RWTH
RHEINISCH-WESTFÄLISCHE TECHNISCHE HOCHSCHULE AACHEN
INSTITUT FÜR KRISTALLOGRAPHIE

Postadresse:	D-52056 Aachen, Germany
Institut:	Jägerstraße 17-19, D-52066 Aachen
Telefon:	++49 241 80 96900
Telefax:	++49 241 80 92184
	http://www.xtal.rwth-aachen.de

GRUNDZÜGE DER KRISTALLOGRAPHIE

Lösung zur 9. Übung: Koordinationspolyeder/Radienquotienten

Aufgabe 1:

1. Tetraeder (Abb. 1):

Die Anionen berühren sich entlang der Flächendiagonale d des Würfels mit der Kantenlänge a, so dass gilt: $d = 2 \cdot R_A$. Außerdem ist $d = \sqrt{a^2 + a^2} = \sqrt{2} \cdot a$.
Durch Umstellen und Einsetzen ergibt sich: $a = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot d = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2 \cdot R_A = \sqrt{2} \cdot R_A$.
Da sich das Kation und die Anionen auf der Diagonalen berühren gilt: 1/2 Raumdiagonale des Würfels $\overline{AB} = r_K + R_A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot a = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot R_A = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} \cdot R_A$.
$\Rightarrow r_K = (\frac{1}{2} \cdot \sqrt{6} - 1) \cdot R_A$

$$\Rightarrow \frac{r_K}{R_A} \approx \underline{\underline{0.225}}$$

2. Oktaeder (Abb. 2):

Die Anionen berühren sich entlang der Kanten, sodass gilt: $\overline{DG} = 2 \cdot R_A$.
Das Kation und die Anionen berühren sich in der Flächendiagonale $\overline{DE}$ des Quadrates $DFEG$: $\overline{DE} = 2 \cdot r_K + 2 \cdot R_A$.
Außerdem gilt: $\overline{DE} = \sqrt{2} \cdot \overline{DG} = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot R_A$.
$\Rightarrow r_K = (\sqrt{2} - 1) \cdot R_A$

$$\Rightarrow \frac{r_K}{R_A} \approx \underline{\underline{0.414}}$$

3. Würfel (Abb. 3):

Die Anionen berühren sich entlang der Würfelkante: $\overline{HI} = 2 \cdot R_A$.
Entlang der Raumdiagonale $\overline{HK}$ des Würfels berühren sich Kation und Anionen:
$HK = 2 \cdot R_A + 2 \cdot r_K$.
Außerdem gilt: $\overline{HK} = \sqrt{3} \cdot \overline{HI} = \sqrt{3} \cdot 2 \cdot R_A$.
$\Rightarrow r_K = (\sqrt{3} - 1) \cdot R_A$

$$\Rightarrow \frac{r_K}{R_A} \approx \underline{\underline{0.732}}$$

4. Trigonales Prisma (Abb. 4):

Grundsätzlich gilt, dass die Höhe des Prismas gleich der Kantenlänge der Dreiecksflächen ist. Da sich die Anionen auf allen Kanten berühren, benutzt man das rechtwinklige Dreieck ABC (Abb. 5a). Um die Länge $\overline{BC}$ zubestimmen, wird das gleichseitigen Dreieck BEF (Abb. 5b) genutzt, dessen Höhe (und Seitenhalbierende) ist $\overline{BD}$.

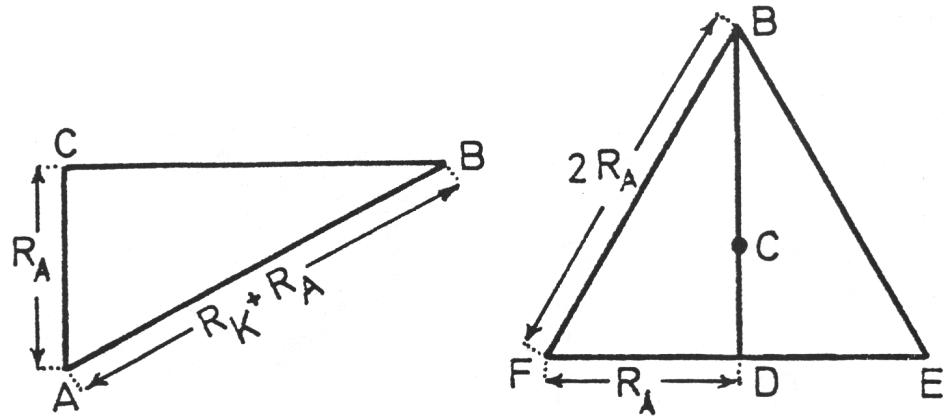

Abb. 5

Im Dreieck BEF kann die Länge von $\overline{BD}$ bestimmt werden über:
$\overline{BD} = \sqrt{\overline{BF}^2 - \overline{DF}^2} = \sqrt{(2 \cdot R_A)^2 - (R_A)^2} = \sqrt{3} \cdot R_A$.
Nach dem Schwerpunktsatz ergibt sich die Strecke $\overline{BC}$ zu $^2/_3$ der Strecke $\overline{BD}$. Damit ist $\overline{BC} = \frac{2}{3} \cdot \overline{BD} = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{3} \cdot R_A$.
Jetzt lässt sich im Dreieck ABC folgende Gleichung aufstellen: $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{BC}^2$.
$\Rightarrow (r_K + R_A)^2 = R_A^2 + (\frac{2}{3} \cdot \sqrt{3})^2 \cdot R_A^2 = (1 + \frac{4}{9} \cdot 3) \cdot R_A^2 = \frac{7}{3} \cdot R_A^2$
$\Rightarrow r_K = (\sqrt{\frac{7}{3}} - 1) \cdot R_A$

$\Rightarrow \frac{r_K}{R_A} \approx \underline{\underline{0.528}}$