দশম অধ্যায়

দ্বিপদী বিস্তৃতি

অনুশীলনী - ১০.১

দ্বিপদী রাশি: দুইটি পদের সমন্বয়ে গঠিত বীজগণিতীয় রাশিকে দ্বিপদী (Binomials) রাশি বলা হয়।

উদাহরণ: $a + b, x - y, 1 + x, 1 - x^2, a^2 - b^2$ ইত্যাদি দ্বিপদী রাশি।

নিম্নোক্ত ছকটি লক্ষ করি:

দ্বিপদী রাশি	বিস্তৃতি	n এর মান	পদ সংখ্যা	দ্বিপদী সহগ (প্যাসকেলের ত্রিভুজ)
$(1+y)^0$	1	$n = 0$	1	1
$(1+y)^1$	$1 + y$	$n = 1$	2	1 1
$(1+y)^2$	$1 + 2y + y^2$	$n = 2$	3	1 2 1
$(1+y)^3$	$1 + 3y + 3y^2 + y^3$	$n = 3$	4	1 3 3 1
$(1+y)^4$	$1 + 4y + 6y^2 + 4y^3 + y^4$	$n = 4$	5	1 4 6 4 1

উপরোক্ত ছক থেকে দ্বিপদী বিস্তৃতির বৈশিষ্ট্যগুলো নিম্নরূপ:

i. প্রতিটি দ্বিপদী রাশির বিস্তৃতিতে ঘাত সংখ্যা (n) এর চেয়ে পদসংখ্যা এক বেশি।

$\therefore$ $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতিতে পদসংখ্যা হবে $n + 1$

ii. দ্বিপদী রাশির চলকের ঘাত ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধি পেয়ে শেষ পদে রাশির ঘাতের সমান নয়।

$\therefore$ $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতির শেষ পদ এবং y এর সর্বোচ্চ ঘাতযুক্ত পদ y^n।

লক্ষণীয়: i. $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতিতে n এর মান অঋণাত্মক পূর্ণসংখ্যা বিবেচনা করা হয়েছে অর্থাৎ $n = 0, 1, 2, 3\ldots\ldots\ldots$

ii. $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতিতে y এর সর্বোচ্চ ঘাত n এবং সর্বনিম্ন ঘাত শূন্য।

প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্র:

উপরোক্ত ছক থেকে দ্বিপদী রাশির বিস্তৃতির সহগগুলোর সাজিয়ে নেওয়ায় এটি ত্রিভুজের আকার ধারণ করেছে যা প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্র নামে পরিচিত।

প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্রের বৈশিষ্ট্য নিম্নরূপ:

i. প্রত্যেক সারির প্রথম ও শেষ সংখ্যা 1।

ii. যেকোনো সংখ্যা ঠিক এর উপরের সারির বাম ও ডানের সংখ্যা দুইটির যোগফল।

ত্রিভুজের এ বৈশিষ্ট্য ব্যবহার করে যেকোনো ঘাতের দ্বিপদীর বিস্তৃতি সহজে নির্ণয় করা যায়।

যেমন: $n = 4$ এর জন্য দ্বিপদী সহগ; $\rightarrow$ 1 4 6 4 1

তাহলে $n = 5$ এর জন্য দ্বিপদী সহগ; $\rightarrow$ 1 5 10 10 5 1

প্রয়োজনীয় সূত্রাবলি:

i. $(1+y)^n = \binom{n}{0}y^0 + \binom{n}{1}y^1 + \binom{n}{2}y^2 + \ldots\ldots\ldots + \binom{n}{n}y^n$

বা, $(1+y)^n = 1 + ny + \frac{n(n-1)}{1.2}y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}y^3 + \ldots\ldots\ldots y^n$

ii. $\binom{n}{0} = 1; \binom{n}{1} = 1; \binom{n}{n} = 1;$

iii. $\binom{n}{r} = \frac{n(n-1)(n-2)\ldots\ldots\ldots(n-r+1)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \ldots\ldots\ldots \times r}$

iv. $(1+y)^n$ এর বিস্তৃতির $(r+1)$ তম পদ $T_{r+1} = \binom{n}{r}y^r$ এবং এর সহগ $= \binom{n}{r}$

অনুশীলনীর সমাধান

১ প্যাসকেলের ত্রিভুজ বা দ্বিপদী বিস্তৃতি ব্যবহার করে $(1 + y)^5$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর। উক্ত বিস্তৃতির সাহায্যে ক) $(1 - y)^5$ এবং খ) $(1 + 2x)^5$ এর বিস্তৃতি নির্ণয় কর।

সমাধান: প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্রের সাহায্যে $(1 + y)^5$ এর বিস্তৃতি নির্ণয়:

প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্র হলো:

$$\begin{array}{ll}
n = 0 \longrightarrow & 1 \\
n = 1 & 1 \quad 1 \\
n = 2 & 1 \quad 2 \quad 1 \\
n = 3 & 1 \quad 3 \quad 3 \quad 1 \\
n = 4 & 1 \quad 4 \quad 6 \quad 4 \quad 1 \\
n = 5 \longrightarrow & 1 \quad 5 \quad 10 \quad 10 \quad 5 \quad 1
\end{array}$$

$n = 5$ এর জন্য দ্বিপদী সহগগুলো হলো: 1, 5, 10, 10, 5, 1

$\therefore (1 + y)^5 = 1 + 5.y + 10.y^2 + 10.y^3 + 5.y^4 + 1.y^5$

বা, $(1 + y)^5 = 1 + 5y + 10y^2 + 10y^3 + 5y^4 + y^5$

আবার, দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে $(1 + y)^5$ এর বিস্তৃতি নির্ণয়:

আমরা জানি, $(1 + y)^n = \binom{n}{0} y^0 + \binom{n}{1} y^1 + \binom{n}{2} y^2 + \ldots\ldots\ldots + \binom{n}{n} y^n$

$$\therefore (1 + y)^5 = \binom{5}{0} y^0 + \binom{5}{1} y^1 + \binom{5}{2} y^2 + \binom{5}{3} y^3 + \binom{5}{4} y^4 + \binom{5}{5} y^5$$

$$= 1.1 + \frac{5}{1} y + \frac{5.4}{1.2} y^2 + \frac{5.4.3}{1.2.3} y^3 + \frac{5.4.3.2}{1.2.3.4} y^4 + \frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5} y^5$$

$$= 1 + 5y + 10y^2 + 10y^3 + 5y^4 + y^5$$

প্যাসকেলের ত্রিভুজ বা দ্বিপদী বিস্তৃতি উভয়ক্ষেত্রে $(1 + y)^5 = 1 + 5y + 10y^2 + 10y^3 + 5y^4 + y^5$ । **(Ans.)**

ক $(1 + y)^5$ এর বিস্তৃতিতে y এর পরিবর্তে $- y$ বসিয়ে পাই,

$(1 - y)^5 = 1 + 5\,(- y) + 10\,(- y)^2 + 10\,(- y)^3 + 5\,(- y)^4 + 1.\,(- y)^5$

$= 1 - 5y + 10y^2 - 10y^3 + 5y^4 - y^5$ **(Ans.)**

খ $(1 + y)^5$ এর বিস্তৃতিতে y এর পরিবর্তে $2x$ বসিয়ে পাই,

$(1 + 2x)^5 = 1 + 5 \times (2x) + 10 \times (2x)^2 + 10 \times (2x)^3 + 5 \times (2x)^4 + 1 \times (2x)^5$

$= 1 + 10x + 10 \times 4x^2 + 10 \times 8x^3 + 5 \times 16x^4 + 32x^5$

$= 1 + 10x + 40x^2 + 80x^3 + 80x^4 + 32x^5$ **(Ans.)**

বি.দ্র: $(1 - y)^5$ ও $(1 + 2x)^5$ রাশিদ্বয়ের বিস্তৃতি সরাসরি প্যাসকেলের ত্রিভুজ বা দ্বিপদী বিস্তৃতির সূত্রের সাহায্যে নির্ণয় করা যায়।

২ x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে ক) $(1 + 4x)^6$ এবং খ) $(1 - 3x)^7$ এর প্রথম চার পদ পর্যন্ত বিস্তৃত কর।

সমাধান:

ক আমরা জানি, দ্বিপদী $(1 + y)^n$ এর বিস্তৃতি: $(1 + y)^n = \binom{n}{0} y^0 + \binom{n}{1} y^1 + \binom{n}{2} y^2 + \ldots\ldots\ldots + \binom{n}{n} y^n$

$\therefore (1 + 4x)^6 = \binom{6}{0} (4x)^0 + \binom{6}{1} (4x)^1 + \binom{6}{2} (4x)^2 + \binom{6}{3} (4x)^3 \ldots\ldots\ldots$ [৪র্থ পদ পর্যন্ত]

$$= 1.1 + \frac{6}{1} (4x) + \frac{6.5}{1.2} (16x^2) + \frac{6.5.4}{1.2.3} (64x^3) \ldots\ldots\ldots$$

$= 1 + 24x + 240x^2 + 1280x^3 + \ldots\ldots\ldots$ **(Ans.)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

প্যাসকেলের ত্রিভুজ :

$$\begin{array}{ll} n=0\longrightarrow & 1 \\ n=1 & 1\quad 1 \\ n=2 & 1\quad 2\quad 1 \\ n=3 & 1\quad 3\quad 3\quad 1 \\ n=4 & 1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1 \\ n=5 & 1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1 \\ n=6\longrightarrow & 1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1 \end{array}$$

$n = 6$ এর জন্য দ্বিপদী সহগগুলো হলোঃ 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1

$\therefore (1 + 4x)^6 = 1 + 6\times4x + 15(4x)^2 + 20\times(4x)^3 + \ldots\ldots\ldots$ [৪র্থ পদ পর্যন্ত]

$= 1 + 24x + 15\times16x^2 + 20\times64x^2 + \ldots\ldots$

$= 1 + 24x + 240x^2 + 1280x^3 + \ldots\ldots$ **(Ans.)**

জেনে নাও: উর্ধ্বক্রম বলতে নিচ থেকে ক্রমে ক্রমে উর্ধ্বে গমন বুঝায়।

খ দ্বিপদী বিস্তৃতি ব্যবহার করে পাই, $(1 - 3x)^7 = \binom{7}{0}(-3x)^0 + \binom{7}{1}(-3x)^1 + \binom{7}{2}(-3x)^2 + \binom{7}{3}(-3x)^3 \ldots\ldots\ldots$

$= 1.1 + \frac{7}{1}(-3x) + \frac{7.6}{1.2}(9x^2) + \frac{7.6.5}{1.2.3}(-27x^3)\ldots\ldots\ldots$

$= 1 - 21x + 189x^2 - 945x^3 + \ldots\ldots\ldots$

বি.দ্রঃ প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্র ব্যবহার করে এ অঙ্কটি সমাধান করা যায়।

৩ **$(1 + x^2)^8$ এর বিস্তৃতির প্রথম চার পদ নির্ণয় কর। উক্ত ফলাফল ব্যবহার করে $(1.01)^8$ এর মান নির্ণয় কর।**

সমাধান: দ্বিপদী বিস্তৃতির সূত্রানুসারে, $(1 + y)^n = \binom{n}{0}y^0 + \binom{n}{1}y^1 + \binom{n}{2}y^2 + \ldots\ldots\ldots + \binom{n}{n}y^n$

$\therefore (1 + x^2)^8 = \binom{8}{0}(x^2)^0 + \binom{8}{1}(x^2)^1 + \binom{8}{2}(x^2)^2 + \binom{8}{3}(x^2)^3 + \ldots\ldots\ldots$ [চারপদ পর্যন্ত]

$= 1.1 + \frac{8}{1}.x^2 + \frac{8.7}{1.2}x^4 + \frac{8.7.6}{1.2.3}x^6 + \ldots\ldots\ldots$

$= 1 + 8x^2 + 28x^4 + 56x^6 + \ldots\ldots\ldots$

$\therefore$ নির্ণেয় বিস্তৃতি $(1 + x^2)^8 = 1 + 8x^2 + 28x^4 + 56x^6 + \ldots\ldots\ldots$ **(Ans.)**

প্রশ্নানুসারে, $1 + x^2 = 1.01 = 1 + 0.01$

$\therefore x^2 = 0.01 = (0.1)^2$

বা, $x = 0.1$

এখন উক্ত বিস্তৃতিতে $x = 0.1$ বসিয়ে পাই,

$\{1 + (0.1)^2\}^8 = 1 + 8\times(0.1)^2 + 28\times(0.1)^4 + 56\times(0.1)^6 + \ldots\ldots\ldots$

বা, $(1 + 0.01)^8 = 1 + 8\times(0.01) + 28\times0.0001 + 56\times0.000001 + \ldots\ldots\ldots$

$\therefore (1.01)^8 = 1 + 0.08 + 0.0028 + 0.000056 + \ldots\ldots\ldots$

$= 1.082856$ (প্রায়) **(Ans.)**

বি.দ্রঃ $(1 + x^2)^8$ এর বিস্তৃতির প্রথম চার পদ প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্রের সাহায্যেও নির্ণয় করা যায় এবং উক্ত বিস্তৃতিতে $x = -0.1$ ব্যবহার করে $(1.01)^8$ এর মান বের করা যায়।

৪ **x এর ঘাতের উর্ধ্বক্রম অনুসারে নিম্নোক্ত দ্বিপদীসমূহের প্রথম তিন পদ নির্ণয় কর।**
ক) $(1 - 2x)^5$ খ) $(1 + 3x)^9$

সমাধান:

ক দ্বিপদী বিস্তৃতির সূত্রানুসারে, $(1 + y)^n = \binom{n}{0}y^0 + \binom{n}{1}y^1 + \binom{n}{2}y^2 + \ldots\ldots\ldots + \binom{n}{n}y^n$

$\therefore (1 - 2x)^5 = \binom{5}{0}(-2x)^0 + \binom{5}{1}(-2x)^1 + \binom{5}{2}(-2x)^2 + + \binom{5}{3}(-2x)^3 + \ldots\ldots\ldots$ [৪র্থ পদ পর্যন্ত]

$= 1\times1 + \frac{5}{1}(-2x) + \frac{5.4}{1.2}\times4x^2 - \ldots\ldots\ldots$ [৩য় পদ পর্যন্ত]

$= 1 - 10x + 40x^2 - \ldots\ldots\ldots$ **(Ans.)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্র হলোঃ

$$\begin{array}{ll} n=0\longrightarrow & 1 \\ n=1 & 1\quad 1 \\ n=2 & 1\quad 2\quad 1 \\ n=3 & 1\quad 3\quad 3\quad 1 \\ n=4 & 1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1 \\ n=5\longrightarrow & 1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1 \end{array}$$

$n = 5$ এর জন্য দ্বিপদী সহগগুলো হলোঃ 1, 5, 10, 10, 5, 1

$\therefore (1-2x)^5 = 1.(-2x)^0 + 5.(-2x)^1 + 10.(-2x)^2 + \ldots\ldots\ldots$ [৩য় পদ পর্যন্ত]

$= 1 - 10x + 40x^2 - \ldots\ldots\ldots$ **(Ans.)**

খ দ্বিপদী বিস্তৃতি অনুসারে,

$(1+3x)^9 = \binom{9}{0}(3x)^0 + \binom{9}{1}(3x)^1 + \binom{9}{2}(3x)^2 + \ldots\ldots\ldots$ [৩য় পদ পর্যন্ত]

$= 1.1 + \frac{9}{1}\times 3x + \frac{9.8}{1.2}\times 9x^2 + \ldots\ldots\ldots$

$= 1 + 27x + 324x^2 + \ldots\ldots\ldots$

$\therefore$ নির্ণেয় বিস্তৃতিঃ $1 + 27x + 324x^2 + \ldots\ldots\ldots$

৫ নিম্নোক্ত বিস্তৃতিসমূহের প্রথম চার পদ নির্ণয় কর। [দ্বিপদী বিস্তৃতি বা প্যাসক্যাল ত্রিভুজ এর যেকোনো একটি ব্যবহার করে]

ক) $(1-2x^2)^7$ খ) $\left(1+\frac{2}{x}\right)^4$ গ) $\left(1-\frac{1}{2x}\right)^7$

<u>সমাধানঃ</u>

ক দ্বিপদী বিস্তৃতির সূত্রানুসারে, $(1+y)^n = \binom{n}{0}y^0 + \binom{n}{1}y^1 + \binom{n}{2}y^2 + \binom{n}{3}y^3 + \ldots\ldots\ldots + \binom{n}{n}y^n$

$\therefore (1-2x^2)^7 = \binom{7}{0}(-2x^2)^0 + \binom{7}{1}(-2x^2)^1 + \binom{7}{2}(-2x^2)^2 + \binom{7}{3}(-2x^2)^3 \ldots\ldots\ldots$ [৪র্থ পদ পর্যন্ত]

$= 1\times 1 + \frac{7}{1}(-2x^2) + \frac{7.6}{1.2}\times(4x^4) + \frac{7.6.5}{1.2.3}\times(-8x^6) + \ldots\ldots\ldots$

$= 1 - 14x^2 + 84x^4 - 280x^6 + \ldots\ldots\ldots$ **(Ans.)**

খ দ্বিপদী বিস্তৃতি সাহায্যে,

$\left(1+\frac{2}{x}\right)^4 = \binom{4}{0}\left(\frac{2}{x}\right)^0 + \binom{4}{1}\left(\frac{2}{x}\right)^1 + \binom{4}{2}\left(\frac{2}{x}\right)^2 + \binom{4}{3}\left(\frac{2}{x}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots$ [৪র্থ পদ পর্যন্ত]

$= 1.1 + \frac{4}{1}\cdot\frac{2}{x} + \frac{4.3}{1.2}\cdot\frac{4}{x^2} + \frac{4.3.2}{1.2.3}\cdot\frac{8}{x^3}\ldots\ldots\ldots$

$= 1 + \frac{8}{x} + \frac{24}{x^2} + \frac{32}{x^3} + \ldots\ldots\ldots$ **(Ans.)**

গ দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে-

$\left(1-\frac{1}{2x}\right)^7 = \binom{7}{0}\left(-\frac{1}{2x}\right)^0 + \binom{7}{1}\left(\frac{-1}{2x}\right)^1 + \binom{7}{2}\left(-\frac{1}{2x}\right)^2 + \binom{7}{3}\left(\frac{-1}{2x}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots$ [৪র্থ পদ পর্যন্ত]

$= 1.1 + \frac{7}{1}\left(-\frac{1}{2x}\right) + \frac{7.6}{1.2}\left(\frac{1}{4x^2}\right) + \frac{7.6.5}{1.2.3}\left(-\frac{1}{8x^3}\right) + \ldots\ldots\ldots$

$= 1 - \frac{7}{2}\cdot\frac{1}{x} + \frac{21}{4}\cdot\frac{1}{x^2} - \frac{35}{8}\cdot\frac{1}{x^3} + \ldots\ldots\ldots$ **(Ans.)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্রটি হলোঃ

$n = 0 \longrightarrow$ 1
$n = 1$ 1 1
$n = 2$ 1 2 1
$n = 3$ 1 3 3 1
$n = 4 \longrightarrow$ 1 4 6 4 1
$n = 5$ 1 5 10 10 5 1
$n = 6$ 1 6 15 20 15 6 1
$n = 7 \longrightarrow$ 1 7 21 35 35 21 7 1

প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যেঃ

ক $n = 7$ এর জন্য দ্বিপদী সহগগুলো হলোঃ 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1

$\therefore (1 - 2x^2)^7 = 1 + 7 \times (-2x^2) + 21(-2x^2)^2 + 35(-2x^2)^3 + \ldots\ldots..$ [৪র্থ পদ পর্যন্ত]

$= 1 + 7(-2x^2) + 21(4x^4) + 35(-8x^6) + \ldots\ldots..$

$= 1 - 14x^2 + 84x^4 - 280x^6 + \ldots\ldots\ldots$ **(Ans.)**

খ $n = 4$ এর জন্য দ্বিপদী সহগগুলো হলোঃ 1, 4, 6, 4, 1

$\therefore \left(1 + \frac{2}{x}\right)^4 = 1 + 4\left(\frac{2}{x}\right) + 6\left(\frac{2}{x}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{x}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots$ [৪র্থ পদ পর্যন্ত]

$= 1 + \frac{8}{x} + \frac{24}{x^2} + \frac{32}{x^3} + \ldots\ldots\ldots$ **(Ans.)**

গ $n = 7$ এর জন্য দ্বিপদী সহগগুলো হলোঃ 1, 7, 21, 35, 35, 21, 7, 1

$\therefore \left(1 - \frac{1}{2x}\right)^7 = 1 + 7\left(\frac{-1}{2x}\right) + 21\left(\frac{-1}{2x}\right)^2 + 35\left(\frac{-1}{2x}\right)^3 + \ldots\ldots\ldots$ [৪র্থ পদ পর্যন্ত]

$= 1 + 7\left(\frac{-1}{2x}\right) + 21\left(\frac{-1}{4x^2}\right) + 35\left(\frac{-1}{8x^3}\right) + \ldots\ldots\ldots$

$= 1 - \frac{7}{2x} + \frac{21}{4x^2} - \frac{35}{8x^3} + \ldots\ldots\ldots$ **(Ans.)**

৬ **x^3 পর্যন্ত ক) $(1 - x)^6$ এবং খ) $(1 + 2x)^6$ বিস্তৃত কর।**

সমাধানঃ

ক দ্বিপদী বিস্তৃতির সূত্রানুসারে, $(1 + y)^n = \binom{n}{0} y^0 + \binom{n}{1} y^1 + \binom{n}{2} y^2 + \binom{n}{3} y^3 + \ldots\ldots\ldots + \binom{n}{n} y^n$

$\therefore (1 - x)^6 = \binom{6}{0}(-x)^0 + \binom{6}{1}(-x)^1 + \binom{6}{2}(-x)^2 + \binom{6}{3}(-x)^3 + \ldots\ldots\ldots$

$= 1.1 + \frac{6}{1}(-x) + \frac{6.5}{1.2}(x^2) + \frac{6.5.4}{1.2.3}(-x^3) + \ldots\ldots\ldots$

$= 1 - 6x + 15x^2 - 20x^3 + \ldots\ldots\ldots$ **(Ans.)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

প্যাসকেলের ত্রিভুজ :

$n = 0 \longrightarrow$ 1
$n = 1$ 1 1
$n = 2$ 1 2 1
$n = 3$ 1 3 3 1
$n = 4$ 1 4 6 4 1
$n = 5$ 1 5 10 10 5 1
$n = 6 \longrightarrow$ 1 6 15 20 15 6 1

$n = 6$ এর জন্য দ্বিপদী সহগগুলো হলোঃ 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1

$\therefore (1 - x)^6 = 1.(-x)^0 + 6.(-x)^1 + 15.(-x)^2 + 20.(-x)^3 + \ldots\ldots\ldots$

$= 1 - 6x + 15x^2 - 20x^3 + \ldots\ldots\ldots$ **(Ans.)**

খ দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে-

$(1 + 2x)^6 = \binom{6}{0}(2x)^0 + \binom{6}{1}(2x)^1 + \binom{6}{2}(2x)^2 + \binom{6}{3}(2x)^3 + \ldots\ldots\ldots$

$= 1.1 + \frac{6}{1}.2x + \frac{6.5}{1.2}.4x^2 + \frac{6.5.4}{1.2.3}8x^3 + \ldots\ldots\ldots$

$= 1 + 12x + 60x^2 + 160x^3 + \ldots\ldots\ldots$ **(Ans.)**

বি.দ্রঃ এ অঙ্কটি প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্র ব্যবহার করে সমাধান করা যায়।

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২২৫

নিম্নোক্ত বিস্তৃতিসমূহ নির্ণয় কর (উপরের বিস্তৃতিসমূহের সাহায্য নাও):
$(1+y)^8 =$
$(1+y)^9 =$
$(1+y)^{10} =$

সমাধান: আমরা জানি, প্যাসকেলের ত্রিভুজ:

$n = 0 \longrightarrow$	1
$n = 1$	1 1
$n = 2$	1 2 1
$n = 3$	1 3 3 1
$n = 4$	1 4 6 4 1
$n = 5$	1 5 10 10 5 1
$n = 6$	1 6 15 20 15 6 1
$n = 7$	1 7 21 35 35 21 7 1
$n = 8 \longrightarrow$	1 8 28 56 70 56 28 8 1
$n = 9 \longrightarrow$	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
$n = 10 \longrightarrow$	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে,

i $n = 8$ এর জন্য দ্বিপদী সহগগুলো হলো: 1, 8, 28, 56, 70, 56, 28, 8, 1
$\therefore (1+y)^8 = 1 + 8y + 28y^2 + 56y^3 + 70y^4 + 56y^5 + 28y^6 + 8y^7 + y^8$

ii $n = 9$ এর জন্য দ্বিপদী সহগগুলো হলো: 1, 9, 36, 84, 126, 126, 84, 36, 9, 1
$\therefore (1+y)^9 = 1 + 9y + 36y^2 + 84y^3 + 126y^4 + 126y^5 + 84y^6 + 36y^7 + 9y^8 + y^9$

iii প্যাসকেলের ত্রিভুজ সূত্রে $n = 10$ এর জন্য দ্বিপদী সহগগুলো ব্যবহার করে পাই,
$(1+y)^{10} = 1 + 10y + 45y^2 + 120y^3 + 210y^4 + 252y^5 + 210y^6 + 120y^7 + 45y^8 + 10y^9 + y^{10}$

এখন, দ্বিপদী বিস্তৃতি ব্যবহার করে অঙ্কগুলো সমাধান করা হলো:

দ্বিপদী বিস্তৃতির সূত্রানুসারে, $(1+y)^n = \binom{n}{0}y^0 + \binom{n}{1}y^1 + \binom{n}{2}y^2 + \dots\dots\dots + \binom{n}{n}y^n$

i
$$(1+y)^8 = \binom{8}{0}y^0 + \binom{8}{1}y^1 + \binom{8}{2}y^2 + \binom{8}{3}y^3 + \binom{8}{4}y^4 + \binom{8}{5}y^5 + \binom{8}{6}y^6 + \binom{8}{7}y^7 + \binom{8}{8}y^8$$
$$= 1 + \frac{8}{1}y + \frac{8.7}{1.2}y^2 + \frac{8.7.6}{1.2.3}y^3 + \frac{8.7.6.5}{1.2.3.4}y^4 + \frac{8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5}y^5 + \frac{8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6}y^6 + \frac{8.7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6.7}y^7 + \frac{8.7.6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6.7.8}y^8$$
$$= 1 + 8y + 28y^2 + 56y^3 + 70y^4 + 56y^5 + 28y^6 + 8y^7 + y^8 \quad \textbf{(Ans.)}$$

ii
$$(1+y)^9 = \binom{9}{0}y^0 + \binom{9}{1}y^1 + \binom{9}{2}y^2 + \binom{9}{3}y^3 + \binom{9}{4}y^4 + \binom{9}{5}y^5 + \binom{9}{6}y^6 + \binom{9}{7}y^7 + \binom{9}{8}y^8 + \binom{9}{9}y^9$$
$$= 1 + \frac{9}{1}y + \frac{9.8}{1.2}y^2 + \frac{9.8.7}{1.2.3}y^3 + \frac{9.8.7.6}{1.2.3.4}y^4 + \frac{9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5}y^5 + \frac{9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.6}y^6 + \frac{9.8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6.7}y^7 + \frac{9.8.7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6.7.8}y^8 + \frac{9.8.7.6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}y^9$$
$$= 1 + 9y + 36y^2 + 84y^3 + 126y^4 + 126y^5 + 84y^6 + 36y^7 + 9y^8 + y^9 \quad \textbf{(Ans.)}$$

iii
$$(1+y)^{10} = \binom{10}{0}y^0 + \binom{10}{1}y^1 + \binom{10}{2}y^2 + \binom{10}{3}y^3 + \binom{10}{4}y^4 + \binom{10}{5}y^5 + \binom{10}{6}y^6 + \binom{10}{7}y^7 + \binom{10}{8}y^8 + \binom{10}{9}y^9 + \binom{10}{10}y^{10}$$
$$= 1 + \frac{10}{1}y + \frac{10.9}{1.2}y^2 + \frac{10.9.8}{1.2.3}y^3 + \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4}y^4 + \frac{10.9.8.7.6}{1.2.3.4.5}y^5 + \frac{10.9.8.7.6.5}{1.2.3.4.5.6}y^6 + \frac{10.9.8.7.6.5.4}{1.2.3.4.5.6.7}y^7$$
$$+ \frac{10.9.8.7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5.6.7.8}y^8 + \frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6.7.8.9}y^9 + \frac{10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.}y^{10}$$
$$= 1 + 10y + 45y^2 + 120y^3 + 210y^4 + 252y^5 + 210y^6 + 120y^7 + 45y^8 + 10y^9 + y^{10} \quad \textbf{(Ans.)}$$

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২২৮

$(1+2x^2)^7$ এবং $(1-2x^2)^7$ কে বিস্তৃত কর।

<u>সমাধান</u>: **$(1+2x^2)^7$ এর বিস্তৃতি:**

প্যাসকেলের ত্রিভুজ:

$$\begin{array}{ll}
n=0\longrightarrow & 1\\
n=1 & 1\quad 1\\
n=2 & 1\quad 2\quad 1\\
n=3 & 1\quad 3\quad 3\quad 1\\
n=4\longrightarrow & 1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\
n=5 & 1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1\\
n=6 & 1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1\\
n=7\longrightarrow & 1\quad 7\quad 21\quad 35\quad 35\quad 21\quad 7\quad 1
\end{array}$$

প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে-

$$\therefore (1+2x^2)^7 = 1(2x^2)^0 + 7(2x^2)^1 + 21.(2x^2)^2 + 35.(2x^2)^3 + 35.(2x^2)^4 + 21.(2x^2)^5 + 7.(2x^2)^6 + 1.(2x^2)^7$$
$$= 1 + 14x^2 + 21\times 4x^4 + 35\times 8x^6 + 35\times 16x^8 + 21\times 32x^{10} + 7\times 64x^{12} + 128x^{14}$$
$$= 1 + 14x^2 + 84x^4 + 280x^6 + 560x^8 + 672x^{10} + 448x^{12} + 128x^{14}$$

দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে,

$$(1+2x^2)^7 = \binom{7}{0}(2x^2)^0 + \binom{7}{1}(2x^2)^1 + \binom{7}{2}(2x^2)^2 + \binom{7}{3}(2x^2)^3 + \binom{7}{4}(2x^2)^4 + \binom{7}{5}(2x^2)^5 + \binom{7}{6}(2x^2)^6 + \binom{7}{7}(2x^2)^7$$
$$= 1.1 + \frac{7}{1}2x^2 + \frac{7.6}{1.2}\times 4x^4 + \frac{7.6.5}{1.2.3}\times 8x^6 + \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}\times 16x^8 + \frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5}\times 32x^{10} + \frac{7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6}\times 64x^{12} + 1\times 128x^{14}$$
$$= 1 + 14x^2 + 84x^4 + 280x^6 + 560x^8 + 672x^{10} + 448x^{12} + 128x^{14} \quad \textbf{(Ans.)}$$

$(1-2x^2)^7$ এর বিস্তৃতি: প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে-

$$\therefore (1-2x^2)^7 = 1 + 7\times(-2x^2)^1 + 21\times(-2x^2)^2 + 35\times(-2x^2)^3 + 35\times(-2x^2)^4 + 21\times(-2x^2)^5 + 7\times(-2x^2)^6 + 1\times(-2x^2)^7$$
$$= 1 - 14x^2 + 21\times 4x^4 - 35\times 8x^6 + 35\times 16x^8 - 21\times 32x^{10} + 7\times 64x^{12} - 128x^{14}$$
$$= 1 - 14x^2 + 84x^4 - 280x^6 + 560x^8 - 672x^{10} + 448x^{12} - 128x^{14}$$

দ্বিপদী বিস্তৃতির সাহায্যে পাই,

$$(1-2x^2)^7 = \binom{7}{0}(-2x^2)^0 + \binom{7}{1}(-2x^2)^1 + \binom{7}{2}(-2x^2)^2 + \binom{7}{3}(-2x^2)^3 + \binom{7}{4}(-2x^2)^4 + \binom{7}{5}(-2x^2)^5 + \binom{7}{6}(-2x^2)^6 + \binom{7}{7}(-2x^2)^7$$
$$= 1.1 - \frac{7}{1}\times 2x^2 + \frac{7.6}{1.2}\times 4x^4 - \frac{7.6.5}{1.2.3}\times 8x^6 + \frac{7.6.5.4}{1.2.3.4}\times 16x^8 - \frac{7.6.5.4.3}{1.2.3.4.5}\times 32x^{10} + \frac{7.6.5.4.3.2}{1.2.3.4.5.6}\times 64x^{12} + \frac{7.6.5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5.6.7}\times 128x^{14}$$
$$= 1 - 14x^2 + 84x^4 - 280x^6 + 560x^8 - 672x^{10} + 448x^{12} - 128x^{14} \quad \textbf{(Ans.)}$$

কাজ: প্যাসকেলের ত্রিভুজের সাহায্যে (উদাহরণ ৪) এর সত্যতা যাচাই কর। [পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-২২৯]

উদহারণ ৪: $\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^8$ এর বিস্তৃতির x^3 ও x^6 এর সহগ নির্ণয় কর।

<u>সমাধান</u>: প্যাসকেলের ত্রিভুজ:

$$\begin{array}{ll}
n=0\longrightarrow & 1\\
n=1 & 1\quad 1\\
n=2 & 1\quad 2\quad 1\\
n=3 & 1\quad 3\quad 3\quad 1\\
n=4 & 1\quad 4\quad 6\quad 4\quad 1\\
n=5 & 1\quad 5\quad 10\quad 10\quad 5\quad 1\\
n=6 & 1\quad 6\quad 15\quad 20\quad 15\quad 6\quad 1\\
n=7 & 1\quad 7\quad 21\quad 35\quad 35\quad 21\quad 7\quad 1\\
n=8\longrightarrow & 1\quad 8\quad 28\quad 56\quad 70\quad 56\quad 28\quad 8\quad 1
\end{array}$$

প্যাসকেলের ত্রিভুজের $n=8$ এর জন্য দ্বিপদী সহগগুলো ব্যবহার করে পাই,

$$\left(1-\frac{x^2}{4}\right)^8 = 1 + 8\times\left(\frac{-x^2}{4}\right) + 28\times\left(\frac{-x^2}{4}\right)^2 + 56\times\left(\frac{-x^2}{4}\right)^3 + 70\times\left(\frac{-x^2}{4}\right)^4 + 56\times\left(\frac{-x^2}{4}\right)^5 + 28\left(\frac{-x^2}{4}\right)^6 + 8\left(\frac{-x^2}{4}\right)^7 + 1\left(\frac{-x^2}{4}\right)^8$$
$$= 1 - 2x^2 + 28\times\frac{x^4}{16} - 56\times\frac{x^6}{64} + 70\times\frac{x^8}{256} - 56\times\frac{x^{10}}{1024} + 28\times\frac{x^{12}}{4096} - 8\times\frac{x^{14}}{16384} + \frac{x^{16}}{65536}$$
$$= 1 - 2x^2 + \frac{7}{4}x^4 - \frac{7}{8}x^6 + \frac{35}{128}x^8 - \frac{7}{128}x^{10} + \frac{7}{1024}x^{12} - \frac{1}{2048}x^{14} + \frac{1}{65536}x^{16}$$

এখানে, x^3 সহগযুক্ত কোনো পদ নেই। অর্থাৎ x^3 এর সহগ 0 এবং x^6 এর সহগ $-\frac{7}{8}$

$\therefore$ x^3 এর সহগ 0 এবং x^6 এর সহগ $-\frac{7}{8}$; যা উদাহরণ ৪-এ প্রাপ্ত সমাধানের অনুরূপ। **(সত্যতা যাচাই হলো)**