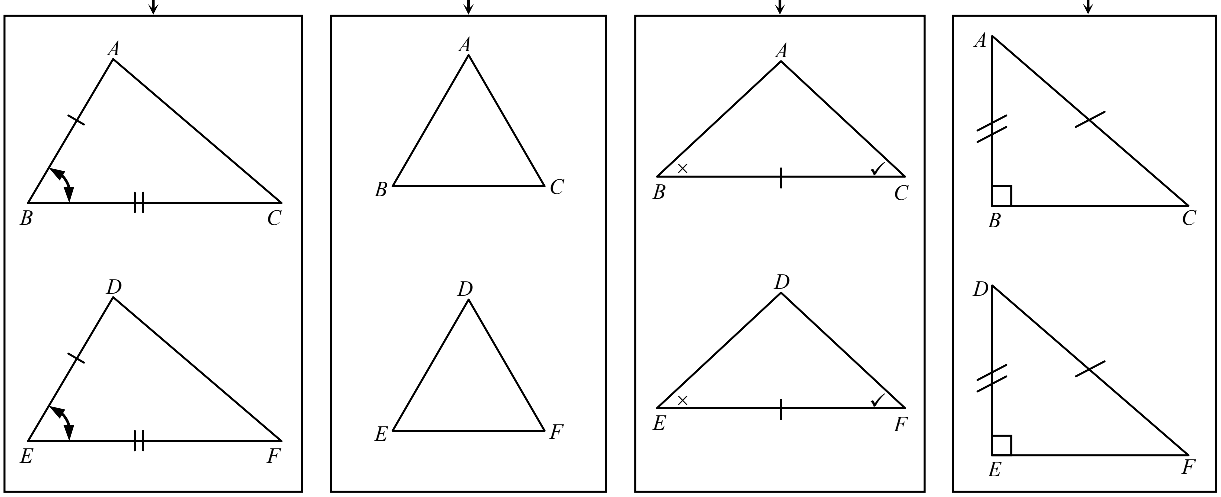
অনুশীলনী - ৬.৩

ত্রিভুজের প্রকারভেদ

- বাহুভেদে
  - সমবাহু
  - সমদ্বিবাহু
  - বিষমবাহু
- কোণভেদে
  - সূক্ষ্মকোণী
  - সমকোণী
  - স্থূলকোণী

সর্বসমতা

- বাহু: দুইটি রেখাংশের দৈর্ঘ্য সমান হলে রেখাংশ দুইটি সর্বসম। বিপরীতভাবে দুইটি রেখাংশ সর্বসম হলে তাদের দৈর্ঘ্যও সমান।
- কোণ: দুইটি কোণের পরিমাপ সমান হলে কোণ দুইটি সর্বসম। বিপরীতভাবে দুইটি কোণ সর্বসম হলে তাদের পরিমাপও সমান।
- ত্রিভুজ
  - **বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য**: ত্রিভুজদ্বয়ের দুইটি বাহু এবং বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ সমান (উপপাদ্য-৬)
  - **বাহু-বাহু-বাহু উপপাদ্য**: ত্রিভুজদ্বয়ের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্যই সমান (উপপাদ্য-৯)
  - **কোণ-বাহু-কোণ উপপাদ্য**: ত্রিভুজদ্বয়ের দুইটি কোণ এবং কোণ সংলগ্ন বাহুর দৈর্ঘ্য সমান (উপপাদ্য-১০)
  - **অতিভুজ-বাহু উপপাদ্য**: সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের অতিভুজ এবং একটি বাহু সমান (উপপাদ্য-১১)



দৃষ্টি আকর্ষণ: বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্যের ক্ষেত্রে কোণটি অবশ্যই বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ হতে হবে। তা না হলে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হবে না।

অনুশীলনীর সমাধান

১ **নিচে তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য দেওয়া হলো। কোন ক্ষেত্রে ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব (সংখ্যাগুলোর দৈর্ঘ্যের এককে)?**

(ক) 5, 6, 7 (খ) 5, 7, 14 (গ) 3, 4, 7 (ঘ) 2, 4, 8

উত্তর: (ক)

ব্যাখ্যা: আমরা জানি, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।
প্রদত্ত অপশনগুলো থেকে পাই,

(ক) সম্ভব। কারণ $5 + 6 = 11 > 7; 7 + 5 = 12 > 6; 6 + 7 = 13 > 5$

(খ) অসম্ভব, কারণ $5 + 7 = 12 \not> 14$

(গ) অসম্ভব, কারণ $3 + 4 = 7 \not> 7$

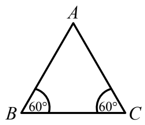
(ঘ) অসম্ভব, কারণ $2 + 4 = 6 \not> 8$

২ সমবাহু ত্রিভুজের একটি বাহুকে উভয়দিকে বর্ধিত করলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণদ্বয়ের বিয়োগফল কত?

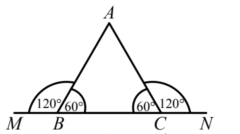
(ক) $0°$ (খ) $120°$ (গ) $180°$ (ঘ) $240°$

উত্তর: (ক)

ব্যাখ্যা:



সমবাহু ΔABC



BC বাহুকে উভয় দিকে বর্ধিত করে পাই

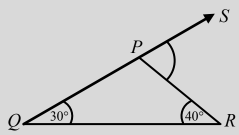
চিত্রানুসারে, সমবাহু ΔABC এর BC বাহুকে উভয়দিকে বর্ধিত করলে উৎপন্ন কোণদ্বয় হলো $\angle ABM$ এবং $\angle ACN$

এখন, $\angle ABM = 180° - \angle ABC$ [$\because \angle CBM$ = এক সরলকোণ]
$= 180° - 60° = 120°$

তদ্রূপ $\angle ACN = 120°$

$\therefore$ বহিঃস্থ কোণদ্বয়ের অন্তর $= \angle ABM - \angle ACN = 120° - 120° = 0$

৩



চিত্রে, $\angle RPS$ এর মান কত?

(ক) $40°$ (খ) $70°$ (গ) $90°$ (ঘ) $110°$

উত্তর: (খ)

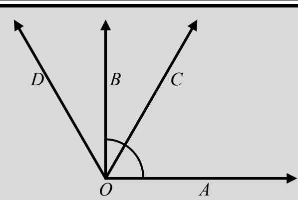
ব্যাখ্যা: ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

এখানে, ΔPQR-এ বহিঃস্থ $\angle RPS$ = অন্তঃস্থ $\angle PQR$ + অন্তঃস্থ $\angle PRQ$
$= 30° + 40° = 70°$

বিকল্প: ΔPQR-এ $\angle PQR + \angle QRP + \angle QPR = 180°$
বা, $30° + 40° + \angle QPR = 180°$
বা, $\angle QPR = 180° - 70°$
$\therefore \angle QPR = 110°$

আবার, সরলকোণ $\angle QPS = 180°$
বা, $\angle QPR + \angle RPS = 180°$
বা, $110° + \angle RPS = 180°$
বা, $\angle RPS = 180° - 110°$
$\therefore \angle RPS = 70°$

৪ পাশের চিত্রে-



i. $\angle AOC$ একটি সূক্ষ্মকোণ
ii. $\angle AOB$ একটি সমকোণ
iii. $\angle AOD$ একটি প্রবৃদ্ধকোণ

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i (খ) ii (গ) i ও ii (ঘ) ii ও iii

উত্তর: (গ)

ব্যাখ্যা: (i) নং সঠিক কারণ, চিত্রে $\angle AOB = 90°$ হওয়ায় $\angle AOC$ একটি সূক্ষ্মকোণ।
(ii) নং সঠিক কারণ, চিত্রানুসারে $\angle AOB = 90°$।
(iii) নং সঠিক নয়, কারণ, চিত্রানুসারে $\angle AOD$, $90°$ থেকে বড় হলেও $180°$ থেকে ছোট।

কিন্তু প্রবৃদ্ধকোণ হলো দুই সমকোণ ($180°$) থেকে বড় এবং চার সমকোণ ($360°$) থেকে ছোট।
$\therefore \angle AOD$ প্রবৃদ্ধকোণ নয়।

✉ **জেনে নাও:** প্রবৃদ্ধি কোণের অপর নাম প্রত্যাবর্তী কোণ।

৫ একটি ত্রিভুজকে অপর একটি ত্রিভুজের উপর স্থাপন করলে যদি ত্রিভুজ দুটি সর্বতোভাবে মিলে যায় তবে-

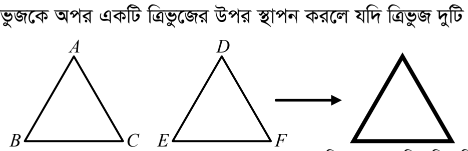
i. ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম
ii. ত্রিভুজ দুইটির অনুরূপ বাহু সমান
iii. অনুরূপ কোণ সমান

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii (গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: (ঘ)

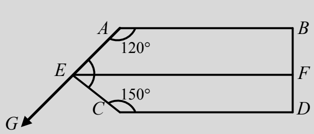
ব্যাখ্যা: একটি ত্রিভুজকে অপর একটি ত্রিভুজের উপর স্থাপন করলে যদি ত্রিভুজ দুটি সর্বোতভাবে মিলে যায় তাহলে ত্রিভুজদ্বয় একটি ত্রিভুজে পরিণত হয়।



ত্রিভুজদ্বয়ের প্রতিস্থাপিত চিত্র

চিত্র থেকে স্পষ্ট যে, ত্রিভুজদ্বয়ের অনুরূপ বাহু ও অনুরূপ কোণ সমান সর্বোপরি ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হয়।

■



চিত্রে $AB \parallel EF \parallel CD$ এবং $BD \perp CD$

প্রদত্ত চিত্রের আলোকে (৬-৮) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

৬ $\angle AEF$ **এর মান কত?**
(ক) $30°$ (খ) $60°$ (গ) $240°$ (ঘ) $270°$

উত্তর: (খ)
ব্যাখ্যা: আমরা জানি, দুইটি সমান্তরাল সরলরেখার ছেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণ দুইট পরস্পর সম্পূরক [*Ref:* উপপাদ্য-৩ পৃষ্ঠা: ১১৪]
এখানে, $AB \parallel EF$ এবং AE ছেদক রেখার একই পাশের অন্তঃস্থ $\angle BAE$ এবং $\angle AEF$ কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক $(180°)$
$\therefore \angle BAE + \angle AEF = 180°$
বা, $120° + \angle AEF = 180°$
$\therefore \angle AEF = 180° - 120° = 60°$

বিকল্প: এখানে, $BF \perp EF$ এবং $FB \perp AB$
[কারণ, $BD \perp CD$ এবং $AB \parallel EF \parallel CD$]
$\therefore \angle EFB = \angle FBA = 90°$
$AEFB$ চতুর্ভুজে, $\angle AEF + \angle EFB + \angle FBA + \angle BAE = 360°$
[$\because$ চতুর্ভুজের চারকোণের সমষ্টি চার সমকোণ]
বা, $\angle AEF + 90° + 90° + 120° = 360°$ [চিত্র ও তথ্যানুসারে]
বা, $\angle AEF + 300° = 360°$
বা, $\angle AEF = 360° - 300°$
$\therefore \angle AEF = 60°$

৭ $\angle BFE$ **এর মান নিচের কোনটি?**
(ক) $30°$ (খ) $60°$ (গ) $90°$ (ঘ) $120°$

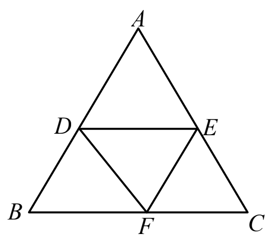
উত্তর: (গ)
ব্যাখ্যা: তথ্যানুসারে, $AB \parallel EF \parallel CD$ এবং $BD \perp CD$
তাহলে, $BF \perp EF$
$\therefore \angle BFE = 90°$

৮ $\angle CEF + \angle CEG =$ **কত?**
(ক) $60°$ (খ) $120°$ (গ) $180°$ (ঘ) $210°$

উত্তর: (খ)
ব্যাখ্যা: চিত্রানুসারে সরলকোণ $\angle AEG = 180°$
$\angle CEG + \angle CEF + \angle AEF = 180°$
বা, $\angle CEG + \angle CEF = 180° - \angle AEF$ $\left[\begin{array}{l}\text{৬ নং হতে পাই,}\\ \angle AEF = 60°\end{array}\right]$
$\therefore \angle CEF + \angle CEG = 180° - 60° = 120°$

৯ প্রমাণ কর যে, সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুসমূহ যোগ করলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, তা সমবাহু হবে।

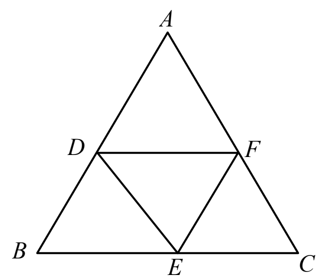
সমাধান:



সাধারণ নির্বচন: প্রমাণ করতে হবে যে, সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুসমূহ যোগ করলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, তা সমবাহু হবে।
বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC সমবাহু অর্থাৎ $AB = BC = CA$। D, E ও F যথাক্রমে AB, AC এবং BC বাহুত্রয়ের মধ্যবিন্দু। D, E; E, F এবং F, D যোগ করলে ΔDEF উৎপন্ন হয়। প্রমাণ করতে হবে যে, ΔDEF সমবাহু।
প্রমাণ:
ধাপ ১. ΔABC-এর AB ও AC বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা DE
$\therefore DE = \frac{1}{2} BC$ [$\because$ ত্রিভুজের যে কোন দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর অর্ধেক]
ধাপ ২. আবার, ΔABC-এর AB ও BC বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা DF
$\therefore DF = \frac{1}{2} AC$ [পূর্বোক্ত কারণে]
অনুরূপভাবে, $EF = \frac{1}{2} AB$
ধাপ ৩. কিন্তু দেওয়া আছে, ΔABC সমবাহু
অর্থাৎ, $AB = BC = AC$
বা, $\frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} AC$
বা, $EF = DE = DF$
[$\because EF = \frac{1}{2} AB, DE = \frac{1}{2} BC$ এবং $DF = \frac{1}{2} AC$]
$\therefore \Delta DEF$ সমবাহু। **(প্রমাণিত)**

বি.দ্র: প্রশ্নটি চিত্র নিরপেক্ষ অর্থাৎ প্রশ্নে চিত্র সম্পর্কে কিছু উল্লেখ না থাকায় প্রমাণের ক্ষেত্রে সাধারণ নির্বচন ও বিশেষ নির্বচন দেওয়া হয়েছে।
[*Ref:* পাঠ্যবই topic - জ্যামিতিক প্রমাণ]

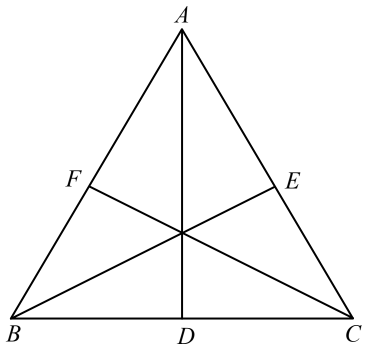
সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)



সাধারণ নির্বচন: প্রমাণ করতে হবে যে, সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুসমূহ যোগ করলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, তা সমবাহু হবে।
বিশেষ নির্বচন: মনে করি, সমবাহু ΔABC এর AB, BC ও AC বাহুর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F। প্রমাণ করতে হবে যে, ΔDEF সমবাহু।
অঙ্কন: D, E; E, F এবং D, F যোগ করি।
প্রমাণ:
ধাপ ১. ΔBDE ও ΔCFE -এ
$BE = CE$ [$\because E$, BC এর মধ্যবিন্দু]
$BD = CF$ [সমান সমান বাহুর অর্ধেক]
এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle B =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle C$
[$\because$ সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণ সমান]
$\therefore \Delta BDE \cong \Delta CFE$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]
$\therefore DE = EF$
ধাপ ২. অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায়
$\Delta BDE \cong \Delta ADF$
$\therefore DE = DF$
ধাপ ৩. ধাপ (১) ও (২) থেকে পাই,
$DE = EF = DF$
অর্থাৎ ΔDEF সমবাহু। **(প্রমাণিত)**

১০ প্রমাণ কর যে, সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি পরস্পর সমান।

সমাধানঃ



সাধারণ নির্বচনঃ প্রমাণ করতে হবে যে, সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি পরস্পর সমান।

বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি, ΔABC সমবাহু অর্থাৎ $AB = BC = CA$
AD, BE এবং CF যথাক্রমে BC, CA এবং AB বাহুর মধ্যমা।
প্রমাণ করতে হবে যে, মধ্যমা তিনটি সমান অর্থাৎ $AD = BE = CF$

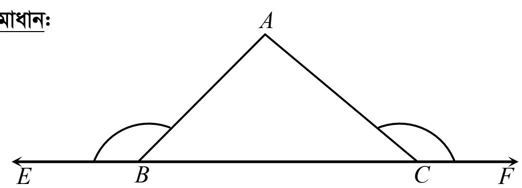
প্রমাণঃ

ধাপ ১. ΔABD ও ΔACF এর মধ্যে
$AB = AC$ [$\because \Delta ABC$ সমবাহু বিধায় প্রত্যেক বাহু সমান]
$BD = AF$ [সমান সমান বাহুর অর্ধেক বলে]
এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle B =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle A = 60°$
[$\because$ সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণের পরিমাণ $60°$]
$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACF$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]
অতএব, $AD = CF$ ... ... (i)

ধাপ ২. আবার, ΔBCE ও ΔACF এর মধ্যে
$BC = AC$ [$\because \Delta ABC$ সমবাহু]
$CE = AF$ [সমান সমান বাহুর অর্ধেক বলে]
এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle C =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle A$
[$\because$ সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণের পরিমাণ $60°$]
$\therefore \Delta BCE \cong \Delta ACF$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]
অতএব, $BE = CF$ ... ... (ii)
(i) নং ও (ii) নং হতে পাই
$\therefore AD = BE = CF$ **(প্রমাণিত)**

১১ প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যেকোনো দুইটি বহিঃস্থ কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

সমাধানঃ



সাধারণ নির্বচনঃ প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজের যেকোনো দুইটি বহিঃস্থ কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ। ইহার BC বাহুকে উভয় দিকে E ও F পর্যন্ত বর্ধিত করায় যথাক্রমে বহিঃস্থ $\angle ABE$ ও $\angle ACF$ উৎপন্ন হয়। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ABE + \angle ACF >$ দুই সমকোণ।

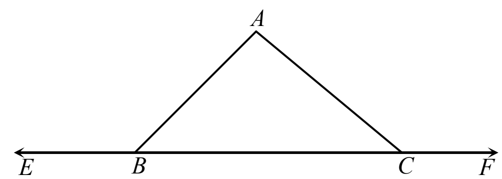
প্রমাণঃ

ধাপ ১. ΔABC-এর
বহিঃস্থ $\angle ABE = \angle A + \angle C$ ... ... (i)
[$\because$ ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ, অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান]

ধাপ ২. আবার, ΔABC-এর
বহিঃস্থ $\angle ACF = \angle A + \angle B$ ... ... (ii) [একই কারণে]

ধাপ ৩. (i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,
$\angle ABE + \angle ACF = \angle A + \angle B + \angle C + \angle A$
বা, $\angle ABE + \angle ACF = 180° + \angle A$
[$\because \angle A + \angle B + \angle C = 180°$]
বা, $\angle ABE + \angle ACF =$ দুই সমকোণ $+ \angle A$
$\therefore \angle ABE + \angle ACF >$ দুই সমকোণ **(প্রমাণিত)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)



সাধারণ নির্বচনঃ প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজের যেকোনো দুইটি বহিঃস্থ কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ। ইহার BC বাহুকে উভয় দিকে E ও F পর্যন্ত বর্ধিত করায় যথাক্রমে বহিঃস্থ $\angle ABE$ ও $\angle ACF$ উৎপন্ন হয়। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ABE + \angle ACF >$ দুই সমকোণ।

প্রমাণঃ

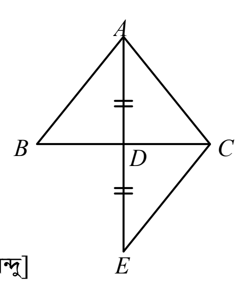
ধাপ ১. $\angle ABC + \angle ABE = 180°$ [রৈখিকযুগল কোণ বলে]
ধাপ ২. $\angle ACB + \angle ACF = 180°$ [একই কারণে]
ধাপ ৩. ধাপ-১ ও ধাপ-২ এর সমীকরণদ্বয় যোগ করে পাই,
$\angle ABC + \angle ABE + \angle ACB + \angle ACF = 180° + 180°$
বা, $\angle ABE + \angle ACF + (\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC) = 360° + \angle BAC$
[উভয়পক্ষে $\angle BAC$ যোগ করে]
বা, $\angle ABE + \angle ACF + 180° = 360° + \angle BAC$
[$\because \Delta ABC$-এ $\angle ABC + \angle BAC + \angle ACB = 180°$]
বা, $\angle ABE + \angle ACF = 360° - 180° + \angle BAC$
বা, $\angle ABE + \angle ACF = 180° + \angle BAC$
$\therefore \angle ABE + \angle ACF > 180°$
$\therefore \angle ABE + \angle ACF >$ দুই সমকোণ **(প্রমাণিত)**

১২ ΔABC এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু D হলে, প্রমাণ কর যে, $AB + AC > 2AD$

সমাধানঃ

বিশেষ নির্বচনঃ দেওয়া আছে, ΔABC- এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু D। A, D যোগ করলে AD রেখাংশ পাওয়া যায়। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB + AC > 2AD$।

অঙ্কনঃ AD কে E পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন, $AD = DE$ হয়। E, C যোগ করি।

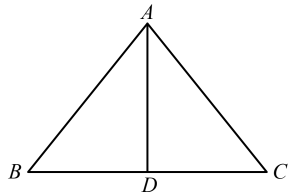


প্রমাণঃ

ধাপ ১. ΔABD এবং ΔECD-এ
$BD = CD$ [$\because D, BC$ এর মধ্যবিন্দু]
$AD = ED$ [অঙ্কন অনুসারে]
এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ADB =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle EDC$ [বিপ্রতীপ কোণ বলে]
$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ECD$ [বাহু- কোণ-বাহু উপপাদ্য]
সুতরাং $AB = EC$ ... ... (i)

ধাপ ২. আমরা জানি, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।
এখন, ΔAEC-এ,
$AC + EC > AE$
বা, $AC + AB > AD + ED$ [$\because$ (i) নং থেকে $AB = EC$]
বা, $AB + AC > AD + AD$ [$\because$ অঙ্কনানুসারে $ED = AD$]
$\therefore AB + AC > 2AD$ **(প্রমাণিত)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC- এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু D। A, D যোগ করলে AD রেখাংশ পাওয়া যায়।
প্রমাণ করতে হবে যে, $AB + AC > 2AD$।

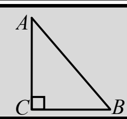
প্রমাণ:
ধাপ ১. আমরা জানি, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর যোগফল তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।
ΔABD-এ $AB + BD > AD$ ... ... (i)
ধাপ ২. অনুরূপভাবে, ΔACD-এ $AD + CD > AC$ ... ... (ii) [পূর্বোক্ত কারণে]
ধাপ ৩. (i) নং থেকে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,
$AB + BD - (AD + CD) > AD - AC$
বা, $AB + CD - AD - CD > AD - AC$ [$\because BD = CD$]
বা, $AB - AD > AD - AC$
বা, $AB + AC > AD + AD$
$\therefore AB + AC > 2AD$ **(প্রমাণিত)**

বি.দ্র: চিত্র নির্ভর বর্ণনা হওয়ায় শুধু বিশেষ নির্বচন দেওয়া হয়েছে।

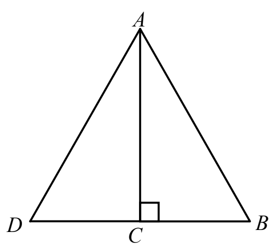
◆◆ অনুশীলনীর ১২নং এবং উপপাদ্য-১৫ নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

ΔPQR এর PQ ও PR-এর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে S ও T. [ঢা.বো-'১৬] *ক. উদ্দীপকের আলোকে চিত্র অঙ্কন কর।* *খ. প্রমাণ কর যে,* $ST = \frac{1}{2}QR$. *গ. প্রমাণ কর যে,* $PQ + QR > 2QT$.	নিজে নিজে চেষ্টা কর।

১৩ **চিত্রে, দেওয়া আছে, $\angle C$ = এক সমকোণ এবং $\angle B = 2\angle A$.**
প্রমাণ কর যে, $AB = 2BC$.



সমাধান:

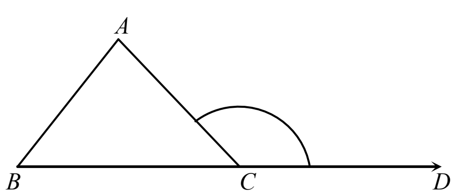


বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔACB-এ $\angle C$ = এক সমকোণ এবং $\angle B = 2\angle A$। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB = 2BC$
অঙ্কন: BC বাহুকে D পর্যন্ত এমনভাবে বর্ধিত করি যেন $CD = BC$ হয়। D, A যোগ করি।
প্রমাণ:
ধাপ ১. ΔACD এবং ΔACB-এ
$CD = BC$ [অঙ্কন অনুসারে]
$AC = AC$ [সাধারণ বাহু]
এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ACD$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle ACB$ [$\because$ প্রত্যেকে এক সমকোণ]
$\therefore \Delta ACD \cong \Delta ACB$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]
$\therefore \angle ADC = \angle ABC$
বা, $\angle ADB = \angle ABD$
বা, $\angle ADB = \angle B$ ... ... (i)
এবং $\angle DAC = \angle BAC$
অর্থাৎ $\angle DAC = \angle BAC = \frac{1}{2}\angle BAD$ ... ... (ii)
ধাপ ২. দেওয়া আছে, $\angle B = 2\angle A$
বা, $\angle B = 2\angle BAC$
বা, $\angle B = 2\left(\frac{1}{2}\angle BAD\right)$ [$\because$ (ii) নং হতে]
বা, $\angle B = \angle BAD$ ... ... (iii)
(i) ও (iii) হতে পাই,
$\angle B = \angle BAD = \angle ADB$
অর্থাৎ ΔADB সমবাহু ত্রিভুজ
$\therefore AB = AD = DB$
ধাপ ৩. এখন, $AB = DB$
বা, $AB = BC + CD$
বা, $AB = BC + BC$ [$\because$ অঙ্কনানুসারে, $CD = BC$]
$\therefore AB = 2BC$ **(প্রমাণিত)**

দৃষ্টি আকর্ষণ: তোমরা জ্যামিতিক প্রমাণে কখনও ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ব্যবহার করবেনা। জ্যামিতিক প্রমাণে ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ব্যবহার যুক্তিসঙ্গত নয়।

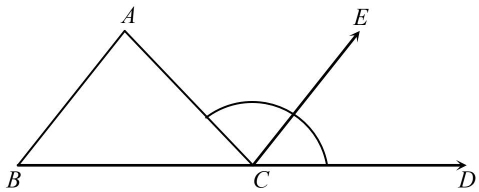
১৪ **প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয়, তা বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।**

সমাধান:



সাধারণ নির্বচন: প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয়, তা বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।
বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC এর BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করায় বহিঃস্থ $\angle ACD$ উৎপন্ন হয়েছে। বহিঃস্থ $\angle ACD$ এর বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয় হলো $\angle BAC$ ও $\angle ABC$।
প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ACD = \angle BAC + \angle ABC$।
প্রমাণ:
ধাপ ১. আমরা জানি, ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি $180°$
$\therefore \Delta ABC$-এ $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 180°$ ... ... (i)
ধাপ ২. এখন, $\angle ACD + \angle ACB = 180°$ ... ... (ii)
[$\because$ একই সরলরেখায় অবস্থিত সন্নিহিত কোণের পরিমাপ $180°$]
ধাপ ৩. (i) নং ও (ii) নং হতে পাই,
$\angle ACD + \angle ACB = \angle ABC + \angle ACB + \angle BAC$
বা, $\angle ACD = \angle ABC + \angle BAC$
$\therefore \angle ACD = \angle BAC + \angle ABC$ **(প্রমাণিত)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)



সাধারণ নির্বচন: প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয়, তা বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC এর BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করায় বহিঃস্থ $\angle ACD$ উৎপন্ন হয়েছে। বহিঃস্থ $\angle ACD$ এর বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয় হলো $\angle BAC$ ও $\angle ABC$।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ACD = \angle BAC + \angle ABC$.

অঙ্কন: C বিন্দুতে BA বাহুর সমান্তরাল করে CE রশ্মি টানি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. $BA \parallel CE$ এবং AC ছেদক। [অঙ্কন অনুসারে]

$\therefore \angle BAC = \angle ACE$ ... ... (i) [একান্তর কোণ বলে]

ধাপ ২. আবার, $BA \parallel CE$ এবং BD ছেদক।

$\therefore \angle ABC = \angle ECD$ ... ... (ii) [অনুরূপ কোণ বলে]

ধাপ ৩. (i) নং ও (ii) নং যোগ করে পাই,

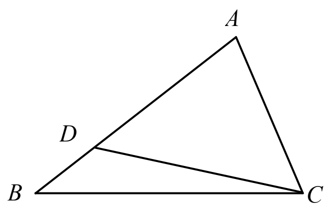
$\angle BAC + \angle ABC = \angle ACE + \angle ECD$

বা, $\angle BAC + \angle ABC = \angle ACD$ [$\because \angle ACE + \angle ECD = \angle ACD$]

$\therefore \angle ACD = \angle BAC + \angle ABC$ **(প্রমাণিত)**

১৫ প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর অন্তর তার তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

সমাধান:



সাধারণ নির্বচন: প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর অন্তর তার তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC-এর AC ক্ষুদ্রতম বাহু।

এখানে $AB - BC < AC$ প্রমাণ করাই যথেষ্ট হবে।

অঙ্কন: AB বাহু থেকে AC এর সমান করে AD অংশ কাটি। C, D যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. ΔADC-এর, $AC = AD$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\therefore \angle ADC = \angle ACD$

[$\because$ ত্রিভুজের সমান সমান বাহুর বিপরীত কোণদ্বয় সমান]

ধাপ ২. আমরা জানি, ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ দুইটির প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর।

ΔBCD-এ বহিঃস্থ $\angle ADC > \angle BCD$ ... ... (i)

এবং ΔACD-এ বহিঃস্থ $\angle BDC > \angle ACD$ ... ... (ii)

ধাপ ৩. (i) ও (ii) নং যোগ করে পাই,

$\angle ADC + \angle BDC > \angle BCD + \angle ACD$

বা, $\angle ACD + \angle BDC > \angle BCD + \angle ACD$ [$\because \angle ADC = \angle ACD$]

$\therefore \angle BDC > \angle BCD$

ধাপ ৪. অর্থাৎ ΔBCD-এ, $\angle BDC > \angle BCD$

$\therefore BC > BD$ [$\because$ ত্রিভুজের বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহু ক্ষুদ্রতর কোণের বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর]

বা, $BD < BC$

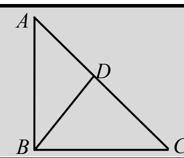
বা, $AB - AD < BC$ [$\because BD = AB - AD$]

বা, $AB - AC < BC$ [$\because AD = AC$]

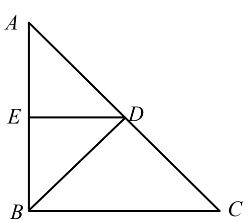
$\therefore AB - BC < AC$ **(প্রমাণিত)**

১৬ চিত্রে, ABC ত্রিভুজের $\angle B =$ এক সমকোণ এবং D, অতিভুজ AC এর মধ্যবিন্দু।

প্রমাণ কর যে, $BD = \frac{1}{2}AC$.



সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle B =$ এক সমকোণ। D, অতিভুজ AC-এর মধ্যবিন্দু। B, D যোগ করি।

প্রমাণ করতে হবে যে, $BD = \frac{1}{2}AC$

অঙ্কন: AB-এর মধ্যবিন্দু E নেই এবং E, D যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. $AD = DC = \frac{1}{2}AC$ [$\because$ অতিভুজ AC এর মধ্যবিন্দু D]

$\therefore DE \parallel BC$ [$\because$ ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল]

ধাপ ২. $DE \parallel BC$ এবং $BC \perp AB$

$\therefore DE \perp AB$

এবং ΔAED এবং ΔBED উভয়ই সমকোণী

ধাপ ৩. এখন, ΔAED ও ΔBED-এর মধ্যে

$AE = BE$ [অঙ্কন অনুসারে]

$ED = ED$ [সাধারণ বাহু]

$\angle AED = \angle BED$ [প্রত্যেকে এক সমকোণ]

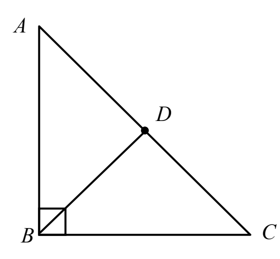
$\therefore \Delta AED \cong \Delta BED$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

সুতরাং, $BD = AD$

$\therefore BD = \frac{1}{2}AC$ [ধাপ-১ হতে, $AD = \frac{1}{2}AC$] **(প্রমাণিত)**

✉ **বিশেষ দ্রষ্টব্য:** উপরোক্ত প্রমাণের চিত্রে E বিন্দুকে BC বাহুর মধ্যবিন্দু ধরে একই পদ্ধতিতে প্রমাণ করা যায়।

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এ $\angle B$ = এক সমকোণ এবং D, অতিভুজ AC এর মধ্যবিন্দু। B, D যোগ করা হলো।

প্রমাণ করতে হবে যে, $BD = \frac{1}{2}AC$।

প্রমাণ:

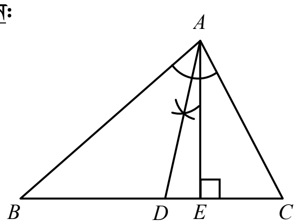
ধাপ ১. ΔABC-এ $\angle ABC$ = এক সমকোণ।
আমরা জানি, অর্ধবৃত্তস্থ কোণের মান এক সমকোণের সমান।
সুতরাং, $\angle ABC$ কে এমন একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ হিসেবে বিবেচনা করা যায়, যার ব্যাস হবে AC

দেওয়া আছে, D, অতিভুজ AC এর মধ্যবিন্দু।
সুতরাং D কে কেন্দ্র করে AD এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করলে তার শীর্ষ A, B ও C বিন্দু দিয়ে যাবে।
$\therefore$ D বৃত্তের কেন্দ্র। ফলে DB বা BD হবে অর্ধবৃত্তের ব্যাসার্ধ।
সুতরাং, $BD = \frac{1}{2}AC$ **(প্রমাণিত)**

লক্ষণীয়: অর্ধবৃত্তস্থ কোণের ধারণা ভালোভাবে বুঝতে হলে পাঠ্যবইয়ের উপপাদ্য-২২ দেখুন।

১৭ **ΔABC এ $AB > AC$ এবং $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে। প্রমাণ কর যে, $\angle ADB$ স্থূলকোণ।**

সমাধান:



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এর $AB > AC$, $\angle BAC$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC-কে D বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ADB$ স্থূলকোণ।

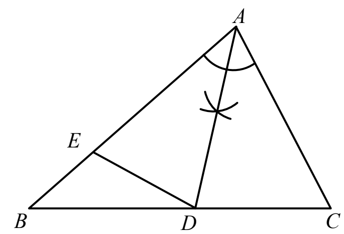
অঙ্কন: A বিন্দু হতে $AE \perp BC$ আঁকি যা BC কে E বিন্দুতে ছেদ করে।

প্রমাণ:

ধাপ ১. $AE \perp BC$
$\therefore \angle AED$ = এক সমকোণ
আমরা জানি, ত্রিভুজের বহিঃস্থ কোণ অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ দুইটির প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর।
$\therefore \Delta ADE$ এর বহিঃস্থ $\angle ADB >$ অন্তঃস্থ বিপরীত $\angle AED$
$\therefore \angle ADB >$ এক সমকোণ

ধাপ ২. আবার, $\angle ADB + \angle ADE$ = দুই সমকোণ [রৈখিক যুগল কোণ]
$\angle ADB <$ দুই সমকোণ
যেহেতু $\angle ADB >$ এক সমকোণ ও $\angle ADB <$ দুই সমকোণ
$\therefore \angle ADB$ স্থূলকোণ **(প্রমাণিত)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এর $AB > AC$ এবং $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে।
প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ADB$ স্থূলকোণ।

অঙ্কন: AB বাহু হতে AC-এর সমান AE অংশ কাটি এবং D, E যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. ΔAED ও ΔACD-এ, $AE = AC$ [অঙ্কন অনুসারে]
$AD = AD$ [সাধারণ বাহু]
এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle DAE$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle CAD$
[$\because AD$, $\angle A$ -এর সমদ্বিখণ্ডক]
$\therefore \Delta AED \cong \Delta ACD$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]
অতএব, $\angle ADE = \angle ADC$

ধাপ ২. এখন $\angle ADB > \angle ADE$ [$\because \angle ADE$, $\angle ADB$-এর একটি অংশ]
অর্থাৎ $\angle ADB > \angle ADC$ [$\because \angle ADC = \angle ADE$]
বা, $\angle ADB > \angle ABD + \angle BAD$
[$\because \Delta ABD$-এর বহিঃস্থ $\angle ADC = \angle ABD + \angle BAD$]

ধাপ ৩. অতএব ΔABD-এ $\angle ADB > 90°$
[$\because \Delta ABD$-এ $\angle ADB$ এর মান অপর দুটি কোণের সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর]
$\therefore \angle ADB$ স্থূলকোণ **(প্রমাণিত)**

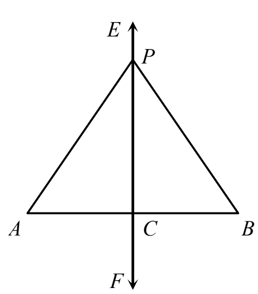
◆◆ অনুশীলনীর ১১ ও ১৭নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

ΔABC এ $AB > AC$ এবং $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করেছে। *ক. কোনো ত্রিভুজের তিনটি বাহুকে চক্রাকারে বর্ধিত করলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণ তিনটির সমষ্টি হবে–* *খ. প্রমাণ কর যে, $\angle ADB$ স্থূলকোণ।* *গ. দেখাও যে, BC বাহুকে বর্ধিত করলে প্রাপ্ত বহিঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।*	নিজে নিজে চেষ্টা কর। (ক) 360°

১৮ **প্রমাণ কর যে, কোনো রেখাংশের লম্বদ্বিখণ্ডকের উপরিস্থিত যেকোনো বিন্দু উক্ত রেখাংশের প্রান্ত বিন্দুদ্বয় হতে সমদূরবর্তী।**

সমাধান:

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, AB সরলরেখাকে EF সরলরেখাটি C বিন্দুতে লম্বদ্বিখণ্ডিত করে। লম্বদ্বিখণ্ডক EF এর উপরিস্থিত P একটি বিন্দু এবং AB এর প্রান্তবিন্দুদ্বয় A এবং B। প্রমাণ করতে হবে যে, P হতে A এবং B বিন্দুদ্বয় সমদূরবর্তী অর্থাৎ $PA = PB$।



অঙ্কন: A, P; B, P যোগ করি।

প্রমাণ:

ΔAPC ও ΔBPC-এ
$AC = BC$ [$\because EF$, AB কে C বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত করে]
$PC = PC$ [সাধারণ বাহু]
এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ACP$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle BCP$ [$EF \perp AB$]
$\Delta APC \cong \Delta BCP$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]
$\therefore PA = PB$ **(প্রমাণিত)**

১৯ ***ABC*** **একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle A$ = এক সমকোণ। *BC* বাহুর মধ্যবিন্দু *D*.**

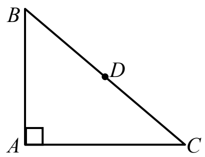
ক. প্রদত্ত তথ্য অনুযায়ী *ABC* ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

খ. দেখাও যে, $AB + AC > 2AD$.

গ. প্রমাণ কর যে, $AD = \frac{1}{2} BC$.

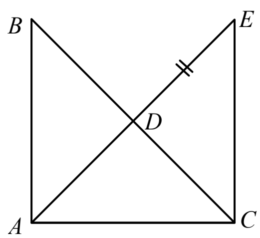
সমাধান:

ক



ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজে $\angle A$ = এক সমকোণ।
BC বাহুর মধ্যবিন্দু D এ তথ্যের আলোকে চিত্রটি আঁকা হলো।

খ



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC-এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু D। A, D যোগ করলে AD রেখাংশ পাওয়া যায়।
প্রমাণ করতে হবে যে, $AB + AC > 2AD$।

অঙ্কন: AD কে E পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন, $AD = DE$ হয়। E, C যোগ করি।

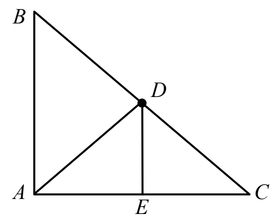
প্রমাণ:

ধাপ ১. ΔABD এবং ΔECD-এ
$BD = CD$ [$\because$ D, BC এর মধ্যবিন্দু দেওয়া আছে]
$AD = ED$ [অঙ্কন অনুসারে]
এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ADB$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle EDC$ [বিপ্রতীপ কোণ বলে]
$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ECD$ [বাহু- কোণ-বাহু উপপাদ্য]
সুতরাং $AB = EC$ ... ... (i)

ধাপ ২. আমরা জানি, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহুর অপেক্ষা বৃহত্তর।
$\therefore$ ΔAEC-এ,
$AC + EC > AE$
বা, $AC + AB > AD + ED$ [$\because$ (i) নং থেকে $AB = EC$]
বা, $AB + AC > AD + AD$ [$\because$ অঙ্কনানুসারে $ED = AD$]
$\therefore$ $AB + AC > 2AD$ **(প্রমাণিত)**

বি.দ্র: 'খ' নং প্রশ্নটির বিকল্প পদ্ধতিতে প্রমাণের জন্য অনুশীলনীর ১২ নং প্রশ্নের সমাধান দ্রষ্টব্য।

গ



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle A$ = এক সমকোণ। D অতিভুজ BC-এর মধ্যবিন্দু। A, D যোগ করি। প্রমাণ করতে হবে যে, $AD = \frac{1}{2} BC$

অঙ্কন: AC বাহুর মধ্যবিন্দু E নির্ণয় করি এবং E, D যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. $AB \perp AC$ [$\because$ $\angle A = 90°$]
এবং $AB \parallel DE$ [ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল]
$\therefore$ $DE \perp AC$
$\therefore \Delta AED$ এবং ΔDEC সমকোণী ত্রিভুজ

ধাপ ২. ΔAED ও ΔCED-এ
$DE = DE$ [সাধারণ বাহু]
$AE = CE$ [$\because$ E, AC এর মধ্যবিন্দু]
$\angle AED = \angle CED$ [প্রত্যেকে এক সমকোণ]
$\therefore$ $\Delta AED \cong \Delta CED$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]
$\therefore$ $AD = CD = \frac{BC}{2}$ [$\because$ D, BC -এর মধ্যবিন্দু]
$\therefore AD = \frac{1}{2} BC$ **(প্রমাণিত)**

বি.দ্র: 'গ' নং প্রশ্নটির বিকল্প পদ্ধতিতে প্রমাণের জন্য অনুশীলনীর ১৬ নং প্রশ্নের সমাধান দ্রষ্টব্য।

২০ **ΔABC এর *D* ও *E* যথাক্রমে *AB* ও *AC* এর মধ্যবিন্দু এবং $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় *O* বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।**

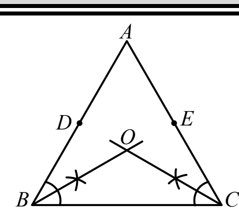
ক. উদ্দীপকের তথ্যগুলো চিত্রের মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. প্রমাণ কর যে, $DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{1}{2} BC$।

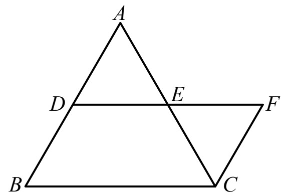
গ. প্রমাণ কর যে, $\angle BOC = 90° + \frac{1}{2} \angle A$।

সমাধান:

ক ΔABC এর D ও E যথাক্রমে AB ও AC এর মধ্যবিন্দু এবং $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। চিত্রের মাধ্যমে তা দেখানো হলো:



খ



প্রমাণ করতে হবে যে, $DE \parallel BC$ এবং $DE = \frac{1}{2} BC$।

অঙ্কন: D ও E যোগ করে তা বর্ধিত করি যেন $DE = EF$ হয়। C, F যোগ করি।

প্রমাণ:

ধাপ ১. ΔADE ও ΔCEF এর মধ্যে

$AE = EC$ [$\because$ E, AC এর মধ্যবিন্দু]

$DE = EF$ [অঙ্কনানুসারে]

$\angle AED = \angle CEF$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\Delta ADE \cong \Delta CEF$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

$\therefore \angle ADE = \angle EFC$ এবং $\angle DAE = \angle ECF$ [একান্তর কোণ]

$\therefore AD \parallel CF$ এবং $AB \parallel CF$

আবার, $BD = AD = CF$ এবং $BD \parallel CF$

সুতরাং $BDFC$ একটি সামন্তরিক।

$\therefore DF \parallel BC$

বা $DE \parallel BC$

ধাপ ২. আবার, $DF = BC$ [$\because$ $BDFC$ একটি সামান্তরিক]

বা $DE + EF = BC$

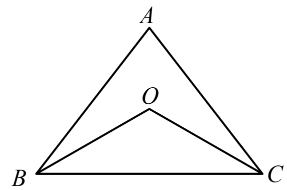
বা, $DE + DE = BC$

বা, $2DE = BC$

বা $DE = \frac{1}{2} BC$ **(প্রমাণিত)**

> **দৃষ্টি আকর্ষণ:** 'খ' নং প্রশ্নটি উপপাদ্য-১৫ এর আলোকে প্রণীত।

গ



বিশেষ নির্বচন: দেওয়া আছে, ΔABC এর $\angle B$ এর সমদ্বিখণ্ডক BO এবং $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডক CO পরস্পর O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BOC = 90° + \frac{1}{2} \angle A$।

প্রমাণ:

ধাপ ১. আমরা জানি, ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি $180°$।

ΔABC-এ $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

বা, $\frac{1}{2}(\angle A + \angle B + \angle C) = \frac{1}{2} \times 180°$

[উভয়পক্ষকে $\frac{1}{2}$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\frac{1}{2}(\angle B + \angle C) = 90° - \frac{1}{2}\angle A$

ধাপ ২. আমরা জানি, ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি $180°$।

ΔBOC-এ $\angle BOC + \angle OBC + \angle OCB = 180°$

বা, $\angle BOC = 180° - \angle OBC - \angle OCB$

বা, $\angle BOC = 180° - \frac{1}{2}\angle B - \frac{1}{2}\angle C$

[$\because$ OB, $\angle B$ এর সমদ্বিখণ্ডক এবং OC, $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডক]

বা, $\angle BOC = 180° - \frac{1}{2}(\angle B + \angle C)$

বা, $\angle BOC = 180° - (90° - \frac{1}{2}\angle A)$ [ধাপ-১ হতে]

$= 180° - 90° + \frac{1}{2}\angle A$

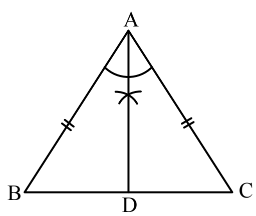
$\therefore \angle BOC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$ **(প্রমাণিত)**

◆◆ অনুশীলনীর ২০নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

ΔABC-এর ∠B ও ∠C এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। *[দি.বো-'১৬]* *ক. উপরের তথ্যের আলোকে চিত্রটি আঁক।* *খ. প্রমাণ কর যে,* $\angle BOC = 90° + \frac{1}{2}\angle A$. *গ. যদি AB কে E পর্যন্ত এবং AC-কে F পর্যন্ত বর্ধিত করা হয় এবং ∠EBC ও ∠FCB কোণের সমদ্বিখণ্ডক O বিন্দুতে মিলিত হয় তবে প্রমাণ কর যে,* $\angle BOC = 90° - \frac{1}{2}\angle A$*।*	নিজে নিজে চেষ্টা কর।

২১ প্রমাণ কর যে, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণের সমদ্বিখণ্ডক ভূমিকেও সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং ভূমির উপর লম্ব।

সমাধান: সাধারণ নির্বচন: প্রমাণ করতে হবে যে, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণের সমদ্বিখণ্ডক ভূমিকেও সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং ভূমির উপর লম্ব।



বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের AB = AC এবং AD রেখা শিরঃকোণ A এর সমদ্বিখণ্ডক।

প্রমাণ করতে হবে যে, BD = CD এবং $AD \perp BC$

প্রমাণ:

ধাপ ১. ΔABD ও ΔACD-এ

AB = AC [দেওয়া আছে]

AD = AD [সাধারণ বাহু]

$\angle BAD = \angle CAD$ [অঙ্কনানুসারে]

$\therefore \Delta ABD \cong \Delta ACD$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

$\therefore$ BD = CD এবং $\angle ADB = \angle ADC$

[দুটি সর্বসম ত্রিভুজের অনুরূপ বাহু ও অনুরূপ কোণগুলো সমান]

ধাপ ২. সরলকোণ $\angle BDC = 180°$

বা, $\angle ADB + \angle ADC = 180°$

বা, $\angle ADC + \angle ADC = 180°$ [ধাপ-১ হতে $\angle ABD = \angle ADC$]

বা, $2\angle ADC = 180°$

বা, $\angle ADC = 90°$

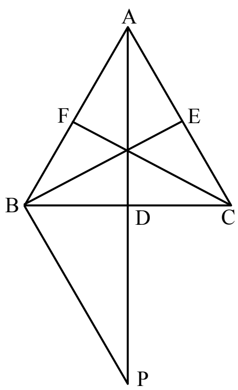
$\therefore \angle ADB = 90°$

সুতরাং D বিন্দুতে উৎপন্ন সন্নিহিত কোণদ্বয় পরস্পর সমান এবং তা $90°$

$\therefore AD \perp BC$ **(প্রমাণিত)**

২২ প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের সমষ্টি তার পরিসীমা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

সমাধানঃ



বিশেষ নির্বচনঃ মনে করি, ABC ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয় যথাক্রমে AD, BE ও CF। প্রমাণ করতে হবে যে, $AD + BE + CF < AB + BC + CA$।

প্রমাণঃ AD বাহুকে বর্ধিত করে $AD = DP$ নিই এবং BP যোগ করি।

এখন, ΔBDP ও ΔADC-এ

$AD = DP$ [অঙ্কনানুসারে]

$BD = CD$ [$\because$ D, BC বাহুর মধ্যবিন্দু]

$\angle BDP = \angle ADC$ [বিপ্রতীপ কোণ]

$\therefore \Delta BDP \cong \Delta ADC$ [বাহু-কোণ-বাহু উপপাদ্য]

$\therefore BP = AC$

আমরা জানি, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

$\therefore \Delta ABP$-এ $AB + BP > AP$

বা, $AB + AC > AD + DP$

বা, $AB + AC > AD + AD$

$\therefore AB + AC > 2AD$ ……… (i)

অনুরূপভাবে, প্রমাণ করা যায়, $AB + BC > 2BE$ ……… (ii)

এবং $AC + BC > 2CF$ ……… (iii)

(i), (ii) ও (iii) নং যোগ করে পাই,

$2(AB + AC + BC) > 2(AD + BE + CF)$

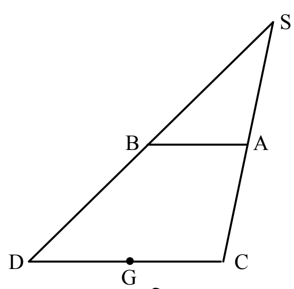
$\therefore AD + BE + CF < AB + BC + CA$ **(প্রমাণিত)**

◆◆ অনুশীলনীর ২১ ও ২২নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

ΔABC এর BC, AC ও AB বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু যথাক্রমে D, E ও F। *ক. ত্রিভুজের একটি কোণ উহার অপর দুটি কোণের সমষ্টির সমান হলে ত্রিভুজটি–* *খ. $AB = AC$ হলে দেখাও যে, $AD \perp BC$.* *গ. প্রমাণ কর যে, $AD + BE + CF < AB + BC + CA$*	নিজে নিজে চেষ্টা কর। (ক) সমকোণী

২৩ এক পরিশ্রমী পিতা তার একমাত্র পুত্রকে ডেকে বললেন যে তিনি তার উপার্জিত অর্থ দিয়ে স্বর্ণ ক্রয় করে পার্শ্ববর্তী বনে লুকিয়ে রেখেছেন। স্বর্ণের অবস্থান সম্পর্কে পুত্র জিজ্ঞাসা করাতে তিনি জানালেন যে বনে একই রকম দেখতে দুইটি বৃক্ষ A ও B এবং একটি পাথর S রয়েছে। S থেকে A তে পৌঁছে সমদূরত্ব লম্বালম্বিভাবে গিয়ে সে C বিন্দু পাবে। এবার আবার S থেকে B তে এসে একইভাবে লম্বালম্বি সমদূরত্ব অতিক্রম করে D বিন্দু পাবে। এবার CD রেখার মধ্যবিন্দুতে স্বর্ণ পাওয়া যাবে। পুত্র বৃক্ষ A ও B পেলেও দুর্ভাগ্যজনকভাবে S পেল না। সে কী স্বর্ণ খুঁজে পাবে? কীভাবে?

সমাধানঃ



পাথরটি S অবস্থানে রয়েছে। ধরি, S হতে বৃক্ষ A-তে এসে লম্বালম্বিভাবে (SA-এর দৈর্ঘ্যের দিকে) সমান দূরত্ব AC অতিক্রম করে C-তে আসা হলো।

অর্থাৎ $SA = AC$

আবার, S হতে বৃক্ষ B-তে এসে লম্বালম্বিভাবে (SB-এর দৈর্ঘ্যের দিকে) সমান দূরত্ব BD অতিক্রম করে D-তে আসা হলো।

অর্থাৎ $SB = BD$

ধরি, CD রেখার মধ্যবিন্দু G; অর্থাৎ G বিন্দুতে স্বর্ণ পাওয়া যাবে।

এখন, উৎপন্ন CDS ত্রিভুজের SC ও SD বাহুর মধ্যবিন্দুদ্বয় যথাক্রমে A এবং B।

তাহলে SC ও SD বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোগ সরলরেখা হবে AB।

সুতরাং ΔCDS-এ $AB = \frac{1}{2} CD$ …… (i) ;

[কোনো ত্রিভুজের দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোগ সরলরেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল ও দৈর্ঘ্যে তার অর্ধেক]

প্রশ্নমতে, CD এর মধ্যবিন্দু G তে স্বর্ণ রয়েছে।

অর্থাৎ $CG = DG = \frac{1}{2} CD$ …… (ii)

(i) নং ও (ii) নং হতে পাই, $AB = CG = DG$

এখন, পুত্র যদি C অথবা D বিন্দু হতে AB এর সমান্তরালে AB এর সমান দূরত্ব অতিক্রম করে তবে G বিন্দুটি পাবে তথা স্বর্ণ খুঁজে পাবে।

অর্থাৎ স্বর্ণ পেতে হলে পুত্রকে অবশ্যই C বিন্দু বা D বিন্দুটি পেতে হবে। কিন্তু C ও D বিন্দু পেতে হলে পুত্রকে A ও B হতে যথাক্রমে SA ও SB এর সমান দূরত্ব অতিক্রম করতে হবে। এ জন্য অবশ্যই S বিন্দুর অবস্থান জানা প্রয়োজন।

যেহেতু পুত্র বৃক্ষ A ও বৃক্ষ B পেলেও দুর্ভাগ্যজনকভাবে S পাথরটি খুঁজে পায়নি; সেহেতু সে স্বর্ণ খুঁজে পাবে না।

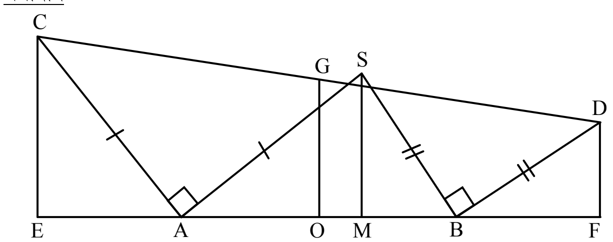
লক্ষণীয়: S বিন্দুর বিভিন্ন অবস্থানের জন্য G বিন্দুর অবস্থান বিভিন্ন হয়। S এর বিভিন্ন অবস্থানের জন্য গ্রাফ কাগজে G এর সঞ্চারপথ অঙ্কন করলে বিষয়টি বিস্তারিতভাবে বোঝা যায়। অর্থাৎ G বিন্দুর অবস্থান (স্বর্ণের অবস্থান) S বিন্দুর উপর নির্ভর করে। তাই S বিন্দু খুঁজে না পাওয়া গেলে স্বর্ণের অবস্থান খুঁজে পাওয়া সম্ভব নয়।

দৃষ্টি আকর্ষণ

প্রদত্ত প্রশ্নে **'লম্বালম্বি'** শব্দের উল্লেখ রয়েছে। 'বাংলা একাডেমির অভিধান অনুসারে **'লম্বালম্বি'** শব্দের অর্থ হলো **'দৈর্ঘ্যের দিকে'** এবং **'লম্ব'** শব্দের অর্থ হলো **'খাড়া বা সমকোণে অবস্থিত রেখা'**। যেহেতু পাঠ্যবইয়ের প্রশ্নে 'লম্বালম্বি' শব্দটি উল্লেখ রয়েছে তাই সমাধানটি SA এবং AC কে একই বরাবর অর্থাৎ SAC-কে সরলরেখা ধরা হয়েছে। তদ্রুপ SB এবং BD কে একই বরাবর অর্থাৎ SBD-কে সরলরেখা ধরা হয়েছে। এক্ষেত্রে **স্বর্ণ খুঁজে পাওয়া যায় না**।
কিন্তু আলোচ্য প্রশ্নটির অনুরূপ একটি প্রশ্ন গণিতের জগতে বেশ আলোচিত একটি বিষয়, যেখানে **স্বর্ণ খুঁজে পাওয়া যায়**। তবে সেক্ষেত্রে প্রশ্নটিতে **'লম্বালম্বিভাবে'** শব্দের স্থলে **'লম্বভাবে'** হবে। অর্থাৎ $AC \perp SA$ এবং $BD \perp SB$ হবে। সেক্ষেত্রে প্রশ্নটি এবং সমাধানটি হবে নিম্নরূপ:

এক পরিশ্রমী পিতা তার একমাত্র পুত্রকে ডেকে বললেন যে তিনি তার উপার্জিত অর্থ দিয়ে স্বর্ণ ক্রয় করে পার্শ্ববর্তী বনে লুকিয়ে রেখেছেন। স্বর্ণের অবস্থান সম্পর্কে পুত্র জিজ্ঞাসা করাতে তিনি জানালেন যে বনে একই রকম দেখতে দুইটি বৃক্ষ A ও B এবং একটি পাথর S রয়েছে। S থেকে A তে পৌঁছে সমদূরত্ব **লম্বভাবে** গিয়ে সে C বিন্দু পাবে। এবার আবার S থেকে B তে এসে **লম্বভাবে** সমদূরত্ব অতিক্রম করে D বিন্দু পাবে। এবার CD রেখার মধ্যবিন্দুতে স্বর্ণ পাওয়া যাবে। পুত্র বৃক্ষ A ও B পেলেও দুর্ভাগ্যজনকভাবে S পেল না। সে কী স্বর্ণ খুঁজে পাবে? কীভাবে?

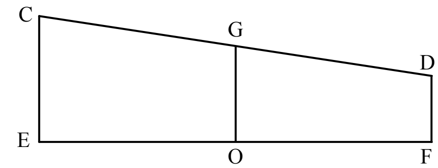
সমাধান:



চিত্র-1

পাথরটি S অবস্থানে রয়েছে। ধরি, S হতে বৃক্ষ A-তে এসে SA রেখার সাপেক্ষে **লম্বভাবে** সমান দূরত্ব অতিক্রম করে C-তে আসা হলো।
অর্থাৎ $SA = AC$
আবার, S হতে বৃক্ষ B-তে এসে SB রেখার সাপেক্ষে **লম্বভাবে** সমান দূরত্ব অতিক্রম করে D-তে আসা হলো। অর্থাৎ $SB = BD$
A, B এবং C, D যোগ করি। CD এর মধ্যবিন্দু G নির্ণয় করি। S, C, G ও D হতে AB বা তার বর্ধিতাংশের উপর যথাক্রমে SM, CE, GO এবং DF লম্ব অঙ্কন করি।
এখন স্বর্ণ পেতে হলে পুত্রকে A অথবা B হতে O বিন্দুতে পৌঁছতে হবে এবং O বিন্দু থেকে G বিন্দুতে পৌঁছতে হবে। অর্থাৎ স্বর্ণ পেতে হলে AO ও GO নির্ণয় করতে হবে।

GO নির্ণয়:
প্রশ্নানুসারে,
$SA = AC, SB = BD, \angle SBD = 90°, \angle SAC = 90°$
চিত্রে $\angle SBM + \angle SBD + \angle DBF = 180°$;
[B বিন্দুতে উৎপন্ন এক সরলকোণ]
বা, $\angle SBM + 90° + \angle DBF = 180°$; [$\because \angle SBD = 90°$]
বা, $\angle SBM + \angle DBF = 180° - 90°$
বা, $\angle SBM + \angle DBF = 90°$ ... ... (i)
আবার, BDF সমকোণী ত্রিভুজে $\angle DBF + \angle BDF + \angle BFD = 180°$
বা, $\angle DBF + \angle BDF + 90° = 180°$; [$\because \angle BFD = 90°$]
বা, $\angle DBF + \angle BDF = 90°$ ... ... (ii)
(i) নং থেকে (ii) নং বিয়োগ করে পাই,
$\angle SBM - \angle BDF = 0$
বা, $\angle SBM = \angle BDF$
এখন, সমকোণী ΔSBM এবং সমকোণী ΔBDF-এ
$\angle SBM = \angle BDF$,
$\angle BSM = \angle DBF$; [$\because$ উভয় ত্রিভুজে একটি করে কোণ সমকোণ]
এবং অতিভুজ SB = অনুরূপ অতিভুজ DB
সুতরাং $\Delta SBM \cong \Delta BDF$; [কোণ-বাহু-কোণ উপপাদ্য]
$\therefore$ SM = BF এবং BM = DF ... ... (iii)
অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে, $\Delta SAM \cong \Delta ACE$।
সেক্ষেত্রে SM = AE এবং AM = CE ... ... (iv)
(iii) নং ও (iv) নং হতে পাই, SM = BF = AE ... ... (v)



চিত্র-2

প্রশ্নানুসারে, CEFD ট্রাপিজিয়ামের CD বাহুর মধ্যবিন্দু G, $GO \perp EF$ এবং $GO \parallel CE \parallel DF$। সুতরাং O হচ্ছে EF এর মধ্যবিন্দু।
আমরা জানি, ট্রাপিজিয়ামের অসমান্তরাল বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল ও তাদের যোগফলের অর্ধেক।
সুতরাং $GO = \dfrac{CE + DF}{2}$; [চিত্র-2]
$= \dfrac{AM + BM}{2} = \dfrac{AB}{2}$
[$\because$ (iii) ও (iv) হতে পাই CE = AM এবং DF = BM]
যেহেতু পুত্র বৃক্ষ A ও বৃক্ষ B খুঁজে পেয়েছে সেক্ষেত্রে AB দূরত্বটি জানা রাশি।
অর্থাৎ $GO = \dfrac{AB}{2}$ নির্ণয় সম্ভব।

AO নির্ণয়:
EF এর মধ্যবিন্দু হবে O হওয়ায় OE = OF
বা, AO + AE = BO + BF ; [চিত্র-1]
বা, AO = BO ; [(v) নং থেকে AE = BF = SM]
যেহেতু AO = BO সুতরাং O হচ্ছে AB এর মধ্যবিন্দু।
অর্থাৎ $AO = BO = \dfrac{1}{2} AB$
AB দূরত্বটি জানা থাকায় $AO = \dfrac{1}{2} AB$ নির্ণয় সম্ভব।
সুতরাং S-এর অবস্থান না জানলেও AO এবং GO উভয়টিই নির্ণয় সম্ভব। সেক্ষেত্রে G বিন্দু নির্ণয় সম্ভব হবে। অর্থাৎ পুত্র A বৃক্ষ হতে AB বরাবর $AO = \dfrac{1}{2} AB$ দূরত্ব গিয়ে লম্বভাবে $GO = \dfrac{1}{2} AB$ দূরত্ব গিয়ে G বিন্দু খুঁজে পাবে, যেখানে স্বর্ণ রয়েছে।
অর্থাৎ পুত্র S বিন্দু খুঁজে না পেলেও G নির্ণয় করতে পারবে যেখানে স্বর্ণ রয়েছে। অর্থাৎ সে স্বর্ণ খুঁজে পাবে।

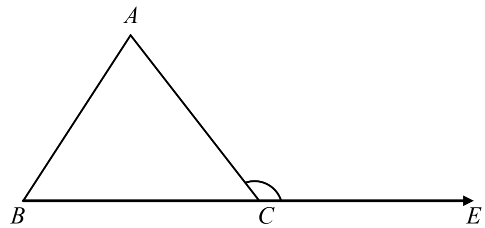
লক্ষণীয়: S যদি AB রেখা বা তার বর্ধিতাংশের উপর অথবা AB রেখার সাপেক্ষে চিত্রের উল্টো পার্শ্বেও অবস্থান করে, তাও উপরের পদ্ধতিটি প্রযোজ্য হবে। এমনকি S এর যেসব অবস্থানের জন্য চিত্রানুযায়ী কোনো ট্রাপিজিয়াম গঠন করা যাবে না, ঐসব ক্ষেত্রেও G এর অবস্থান AB এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক বরাবর অবস্থান করে।

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

কাজ *পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১২৫*

প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয়, তা এর অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ দুইটির প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর।

সমাধান:



সাধারণ নির্বচন: প্রমাণ করতে হবে যে, ত্রিভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয়, তা এর অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ দুইটির প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ΔABC-এর BC বাহুকে E পর্যন্ত বর্ধিত করায় বহিঃস্থ $\angle ACE$ উৎপন্ন হয়েছে। বহিঃস্থ $\angle ACE$-এর অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয় হলো $\angle BAC$ এবং $\angle ABC$।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ACE > \angle BAC$ এবং $\angle ACE > \angle ABC$

প্রমাণ:

ধাপ ১. আমরা জানি, ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।

$\therefore$ ΔABC-এ $\angle ABC + \angle ACB + \angle BAC = 2$ সমকোণ ... (i)

ধাপ ২. $\angle BCE =$ এক সরলকোণ $= 2$ সমকোণ

বা, $\angle ACB + \angle ACE = 2$ সমকোণ ... ... (ii)

ধাপ ৩. (i) নং এবং (ii) নং তুলনা করে পাই,

$\angle ACB + \angle ACE = \angle ABC + \angle ACB + \angle BAC$

বা, $\angle ACE = \angle ABC + \angle BAC$

অর্থাৎ $\angle ACE > \angle ABC$ এবং $\angle ACE > \angle BAC$ **(প্রমাণিত)**

পাঠ্যবইয়ের অনুসিদ্ধান্ত ও সমাধান

অনুসিদ্ধান্ত: ২। ত্রিভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয়, তা এর বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান। *[পৃষ্ঠা-১২৫]*

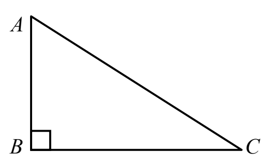
সমাধান: অনুশীলনীর ১৪ নং প্রশ্নের সমাধান দ্রষ্টব্য।

অনুসিদ্ধান্ত: ৩। ত্রিভুজের একটি বাহুকে বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয়, তা এর অন্তঃস্থ বিপরীত কোণ দুইটির প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর। *[পৃষ্ঠা-১২৫]*

সমাধান: অনুশীলনমূলক কাজ (পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১২৫) এর সমাধান দ্রষ্টব্য।

অনুসিদ্ধান্ত: ৪। সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয় পরস্পর পূরক। *[পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১২৫]*

সমাধান:



সাধারণ নির্বচন: প্রমাণ করতে হবে যে, সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয় পরস্পর পূরক।

বিশেষ নির্বচন: মনে করি, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ যার $\angle B =$ এক সমকোণ $= 90°$। প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle A + \angle C = 90°$।

প্রমাণ:

ধাপ ১. আমরা জানি, ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি $= 180°$

ΔABC-এ $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$

বা, $\angle A + \angle C + 90° = 180°$ $[\because \angle B = 90°]$

বা, $\angle A + \angle C = 180° - 90°$

$\therefore$ $\angle A + \angle C = 90°$

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয় পরস্পর পূরক।

অনুসিদ্ধান্ত: ৫। ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর দৈর্ঘ্যের অন্তর এর তৃতীয় বাহুর দৈর্ঘ্য অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। *[পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১২৯]*

সমাধান: অনুশীলনীর ১৫ নং প্রশ্নের সমাধান দ্রষ্টব্য।