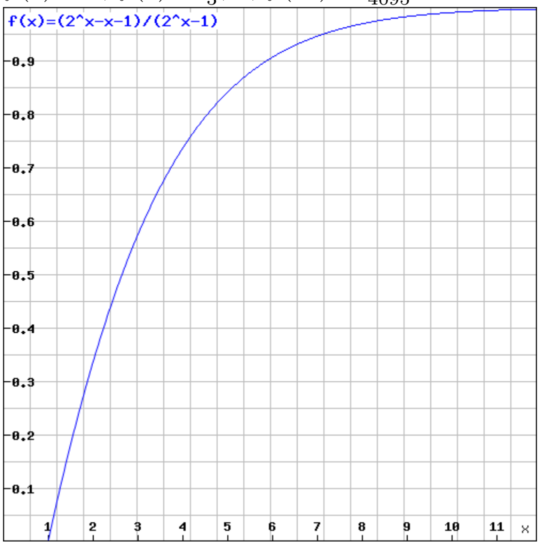
Problem 4.1:

1. $\frac{m}{n} = f(k)$
   Da $n = 2^k - 1$ und m $= 2^k - k - 1$, ist $f(k) = \frac{2^k-k-1}{2^k-1}$.
   $f(1) = 0$, $f(2) = \frac{1}{3}$,..., $f(12) = \frac{4083}{4095}$
   

2. $2^k - k - 1 = 11 \Rightarrow k = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. $CW = 0110 \Rightarrow$ Kontrollstellen $= (0110) * (01101010110) = 0110$
   a) $Z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $b)$Z$=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) $Z = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

4.

Problem 4.2:

1. Anzahl der Nutzworte ist $2^3 = 8$
   000
   001
   010
   011
   100
   101
   110
   111

2. a(0) = 1
   a(1) = 3
   a(2) = 4

a(3) = 1

3. Hamming-Distanz $h = min(d(C_i, C_j) = min(d(G_2, G_3) = 3$

4. $G_2 = 10010 \rightarrow\ Fehlübertragung : 10101$
$\Rightarrow\ scheinbar\ fehlerloses\ G3,\ ist\ aber\ fehlerhaftes\ G2.$
G*$_1$ = 011 $\quad G*_2 = 100 \quad G*_3 = 101$

Problem 4.3:

1. p ist Bitfehlerwahrscheinlichkeit
Wahrscheinlichkeit, dass ein Bit korrekt übertragen wird ist $1 - p$
Wahrscheinlichkeit für m korrekt übertragene Bits ist $(1 - p)^m$

2.

$$\begin{aligned}
\text{Anzahl übertragener Bits} &= m \\
P(\text{Bitfehler}) &= p \\
P(\text{Bit korrekt}) &= (1-p) \\
P(n \text{ von } m \text{ Bits fehlerhaft}) &= (1-p)^{m-n} \cdot p^n \cdot \underbrace{\frac{m!}{(m-n)!n!}}_{Permutationen} \\
P(1 \text{ von } m \text{ Bit fehlerhaft}) &= (1-p)^{m-1} \cdot p \cdot m
\end{aligned}$$

3. Sei CW_h ein Codewort aus einem Hamming-Code mit der Hamming-Distanz h

$$\begin{aligned}
n =& \text{ Länge von } CW_h \\
\eta =& \left\lfloor \frac{h-1}{2} \right\rfloor \text{ ist die Anzahl der korrigierbaren Fehler.} \\
P(\text{höchstens } \eta \text{ von } n \text{ Bit fehlerhaft}) =& \sum_{i=0}^{\eta} (1-p)^{n-i} \cdot p^i \cdot \frac{n!}{(n-i)!i!}
\end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit ein Code-Wort korrekt (oder korrigierbar) zu übertragen wird also größer, je mehr Fehler Korrigierbar sind.