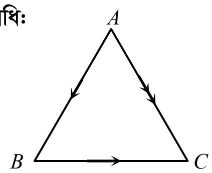
দ্বাদশ অধ্যায়

সমতলীয় ভেক্টর

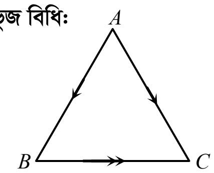
অনুশীলনী - ১২

ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধিঃ



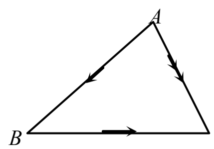
ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধিঃ



ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে, $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

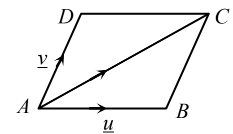
অবস্থান ভেক্টরঃ



O এর সাপেক্ষে A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{a}$ ও B বিন্দুর $\underline{b}$। $\therefore \overrightarrow{OA} = \underline{a}$ ও $\overrightarrow{OB} = \underline{b}$

ভেক্টর বিয়োগের নিয়ম অনুসারে পাই, $\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB}$ $\therefore \overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

ভেক্টর যোগের সামান্তরিকবিধিঃ



$\overrightarrow{AB} = \underline{u}$ এবং $\overrightarrow{AD} = \underline{v}$ হলে,

সামান্তরিকবিধি অনুসারে কর্ণ, $\overrightarrow{AC} = \underline{u} + \underline{v}$

সমান ভেক্টরঃ দুটি ভেক্টর সমান হলে, ভেক্টর দুটির মান সমান হবে এবং এদের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল হবে।

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ হলে $AB = CD$ অথবা $AB \parallel CD$ হবে।

শূন্য ভেক্টরঃ যে ভেক্টরের পরমমান শূন্য এবং যার দিক নির্ণয় করা যায় না, তাকে শূন্য ভেক্টর বলে। $\overrightarrow{AB}$ যেকোনো ভেক্টর হলে,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB} = \underline{0}$ একটি শূন্য ভেক্টর।

একক ভেক্টরঃ $\overrightarrow{AB}$ যেকোনো ভেক্টর হলে, $\overrightarrow{AB}$ এর একক ভেক্টর $\hat{\underline{a}} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ যার দিক ও $\overrightarrow{AB}$ এর দিক একই।

গুরুত্বপূর্ণ তথ্যবলিঃ

ভেক্টর যোগের বিনিময় বিধিঃ যেকোনো ভেক্টর $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ এর জন্য $\underline{u} + \underline{v} = \underline{v} + \underline{u}$

ভেক্টর যোগের সংযোগ বিধিঃ যেকোনো ভেক্টর $\underline{u}$, $\underline{v}$ ও $\underline{w}$ এর জন্য $\underline{u} + (\underline{v} + \underline{w}) = (\underline{u} + \underline{v}) + \underline{w}$

ভেক্টর যোগের বর্জন বিধিঃ যেকোনো ভেক্টর $\underline{u}$, $\underline{v}$ ও $\underline{w}$ এর জন্য $\underline{u} + \underline{v} = \underline{u} + \underline{w}$ হলে, $\underline{v} = \underline{w}$

ভেক্টরের স্কেলার গুণিতকঃ $\underline{u}$ যেকোনো ভেক্টর এবং m যেকোনো বাস্তব সংখ্যা হলে -

i. $m\underline{u} = 0$ যখন $m = 0$
ii. $m\underline{u}$, $\underline{u}$ এর সমমুখী যখন $m > 1$
iii. $m\underline{u}$, $\underline{u}$ এর বিপরীতমুখী যখন $m < 1$

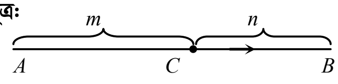
$m\underline{u}$ এর ধারক, $\underline{u}$ এর ধারকের সাথে অভিন্ন বা সমান্তরাল এবং mu এর দৈর্ঘ্য $\underline{u}$ এর দৈর্ঘ্যের $|m|$ গুণ

বন্টন সূত্রঃ m ও n দুটি স্কেলার এবং $\underline{u}$ ও $\underline{v}$ দুটি ভেক্টর হলে, বন্টন সূত্র অনুসারে,

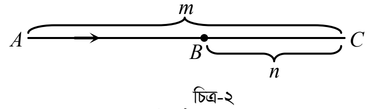
i. $(m + n)\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$
ii. $m(\underline{u} + \underline{v}) = m\underline{u} + m\underline{v}$

২০২২ শিক্ষাবর্ষের পাঠ্যবইতে নিম্নের টপিকটি নেই। তবে ২০১৬ শিক্ষাবর্ষের পাঠ্যবইতে নিম্নের টপিকটির উল্লেখ থাকায় জেনে রাখার সুবিধার্থে এটি উল্লেখ করা হলো।

অন্তর্বিভক্তি ও বহির্বিভক্তির সূত্রঃ



চিত্র-১



চিত্র-২

A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এবং C বিন্দু AB রেখাংশকে $m : n$ অনুপাতে **অন্তর্বিভক্ত** করলে

C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{c} = \dfrac{m\underline{b} + n\underline{a}}{m + n}$ [চিত্র-১]

অনুরূপভাবে, A ও B বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ এবং C বিন্দু AB রেখাংশকে $m : n$ অনুপাতে **বহির্বিভক্ত** করলে

C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $\underline{c} = \dfrac{m\underline{b} - n\underline{a}}{m - n}$ [চিত্র-২]

অনুশীলনীর সমাধান

১ $AB \parallel DC$ হলে

i. $\overrightarrow{AB} = m.\overrightarrow{DC}$ যেখানে m একটি স্কেলার রাশি
ii. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
iii. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

ওপরের তথ্যের আলোকে নিচের কোনগুলো সঠিক?

(ক) i (খ) ii (গ) i ও ii (ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: (ক)

ব্যাখ্যা: *i.* নং সঠিক কারণ, $\vec{a}$ ও $\vec{b}$ দুইটি সমান্তরাল ভেক্টর হলে $\vec{a} = m\vec{b}$; যেখানে m একটি স্কেলার রাশি। এখানে $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{DC}$ সুতরাং $\overrightarrow{AB} = m.\overrightarrow{DC}$

ii. নং সর্বদা সত্য নয়, কারণ শুধু ভেক্টরদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান হলে উক্তিটি সত্য হবে। কিন্তু প্রশ্নে ভেক্টরদ্বয়ের দৈর্ঘ্য সমান বা অসমানের ব্যাপারে সুনির্দিষ্ট কোনো তথ্য নেই।

iii. নং সঠিক নয় কারণ, (ii) নং এ উল্লেখিত একই যুক্তি (iii) নং এর জন্য প্রযোজ্য।

২ দুটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে

i. এদের যোগের ক্ষেত্রে সামান্তরিক বিধি প্রযোজ্য
ii. এদের যোগের ক্ষেত্রে ত্রিভুজ বিধি প্রযোজ্য
iii. এদের দৈর্ঘ্য সর্বদা সমান

উপরের উক্তিগুলোর মধ্যে কোনগুলো সঠিক?

(ক) i (খ) ii (গ) i ও ii (ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: (খ) ii

ব্যাখ্যা: *i.* সত্য নয়; কারণ দুইটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে এদের ক্ষেত্রে সামান্তরিক বিধি প্রযোজ্য নয়।

ii. নং সঠিক কারণ ত্রিভুজ বিধি সকল ক্ষেত্রে প্রযোজ্য।

iii. সঠিক নয় কারণ; দুইটি ভেক্টর সমান্তরাল হলে এদের দৈর্ঘ্য সমান হতে পারে নাও হতে পারে। কিন্তু এখানে সুনির্দিষ্ট কোনো তথ্য নেই।

৩ $AB = CD$ এবং $AB \parallel CD$ হলে কোনটি সঠিক?

(ক) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ (খ) $\overrightarrow{AB} = m.\overrightarrow{CD}$, যেখানে $m > 1$

(গ) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC} < \underline{0}$ (ঘ) $\overrightarrow{AB} + m.\overrightarrow{CD} = \underline{0}$, যেখানে $m > 1$

উত্তর: (ক)

ব্যাখ্যা: আমরা জানি, দুইটি ভেক্টরের ধারক রেখা অভিন্ন বা সমান্তরাল হলে, এদের একটিকে অপরটির সংখ্যা গুণিতক আকারে প্রকাশ করা যায়।

অতএব, $AB = CD$ এবং $AB \parallel CD$ হলে $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ এবং $\overrightarrow{AB} = m.\overrightarrow{CD}$;

যেখানে $m > 1$ লেখা যায় যদি $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ সমমুকী হয় কিন্তু প্রশ্নে এ ব্যাপারে কোনো তথ্য নেই।

✉ জেনে নাওঃ $AB \parallel CD$ হলে $\overrightarrow{AB} = m\overrightarrow{CD}$ যেখানে $|m| = \dfrac{|\overrightarrow{AB}|}{|\overrightarrow{CD}|} = \dfrac{AB}{CD}$

(i) $m > 0$ হলে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ সমমুখী হয়।

(ii) $m < 0$ হলে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ বিপরীতমুখী হয়।

■ **নিচের তথ্যের আলোকে ৪ ও ৫ নম্বর প্রশ্নের উত্তর দাওঃ**

AB রেখাংশের উপর যেকোনো বিন্দু C এবং কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A, B ও C বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}$ ও $\underline{c}$।

৪ $\overrightarrow{AA}$ ভেক্টর হচ্ছে

i. বিন্দু ভেক্টর
ii. একক ভেক্টর
iii. শূন্য ভেক্টর

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i, ii (খ) i, iii (গ) ii, iii (ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: (খ)

ব্যাখ্যা: $\overrightarrow{AA}$ দ্বারা A ভেক্টরকে বুঝানো হয় অর্থাৎ $\overrightarrow{AA}$ ভেক্টরের আদি ও অন্ত বিন্দু একই হওয়ায় এটি একটি বিন্দু ভেক্টর যার দৈর্ঘ্য শূন্য। সুতরাং (i) ও (iii) নং সঠিক। আবার, একক ভেক্টরের সুনির্দিষ্ট দিক আছে কিন্তু বিন্দু ভেক্টরের কোনো দিক নেই। তাই $\overrightarrow{AA}$ একক ভেক্টর হতে পারে না। তাই (ii) নং সঠিক নয়।

৫ ΔABC এর ক্ষেত্রে কোনটি সঠিক?

(ক) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{CA}$ (খ) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BC}$

(গ) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = \underline{0}$ (ঘ) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \underline{0}$

উত্তর: (ঘ)

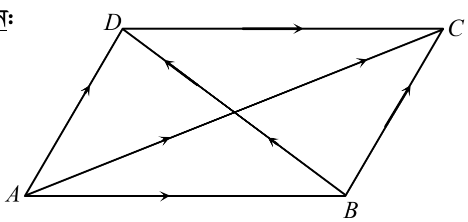
ব্যাখ্যা: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$

বা, $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC}$

বা, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \underline{0}$

৬ $ABCD$ সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ হলে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ ভেক্টরদ্বয়কে $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টরদ্বয়ের মাধ্যমে প্রকাশ কর এবং দেখাও যে, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$ এবং $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$।

সমাধানঃ



$ABCD$ সামান্তরিকের বাহুগুলোকে যথাক্রমে $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{DC}$ এবং কর্ণদ্বয়কে $\overrightarrow{AC}$ ও $\overrightarrow{BD}$ ভেক্টর দ্বারা চিহ্নিত করি।

$ABCD$ সামান্তরিক হওয়ায়, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ এবং $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

$\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ কে $\overrightarrow{AD}$ ও $\overrightarrow{BD}$ এর মাধ্যমে প্রকাশঃ

এখন, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি নিয়মে]

$= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$ ... . (i) **(Ans.)**

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি নিয়মে]

$= \left(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}\right) + \overrightarrow{BC}$ [(i) নং থেকে $\overrightarrow{AB}$ এর মান বসিয়ে]

$= \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AD}$ [$\because \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$]

$= 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$

$\therefore \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BD}$ **(Ans.)**

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$ এর প্রমাণঃ

ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

এবং $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right)$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DC}$ $[\because \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC}]$

$= \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$ $[\because \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}]$

$= 2\overrightarrow{BC}$

$\therefore \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{BC}$ **(দেখানো হলো)**

$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$ এর প্রমাণঃ

$\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) - \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right)$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{CD}$

$= \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CD}$

$= \overrightarrow{AB} - \left(-\overrightarrow{DC}\right)$ $[\because \overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{DC}]$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$

$= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}$ $[\because \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}]$

$= 2\overrightarrow{AB}$

$\therefore \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{AB}$ **(দেখানো হলো)**

৭ দেখাও যে, (ক) $-(\underline{a} + \underline{b}) = -\underline{a} - \underline{b}$ (খ) $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$ হলে, $\underline{a} = \underline{c} - \underline{b}$

সমাধানঃ

ক দেখাতে হবে যে, $-(\underline{a} + \underline{b}) = -\underline{a} - \underline{b}$

এখানে, $-(\underline{a} + \underline{b}) = -1(\underline{a} + \underline{b})$

$= (-1)\underline{a} + (-1)\underline{b}$ [বন্টন সূত্র]

$= -\underline{a} - \underline{b}$

$\therefore -(\underline{a} + \underline{b}) = -\underline{a} - \underline{b}$ **(দেখানো হলো)**

খ $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$ হলে দেখাতে হবে যে, $\underline{a} = \underline{c} - \underline{b}$

দেওয়া আছে, $\underline{a} + \underline{b} = \underline{c}$

বা, $\underline{a} + \underline{b} - \underline{b} = \underline{c} - \underline{b}$ [উভয় পক্ষে $-\underline{b}$ যোগ করে]

বা, $\underline{a} + \underline{b}(1 - 1) = \underline{c} - \underline{b}$

বা, $\underline{a} + 0 = \underline{c} - \underline{b}$

বা, $\underline{a} = \underline{c} - \underline{b}$

$\therefore \underline{a} = \underline{c} - \underline{b}$ **(দেখানো হলো)**

৮ দেখাও যে, (ক) $\underline{a} + \underline{a} = 2\underline{a}$ (খ) $(m - n)\underline{a} = m\underline{a} - n\underline{a}$ (গ) $m(\underline{a} - \underline{b}) = m\underline{a} - m\underline{b}$

সমাধানঃ

ক বামপক্ষ $= \underline{a} + \underline{a}$

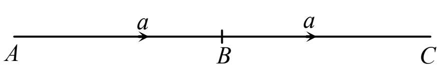
$= 1\underline{a} + 1\underline{a}$ [সংখ্যা গুণিতকের নিয়মানুযায়ী]

$= (1 + 1)\underline{a}$

$= 2\underline{a} =$ ডানপক্ষ

$\therefore \underline{a} + \underline{a} = 2\underline{a}$ **(দেখানো হলো)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)



মনে করি, AB রাশিকে C বর্ধিত করি যেন $AB = BC$ হয়। AB ও BC রশ্মিদ্বয়কে যথাক্রমে $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BC}$ দ্বারা সূচিত করি। $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরদ্বয় একই দিক বিশিষ্ট, একই সমতল ও একই রেখায় অবস্থিত।

ধরি, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} = \underline{a}$

$\therefore |\overrightarrow{AB}| = |\underline{a}|$ এবং $\overrightarrow{BC} = |\underline{a}|$

আবার $AC = AB + BC$ [বীজগণিতির যোগের নিয়মে]

বা, $AC = |\underline{a}| + |\underline{a}|$; [প্রতিস্থাপন]

$= (1 + 1)|\underline{a}|$; [স্কেলার রাশির যোগ]

$= 2|\underline{a}|$

$\therefore \overrightarrow{AC} = 2\underline{a}$

আবার, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ [$\because$ উহারা একই ধারকরেখা AC-এ অবস্থিত]

$\therefore \underline{a} + \underline{a} = 2\underline{a}$ **(প্রমাণিত)**

খ বামপক্ষ $= (m - n)\underline{a}$

$= \{m + (-n)\}\underline{a}$

$= m\underline{a} + (-n)\underline{a}$ [বন্টন বিধি]

$= m\underline{a} + (-n\underline{a})$ $[\because (-n)\underline{a} = -n\underline{a}]$

$= m\underline{a} - n\underline{a} =$ ডানপক্ষ

$\therefore (m - n)\underline{a} = m\underline{a} - n\underline{a}$ **(দেখানো হলো)**

গ বামপক্ষ $= m(\underline{a} - \underline{b})$

$= m\{\underline{a} + (-\underline{b})\}$

$= m\underline{a} + m(-\underline{b})$ [বন্টন বিধি]

$= m\underline{a} + (-m\underline{b})$ $[\because m(-\underline{b}) = -m\underline{b}]$

$= m\underline{a} - m\underline{b}$

$=$ ডানপক্ষ

$\therefore m(\underline{a} - \underline{b}) = m\underline{a} - m\underline{b}$ **(দেখানো হলো)**

৯ দেখাও যে,

(ক) $\underline{a}, \underline{b}$ প্রত্যেকে অশূন্য ভেক্টর হলে, $\underline{a} = m\underline{b}$ হতে পারে কেবলমাত্র যদি $\underline{a}, \underline{b}$ এর সমান্তরাল হয়।

(খ) $\underline{a}, \underline{b}$ অশূন্য অসমান্তরাল ভেক্টর এবং $m\underline{a} + n\underline{b} = 0$ হলে, $m = n = 0$

সমাধান:

ক দেওয়া আছে, $\underline{a} = m\underline{b}$

এখানে, $m = 0$ হলে $\underline{a} = \underline{0}$ হবে, কিন্তু শর্তমতে $\underline{a}$ একটি অশূন্য ভেক্টর।

সুতরাং $m \neq 0$

আবার, $m > 0$ হলে, $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টর সমমুখী হবে এবং এক্ষেত্রে ভেক্টরদ্বয় সদৃশ সমান্তরাল।

আবার, যদি $m < 0$ হয়, তবে $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ ভেক্টর বিপরীতমুখী এবং এক্ষেত্রে তারা বিসদৃশ সমান্তরাল।

সুতরাং $m > 0$ অথবা $m < 0$ উভয় ক্ষেত্রেই $\underline{a}, \underline{b}$ এর সমান্তরাল।

$\therefore$ $\underline{a}$, $\underline{b}$ প্রত্যেকে অশূন্য ভেক্টর হলে, $\underline{a} = m\underline{b}$ হতে পারে কেবলমাত্র যদি a, b এর সমান্তরাল হয়। **(দেখানো হলো)**

খ দেওয়া আছে, $m\underline{a} + n\underline{b} = 0$

বা, $m\underline{a} = -n\underline{b}$

আমরা জানি, দুটি অশূন্য ভেক্টর সমান হবে যদি ও কেবল যদি তাদের ধারকরেখা একই বা সমান্তরাল হয়।

কিন্তু প্রশ্নমতে, $\underline{a}$ ও $\underline{b}$ পরস্পর অশূন্য অসমান্তরাল ভেক্টর।

সুতরাং $m\underline{a}$ ও $-n\underline{b}$ অশূন্য হতে পারে না।

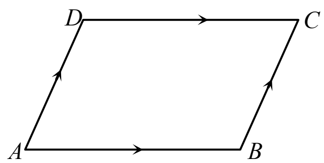
$\therefore m\underline{a} = 0$ এবং $-n\underline{b} = 0$

বা, $m = 0$ [$\because \underline{a} \neq 0$ (প্রদত্ত)] বা, $n = 0$ [$\because \underline{b} \neq 0$ (প্রদত্ত)]

$\therefore m = n = 0$ **(দেখানো হলো)**

১০ **A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ হলে দেখাও যে, $ABCD$ সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়।**

সমাধান:



মনে করি, A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে, $ABCD$ একটি সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়।

প্রমাণ: অবস্থান ভেক্টরের সংজ্ঞানুসারে, $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$, $\overrightarrow{BC} = \underline{c} - \underline{b}$

$\overrightarrow{DC} = \underline{c} - \underline{d}$ এবং $\overrightarrow{AD} = \underline{d} - \underline{a}$

$ABCD$ সামান্তরিক হবে যদি ও কেবল যদি $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ অথবা $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$ হয়।

এখন, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\therefore \underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$

আবার, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$

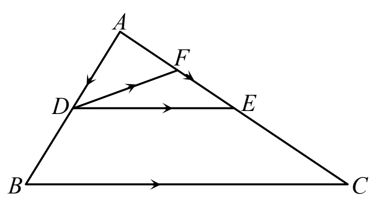
বা, $\underline{c} - \underline{b} = \underline{d} - \underline{a}$

$\therefore \underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$

উভয় শর্ত থেকে পাই, $ABCD$ সামান্তরিক হবে যদি এবং কেবল যদি $\underline{b} - \underline{a} = \underline{c} - \underline{d}$ হয়। **(প্রমাণিত)**

১১ **ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের এক বাহুর মধ্যবিন্দু থেকে অঙ্কিত অপর বাহুর সমান্তরাল রেখা তৃতীয় বাহুর মধ্যবিন্দুগামী।**

সমাধান:



মনে করি, ΔABC এর AB বাহুর মধ্যবিন্দু D এবং D বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত BC এর সমান্তরাল DE রেখা AC বাহুকে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ করতে হবে যে, E, AC এর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ: মনে করি E, AC এর মধ্যবিন্দু নয়। ধরি F, AC এর মধ্যবিন্দু। D, F যোগ করি। তাহলে, $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AF}$ এবং $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AD}$

ΔADF -এ $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AD}$ [ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে]

এখন, ΔABC -এ $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

বা, $2\overrightarrow{AF} - 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

বা, $2\left(\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AD}\right) = \overrightarrow{BC}$

বা, $2\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BC}$

$\therefore \overrightarrow{DF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

সুতরাং $\overrightarrow{DF}$ ও $\overrightarrow{BC}$ এর ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল।

যেহেতু, $\overrightarrow{DF}$ ও $\overrightarrow{BC}$ একই ধারকরেখায় অবস্থিত নয়, সুতরাং $DF \parallel BC$

কিন্তু প্রশ্নমতে, $DE \parallel BC$

সুতরাং, DE ও DF দুটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা এবং এরা উভয়ই BC এর সমান্তরাল।

কিন্তু ইহা অসম্ভব। কারণ, দুটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা কখনোই একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল হতে পারে না।

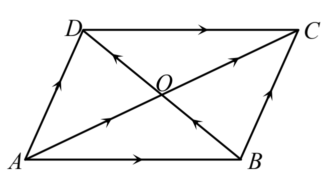
$\therefore DE$ ও DF ভিন্ন রেখা হতে পারে না।

সুতরাং E ও F বিন্দু দুটি একই।

$\therefore AC$ এর মধ্যবিন্দু E। **(প্রমাণিত)**

১২ **প্রমাণ কর যে, কোনো চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তা একটি সামান্তরিক হয়।**

সমাধান:



মনে করি, $ABCD$ চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে সমদ্বিখন্ডিত হয়েছে অর্থাৎ $AO = OC$ এবং $BO = OD$

ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে, $ABCD$ একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ: O, AC এর মধ্যবিন্দু এবং $\overrightarrow{AO}$ ও $\overrightarrow{OC}$ ভেক্টরদ্বয়ের একই ধারকরেখা AC।

$\therefore \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}$ অনুরূপভাবে $\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{OD}$

এখন, ΔAOD এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি নিয়মে পাই,

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OD}$$
$$= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{BO} \quad [\because \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD} = \overrightarrow{BO}]$$
$$= \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC}$$
$$= \overrightarrow{BC} \quad [\because \Delta BOC\text{-এ } \overrightarrow{BO} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{BC}]$$
$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$$

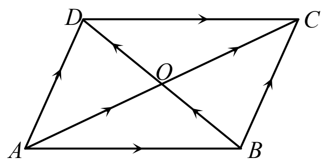
দুইটি ভেক্টর পরস্পর সমান হলে তাদের মান সমান হবে এবং ধারকরেখা একই বা সমান্তরাল হয় কিন্তু এখানে AD ও BC এর ধারক রেখা একই নয়।

সুতরাং $AD \parallel BC$ এবং $|\overrightarrow{AD}| = |\overrightarrow{BC}|$ বা, $AD = BC$

এখন, $ABCD$ চতুর্ভুজের দুই বিপরীত বাহু পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore ABCD$ একটি সামান্তরিক। **(প্রমাণিত)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)



মনে করি, $ABCD$ চতুর্ভুজের AC ও BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে অর্থাৎ $AO = OC$ এবং $BO = OD$

ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে, $ABCD$ একটি সামান্তরিক।

প্রমাণ: একই সমতলস্থ কোনো ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A, B, C, D বিন্দু চারটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$

সুতরাং $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$ এবং $\overrightarrow{DC} = \underline{c} - \underline{d}$

এখন, O, AC এবং O, BD কর্ণের মধ্যবিন্দু, তাহলে অবস্থান ভেক্টরের সমান অনুপাতের সংজ্ঞানুসারে পাই,

AC কর্ণের সাপেক্ষে O বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})$

এবং BD কর্ণের সাপেক্ষে O বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d})$

কিন্তু O উভয়েরই সাধারণ বিন্দু

$\therefore \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c}) = \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d})$

বা, $\underline{a} + \underline{c} = \underline{b} + \underline{d}$ ... ... (i)

বা, $\underline{c} - \underline{d} = \underline{b} - \underline{a}$ [উভয়পক্ষে $(-\underline{a} - \underline{d})$ যোগ করে]

$\therefore \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB}$ $[\because \underline{c} - \underline{d} = \overrightarrow{DC}$ এবং $\underline{b} - \underline{a} = \overrightarrow{AB}]$

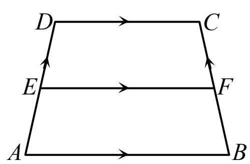
দুইটি ভেক্টর পরস্পর সমান হলে তাদের দৈর্ঘ্য সমান এবং ধারক রেখা একই বা সমান্তরালে অবস্থিত হয়। $\therefore AB = DC$ এবং $AB \parallel DC$

এখন, $ABCD$ চতুর্ভুজের দুই বিপরীত বাহু পরস্পর সমান ও সমান্তরাল।

$\therefore ABCD$ একটি সামান্তরিক **(প্রমাণিত)**

১৩ ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল ও তাদের যোগফলের অর্ধেক।

সমাধান:



মনে করি, $ABCD$ ট্রাপিজিয়ামের AD ও BC অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E এবং F। E, F যোগ করি। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে, $EF \parallel AB \parallel DC$ এবং $EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$।

প্রমাণ: মনে করি, কোনো নির্দিষ্ট ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A, B, C, D বিন্দুগুলোর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$।

যেহেতু E ও F যথাক্রমে AD ও BC রেখাংশের মধ্যবিন্দু।

অবস্থান ভেক্টরের নিয়ম অনুসারে, E বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{d})$

এবং F বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(b + c)$

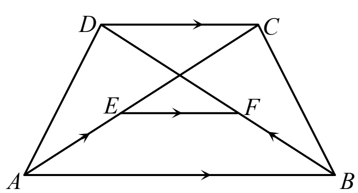
$$\therefore \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(b + c) - \frac{1}{2}(a + d)$$
$$= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{c} - \underline{a} - \underline{d})$$
$$= \frac{1}{2}(\underline{b} - \underline{a} + \underline{c} - \underline{d})$$
$$= \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right) \quad [\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a} \text{ এবং } \overrightarrow{DC} = \underline{c} - \underline{d}]$$
$$\therefore \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right)$$

এখন, $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ সমান্তরাল বলে $(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC})$ ভেক্টরটি $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ এর সমান্তরাল।

$\therefore EF \parallel AB \parallel DC$ এবং $EF = \frac{1}{2}(AB + DC)$ **(প্রমাণিত)**

১৪ ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল এবং তাদের বিয়োগফলের অর্ধেক।

সমাধান:



মনে করি, $ABCD$ ট্রাপিজিয়ামের AB ও DC বাহুদ্বয় সমান্তরাল এবং $AB > DC$। AC ও BD কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে E ও F। E, F যোগ করি। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে,

$EF \parallel AB \parallel DC$ এবং $EF = \frac{1}{2}(AB - DC)$

প্রমাণ: মনে করি, একই সমতলস্থ কোন ভেক্টর মূলবিন্দুর সাপেক্ষে A, B, C, D বিন্দু চারটির অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$

অবস্থান ভেক্টরের নিয়ম অনুসারে, $\overrightarrow{AB} = \underline{b} - \underline{a}$

এবং $\overrightarrow{DC} = \underline{c} - \underline{d}$

আবার, E ও F যথাক্রমে AC ও BD কর্ণের মধ্যবিন্দু।

$\therefore E$ বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{a} + \underline{c})$

এবং F বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{d})$

অবস্থান ভেক্টরের সংজ্ঞানুসারে পাই,

$$\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\underline{b}+\underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{a}+\underline{c})$$
$$= \frac{1}{2}(\underline{b}+\underline{d}-\underline{a}-\underline{c})$$
$$= \frac{1}{2}[(\underline{b}-\underline{a})-(\underline{c}-\underline{d})]$$
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}) \quad [\because \underline{b}-\underline{a}=\overrightarrow{AB} \text{ এবং } \underline{c}-\underline{d}=\overrightarrow{DC}]$$
$$\therefore \overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC})$$

এখন $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ সমান্তরাল বলে $(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC})$ ভেক্টরটি $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{DC}$ এর সমান্তরাল।

$\therefore EF \parallel AB \parallel DC$

এবং $|\overrightarrow{EF}| = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{DC}|$

$\therefore EF = \frac{1}{2}(AB - DC)$ **(প্রমাণিত)**

১৫ **ΔABC এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E।**

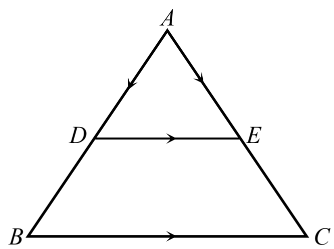
ক. $\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}\right)$ কে $\overrightarrow{AC}$ **ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর।**

খ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $BC \parallel DE$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC$

গ. $BCED$ ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু M ও N হলে ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, $MN \parallel DE \parallel BC$ এবং $MN = \frac{1}{2}(BC - DE)$

সমাধানঃ

ক



ΔABC এর AB ও AC এর বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E।
ΔADE-এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি প্রয়োগ করে পাই,

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}$$

বা, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ [$\because E, AC$ এর মধ্যবিন্দু]

$\therefore \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ **(Ans.)**

খ দেওয়া আছে, ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E। ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ করতে হবে যে, $BC \parallel DE$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC$

প্রমাণঃ ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D ও E।

$\therefore \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AD}$ এবং $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE}$

ΔADE-এ $\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DE}$ [ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে]

এখন, ΔABC-এ $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}$

বা, $2\overrightarrow{AE}-2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

বা, $2\left(\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}\right)=\overrightarrow{BC}$

বা, $2\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BC}$

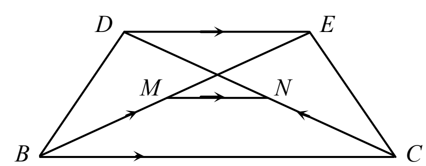
$\therefore \overrightarrow{DE}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

বা, $|\overrightarrow{DE}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{BC}|$ বা, $DE=\frac{1}{2}BC$

$\therefore \overrightarrow{DE}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল। কিন্তু এখানে ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা এক নয়। সুতরাং $BC \parallel DE$ ।

$\therefore BC \parallel DE$ এবং $DE = \frac{1}{2}BC$ **(প্রমাণিত)**

গ



মনে করি, $BCED$ ট্রাপিজিয়ামের BE ও CD কর্ণদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে M ও N। M, N যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $MN \parallel DE \parallel BC$ এবং $MN = \frac{1}{2}(BC - DE)$

প্রমাণঃ মনে করি, কোনো ভেক্টর মূলবিন্দু সাপেক্ষে B, C, E, D এর অবস্থান ভেক্টর যথাক্রমে $\underline{b}, \underline{c}, \underline{e}, \underline{d}$।
জানা আছে, দুইটি বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর জানা থাকলে তাদের সংযোজন রেখা দ্বারা সূচিত ভেক্টর ঐ ভেক্টরের প্রান্তবিন্দুর অবস্থান ভেক্টর থেকে আদিবিন্দুর অবস্থান ভেক্টরের বিয়োগফল

সুতরাং $\overrightarrow{DE} = \underline{e}-\underline{d}$ এবং $\overrightarrow{BC}=\underline{c}-\underline{b}$

$\therefore$ M বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e})$ [$\because M, BE$ এর মধ্যবিন্দু]

N বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর $= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d})$ [$\because N, CD$ এর মধ্যবিন্দু]

আবার অবস্থান ভেক্টরের সংজ্ঞানুসারে,

$$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d}) - \frac{1}{2}(\underline{b} + \underline{e})$$

$$= \frac{1}{2}(\underline{c} + \underline{d} - \underline{b} - \underline{e})$$

বা, $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\{(\underline{c} - \underline{b}) - (\underline{e} - \underline{d})\}$

$\therefore \overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE})$ [$\because BC = \underline{c} - \underline{b}$ এবং $DE = \underline{e} - \underline{d}$]

এখন $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{DE}$ পরস্পর সমান্তরাল বলে $\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE}\right)$ ভেক্টরটি $\overrightarrow{BC}$ ও $\overrightarrow{DE}$ এর সমান্তরাল।

$\therefore MN \| DE \| BC$

এবং $|\overrightarrow{MN}| = \frac{1}{2}\left|\left(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DE}\right)\right|$

$\therefore MN = \frac{1}{2}(BC - DE)$ **(প্রমাণিত)**

১৬ **ΔABC এর BC, CA ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E, F।**

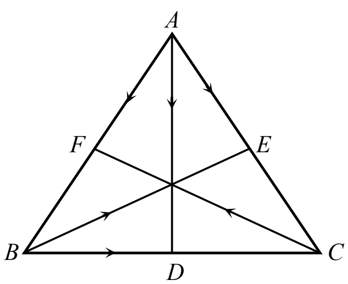
ক. $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. প্রমাণ কর যে, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \underline{0}$

গ. ভেক্টরের সাহায্যে প্রমাণ কর যে, F বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত BC এর সমান্তরাল রেখা অবশ্যই E বিন্দুগামী হবে।

সমাধানঃ

ক



দেওয়া আছে, ΔABC এর BC, AC ও AB বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F। $\overrightarrow{AB}$ ভেক্টরকে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ ভেক্টরের মাধ্যমে প্রকাশ করতে হবে।

ΔABC-এ $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$ [ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে]

বা, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{BE}$

বা, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BE}$ [$\because \overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$]

বা, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AF} - \overrightarrow{CF}) - \overrightarrow{BE}$ [$\because \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{CF}$]

বা, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CF}\right) - \overrightarrow{BE}$ [$\because \overrightarrow{AF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$]

বা, $\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CF} - \overrightarrow{BE}$

বা, $4\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{CF} - 4\overrightarrow{BE}$

বা, $3\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{CF} - 4\overrightarrow{BE}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{CF} - \frac{4}{3}\overrightarrow{BE}$

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

ΔABE-এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি নিয়মে,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$

বা, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ ... ... (i) [E, AC এর মধ্যবিন্দু]

আবার, ΔACF-এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF}$

বা, $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{CF}$

বা, $\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CF}$ [উভয়পক্ষকে $\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CF}$ [(i) নং হতে]

বা, $\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AF} = -\overrightarrow{BE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CF}$

বা, $\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CF}$ [F, AB এর মধ্যবিন্দু]

বা, $\overrightarrow{AB} - \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CF}$

বা, $\frac{3}{4}\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BE} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CF}$

$\therefore \overrightarrow{AB} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{BE} - \frac{2}{3}\overrightarrow{CF}$ **(Ans.)**

সুতরাং AB ভেক্টরকে $\overrightarrow{BE}$ ও $\overrightarrow{CF}$ এর মাধ্যমে প্রকাশ করা হলো।

খ ΔABD এ ত্রিভুজ সূত্র হতে পাই, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

$$\therefore \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} \text{ .. ... (i)}$$

ΔACF-এ $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF} - \overrightarrow{AC}$ [ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে]

$$\therefore \overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} \text{ ... ... (ii)}$$

এবং ΔABE- এ $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB}$ [ভেক্টর বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে]

$$\therefore \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} \text{ ... ...(iii)}$$

বামপক্ষ $= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CF} + \overrightarrow{BE}$

$= \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$

[(i), (ii) ও (iii) থেকে]

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}) - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

$= \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ $[\because \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}]$

$= \underline{0}$

$\therefore \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \underline{0}$ **(প্রমাণিত)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

ΔABE-এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AE}$

বা, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ [$\because$ E, AC এর মধ্যবিন্দু]

বা, $2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}\right) = \overrightarrow{AC}$

$\therefore \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BE}$ ... ... (i)

ΔBEC-এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC}$

বা, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ [$\because$ E, AC এর মধ্যবিন্দু]

বা, $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BE} + \frac{1}{2}\left(2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BE}\right)$ ... ... [(i) থেকে]

$\therefore \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BE}$ ... ... (ii)

আবার, ΔACF- এ ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি অনুসারে,

$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AF}$

বা, $\overrightarrow{CF} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ [$\because F$, AB এর মধ্যবিন্দু]

বা, $\overrightarrow{CF} = -\left(2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BE}\right) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

বা, $\overrightarrow{CF} = -2\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BE} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\therefore \overrightarrow{CF} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BE}$ ... ... (iii)

ΔABD ভেক্টর যোগের ত্রিভুজ বিধি নিয়মে

$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD}$

বা, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ [$\because$ D, BC এর মধ্যবিন্দু]

বা, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BE}\right)$ [(ii) থেকে প্রাপ্ত]

বা, $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + BE$

$\therefore \overrightarrow{AD} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}$ ... ... (iv)

এখন, $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}$

$= \left(\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BE}\right) + \overrightarrow{BE} + \left(-\frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BE}\right)$

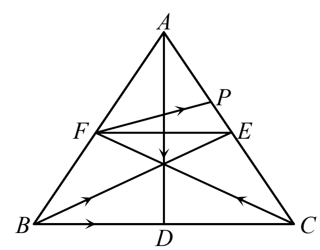
[(iii) ও (iv) নং থেকে]

$= \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BE} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{BE}$

$= \underline{0}$

$\therefore \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \underline{0}$ **(প্রমাণিত)**

গ



মনে করি, ABC ত্রিভুজের AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে F ও E। প্রমাণ করতে হবে যে, F বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত BC এর সমান্তরাল রেখা অবশ্যই E বিন্দুগামী হবে।

প্রমাণ: মনে করি, F বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত BC এর সমান্তরাল রেখা E এর পরিবর্তে P বিন্দু দিয়ে যায়।

তাহলে, আমরা পাই, $FP \parallel BC$

এখন, E ও F যথাক্রমে AC ও AB মধ্যবিন্দু হওয়ায়

$\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE}$ এবং $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AF}$

ΔAEF-এ $\overrightarrow{FE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF}$ [ভেক্টরের বিয়োগের ত্রিভুজবিধি অনুসারে]

এখন, ΔABC-এ $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$

বা, $2\overrightarrow{AE} - 2\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{BC}$

বা, $2\left(\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AF}\right) = \overrightarrow{BC}$

বা, $\overrightarrow{FE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

সুতরাং $\overrightarrow{FE}$ ও $\overrightarrow{BC}$ ভেক্টরদ্বয়ের ধারক রেখা একই বা সমান্তরাল।
যেহেতু FE ও BC একই ধারক রেখা অবস্থিত নয়।
সুতরাং $FE \parallel BC$ কিন্তু অঙ্কনানুসারে $FP \parallel BC$
তাহলে FE ও FP রেখাদ্বয় উভয়েই F বিন্দু দিয়ে যায় এবং BC এর সমান্তরাল হবে।

কিন্তু ইহা অসম্ভব কারণ, দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা কখনোই একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল হতে পারে না।
$\therefore$ FP ও FE ভিন্ন রেখা হতে পারে না। অর্থাৎ E ও P একই বিন্দু হবে।
সুতরাং ΔABC-এ F বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত BC এর সমান্তরাল রেখা অবশ্যই E বিন্দুগামী হবে। **(প্রমাণিত)**

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২৭২

ক) তোমার বাড়ি হতে স্কুল সোজা দক্ষিণে 3 কি.মি. দূরে অবস্থিত। বাড়ি হতে হেঁটে স্কুলে যেতে এক ঘণ্টা সময় লাগলে তোমার গতিবেগ কত?

সমাধান: দেওয়া আছে, বাড়ি থেকে স্কুলের দূরত্ব = 3 কি.মি.
স্কুলে যেতে সময় = 1 ঘণ্টা
আমরা জানি, গতিবেগ $= \frac{\text{দূরত্ব}}{\text{সময়}} = \frac{3}{1} = 3$ কি. মি./ঘণ্টা **(Ans.)**

খ) স্কুল ছুটির পর সাইকেলে 20 মিনিটে বাড়ি এলে এক্ষেত্রে তোমার গতিবেগ কত?

সমাধান: সরণ = 3 কি.মি.
প্রয়োজনীয় সময় = 20 মিনিট
$= \frac{20}{60}$ ঘণ্টা $= \frac{1}{3}$ ঘণ্টা
আমরা জানি, গতিবেগ $= \frac{\text{সরণ}}{\text{সময়}}$
$= \frac{3}{\frac{1}{3}}$ কি.মি./ঘণ্টা = 9 কি.মি./ঘণ্টা। **(Ans.)**
$\therefore$ নির্ণেয় গতিবেগ 9 কি.মি. / ঘন্টা

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২৮০

m ও n এর বিভিন্ন প্রকার সাংখ্যিক মান নিয়ে $\underline{u}$ ভেক্টরের জন্য $(m+n)\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$ সূত্রটি যাচাই কর।

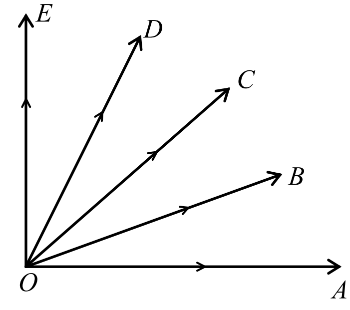
সমাধান: m ও n এর বিভিন্ন মানের জন্য প্রমাণ করতে হবে যে,
$(m+n)\,\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$
$m = 2, n = 3$ হলে
বামপক্ষ $= (m+n)\,\underline{u} = (2+3)\,\underline{u} = 5\underline{u}$
ডানপক্ষ $= m\underline{u} + n\underline{u} = 2\underline{u} + 3\underline{u} = 5\underline{u}$
$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ

$\therefore$ $m = 3, n = -2$ হলে,
বামপক্ষ $= (m+n)\,\underline{u} = [3 + (-2)]\,\underline{u} = (3-2)\underline{u} = \underline{u}$
ডানপক্ষ $= m\underline{u} + n\underline{u} = 3\underline{u} + (-2)\underline{u} = 3\underline{u} - 2\underline{u} = \underline{u}$
$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ
$m = -3, n = -2$ হলে,
বামপক্ষ $= (m+n)\,\underline{u} = [-3 + (-2)]\,\underline{u} = (-5)\underline{u} = -5\underline{u}$
ডানপক্ষ $= m\underline{u} + n\underline{u} = (-3)\underline{u} + (-2)\underline{u} = -3\underline{u} - 2\underline{u} = -5\underline{u}$
$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ
$\therefore$ $(m+n)\underline{u} = m\underline{u} + n\underline{u}$. (প্রমাণিত)

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২৮১

তোমার খাতায় একটি বিন্দুকে মূলবিন্দু O ধরে বিভিন্ন অবস্থানে আরও পাঁচটি বিন্দু নিয়ে O বিন্দুর সাপেক্ষে এগুলোর অবস্থান ভেক্টর চিহ্নিত কর।

সমাধান: অবস্থান ভেক্টর: সমতলস্থ কোনো নির্দিষ্ট বিন্দুর সাপেক্ষে অন্য কোনো অবস্থান যে ভেক্টরের সাহায্যে নির্ণয় করা হয় তাকে অবস্থান ভেক্টর বলে। মনে করি, কোনো সমতলে O একটি নির্দিষ্ট বিন্দু এবং একই সমতলে A অপর একটি বিন্দু। O, A যোগ করলে সমতলে $\overrightarrow{OA}$ ভেক্টর O বিন্দুর সাপেক্ষে A বিন্দুর অবস্থান ভেক্টর বলা হয়।



অনুরূপভাবে একই O বিন্দুর সাপেক্ষে একই সমতলে অপর চারটি বিন্দু যথাক্রমে $\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}$ এবং $\overrightarrow{OE}$