অনুশীলনী - ৮.৩

যেকোনো কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান নির্ণয়ঃ

আমরা সাধারণ $0°, \frac{\pi}{6}(30°), \frac{\pi}{4}(45°)$ ও $\frac{\pi}{3}(60°)$ ইত্যাদি সূক্ষ্মকোণসমূহের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মান খুব সহজেই বের করতে পারি। কিন্তু অন্যান্য ত্রিকোণমিতিক কোণের মান নিম্নোক্ত নিয়মে বের করতে হবে।

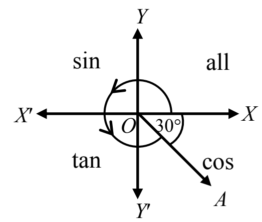
ধাপ-১: প্রথমে কোণটিকে $\left(n \times \frac{\pi}{2} \pm \theta\right)$ বা, $(n \times 90° \pm \theta)$ আকারে প্রকাশ করতে হবে অর্থাৎ $\frac{\pi}{2}$ এর গুণিতক ও সূক্ষ্মকোণ এ দুভাগে ভাগ করতে হবে।

ধাপ-২: কোণটির অবস্থান কোন চতুর্ভাগে তা নির্ণয় করে অনুপাতের চিহ্ন বসাতে হবে। [কোণের চতুর্ভাগ নির্ণয় জানতে ৮.১ অনুশীলনীর ব্যবচ্ছেদ দ্রষ্টব্য]

ধাপ-৩: (i) $\frac{\pi}{2}$ বা, $90°$ এর সহগ n এর মান জোড় হলে অনুপাতের ধরন পরিবর্তন হবেনা।

(ii) n এর মান বিজোড় হলে অনুপাতগুলো নিম্নোক্তভাবে পরিবর্তিত হবেঃ $\sin \rightleftharpoons \cos, \tan \rightleftharpoons \cot, \sec \rightleftharpoons \text{cosec}$।

এসো $\sin 330°$ এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাত নির্ণয় করি:



ধাপ-১: $\sin 330° = \sin(4 \times 90° - 30°)$ লিখা যায়।

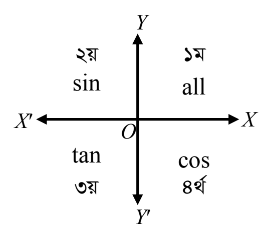
ধাপ-২: লক্ষ কর $330°$ কোণটি চার সমকোণ বা $360°$ অপেক্ষা $30°$ ডিগ্রি কম। অর্থাৎ কোণটি চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত। আমরা জানি, চতুর্থ চতুর্ভাগে $\cos\theta$ $(\sec\theta)$ ব্যতিত সকল ত্রিকোণমিতি অনুপাত ঋণাত্মক। তাই $\sin 330°$ হলে ত্রিকোণমিতিক মান ঋণাত্মক হবে।

ধাপ-৩: ধাপ-১ হতে আমরা দেখতে পাই $\frac{\pi}{2}$ বা $90°$ এর সহগ 4, যা একটি জোড় সংখ্যা, ফলে $\sin\theta$ এর ত্রিকোণমিতিক মান একই থাকবে অর্থাৎ পরিবর্তিত হয়ে $\cos\theta$ হবে না। উল্লেখ্য, $\frac{\pi}{2}$ বা $90°$ এর সহগ বিজোড় সংখ্যা হলে $\sin\theta$ পরিবর্তিত হয়ে $\cos\theta$ হতো।

যেহেতু চতুর্থ চতুর্ভাগে $\sin\theta$ এর মান ঋণাত্মক তাই, $\sin 330° = \sin(4 \times 90° - 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$

অতএব, মান অপরিবর্তিত রেখে $\sin 330°$ কোণটি পরিবর্তিত হয়ে $(-\sin 30°)$ তে পরিণত হল।

ত্রিকোণমিতিক অনুপাত সমূহের একই মানের জন্য বিভিন্ন কোণ নির্ণয়ঃ



ধাপ-১: ত্রিকোণমিতিক অনুপাতটি প্রদত্ত মানের চিহ্নের ধরনের উপর ভিত্তি করে অনুপাতটি চতুর্ভাগ চিহ্নিত করা। যেমন- $\cos\theta = -\frac{1}{2}$, এখানে $\cos\theta$ এর ঋণাত্মক হওয়ায় ইহা অবশ্যই ২য় বা ৩য় চতুর্ভাগে অবস্থান করবে।

ধাপ-২: ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের মানটিকে $\left(n \times \frac{\pi}{2} \pm \theta\right)$ বা, $(n \times 90° \pm \theta)$ তে রূপান্তর করে। যেখানে n এর মান সর্বদা জোড় সংখ্যা হবে। অর্থাৎ (n = 2, 4, ... জোড় সংখ্যা)

যেমন- $\cos\theta = -\frac{1}{2} = -\cos 60° = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{2} \pm \frac{\pi}{3}\right) = \cos(2 \times 90 \pm 60°)$ এখানে $n = 2$ যা একটি জোড় সংখ্যা।

ফলে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের পরিবর্তন হচ্ছে না এবং অতিরিক্ত কোণটি এমন চতুর্ভাগে ফেলানো হয়েছে যেখানে $\cos\theta$ ঋণাত্মক

ধাপ-৩: ধাপ-২ এ n এর মান পরিবর্তন করে একাধিক ধনাত্মক ও ঋণাত্মক কোণ উৎপন্ন করা যায়।

যেমন- $\cos\theta = -\frac{1}{2} = -\cos 60°$

$= \cos(2 \times 90° - 60°) = \cos 120° = \cos\frac{2\pi}{3}$, $\quad \therefore \theta = 120°$ বা, $\frac{2\pi}{3}$

$= \cos(2 \times 90° + 60°) = \cos 240° = \cos\frac{4\pi}{3}$, $\quad \therefore \theta = 240°$ বা, $\frac{4\pi}{3}$

$= \cos(6 \times 90° - 60°) = \cos 480° = \cos\frac{8\pi}{3}$, $\quad \therefore \theta = 480°$ বা, $\frac{8\pi}{3}$

$= \cos(6 \times 90° + 60°) = \cos 600° = \cos\frac{10\pi}{3}$, $\quad \therefore \theta = 600°$ বা, $\frac{10\pi}{3}$

অতএব, $\theta = (120°, 240°, 480°, 600°, ...)$ এর জন্য $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

অনুরূপভাবে, বিভিন্ন ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের একই মানের জন্য বিভিন্ন ত্রিকোণমিতিক কোণ নির্ণয় করা সম্ভব।

অনুশীলনীর সমাধান

১ $\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}}$ হলে $\sin 2A$ এর মান কত?

(ক) $\frac{1}{\sqrt{2}}$ (খ) $\frac{1}{2}$ (গ) 1 (ঘ) $\sqrt{2}$

উত্তর: (গ)

ব্যাখ্যা: $\sin A = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 45°$

বা, $\sin A = \sin 45°$

$\therefore A = 45°$

$2A = 90°$

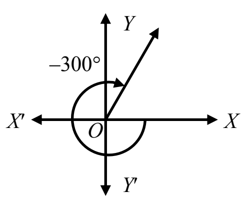
$\therefore \sin 2A = \sin(2 \times 45°) = \sin 90° = 1$

২ $-300°$ কোণটি কোন চতুর্থভাগে থাকবে?

(ক) প্রথম (খ) দ্বিতীয় (গ) তৃতীয় (ঘ) চতুর্থ

উত্তর: (ক)

ব্যাখ্যা: $-300° = -(3 \times 90° + 30°)$ কোণটি ঋণাত্মক। তাই ঘড়ির কাঁটার দিকে ঘুরবে এবং এ ঘূর্ণনের পরিমাণ 3 সমকোণ অপেক্ষা 30° বেশি হবে। তাই কোনো রশ্মি ঘড়ির কাঁটার দিকে 3 সমকোণ অপেক্ষা 30° আরও বেশি ঘুরে প্রথম চতুর্ভাগে অবস্থান করবে।



৩ $\sin\theta + \cos\theta = 1$ হলে θ এর মান হবে

i. 0°
ii. 30°
iii. 90°

নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i (খ) ii (গ) i ও ii (ঘ) i ও iii

উত্তর: (ঘ)

ব্যাখ্যা: এখানে, $\sin\theta + \cos\theta = 1$

বা, $(\sin\theta + \cos\theta)^2 = 1^2$

বা, $\sin^2\theta + \cos^2\theta + 2\sin\theta\cos\theta = 1$

বা, $1 + 2\sin\theta\cos\theta = 1$

বা, $2\sin\theta\cos\theta = 1 - 1$

বা, $2\sin\theta\cos\theta = 0$

বা, $\sin\theta\cos\theta = 0$

তাহলে, $\sin\theta = 0$ অথবা, $\cos\theta = 0$

বা, $\sin\theta = \sin 0°$ বা, $\cos\theta = \cos 90°$

$\therefore \theta = 0°$ বা, $\theta = 90°$

Technique: অপশনগুলোর মধ্যে θ এর যেসব মানের জন্য সমীকরণটি সিদ্ধ হয় তাই সঠিক উত্তর।

এখন,

$\theta = 0$ এজন্য $\sin 0° + \cos 0° = 0 + 1 = 1$

$\theta = 30°$ এর জন্য $\sin 30° + \cos 30° = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$

$\theta = 90°$ হলে $\sin 90° + \cos 90° = 1 + 0 = 1$

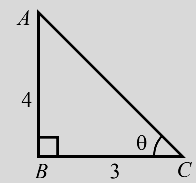
$\theta = 0°$ ও $\theta = 90°$ এর জন্য $\sin\theta + \cos\theta = 1$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

৪ পাশের চিত্র অনুসারে

i. $\tan\theta = \frac{4}{3}$

ii. $\sin\theta = \frac{5}{3}$

iii. $\cos^2\theta = \frac{9}{25}$



নিচের কোনটি সঠিক?

(ক) i ও ii (খ) i ও iii
(গ) ii ও iii (ঘ) i, ii ও iii

উত্তর: (খ)

ব্যাখ্যা: θ কোণের সাপেক্ষে ABC ত্রিভুজের লম্ব AB এবং ভূমি BC দেওয়া আছে, $AB = 4$, $BC = 3$

এখন, $AC = \sqrt{BC^2 + AB^2} = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$

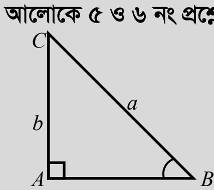
i. নং সঠিক কারণ, $\tan\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{AB}{BC} = \frac{4}{3} \therefore \tan\theta = \frac{4}{3}$

ii. নং সঠিক নয় কারণ, $\sin\theta = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AB}{AC} = \frac{4}{5} \therefore \sin\theta = \frac{4}{5}$

iii. নং সঠিক কারণ, $\cos\theta = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{5} \therefore \cos^2\theta = \frac{9}{25}$

$\therefore$ i ও iii সঠিক।

■ নিচের চিত্রের আলোকে ৫ ও ৬ নং প্রশ্নের উত্তর দাও:



৫ $\sin B + \cos C =$ কত?

(ক) $\frac{2b}{a}$ (খ) $\frac{2a}{b}$ (গ) $\frac{a^2+b^2}{ab}$ (ঘ) $\frac{ab}{a^2+b^2}$

উত্তর: (ক)

ব্যাখ্যা: প্রদত্ত চিত্রে, B কোণের সাপেক্ষে ΔABC এর লম্ব AC, ভূমি AB

আবার, C কোণের সাপেক্ষে ΔABC এর লম্ব AB ও ভূমি AC

এখানে, $AC = b$, $BC = a$

$\therefore \sin B = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$

$\therefore \cos C = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$

$\therefore \sin B + \cos C = \frac{b}{a} + \frac{b}{a} = \frac{2b}{a}$

৬ $\tan B$ এর মান কোনটি?

(ক) $\frac{a}{a^2 - b^2}$ (খ) $\frac{b}{a^2 - b^2}$

(গ) $\frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}}$ (ঘ) $\frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

উত্তর: (ঘ)

ব্যাখ্যা: B কোণের সাপেক্ষে ΔABC এর লম্ব $AC = b$ ও ভূমি $AB = \sqrt{a^2 - b^2}$

$\therefore \tan B = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}} = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}}$

৭ মান নির্ণয় কর:

ক) $\sin 7\pi$ খ) $\cos\frac{11\pi}{2}$ গ) $\cot 11\pi$ ঘ) $\tan\left(-\frac{23\pi}{6}\right)$

ঙ) $\operatorname{cosec}\frac{19\pi}{3}$ চ) $\sec\left(-\frac{25\pi}{2}\right)$ ছ) $\sin\frac{31\pi}{6}$ জ) $\cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right)$

সমাধান:

ক $\sin 7\pi$

$= \sin\left(14.\frac{\pi}{2}+0\right)$

$= -\sin 0$ [কোণটির অবস্থান তৃতীয় চর্তুভাগে বিবেচনা করা হয়েছে]

$= 0$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= 0$

বিকল্প সমধান:

$\sin 7\pi$

$= \sin\left(14.\frac{\pi}{2}-0\right)$

$= \sin 0$ [কোণটির অবস্থান দ্বিতীয় চর্তুভাগে বিবেচনা করা হয়েছে]

$= 0$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= 0$

দৃষ্টি আর্কষণ: কোণটি x অক্ষ অথবা y অক্ষের উপর অবিস্থত হলে উক্ত অক্ষের নিকটবর্তী যেকোনো চতুভার্গের জন্য কোণটিকে বিবেচনা করতে হবে। প্রদত্ত প্রশ্নে $14.\frac{\pi}{2}$ কোণটি একবার দ্বিতীয় আরেকবার তৃতীয় চতুর্ভাগে অবস্থান ধরে একই সমাধান পাওয়া যায়। এটি যেকোনো ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের জন্য প্রযোজ্য।

খ $\cos\frac{11\pi}{2}$

$= \cos\left(11.\frac{\pi}{2}+0\right)$

$= \sin 0°$ [কোণটির অবস্থান চতুর্থ চর্তুভাগে বিবেচনা করা হয়েছে]

$= 0$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= 0$

বি.দ্র: কোণটির অবস্থান তৃতীয় চর্তুভাগে বিবেচনা করলেও একই সমাধান পাওয়া যাবে।

গ $\cot 11\pi$

$= \cot\left(22.\frac{\pi}{2}+0°\right)$

$= \cot 0°$

= অসংজ্ঞায়িত।

ঘ $\tan\left(-\frac{23\pi}{6}\right)$

$= -\tan\frac{23\pi}{6}$; [$\because \tan(-\theta) = -\tan\theta$]

$= -\tan\left(4\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

$= -\tan\left(8\times\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$

$= -\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right)$; [$n = 8, \left(8\times\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{6}\right)$ এর অবস্থান ৪র্থ চতুর্ভাগে]

$= \tan\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= \frac{1}{\sqrt{3}}$

ঙ $\operatorname{cosec}\frac{19\pi}{3}$

$= \operatorname{cosec}\left(6\pi+\frac{\pi}{3}\right)$

$= \operatorname{cosec}\left(12\times\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)$

$= \operatorname{cosec}\frac{\pi}{3}$; [$\because$ কোনটির এর অবস্থান ১ম চতুর্ভাগে]

$= \frac{2}{\sqrt{3}}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= \frac{2}{\sqrt{3}}$

চ $\sec\left(-\frac{25\pi}{2}\right)$

$= \sec\left(\frac{25\pi}{2}\right)$ [$\because \sec(-\theta) = \sec\theta$]

$= \sec\left(25.\frac{\pi}{2}+0\right)$

$= \operatorname{cosec} 0°$ = অসংজ্ঞায়িত

$\therefore$ নির্ণেয় মান অসংজ্ঞায়িত।

ছ $\sin\frac{31\pi}{6}$

$= \sin\left(5\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

$= \sin\left(10\times\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$

$= -\sin\frac{\pi}{6}$ [$\because$ কোণটির অবস্থান তৃতীয় চতুর্ভাগে]

$= -\frac{1}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= -\frac{1}{2}$

জ $\cos\left(-\frac{25\pi}{6}\right)$

$= \cos\frac{25\pi}{6}$ [$\because \cos(-\theta) = \cos\theta$]

$= \cos\left(4\pi+\frac{\pi}{6}\right)$

$= \cos\left(8\times\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{6}$ [$\because$ কোণটির অবস্থান ১ম চতুর্ভাগে]

$= \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= \frac{\sqrt{3}}{2}$

৮ প্রমাণ কর যে,

ক) $\cos\frac{17\pi}{10}+\cos\frac{13\pi}{10}+\cos\frac{9\pi}{10}+\cos\frac{\pi}{10}=0$

খ) $\tan\frac{\pi}{12}\tan\frac{5\pi}{12}\tan\frac{7\pi}{12}\tan\frac{11\pi}{12}=1$

গ) $\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{5\pi}{14}+\sin^2\frac{8\pi}{7}+\sin^2\frac{9\pi}{14}=2$

ঘ) $\sin\frac{7\pi}{3}\cos\frac{13\pi}{6}-\cos\frac{5\pi}{3}\sin\frac{11\pi}{6}=1$

ঙ) $\sin\frac{13\pi}{3}\cos\frac{13\pi}{6}-\sin\frac{11\pi}{6}\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)=1$

চ) $\tan\theta=\frac{3}{4}$ এবং $\sin\theta$ ঋণাত্মক হলে দেখাও যে, $\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sec\theta+\tan\theta}=\frac{14}{5}$

সমাধানঃ

ক $\cos\frac{17\pi}{10}+\cos\frac{13\pi}{10}+\cos\frac{9\pi}{10}+\cos\frac{\pi}{10}=0$

বামপক্ষ $=\cos\frac{17\pi}{10}+\cos\frac{13\pi}{10}+\cos\frac{9\pi}{10}+\cos\frac{\pi}{10}$

$=\cos\left(2\pi-\frac{3\pi}{10}\right)+\cos\left(\pi+\frac{3\pi}{10}\right)+\cos\left(\pi-\frac{\pi}{10}\right)+\cos\frac{\pi}{10}$

$=\cos\frac{3\pi}{10}-\cos\frac{3\pi}{10}-\cos\frac{\pi}{10}+\cos\frac{\pi}{10}$

$=0=$ ডানপক্ষ

$\therefore \cos\frac{17\pi}{10}+\cos\frac{13\pi}{10}+\cos\frac{9\pi}{10}+\cos\frac{\pi}{10}=0$ (প্রমাণিত)

খ $\tan\frac{\pi}{12}\tan\frac{5\pi}{12}\tan\frac{7\pi}{12}\tan\frac{11\pi}{12}=1$

বামপক্ষ $=\tan\frac{\pi}{12}\tan\frac{5\pi}{12}\tan\frac{7\pi}{12}\tan\frac{11\pi}{12}$

$=\tan\frac{\pi}{12}\tan\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{12}\right)\tan\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\tan\left(\pi-\frac{\pi}{12}\right)$

$=\tan\frac{\pi}{12}\cot\frac{\pi}{12}.\left(-\cot\frac{\pi}{12}\right).\left(-\tan\frac{\pi}{12}\right)$

$=1\ .1=1=$ ডানপক্ষ

বি.দ্রঃ ক্ষুদ্রতম সূক্ষ্মকোণ $\frac{\pi}{12}$ কে ভিত্তি হিসেবে ধরে অঙ্কটি সমাধানের চেষ্টা করা হয়েছে। এভাবে ছোট সূক্ষ্মকোণকে হিসেব করে অঙ্ক সমাধানের চেষ্টা করালে সহজে সমাধান পাওয়া যায়।

(খ) এর দ্বিতীয় পদ্ধতি

বামপক্ষ $=\tan\frac{\pi}{12}\tan\frac{5\pi}{12}\tan\frac{7\pi}{12}\tan\frac{11\pi}{12}$

$=\tan15^\circ\tan75^\circ\tan105^\circ\tan165^\circ$

$=\tan15^\circ\tan(90^\circ-15^\circ)\tan(90^\circ+15^\circ)\tan(180^\circ-15^\circ)$

$=\tan15^\circ\cot15^\circ(-\cot15^\circ)(-\tan15^\circ)$

$=\tan^2 15^\circ\cot^2 15^\circ$

$=\tan^2 15^\circ\times\frac{1}{\tan^2 15^\circ}=1=$ ডানপক্ষ

$\therefore \tan\frac{\pi}{12}\tan\frac{5\pi}{12}\tan\frac{7\pi}{12}\tan\frac{11\pi}{12}=1$ (প্রমাণিত)

গ $\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{5\pi}{14}+\sin^2\frac{8\pi}{7}+\sin^2\frac{9\pi}{14}=2$

বামপক্ষ $=\sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{5\pi}{14}+\sin^2\frac{8\pi}{7}+\sin^2\frac{9\pi}{14}$

$=\sin^2\frac{\pi}{7}+\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{7}\right)\right\}^2+\left\{\sin\left(\pi+\frac{\pi}{7}\right)\right\}^2+\left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{7}\right)\right\}^2$

$=\sin^2\frac{\pi}{7}+\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^2+\left(-\sin\frac{\pi}{7}\right)^2+\left(\cos\frac{\pi}{7}\right)^2$

$=\sin^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{\pi}{7}$

$=2\left(\sin^2\frac{\pi}{7}+\cos^2\frac{\pi}{7}\right)=2=$ ডানপক্ষ

$\therefore \sin^2\frac{\pi}{7}+\sin^2\frac{5\pi}{14}+\sin^2\frac{8\pi}{7}+\sin^2\frac{9\pi}{14}=2$ (প্রমাণিত)

বি.দ্রঃ এ অঙ্কে সূক্ষ্মকোণ $\frac{\pi}{7}$ কে ভিত্তি ধরে সমাধান করা হয়েছে।

ঘ $\sin\frac{7\pi}{3}\cos\frac{13\pi}{6}-\cos\frac{5\pi}{3}\sin\frac{11\pi}{6}=1$

বামপক্ষ $=\sin\frac{7\pi}{3}\cos\frac{13\pi}{6}-\cos\frac{5\pi}{3}\sin\frac{11\pi}{6}$

$=\sin\left(2\pi+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)-\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)$

$=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{3}.\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}+\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=\frac{4}{4}=1=$ ডানপক্ষ

$\therefore \sin\frac{7\pi}{3}\cos\frac{13\pi}{6}-\cos\frac{5\pi}{3}\sin\frac{11\pi}{6}=1$ (প্রমাণিত)

ঙ $\sin\frac{13\pi}{3}\cos\frac{13\pi}{6}-\sin\frac{11\pi}{6}\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)=1$

বামপক্ষ $=\sin\frac{13\pi}{3}\cos\frac{13\pi}{6}-\sin\frac{11\pi}{6}\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)$

$=\sin\left(4\pi+\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{6}\right)-\sin\left(2\pi-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2\pi-\frac{\pi}{3}\right)$

$[\because \cos(-\theta)=\cos\theta]$

$=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}-\left(-\sin\frac{\pi}{6}\right)\cos\frac{\pi}{3}$

$=\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}.\frac{1}{2}$

$=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3+1}{4}=\frac{4}{4}=1=$ ডানপক্ষ

$\therefore \sin\frac{13\pi}{3}\cos\frac{13}{6}\pi-\sin\frac{11\pi}{6}\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)=1$ (প্রমাণিত)

চ $\tan\theta = \frac{3}{4}$ এবং $\sin\theta$ ঋণাত্মক হলে দেখাও যে, $\frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \frac{14}{5}$

দেওয়া আছে, $\tan\theta = \frac{3}{4}$ এবং $\sin\theta$ ঋণাত্মক।

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{4}$

বা, $3\cos\theta = 4\sin\theta$

বা, $9\cos^2\theta = 16\sin^2\theta$ [উভয়পক্ষকে বর্গ করে]

বা, $9(1 - \sin^2\theta) = 16\sin^2\theta$

বা, $9 - 9\sin^2\theta - 16\sin^2\theta = 0$

বা, $-25\sin^2\theta = -9$

বা, $\sin^2\theta = \frac{9}{25}$

বা, $\sin\theta = \pm\frac{3}{5}$

$\therefore \sin\theta = -\frac{3}{5}$ [$\because \sin\theta$ ঋণাত্মক]

আবার, $\tan\theta = \frac{3}{4}$

বা, $\frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{3}{4}$

বা, $3\cos\theta = 4\sin\theta$

বা, $\cos\theta = \frac{4}{3} \times \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{4}{5}$

এবং $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} = \frac{1}{-\frac{4}{5}} = -\frac{5}{4}$

$\therefore$ বামপক্ষ $= \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta}$

$= \frac{-\frac{3}{5} - \frac{4}{5}}{-\frac{5}{4} + \frac{3}{4}}$

$= \frac{\frac{-3-4}{5}}{\frac{-5+3}{4}} = \frac{\frac{-7}{5}}{\frac{-2}{4}} = \frac{-7}{5} \times \frac{4}{-2} = \frac{14}{5} =$ ডানপক্ষ

$\therefore \frac{\sin\theta + \cos\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \frac{14}{5}$ **(প্রমাণিত)**

৯ **মান নির্ণয় কর:**

ক) $\cos\frac{9\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{31\pi}{36} - \sin\frac{5\pi}{36}$

খ) $\cot\frac{\pi}{20}\cot\frac{3\pi}{20}\cot\frac{5\pi}{20}\cot\frac{7\pi}{20}\cot\frac{9\pi}{20}$

গ) $\sin^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{3\pi}{4} + \sin^2\frac{5\pi}{4} + \sin^2\frac{7\pi}{4}$

ঘ) $\cos^2\frac{\pi}{8} + \cos^2\frac{3\pi}{8} + \cos^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{7\pi}{8}$

ঙ) $\sin^2\frac{17\pi}{18} + \sin^2\frac{5\pi}{8} + \cos^2\frac{37\pi}{18} + \cos^2\frac{3\pi}{8}$

সমাধান:

ক $\cos\frac{9\pi}{4} + \cos\frac{5\pi}{4} + \sin\frac{31\pi}{36} - \sin\frac{5\pi}{36}$

$= \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\pi - \frac{5\pi}{36}\right) - \sin\frac{5\pi}{36}$

$= \cos\frac{\pi}{4} - \cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{5\pi}{36} - \sin\frac{5\pi}{36}$

$= 0$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= 0$

খ $\cot\frac{\pi}{20}\cot\frac{3\pi}{20}\cot\frac{5\pi}{20}\cot\frac{7\pi}{20}\cot\frac{9\pi}{20}$

$= \cot\frac{\pi}{20}\cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{20}\right)\cot\frac{\pi}{4}\cot\left(\frac{7\pi}{20}\right)\cot\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{20}\right)$

$= \cot\left(\frac{\pi}{20}\right)\tan\left(\frac{7\pi}{20}\right).1.\cot\left(\frac{7\pi}{20}\right)\tan\left(\frac{\pi}{20}\right)$

$= \cot\frac{\pi}{20}.\frac{1}{\cot\left(\frac{7\pi}{20}\right)}.\cot\frac{7\pi}{20}.\frac{1}{\cot\left(\frac{\pi}{20}\right)} = 1$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= 1$

গ $\sin^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{3\pi}{4} + \sin^2\frac{5\pi}{4} + \sin^2\frac{7\pi}{4}$

$= \sin^2\frac{\pi}{4} + \left\{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right\}^2 + \left\{\sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)\right\}^2 + \left\{\sin\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right\}^2$

$= \sin^2\frac{\pi}{4} + \left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)^2 + \left(-\sin\frac{\pi}{4}\right)^2$

$= \sin^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{\pi}{4}$

$= 4\sin^2\frac{\pi}{4}$

$= 4\left(\sin\frac{\pi}{4}\right)^2$

$= 4\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ $\left[\because \sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$

$= 4 \times \frac{1}{2}$

$= 2$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= 2$

(গ) এর দ্বিতীয় পদ্ধতি

$\sin^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{3\pi}{4} + \sin^2\frac{5\pi}{4} + \sin^2\frac{7\pi}{4}$

$= \sin^2\frac{\pi}{4} + \left\{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right\}^2 + \sin^2\frac{5\pi}{4} + \left\{\sin\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5\pi}{4}\right)\right\}^2$

$= \sin^2\frac{\pi}{4} + \cos^2\frac{\pi}{4} + \sin^2\frac{5\pi}{4} + \cos^2\frac{5\pi}{4}$

$= 1 + 1$

$= 2$

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= 2$

ঘ $\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$

$=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\left\{\cos\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)\right\}^2+\left\{\cos\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)\right\}^2$

$=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\left(-\cos\frac{3\pi}{8}\right)^2+\left(-\cos\frac{\pi}{8}\right)^2$

$=\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}$

$=2\cos^2\frac{\pi}{8}+2\cos^2\frac{3\pi}{8}$

$=2\cos^2\frac{\pi}{8}+2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right\}^2$

$=2\cos^2\frac{\pi}{8}+2\left(\sin\frac{\pi}{8}\right)^2$

$=2\cos^2\frac{\pi}{8}+2\sin^2\frac{\pi}{8}$

$=2\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}\right)$

$=2\times 1 \quad \left[\because \cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}=1\right]$

$=2$ **(Ans.)**

(ঘ) এর দ্বিতীয় পদ্ধতি

$\cos^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{7\pi}{8}$

$=\cos^2\frac{\pi}{8}+\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}\right)\right\}^2+\left\{\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\right\}^2+\left\{\cos\left(\pi-\frac{\pi}{8}\right)\right\}^2$

$=\left(\cos^2\frac{\pi}{8}+\sin^2\frac{\pi}{8}\right)+\left(\sin^2\frac{\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{8}\right)$

$=1+1$

$=2$ **(Ans.)**

ঙ $\sin^2\frac{17\pi}{18}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\cos^2\frac{37\pi}{18}+\cos^2\frac{3\pi}{8}$

$=\left\{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{18}\right)\right\}^2+\left\{\sin\left(\pi-\frac{3\pi}{8}\right)\right\}^2+\left\{\cos\left(2\pi+\frac{\pi}{18}\right)\right\}^2+\cos^2\frac{3\pi}{8}$

$=\sin^2\frac{\pi}{18}+\sin^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{\pi}{18}+\cos^2\frac{3\pi}{8}$

$=\left(\sin^2\frac{\pi}{18}+\cos^2\frac{\pi}{18}\right)+\left(\sin^2\frac{3\pi}{8}+\cos^2\frac{3\pi}{8}\right)$

$=1+1 \quad [\because \sin^2\theta+\cos^2\theta=1]$

$=2$ **(Ans.)**

১০ $\theta=\frac{\pi}{3}$ **হলে নিম্নোক্ত অভেদসমূহ প্রমাণ কর:**

ক) $\mathbf{\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}}$

খ) $\mathbf{\sin 3\theta = 3\sin\theta-4\sin^3\theta}$

গ) $\mathbf{\cos 3\theta = 4\cos^3\theta-3\cos\theta}$

ঘ) $\mathbf{\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}}$

সমাধান:

ক $\mathbf{\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}}$

বামপক্ষ $=\sin 2\theta$

$=\sin(2\times 60^\circ) \quad [\because \theta=\frac{\pi}{3}=60^\circ]$

$=\sin 120^\circ$

$=\sin(90^\circ+30^\circ)$

$=\cos 30^\circ$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$; $[\because \cos 30^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}]$

মধ্যপক্ষ $=2\sin\theta\cos\theta$

$=2\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{3}$

$=2\sin 60^\circ\cos 60^\circ \quad [\because \theta=\frac{\pi}{3}=60^\circ]$

$=2.\frac{\sqrt{3}}{2}.\frac{1}{2} \quad [\because \sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}, \cos 60^\circ=\frac{1}{2}]$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}$

ডানপক্ষ $=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$

$=\frac{2\tan\frac{\pi}{3}}{1+\left(\tan\frac{\pi}{3}\right)^2}$

$=\frac{2\tan 60^\circ}{1+(\tan 60^\circ)^2}$; $[\because \theta=\frac{\pi}{3}=60^\circ]$

$=\frac{2\times\sqrt{3}}{1+(\sqrt{3})^2}$; $[\because \tan 60^\circ=\sqrt{3}]$

$=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore \sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\frac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$ **(প্রমাণিত)**

খ $\mathbf{\sin 3\theta = 3\sin\theta-4\sin^3\theta}$

বামপক্ষ $=\sin 3\theta$

$=\sin 3\times\frac{\pi}{3}$

$=\sin(3\times 60^\circ)$; $[\because \theta=\frac{\pi}{3}=60^\circ]$

$=\sin 180^\circ$

$=0$

ডানপক্ষ $= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

$= 3\sin\frac{\pi}{3} - 4\left(\sin\frac{\pi}{3}\right)^3$

$= 3\sin 60° - 4(\sin 60°)^3$; $[\because \theta = \frac{\pi}{3} = 60°]$

$= 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3$; $[\because \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}]$

$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{4.3\sqrt{3}}{8}$

$= \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3\sqrt{3}}{2} = 0$

$\therefore \sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ **(প্রমাণিত)**

গ $\mathbf{\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta}$

বামপক্ষ $= \cos 3\theta$

$= \cos 3 \times \frac{\pi}{3}$

$= \cos(3 \times 60°)$; $[\because \theta = \frac{\pi}{3} = 60°]$

$= \cos 180° = -1$

ডানপক্ষ $= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

$= 4\left(\cos\frac{\pi}{3}\right)^3 - 3\cos\frac{\pi}{3}$

$= 4(\cos 60°)^3 - 3(\cos 60°)$

$= 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{1}{2}\right)$; $[\because \cos 60° = \frac{1}{2}]$

$= \frac{4}{8} - \frac{3}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$

$\therefore \cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ **(প্রমাণিত)**

ঘ $\mathbf{\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}}$

বামপক্ষ $= \tan 2\theta$

$= \tan 2 \times \frac{\pi}{3}$

$= \tan(2 \times 60°)$; $[\because \theta = \frac{\pi}{3} = 60°]$

$= \tan 120°$

$= \tan(90° + 30°)$

$= -\cot 30°$

$= -\sqrt{3}$; $[\because \cot 30° = \sqrt{3}]$

ডানপক্ষ $= \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$

$= \frac{2\tan\frac{\pi}{3}}{1 - \left(\tan\frac{\pi}{3}\right)^2}$

$= \frac{2\tan 60°}{1 - (\tan 60°)^2}$; $[\because \theta = \frac{\pi}{3} = 60°]$

$= \frac{2 \times \sqrt{3}}{1 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{1 - 3} = -\sqrt{3}$

$\therefore \tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1 - \tan^2\theta}$ **(প্রমাণিত)**

১১ **প্রদত্ত শর্ত পূরণ করে α (আলফা) এর মান নির্ণয় কর:**

ক) $\mathbf{\cot\alpha = -\sqrt{3}, \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi}$

খ) $\mathbf{\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}}$

গ) $\mathbf{\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}}$

ঘ) $\mathbf{\cot\alpha = -1, \pi < \alpha < 2\pi}$

সমাধান:

ক $\mathbf{\cot\alpha = -\sqrt{3}, \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi}$

$\cot\alpha = -\sqrt{3}$

বা, $\cot\alpha = -\cot\frac{\pi}{6}$

বা, $\cot\alpha = \cot\left(2\pi - \frac{\pi}{6}\right)$; [$\because$ ৪র্থ চতুর্ভাগে $\cot\alpha$ ঋণাত্মক]

বা, $\alpha = 2\pi - \frac{\pi}{6}$

$\therefore \alpha = \frac{11\pi}{6}$

সুতরাং নির্ণেয় মান $\frac{11\pi}{6}$

খ $\mathbf{\cos\alpha = -\frac{1}{2}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}}$

α এর ব্যবধি $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

সুতরাং α ২য় বা ৩য় চতুর্ভাগে থাকতে পারে এবং উভয় চতুর্ভাগে $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$ হতে পারে।

এখন, α কোণটি ২য় চতুর্ভাগে থাকলে:

$\cos\alpha = -\frac{1}{2}$

বা, $\cos\alpha = -\cos\frac{\pi}{3}$

বা, $\cos\alpha = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$; [$\because$ দ্বিতীয় চতুর্ভাগে $\cos\alpha$ ঋণাত্মক]

বা, $\alpha = \pi - \frac{\pi}{3}$

$\therefore \alpha = \frac{2\pi}{3}$

আবার, α কোণটি ৩য় চতুর্ভাগে থাকলে:

$\cos\alpha = -\frac{1}{2}$

বা, $\cos\alpha = \cos\frac{\pi}{3}$

বা, $\cos\alpha = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$

বা, $\cos\alpha = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)$

$\therefore \alpha = \frac{4\pi}{3}$

সুতরাং নির্ণেয় মান $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

গ $\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$

α এর ব্যবধি $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$, সুতরাং α ২য় বা ৩য় চতুর্ভাগে থাকতে পারে। কিন্তু ২য় চতুর্ভাগে $\sin\alpha$ ধনাত্মক সুতরাং α কোণটি ৩য় চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$\sin\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $\sin\alpha = -\sin\frac{\pi}{3}$

বা, $\sin\alpha = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$ [$\because$ তৃতীয় চতুর্ভাগে sin ঋণাত্মক]

বা, $\alpha = \pi + \frac{\pi}{3}$

$\therefore \alpha = \frac{4\pi}{3}$

সুতরাং নির্ণেয় মান $\frac{4\pi}{3}$

ঘ $\cot\alpha = -1, \pi < \alpha < 2\pi$

α এর ব্যবধি $\pi < \alpha < 2\pi$ সুতরাং α ৩য় বা ৪র্থ চতুর্ভাগে থাকতে পারে। কিন্তু ৩য় চতুর্ভাগে $\cot\alpha$ ধনাত্মক; সুতরাং α কোণটি চতুর্থ চতুর্ভাগে অবস্থিত।

$\cot\alpha = -1$

বা, $\cot\alpha = -\cot\frac{\pi}{4}$

বা, $\cot\alpha = \cot\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$ [$\because$ চতুর্থ চতুর্ভাগে cot ঋণাত্মক]

বা, $\alpha = 2\pi - \frac{\pi}{4}$

$\therefore \alpha = \frac{7\pi}{4}$

সুতরাং নির্ণেয় মান $\frac{7\pi}{4}$

১২ সমাধান করঃ (যখন $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$)

ক) $2\cos^2\theta = 1 + 2\sin^2\theta$ খ) $2\sin^2\theta - 3\cos\theta = 0$ গ) $6\sin^2\theta - 11\sin\theta + 4 = 0$

ঘ) $\tan\theta + \cot\theta = \frac{4}{\sqrt{3}}$ ঙ) $2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 3$

সমাধানঃ

ক

$2\cos^2\theta = 1 + 2\sin^2\theta$

বা, $2\cos^2\theta - 2\sin^2\theta = 1$

বা, $2(1 - \sin^2\theta) - 2\sin^2\theta = 1$ [$\because \cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$]

বা, $2 - 2\sin^2\theta - 2\sin^2\theta = 1$

বা, $2 - 4\sin^2\theta = 1$

বা, $-4\sin^2\theta = -1$

বা, $\sin^2\theta = \frac{1}{4}$

বা, $\sin\theta = \pm\frac{1}{2}$

যেহেতু $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, সুতরাং $\sin\theta = -\frac{1}{2}$ গ্রহণযোগ্য নয় কারণ $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ব্যবধিতে $\sin\theta$ সর্বদাই ধনাত্মক।

$\therefore \sin\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\sin\theta = \sin\frac{\pi}{6}$ [$\because \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$]

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$

সুতরাং নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{\pi}{6}$

দ্বিতীয় পদ্ধতি

$2\cos^2\theta = 1 + 2\sin^2\theta$

বা, $2\cos^2\theta - 2\sin^2\theta = 1$

বা, $2(\cos^2\theta - \sin^2\theta) = 1$

বা, $2\{\cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta)\} = 1$

বা, $2(\cos^2\theta - 1 + \cos^2\theta) = 1$

বা, $2\cos^2\theta - 2 + 2\cos^2\theta = 1$

বা, $4\cos^2\theta = 1 + 2$

বা, $4\cos^2\theta = 3$

বা, $\cos^2\theta = \frac{3}{4}$

বা, $\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ [θ সূক্ষ্মকোণ হওয়ায় $\cos\theta$ এর মান ধনাত্মক]

বা, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$

সুতরাং নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{\pi}{6}$

খ

$2\sin^2\theta - 3\cos\theta = 0$

বা, $2(1 - \cos^2\theta) - 3\cos\theta = 0$ [$\because \sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$]

বা, $2 - 2\cos^2\theta - 3\cos\theta = 0$

বা, $-(2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2) = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 2 = 0$

বা, $2\cos^2\theta + 4\cos\theta - \cos\theta - 2 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta + 2) - 1(\cos\theta + 2) = 0$

বা, $(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 2) = 0$

এখানে $\cos\theta + 2 \neq 0$ কারণ, $\cos\theta + 2 = 0$ হলে $\cos\theta = -2$ হয় যা গ্রহণযোগ্য নয়, কারণ $\cos\theta$ এর মান -1 থেকে $+1$ এর মধ্যে সীমাবদ্ধ।

$\therefore 2\cos\theta - 1 = 0$ যখন $0° < \theta < 90°$

বা, $2\cos\theta = 1$

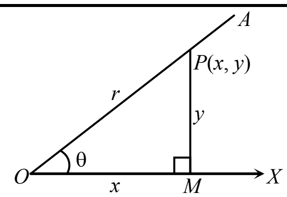
বা, $\cos\theta = \frac{1}{2}$

বা, $\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3}$ [যেহেতু $\cos\frac{\pi}{3} = \cos 60° = \frac{1}{2}$]

$\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$

সুতরাং নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \frac{\pi}{3}$

◆◆ অনুশীলনীর ১২(খ)নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆



ক. $x = y$ হলে প্রমাণ কর যে, $r = \sqrt{2}x$

খ. উদ্দীপকের আলোকে প্রমাণ কর যে, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$

গ. $\dfrac{2y^2}{x^2 + y^2} - \dfrac{3x}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$ হলে, θ এর মান নির্ণয় কর। (যখন $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$)

নিজে নিজে চেষ্ট কর।
(গ) 60°

গ $6\sin^2\theta - 11\sin\theta + 4 = 0$

বা, $6\sin^2\theta - 8\sin\theta - 3\sin\theta + 4 = 0$

বা, $2\sin\theta\,(3\sin\theta - 4) - 1(3\sin\theta - 4) = 0$

বা, $(2\sin\theta - 1)\,(3\sin\theta - 4) = 0$

এখানে, $3\sin\theta - 4 \neq 0$ কেননা $3\sin\theta - 4 = 0$ হলে $\sin\theta = \dfrac{4}{3}$

হয়, যা গ্রহণযোগ্য নয়, কারণ sinθ এর ব্যবধি $-1 \leq \sin\theta \leq 1$

অতএব $2\sin\theta - 1 = 0$

বা, $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$

বা, $\sin\theta = \sin\dfrac{\pi}{6}$ $\quad [\because \sin\dfrac{\pi}{6} = \sin 30° = \dfrac{1}{2}]$

$\therefore \theta = \dfrac{\pi}{6}$

সুতরাং নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \dfrac{\pi}{6}$

ঘ $\tan\theta + \cot\theta = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta + \dfrac{1}{\tan\theta} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $\dfrac{\tan^2\theta + 1}{\tan\theta} = \dfrac{4}{\sqrt{3}}$

বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta + \sqrt{3} = 4\tan\theta$

বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta - 4\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\sqrt{3}\tan^2\theta - 3\tan\theta - \tan\theta + \sqrt{3} = 0$

বা, $\sqrt{3}\tan\theta(\tan\theta - \sqrt{3}) - 1(\tan\theta - \sqrt{3}) = 0$

বা, $(\tan\theta - \sqrt{3})(\sqrt{3}\tan\theta - 1)$

হয়, $\tan\theta - \sqrt{3} = 0$

বা, $\tan\theta = \sqrt{3}$

বা, $\tan\theta = \tan\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = \dfrac{\pi}{3}$

অথবা, $\sqrt{3}\tan\theta - 1 = 0$

বা, $\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

বা, $\tan\theta = \tan\dfrac{\pi}{6}$

$\therefore \theta = \dfrac{\pi}{6}$

সুতরাং নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$ বা, $\dfrac{\pi}{6}$

> বি.দ্র: অঙ্কের দ্বিতীয় লাইনে সকল অনুপাতকে cotθ আকারে লিখলেও অঙ্কটি সমাধান করা যায়।

ঙ $2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 3$

বা, $2(1 - \cos^2\theta) + 3\cos\theta - 3 = 0$

$\qquad [\because \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ বা, $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta]$

বা, $2 - 2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 3 = 0$

বা, $-2\cos^2\theta + 3\cos\theta - 1 = 0$

বা, $-(2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1) = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 3\cos\theta + 1 = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 2\cos\theta - \cos\theta + 1 = 0$

বা, $2\cos\theta\,(\cos\theta - 1) - 1(\cos\theta - 1) = 0$

বা, $(2\cos\theta - 1)\,(\cos\theta - 1) = 0$

হয়, $2\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

বা, $\cos\theta = \cos\dfrac{\pi}{3}$

$\therefore \theta = \dfrac{\pi}{3}$

অথবা, $\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta = 1$

বা, $\cos\theta = \cos 0°$

$\therefore \theta = 0°$

কিন্তু $\theta = 0$ গ্রহণযোগ্য নয় কারণ $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$

সুতরাং নির্ণেয় সমাধান, $\theta = \dfrac{\pi}{3}$

১৩ সমাধান কর: (যখন $0 < \theta < 2\pi$)

ক) $2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 0$ খ) $4(\cos^2\theta + \sin\theta) = 5$ গ) $\cot^2\theta + \mathrm{cosec}^2\theta = 3$

ঘ) $\tan^2\theta + \cot^2\theta = 2$ ঙ) $\sec^2\theta + \tan^2\theta = \dfrac{5}{3}$ চ) $5\mathrm{cosec}^2\theta - 7\cot\theta\,\mathrm{cosec}\theta - 2 = 0$

ছ) $2\sin x\cos x = \sin x (0 \leq x \leq 2\pi)$

সমাধান:

ক $2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 0$

দেওয়া আছে,

$2\sin^2\theta + 3\cos\theta = 0$

বা, $2(1 - \cos^2\theta) + 3\cos\theta = 0$ $\quad [\because \sin^2\theta = 1\ \cos^2\theta]$

বা, $2 - 2\cos^2\theta + 3\cos\theta = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 3\cos\theta - 2 = 0$ [উভয়পক্ষকে (– 1) দ্বারা গুণ করে]

বা, $2\cos^2\theta - 4\cos\theta + \cos\theta - 2 = 0$

বা, $2\cos\theta\,(\cos\theta - 2) + 1\,(\cos\theta - 2) = 0$

বা, $(2\cos\theta + 1)\,(\cos\theta - 2) = 0$

হয়, $2\cos\theta + 1 = 0$

বা, $\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$

অথবা, $\cos\theta - 2 = 0$

$\therefore \cos\theta = 2$

কিন্তু ইহা গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ cosθ এর মান 1 এর চেয়ে বড় হতে পারে না।

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$ এর জন্য θ এর মান নির্ণয়:

যেহেতু $\cos\theta$ এর মান ঋণাত্মক এবং $0 < \theta < 2\pi$, তাই θ এর অবস্থান হবে ২য় অথবা ৩য় চতুর্ভাগে

θ এর অবস্থান ২য় চতুর্ভাগে হলে,

$$\therefore \cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } \cos\theta = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{বা, } \cos\theta = \cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\therefore \theta = \frac{2\pi}{3}$$

θ এর অবস্থান ৩য় চতুর্ভাগে হলে,

$$\therefore \cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\text{বা, } \cos\theta = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right)$$

$$\text{বা, } \cos\theta = \cos\frac{4\pi}{3}$$

$$\therefore \theta = \frac{4\pi}{3}$$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর সম্ভাব্য মানসমূহ $\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

খ **$4(\cos^2\theta + \sin\theta) = 5$**

দেওয়া আছে, $4(\cos^2\theta + \sin\theta) = 5$

বা, $4(1 - \sin^2\theta + \sin\theta) = 5$

বা, $4 - 4\sin^2\theta + 4\sin\theta = 5$

বা, $4\sin^2\theta - 4\sin\theta + 1 = 0$

বা, $(2\sin\theta - 1)^2 = 0$

বা, $2\sin\theta - 1 = 0$

$$\therefore \sin\theta = \frac{1}{2}$$

$0 < \theta < 2\pi$ ব্যবধিতে $\sin\theta$ এর মান ধনাত্মক হতে পারে শুধুমাত্র ১ম ও ২য় চতুর্ভাগে।

১ম চতুর্ভাগের ক্ষেত্রে, $\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\frac{\pi}{6}$

$$\text{বা, } \sin\theta = \sin\frac{\pi}{6}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{6}$$

২য় চতুর্ভাগের ক্ষেত্রে

$$\sin\theta = \frac{1}{2} = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{বা, } \sin\theta = \sin\frac{5\pi}{6}$$

$$\therefore \theta = \frac{5\pi}{6}$$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর সম্ভাব্য মানসমূহ $\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

গ **$\cot^2\theta + \mathrm{cosec}^2\theta = 3$**

দেওয়া আছে, $\cot^2\theta + \mathrm{cosec}^2\theta = 3$

বা, $\cot^2\theta + 1 + \cot^2\theta = 3$

বা, $2\cot^2\theta = 2$

বা, $\cot^2\theta = 1$

বা, $\cot\theta = \pm 1$

এখন, $\cot\theta = 1$ নিয়ে পাই,

$0 < \theta < 2\pi$ সীমারেখায় $\cot\theta$ এর মান ধনাত্মক হবে যখন θ ১ম বা ৩য় চতুর্ভাগে অবস্থান করবে।

θ, ১ম চতুর্ভাগে অবস্থান করলে,

$$\cot\theta = 1 = \cot\frac{\pi}{4}$$

$$\text{বা, } \cot\theta = \cot\frac{\pi}{4}$$

$$\therefore \theta = \frac{\pi}{4}$$

θ, ৩য় চতুর্ভাগে অবস্থান করলে,

$$\cot\theta = 1 = \cot\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{বা, } \cot\theta = \cot\frac{5\pi}{4}$$

$$\therefore \theta = \frac{5\pi}{4}$$

আবার, $\cot\theta = -1$ থেকে পাই,

$0 < \theta < 2\pi$ সীমারেখায় $\cot\theta$ এর মান ঋণাত্মক হবে যখন θ ২য় বা ৪র্থ চতুর্ভাগে অবস্থান করবে।

θ, ২য় চতুর্ভাগে অবস্থান করলে,

$$\cot\theta = -1 = \cot\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{বা, } \cot\theta = \cot\frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore \theta = \frac{3\pi}{4}$$

θ, ৪র্থ চতুর্ভাগে অবস্থান করলে,

$$\cot\theta = -1 = \cot\left(4 \times \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{বা, } \cot\theta = \cot\frac{7\pi}{4}$$

$$\therefore \theta = \frac{7\pi}{4}$$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর সম্ভাব্য মানসমূহ: $\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$

◆◆ অনুশীলনীর ১৩(গ)নং প্রশ্নের আলোকে সৃজনশীল প্রশ্নোত্তর ◆◆

$P = \tan\theta + \sec\theta$ এবং $Q = \cot^2\theta + \mathrm{cosec}^2\theta$. ক. $\sec\theta - \tan\theta$ এর মান নির্ণয় কর। খ. দেখাও যে, $\cos\theta = \frac{2P}{P^2 - 1}$ গ. $Q = 3$ হলে, প্রদত্ত সমীকরণটি সমাধান কর, যখন $0 < \theta < 2\pi$।	নিজে নিজে চেষ্টা কর।

ঘ $\mathbf{tan^2\theta + cot^2\theta = 2}$

দেওয়া আছে, $\tan^2\theta + \cot^2\theta = 2$

বা, $\tan^2\theta + \dfrac{1}{\tan^2\theta} = 2$

বা, $\tan^4\theta + 1 = 2\tan^2\theta$ [উভয় পক্ষকে $\tan^2\theta$ দ্বারা গুণ করে]

বা, $\tan^4\theta - 2\tan^2\theta + 1 = 0$

বা, $(\tan^2\theta - 1)^2 = 0$

বা, $\tan^2\theta - 1 = 0$

বা, $\tan^2\theta = 1$

বা, $\tan\theta = \pm 1$

এখন, $\tan\theta = 1$ নিয়ে পাই,

$0 < \theta < 2\pi$ সীমারেখায় $\tan\theta$ এর মান ধনাত্মক হবে যখন θ ১ম বা ৩য় চতুর্ভাগে অবস্থান করবে।

θ, ১ম চতুর্ভাগে অবস্থান করলে, $\tan\theta = 1 = \tan\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore\ \theta = \dfrac{\pi}{4}$

θ, ৩য় চতুর্ভাগে অবস্থান করলে,

$\tan\theta = 1 = \tan\left(\pi + \dfrac{\pi}{4}\right)$

বা, $\tan\theta = \tan\dfrac{5\pi}{4}$

$\therefore\ \theta = \dfrac{5\pi}{4}$

আবার, $\tan\theta = -1$ নিয়ে পাই,

$0 < \theta < 2\pi$ সীমারেখায় $\tan\theta$ এর মান ঋণাত্মক হবে যখন θ ২য় বা ৪র্থ চতুর্ভাগে অবস্থান করবে।

θ, ২য় চতুর্ভাগে অবস্থান করলে,

$\tan\theta = -1 = \tan\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right)$

বা, $\tan\theta = \tan\dfrac{3\pi}{4}$

$\therefore\ \theta = \dfrac{3\pi}{4}$

θ, ৪র্থ চতুর্ভাগে অবস্থান করলে,

$\tan\theta = -1 = \tan\left(2\pi - \dfrac{\pi}{4}\right)$

বা, $\tan\theta = \tan\dfrac{7\pi}{4}$

$\therefore\ \theta = \dfrac{7\pi}{4}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর সম্ভাব্য মানসমূহ: $\dfrac{\pi}{4}, \dfrac{3\pi}{4}, \dfrac{5\pi}{4}, \dfrac{7\pi}{4}$

ঙ $\mathbf{sec^2\theta + tan^2\theta = \dfrac{5}{3}}$

দেওয়া আছে, $\sec^2\theta + \tan^2\theta = \dfrac{5}{3}$

বা, $3(1 + \tan^2\theta + \tan^2\theta) = 5$

বা, $3 + 6\tan^2\theta - 5 = 0$

বা, $6\tan^2\theta = 2$

বা, $\tan^2\theta = \dfrac{1}{3}$

বা, $\tan\theta = \pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ নিয়ে পাই,

$0 < \theta < 2\pi$ সীমারেখায় $\tan\theta$ এর মান ধনাত্মক হবে যখন θ ১ম বা ৩য় চতুর্ভাগে অবস্থান করবে।

θ, ১ম চতুর্ভাগে অবস্থান করলে,

$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan\dfrac{\pi}{6}$

$\therefore\ \theta = \dfrac{\pi}{6}$

θ, ৩য় চতুর্ভাগে অবস্থান করলে,

$\tan\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right)$

বা, $\tan\theta = \tan\dfrac{7\pi}{6}$

$\therefore\ \theta = \dfrac{7\pi}{6}$

আবার, $\tan\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ নিয়ে পাই,

$0 < \theta < 2\pi$ সীমারেখায় $\tan\theta$ এর মান ঋণাত্মক হবে যখন θ ২য় বা ৪র্থ চতুর্ভাগে অবস্থান করবে।

θ, ২য় চতুর্ভাগে অবস্থান করলে,

$\tan\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right)$

বা, $\tan\theta = \tan\dfrac{5\pi}{6}$

$\therefore\ \theta = \dfrac{5\pi}{6}$

θ, ৪র্থ চতুর্ভাগে অবস্থান করলে,

$\tan\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \tan\left(2\pi - \dfrac{\pi}{6}\right)$

বা, $\tan\theta = \tan\dfrac{11\pi}{6}$

$\therefore\ \theta = \dfrac{11\pi}{6}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর সম্ভাব্য সকল মানসমূহ: $\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{5\pi}{6}, \dfrac{7\pi}{6}, \dfrac{11\pi}{6}$

চ $\mathbf{5cosec^2\theta - 7cot\theta\ cosec\theta - 2 = 0}$

দেওয়া আছে, $5\text{cosec}^2\theta - 7\cot\theta\ \text{cosec}\theta - 2 = 0$

বা, $\dfrac{5}{\sin^2\theta} - \dfrac{7\cos\theta}{\sin^2\theta} - 2 = 0$

বা, $5 - 7\cos\theta - 2\sin^2\theta = 0$

বা, $5 - 7\cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta) = 0$

বা, $5 - 7\cos\theta - 2 + 2\cos^2\theta = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 7\cos\theta + 3 = 0$

বা, $2\cos^2\theta - 6\cos\theta - \cos\theta + 3 = 0$

বা, $2\cos\theta(\cos\theta - 3) - 1(\cos\theta - 3) = 0$

বা, $(2\cos\theta - 1)(\cos\theta - 3) = 0$

হয়, $2\cos\theta - 1 = 0$

বা, $\cos\theta = \dfrac{1}{2}$

অথবা, $\cos\theta - 3 = 0$

$\therefore\ \cos\theta = 3$

কিন্তু ইহা গ্রহণযোগ্য নয়। কারণ $\cos\theta$ এর মান 1 এর চেয়ে বড় হতে পারে না।

$\cos\theta = \frac{1}{2}$ এর জন্য θ এর মান নির্ণয়:

যেহেতু $\cos\theta$ এর মান ধনাত্মক এবং $0 < \theta < 2\pi$, সেহেতু θ এর অবস্থান হবে প্রথম চতুর্ভাগে অথবা চতুর্থ চতুর্ভাগে।

θ এর অবস্থান প্রথম চতুর্ভাগে হলে,

$\cos\theta = \cos\frac{\pi}{3}$ $\therefore \theta = \frac{\pi}{3}$

θ এর অবস্থান চতুর্থ চতুর্ভাগে হলে,

$$\cos\theta = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$$

বা, $\cos\theta = \cos\left(\frac{6\pi - \pi}{3}\right) = \cos\frac{5\pi}{3}$

$\therefore \theta = \frac{5\pi}{3}$

$\therefore$ নির্দিষ্ট সীমার মধ্যে θ এর সম্ভাব্য সকল মানসমূহ: $\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$

ছ **$2\sin x \cos x = \sin x$ $(0 \le x \le 2\pi)$**

বা, $2\sin x \cos x - \sin x = 0$

বা, $\sin x(2\cos x - 1) = 0$

হয়, $\sin x = 0$ অথবা, $2\cos x - 1 = 0$

বা, $2\cos x = 1$

বা, $\cos x = \frac{1}{2}$

$\sin x = 0$ হলে x এর মান নির্ণয়:

যেহেতু $\sin x$ এর মান ধনাত্মক এবং $0 \le x \le 2\pi$, সেহেতু কোণ x এর অবস্থান হবে x অক্ষের উপর।

$0 \le x \le 2\pi$ হওয়ায়,

$\sin x = \sin 0$ $\therefore x = 0$

এবং $\sin x = \sin\pi$ $\therefore x = \pi$

এবং $\sin x = \sin 2\pi$ $\therefore x = 2\pi$

$\cos x = \frac{1}{2}$ হলে x এর মান নির্ণয়:

যেহেতু $\cos x$ এর মান ধনাত্মক এবং $0 \le x \le 2\pi$, সেহেতু x এর অবস্থান হবে ১ম চতুর্ভাগে অথবা ৪র্থ চতুর্ভাগে।

x এর অবস্থান ১ম চতুর্ভাগে হলে,

$\cos x = \cos\frac{\pi}{3}$

$\therefore x = \frac{\pi}{3}$

x এর অবস্থান ৪র্থ চতুর্ভাগে হলে,

$\cos x = \cos\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right)$

বা, $\cos x = \cos\frac{5\pi}{3}$

$\therefore x = \frac{5\pi}{3}$

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুসারে নির্ণেয় সমাধান $\theta = 0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{5\pi}{3}, 2\pi$

১৪ **পৃথিবীর ব্যাসার্ধ 6440 কিলোমিটার। ঢাকা ও পঞ্চগড় পৃথিবীর কেন্দ্রে 3.5° কোণ উৎপন্ন করে। শীতকালে একজন মানুষ পঞ্চগড়ের অপরূপ নৈসর্গিক দৃশ্য দেখতে চায়। সে 0.84 মিটার ব্যাস বিশিষ্ট চাকাওয়ালা একটি গাড়ী নিয়ে গেল।**

ক. পৃথিবীর কেন্দ্রে ঢাকা ও পঞ্চগড়ের থেকে অঙ্কিত ব্যাসার্ধ কত রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করে?

খ. ঢাকা এবং পঞ্চগড়ের দূরত্ব নির্ণয় কর।

গ. ঢাকা হতে পঞ্চগড় আসা যাওয়ার ক্ষেত্রে গাড়ীর প্রতিটি চাকা কতবার ঘুরবে?

সমাধান:

ক পৃথিবীর কেন্দ্রে ঢাকা ও পঞ্চগড়ের থেকে অঙ্কিত ব্যাসার্ধ 3.5° কোণ উৎপন্ন করে।

আমরা জানি, $1° = \frac{\pi}{180}$ রেডিয়ান

$3.5° = \frac{3.5\pi}{180}$ রেডিয়ান $= 0.061087^c$ (প্রায়) **(Ans.)**

খ ধরি, ঢাকা ও পঞ্চগড়ের দূরত্ব $= s$ কি.মি.

'ক' হতে পাই, ঢাকা এবং পঞ্চগড় পৃথিবীর কেন্দ্রে $\frac{3.5\pi}{180}$ রেডিয়ান কোণ উৎপন্ন করে।

দেওয়া আছে, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ r = 6440 কি.মি.

আমরা জানি, $s = r\theta$

$= 6440 \times \frac{3.5\pi}{180}$ $\left[\theta = \left(\frac{3.5\pi}{180}\right)^c\right]$

$= \frac{1127\pi}{9}$

$= 393.398$ (প্রায়)

$\therefore$ ঢাকা এবং পঞ্চগড়ের দূরত্ব 393.398 কি.মি. (প্রায়) **(Ans.)**

গ দেওয়া আছে, চাকার ব্যাস, $d = 0.84$ মিটার

$\therefore$ চাকার ব্যাসার্ধ, $r = \frac{d}{2} = \frac{0.84}{2}$ মিটার $= 0.42$ মিটার

$\therefore$ চাকার পরিধি, $2\pi r = (2 \times \pi \times 0.42)$ মিটার

$= 0.84\pi$ মিটার

অর্থাৎ গাড়ির চাকা প্রতিবার ঘূর্ণনে 0.84π মিটার দূরত্ব অতিক্রম করে।

'খ' হতে পাই, ঢাকা এবং পঞ্চগড়ের দূরত্ব $\frac{1127\pi}{9}$ কি.মি.

$\therefore$ ঢাকা হতে পঞ্চগড় যাওয়া আসার ক্ষেত্রে মোট অতিক্রান্ত দূরত্ব

$= 2 \times \frac{1127\pi}{9}$ কি.মি.

$= \frac{2254\pi}{9}$ কি.মি.

$= \frac{2254000\pi}{9}$ মি.

সুতরাং ঢাকা হতে পঞ্চগড় যাওয়া-আসার ক্ষেত্রে গাড়ির চাকা মোট ঘুরবে

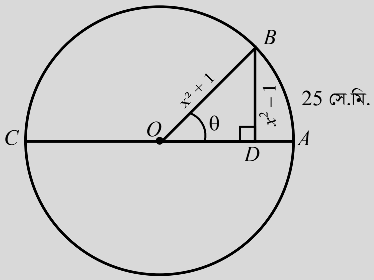
$= \frac{\frac{2254000\pi}{9}}{0.84\pi}$ বার

$= \frac{2254000\pi}{9 \times 0.84\pi}$ বার

$= 298148.148$ বার **(Ans.)**

বি.দ্র: পৃথিবী গোলাকার। তাই যেকোনো দুইটি স্থানের মধ্যবর্তী দূরত্ব চাপ আকৃতির কখনই রৈখিক দূরত্ব নয়।

১৫



ক. চিত্রে ABC একটি বৃত্তাকার চাকা এবং চাকাটির AB চাপের দৈর্ঘ্য 25 সে.মি. হলে θ এর মান কত? চাকাটি 1 বার ঘুরে কত মিটার দূরত্ব অতিক্রম করবে?

খ. ABC চাকাটি প্রতি সেকেন্ডে 5 বার আবর্তিত হলে চাকাটির গতিবেগ ঘণ্টায় কত হবে?

গ. চিত্রে ΔBOD হতে $\sin\theta$ এর মান ব্যবহার করে প্রমাণ কর যে, $\tan\theta + \sec\theta = x$

<u>সমাধান:</u>

ক দেওয়া আছে, চাকাটির AB চাপের দৈর্ঘ্য, $s = 25$ সে.মি.
চিত্র হতে পাই, ব্যাসার্ধ, $r = OB = (x^2 + 1)$ সে.মি.

আমরা জানি, $s = r\theta$ বা, $\theta = \dfrac{s}{r}$

$\therefore \theta = \dfrac{25}{(x^2+1)}$ রেডিয়ান

চাকাটির পরিধি $= 2\pi r$ সে.মি.

$= 2\pi(x^2 + 1)$ সে.মি. $= \dfrac{\pi}{50}(x^2+1)$ মি.

$\therefore$ চাকাটি 1 বার ঘুরে তার পরিধির সমান তথা $\dfrac{\pi}{50}(x^2+1)$ মি. দূরত্ব অতিক্রম করবে। **(Ans.)**

খ 1 ঘণ্টা = 60 মিনিট = 60 × 60 সেকেন্ড = 3600 সেকেন্ড
ABC চাকাটি 1 সেকেন্ড আবর্তিত হয় 5 বার
$\therefore$ চাকাটি 1 ঘণ্টায় আবর্তিত হবে $= (3600 \times 5)$ বার
$= 18000$ বার
$\therefore$ চাকাটি 1 ঘণ্টায় দূরত্ব অতিক্রম করবে

$= 18000 \times \dfrac{\pi}{50}(x^2+1)$ মি. ['ক' হতে]

$= \dfrac{18000}{1000} \times \dfrac{\pi}{50}(x^2+1)$ কি.মি.

$= \dfrac{9\pi}{25}(x^2+1)$ কি.মি.

$\therefore$ চাকাটির গতিবেগ $\dfrac{9\pi}{25}(x^2+1)$ কি.মি./ঘণ্টা **(Ans.)**

গ ΔBOD-এ θ কোণের সাপেক্ষে ভূমি OD, লম্ব BD এবং অতিভুজ OB

চিত্র হতে পাই, $\sin\theta = \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{BD}{BO}$

বা, $\sin\theta = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$

$\therefore \cos\theta = \sqrt{1-\sin^2\theta}$

$= \sqrt{1-\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}$

$= \sqrt{1-\dfrac{(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}}$

$= \sqrt{\dfrac{(x^2+1)^2-(x^2-1)^2}{(x^2+1)^2}}$

$= \sqrt{\dfrac{4x^2}{(x^2+1)^2}} = \dfrac{2x}{x^2+1}$

এখন, $\tan\theta + \sec\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} + \dfrac{1}{\cos\theta}$

$= \dfrac{\frac{x^2-1}{x^2+1}}{\frac{2x}{x^2+1}} + \dfrac{1}{\frac{2x}{x^2+1}}$

$= \left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1} \times \dfrac{x^2+1}{2x}\right) + \left(1 \times \dfrac{x^2+1}{2x}\right)$

$= \dfrac{x^2-1}{2x} + \dfrac{x^2+1}{2x}$

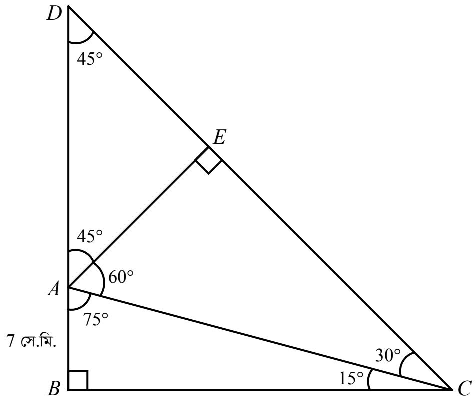
$= \dfrac{x^2-1+x^2+1}{2x} = \dfrac{2x^2}{2x} = x$

$\therefore \tan\theta + \sec\theta = x$ **(প্রমাণিত)**

দৃষ্টি আকর্ষণ: 'গ' প্রশ্নে **"sinθ ব্যবহার করে"** কথাটি উল্লেখ না থাকলে, নিম্নোক্ত পদ্ধতিতে সহজেই প্রশ্নটি সমাধান করা সম্ভব।
চিত্রে ΔBOD সমকোণী ত্রিভুজ যার অতিভুজ BO এবং θ কোণের সাপেক্ষে ভূমি OD, লম্ব BD
$\therefore OB^2 = OD^2 + BD^2$
বা, $OD = \sqrt{OB^2 - BD^2}$
$= \sqrt{(x^2+1)^2-(x^2-1)^2}$
$= \sqrt{x^4+2x^2+1-x^4+2x^2-1} = \sqrt{4x^2} = 2x$
$\therefore$ বামপক্ষ $= \tan\theta + \sec\theta$
$= \dfrac{x^2-1}{2x} + \dfrac{x^2+1}{2x}$
$= \dfrac{x^2-1+x^2+1}{2x} = \dfrac{2x^2}{2x} = x =$ ডানপক্ষ
$\therefore \tan\theta + \sec\theta = x$ **(প্রমাণিত)**

১৬ একটি সমকোণী ত্রিভুজের সবচেয়ে ছোট বাহুর দৈর্ঘ্য 7 সেমি এবং সবচেয়ে ছোট কোণের পরিমাণ 15° হলে তার অতিভুজের দৈর্ঘ্য কত?

সমাধান:
মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজে সবচেয়ে ছোট বাহুর দৈর্ঘ্য $AB = 7$ সে.মি. এবং $\angle ACB = 15°$



অঙ্কন: $\angle ACD = 30°$ অঙ্কন করি যাতে CD রেখা বর্ধিত BA রেখাকে D বিন্দুতে ছেদ করে।
আবার, $AE \perp CD$ অঙ্কন করি।
এখন, ΔAEC-এ $\angle AEC + \angle CAE + \angle ACE = 180°$
বা, $90° + \angle CAE + 30° = 180°$
বা, $\angle CAE = 60°$
আবার, $\angle DAE + \angle EAC + \angle CAB = 180°$
বা, $\angle DAE + 60° + 75° = 180°$
বা, $\angle DAE = 180° - 135° = 45°$
আমরা পাই, $BD = BA + AD$
$= 7 + AD$
আবার ΔADE-এ $\angle ADE + \angle DAE + \angle AED = 180°$
$\therefore \angle ADE = 180° - (45° + 90°)$ [$AE \perp ED$ হওয়ায় $\angle AED = 90°$]
$\therefore \angle ADE = 45°$
$\therefore \Delta ADE$-এ $\angle ADE = 45° = \angle DAE$
$\therefore AE = DE$

সমকোণী ΔAED-এ $\sin\angle ADE = \dfrac{AE}{AD}$
বা, $AE = AD \times \sin 45°$
বা, $AE = \dfrac{AD}{\sqrt{2}}$
$\therefore DE = \dfrac{AD}{\sqrt{2}}$ [$\because \Delta AED$-এ $AE = DE$]

সমকোণী ΔACE-এ $\tan\angle CAE = \dfrac{CE}{AE}$
বা, $CE = AE \times \tan 60°$
বা, $CE = AE \times \sqrt{3} = \dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} AD$ $\left[\because AE = \dfrac{AD}{\sqrt{2}}\right]$

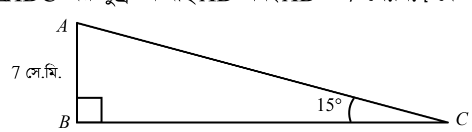
এখন, সমকোণী ΔCBD-এ $\cos\angle BDC = \dfrac{BD}{CD}$
বা, $\cos 45° = \dfrac{BD}{CD}$
বা, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{BD}{CD}$
বা, $CD = \sqrt{2}\, BD$
বা, $CE + DE = \sqrt{2}\, BD$
বা, $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} AD + \dfrac{AD}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}\,(7 + AD)$ [মান বসিয়ে]
বা, $\dfrac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} AD + \dfrac{AD}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}\, AD = 7\sqrt{2}$
বা, $\dfrac{\sqrt{3} + 1 - (\sqrt{2})^2}{\sqrt{2}} AD = 7\sqrt{2}$
বা, $\dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{2}} AD = 7\sqrt{2}$
বা, $AD = \dfrac{7\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1}$
$\therefore AD = \dfrac{7 \times 2}{\sqrt{3} - 1}$
$\therefore AE = \dfrac{AD}{\sqrt{2}} = \dfrac{7 \times 2}{\sqrt{2}(\sqrt{3} - 1)} = \dfrac{7\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1}$
$\therefore$ সমকোণী ΔACE-এ $\cos\angle EAC = \dfrac{AE}{AC}$
বা, $\cos 60° = \dfrac{AE}{AC}$
বা, $\dfrac{1}{2} = \dfrac{AE}{AC}$
$\therefore AC = 2AE = 2 \times \dfrac{7\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1} = \dfrac{14\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1}$

সুতরাং অতিভুজের দৈর্ঘ্য $\dfrac{14\sqrt{2}}{\sqrt{3} - 1}$ সে.মি. **(Ans.)**

দৃষ্টি আকর্ষণ: sin 15° এর মান ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে সরাসরি বসানো পাঠ্যবইয়ের পরিপন্থী। তবে ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে নিম্নোক্ত দুই উপায়েও সমস্যাটি সমাধান করা যায়।

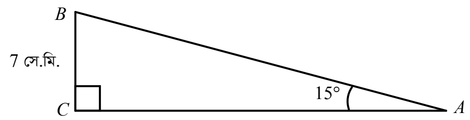
সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

সমকোণী ΔABC-এ ক্ষুদ্রতম কোণ $\angle ACB = 15°$। ত্রিভুজের ক্ষুদ্রতম কোণের বিপরীত বাহু ঐ ত্রিভুজের ক্ষুদ্রতম বাহু হবে।
সুতরাং ΔABC এর ক্ষুদ্রতম বাহু AB এবং $AB = 7$ সে.মি. [দেওয়া আছে]



এখন, ΔABC-এ, $\sin\angle ACB = \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \dfrac{AB}{AC}$
বা, $\sin 15° = \dfrac{7}{AC}$
বা, $0.258819 = \dfrac{7}{AC}$
বা, $AC = \dfrac{7}{0.258819}$
$\therefore AC = 27.045928$ সে.মি. (প্রায়)
$\therefore$ অতিভুজের দৈর্ঘ্য 27.045928 সে.মি. (প্রায়)

সমাধান (তৃতীয় পদ্ধতি)



মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের সবচেয়ে ছোট বাহুর দৈর্ঘ্য $BC = 7$ সে.মি. এবং সবচেয়ে ছোট কোণ $\angle BAC = 15°$

ত্রিভুজটির অতিভুজ $AB = ?$

এখন, ΔABC হতে পাই,

$\sin\angle ABC = \dfrac{BC}{AB}$

বা, $\sin 15° = \dfrac{7}{AB}$

বা, $AB = \dfrac{7}{\sin 15°}$

বা, $AB = 7(\sqrt{6} + \sqrt{2})$ [ES সিরিজের ক্যালকুলেটর ব্যবহার করে]

$= 7(\sqrt{3}.\sqrt{2} + \sqrt{2})$

$= 7\sqrt{2}(\sqrt{3} + 1)$

$= \dfrac{7\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)(\sqrt{3}-1)}{\sqrt{3}-1}$ [হর ও লবকে $\sqrt{3}-1$ দ্বারা গুণ করে]

$= \dfrac{7\sqrt{2}\{(\sqrt{3})^2 - 1\}}{\sqrt{3}-1}$

$= \dfrac{7\sqrt{2}\times 2}{\sqrt{3}-1}$

$\therefore AB = \dfrac{14\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$

$\therefore$ ত্রিভুজটির অতিভুজের দৈর্ঘ্য $\dfrac{14\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$ সে.মি.। **(Ans.)**

পাঠ্যবইয়ের কাজের সমাধান

কাজ *পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৭৯*

$\sec\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $\operatorname{cosec}\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$ এবং $\cot\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

◆ $\sec\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \sec\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{cosec}\dfrac{\pi}{4} = -\sqrt{2}$

বিকল্পঃ $\sec\dfrac{3\pi}{4} = \sec\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = -\sec\dfrac{\pi}{4} = -\sqrt{2}$

◆ $\operatorname{cosec}\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \operatorname{cosec}\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{3}\right) = \sec\dfrac{\pi}{3} = 2$

বিকল্পঃ $\operatorname{cosec}\dfrac{5\pi}{6} = \operatorname{cosec}\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = \operatorname{cosec}\dfrac{\pi}{6} = 2$

◆ $\cot\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \cot\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right) = -\tan\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

বিকল্পঃ $\cot\dfrac{2\pi}{3} = \cot\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\cot\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

কাজ *পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৮০*

$\sec\left(\dfrac{4\pi}{3}\right)$, $\operatorname{cosec}\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)$, $\cot\left(\dfrac{7\pi}{6}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

◆ $\sec\left(\dfrac{4\pi}{3}\right) = \sec\left(\pi + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\sec\dfrac{\pi}{3} = -2$

বিকল্পঃ $\sec\dfrac{4\pi}{3} = \sec\left(3.\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\operatorname{cosec}\dfrac{\pi}{6} = -2$

◆ $\operatorname{cosec}\left(\dfrac{5\pi}{4}\right) = \operatorname{cosec}\left(\pi + \dfrac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{cosec}\dfrac{\pi}{4} = -\sqrt{2}$

◆ $\cot\left(\dfrac{7\pi}{6}\right) = \cot\left(\pi + \dfrac{\pi}{6}\right) = \cot\dfrac{\pi}{6} = \sqrt{3}$

কাজ *পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৮১*

$\operatorname{cosec}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)$, $\sec\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)$, $\cot\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)$ এর মান নির্ণয় কর।

সমাধানঃ

◆ $\operatorname{cosec}\left(\dfrac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{cosec}\left(\pi - \dfrac{\pi}{4}\right) = \operatorname{cosec}\dfrac{3\pi}{4} = \sqrt{2}$

◆ $\sec\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) = \sec\left(\pi - \dfrac{\pi}{6}\right) = -\sec\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

◆ $\cot\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \cot\left(\pi - \dfrac{\pi}{3}\right) = -\cot\dfrac{\pi}{3} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

বিকল্পঃ $\cot\left(\dfrac{2\pi}{3}\right) = \cot\left(\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\pi}{6}\right) = -\tan\dfrac{\pi}{6} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

কাজ *পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৮৪*

$\sin\left(\dfrac{11\pi}{2} \pm \theta\right)$, $\cos(11\pi \pm \theta)$, $\tan\left(17\dfrac{\pi}{2} \pm \theta\right)$, $\cot(18\pi \pm \theta)$, $\sec\left(\dfrac{19\pi}{2} \pm \theta\right)$ এবং $\operatorname{cosec}(8\pi \pm \theta)$ অনুপাতসমূহকে θ কোণের অনুপাতে প্রকাশ কর।

সমাধানঃ

◆ $\sin\left(\dfrac{11\pi}{2} \pm \theta\right)$ এর ক্ষেত্রে,

$n = 11$ বিজোড় সংখ্যা। তাই sin পরিবর্তিত হয়ে cos হবে।

$\therefore \sin\left(11 \times \dfrac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cos\theta$ [৪র্থ চতুর্ভাগে sin ঋণাত্মক]

$\therefore \sin\left(11 \times \dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = -\cos\theta$ [৩য় চতুর্ভাগে sin ঋণাত্মক]

◆ $\cos(11\pi \pm \theta) = \cos\left(22 \times \dfrac{\pi}{2} \pm \theta\right)$

$n = 22$ জোড় সংখ্যা। তাই cos অপরিবর্তিত থাকবে।

$\therefore \cos\left(22 \times \dfrac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cos\theta$ [৩য় চতুর্ভাগে cos ঋণাত্মক]

$\therefore \cos\left(22 \times \dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = -\cos\theta$ [২য় চতুর্ভাগে cos ঋণাত্মক]

◆ $\tan\left(17\frac{\pi}{2} \pm \theta\right)$

$n = 17$ বিজোড় সংখ্যা। তাই tan পরিবর্তিত cot হবে।

$\therefore \tan\left(17 \times \frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\cot\theta$ [২য় চতুর্ভাগে tan ঋণাত্মক]

$\therefore \tan\left(17 \times \frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$ [১ম চতুর্ভাগে tan ধনাত্মক]

◆ $\cot(18\pi \pm \theta) = \cot\left(36 \times \frac{\pi}{2} \pm \theta\right)$

$n = 36$ জোড় সংখ্যা। তাই cot অপরিবর্তিত থাকবে।

$\therefore \cot\left(36 \times \frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cot\theta$ [১ম চতুর্ভাগে cot ধনাত্মক]

$\therefore \cot\left(36 \times \frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\cot\theta$ [৪র্থ চতুর্ভাগে cot ঋণাত্মক]

◆ $\sec\left(\frac{19\pi}{2} \pm \theta\right) = \sec\left(19 \times \frac{\pi}{2} \pm \theta\right)$

$n = 19$ বিজোড় সংখ্যা। তাই sec পরিবর্তিত হয়ে cosec হবে।

$\therefore \sec\left(19 \times \frac{\pi}{2} + \theta\right) = \operatorname{cosec}\theta$ [৪র্থ চতুর্ভাগে sec ধনাত্মক]

$\therefore \sec\left(19 \times \frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\operatorname{cosec}\theta$[৩য় চতুর্ভাগে cos ঋণাত্মক]

◆ $\operatorname{cosec}(8\pi \pm \theta) = \operatorname{cosec}\left(16 \times \frac{\pi}{2} \pm \theta\right)$

$n = 16$, জোড় সংখ্যা। তাই cosec অপরিবর্তিত থাকবে।

$\therefore \operatorname{cosec}\left(16 \times \frac{\pi}{2} + \theta\right) = \operatorname{cosec}\theta$ [১ম চতুর্ভাগে cosec ধনাত্মক]

$\therefore \operatorname{cosec}\left(16 \times \frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\operatorname{cosec}\theta$ [৪র্থ চতুর্ভাগে cosec ঋণাত্মক]

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৮৬

মান নির্ণয় কর: $\cos^2\frac{\pi}{15} + \cos^2\frac{13\pi}{30} + \cos^2\frac{16\pi}{15} + \cos^2\frac{47\pi}{30}$

<u>সমাধান</u>: $\cos^2\frac{\pi}{15} + \cos^2\frac{13\pi}{30} + \cos^2\frac{16\pi}{15} + \cos^2\frac{47\pi}{30}$

$= \cos^2\frac{\pi}{15} + \left\{\cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{15}\right)\right\}^2 + \left\{\cos\left(\pi + \frac{\pi}{15}\right)\right\}^2 + \left\{\cos\left(\frac{3\pi}{2} + \frac{\pi}{15}\right)\right\}^2$

$= \cos^2\frac{\pi}{15} + \sin^2\frac{\pi}{15} + \cos^2\frac{\pi}{15} + \sin^2\frac{\pi}{15}$

$= 2\sin^2\frac{\pi}{15} + 2\cos^2\frac{\pi}{15}$

$= 2\left(\sin^2\frac{\pi}{15} + \cos^2\frac{\pi}{15}\right)$

$= 2 .1$

$= 2$ **(Ans.)**

সমাধান (দ্বিতীয় পদ্ধতি)

$\cos^2\frac{\pi}{15} + \cos^2\frac{13\pi}{30} + \cos^2\frac{16\pi}{15} + \cos^2\frac{47\pi}{30}$

$= \cos^2\frac{2\pi}{30} + \cos^2\frac{13\pi}{30} + \cos^2\frac{32\pi}{30} + \cos^2\frac{47\pi}{30}$

$= \cos^2\frac{2\pi}{30} + \cos^2\frac{13\pi}{30} + \left\{\cos\left(3.\frac{\pi}{2} - \frac{13\pi}{30}\right)\right\}^2 + \left\{\cos\left(3.\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{30}\right)\right\}^2$

$= \cos^2\frac{2\pi}{30} + \cos^2\frac{13\pi}{30} + \left(-\sin\frac{13\pi}{30}\right)^2 + \left(-\sin\frac{2\pi}{30}\right)^2$

$= \cos^2\frac{2\pi}{30} + \cos^2\frac{13\pi}{30} + \sin^2\frac{13\pi}{30} + \sin^2\frac{2\pi}{30}$

$= \left(\cos^2\frac{2\pi}{30} + \sin^2\frac{2\pi}{30}\right) + \left(\cos^2\frac{13\pi}{30} + \sin^2\frac{13\pi}{30}\right)$

$= 1 + 1 = 2$ **(Ans.)**

কাজ পাঠ্যবই পৃষ্ঠা-১৮৮

$2(\sin\theta\cos\theta + \sqrt{3}) = \sqrt{3}\cos\theta + 4\sin\theta$ সমীকরণটি সমাধান কর যেখানে $0 < \theta < 2\pi$

<u>সমাধান</u>: দেওয়া আছে, $2(\sin\theta\cos\theta + \sqrt{3}) = \sqrt{3}\cos\theta + 4\sin\theta$

বা, $2\sin\theta\cos\theta + 2\sqrt{3} - \sqrt{3}\cos\theta - 4\sin\theta = 0$

বা, $2\sin\theta\cos\theta - 4\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta + 2\sqrt{3} = 0$

বা, $2\sin\theta(\cos\theta - 2) - \sqrt{3}(\cos\theta - 2) = 0$

বা, $(\cos\theta - 2)(2\sin\theta - \sqrt{3}) = 0$

$\therefore \cos\theta - 2 = 0$ অথবা, $2\sin\theta - \sqrt{3} = 0$

এখানে, $\cos\theta - 2 = 0$ গ্রহণযোগ্য নয়।

কারণ, $-1 \le \cos\theta \le 1$

$\therefore 2\sin\theta - \sqrt{3} = 0$

বা, $2\sin\theta = \sqrt{3}$

বা, $\sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$

বা, $\sin\theta = \sin 60° = \sin(180° - 60°)$

বা, $\sin\theta = \sin 60° = \sin 120°$

$\therefore \theta = 60°, 120°$

$\therefore$ প্রদত্ত সীমার মধ্যে θ এর মান $60°, 120°$