পঞ্চদশ অধ্যায়

ক্ষেত্রফল সম্পর্কিত উপপাদ্য ও সম্পাদ্য

অনুশীলনী - ১৫

❖ **ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত সূত্র**

☑ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= (\frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা) বর্গ একক

☑ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল $=$ (ভূমি $\times$ উচ্চতা) বর্গ একক

☑ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=$ (একবাহুর দৈর্ঘ্য)^2 বর্গ একক

☑ রম্বসের ক্ষেত্রফল $= (\frac{1}{2} \times$ কর্ণদ্বয়ের গুণফল) বর্গ একক

☑ ট্রাপিজিয়ামের ক্ষেত্রফল $= (\frac{1}{2} \times$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি $\times$ উচ্চতা) বর্গ একক

অনুশীলনীর সমাধান

১ **ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে; নিচের কোন ক্ষেত্রে সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব নয়?**

(ক) 3 সে.মি., 4 সে.মি., 5 সে.মি. (খ) 6 সে.মি., 8 সে.মি., 10 সে.মি.
(গ) 5 সে.মি., 7 সে.মি., 9 সে.মি. (ঘ) 5 সে.মি., 12 সে.মি., 13 সে.মি.

উত্তর: (গ)

ব্যাখ্যা: সমকোণী ত্রিভুজ পিথাগোরাসের উপপাদ্য মেনে চলে অর্থাৎ
(অতিভুজ)^2 = (লম্ব)^2 + (ভূমি)^2
আবার, সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ সর্বদা বৃহত্তম বাহু। সুতরাং তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া থাকলে **বৃহত্তম বাহুর বর্গ, অপর দুই বাহুর বর্গের সমষ্টির সমান হতে হবে।**
(ক) নং এর ক্ষেত্রে, $5^2 = 3^2 + 4^2$ সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব।
(খ) নং এর ক্ষেত্রে, $(10)^2 = 6^2 + 8^2$ সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব।
(গ) নং এর ক্ষেত্রে, $(9)^2 \neq 5^2 + 7^2$ সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব নয়।
(ঘ) নং এর ক্ষেত্রে, $(13)^2 = 12^2 + 5^2$ সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব।

২ **সমতলীয় জ্যামিতিতে-**

i. প্রত্যেক সীমাবদ্ধ সমতলক্ষেত্রের নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফল রয়েছে
ii. দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হলেই ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম
iii. দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম হলে তাদের ক্ষেত্রফল সমান

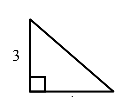
নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

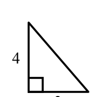
উত্তর: (খ)

ব্যাখ্যা: (i) নং সত্য। কারণ, প্রত্যেক সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফল রয়েছে। ক্ষেত্রফলের একককে বর্গ এককে প্রকাশ করা হয়। [পাঠ্যবই অনুচ্ছেদ-১৫.১]
(ii) নং সত্য নয়। নিম্নের চিত্রগুলো লক্ষ করলে তা সহজে বুঝা যায়। চিত্রে ত্রিভুজ দুইটির ক্ষেত্রফল সমান (6 বর্গ একক) হলেও এরা সর্বসম নয়। এদের ভূমি ও উচ্চতা ভিন্ন ভিন্ন।

ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times \underline{\text{ভূমি}} \times$ উচ্চতা বর্গ একক
$= \frac{1}{2} \times \underline{4} \times 3$ বর্গ একক $= 6$ বর্গ একক



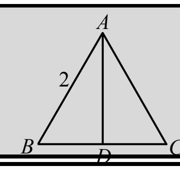
ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times \underline{\text{ভূমি}} \times$ উচ্চতা বর্গ একক
$= \frac{1}{2} \times \underline{3} \times 4$ বর্গ একক $= 6$ বর্গ একক



(iii) নং সত্য। কারণ, দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম হলে তাদের ক্ষেত্রফল সমান।
<u>**Note:**</u> সর্বসম ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, অনুরূপ বাহু ও অনুরূপ কোণ সবকিছুই সমান থাকে।

✉ জেনে নাওঃ সদৃশ, সর্বসম শব্দগুলো এক নয়।
[বিস্তারিত অনুশীলনী ১৪.২ এর ব্যবচ্ছেদ দ্রষ্টব্য]

■ **পাশের চিত্রে, ΔABC সমবাহু, $AD \perp BC$ এবং $AB = 2$ উপর্যুক্ত তথ্যের ভিত্তিতে ৩ ও ৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাওঃ**



৩ **$BD =$ কত?**

(ক) 1 (খ) $\sqrt{2}$ (গ) 2 (ঘ) 4

উত্তর: (ক)

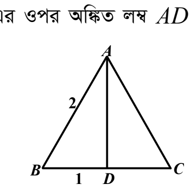
ব্যাখ্যা: সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ হতে বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত লম্ব বাহুটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। এখানে সমাবাহু ΔABC-এর শীর্ষ A হতে BC এর ওপর লম্ব AD
$\therefore BD = CD$ বা, $BD = \frac{1}{2} BC$
আবার, সমবাহুর ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্যই সমান অর্থাৎ $AB = BC = CA = 2$
$\therefore BD = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} .2 = 1$

৪ **ত্রিভুজটির উচ্চতা কত?**

(ক) $\frac{4}{\sqrt{3}}$ (খ) $\sqrt{3}$ (গ) $\frac{2}{\sqrt{3}}$ (ঘ) $2\sqrt{3}$

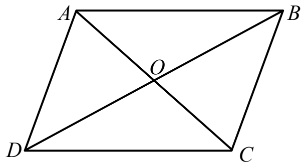
উত্তর: (খ)

ব্যাখ্যা: কোনো ত্রিভুজের শীর্ষ হতে বিপরীত বাহুর উপর অঙ্কিত লম্বই ত্রিভুজের উচ্চতা।
এখানে সমবাহু ΔABC-এর শীর্ষ A হতে BC এর ওপর অঙ্কিত লম্ব AD হলো ত্রিভুজের উচ্চতা
এখন, সমকোণী ΔABD হতে পাই,
$AB^2 = AD^2 + BD^2$
বা, $AD^2 = AB^2 - BD^2 = 2^2 - 1^2$
বা, $AD^2 = 3$
$\therefore AD = \sqrt{3}$



৫ প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সামান্তরিকক্ষেত্রটিকে চারটি সমান ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

সমাধান:



সাধারণ নির্বচন: প্রমাণ করতে হবে যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সামান্তরিক ক্ষেত্রটিকে চারটি সমান ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, $ABCD$ একটি সামান্তরিক। এর AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, AC ও BD কর্ণদ্বয় $ABCD$ সামান্তরিক ক্ষেত্রটিকে চারটি সমান ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।
অর্থাৎ Δ ক্ষেত্র AOB এর ক্ষেত্রফল $= \Delta$ ক্ষেত্র BOC এর ক্ষেত্রফল $= \Delta$ ক্ষেত্র COD এর ক্ষেত্রফল $= \Delta$ ক্ষেত্র AOD এর ক্ষেত্রফল।

প্রমাণ:

ধাপ ১. $ABCD$ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় AC ও BD পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করেছে।
সুতরাং $AO = OC$ এবং $BO = OD$
[$\because$ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]

ধাপ ২. ΔABC-এর মধ্যমা BO
$\therefore$ Δ ক্ষেত্র AOB এর ক্ষেত্রফল $= \Delta$ ক্ষেত্র BOC এর ক্ষেত্রফল
[$\because$ ত্রিভুজের মধ্যমা ত্রিভুজটিকে সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে]

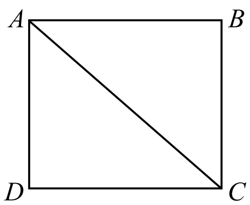
ধাপ ৩. আবার, ΔBCD এর মধ্যমা OC
$\therefore$ Δ ক্ষেত্র BOC এর ক্ষেত্রফল $= \Delta$ ক্ষেত্র COD এর ক্ষেত্রফল

ধাপ ৪. আবার, ΔADC এর মধ্যমা DO
$\therefore$ Δ ক্ষেত্র COD এর ক্ষেত্রফল $= \Delta$ ক্ষেত্র AOD এর ক্ষেত্রফল

ধাপ ৫. $\therefore$ Δ ক্ষেত্র $AOB = \Delta$ ক্ষেত্র $BOC = \Delta$ ক্ষেত্র $COD = \Delta$ ক্ষেত্র AOD
[ধাপ (২), (৩) এবং (৪) থেকে] **(প্রমাণিত)**

৬ প্রমাণ কর যে, কোনো বর্গক্ষেত্র তার কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের অর্ধেক।

সমাধান:



সাধারণ নির্বচন: প্রমাণ করতে হবে যে, কোনো বর্গক্ষেত্র তার কর্ণের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের অর্ধেক।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, $ABCD$ একটি বর্গক্ষেত্র এবং AC এর কর্ণ।
$ABCD$ বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=$ (এক বাহুর দৈর্ঘ্য)$^2 = AB^2$
কর্ণ AC এর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= AC^2$

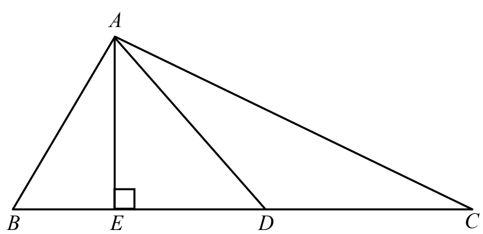
প্রমাণ করতে হবে যে, $AB^2 = \frac{1}{2}AC^2$

প্রমাণ:

ধাপ ১. ΔABC-এ $\angle B =$ এক সমকোণ [$\because$ বর্গক্ষেত্রের সকল কোণ সমকোণ]
$\therefore$ ΔABC সমকোণী এবং AC এর অতিভুজ
পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী,
$AC^2 = AB^2 + BC^2$
বা, $AC^2 = AB^2 + AB^2$ [$\because$ বর্গক্ষেত্রের বাহুগুলো পরস্পর সমান]
বা, $2AB^2 = AC^2$
$\therefore$ $AB^2 = \frac{1}{2}AC^2$ **(প্রমাণিত)**

৭ প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যেকোনো মধ্যমা ত্রিভুজক্ষেত্রটিকে সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

সমাধান:



সাধারণ নির্বচন: প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজের যেকোনো মধ্যমা ত্রিভুজক্ষেত্রটিকে সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

বিশেষ নির্বচন : মনে করি, ΔABC-এ AD একটি মধ্যমা।
প্রমাণ করতে হবে যে, Δ ক্ষেত্র $ABD = \Delta$ ক্ষেত্র ACD

অঙ্কন: A বিন্দু থেকে BC এর উপর AE লম্ব আঁকি।

প্রমাণ:

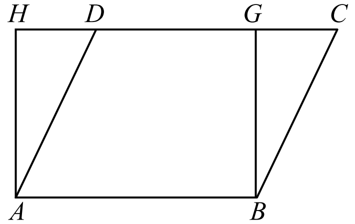
ধাপ ১. ΔABC-এ AD মধ্যমা বলে D, BC এর মধ্যবিন্দু।
$\therefore$ $BD = CD$
Δ ক্ষেত্র ABD-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times BD \times AE$
[$\because$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা]

ধাপ ২. আবার, Δ ক্ষেত্র ACD-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times CD \times AE$
$= \frac{1}{2} \times BD \times AE$ [ধাপ (১) থেকে]

ধাপ ৩. $\therefore$ Δ ক্ষেত্র $ABD = \Delta$ ক্ষেত্র ACD। **(প্রমাণিত)**

৮ একটি সামান্তরিকক্ষেত্র এবং সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র একই ভূমির উপর এবং এর একই পাশে অবস্থিত। দেখাও যে, সামান্তরিকক্ষেত্রটির পরিসীমা আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

সমাধান:



সাধারণ নির্বচন: প্রমাণ করতে হবে যে, একটি সামান্তরিকক্ষেত্র এবং সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র একই ভূমির উপর এবং এর একই পাশে অবস্থিত। দেখাও যে, সামান্তরিকক্ষেত্রটির পরিসীমা আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, $ABCD$ একটি সামান্তরিক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল এবং $ABGH$ একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান এবং এরা একই ভূমি AB-এর উপর অবস্থিত।
প্রমাণ করতে হবে যে, $ABCD$ ক্ষেত্রের পরিসীমা $ABGH$ ক্ষেত্রের পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

প্রমাণ:

ধাপ ১. $ABCD$ সামান্তরিকক্ষেত্রের পরিসীমা $= 2(AB + BC)$

$ABGH$ আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা $= 2(AB + BG)$

ধাপ ২. BG, CD এর উপর লম্ব হওয়ায় BGC একটি সমকোণী ত্রিভুজ এবং BC অতিভুজ

$\therefore BC > BG$ [$\because$ সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ বৃহত্তম বাহু]

বা, $AB + BC > AB + BG$ [উভয় পক্ষে AB যোগ করে]

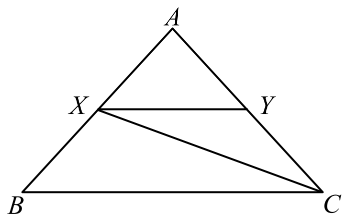
বা, $2(AB + BC) > 2(AB + BG)$ [উভয় পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]

$\therefore$ $ABCD$ সামান্তরিকক্ষেত্রের পরিসীমা $>$ $ABGH$ আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা [ধাপ (১) হতে]

সুতরাং $ABCD$ সামান্তরিকক্ষেত্রের পরিসীমা, $ABGH$ আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর। **(দেখানো হলো)**

৯ **ΔABC এর AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X ও Y। প্রমাণ কর যে, ΔAXY এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{4}$ ΔABC এর ক্ষেত্রফল।**

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এর AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X ও Y। প্রমাণ করতে হবে যে,

ΔAXY এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{4}$ (ΔABC এর ক্ষেত্রফল)

অঙ্কন: C, X এবং X, Y যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. যেহেতু, X, AB-এর মধ্যবিন্দু। সেহেতু, CX, ΔABC-এর মধ্যমা

$\therefore$ ΔACX এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ (ΔABC-এর ক্ষেত্রফল)

[$\because$ ত্রিভুজের যেকোনো মধ্যমা ত্রিভুজকে সমান দুইটি অংশে বিভক্ত করে]

ধাপ ২. আবার, যেহেতু ΔACX-এর AC বাহুর মধ্যবিন্দু Y

সুতরাং XY, ΔACX-এর মধ্যমা

$\therefore$ ΔAXY এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ (ΔACX এর ক্ষেত্রফল)

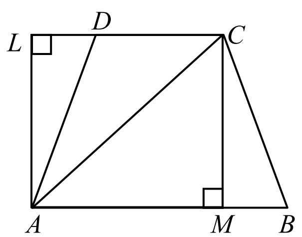
$= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}$ (ΔABC এর ক্ষেত্রফল) [ধাপ (১) থেকে]

$= \frac{1}{4}$ (ΔABC এর ক্ষেত্রফল)

অর্থাৎ ΔAXY এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{4}$ ΔABC এর ক্ষেত্রফল **(প্রমাণিত)**

১০ **$ABCD$ একটি ট্রাপিজিয়াম। এর AB ও CD বাহু দুইটি সমান্তরাল। ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।**

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, $ABCD$ একটি ট্রাপিজিয়াম। এর AB ও CD বাহু দুইটি সমান্তরাল। ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় করতে হবে।

অঙ্কন: A বিন্দু হতে CD এর বর্ধিতাংশের ওপর AL ও C বিন্দু হতে AB এর উপর CM লম্ব টানি। A ও C যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $=$ Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল $+$ Δ ক্ষেত্র ACD এর ক্ষেত্রফল

[ট্রাপিজিয়ামের কর্ণ ট্রাপিজিয়ামকে দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে]

ধাপ ২. Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times AB \times \mathrm{CM}$

[$\because$ ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা]

ধাপ ৩. Δ ক্ষেত্র ACD এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times CD \times AL$

ধাপ ৪. ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times AB \times \mathrm{CM} + \frac{1}{2} \times CD \times AL$

[ধাপ (১), (২) ও (৩) হতে]

$= \frac{1}{2} \times AB \times \mathrm{CM} + \frac{1}{2} \times CD \times \mathrm{CM}$

[$\because \mathrm{CM} = AL$]

$= \frac{1}{2} \times \mathrm{CM}\ (AB + CD)$

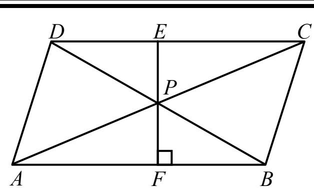
$= \frac{1}{2} \times (AB + CD) \times \mathrm{CM}$

$= \frac{1}{2} \times$ সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমষ্টি $\times$ উচ্চতা

এটিই ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল।

১১ **সামান্তরিক $ABCD$ এর অভ্যন্তরে P যেকোনো একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, ΔPAB এর ক্ষেত্রফল $+$ ΔPCD এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ (সামান্তরিকক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল)**

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন : দেওয়া আছে, $ABCD$ সামান্তরিকের অভ্যন্তরে P যেকোনো একটি বিন্দু। P, A; P, B; P, C এবং P, D যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, ΔPAB এর ক্ষেত্রফল $+$ ΔPCD এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ (সামান্তরিকক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল)

অঙ্কন : P বিন্দু হতে AB-এর উপর PF লম্ব টানি। FP কে E পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করা হলো যেন তা CD কে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ:

ধাপ ১. যেহেতু $AB \parallel CD$ এবং EF তাদের ছেদক।

$\therefore \angle DEF = \angle EFB =$ এক সমকোণ

[একান্তর কোণ এবং $EF \perp AB$ বলে]

$\therefore$ $ABCD$ সামান্তরিকের উচ্চতা EF

সুতরাং সামান্তরিকক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল $= AB \times EF$

[$\because$ সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $=$ ভূমি $\times$ উচ্চতা]

ধাপ ২. ΔPAB এ ভূমি AB এবং উচ্চতা PF

ΔPAB এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times AB \times PF$

[$\because \angle PFB =$ এক সমকোণ তাই PF উচ্চতা]

অনুরূপভাবে, ΔPCD এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times CD \times PE$

$= \frac{1}{2} \times AB \times PE$

[$\because$ সামান্তরিকের বিপরীত বাহু পরস্পর সমান]

ধাপ ৩. ΔPAB এর ক্ষেত্রফল $+ \Delta PCD$ এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times AB \times PF + \frac{1}{2} \times AB \times PE$

[ধাপ (২) থেকে]

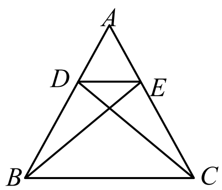
$= \frac{1}{2} AB(PF + PE)$

$= \frac{1}{2} AB.EF$ [$\because PF + PE = EF$]

$= \frac{1}{2}$ (সামান্তরিকক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল) **(প্রমাণিত)**

১২ **ΔABC এ BC ভূমির সমান্তরাল যেকোনো সরলরেখা AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, ΔDBC এর ক্ষেত্রফল $= \Delta EBC$ এর ক্ষেত্রফল এবং ΔDBE এর ক্ষেত্রফল $= \Delta CDE$ এর ক্ষেত্রফল।** **[সংশোধিত]**

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এর ভূমি BC এর সমান্তরাল যেকোনো সরলরেখা AB ও AC বাহুকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে, ΔDBC এর ক্ষেত্রফল $= \Delta EBC$ এর ক্ষেত্রফল এবং ΔDBE এর ক্ষেত্রফল $= \Delta CDE$ এর ক্ষেত্রফল।

প্রমাণ:

ধাপ ১. ΔDBC ও ΔEBC ত্রিভুজদ্বয় একই ভূমি BC এর ওপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগল BC ও DE এর মধ্যে অবস্থিত

$\therefore \Delta DBC$ এর ক্ষেত্রফল $= \Delta EBC$ এর ক্ষেত্রফল

[$\because$ একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত সকল ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান]

ধাপ ২. অনুরূপভাবে, ΔDBE এর ক্ষেত্রফল $= \Delta CDE$ এর ক্ষেত্রফল

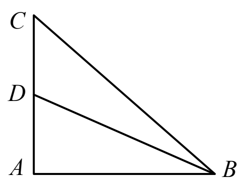
ধাপ ৩. ধাপ-১ ও ধাপ-২ হতে পাই,

ΔDBC এর ক্ষেত্রফল $= \Delta EBC$ এর ক্ষেত্রফল এবং

ΔDBE এর ক্ষেত্রফল $= \Delta CDE$ এর ক্ষেত্রফল **(প্রমাণিত)**

১৩ **ABC ত্রিভুজের $\angle A =$ এক সমকোণ। D, AC এর উপরস্থ একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2$.**

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের $\angle A =$ এক সমকোণ D, AC এবং এর উপরস্থ একটি বিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে যে, $BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2$

প্রমাণ:

ধাপ ১. ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle A =$ এক সমকোণ

$\therefore BC^2 = AB^2 + AC^2$ ... (i) [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী]

ধাপ ২. অনুরূপভাবে, ABD সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ BD

$AB^2 + AD^2 = BD^2$

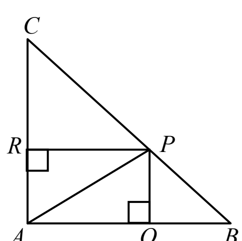
বা, $AD^2 = BD^2 - AB^2$ ... ... (ii)

ধাপ ৩. $BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2$ [(i) ও (ii) নং যোগ করে]

(প্রমাণিত)

১৪ **ABC একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। BC এর অতিভুজ এবং P, BC এর ওপর যেকোনো বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$.**

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ABC একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। BC এর অতিভুজ $\angle A = 90°$, $\angle B = \angle C = 45°$ এবং P, BC এর ওপর যেকোনো বিন্দু।

প্রমাণ করতে হবে যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$

অঙ্কন: P বিন্দু হতে AB ও AC বাহুর উপর যথাক্রমে PQ ও PR লম্ব আঁকি এবং A, P যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. PBQ সমকোণী ত্রিভুজে,

PB অতিভুজ এবং $\angle PBQ = \angle BPQ = 45°$ [$\because \angle PQB =$ এক সমকোণ]

$\therefore PQ = BQ$

অনুরূপভাবে $PR = CR$

ধাপ ২. PBQ সমকোণী ত্রিভুজে, $PB^2 = PQ^2 + BQ^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

$= PQ^2 + PQ^2$ [ধাপ (১) হতে]

$= 2PQ^2$ ... ... (i)

PCR সমকোণী ত্রিভুজে, $PC^2 = PR^2 + CR^2$

$= PR^2 + PR^2$ [ধাপ (১) হতে]

$= 2PR^2$ ... ... (ii)

ধাপ ৩. $AQPR$ একটি আয়তক্ষেত্রে $PQ \perp AB$ এবং $PR \perp AC$ হওয়ায়

$PR = AQ$ [$\because$ আয়তক্ষেত্রের বিপরীত বাহুদ্বয় পরস্পর সমান]

ধাপ ৪. $PB^2 + PC^2 = 2PQ^2 + 2PR^2$ [(i) ও (ii) নং যোগ করে]

$= 2(PQ^2 + PR^2)$

ধাপ ৫. কিন্তু APQ সমকোণী ত্রিভুজের $PQ^2 + AQ^2 = AP^2$

বা, $PQ^2 + PR^2 = PA^2$

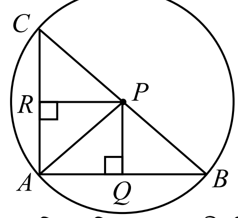
[ধাপ (৩) হতে]

বা, $2(PQ^2 + PR^2) = 2PA^2$

[উভয়পক্ষকে 2 দ্বারা গুণ করে]

ধাপ ৬. $\therefore PB^2 + PC^2 = 2PA^2$ [ধাপ (৪) ও ধাপ (৫) হতে] **(প্রমাণিত)**

বিশেষ ক্ষেত্রে: P, BC এর মধ্যবিন্দু হলে:

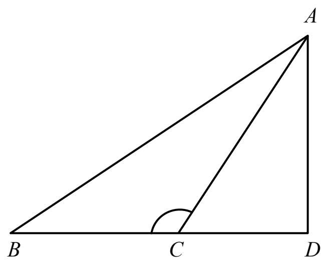


বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ABC একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। BC এর অতিভুজ এবং P, BC এর ওপর যেকোনো বিন্দু।
প্রমাণ করতে হবে যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$
অঙ্কন: P বিন্দু হতে যথাক্রমে AB ও AC বাহুর উপর PQ ও PR লম্ব আঁকি। A, P যোগ করি এবং ΔABC-এর পরিবৃত্ত অঙ্কন করি।

প্রমাণ:
ধাপ ১. $PA = PB = PC$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
ধাপ ২. $PR \perp AC$ হওয়ায় $AR = CR$ [$\because$ কেন্দ্র থেকে জ্যা এর ওপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে]
অনুরূপভাবে, $AQ = BQ$
ধাপ ৩. সমকোণী ΔPRC-এ
$PC^2 = PR^2 + CR^2$ ……… (i)
এবং সমকোণী ΔPQB-এ
$PB^2 = PQ^2 + BQ^2$ ……… (ii)
(i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,
$PC^2 + PB^2 = PR^2 + CR^2 + PQ^2 + BQ^2$
$= (PR^2 + AR^2) + (PQ^2 + AQ^2)$
$= PA^2 + PA^2$
$\therefore PB^2 + PC^2 = 2PA^2$ **(প্রমাণিত)**

১৫ ΔABC এর $\angle C$ স্থূলকোণ। AD, BC এর উপর লম্ব। দেখাও যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$

সমাধান:



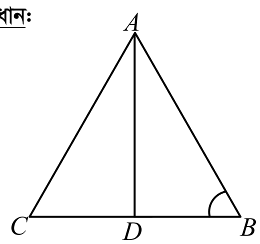
বিশেষ নির্বচন: ΔABC এর $\angle C$ স্থূলকোণ। AD, BC বর্ধিতাংশের এর উপর লম্ব। সুতরাং $\angle D$ = এক সমকোণ।
দেখাতে হবে যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$

প্রমাণ:
ধাপ ১. ΔACD এ $\angle D = 90°$ এবং AC অতিভুজ
ΔACD সমকোণী ত্রিভুজে,
$AC^2 = AD^2 + CD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]
ধাপ ২. আবার, ΔABD-এ $\angle D = 90°$ এবং অতিভুজ AB
ΔABD সমকোণী ত্রিভুজ হতে পাই,
$\therefore AB^2 = AD^2 + BD^2$
$= AD^2 + (BC + CD)^2$ [$\because BD = BC + CD$]
$= AD^2 + BC^2 + CD^2 + 2BC.CD$
$= AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$ [ধাপ (১) হতে]
$\therefore AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$ **(দেখানো হলো)**

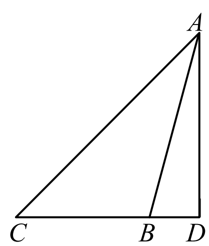
বি.দ্র: প্রশ্নটি স্থূলকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি।

১৬ ΔABC এর $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ; AD, BC এর উপর লম্ব। দেখাও যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$

সমাধান:



চিত্র-১



চিত্র-২

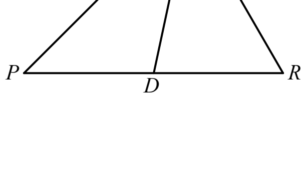
বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC এর $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ; BC বাহুর ওপর (চিত্র-১) এবং BC বাহুর বর্ধিতাংশের ওপর (চিত্র-২) AD লম্ব।
দেখাতে হবে যে, $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$।

প্রমাণ:
ধাপ ১. ΔACD-এ $\angle ADC$ = এক সমকোণ এবং AC এর অতিভুজ
$AC^2 = AD^2 + CD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]
ধাপ ২. ΔABD-এ $\angle ADB$ = GK সমকোণ এবং AB এর অতিভুজ
$AB^2 = AD^2 + BD^2$
$= AD^2 + (BC - CD)^2$ [১ম চিত্রানুযায়ী, $BD = BC - CD$]
$= AD^2 + CD^2 + BC^2 - 2BC.CD$
$= AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$ [ধাপ-১ হতে] **(দেখানো হলো)**
আবার, $AB^2 = AD^2 + BD^2$
$= AD^2 + (CD - BC)^2$ [২য় চিত্রানুযায়ী $BD = CD - BC$]
$= AD^2 + CD^2 + BC^2 - 2BC.CD$
$= AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$ [ধাপ-১ হতে] **(দেখানো হলো)**

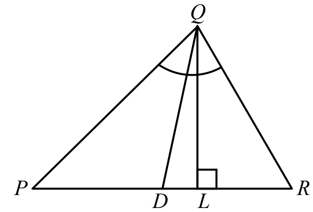
বি.দ্র: প্রশ্নটি সূক্ষ্মকোণের ক্ষেত্রে পিথাগোরাসের উপপাদ্যের বিস্তৃতি।

১৭ ΔPQR এ QD একটি মধ্যমা। **[সংশোধিত]**
ক. উদ্দীপকের আলোকে আনুপাতিক চিত্র আঁক।
খ. প্রমাণ কর, $PQ^2 + QR^2 = 2(PD^2 + QD^2)$।
গ. যদি $PQ = QR = PR$ হয়, তাহলে প্রমাণ কর, $4QD^2 = 3PQ^2$।

সমাধান:
ক দেওয়া আছে, ΔPQR এ QD একটি মধ্যমা।
বর্ণনানুসারে আনুপাতিক চিত্রটি হলো-



খ



মনে করি, ΔPQR-এ QD মধ্যমা PR রেখাকে D বিন্দুতে ছেদ করে। মধ্যমা PR রেখাকে D বিন্দুতে ছেদ করে।
প্রমাণ করতে হবে যে, $PQ^2 + QR^2 = 2(PD^2 + QD^2)$
অঙ্কন: Q বিন্দু থেকে PR এর ওপর QL লম্ব আঁকি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. ΔQDL সমকোণী ত্রিভুজে

$QD^2 = QL^2 + DL^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

বা, $QL^2 = QD^2 - DL^2$

ধাপ ২. ΔQPL সমকোণী ত্রিভুজে

$PQ^2 = PL^2 + QL^2$

বা, $PQ^2 = (PD + DL)^2 + QL^2$ [$\because PL = PD + DL$]

বা, $PQ^2 = PD^2 + DL^2 + 2PD.DL + QL^2$

$= PD^2 + DL^2 + 2PD.DL + QD^2 - DL^2$ [ধাপ-১ হতে]

$\therefore PQ^2 = PD^2 + QD^2 + 2PD.DL$ ... ... (i)

ধাপ ৩. সমকোণী ΔQLR হতে পাই,

$QR^2 = QL^2 + LR^2$

$= QD^2 - LD^2 + (DR - LD)^2$ [$\because LR = DR - LD$]

$= QD^2 - LD^2 + DR^2 + LD^2 - 2DR.DL$

$\therefore QR^2 = QD^2 + DR^2 - 2DR.DL$ ... ... (ii)

ধাপ ৪. (i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

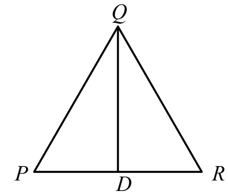
$PQ^2 + QR^2 = PD^2 + QD^2 + QD^2 + DR^2 + 2PD.DL - 2DR.DL$

$= PD^2 + 2QD^2 + PD^2 + 2PD.DL - 2PD.DL$ [$\because D, PR$ এর মধ্যবিন্দু হওয়ায় $PD = DR$]

$= 2PD^2 + 2QD^2$

$\therefore PQ^2 + QR^2 = 2(PD^2 + QD^2)$ **(প্রমাণিত)**

গ দেওয়া আছে, ΔPQR-এ QD মধ্যমা এবং $PQ = QR = PR$ অর্থাৎ সমবাহু ত্রিভুজ PQR-এ QD একটি মধ্যমা, প্রমাণ করতে হবে যে, $4QD^2 = 3PQ^2$।



প্রমাণ:

ধাপ ১. সমবাহু ΔPQR-এ QD মধ্যমা হওয়ায় QD $\perp$ PR

$\therefore \angle QDP = \angle QDR = 90°$ [$\because$ সমবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ থেকে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্ব ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।]

ধাপ ২. সমকোণী ΔPQD-এ

$PQ^2 = PD^2 + QD^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

$= \left(\frac{1}{2}PQ\right)^2 + QD^2$ [$\because PD = \frac{1}{2}PR = \frac{1}{2}PQ$]

বা, $PQ^2 - \frac{PQ^2}{4} = QD^2$

বা, $\frac{4PQ^2 - PQ^2}{4} = QD^2$

$\therefore 4QD^2 = 3PQ^2$ **(প্রমাণিত)**

১৮ ***ABCD* সামান্তরিকের *AB* = 5 সে.মি., *AD* = 4 সে.মি. এবং $\angle BAD = 75°$। অপর একটি সামান্তরিক *APML* এর $\angle LAP = 60°$। ΔAED এর ক্ষেত্রফল ও *APML* সামান্তরিকের ক্ষেত্রফল, *ABCD* সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের সমান।**

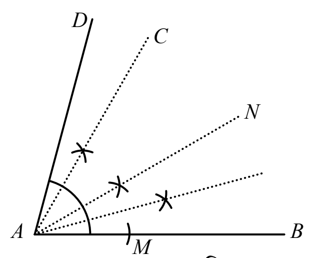
ক. পেন্সিল, কম্পাস ও স্কেল ব্যবহার করে $\angle BAD$ আঁক।

খ. ΔAED অঙ্কন কর। [অঙ্কন চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক]

গ. *APML* সামান্তরিকটি অঙ্কন কর। [অঙ্কন চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক]

সমাধান:

ক



পেন্সিল, কম্পাস ও স্কেল ব্যবহার করে নিম্নে $\angle BAD = 75°$ অঙ্কন করা হলো:

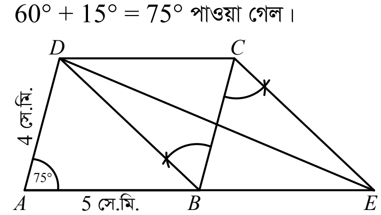
(১) যেকোনো রেখা AB হতে AM এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে A ও M বিন্দু থেকে একই দিকে দুইটি পরস্পরচ্ছেদী বৃত্তচাপ অঙ্কনের মাধ্যমে $\angle BAC = 60°$ আঁকি।

(২) $\angle BAN = \frac{1}{2}\angle BAC = 30°$ অঙ্কন করি।

(৩) অতঃপর $\angle CAD = \frac{1}{2}\angle BAN = 15°$ অঙ্কন করা হলো।

(৪) তাহলে, অঙ্কনের মাধ্যমে $\angle BAD = \angle BAC + \angle CAD = 60° + 15° = 75°$ পাওয়া গেল।

খ



প্রশ্নানুসারে ΔAED এর ক্ষেত্রফল $ABCD$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের সমান।

বর্ণনানুসারে ABCD সামান্তরিকের AB = 5 সে.মি. AD = 4 সে.মি. এবং $\angle BAD = 75°$

$\therefore ABCD$ সামান্তরিকটি হলো

সামান্তরিক ক্ষেত্র $ABCD$ এর মধ্যে ΔAED এমনভাবে অঙ্কন করতে হবে যেন উভয়ের ক্ষেত্রফল সমান হয়।

অঙ্কন: B, D যোগ করি। C বিন্দু দিয়ে $CE \parallel DB$ টানি। মনে করি, তা AB বাহুর বর্ধিতাংশকে E বিন্দুতে ছেদ করে। D, E যোগ করি।

তাহলে, ΔAED-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ যার ক্ষেত্রফল সামান্তরিক $ABCD$ এর ক্ষেত্রফলের সমান।

প্রমাণ: BD ভূমির উপর ΔBDC ও ΔBDE অবস্থিত এবং $BD \parallel CE$ [অঙ্কন অনুসারে]

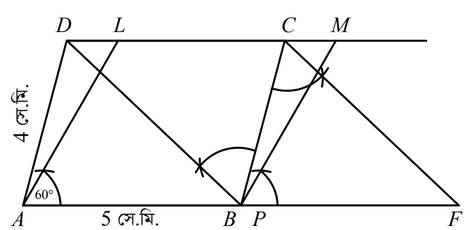
$\therefore \Delta$ ক্ষেত্র BDC এর ক্ষেত্রফল = Δ ক্ষেত্র BDE এর ক্ষেত্রফল।

$\therefore \Delta$ ক্ষেত্র BDC এর ক্ষেত্রফল + Δ ক্ষেত্র ABD এর ক্ষেত্রফল = Δ ক্ষেত্র BDE এর ক্ষেত্রফল + Δ ক্ষেত্র ABD এর ক্ষেত্রফল

বা, চতুর্ভুজক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল = Δ ক্ষেত্র ADE এর ক্ষেত্রফল।

অতএব, ΔADE-ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

গ



এখানে, $ABCD$ সামান্তরিকের $\angle BAD = 75°$। অপর একটি সামান্তরিক $APML$ অঙ্কন করতে হবে যার $\angle LAP = 60°$ এবং যা $ABCD$ সামান্তরিকের ক্ষেত্রফলের সমান।

অঙ্কনের বিবরণ:

ধাপ-১: B, D যোগ করি।

ধাপ-২: C বিন্দু দিয়ে $CF \parallel BD$ টানি, যা AB এর বর্ধিতাংশকে F বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-৩: AF রেখাংশের মধ্যবিন্দু P নির্ণয় করি। এটি B বিন্দুর উপর সমাপতিত হয়।

ধাপ-৪: AP রেখাংশের A বিন্দুতে $\angle LAP = 60°$ আঁকি যা CD রেখাকে L বিন্দুতে ছেদ করেছে।

ধাপ-৫: P বিন্দু দিয়ে $AL \parallel PM$ আঁকি যা DC এর বর্ধিতাংশকে M বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, $APML$-ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

প্রমাণ: একই ভূমির উপর এবং একই সমান্তরাল রেখা যুগলের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিক ক্ষেত্রসমূহের ক্ষেত্রফল সমান।

এক্ষেত্রে $ABCD$ এবং $APML$ সামান্তরিকদ্বয় একই ভূমি $AB = AP$ এবং একই সমান্তরাল রেখা যুগল AF এবং DM মধ্যে অবস্থিত।

সুতরাং সামান্তরিক ক্ষেত্র $ABCD$ এর ক্ষেত্রফল = সামান্তরিক ক্ষেত্র $APLM$ এর ক্ষেত্রফল।