অনুশীলনী - ৯.২

একনজরে প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি

1. $x = \log_a N$ হলে, $a^x = N$ অথবা, $x = \log_a N$ হলে $a^x = N$
2. $\log_a MN = \log_a M + \log_a N$
3. $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$
4. $\log_a M^r = r\log_a M$
5. $\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ অথবা, $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$
6. $\log_a a = 1$
7. $\log_a 1 = 0$

ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়

$y = f(x)$ ফাংশনের (x, y) ক্রমজোড়গুলোর x এর মানকে ডোমেন এবং y এর মানকে রেঞ্জ বলে।
সহজভাবে বলতে, $y = f(x)$ ফাংশনটি

i. x এর যে সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত তাই ফাংশনের ডোমেন।
ii. আর x এর সকল মানের জন্য y বা $f(x)$ এর যে বাস্তব মান পাওয়া যায় তাই ফাংশনের রেঞ্জ।

নিম্নে উদাহরণের সাহায্যে ব্যাখ্যা করা হলো:

(a) $f(x) = x$ ফাংশনের ক্ষেত্রে -

i. ফাংশনটি x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত। অতএব, ফাংশনের ডোমেন $= \boldsymbol{R}$ বা $(-\infty, \infty)$
ii. ডোমেনের (x) প্রতিটি উপাদান থেকে যে প্রতিচ্ছবি / ইমেজ পাওয়া যায় তা বাস্তব সংখ্যার সেট নির্দেশ করে। $\therefore$ ফাংশনের রেঞ্জ $= \boldsymbol{R}$

(b) $f(x) = x^2$ ফাংশনের ক্ষেত্রে -

i. ফাংশনটি x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত। অতএব, ফাংশনের ডোমেন $= \boldsymbol{R}$ বা $(-\infty, \infty)$
ii. x এর সকল বাস্তব মানের (ধনাত্মক, অঋণাত্মক) জন্য $f(x)$ এর মান অঋণাত্মক সংখ্যা অর্থাৎ কখনোই শূন্য থেকে ছোট হবে না। অতএব, ফাংশনের রেঞ্জ $= \{f(x) \in R : f(x) \geq 0\}$

যেসব রাশি বা সংখ্যার বাস্তব মান পাওয়া যায় না:

i. কোনো ঋণাত্মক সংখ্যার বর্গমূলের মান বাস্তব সংখ্যা নয়। যেমন: $\sqrt{-2}$, $\sqrt{-3}$, $\sqrt{-5}$, $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-16}$ ইত্যাদির মান বাস্তব সংখ্যা নয়। সুতরাং বর্গমূলের ভেতরে অবস্থানকারী সংখ্যা বা রাশিকে অবশ্যই অঋণাত্মক হতে হবে।
ii. কোনো সংখ্যা বা রাশিকে শূন্য দ্বারা ভাগ করলে বাস্তব মান পাওয়া যায় না। যেমন: $\dfrac{2}{0} = \infty, \dfrac{x}{0} = \infty, \dfrac{-1}{0} = \infty, \dfrac{2x+3}{0} = \infty$

ডোমেন ও রেঞ্জ প্রকাশে বন্ধনীর ব্যবহার

কোনো ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জকে সাধারণত ব্যবধি আকারে প্রকাশ করা হয়। ব্যবধিতে প্রথম বন্ধনী '( )' এবং তৃতীয় বন্ধনী '[ ]' কিংবা উভয়টি যুগপৎভাবে ব্যবহার করা হয়। এক্ষেত্রে তৃতীয় বন্ধনী দ্বারা, অন্তর্ভুক্তি এবং প্রথম বন্ধনী দ্বারা অন্তর্ভুক্তি নয় এমন সংখ্যা নির্দেশ করে।

৩য় বন্ধনী: ৩য় বন্ধনী '[ ]' দ্বারা কোনো ব্যবধি আবদ্ধ হলে ব্যবধির সবগুলো সংখ্যাই এর অন্তর্ভুক্ত।

যেমন: *i.* $[0, 1]$ এর অর্থ হলো ব্যবধিতে 0 থেকে 1 পর্যন্ত সকল বাস্তব সংখ্যাই ব্যবধির অন্তর্ভুক্ত।
ii. $[-1, 1]$ এর অর্থ হলো ব্যবধিতে -1 থেকে 1 পর্যন্ত সকল বাস্তব সংখ্যাই ব্যবধির অন্তর্ভুক্ত।

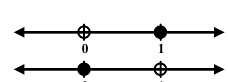
১ম বন্ধনী: ১ম বন্ধনী দ্বারা '( )' কোনো ব্যবধি আবদ্ধ হলে ব্যবধির ১ম ও শেষ অর্থাৎ দুই প্রান্তের সংখ্যাটি বাদে ব্যবধির মধ্যবর্তী সকল বাস্তব সংখ্যাই এর অন্তর্ভুক্ত।

উদাহরণ: (i) $(0, 1)$ এর অর্থ হলো ব্যবধির ১ম ও শেষ সংখ্যা অর্থাৎ 0 ও 1 ছাড়া এদের মধ্যবর্তী সকল সংখ্যাই ব্যবধির অন্তর্ভুক্ত।
(ii) $(-1, 1)$ এর অর্থ হলো ব্যবধির ১ম ও শেষ সংখ্যা অর্থাৎ -1 ও 1 ছাড়া এদের মধ্যবর্তী সকল সংখ্যাই ব্যবধির অন্তর্ভুক্ত।

১ম ও ৩য় বন্ধনীর যুগপৎ ব্যবহার: কোনো ব্যবধিতে ১ম ও ৩য় বন্ধনী যুগপৎভাবে ব্যবহৃত হতে পারে এক্ষেত্রে মনে রাখবে -

(i) ১ম বন্ধনী চিহ্ন দ্বারা আবদ্ধ শুধুই প্রান্তিক সংখ্যাটি ব্যবধির অন্তর্ভুক্ত নয়।
(ii) ৩য় বন্ধনীর চিহ্ন দ্বারা আবদ্ধ প্রান্তিক সংখ্যাটি ব্যবধির অন্তর্ভুক্ত।

উদাহরণ: $[0, 1)$ ব্যবধিতে 0 অন্তর্ভুক্ত কিন্তু 1 ব্যবধির অন্তর্ভুক্ত নয়।
$(0, 1]$ ব্যবধিতে 0 অন্তর্ভুক্ত নয় কিন্তু 1 অন্তর্ভুক্ত।



জেনে নাও: *i.* অসীম নির্দেশক প্রতীক '∞' সর্বদা প্রথম বন্ধনী দ্বারা আবদ্ধ হয়, কখনোই '∞' প্রতীককে তৃতীয় বন্ধনী দ্বারা আবদ্ধ করা যাবে না।
উদাহরণ: $(0, \infty)$, $[0, \infty)$, $(-\infty, 0)$, $(-\infty, 1]$, $(-\infty, \infty)$ ইত্যাদি।
ii. প্রথম বন্ধনীকে খোলা ব্যবধি এবং তৃতীয় বন্ধনীকে বদ্ধ ব্যবধি বলা হয়।
iii. অনেক সময় খোলা ব্যবধিতে প্রথম বন্ধনীর পরিবর্তে] বা [প্রতীক ব্যবহার করা হয়।

এ ব্যাপারে বিস্তারিত বুঝার জন্য 'অনুশীলনী-৬.১' এর 'অনুশীলনীর ব্যবচ্ছেদ' দ্রষ্টব্য।

সূচকীয় ফাংশন

সংজ্ঞা: সূচক ও ভিত্তি সংবলিত রাশিকে সূচকীয় রাশি বলা হয়। সূচকীয় ফাংশনকে $f(x) = a^x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত করা হয় যেখানে $x \in R, a > 0$ এবং $a \neq 1$

উদহারণ: $y = 2^x, 10^x, e^x$ ইত্যাদি সূচকীয় ফাংশন।

$y = a(b)^x$ সূচকীয় ফাংশন হবে যদি

শর্ত-1: $a \neq 0$ হয়

শর্ত-2: $b > 1$ হয়।

ডোমেন ও রেঞ্জ:

i. সূচকীয় ফাংশন $(a^x, 2^x, 10^x, e^x)$ সাধারণত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত তাই ডোমেন $= R$ বা $(-\infty, \infty)$

ii. x এর মান ধনাত্মক বা ঋণাত্মক যাই হোকনা কেন সর্বদা $y > 0 \;\therefore$ রেঞ্জ $= (0, \infty)$

সূচকীয় ফাংশনের বিপরীত ফাংশন:

মনেকরি, $y = f(x) = a^x$

তাহলে $x = f^{-1}(y)$

আবার, $y = a^x$

বা, $x = \log_a y$

বা, $f^{-1}(y) = \log_a y$

$\therefore f^{-1}(x) = \log_a x$

$\therefore f(x) = a^x$ ফাংশনের বিপরীত ফাংশন হলো: $f^{-1}(x) = \log_a x$ যার ডোমেন ও রেঞ্জ যথাক্রমে মূল ফাংশনের রেঞ্জ ও ডোমেন সেট।

Technique: যেকোনো ফাংশনের লেখচিত্র থেকে $y = x$ রেখঅর সাপেক্ষে তার প্রতিসম চিত্রই হলো বিপরীত ফাংশনের লেখচিত্র।

লগারিদমিক ফাংশন

সংজ্ঞা: লগারিদমিক ফাংশন $f(x) = \log_a x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত যেখানে $a > 0, a \neq 1$।

উদাহরণ: $f(x) = \log_3 x, \ln x, \log_{10} x$ ইত্যাদি।

ডোমেন ও রেঞ্জ: ঋণাত্মক সংখ্যার লগারিদমের বাস্তব মান নেই অর্থাৎ লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত। তাই লগারিদমিক ফাংশনের $(\log_3 x, \ln x, \log_{10}, \log_a x)$ ডোমেন সাধারণত শূন্য থেকে বড় সকল ধনাত্মক সংখ্যা। $\therefore$ ডোমেন $= (0, \infty)$

x এর সকল ধনাত্মক মানের জন্য লগারিদমিক ফাংশনের মান ধনাত্মক, ঋণাত্মক কিংবা শূন্যসহ যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হতে পারে। তাই রেঞ্জ $= (-\infty, \infty)$

পরমমান ফাংশন

পরমমান (Absolute Value): যেকোনো বাস্তব সংখ্যা x এর মান শূন্য, ধনাত্মক বা ঋণত্মক কিন্তু x এর পরমমান $(|x|)$ সমসময়ই শূন্য বা শূন্য থেকে বড় ধনাত্মক সংখ্যা।

উদাহরণ: $|3| = 3; |-3| = -(-3) = 3$

পরমমান ফাংশন (Absolute Value Function): যদি $x \in R$ হয়, তবে -

$$y = f(x) = |x| = \begin{cases} x \text{ যখন } x \geq 0 \\ -x \text{ যখন } x < 0 \end{cases}$$

কে পরমমান ফাংশন বলা হয়।

ডোমেন ও রেঞ্জ:

সাধারণত x এর সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত $\therefore$ ডোমেন $= R$ বা $(-\infty, \infty)$

কিন্তু পরমমান সবসময়ই শূন্য বা ধনাত্মক সংখ্যা অর্থাৎ সকল $x \in R$ এর জন্য $y \geq 0 \;\therefore$ রেঞ্জ $= [0, \infty)$

অবচেতন মনে আমরা যা ভুল করে থাকি:
i) $\log_a(M + N) = \log_a M + \log_a N$
ii) $\log_a(M - N) = \log_a M - \log_a N$
iii) $\log_a(MN) = \log_a M . \log_a N$
iv) $\log_a\left(\frac{M}{N}\right) = \frac{\log_a M}{\log_a N}$

মনে রাখবে:

- লগারিদম ভিত্তি কখনও ঋণাত্মক হয় না। উদাহরণ: $\log_x 25 = 2$ হলে লগারিদমের সংজ্ঞানুসারে, $x^2 = 25$ হলে $x = 5$ [$\because x = -5$ গ্রহণযোগ্য নয়]
- শূন্য বা ঋণাত্মক সংখ্যার লগের বাস্তব মান নেই। উদাহরণ: $\log 0; \log(-2), \log(-9)$ ... ইত্যাদি সংখ্যার লগারিদমের বাস্তব মান নেই।
- লগারিদমের ভিত্তির উল্লেখ না থাকলে বীজগাণিতীয় রাশির ক্ষেত্রে e কে এবং সংখ্যার ক্ষেত্রে 10 কে ভিত্তি ধরা হয়। উদাহরণ: $\log x$ বলতে বুঝায় $\log_e x$ এবং $\log 25$ বলতে বুঝায় $\log_{10} 25$।
- যেকোনো ফাংশন $f(x)$ ও তাপর বিপরীত ফাংশন $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র সর্বদাই $y = x$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম।

অনুশীলনীর সমাধান

১ $\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a-b}}\right\}^{\frac{a}{a+b}}$ এর সরল মান কোনটি?

(ক) 0 (খ) 1 (গ) a (ঘ) x

উত্তরঃ (ঘ)

ব্যাখ্যাঃ $\left\{\left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a-b}}\right\}^{\frac{a}{a+b}}$

$= \left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a-b}\times\frac{a}{a+b}} = \left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{\frac{a^2-b^2}{a^2-b^2}\times a} = \left(x^{\frac{1}{a}}\right)^{a} = x$

২ যদি $a, b, p > 0$ এবং $a \neq 1, b \neq 1$ হয়, তবে

i. $\log_a p = \log_b p \times \log_a b$

ii. $\log_a\sqrt{a} \times \log_b\sqrt{b} \times \log_c\sqrt{c}$ এর মান 2

iii. $x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$

উপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) ii ও iii (গ) i ও iii (ঘ) i, ii ও iii

উত্তরঃ (গ)

ব্যাখ্যাঃ *i.* সূত্রমতে, $\log_a p = \log_b p \times \log_a b$

ii. $\log_a\sqrt{a} \times \log_b\sqrt{b} \times \log_c\sqrt{c}$

$= \log_a a^{\frac{1}{2}} \times \log_b b^{\frac{1}{2}} \times \log_c c^{\frac{1}{2}}$

$= \frac{1}{2}\log_a a \times \frac{1}{2}\log_b b \times \frac{1}{2}\log_c c$

$= \frac{1}{2}(1) \times \frac{1}{2}(1) \times \frac{1}{2}(1)$ $[\because \log_x x = 1]$

$= \frac{1}{8}$

iii. ধরি, $\log_a y = m, \log_a x = n$

$\therefore a^m = y, a^n = x$

$\therefore (a^m)^n = y^n$ এবং $(a^n)^m = x^m$

বা, $a^{mn} = y^n$ বা, $a^{mn} = x^m$

$\therefore x^m = y^n$

$\Rightarrow x^{\log_a y} = y^{\log_a x}$ $\therefore$ (iii) নং সঠিক।

■ ৩ - ৫ নং প্রশ্নের উত্তর দাও যখন $x, y, z \neq 0$ এবং $a^x = b^y = c^z$

৩ কোনটি সঠিক?

(ক) $a = b^{\frac{y}{z}}$ (খ) $a = c^{\frac{z}{y}}$ (গ) $a = c^{\frac{z}{x}}$ (ঘ) $a \neq \frac{b^2}{c}$

উত্তরঃ (গ)

ব্যাখ্যাঃ দেওয়া আছে, $a^x = c^z$

$\therefore a = c^{\frac{z}{x}}$

৪ নিচের কোনটি ac এর সমান?

(ক) $b^{\frac{y}{x}}.b^{\frac{y}{z}}$ (খ) $b^{\frac{y}{x}}.b^{\frac{z}{y}}$

(গ) $b^{\frac{y}{x}+\frac{z}{y}}$ (ঘ) $b^{\frac{z}{y}+\frac{y}{z}}$

উত্তরঃ (ক)

ব্যাখ্যাঃ দেওয়া আছে, $a^x = b^y \therefore a = b^{\frac{y}{x}}$

আবার, $c^z = b^y \therefore c = b^{\frac{y}{z}}$

$\therefore ac = b^{\frac{y}{x}}.b^{\frac{y}{z}}$

৫ $b^2 = ac$ হলে নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) $\frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$ (খ) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{z}$

(গ) $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{2}{x}$ (ঘ) $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{z}{2}$

উত্তরঃ (ক)

ব্যাখ্যাঃ দেওয়া আছে, $a^x = b^y$ বা, $a = b^{\frac{y}{x}}$

আবার, $c^z = b^y \therefore c = b^{\frac{y}{z}}$

এখন, $b^2 = ac = b^{\frac{y}{x}}.b^{\frac{y}{z}} = b^{\frac{y}{x}+\frac{y}{z}}$

বা, $2 = \frac{y}{x}+\frac{y}{z}$

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{2}{y}$

৬ দেখাও যে,

(ক) $\log_k\left(\frac{a^n}{b^n}\right)+\log_k\left(\frac{b^n}{c^n}\right)+\log_k\left(\frac{c^n}{a^n}\right)=0$

(খ) $\log_k(ab)\log_k\left(\frac{a}{b}\right)+\log_k(bc)\log_k\left(\frac{b}{c}\right)+\log_k(ca)\log_k\left(\frac{c}{a}\right)=0$

(গ) $\log_{\sqrt{a}} b \times \log_{\sqrt{b}} c \times \log_{\sqrt{c}} a = 8$

(ঘ) $\log_a\log_a\log_a\left(a^{a^{a^b}}\right)=b$

সমাধানঃ

ক $\log_k\left(\frac{a^n}{b^n}\right)+\log_k\left(\frac{b^n}{c^n}\right)+\log_k\left(\frac{c^n}{a^n}\right)=0$

বামপক্ষ $= \log_k\left(\frac{a^n}{b^n}\right)+\log_k\left(\frac{b^n}{c^n}\right)+\log_k\left(\frac{c^n}{a^n}\right)$

$= \log_k\left(\frac{a^n}{b^n}.\frac{b^n}{c^n}.\frac{c^n}{a^n}\right)$

$= \log_k 1$

$= \log_k k^0$

$= 0 =$ ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

(ক) এর দ্বিতীয় পদ্ধতি

বামপক্ষ $= \log_k\left(\frac{a^n}{b^n}\right)+\log_k\left(\frac{b^n}{c^n}\right)+\log_k\left(\frac{c^n}{a^n}\right)$

$= \log_k a^n - \log_k b^n + \log_k b^n - \log_k c^n + \log_k c^n - \log_k a^n$

$= 0$

$=$ ডানপক্ষ

খ $\log_k(ab)\log_k\left(\frac{a}{b}\right) + \log_k(bc)\log_k\left(\frac{b}{c}\right) + \log_k(ca)\log_k\left(\frac{c}{a}\right) = 0$

বামপক্ষ $= \log_k(ab)\log_k\left(\frac{a}{b}\right) + \log_k(bc)\log_k\left(\frac{b}{c}\right) + \log_k(ca)\log_k\left(\frac{c}{a}\right)$

$= \{(\log_k a + \log_k b).(lob_k a - \log_k b)\} + \{(\log_k b + \log_k c).(\log_k b - \log_k c)\} + \{(\log_k c + \log_k a).(\log_k c - \log_k a)\}$

$= (\log_k a)^2 - (\log_k b)^2 + (\log_k b)^2 - (\log_k c)^2 + (\log_k c)^2 - (\log_k a)^2$

$= 0 =$ ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

গ $\log_{\sqrt{a}} b \times \log_{\sqrt{b}} c \times \log_{\sqrt{c}} a = 8$

বামপক্ষ $= \log_{\sqrt{a}} b \times \log_{\sqrt{b}} c \times \log_{\sqrt{c}} a$

$= \log_{\sqrt{a}} (\sqrt{b})^2 + \log_{\sqrt{b}} (\sqrt{c})^2 + \log_{\sqrt{c}} (\sqrt{a})^2$

$= 2\log_{\sqrt{a}} \sqrt{b} \times 2\log_{\sqrt{b}} \sqrt{c} \times 2\log_{\sqrt{c}} \sqrt{a}$

$= 8(\log_{\sqrt{a}}\sqrt{b} \times \log_{\sqrt{b}}\sqrt{c} \times \log_{\sqrt{c}}\sqrt{a})$

$= 8(\log_{\sqrt{a}}\sqrt{b} \times \log_{\sqrt{b}}\sqrt{a})$ $[\because \log_a p = \log_a b \times \log_b p]$

$= 8 \times \log_{\sqrt{a}} \sqrt{a}$

$= 8 \times 1 = 8 =$ ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

ঘ $\log_a \log_a \log_a \left(a^{a^{a^b}}\right) = b$

বামপক্ষ $= \log_a \log_a \log_a \left(a^{a^{a^b}}\right)$

$= \log_a \log_a\left(a^{a^b}\right) \log_a a$ $[\because \log_a p^r = r\log_a p]$

$= \log_a \log_a\left(a^{a^b}\right).1$ $[\because \log_a a = 1]$

$= \log_a(a^b) \log_a a$

$= \log_a a^b$

$= b.\log_a a = b.1 = b =$ ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

৭ (ক) যদি $\frac{\log_k a}{b-c} = \frac{\log_k b}{c-a} = \frac{\log_k c}{a-b}$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^a b^b c^c = 1$

সমাধানঃ ধরি, $\frac{\log_k a}{b-c} = \frac{\log_k b}{c-a} = \frac{\log_k c}{a-b} = p$

$\therefore \frac{\log_k a}{b-c} = p$

বা, $\log_k a = p(b-c)$

বা, $a \log_k a = ap(b-c)$ [উভয়পক্ষে a দ্বারা গুণ করে]

বা, $\log_k a^a = p(ab - ac)$ ... ...(i)

আবার, $\frac{\log_k b}{c-a} = p$

বা, $\log_k b = p(c-a)$

বা, $b \log_k b = pb(c-a)$ [উভয়পক্ষে b দ্বারা গুণ করে]

$\therefore \log_k b^b = p(bc - ab)$ ... ... (ii)

এবং $\frac{\log_k c}{a-b} = p$

বা, $\log_k c = p(a-b)$

বা, $c \log_k c = pc(a-b)$ [উভয়পক্ষে c দ্বারা গুণ করে]

বা, $\log_k c^c = p(ac - bc)$ ... ... (ii)

(i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই

$\log_k a^a + \log_k b^b + \log_k c^c = p(ab - ac + bc - ab + ac - bc)$

বা, $\log_k (a^a.b^b.c^c) = 0$

বা, $\log_k (a^a.b^b.c^c) = \log_k 1$

$\therefore a^a.b^b.c^c = 1$ **(দেখানো হলো)**

◆◆ অনুশীলনীর ৭(ক) নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

a, b, c ∈ R **: যেখানে** $a = 1 + 3^{\frac{1}{3}} + 3^{\frac{2}{3}}$ **এবং** $\frac{\log_k a}{b-c} = \frac{\log_k b}{c-a} = \frac{\log_k c}{a-b}$ ক. দেখাও যে, $\log_a \log_a \log_a (a^{a^{a^b}}) = b$ খ. দেখাও যে, $a^3 - 3a^2 - 6a - 4 = 0$ গ. $a^a.b^b.c^c$ এর মান নির্ণয় কর।	**নিজে নিজে চেষ্ট কর।** (গ) 1

৭ (খ) যদি $\frac{\log_k a}{y-z} = \frac{\log_k b}{z-x} = \frac{\log_k c}{x-y}$ হয়, তবে দেখাও যে,
(১) $a^{y+z} b^{z+x} c^{x+y} = 1$
(২) $a^{y^2+yz+z^2}.b^{z^2+zx+x^2}.c^{x^2+xy+y^2} = 1$

সমাধানঃ

১ দেওয়া আছে, $\frac{\log_k a}{y-z} = \frac{\log_k b}{z-x} = \frac{\log_k c}{x-y} = m$ (ধরি)

$\therefore \frac{\log_k a}{y-z} = m$

বা, $\log_k a = m(y-z)$

বা, $(y+z) \log_k a = m(y-z)(y+z)$

[উভয়পক্ষে $(y+z)$ দ্বারা গুণ করে]

$\therefore \log_k a^{(y+z)} = m(y^2 - z^2)$ ... ... (i)

আবার, $\frac{\log_k b}{z-x} = m$

বা, $\log_k b = m(z-x)$

বা, $(z+x) \log_k b = m(z-x)(z+x)$

[উভয়পক্ষে $(z+x)$ দ্বারা গুণ করে]

$\therefore \log_k b^{(z+x)} = m(z^2 - x^2)$ ... ... (ii)

এবং $\frac{\log_k c}{x-y} = m$

বা, $\log_k c = m(x-y)$

বা, $(x+y) \log_k c = m(x-y)(x+y)$

[উভয়পক্ষকে $(x+y)$ দ্বারা গুণ করে]

$\therefore \log_k c^{(x+y)} = m(x^2 - y^2)$ ... ... (iii)

(i), (ii) ও (iii) সমীকরণ যোগ করে পাই,

$\log_k a^{y+x} + \log_k b^{z+x} + \log_k c^{x+y} = m(y^2 - z^2 + z^2 - x^2 + x^2 - y^2)$

বা, $\log_k a^{y+z} + \log_k b^{z+x} + \log_k c^{x+y} = 0$

বা, $\log_k (a^{y+z}. b^{z+x}. c^{x+y}) = \log_k 1$

$\therefore a^{y+z}. b^{z+x}. c^{x+y} = 1$ **(দেখানো হলো)**

২ ধরি, $\frac{\log_k a}{y-z} = m$

$\frac{\log_k a}{y-z} = \frac{\log_k b}{z-x} = \frac{\log_k c}{x-y} = m$

বা, $\log_k a = m(y-z)$

বা, $(y^2+yz+z^2)\log_k a = m(y-z)(y^2+yz+z^2)$

বা, $\log_k a^{(y^2+yz+z^2)} = m(y^3-z^3)$ ... ... (i)

আবার, $\frac{\log_k b}{z-x} = m$

বা, $\log_k b = m(z-x)$

বা, $(z^2+zx+x^2)\log_k b = m(z-x)(z^2+zx+x^2)$

বা, $\log_k b^{(z^2+zx+x^2)} = m(z^3-x^3)$... ... ... (ii)

এবং, $\frac{\log_k c}{x-y} = m$

বা, $\log_k c = m(x-y)$

বা, $(x^2+xy+y^2)\log_k c = m(x-y)(x^2+xy+y^2)$

$\therefore \log_k c^{(x^2+xy+y^2)} = m(x^3-y^3)$ ... ... (iii)

(i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$\log_k a^{y^2+yz+z^2} + \log_k b^{z^2+zx+x^2} + \log_k c^{x^2+xy+y^2} = m(y^3-z^3+z^3-x^3+x^3-y^3)$

বা, $\log_k(a^{y^2+yz+z^2}.b^{z^2+zx+x^2}.c^{x^2+xy+y^2}) = 0$

$\therefore a^{y^2+yz+z^2}.b^{z^2+zx+x^2}.c^{x^2+xy+y^2} = k^0 = 1$ **(দেখানো হলো)**

◆◆ অনুশীলনীর ৭(খ)নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

$\frac{\log_k p}{y-z} = \frac{\log_k q}{z-x} = \frac{\log_k r}{x-y}$ ক. প্রমাণ কর যে, $pqr = 1$ খ. $p^{y+z}.q^{z+x}.r^{x+y} = 1$ গ. $p^{y^2+yz+z^2}.q^{z^2+zx+x^2}.r^{x^2+xy+y^2} = 1$	নিজে নিজে চেষ্ট কর।

৭ (গ) যদি $\frac{\log_k(1+x)}{\log_k x} = 2$ হয়, তবে দেখাও যে, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\frac{\log_k(1+x)}{\log_k x} = 2$

বা, $\log_k(1+x) = 2\log_k x$

বা, $\log_k(1+x) = \log_k x^2$

বা, $1+x = x^2$

বা, $x^2-x-1 = 0$

বা, $x = \frac{-(-1)\pm\sqrt{(-1)^2-4.(-1).1}}{2}$

বা, $x = \frac{1\pm\sqrt{1+4}}{2}$

বা, $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}$

যেহেতু $\frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ তাই $x = \frac{1-\sqrt{5}}{2} < 0$ গ্রহণযোগ্য নয়, কারণ x এর ঋণাত্মক মানের জন্য $\log x$ এর কোনো বাস্তব মান নেই।

$\therefore x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ **(দেখানো হলো)**

৭ (ঘ) দেখাও যে, $\log_k\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}} = 2\log_k(x-\sqrt{x^2-1})$

সমাধান: বামপক্ষ $= \log_k\frac{x-\sqrt{x^2-1}}{x+\sqrt{x^2-1}}$

$= \log_k\frac{(x-\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}{(x+\sqrt{x^2-1})(x-\sqrt{x^2-1})}$

[লব ও হরকে $(x-\sqrt{x^2-1})$ দ্বারা গুণ করে]

$= \log_k\frac{(x-\sqrt{x^2-1})^2}{(x)^2-(\sqrt{x^2-1})^2}$

$= \log_k\frac{(x-\sqrt{x^2-1})^2}{x^2-x^2+1}$

$= \log_k(x-\sqrt{x^2-1})^2$

$= 2\log_k(x-\sqrt{x^2-1})$ = ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

৭ (ঙ) যদি $a^{3-x}b^{5x} = a^{5+x}b^{3x}$ হয়, তবে দেখাও যে, $x\log_k\left(\frac{b}{a}\right) = \log_k a$

সমাধান: দেওয়া আছে, $a^{3-x}b^{5x} = a^{5+x}b^{3x}$

বা, $\frac{b^{5x}}{b^{3x}} = \frac{a^{5+x}}{a^{3-x}}$

বা, $b^{5x-3x} = a^{5+x-3+x}$

বা, $b^{2x} = a^{2+2x}$

বা, $b^{2x} = a^2.a^{2x}$

বা, $\frac{b^{2x}}{a^{2x}} = a^2$

বা, $\left(\frac{b}{a}\right)^{2x} = (a)^2$

বা, $\log_k\left(\frac{b}{a}\right)^{2x} = \log_k(a)^2$ [উভয়পক্ষে $\log_k$ নিয়ে]

বা, $2x\log_k\left(\frac{b}{a}\right) = 2\log_k a$

$\therefore x\log_k\left(\frac{b}{a}\right) = \log_k a$ **(দেখানো হলো)**

৭ (চ) যদি $xy^{a-1} = p, xy^{b-1} = q, xy^{c-1} = r$ হয়, তবে দেখাও যে, $(b-c)\log_k p + (c-a)\log_k q + (a-b)\log_k r = 0$

<u>সমাধান</u>ঃদেওয়া আছে, $xy^{a-1} = p, xy^{b-1} = q, xy^{c-1} = r$

বামপক্ষ $= (b-c)\log_k p + (c-a)\log_k q + (a-b)\log_k r$

$= \log_k p^{b-c} + \log_k q^{c-a} + \log_k r^{a-b}$

$= \log_k (xy^{a-1})^{b-c} + \log_k (xy^{b-1})^{c-a} + \log_k (xy^{c-1})^{a-b}$ [p, q ও r এর মান বসিয়ে]

$= \log_k x^{b-c} + \log_k y^{ab-ac-b+c} + \log_k x^{c-a} + \log_k y^{bc-ab-c+a} + \log_k x^{a-b} + \log_k y^{ac-bc-a+b}$

$= (\log_k x^{b-c} + \log_k x^{c-a} + \log_k x^{a-b}) + (\log_k y^{ab-ac-b+c} + \log_k y^{bc-ab-c+a} + \log_k y^{ac-bc-a+b})$

$= \log_k (x^{b-c}.x^{c-a}.x^{a-b}) + \log_k (y^{ab-ac-b+c}.y^{bc-ab-ca-c+a}.y^{ac-bc-ab+b})$

$= \log_k (x^{b-c+c-a+a-b}) + \log_k (y^{ab-ac-b+c+bc-ab-c+a+ac-bc-a+b})$

$= \log_k x^0 + \log_k y^0$

$= \log_k 1 + \log_k 1$

$= 0 + 0 = 0 =$ ডানপক্ষ **(দেখানো হলো)**

◆◆ <u>অনুশীলনীর ৭(চ) নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর</u> ◆◆

$p = xy^{a-1}, q = xy^{b-1}, r = xy^{c-1}$ ক. $a^b = b^a$ হলে দেখাও যে, $\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{a}{b}} = a^{\frac{a}{b}-1}$ খ. প্রমাণ কর যে, $(b+a)\log\frac{p}{q} + (c+b)\log\frac{q}{r} + (a+c)\log\frac{r}{p} = 0$ গ. $(b-c)\log p + (c-a)\log q + (a-b)\log r$ এর মান নির্ণয় কর।	নিজে নিজে চেষ্টা কর। (গ) 0

৭ (ছ) যদি $\frac{ab\log_k(ab)}{a+b} = \frac{bc\log_k(bc)}{b+c} = \frac{ca\log_k(ca)}{c+a}$ হয়, তবে দেখাও যে, $a^a = b^b = c^c$

<u>সমাধান</u>ঃ ধরি, $\frac{ab\log_k(ab)}{a+b} = \frac{bc\log_k(bc)}{b+c} = \frac{ca\log_k(ca)}{c+a} = m$

তাহলে, $ab\log_k(ab) = m(a+b)$

বা, $\log_k(ab) = \frac{m(a+b)}{ab}$

বা, $\log_k(ab) = m\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ ... ...(i)

অনুরূপভাবে, $\log_k(bc) = m\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ ... ... (ii)

$\log_k(ca) = m\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$ ... ... (iii)

(i), (ii) ও (iii) নং যোগ করে পাই,

$\log_k ab + \log_k bc + \log_k ca = m\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$

বা, $\log_k(ab.bc.ca) = 2m\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

বা, $\log_k(abc)^2 = 2m\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

বা, $2\log_k(abc) = 2m\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

$\therefore \log_k(abc) = m\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ ... ... (iv)

(iv) নং থেকে (i) নং সমীকরণ বিয়োগ করে পাই,

$\log_k(abc) - \log_k(ab) = m\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) - m\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$

বা, $\log_k\left(\frac{abc}{ab}\right) = m\left(\frac{1}{c}\right)$

বা, $\log_k c = \frac{m}{c}$

বা, $c\log_k c = m$

বা, $\log_k c^c = m$... ... ... (v)

(iv) নং থেকে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$\log_k(abc) - \log_k(bc) = m\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) - m\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$

বা, $\log_k\left(\frac{abc}{bc}\right) = m.\frac{1}{a}$

বা, $\log_k a = \frac{m}{a}$

বা, $a\log_k a = m$

বা, $\log_k a^a = m$ ... ... (vi)

আবার, (iv) নং থেকে (iii) নং বিয়োগ করে পাই,

$\log_k(abc) - \log_k(ca) = m\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) - m\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$

বা, $\log_k\left(\frac{abc}{ca}\right) = m.\frac{1}{b}$

বা, $\log_k b = \frac{m}{b}$

বা, $b\log_k b = m$

$\therefore \log_k b^b = m$ ... ... (vii)

(v), (vi) ও (vii) নং সমীকরণ তুলনা করে পাই,

$\log_k c^c = \log_k a^a = \log b^b$

$\therefore a^a = b^b = c^c$ **(দেখানো হলো)**

৭ (জ) যদি $\frac{x(y+z-x)}{\log_k x} = \frac{y(z+x-y)}{\log_k y} = \frac{z(x+y-z)}{\log_k z}$ হয়, তবে দেখাও যে, $x^y y^x = y^z z^y = z^x x^z$

<u>সমাধান</u>: ধরি, $\frac{x(y+z-x)}{\log_k x} = \frac{y(z+x-y)}{\log_k y} = \frac{z(x+y-z)}{\log_k z} = m$

$\therefore \log_k x = \frac{x(y+z-x)}{m}$ ... ... (i)

আবার, $\log_k y = \frac{y(z+x-y)}{m}$ ... ... (ii)

এবং $\log_k z = \frac{z(x+y-z)}{m}$ ... ... (iii)

(i) $\times y$ + (ii) $\times x$ করে পাই,

এখন, $y \log_k x + x \log_k y = \frac{xy(y+z-x)}{m} + \frac{xy(z+x-y)}{m}$

বা, $\log_k x^y + \log_k y^x = \frac{xy}{m}(y+z-x+z+x-y)$

বা, $\log_k (x^y . y^x) = \frac{2xyz}{m}$

$\therefore x^y . y^x = k^{\frac{2xyz}{m}}$ ... ... (iv)

(ii) $\times z$ + (iii) $\times y$ করে পাই,

$z \log_k y + y \log_k z = \frac{yz(z+x-y)}{m} + \frac{yz(x+y-z)}{m}$

বা, $\log_k y^z + \log_k z^y = \frac{yz}{m}(z+x-y+x+y-z)$

বা, $\log_k (y^z . z^y) = \frac{2xyz}{m}$

$\therefore y^z . z^y = k^{\frac{2xyz}{m}}$ ... ... (v)

(iii) $\times x$ + (i) $\times z$ করে পাই,

আবার, $x \log_k z + z \log_k x = \frac{zx(x+y-z)}{m} + \frac{zx(y+z-x)}{m}$

বা, $\log_k z^x + \log_k x^z = \frac{zx}{m}(x+y-z+y+z-x)$

বা, $\log_k (z^x . x^z) = \frac{2xyz}{m}$

$\therefore z^x . x^z = k^{\frac{2xyz}{m}}$ ... ... (vi)

(iv), (v) ও (vi) নং সমীকরণ তুলনা করে পাই,

$x^y . y^x = y^z . z^y = z^x . x^z$ **(দেখানো হলো)**

৮ লেখচিত্র অঙ্কন কর:

(ক) $y = 3^x$ (খ) $y = -3^x$ (গ) $y = 3^{x+1}$

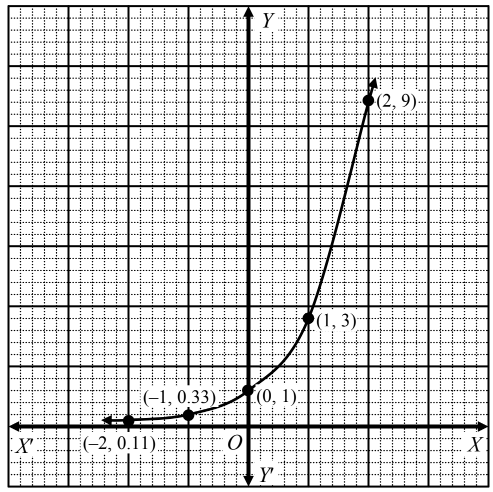
(ঘ) $y = -3^{x+1}$ (ঙ) $y = 3^{-x+1}$ (চ) $y = 3^{x-1}$

<u>সমাধান</u>:

ক প্রদত্ত ফাংশন: $y = 3^x$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা তৈরি করি:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 3^x$	0.11	0.33	1	3	9



ছক কাগজের XOX' বরাবর x-অক্ষ এবং YOY' বরাবর y-অক্ষ আঁকি। x-অক্ষ বরবার ক্ষুদ্রতম বর্গের পাঁচ বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের তিন বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে (–2, 0.11), (–1, 0.33), (0, 1), (1, 3), (2, 9) বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সাবলীলভাবে যোগ করে ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।

◆◆ অনুশীলনীর ৮(ক)নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

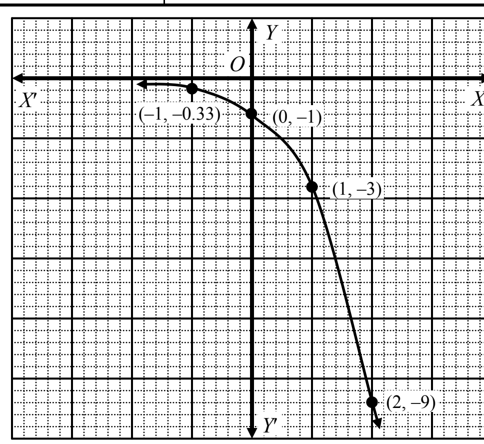
দেওয়া আছে, $y = 3^x$ *ক. প্রদত্ত ফাংশনটির ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।* *খ. ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর।* *গ. ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর এবং তা এক-এক কিনা নির্ধারণ কর।*	**নিজে নিজে চেষ্টা কর।**

খ প্রদত্ত ফাংশন: $y = -3^x$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা তৈরি করি:

x	-1	0	1	2
$y = -3^x$	-0.33	-1	-3	-9

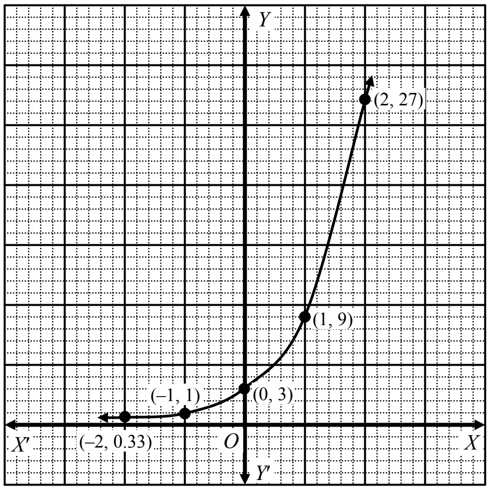
ছক কাগজের XOX' বরাবর x-অক্ষ এবং YOY' বরাবর y-অক্ষ আঁকি। x-অক্ষ বরবার ক্ষুদ্রতম বর্গের পাঁচ বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের তিন বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে (–1, – 0.33), (0, –1), (1, –3), (2, –9) বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সাবলীলভাবে যোগ করে ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।



গ প্রদত্ত ফাংশন: $y = 3^{x+1}$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা তৈরি করি:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 3^{x+1}$	0.33	1	3	9	27

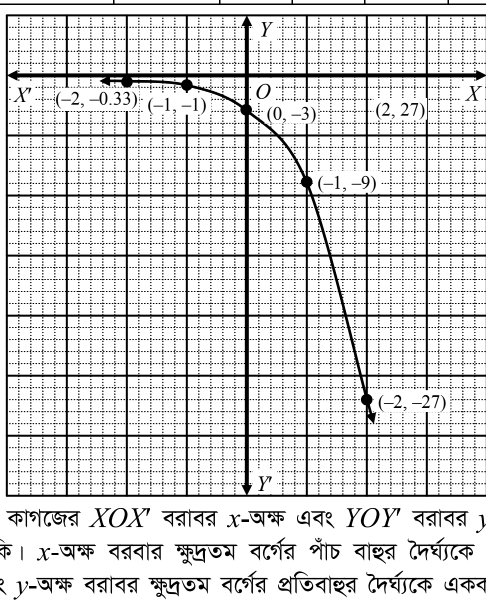


ছক কাগজের XOX' বরাবর x-অক্ষ এবং YOY' বরাবর y-অক্ষ আঁকি। x-অক্ষ বরবার ক্ষুদ্রতম বর্গের পাঁচ বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(-2, 0.33), (-1, 1), (0, 3), (1, 9), (2, 27)$ বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সাবলীলভাবে যোগ করে ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।

ঘ প্রদত্ত ফাংশন: $y = -3^{x+1}$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা তৈরি করি:

x	-2	-1	0	1	2
$y = -3^{x+1}$	-0.33	-1	-3	-9	-27

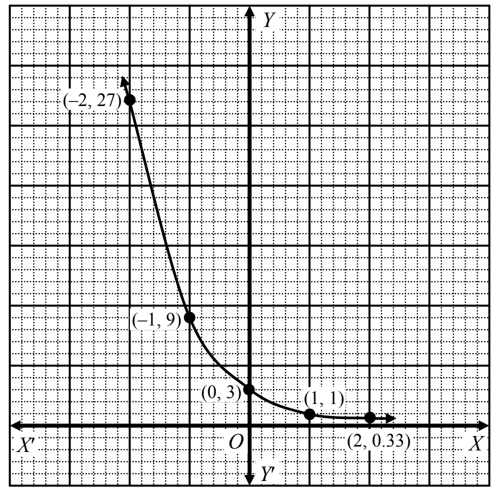


ছক কাগজের XOX' বরাবর x-অক্ষ এবং YOY' বরাবর y-অক্ষ আঁকি। x-অক্ষ বরবার ক্ষুদ্রতম বর্গের পাঁচ বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(-2, -0.33), (-1, -1), (0, -3), (1, -9), (2, -27)$ বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সাবলীলভাবে যোগ করে ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।

ঙ প্রদত্ত ফাংশন: $y = 3^{-x+1}$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা তৈরি করি:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 3^{-x+1}$	27	9	3	1	0.33

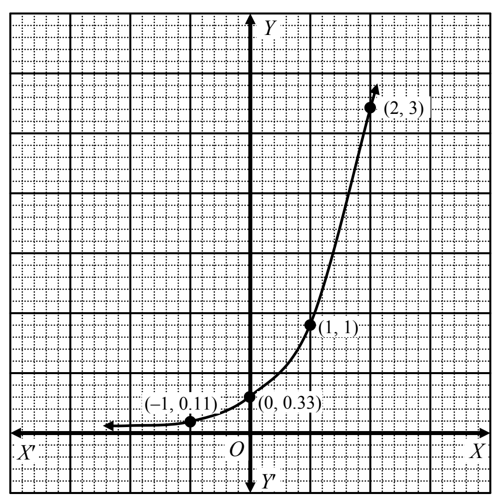


ছক কাগজের XOX' বরাবর x-অক্ষ এবং YOY' বরাবর y-অক্ষ আঁকি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের পাঁচ বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(-2, 27), (-1, 9), (0, 3), (1, 1), (2, 0.33)$ বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সাবলীলভাবে যোগ করে ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।

চ প্রদত্ত ফাংশন: $y = 3^{x-1}$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা তৈরি করি:

x	-1	0	1	2
$y = 3^{x}$	0.11	0.33	1	3



ছক কাগজের XOX' বরাবর x-অক্ষ এবং YOY' বরাবর y-অক্ষ আঁকি। ছক কাগজের উভয় অক্ষের ক্ষুদ্রতম বর্গের নয় বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(-1, 0.11), (0, 33), (1, 1), (2, 3)$ বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সাবলীলভাবে যোগ করে ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।

৯ **নিচের ফাংশনের বিপরীত ফাংশন লিখ এবং লেখচিত্র অঙ্কন করে ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর।**
(ক) $y = 1 - 2^x$ (খ) $y = \log_{10} x$ (গ) $y = x^2, x > 0$

সমাধান:

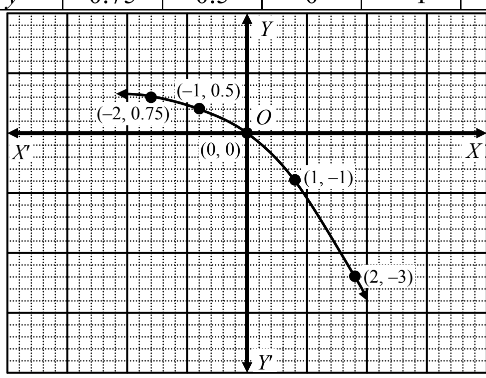
ক **বিপরীত ফাংশন নির্ণয়:**

ধরি, $y = f(x) = 1 - 2^x$
তাহলে, $y = f(x)$
$\therefore x = f^{-1}(y)$
আবার, $y = 1 - 2^x$
বা, $2^x = 1 - y$
বা, $x = \log_2(1 - y)$
বা, $f^{-1}(y) = \log_2(1 - y)$
$\therefore f^{-1}(x) = \log_2(1 - x)$
$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের বিপরীত ফাংশন হলো: $f^{-1}(x) = \log_2(1 - x)$

লেখচিত্র অঙ্কন:

প্রদত্ত ফাংশন, $y = 1 - 2^x$
লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা তৈরি করি:

x	-2	-1	0	1	2
y	0.75	0.5	0	-1	-3



ছক কাগজের XOX' বরাবর x-অক্ষ এবং YOY' বরাবর y-অক্ষ আঁকি। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের চার বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(-2, 0.75), (-1, 0.5), (0, 0), (1, -1)$ $(2, -3)$ বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সাবলীলভাবে যোগ করে ফাংশটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।

ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়:

প্রদত্ত ফাংশনটি x সকল বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত।
$\therefore$ ডোমেন, $D_f = (-\infty, \infty)$
লেখচিত্র থেকে দেখা যায় যে,
যখন $x = 0, y = 1 - 2^0 = 1 - 1 = 0$
যখন $x \to -\infty$ তখন $y \to 1$
যখন $x \to \infty$ তখন $y \to -\infty$
$\therefore$ 1 থেকে ছোট সকল বাস্তব সংখ্যাই y এর মান।
রেঞ্জ, $R_f = (-\infty, 1)$

✉ **লক্ষণীয়:** পাঠ্যবইয়ের উত্তরে ভুল রয়েছে।

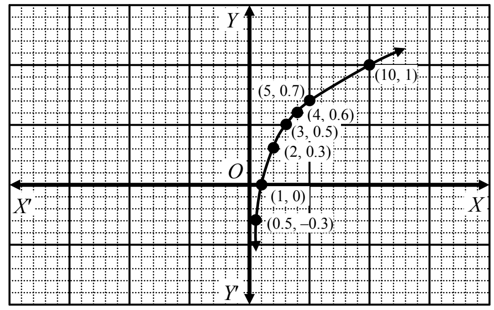
খ **বিপরীত ফাংশন নির্ণয়:**

প্রদত্ত ফাংশন, $y = \log_{10}x$
$\therefore x = 10^y$
প্রদত্ত ফাংশনের বিপরীত ফাংশন $x = 10^y$

লেখচিত্র অঙ্কন:

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা তৈরি করি:

x	0.5	1	2	3	4	5	10
y	-0.3	0	0.3	0.5	0.6	0.7	1



মনেকরি, ছক কাগজের XOX' বরাবর x-অক্ষ এবং YOY' বরাবর y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্যকে একক এবং y-অক্ষ বরাবর দশ বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(0.5, -0.3), (1, 0), (2, 0.3), (3, 0.5), (4, 0.6), (5, 0.7), (10, 1)$ বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সাবলীল ভাবে যোগ করে ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।

ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়:

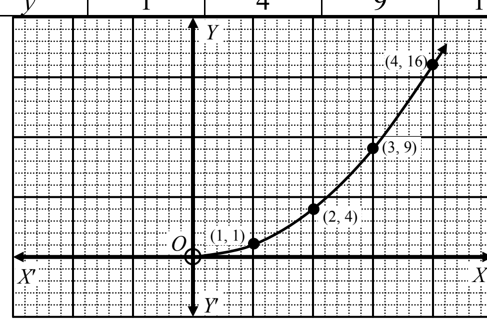
যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয় এবং শূন্যতে অসংজ্ঞায়িত।
$\therefore$ ডোমেন, $D_f = (0, \infty)$
আবার, লেখচিত্র হতে দেখা যায়,
যখন, $x \to 0$ তখন $y \to -\infty$
যখন $x \to \infty$ তখন $y \to \infty$
$\therefore$ রেঞ্জ $R_f = (-\infty, +\infty)$

গ **বিপরীত ফাংশন নির্ণয়:**

প্রদত্ত ফাংশন, $y = x^2, x > 0$
ধরি, $y = f(x) = x^2$
তাহলে, $y = f(x)$
$\therefore x = f_2^{-1}(y)$
আবার, $x^2 = y$
বা, $x = \sqrt{y}$; [$x > 0$ হওয়ায় x এর ঋণাত্মক মান গ্রহণযোগ্য নয়]
বা, $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$
$\therefore f^{-1}(x) = \sqrt{x}\ ; x > 0$

লেখচিত্র অঙ্কন: প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর মান গুলোর তালিকা তৈরি করি:

x	1	2	3	4
y	1	4	9	16



মনেকরি, ছক কাগজের XOX' বরাবর y-অক্ষে এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজে x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের পাঁচ বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(1, 1), (2, 4), (3, 9)$ $(4, 16)$ বিন্দুগুলো স্থাপন করি এবং সাবলীলভাবে যোগ করে ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।

ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়:

যেহেতু $y = x^2, x > 0$ সেহেতু 0 ব্যতীত সকল বাস্তব মানের জন্য ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত।
$\therefore$ ডোমেন $D_f = (0, \infty)$
আবার, $x > 0$ এর জন্য y এর মান 0 থেকে বড় সকল বাস্তব সংখ্যা।
রেঞ্জ $R_f = (0, \infty)$

১০ $f(x) = \ln(x-2)$ ফাংশনটির ডোমেন D_f এবং রেঞ্জ R_f নির্ণয় কর।

সমাধান: আমরা জানি, লগারিদম শুধু ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত।

$\therefore f(x) = \ln(x-2)$ এর মান বাস্তব হবে যদি

$x - 2 > 0$ বা, $x > 2$ হয়।

$\therefore$ ডোমেন $D_f = (2, \infty)$

আবার ধরি, $y = f(x) = \ln(x-2)$

বা, $e^y = x - 2$

বা, $x - 2 = e^y$

বা, $x = e^y + 2$

বা, y এর সকল বাস্তব মানের জন্য e^y বাস্তব, ফলে $x = e^y + 2$ বাস্তব।

$\therefore$ রেঞ্জ $R_f = R$

Ans: $D_f = (2, \infty), R_f = R$

১১ $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$ ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান: ডোমেন নির্ণয়: প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$

যেহেতু লগারিদম শুধু ধনাত্মক বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত হয়,

তাই $\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ এর মান সংজ্ঞায়িত হবে যদি $\dfrac{1-x}{1+x} > 0$ হয়।

এখন, $\dfrac{1-x}{1+x} > 0$

বা, $\dfrac{-(x-1)}{x+1} > 0$

বা, $\dfrac{x-1}{x+1} < 0$ [উভয়পক্ষে -1 দ্বারা ভাগ করে]

এখন, $\dfrac{x-1}{x+1} < 0$ হবে যদি এবং কেবল যদি $(x-1)$ ও $(x+1)$ এর একটি ধনাত্মক ও অপরটি ঋণাত্মক হয়।

লক্ষ করি:

	$x+1$ এর চিহ্ন	$x-1$ এর চিহ্ন
$x < -1$ হলে	$-$	$-$
$-1 < x < 1$ হলে	$+$	$-$
$x > 1$ হলে	$+$	$+$

দেখা যাচ্ছে, $-1 < x < 1$ হলে $(x+1)$ ধনাত্মক ও $(x-1)$ ঋণাত্মক হয়।

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x \in R; -1 < x < 1\}$

$= (-1, 1)$

ডোমেন নির্ণয় বিকল্প পদ্ধতি:

যেহেতু লগারিদম শুধু ধনাত্মক বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত হয়,

তাই $\ln\dfrac{1-x}{1+x}$ এর মান সংজ্ঞায়িত হবে যদি $\dfrac{1-x}{1+x} > 0$ হয়।

এখন, $\dfrac{1-x}{1+x} > 0$ হবে যদি $(1-x)$ ও $(1+x)$ উভয়ই ধনাত্মক অথবা উভয়ই ঋণাত্মক হয়।

লক্ষ করি:

	$1-x$ এর চিহ্ন	$1+x$ এর চিহ্ন
$x < -1$ হলে	$+$	$-$
$-1 < x < 1$ হলে	$+$	$+$
$x > 1$ হলে	$-$	$+$

যেহেতু $-1 < x < 1$ হলে, $(1-x)$ ও $(1+x)$ উভয়ই ধনাত্মক হয়,

$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x \in R; -1 < x < 1\} = (-1, 1)$

রেঞ্জ নির্ণয়: $y = \ln\dfrac{1-x}{1+x}$

বা, $e^y = \dfrac{1-x}{1+x}$

বা, $1 - x = e^y + xe^y$

বা, $xe^y + e^y = 1 - x$

বা, $xe^y + x = 1 - e^y$

বা, $x(e^y + 1) = 1 - e^y$

বা, $x = \dfrac{1-e^y}{1+e^y}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ, $R_f = R$

Ans: $D_f = (-1, 1)$ এবং $R_f = R$

বি.দ্র: অঙ্কটির সমাধান ভালোভাবে বোঝার জন্য পাঠ্যবই-২১৫ পৃষ্ঠার কাজের সমাধান অংশ দেখে নাও।

১২ ডোমেন এবং রেঞ্জ উল্লেখসহ লেখচিত্র অঙ্কন কর।

(ক) $f(x) = |x|$, যখন $-5 \le x \le 5$

(খ) $f(x) = x + |x|$, যখন $-2 \le x \le 2$

(গ) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0, & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

সমাধান:

ক ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়:

দেওয়া আছে, $f(x) = |x|$, যখন $-5 \le x \le 5$

x এর প্রদত্ত সীমার মধ্যে $f(x)$ এর সর্বদা বাস্তব মান পাওয়া যায়।

$\therefore D_f = -5 \le x \le 5 = [-5, 5]$

আবার, $x = -5$ এর জন্য $f(-5) = |-5| = 5$

$x = 0$ এর জন্য $f(0) = |0| = 0$

$x = 5$ এর জন্য $f(5) = |5| = 5$

যেহেতু $-5 \le x \le 5$ ব্যবধিতে

$f(x)$ এর মান হবে $0 \le f(x) \le 5 = [0, 5]$

$\therefore$ রেঞ্জ $R_f = [0, 5]$

লেখচিত্র অঙ্কন:

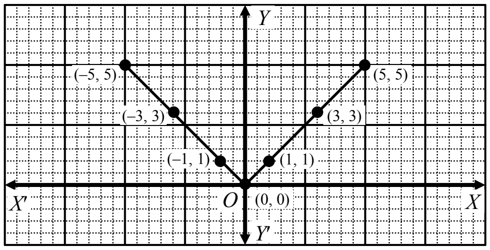
ধরি, $y = f(x) = |x|$

-5 থেকে 5এর মধ্যে x এর কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো:

x	-5	-3	-1	0	1	3	5
y	5	3	1	0	1	3	5

এখন ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 2 বর্গঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 2 বর্গঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখচিত্র পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো:



খ এখানে $-2 \leq x \leq 2$ সীমার মধ্যে x এর প্রতিটি বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর প্রতিচ্ছবি রয়েছে।

$\therefore$ ফাংশনের ডোমেন, $D_f = [-2, 2]$

যখন $x = -2$ তখন $f(-2) = -2 + |-2| = -2 + 2 = 0$

যখন $x = 0$ তখন $f(0) = 0 + |0| = 0$

যখন $x = 2$ তখন $f(2) = 2 + |2| = 2 + 2 = 4$

$\therefore$ $[-2, 2]$ ব্যবধিতে $f(x)$ এর মান $[0, 4]$ ব্যবধিতে বিস্তৃত।

সুতরাং ফাংশনের রেঞ্জ, $R_f = [0, 4]$

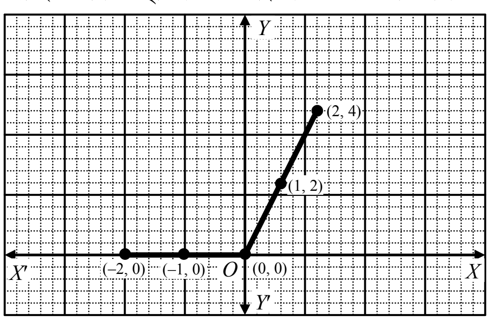
লেখচিত্র অঙ্কন:

প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = x + |x|$ যখন $-2 \leq x \leq 2$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর মানগুলো তালিকা তৈরি করি:

x	-2	-1	0	1	2
y	0	0	0	2	4

ছক কাগজের XOX' বরাবর x-অক্ষ এবং YOY' বরাবর y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের তিন বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে, $(-2, 0)$, $(-1, 0)$, $(0, 0)$, $(1, 2)$ ও $(2, 4)$ বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।



গ প্রদত্ত ফাংশন $f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0, & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

এখানে x এর প্রতিটি বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর প্রতিচ্ছবি রয়েছে বলে ফাংশনের ডোমেন হলো বাস্তব সংখ্যার সেট R

$\therefore$ ডোমেন $D_f = R$

যখন $x = 0$ তখন $f(x) = 0$

যখন $x > 0$ তখন $f(x) = \frac{x}{x} = 1$

যখন $x < 0$ তখন $f(x) = \frac{-x}{x} = -1$

সুতরাং ফাংশনের রেঞ্জ হলো, $R_f = \{-1, 0, 1\}$

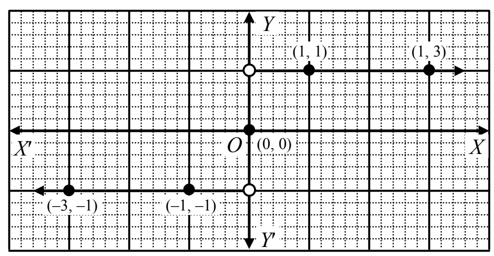
লেখচিত্র অঙ্কন:

ধরি, $y = f(x) = \begin{cases} \frac{|x|}{x}, & \text{যখন } x \neq 0 \\ 0, & \text{যখন } x = 0 \end{cases}$

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা তৈরি করি:

x	-3	-1	0	1	3
y	-1	-1	0	1	1

ছক কাগজের XOX' বরাবর x-অক্ষ এবং YOY' বরাবর y-অক্ষ এবং O মূলবিন্দু। ছক কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গের পাঁচ বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করে ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।



বি.দ্র: $x = 0$ বিন্দুতে ফাংশনটি বিচ্ছিন্ন।

১৩ দেওয়া আছে, $2^{2x}.2^{y-1} = 64 \ldots (i)$ এবং $6^x.\frac{6^{y-2}}{3} = 72 \ldots (ii)$

ক. (i) ও (ii) কে x ও y চলকবিশিষ্ট সরল সমীকরণে পরিণত কর।

খ. সমীকরণদ্বয় সমাধান করে শুদ্ধতা যাচাই কর।

গ. x ও y মান যদি কোন চতুর্ভুজের সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য হয় (যেখানে বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ $90°$) তবে চতুর্ভুজটি আয়ত না বর্গ উল্লেখ কর এবং এর ক্ষেত্রফল ও কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, $2^{2x}.2^{y-1} = 64 \ldots \ldots \ldots (i)$

$$6^x.\frac{6^{y-2}}{3} = 72 \ldots \ldots \ldots (ii)$$

(i) নং হতে পাই, $2^{2x+y-1} = 2^6$

বা, $2x + y - 1 = 6$

$\therefore 2x + y = 7 \ldots \ldots \ldots (iii)$

(ii) নং হতে পাই, $6^x.\frac{6^{y-2}}{3} = 72$

বা, $6^{x+y-2} = 3 \times 72 = 216$

বা, $6^{x+y-2} = 6^3$

বা, $x + y - 2 = 3$

$\therefore x + y = 5 \ldots \ldots \ldots (iv)$

$\therefore$ x ও y চকলবিশিষ্ট সরল সমীকরণদ্বয় হলো:

$2x + y = 7$ এবং $x + y = 5$

খ 'ক' হতে পাই, $2x + y = 7$ ……… (i)

$x + y = 5$ ……… (ii)

(i) হতে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,

$2x + y - (x + y) = 7 - 5$

$\therefore x = 2$

x এর মান (i) নং এ বসিয়ে পাই

$\therefore$ (i) $\Rightarrow 2.2 + y - 7 = 0$

$\Rightarrow y = 7 - 4 = 3$

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান, $(x, y) = (2, 3)$

শুদ্ধি পরীক্ষা:

$x = 2, y = 3$ এর জন্য,

উদ্দীপকে (i) নং সমীকরণের

বামপক্ষ $= 2^{2.2}.2^{3-1}$

$= 2^4.2^2 = 16.4 = 64 =$ ডানপক্ষ

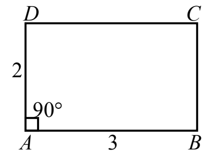
উদ্দীপকে (ii) নং সমীকরণের

বামপক্ষ $= 6^x.\dfrac{6^{y-2}}{3} = 6^2\dfrac{6^{3-2}}{3} = 36.\dfrac{6}{3} = 72 =$ ডানপক্ষ

$\therefore (x, y) = (2, 3)$ এর জন্য সমীকরণদ্বয়ের শুদ্ধতা যাচাই করা হলো।

গ প্রশ্নমতে, $ABCD$ চতুর্ভুজের দুটি সন্নিহিত বাহু, $AB = y = 3$

$AD = x = 2$



যেহেতু চতুর্ভুজটির সন্নিহিত বাহুদ্বয় সমান নয় $(AB \neq AD)$ এবং বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\angle BAD = 90°$

সুতরাং $ABCD$ একটি চতুর্ভুজটি একটি আয়ত।

$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= (AB \times AD)$ বর্গএকক

$= (3 \times 2)$ বর্গ একক $= 6$ বর্গএকক **(Ans.)**

$\therefore$ কর্ণের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{AB^2 + BC^2}$ একক

$= \sqrt{3^2 + 2^2}$ একক

$= \sqrt{9 + 4}$ একক $= \sqrt{13}$ একক **(Ans.)**

১৪ দেওয়া আছে, $y = 2^x$

ক. প্রদত্ত ফাংশনটির ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

খ. ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং এর বৈশিষ্ট্যগুলি লিখ।

গ. ফাংশনটির বিপরীত ফাংশন নির্ণয় করে এটি এক-এক কিনা তা নির্ধারণ কর এবং বিপরীত ফাংশনটির লেখচিত্র আঁক।

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, $y = 2^x$

এখানে, x এর সকল বাস্তব মানের জন্য ফাংশনটির বাস্তব মান পাওয়া যায়।

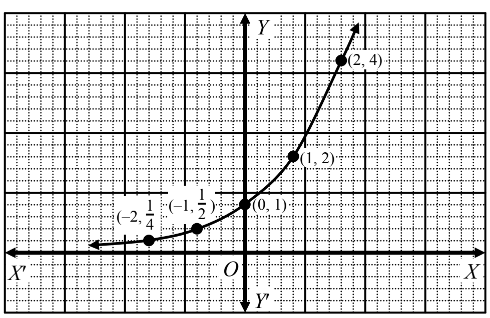
$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন $= (-\infty, \infty)$

আবার, x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x) > 0$

$\therefore$ ফাংশনের রেঞ্জ $= (0, \infty)$

খ $y = 2^x$ সমীকরণের x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর সংশ্লিষ্ট মানগুলোর তালিকা তৈরি করি:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 2^x$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4



ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। উভয় অক্ষের ক্ষুদ্রতম 4 বর্গঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখচিত্র পাওয়া যায়।

বৈশিষ্ট্য:

i. লেখচিত্র y অক্ষকে একটিমাত্র বিন্দুতে ছেদ করে।

ii. x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $y > 0$ হওয়ার ফাংশনের লেখচিত্র কখনো x অক্ষকে স্পর্শ বা ছেদ করে না।

iii. ফাংশনের লেখের বিস্তৃতি x অক্ষের ধনাত্মক দিকে অবস্থিত।

iv. y অক্ষের ডানদিকে ফাংশনের লেখ অসীম বিস্তৃত।

v. ফাংশনের লেখচিত্র কোনো অক্ষের সাপেক্ষে প্রতিসম নয়।

গ **বিপরীত ফাংশন নির্ণয়:**

ধরি, $y = f(x) = 2^x$

তাহলে $x = f^{-1}(y)$

আবার, $y = 2^x$

বা, $x = \log_2 y$

বা, $f^{-1}(y) = \log_2 y$

$\therefore f^{-1}(x) = \log_2 x$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের বিপরীত ফাংশন, $f^{-1}(x) = \log_2 x$

এক-এক কি-না নির্ধারণ:

ধরি, $x_1 \in R$ এবং $x_2 \in R$

তাহলে, $f^{-1}(x)$ এক-এক হবে যদি এবং কেবল যদি

$f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)$ হয়।

এখন, $f^{-1}(x_1) = f^{-1}(x_2)$

বা, $\log_2 x_1 = \log_2 x_2$

$\therefore x_1 = x_2$

$\therefore$ বিপরীত ফাংশনটি এক-এক।

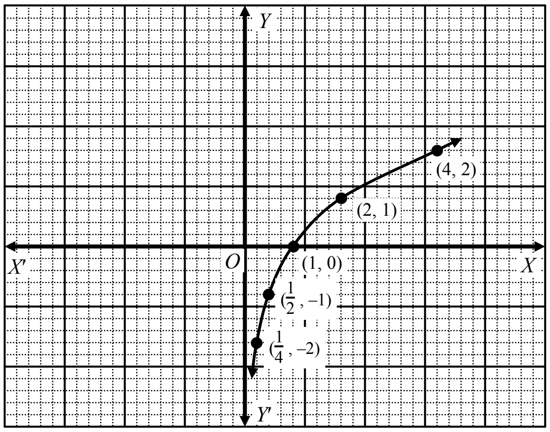
লেখচিত্র অঙ্কন (১ম পদ্ধতি):

$y = \log_2 x$ ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করেতে হবে।

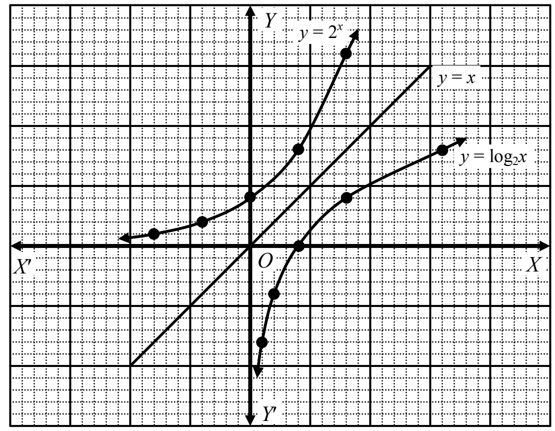
$y = \log_2 x$ সমীকরণের x এর কয়েকটি মানের জন্য y এর সংশ্লিষ্ট মানগুলোর তালিকা তৈরি করি:

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4
y	-2	-1	0	1	2

ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। উভয় অক্ষের ক্ষুদ্রতম 4 বর্গঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখচিত্র পাওয়া যায়।



লেখচিত্র অঙ্কন (২য় পদ্ধতি):
যেহেতু $y = \log_2 x$ হলো $y = 2^x$ এর বিপরীত ফাংশন। তাই $y = x$ রেখার সাপেক্ষে $y = 2^x$ ফাংশনের লেখের প্রতিসম চিত্রই হবে $y = \log_2 x$ লেখ। নিম্নে চিত্রের মাধ্যমে তা দেখানো হলো:



☒**জেনে রাখা ভালো:** $f(x)$ ও $f^{-1}(x)$ এর লেখচিত্র সর্বদাই $y = x$ রেখার সাপেক্ষে প্রতিসম।
প্রতিসমতা বোঝার জন্য সাধারণ গণিতের অধ্যায়-১৪ ভালোভাবে পড়ে নাও।

১৫ $f(x) = 3^{2x+2}$ এবং $g(x) = 27^{x+1}$
ক. $f(x)$ এর ডোমেন নির্ণয় কর।
খ. $f(x) + g(x) = 36$ হলে, x এর মান নির্ণয় কর।
গ. $q(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$ হলে, $q(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কন করে লেখচিত্র থেকে ডোমেন এবং রেঞ্জ নির্ণয় কর।

সমাধান:

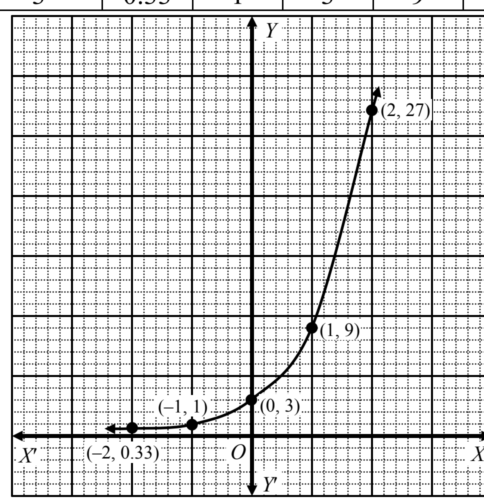
ক দেওয়া আছে, $f(x) = 3^{2x+2}$
x এর যেকোনো বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ সংজ্ঞায়িত
$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন, $D_f = R$

খ দেওয়া আছে, $f(x) + g(x) = 36$
বা, $3^{2x+2} + 27^{x+1} = 36$
বা, $3^{2x} \times 3^2 + 27^x \times 27^1 = 36$
বা, $9.\{3^{2x} + (3^3)^x.3\} = 36$
বা, $(3^x)^2 + (3^x)^3.3 = 4$
ধরি, $3^x = y$
তাহলে, আমরা পাই,
$y^2 + 3y^3 - 4 = 0$
বা, $3y^3 + y^2 - 4 = 0$
বা, $3y^3 - 3y^2 + 4y^2 - 4y + 4y - 4 = 0$
বা, $3y^2(y-1) + 4y(y-1) + 4(y-1) = 0$
বা, $(y-1)(3y^2 + 4y + 4) = 0$
বা, $y - 1 = 0$ অথবা, $3y^2 + 4y + 4 = 0$
বা, $y = 1$ বা, $y = \dfrac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.3.4}}{2.3}$
$= \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-48}}{6}$
[যা বাস্তব নয় বলে গ্রহণযোগ্য নয়]
তাহলে, $y = 1$
বা, $3^x = 1$
বা, $3^x = 3^0$
$\therefore x = 0$

গ দেওয়া আছে, $q(x) = \dfrac{g(x)}{f(x)}$
$= \dfrac{27^{x+1}}{3^{2x+2}}$
$= \dfrac{3^{3(x+1)}}{3^{2x+2}} = 3^{3x+3-2x-2} = 3^{x+1}$
$\therefore q(x) = 3^{x+1}$ এর লেখচিত্র নিম্নে অঙ্কন করা হলো:

প্রদত্ত ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা তৈরি করি:

x	-2	-1	0	1	2
$y = 3^{x+1}$	0.33	1	3	9	27



ছক কাগজের XOX' বরাবর x-অক্ষ এবং YOY' বরাবর y-অক্ষ আঁকি। x-অক্ষ বরবার ক্ষুদ্রতম বর্গের পাঁচ বাহুর দৈর্ঘ্যকে একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতিবাহুর দৈর্ঘ্যকে একক ধরে $(-2, 0.33)$, $(-1, 1)$, $(0, 3)$, $(1, 9)$, $(2, 27)$ বিন্দুগুলো ছক কাগজে স্থাপন করি এবং সাবলীলভাবে যোগ করে ফাংশনটির লেখচিত্র অঙ্কন করি।

লেখচিত্র হতে ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়:
লেখচিত্র হতে দেখা যায় x এর মান ধনাত্মক ও ঋণাত্মক উভয়দিকে অসীমে বিস্তৃত।
$\therefore$ ফাংশনের ডোমেন $= (-\infty, \infty)$
আবার, $q(x)$, এর লেখচিত্র সম্পূর্ণরূপে x অক্ষের অর্ধ-উপরিতলে অবস্থিত অর্থাৎ $q(x)$ এর মান সর্বদাই শূন্য থেকে বড় যেকোনো ধনাত্মক বাস্তব।
$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $= (0, \infty)$

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২১১

ক) যদি $\frac{\log a}{b-c} = \frac{\log b}{c-a} = \frac{\log c}{a-b}$ তাহলে $a^a.b^b.c^c$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধান: ধরি, $\frac{\log a}{b-c} = \frac{\log b}{c-a} = \frac{\log c}{a-b} = m$

$\therefore \log a = m(b-c)$

বা, $a \log a = ma(b-c)$; [উভয় পক্ষকে a দ্বারা গুণ করে]

$\therefore \log a^a = ma(b-c)$ ... ... (i)

এখন, $\log b = m(c-a)$

বা, $b \log b = mb(c-a)$; [উভয় পক্ষকে b দ্বারা গুণ করে]

$\therefore \log b^b = mb(c-a)$ ... ... (ii)

এবং $\log c = m(a-b)$

বা, $c \log c = mc(a-b)$; [উভয় পক্ষকে c দ্বারা গুণ করে]

$\therefore \log c^c = mc(a-b)$ ... ... (iii)

এখন, (i), (ii) ও (iii) নং সমীকরণ যোগ করে পাই,

$\log a^a + \log b^b + \log c^c = m(ab - ac + bc - ab + ac - bc)$

বা, $\log(a^a b^b c^c) = 0$

$\therefore a^a b^b c^c = 1$ **(Ans.)**

খ) যদি a, b, c পরপর তিনটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\log(1 + ac) = 2 \log b$

সমাধান: a, b, c পরপর তিনটি ধনাত্মক অখণ্ড সংখ্যা

ধরি, $a < b < c$

$\therefore a = b - 1$ এবং $c = b + 1$

$\therefore \frac{a}{b-1} = \frac{b+1}{c}$; $\left[\because \frac{a}{b-1} = \frac{a}{a} = \frac{b+1}{c} = \frac{c}{c} = 1\right]$

বা, $ac = (b+1)(b-1)$

বা, $ac = b^2 - 1$

বা, $ac + 1 = b^2$

বা, $\log(ac+1) = \log b^2$ [উভয় পাশে log নিয়ে]

$\therefore \log(ac+1) = 2\log b$ **(প্রমাণিত)**

গ) যদি $a^2 + b^2 = 7ab$ হয়, তবে দেখাও যে, $\log\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}\log(ab) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$

সমাধান: দেওয়া আছে, $a^2 + b^2 = 7ab$

বা, $a^2 + b^2 + 2ab = 7ab + 2ab$ [উভয়পক্ষে $2ab$ যোগ করে]

বা, $(a+b)^2 = 9ab$

বা, $\frac{(a+b)^2}{9} = ab$

বা, $\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = ab$

বা, $\log\left(\frac{a+b}{3}\right)^2 = \log(ab) = (\log a + \log b)$

বা, $2\log\left(\frac{a+b}{3}\right) = \log(ab)$

$\therefore \log\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}\log(ab) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$

[$\because \log(M \times N) = \log M + \log N$]

$\therefore \log\left(\frac{a+b}{3}\right) = \frac{1}{2}\log(ab) = \frac{1}{2}(\log a + \log b)$ **(দেখানো হলো)**

ঘ) যদি $\log\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$ তবে দেখাও যে, $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 7$

সমাধান: দেওয়া আছে, $\log\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$

বা, $2\log\left(\frac{x+y}{3}\right) = \log x + \log y$

বা, $\log\left(\frac{x+y}{3}\right)^2 = \log(xy)$

বা, $\left(\frac{x+y}{3}\right)^2 = xy$

বা, $\frac{(x+y)^2}{9} = xy$

বা, $x^2 + y^2 + 2xy = 9xy$

বা, $x^2 + y^2 = 9xy - 2xy$

বা, $x^2 + y^2 = 7xy$

বা, $\frac{x^2 + y^2}{xy} = 7$

বা, $\frac{x^2}{xy} + \frac{y^2}{xy} = 7$

$\therefore \frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 7$ **(দেখানো হলো)**

◆◆ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২০৫ অনুশীলনমূলক কাজ (গ ও ঘ) নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

$p = 1 + \log_a(bc)$, $q = 1 + \log_b(ca)$, $r = 1 + \log_c(ab)$ এবং $x^2 + y^2 = 7xy$. *ক. p^{-1} এর মান নির্ণয় কর।* *খ. দেখাও যে, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} = 1$* *গ. প্রমাণ কর যে, $\log\left(\frac{x+y}{3}\right) = \frac{1}{2}(\log x + \log y)$*	নিজে নিজে চেষ্টা কর। (ক) $\log_{abc} a$

ঙ) যদি $x = 1 + \log_a(bc)$, $y = 1 + \log_b(ca)$ এবং $z = 1 + \log_c(ab)$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $xyz = xy + yz + zx$

সমাধান: দেওয়া আছে, $x = 1 + \log_a(bc)$

বা, $x = \log_a a + \log_a(bc)$

বা, $x = \log_a(abc)$

বা, $a^x = abc$

বা, $a = (abc)^{\frac{1}{x}}$ ... ... (i)

অনুরূপভাবে দেখানো যায়, $b = (abc)^{\frac{1}{y}}$ ... ... (ii)

এবং, $c = (abc)^{\frac{1}{z}}$ ... ... (iii)

(i) × (ii) × (iii) করে পাই,

$$abc = (abc)^{\frac{1}{x}}.(abc)^{\frac{1}{y}}.(abc)^{\frac{1}{z}}$$

বা, $(abc)^1 = (abc)^{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}$

বা, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z} = 1$

বা, $\frac{yz+zx+xy}{xyz} = 1$

$\therefore xyz = xy + yz + zx$ **(প্রমাণিত)**

চ) (১) যদি $2\log_8(A) = p$, $2\log_2(2A) = q$ এবং $q - p = 4$ হয়, তবে A এর মান নির্ণয় কর।

(২) যদি $\log x^y = 6$ এবং $\log 14x^{8y} = 3$ হয়, তবে x এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

১ দেওয়া আছে, $2\log_8 A = p$

বা, $\log_8 A^2 = p$

বা, $A^2 = 8^p$ $[\log_a N = x$ হলে $a^x = N$ হয়$]$

$\therefore A^2 = 2^{3p}$ ... ... (i)

আবার, $2\log_2 2A = q$

বা, $\log_2 (2A)^2 = q$

বা, $(2A)^2 = 2^q$

বা, $A^2 = \frac{2^q}{2^2}$

$\therefore A^2 = 2^{q-2}$ ... ... (ii)

এবং $q - p = 4$

$\therefore q = 4 + p$ ... ... (iii)

(i) ও (ii) নং হতে পাই,

$2^{3p} = 2^{q-2}$

বা, $3p = q - 2$

বা, $3p = 4 + p - 2$ [(iii) নং হতে $q = 4 + p$]

বা, $2p = 2$

$\therefore p = 1$

$\therefore q = 4 + 1 = 5$ [(iii) নং হতে]

(i) নং এ p এর মান বসাই

$A^2 = 2^{3.1}$

বা, $A = \sqrt{8} = \sqrt{4 \times 2}$

$\therefore A = 2\sqrt{2}$ **(Ans.)**

২ দেওয়া আছে, $\log x^y = 6$ ... ... (i)

$\log 14x^{8y} = 3$ ... ... (ii)

(i) নং হতে, $\log x^y = 6$

বা, $y \log x = 6$

বা, $y = \frac{6}{\log x}$ ... ... (iii)

(ii) নং হতে, $\log 14x^{8y} = 3$

বা, $\log (14) + \log x^{8y} = 3$

বা, $\log x^{8y} = 3 - \log 14$

বা, $8y = \frac{3 - \log 14}{\log x}$

$\therefore y = \frac{3 - \log 14}{8 \log x}$ ... ... (iv)

(iii) ও (iv) হতে পাই,

$\frac{6}{\log x} = \frac{3 - \log 14}{8 \log x}$

বা, $48 \log x = (3 - \log 14) \log x$

বা, $\log x \{48 - (3 - \log 14)\} = 0$

বা, $\log x(45 + \log 14) = 0$

$\therefore \log x = 0$ $[\because 45 + \log 14 \neq 0]$

বা, $\log x = \log 1$

$\therefore x = 1$ **(Ans.)**

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২১২

ক) নিচের ছকে বর্ণিত সূচক ফাংশন লেখঃ

(১)

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4

(২)

x	-1	0	1	2	3
y	-3	0	3	6	9

(৩)

x	1	2	3	4	5
y	4	16	64	256	1024

(৪)

x	-3	-2	-1	0	1
y	0	1	2	3	4

(৫)

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{5}$	1	5	25

(৬)

x	1	2	3	4	5
y	5	10	15	20	25

সমাধানঃ

১।

x	-2	-1	0	1
y	$\frac{1}{4} = 2^{-2}$	$\frac{1}{2} = 2^{-1}$	$1 = 2^0$	$2 = 2^1$

টেবিল-১ এ বর্ণিত (x, y) ক্রমজোড়ের মানগুলো $y = 2^x$ দ্বারা বর্ণনা করা যায়।

২।

x	-1	0	1	2	3
y	$-3 = 3\times -1$	$0 = 3\times 0$	$3 = 3\times 1$	$6 = 3\times 2$	$9 = 3\times 3$

টেবিল-২ এ বর্ণিত (x, y) ক্রমজোড়ের মানগুলো $y = 3x$ দ্বারা বর্ণনা করা যায়।

৩।

x	1	2	3	4	5
y	$4 = 4^1$	$16 = 4^2$	$64 = 4^3$	$256 = 4^4$	$1024 = 4^5$

টেবিল-৩ এ বর্ণিত (x, y) ক্রমজোড়ের মানগুলো $y = 4^x$ দ্বারা বর্ণনা করা যায়।

৪।

x	-3	-2	-1	0	1
y	$= -3+3$	$1 = -2+3$	$2 = -1+3$	$3 = 0+3$	$4 = 1+3$

টেবিল-৪ এ বর্ণিত (x, y) ক্রমজোড়ের মানগুলো $y = x + 3$ দ্বারা বর্ণনা করা যায়।

৫।

x	-2	-1	0	1	2
y	$\frac{1}{25}=5^{-2}$	$\frac{1}{5}=5^{-1}$	$1=5^0$	5^1	$25=5^2$

টেবিল-৫ এ বর্ণিত (x, y) ক্রমজোড়ের মানগুলো $y = 5^x$ দ্বারা বর্ণনা করা যায়।

৬।

x	1	2	3	4	5
y	$5=5^1$	$10=5\times2$	$15=5\times3$	$20=5\times4$	$25=5\times5$

টেবিল-৬ এ বর্ণিত (x, y) ক্রমজোড়ের মানগুলো $y = 5x$ দ্বারা বর্ণনা করা যায়, যেখানে x বাস্তব সংখ্যা।

এখন, সূচক ফাংশনের সংজ্ঞা হতে আমরা জানি, সূচক ফাংশন হলো $f(x) = a^x$ আকারের ফাংশন যা সকল বাস্তব সংখ্যা x এর জন্য সংজ্ঞায়িত, যেখানে $a > 0$ এবং $a \neq 1$।

তাহলে আমরা বলতে পারি, টেবিল-১, টেবিল-৩ ও টেবিল-৫ এর ক্রমজোড়গুলো যথাক্রমে সূচক ফাংশন $y = 2^x, y = 4^x$ ও $y = 5^x$ দ্বারা সংজ্ঞায়িত।

খ) নিচের কোনটি সূচক ফাংশন নির্দেশ করে:
(১) $y = -3^x$ (২) $y = 3x$ (৩) $y = -2x - 3$
(৪) $y = 5 - x$ (৫) $y = x^2 + 1$ (৬) $y = 3x^2$

সমাধান:

$y = a^x$ সূচক ফাংশন হবে যদি $a > 0$ এবং $a \neq 1$ হয়। উল্লেখ্য যে, সূচক ফাংশনে চলক ঘাতরূপে বিদ্যমান থাকবে।

১। $y = -3^x$ হলো সূচক ফাংশন। কারণ এটি সূচক ফাংশনের সকল শর্ত পূরণ করে।

জেনে রাখা ভালো: (i) $y = (-3)^x$; (ii) $y = 1^x$; (iii) $y = (-1)^x$; (iv) $y = 0^x$ কোনোটিই সূচক ফাংশন নয়।
বিস্তারিত: অনুশীলনীর ব্যবচ্ছেদ দ্রষ্টব্য।

২। $y = 3x$ ফাংশনটি সূচকীয় ফাংশন নয়, কারণ এতে চলক ঘাতরূপে বিদ্যমান নেই।

৩। $y = -2x - 3$ ফাংশনটি সূচকীয় ফাংশন নয়, কারণ এতে চলক ঘাতরূপে বিদ্যমান নেই।

৪। $y = 5 - x$ ফাংশনটি সূচকীয় ফাংশন নয়, কারণ এতে চলক ঘাতরূপে বিদ্যমান নেই।

৫। $y = x^2 + 1$ ফাংশনটি সূচকীয় ফাংশন নয়, কারণ এতে চলক ঘাতরূপে বিদ্যমান নেই।

৬। $y = 3x^2$ ফাংশনটি সূচকীয় ফাংশন নয়, কারণ এতে চলক ঘাতরূপে বিদ্যমান নেই।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশগুলোর মধ্যে $y = -3^x$ একমাত্র সূচক ফাংশন।

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২১৩

লেখচিত্র অঙ্কন কর, যেখানে $-3 \leq x \leq 3$.
ক) $y = 2^{-x}$ খ) $y = 4^x$ গ) $y = 2^{\frac{x}{2}}$ ঘ) $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

✉ **জেনে নাও:** এখানে $-3 \leq x \leq 3$ অর্থাৎ x এর মান সুনির্দিষ্ট থাকায় লেখচিত্রে তীর চিহ্ন ব্যবহার করা যাবে না। সাধারণত তীর চিহ্ন $(\rightarrow)$ দিয়ে লেখচিত্রের বিস্তৃতি নির্দেশ করা হয়।

সমাধান:

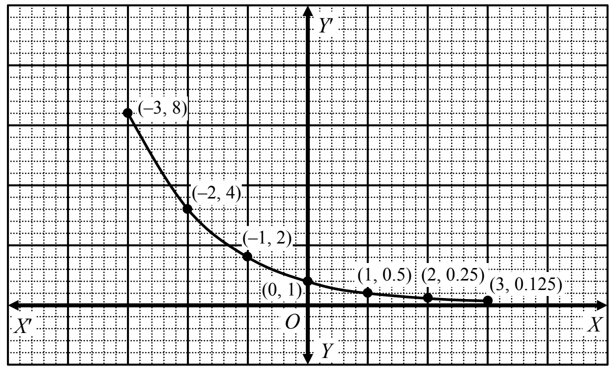
ক $y = 2^{-x}$

ধরি, $y = f(x) = 2^{-x}$

x এর -3 থেকে 3 এর মধ্যে কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিচের ছকে দেখানো হলো:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	8	4	2	1	0.5	0.25	0.125

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। x অক্ষের ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি 5 বাহুর দৈর্ঘ্যকে 1 একক এবং y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি 2 বাহুর দৈর্ঘ্যকে 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।
যা নিম্নে দেখানো হলো-



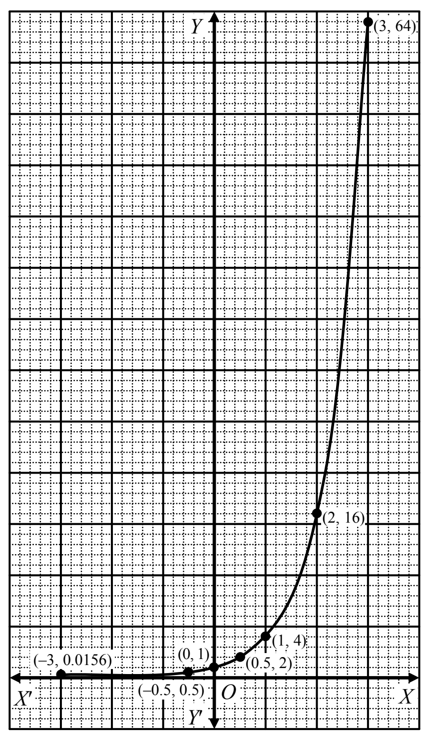
খ $y = 4^x$

ধরি, $y = f(x) = 4^x$

প্রদত্ত ফাংশন $f(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি।

x	-3	-0.5	0	0.5	1	2	3
y	0.0156	0.5	1	2	4	16	64

'ক' এর প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি 5 বাহুর দৈর্ঘ্যকে 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি 1 বাহুর দৈর্ঘ্যকে 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো-



গ $y = 2^{\frac{x}{2}}$

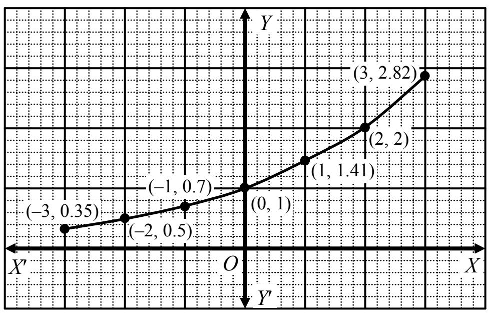
ধরি, $y = f(x) = 2^{\frac{x}{2}}$

x এর -3 থেকে 3 এর মধ্যে কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো-

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	0.35	0.5	0.70	1	1.41	2	2.82

'ক' এর প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। x ও y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি 5 বাহুর দৈর্ঘ্যকে 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো-



ঘ $y = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

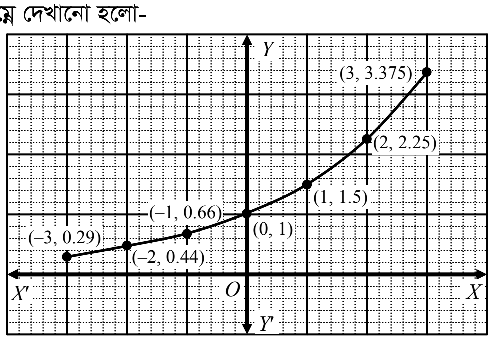
ধরি, $y = f(x) = \left(\frac{3}{2}\right)^x$

-3 থেকে 3 এর মধ্যে x এর কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর নিম্নের ছকে দেখানো হলো-

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	0.29	0.44	0.66	1	1.5	2.25	3.375

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। x ও y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম বর্গের প্রতি 5 বাহুর দৈর্ঘ্যকে 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো-



কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২১৮

নিচের ফাংশনগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং এদের বিপরীত ফাংশন নির্ণয় কর।

ক) $y = 3x + 2$ খ) $y = x^2 + 3, x \geq 0$ গ) $y = x^3 - 1$

ঘ) $y = \frac{4}{x}$ ঙ) $y = 3x$ চ) $y = \frac{2x+1}{x-1}$

ছ) $y = 2^{-x}$ জ) $y = 4^x$

সমাধানঃ

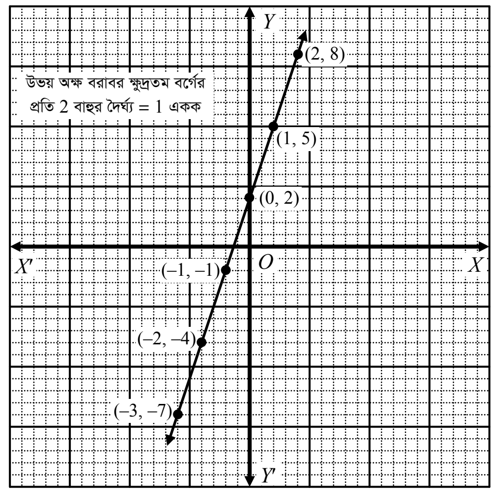
ক $y = 3x + 2$

ধরি, $y = f(x) = 3x + 2$

$f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি।

x	-3	-2	-1	0	1	2
y	-7	-4	-1	2	5	8

ছক কাগজে মানগুলো স্থাপন করলে নিম্নরূপ লেখচিত্র পাওয়া যায়-



বিপরীত ফাংশন নির্ণয়:

মনেকরি, $y = f(x) = 3x + 2$

তাহলে, $y = f(x)$

$\therefore x = f^{-1}(y)$... ... ... (i)

এবং $y = 3x + 2$

বা, $y = 3x + 2$

বা, $y - 2 = 3x$

বা, $x = \frac{y-2}{3}$

বা, $f^{-1}(y) = \frac{y-2}{3}$ [(i) নং হতে x এর মান বসিয়ে]

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

বিপরীত ফাংশন নির্ণয়:

ধরি, $f(x) = 3x + 2$

x এর পরিবর্তে $f^{-1}(x)$ বসিয়ে পাই,

$f(f^{-1}(x)) = 3.f^{-1}(x) + 2$

বা, $x = 3.f^{-1}(x) + 2$

বা, $3.f^{-1}(x) = x - 2$

$\therefore f^{-1}(x) = \frac{x-2}{3}$

বি.দ্র: বিপরীত ফাংশন নির্ণয়ে একাধিক পদ্ধতি অনুশীলনী-১.২ এর অঙ্কে প্রয়োগ করা হয়েছে। এটি আবার ভালোভাবে দেখে নাও।

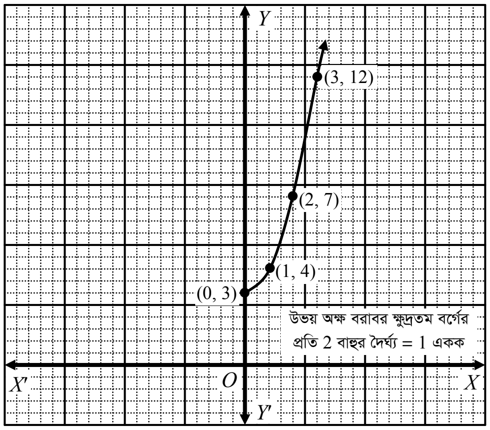
খ $y = x^2 + 3\ ;\ x \geq 0$

ধরি, $y = f(x) = x^2 + 3$

প্রদত্ত ফাংশন $f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি।

x	0	1	2	3
y	3	4	7	12

ছক কাগজে মানগুলো স্থাপন করলে নিম্নরূপ লেখচিত্র পাওয়া যায়-



বিপরীত ফাংশন নির্ণয়:

$y = f(x) = x^2 + 3\ ;\ x \geq 0$

এখন, $y = x^2 + 3$

বা, $x^2 = y - 3$

বা, $x = \sqrt{y-3}$ $\quad [\because x \geq 0]$

বিপরীত ফাংশন $f^{1} : y \to x$ যেখানে $x = \sqrt{y-3}$

বা, $f^{1} : y \to \sqrt{y-3}$

y এর স্থলে x স্থাপন করে পাই,

$\therefore\ f^{-1} : x \to \sqrt{x-3}$

$\therefore\ f^{-1}(x) = \sqrt{x-3}$

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

মনেকরি, $y = f(x) = x^2 + 3$

তাহলে, $y = f(x)$

$\therefore x = f^{-1}(y)$ ... ... (i)

আবার, $y = x^2 + 3$

বা, $y = x^2 + 3$

বা, $x^2 = y - 3$

বা, $x = \sqrt{y-3}$ $\quad [\because x \geq 0]$

বা, $f^{-1}(y) = \sqrt{y-3}$ $\quad$ [(i) নং হতে x এর মান বসিয়ে]

$\therefore f^{1}(x) = \sqrt{x-3}$

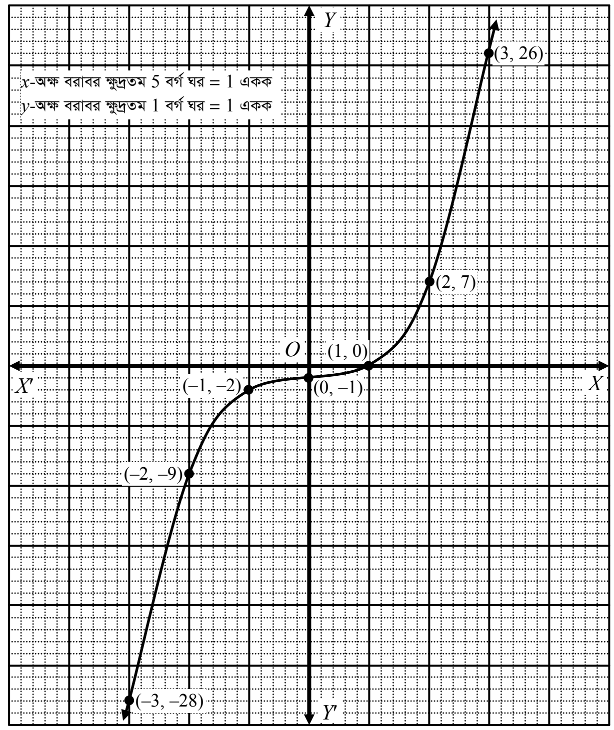
গ $y = x^3 - 1$

ধরি, $y = f(x) = x^3 - 1$

প্রদত্ত ফাংশন $f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি।

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-28	-9	-2	-1	0	7	26

ছক কাগজে মানগুলো স্থাপন করলে নিম্নরূপ লেখচিত্র পাওয়া যায়-



বিপরীত ফাংশন নির্ণয়:

মনেকরি, $y = f(x) = x^3 - 1$

তাহলে, $y = f(x)$

বা, $x = f^{-1}(y)$ ... ...(i)

আবার, $y = x^3 - 1$

বা, $x^3 = y + 1$

বা, $x = (y+1)^{\frac{1}{3}}$

বা, $f^{-1}(y) = (y+1)^{\frac{1}{3}}$ $\quad$ [(i) নং হতে x এর মান বসিয়ে]

$\therefore f^{-1}(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}}$

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

ধরি, $f(x) = x^3 - 1$

x পরিবর্তে $f^{1}(x)$ বসিয়ে পাই,

$f(f^{-1}(x)) = f(f^{-1}(x))^3 - 1$

বা, $x = (f^{-1}(x))^3 - 1$

বা, $(f^{1}(x))^3 = x + 1$

$\therefore f^{-1}(x) = (x+1)^{\frac{1}{3}}$

ঘ $y = \dfrac{4}{x}$

ধরি, $y = f(x) = \dfrac{4}{x}$

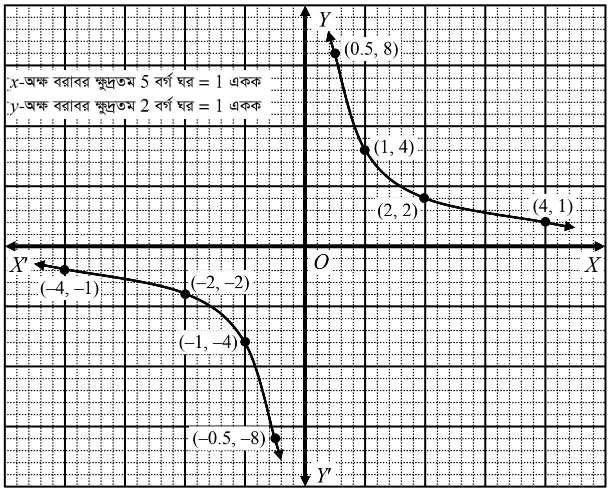
প্রদত্ত ফাংশন $f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি।

x	-4	-2	-1	-0.5	0	0.5	1	2	4
y	-1	-2	-4	-8	অসংজ্ঞায়িত	8	4	2	1

ছক কাগজে মানগুলো স্থাপন করলে নিম্নরূপ লেখচিত্র পাওয়া যায়-

প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষদ্রতম 2 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো-



মনেকরি, $y = f(x) = \dfrac{4}{x}$

তাহলে, $y = f(x)$

$\therefore x = f^{-1}(y)$ … …. … (i)

আবার, $y = \dfrac{4}{x}$

বা, $x = \dfrac{4}{y}$

বা, $f^{-1}(y) = \dfrac{4}{y}$

$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{4}{x}$; $x \neq 0$

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

ধরি, $f(x) = \dfrac{4}{x}$

x এর পরিবর্তে $f^{-1}(x)$ বসিয়ে পাই,

$f(f^{-1}(x)) = \dfrac{4}{f^{-1}(x)}$

বা, $x = \dfrac{4}{f^{-1}(x)}$

$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{4}{x}$; $x \neq 0$

✉ **জেনে নাওঃ** ফাংশনটি থেকে দেখা যায় যে, x এর মান শূন্য হলে বিপরীত ফাংশনটি অসংজ্ঞায়িত হয়। সুতরাং $x \neq 0$ অর্থাৎ বিপরীত ফাংশনটির মান কখনও শূন্য হবে না। x এর ঋণাত্মক মান শূন্যের কাছাকাছি হলে বিপরীত ফাংশনটির সর্বোচ্চ মান পাওয়া যায়।
আবার x এর ঋণাত্মক মান শূন্যের বিপরীত ফাংশনটির ডোমেন $= (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ এবং ফাংশনটি রেঞ্জ $= (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$।

বি.দ্র: $f(x) = \dfrac{4}{x}$ ফাংশনটি $x = 0$ এর জন্য অসংজ্ঞায়িত বিধায় $f(x)$ এর লেখ কখনই y অক্ষকে বা $x = 0$ রেখাকে কখনই স্পর্শ বা ছেদ করেনা।

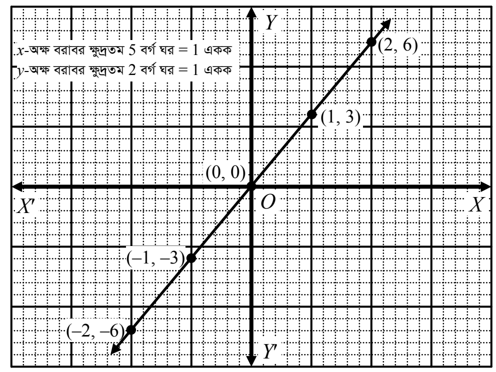
ঙ $y = 3x$

ধরি, $y = f(x) = 3x$

প্রদত্ত ফাংশন $f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি।

x	-2	-1	0	1	2
y	-6	-3	0	3	6

ছক কাগজে মানগুলো স্থাপন করলে নিম্নরূপ লেখচিত্র পাওয়া যায়-



বিপরীত ফাংশন নির্ণয়:

মনেকরি, $y = f(x) = 3x$

তাহলে, $y = f(x)$

$\therefore x = f^{-1}(y)$ … … … (i)

আবার, $y = 3x$

বা, $x = \dfrac{y}{3}$

বা, $f^{-1}(y) = \dfrac{y}{3}$

$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{x}{3}$

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

ধরি, $f(x) = 3x$

x এর পরিবর্তে $f^{-1}(x)$ বসিয়ে পাই,

$f(f^{-1}(x)) = 3.f^{-1}(x)$

বা, $x = 3.f^{-1}(x)$

$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{x}{3}$

চ $y = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$

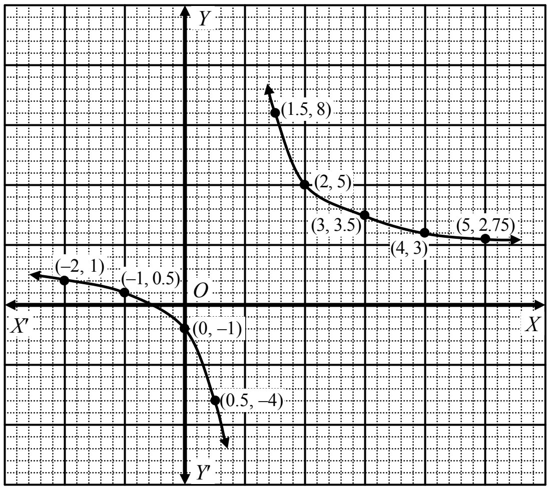
ধরি, $y = f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$

প্রদত্ত ফাংশন $f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি।

x	-2	-1	0	0.5	1	1.5	2	3	4	5
y	1	0.5	-1	-4	অসংজ্ঞায়িত	8	5	3.5	3	2.75

প্রাপ্ত বিন্দুগুলো ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 2 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো-



$\therefore$ ফাংশনটি $x = 1$ এর জন্য অসংজ্ঞায়িত

$\therefore$ ডোমেন $D = R - \{1\}$

মনেকরি, $y = f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$

তাহলে, $y = f(x)$

$\therefore x = f^{-1}(y)$ ... ...(i)

আবার, $y = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$

বা, $xy - y = 2x + 1$

বা, $xy - 2x = 1 + y$

বা, $x(y - 2) = y + 1$

বা, $x = \dfrac{y + 1}{y - 2}$

বা, $f^{-1}(y) = \dfrac{y + 1}{y - 2}$

$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{x + 1}{x - 2}$; $x \neq 2$

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

ধরি, $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 1}$

x এর পরিবর্তে $f^{-1}(x)$ বসিয়ে পাই,

$$f(f^{-1}(x)) = \frac{2.f^{-1}(x) + 1}{f^{-1}(x) - 1}$$

বা, $x = \dfrac{2f^{-1}(x) + 1}{f^{-1}(x) - 1}$

বা, $x(f^{-1}(x) - 1) = 2f^{-1}(x) + 1$

বা, $x.f^{-1}(x) - 2f^{-1}(x) = 1 + x$

বা, $f^{-1}(x)(x - 2) = x + 1$

$\therefore f^{-1}(x) = \dfrac{x + 1}{x - 2}$; $x \neq 2$

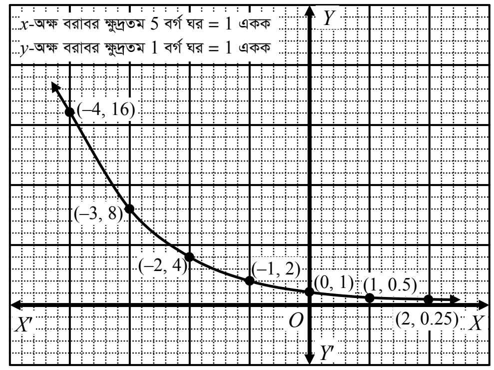
ছ $y = 2^{-x}$

ধরি, $y = f(x) = 2^{-x}$

প্রদত্ত ফাংশন $f(x)$ ফাংশনের লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি।

x	– 4	– 3	– 2	– 1	0	1	2
y	16	8	4	2	1	0.5	0.25

ছক কাগজে মানগুলো স্থাপন করলে নিম্নরূপ লেখচিত্র পাওয়া যায়-



বিপরীত ফাংশন নির্ণয়:

মনেকরি, $y = f(x) = 2^{-x}$

তাহলে, $f(x) = y$

$\therefore x = f^{-1}(y)$

আবার, $2^{-x} = y$

বা, $-x = \log_2 y$

বা, $x = -\log_2 y$

বা, $x = \log_2 y - 1$

বা, $x = \log_2\left(\dfrac{1}{y}\right)$

বা, $f^{-1}(y) = \log_2\left(\dfrac{1}{y}\right)$

$\therefore f^{-1}(x) = \log_2\left(\dfrac{1}{x}\right)$

> **বি.দ্র:** $f(x) = 2^{-x}$ এর বিপরীত ফাংশনগুলো হলো
> (i) $f^{-1}(x) = -\log_2 x$
> (ii) $f^{-1}(x) = \log_2\left(\dfrac{1}{x}\right)$
> (iii) $f^{-1}(x) = \dfrac{\log x}{\log 2}$

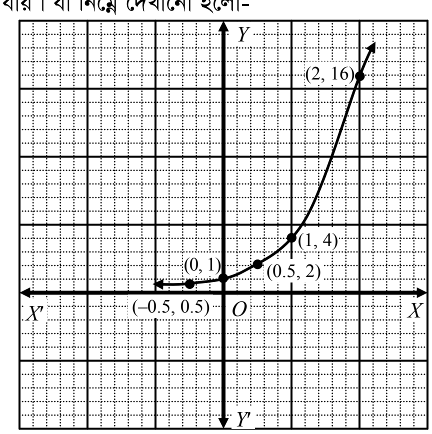
জ $y = 4^x$

ধরি, $y = f(x) = 4^x$

প্রদত্ত ফাংশন $f(x)$ এর লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য x এবং y এর মানগুলোর তালিকা প্রস্তুত করি।

x	– 0.5	0	0.5	1	2
y	0.5	1	2	4	16

ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়। যা নিম্নে দেখানো হলো-



মনেকরি, $y = f(x) = 4^x$
তাহলে $y = f(x)$
$\therefore x = f^{-1}(y) \ldots\ldots\ldots$ (i)
আবার, $y = 4^x$
বা, $x = \log_4 y$
বা, $f^{-1}(y) = \log_4 y$
$\therefore f^{-1}(x) = \log_4 x$

কাজ *পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২১৫*

নিচের ফাংশনের ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর:

ক) $y = \ln \frac{2+x}{2-x}$ খ) $y = \ln \frac{3+x}{3-x}$

গ) $y = \ln \frac{4+x}{4-x}$ ঘ) $y = \ln \frac{5+x}{5-x}$

সমাধান:

ক $y = \ln \frac{2+x}{2-x}$

ডোমেন নির্ণয়:
যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।
$\therefore \frac{2+x}{2-x} > 0$ হবে যদি (i) $2 + x > 0$ এবং $2 - x > 0$ হয়
অথবা, (ii) $2 + x < 0$ এবং $2 - x < 0$ হয়
(i) নং হতে পাই, $x > -2$ এবং $-x > -2$
বা, $x > -2$ এবং $x < 2$
$\therefore$ ডোমেন $= \{x : -2 < x\} \cap \{x : x < 2\}$
$= (-2, \infty) \cap (-\infty, 2)$
$= (-2, 2)$
(ii) নং হতে পাই, $x < -2$ এবং $-x < -2$
বা, $x < -2$ এবং $x > 2$
$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < -2\} \cap \{x : x > 2\}$
$= (-\infty, -2) \cap (2, \infty)$
$= \varnothing$
$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন $D_f =$ (i) ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ
$= (-2, 2) \cup \varnothing = (-2, 2)$

রেঞ্জ নির্ণয়:
ধরি, $y = f(x) = \ln \frac{2+x}{2-x}$
বা, $e^y = \frac{2+x}{2-x}$
বা, $2 + x = 2e^y - xe^y$
বা, $x(1 + e^y) = 2(e^y - 1)$
বা, $x = \frac{2(e^y - 1)}{e^y + 1}$
y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x-এর মান বাস্তব হয়।
$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের $R_f = \boldsymbol{R}$
Ans: ডোমেন $D_f = (-2, 2)$ এবং রেঞ্জ $R_f = \boldsymbol{R}$

বিকল্প পদ্ধতিতে ডোমেন নির্ণয়:
$y = \ln \frac{2+x}{2-x}$
যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।
অতএব ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যদি $\frac{2+x}{2-x} > 0$ হয়
বা, $-\frac{2+x}{x-2} > 0$
$\therefore \frac{x+2}{x-2} < 0$ [উভয়পক্ষকে -1 দ্বারা গুণ করে]

এখন $\frac{x+2}{x-2} < 0$ হবে যদি এবং কেবল যদি $(x + 2)$ ও $(x - 2)$ রাশিদ্বয়ের একটি ধনাত্মক ও অপরটি ঋণাত্মক হয়।
লক্ষ করি:

শর্ত	$x + 2$ এর চিহ্ন	$x - 2$ এর চিহ্ন
$x < -2$	$-$	$-$
$-2 < x < 2$	$+$	$-$
$x > 2$	$+$	$+$

$\therefore -2 < x < 2$ শর্তে y এর বাস্তব মান পাওয়া যায়
$\therefore$ ফাংশনের ডোমেন $(-2, 2)$

বি.দ্র: আরও বিকল্প পদ্ধতিতে ডোমেন নির্ণয়ের জন্য অনুশীলনীর ১১নং প্রশ্নের সমাধান দেখ।

খ $y = \ln \frac{3+x}{3-x}$

ডোমেন নির্ণয়:
যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়।
$\therefore \frac{3+x}{3-x} > 0$ হবে যদি (i) $3 + x > 0$ এবং $3 - x > 0$ হয়
অথবা, (ii) $3 + x < 0$ এবং $3 - x < 0$ হয়
(i) নং হতে পাই, $x > -3$ এবং $-x > -3$
বা, $x > -3$ এবং $x < 3$
$\therefore$ ডোমেন $= \{x : -3 < x\} \cap \{x : x < 3\}$
$= (-3, \infty) \cap (-\infty, 3)$
$= (-3, 3)$
(ii) নং হতে পাই, $x < -3$ এবং $-x < -3$
বা, $x < -3$ এবং $x > 3$
$\therefore$ ডোমেন $= \{x : x < -3\} \cap \{x : x > 3\}$
$= (-3, \infty) \cap (3, \infty)$
$= \varnothing$
$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের ডোমেন $D_f =$ (i) ও (ii) এ প্রাপ্ত ডোমেনের সংযোগ
$= (-3, 3) \cup \varnothing = (-3, 3)$

রেঞ্জ নির্ণয়:
ধরি, $y = f(x) = \ln \frac{3+x}{3-x}$
বা, $e^y = \frac{3+x}{3-x}$
বা, $3 + x = 3e^y - xe^y$
বা, $x(1 + e^y) = 3(e^y - 1)$
বা, $x = \frac{3(e^y - 1)}{e^y + 1}$
y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x-এর মান বাস্তব হয়।
$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের $R_f = \boldsymbol{R}$
Ans: ডোমেন $D_f = (-3, 3)$ এবং রেঞ্জ $R_f = \boldsymbol{R}$

বিকল্প পদ্ধতিতে ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়:
$y = \ln \frac{3+x}{3-x}$
যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়। অতএব ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যদি $\frac{3+x}{3-x} > 0$ হয়
বা, $-\frac{3+x}{x-3} > 0$
$\therefore \frac{x+3}{x-3} < 0$

এখন $\frac{x+3}{x-3} < 0$ হবে যদি এবং কেবল যদি $(x + 3)$ ও $(x - 3)$ রাশিদ্বয়ের একটি ধনাত্মক ও অপরটি ঋণাত্মক হয়।

লক্ষ করি:

শর্ত	$x + 3$ এর চিহ্ন	$x - 3$ এর চিহ্ন
$x < -3$	$-$	$-$
$-3 < x < 3$	$+$	$-$
$x > 3$	$+$	$+$

$\therefore -3 < x < 3$ শর্তে y এর বাস্তব মান পাওয়া যায়

$\therefore$ ফাংশনের ডোমেন $(-3, 3)$

রেঞ্জ নির্ণয়:

$$y = f(x) = \ln\frac{3+x}{3-x}$$

বা, $e^y = \frac{3+x}{3-x}$

বা, $3 + x = 3e^y - xe^y$

বা, $x(1 + e^y) = 3(e^y - 1)$

বা, $x = \frac{3(e^y-1)}{e^y+1}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = R$

Ans: ডোমেন $D_f = (-3, 3)$; রেঞ্জ $R_f = R$

গ $y = \ln\frac{4+x}{4-x}$

যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়। অতএব ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যদি $\frac{4+x}{4-x} > 0$ হয়

বা, $-\frac{4+x}{x-4} > 0$

$\therefore \frac{x+4}{x-4} < 0$

এখন $\frac{x+4}{x-4} < 0$ হবে যদি এবং কেবল যদি $(x + 4)$ ও $(x - 4)$ এর একটি ধনাত্মক ও অপরটি ঋণাত্মক হয়।

লক্ষ করি:

শর্ত	$x + 4$ এর চিহ্ন	$x - 4$ এর চিহ্ন
$x < -4$	$-$	$-$
$-4 < x < 4$	$+$	$-$
$x > 4$	$+$	$+$

$\therefore -4 < x < 4$ শর্তে y এর বাস্তব মান পাওয়া যায়

$\therefore$ ফাংশনের ডোমেন $(-4, 4)$

রেঞ্জ নির্ণয়: $y = \ln\frac{4+x}{4-x}$

বা, $e^y = \frac{4+x}{4-x}$

বা, $4 + x = 4e^y - xe^y$

বা, $x(1 + e^y) = 4(e^y - 1)$

বা, $x = \frac{4(e^y-1)}{e^y+1}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = R$

Ans: ডোমেন $D_f = (-4, 4)$; রেঞ্জ $R_f = R$

ঘ $\mathbf{y = \ln\frac{5+x}{5-x}}$

যেহেতু লগারিদম শুধুমাত্র ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যার জন্য সংজ্ঞায়িত হয়। অতএব ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে যদি $\frac{5+x}{5-x} > 0$ হয়

বা, $-\frac{5+x}{x-5} > 0$

$\therefore \frac{x+5}{x-5} < 0$

এখন $\frac{x+5}{x-5} < 0$ হবে যদি এবং কেবল যদি $(x + 5)$ ও $(x - 5)$ এর একটি ধনাত্মক ও অপরটি ঋণাত্মক হয়।

লক্ষ করি:

শর্ত	$x + 5$ এর চিহ্ন	$x - 5$ এর চিহ্ন
$x < -5$	$-$	$-$
$-5 < x < 5$	$+$	$-$
$x > 5$	$+$	$+$

$\therefore -5 < x < 5$ শর্তে y এর বাস্তব মান পাওয়া যায়

$\therefore$ ফাংশনের ডোমেন $(-5, 5)$

রেঞ্জ নির্ণয়: $y = \ln\frac{5+x}{5-x}$

বা, $e^y = \frac{5+x}{5-x}$

বা, $5 + x = 5e^y - xe^y$

বা, $x(1 + e^y) = 5(e^y - 1)$

বা, $x = \frac{5(e^y-1)}{e^y+1}$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য x এর মান বাস্তব হয়।

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = R$

Ans: ডোমেন $D_f = (-5, 5)$; $R_f = R$

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২১৭

নিচের ফাংশনগুলোর লেখচিত্র অঙ্কন কর এবং ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয় কর:

(ক) $f(x) = 2^x$ (খ) $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ (গ) $f(x) = e^x, 2 < e < 3$

(ঘ) $f(x) = e^{-x}, 2 < e < 3$ (ঙ) $f(x) = 3^x$

সমাধান:

ক **লেখচিত্র অঙ্কন:**

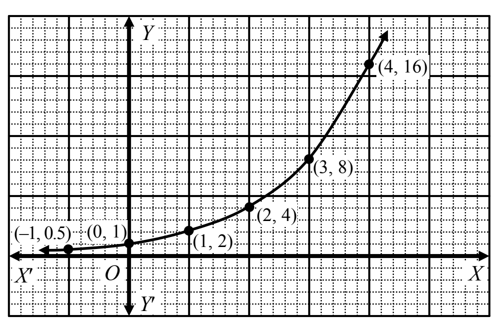
ধরি, $y = f(x) = 2^x$

x এর কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো-

x	-1	0	1	2	3	4
$y = 2^x$	0.5	1	2	4	8	16

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ, বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো-



ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়:

x এর সকল বাস্তব মানের জন্য প্রদত্ত ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত হবে।

$\therefore$ ফাংশনের ডোমেন $D_f = R$

আবার, $x = 0$ হলে $f(x) = 2^0 = 1 > 0$

$$x \to -\infty \text{ হলে } f(x) \to 2^{-\infty} = \frac{1}{2^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$x \to \infty \text{ হলে } f(x) \to 2^{\infty} = \infty$$

ডোমেনের অন্তর্ভুক্ত x এর সকল মানের জন্য $f(x)$ এর মান $(0, \infty)$ ব্যবধিতে অবস্থিত।

$\therefore$ ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = (0, \infty)$

খ **লেখচিত্র অঙ্কন:**

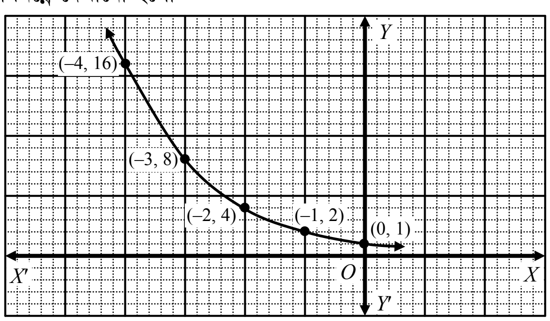
ধরি, $y = f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$

x এর কয়েকটি মান নিচে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো-

x	0	-1	-2	-3	-4
y	1	2	4	8	16

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ, বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো-



ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়:

x এর সকল বাস্তব মানের জন্য প্রদত্ত ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত

$\therefore$ ফাংশনের ডোমেন $D_f = R$

আবার, $x \to \infty$ হলে $f(x) \to \left(\frac{1}{2}\right)^{\infty} = \infty$

$$x \to -\infty \text{ হলে } f(x) \to \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$\therefore$ x এর সকল মানের জন্য $f(x)$ এর মান $(0, \infty)$ ব্যবধিতে অবস্থিত।

$\therefore$ ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = (0, \infty)$

গ $f(x) = e^x, 2 < e < 3$

লেখচিত্র অঙ্কন:

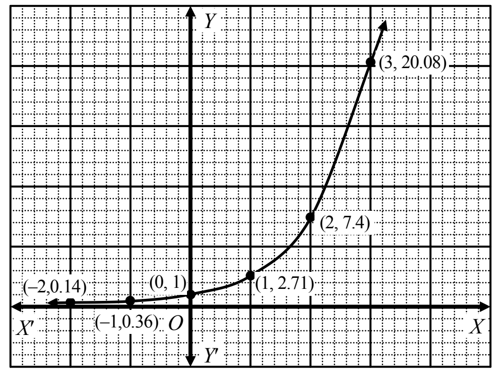
ধরি, $y = f(x) = e^x$,

x এর কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিচের ছকে দেখানো হলো-

x	-2	-1	0	1	2	3
y	0.14	0.36	1	2.71	7.4	20.08

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে বিন্দুগুলো পাতন করে সাবলীলভাবে যুক্ত করে $f(x) = e^x$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো-



ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়:

x এর সকল বাস্তব মানের জন্য প্রদত্ত ফাংশনটি সংজ্ঞায়িত।

$\therefore$ ফাংশনের ডোমেন $D_f = R$

লক্ষ করি: x যখন $-\infty$ এর কাছাকাছি হয় তখন $f(x)$ এর মান শূন্যের কাছাকাছি হয় কিন্তু y এর মান কখনই শূন্য হবে না এবং x এর ধনাত্মক মান বৃদ্ধির সাথে সাথে $f(x)$ মান বৃদ্ধি পায়।

$\therefore$ ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = (0, \infty)$

ঘ $\boldsymbol{f(x) = e^{-x}, 2 < e < 3}$

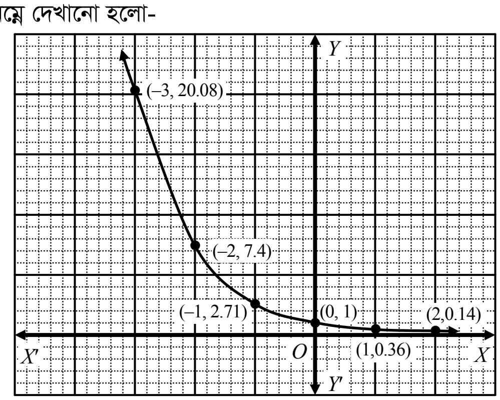
ধরি, $y = f(x) = e^{-x}$

x এর কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো-

x	2	1	0	-1	-2	-3
y	0.14	0.36	1	2.71	7.4	20.08

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে বিন্দুগুলো পাতন করে সাবলীলভাবে যুক্ত করে $f(x) = e^{-x}$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো-



ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়:

x এর সকল বাস্তব মানের জন্য ফাংশন $f(x)$ সংজ্ঞায়িত।

$\therefore$ ফাংশনটির ডোমেন $D_f = R$

আবার, $x = 0$ হলে $f(x) = e^0 = 1 > 0$

$$x \to \infty \text{ হলে } f(x) \to e^{-\infty} = \frac{1}{e^{\infty}} = 0$$

$$x \to -\infty \text{ হলে } f(x) \to e^{-(-\infty)} = e^{\infty} = \infty$$

সকল $x \in R$ এর জন্য $f(x) \in (0,\infty)$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $(0, \infty)$

ঙ $f(x) = 3^x$

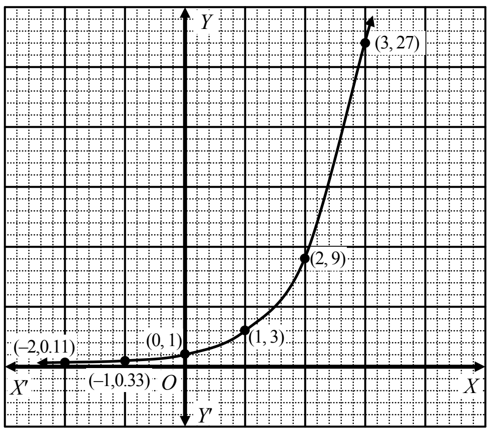
ধরি, $y = f(x) = 3^x$

x এর কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো-

x	-2	-1	0	1	2	3
y	0.11	0.33	1	3	9	27

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 5 বর্গ ঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখায় যুক্ত করে $f(x) = 3^x$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো-



ডোমেন ও রেঞ্জ নির্ণয়: x এর সকল বাস্তব মানের জন্য প্রদত্ত ফাংশন $f(x)$ সংজ্ঞায়িত।

$\therefore$ ফাংশনটির ডোমেন $D_f = R$

আবার, $x = 0$ হলে $f(x) = 3^0 = 1 > 0$

$x \to \infty$ হলে $f(x) \to 3^{\infty} = \infty$

$x \to -\infty$ হলে $f(x) \to 3^{-\infty} = \frac{1}{3^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0$

$\therefore$ x সকল বাস্তব মানের জন্য $f(x)$ এর মান $(0,\infty)$ ব্যবধিতে অবস্থিত।

ফাংশনের রেঞ্জ $= (0,\infty)$

$\therefore$ প্রদত্ত ফাংশনের রেঞ্জ $R_f = (0, \infty)$

কাজ *পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২২০*

ক) টেবিলে উল্লেখিত x ও y এর মান নিয়ে $y = \log_{10} x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন কর।

x	0.5	1	2	3	4	5	10	12
y	-0.3	0	0.3	0.5	0.6	0.7	1	1.07

সমাধান: $y = \log_{10} x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন:

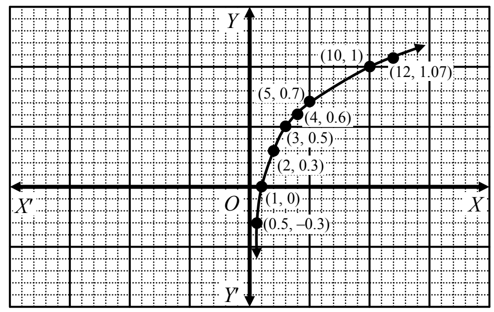
ধরি, $y = f(x) = \log_{10} x$

x এর 0.5 থেকে 12 এর মধ্যে কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের ছকে দেখানো হলো-

x	0.5	1	2	3	4	5	10	12
y	-0.3	0	0.3	0.5	0.60	0.70	1	1.07

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গ ঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখার যুক্ত করে $y = f(x)$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো-



খ) $y = \log_e x$ এর লেখচিত্র অঙ্কনের জন্য (ক) এর ন্যায় x ও y এর মান নিয়ে টেবিল তৈরি কর এবং লেখচিত্র আঁক।

সমাধান: $y = \log_e x$ এর লেখচিত্র অঙ্কন:

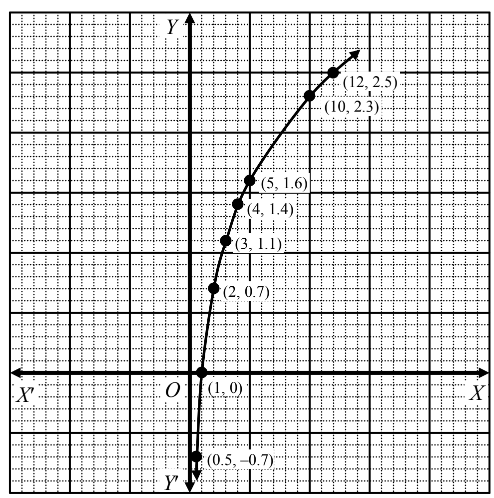
ধরি, $y = f(x) = \log_e x$

x এর 0.5 থেকে 12 এর মধ্যে কয়েকটি মান নিয়ে সংশ্লিষ্ট y এর মান নিম্নের টেবিলে দেখানো হলো-

x	0.5	1	2	3	4	5	10	12
y	-0.7	0	0.7	1.1	1.4	1.6	2.3	2.5

এখন, ছক কাগজে সুবিধামত x-অক্ষ XOX' এবং y-অক্ষ YOY' আঁকি। x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 1 বর্গ ঘর = 1 একক এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্রতম 10 বর্গ ঘর = 1 একক ধরে (x, y) বিন্দুগুলো পাতন করি। বিন্দুগুলোকে সহজভাবে বক্ররেখার যুক্ত করে $y = f(x) =$ এর লেখ পাওয়া যায়।

যা নিম্নে দেখানো হলো-



বি.দ্র: যেহেতু লগারিদম শুধু ধনাত্মক বাস্তব মানের জন্য সংজ্ঞায়িত। তাই $y = \log_e x$ ফাংশনে x এর মান কখনও ঋণাত্মক হবে না।