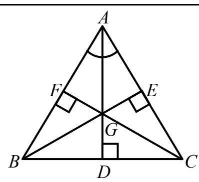
চতুর্থ অধ্যায়

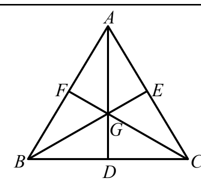
জ্যামিতিক অঙ্কন

অনুশীলনী - ৪

ত্রিভুজঃ

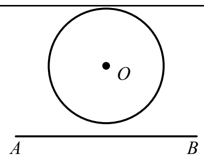


শিরঃকোণঃ ভূমির বিপরীত কোণ হলো শিরঃকোণ ($\angle A$)
উচ্চতাঃ যেকোনো শীর্ষ হতে বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্যই হলো ত্রিভুজের উচ্চতা। চিত্রে AD, BE এবং CF প্রত্যেকেই ΔABC এর উচ্চতা নির্দেশ করে।

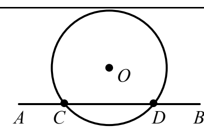


মধ্যমাঃ যেকোনো শীর্ষ হতে বিপরীত বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাই ত্রিভুজের মধ্যমা (AD, BE ও CF)

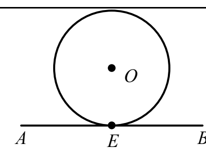
বৃত্ত ও সরলরেখাঃ



বৃত্ত ও সরলরেখার কোনো সাধারণ বিন্দু নেই।

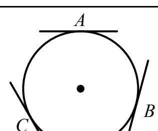


একটি সরলরেখা বৃত্তকে সর্বাধিক দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে।

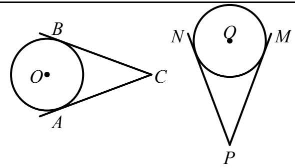


একটি সরলরেখা বৃত্তকে একটি মাত্র বিন্দুতে স্পর্শ করে।

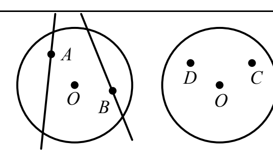
বৃত্ত ও স্পর্শকঃ



বৃত্তের উপরস্থ যেকোনো বিন্দুতে একটি মাত্র স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

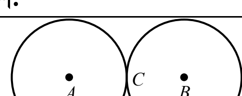


বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু হতে বৃত্তের সর্বাধিক দুইটি স্পর্শক অঙ্কন করা যায় এবং স্পর্শকদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান।

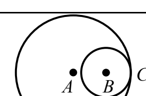


বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ কোনো বিন্দু হতে বৃত্তে স্পর্শক অঙ্কন সম্ভব নয়।

অন্তঃস্পর্শ ও বহিঃস্পর্শঃ



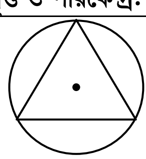
দুইটি বৃত্ত পরস্পর একটিমাত্র বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করে।
কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব = ব্যাসার্ধদ্বয়ের যোগফল



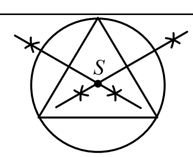
দুইটি বৃত্ত পরস্পর একটি মাত্র বিন্দুতে অন্তঃস্পর্শ করতে পারে।
কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব = ব্যাসার্ধদ্বয়ের অন্তর

দুইটি বৃত্ত পরস্পর অন্তঃস্পর্শ বা বহিঃস্পর্শ করলে কেন্দ্রদ্বয় ও স্পর্শবিন্দু সমরেখ।

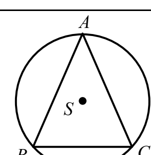
পরিবৃত্ত ও পরিকেন্দ্রঃ



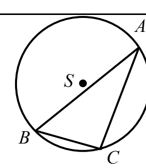
ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দুগামী বৃত্তই ত্রিভুজের পরিবৃত্ত।



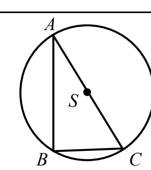
ত্রিভুজের বাহুত্রয়ের লম্বদ্বিখণ্ডকের ছেদবিন্দুই ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র (S)



সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ত্রিভুজের অভ্যন্তরে।



স্থূলকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ত্রিভুজের বহির্ভাগে।



সমকোণী ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র ত্রিভুজের অতিভুজের মধ্যবিন্দু।

অনুশীলনীর সমাধান

১ $x = 60°$ **হলে** $\angle x$ **এর সম্পূরক কোণের অর্ধেকের মান কত?**
(ক) 30° (খ) 60° (গ) 120° (ঘ) 180°

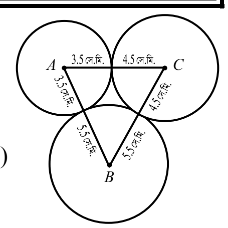
উত্তর: (খ)

ব্যাখ্যা: আমরা জানি, দুইটি সম্পূরক কোণের সমষ্টি 180°।
$\angle x = 60°$ এর সম্পূরক কোণ হবে $= (180° - 60°) = 120°$।
$\angle x$ এর সম্পূরক কোণের অর্ধেক $= \frac{120°}{2} = 60°$।

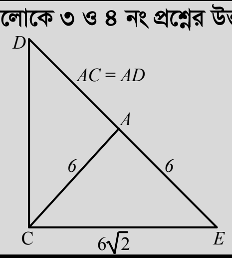
২ 3.5 সে.মি., 4.5 সে.মি. এবং 5.5 সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট তিনটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিস্পর্শ করলে কেন্দ্রত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজের পরিসীমা কত সে.মি.?
(ক) 54 (খ) 40.5 (গ) 27 (ঘ) 13

উত্তর: (গ)

ব্যাখ্যা: তিনটি বৃত্ত পরস্পর বহিঃস্পর্শ করলে কেন্দ্রত্রয় দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজ ABC
$\therefore \Delta ABC$ এর পরিসীমা
$= AB + BC + CA$
$= (3.5 + 5.5) + (5.5 + 4.5) + (4.5 + 3.5)$
$= (9 + 10 + 8)$ সে.মি.
$= 27$ সে.মি.



■ **নিচের তথ্যের আলোকে ৩ ও ৪ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:**



৩ $\angle ADC$ **এর মান কত?**
(ক) 30° (খ) 45° (গ) 60° (ঘ) 75°

উত্তর: (খ)

ব্যাখ্যা: ΔACE-এ দেখা যায় যে, $AC^2 + AE^2 = CE^2$
সুতরাং $\angle CAE = 90°$ বা 1 সমকোণ
তাহলে, $\angle CAD = 180° - \angle CAE = 180° - 90° = 90°$
$\therefore \angle CAD = 90°$ বা 1 সমকোণ
আবার যেহেতু, $AC = AD$
$\therefore \angle ADC = \angle ACD$
$\therefore \Delta ADC$-এ, $\angle CAD + \angle ACD + \angle ADC = 180°$
[ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি 180°]
বা, $90° + 2\angle ADC = 180°$
বা, $2\angle ADC = 180° - 90° = 90°$
$\therefore \angle ADC = 45°$

৪ ΔADC **ও** ΔAEC **এর ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত কত?**
(ক) 2 : 1 (খ) 1 : 1 (গ) 1 : 2 (ঘ) $1 : \sqrt{2}$

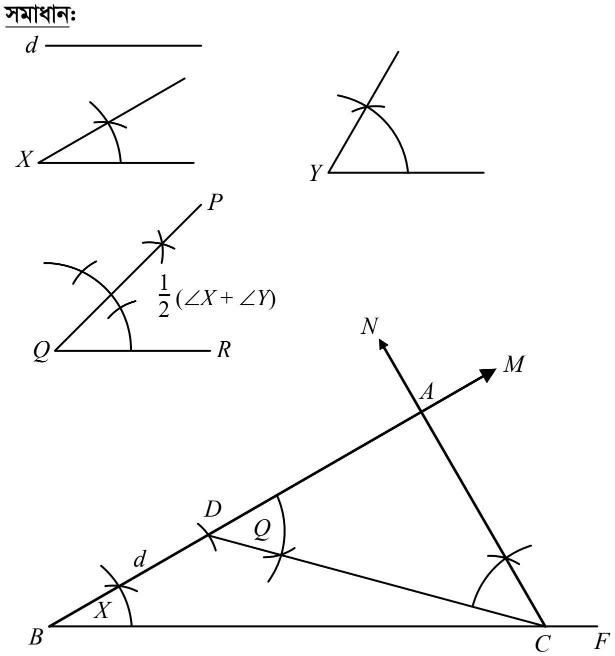
উত্তর: (খ) 1 : 1

ব্যাখ্যা: এখানে, ΔADC এবং ΔAEC উভয় সমকোণী।
কারণ, $\angle CAD = \angle CAE = 90°$

$$\therefore \frac{\Delta ADC \text{ এর ক্ষেত্রফল}}{\Delta AEC \text{ এর ক্ষেত্রফল}} = \frac{\frac{1}{2} \times AD \times AC}{\frac{1}{2} \times AE \times AC} = \frac{\frac{1}{2} \times 6 \times AC}{\frac{1}{2} \times 6 \times AC} = \frac{1}{1} = 1 : 1$$

৫ কোনো ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও তাদের বিপরীত বাহুদ্বয়ের অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

সমাধান:



সাধারণ নির্বচন: কোনো ত্রিভুজের দুইটি কোণ এবং তাদের বিপরীত বাহুদ্বয়ের অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

বিশেষ নির্বচন: কোনো ত্রিভুজের দুইটি কোণ $\angle X$ ও $\angle Y$ $(\angle Y > \angle X)$ এবং কোণদ্বয়ের বিপরীত বাহুদ্বয়ের অন্তর d দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কনের ধাপসমূহ:

ধাপ-১: যে কোনো রেখাংশ BF এর B বিন্দুতে $\angle X$ এর সমান করে $\angle MBF$ অঙ্কন করি।

ধাপ-২: BM হতে $BD = d$ অংশ কেটে নেই। $\frac{1}{2}(\angle X + \angle Y)$ এর সমান করে $\angle PQR$ আঁকি।

ধাপ-৩: BD-এর D বিন্দুতে $\angle MDC = \angle PQR$ আঁকি। DC রেখা BF কে C বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-৪: এবার C বিন্দুতে $\angle DCN = \angle MDC$ আঁকি। CN রেখা BM কে A বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ যা প্রদত্ত শর্ত পূরণ করে।

সম্পাদ্যের প্রশ্নে প্রমাণ লেখার প্রয়োজন নেই। এখানে অঙ্কনের যথার্থতা বুঝার জন্য প্রমাণ দেওয়া হলো:

প্রমাণ: অঙ্কন অনুসারে, ΔACD-এ $\angle ACD = \angle ADC = \frac{1}{2}(\angle X + \angle Y)$

এবং $AD = AC$

এখন, ΔBDC-এর বহিঃস্থ $\angle ADC =$ অন্তঃস্থ বিপরীত $(\angle DBC + \angle DCB)$

অর্থাৎ $\angle DCB = \angle ADC - \angle DBC = \frac{1}{2}(\angle X + \angle Y) - \angle X$

সুতরাং ΔABC-এর $\angle ABC = \angle X$

এবং $\angle ACB = \angle DCB + \angle ACD$

$= \frac{1}{2}(\angle X + \angle Y) - \angle X + \frac{1}{2}(\angle X + \angle Y)$

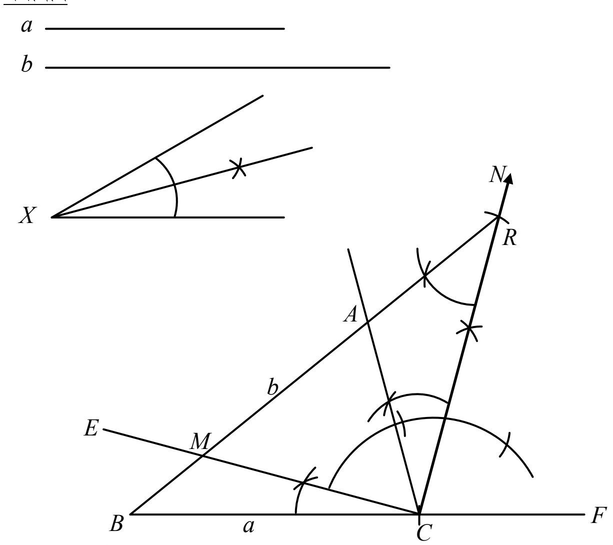
$= \angle X + \angle Y - \angle X = \angle Y$

এবং $d = BD = AB - AD = AB - AC$ যা $\angle Y$ ও $\angle X$ কোণের বিপরীত বাহুদ্বয়ের অন্তর।

$\therefore$ ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

৬ ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর ও অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

সমাধান:



সাধারণ নির্বচন: কোনো ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর ও অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, কোনো ত্রিভুজের ভূমি a, ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের অন্তর $\angle X$ এবং অপর বাহুদ্বয়ের সমষ্টি b দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।

অঙ্কনের ধাপসমূহ:

ধাপ-১: BF যেকোনো রেখাংশ হতে $BC = a$ অংশ কাটি। BC-এর C বিন্দুতে $\angle BCE = \frac{1}{2}\angle X$ আঁকি।

ধাপ-২: EC রেখাংশের C বিন্দুতে CN লম্ব আঁকি।

ধাপ-৩: B বিন্দুকে কেন্দ্র করে b-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে CN রেখায় একটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপটি CN কে R বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-৪: B, R যোগ করি। BR রেখা CE কে M বিন্দুকে ছেদ করে।

ধাপ-৫: C বিন্দুতে $\angle ACR = \angle BRC$ আঁকি। CA রেখা BR কে A বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ যা প্রদত্ত শর্ত পূরণ করে।

সম্পাদ্যের প্রশ্নে প্রমাণ লেখার প্রয়োজন নেই। এখানে অঙ্কনের যথার্থতা বুঝার জন্য প্রমাণ দেওয়া হলো:

প্রমাণ: ΔACR-এর $\angle ARC = \angle ACR$ $\therefore$ $AC = AR$

এখন, $AB + AC = AB + AR = BR = b$

RMC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle RMC + \angle MRC =$ এক সমকোণ ; $[\because EC \perp CR]$

এবং $\angle ACM + \angle ACR =$ এক সমকোণ

কিন্তু $\angle ACR = \angle ARC$

$\therefore$ $\angle AMC = \angle ACM$

আবার, ΔBMC-এর বহিঃস্থ $\angle AMC =$ অন্তঃস্থ বিপরীত $(\angle MBC + \angle MCB)$

অর্থাৎ $\angle ACM = \angle ABC + \angle MCB$

এখন, $\angle ACB - \angle ABC = (\angle ACM + \angle MCB) - \angle ABC$

$= (\angle ABC + \angle MCB) + \angle MCB - \angle ABC$

$= 2\angle MCB = 2.\frac{1}{2}\angle X = \angle X$

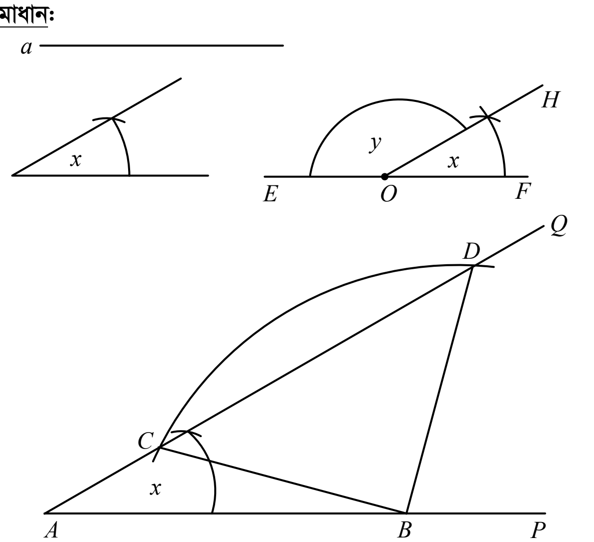
সুতরাং ΔABC-এর $BC = a$; $AB + AC = b$

এবং $\angle ACB - \angle ABC = \angle X$

$\therefore$ ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

৭ ভূমি, শিরঃকোণ ও অপর কোণদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

সমাধান:



সাধারণ নির্বচন: ভূমি শিরঃকোণ ও অপর কোণদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ত্রিভুজের ভূমি a, শিরঃকোণ $\angle x$ ও অপর কোণদ্বয়ের সমষ্টি $\angle y$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের ধাপসমূহ:

ধাপ-১: যেহেতু ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ সেহেতু একটি কোণ $\angle x$ হলে অপর দুই কোণের সমষ্টি $\angle x$ এর সম্পূরক হবে। কোনো রেখাংশ EOF এর O বিন্দুতে $\angle x = \angle HOF$ আঁকি তাহলে $\angle EOH = \angle y$ হবে।

ধাপ-২: এখন যেকোনো রেখাংশ AP এর A বিন্দুতে $\angle x = \angle PAQ$ আঁকি।

ধাপ-৩: AP এর উপরিস্থিত যেকোনো বিন্দু B নিয়ে যে দিকে Q বিন্দু অবস্থিত সে দিকে ভূমি a এর দৈর্ঘ্যের সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্তচাপ অঙ্কন করলে উহা AQ কে যথাক্রমে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-৪: B, C ও B, D যোগ করি।

সুতরাং $\Delta\ ABC$ ও $\Delta\ ABD$ উভয়ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

সম্পাদ্যের প্রশ্নে প্রমাণ লেখার প্রয়োজন নেই। এখানে অঙ্কনের যথার্থতা বুঝার জন্য প্রমাণ দেওয়া হলো:

প্রমাণ: ভূমি $BC = BD = a$

শীর্ষকোণ $\angle A = \angle x$

এবং অপর দুইকোণের সমষ্টি $\angle ABC + \angle ACB = 180° - \angle x = \angle y$

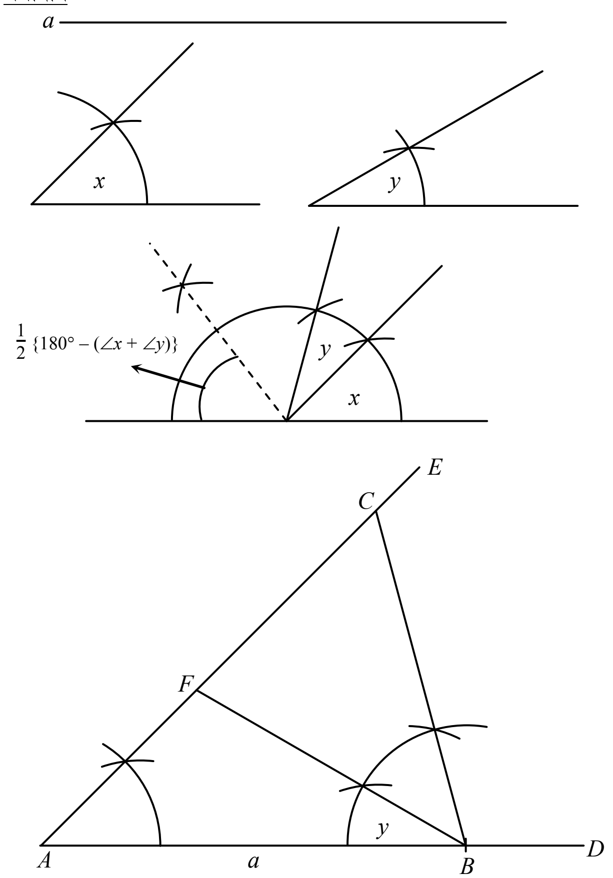
৫নং প্রশ্নে উল্লিখিত "অপর কোণদ্বয়ের সমষ্টি" শব্দগুলো অতিরিক্ত তথ্য হিসেবে সন্নিবেশিত হয়েছে। ৫নং প্রশ্নের বিকল্পরূপগুলো হলো:

i. ত্রিভুজের ভূমি ও শিরঃকোণ দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

ii. ত্রিভুজের ভূমি ও ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয়ের সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

৮ ভূমি, শিরঃকোণ ও অপর কোণদ্বয়ের অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

সমাধান:



সাধারণ নির্বচন: ভূমি, শিরঃকোণ ও অপর কোণদ্বয়ের অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ত্রিভুজের ভূমি a, শিরঃকোণ $\angle x$ এবং অপর কোণদ্বয়ের অন্তর $\angle y$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের ধাপসমূহ:

ধাপ-১: AD যেকোনো রেখাংশ থেকে $AB = a$ অংশ কেঁটে নিই। A বিন্দুতে $\angle DAE = \frac{1}{2}\{180° - (\angle x + \angle y)\}$ আঁকি।

ধাপ-২: AB রেখার B বিন্দুতে $\angle ABF = \angle y$ আঁকি উহা AE কে F বিন্দুতে ছেদ করল।

ধাপ-৩: FB রেখার B বিন্দুতে $\angle DAE = \angle FBC$ আঁকি উহা AE কে C বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে ABC ত্রিভুজই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ যা প্রদত্ত শর্ত পূরণ করে।

সম্পাদ্যের প্রশ্নে প্রমাণ লেখার প্রয়োজন নেই। এখানে অঙ্কনের যথার্থতা বুঝার জন্য প্রমাণ দেওয়া হলো:

প্রমাণ: ΔABC এর ভূমি $AB = a$

শিরঃকোণ $\angle ACB = 180° - (\angle CAB + \angle CBA)$

$= 180° - (\angle CAB + \angle CBF + \angle ABF)$

$= 180° - (2\angle CAB + \angle ABF)$; $[\because \angle DAF = \angle FBC]$

$= 180° - [2.\frac{1}{2}\{180° - (\angle x + \angle y)\} + \angle y]$; $[\because \angle ABF = \angle y]$

$= 180° - 180° + \angle x + \angle y - \angle y$

$= \angle x$

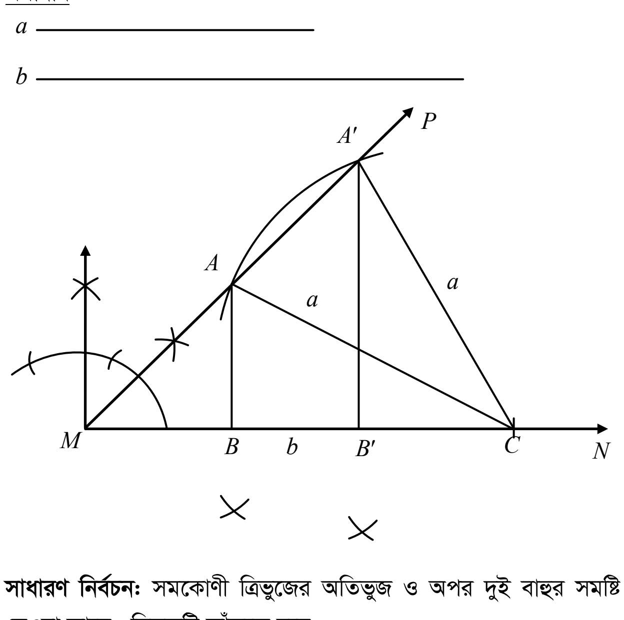
এবং অপর দুই কোণের অন্তর $\angle ABC - \angle CAB$

$= \angle ABF + \angle FBC - \angle CAB = \angle ABF = \angle y$ $[\because \angle DAF = \angle FBC]$

$\therefore$ ABC ত্রিভুজই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

৯ সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।

সমাধান:



সাধারণ নির্বচন: সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ a এবং অপর দুই বাহুর সমষ্টি b দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের ধাপসমূহ:

ধাপ-১: MN যেকোনো সরলরেখা হতে $MC = b$ কেটে নেই।

ধাপ-২: M বিন্দুতে $\angle NMP = 45°$ আঁকি।

ধাপ-৩: C বিন্দুকে কেন্দ্র করে a-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি। এ বৃত্তচাপ MP রশ্মিকে A ও A' বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-৪: A, C এবং A', C যোগ করি।

ধাপ-৫: এখন A ও A' বিন্দু হতে MN-এর উপর AB ও $A'B'$ লম্ব আঁকি। তাহলে ΔABC বা $\Delta A'B'C$-ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

সম্পাদ্যের প্রশ্নে প্রমাণ লেখার প্রয়োজন নেই। এখানে অঙ্কনের যথার্থতা বুঝার জন্য প্রমাণ দেওয়া হলো:

প্রমাণ: ΔABM-এ $\angle B = 90°$ হওয়ায়, $\angle BMA = \angle BAM = 45°$

$\therefore MB = AB$

এখন, ΔABC-এ $\angle B = 90°$ এবং অতিভুজ $AC = a$

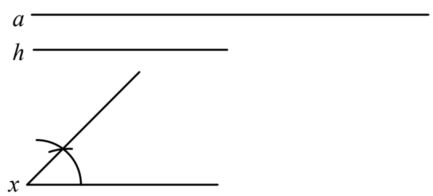
আবার $AB + BC = MB + BC = MC = b$

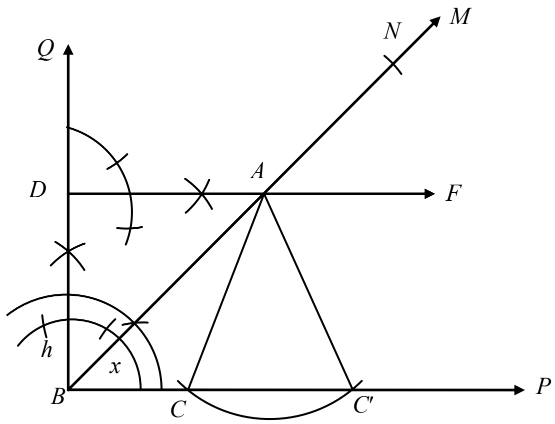
$\therefore ABC$-ই উদ্দিষ্ট সমকোণী ত্রিভুজ।

অনুরূপভাবে দেখানো যায় যে, $\Delta A'B'C$ ও উদ্দিষ্ট সমকোণী ত্রিভুজ।

১০ **ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ, উচ্চতা ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।**

সমাধানঃ





সাধারণ নির্বচন: ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন একটি কোণ, উচ্চতা ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, কোনো ত্রিভুজের ভূমিসংলগ্ন একটি কোণ $\angle x$, উচ্চতা h এবং অপর দুই বাহুর সমষ্টি a দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের ধাপসমূহ:

ধাপ-১: যেকোনো রশ্মি BP নেই।

ধাপ-২: BP রেখার B বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান করে $\angle PBM$ আঁকি।

ধাপ-৩: BM হতে $BN = a$ কাটি।

ধাপ-৪: আবার, BP রেখার B বিন্দুতে BQ লম্ব টানি।

ধাপ-৫: BQ থেকে $BD = h$ কেটে নিই।

ধাপ-৬: এখন D বিন্দুতে BP-এর সমান্তরাল করে DF রশ্মি আঁকি। DF, BM-কে A বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-৭: A বিন্দুকে কেন্দ্র করে AN-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপ BP- কে C ও C' বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-৮: A, C এবং A, C' যোগ করি।

তাহলে, ΔABC বা $\Delta ABC'$-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

সম্পাদ্যের প্রশ্নে প্রমাণ লেখার প্রয়োজন নেই। এখানে অঙ্কনের যথার্থতা বুঝার জন্য প্রমাণ দেওয়া হলো:

প্রমাণ: ΔABC বা $\Delta ABC'$-এ $\angle B = \angle x$ এবং উচ্চতা $= h$

কারণ, ত্রিভুজদ্বয় একই সমান্তরাল রেখাদ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত।

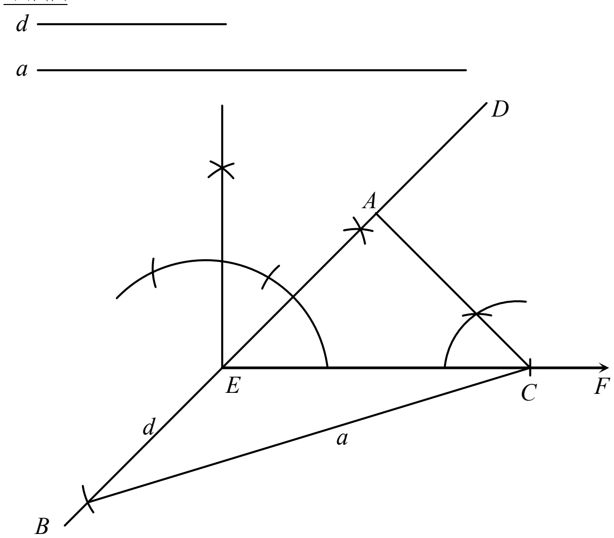
এখন, ΔABC-এ, $AB + AC = AB + AN = BN = a$

এখন, $\Delta ABC'$-এ, $AB + AC' = AB + AN = BN = a$

$\therefore$ ΔABC বা $\Delta ABC'$-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

১১ **(ক) সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর দুইটি বাহুর অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁক।**

সমাধানঃ



সাধারণ নির্বচন: একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর দুইটি বাহুর অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ a ও অপর দুই বাহুর অন্তর d দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের ধাপসমুহ:

ধাপ-১: যেকোনো EF রেখাংশের E বিন্দুতে $\angle DEF = 45°$ অঙ্কন করি।

ধাপ-২: DE কে EB পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন $EB = d$ হয়।

ধাপ-৩: B বিন্দুকে কেন্দ্র করে অতিভুজ a-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি উহা EF কে C বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-৪: B, C যোগ করি।

ধাপ-৫: আবার, EC রেখার C বিন্দুতে $\angle DEC = \angle ACE$ অঙ্কন করি যেন CA রেখাংশ ED কে A বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

সম্পাদ্যের প্রশ্নে প্রমাণ লেখার প্রয়োজন নেই। এখানে অঙ্কনের যথার্থতা বুঝার জন্য প্রমাণ দেওয়া হলো:

প্রমাণ: ΔAEC-এ, $\angle AEC = \angle ACE \ (= 45°)$ $\therefore AE = AC$

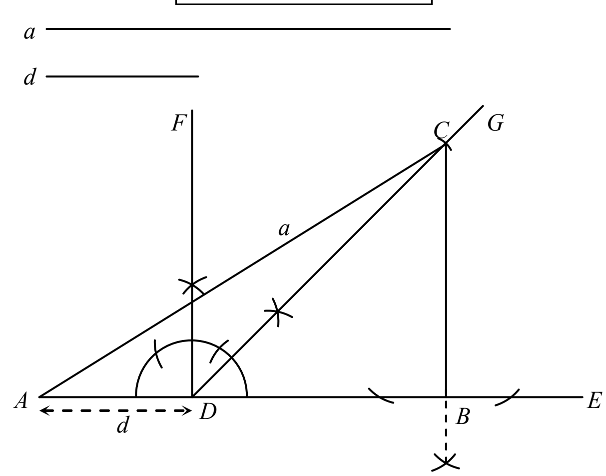
$\angle EAC = 180° - (\angle AEC + \angle ACE) = 180° - (45° + 45°) = 90°$

এখন ΔABC-এ $\angle BAC = 90°$ এবং অতিভুজ $BC = a$

এবং অপর দুই বাহুর অন্তর $AB - AC = AB - AE = EB$

$\therefore$ ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)



সাধারণ নির্বচন: একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর দুইটি বাহুর অন্তর দেওয়া আছে, ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ a ও অপর দুই বাহুর অন্তর d দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের ধাপসমুহ:

ধাপ-১: যেকোনো রেখাংশ AE থেকে $AD = d$ কেটে নিই।

ধাপ-২: AE রেখার D বিন্দুতে $\angle EDG = 45°$ অঙ্কন করি।

ধাপ-৩: A বিন্দুকে কেন্দ্র করে অতিভুজ a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ অঙ্কন করি। ঐ চাপ DG কে C বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-৪: A, C যোগ করি। C বিন্দু থেকে AE এর উপর CB লম্ব অঙ্কন করি। তাহলে, ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ অঙ্কিত হলো।

সম্পাদ্যের প্রশ্নে প্রমাণ লেখার প্রয়োজন নেই। এখানে অঙ্কনের যথার্থতা বুঝার জন্য প্রমাণ দেওয়া হলো:

প্রমাণ: ΔABC-এর $\angle B = 90°$ $[\because BC \perp AB]$

এবং $AC = a$; [অঙ্কন অনুসারে]

ΔBDC-এ $\angle BDC = 45°$; [অঙ্কন অনুসারে]

এবং $\angle DBC = 90°$

$\therefore \angle BCD = 45° = \angle BDC$

$\therefore BD = BC$

এখন ΔABC এর $AB - BC = (AD + BD) - BC$

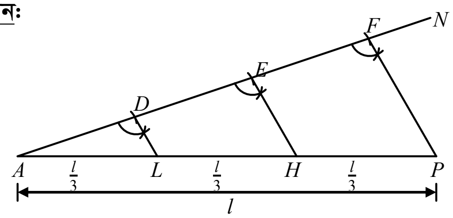
$= AD + BC - BC$

$= AD = d$

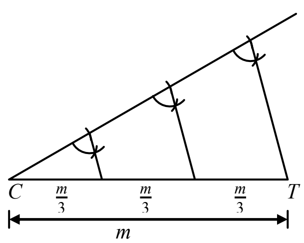
$\therefore \Delta ABC$-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

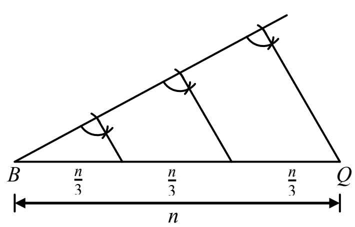
১১ (খ) একটি ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় দেয়া আছে ত্রিভুজটি আঁক।

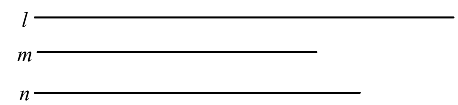
সমাধান:

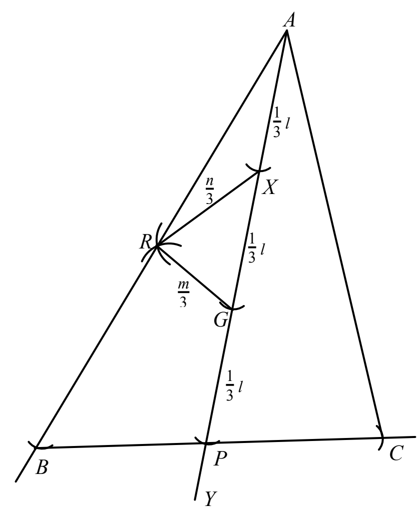


চিত্র-১









চিত্র-২

মনে করি, একটি ত্রিভুজের তিনটি মধ্যমা l, m ও n দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ:

ধাপ-১: l, m ও n মধ্যমাত্রয়কে সমান তিন ভাগে বিভক্ত করি। এজন্য-

(a) যেকোনো সরলরেখা $AP = l$ নিই (চিত্র-১)।

(b) AP এর A বিন্দুতে যেকোনো কোণ $\angle PAN$ আঁকি।

(c) AN হতে AD, DE ও EF অংশ কাটি যেন $AD = DE = EF$ হয়।

(d) P, F যোগ করি।

(e) D ও E বিন্দু হতে যথাক্রমে DL ও EH রেখা টানি যেন $DL \parallel FP$ এবং $EH \parallel FP$ হয়। DL ও EH, AP কে যথাক্রমে L ও H বিন্দুতে ছেদ করে।

(f) ফলে $AP = l$ সরলরেখাটি তিনটি সমান অংশে বিভক্ত হবে যেখানে $AL = LH = HP$।

(g) একই পদ্ধতিতে $m = CT$ ও $n = BQ$ মধ্যমা দুটিকেও সমান তিনভাগে বিভক্ত করি।

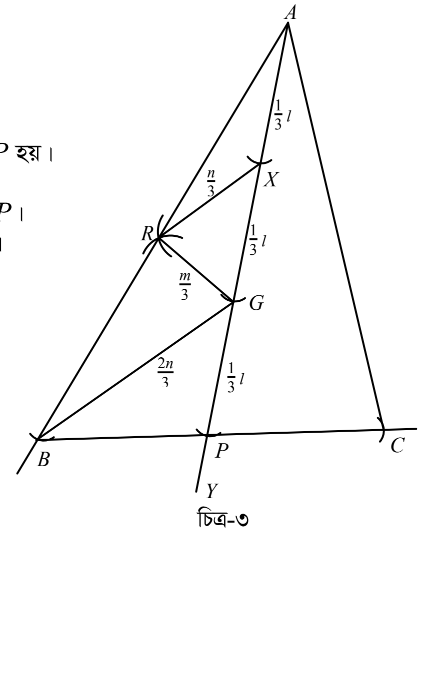
ধাপ-২: যেকোনো সরলরেখা AY হতে $AP = l$ নিই (চিত্র-২)। AP হতে AX ও GX অংশে কাঁটি যেন $AX = GX = \frac{1}{3}l$ হয়।

ধাপ-৩: X ও G কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে $\frac{n}{3} = \frac{BQ}{3}$ ও $\frac{m}{3} = \frac{CT}{3}$ এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে AP এর একই পাশে দুটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পরকে R বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-৪: A, R যোগ করে B পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন $AR = RB$ হয়।

ধাপ-৫: B, P যোগ করে C পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন $BP = PC$ হয়। C, A যোগ করি।

তাহলে, ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।



চিত্র-৩

প্রমাণ: চিত্র-৩ এ ΔABC এর একটি মধ্যমা $AP = l$ এবং G ভরকেন্দ্র।
$R, X; R, G; B, G$ যোগ করি।
ΔABG-এ AB ও AG বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে R ও X। আমরা জানি, ত্রিভুজের দুইটি বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর অর্ধেক।

সুতরাং $RX = \frac{1}{2} BG$ বা $BG = 2RX = 2\frac{n}{3}$

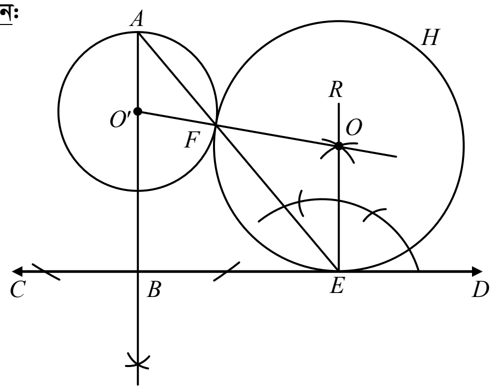
অর্থাৎ, n, G বিন্দুতে $2 : 1$ অনুপাতে বিভক্ত হয়।
আমরা জানি, মধ্যমাত্রয় ভরকেন্দ্রে পরস্পরকে $2 : 1$ অনুপাতে বিভক্ত করে। সুতরাং n, ΔABC এর অপর একটি মধ্যমা।

আবার, R, AB এর মধ্যবিন্দু এবং $RG = \frac{m}{3}$ অর্থাৎ G বিন্দুটি RC তথা m কে $1 : 2$ অনুপাতে বিভক্ত করে। সুতরাং m, ΔABC এর অপর একটি মধ্যমা।
সুতরাং ΔABC-এর মধ্যমাত্রয় হলো l, m ও n। **(প্রমাণিত)**

দৃষ্টি আকর্ষণ: ত্রিভুজের শুধুমাত্র দুটি মধ্যমা দেওয়া থাকলেও ত্রিভুজটি আঁকা সম্ভব।

১২ এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে এবং অপর একটি বৃত্তকে স্পর্শ করে।

সমাধান:



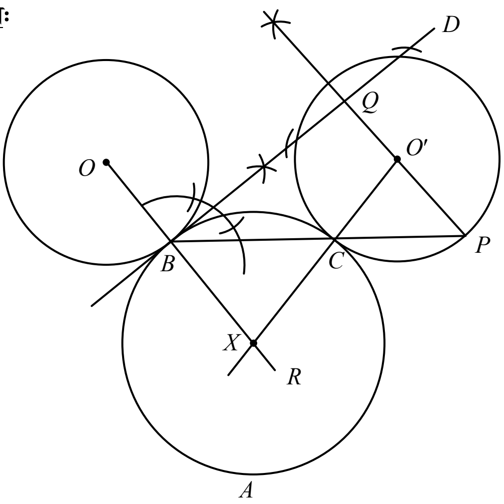
সাধারণ নির্বচন: এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে এর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে এবং অপর একটি বৃত্তকে স্পর্শ করে।
বিশেষ নির্বচন: মনে করি, একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা CD-এর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু E এবং O' কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটি একটি নির্দিষ্ট বৃত্ত। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা CD সরলরেখাকে E বিন্দুতে এবং O' কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তকে যেকোনো বিন্দুতে স্পর্শ করে।
অঙ্কনের ধাপসমূহ:
ধাপ-১: নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র O' হতে CD রেখার উপর $O'B$ লম্ব আঁকি। BO'-এর বর্ধিতাংশ O' কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তকে A বিন্দুতে ছেদ করে।
ধাপ-২: A, E যোগ করি। AE রেখা বৃত্তটিকে F বিন্দুতে ছেদ করে।
ধাপ-৩: CD এর উপর E বিন্দুতে ER লম্ব আঁকি। O', F যোগ করে বর্ধিত করি যা ER কে O বিন্দুতে ছেদ করে।
ধাপ-৪: O কে কেন্দ্র করে OF বা OE এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করি।
তাহলে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট EHF বৃত্তটিই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

সম্পাদ্যের প্রশ্নে প্রমাণ লেখার প্রয়োজন নেই। এখানে অঙ্কনের যথার্থতা বুঝার জন্য প্রমাণ দেওয়া হলো:

প্রমাণ: CD রেখার উপর AB ও RE লম্ব। সুতরাং $AB \parallel RE$
$\therefore \angle O'AF =$ একান্তর $\angle FEO$
কিন্তু, $\angle O'FA = \angle O'AF$ $[\because \Delta O'AF$-এর $O'A = O'P]$
এবং $\angle O'FA =$ বিপ্রতীপ $\angle EFO$
$\therefore \angle EFO = \angle FEO$
$\therefore \Delta OEF$-এর $OE = OF$
সুতরাং O কে কেন্দ্র করে FO-এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত E বিন্দু দিয়ে যাবে। আবার, যেহেতু O ও O' কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তদ্বয় F বিন্দুতে মিলিত হয়েছে এবং F বিন্দু ও বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্রদ্বয় একই রেখায় অবস্থিত সেহেতু বৃত্তদ্বয় F বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করবে।
আবার, CD রেখা O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের OE ব্যাসার্ধের E বিন্দুতে লম্ব। সুতরাং CD, বৃত্তটিকে E বিন্দুতে স্পর্শ করবে।
সুতরাং, O কেন্দ্রবিশিষ্ট EHF বৃত্তটি O' কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তকে F বিন্দুতে এবং CD নির্দিষ্ট সরলরেখার নির্দিষ্ট বিন্দু E তে স্পর্শ করে।
$\therefore$ O কেন্দ্রবিশিষ্ট EHF বৃত্তটিই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

১৩ এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে এর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে এবং অপর একটি বৃত্তকে কোনো বিন্দুতে স্পর্শ করে।

সমাধান:



সাধারণ নির্বচন: এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে এর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে এবং অপর একটি বৃত্তকে কোনো বিন্দুতে স্পর্শ করে।
বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তে B একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং O' কেন্দ্রবিশিষ্ট অপর একটি বৃত্ত। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যেন উহা O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তকে B বিন্দুতে এবং O' কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তকে কোনো বিন্দুতে স্পর্শ করে।
অঙ্কনের ধাপসমূহ:
ধাপ-১: O, B যোগ করে R পর্যন্ত বর্ধিত করি। B বিন্দুতে BD স্পর্শক আঁকি।
ধাপ-২: O' হতে $O'Q \perp BD$ আঁকি। QO' কে বর্ধিত করি যেন উহা O' কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তকে P বিন্দুতে ছেদ করে।
ধাপ-৩: P, B যোগ করি। PB, O' কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তকে C বিন্দুতে ছেদ করল।
ধাপ-৪: O', C যোগ করে বর্ধিত করি যেন BR কে X বিন্দুতে ছেদ করে, তাহলে X-ই উদ্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র হবে।

ধাপ-৫: X কে কেন্দ্র করে XC বা XB এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে ABC বৃত্তটি অঙ্কন করি।
তাহলে ABC বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

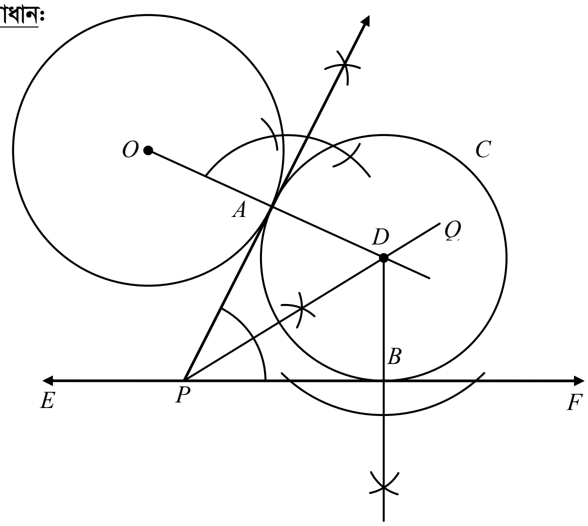
সম্পাদ্যের প্রশ্নে প্রমাণ লেখার প্রয়োজন নেই। এখানে অঙ্কনের যথার্থতা বুঝার জন্য প্রমাণ দেওয়া হলো:

প্রমাণ: X কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের XB ব্যাসার্ধের B বিন্দুতে BD লম্ব। O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তটির BD স্পর্শক। সুতরাং O ও X কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তটি নির্দিষ্ট বিন্দু B তে বহিঃস্পর্শ করে।

আবার, $RB \parallel PQ$ এবং BP ছেদক $\therefore \angle XBC = \angle CPO'$
এবং $\angle XCB =$ বিপ্রতীপ $\angle PCO'$
কিন্তু $\angle PCO' = \angle CPO'$; [$\because$ একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
$\therefore \Delta XBC$-এ $\angle XBC = \angle XCB$ $\therefore XB = XC$
সুতরাং বৃত্তের কেন্দ্র X
আবার, X, C ও O' একই রেখায় অবস্থিত। সুতরাং C বৃত্তদ্বয়ের স্পর্শ বিন্দু।
তাহলে ABC-ই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

১৪ **এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে কোনো বিন্দুতে এবং একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে এর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে।**

সমাধান:



সাধারণ নির্বচন: এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে কোনো বিন্দুতে এবং একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে এর কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে A একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং EF একটি সরলরেখা। এরূপ একটি বৃত্ত আঁকতে হবে যেন উহা প্রদত্ত বৃত্তটিকে A বিন্দুতে এবং EF সরলরেখাকে কোনো বিন্দুতে স্পর্শ করে।

অঙ্কনের ধাপসমূহ:

ধাপ-১: O, A যোগ করি এবং A বিন্দুতে AP স্পর্শক আঁকি। AP, EF কে P বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-২: $\angle APF$ এর সমদ্বিখন্ডক PQ অঙ্কন করি। OA কে বর্ধিত করি উহা PQ কে D বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে D-ই উদ্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র।

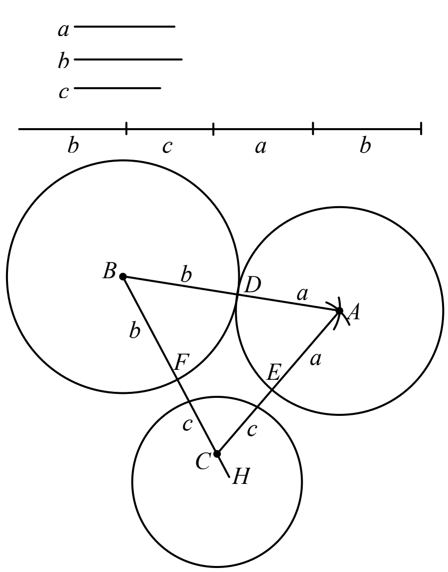
ধাপ-৩: D হতে $DB \perp EF$ আঁকি। এখন D কে কেন্দ্র করে DB বা DA সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে ABC বৃত্তটি আঁকি।
তাহলে ABC-ই নির্ণেয় বৃত্ত।

সম্পাদ্যের প্রশ্নে প্রমাণ লেখার প্রয়োজন নেই। এখানে অঙ্কনের যথার্থতা বুঝার জন্য প্রমাণ দেওয়া হলো:

প্রমাণ: ABC বৃত্তের উপরিস্থিত B বিন্দুতে DB ব্যাসার্ধের উপর EF লম্ব। সুতরাং EF, ABC বৃত্তের স্পর্শক। আবার O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের A বিন্দুতে PA স্পর্শক। এবং O, A ও D একই রেখায় অবস্থিত।
সুতরাং A বিন্দুতে বৃত্ত দুইটি স্পর্শ করে।
এখন $\angle FPA$ এর সমদ্বিখণ্ডক PQ এর উপর D একটি বিন্দু। D হতে PF ও PA এর উপর লম্ব দুরত্ব যথাক্রমে DB ও DA। সুতরাং $DB = DA$
তাহলে D-ই উক্ত বৃত্তের কেন্দ্র।
$\therefore ABC$-ই উদ্দিষ্ট বৃত্ত যা O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তকে A বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং EF রেখার যে কোনো (B) বিন্দুতে স্পর্শ করে।

১৫ **ভিন্ন ভিন্ন ব্যাসার্ধবিশিষ্ট এরূপ তিনটি বৃত্ত আঁক যেন তারা পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করে।**

সমাধান:



সাধারণ নির্বচন: ভিন্ন ভিন্ন ব্যাসার্ধবিশিষ্ট এরূপ তিনটি বৃত্ত আঁক যেন তারা পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করে।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, a, b, c তিনটি নির্দিষ্ট পরস্পর অসমান রেখাংশ। এই তিনটি রেখাংশকে ব্যাসার্ধ করে এরূপ তিনটি বৃত্ত আঁকতে হবে যেন উহারা পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করে।

অঙ্কনের ধাপসমূহ:

ধাপ-১: BH যেকোনো সরলরেখা হতে $BC = b + c$ নিই। B কে কেন্দ্র করে $(b + a)$ ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি।

ধাপ-২: আবার C কে কেন্দ্র করে $(c + a)$ ব্যাসার্ধ নিয়ে একই পাশে আরও একটি বৃত্তচাপ আঁকি। উহারা পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করল।

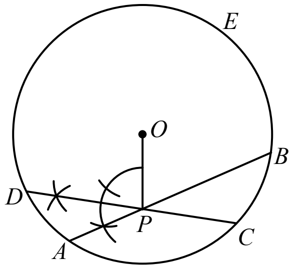
ধাপ-৩: A, B ও C কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে a, b ও c ব্যাসার্ধ নিয়ে তিনটি বৃত্ত আঁকি। বৃত্তগুলো পরস্পরকে D, E ও F বিন্দুতে স্পর্শ করে।
সুতরাং A, B ও C কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্ত তিনটিই নির্ণেয় বৃত্ত।

সম্পাদ্যের প্রশ্নে প্রমাণ লেখার প্রয়োজন নেই। এখানে অঙ্কনের যথার্থতা বুঝার জন্য প্রমাণ দেওয়া হলো:

প্রমাণ: A ও B কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক রেখায় D বিন্দু অবস্থিত এবং বৃত্ত দুইটি D বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। সুতরাং উহারা D বিন্দুতে পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করে। একইভাবে B ও C এবং C ও A কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তগুলি পরস্পরকে যথাক্রমে F ও E বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করে।

১৬ O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তের AB জ্যা এর P যেকোনো বিন্দু। P বিন্দু দিয়ে অপর একটি জ্যা CD অঙ্কন করতে হবে যেন $CP^2 = AP.PB$ হয়।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABE বৃত্তের কেন্দ্র O এবং AB একটি জ্যা। P, AB জ্যা এর উপর যেকোনো একটি বিন্দু। P বিন্দু দিয়ে অপর একটি জ্যা CD এমনভাবে অঙ্কন করতে হবে যেন, $CP^2 = AP.PB$ হয়।

অঙ্কনের ধাপসমূহ:

ধাপ-১: O, P যোগ করি। OP এর P বিন্দুতে PD লম্ব অঙ্কন করি। DP বৃত্তের পরিধিকে D বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-২: DP কে বর্ধিত করি উহা বৃত্তের পরিধিকে C বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে CD-ই উদ্দিষ্ট জ্যা।

সম্পাদ্যের প্রশ্নে প্রমাণ লেখার প্রয়োজন নেই। এখানে অঙ্কনের যথার্থতা বুঝার জন্য প্রমাণ দেওয়া হলো:

প্রমাণ: CD বৃত্তের একটি জ্যা এবং OP, CD এর উপর লম্ব। সুতরাং OP, CD কে সমদ্বিখণ্ডিত করে অর্থাৎ $CP = PD$

এখন, AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরে P বিন্দুতে ছেদ করে।

আমরা জানি, কোনো বৃত্তের দুইটি জ্যা যদি বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ কোনো বিন্দুতে ছেদ করে তবে একটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপরটির অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।

$\therefore$ AB ও CD জ্যাদ্বয় বৃত্তের অভ্যন্তরে P বিন্দুতে ছেদ করেছে।

$\therefore$ একটি জ্যায়ের অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র = অপর জ্যায়ের অংশদ্বয়ের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র।

$\therefore CP.\ PD = AP.\ PB$

বা, $CP.\ CP = AP.\ PB$; $[\because PD = CP]$

$\therefore CP^2 = AP.\ PB$

১৭ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি 5 সে.মি. এবং সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য 6 সে.মি.।

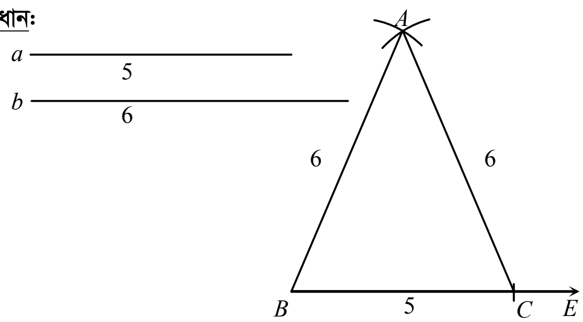
ক. ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

খ. ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত অঙ্কন করে ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

গ. এমন একটি বৃত্ত অঙ্কন কর যা পূর্বে অঙ্কিত পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান একটি বৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু Q দিয়ে যায়।

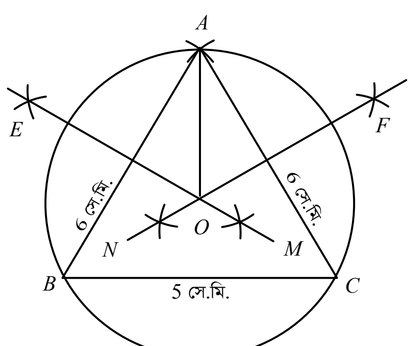
সমাধান:

ক



মনে করি, ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, যার ভূমির দৈর্ঘ্য $BC = a = 5$ সে.মি. এবং সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য $AB = AC = b = 6$ সে.মি.।

খ



বিশেষ নির্বচন: ABC ত্রিভুজটির পরিবৃত্ত আঁকতে হবে। অর্থাৎ এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে, যা ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু A, B ও C বিন্দু দিয়ে যায়।

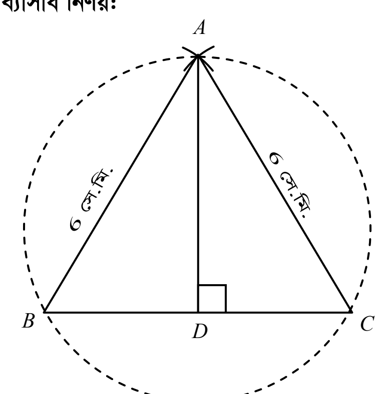
অঙ্কনের ধাপসমূহ:

ধাপ-১: AB ও AC রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে EM ও FN রেখাংশ আঁকি। মনে করি, তারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-২: A, O যোগ করি। O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি।

তাহলে, বৃত্তটি A, B ও C বিন্দুগামী হবে এবং এই বৃত্তটিই ΔABC এর নির্ণেয় পরিবৃত্ত।

পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয়:



ABC ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দু A থেকে BC এর উপর AD লম্ব আঁকি।

আমরা জানি, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ হতে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্ব ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore AD \perp BC$ হওয়ায় D, BC এর মধ্যবিন্দু

$$\therefore BD = CD = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 5 = 2.5$$

এখন, ΔABD-এ

$AD^2 + BD^2 = AB^2$ [পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে]

বা, $AD^2 = AB^2 - BD^2$

$= AB^2 - 2.5$

$= 36 - 6.35 = 29.75$

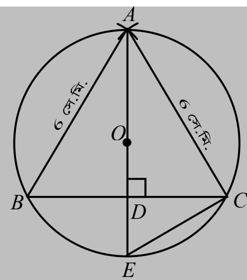
বা, $AD = \sqrt{29.75}$

$\therefore AD = 5.45$

আমরা জানি, কোনো ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর অন্তর্গত আয়তক্ষেত্র ঐ ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাস এবং ঐ বাহুদ্বয়ের সাধারণ বিন্দু হতে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্বের অন্তর্গত আয়তক্ষেত্রের সমান।

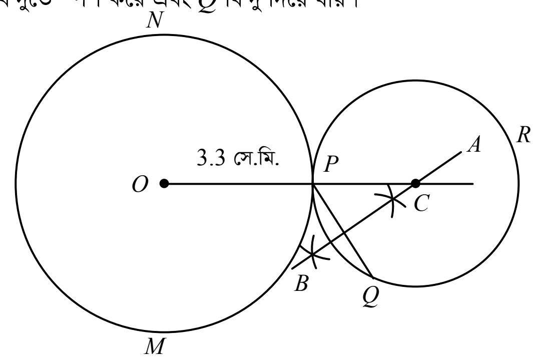
$\therefore \Delta ABC$ এর পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ R হলে,
$AB.AC = 2R.AD$ [ব্রহ্মগুপ্তের উপপাদ্য অনুসারে]
বা, $6 \times 6 = 2 \times R \times 5.45$
বা, $R = \frac{36}{10.9}$
$\therefore R = 3.3$ সে.মি. (প্রায়)

১৭(খ) নং এর সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)



পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয়: ΔABC-এ শীর্ষবিন্দু A হতে $AD \perp BC$ অঙ্কন করি। AD কে বর্ধিত করি যাতে এটি বৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করে। C, E যোগ করি।
আমরা জানি, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে শীর্ষ থেকে ভূমির উপর অঙ্কিত লম্ব ভূমিকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। এখানে সমদ্বিবাহু ΔABC এ $AD \perp BC$ হওয়ার D, BC এর মধ্যবিন্দু।
$\therefore BD = CD = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} \times 5 = 2.5$
সমকোণী ত্রিভুজ ABD-এ
$AB^2 = AD^2 + BD^2$
বা, $6^2 = AD^2 + (2.5)^2$ $[\because BD = \frac{BC}{2} = 2.5]$
বা, $AD^2 = 36 - 6.25$
বা, $AD = \sqrt{29.75}$
$\therefore AD = 5.45$
ΔABD ও ΔCDE-এ
$\angle ADB = \angle CDE$ [বিপ্রতীপ কোণ]
$\angle ABC = \angle DEC$ [একই চাপ AC এর উপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ]
অবশিষ্ট $\angle BAC =$ অবশিষ্ট $\angle DCE$
সুতরাং ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী ও সদৃশ।
$\therefore \frac{AD}{CD} = \frac{BD}{DE}$
বা, $AD.DE = BD.CD$
বা, $5.45 \times DE = 2.5 \times 2.5$
বা, $DE = \frac{6.25}{5.45} = 1.14$
$\therefore AE = AD + DE = 5.45 + 1.14 = 6.59$
AE বৃত্তের কেন্দ্রগামী কারণ $AD \perp BC$ এবং $OD \perp BC$ বিধায় A, O ও D একই সরলরেখায় অবস্থিত
সুতরাং AE পরিবৃত্তের ব্যাস
$\therefore$ পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ $= \frac{AE}{2} = \frac{6.59}{2} = 3.3$ সে.মি. (প্রায়)

গ 'খ' থেকে পাই, পরিবৃত্তের ব্যাসার্ধ 3.3 সে.মি.।
3.3 সে.মি. ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র O। ঐ বৃত্তের উপর অবস্থিত P একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং Q একটি বহিঃস্থ বিন্দু। এখন এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কন করতে হবে যা O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তকে P বিন্দুতে স্পর্শ করে এবং Q বিন্দু দিয়ে যায়।



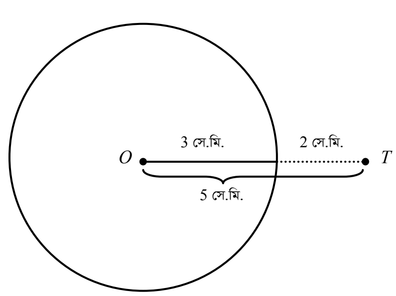
অঙ্কনের ধাপসমূহ:
ধাপ-১: 3.3 সে.মি. ব্যাসার্ধ নিয়ে O কে কেন্দ্র করে PMN একটি বৃত্ত অঙ্কন করি। যার উপর P একটি বিন্দু।
ধাপ-২: বৃত্তস্থ বিন্দু P ও বৃত্তের বহিঃস্থ বিন্দু Q যোগ করি।
ধাপ-৩: PQ এর লম্বদ্বিখণ্ডক AB অঙ্কন করি।
ধাপ-৪: O, P যোগ করে বর্ধিত করি। OP রেখার বর্ধিতাংশ AB কে C বিন্দুতে ছেদ করে।
ধাপ-৫: C কে কেন্দ্র করে CP ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত PQR বৃত্তই উদ্দিষ্ট বৃত্ত।

বি.দ্র: প্রশ্নের এ অংশটি [১৭(গ)] সমাধান পাঠ্যবইয়ের সম্পাদ্য-৭ এর অনুরূপ।

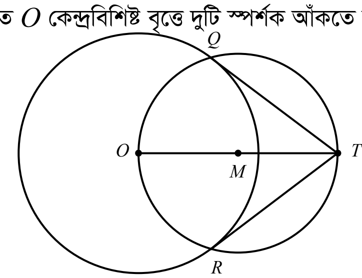
১৮ **O কেন্দ্র বিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ 3 সে.মি. এবং O হতে 5 সে.মি. দূরে T বিন্দু অবস্থিত।**
(ক) তথ্যানুসারে চিত্র আঁক।
(খ) T হতে বৃত্তে দুটি স্পর্শক আঁক। (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক)
(গ) পিথাগোরাসের উপপাদ্য ব্যবহার করে স্পর্শকদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি নির্ণয় কর।

সমাধান:

ক O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ব্যাসার্ধ 3 সে.মি. এবং O হতে 5 সে.মি. দূরে T বিন্দু অবস্থিত। তথ্যানুসারে চিত্রটি অঙ্কন করা হলো:

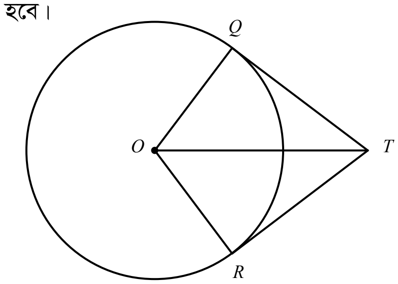


খ T বিন্দু হতে O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে দুটি স্পর্শক আঁকতে হবে।



অঙ্কনের বিবরণ:
ধাপ-১: O, T যোগ করে এর দ্বিখণ্ডিত বিন্দু M নির্ণয় করি।
ধাপ-২: M কে কেন্দ্র করে OM এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি যা O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তকে Q ও R বিন্দুতে ছেদ করে।
ধাপ-৩: T, Q ও T, R যোগ করি।
তাহলে TQ ও TR-ই নির্ণেয় স্পর্শক।

গ 'খ' হতে পাই, স্পর্শকদ্বয় TQ ও TR
প্রশ্নমতে, পিথাগোরাসের উপপাদ্য ব্যবহার করে $(TQ + TR)$ এর মান বের করতে হবে।



এখানে, $OQ = OR = 3$ সে.মি.
$OT = 5$ সে.মি.

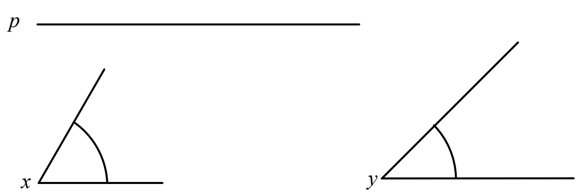
আমরা জানি, বৃত্তের যেকোনো বিন্দুতে স্পর্শক, স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের ওপর লম্ব।
$\therefore$ $TQ \perp OQ$ অর্থাৎ $\angle OQT = 90°$
তাহলে, ΔOQT একটি সমকোণী ত্রিভুজ।
$\therefore$ পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে,
$OT^2 = OQ^2 + TQ^2$
বা, $TQ^2 = OQ^2 - OQ^2$
$= 5^2 - 3^2$
$= 25 - 9 = 16$
$\therefore$ $TQ = \sqrt{16} = 4$
আবার, বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান।
$\therefore$ $TQ = TR = 4$ সে.মি.
$\therefore$ $TQ + TR = (4 + 4)$ সে.মি. $= 8$ সে.মি.

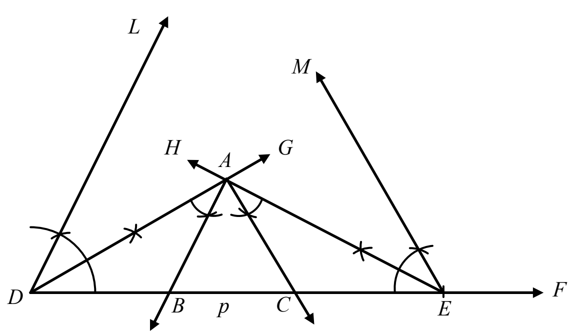
পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-৮৮

ক) একটি ত্রিভুজের পরিসীমা এবং ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয় দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

সমাধান:



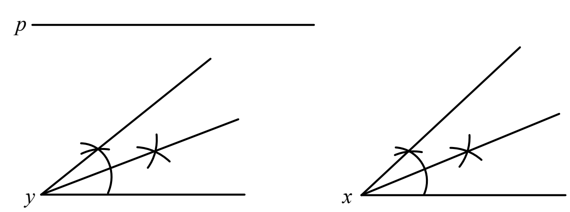


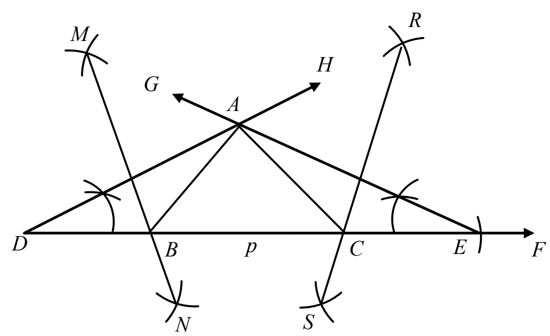
সাধারণ নির্বচন: একটি ত্রিভুজের পরিসীমা এবং ভূমি সংলগ্ন কোণদ্বয় দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি অঙ্কন করতে হবে।
বিশেষ নির্বচন: মনে করি একটি ত্রিভুজের পরিসীমা p এবং ভূমি সংলগ্ন $\angle x$ ও $\angle y$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।
অঙ্কনের ধাপসমূহ:
ধাপ-১: যেকোনো একটি রশ্মি DF থেকে পরিসীমা p এর সমান করে DE অংশ কেটে নিই। D ও E বিন্দুতে DE রেখাংশের একই পাশে $\angle x =$ এর সমান $\angle EDL$ এবং $\angle y = \angle DEM$ আঁকি।
ধাপ-২: $\angle EDL$ ও $\angle DEM$ কোণদ্বয়ের দ্বিখণ্ডক DG ও EH আঁকি।
ধাপ-৩: মনে করি, DG ও EH রশ্মিদ্বয় পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দুতে $\angle ADE$ এর সমান $\angle DAB$ এবং $\angle AED$ এর সমান $\angle EAC$ আঁকি।
ধাপ-৪: AB এবং AC রশ্মিদ্বয় DE রেখাংশকে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে।
তাহলে, ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

সম্পাদ্যের প্রশ্নে প্রমাণ লেখার প্রয়োজন নেই। এখানে অঙ্কনের যথার্থতা বুঝার জন্য প্রমাণ দেওয়া হলো:

প্রমাণ: ΔADB-এ $\angle ADB = \angle DAB$ [অঙ্কন অনুসারে], $\therefore AB = DB$
আবার, ΔACE-এ $\angle AEC = \angle EAC$; $\therefore CA = CE$
সুতরাং, ΔABC-এ $AB + BC + CA = DB + BC + CE = DE = p$
$\angle ABC = \angle ADB + \angle DAB = \frac{1}{2}\angle x + \frac{1}{2}\angle x = \angle x$
এবং $\angle ACB = \angle AEC + \angle EAC = \frac{1}{2}\angle y + \frac{1}{2}\angle y = \angle y$
সুতরাং ΔABC-ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)





বিশেষ নির্বচন: একটি ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুইটি কোণ $\angle x$ ও $\angle y$ এবং পরিসীমা p দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের ধাপসমূহ:

ধাপ-১: $\angle x$ ও $\angle y$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করি। যেকোনো রশ্মি DF থেকে $DE = p$ কেটে নিই। D ও E বিন্দুতে $\frac{1}{2}\angle x$ ও $\frac{1}{2}\angle y$ এর সমান করে যথাক্রমে $\angle EDH$ এবং $\angle DEG$ আঁকি। DH ও EG পরস্পর A বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-২: AD এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক MN এবং AE এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক RS আঁকি। MN, DE কে B বিন্দুতে এবং RS, DE কে C বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-৩: A, B ও A, C যোগ করি।

তাহলে ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

সম্পাদ্যের প্রশ্নে প্রমাণ লেখার প্রয়োজন নেই। এখানে অঙ্কনের যথার্থতা বুঝার জন্য প্রমাণ দেওয়া হলো:

প্রমাণ: MN রেখা AD এর লম্বদ্বিখণ্ডক হওয়ায় MN রেখাস্থ যেকোনো বিন্দু থেকে A ও D বিন্দু সমদূরবর্তী

$\therefore BD = AB$

$\therefore \angle ADB = \angle BAD = \frac{1}{2}\angle x$

অনুরূপভাবে, $\angle AEC = \angle CAE = \frac{1}{2}\angle y$

$\therefore$ এখন, ΔABD এ বহিঃস্থ $\angle ABC =$ অন্তঃস্থ বিপরীত $(\angle ADB + \angle BAD)$

$\therefore \angle ABC = \frac{1}{2}\angle x + \frac{1}{2}\angle x = \angle x$

অনুরূপভাবে $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle y + \frac{1}{2}\angle y = \angle y$

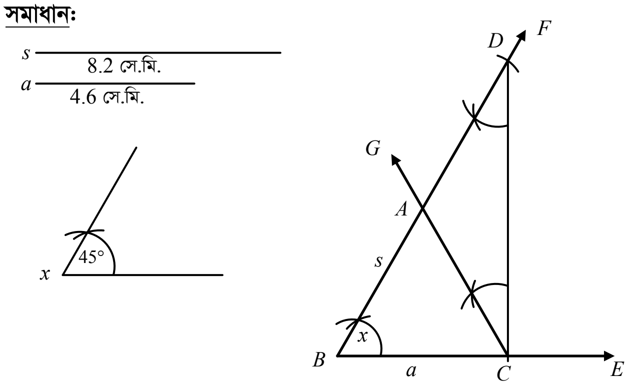
আবার, ΔABC- এর পরিসীমা

$= AB + BC + CA = BD + BC + CE = DE = p$

$\therefore \Delta ABC$- ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

খ) ত্রিভুজের ভূমি $BC = 4.6$ সে.মি, $\angle B = 45°$ এবং, $AB + CA = 8.2$ সে.মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABC ত্রিভুজের ভূমি $BC = a = 4.6$ সে.মি., $\angle B = \angle x = 45°$ এবং $s = AB + CA = 8.2$ সে.মি.। ABC ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের ধাপসমূহ:

ধাপ-১: যেকোনো একটি রশ্মি BE থেকে ভূমি a এর সমান করে BC রেখাংশ কেটে নিই।

ধাপ-২: BC রেখাংশের B বিন্দুতে $\angle x = 45°$ এর সমান $\angle CBF$ আঁকি।

ধাপ-৩: BF রশ্মি থেকে s এর সমান BD অংশ কেটে নিই।

ধাপ-৪: C, D যোগ করি।

ধাপ-৫: C বিন্দুতে DC রেখাংশের যে পাশে B বিন্দু আছে সেই পাশে $\angle BDC$ এর সমান $\angle DCG$ আঁকি। CG রশ্মি BD কে A বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

সম্পাদ্যের প্রশ্নে প্রমাণ লেখার প্রয়োজন নেই। এখানে অঙ্কনের যথার্থতা বুঝার জন্য প্রমাণ দেওয়া হলো:

প্রমাণ: ΔACD -এ $\angle ADC = \angle ACD$ [অঙ্কন অনুসারে], $\therefore AC = AD.$

এখানে, ΔABC -এ $\angle ABC = \angle x = 45°$, $BC = a = 4.6$

এবং $BA + AC = BA + AD = BD = s$

অতএব, ΔABC-ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

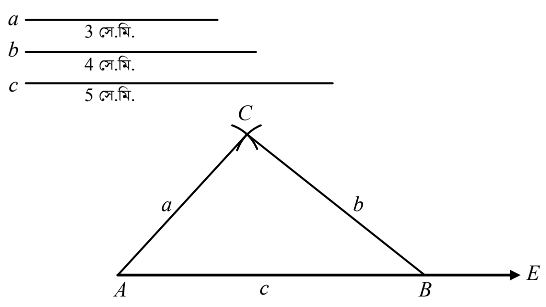
গ) সমকোণী ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3 সে.মি. এবং 4 সে.মি. দেওয়া আছে। অতিভুজ নির্ণয় করে ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

সমাধান: দেওয়া আছে, সমকোণী ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3 সে.মি. এবং 4 সে.মি.।

পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুযায়ী,

অতিভুজ $= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$ সে.মি.

সুতরাং, অতিভুজের দৈর্ঘ্য 5 সে.মি.



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, একটি সমকোণী ত্রিভুজের দুটি বাহু $a = 3$ সে.মি., $b = 4$ সে.মি. এবং অতিভুজ $c = 5$ সে.মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ:

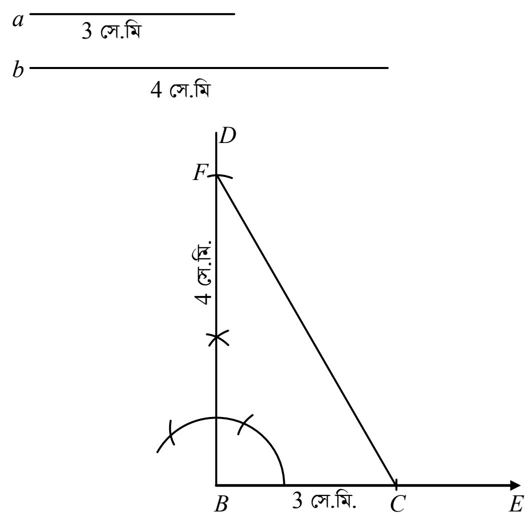
ধাপ-১: যেকোনো রশ্মি AE হতে $AB = c$ অংশ কাটি।

ধাপ-২: A কে কেন্দ্র করে a এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে এবং B কে কেন্দ্র করে b এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে AB এর একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। বৃত্তচাপদ্বয় পরস্পরকে C বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-৩: A, C এবং B, C যোগ করি।

তাহলে, ABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

দ্বিতীয় পদ্ধতি



দেওয়া আছে, সমকোণী ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3 সে.মি. এবং 4 সে.মি.।

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজে পিথাগোরাসের উপপাদ্য অনুসারে পাই,

অতিভুজ $= \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$ সে.মি.

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, একটি সমকোণী ত্রিভুজের দুটি বাহু $a = 3$ সে.মি., $b = 4$ সে.মি. দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের বিবরণ:

ধাপ-১: যেকোনো রশ্মি BE থেকে $BC = a = 3$ সে.মি. অংশ কেটে নিই।

ধাপ-২: B বিন্দুতে $BD \perp BC$ আঁকি।

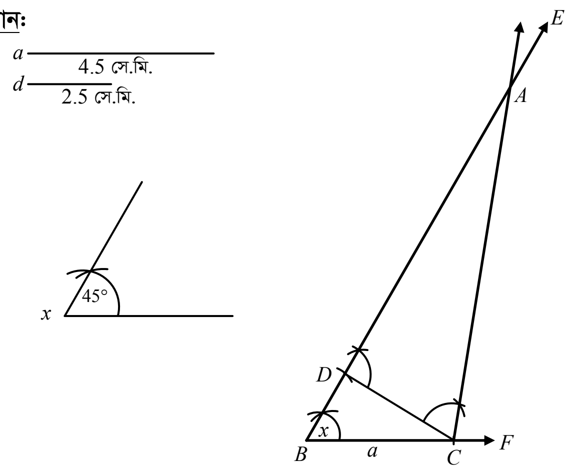
ধাপ-৩: BD থেকে $BF = b = 4$ সে.মি. অংশ কেটে নিই।

ধাপ-৪: F, C যোগ করি।

তাহলে FBC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

ঘ) ΔABC এর $BC = 4.5$ সে.মি, $\angle B = 45°$ এবং $AB - AC = 2.5$ সে.মি. দেওয়া আছে। ΔABC টি অঙ্কন করতে হবে।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এর ভূমি, $BC = a = 4.5$ সে.মি. $\angle B = \angle x = 45°$ এবং $AB - AC = d = 2.5$ সে.মি. ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের ধাপসমূহ:

ধাপ-১: যেকোনো একটি রশ্মি BF থেকে ভূমি a এর সমান করে BC রেখাংশ কেটে নিই।

ধাপ-২: BC রেখাংশের B বিন্দুতে $\angle x = \angle CBE$ আঁকি।

ধাপ-৩: BE রশ্মি থেকে d এর সমান BD অংশ কাটি।

ধাপ-৪: C, D যোগ করি।

ধাপ-৫: DC রেখাংশের যে পাশে E বিন্দু আছে সেই পাশে C বিন্দুতে $\angle EDC$ এর সমান $\angle DCA$ আঁকি। CA রশ্মি BE রশ্মিকে A বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, ΔABC-ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

সম্পাদ্যের প্রশ্নে প্রমাণ লেখার প্রয়োজন নেই। এখানে অঙ্কনের যথার্থতা বুঝার জন্য প্রমাণ দেওয়া হলো:

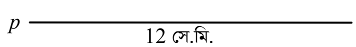
প্রমাণ: সুতরাং দুই বাহুর অন্তর $AB - AC = AB - AD = BD = d$

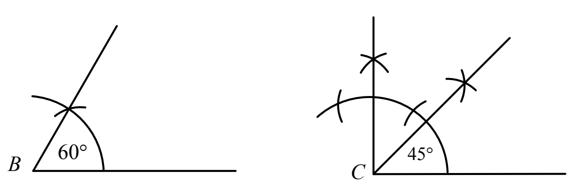
এখানে, ΔABC এ $BC = a$, $AB - AC = d$ এবং $\angle ABC = \angle x$।

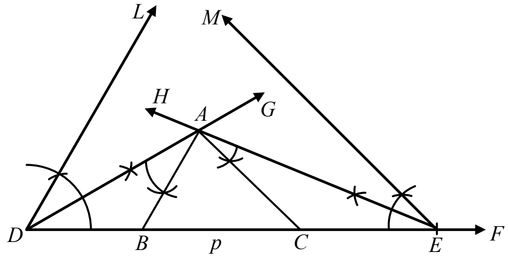
সুতরাং, ΔABC-ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

ঙ) ΔABC এর পরিসীমা 12 সে.মি, $\angle B = 60°$ এবং $\angle C = 45°$ দেওয়া আছে। ΔABC টি আঁকতে হবে।

সমাধান:







বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এর পরিসীমা $p = 12$ সে.মি., $\angle B = 60°$ এবং $\angle C = 45°$ । ΔABC টি আঁকতে হবে।

অঙ্কনের ধাপসমূহ:

ধাপ-১: যেকোনো একটি রশ্মি DF থেকে পরিসীমা p এর সমান করে DE অংশ কেটে নিই।

ধাপ-২: D ও E বিন্দুতে DE রেখাংশের একই পাশে যথাক্রমে $\frac{1}{2}\angle B$ এর সমান $\angle EDL$ এবং $\frac{1}{2}\angle C$ এর সমান $\angle DEM$ আঁকি।

ধাপ-৩: কোণ দুইটির দ্বিখণ্ডক DG ও EH আঁকি। মনে করি, DG ও EH রশ্মিদ্বয় পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-৪: A বিন্দুতে $\angle ADE$ এর সমান $\angle DAB$ এবং $\angle AED$ এর সমান $\angle EAC$ আঁকি। AB এবং AC রশ্মিদ্বয় DE রেখাংশকে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, ΔABC-ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

সম্পাদ্যের প্রশ্নে প্রমাণ লেখার প্রয়োজন নেই। এখানে অঙ্কনের যথার্থতা বুঝার জন্য প্রমাণ দেওয়া হলো:

প্রমাণ: ΔADB এ $\angle ADB = \angle DAB \;\therefore\; AB = DB$.

আবার, ΔACE এ $\angle AEC = \angle EAC; \quad \therefore\; CA = CE$.

$\therefore\; \Delta ABC$ এ $AB + BC + CA = DB + BC + CE = DE = p$

$\angle ABC = \angle ADB + \angle DAB = \frac{1}{2}\angle x + \frac{1}{2}\angle x = \angle x = 60°$ এবং

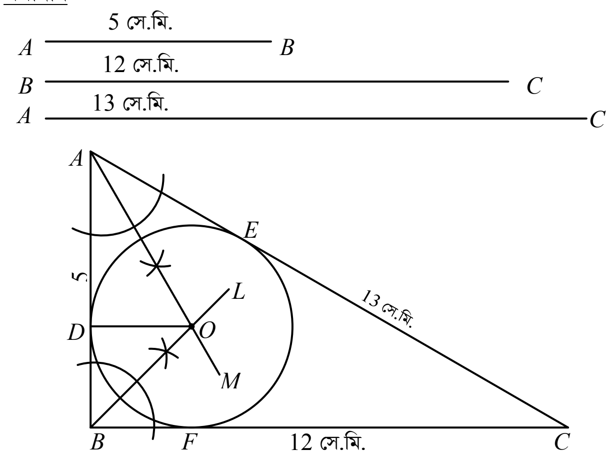
$\angle ACB = \angle AEC + \angle EAC = \frac{1}{2}\angle y + \frac{1}{2}\angle y = \angle y = 45°$

সুতরাং, ΔABC-ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-৯৩

ক) 5 সে.মি., 12 সে.মি. ও 13 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত অঙ্কন করে এর ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান:



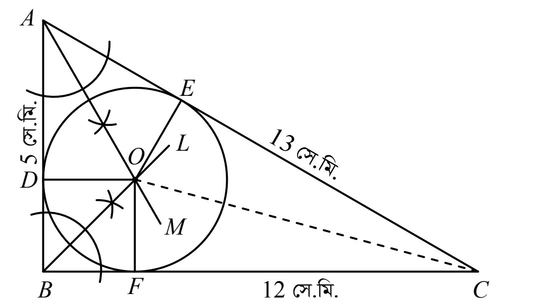
অঙ্কনের বিবরণ:

ধাপ-১: $\angle ABC$ ও $\angle BAC$ এর সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে BL ও AM আঁকি। মনে করি তারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-২: O থেকে AB এর উপর OD লম্ব আঁকি। মনে করি, তা AB কে D বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-৩: O কে কেন্দ্র করে OD এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। তাহলে এই বৃত্তটিই নির্ণেয় অন্তঃবৃত্ত।

ব্যাসার্ধ নির্ণয়:



এখানে, $AC^2 = AB^2 + BC^2$ তাই পিথাগোরাসের সূত্রানুসারে ΔABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ।

সমকোণী ΔABC-এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times BC \times AB$

$= \frac{1}{2} \times 12 \times 5 = 30$ বর্গ সে.মি.

ধরি, ত্রিভুজের অন্তবৃত্তের ব্যাসার্ধ $OD = OE = OF = r$

এখন, Δ ক্ষেত্র $ABC = \Delta$ক্ষেত্র $AOB + \Delta$ ক্ষেত্র $BOC + \Delta$ ক্ষেত্র AOC

বা, $30 = \frac{1}{2} \times AB \times OD + \frac{1}{2} \times BC \times OF + \frac{1}{2} \times AC \times OE$

বা, $30 = \frac{1}{2} \times 5 \times r + \frac{1}{2} \times 12 \times r + \frac{1}{2} \times 13 \times r$

বা, $30 = \left(\frac{5}{2} + 6 + \frac{13}{2}\right) r$

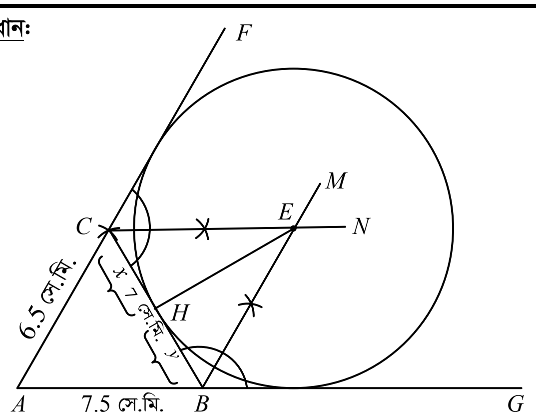
বা, $r \times 15 = 30$

$\therefore\; r = 2$

সুতরাং অন্তবৃত্তটির ব্যাসার্ধ 2 সে.মি.

খ) 6.5 সে.মি., 7 সে.মি. এবং 7.5 সে.মি. বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের বহির্বৃত্ত অঙ্কন করে এর ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ যার $AC = 6.5$ সে.মি., $AB = 7.5$ সে.মি. এবং $BC = 7$ সে.মি.। ABC ত্রিভুজের বহির্বৃত্ত আঁকতে হবে।

অঙ্কনের ধাপসমূহ:

ধাপ-১: AB ও AC বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে G ও F পর্যন্ত বর্ধিত করি।

ধাপ-২: $\angle GBC$ ও $\angle FCB$ এর সমদ্বিখণ্ডক BM এবং CN আঁকি। মনে করি, E তাদের ছেদবিন্দু।

ধাপ-৩: E থেকে BC এর উপর EH লম্ব আঁকি। মনে করি, তা BC কে H বিন্দুতে ছেদ করে।

ধাপ-৪: E কে কেন্দ্র করে EH এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। অঙ্কিত বৃত্তই নির্ণেয় বহির্বৃত্ত।

চিত্রে বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধ EH এর মান নির্ণয়:

ΔABC এর পরিসীমা, $S = \frac{6.5 + 7.5 + 7}{2} = \frac{21}{2} = 10.5$

ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \sqrt{10.5 \times (10.5 - 6.5)(10.5 - 7.5)(10.5 - 7)}$

$= \sqrt{10.5 \times 4 \times 3 \times 3.5} = \sqrt{441} = 21$

আবার, ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} AC \times BC \times \sin C$

বা, $21 = \frac{1}{2} \times 6.5 \times 7 \times \sin\angle ACB$

বা, $\sin\angle ACB = \frac{42}{7 \times 6.5}$

বা, $\sin\angle ACB = \frac{42}{45.5}$

বা, $\angle ACB = \sin^{-1}(0.92307692)$
$= 67.38°$

এখন, $\angle FCB + \angle ACB = 180°$

$\therefore \angle FCB = 180° - 67.38° = 112.62°$

$\therefore \Delta ECB$-এ $\angle ECB = \frac{1}{2} \angle FCB = \frac{112.62°}{2} = 56.31°$

ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} AB \times BC \times \sin\angle ABC$

বা, $21 = \frac{1}{2} \times 7.5 \times 7\sin\angle ABC$

বা, $\sin\angle ABC = \frac{42}{7.5 \times 7}$

বা, $\sin\angle ABC = 0.8$

বা, $\angle ABC = \sin^{-1}(0.8)$

বা, $\angle ABC = 53.13°$

আবার, $\angle CBG + \angle ABC = 180°$

বা, $\angle CBG = 180° - 53.13° = 126.87°$

$\therefore \angle CBE = \frac{1}{2} \times \angle CBG = \frac{1}{2} \times 126.87° = 63.435°$

ধরি, $CH = x$; $BH = y$ এবং $EH = h = ?$

ΔCHE-এ $\tan\angle HCE = \frac{EH}{CH}$

বা, $\tan(56.31) = \frac{h}{x}$

বা, $x = \frac{h}{1.5}$ ... ...(i)

ΔBHE-এ $\tan\angle HBE = \frac{EH}{BH}$

বা, $\tan(63.438) = \frac{h}{y}$

বা, $y = \frac{h}{2}$ ... ...(ii)

আবার, $BC = 7$

বা, $x + y = 7$

বা, $\frac{h}{1.5} + \frac{h}{2} = 7$

বা, $4h + 3h = 42$ [6 দ্বারা গুণ করে]

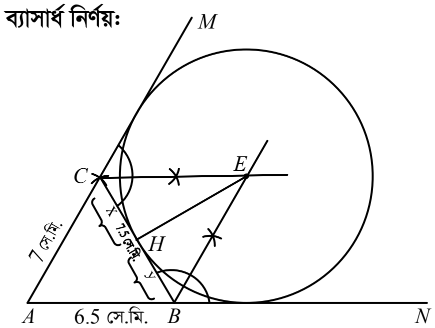
বা, $7h = 42$

$\therefore h = 6$

$\therefore$ ত্রিভুজের বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধ, $EH = h = 6$ সে.মি.।

দৃষ্টি আকর্ষণ: যেকোনো ত্রিভুজে তিনটি বহির্বৃত্ত অঙ্কন সম্ভব। বিষম বাহু ত্রিভুজে তিনটি বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধের মান ভিন্ন ভিন্ন। প্রশ্নে উল্লেখিত ত্রিভুজের একটি বহির্বৃত্তের মান নির্ণয় করে আরেকটি বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধে মান নিম্নে নির্ণয় করা হলো:

বহিঃবৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয়:



ΔABC এর পরিসীমা, $S = \frac{6.5 + 7.5 + 7}{2} = \frac{21}{2} = 10.5$

ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \sqrt{10.5 \times (10.5 - 6.5)(10.5 - 7.5)(10.5 - 7)}$
$= \sqrt{10.5 \times 4 \times 3 \times 3.5} = \sqrt{441} = 21$

চিত্রে বহিঃবৃত্তের ব্যসার্ধ EH এর মান নির্ণয়:

ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times AB \times BC.\sin\angle CBA$

বা, $21 = \frac{1}{2} \times 6.5 \times 7.5 \times \sin\angle CBA$

বা, $\sin\angle CBA = \frac{42}{6.5 \times 7.5} = 0.862$

$\therefore \angle CBA = \sin^{-1}(0.862) = 59.542°$

আবার, $\angle NBC + \angle CBA = 180°$

বা, $\angle NBC = 180° - 59.542° = 120.458°$

$\therefore \angle EBC = \frac{1}{2} \angle NBC = \frac{1}{2} \times 120.458° = 60.229°$

আবার, ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times AC \times BC \times \sin\angle ACB$

বা, $21 = \frac{1}{2} \times 7 \times 7.5 \times \sin\angle ACB$

বা, $\sin\angle ACB = \frac{42}{7 \times 7.5}$

বা, $\angle ACB = \sin^{-1}(0.8) = 53.130°$

আবার, $\angle MCB = 180° - \angle ACB = 180° - 53.130° = 126.869°$

$\therefore \angle ECB = \frac{1}{2} \times \angle MCB = \frac{1}{2} \times 126.869° = 63.435°$

ধরি, $CH = x$ এবং $BH = y$ এবং $EH = h = ?$

সমকোণী ΔCHE-এ $\tan\angle HCE = \frac{EH}{CH}$

বা, $\tan(63.435) = \frac{h}{x}$

বা, $2 = \frac{h}{x}$ $\therefore x = \frac{h}{2}$ ... ... (i)

আবার, সমকোণী ΔBHE-এ $\tan\angle HBE = \frac{EH}{BH}$

বা, $\tan(60.229) = \frac{h}{y}$

বা, $1.75 = \frac{h}{y}$ $\therefore y = \frac{h}{1.75}$ ... ... (ii)

চিত্রে আমরা পাই, $BC = 7.5$

বা, $x + y = 7.5$

বা, $\frac{h}{2} + \frac{h}{1.75} = 7.5$

বা, $7h + 8h = 105$ [14 দ্বারা গুণ করে]

বা, $15h = 105$

$\therefore h = 7$

$\therefore$ বহিঃবৃত্তের ব্যাসার্ধ 7 সে.মি.