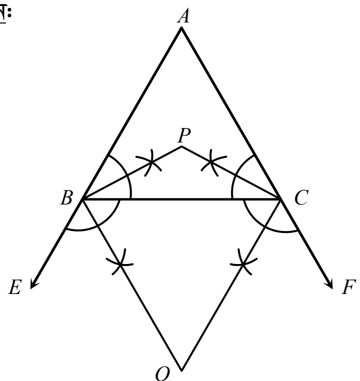
অনুশীলনী - ৮.৩

অনুশীলনীর সমাধান

১ **ΔABC এ $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় P বিন্দুতে এবং বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় Q বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ কর যে, B, P, C, Q বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।**

সমাধানঃ



বিশেষ নির্বচনঃ ΔABC এ $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় P বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। AB কে E পর্যন্ত এবং AC কে F পর্যন্ত বর্ধিত করায় যথাক্রমে বহিঃস্থ $\angle CBE$ এবং বহিঃস্থ $\angle BCF$ উৎপন্ন হয়। $\angle B$ ও $\angle C$ এর বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় Q বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, B, P, C, Q বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

প্রমাণঃ

ধাপ ১. $\therefore \angle PBC = \frac{1}{2}\angle ABC$ [$\because PB, \angle ABC$ এর সমদ্বিখণ্ডক]

$\therefore \angle QBC = \frac{1}{2}\angle CBE$ [$\because QB, \angle CBE$ এর সমদ্বিখণ্ডক]

ধাপ ২. এখন $\angle PBC + \angle QBC = \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle CBE)$

বা, $\angle PBQ = \frac{1}{2}$ (1 সরল কোণ) [$\because \angle ABC$ ও $\angle CBE$ একই সরলরেখায় অবস্থিত সন্নিহিত কোণ]

বা, $\angle PBQ = \frac{1}{2}$ (2 সমকোণ)

$\therefore \angle PBQ = 1$ সমকোণ

ধাপ ৩. অনুরূপে, $\angle PCB + \angle BCQ = \angle PCQ =$ এক সমকোণ

$\therefore BPCQ$ চতুর্ভুজের $\angle PBQ + \angle PCQ =$ দুই সমকোণ [ধাপ-২ ও ধাপ-৩ থেকে]

এবং $\angle PBQ$ ও $\angle PCQ$ একই চতুর্ভুজের দুই বিপরীত কোণ

$\therefore BPCQ$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ।

[$\because$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণ]

$\therefore B, P, C, Q$ বিন্দু চারটি সমবৃত্ত। **(প্রমাণিত)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি, ΔABC এর $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় P বিন্দুতে এবং বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় Q বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ করতে হবে যে, B, P, C, Q বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

প্রমাণঃ

ধাপ ১. $BPCQ$ চতুর্ভুজে,

$\angle PBQ + \angle PCQ$

$= \angle PBC + \angle CBQ + \angle PCB + \angle BCQ$

$= \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle CBE + \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle BCF$

$= \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}(\angle A + \angle C) + \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}(\angle A + \angle B)$

[$\because$ ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ, অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]

$= \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle C + \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B$

$= \angle A + \angle B + \angle C$

ধাপ ২. কিন্তু ΔABC এ $\angle A + \angle B + \angle C =$ দুই সমকোণ

[$\because$ ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ]

$\therefore \angle PBQ + \angle PCQ =$ দুই সমকোণ

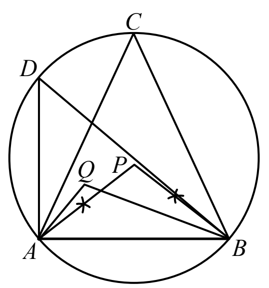
$\angle PBQ$ ও $\angle PCQ$ কোণদ্বয় একই চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত কোণ

আমরা জানি, বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণ।

$\therefore B, P, C, Q$ বিন্দু চারটি সমবৃত্ত। **(প্রমাণিত)**

২ **$ABCD$ একটি বৃত্ত। $\angle CAB$ এবং $\angle CBA$ এর সমদ্বিখণ্ডক দুইটি P বিন্দুতে এবং $\angle DBA$ ও $\angle DAB$ কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি Q বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ কর যে, A, Q, P, B বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।**

সমাধানঃ



বিশেষ নির্বচনঃ দেওয়া আছে, $ABCD$ একটি বৃত্ত। $\angle CAB$ এবং $\angle CBA$ এর সমদ্বিখণ্ডক দুইটি P বিন্দুতে এবং $\angle DBA$ ও $\angle DAB$ কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি Q বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ করতে হবে যে, A, Q, P, B বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

প্রমাণঃ

ধাপ ১. ΔABC -এ $\angle BAC + \angle ABC + \angle ACB = 180°$

[$\because$ ত্রিভুজের তিনকোণের সমষ্টি $180°$]

ধাপ ২. ΔPAB -এ $\angle APB + \angle PAB + \angle PBA = 180°$

বা, $\angle P + \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B = 180°$

[$\because \angle PAB = \frac{1}{2}\angle A$ এবং $\angle PBA = \frac{1}{2}\angle B$]

বা, $\angle P + \frac{1}{2}\angle A + \frac{1}{2}\angle B + \frac{1}{2}\angle C = 180° + \frac{1}{2}\angle C$

[উভয়পক্ষে $\frac{1}{2}\angle C$ যোগ করে]

বা, $\angle P + \frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C) = 180° + \frac{1}{2}\angle C$

বা, $\angle P + \frac{1}{2} \times 180° = 180° + \frac{1}{2}\angle C$ [ধাপ-১ হতে]

বা, $\angle P + 90° = 180° + \frac{1}{2}\angle C$

বা, $\angle P = 180° - 90° + \frac{1}{2}\angle C = 90° + \frac{1}{2}\angle C$ ... (i)

ধাপ ৩. এরূপে ΔABD নিয়ে প্রমাণ করা যায় যে, $\angle Q = 90° + \frac{1}{2} \angle ADB$

বা, $\angle Q = 90° + \frac{1}{2} \angle C$ ... ... (ii)

[$\because$ একই চাপ AB এর উপর অবস্থিত বলে বহিঃস্থ $\angle C$ = বহিঃস্থ $\angle D$]

$\angle P = \angle Q$ [$\therefore$ সুতরাং (i) ও (ii) হতে]

এখন, AB রেখাংশের প্রান্তবিন্দু A ও B কে দণ্ডায়মান এবং একই পার্শ্বে অবস্থিত P ও Q বিন্দুতে উৎপন্ন $\angle APB = \angle AQB$

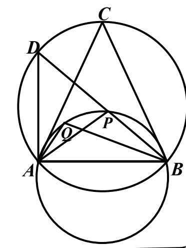
[একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কোণগুলো পরস্পর সমান হলে তারা বৃত্তস্থ]

অর্থাৎ $\angle P = \angle Q$ হওয়ায় A, Q, P, B বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

(প্রমাণিত)

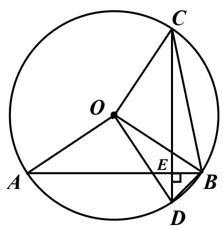
বি.দ্র: (i) আমরা জানি, বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান। এখানে বৃত্তের AB চাপের ওপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle AQB$ = বৃত্তস্থ $\angle APB$

(ii) A, Q, P, B বিন্দু চারটি সমবৃত্ত হলে মূল চিত্রটির নতুন রূপটি হবে।



৩ O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত কোনো বিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ কর যে, $\angle AOD + \angle BOC$ = দুই সমকোণ।

সমাধানঃ



বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি, O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত E বিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে। A, O এবং D, O যোগ করায় $\angle AOD$ উৎপন্ন হয়। আবার, O, C এবং O, B যোগ করায় $\angle BOC$ উৎপন্ন হয়।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOD + \angle BOC$ = দুই সমকোণ।

অঙ্কনঃ B, D যোগ করি।

প্রমাণঃ

ধাপ ১. একই চাপ AD-এর উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle AOD$ এবং বৃত্তস্থ $\angle ABD$

$\angle AOD = 2 \angle ABD$ ... ... (i) [$\because$ বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

আবার, BC চাপের ক্ষেত্র $\angle BOC = 2 \angle BDC$ ... ... (ii)

ধাপ ২. (i) নং + (ii) নং যোগ করে পাই,

$\angle AOD + \angle BOC = 2 \angle ABD + 2\angle BDC$

বা, $\angle AOD + \angle BOC = 2 (\angle ABD + \angle BDC)$

বা, $\angle AOD + \angle BOC = 2 (\angle EBD + \angle EDB)$ ... (iii)

[$\because \angle ABD = \angle EBD$ এবং $\angle BDC = \angle EDB$]

ধাপ ৩. এখন, ΔEBD-এর

$\angle BED = 1$ সমকোণ [$\because AB \perp CD$]

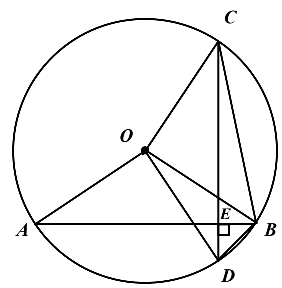
$\therefore \angle EBD + \angle EDB = 1$ সমকোণ ... ... (iv)

ধাপ ৪. $\angle AOD + \angle BOC = 2 \times 1$ সমকোণ

[(iv) নং এর মান (iii) নং-এ বসিয়ে]

$\therefore \angle AOD + \angle BOC$ = দুই সমকোণ। **(প্রমাণিত)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)



বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি, O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত E বিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে। A, O এবং D, O যোগ করায় $\angle AOD$ উৎপন্ন হয়। আবার, O, C এবং O, B যোগ করায় $\angle BOC$ উৎপন্ন হয়। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle AOD + \angle BOC$ = দুই সমকোণ।

প্রমাণঃ

ধাপ ১. ΔEBC-এ $\angle BEC = 90°$ [$\because CD \perp AB$]

$\therefore \angle ECB + \angle EBC = 90°$

[$\because$ সমকোণী ত্রিভুজে সূক্ষ্মকোণদ্বয় পূরক]

ধাপ ২. AC চাপের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle AOC$ এবং বৃত্তস্থ $\angle ABC$

$\therefore \angle AOC = 2\angle ABC$

$= 2\angle EBC$ ... ... (i)

অনুরূপভাবে, BD চাপের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle BOD$ এবং বৃত্তস্থ $\angle DCB$

$\therefore \angle BOD = 2\angle DCB$

$= 2\angle ECB$ ... ... (ii)

ধাপ ৩. (i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$\angle AOC + \angle BOD = 2(\angle EBC + \angle ECB)$

$= 2 \times 90°$ [ধাপ-১ হতে]

$\therefore \angle AOC + \angle BOD = 180°$ ... ... (iii)

ধাপ ৪. O বিন্দুতে উৎপন্ন কোণ

$\angle AOC + \angle AOD + \angle BOD + \angle BOC = 360°$

বা, $\angle AOD + \angle BOC + (\angle AOC + \angle BOD) = 360°$

বা, $\angle AOD + \angle BOC + 180° = 360°$

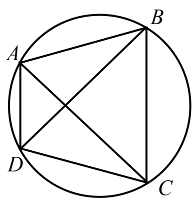
[(iii) নং হতে মান বসিয়ে]

বা, $\angle AOD + \angle BOC = 360° - 180°$

$\therefore \angle AOD + \angle BOC = 180°$ **(প্রমাণিত)**

৪ $ABCD$ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক। AC রেখা যদি $\angle BAD$ এর সমদ্বিখন্ডক হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $BC = CD$.

সমাধানঃ



দেওয়া আছে, $ABCD$ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক। AC রেখা, $\angle BAD$-এর সমদ্বিখণ্ডক। প্রমাণ করতে হবে যে, $BC = CD$।

অঙ্কনঃ B, D যোগ করি।

প্রমাণঃ

ধাপ ১. $ABCD$ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক।

$\therefore A, B, C, D$ বিন্দু চারটি সমবৃত্ত [$\because$ চতুর্ভুজের দুই বিপরীত কোণ সম্পূরক হলে ইহার শীর্ষবিন্দু চারটি সমবৃত্ত]

AC, $\angle BAD$ এর সমদ্বিখণ্ডক [দেওয়া আছে]

$\therefore \angle BAC = \angle DAC$ ……… (i)

ধাপ ২. এখন, একই চাপ CD-এর উপর বৃত্তস্থ $\angle DAC$ এবং বৃত্তস্থ $\angle DBC$

$\therefore \angle DAC = \angle DBC$ … (ii) [$\because$ বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান]

ধাপ ৩. আবার, একই চাপ BC-এর উপর বৃত্তস্থ $\angle BAC$ এবং বৃত্তস্থ $\angle BDC$

$\therefore \angle BAC = \angle BDC$

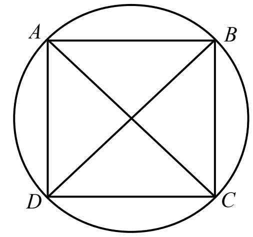
বা, $\angle DAC = \angle BDC$ [(i) নং থেকে]

বা, $\angle DBC = \angle BDC$ [(ii) নং থেকে]

অর্থাৎ ΔBCD-এর, $\angle BDC = \angle DBC$

$\therefore BC = CD$ **(প্রমাণিত)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)



বিশেষ নির্বচনঃ দেওয়া আছে, $ABCD$ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক। AC রেখা, $\angle BAD$-এর সমদ্বিখণ্ডক। প্রমাণ করতে হবে যে, $BC = CD$.

অঙ্কনঃ B, D যোগ করি।

প্রমাণঃ

ধাপ ১. $ABCD$ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক।

$\therefore A, B, C, D$ বিন্দু চারটি সমবৃত্ত [$\because$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের দুই বিপরীত কোণ সম্পূরক হলে ইহার শীর্ষবিন্দু চারটি সমবৃত্ত]

ধাপ ২. AC, $\angle BAD$ এর সমদ্বিখণ্ডক [দেওয়া আছে]

$\therefore \angle BAC = \angle DAC$

অর্থাৎ BC চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ $= CD$ চাপের উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ

[$\because$ সমান সমান বৃত্তস্থ কোণ বৃত্তের সমান চাপ উৎপন্ন করে]

$\therefore$ চাপ $BC =$ চাপ CD

$\therefore BC$ জ্যা $= CD$ জ্যা

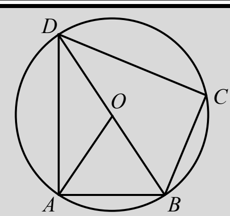
[$\because$ বৃত্তের সমান সমান চাপ সমান সমান জ্যা উৎপন্ন করে]

$\therefore ABCD$ চতুর্ভুজের BC বাহু $= CD$ বাহু

অর্থাৎ $BC = CD$ **(প্রমাণিত)**

লক্ষণীয়ঃ কোনো জ্যা বা দুইটি বিন্দু দ্বারা বৃত্তের খণ্ডিত চাপের ছোট অংশকে **উপচাপ** এবং বড় অংশকে **অধিচাপ** বলা হয়।

৫ O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ 2.5 সে.মি., $AB = 3$ সে.মি. এবং BD, $\angle ADC$ এর সমদ্বিখণ্ডক।

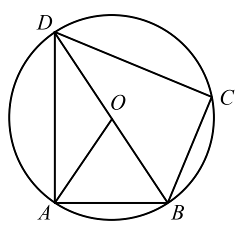


ক. AD দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

খ. প্রমাণ কর যে, $\angle ADC + \angle ABC = 180°$।

গ. প্রমাণ কর যে, $AB = BC$।

সমাধানঃ



ক এখানে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ 2.5 সে.মি.

$AB = 3$ সে.মি. এবং BD, $\angle ADC$ এর সমদ্বিখণ্ডক

চিত্রানুসারে,

বৃত্তের ব্যাস, $BD = 2 \times$ ব্যাসার্ধ

$= (2 \times 2.5)$ সে.মি.

$= 5$ সে.মি.

BD ব্যাস হওয়ায় $\angle BAD$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ

$\therefore \angle BAD = 90°$ অর্থাৎ ΔBAD সমকোণী।

এখন, ΔBAD হতে পাই, $BD^2 = AB^2 + AD^2$

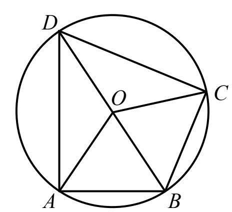
বা, $5^2 = 3^2 + AD^2$

বা, $AD^2 = 25 - 9$

বা, $AD = \sqrt{16} = 4$

$\therefore AD$ এর দৈর্ঘ্য $= 4$ সে.মি.

খ



প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ADC + \angle ABC = 180°$

অঙ্কনঃ O, C যোগ করি।

প্রমাণঃ

ধাপ ১. ABC চাপের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle AOC$ এবং বৃত্তস্থ $\angle ADC$

$\therefore \angle AOC = 2\angle ADC$ [$\because$ বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

ধাপ ২. ADC চাপের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ প্রবৃদ্ধ $\angle AOC$ এবং বৃত্তস্থ $\angle ABC$

$\therefore$ প্রবৃদ্ধ $\angle AOC = 2\angle ABC$ [একই কারণে]

ধাপ ৩. $\angle AOC +$ প্রবৃদ্ধ $\angle AOC = 2\angle ADC + 2\angle ABC$

[ধাপ-১ ও ধাপ-২ হতে]

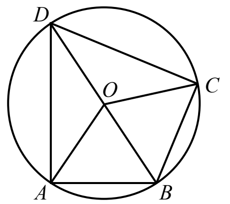
বা, $360° = 2(\angle ADC + \angle ABC)$

[$\because \angle AOC +$ প্রবৃদ্ধ $\angle AOC = 360°$]

বা, $\angle ADC + \angle ABC = \dfrac{360°}{2}$

$\therefore \angle ADC + \angle ABC = 180°$ **(প্রমাণিত)**

গ



প্রমাণ করতে হবে যে, $AB = BC$

প্রমাণঃ

ধাপ ১. AB চাপের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle AOB$ এবং বৃত্তস্থ $\angle ADO$

$\therefore \angle AOB = 2\angle ADO$ [$\because$ বৃত্তের একই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

BC চাপের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ $\angle BOC$ এবং বৃত্তস্থ $\angle CDO$

$\therefore \angle BOC = 2\angle CDO$

ধাপ ২. এখন, $\angle ADO = \angle CDO$ [$\because BD, \angle ADC$ এর সমদ্বিখণ্ডক]

বা, $2\angle ADO = 2\angle CDO$

বা, $\angle AOB = \angle BOC$

ধাপ ৩. ΔOAB ও ΔOAC এর মধ্যে

$OA = OC$ [$\because$ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$OB = OB$ [সাধারণ বাহু]

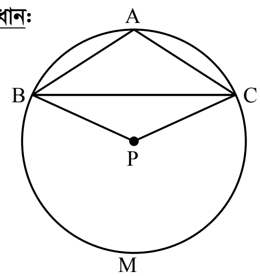
অন্তর্ভুক্ত $\angle AOB =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle BOC$ [$\because BD, \angle ADC$]

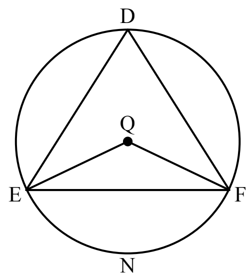
$\therefore \Delta OAB \cong \Delta OAC$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

$\therefore AB = BC$ **(প্রমাণিত)**

৬ সমান সমান ভূমির ওপর অবস্থিত যেকোনো দুইটি ত্রিভুজের শিরঃকোণদ্বয় সম্পূরক হলে, প্রমাণ কর যে, এদের পরিবৃত্তদ্বয় সমান হবে।

সমাধানঃ





মনে করি, ΔABC ও ΔDEF ত্রিভুজদ্বয় $BC = EF$ সমান সমান ভূমির উপর অবস্থিত এবং শিরকোণদ্বয়ে সমষ্টি $180°$ অর্থাৎ $\angle A + \angle D = 180°$। প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজদ্বয়ের পরিবৃত্তদ্বয় সমান।

অঙ্কনঃ P ও Q কেন্দ্রবিশিষ্ট ত্রিভুজদ্বয়ের পরিবৃত্ত যথাক্রমে $ABMC$ ও $DENF$ অঙ্কন করি।

প্রমাণঃ

ধাপ ১. BMC চাপের উপর অবস্থিত প্রবৃদ্ধ $\angle BPC$ এবং বৃত্তস্থ $\angle BAC$

$\therefore$ প্রবৃদ্ধ $\angle BPC = 2\angle BAC$ [$\because$ বৃত্তের একই চাপের দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তস্থ কোণের দ্বিগুণ]

ধাপ ২. ENF চাপের উপর অবস্থিত কেন্দ্রস্থ $\angle BQF$ এবং বৃত্তস্থ $\angle EDF$

$\therefore \angle EQF = 2\angle EDF$

ধাপ ৩. প্রবৃদ্ধ $\angle BPC + \angle EQF = 2(\angle BAC + \angle EDF)$

$= 2(\angle A + \angle D) = 2 \times 180°$

$\therefore$ প্রবৃদ্ধ $\angle BPC + \angle EQF = 360°$ ... ... (i)

আবার, প্রবৃদ্ধ $\angle BPC + \angle BPC = 360°$ ... ... (ii)

[$\because P$ বিন্দুতে উৎপন্ন কোণ $360°$]

(i) নং ও (ii) নং হতে পাই, $\angle BPC = \angle EQF$

BAC চাপের কেন্দ্রস্থ কোণ $= ENF$ চাপের কেন্দ্রস্থ কোণ

$\therefore$ চাপ $BAC =$ চাপ ENF ... ... (iii)

আবার, প্রবৃদ্ধ $\angle EQF + \angle EQF = 360°$ ... ... (iv)

[$\because Q$ বিন্দুতে উৎপন্ন কোণ $360°$]

(i) নং (iv) হতে পাই, প্রবৃদ্ধ $\angle BPC + \angle EQF =$ প্রবৃদ্ধ $\angle EQF + \angle EQF$

$\therefore$ প্রবৃদ্ধ $\angle BPC =$ প্রবৃদ্ধ $\angle EQF$

অর্থাৎ BMC চাপের কেন্দ্রস্থ কোণ $= EDF$ চাপের কেন্দ্রস্থ কোণ

$\therefore$ চাপ $BMC =$ চাপ EDF ... ... (v)

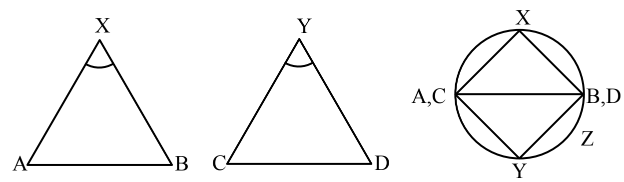
(iii) নং ও (v) নং যোগ করে পাই,

$\therefore$ চাপ $BAC +$ চাপ $BMC =$ চাপ $ENF +$ চাপ EDF

$\therefore \Delta ABC$ এর পরিবৃত্ত $= \Delta DEF$ এর পরিবৃত্ত (প্রমাণিত)

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

সাধারণ নির্বচনঃ সমান সমান ভূমির ওপর অবস্থিত যেকোনো দুইটি ত্রিভুজের শিরঃকোণদ্বয় সম্পূরক হলে, প্রমাণ করতে হবে যে, এদের পরিবৃত্তদ্বয় সমান হবে।



বিশেষ নির্বচনঃ AB = CD সমান ভূমিদ্বয়ের ওপর অবস্থিত ΔAXB ও ΔCYD ত্রিভুজ দুইটির শিরকোণদ্বয় যথাক্রমে ∠X ও ∠Y এবং ∠X + ∠Y = 180°। প্রমাণ করতে হবে যে, এদের পরিবৃত্তদ্বয় সমান।

অঙ্কনঃ ΔAXB এর পরিবৃত্ত AXBZ অঙ্কন করি।

প্রমাণঃ ΔCDY -কে AB বাহুর উপর এমনভাবে স্থাপন করি যেন C বিন্দু A বিন্দুতে D, বিন্দু B বিন্দুতে এবং AB রেখার যে পাশে X বিন্দু আছে তার বিপরীতে Y বিন্দু পড়ে।

ধাপ ১. AXBY চতুর্ভুজে ∠X ও ∠Y পরস্পর বিপরীত কোণ এবং ∠X + ∠Y = 180°

[$\because$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের যেকোনো দুইটি বিপরীত কোণের সমষ্টি 180°]

$\therefore$ A, X, B ও Y সমবৃত্ত

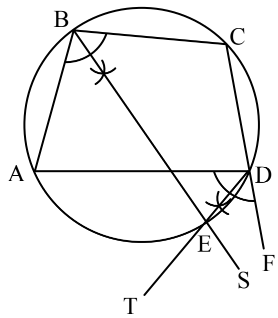
ধাপ ২. তাহলে Y বিন্দুটি ΔAXB এর পরিবৃত্ত দিয়ে যায়।

সেক্ষেত্রে ΔABX এবং ΔCBY একই বৃত্তের উপর অবস্থান করবে।

সুতরাং ΔAXB ও ΔCBY ত্রিভুজদ্বয়ের পরিবৃত্তদ্বয় সমান।

৭ প্রমাণ কর যে, বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের যেকোনো কোণের সমদ্বিখণ্ডক ও তার বিপরীত কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক বৃত্তের ওপর ছেদ করে।

সমাধান:



সাধারণ নির্বচন: প্রমাণ করতে হবে যে, বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের যেকোনো কোণের সমদ্বিখণ্ডক ও তার বিপরীত কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক বৃত্তের ওপর ছেদ করে।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABCD বৃত্তস্থ চতুর্ভুজে $\angle B$ এর সমদ্বিখণ্ডক BS এবং $\angle B$ এর বিপরীত $\angle D$ এর বহির্দ্বিখণ্ডক DT পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, E বিন্দুটি বৃত্তের ওপর অবস্থিত।

প্রমাণ:

ধাপ ১. $\angle ABE = \frac{1}{2}\angle ABC$ [$\because$ BS, $\angle B$ এর এর সমদ্বিখণ্ডক]

ধাপ ২. $\angle ABC + \angle ADC = 180°$

[$\because$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক]

ধাপ ৩. $\angle ADC + \angle ADF = 180°$ [$\because$ D বিন্দুতে উৎপন্ন সরলকোণ]

ধাপ ৪. $\angle ABC + \angle ADC = \angle ADC + \angle ADF$ [ধাপ-২ ও ধাপ-৩ হতে]

$\therefore \angle ABC = \angle ADF$

ধাপ ৫. আবার $\angle ADE = \frac{1}{2}\angle ADF$ [$\because$ DE, $\angle ADF$ এর সমদ্বিখণ্ডক]

$= \frac{1}{2}\angle ABC$

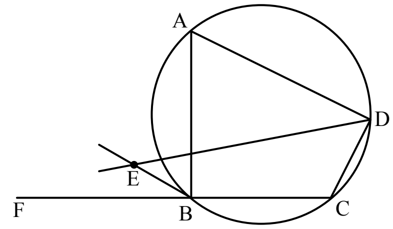
$= \angle ABE$ [ধাপ-১ হতে]

ধাপ ৬. এখন $\angle ADE = \angle ABE$

যেহেতু $\angle ABE = \angle ADE$ উভয়ই একই চাপের উপর অবস্থিত বৃত্তস্থ কোণ এবং এরা পরস্পর সমান

$\therefore$ E বিন্দু অবশ্যই বৃত্তের উপর অবস্থান করবে।

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)



$ABCD$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ। ED, $\angle D$ এর সমদ্বিখণ্ডক, BE, $\angle B$ এর বহির্দ্বিখণ্ডক। মনে করি, ED ও BE, E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, E বিন্দু $ABCD$ বৃত্তের উপর অবস্থিত।

প্রমাণ:

ধাপ ১. $\angle CDE = \frac{1}{2}\angle D$ [অঙ্কনানুসারে]

$\angle B$ এর বহিঃস্থ কোণ $\angle ABF = \angle D$ [$\because$ বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে সে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয় তা বিপরীত অন্তঃস্থ কোণের সমান]

$\therefore \angle ABE = \frac{1}{2}\angle ABF = \frac{1}{2}\angle D$

$\therefore \angle EBC = \angle ABE + \angle B = \frac{1}{2}\angle D + \angle B$

ধাপ ২. $\therefore \angle CDE + \angle EBC = \frac{1}{2}\angle D + \frac{1}{2}\angle D + \angle B$

$= \angle D + \angle B$

= দুই সমকোণ

[$\because$ $ABCD$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ]

এখানে, $\angle CDE$ ও $\angle EBC$ হলো $EBCD$ চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত কোণ এবং এরা সম্পূরক

$\therefore$ $EBCD$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ [$\because$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় সম্পূরক]

$\therefore \angle DEB + \angle BCD$ = দুই সমকোণ

বা, $\angle DEB + \angle C$ = দুই সমকোণ

কিন্তু, $ABCD$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজে $\angle C + \angle A$ = দুই সমকোণ

$\therefore \angle DEB = \angle A$

কিন্তু তারা একই চাপ BCD এর উপর অবস্থিত।

$\therefore$ E এবং A বিন্দু একই বৃত্তের উপর অবস্থিত।

$\therefore$ E বিন্দু $ABCD$ বৃত্তের উপর অবস্থিত।

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

কাজ

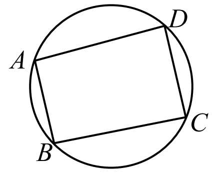
পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৬১

বিভিন্ন আকারের কয়েকটি বৃত্তীয় চতুর্ভুজ আঁক। কয়েকটি বিভিন্ন ব্যাসার্ধের বৃত্ত অঙ্কন করে প্রতিটির উপর চারটি করে বিন্দু নিয়ে চতুর্ভুজগুলো সহজে আঁকা যায়। চতুর্ভুজের কোণগুলো মেপে নিচের সারণিটি পূরণ কর।

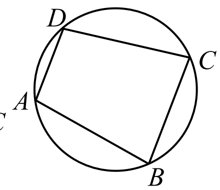
ক্রমিক নং	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	$\angle A + \angle C$	$\angle B + \angle D$
১						
২						
৩						
৪						
৫						

সারণি থেকে কী বোঝা যায়?

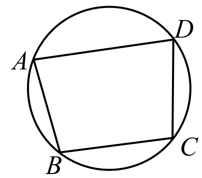
সমাধান: বিভিন্ন আকারের কয়েকটি বৃত্তীয় চতুর্ভুজ আঁকা হলো:



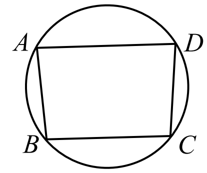
চিত্র : ১



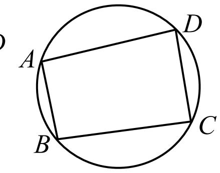
চিত্র : ২



চিত্র : ৩



চিত্র : ৪



চিত্র : ৫

চতুর্ভুজের কোণগুলো মেপে নিচে সারণিটি পূরণ করি:

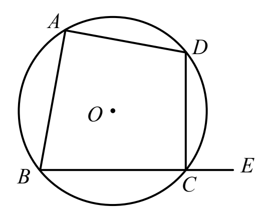
ক্রমিক নং	$\angle A$	$\angle B$	$\angle C$	$\angle D$	$\angle A + \angle C$	$\angle B + \angle D$
১.	$95°$	$90°$	$85°$	$90°$	$180°$	$180°$
২.	$97°$	$85°$	$83°$	$95°$	$180°$	$180°$
৩.	$83°$	$100°$	$97°$	$80°$	$180°$	$180°$
৪.	$88°$	$94°$	$92°$	$86°$	$180°$	$180°$
৫.	$85°$	$95°$	$95°$	$85°$	$180°$	$180°$

সারণি থেকে বোঝা যায় যে, বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের বিপরীত কোণগুলোর সমষ্টি দুই সমকোণের সমান অর্থাৎ $180°$।

পাঠ্যবইয়ের অনুসিদ্ধান্ত ও সমাধান

অনুসিদ্ধান্ত-৬ : বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয় তা বিপরীত অন্তঃস্থ কোণের সমান। [পাঠ্যবই পৃষ্ঠা- ১৬২]

সমাধান: সাধারণ নির্বচন: প্রমাণ করতে হবে, বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয় তা বিপরীত অন্তঃস্থ কোণের সমান।



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, $ABCD$ চতুর্ভুজটি O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে অন্তর্লিখিত। BC বাহুকে E পর্যন্ত বর্ধিত করায় বহিঃস্থ $\angle DCE$ উৎপন্ন হয়েছে। বহিঃস্থ $\angle DCE$-এর বিপরীত অন্তঃস্থ $\angle BAD$। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle DCE = \angle BAD$।

প্রমাণ:

ধাপ ১. $\angle BAD + \angle BCD =$ দুই সমকোণ ... ... (i) [$\because$ বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের দুই বিপরীত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ]

ধাপ ২. $\angle BCD + \angle DCE =$ দুই সমকোণ ... ... (ii) [$\because$ একই সরলরেখায় অবস্থিত দুইটি সন্নিহিত কোণ]

ধাপ ৩. $\angle BAD + \angle BCD = \angle BCD + \angle DCE$ [(i) নং এবং (ii) নং তুলনা করে পাই]

বা, $\angle BAD = \angle DCE$

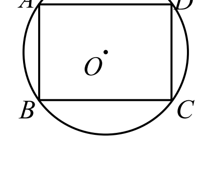
$\therefore \angle DCE = \angle BAD$ **(প্রমাণিত)**

অনুসিদ্ধান্ত - ৭ : বৃত্তে অন্তর্লিখিত সামান্তরিক একটি আয়তক্ষেত্র। [পাঠ্যবই পৃষ্ঠা - ১৬২]

সমাধান: সাধারণ নির্বচন: প্রমাণ করতে হবে যে, বৃত্তে অন্তর্লিখিত সামান্তরিক একটি আয়ত।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তে অন্তর্লিখিত সামান্তরিক হলো $ABCD$। প্রমাণ করতে হবে যে, $ABCD$ একটি আয়ত।

প্রমাণ:



ধাপ ১. $\angle A = \angle C$ এবং $\angle B = \angle D$ [$\because$ সামান্তরিকের বিপরীত কোণদ্বয় সমান]

ধাপ ২. আবার, $ABCD$ সামান্তরিকটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত।

$\therefore \angle A + \angle C = 2$ সমকোণ। [$\because$ বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের দুই বিপরীত কোণের সমষ্টি 2 সমকোণ]

বা, $\angle C + \angle C = 2$ সমকোণ [$\because \angle A = \angle C$]

বা, $2\angle C = 2$ সমকোণ

বা, $\angle C = 1$ সমকোণ [উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore \angle A = \angle C = 1$ সমকোণ

ধাপ ৩. অনুরূপে প্রমাণ করা যায়, $\angle B = \angle D = 1$ সমকোণ [$\therefore ABCD$ সামান্তরিকটির প্রতিটি কোণ এক সমকোণ]

$\therefore ABCD$ সামান্তরিকটি একটি আয়তক্ষেত্র। **(প্রমাণিত)**