24yz$

সমাধান:

ক মনে করি, $P(x) = x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$

$\therefore P(-1) = (-1)^4 + 7(-1)^3 + 17(-1)^2 + 17(-1) + 6$

$= 1 - 7 + 17 - 17 + 6$

$= 24 - 24 = 0$

সুতরাং $(x + 1)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^4 + 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$

$= x^4 + x^3 + 6x^3 + 6x^2 + 11x^2 + 11x + 6x + 6$

$= x^3(x + 1) + 6x^2(x + 1) + 11x(x + 1) + 6(x + 1)$

$= (x + 1)(x^3 + 6x^2 + 11x + 6)$

$= (x + 1)(x^3 + 6x^2 + 12x + 8 - x - 2)$

$= (x + 1)(x^3 + 3.x^2.2 + 3.x.2^2 + 2^3 - x - 2)$

$= (x + 1)\{(x + 2)^3 - 1(x + 2)\}$

$= (x + 1)(x + 2)\{(x + 2)^2 - 1\}$

$= (x + 1)(x + 2)(x + 2 + 1)(x + 2 - 1)$

$= (x + 1)(x + 2)(x + 3)(x + 1)$

$= (x + 1)^2 (x + 2)(x + 3)$ **(Ans.)**

খ মনে করি, $P(a) = 4a^4 + 12a^3 + 7a^2 - 3a - 2$

$$\therefore \quad P(-1) = 4.(-1)^4 + 12.(-1)^3 + 7(-1)^2 - 3.(-1) - 2$$
$$= 4 - 12 + 7 + 3 - 2$$
$$= 14 - 14 = 0$$

সুতরাং $(a + 1)$, $P(a)$-এর একটি উৎপাদক।

এখন, $4a^4 + 12a^3 + 7a^2 - 3a - 2$

$$= 4a^4 + 4a^3 + 8a^3 + 8a^2 - a^2 - a - 2a - 2$$
$$= 4a^3(a + 1) + 8a^2(a + 1) - a(a + 1) - 2(a + 1)$$
$$= (a + 1)(4a^3 + 8a^2 - a - 2)$$
$$= (a + 1)\{4a^2(a + 2) - 1(a + 2)\}$$
$$= (a + 1)(a + 2)(4a^2 - 1)$$
$$= (a + 1)(a + 2)\{(2a)^2 - 1\}$$
$$= (a + 1)(a + 2)(2a + 1)(2a - 1)$$
$$= (2a - 1)(a + 1)(a + 2)(2a + 1) \quad \textbf{(Ans.)}$$

গ মনে করি, $P(x) = x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

$$\therefore P(-1) = (-1)^3 + 2.(-1)^2 + 2(-1) + 1$$
$$= -1 + 2 - 2 + 1$$
$$= 3 - 3 = 0$$

সুতরাং $(x + 1)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক।

এখন, $x^3 + 2x^2 + 2x + 1$

$$= x^3 + x^2 + x^2 + x + x + 1$$
$$= x^2(x + 1) + x(x + 1) + 1(x + 1)$$
$$= (x + 1)(x^2 + x + 1)$$

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

$$x^3 + 2x^2 + 2x + 1$$
$$= x^3 + 1 + 2x^2 + 2x$$
$$= (x + 1)(x^2 - x + 1) + 2x(x + 1)$$
$$= (x + 1)(x^2 - x + 1 + 2x)$$
$$= (x + 1)(x^2 + x + 1) \quad \textbf{(Ans.)}$$

ঘ $x(y^2 + z^2) + y(z^2 + x^2) + z(x^2 + y^2) + 3xyz$

$$= xy^2 + z^2x + yz^2 + x^2y + zx^2 + y^2z + 3xyz$$
$$= x^2y + xy^2 + xyz + xyz + y^2z + yz^2 + zx^2 + xyz + z^2x$$
$$= xy(x + y + z) + yz(x + y + z) + zx(x + y + z)$$
$$= (x + y + z)(xy + yz + zx)$$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক : $(x + y + z)(xy + yz + zx)$ **(Ans.)**

ঙ প্রদত্ত রাশি

$$= (x + 1)^2(y - z) + (y + 1)^2(z - x) + (z + 1)^2(x - y)$$
$$= (x^2 + 2x + 1)(y - z) + (y^2 + 2y + 1)(z - x) + (z^2 + 2z + 1)(x - y)$$
$$= x^2(y - z) + 2x(y - z) + y - z + y^2(z - x) + 2y(z - x) + z - x + z^2(x - y) + 2z(x - y) + x - y$$
$$= x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y) + 2x(y - z) + 2y(z - x) + 2z(x - y)$$
$$= x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y) + 2(xy - zx + yz - xy + zx - yz)$$
$$= x^2(y - z) + y^2(z - x) + z^2(x - y) + 2 \times 0$$
$$= x^2(y - z) + y^2z - xy^2 + z^2x - yz^2$$
$$= x^2(y - z) + y^2z - yz^2 - xy^2 + z^2x$$
$$= x^2(y - z) + yz(y - z) - x(y^2 - z^2)$$
$$= x^2(y - z) + yz(y - z) - x(y + z)(y - z)$$
$$= (y - z)\{x^2 + yz - x(y + z)\}$$
$$= (y - z)(x^2 + yz - xy - zx)$$
$$= (y - z)(x^2 - xy - zx + yz)$$
$$= (y - z)\{x(x - y) - z(x - y)\}$$
$$= (y - z)(x - y)(x - z)$$
$$= (y - z)(x - y)\{-(z - x)\}$$
$$= -(x - y)(y - z)(z - x) \quad \textbf{(Ans.)}$$

চ প্রদত্ত রাশি $= b^2c^2(b^2 - c^2) + c^2a^2(c^2 - a^2) + a^2b^2(a^2 - b^2)$

$$= b^2c^2(b^2 - c^2) + c^4a^2 - c^2a^4 + a^4b^2 - a^2b^4$$
$$= b^2c^2(b^2 - c^2) + a^4b^2 - c^2a^4 - a^2b^4 + c^4a^2$$
$$= b^2c^2(b^2 - c^2) + a^4(b^2 - c^2) - a^2(b^4 - c^4)$$
$$= b^2c^2(b^2 - c^2) + a^4(b^2 - c^2) - a^2(b^2 + c^2)(b^2 - c^2)$$
$$= (b^2 - c^2)\{b^2c^2 + a^4 - a^2(b^2 + c^2)\}$$
$$= (b^2 - c^2)(b^2c^2 + a^4 - c^2a^2 - a^2b^2)$$
$$= (b^2 - c^2)(a^4 - a^2b^2 - c^2a^2 + b^2c^2)$$
$$= (b^2 - c^2)\{a^2(a^2 - b^2) - c^2(a^2 - b^2)\}$$
$$= (b^2 - c^2)(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)$$
$$= (b^2 - c^2)(a^2 - b^2)\{-(c^2 - a^2)\}$$
$$= -(a^2 - b^2)(b^2 - c^2)(c^2 - a^2)$$
$$= -(a + b)(a - b)(b + c)(b - c)(c + a)(c - a)$$
$$= -(a - b)(b - c)(c - a)(a + b)(b + c)(c + a)$$

(Ans.)

দৃষ্টি আকর্ষণ: $P(x)$ এর উৎপাদক নির্ণয়ের জন্য প্রথমে $P(r)$ এবং পরে $P\left(\frac{r}{s}\right)$ বিবেচনা করবে যেখানে r বহুপদীর ধ্রুব পদের উৎপাদক এবং s বহুপদীর মুখ্য সহগের উৎপাদক। যেমন: $4x^3 - 6x^2 + 11x - 6$ বহুপদীর ধ্রুবপদ -6 এর উৎপাদক $1, -1, 2, -2, 3, -3, 6, -6$। আবার, মুখ্য সহগ 4 এর উৎপাদক $1, -1, 2, -2, 4, -4$।
বি.দ্র: ধ্রুব পদ হলো বহুপদীর চলকবিহীন পদ আর মুখ্য সহগ হলো x এর সর্বোচ্চ ঘাতের সহগ।

ছ $15x^2 + 2xy - 24y^2 - x + 24y - 6$

কেবল x সম্বলিত পদগুলো ও ধ্রুবক নিয়ে পাই, $15x^2 - x - 6$।

$$15x^2 - x - 6 \equiv 15x^2 - 10x + 9x - 6$$
$$\equiv 5x(3x - 2) + 3(3x - 2)$$
$$\equiv (3x - 2)(5x + 3) \;\dots\dots\dots \text{(i)}$$

আবার, কেবল y সম্বলিত পদগুলো ও ধ্রুবক নিয়ে পাই, $-24y^2 + 24y - 6$।

$$-24y^2 + 24y - 6 \equiv -6(4y^2 - 4y + 1)$$
$$\equiv -6\{(2y)^2 - 2.2y.1 + 1^2\}$$
$$\equiv -6(2y - 1)^2$$
$$\equiv -6(2y - 1)(2y - 1)$$
$$\equiv 2(2y - 1) \times \{-3(2y - 1)\}$$
$$\equiv (4y - 2)(-6y + 3) \;\dots\dots\dots \text{(ii)}$$

(i) ও (ii) নং এর উৎপাদকগুলোকে (ধ্রুবক -2, $+3$ অনুসারে) সমন্বয় করে প্রদত্ত রাশির সম্ভাব্য উৎপাদকসমূহ পাওয়া যায়।

সম্ভাব্য উৎপাদকসমূহ হলো: $(3x + 4y - 2)(5x - 6y + 3)$

সম্ভাব্য উৎপাদকসমূহের সঠিকতা নির্ণয়ে 'xy এর সহগ' যাচাইকরণ প্রয়োজন।

'xy এর সহগ' যাচাইকরণ:

সম্ভাব্য উৎপাদকসমূহের গুণনে অর্থাৎ $\{(3x + 4y - 2)(5x - 6y + 3\}$-এর ক্ষেত্রে xy এর সহগ $= 3(-6) + 4.5 = 2$।

আবার, প্রদত্ত রাশির ক্ষেত্রেও xy এর সহগ 2। অর্থাৎ সম্ভাব্য উৎপাদকসমূহ সঠিক।

সুতরাং নির্ণেয় উৎপাদক $(3x + 4y - 2)(5x - 6y + 3)$ **(Ans.)**

অথবা

$$(-3x - 4y + 2)(-5x + 6y - 3)$$

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

$$15x^2 + 2xy - 24y^2 - x + 24y - 6$$
$$= 15x^2 + 20xy - 10x - 18xy - 24y^2 + 12y + 9x + 12y - 6$$
$$= 5x(3x + 4y - 2) - 6y(3x + 4y - 2) + 3(3x + 4y - 2)$$
$$= (3x + 4y - 2)(5x - 6y + 3) \quad \textbf{(Ans.)}$$

লক্ষণীয়: প্রথম নিয়মে সমাধানের ক্ষেত্রে অবশ্যই xy বা তদ্রূপ অনুরূপ রাশির সহগ যাচাই করতে হবে (**'xy এর সহগ' যাচাইকরণ অংশ** দ্রষ্টব্য)। নতুবা **ভুল চিহ্ন বিশিষ্ট উৎপাদক** বা সম্পূর্ণ ভুল উৎপাদক আসতে পারে।

জ $15x^2 - 24y^2 - 6z^2 + 2xy - xz + 24yz$

প্রদত্ত রাশিটিতে তিনটি চলক x, y, z রয়েছে। কিন্তু কোনো ধ্রুবপদ নেই। তাই চলকত্রয়ের যেকোনো একটিকে ধ্রুবক বিবেচনা করি।

ধরি, প্রদত্ত রাশিটিতে z ধ্রুবক।

কেবল x সম্বলিত পদগুলো ও ধ্রুবক নিয়ে পাই, $15x^2 - xz - 6z^2$।

$$15x^2 - xz - 6z^2 \equiv 15x^2 - 10xz + 9xz - 6z^2$$
$$\equiv 5x(3x - 2z) + 3z(3x - 2z)$$
$$\equiv (3x - 2z)(5x + 3z) \;\dots\dots\dots \text{(i)}$$

আবার, কেবল y সম্বলিত পদগুলো ও ধ্রুবক নিয়ে পাই, $-24y^2 + 24yz - 6z^2$।

$$-24y^2 + 24yz - 6z^2 \equiv -6(4y^2 - 4yz + z^2)$$
$$\equiv -6\{(2y)^2 - 2.2y.z + z^2\}$$
$$\equiv -6(2y - z)^2$$
$$\equiv -6(2y - z)(2y - z)$$
$$\equiv 2(2y - z) \times \{-3(2y - z)\}$$
$$\equiv (4y - 2z)(-6y + 3z) \;\dots\dots \text{(ii)}$$

(i) ও (ii) নং এর উৎপাদকগুলোকে (ধ্রুবক $-2z$, $+3z$ অনুসারে) সমন্বয় করে প্রদত্ত রাশির সম্ভাব্য উৎপাদকসমূহ পাওয়া যায়।

সম্ভাব্য উৎপাদকসমূহ হলো: $(3x + 4y - 2z)(5x - 6y + 3z)$

সম্ভাব্য উৎপাদকসমূহের সঠিকতা নির্ণয়ে xy এর সহগ যাচাইকরণ প্রয়োজন।

'xy এর সহগ' যাচাইকরণ:

সম্ভাব্য উৎপাদকসমূহের গুণনে অর্থাৎ $\{(3x + 4y - 2z)(5x - 6y + 3z)\}$-এর ক্ষেত্রে xy এর সহগ $= 3(-6) + 4.5 = 2$

আবার, প্রদত্ত রাশির ক্ষেত্রেও xy এর সহগ 2। অর্থাৎ সম্ভাব্য উৎপাদকটি সঠিক।

সুতরাং নির্ণেয় উৎপাদক $(3x + 4y - 2z)(5x - 6y + 3z)$ **(Ans.)**

অথবা

$$(-3x - 4y + 2z)(-5x + 6y - 3z)$$

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

$$15x^2 - 24y^2 - 6z^2 + 2xy - xz + 24yz$$
$$= 15x^2 - 18xy + 9xz + 20xy - 24y^2 + 12yz - 10xz + 12yz - 6z^2$$
$$= 3x(5x - 6y + 3z) + 4y(5x - 6y + 3z) - 2z(5x - 6y + 3z)$$
$$= (3x + 4y - 2z)(5x - 6y + 3z) \;\textbf{(Ans.)}$$

৮ **যদি $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$ হয়, তবে দেখাও যে, $bc + ca + ab = 0$ অথবা, $a = b = c$।**

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$

$$\text{বা, } \left(\frac{1}{a}\right)^3 + \left(\frac{1}{b}\right)^3 + \left(\frac{1}{c}\right)^3 = 3.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}$$

অনুসিদ্ধান্ত অনুসারে,

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$$

$$\text{বা, } \frac{bc + ca + ab}{abc} = 0$$

$$\therefore bc + ca + ab = 0$$

$$\text{অথবা, } \frac{1}{a} = \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$$

$\therefore a = b = c$ **(প্রমাণিত)**

দৃষ্টি আকর্ষণ: পাঠ্যবইয়ের অনুসিদ্ধান্ত ৭ অনুসারে,
$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$ হলে, $a + b + c = 0$ অথবা, $a = b = c$

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

দেওয়া আছে,

$$\frac{1}{a^3} + \frac{1}{b^3} + \frac{1}{c^3} = \frac{3}{abc}$$

$$\text{বা, } \left(\frac{1}{a}\right)^3 + \left(\frac{1}{b}\right)^3 + \left(\frac{1}{c}\right)^3 - 3.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c} = 0$$

$$\text{বা, } \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left\{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)^2\right\} = 0$$

$$\left[\because a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = \frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}\right]$$

$$\text{বা, } \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)\left\{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)^2\right\} = 0$$

$$\text{অতএব, } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 0$$

$$\text{বা, } \frac{bc + ca + ab}{abc} = 0$$

$$\text{বা, } bc + ca + ab = 0$$

$$\text{অথবা, } \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)^2 = 0$$

যেহেতু তিনটি বর্গের সমষ্টির মান শূন্য। সুতরাং এদের প্রত্যেকের মান শূন্য।

$$\text{অর্থাৎ } \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 = 0$$

$$\text{বা, } \frac{1}{a} - \frac{1}{b} = 0$$

$$\text{বা, } \frac{1}{a} = \frac{1}{b}$$

$$\therefore a = b$$

$$\text{আবার, } \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)^2 = 0 \text{ বা, } \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = 0 \text{ বা, } \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \;\therefore b = c$$

$$\text{আবার, } \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)^2 = 0 \text{ বা, } \frac{1}{c} - \frac{1}{a} = 0 \text{ বা, } \frac{1}{c} = \frac{1}{a} \;\therefore c = a$$

অতএব, $a = b = c$

সুতরাং $bc + ca + ab = 0$ অথবা $a = b = c$ **(দেখানো হলো)**

৯ **যদি $x = b + c - a, y = c + a - b$ এবং $z = a + b - c$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$।**

সমাধান: এখানে, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$$= \frac{1}{2}(x + y + z)\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\}$$

$$= \frac{1}{2}(b+c-a+c+a-b+a+b-c)\{(b+c-a-c-a+b)^2+(c+a-b-a-b+c)^2+(a+b-c-b-c+a)^2\}$$ [x, y ও z এর মান বসিয়ে]

$$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{(2b - 2a)^2 + (2c - 2b)^2 + (2a - 2c)^2\}$$

$$= \frac{1}{2}(a + b + c)[\{-2(a - b)\}^2 + \{-2(b - c)^2\} + \{-2(c - a)\}^2]$$

$$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{4(a - b)^2 + 4(b - c)^2 + (c - a)^2\}$$

$$= 4.\frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}$$

$$= 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) \quad [\because \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\} = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc]$$

$\therefore x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)$ (দেখানো হলো)

১০ **সরল কর: (ক) $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$**

সমাধান: $\frac{a^2}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)}$

$$= \frac{a^2}{-(a-b)(c-a)} + \frac{b^2}{-(b-c)(a-b)} + \frac{c^2}{-(c-a)(b-c)}$$

$$= \frac{a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$$

চক্রক্রমিক রাশির সূত্রানুযায়ী, $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b) = -(a - b)(b - c)(c - a)$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশি $= \frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{-(a-b)(b-c)(c-a)} = 1$ **(Ans.)**

১০ **(খ) $\frac{(a+b)^2 - ab}{(b-c)(a-c)} + \frac{(b+c)^2 - bc}{(c-a)(b-a)} + \frac{(c+a)^2 - ca}{(a-b)(c-b)}$**

সমাধান: $\frac{(a+b)^2 - ab}{(b-c)(a-c)} + \frac{(b+c)^2 - bc}{(c-a)(b-a)} + \frac{(c+a)^2 - ca}{(a-b)(c-b)}$

$$= \frac{(a+b)^2 - ab}{-(b-c)(c-a)} + \frac{(b+c)^2 - bc}{-(c-a)(a-b)} + \frac{(c+a)^2 - ca}{-(a-b)(b-c)}$$

$$= \frac{a^2 + 2ab + b^2 - ab}{-(b-c)(c-a)} + \frac{b^2 + 2bc + c^2 - bc}{-(c-a)(a-b)} + \frac{c^2 + 2ca + a^2 - ca}{-(a-b)(b-c)}$$

$$= \frac{a^2 + ab + b^2}{-(b-c)(c-a)} + \frac{b^2 + bc + c^2}{-(c-a)(a-b)} + \frac{c^2 + ca + a^2}{-(a-b)(b-c)}$$

$$= \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2) + (b-c)(b^2 + bc + c^2) + (c-a)(c^2 + ca + a^2)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$= \frac{a^3 - b^3 + b^3 - c^3 + c^3 - a^3}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$$

$$= \frac{0}{-(a-b)(b-c)(c-a)} = 0 \quad \textbf{(Ans.)}$$

১০ (গ) $\dfrac{a}{(a-b)(a-c)(x-a)} + \dfrac{b}{(b-c)(b-a)(x-b)} + \dfrac{c}{(c-a)(c-b)(x-c)}$

<u>সমাধান</u>: ধরি, $x - a = l,\quad x - b = m,\quad x - c = n$

$\therefore\ l - m = -(a - b),\quad m - n = -(b - c),\quad n - l = -(c - a)$

এবং $a = x - l,\quad b = x - m,\quad c = m - n$

প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{x-l}{-l(l-m)(n-l)} + \dfrac{x-m}{-m(m-n)(l-m)} + \dfrac{x-n}{-n(n-l)(m-n)}$

$= \dfrac{x}{-l(l-m)(n-l)} + \dfrac{x}{-m(m-n)(l-m)} + \dfrac{x}{-n(n-l)(m-n)} + \dfrac{1}{(l-m)(n-l)} + \dfrac{1}{(m-n)(l-m)} + \dfrac{1}{(n-l)(m-n)}$

$= \dfrac{x\{mn(m-n) + nl(n-l) + lm(l-m)\}}{-lmn(l-m)(m-n)(n-l)} + \dfrac{m-n+n-l+l-m}{(l-m)(m-n)(n-l)}$

$= \dfrac{-x(m-n)(n-l)(l-m)}{-lmn(m-n)(n-l)(l-m)} + 0$ [সূত্রানুযায়ী, $mn(m-n) + nl(n-l) + lm(l-m) = -(m-n)(n-l)(l-m)$]

$= \dfrac{x}{lmn}$

$= \dfrac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ **(Ans.)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

$\dfrac{a}{(a-b)(a-c)(x-a)} + \dfrac{b}{(b-c)(b-a)(x-b)} + \dfrac{c}{(c-a)(c-b)(x-c)}$

$= \dfrac{a}{-(a-b)(c-a)(x-a)} + \dfrac{b}{-(a-b)(b-c)(x-b)} + \dfrac{c}{-(c-a)(b-c)(x-c)}$

$= \dfrac{a(x-b)(x-c)(b-c) + b(x-c)(x-a)(c-a) + c(x-a)(x-b)(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)}$

$= \dfrac{a(x-b)(x-c)(b-c) + b(x-a)(x-c)(c-a) + c(x-a)(x-b)(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)}$

$= \dfrac{a(x^2-cx-bx+bc)(b-c) + b(x^2-ax-cx+ac)(c-a) + c(x^2-bx-ax+ab)(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)}$

$= \dfrac{a\{x^2-x(b+c)+bc\}(b-c) + b\{x^2-x(c+a)+ca\}(c-a) + c\{x^2-x(a+b)+ab\}(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)}$

$= \dfrac{\{ax^2-ax(b+c)+abc\}(b-c) + \{bx^2-bx(c+a)+abc\}(c-a) + \{cx^2-cx(a+b)+abc\}(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)}$

$= \dfrac{ax^2(b-c)-ax(b+c)(b-c)+abc(b-c)+bx^2(c-a)-bx(c+a)(c-a)+abc(c-a)+cx^2(a-b)-cx(a+b)(a-b)+abc(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)}$

$= \dfrac{ax^2(b-c)+bx^2(c-a)+cx^2(a-b)-ax(b^2-c^2)-bx(c^2-a^2)-cx(a^2-b^2)+abc(b-c)+abc(c-a)+abc(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)}$

$= \dfrac{x^2\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\} - x\{a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)\} + abc(b-c+c-a+a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)}$

$= \dfrac{x^2(ab-ca+bc-ab+ca-bc)-x(a-b)(b-c)(c-a)+abc\times 0}{-(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)}$ [চক্রক্রমিকের সূত্রানুসারে, $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2) = (a-b)(b-c)(c-a)$]

$= \dfrac{x^2\times 0 - x(a-b)(b-c)(c-a) + 0}{-(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)}$

$= \dfrac{0 - x(a-b)(b-c)(c-a)}{-(a-b)(b-c)(c-a)(x-a)(x-b)(x-c)}$

$= \dfrac{x}{(x-a)(x-b)(x-c)}$ **(Ans.)**

১০ (ঘ) $\dfrac{1}{(1+x)}+\dfrac{2}{(1+x^2)}+\dfrac{4}{(1+x^4)}+\dfrac{8}{(1+x^8)}+\dfrac{16}{(x^{16}-1)}$

সমাধান: $\dfrac{1}{(1+x)}+\dfrac{2}{(1+x^2)}+\dfrac{4}{(1+x^4)}+\dfrac{8}{(1+x^8)}+\dfrac{16}{(x^{16}-1)}$

$=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4}{x^4+1}+\dfrac{8}{x^8+1}+\dfrac{16}{(x^8)^2-(1)^2}$

$=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4}{x^4+1}+\dfrac{8}{x^8+1}+\dfrac{16}{(x^8+1)(x^8-1)}$

$=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4}{x^4+1}+\dfrac{8x^8-8+16}{(x^8+1)(x^8-1)}$

$=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4}{x^4+1}+\dfrac{8x^8+8}{(x^8+1)(x^8-1)}$

$=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4}{x^4+1}+\dfrac{8(x^8+1)}{(x^8+1)\{(x^4)^2-(1)^2\}}$

$=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4}{x^4+1}+\dfrac{8}{(x^4+1)(x^4-1)}$

$=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4x^4-4+8}{(x^4+1)(x^4-1)}$

$=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4x^4+4}{(x^4+1)(x^4-1)}$

$=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4(x^4+1)}{(x^4+1)\{(x^2)^2-(1)^2\}}$

$=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4}{(x^2+1)(x^2-1)}$

$=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2x^2-2+4}{(x^2+1)(x^2-1)}$

$=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2x^2+2}{(x^2+1)(x^2-1)}$

$=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2(x^2+1)}{(x^2+1)(x^2-1)}$

$=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{x-1+2}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{x+1}{(x+1)(x-1)}$

$=\dfrac{1}{x-1}$ **(Ans.)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

$\dfrac{1}{(1+x)}+\dfrac{2}{(1+x^2)}+\dfrac{4}{(1+x^4)}+\dfrac{8}{(1+x^8)}+\dfrac{16}{(x^{16}-1)}$

$=\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x-1}\right)+\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4}{x^4+1}+\dfrac{8}{x^4+1}+\dfrac{16}{x^{16}-1}+\dfrac{1}{x-1}$

$=\dfrac{x-1-x-1}{(x+1)(x-1)}+\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4}{x^4+1}+\dfrac{8}{x^8+1}+\dfrac{16}{x^{16}-1}+\dfrac{1}{x-1}$

$=\dfrac{-2}{x^2-1}+\dfrac{2}{x^2+1}+\dfrac{4}{x^4+1}+\dfrac{8}{x^8+1}+\dfrac{16}{x^{16}-1}+\dfrac{1}{x-1}$

$=\dfrac{-2x^2-2+2x^2-2}{(x^2+1)\ (x^2-1)}+\dfrac{4}{x^4+1}+\dfrac{8}{x^8+1}+\dfrac{16}{x^{16}-1}+\dfrac{1}{x-1}$

$=\dfrac{-4}{x^4-1}+\dfrac{4}{x^4+1}+\dfrac{8}{x^8+1}+\dfrac{16}{x^{16}-1}+\dfrac{1}{x-1}$

$=\dfrac{-4x^4-4+4x^4-4}{(x^4+1)\ (x^4-1)}+\dfrac{8}{x^8+1}+\dfrac{16}{x^{16}-1}+\dfrac{1}{x-1}$

$=\dfrac{-8}{x^8-1}+\dfrac{8}{x^8+1}+\dfrac{16}{x^{16}-1}+\dfrac{1}{x-1}$

$=\dfrac{-8x^8-8+8x^8-8}{(x^8+1)\ (x^8-1)}+\dfrac{16}{x^{16}-1}+\dfrac{1}{x-1}$

$=\dfrac{-16}{x^{16}-1}+\dfrac{16}{x^{16}-1}+\dfrac{1}{x-1}$

$=\dfrac{1}{x-1}$ **(Ans.)**

১১ আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর:

(ক) $\dfrac{5x+4}{x(x+2)}$ (খ) $\dfrac{x+2}{x^2-7x+12}$ (গ) $\dfrac{x^2-9x-6}{x(x-2)(x+3)}$ (ঘ) $\dfrac{x^2-4x-7}{(x+1)(x^2+4)}$ (ঙ) $\dfrac{x^2}{(2x+1)(x+3)^2}$

সমাধান:

ক $\dfrac{5x+4}{x(x+2)}$

ধরি, $\dfrac{5x+4}{x(x+2)}\equiv\dfrac{A}{x}+\dfrac{B}{x+2}$ ... ... (1)

(1) এর উভয়পক্ষকে $x(x+2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$5x+4\equiv A(x+2)+Bx$ ... ... (2)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

(2) এর উভয়পক্ষে $x=0$ বসিয়ে পাই,

$0+4=2A+0$

$\therefore A=2$

আবার (2) এর উভয়পক্ষে $x=-2$ বসিয়ে পাই,

$-10+4=0-2B$

বা, $-6=-2B$

$\therefore B=3$

A ও B এর মান (1) এ বসিয়ে পাই, $\dfrac{5x+4}{x(x+2)}=\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x+2}$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

খ $\dfrac{x+2}{x^2-7x+12}$

এখানে, $x^2-7x+12$

$=x^2-3x-4x+12$ [এখানে হরকে উৎপাদক আকারে বিভক্ত করি]

$=x(x-3)-4(x-3)$

$=(x-3)(x-4)$

সুতরাং, $\dfrac{x+2}{x^2-7x+12}=\dfrac{x+2}{(x-3)(x-4)}$

ধরি, $\dfrac{x+2}{(x-3)(x-4)}\equiv\dfrac{A}{x-3}+\dfrac{B}{x-4}$ ... ... (1)

(1) এর উভয়পক্ষকে $(x-3)(x-4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x+2\equiv A(x-4)+B(x-3)$ ... ... (2)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

এখন, (2) এর উভয়পক্ষে $x=3$ বসিয়ে পাই,

$3+2=A(3-4)+B(3-3)$

বা, $5=-A$

$\therefore A=-5$

আবার (2) এর উভয়পক্ষে $x=4$ বসিয়ে পাই,

$4+2=A(4-4)+B(4-3)$

বা, $6=0+B$

$\therefore B=6$

A ও B এর মান (1) এ বসিয়ে পাই,

$\dfrac{x+2}{(x-3)(x-4)}=\dfrac{-5}{x-3}+\dfrac{6}{x-4}=\dfrac{6}{x-4}-\dfrac{5}{x-3}$;

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

গ $\dfrac{x^2-9x-6}{x(x-2)(x+3)}$

ধরি, $\dfrac{x^2-9x-6}{x(x-2)(x+3)} \equiv \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{x+3}$ ... ... (i)

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $x(x-2)(x+3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2-9x-6 \equiv A(x-2)(x+3)+Bx(x+3)+Cx(x-2)$ ... (ii)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

এখন (ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = 0$ বসিয়ে পাই,

$-6 = A(-2)(3) + 0 + 0$

$\therefore A = 1$

আবার (ii) এর উভয়পক্ষে $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$2^2-9.2-6=A(2-2)(2+3)+B.2(2+3)+C.2(2-2)$

বা, $4-18-6 = 0 + B.2(5) + 0$

বা, $-20 = 10B$

$\therefore B = -2$

(ii) এর উভয়পক্ষে $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$9 + 27 - 6 = 0 + 0 + C(-3)(-5)$

বা, $30 = 15C$

$\therefore C = 2$

A, B ও C এর মান (i) এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2-9x-6}{x(x-2)(x+3)} = \frac{1}{x} - \frac{2}{x-2} + \frac{2}{x+3}$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

ঘ $\dfrac{x^2-4x-7}{(x+1)(x^2+4)}$

ধরি, $\dfrac{x^2-4x-7}{(x+1)(x^2+4)} \equiv \dfrac{A}{x+1} + \dfrac{Bx+C}{x^2+4}$ ... ... (i)

(i) এর উভয়পক্ষকে $(x+1)(x^2+4)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2-4x-7 \equiv A(x^2+4) + (Bx+C)(x+1)$ ... ... (ii)

(ii) এ $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$(-1)^2 - 4(-1) - 7 = A(1+4) + 0$

বা, $1 + 4 - 7 = 5A$

বা, $5A = -2$

$\therefore A = -\dfrac{2}{5}$

এখন, (ii) নং সমীকরণে x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$1 = A + B$

বা, $1 = -\dfrac{2}{5} + B$; [A এর প্রাপ্ত মান বসিয়ে]

বা, $1 + \dfrac{2}{5} = B$

$\therefore B = \dfrac{7}{5}$

আবার, (ii) নং সমীকরণে x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

এবং, $-4 = B + C$

বা, $\dfrac{7}{5} + C = -4$; [B এর মান বসিয়ে]

বা, $C = -4 - \dfrac{7}{5}$

বা, $C = -\dfrac{27}{5}$

A, B ও C এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2-4x-7}{(x+1)(x^2+4)} = \frac{-\frac{2}{5}}{x+1} + \frac{\frac{7}{5}x - \frac{27}{5}}{x^2+4}$$

$$= \frac{1}{5}\left(-\frac{2}{x+1} + \frac{7x-27}{x^2+4}\right)$$

[ডানপক্ষের হর ও লবকে 5 দ্বারা গুণ করে]

$\therefore$ নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ $= \dfrac{1}{5}\left(\dfrac{7x-27}{x^2+4} - \dfrac{2}{x+1}\right)$ **(Ans.)**

ঙ $\dfrac{x^2}{(2x+1)(x+3)^2}$

ধরি, $\dfrac{x^2}{(2x+1)(x+3)^2} \equiv \dfrac{A}{2x+1} + \dfrac{B}{x+3} + \dfrac{C}{(x+3)^2}$ ... (i)

(i) এর উভয়পক্ষকে $(2x+1)(x+3)^2$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 \equiv A(x+3)^2 + B(2x+1)(x+3) + C(2x+1)$ ... (ii)

(ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$(-3)^2 = C\{2.(-3) + 1\}$

বা, $9 = C(-6+1)$

বা, $-5C = 9$

$\therefore C = -\dfrac{9}{5}$

(ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = -\dfrac{1}{2}$ বসিয়ে পাই,

$$\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = A\left(-\frac{1}{2} + 3\right)^2$$

বা, $\dfrac{1}{4} = A\left(\dfrac{5}{2}\right)^2$

বা, $\dfrac{1}{4} = A.\dfrac{25}{4}$

বা, $25A = 1$

$\therefore A = \dfrac{1}{25}$

(ii) নং এ x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A + 2B = 1$

বা, $\dfrac{1}{25} + 2B = 1$

বা, $2B = 1 - \dfrac{1}{25}$

বা, $2B = \dfrac{25-1}{25}$

বা, $2B = \dfrac{24}{25}$

বা, $2B = \dfrac{24}{25 \times 2}$

$\therefore B = \dfrac{12}{25}$

A, B ও C এর মান (i) না সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2}{(2x+1)(x+3)^2} = \frac{\frac{1}{25}}{2x+1} + \frac{\frac{12}{25}}{x+3} + \frac{\frac{-9}{5}}{(x+3)^2}$$

$$= \frac{1}{25(2x+1)} + \frac{12}{25(x+3)} - \frac{9}{5(x+3)^2}$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

১২ x, y, z এর একটি বহুপদী, $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$। [ঢাকা বোর্ড- ২০১৫]

ক. দেখাও যে, $F(x, y, z)$ হলো একটি চক্র-ক্রমিক রাশি।

খ. $F(x, y, z)$ কে উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর এবং যদি $F(x, y, z) = 0$, $(x + y + z) \neq 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$।

গ. যদি $x = (b + c - a)$, $y = (c + a - b)$ এবং $z = (a + b - c)$ হয়, তবে দেখাও যে, $F(a, b, c) : F(x, y, z) = 1 : 4$।

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

প্রদত্ত রাশিটি x, y, z চলকের বহুপদী।

x এর স্থলে y, y এর স্থলে z এবং z এর স্থলে x বসিয়ে পাই,

$$F(y, z, x) = y^3 + z^3 + x^3 - 3.y.z.x$$
$$= x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

দেখা যায় যে, চলকগুলো চক্রাকারে স্থান পরিবর্তন করলেও রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে।

অর্থাৎ $F(x, y, z) = F(y, z, x)$

সুতরাং $F(x, y, z)$ একটি চক্র-ক্রমিক রাশি। **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $F(x, y, z) = 0$

বা, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = 0$

বা, $(x + y)^3 - 3xy(x + y) + z^3 - 3xyz = 0$

বা, $(x + y)^3 + z^3 - 3xy(x + y + z) = 0$

বা, $(x + y + z)\{(x + y)^2 - (x + y).z + z^2\} - 3xy(x + y + z) = 0$

বা, $(x + y + z)(x^2 + 2xy + y^2 - zx - yz + z^2) - 3xy(x + y + z) = 0$

বা, $(x+y+z)(x^2+2xy+y^2-zx-yz+z^2-3xy)=0$

বা, $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = 0$

বা, $x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx = 0$ $[\because x + y + z \neq 0]$

$\therefore x^2 + y^2 + z^2 = xy + yz + zx$ **(দেখানো হলো)**

গ দেওয়া আছে, $x = b + c - a$

$y = c + a - b$

এবং $z = a + b - c$

এখন, $F(x, y, z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

$$= \frac{1}{2}(x + y + z)\{(x - y)^2 + (y - z)^2 + (z - x)^2\}$$

$$= \frac{1}{2}(b+c-a+c+a-b+a+b-c)\{(b+c-a-c-a+b)^2+(c+a-b-a-b+c)^2+(a+b-c-b-c+a)^2\}$$

[x, y, z এর মান বসিয়ে]

$$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{(2b - 2a)^2 + (2c - 2b)^2 + (2a - 2c)^2\}$$

$$= \frac{1}{2}(a + b + c)\{4(a - b)^2 + 4(b - c)^2 + 4(c - a)^2\}$$

$$= 4\left[\frac{1}{2}(a + b + c)\{(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2\}\right]$$

$$= 4(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc) \quad \left[\because \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\} = a^3+b^3+c^3-3abc\right]$$

$$= 4\,F(a, b, c)$$

$\therefore F(x, y, z) = 4\,F(a, b, c)$

বা, $\dfrac{F(x, y, z)}{F(a, b, c)} = 4$

বা, $\dfrac{F(a, b, c)}{F(x, y, z)} = \dfrac{1}{4}$ [বিপরীতকরণ করে]

$\therefore F(a, b, c) : F(x, y, z) = 1 : 4$ **(দেখানো হলো)**

১৩ $P(a, b, c) = (a + b + c)(ab + bc + ca)$ এবং $Q = a^{-3} + b^{-3} + c^{-3} - 3a^{-1}b^{-1}c^{-1}$।

ক. $P(a, b, c)$ চক্রক্রমিক ও প্রতিসম রাশি কিনা তা কারণসহ উল্লেখ কর।

খ. $Q = 0$ হলে, প্রমাণ কর যে, $a = b = c$ অথবা $ab + bc + ca = 0$।

গ. $P(a, b, c) = abc$ হলে দেখাও যে, $\dfrac{1}{(a+b+c)^7} = \dfrac{1}{a^7} + \dfrac{1}{b^7} + \dfrac{1}{c^7}$।

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, $P(a, b, c) = (a + b + c)(ab + bc + ca)$

এখন, $P(a, b, c)$ রাশিতে a ও b চলকের স্থান বিনিময় করলে পাই,

$P(b, a, c) = (b + a + c)(ba + ac + cb)$
$= (a + b + c)(ab + bc + ca)$

আবার, $P(a, b, c)$ রাশিতে b ও c চলকের স্থান বিনিময় করলে পাই,

$P(a, c, b) = (a + c + b)(ac + cb + ba)$
$= (a + b + c)(ab + bc + ca)$

আবার, $P(a, b, c)$ রাশিতে c ও a চলকের স্থান বিনিময় করলে পাই,

$P(c, b, a) = (c + b + a)(cb + ba + ac)$
$= (a + b + c)(ab + bc + ca)$

$\therefore P(a, b, c) = P(a, c, b) = P(c, b, a)$

ফলে, রাশিটি a, b, c তিনটি চলকের সাপেক্ষে প্রতিসম রাশি।

যেহেতু, রাশিটির তিনটি চলক প্রতিসম তাই রাশিটি চক্র-ক্রমিক।

সুতরাং $P(a, b, c)$ চক্রক্রমিক ও প্রতিসম রাশি।

খ দেওয়া আছে, $Q = a^{-3} + b^{-3} + c^{-3} - 3a^{-1}b^{-1}c^{-1}$

শর্তমতে, $Q = 0$ হলে,

$\dfrac{1}{a^3} + \dfrac{1}{b^3} + \dfrac{1}{c^3} - 3\cdot\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{1}{c} = 0$

বা, $\left(\dfrac{1}{a}\right)^3 + \left(\dfrac{1}{b}\right)^3 + \left(\dfrac{1}{c}\right)^3 - 3\cdot\dfrac{1}{a}\cdot\dfrac{1}{b}\cdot\dfrac{1}{c} = 0$

বা, $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)\left\{\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{a}\right)^2\right\} = 0$

বা, $\left(\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}\right)\left\{\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{a}\right)^2\right\} = 0$

হয়, $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 0$ অথবা, $\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{a}\right)^2 = 0$

এখন, $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} = 0$

বা, $\dfrac{bc + ca + ab}{abc} = 0$

$\therefore ab + bc + ca = 0$

আবার, $\left(\dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{a}\right)^2 = 0$

কতগুলো রাশির বর্গের সমষ্টি শূন্য হলে রাশিগুলো প্রত্যেকই আলাদাভাবে শূন্য হবে।

$\therefore \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{b} = 0;$ $\quad \dfrac{1}{b} - \dfrac{1}{c} = 0;$ $\quad \dfrac{1}{c} - \dfrac{1}{a} = 0$

বা, $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b}$; বা, $\dfrac{1}{b} = \dfrac{1}{c}$; বা, $\dfrac{1}{c} = \dfrac{1}{a}$

বা, $b = a$; বা, $c = b$; বা, $a = c$

$\therefore a = b = c$

গ দেওয়া আছে, $P(a, b, c) = abc$

বা, $(a + b + c)(ab + bc + ca) = abc$

বা, $a^2b + abc + ca^2 + ab^2 + b^2c + abc + abc + bc^2 + c^2a = abc$

বা, $a^2b + ca^2 + ab^2 + abc + abc + c^2a + b^2c + bc^2 = abc - abc$

বা, $a^2(b + c) + ab(b + c) + ca(b + c) + bc(b + c) = 0$

বা, $(b + c)(a^2 + ab + ca + bc) = 0$

বা, $(b + c)\{a(a + b) + c(a + b)\} = 0$

বা, $(a + b)(b + c)(c + a) = 0$

$\therefore a + b = 0$ অথবা, $b + c = 0$ অথবা, $c + a = 0$

বা, $a = -b$ বা, $b = -c$ বা, $c = -a$

বামপক্ষ $= \dfrac{1}{(a+b+c)^7}$

$= \dfrac{1}{(-b+b+c)^7}$ $[\because a = -b]$

$= \dfrac{1}{c^7}$

ডানপক্ষ $= \dfrac{1}{a^7} + \dfrac{1}{b^7} + \dfrac{1}{c^7}$

$= \dfrac{1}{(-b)^7} + \dfrac{1}{b^7} + \dfrac{1}{c^7}$ $[\because a = -b]$

$= -\dfrac{1}{b^7} + \dfrac{1}{b^7} + \dfrac{1}{c^7} = \dfrac{1}{c^7}$

$\therefore \dfrac{1}{(a+b+c)^7} = \dfrac{1}{a^7} + \dfrac{1}{b^7} + \dfrac{1}{c^7}$ **(দেখানো হলো)**

১৪ $P(x) = 18x^3 + bx^2 - x - 2$ এবং $Q(x) = 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$।

ক. $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ ভাগফলটির মাত্রা নির্ণয় কর।

খ. $3x + 2$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে b এর মান নির্ণয় কর।

গ. $\dfrac{8x^2 - 2}{Q(x)}$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, $P(x) = 18x^3 + bx^2 - x - 2$
$Q(x) = 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$

এখানে, $P(x)$ বহুপদীর মাত্রা $= 3$
$Q(x)$ বহুপদীর মাত্রা $= 4$

সূত্রানুসারে, $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$ বহুপদীর মাত্রা $= Q(x)$ এর মাত্রা $- P(x)$ এর মাত্রা

$= 4 - 3$

$= 1$

খ এখানে, $P(x) = 18x^3 + bx^2 - x - 2$

এখন, $(3x + 2)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হলে ভাগশেষ উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য অনুসারে,

$P\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$; $[\because 3x + 2 = 0$ বা, $x = \frac{-2}{3}]$

$\therefore 18\left(-\frac{2}{3}\right)^3 + b.\left(-\frac{2}{3}\right)^2 - \left(-\frac{2}{3}\right) - 2 = 0$

বা, $-18.\frac{8}{27} + b.\frac{4}{9} + \frac{2}{3} - 2 = 0$

বা, $\frac{-16}{3} + \frac{4b}{9} + \frac{2}{3} - 2 = 0$

বা, $\frac{-48 + 4b + 6 - 18}{9} = 0$

বা, $4b - 60 = 0$

বা, $b = \frac{60}{4}$

$\therefore b = 15$

গ এখানে, $Q(x) = 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2$

এখন, $x = -1$ বসিয়ে পাই, $Q(x) = 0$

অর্থাৎ $(x + 1)$, $Q(x)$ এর একটি উৎপাদক

$$\begin{aligned}\therefore Q(x) &= 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - 2\\ &= 4x^4 + 4x^3 + 8x^3 + 8x^2 - x^2 - x - 2x - 2\\ &= 4x^3(x+1) + 8x^2(x+1) - x(x+1) - 2(x+1)\\ &= (x+1)(4x^3 + 8x^2 - x - 2)\\ &= (x+1)\{4x^2(x+2) - 1(x+2)\}\\ &= (x+1)(x+2)(4x^2 - 1)\end{aligned}$$

এখন, $\frac{8x^2-2}{Q(x)} = \frac{8x^2-2}{(x+1)(x+2)(4x^2-1)}$

$= \frac{2(4x^2-1)}{(x+1)(x+2)(4x^2-1)}$

$= \frac{2}{(x+1)(x+2)}$

ধরি, $\frac{2}{(x+1)(x+2)} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x+2}$ ... ... (i)

(i) নং উভয়পক্ষকে $(x + 1)(x + 2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$2 \equiv A(x + 2) + B(x + 1)$ ... ... (ii)

এখন, (ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = -2$ বসিয়ে পাই,

$2 = A(-2 + 2) + B(-2 + 1)$

বা, $2 = A.0 + B.(-1)$

$\therefore B = -2$

আবার, (ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$2 = A(-1 + 2) + B(-1 + 1)$

বা, $2 = A + B.0$

$\therefore A = 2$

এখন, A ও B এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$\frac{2}{(x+1)(x+2)} = \frac{2}{x+1} + \frac{-2}{x+2} = 2\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)$

$\frac{8x^2-2}{Q(x)} = 2\left(\frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}\right)$

ইহাই $\frac{8x^2-2}{Q(x)}$ এর আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ।

১৫ চলক x এর দুইটি বহুপদী $P(x) = 7x^2 - 3x + 4x^4 - a + 12x^3$ এবং $Q(x) = 6x^3 + x^2 - 9x + 26$।

(ক) $P(x)$ কে আদর্শরূপে লিখে এর মুখ্য সহগ নির্ণয় কর।

(খ) $P(x)$ এর একটি উৎপাদক $(x + 2)$ হলে a এর মান নির্ণয় কর।

(গ) দেখাও যে, $P(x)$ এবং $Q(x)$ এর একটি সাধারণ উৎপাদক বিদ্যমান।

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, $P(x) = 7x^2 - 3x + 4x^4 - a + 12x^3$

আদর্শরূপে লিখে পাই, $P(x) = 4x^4 + 12x^3 + 7x^2 - 3x - a$

এখানে গরিষ্ঠ মাত্রাযুক্ত পদ $4x^4$ এবং এর সহগ 4

$\therefore P(x)$ এর মুখ্য সহগ 4

খ $P(x)$ এর একটি উৎপাদক $(x + 2)$ হলে $P(-2) = 0$ হবে

এখন, $P(-2) = 0$

বা, $7(-2)^2 - 3(-2) + 4(-2)^4 - a + 12(-2)^3 = 0$

বা, $28 + 6 + 64 - a - 96 = 0$

বা, $98 - a - 96 = 0$

বা, $2 - a = 0$

$\therefore a = 2$

গ দেওয়া আছে, $Q(x) = 6x^3 + x^2 - 9x + 26$

বহুপদীর ধ্রুবপদ 26 এর উৎপাদকসমূহ $\pm 1, \pm 2, \pm 13, \pm 26$

আবার, মুখ্যসহগ 6 এর উৎপাদকসমূহ $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

$$\boxed{\begin{aligned}&Q(1) = 6(1)^3 + (1)^2 - 9(1) + 26 = 24 \neq 0\\ &Q(-1) = 6(-1)^3 + (-1)^2 - 9(-1) + 26 = 30 \neq 0\\ &Q(2) = 6(2)^3 + (2)^2 - 9(2) + 26 = 60 \neq 0\end{aligned}}$$

এখন, $x = -2$ হলে পাই,

$Q(-2) = 6(-2)^3 + (-2)^2 - 9(-2) + 26$

$= -48 + 4 + 18 + 26$

$= 0$

$\therefore (x + 2)$, $Q(x)$ এর একটি উৎপাদক

আবার, 'খ' হতে পাই, $a = 2$ শর্তে $P(x)$ এর একটি উৎপাদক $(x + 2)$

$\therefore (x + 2)$, $P(x)$ এবং $Q(x)$ উভয়ের সাধারণ উৎপাদক

সুতরাং $P(x)$ ও $Q(x)$ এর একটি সাধারণ উৎপাদক বিদ্যমান।

(দেখানো হলো)

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-৪০

ক) নিচের কোনটি বহুপদী নির্ণয় কর:

(১) $2x^3$ (২) $7 - 3a^2$ (৩) $x^3 + x^{-2}$ (৪) $\dfrac{a^2 + a}{a^3 - a}$ (৫) $5x^2 - 2xy + 3y^2$ (৬) $6a + 3b$

(৭) $c^2 + \dfrac{2}{c} - 3$ (৮) $3\sqrt{n-4}$ (৯) $2x(x^2 + 3y)$ (১০) $3x - (2y + 4z)$ (১১) $\dfrac{6}{x} + 2y$ (১২) $\dfrac{3}{4}x - 2y$

সমাধান:

১ $2x^3$

$2x^3$ রাশিটি Cx^p আকারের যেখানে, $C = 2$ এবং $p = 3$

এখানে $P = 3$ একটি অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

সুতরাং $2x^3$ রাশিটি একটি বহুপদী। **(Ans.)**

জেনে নাও:

এক চলকের বহুপদীর পদসমূহ Cx^p আকারের
দুই চলকের বহুপদীর পদসমূহ Cx^py^q আকারের
তিন চলকের বহুপদীর পদসমূহ $Cx^py^qz^r$ আকারের

যেখানে C ধ্রুবক এবং p, q, r প্রত্যেকেই অঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা অর্থাৎ $p = q = r = \{0,1,2,3,4,5,6.....\}$

২ $7 - 3a^2$

এখানে, $-3a^2 + 7$ রাশিটির প্রথম পদ $-3a^2$ যা Cx^p আকারের, যেখানে $C = -3$ এবং $p = 2$

এখানে $p = 2$ একটি অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

এবং $7 - 3a^2$ রাশিটির দ্বিতীয় পদ 7 একটি ধ্রুবপদ।

$\therefore 7 - 3a^2$ রাশিটি একটি বহুপদী। **(Ans.)**

৩ $x^3 + x^{-2}$

এখানে, $x^3 + x^{-2}$ রাশিটির প্রথম পদ x^3, Cx^p আকারের যেখানে $C = 1$ এবং $p = 3$ একটি অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

আবার, প্রদত্ত রাশিটির ২য় পদ x^{-2} এখানে $C = 1, p = -2$

এখানে, $p = -2$, যা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

$\therefore x^3 + x^{-2}$ রাশিটি বহুপদী নয়। **(Ans.)**

দ্রষ্টব্য: বহুপদীর প্রতিটি পদই আলাদা-আলাদাভাবে এক একটি বহুপদী। সুতরাং কোনো রাশির একটি পদ বহুপদী না হলে ঐ রাশিটি বহুপদী হবে না।

৪ $\dfrac{a^2 + a}{a^3 - a}$

$$\frac{a^2 + a}{a^3 - a} = \frac{a(a+1)}{a(a^2-1)} = \frac{a(a+1)}{a(a+1)(a-1)} = \frac{1}{(a-1)} = (a-1)^{-1}$$

যা Cx^p আকারের নয়।

সুতরাং $\dfrac{a^2 + a}{a^3 - a}$ রাশিটি বহুপদী নয়। **(Ans.)**

৫ $5x^2 - 2xy + 3y^2$

$5x^2 - 2xy + 3y^2$ রাশিটির প্রতিটি পদ Cx^py^q আকারের, যেখানে p ও q অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

যথা: ১ম পদ $5x^2 = 5x^2y^0$ এ $C = 5, p = 2, q = 0$

২য় পদ $-2xy$ এ $C = -2, p = 1, q = 1$

৩য় পদ $3y^2 = 3x^0y^2$ এ $C = 3, p = 0, q = 2$

$\therefore 5x^2 - 2xy + 3xy^2$ রাশিটি একটি বহুপদী। **(Ans.)**

৬ $6a + 3b$

$6a + 3b$ রাশিটির প্রতিটি পদ Cx^py^q আকারের, যেখানে p ও q অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

যথা: ১ম পদ $6a = 6a^1b^0$-এ $C = 6, p = 1, q = 0$

২য় পদ $3b = 3a^0b^1$-এ $C = 3, p = 0, q = 1$

$\therefore 6a$ ও $3b$ প্রত্যেকে এক-একটি বহুপদী।

$\therefore 6a + 3b$ একটি বহুপদী। **(Ans.)**

৭ $c^2 + \dfrac{2}{c} - 3$

$c^2 + \dfrac{2}{c} - 3$ রাশিটির ২য় পদে $2c^{-1}$ যেখানে $c = 2$ এবং $p = -1$ যা অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা নয়।

$\therefore$ রাশিটি বহুপদী নয়। **(Ans.)**

৮ $3\sqrt{n-4}$

$3\sqrt{n-4} = 3(n-4)^{\frac{1}{2}}$ রাশিটি Cx^p আকারের নয়।

$\therefore 3\sqrt{n-4}$ রাশিটি বহুপদী নয়। **(Ans.)**

৯ $2x(x^2 + 3y)$

$2x(x^2 + 3y) = 2x^3 + 6xy$ রাশিটির দুইটি পদই Cx^py^q আকারের। যেখানে p ও q অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

যথা: ১ম পদ $2x^3 = 2x^3y^0$ এ $C = 2, p = 3, q = 0$

২য় পদ $6xy = 6x^1y^1$ এ $C = 6, p = 1, q = 1$

$\therefore 2x^3$ ও $6xy$ উভয় পদই বহুপদী।

$\therefore 2x(x^2 + 3y)$ রাশিটি একটি বহুপদী। **(Ans.)**

১০ $3x - (2y + 4z)$

$3x - (2y + 4z) = 3x - 2y - 4z$ রাশিটির প্রতিটি পদই $Cx^py^qz^r$ আকারের, যেখানে p, q ও r অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

যথা: ১ম পদ $3x = 3x^1y^0z^0$ এ $C = 3, p = 1, q = 0, r = 0$

২য় পদ $-2y = -2x^0y^1z^0$ এ $C = -2, p = 0, q = 1, r = 0$

৩য় পদ $-4z = -4x^0y^0z^1$ এ $C = -4, p = 0, q = 0, r = 1$

$\therefore 3x, -2y$ ও $-4z$ প্রত্যেক পদই এক-একটি বহুপদী।

$\therefore 3x - 2y - 4z$ রাশিটি একটি বহুপদী। **(Ans.)**

১১ $\dfrac{6}{x} + 2y$

$\dfrac{6}{x} + 2y = 6x^{-1} + 2y$ রাশিটির ১ম পদ $6x^{-1}$ কে Cx^p এর সাথে তুলনা করে পাই $p = -1$ যা ঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

$\therefore \dfrac{6}{x} + 2y$ রাশিটি বহুপদী নয়। **(Ans.)**

১২ $\dfrac{3}{4}x - 2y$

$\dfrac{3}{4}x - 2y$ রাশিটির প্রতিটি পদ Cx^py^q আকারের যেখানে, p ও q অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

যথা: ১ম পদ $\dfrac{3}{4}x = \dfrac{3}{4}x^1y^0$ এ $C = \dfrac{3}{4}, p = 1, q = 0$

২য় পদ $-2y = -2x^0y^1$ এ $C = -2, p = 0, q = 1$

$\therefore \dfrac{3}{4}x$ ও $-2y$ প্রত্যেক পদই বহুপদী।

$\therefore \dfrac{3}{4}x - 2y$ রাশিটি একটি বহুপদী। **(Ans.)**

জেনে রাখা ভাল: ঋণাত্মক বা পূর্ণ সাংখ্যিক নয় এমন ঘাতযুক্ত ধারার বিস্তৃতি অসীম পদ পর্যন্ত হয়। কিন্তু বহুপদী বলতে সসীম সংখ্যক পদকেই বুঝায়। অসীম সংখ্যক পদ বহুপদীর অন্তর্ভুক্ত নয়।

খ) নিচের বহুপদীগুলোতে চলকের সংখ্যা ও মাত্রা নির্ণয় কর:
(১) $x^2 + 10x + 5$ (২) $3a + 2b$ (৩) $4xyz$ (৪) $2m^2n - mn^2$ (৫) $7a + b - 2$ (৬) $6a^2b^2c^2$

সমাধান: **জ্ঞাতব্য:** সুনির্দিষ্ট কোনো নির্দেশনা না থাকলে বীজগাণিতিক রাশিতে ব্যবহৃত অক্ষর প্রতীকগুলো (a, b, c … … … x, y, z) চলক এবং সংখ্যাগুলো ধ্রুবক হিসেবে ব্যবহৃত হয়।

১ $x^2 + 10x + 5$ হলো x চলকের বহুপদী যার গরিষ্ঠ মাত্রা 2। অতএব চলকের সংখ্যা 1 এবং মাত্রা 2।

২ $3a + 2b$ হলো a ও b দুই চলকের বহুপদী এবং এদের গরিষ্ঠ মাত্রা 1। অতএব চলকের সংখ্যা 2 এবং মাত্রা 1।

৩ $4xyz$ হলো x, y ও z তিন চলকের বহুপদী এবং এদের গরিষ্ঠ মাত্রা $1 + 1 + 1 = 3$। অতএব চলকের সংখ্যা 3 এবং মাত্রা 3।

৪ $2m^2n - mn^2$ হলো m ও n দুই দলকের বহুপদী এবং এদের গরিষ্ঠ মাত্রা $2 + 1 = 3$। অতএব চলকের সংখ্যা 2 এবং মাত্রা 3।

৫ $7a + b - 2$ হলো a ও b দুই চলকের বহুপদী এবং এদের গরিষ্ঠ মাত্রা 1। অতএব চলকের সংখ্যা 2 এবং মাত্রা 1।

৬ $6a^2b^2c^2$ হলো a, b ও c তিন চলকের বহুপদী এবং এদের গরিষ্ঠ মাত্রা $2 + 2 + 2 = 6$। অতএব চলকের সংখ্যা 3 এবং মাত্রা 6।

গ) নিচের বহুপদীগুলোর প্রত্যেকটিকে
(*i*) x চলকের বহুপদীর আদর্শ আকারে বর্ণনা কর এবং x চলকের বহুপদী রূপে এর মাত্রা, মুখ্য সহগ ও ধ্রুব পদ নির্ণয় কর।
(*ii*) y চলকের বহুপদীর আদর্শ আকারে বর্ণনা কর এবং y চলকের বহুপদীরূপে এর মাত্রা, মুখ্য সহগ ও ধ্রুব পদ নির্ণয় কর।
(১) $3x^2 - y^2 + x - 3$ (২) $x^2 - x^6 + x^4 + 3$ (৩) $5x^2y - 4x^4y^4 - 2$ (৪) $x + 2x^2 + 3x^3 + 6$ (৫) $3x^3y + 2xyz - x^4$

সমাধান:

১ (*i*) $3x^2 - y^2 + x - 3$
$= 3x^2 + x - y^2 - 3$
যা x চলকের বহুপদীর আর্দশ রূপ
বহুপদীর গরিষ্ঠ মাত্রাযুক্ত পদ $3x^2$ এবং চলকবিহীন পদ -3
x চলকের বহুপদী রাশিটির মাত্রা 2, মুখ্য সহগ 3, ধ্রুবপদ $-y^2 -3$

(*ii*) $3x^2 - y^2 + x - 3$
$= -y^2 + 3x^2 + x - 3$
রাশিটি y চলকের বহুপদীর আর্দশ রূপ এবং গরিষ্ঠ মাত্রাযুক্ত পদ $-y^2$
বহুপদী রাশিটির y চলকের মাত্রা 2, মুখ্য সহগ -1, ধ্রুবপদ $3x^2 + x - 3$

২ (*i*) $x^2 - x^6 + x^4 + 3$
$= -x^6 + x^4 + x^2 + 3$
ইহা x চলকের বহুপদীর আর্দশ রূপ। যেখানে x চলকের মাত্রা 6, মুখ্য সহগ -1, এক ধ্রুবপদ 3

(*ii*) এই বহুপদী রাশিতে যেহেতু y চলক বিশিষ্ট কোন পদ নেই। সেহেতু একে y চলকের আদর্শ রূপে লিখলে হয় $(x^2 - x^6 + x^4 + 3)y^0$ যেখানে মাত্রা 0, মুখ্য সহগ $-x^6 + x^4 + x^2 + 3$ ও ধ্রুব পদ 0

৩ (*i*) $5x^2y - 4x^4y^4 - 2$
$= -4x^4y^4 + 5x^2y - 2$
ইহা x চলকের বহুপদীর আর্দশ রূপ। যেখানে x চলকের মাত্রা 4, মুখ্য সহগ $-4y^4$ এবং ধ্রুবপদ -2

(*ii*) $5x^2y - 4x^4y^4 - 2$
$= -4x^4y^4 + 5x^2y - 2$
ইহা y চলকের বহুপদীর আর্দশ রূপ। যেখানে y চলকের মাত্রা 4, মুখ্য সহগ $-4x^4$ এবং ধ্রুবপদ -2

৪ (*i*) $x + 2x^2 + 3x^3 + 6$
$= 3x^3 + 2x^2 + x + 6$
ইহা x চলকের বহুপদীর আর্দশ রূপ। যেখানে x চলকের মাত্রা 3, মুখ্য সহগ 3 এবং ধ্রুবপদ 6

(*ii*) এখানে বহুপদী রাশিটিতে y চলক বিশিষ্ট কোন পদ নেই।
সুতরাং এই বহুপদী রাশিকে y চলকের আদর্শ রূপে লিখলে হয় $(x + 2x^2 + 3x^3 + 6)y^0$ যার মাত্রা 0,
মূখ্য সহগ $x + 2x^2 + 3x^3 + 6$ এবং ধ্রুব পদ 0

৫ (*i*) $3x^3y + 2xyz - x^4$
$= -x^4 + 3x^3y + 2xyz$
ইহা x চলকের বহুপদীর আদর্শ রূপ যেখানে x চলকের মাত্রা 4, মুখ্য সহগ -1 এবং ধ্রবপদ 0

(*ii*) $3x^3y + 2xyz - x^4$
$= (3x^3 + 2zx)y - x^4$
ইহা y চলকের বহুপদীর আদর্শ রূপ যেখানে y চলকের মাত্রা 1, মুখ্য সহগ $(3x^3 + 2zx)$ এবং ধ্রবপদ $-x^4$

ঘ) যদি $P(x) = 2x^2 + 3$ হয়, তবে $P(5), P(6), P\left(\frac{1}{2}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: এখানে, $P(x) = 2x^2+3$

এখানে, $P(x)$ বহুপদীটিতে $x = 5, 6, \frac{1}{2}$ বসিয়ে পাই,

$P(5) = 2(5)^2 + 3 = 53$

$P(6) = 2(6)^2 + 3 = 75$

$P\left(\frac{1}{2}\right) = 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 = 2.\frac{1}{4} + 3 = \frac{1}{2} + 3 = \frac{1 + 6}{2} = \frac{7}{2}$

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-৪৭

ক) যদি $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 5x - 2$ হয়, তবে $P(x)$ কে নিম্নলিখিত বহুপদী দ্বারা ভাগ করে ভাগশেষ নির্ণয় কর।
(১) $x - 1$ (২) $x - 2$ (৩) $x + 2$ (৪) $x + 3$ (৫) $2x - 1$ (৬) $2x + 1$

সমাধান:

১ এখানে, $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 5x - 2$

$x - 1)\ 2x^4 - 6x^3 + 5x - 2\ (2x^3 - 4x^2 - 4x + 1$
$2x^4 - 2x^3$
(−) (+)
$-4x^3 + 5x - 2$
$-4x^3 + 4x^2$
(+) (−)
$-4x^2 + 5x - 2$
$-4x^2 + 4x$
(+) (−)
$x - 2$
$x - 1$
(−) (+)
-1

$\therefore$ ভাগশেষ $= -1$ **(Ans.)**

২ এখানে, $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 5x - 2$

$x - 2)\ 2x^4 - 6x^3 + 5x - 2\ (2x^3 - 2x^2 - 4x - 3$
$2x^4 - 4x^3$
(বিয়োগ করে) $-2x^3 + 5x - 2$
$-2x^3 + 4x^2$
(+) (−)
$-4x^2 + 5x - 2$
$-4x^2 + 8x$
(+) (−)
$-3x - 2$
$-3x + 6$
(+) (−)
-8

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ $= -8$ **(Ans.)**

৩ এখানে, $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 5x - 2$

$x + 2)\ 2x^4 - 6x^3 + 5x - 2\ (2x^3 - 10x^2 + 20x - 35$
$2x^4 + 4x^3$
(বিয়োগ করে) $-10x^3 + 5x - 2$
$-10x^3 - 20x^2$
(+) (+)
$20x^2 + 5x - 2$
$20x^2 + 40x$
(−) (−)
$-35x - 2$
$-35x - 70$
(+) (+)
68

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ $= 68$ **(Ans.)**

৪ এখানে, $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 5x - 2$

$x + 3)\ 2x^4 - 6x^3 + 5x - 2\ (2x^3 - 12x^2 + 36x - 103$
$2x^4 + 6x^3$
(−) (−)
$-12x^3 + 5x - 2$
$-12x^3 - 36x^2$
(+) (+)
$36x^2 + 5x - 2$
$36x^2 + 108x$
(−) (−)
$-103x - 2$
$-103x - 309$
(+) (+)
307

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ $= 307$ **(Ans.)**

৫ এখানে, $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 5x - 2$

$2x - 1)\ 2x^4 - 6x^3 + 5x - 2\ \left(x^3 - \frac{5}{2}x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{15}{8}\right.$
$2x^4 - x^3$
(−) (+)
$-5x^3 + 5x - 2$
$-5x^3 + \frac{5}{2}x^2$
(+) (−)
$-\frac{5}{2}x^2 + 5x - 2$
$-\frac{5}{2}x^2 + \frac{5}{4}x$
(+) (−)
$\frac{15}{4}x - 2$
$\frac{15}{4}x - \frac{15}{8}$
(−) (+)
$-\frac{1}{8}$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ $= -\frac{1}{8}$ **(Ans.)**

৬ এখানে, $P(x) = 2x^4 - 6x^3 + 5x - 2$

$2x + 1)\ 2x^4 - 6x^3 + 5x - 2\ \left(x^3 - \frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{4}x + \frac{13}{8}\right.$
$2x^4 + x^3$
(−) (−)
$-7x^3 + 5x - 2$
$-7x^3 - \frac{7}{2}x^2$
(+) (+)
$\frac{7}{2}x^2 + 5x - 2$
$\frac{7}{2}x^2 + \frac{7}{4}x$
(−) (−)
$\frac{13}{4}x - 2$
$\frac{13}{4}x + \frac{13}{8}$
(−) (−)
$-\frac{29}{8}$

$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ $= -\frac{29}{8}$ **(Ans.)**

খ) ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে ভাগশেষ নির্ণয় কর।
(১) ভাজ্য : $4x^3 - 7x + 10$, ভাজক : $x - 2$ (২) ভাজ্য : $5x^3 - 11x^2 - 3x + 4$, ভাজক : $x + 1$
(৩) ভাজ্য : $2y^3 - y^2 - y - 4$, ভাজক : $y + 3$ (৪) ভাজ্য : $2x^3 + x^2 - 18x + 10$, ভাজক : $2x + 1$

সমাধানঃ

১ দেওয়া আছে, ভাজ্য : $4x^3 - 7x + 10$, ভাজক : $x - 2$
ধরি $P(x) = 4x^3 - 7x + 10$
ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে আমরা পাই,
$P(x)$ কে $x - 2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P(2)$
$\therefore P(2) = 4(2)^3 - 7(2) + 10 = 32 - 14 + 10 = 28$
$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ $= 28$ **(Ans.)**

২ দেওয়া আছে, ভাজ্য : $5x^3 - 11x^2 - 3x + 4$, ভাজক : $x + 1$
ধরি $P(x) = 5x^3 - 11x^2 - 3x + 4$
ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে আমরা পাই,
$P(x)$ কে $x + 1$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P(-1)$
$\therefore P(-1) = 5(-1)^3 - 11(-1)^2 - 3(-1) + 4$
$= -5 - 11 + 3 + 4 = -9$
$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ $= -9$ **(Ans.)**

৩ দেওয়া আছে, ভাজ্য : $2y^3 - y^2 - y - 4$, ভাজক : $y + 3$
ধরি $P(y) = 2y^3 - y^2 - y - 4$
ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে আমরা পাই,
$P(y)$ কে $y + 3$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P(-3)$
$\therefore P(-3) = 2(-3)^3 - (-3)^2 - (-3) - 4$
$= -54 - 9 + 3 - 4 = -64$
$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ $= -64$ **(Ans.)**

৪ দেওয়া আছে, ভাজ্য : $2x^3 + x^2 - 18x + 10$, ভাজক : $2x + 1$
ধরি $P(x) = 2x^3 + x^2 - 18x + 10$
ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে আমরা পাই,
$P(x)$ কে $2x + 1$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P\left(-\frac{1}{2}\right)$
$\therefore P\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 18\left(-\frac{1}{2}\right) + 10$
$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + 9 + 10 = 19$
$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ $= 19$ **(Ans.)**

গ) দেখাও যে, $3x^3 - 4x^2 + 4x - 3$ এর একটি উৎপাদক $(x - 1)$।

সমাধানঃ ধরি $P(x) = 3x^3 - 4x^2 + 4x - 3$
যদি $(x-1)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হয় তবে, উৎপাদক উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্য অনুসারে $P(1) = 0$ হবে।
এখন, $P(1) = 3(1)^3 - 4(1)^2 + 4(1) - 3$
$= 3 - 4 + 4 - 3 = 0$
$\therefore 3x^3 - 4x^2 + 4x - 3$ এর একটি উৎপাদক $(x - 1)$ **(দেখানো হলো)**

ঘ) $2x^3 + x^2 + ax - 9$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $x + 3$ হলে a এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ ধরি $P(x) = 2x^3 + x^2 + ax - 9$
যদি $(x+3)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হয় তবে, $P(-3) = 0$ হবে।
এখন, $P(-3) = 2(-3)^3 + (-3)^2 + a(-3) - 9 = 0$
বা, $-54 + 9 - 3a - 9 = 0$
বা, $3a = -54$
$\therefore a = -18$ **(Ans.)**

ঙ) দেখাও যে, $x^3 - 4x^2 + 4x - 3$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $x - 3$।

সমাধানঃ ধরি $P(x) = x^3 - 4x^2 + 4x - 3$
যদি $(x-3)$, $P(x)$ এর একটি উৎপাদক হয় তবে, $P(3) = 0$ হবে।
এখন, $P(3) = (3)^3 - 4(3)^2 + 4(3) - 3$
$= 27 - 36 + 12 - 3 = 0$
সুতরাং $x^3 - 4x^2 + 4x - 3$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(x - 3)$ **(দেখানো হলো)**

চ) যদি $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 8$ হয়, তবে $P(x)$ কে $x - 2$ দ্বারা ভাগ করলে যে ভাগশেষ থাকে একে ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে নির্ণয় কর।

সমাধানঃ এখানে, $P(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7x - 8$
ভাগশেষ উপপাদ্যের সাহায্যে আমরা পাই,
$P(x)$ কে $x - 2$ দ্বারা ভাগ করলে ভাগশেষ হবে $P(2)$
$\therefore P(2) = 2(2)^3 - 5(2)^2 + 7(2) - 8$
$= 16 - 20 + 14 - 8 = 2$
$\therefore$ নির্ণেয় ভাগশেষ $= 2$ **(Ans.)**

ছ) দেখাও যে, $4x^4 - 5x^3 + 5x - 4$ বহুপদীর $x + 1$ এবং $x - 1$ রাশিদ্বয় উৎপাদক।

সমাধানঃ ধরি, $P(x) = 4x^4 - 5x^3 + 5x - 4$
উৎপাদক উপপাদ্যের বিপরীত উপপাদ্যের সাহায্যে আমরা জানি, $P(x)$ বহুপদীর উৎপাদক $(x + 1)$ ও $(x - 1)$ হলে, $P(-1) = 0$ এবং $P(1) = 0$ হবে।
$\therefore P(-1) = 4(-1)^4 - 5(-1)^3 + 5(-1) - 4$
$= 4 + 5 - 5 - 4 = 0$
$\therefore P(1) = 4(1)^4 - 5(1)^3 + 5(1) - 4$
$= 4 - 5 + 5 - 4 = 0$
সুতরাং, $4x^4 - 5x^3 + 5x - 4$ বহুপদীর $(x + 1)$ ও $(x - 1)$ রাশিদ্বয় উৎপাদক। **(দেখানো হলো)**

জ) উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:
(১) $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$ (২) $x^3 + 4x^2 + x - 6$ (৩) $a^3 - a^2 - 10a - 8$
(৪) $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 8x + 5$ (৫) $-2x^2 + 6y^2 + xy + 8x - 2y - 8$

সমাধান:

১ $x^3 + 2x^2 - 5x - 6$

ধরি, $P(x) = x^3 + 2x^2 - 5x - 6$
এখন, $P(-3) = (-3)^3 + 2(-3)^2 - 5(-3) - 6$
$= -27 + 18 + 15 - 6 = 0$
$(x + 3)$, $P(x)$ এর একটি সাধারণ উৎপাদক।
$P(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 6$
$= x^3 + 3x^2 - x^2 - 3x - 2x - 6$
$= x^2(x + 3) - x(x + 3) - 2(x + 3)$
$= (x + 3)(x^2 - x - 2)$
আবার, $x^2 - x - 2 = x^2 - 2x + x - 2$
$= x(x - 2) + 1(x - 2)$
$= (x + 1)(x - 2)$
যেহেতু, $P(x) = (x + 3)(x + 1)(x - 2)$
সুতরাং, নির্ণেয় সাধারণ উৎপাদক $= (x + 1)(x + 3)(x - 2)$ **(Ans.)**

দ্বিতীয় পদ্ধতি

$x^3 + 2x^2 - 5x - 6$
$= x^3 + 1 + 2x^2 - 5x - 7$
$= (x + 1)(x^2 - x + 1) + 2x^2 - 5x - 7$
$= (x + 1)(x^2 - x + 1) + 2x^2 - 7x + 2x - 7$
$= (x + 1)(x^2 - x + 1) + x(2x - 7) + 1(2x - 7)$
$= (x + 1)(x^2 - x + 1) + (2x - 7)(x + 1)$
$= (x + 1)(x^2 - x + 1 + 2x - 7)$
$= (x + 1)(x^2 + x - 6)$
$= (x + 1)(x^2 + 3x - 2x - 6)$
$= (x + 1)\{x(x + 3) - 2(x + 3)\}$
$= (x + 1)(x - 2)(x + 3)$ **(Ans.)**

২ $x^3 + 4x^2 + x - 6$

ধরি, $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$
বা, $P(-3) = (-3)^3 + 4(-3)^2 + (-3) - 6$
$= 0$
$(x + 3)$, $P(x)$ এর সাধারণ উৎপাদক
এখন, $P(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$
$= x^3 + 3x^2 + x^2 + 3x - 2x - 6$
$= x^2(x + 3) + x(x + 3) - 2(x + 3)$
$= (x + 3)(x^2 - x - 2)$
$= (x + 3)(x^2 + 2x - x - 2)$
$= (x + 3)\{x(x + 2) - 1(x + 2)\}$
$= (x + 3)(x + 2)(x - 1)$
$= (x - 1)(x + 2)(x + 3)$
$\therefore$ নির্ণেয় সাধারণ উৎপাদক $= (x - 1)(x + 2)(x + 3)$ **(Ans.)**

দ্বিতীয় পদ্ধতি

$x^3 + 4x^2 + x - 6$
$= x^3 - 1 + 4x^2 + x - 5$
$= (x - 1)(x^2 + x + 1) + 4x^2 + 5x - 4x - 5$
$= (x - 1)(x^2 + x + 1) + x(4x + 5) - 1(4x + 5)$
$= (x - 1)(x^2 + x + 1) + (4x + 5)(x - 1)$
$= (x - 1)(x^2 + x + 1 + 4x + 5)$
$= (x - 1)(x^2 + 5x + 6)$
$= (x - 1)(x^2 + 2x + 3x + 6)$
$= (x - 1)\{x(x + 2) + 3(x + 2)\}$
$= (x - 1)(x + 2)(x + 3)$ **(Ans.)**

৩ $a^3 - a^2 - 10a - 8$

ধরি, $P(a) = a^3 - a^2 - 10a - 8$
$\therefore P(4) = (4)^3 - (4)^2 - 10 \times 4 - 8$
$= 0$
$(a - 4)$, $P(a)$ এর সাধারণ উৎপাদক।
এখন, $P(a) = a^3 - a^2 - 10a - 8$
$= a^3 - 4a^2 + 3a^2 - 12a + 2a - 8$
$= a^2(a - 4) + 3a(a - 4) + 2(a - 4)$
$= (a - 4)(a^2 + 3a + 2)$
$= (a - 4)(a^2 + 2a + a + 2)$
$= (a - 4)\{a(a + 2) + 1(a + 2)\}$
$= (a - 4)(a + 2)(a + 1)$
$= (a + 1)(a + 2)(a - 4)$
$\therefore$ নির্ণেয় সাধারণ উৎপাদক $= (a + 1)(a + 2)(a - 4)$ **(Ans.)**

দ্বিতীয় পদ্ধতি

$a^3 - a^2 - 10a - 8$
$= a^3 + 8 - a^2 - 10a - 16$
$= a^3 + (2)^3 - (a^2 + 10a + 16)$
$= (a + 2)(a^2 - 2a + 4) - (a^2 + 2a + 8a + 16)$
$= (a + 2)(a^2 - 2a + 4) - \{a(a + 2) + 8(a + 2)\}$
$= (a + 2)(a^2 - 2a + 4) - (a + 2)(a + 8)$
$= (a + 2)(a^2 - 2a + 4 - a - 8)$
$= (a + 2)(a^2 - 3a - 4)$
$= (a + 2)(a^2 - 4a + a - 4)$
$= (a + 2)\{a(a - 4) + 1(a - 4)\}$
$= (a + 2)(a - 4)(a + 1)$ **(Ans.)**

৪ $x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 8x + 5$

ধরি, $P(x) = x^4 + 3x^3 + 5x^2 + 8x + 5$
$\therefore P(-1) = (-1)^4 + 3(-1)^3 + 5(-1)^2 + 8(-1) + 5$
$= 1 - 3 + 5 - 8 + 5$
$= 0$
$\therefore (x + 1)$, $P(x)$ এর একটি সাধারণ উৎপাদক।
$P(x) = x^4 + x^3 + 2x^3 + 2x^2 + 3x^2 + 3x + 5x + 5$
$= x^3(x + 1) + 2x^2(x + 1) + 3x(x + 1) + 5(x + 1)$
$= (x + 1)(x^3 + 2x^2 + 3x + 5)$
$\therefore$ নির্ণেয় সাধারণ উৎপাদক $= (x + 1)(x^3 + 2x^2 + 3x + 5)$ **(Ans.)**

৫ $-2x^2 + 6y^2 + xy + 8x - 2y - 8$

কেবল x সম্বলিত পদগুলো ও ধ্রুবক নিয়ে পাওয়া যায়
$-2x^2 + 8x - 8 \equiv (-2x + 4)(x - 2)$ ... ...(i)
আবার, কেবল y সম্বলিত পদগুলো ও ধ্রুবক নিয়ে পাওয়া যায়
$6y^2 - 2y - 8 \equiv (-3y + 4)(-2y - 2)$... ... ... (ii)
(i) ও (ii) নং এর উৎপাদকগুলোকে (ধ্রুবক +4, –2 অনুসারে) সমন্বয় করে প্রদত্ত রাশির সম্ভাব্য উৎপাদকসমূহ পাওয়া যায়।
সম্ভাব্য উৎপাদকসমূহ হলো: $(-2x - 3y + 4)(x - 2y - 2)$
সম্ভাব্য উৎপাদকসমূহের সঠিকতা নির্ণয়ে 'xy এর সহগ' যাচাইকরণ প্রয়োজন।
<u>'xy এর সহগ' যাচাইকরণ:</u>
সম্ভাব্য উৎপাদকসমূহের গুণনে অর্থাৎ $\{(-2x - 3y + 4)(x - 2y - 2)\}$-এর ক্ষেত্রে xy এর সহগ $= (-2)(-2) + (-3).1 = 1$।
আবার, প্রদত্ত রাশির ক্ষেত্রেও xy এর সহগ 1। অর্থাৎ সম্ভাব্য উৎপাদকসমূহ সঠিক।
সুতরাং নির্ণেয় উৎপাদক $(-2x - 3y + 4)(x - 2y - 2)$
অথবা
$(2x + 3y - 4)(-x + 2y + 2)$

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-৪৯

দেখাও যে, $\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$ রাশিটি প্রতিসম নয় কিন্তু চক্রক্রমিক।

সমাধান:

ধরি, $F(x,y,z)=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$ ... ...(i)

প্রদত্ত রাশিটি x,y,z চলকের বহুপদী।

(i) নং-এ x এর স্থলে y,y এর স্থলে z এবং এর স্থলে x বসিয়ে পাই,

$F(y,z,x)=\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{x}{y}$

$=\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$

দেখা যাচ্ছে, চলকগুলো চক্রাকারে স্থান পরিবর্তন করলেও রাশিটি অপরিবর্তিত থাকে।

$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}$ একটি চক্র-ক্রমিক রাশি।

(i) নং-এ x ও y পরস্পর স্থানে বিনিময় করলে পাই,

$F(y,x,z)=\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}$

দেখা যাচ্ছে, y,x,z চলক তিনটির মধ্যে x ও y এর স্থান বিনিময়ে রাশিটি পরিবর্তিত হয় যা পূর্বের রাশি থেকে ভিন্ন।

$\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}$ রাশিটি প্রতিসম নয়।

$\frac{y}{x}+\frac{x}{z}+\frac{z}{y}$ রাশিটি প্রতিসম নয় কিন্তু চক্রক্রমিক। **(দেখানো হলো)**

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-৫৩

ক) উৎপাদকে বিশ্লেষণ কর:

(১) $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$
(২) $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$
(৩) $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$
(৪) $bc(b^2-c^2)+ca(c^2-a^2)+ab(a^2-b^2)$
(৫) $a^4(b-c)+b^4(c-a)+c^4(a-b)$
(৬) $a^2(b-c)^3+b^2(c-a)^3+c^2(a-b)^3$
(৭) $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$
(৮) $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$

সমাধান:

১ $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

$=a(b^2-c^2)+bc^2-a^2b+a^2c-b^2c$

$=a(b^2-c^2)-a^2b+a^2c-b^2c+bc^2$

$=a(b+c)(b-c)-a^2(b-c)-bc(b-c)$

$=(b-c)\{a(b+c)-a^2-bc\}$

$=(b-c)(ab+ca-a^2-bc)$

$=(b-c)(-a^2+ab+ca-bc)$

$=(b-c)\{-a(a-b)+c(a-b)\}$

$=(b-c)(a-b)(c-a)$ **(Ans.)**

দ্বিতীয় পদ্ধতি

$a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

প্রদত্ত রাশিকে a এর বহুপদী $P(a)$ ধরে তাতে b বসিয়ে দেখি যে,

$P(b)=b(b^2-c^2)+b(c^2-b^2)+c\,(b^2-b^2)$

$=b(b^2-c^2)-b(b^2-c^2)+0=0$

সুতরাং উৎপাদক উপপাদ্য অনুযায়ী $(a-b)$ প্রদত্ত রাশির একটি উৎপাদক। এখন, যেহেতু রাশিটি চক্রক্রমিক রাশি সেহেতু $(b-c)$ ও $(c-a)$ উভয়ে প্রদত্ত রাশিটির উৎপাদক। প্রদত্ত রাশিটি তিন মাত্রার সমমাত্রিক এবং এর তিনটি এক মাত্রার উৎপাদক পাওয়া গেছে। সুতরাং অন্য উৎপাদক যদি থাকে তা ধ্রুবক হবে।

অর্থাৎ $a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)$

$=k(a-b)(b-c)\,(c-a)$ ... ... (1)

অর্থাৎ k একটি ধ্রুবক এর মান সকল a, b, c মানের জন্য (1) সত্য।

(1) নং এ $a=0, b=1, c=2$, বসিয়ে পাই,

$0+1(4-0)+2(0-1)=k(-1)\,(-1)\,(2)$

বা, $4-2=2k$

বা, $k=1$

$\therefore a(b^2-c^2)+b(c^2-a^2)+c(a^2-b^2)=(a-b)(b-c)(c-a)$ **(Ans.)**

২ $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)$

$=a^2(b-c)+b^2c-ab^2+c^2a-bc^2$

$=a^2(b-c)-ab^2+c^2a+b^2c-bc^2$

$=a^2(b-c)-a(b^2-c^2)+bc(b-c)$

$=a^2(b-c)-a(b+c)(b-c)+bc(b-c)$

$=(b-c)(a^2-ab-ac+bc)$

$=(b-c)\{a(a-b)-c(a-b)\}$

$=(b-c)(a-b)(a-c)$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক $=-(a-b)(b-c)(c-a)$ **(Ans.)**

৩ $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$

প্রদত্ত রাশিকে $P(a)$ এর বহুপদী ধরে a এর পরিবর্তে b বসিয়ে পাই,

$P(b)=b(b-c)^3+b(c-b)^3+c(b-b)^3$

$=b(b-c)^3-b(b-\mathbf{c})^3+0=0$

সুতরাং উৎপাদক উপপাদ্য অনুযায়ী $(a-b)$ প্রদত্ত রাশির একটি উৎপাদক। এখন যেহেতু রাশিটি চক্র ক্রমিক রাশি সেহেতু $(b-c)$ এবং $(c-a)$ উভয়ে প্রদত্ত রাশির উৎপাদক। প্রদত্ত রাশিটি চার মাত্রার সমমাত্রিক এবং এর তিনটি এক মাত্রার উৎপাদক পাওয়া গেছে। সুতরাং অন্য উৎপাদক যদি থাকে তা অবশ্যই চক্র ক্রমিক এবং এক মাত্রার সমমাত্রিক রাশি হবে। অর্থাৎ $k(a+b+c)$ হবে।

অর্থাৎ $a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$

$=k(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$ ... ... (i)

অর্থাৎ k একটি ধ্রুবক। a, b, c এর সকল মানের জন্য (i) সত্য।

(i) নং এ $a=0, b=1, c=2$,বসিয়ে পাই,

$0+1(2-0)^3+2(0-1)^3=k(-1)(1-2)(2-0)(0+1+2)$

বা, $8-2=6k$

বা, $k=1$

$\therefore a(b-c)^3+b(c-a)^3+c(a-b)^3$

$=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক $=(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$ **(Ans.)**

দ্বিতীয় পদ্ধতি

$a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3$
$= a(b^3 - 3b^2c + 3bc^2 - c^3) + b(c^3 - 3c^2a + 3ca^2 - a^3) + c(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)$
$= ab^3 - 3ab^2c + 3abc^2 - c^3a + bc^3 - 3abc^2 + 3a^2bc - a^3b + ca^3 - 3a^2bc + 3ab^2c - b^3c$
$= ab^3 - c^3a + bc^3 - a^3b + ca^3 - b^3c$
$= -a^3b + ab^3 - c^3a + bc^3 + ca^3 - b^3c$
$= -ab(a^2 - b^2) - c^3(a-b) + c(a^3 - b^3)$
$= -ab(a+b)(a-b) - c^3(a-b) + c(a-b)(a^2 + ab + b^2)$
$= (a-b)\{-ab(a+b) - c^3 + c(a^2 + ab + b^2)\}$
$= (a-b)(-a^2b - ab^2 - c^3 + ca^2 + abc + b^2c)$
$= (a-b)(-a^2b + ca^2 - ab^2 + abc + b^2c - c^3)$
$= (a-b)\{-a^2(b-c) - ab(b-c) + c(b^2 - c^2)\}$
$= (a-b)\{-a^2(b-c) - ab(b-c) + c(b+c)(b-c)\}$
$= (a-b)(b-c)\{-a^2 - ab + c(b+c)\}$
$= (a-b)(b-c)(-a^2 - ab + bc + c^2)$
$= (a-b)(b-c)(bc - ab + c^2 - a^2)$
$= (a-b)(b-c)\{b(c-a) + (c-a)(c+a)\}$
$= (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$ **(Ans.)**

৪ $bc(b^2 - c^2) + ca(c^2 - a^2) + ab(a^2 - b^2)$
$= bc(b^2 - c^2) + c^3a - ca^3 + a^3b - ab^3$
$= bc(b+c)(b-c) + a^3(b-c) - a(b^3 - c^3)$
$= bc(b+c)(b-c) + a^3(b-c) - a(b-c)(b^2 + bc + c^2)$
$= (b-c)(b^2c + bc^2 + a^3 - ab^2 - abc - c^2a)$
$= (b-c)(-abc + b^2c + a^3 - ab^2 - c^2a + bc^2)$
$= (b-c)\{-bc(a-b) + a(a^2 - b^2) - c^2(a-b)\}$
$= (b-c)\{-bc(a-b) + a(a+b)(a-b) - c^2(a-b)\}$
$= (b-c)(a-b)(a^2 + ab - c^2 - bc)$
$= (b-c)(a-b)\{-b(c-a) - (c^2 - a^2)\}$ $\therefore$
$= (b-c)(a-b)(c-a)(-b-c-a)$
$= (a-b)(b-c)(c-a)\{-(a+b+c)\}$
$= -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$ **(Ans.)**

৫ $a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b)$
$= a^4(b-c) + (b^4c - b^4a + c^4a - c^4b)$
$= a^4(b-c) + bc(b^3 - c^3) - a(b^4 - c^4)$
$= (b-c)\{a^4 + bc(b^2 + bc + c^2) - a(b+c)(b^2 + c^2)\}$
$= (b-c)\{a^4 + bc(b^2 + bc + c^2) - a(b^3 + bc^2 + b^2c + c^3)\}$
$= (b-c)(a^4 + b^3c + b^2c^2 + bc^3 - ab^3 - abc^2 - ab^2c - ac^3)$
$= (b-c)(a^4 - ab^3 - ab^2c + b^3c - abc^2 + b^2c^2 - ac^3 + bc^3)$
$= (b-c)\{a(a^3 - b^3) - c^3(a-b) - b^2c(a-b) - bc^2(a-b)\}$
$= (b-c)(a-b)\{a(a^2 + ab + b^2) - c^3 - b^2c - bc^2\}$
$= (b-c)(a-b)(-c^3 + a^3 - bc^2 + a^2b - b^2c + ab^2)$
$= (b-c)(a-b)\{-b^2(c-a) - b(c^2 - a^2) - (c^3 - a^3)\}$
$= (b-c)(a-b)(c-a)\{-b^2 - b(c+a) - (c^2 + ca + a^2)\}$
$= (b-c)(a-b)(c-a)(-b^2 - bc - ab - c^2 - ca - a^2)$
$= -(a-b)(b-c)(c-a)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)$
$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক
$= -(a-b)(b-c)(c-a)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)$
(Ans.)

দ্বিতীয় পদ্ধতি

প্রদত্ত রাশিকে $P(a)$ এর বহুপদী ধরে a এর পরিবর্তে b বসিয়ে পাই,
$P(b) = b^4(b-c) + b^4(c-b) + c^4(b-b)$
$= b^4(b-c) - b^4(b-c) + 0$
$= 0$
সুতরাং উৎপাদক উপপাদ্য অনুযায়ী $(a-b)$ প্রদত্ত রাশির একটি উৎপাদক। রাশিটি চক্রক্রমিক হওয়ায় $(b-c)(c-a)$ উভয়ে প্রদত্ত রাশির উৎপাদক হবে। প্রদত্ত রাশিটি পাঁচ মাত্রার সমমাত্রিক। সুতরাং অন্য উৎপাদক চক্রক্রমিক হবে এবং দুই মাত্রার সমমাত্রিক রাশি হবে।
অর্থাৎ $k_1(a^2 + b^2 + c^2) + k_2(ab + bc + ca)$
সুতরাং $a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b)$
$= (a-b)(b-c)(c-a)\{k_1(a^2 + b^2 + c^2) + k_2(ab + bc + ca)\}$ ... ... (i)
k_1, k_2 একটি ধ্রুবক। (i) নং a, b, c এর সকল মানের জন্য হতে হবে।
(i) নং এ $a = 0$, $b = 1$ এবং $c = 2$ বসিয়ে পাই,
$1 \times 2 + 16(-1) = (-1)(-1) \times 2 \times \{k_1(0 + 1 + 4) + k_2(0 + 2 + 0)\}$
বা, $-14 = 2(5k_1 + 2k_2)$
বা, $5k_1 + 2k_2 = -7$ ... ... (ii)
আবার, (i) নং এ $a = 1$, $b = 3$, $c = 0$ বসিয়ে পাই,
$3 + 81(-1) = (-2)(3)(-1)\{k_1(10) + k_2(3)\}$
বা, $-13 = 10k_1 + 3k_2$
বা, $10k_1 + 3k_2 = -13$ ... ... (iii)
(ii) ও (iii) নং হতে পাই,
$k_1 = -1$ এবং $k_2 = -1$
$a^4(b-c) + b^4(c-a) + c^4(a-b)$
$= (a-b)(b-c)(c-a)\{(-1)(a^2 + b^2 + c^2) + (-1)(ab + bc + ca)\}$
$= -(a-b)(b-c)(c-a)(a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca)$

৬ $a^2(b-c)^3 + b^2(c-a)^3 + c^2(a-b)^3$
$= a^2(b-c)^3 + b^2(c^3 - 3c^2a + 3ca^2 - a^3) + c^2(a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3)$
$= a^2(b-c)^3 + b^2c^3 - 3ab^2c^2 + 3a^2b^2c - a^3b^2 + a^3c^2 - 3a^2bc^2 + 3ab^2c^2 - b^3c^2$
$= a^2(b-c)(b-c)^2 + b^2c^3 - b^3c^2 - a^3b^2 + a^3c^2 + 3a^2b^2c - 3ab^2c^2$
$= a^2(b-c)(b^2 - 2bc + c^2) - b^2c^2(b-c) - a^3(b^2 - c^2) + 3a^2bc(b-c)$
$= (b-c)\{a^2(b^2 - 2bc + c^2) - b^2c^2 - a^3(b+c) + 3a^2bc\}$
$= (b-c)(a^2b^2 - 2a^2bc + a^2c^2 - b^2c^2 - a^3b - a^3c + 3a^2bc)$
$= (b-c)(a^2b^2 + a^2c^2 - b^2c^2 - a^3b - a^3c + a^2bc)$
$= (b-c)\{-a^2b(a-b) + c^2(a^2 - b^2) - a^2c(a-b)\}$
$= (b-c)\{(a-b)(-a^2b + c^2a + bc^2 - a^2c)\}$
$= (b-c)(a-b)\{b(c^2 - a^2) + ac(c-a)\}$
$= (b-c)(a-b)\{b(c+a)(c-a) + ac(c-a)\}$
$= (a-b)(b-c)(c-a)(bc + ab + ac)$
$= (a-b)(b-c)(c-a)(ab + bc + ca)$
$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক: $(a-b)(b-c)(c-a)(ab + bc + ca)$ **(Ans.)**

দ্বিতীয় পদ্ধতি

$$a^2(b-c)^3+b^2(c-a)^3+c^2(a-b)^3$$
$$=a^2(b^3-3b^2c+3bc^2-c^3)+b^2(c^3-3c^2a+3ca^2-a^3)+c^2(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3)$$
$$=a^2b^3-3a^2b^2c+3a^2bc^2-c^3a^2+b^2c^3-3b^2c^2a+3b^2ca^2-a^3b^2+c^2a^3-3a^2bc^2+3ab^2c^2-b^3c^2$$
$$=a^2b^3-c^3a^2+b^2c^3-a^3b^2+c^2a^3-b^3c^2$$
$$=a^2b^3-c^3a^2-a^3b^2+c^2a^3-b^3c^2+b^2c^3$$
$$=a^2(b^3-c^3)-a^3(b^2-c^2)-b^2c^2(b-c)$$
$$=a^2(b-c)(b^2+bc+c^2)-a^3(b+c)(b-c)-b^2c^2(b-c)$$
$$=(b-c)(a^2b^2+a^2bc+c^2a^2-a^3b-ca^3-b^2c^2)$$
$$=(b-c)(a^2bc-a^3b-b^2c^2+a^2b^2+c^2a^2-ca^3)$$
$$=(b-c)\{a^2b(c-a)-b^2(c^2-a^2)+ca^2(c-a)\}$$
$$=(b-c)\{a^2b(c-a)-b^2(c+a)(c-a)+ca^2(c-a)\}$$
$$=(b-c)(c-a)(a^2b-b^2c-ab^2+ca^2)$$
$$=(b-c)(c-a)(a^2b-ab^2+ca^2-b^2c)$$
$$=(b-c)(c-a)\{ab(a-b)+c(a+b)(a-b)\}$$
$$=(b-c)(c-a)(a-b)(ab+bc+ca)\ \textbf{(Ans.)}$$

৭

$$x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$$
$$=x^4(y^2-z^2)+y^4z^2-y^4x^2+z^4x^2-z^4y^2$$
$$=x^4(y^2-z^2)+y^4z^2-z^4y^2-y^4x^2+z^4x^2$$
$$=x^4(y^2-z^2)+y^2z^2(y^2-z^2)-x^2(y^4-z^4)$$
$$=x^4(y^2-z^2)+y^2z^2(y^2-z^2)-x^2(y^2-z^2)(y^2+z^2)$$
$$=(y^2-z^2)\{x^4+y^2z^2-x^2(y^2+z^2)\}$$
$$=(y^2-z^2)(x^4+y^2z^2-x^2y^2-x^2z^2)$$
$$=(y^2-z^2)(y^2z^2-x^2y^2-x^2z^2+x^4)$$
$$=(y^2-z^2)\{y^2(z^2-x^2)-x^2(z^2-x^2)\}$$
$$=(y^2-z^2)(z^2-x^2)(y^2-x^2)$$
$$=-(x^2-y^2)(y^2-z^2)(z^2-x^2)$$
$$=-(x+y)(x-y)(y+z)(y-z)(z+x)(z-x)$$
$$=-(x-y)(y-z)(z-x)(x+y)(y+z)(z+x)$$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক: $-(x-y)(y-z)(z-x)(x+y)(y+z)(z+x)$ **(Ans.)**

দ্বিতীয় পদ্ধতি

$x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$

প্রদত্ত রাশিকে $P(x)$ এর বহুপদী ধরে x এর পরিবর্তে y বসিয়ে পাই,

$$P(y)=y^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-y^2)+z^4(y^2-y^2)$$
$$=y^4(y^2-z^2)-y^4(y^2-z^2)+0$$
$$=0$$

সুতরাং উৎপাদক উপপাদ্য অনুযায়ী $(x-y)$ প্রদত্ত রাশির উৎপাদক হবে। রাশিটি চক্র-ক্রমিক হওয়ায় $(y-z)$ এবং $(z-x)$ উভয়ে প্রদত্ত রাশির উৎপাদক হবে। প্রদত্ত রাশির ছয় মাত্রায় সমমাত্রিক, সুতরাং অন্য উৎপাদকগুলো চক্র-ক্রমিক এবং এক মাত্রার সমমাত্রিক হবে। অর্থাৎ $k(x+y)$, $(y+z)$ এবং $(z+x)$

অর্থাৎ $x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$

$$=(x-y)(y-z)(z-x)\,k(x+y)(y+z)(z+x)\ \ldots\ldots\ (i)$$

এখানে, k ধ্রুবক, এবং (i) নং x, y, z এর সকল মানের জন্য সত্য।

(i) নং এ $x=0, y=1, z=2$ বসিয়ে পাই,

$$1^4.2^2+2^4\{0-(1)^2\}=(-1)(1-2)(2-0).\,k(0+1)(1+2)(2+0)$$

বা, $-12=12k$

$\therefore k=-1$

$\therefore x^4(y^2-z^2)+y^4(z^2-x^2)+z^4(x^2-y^2)$

$=-(x-y)(y-z)(z-x)(x+y)(y+z)(z+x)$ **(Ans.)**

৮

$$a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)$$
$$=a^3(b-c)+b^3c-ab^3+ac^3-bc^3$$
$$=a^3(b-c)+b^3c-bc^3-ab^3+ac^3$$
$$=a^3(b-c)+bc(b^2-c^2)-a(b^3-c^3)$$
$$=a^3(b-c)+bc(b+c)(b-c)-a(b-c)(b^2+bc+c^2)$$
$$=(b-c)\{a^3+bc(b+c)-a(b^2+bc+c^2)\}$$
$$=(b-c)(a^3+b^2c+bc^2-ab^2-abc-ac^2)$$
$$=(b-c)(a^3-ab^2-ac^2+bc^2-abc+b^2c)$$
$$=(b-c)\{a(a^2-b^2)-c^2(a-b)-bc(a-b)\}$$
$$=(b-c)(a-b)\{a(a+b)-c^2-bc\}$$
$$=(b-c)(a-b)\{a^2+ab-c^2-bc\}$$
$$=(b-c)(a-b)\{-b(c-a)-(c^2-a^2)\}$$
$$=(b-c)(a-b)(c-a)(-b-c-a)$$
$$=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

$\therefore$ নির্ণেয় উৎপাদক: $-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$ **(Ans.)**

> **জেনে রাখা ভালো:** রাশিটিকে কোন একটি চলকের বহুপদী ধরে উৎপাদক উপপাদ্যের সাহায্যে এক বা একাধিক উৎপাদক নির্ণয় করা হয় এবং রাশিটির চক্র-ক্রমিক ও সমমাত্রিক বৈশিষ্ট্য বিবেচনা করে অপরাপর উৎপাদক নির্ণয় করা হয়।
>
> যদি a, b, c চলকের কোন চক্র-ক্রমিক বহুপদীর
>
> (i) $(a-b)$ একটি উৎপাদক হলে $(b-c)$ এবং $(c-a)$ রাশিটির উৎপাদক হবে।
>
> (ii) যদি বহুপদী চার মাত্রার সমমাত্রিক রাশি হয় তবে অপর উৎপাদকটি হবে $k(a+b+c)$
>
> (iii) যদি বহুপদী পাঁচ মাত্রার সমমাত্রিক রাশি হয় তবে অপর উৎপাদক হবে $\{k_1(a^2+b^2+c^2)+k_2(ab+bc+ca)\}$
>
> (iv) যদি বহুপদী ছয় মাত্রার সমমাত্রিক রাশি হয় তবে অপর উৎপাদকগুলো হবে $(a+b)(b+c)(c+a)$
>
> **দৃষ্টি আকর্ষণ:**
>
> (i) $(b+c)(c+a)(a+b)+abc$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(a+b+c)$ হলে অপর উৎপাদক $\{k_1(a^2+b^2+c^2)+k_2(ab+bc+ca)\}$
>
> (ii) $a^3+b^3+c^3-3abc$ বহুপদীর একটি উৎপাদক $(a+b+c)$ হলে অপর উৎপাদক $\{k_1(a^2+b^2+c^2)+k_2(ab+bc+ca)\}$ হবে।

খ) যদি $\dfrac{x^2-yz}{a}=\dfrac{y^2-zx}{b}=\dfrac{z^2-xy}{c}\neq 0$ হয়, তবে দেখাও যে, $(a+b+c)(x+y+z)=ax+by+cz$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\dfrac{x^2-yz}{a}=\dfrac{y^2-zx}{b}=\dfrac{z^2-xy}{c}\neq 0$

ধরি, $\dfrac{x^2-yz}{a}=\dfrac{y^2-zx}{b}=\dfrac{z^2-xy}{c}=k$

$\therefore \dfrac{x^2-yz}{a}=k$

বা, $x^2-yz=ak$

বা, $x^3-xyz=axk\ \ldots\ldots\ldots\ (i)$

আবার, $\dfrac{y^2-zx}{b}=k$

বা, $y^2-zx=bk$

বা, $y^3-xyz=byk\ \ldots\ldots\ldots\ (ii)$

এবং, $\dfrac{z^2-xy}{c}=k$

বা, $z^2-xy=ck$

বা, $z^3-xyz=czk\ \ldots\ldots\ldots\ (iii)$

(i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,
$x^3 - xyz + y^3 - xyz + z^3 - xyz = axk + byk + czk$
বা, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = k(ax + by + cz)$
বা, $(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) = k(ax + by + cz)$
বা, $(x+y+z)\{(x^2-yz)+(y^2-zx)+(z^2-xy)\} = k(ax+by+cz)$
বা, $(x + y + z)(ak + bk + ck) = k(ax + by + cz)$
[যেহেতু, $x^2 - yz = ak, y^2 - zx = bk, z^2 - xy = ck$]
বা, $(x + y + z)k(a + b + c) = k(ax + by + cz)$
বা, $(x + y + z)(a + b + c) = (ax + by + cz)$
[উভয়পক্ষকে k দ্বারা ভাগ করে]
$\therefore (a + b + c)(x + y + z) = (ax + by + cz)$ **(দেখানো হলো)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

ধরি, $\dfrac{x^2 - yz}{a} = \dfrac{y^2 - zx}{b} = \dfrac{z^2 - xy}{c} = k$

$\therefore \quad a = \dfrac{1}{k}(x^2 - yz)$ ... ... (i)

$b = \dfrac{1}{k}(y^2 - zx)$ ... ... (ii)

এবং $c = \dfrac{1}{k}(z^2 - xy)$ ... ... (iii)

বামপক্ষ $= (a + b + c)(x + y + z)$
$= \{\dfrac{1}{k}(x^2 - yz) + \dfrac{1}{k}(y^2 - zx) + \dfrac{1}{k}(z^2 - xy)\}(x + y + z)$
$= \dfrac{1}{k}(x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$
$= \dfrac{1}{k}(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$

ডানপক্ষ $= ax + by + cz$
$= \dfrac{1}{k}(x^2 - yz)x + \dfrac{1}{k}(y^2 - zx)y + \dfrac{1}{k}(z^2 - xy)z$
$= \dfrac{1}{k}(x^3 - xyz + y^3 - xyz + z^3 - xyz)$
$= \dfrac{1}{k}(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ
অর্থাৎ $(a + b + c)(x + y + z) = ax + by + cz$ **(দেখানো হলো)**

গ) যদি $(a + b + c)(ab + bc + ca) = abc$ হয়, তবে দেখাও যে, $(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3$।

সমাধান: দেওয়া আছে, $(a + b + c)(ab + bc + ca) = abc$

ডানপক্ষ $= a^3 + b^3 + c^3$
$= a^3 + b^3 + c^3 - 3abc + 3abc$
$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca) + 3(a + b + c)(ab + bc + ca)$
[যেহেতু $(a + b + c)(ab + bc + ca) = abc$]
$= (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca+3ab+3bc+3ca)$
$= (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca)$
$= (a + b + c)(a + b + c)^2$
$= (a + b + c)^3$
= বামপক্ষ

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

$\therefore (a + b + c)^3 = (a^3 + b^3 + c^3)$ **(দেখানো হলো)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

দেওয়া আছে, $(a + b + c)(ab + bc + ca) = abc$
বা, $a^2b + abc + ca^2 + ab^2 + b^2c + abc + abc + bc^2 + c^2a = abc$
বা, $a^2b + ab^2 + abc + b^2c + ca^2 + abc + c^2a + bc^2 = abc - abc$
বা, $ab(a + b) + bc(a + b) + ca(a + b) + c^2(a + b) = 0$
বা, $(a + b)(ab + bc + ca + c^2) = 0$
বা, $(a + b)\{b(c + a) + c(c + a)\} = 0$
$\therefore (a + b)(b + c)(c + a) = 0$
বামপক্ষ $= (a + b + c)^3$
$= \{a + (b + c)\}^3$
$= a^3 + 3a^2(b + c) + 3a(b + c)^2 + (b + c)^3$
$= a^3 + 3a^2(b + c) + 3a(b + c)^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3$
$= a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2(b + c) + 3a(b + c)^2 + 3bc(b + c)$
$= a^3 + b^3 + c^3 + 3(b + c)\{a^2 + a(b + c) + bc\}$
$= a^3 + b^3 + c^3 + 3(b + c)(a^2 + ab + ca + bc)$
$= a^3 + b^3 + c^3 + 3(b + c)\{a(a + b) + c(a + b)\}$
$= a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b)(b + c)(c + a)$
$= a^3 + b^3 + c^3 + 3 \times 0$ [$\because (a + b)(b + c)(c + a) = 0$]
$= a^3 + b^3 + c^3$
= ডানপক্ষ
সুতরাং, $(a + b + c)^3 = (a^3 + b^3 + c^3)$ **(দেখানো হলো)**

কাজ *পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-৫৫*

সরল কর:

ক) $\dfrac{b + c}{(a - b)(a - c)} + \dfrac{c + a}{(b - c)(b - a)} + \dfrac{a + b}{(c - a)(c - b)}$

সমাধান: $\dfrac{b + c}{(a - b)(a - c)} + \dfrac{c + a}{(b - c)(b - a)} + \dfrac{a + b}{(c - a)(c - b)}$
$= \dfrac{b + c}{-(a - b)(c - a)} + \dfrac{c + a}{-(b - c)(a - b)} + \dfrac{a + b}{-(c - a)(b - c)}$
$= \dfrac{(b + c)(b - c) + (c + a)(c - a) + (a + b)(a - b)}{-(a - b)(b - c)(c - a)}$
$= \dfrac{b^2 - c^2 + c^2 - a^2 + a^2 - b^2}{-(a - b)(b - c)(c - a)}$
$= \dfrac{0}{-(a - b)(b - c)(c - a)}$
$= 0$ **(Ans.)**

খ) $\dfrac{a^3-1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3-1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3-1}{(c-a)(c-b)}$

সমাধান: $\dfrac{a^3-1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3-1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3-1}{(c-a)(c-b)}$

$=\dfrac{a^3-1}{-(a-b)(c-a)}+\dfrac{b^3-1}{-(b-c)(a-b)}+\dfrac{c^3-1}{-(c-a)(b-c)}$

$=\dfrac{(a^3-1)(b-c)+(b^3-1)(c-a)+(c^3-1)(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\dfrac{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)-(b-c)-(c-a)-(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\dfrac{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)-b+c-c+a-a+b}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\dfrac{-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)-0}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

[চক্রক্রমিক সূত্র অনুযায়ী, $a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$]

$=a+b+c$ **(Ans.)**

গ) $\dfrac{bc(a+d)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ca(b+d)}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{ab(c+d)}{(c-a)(c-b)}$

সমাধান:

$\dfrac{bc(a+d)}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{ca(b+d)}{(b-a)(b-c)}+\dfrac{ab(c+d)}{(c-a)(c-b)}$

$=\dfrac{abc+bcd}{-(a-b)(c-a)}+\dfrac{abc+acd}{-(a-b)(b-c)}+\dfrac{abc+abd}{-(c-a)(b-c)}$

$=\dfrac{abc(b-c)+bcd(b-c)+abc(c-a)+acd(c-a)+abc(a-b)+abd(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\dfrac{abc(b-c+c-a+a-b)+d\{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)\}}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\dfrac{abc\times 0+d\{-(a-b)(b-c)(c-a)\}}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

[চক্রক্রমিক সূত্র অনুযায়ী, $bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a)$]

$=\dfrac{-d(a-b)(b-c)(c-a)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=d$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলফল $=d$ **(Ans.)**

ঘ) $\dfrac{a^3+a^2+1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3+b^2+1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3+c^2+1}{(c-a)(c-b)}$

সমাধান:

$\dfrac{a^3+a^2+1}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^3+b^2+1}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^3+c^2+1}{(c-a)(c-b)}$

$=\dfrac{a^3+a^2+1}{-(a-b)(c-a)}+\dfrac{b^3+b^2+1}{-(b-c)(a-b)}+\dfrac{c^3+c^2+1}{-(c-a)(b-c)}$

$=\dfrac{(a^3+a^2+1)(b-c)+(b^3+b^2+1)(c-a)+(c^3+c^2+1)(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

এখানে প্রদত্ত রাশির লব,

$=(a^3+a^2+1)(b-c)+(b^3+b^2+1)(c-a)+(c^3+c^2+1)(a-b)$

$=a^3(b-c)+a^2(b-c)+1(b-c)+b^3(c-a)+b^2(c-a)$
$\quad +1(c-a)+c^3(a-b)+c^2(a-b)+1(a-b)$

$=\{a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)\}+\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)\}$
$\quad +(b-c+c-a+a-b)$

$=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)-(a-b)(b-c)(c-a)+0$

[চক্রক্রমিক সূত্রানুযায়ী]

$=-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c+1)$

অতএব, এখন প্রদত্ত রাশি

$=\dfrac{-(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c+1)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=a+b+c+1$ **(Ans.)**

ঙ) $\dfrac{a^2+bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2+ca}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2+ab}{(c-a)(c-b)}$

সমাধান:

$\dfrac{a^2+bc}{(a-b)(a-c)}+\dfrac{b^2+ca}{(b-c)(b-a)}+\dfrac{c^2+ab}{(c-a)(c-b)}$

$=\dfrac{a^2+bc}{-(a-b)(c-a)}+\dfrac{b^2+ca}{-(b-c)(a-b)}+\dfrac{c^2+ab}{-(c-a)(b-c)}$

$=\dfrac{(a^2+bc)(b-c)+(b^2+ca)(c-a)+(c^2+ab)(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\dfrac{a^2(b-c)+bc(b-c)+b^2(c-a)+ca(c-a)+c^2(a-b)+ab(a-b)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\dfrac{\{a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)+\{bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)\}}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

[চক্রক্রমিক সূত্র অনুযায়ী
$a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a)$
$bc(b-c)+ca(c-a)+ab(a-b)=-(a-b)(b-c)(c-a)$]

এখন প্রদত্ত রাশি,

$=\dfrac{-(a-b)(b-c)(c-a)-(a-b)(b-c)(c-a)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}$

$=\dfrac{-2(a-b)(b-c)(c-a)}{-(a-b)(b-c)(c-a)}=2$

$\therefore$ নির্ণেয় সরলফল $=2$ **(Ans.)**

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-৬০

আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর:

ক) $\dfrac{x^2+x+1}{x^3+x^2-6x}$

সমাধান: এখানে, $\dfrac{x^2+x+1}{x^3+x^2-6x}$

$$= \frac{x^2+x+1}{x(x^2+x-6)}$$
$$= \frac{x^2+x+1}{x(x^2+3x-2x-6)}$$
$$= \frac{x^2+x+1}{x\{x(x+3)-2(x+3)\}} = \frac{x^2+x+1}{x(x+3)(x-2)}$$

মনে করি, $\dfrac{x^2+x+1}{x(x+3)(x-2)} \equiv \dfrac{A}{x} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{x+3}$ ... ... (i)

(i) নং এর উভয় পক্ষকে $x(x-2)(x+3)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2+x+1 \equiv A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2)$ ... (ii)

যা x এর সকল মানের জন্য সত্য।

(ii) নং এর উভয় পক্ষে $x = 2$ বসিয়ে পাই,

$2^2+2+1 = A(2-2)(2+3) + B.2(2+3) + C.2(2-2)$

বা, $4+2+1 = A(0\times5) + B(2\times5) + C(2\times0)$

বা, $7 = 10B$

$\therefore B = \dfrac{7}{10}$

আবার, (ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = 0$ বসিয়ে পাই,

$0^2+0+1 = A(0-2)(0+3) + B.0(0+3) + C.0(0-2)$

বা, $1 = A(-2\times3) + B.0 + C.0$

বা, $-6A = 1$

$\therefore A = -\dfrac{1}{6}$

আবার, (ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = -3$ বসিয়ে পাই,

$(-3)^2+(-3)+1 = A(-3-2)(-3+3) + B(-3)(-3+3) + C(-3)(-3-2)$

বা, $9-3+1 = A(-5\times0) + B(-3\times0) + C\{(-3)\times(-5)\}$

বা, $7 = 0+0+15C$

$\therefore C = \dfrac{7}{15}$

এখন, A, B এবং C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2+x+1}{x(x+3)(x-2)} = \frac{-\frac{1}{6}}{x} + \frac{\frac{7}{10}}{x-2} + \frac{\frac{7}{15}}{x+3}$$
$$= -\frac{1}{6x} + \frac{7}{10(x-2)} + \frac{7}{15(x+3)},$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

খ) $\dfrac{x^2}{x^4+x^2-2}$

সমাধান: এখানে, $\dfrac{x^2}{x^4+x^2-2}$

$$= \frac{x^2}{x^4+2x^2-x^2-2}$$
$$= \frac{x^2}{x^2(x^2+2)-1(x^2+2)}$$
$$= \frac{x^2}{(x^2+2)(x^2-1)}$$
$$= \frac{x^2}{(x+1)(x-1)(x^2+2)}$$

মনে করি, $\dfrac{x^2}{(x+1)(x-1)(x^2+2)} \equiv \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x+1} + \dfrac{Cx+D}{x^2+2}$ ... (i)

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $(x-1)(x+1)(x^2+2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 \equiv A(x+1)(x^2+2) + B(x-1)(x^2+2) + (Cx+D)(x-1)(x+1)$ ... (ii)

(ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = 1$ বসিয়ে পাই,

$1^2 = A(1+1)(1^2+2) + B(1-1)(1^2+2) + (C.1+D)(1-1)(1+1)$

বা, $1 = A(2\times3) + B(0\times3) + (C+D)(0\times2)$

বা, $1 = 6A+0+0$

$\therefore A = \dfrac{1}{6}$

আবার, (ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$(-1)^2 = A(-1+1)\{(-1)^2+2\} + B(-1-1)\{(-1)^2+2\} + \{C.(-1)+D\}(-1-1)(-1+1)$

বা, $1 = A(0\times3) + B(-2\times3) + (D-C)\{0\times(-2)\}$

বা, $1 = -6B+0+0$

বা, $B = -\dfrac{1}{6}$

আবার, (ii) নং এর x^3 ও x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A+B+C = 0$... ... (iii) এবং $A-B+D = 1$ ... ... (iv)

(iii) নং এ $A = \dfrac{1}{6}$ এবং $B = -\dfrac{1}{6}$ বসিয়ে পাই,

$\dfrac{1}{6} + \left(-\dfrac{1}{6}\right) + C = 0$

$\therefore C = 0$

(iv) নং এ $A = \dfrac{1}{6}$ এবং $B = -\dfrac{1}{6}$ বসিয়ে পাই,

$\dfrac{1}{6} - \left(-\dfrac{1}{6}\right) + D = 1$

বা, $\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} + D = 1$

বা, $D = 1 - \dfrac{2}{6}$

বা, $D = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$

এখন, A, B, C এবং D এর মান (ii) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2}{(x+1)(x-1)(x^2+2)} = \frac{\frac{1}{6}}{x-1} + \frac{-\frac{1}{6}}{x+1} + \frac{0.x+\frac{2}{3}}{x^2+2}$$
$$= \frac{1}{6(x-1)} - \frac{1}{6(x+1)} + \frac{2}{3(x^2+2)},$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

গ) $\dfrac{x^3}{x^4+3x^2+2}$

সমাধান: এখানে, $\dfrac{x^3}{x^4+3x^2+2}$

$$= \frac{x^3}{x^4+2x^2+x^2+2}$$
$$= \frac{x^3}{x^2(x^2+2)+1(x^2+2)}$$
$$= \frac{x^3}{(x^2+2)(x^2+1)}$$

মনে করি, $\dfrac{x^3}{(x^2+2)(x^2+1)} \equiv \dfrac{Ax+B}{x^2+2} + \dfrac{Cx+D}{x^2+1}$ ... ... (i)

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $(x^2+2)(x^2+1)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^3 \equiv (Ax+B)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2+2)$

বা, $x^3 \equiv Ax^3+Ax+Bx^2+B+Cx^3+2Cx+Dx^2+2D$

বা, $x^3 \equiv (A+C)x^3+(B+D)x^2+(A+2C)x+(B+2D)$ ... (ii)

(ii) নং এর x^3, x^2, x এর সহগ এবং ধ্রুবপদ সমীকৃত করে পাই,

$A+C=1$ ... ... (iii)

$B+D=0$ ... ... (iv)

$A+2C=0$ ... ... (v)

$B+2D=0$ ... ... (vi)

(iv) ও (vi) হতে পাই, $B=0$ এবং $D=0$

(v) হতে পাই, $A+C+C=0$

বা, $1+C=0$ $[\because A+C=1]$

$\therefore C=-1$

$C=-1$ হলে পাই, (iii) হতে পাই,

$A-1=1$

$\therefore A=2$

এখন, A, B, C এবং D এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^3}{(x^2+2)(x^2+1)} = \frac{2.x+0}{x^2+2}+\frac{-1.x+0}{x^2+1}$$
$$= \frac{2x}{x^2+2}-\frac{x}{x^2+1}$$, যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

ঘ) $\dfrac{x^2}{(x-1)^3(x-2)}$

সমাধান: মনে করি,

$$\frac{x^2}{(x-1)^3(x-2)} \equiv \frac{A}{x-1}+\frac{B}{(x-1)^2}+\frac{C}{(x-1)^3}+\frac{D}{x-2} \text{ ... (i)}$$

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $(x-1)^3(x-2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$x^2 \equiv A(x-1)^2(x-2)+B(x-1)(x-2)+C(x-2)+D(x-1)^3$ ... (ii)

বা, $x^2 \equiv A(x^2-2x+1)(x-2)+B(x^2-2x-x+2)+C(x-2)+D(x^3-3x^2+3x-1)$

বা, $x^2 \equiv A(x^3-2x^2-2x^2+4x+x-2)+B(x^2-3x+2)+C(x-2)+D(x^3-3x^2+3x-1)$

বা, $x^2 \equiv A(x^3-4x^2+5x-2)+B(x^2-3x+2)+C(x-2)+D(x^3-3x^2+3x-1)$ ... ... (iii)

(ii) নং এর উভয়পক্ষে $x=1$ বসিয়ে পাই,

$1^2 = A(1-1)^2(1-2)+B(1-1)(1-2)+C(1-2)+D(1-1)^3$

বা, $1 = A.0+B.0+C(-1)+D.0$

বা, $1=-C$

$\therefore C=-1$

আবার, (ii) নং এর উভয়পক্ষে $x=2$ বসিয়ে পাই,

$2^2 = A(2-1)^2(2-2)+B(2-1)(2-2)+C(2-2)+D(2-1)^3$

বা, $4 = A.0+B.0+C.0+D.1^3$

$\therefore D=4$

আবার, (iii) নং হতে x^3 ও x^2 এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A+D=0$ ... ... (iv)

$-4A+B-3D=1$ ... ... (v)

(iv) হতে পাই,

$A=-D$

$\therefore A=-4$ $[\because D=4]$

A এবং D এর মান (v) এ বসিয়ে পাই,

$-4.(-4)+B-3.4=1$

বা, $B=1+12-16$

$\therefore B=-3$

এখন, A, B, C এবং D এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{x^2}{(x-1)^3(x-2)} = \frac{-4}{x-1}+\frac{-3}{(x-1)^2}+\frac{-1}{(x-1)^3}+\frac{4}{x-2} = \frac{4}{x-2}-\frac{4}{x-1}-\frac{3}{(x-1)^2}-\frac{1}{(x-1)^3}$$, যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

ঙ) $\dfrac{1}{1-x^3}$

সমাধান: এখানে, $\dfrac{1}{1-x^3} = \dfrac{1}{(1-x)(1+x+x^2)}$

মনে করি, $\dfrac{1}{(1-x)(1+x+x^2)} \equiv \dfrac{A}{1-x}+\dfrac{Bx+C}{1+x+x^2}$ ... ... (i)

(i) নং এর উভয় পক্ষকে $(1-x)(1+x+x^2)$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$1 \equiv A(1+x+x^2)+(Bx+C)(1-x)$ ... ... (ii)

(ii) নং এর উভয়পক্ষে $x=1$ বসিয়ে পাই,

$1 = A(1+1+1^2)+(B.1+C)(1-1)$

বা, $1 = A.3+(B+C).0$

বা, $3A=1$

$\therefore A=\dfrac{1}{3}$

আবার, (ii) নং এর x সহগ এবং ধ্রুবপদ সমীকৃত করে পাই,

$A+B-C=0$ ... ... (iii)

$A+C=1$ ... ... (iv)

$A=\dfrac{1}{3}$ হলে (iv) হতে পাই,

$\dfrac{1}{3}+C=1$

বা, $C=1-\dfrac{1}{3}$

$\therefore C=\dfrac{2}{3}$

A এবং C এর মান (iii) নং এ বসিয়ে পাই,

$\frac{1}{3} + B - \frac{2}{3} = 0$

বা, $B = \frac{2}{3} - \frac{1}{3}$

বা, $B = \frac{2-1}{3}$

$\therefore B = \frac{1}{3}$

এখন, A, B এবং C এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{1}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{\frac{1}{3}}{1-x} + \frac{\frac{1}{3}.x + \frac{2}{3}}{1+x+x^2}$$
$$= \frac{\frac{1}{3}}{1-x} + \frac{\frac{1}{3}(x+2)}{1+x+x^2}$$
$$= \frac{1}{3}\left[\frac{1}{1-x} + \frac{x+2}{1+x+x^2}\right]$$

যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

চ) $\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}$

সমাধান: মনে করি, $\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2} \equiv \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$ ... (i)

(i) নং এর উভয়পক্ষকে $(x+1)(x^2+1)^2$ দ্বারা গুণ করে পাই,

$2x \equiv A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x+1)(x^2+1) + (Dx+E)(x+1)$ ... (ii)

বা, $2x \equiv A(x^4 + 2x^2 + 1) + (Bx + C)(x^3 + x^2 + x + 1) + Dx^2 + Dx + Ex + E$

বা, $2x \equiv Ax^4 + 2Ax^2 + A + Bx^4 + Bx^3 + Bx^2 + Bx + Cx^3 + Cx^2 + Cx + C + Dx^2 + Dx + Ex + E$

বা, $2x \equiv (A + B)x^4 + (B + C)x^3 + (2A + B + C + D)x^2 + (B + C + D + E)x + (A + C + E)$ ... ... (iii)

(ii) নং এর উভয়পক্ষে $x = -1$ বসিয়ে পাই,

$-2 = A(1 + 1)^2 + (-B + C).0.2 + (E - D).0$

বা, $-2 = 4A$

বা, $A = \frac{-2}{4}$

$\therefore A = -\frac{1}{2}$

আবার, (iii) নং এর x^4, x^3, x^2 ও x এর সহগ সমীকৃত করে পাই,

$A + B = 0$ ... ... (iv)

$B + C = 0$ ... ... (v)

$2A + B + C + D = 0$ ... ... (vi)

$B + C + D + E = 2$ ... ... (vii)

(iv) হতে পাই,

$B = -A$

$\therefore B = -\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ $\left[\because A = -\frac{1}{2}\right]$

$B = \frac{1}{2}$ হলে (v) হতে পাই,

$\frac{1}{2} + C = 0$

$\therefore C = -\frac{1}{2}$

A, B এবং C এর মান (vi) নং এ বসিয়ে পাই,

$2.\left(-\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) + D = 0$

বা, $-1 + D = 0$

$\therefore D = 1$

আবার, B, C এবং D এর মানন (vii) নং এর বসিয়ে পাই,

$\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right) + 1 + E = 2$

বা, $1 + E = 2$

বা, $E = 2 - 1$

$\therefore E = 1$

এখন, A, B, C, D এবং E এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই,

$$\frac{2x}{(x+1)(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{\frac{-1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}}{x^2+1} + \frac{1.x+1}{(x^2+1)^2}$$
$$= \frac{-1}{2(x+1)} + \frac{x-1}{2(x^2+1)} + \frac{x+1}{(x^2+1)^2}$$
$$= -\frac{1}{2(x+1)} + \frac{x-1}{2(x^2+1)} + \frac{x+1}{(x^2+1)^2}$$, যা নির্ণেয় আংশিক ভগ্নাংশ।

◆◆ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-৬০(চ) নং অনুশীলনমূলক কাজের প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

f(a) $= a^3 + 5a^2 + 6a + 8$ এবং $g(a) = \frac{2a}{(a+1)(a^2+1)^2}$ দুইটি বীজগণিতীয় রাশি। [ঢা.বো-'১৬] ক. $f(-3)$ এর মান কত? খ. $f(a)$ কে $x - p$ এবং $x - q$ দ্বারা ভাগ করলে যদি একই ভাগশেষ থাকে যেখানে $p \neq q$, তবে দেখাও যে, $p^2 + q^2 + pq + 5p + 5q + 6 = 0$ গ. $g(a)$ কে আংশিক ভগ্নাংশে প্রকাশ কর।	নিজে নিজে চেষ্টা কর। (ক) 8