

# Warum spherical harmonics?

Johannes Hahn

Andrea Hanke

14. Juli 2021

## Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Einführung</b>	<b>2</b>
<b>1</b>	<b>Warum Tensoren?</b>	<b>2</b>
1.1	Wiederholung: Vektorräume . . . . .	2
1.2	Bilineare Abbildungen . . . . .	3
1.3	Das Tensorprodukt . . . . .	6
1.4	Elementare Eigenschaften des Tensorprodukts . . . . .	10
1.5	Index-Notation - Was das ist und wie man sie loswird . . . . .	11
1.6	Lineare Abbildungen zwischen Tensoren . . . . .	15
Blatt 1	. . . . .	21
1.1.	Casimir-Elemente von euklidischen Räumen . . . . .	21
1.2.	Casimir-Elemente allgemein . . . . .	21
1.3.	Aber Tensoren sind doch so Buchstaben mit Indizes . . . . .	21
1.4.	Was denn für Indizes? . . . . .	22
1.5.	Warum heiSSt das Spur? . . . . .	22
1.6.	Brauer-Diagramme . . . . .	22
1.7.	Wiederholung von Isomorphie zwischen Vektorräumen: Matrix vs. 2-Tensor . . . . .	23
1.8.	Wilde Behauptungen . . . . .	23
<b>2</b>	<b>Warum Darstellungstheorie?</b>	<b>24</b>
2.1	Geschickte Basiswahl . . . . .	24
2.2	Einschränkung auf erlaubte lineare Abbildungen zwischen Tensoren und ihre Klassifikation . . . . .	25
2.3	Berechnungen mit linearen Abbildungen . . . . .	25
2.4	Wiederholung: Gruppen . . . . .	26
2.5	Elementare Darstellungstheorie . . . . .	26
Blatt 2	. . . . .	32
2.1.	Komische Minus Einsen . . . . .	32
Aufgabe 2.2	. . . . .	32

Aufgabe 2.3 . . . . .	32
2.4. Basiswechsel . . . . .	32
Aufgabe 2.5 . . . . .	32
Aufgabe 2.6 . . . . .	33
Aufgabe 2.7 . . . . .	33
2.8. Die kanonische Darstellung von $SO_3$ ist irreduzibel . . . . .	33
2.9. Isomorphie von $V$ und $V^*$ . . . . .	33

## 0 Einführung

## 1 Warum Tensoren?

### 1.1 Wiederholung: Vektorräume

Wir kennen uns bereits mit Vektorräumen aus. Typische Beispiele sind  $\mathbb{R}^3$  oder der Raum der Polynome von einem bestimmten Grad  $n$ . Da uns in diesem Kurs noch weitere Vektorräume begegnen werden und zum Vergleich mit anderen mathematischen Objekten (z.B. Darstellungen), ist hier ihre Definition zusammengefasst.

#### 1.1 Definition (Vektorräume und lineare Abbildungen):

Sei  $K$  ein Körper. Ein  $K$ -Vektorraum  $(V, +, \cdot)$  besteht aus

- einer Menge  $V$ ,
- einer Abbildung  $+: V \times V \rightarrow V, (v, w) \mapsto v + w$ , genannt (Vektor)addition und
- einer Abbildung  $\cdot: K \times V \rightarrow V, (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$ , genannt Skalarmultiplikation.

die die Vektorraum-Axiome in Tabelle 1.1 erfüllen. Alles, was Element eines Vektorraums ist, kann Vektor genannt werden.

Sind  $V, W$  zwei  $K$ -Vektorräume und  $f: V \rightarrow W$  eine Abbildung, so heiSt  $f$  ( $K$ -)lineare Abbildung oder (Vektorraum-)Homomorphismus, falls die beiden Axiome in Tabelle 1.1 erfüllt sind. Den Raum aller  $K$ -linearen Abbildungen von  $V$  nach  $W$  bezeichnen wir mit  $\text{Hom}_K(V, W)$ . Eine  $K$ -lineare Abbildung von  $V$  nach  $V$  (also gleicher Definitions- und Zielraum) heiSt (Vektorraum-)Endomorphismus, der Raum aller solcher Abbildungen wird mit  $\text{End}_K(V)$  notiert.

Existiert ein Homomorphismus  $f': W \rightarrow V$  mit  $f \circ f' = f' \circ f = \text{id}$ , so nennt man  $f$  Isomorphismus der Vektorräume.

**1.2:** Wir sind praktisch ausschlieSSlich an  $\mathbb{R}$ - und  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen interessiert in diesem Kurs.

#### 1.3 Definition (Kern & Bild):

Ist  $f: V \rightarrow W$  eine  $K$ -lineare Abbildung, so ist

$$\ker(f) := \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}$$

Vektorraum-Axiom	Bedeutung
$(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe	Addition verhält sich wie erwartet
Assoziativität	$\forall u, v, w \in V : u + (v + w) = (u + v) + w$
Neutrales Element bzw. „Null“	$\exists 0 \in V \forall v \in V : v + 0 = 0 + v$
Inverse bzw. „negative“ Elemente	$\forall v \in V \exists w \in V : v + w = 0$
Kommutativität	$\forall u, v \in V : u + v = v + u$
Eigenschaften der Skalarmultiplikation	
Assoziativität	$\forall a, b \in K, v \in V : a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v$
Normierung bzw. Nichttrivialität	$\forall v \in V : 1 \cdot v = v$ , wobei 1 das Einselement des Körpers bezeichnet
Verträglichkeit von Addition und Skalarmultiplikation	
Distributivität bzgl. $(V, +)$	$\forall a \in K, u, v \in V : a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$
Distributivität bzgl. $(K, +)$	$\forall a, b \in K, v \in V : (a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$
Axiome linearer Abbildungen	Bedeutung
Additivität	$\forall v_1, v_2 \in V : f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
Homogenität	$\forall \lambda \in K, v \in V : f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$

Tabelle 1.1: Definierende Eigenschaften von Vektorräumen und linearen Abbildungen

der Kern von  $f$  und

$$\text{im}(f) := \{ w \in W \mid \exists v \in V : f(v) = w \}$$

das Bild von  $f$ .

## 1.2 Bilineare Abbildungen

**1.4:** Es gibt i.A. keine Multiplikation zweier Vektoren miteinander in irgendeinem Sinne. Wir können immer Skalare mit Vektoren multiplizieren, aber nicht Vektoren mit Vektoren. Nichts desto trotz ist es *manchmal* doch so, dass zusätzlich zu Addition und

Skalarmultiplikation eine weitere Operation existiert, die ein sinnvolles Konzept von Multiplikation liefert, z.B.

- a.) Der Vektorraum der Polynome  $\mathbb{R}[X]$  hat die Polynommultiplikation, d.h.

$$\left(\sum_{i=0}^n a_i X^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^m b_j X^j\right) := \sum_{k=0}^{n+m} \left(\sum_{\substack{i,j \\ i+j=k}} a_i b_j\right) X^k$$

- b.) Der Vektorraum der Funktionen  $X \rightarrow \mathbb{C}$  für einen festen Definitionsbereich  $X$  hat die punktweise Multiplikation, d.h.

$$f \cdot g := x \mapsto f(x)g(x)$$

- c.) Die Hintereinanderausführung von linearen Abbildungen  $\text{Hom}_K(V, W) \times \text{Hom}_K(U, V) \rightarrow \text{Hom}_K(U, W)$ ,  $(f, g) \mapsto f \circ g$  ist eine Abbildung, die sich in vielerlei Hinsicht auch wie eine Multiplikation verhält. Für  $U = V = W$  erhält man insbesondere eine Multiplikation  $\text{End}_K(V) \times \text{End}_K(V) \rightarrow \text{End}_K(V)$ .

Nach Wahl von je einer Basis können wir  $\text{Hom}_K(V, W)$ ,  $\text{Hom}_K(U, V)$  und  $\text{Hom}_K(U, W)$  mit  $K^{n \times m}$ ,  $K^{m \times p}$  und  $K^{n \times p}$  identifizieren. Die Hintereinanderausführung von linearen Abbildung entspricht dann der Matrixmultiplikation.

- d.) ...

### 1.5 Definition (Bilineare & multilineare Abbildungen):

Sind  $V, W, X$  drei  $K$ -Vektorräume, so heißt eine Abbildung  $\phi : V \times W \rightarrow X$  bilinear, falls sie beiden Linearittsbedingungen in Tabelle 1.5 erfüllt, d.h. die Funktion ist separat linear, wenn man nur den ersten oder nur den zweiten Input variiert und den anderen festhält.

Für Abbildungen  $V_1 \times V_2 \times V_3 \rightarrow X$ , die von drei Inputvektoren abhängig sind, kann man entsprechend definieren, dass eine Abbildung trilinear heißt, wenn sie die drei Distributivgesetze erfüllt. Für vier, fünf, ...  $k$  Input-Vektoren spricht man entsprechend von  $k$ -fach linearen Abbildungen.

### 1.6 Beispiel:

Die drei genannten „Multiplikationen“ von oben sind bilinear. Polynommultiplikation und punktweise Multiplikation von Funktionen sind kommutativ und assoziativ. Die Komposition  $\text{End}_K(V) \times \text{End}_K(V) \rightarrow \text{End}_K(V)$  ist assoziativ, aber nicht kommutativ, falls  $\dim(V) > 1$ .

Es gibt viele weitere, uerst nützliche Beispiele.

- d.) Richtungsableitungen sind bilinear in der Richtung und der Funktion:

Axiom	Bedeutung
Linearität:	
im ersten Argument	$\forall v_1, v_2 \in V, w \in W : \phi(v_1 + v_2, w) = \phi(v_1, w) + \phi(v_2, w)$
	$\forall \lambda \in K, v \in W, w \in W : \phi(\lambda v, w) = \lambda \phi(v, w)$
im zweiten Argument	$\forall v \in V, w_1, w_2 \in W : \phi(v, w_1 + w_2) = \phi(v, w_1) + \phi(v, w_2)$
	$\forall \lambda \in K, v \in W, w \in W : \phi(v, \lambda w) = \lambda \phi(v, w)$
Falls $\phi : V \times V \rightarrow X$ , kann optional gelten:	
Symmetrie bzw. Kommutativität	$\forall u, v \in V : \phi(u, v) = \phi(v, u)$
Antisymmetrie	$\forall u, v \in V : \phi(u, v) = -\phi(v, u)$
Falls $\phi : V \times V \rightarrow V$ , kann optional gelten:	
Assoziativität	$\forall u, v, w \in V : \phi(u, \phi(v, w)) = \phi(\phi(u, v), w)$

Tabelle 1.2: Eigenschaften von bilinearen Abbildungen

Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  ein geeigneter Definitionsbereich (z.B. eine offene Menge). Sei außerdem  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  eine differenzierbare Funktion. Dann existieren insbesondere alle Richtungsableitungen  $(\partial_v f)(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 + tv)}{t}$  in allen Punkten  $x_0 \in X$ . Die Abbildungsvorschrift  $(v, f) \mapsto \partial_v f$  liefert eine bilineare Abbildung für mehrere Kombinationen von Vektorräumen, z.B.  $\mathbb{R}^n \times C^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^0(\mathbb{R}^n)$  oder  $\mathbb{R}^n \times C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

e.) Allgemeiner: Lineare Differentialoperatoren:

Für mehrfach differenzierbare Funktionen kann man natürlich auch mehrere Ableitungsschritte hintereinander ausführen. Auf diese Weise erhält man multilineare Abbildungen:  $k$ -faches Ableiten in  $k$  Richtungen, also der Differentialoperator  $\partial_{v_1} \partial_{v_2} \cdots \partial_{v_k}$  ist  $k$ -fach linear in den Vektoren  $v_1, \dots, v_k$  als Inputs. Die Anwendung auf eine Funktion ist entsprechend  $(k+1)$ -fach linear in den  $k$  Richtungsvektoren und der Funktion als Inputs.

Als  $k$ -lineare Abbildung ist dies eine symmetrische Abbildung, d.h.  $\partial_v \partial_w f = \partial_w \partial_v f$ , sofern  $f$  zweimal stetig differenzierbar ist. Das ist der Satz von Schwarz<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Hermann Amandus Schwarz (1843 – 1921), dt. Mathematiker.

f.) Kreuzprodukt:

Es gibt eine besondere bilineare Abbildung  $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , genannt Kreuzprodukt, die in anderen Dimensionen keine gute Analogie hat, nämlich

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ x_1 z_2 - x_2 z_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Es ist bilinear, aber weder kommutativ noch assoziativ. Stattdessen ist es antisymmetrisch.

### 1.3 Das Tensorprodukt

**1.7:** Bilineare Abbildungen sind in vielerlei Hinsicht ähnlich zu linearen Abbildungen, z.B. kann man sie durch Basiswahl eindeutig beschreiben, d.h.

Wenn  $V, W$  zwei  $K$ -Vektorräume sind,  $b_1, \dots, b_n$  eine Basis von  $V$  und  $c_1, \dots, c_m$  eine Basis von  $W$ , und  $\phi : V \times W \rightarrow X$  eine bilineare Abbildung, dann sind alle Werte  $\phi(v, w)$  bereits eindeutig festgelegt, wenn man  $\phi(b_i, c_j)$  für alle  $i$  und  $j$  kennt, und umgekehrt liefert jede beliebige Wahl von Vektoren  $x_{ij} \in X$  genau eine bilineare Abbildung  $\psi : V \times W \rightarrow X$ , die  $\psi(b_i, c_j) = x_{ij}$  erfüllt.

Weiter könnte man z.B. jetzt den Raum aller bilinearen Abbildungen  $Bil(V, W; X)$  betrachten und beweisen, dass das selbst ein Vektorraum ist genau wie der Raum der linearen Abbildungen zwischen zwei festen Vektorräumen selbst ein Vektorraum ist.

Ähnliches gilt auch für  $k$ -lineare Abbildungen. AuSSerdem kann man sich davon überzeugen, dass diese Strukturen mit Hintereinanderausführung von Abbildungen verträglich sind. Hier ist noch zu beachten, dass multilineare Abbildungen viel mehr Möglichkeiten haben, zwei Abbildungen hintereinander auszuführen, z.B. könnte man zwei bilineare Abbildungen hintereinander ausführen, indem man

$$\phi(\psi(u, v), w) \quad \text{oder} \quad \phi(u, \psi(v, w))$$

bildet und i.A. sind das zwei verschiedene 3-lineare Abbildungen. Man hat bereits drei fundamental verschiedene Möglichkeiten, lineare und bilineare Abbildungen miteinander zu kombinieren: Man kann  $\phi(\alpha(u), v)$ ,  $\phi(u, \alpha(w))$  oder  $\alpha(\phi(u, v))$  bilden je nachdem, was davon tatsächlich definiert ist. Alle Kombinationen sind jedoch wieder bilineare Abbildungen. Wenn man allgemein  $k$ - und  $m$ -lineare Abbildungen miteinander kombinieren will, hat man sehr schnell eine explodierende Anzahl verschiedener Möglichkeiten vor sich. Sie alle liefern wieder multilineare Abbildungen als Ergebnis und alle Möglichkeiten  $a$  verschiedene multilineare Abbildungen auf diese Weise zu kombinieren, sind selbst  $a$ -fach lineare Operationen zwischen den entsprechenden Abbildungsräumen.

Man könnte all das jetzt für alle diese Kombinationen beweisen, wenn man zu viel Freizeit und Tinte hat. Alle Beweise sind langweilig, wenn man den linearen Fall einmal

verstanden hat und funktionieren in der Tat völlig analog.<sup>2</sup> Das groSSe Problem ist eigentlich, eine geeignete Notation zu finden, die einem erlaubt, diese Beweise alle nur einmal und dafür allgemein zu führen, statt in jeder neuen Kombination von vorne anfangen zu müssen. Und selbst wenn man sich so eine Notation überlegt, dann steht man noch vor einigen technischen, aber völlig trivialen Problemen, die mehr Arbeit verlangen als man für solche Trivialitäten erwartet. Wenn man beispielsweise eine Notation erfindet um zwei multilineare Abbildungen miteinander zu verbinden, dann stellt sich die Frage, ob alle Arten, drei multilineare Abbildungen zu verbinden, sich durch schrittweises Verbinden von je zweien erhalten lassen und ob dafür eine geeignete Form von Assoziativität gilt. Erneut stellt man fest, dass die Antwort „ja“ ist, die geeignete Form von Assoziativität gilt und die Beweise alle analog zum linearen Fall laufen.

**1.8:** All diese Fälle sind letztendlich so sehr ähnlich zum linearen Fall, dass es in der Tat eine Konstruktion gibt, die es einem erlaubt, multilineare Abbildungen als echte lineare Abbildungen aufzufassen, sodass man überhaupt nichts mehr beweisen muss, das über den (schon bekannten) linearen Fall und die Existenz und grundlegenden Eigenschaften dieser Konstruktion hinaus geht. Dieses Konstrukt ist das *Tensorprodukt*.

**1.9 Satz und Definition** (Universelle Eigenschaft und Existenz des Tensorprodukts): Es seien  $V, W$  zwei  $K$ -Vektorräume. Es gibt eine „universelle bilineare Abbildung“, d.h. es gibt ein Vektorraum  $T$  und eine bilineare Abbildung  $\tau : V \times W \rightarrow T$ , sodass *jede* bilineare Abbildung  $\phi : V \times W \rightarrow X$  sich schreiben lässt als  $f \circ \tau$  mit einer eindeutig bestimmten linearen Abbildung  $f : T \rightarrow X$ .

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\tau} & T \\ & \searrow \phi & \downarrow \exists! f \\ & & X \end{array}$$

$T$  und  $\tau$  sind in der Tat eindeutig bestimmt bis auf einen eindeutigen Isomorphismus, d.h. wenn  $\tau' : V \times W \rightarrow T'$  eine weitere universelle bilineare Abbildung ist, dann gibt es genau einen Isomorphismus  $\alpha : T \rightarrow T'$ , sodass  $\alpha(\tau(v, w)) = \tau'(v, w)$  gilt. Man schreibt üblicherweise  $V \otimes W$  statt  $T$  und  $v \otimes w$  statt  $\tau(v, w)$  für diesen eindeutig bestimmten Vektorraum und bilineare Abbildung und nennt sie Tensorprodukt von  $V$  und  $W$ . (Achtung: Das Tensorprodukt ist streng genommen die Kombination aus  $T$  und  $\tau$ , nicht nur  $T$ ).

**1.10:** Ausgeschrieben sagt die universelle Eigenschaft folgendes: Von einer Abbildungsvorschrift  $\phi : (v, w) \mapsto x_{v,w}$ , die je einen Inputvektor aus  $V$  und einen aus  $W$  nimmt und einen Vektor aus  $X$  produziert, gibt es genau dann eine Realisierung dieser Abbildungsvorschrift als lineare Abbildung  $f : V \otimes W \rightarrow X$  mit  $f(v \otimes w) = x_{v,w}$ , wenn  $\phi$  bilinear ist.

Jede bilineare Abbildung kann so eindeutig als lineare Abbildung auf dem Tensorprodukt der beiden Inputräume betrachtet werden, und umgekehrt kann jede lineare Abbildung

---

<sup>2</sup>Wer's nicht glaubt, probiere es selbst aus und finde alle diese Beweise, bis das notwendige MaSS an Langeweile erreicht ist.

auf einem Tensorprodukt als bilineare Abbildung aufgefasst werden, indem man sie auf die Menge der reinen Tensoren einschränkt.

**1.11 Definition (Reine Tensoren):**

Ein Element von  $V \otimes W$ , das die Form  $v \otimes w$  hat, wird als reiner Tensor bezeichnet.

**1.12 (Diskussion: reine vs. nicht-reine Tensoren):** Ein wichtiger, vielleicht der wichtigste Grund, Tensorräume als eigenständiges Objekt einzuführen statt ausschliesslich mit multilinearen Abbildungen zu arbeiten ist die Existenz von nicht-reinen Tensoren: Eine Summe  $v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 + \dots + v_k \otimes w_k$  (die natürlich immer existiert, weil  $V \otimes W$  ja ein Vektorraum ist) ist i.A. kein reiner Tensor, lässt sich also i.A. nicht darstellen als  $v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 + \dots + v_k \otimes w_k = x \otimes y$ .

Es stellt sich heraus, dass viele der wirklich interessanten Tensoren, die einem so in freier Wildbahn begegnen, nicht rein sind.

Beispiel: In der Quantenmechanik wird das Tensorprodukt benutzt, um mehrere interagierende Quanten-Systeme als ein einziges grosses System zu betrachten: Wenn  $V$  und  $W$  der Zustandsraum je einer Menge  $X$  bzw.  $Y$  quantenmechanischer Teilchen sind, dann ist  $V \otimes W$  der Zustandsraum des quantenmechanischen Systems, das aus den Teilchen von  $X$  und  $Y$  besteht und beliebige Interaktionen zwischen ihnen erlaubt. Ein reiner Tensor  $v \otimes w$  entspricht in dieser Sichtweise demjenige Zustand des Gesamtsystems, in dem sich die Teilchen aus  $X$  im Zustand  $v$ , und das aus  $Y$  im Zustand  $w$  befinden. Die nicht-reinen Tensoren entsprechen dann „Überlagerungen“ solcher reinen Zustände und das fundamental wichtige Phänomen von „verschränkten“ Teilchen ist ein Ausdruck dessen, dass eben nicht alle Zustände reine Zustände sind, in denen man die Teilchen von  $X$  unabhängig von denen in  $Y$  einen Zustand zuschreiben kann: Es kann z.B. ein Zustand der Form  $x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2$  konstruiert (und auch experimentell realisiert) werden, in dem  $x_1$  und  $x_2$  sowie  $y_1$  und  $y_2$  beide jeweils senkrecht zueinander sind. In solch einem Zustand des Gesamtsystems können die  $X$ -Teilchen in Zustand  $x_1$  oder  $x_2$  gemessen werden, aber nur dann, wenn gleichzeitig die  $Y$ -Teilchen in Zustand  $y_1$  bzw.  $y_2$  liegen. Es kann eben nicht unabhängig voneinander der  $X$ -Anteil in Zustand  $x_1$  sein, während der  $Y$ -Anteil des Gesamtsystems in Zustand  $y_2$  ist (hier geht die Orthogonalität ein).

**1.13 Beispiel (Casimir-Element):**

Ist  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und haben wir ein Skalarprodukt fest gewählt, so gibt es einen besonderen Tensor  $\Omega_V \in V \otimes V$ . Für *jede* Orthogonalbasis  $e_1, \dots, e_n$  von  $V$  lässt er sich schreiben als

$$\Omega_V = \sum_{i=1}^n e_i \otimes e_i$$

Für  $V = \mathbb{R}^3$  und die Standardbasis  $e_x, e_y, e_z$  ist etwa

$$\Omega_{\mathbb{R}^3} = e_x \otimes e_x + e_y \otimes e_y + e_z \otimes e_z$$



Betrachten wir den Raum der linearen Differentialoperatoren erster Ordnung auf  $C^\infty(V)$ , d.h. der Vektorraum der Operatoren  $\{\partial_v \mid v \in V\}$ . Darin schreibt sich das Casimir-Element als

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \partial_{e_i} \otimes \partial_{e_i}$$

Wenn wir die Komposition von Operatoren (eine bilineare Abbildung) auf diesen Tensor anwenden, erhalten wir den Laplace-Operator:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{e_i}^2$$

Man beachte insbesondere, dass das Ergebnis der Summe auf der rechten Seite unabhängig von der gewählten Basis ist, obwohl die einzelnen Summanden es natürlich nicht sind. Das erklärt z.B., wieso der Laplace-Operator und viele ähnlich aussehende Konstruktionen physikalische sinnvolle Objekte liefern, obwohl ihre Definition auf den ersten Blick basisabhängig zu sein scheint.

**1.14:** Man kann sich jedoch leicht davon überzeugen, dass die Menge aller Summen von reinen Tensoren tatsächlich das volle Tensorprodukt abdeckt:

$$V \otimes W = \{ v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 + \dots + v_k \otimes w_k \mid k \in \mathbb{N}, v_i \in V, w_i \in W \}$$

In der Welt der Quantenmechanik würde man dazu also z.B. sagen: Der Zustandsraum des aus zwei Einzelsystemen kombinierten Systems besteht aus allen Kombinationen von reinen Zuständen der Einzelsysteme sowie allen Überlagerungen dessen.

Es ist i.A. ein sehr schwieriges Problem, einem konkreten Tensor anzusehen, ob er rein ist oder nicht, und wenn nicht, welche reinen Zustände man zusammen addieren muss, um ihn zu erhalten. Nicht einmal die Anzahl der mindestens notwendigen Summanden ist einfach zu finden im Allgemeinen.

**1.15** (Diskussion: Das Wort „Tensor“): Im Gegensatz zum Wort „Vektor“, das zumindestens meistens „Element eines Vektorraums“ bedeutet und selten anders verwendet wird, ist das Wort „Tensor“ etwas überbelegt. Die verschiedenen Verwendungsformen des Wortes fallen grob in zwei Kategorien: 1.) „ich habe keine Ahnung, was Tensoren sind, aber andere Leute benutzen das Wort, also tue ich das auch“ und 2.) irgendetwas, das tatsächlich mit Tensorprodukten zu tun hat.

Zu 1. später mehr, zu 2. nur soviel: „Tensor“ kann sowohl „Element eines Tensorprodukts von Vektorräumen“ bedeuten (so werden wir das Wort verwenden) als auch einen von diversen, verwandten Begriffen, z.B. wird das auch als Kurzform von Tensorfeld verwendet. Ein Tensorfeld ist eine Funktion, die jedem Punkt des gerade betrachteten geometrischen Raums  $X$  (oder Raumzeit) je ein Element  $t(x) \in V_x \otimes V_x \otimes V_x \otimes \dots$  zuordnet, wobei gewisse Stetigkeitseigenschaften gefordert werden, die für zwei eng beieinander liegende Punkte  $x, x'$  fordern, dass  $V_x$  und  $V_{x'}$  „im Wesentlichen der gleiche Raum“ sind und  $t(x), t(x')$

ebenfalls eng zusammen liegen (formal ist das natürlich eine richtige  $\epsilon$ - $\delta$ -artige Definition). Ggf. wird auch nicht nur ein Vektorraum  $V_x$  pro Punkt verwendet, sondern mehrere. Je nachdem, welche Zusatzeigenschaften man an solch ein Tensorfeld stellt, wird auch nicht nur das Tensorprodukt der Vektorräume selbst, sondern auch eine vom Tensorprodukt abgeleitete Konstruktion betrachtet (z.B. symmetrische oder äussere Potenzen, siehe weiter unten).

## 1.4 Elementare Eigenschaften des Tensorprodukts

### 1.16 Lemma ( $K \otimes V = V$ ):

Ist  $V$  ein  $K$ -Vektorraum, so ist

$$\begin{cases} K \otimes V & \xrightarrow{\sim} V \\ \alpha \otimes v & \mapsto \alpha v \\ 1 \otimes v & \xleftarrow{\sim} v \end{cases}$$

ein Paar zueinander inverser Vektorraum-Isomorphismen.

**1.17:** Wir erlauben uns deshalb, wann immer es uns nützlich erscheint,  $K \otimes V$  und  $V \otimes K$  als identisch zu  $V$  zu betrachten. Dabei meinen wir immer die obige Identifizierung.

**1.18:** Da das Tensorprodukt für alle Paare von  $K$ -Vektorräumen definiert ist und selbst wieder ein  $K$ -Vektorraum ist, können wir natürlich auch Tensorprodukte von Tensorprodukten bilden. Es stellt sich die Frage, ob es eine Rolle spielt, wie genau wir das tun.

### 1.19 Lemma und Definition (Assoziativität des Tensorprodukts & Höhere Tensorgrade):

Für alle  $K$ -Vektorräume  $V_1, V_2, V_3$  ist

$$\begin{cases} V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) & \rightarrow (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \\ v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3) & \mapsto (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3 \end{cases}$$

ein Isomorphismus.

Wir erlauben es uns, aufgrund der Natürlichkeit dieses Isomorphismus, Klammern in mehrfachen Tensorprodukten wegzulassen und kurz  $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \otimes \dots \otimes V_k$  zu schreiben. Der Kürze halber definieren wir die Tensorpotenzen

$$V^{\otimes k} := \begin{cases} K & k = 0 \\ \underbrace{V \otimes V \otimes \dots \otimes V}_{k\text{-mal}} & k > 0 \end{cases}$$

**1.20:** Mit dieser Notation gelten dann (abzüglich eben jener natürlicher Isomorphismen) die „Potenzgesetze“:

$$V^{\otimes n} \otimes V^{\otimes m} = V^{\otimes(n+m)}$$

$$(V^{\otimes n})^{\otimes m} = V^{\otimes nm}$$

## 1.5 Index-Notation - Was das ist und wie man sie loswird

**1.21:** Alle vorher angedeuteten Aussagen über multilineare Abbildungen kann man auf Sätze über lineare Abbildungen und Tensorprodukte zurückführen, z.B.

**1.22 Lemma und Definition** (Standardskalarprodukt auf Tensorpotenzen):

Haben wir ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $V$  gegeben, ist das Standardskalarprodukt (auch „von  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induziertes Skalarprodukt“) auf  $V^{\otimes m}$  definiert mit der Vorschrift

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} V^{\otimes m} \times V^{\otimes m} & \rightarrow K \\ \langle v_1 \otimes \cdots \otimes v_m, w_1 \otimes \cdots \otimes w_m \rangle & \mapsto \langle v_1, w_1 \rangle \cdots \langle v_m, w_m \rangle \end{cases}$$

und ihrer linearen Fortsetzung.

**1.23 Lemma** (Dimension von Tensorprodukten<sup>3</sup>):

Es gilt  $\dim(V \otimes W) = \dim(V) \cdot \dim(W)$ .

Präziser: Für jede Basis  $(b_i)_{i \in I}$  von  $V$  und  $(c_j)_{j \in J}$  von  $W$  ist  $(v_i \otimes w_j)_{i \in I, j \in J}$  eine Basis von  $V \otimes W$ .

**1.24 Korollar:**

Entsprechendes gilt auch für mehrfache Tensorprodukte, insbesondere für Tensorpotenzen: Ist  $e_1, \dots, e_n$  eine Basis von  $V$ , so ist  $\{e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \mid i_j \in \{1, \dots, n\}\}$  eine Basis von  $V^{\otimes k}$ .

Haben wir ein Skalarprodukt auf  $V$  gegeben und ist  $e_1, \dots, e_n$  eine Orthonormalbasis von  $V$  bzgl. dieses Skalarprodukts, so ist diese Basis des Tensorprodukts auch eine Orthonormalbasis bzgl. des Standardskalarprodukts auf  $V^{\otimes k}$ .

**1.25 Definition:**

Wenn  $e_1, \dots, e_n$  zufällig eine Basis ist, die man „Standardbasis“ nennt, dann nennt man  $\{e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}\}$  auch Standardbasis von  $V^{\otimes k}$ .

Diese Basis wird sehr häufig implizit verwendet (siehe Aufgabe 1.3).

**1.26** (Index-Notation – Was ist das?): Insbesondere heit das, dass jeder Tensor  $t \in V \otimes W$  eine eindeutige Koordinaten-Darstellung bzgl. solch einer Basis hat, d.h. es gibt eindeutig bestimmte Skalare  $t_{ij}$  sodass

$$t = \sum_{i \in I, j \in J} t_{ij} b_i \otimes c_j$$

gilt und umgekehrt liefert jede Wahl von  $|I| \times |J|$  vielen Skalaren  $t_{ij}$  auf diese Weise genau einen Tensor.

Es hat sich in der Physik und Ingenieurwissenschaften eingebürgert, das Wort „Tensor“ austauschbar mit „Ansammlungen von Zahlen, die mehrere Indizes haben“ zu verwenden.

<sup>3</sup>Wer mit unendlich-dimensionalen Vektorräumen nicht gut genug vertraut ist, denke sich ein „für endlich-dimensionale Vektorräume“ hinzu.

Wählt man eine andere Basis von  $V$  oder  $W$ , so erhält man natürlich andere Zahlen als Koordinaten. Immer noch  $|I| \times |J|$  viele, aber andere. Jedoch sind die Unterschiede nicht völlig beliebig, denn sie sind eben durch einen Basiswechsel in den Faktoren des Tensorprodukts verursacht.

In der Tat haben die Physiker eigene Sprechweise erfunden, um das auszudrücken: Man sagt, dass sich ein Satz von indizierten Zahlen „kovariant transformiert“ (bzw. „kontravariant“) und meint damit nicht etwa, dass diese Zahlen eine besondere Eigenschaft hätten, sondern, dass die Methode, mit der man diese Zahlen bestimmt hat, eine besondere Eigenschaft hat, nämlich bei anderer Basiswahl ein anderes Ergebnis zu produzieren, dass aber aus der Basiswechselmatrix auf bestimmte Weise vorhersehbar ist. Manche Physiker nehmen das zum Anlass, um zu definieren, dass ein Tensor nicht nur *ein* Satz von indizierten Zahlen sei, sondern eine Abbildung  $\{ \text{Basen} \} \rightarrow \{ \text{Zahlen mit Indizes} \}$ , die genau dieser Transformationsregel gehorcht.

Soweit, so verwirrend, aber natürlich wird einem dann auch erklärt, dass es auch „kontravariante Tensoren“ gibt, die sich irgendwie ähnlich, aber ganz anders verhalten, sowie gemischte Tensoren, bei denen manche Indizes ko- und manche kontravariant gemeint sind. In Indexschreibweise äussert sich das oft so, dass manche Indizes oben und manche unten notiert werden, wobei sich leider nicht einmal alle Physiker einig sind, ob die oberen jetzt die ko- oder die kontravarianten sein sollen.

**1.27 (Index-Notation – Warum ist das ein Problem?):** Index-Notation erschwert im Wesentlichen alles, was wichtig ist: Das Verstehen von und das Arbeiten mit Tensoren.

- Index-Schreibweise, Koordinaten allgemein verlieren wesentliche Informationen und geht am Wesentlichen vorbei: Ein Vektor/Tensor ist eben nicht eine Ansammlung von Zahlen, sondern ein Element eines Vektorraums.

Ja, der Raum der Polynome in zwei Variablen mit Grad  $\leq 5$  ist 36-dimensional, aber das Polynom  $x^2 + y^2$  deshalb als Ansammlung von 36 (relativ beliebigen) Zahlen zu betrachten, also als Element von  $\mathbb{R}^{36}$ , verliert die ganz wesentliche Information, z.B. dass es sich um ein Polynom handelt, dass dieser Vektorraum Unterraum eines grösseren Polynomraums ist, in dem weitere Strukturen wie z.B. Polynommultiplikation, Differenzieren, uvm. existieren.

Der Übergang von abstrakten Vektoren/Tensoren zu Koordinatendarstellungen bzgl. beliebiger Basen, erhält exakt die Information, die in der Vektorraumstruktur alleine steckt, d.h. in Addition und Skalarmultiplikation. Alle zusätzliche Struktur, die in einer konkreten Situation vielleicht ausserdem vorhanden und nützlich (!) sein könnte, wird weggeworfen.

Wenn man alles nur als Ansammlung von Zahlen versteht, ist auch klar, wieso der Unterschied zwischen „ko-“ und „kontravarianten“ Tensoren so mysteriös ist. Wenn man abstrakt arbeitet, ist ganz klar, was passiert! Das sind einfach Tensoren aus unterschiedlichen Räumen!

Die eine Sorte Tensoren ist Element von  $V^{\otimes k}$ , während die anderen Elemente von  $(V^*)^{\otimes k}$  sind. Tensoren mit gemischter Varianz sind entsprechend Elemente von

$V^{\otimes k_1} \otimes (V^*)^{\otimes k_2}$ . Natürlich sind  $V$  und  $V^*$  als Vektorräume isomorph, d.h. sie haben die gleiche Dimension, man benötigt also die gleiche Anzahl an Indizes, die auch alle über denselben Zahlenbereich laufen, wenn man die Koordinaten durchnummeriert. Aber dabei verliert man eben die wesentliche Information, dass  $V$  und  $V^*$  doch trotz allen verschieden sind und verschiedene Objekte und Sichtweisen mathematisch beschreiben.<sup>4</sup>

- Index-Schreibweise, Koordinaten allgemein zäumen das Pferd von hinten auf:

Es ist nur äußerst selten sinnvoll, tatsächlich in Koordinaten zu arbeiten, da die einzigen Operationen, die überhaupt physikalisch sinnvoll sind, zwangsläufig basisunabhängig sein müssen. Das Universum hat halt keine bevorzugte Basis. Es gibt keine bevorzugten Richtungen im Universum, es gibt keine bevorzugte Skalierung<sup>5</sup>, Wieso also nicht von Anfang an mit Objekte und Operationen arbeiten, die basisunabhängig sind?

Und in den Fällen, in denen die physikalische Situation eben doch eine Raumrichtung bevorzugt, z.B. weil es sich um ein rotationssymmetrisches Problem handelt und die Drehachse eine besondere Richtung in so einem System ist? In den Fällen ist es auch nicht sinnvoll, *beliebige* Basen zu betrachten. Man will eine Basis wählen, die Zusatzinformationen wie z.B. die Drehsymmetrie, möglichst gut widerspiegeln.

Woher weiß man, welche Zusatzstruktur tatsächlich die nützliche ist für die eigene Frage? Man weiß es eben nicht. Zumindest nicht vorher. Erst, wenn man tatsächlich eine (Teil-)Antwort auf die Frage gefunden hat, kann man überhaupt sagen, welche Zusatzstrukturen nützlich war und welche nicht, und welche Basiswahl also die sinnvollste für das Problem ist.

Der Ausgangspunkt sollte also immer zunächst eine basis-freie Sichtweise sein, in die erst nachdem tatsächlich Bedarf erkannt wurde, eine präzise ausgewählte Basis eingeführt wird. Und selbst dann ist es sinnvoll, nicht allzu viel Basis zu wählen. Im Falle einer Rotationssymmetrie ist z.B. *nur* die Drehachse eine ausgezeichnete Raumrichtung, d.h. sie legt nur einen von drei gesuchten Basisvektoren (halbwegs) fest. Für die anderen beiden gilt genau das gleiche: Man sollte solange wie möglich abstrakt arbeiten und erst, wenn das Problem es tatsächlich erfordert, eine Basis wählen.

- Index-Schreibweise erzeugt unnötige Arbeit:

Eine beliebige Kollektion von Zahlen wird aber nur dann zu einem Tensor, wenn man eine Basis wählt, bzgl. derer man diese Zahlen dann als Koordinaten liest. Man muss sich also stets fragen: „Wenn ich eine andere Basis wähle und in dieser

---

<sup>4</sup>Übrigens erklärt diese Sichtweise auch, wieso sich die Physiker nicht immer einig sind, was ko- und was kontravariant ist: Für endlich-dimensionale Vektorräume ist nicht nur  $V^*$  der duale Vektorraum von  $V$ , sondern auch  $V$  der duale Vektorraum von  $V^*$ . Man kann sich also aussuchen, welches das fundamentalere Objekt von beiden ist.

<sup>5</sup>Und nein, die Plank-Skala zählt nicht, da sie für den momentanen Stand der Wissenschaft reine Spekulation ist

neuen Situation noch einmal neue Zahlen generiere und als Koordinaten bzgl. der neuen Basis benutze, kommt ein anderer Tensor heraus oder nicht?“ und man will immer, dass die Antwort „Nein“ ist, d.h. man will, dass sich die Zahlen „ko-“ oder „kontravariant“ oder „gemischt“ „transformieren“. Ein „ja“ hieSse zwangsläufig, dass man etwas falsch gemacht hat, eben weil physikalisch sinnvolle Ergebnisse nicht basis-abhängig sind.

Die Konsequenz daraus ist aber, dass man eigentlich jedes Index-Monster, das einem begegnet, erst einmal mit viel langweiligem Rechenaufwand darauf überprüfen sollte, ob es überhaupt basis-unabhängig ist. Wer hat die Zeit dafür? Niemand! Und wieso sollte man auch so viel Aufwand investieren, wenn die Antwort, die man haben will, sowieso immer die gleiche ist?

Nicht nur macht die abstrakte Sichtweise den Aufwand kleiner, sie macht ihn zu Null, denn, wenn man von Anfang an basisfrei arbeitet, stellt sich die Frage, ob eine gewisse Konstruktion basisunabhängig ist, überhaupt nicht. Wenn nirgendwo Basen benutzt wurden, muss alles, was getan wurde, natürlich basisunabhängig sein!

- „Aber, wenn ich Dinge ausrechnen will, brauche ich doch Basen!“

Auch das ist ein weitverbreitetes Missverständnis. Viele Dinge sind in der Tat auch völlig basisfrei berechenbar, mindestens z.B. alle physikalisch sinnvollen Dinge, denn die sind eben – wie wir bereits festgestellt haben – von sich aus basisfrei und somit zwangsläufig auch basisfrei berechenbar, wenn sie überhaupt berechenbar sind. Und in der Tat kann man sie dann auch immer auf einem basisfreien Wege ausrechnen.

Man muss sich auch einmal klarmachen, was man mit „ausrechnen“ meint und wozu man das tut. Was bedeutet es z.B. einen Spannungstensor „auszurechnen“? Der Spannungstensor ist eben keine Zahl. Er ist ein Tensor. Was würde es in Analogie bedeuten, einen Vektor, z.B. eine Drehachse „auszurechnen“? Die Drehachse ist die Drehachse, das, worum sich das System dreht. Welche andere Information möchte man über diesen Vektor ausrechnen? Und was würde man damit anfangen?

Natürlich kann man zwanghaft Koordinaten einführen und die Koordinaten dieses Vektors ausrechnen. Die Koordinaten haben aber keine eigenständige physikalische Bedeutung. Mit den Koordinaten an sich lässt sich also nichts anfangen. Einzig das Gesamtobjekt ist physikalisch sinnvoll. Das einzige, was man mit den Koordinaten tun könnte, ist also, sie wieder zu einem Vektor zusammensetzen, um diesen in einem nächsten Rechenschritt weiterzuverwenden. Wieso dann aber Koordinaten einführen?<sup>6</sup>

---

<sup>6</sup>Das ignoriert natürlich ein paar auSSer-physikalische Aspekte, z.B. könnten ja in einer komplexen Gesamtberechnung einzelne Teilschritte durchaus von verschiedenen Leuten ausgerechnet werden. In diesem Fall ist das Einführen von Koordinaten eine Notwendigkeit, um ein Zwischenergebnis von einem Team zum anderen kommunizieren zu können.

Man beachte, dass die Frage nach einem *effizienten* Ausrechnen eine völlig andere ist! Für diese Art von Fragen gilt: „premature optimization is the root of all evil (or at least most of it)“<sup>7</sup>. Eine Basiswahl alleine macht nichts effizient. Die *richtige* Basis in der richtigen Situation macht Dinge effizient und auch nur, wenn man sie richtig einsetzt. Stumpf drauf losrechnen ist selten tatsächlich effizient.

Betrachten wir einmal kurz ein Problem aus der uns bekannten, 3-dimensionalen Welt: Anna und Bernd stehen einer flachen Wand gegenüber. Anna hat die Position  $(9.5, 4, 0)^T$  und einen Ball in der Hand. Bernd steht bei  $(5.5, 2, 0)^T$  und die Wand hat Normalengleichung

$$2x - 1.5y = 12.5$$

mit Normalenvektor  $\mathbf{n} = (2, -1.5, 0)^T$  und Stützvektor  $\mathbf{p} = (4, -3, 0)^T$ . Anna möchte Bernd den Ball so zuwerfen, dass er einmal an der Wand abprallt und dann in Bernds Händen landet. Dabei soll der Ball den Boden nicht berühren. Berechne die Trajektorie vom Ball und die Kraft, mit der Anna den Ball abwerfen muss unter der Annahme von Reibungsfreiheit.

Wir wollen jetzt nicht die Lösung für dieses Problem finden, sondern vielmehr fragen: Ist die hier gewählte Basis zur Beschreibung der Ausgangssituation oder für die Berechnung hilfreich? Wäre es nicht viel einfacher, die Situation basisfrei zu beschreiben? Wie sähe eine solche Beschreibung aus?

## 1.6 Lineare Abbildungen zwischen Tensoren

### 1.28 Definition (Brauer-Diagramm und deren Multiplikation):

Ein Brauer-Diagramm ist ein besonderer Graph. Er besteht aus zwei Zeilen von Knoten,

<sup>7</sup>Donald Ervin Knuth, geb. 1938, amer. Informatiker und Mathematiker

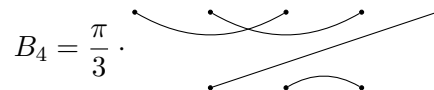
$n, n \in \mathbb{N}$ , Knoten in der oberen Zeile und  $n + 2z, z \in \mathbb{Z}$ , Knoten in der unteren Zeile. Die Knoten sind paarweise miteinander verbunden, dabei dürfen die Verbindungen sowohl von einer Zeile zur anderen gehen, als auch innerhalb einer Zeile zwei Knoten miteinander verbinden. Brauer-Diagramme verstehen wir als visuelle Darstellung von linearen Abbildungen zwischen Tensoren. Entsprechend können sie linear miteinander kombiniert und auch mit Skalaren aus dem zum Tensorraum gehörenden Körper multipliziert werden. Zwei Brauer-Diagramme können außerdem miteinander multipliziert werden zu einem dritten Brauer-Diagramm. Dies entspricht der Hintereinanderausführung zweier linearer Abbildungen. Ausgerechnet wird das Brauer-Diagramm der zusammengesetzten Abbildung, indem die zwei Brauer-Diagramme übereinander geschrieben werden und die Knoten der unteren Zeile vom ersten Diagramm reihenfolgeerhaltend mit den Knoten der oberen Zeile vom zweiten Diagramm verbunden werden. Falls geschlossene Kreise in diesem 4-zeiligen Graph existieren, so wird das Ergebnis für jeden geschlossenen Kreis mit einem Skalarfaktor  $\alpha$  multipliziert, für unsere Anwendungen ist  $\alpha$  gleich der Dimension des Vektorraums  $V$ , von dem wir Tensorprodukte bilden,

$$\alpha = \dim V.$$

Bei  $k$  geschlossenen Kreisen ist das Ergebnis dann der Graph, der die Verbindung der obersten Knoten-Zeile zur untersten Knoten-Zeile darstellt multipliziert mit  $\alpha^k$ .

### 1.29 Beispiel (Brauer-Diagramme):

Folgende Graphen sind alles Brauer-Diagramme:



$B_1$  ist die Identität auf  $V^{\otimes 4}$ .

### 1.30 Beispiel (Multiplikation zweier Brauer-Diagramme):

Sei  $d$  die Dimension des Vektorraums  $V$ , auf dessen Tensorprodukte wir lineare Abbildungen betrachten. Das Produkt von  $B_3$  und  $B_4$  im oberen Beispiel, bzw. die lineare



Abbildung, die durch  $B_4 \circ B_3$  beschrieben wird, wird dann folgendermaßen berechnet:

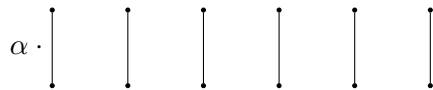
$$\begin{aligned}
 B_4 \circ B_3 &= 12 \cdot \frac{\pi}{3} \cdot \text{Diagram} \\
 &= 4\pi d^1 \cdot \text{Diagram}
 \end{aligned}$$

Auf einen reinen Tensor angewandt werden Brauer-Diagramme, indem jeder einzelne Tensorfaktor reihenfolgeerhaltend den Knoten der oberen Zeile zugeordnet wird, auf gemischte Tensoren mit linearer Fortsetzung. Dabei sind mit entsprechender Definition (siehe unten) die Brauer-Diagramme eine vollständige Beschreibung aller *nützlichen*, bzw. *natürlichen* Arten von linearen Abbildungen. Was genau eine Abbildung nützlich macht, werden wir später mit Hilfe von Darstellungstheorie herausfinden. Zunächst wollen wir hier die verschiedenen linearen Abbildungen zwischen Tensoren klassifizieren:

### 1.31 Definition (Skalarmultiplikation eines Tensors):

Sei  $v$  ein Tensor aus  $V^{\otimes n}$ . Dann ist die Multiplikation von  $v$  mit einem  $\alpha \in K$ ,  $\alpha \cdot v$  eine lineare Abbildung von  $V^{\otimes n}$  nach  $V^{\otimes n}$ .

Das Brauer-Diagramm der Skalarmultiplikation ist die Identität multipliziert mit  $\alpha$ . Es hat also  $n$  Knoten in jeder Zeile und besteht nur aus senkrechten Verbindungen, das sind Verbindungen zwischen dem  $k$ -ten Knoten der oberen Zeile und dem  $k$ -ten Knoten der unteren Zeile, z.B. mit  $n = 6$ :



### 1.32 Definition (Permutation bilden von einem Tensor):

Sei  $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$  ein reiner Tensor aus  $V^{\otimes n}$  und  $\sigma \in S_n$  eine Permutation. Dann definiert die Abbildung

$$\Pi_\sigma : \begin{cases} V^{\otimes n} & \rightarrow V^{\otimes n} \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_n & \mapsto v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)} \end{cases}$$

die durch  $\sigma^{-1}$  bestimmte Permutation der Faktoren des Tensors. Für einen allgemeinen Tensor ist diese Permutation als lineare Fortsetzung der obigen Abbildung gegeben.

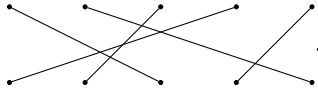
Das Brauer-Diagramm der Permutation  $\sigma$  enthält je Zeile  $n$  Knoten und die Kanten verbinden nur Knoten von der oberen Zeile mit Knoten der unteren Zeile. Die genauen Verbindungen ergeben sich aus der Permutation  $\sigma^{-1}$ . Jedem Input  $k$  von  $\sigma^{-1}$  wird das Ergebnis  $l = \sigma^{-1}(k)$  zugeordnet. Im Brauer-Diagramm wird dann der  $k$ -te Knoten der

oberen Zeile (gezählt von links nach rechts) mit dem  $l$ -ten Knoten der unteren Zeile verbunden. Mit der 2-Zeilen-Schreibweise von  $\sigma^{-1}$  lässt sich dies gut ablesen, z.B. sei:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\Rightarrow \sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Das zu  $\Pi_\sigma$  zugehörige Brauer-Diagramm ist dann:



### 1.33 Definition (Spur nehmen von einem Tensor):

Sei  $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$  ein reiner Tensor aus  $V^{\otimes n}$ . Dann definiert die Abbildung

$$\text{tr}_{kl} : \begin{cases} V^{\otimes n} & \rightarrow V^{\otimes n-2} \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \otimes \cdots \otimes v_l \otimes \cdots \otimes v_n & \mapsto \langle v_k, v_l \rangle v_1 \otimes \cdots \otimes \hat{v}_k \otimes \cdots \otimes \hat{v}_l \otimes \cdots \otimes v_n \end{cases}$$

die Spur zwischen dem  $k$ -ten und  $l$ -ten Faktor des Tensors. Für einen allgemeinen Tensor ist die Spur als lineare Fortsetzung der obigen Abbildung gegeben.

Das Brauer-Diagramm der Spur besteht aus  $n$  Knoten in der oberen und  $n-2$  Knoten in der unteren Zeile. Der  $k$ -te und  $l$ -te Knoten der oberen Zeile sind mit einer Kante verbunden, solche Kanten nennen wir waagerecht. Alle anderen Knoten sind mit ausschließlich senkrechten Kanten verbunden, z.B. für  $\text{tr}_{6,7}$  auf  $V^{\otimes 7}$ :



Diese Definition ist auch in entgegengesetzte Richtung zu verstehen: Wenden wir ein Brauer-Diagramm, welches zwei obere Knoten miteinander verbindet, auf einen reinen Tensor an, so ist zwischen den beiden entsprechenden Faktoren des Tensors die Spur zu bilden.

### 1.34 Definition (Einfügen des Casimir-Elements):

Sei  $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$  ein reiner Tensor aus  $V^{\otimes n}$  und  $\Omega_V$  das Casimir-Element zu  $V$ . Dann definiert die Abbildung

$$\Omega : \begin{cases} V^{\otimes n} & \rightarrow V^{\otimes n+2} \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_n & \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes \Omega_V \end{cases}$$

die Einfügung des Casimir-Elements an den Tensor. Für einen allgemeinen Tensor ist die Einfügung des Casimir-Elements als lineare Fortsetzung der obigen Abbildung gegeben.

Das Brauer-Diagramm der Einfügung des Casimir-Elements besteht aus  $n$  Knoten in der oberen und  $n + 2$  Knoten in der unteren Zeile. Die letzten beiden Knoten der unteren Zeile sind mit einer Kante verbunden. Alle anderen Knoten sind mit ausschließSSlich senkrechten Kanten verbunden, z.B. :



Diese Definition ist auch in entgegengesetzte Richtung zu verstehen: Wenden wir ein Brauer-Diagramm, welches zwei untere Knoten miteinander verbindet, auf einen reinen Tensor an, so ist an den beiden entsprechenden Faktoren des Tensors das Casimir-Element einzufügen.

An welchen zwei Stellen die zwei Faktoren des Casimir-Elements eingefügt werden, kann man sich im Prinzip aussuchen, das entspricht dann der Hintereinanderausführung von  $\Omega_V$ -Einfügung und Permutation. Insbesondere können die beiden Hälften von  $\Omega_V$  auch voneinander getrennt werden, z.B. wird mit

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n+1 & n+2 \\ n+2 & 2 & \cdots & n+1 & 1 \end{bmatrix} \in S_{n+2}$$

durch

$$\Pi_\sigma \circ \Omega(v_1 \cdots \otimes \cdots v_n) \quad (1)$$

das mit  $\Omega$  eingefügte  $\Omega_V$  in zwei Teile zerlegt.

**1.35** (Brauer-Diagramme beschreiben alle Sinnvollen (bzw. natürlichen) linearen Abbildungen zwischen Tensoren): Die Menge aller Linearkombinationen von allen Brauer-Diagrammen ist gleich der Menge aller natürlichen linearen Abbildungen zwischen Tensoren.

**1.36** (Bilineare Abbildungen): Bilineare Abbildungen zwischen Tensoren lassen sich auf lineare Abbildungen zurückführen, indem man das Tensorprodukt der beiden Input-Tensoren bildet und dann eine beliebige lineare Abbildung ausführt.

### 1.37 Lemma und Definition:

Sind  $f : V \rightarrow W, g : V' \rightarrow W'$  zwei lineare Abbildungen zwischen  $K$ -Vektorräumen, so gibt es genau eine lineare Abbildung  $V \otimes V' \rightarrow W \otimes W'$ , die  $v \otimes v'$  auf  $f(v) \otimes g(v')$  abbildet.

Diese Abbildung wird der Bequemlichkeit halber auch als  $f \otimes g$  bezeichnet. Für mehr als zwei Tensorfaktoren schreiben wir dann analog auch  $f \otimes g \otimes h \otimes \cdots$ .

### 1.38 Beispiel:

Wir können die Spur in dieser Schreibweise auch anders aufschreiben, z.B. ist

$$\text{tr}_{12} = \langle \cdot, \cdot \rangle \otimes \text{id}$$

wenn wir es als Abbildung  $(V \otimes V) \otimes (V^{\otimes n-2}) \rightarrow K \otimes V^{\otimes n-2} = V^{\otimes n-2}$  auffassen. Oft ist dies vereinfachend, zum Beispiel sieht man dieser Schreibweise an, was das Hintereinanderausführen von zwei Spuren bewirkt und dass diese zwei Abbildungen kommutieren.

**1.39:** Sind die Dimensionen endlich und hat man Basen der jeweiligen Vektorräume gewählt, so kann man  $f$  und  $g$  durch ihre Darstellungsmatrix angeben. Die Darstellungsmatrix von  $f \otimes g$  ist dann das sogenannte „Kronecker-Produkt“ der Matrizen  $F$  und  $G$ . Je nachdem, wie man die Tensorbasis  $\{b_i \otimes c_j\}$  anordnet (zeilen- oder spaltenweise durchnummerieren), ist das Kronecker-Produkt durch

$$F \otimes G = \begin{pmatrix} f_{11}G & f_{12}G & \cdots & f_{1m}G \\ f_{21}G & f_{22}G & \cdots & f_{2m}G \\ \vdots G & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}G & f_{n2}G & \cdots & f_{nm}G \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} Fg_{11} & Fg_{12} & \cdots & Fg_{1m'} \\ Fg_{21} & Fg_{22} & \cdots & Fg_{2m'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Fg_{n'1} & Fg_{n'2} & \cdots & Fg_{n'm'} \end{pmatrix}$$

gegeben.

## Aufgaben

### Aufgabe 1.1. – Casimir-Elemente von euklidischen Räumen

Es sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und  $e_1, \dots, e_n$  eine Orthonormalbasis.

a.) Zeige, dass der Casimir-Tensor

$$\Omega_V := \sum_{i=1}^n e_i \otimes e_i$$

unabhängig von der Basiswahl ist, d.h. wenn  $e'_1, \dots, e'_n$  eine weitere Orthonormalbasis von  $V$  ist, dann gilt:

$$\sum_{i=1}^n e_i \otimes e_i = \sum_{i=1}^n e'_i \otimes e'_i$$

Hinweis: Orthogonale Matrizen.

b.) Zeige, dass  $\Omega_V$  „isotrop“ ist, d.h. für alle Isometrien  $Q : V \rightarrow V$  gilt:

$$(Q \otimes Q)(\Omega) = \Omega$$

Hinweis: Benutze a.

### Aufgabe 1.2. – Casimir-Elemente allgemein

Es sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $K$ -Vektorraum,  $b_1, \dots, b_n$  eine beliebige Basis von  $V$  und  $b_1^*, \dots, b_n^*$  die dazu duale Basis von  $V^*$ .

a.) Zeige, dass

$$\Omega := \sum_{i=1}^n b_i \otimes b_i^* \in V \otimes V^*$$

unabhängig von der Basiswahl ist.

Hinweis: Wenn  $A$  eine Basiswechselmatrix zwischen zwei Basen von  $V$  ist, wie sieht dann die Basiswechselmatrix der beiden dazugehörigen dualen Basen von  $V^*$  aus?

b.) Wie entspricht das dem Casimir-Element euklidischer Räume?

i.) Zeige zunächst, dass die Abbildung  $V \rightarrow V^*, v \mapsto \langle v, - \rangle$  ein Isomorphismus  $V \rightarrow V^*$  ist.

ii.) Was tut diese Abbildung mit einer Orthonormalbasis?

### Aufgabe 1.3. – Aber Tensoren sind doch so Buchstaben mit Indizes

Häufig wird einem von Physikern oder Ingenieuren ein Tensor lediglich als ein Buchstabe mit Indizes untergejubelt - z.B. der Spannungstensor  $\sigma_{ij}$ . Wir wollen verstehen, wie der Zusammenhang mit unserer Definition ist.

Es sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und  $e_1, \dots, e_n$  eine Orthonormalbasis. Wir betrachten das  $m$ -fache Tensorprodukt  $V^{\otimes m}$ . Wer mag, kann zur Vereinfachung  $n = 3$  und  $K = \mathbb{R}$  wählen.

- a.) Einen beliebigen Tensor aus  $V^{\otimes m}$  schreiben wir z.B. als  $T \in V^{\otimes m}$ , während er andernorts mit  $T_{j_1 \dots j_n}$  bezeichnet wird, was streng genommen nur eine Kollektion besonders nummerierter Zahlen aus  $K$  ist. Wie ist der Zusammenhang zwischen  $T$  und  $T_{j_1 \dots j_n}$ ?  
Hinweise: Von  $V$  induzierte Basiswahl für  $V^{\otimes m}$ , Vergleiche mit einem Vektor  $v \in V$  und  $v_i$ .
- b.) Ein sehr häufig verwendeter „Buchstabe mit Indizes“ ist das Kronecker- $\delta$ , oder auch der  $\delta_{ij}$ -Tensor. Um welchen Tensor handelt es sich hier? Hinweis: Übersetze in die Schreibweise mit dem Tensorprodukt  $\otimes$ .
- c.) Die Spur eines Tensors zwischen seinem  $k$ -ten und  $l$ -ten Faktor wird in Indexschreibweise als Dopplung eines bestimmten Indexes an den entsprechenden Stellen notiert,  $T_{j_1 \dots j_{k-1} i j_{k+1} \dots j_{l-1} i j_{l+1} \dots j_m}$ , die eine Summe über  $i$  von 1 bis  $n$  impliziert (a.k.a. *Einstein'sche Summenkonvention*). Überzeuge dich, dass dies unserer Definition von Spur entspricht.  
Üblich zum Spur nehmen ist auch eine Schreibweise mit dem Kronecker- $\delta$ :

$$T_{j_1 \dots j_{k-1} i j_{k+1} \dots j_{l-1} i j_{l+1} \dots j_m} \delta_{ir},$$

ebenfalls mit impliziter Summe über gedoppelte Indizes. Zeige, dass dies die gleiche Operation beschreibt.

- d.) Eine weitere häufiger zu findende Schreibweise mit dem Kronecker- $\delta$  ist die folgende:

$$T_{j_1 \dots j_{k-1} j_k j_{k+1} \dots j_{l-1} j_l j_{l+1} \dots j_m} \delta_{ir},$$

was üblicherweise gekürzt wird auf  $T_{j_1 \dots j_m} \delta_{j_{m+1} j_{m+2}}$ . Was ist der Unterschied zu c.)? Schreibe diesen Tensor ohne Indizes auf.

#### Aufgabe 1.4. – Was denn für Indizes?

Schön, dass dir die Index-Schreibweise noch nicht begegnet ist. Da wir in unserem Kurs so wenig wie möglich mit dieser Schreibweise arbeiten wollen, kann dies zu deinem Vorteil sein.

Es sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und  $e_1, \dots, e_n$  eine Orthonormalbasis. Wir betrachten das  $m$ -fache Tensorprodukt  $V^{\otimes m}$ . Wer mag, kann zur Vereinfachung  $n = 3$  und  $K = \mathbb{R}$  wählen. Zeige, dass  $\text{tr}_{ir}(T) = \text{tr}_{i,m+1} \circ \text{tr}_{r,m+1} \circ \Omega(T)$  gilt.

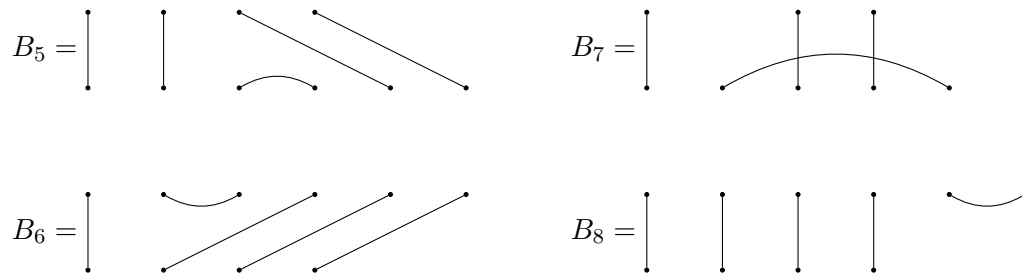
#### Aufgabe 1.5. – Warum heiſSt das Spur?

Der Begriff Spur kommt einem üblicherweise als Summe der Diagonaleinträge einer Matrix unter. Überzeuge dich, dass es sich im Falle von 2-Tensoren um genau diese Operation handelt.

#### Aufgabe 1.6. – Brauer-Diagramme

Wir wollen uns im Folgenden anhand ein paar Beispielen überzeugen, dass die Multiplikation zweier Brauer-Diagrammen tatsächlich dem Hintereinanderausführen der dazugehörigen linearen Abbildungen entspricht.

- a.) Schreibe die Brauer-Diagramme von den beiden Abbildungen  $\Pi_\sigma$  und  $\Omega$  aus Gleichung 1 auf und berechne das Brauer-Diagramm der Abbildung  $\Pi_\sigma \circ \Omega$ .
- b.) In der Definition von Brauer-Diagrammen haben wir für die Multiplikation zweier Brauer-Diagramme definiert, dass für jeden geschlossenen Kreis im Brauer-Diagramm das Ergebnis-Diagramm mit dem Faktor  $\dim V$  multipliziert wird. Dieser Faktor muss so festgelegt werden, um Brauer-Diagramme als äquivalente Schreibweise für die vorgestellten linearen Abbildungen zwischen Tensoren benutzen zu können. Warum? Hinweis: Spur vom Casimir-Element
- c.) Gegeben seien die folgenden Brauer-Diagramme:



Zeige, dass das Ergebnis der Multiplikation  $B_6 \circ B_5$  der linearen Abbildung, die durch Hintereinanderausführen von  $B_5$  und  $B_6$  gegeben ist, entspricht. Zeige dies auch für  $B_7 \circ B_8$ .

### Aufgabe 1.7. – Wiederholung von Isomorphie zwischen Vektorräumen: Matrix vs. 2-Tensor

Matrizen und 2-Tensoren sind einander sehr ähnlich, so ähnlich sogar, dass sie zueinander isomorph sind. Gegeben ein  $K$ -Vektorraum  $V$  der Dimension  $n$ . Genauer: Der Raum der Matrizen  $K^{n \times n}$  und  $V \otimes V^*$  sind isomorph zueinander. Wir wollen nun diesen Isomorphismus genauer betrachten.

$V \otimes V$ ,  $V \otimes V^*$ ,  $V^* \otimes V^*$

Ins Darstellungstheoriekapitel

### Aufgabe 1.8. – Wilde Behauptungen (schwer)

Im Skript wurde behauptet:

„alle physikalisch sinnvollen Dinge [sind] von sich aus basisfrei und somit zwangsläufig auch basisfrei berechenbar, wenn sie überhaupt berechenbar sind“

Überzeuge dich davon, dass das nicht nur so daher gesagt ist, sondern ein beweisbarer Fakt ist. Insbesondere ist hier als Teilbehauptung enthalten: Es ist möglich, physikalisch sinnvolle Daten (sowohl die Input- als auch Output-Daten der Berechnung) basisfrei so zu repräsentieren, dass damit immer noch Berechnungen möglich sind.

(Und es sei erneut davor gewarnt, dass „berechnen“ nicht „effizient berechnen“ bedeutet)

## 2 Warum Darstellungstheorie?

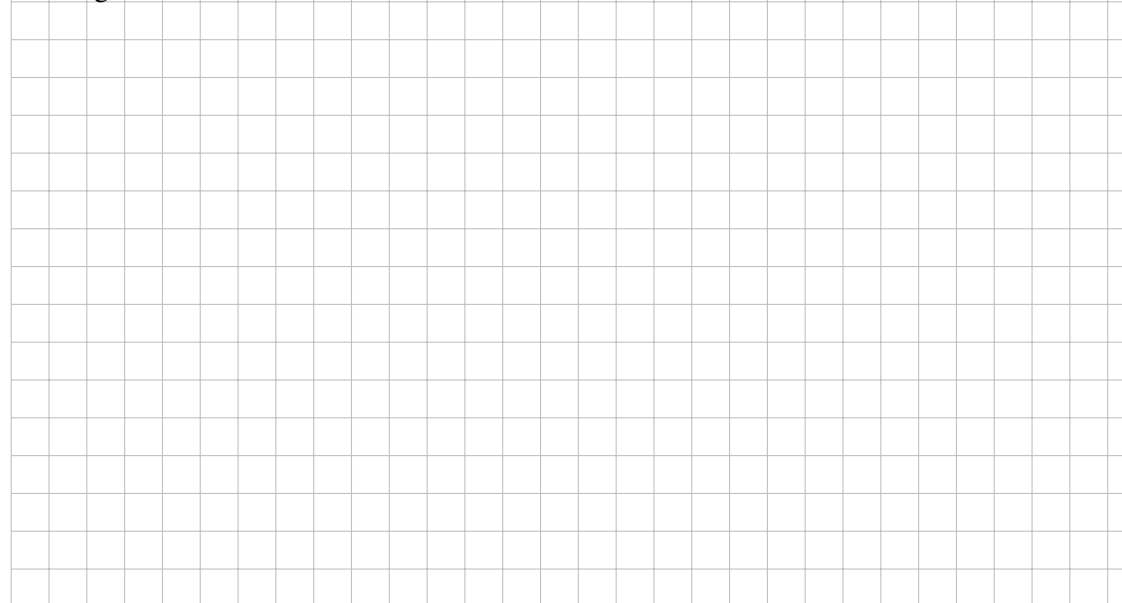
### 2.1 Geschickte Basiswahl

Wie dem ein oder anderen aufgefallen sein wird, haben wir in dem vorherigen Kapitel Tensoren eingeführt, ohne eine Basis für deren Vektorraum zu benötigen oder vielleicht im Nachgang eine Basis zu konstruieren. Allgemeine Aussagen lassen sich schließlich auch weitgehend basisfrei, oder zumindest basis-unabhängig machen. Jetzt wollen manche jedoch Tensoren nicht nur einfach so für ein bisschen hübsche Mathematik benutzen sondern tatsächlich mal ein Problem mit Zahlen (und zwar nicht nach dem Mathematiker-Prinzip "Sei  $a \in \mathbb{R} \dots$ ", sondern halt mal welche mit echten Ziffern) möglichst *effizient* ausrechnen. Dafür möchte man meistens ab irgendeinem Punkt eine Basis wählen, idealerweise eine, die orthonormal bezüglich eines gewählten Skalarproduktes ist.

Hieraus ließe sich recht simpel eine orthonormale Basis für den Tensorraum ableiten. Aber ist diese Basis auch eine gute Basis? Was macht eine "gute" Basis überhaupt aus?

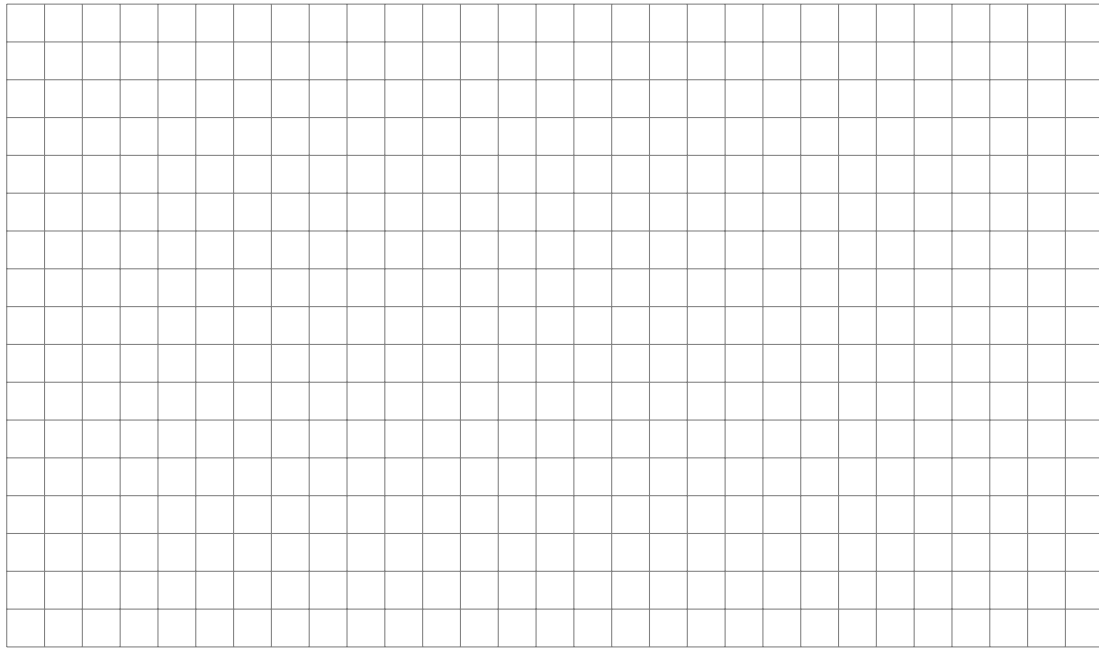
Gehen wir zu unseren Ballwerfern Anna und Bernd zurück. Formulieren wir das gleiche Problem etwas um:

Anna und Bernd stehen 2.5 Meter voneinander entfernt in einer ebenen Wiese einer flachen Wand gegenüber. Beide haben einen Abstand zur Wand von 5 Metern. Anna hat einen Ball in der Hand und möchte ihn Bernd so zuwerfen, dass er einmal an der Wand abprallt und dann in Bernds Händen landet. Dabei soll der Ball den Boden nicht berühren. Berechne die Trajektorie vom Ball und die Kraft, mit der Anna den Ball abwerfen muss unter der Annahme von Reibungsfreiheit.



Welche Basis würde man am ehesten wählen, um diese Aufgabe zu lösen und warum? Welche Wahlfreiheiten haben wir? Gibt es mehr als eine sinnvolle Basis?





Diese Frage lässt sich auch auf den Vektorraum der Tensoren übertragen. Wir werden genauer definieren, was es für eine Basis heißt, günstig gewählt zu sein und herausfinden, wie solch eine Basis für symmetrische Tensoren bzw. Polynome aussieht.

## 2.2 Einschränkung auf erlaubte lineare Abbildungen zwischen Tensoren und ihre Klassifikation

Wie für Tensoren bereits deutlich wurde, gibt es unendlich viele lineare Abbildungen zwischen den Tensorräumen. Jetzt wollen wir mit Tensoren jedoch meistens physikalische Probleme beschreiben, die bestimmten grundsätzlichen Symmetrien unterliegen. So wird z.B. ein Ball bei gleichen Bedingungen immer die gleiche Flugbahn haben, ganz egal wie wir das Koordinatensystem drehen, um die Flugbahn zu berechnen. Dieses Erkenntnis lässt sich in mathematische Forderungen gießen, welche uns die linearen Abbildungen zwischen Tensoren als nur 4 Arten klassifizieren lässt.

## 2.3 Berechnungen mit linearen Abbildungen

Wie wir zuvor gelernt haben, lässt sich im Prinzip jede multi-lineare Abbildung durch eine i.A. sehr große Matrix darstellen. Nun ist eine Berechnung dann besonders einfach (bzw. bei Nutzung eines Computers besonders schnell), wenn die Matrix viele 0en hat. Dies ist ein beliebter Grund in der angewandten Numerik, um einen Basiswechsel durchzuführen: Ziel ist es, die Basis so zu drehen, dass eine voll besetzte Matrix maximal viele 0 hat, da sich so bei hinreichend großen Dimensionen die Rechenzeit insgesamt stark reduziert.

Mit Hilfe der Darstellungstheorie können wir sogar einen Schritt weiter gehen - Wir werden für eine bestimmte Klasse von linearen Abbildungen eine Basis finden, die uns

maximal viele 0en in der Matrix garantiert.

## 2.4 Wiederholung: Gruppen

### 2.1 Definition (Gruppen und Gruppenhomomorphismen):

Eine Gruppe  $(G, \cdot)$  besteht aus

- einer Menge  $G$ ,
- einer Abbildung  $\cdot : G \times G, (g, h) \mapsto g \cdot h$ , genannt Multiplikation,

die die Gruppen-Axiome in Tabelle 2.1 erfüllen.

Gruppen-Axiome	Bedeutung
Assoziativität	$\forall g_1, g_2, g_3 \in G : g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$
Neutrales Element bzw. „Eins“	$\exists 1 \in V \forall g \in G : g \cdot 1 = g = 1 \cdot g$
Inverse Elemente	$\forall g \in G \exists h \in G : g \cdot h = 1 = h \cdot g$
Optional kann gelten	
Kommutativität	$\forall g, h \in G : g \cdot h = h \cdot g$
Axiom von Gruppenhomomorphismen	Bedeutung
Verträglichkeit mit Multiplikation	$\forall g, h \in G : f(g \cdot h) = f(g) \cdot f(h)$

Tabelle 2.1: Definierende Eigenschaften von Gruppen und Gruppenhomomorphismen

Sind  $G, H$  zwei Gruppen und  $f : G \rightarrow H$  eine Abbildung, so heißt  $f$  Gruppenhomomorphismus, falls sie mit den beiden Multiplikationen verträglich ist.

Existiert ein Homomorphismus  $f' : W \rightarrow V$  mit  $f \circ f' = f' \circ f = \text{id}$ , so nennt man  $f$  Isomorphismus der Gruppen.

## 2.5 Elementare Darstellungstheorie

### 2.2 Definition (Darstellungen):

Sei  $G$  eine Gruppe und  $\mathbb{K}$  ein Körper. Eine Darstellung von  $G$  über  $\mathbb{K}$  besteht aus

- einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$ ,
- einer Abbildung  $\cdot : G \times V \rightarrow V, (g, v) \mapsto g \cdot v$ , genannt „Operation“ (der Gruppe auf dem Vektorraum),

Axiome von Darstellungen	Bedeutung
Linearität	$\forall g \in G : (V \rightarrow V, v \mapsto g \cdot v)$ ist eine lineare Abbildung
Assoziativität	$\forall g, h \in G \forall v \in V : g \cdot (h \cdot v) = (g \cdot h) \cdot v$
Nichttrivialität/Normierung	$\forall v \in V : 1_G \cdot v = v$
Axiome von Homomorphismen	Bedeutung
$\mathbb{K}$ -Linearität	$f$ ist eine lineare Abbildung $V \rightarrow W$
$G$ -Linearität	$\forall g \in G, v \in V : f(g \cdot v) = g \cdot f(v)$

Tabelle 2.2: Definierende Eigenschaften von Darstellungen und Homomorphismen zwischen Darstellungen

die die Axiome in Tabelle 2.2 erfüllen. Man sagt auch „ $G$  operiert auf dem Vektorraum  $V$ “ statt „ $G$  ist eine Darstellung von  $G$ “.

Sind  $V, W$  zwei Darstellungen von  $G$  und  $f : V \rightarrow W$  eine Abbildung, so heißt  $f$  Homomorphismus oder  $\mathbb{K}G$ -lineare Abbildung, falls die beiden Axiome in Tabelle 2.2 erfüllt sind. Den Raum aller  $\mathbb{K}G$ -linearen Abbildungen von  $V$  nach  $W$  bezeichnen wir mit  $\text{Hom}_{\mathbb{K}G}(V, W)$ . Eine  $\mathbb{K}G$ -lineare Abbildung von  $V$  nach  $V$  (also gleicher Definitions- und Zielraum) heißt Endomorphismus, der Raum aller solcher Abbildungen wird mit  $\text{End}_{\mathbb{K}G}(V)$  notiert.

Existiert ein Homomorphismus  $f' : W \rightarrow V$  mit  $f \circ f' = f' \circ f = \text{id}$ , so nennt man  $f$  Isomorphismus der Darstellungen.

### Vereinbarung:

Wir werden ausschließlich endlichdimensionale Darstellungen betrachten. Es gibt auch eine reichhaltige Theorie unendlichdimensionaler Darstellungen, die für uns aber nicht relevant sein wird.

Wir werden uns außerdem ausschließlich für die Fälle  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  und ein bisschen  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  interessieren und andere Körper außen vor lassen. (Typischerweise ist Darstellungstheorie über  $\mathbb{C}$  immer der einfachste Fall und Darstellungstheorie über anderen Körpern als  $\mathbb{C}$  ist mindestens genauso schwierig oder schwieriger)

**2.3:** Eine Darstellung kann alternativ aufgefasst werden als Gruppenhomomorphismus  $G \rightarrow GL(V)$ : Jedem Gruppenelement  $g \in G$  wird die (invertierbare!) lineare Abbildung  $v \mapsto gv$  zugeordnet. Ist umgekehrt ein Gruppenhomomorphismus  $\phi : G \rightarrow GL(V)$  gegeben, so kann man  $V$  als  $G$ -Darstellung auffassen, indem man  $g \cdot v := \phi(g)(v)$  definiert.

Diese beiden Sichtweisen sind völlig identisch und beliebig austauschbar. Je nach Situation kann es einfacher sein, einen Homomorphismus nach  $GL(V)$  oder direkt die Operation der Gruppe auf  $V$  zu definieren.

Hat man aus irgendeinem Grund eine Basis von  $V$  gegeben, kann man bekanntlich lineare Abbildungen mit Matrizen identifizieren. Eine Darstellung ist in dieser Sichtweise dann eine Abbildung  $\Delta : G \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ , die jedem Gruppenelement  $g \in G$  eine (invertierbare) Matrix  $\Delta(g)$  zuordnet, sodass  $\Delta(1) = 1_{n \times n}$  und  $\Delta(g \cdot h) = \Delta(g) \cdot \Delta(h)$  erfüllt sind. Solch eine Abbildung nennt man dann auch Matrixdarstellung.

**2.4 Beispiel:** •  $GL(V)$  operiert auf  $V$ , die sogenannte „natürliche“ oder „kanonische“ Darstellung.

- Die symmetrische Gruppe  $Sym(m)$  (Gruppe aller Permutationen der Zahlen  $1, \dots, m$ ) operiert auf  $\mathbb{K}^m$  durch Vertauschen der Koordinaten (die sogenannte Permutations- oder kanonische Darstellung):

$$\sigma \cdot (v_1, \dots, v_m) := (v_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, v_{\sigma^{-1}(m)})$$

und auf der Tensorpotenz  $V^{\otimes m}$ :

$$\sigma \cdot v_1 \otimes \dots \otimes v_m := v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma^{-1}(m)}$$

(Aufgabe: Beweise, dass das  $^{-1}$  wirklich notwendig ist)

- Jede beliebige Gruppe hat triviale Darstellungen, nämlich für jeden beliebigen Vektorraum  $V$ :

$$g \cdot v := v$$

Spricht man von *der* trivialen Darstellung meint man damit diejenige mit  $V = K$ .

- Die symmetrische Gruppe hat eine nichttriviale, eindimensionale Darstellung, das Signum:

$$\sigma \cdot 1_K := \text{sgn}(\sigma) := \begin{cases} -1 & \text{falls } \sigma \text{ ungerade viele Inversionen enthält} \\ +1 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

**2.5 Lemma und Definition** (Neue Darstellungen aus vorhandenen):

Sei  $G$  eine Gruppe und  $V, W$  Darstellungen von  $G$  über einem festen Körper  $\mathbb{K}$ . Die folgenden sind dann auch Darstellungen von  $G$ :

- Die direkte Summe  $V \oplus W := \{ (v, w) \mid v \in V, w \in W \}$  wird zu einer Darstellung durch

$$g \cdot (v, w) := (gv, gw)$$

- Das Tensorprodukt  $V \otimes W$  durch

$$g(v \otimes w) := (gv) \otimes (gw)$$

- Der Dualraum  $V^* := \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$  durch

$$g \cdot \phi := v \mapsto \phi(g^{-1}v)$$

(Aufgabe: Beweise, dass das  $^{-1}$  wirklich notwendig ist)

- Der Raum der  $\mathbb{K}$ -linearen Abbildungen  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$  durch

$$g \cdot f := v \mapsto gf(g^{-1}w)$$

(Der Dualraum ist hiervon ein Spezialfall, wenn man für  $W$  die triviale Darstellung wählt)

Ist  $H \leq G$  eine Untergruppe von  $G$ , dann operiert  $H$  natürlich auch auf  $V$ . Die Darstellung von  $H$ , die wir so erhalten, nennt man Restriktion von  $V$  auf  $H$ .

**2.6 Beispiel** (Zentrales Beispiel – Die zwei- und dreidimensionalen Rotationsgruppen): So können wir z.B.  $\mathbb{K}^m$  auch als Darstellung jeder Untergruppe von  $GL_n(\mathbb{K})$  auffassen. Unser zentrales Beispiel wird sein, dass wir  $V = \mathbb{R}^3$  bzw.  $V = \mathbb{C}^3$  als Darstellung der Rotationsgruppe  $G = SO_3(\mathbb{R}) \leq GL_3(\mathbb{K})$  auffassen.

Die zweidimensionale Rotationsgruppe  $H = SO_2$  können wir auf mehrere verschiedene (aber äquivalente) Weisen als Untergruppe von  $SO_3$  auffassen, indem wir einen Vektor als feste Rotationsachse wählen, z.B. den Standardbasisvektor in  $z$ -Richtung  $(0, 0, 1)$ , und um diesen rotieren. Die Rotation  $h = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  operiert in diesem Beispiel als  $\Delta(h) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  auf  $\mathbb{K}^3$ .

**2.7:** Da wir bevorzugt basisfrei arbeiten, betrachten wir dies meistens wie folgt:  $V$  ist ein beliebiger dreidimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit einem fest gewählten Skalarprodukt und  $G$  ist die Rotationsgruppe dieses Skalarprodukts, d.h. die Gruppe  $G = \{ f : V \rightarrow V \mid \langle f(v), f(w) \rangle = \langle v, w \rangle \wedge \det(f) = 1 \}$ .

**2.8 Definition** (Unterdarstellungen):

Sei  $V$  eine Darstellung von  $G$ . Ein Untervektorraum  $U \leq V$  heit  $G$ -invarianter Unterraum oder Unterdarstellung von  $V$ , falls  $U$  unter der Gruppenoperation abgeschlossen ist, d.h.

$$\forall g \in G : g \cdot U = U$$

**2.9 Beispiel:** •  $\{0\}$  und  $V$  sind immer Unterdarstellungen von  $V$ .

- Die Gerade  $U_1 = \{ \lambda(1, 1, \dots, 1) \mid \lambda \in K \}$  und die Hyperebene  $U_2 := \{ (x_1, \dots, x_m) \mid \sum_{i=1}^m x_i = 0 \}$  sind zwei Unterdarstellungen der Permutationsdarstellung von  $G = \text{Sym}(m)$  auf  $V = \mathbb{K}^m$ . Falls  $\mathbb{K} \in \{ \mathbb{R}, \mathbb{C} \}$  ist, dann gilt  $V = U_1 \oplus U_2$ .

### 2.10 Definition (Irreduzible Darstellungen):

Eine Darstellung, die exakt zwei Unterdarstellungen hat (nämlich  $\{0\}$  und sich selbst), heit irreduzibel oder einfach. Eine nicht-einfache Darstellung heit entsprechend aufreduzibel.

**2.11:** Man vergleiche mit der Definition einer Primzahl als natürliche Zahl, die genau zwei Teiler hat.

**2.12:** Weil wir „exakt zwei“ und nicht „höchstens zwei“ fordern, ist der Nullvektorraum  $\{0\}$  niemals eine irreduzible Darstellung.

**2.13 Beispiel:** • Aus Dimensionsgründen ist jede eindimensionale Darstellung automatisch irreduzibel.

- $V$  ist eine irreduzible Darstellung von  $GL(V)$ .
- $\mathbb{R}^3$  (bzw.  $\mathbb{C}^3$ ) ist eine irreduzible Darstellung von  $SO_3$ .
- $\mathbb{K}^3$  ist *nicht* irreduzibel als Darstellung von  $SO_2$ , da die jeweils gewählte Drehachse ein eindimensionaler,  $SO_2$ -invarianter Unterraum ist. Die dazu senkrechte Ebene ist ein zweidimensionaler invarianter Unterraum.

**2.14:** An den letzten beiden Beispielen erkennen wir, dass die Restriktion einer irreduziblen Darstellung auf eine Untergruppe selbst wieder irreduzibel sein kann, aber nicht muss: Wenn man von  $GL_3$  zu  $SO_3$  einschränkt, bleibt  $\mathbb{K}^3$  irreduzibel; wenn wir von  $SO_3$  zu  $SO_2$  einschränken, bleibt es das nicht.

Auch die anderen Konstruktionsmöglichkeiten von neuen Darstellungen aus bekannten erhalten i.A. Irreduzibilität nicht:

- Die direkte Summe von zwei Darstellungen  $\neq 0$  ist niemals irreduzibel, weil die beiden Summanden invariante Unterräume sind.
- Das Tensorprodukt von Darstellungen ist immer reduzibel, wenn mindestens einer der Faktoren reduzibel ist, denn  $(U_1 \oplus U_2) \otimes W = (U_1 \otimes W) \oplus (U_2 \otimes W)$ . Das Tensorprodukt von irreduziblen Darstellungen ist i.A. aber auch nicht irreduzibel, z.B. ist  $V \otimes V$  niemals irreduzibel, wenn  $V$  nicht zufällig eindimensional ist. (Wenn es eindimensional ist, ist  $V \otimes V$  natürlich auch eindimensional und dementsprechend ausnahmsweise doch irreduzibel)

Es ist i.A. ein sehr schweres Problem, zu bestimmen, ob ein Tensorprodukt von zwei irreduziblen wieder irreduzibel ist und, wenn es das nicht ist, wie die irreduzi-

ben Unterräume des Tensorprodukts genau aussehen. Im Falle  $G = SO_3$  ist diese Fragestellung unter dem Namen „Clebsch<sup>8</sup>-Gordan<sup>9</sup>-Theorie“ bekannt.

Einzigste Ausnahme ist das Dualisieren:

**2.15 Lemma:**

Eine endlichdimensionale Darstellung  $V$  ist irreduzibel genau dann, wenn  $V^*$  irreduzibel ist.

---

<sup>8</sup>Alfred Clebsch, 1833–1872, dt. Mathematiker

<sup>9</sup>Paul Albert Gordan, 1832–1912, dt. Mathematiker

## Aufgaben

### Aufgabe 2.1. – Komische Minus Einsen (leicht)

a.) In den Beispielen wurde definiert, dass die symmetrische Gruppe  $Sym(m)$  durch

$$\sigma \cdot (v_1, \dots, v_m) := (v_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, v_{\sigma^{-1}(m)})$$

auf  $K^m$  auf der Tensorpotenz  $V^{\otimes m}$  durch

$$\sigma \cdot v_1 \otimes \dots \otimes v_m := v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma^{-1}(m)}$$

operiert.

b.) Ebenfalls definiert wurde, dass bei einer gegebenen Darstellung  $V$  der Dualraum  $V^* := \text{Hom}_K(V, K)$  zu einer Darstellung derselben Gruppe wird, indem man sie durch

$$g \cdot \phi := v \mapsto \phi(g^{-1}v)$$

operieren lässt.

Beweise, dass das Invertieren in beiden Definitionen nötig ist, damit die Assoziativitätsbedingung gilt.

### Aufgabe 2.2.

Wie lautet die Matrixdarstellung zu der obigen Darstellung von  $Sym(m)$  auf  $K^m$  ?

### Aufgabe 2.3.

Wenn  $\Delta : G \rightarrow K^{n \times n}$  eine Matrixdarstellung von  $G$  auf  $V$  bzgl. irgendeiner fest gewählten Basis  $B \subseteq V$  ist, wie lautet die Matrixdarstellung  $\Delta^*$  der dualen Darstellung von  $G$  auf dem Dualraum  $V^*$  bzgl. der dualen Basis  $B^*$  ?

### Aufgabe 2.4. – Basiswechsel

Wenn  $\Delta$  und  $\Delta'$  zwei Matrixdarstellungen derselben Darstellung von  $G$  auf  $V$  sind, wenn d.h.  $\Delta$  bzgl. einer Basis  $B$  und  $\Delta'$  bzgl. einer zweiten Basis  $B'$  gedacht ist, und wenn  $S$  die Basiswechselmatrix von  $B$  nach  $B'$  ist, was ist dann der Zusammenhang zwischen  $\Delta$ ,  $S$  und  $\Delta'$  ?

### Aufgabe 2.5.

a.) Es seien  $V$  und  $W$  zwei endlichdimensionale Darstellungen von  $G$ . Man beweise, dass die beiden Darstellungen  $\text{Hom}_K(V, W)$  und  $V^* \otimes W$  via

$$\alpha : V^* \otimes W \rightarrow \text{Hom}_K(V, W), \phi \otimes w \mapsto (v \mapsto \phi(v)w)$$

isomorph sind.

Insbesondere erhalten wir im Spezialfall  $V = W$  einen Isomorphismus zwischen  $V^* \otimes V$  und  $\text{Hom}_K(V, V)$ .



b.) Für  $V = W$ , wie lautet der Tensor, der durch den Isomorphismus auf  $\text{id}_V$  abgebildet wird?

c.) Zeige: Die Auswertungsabbildung  $\varepsilon : V^* \otimes V \rightarrow K, \phi \otimes v \mapsto \phi(v)$  ist  $G$ -linear.

d.)  $\varepsilon \circ \alpha^{-1}$  ist eine  $G$ -lineare Abbildung  $\beta : \text{Hom}_K(V, V) \rightarrow K$ . Welche?

**Aufgabe 2.6.**

Zeige, dass  $V \otimes V$  niemals irreduzibel ist, wenn  $\dim(V) \neq 1$  ist.

**Aufgabe 2.7.**

Zeige, dass  $V$  irreduzibel ist, wenn  $V^*$  es ist.

**Aufgabe 2.8. – Die kanonische Darstellung von  $SO_3$  ist irreduzibel**

Zeige, dass  $\mathbb{K}^3$  eine irreduzible Darstellung von  $G = SO_3$  ist.

**Aufgabe 2.9. – Isomorphie von  $V$  und  $V^*$**

Sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Zweck dieser Aufgabe ist es, genauer zu beleuchten, wieso  $V$  und  $V^*$  Grund verschiedene Vektorräume sind, obwohl sie als Vektorräume ja isomorph sind (d.h. die gleiche Dimension haben)

a.) **Manchmal sind sie isomorph.** Es sei ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $V$  gegeben. Zeige, dass  $V$  und  $V^*$  als  $SO(V)$ -Darstellungen via  $V \rightarrow V^*, v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$  isomorph sind.

b.) (schwerer als man denkt) **Manchmal aber auch nicht.** Zeige, dass  $V$  und  $V^*$  *nicht* isomorph sind als  $GL(V)$ -Darstellungen.