Warum spherical harmonics?

Johannes Hahn Andrea Hanke

20. Juni 2021

Inhaltsverzeichnis

0 Einführung

1 Warum Tensoren?

1.1 Wiederholung: Vektorräume

Wir kennen uns bereits mit Vektorräumen aus. Typische Beispiele sind $\mathbb{R}^3$ oder der Raum der Polynome von einem bestimmten Grad n. Da uns in diesem Kurs noch weitere

Vektorräume begegnen werden und zum Vergleich mit anderen mathematischen Objekten (z.B. Darstellungen), ist hier ihre Definition zusammengefasst.

1.1 Definition (Vektorräume und lineare Abbildungen)**:**
Sei K ein Körper. Ein K-Vektorraum $(V, +, \cdot)$ besteht aus

- einer Menge V,
- einer Abbildung $+ : V \times V \to V, (v, w) \mapsto v + w$, genannt (Vektor)addition und
- einer Abbildung $\cdot : K \times V \to V, (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$, genannt Skalarmultiplikation.

die die Vektorraum-Axiome in Tabelle 1.1 erfüllen. Alles, was Element eines Vektorraums ist, kann Vektor genannt werden.
Sind V, W zwei K-Vektorräume und $f : V \to W$ eine Abbildung, so heißt f (K-)lineare Abbildung oder (Vektorraum-)Homomorphismus, falls die beiden Axiome in Tabelle 1.1 erfüllt sind. Den Raum aller K-linearen Abbildungen von V nach W bezeichnen wir mit $\mathrm{Hom}_K(V, W)$. Eine K-linearen Abbildungen von V nach V (also gleicher Definitions- und Zielraum) heißt (Vektorraum-)Endomorphismus, der Raum aller solcher Abbildungen wird mit $\mathrm{End}_K(V)$ notiert.

1.2: Wir sind praktisch ausschließlich an $\mathbb{R}$- und $\mathbb{C}$-Vektorräumen interessiert in diesem Kurs.

1.3 Definition (Kern & Bild)**:**
Ist $f : V \to W$ eine K-lineare Abbildung, so ist

$$\ker(f) := \{\, v \in V \mid f(v) = 0 \,\}$$

der Kern von f und

$$\mathrm{im}(f) := \{\, w \in W \mid \exists v \in V : f(v) = w \,\}$$

das Bild von f.

1.2 Bilineare Abbildungen

1.4: Es gibt i.A. keine Multiplikation zweier Vektoren miteinander in irgendeinem Sinne. Wir können immer Skalare mit Vektoren multiplizieren, aber nicht Vektoren mit Vektoren. Nichts desto trotz ist es *manchmal* doch so, dass zusätzlich zu Addition und Skalarmultiplikation eine weitere Operation existiert, die ein sinnvolles Konzept von Multiplikation liefert, z.B.

a.) Der Vektorraum der Polynome $\mathbb{R}[X]$ hat die Polynommultiplikation, d.h.

$$\left(\sum_{i=0}^{n} a_i X^i\right) \cdot \left(\sum_{j=0}^{m} b_j X^j\right) := \sum_{k=0}^{n+m} \Big(\sum_{\substack{i,j \\ i+j=k}} a_i b_j \Big) X^k$$

Vektorraum-Axiom	**Bedeutung**
$(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe	Addition verhält sich wie erwartet
Assoziativität	$\forall u, v, w \in V : u + (v + w) = (u + v) + w$
Neutrales Element bzw. „Null“	$\exists 0 \in V \forall v \in V : v + 0 = 0 + v$
Inverse bzw. „negative“ Elemente	$\forall v \in V \exists w \in V : v + w = 0$
Kommutativität	$\forall u, v \in V : u + v = v + u$
Eigenschaften der Skalarmultiplikation	
Assoziativität	$\forall a, b \in K, v \in V : a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v$
Normierung bzw. Nichttrivialität	$\forall v \in V : 1 \cdot v = v$, wobei 1 das Einselement des Körpers bezeichnet
Verträglichkeit von Addition und Skalarmultiplikation	
Distributivität bzgl. $(V, +)$	$\forall a \in K, u, v \in V : a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$
Distributivität bzgl. $(K, +)$	$\forall a, b \in K, v \in V : (a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$
Axiome linearer Abbildungen	**Bedeutung**
Additivität	$\forall v_1, v_2 \in V : f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
Homogenität	$\forall \lambda \in K, v \in V : f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$

Tabelle 1.1: Definierende Eigenschaften von Vektorräumen und linearen Abbildungen

b.) Der Vektorraum der Funktionen $X \to \mathbb{C}$ für einen festen Definitionsbereich X hat die punktweise Multiplikation, d.h.

$$f \cdot g := x \mapsto f(x)g(x)$$

c.) Die Hintereinanderausführung von linearen Abbildungen $\mathrm{Hom}_K(V, W) \times \mathrm{Hom}_K(U, V) \to \mathrm{Hom}_K(U, W), (f, g) \mapsto f \circ g$ ist eine Abbildung, die sich in vielerlei Hinsicht auch wie eine Multiplikation verhält. Für $U = V = W$ erhält man insbesondere eine Multiplikation $\mathrm{End}_K(V) \times \mathrm{End}_K(V) \to \mathrm{End}_K(V)$.

Nach Wahl von je einer Basis können wir $\mathrm{Hom}_K(V, W)$, $\mathrm{Hom}_K(U, V)$ und $\mathrm{Hom}_K(U, W)$

mit $K^{n\times m}$, $K^{m\times p}$ und $K^{n\times p}$ identifizieren. Die Hintereinanderausführung von linearen Abbildung entspricht dann der Matrixmultiplikation.

d.) ...

1.5 Definition (Bilineare & multilineare Abbildungen)**:**
Sind V, W, X drei K-Vektorräume, so heißt eine Abbildung $\phi : V \times W \to X$ bilinear, falls sie beiden Linearitätsbedingungen in Tabelle 1.5 erfüllt, d.h. die Funktion ist separat linear, wenn man nur den ersten oder nur den zweiten Input variiert und den anderen festhält.

Axiom	**Bedeutung**
Linearität:	
im ersten Argument	$\forall v_1, v_2 \in V, w \in W : \phi(v_1 + v_2, w) = \phi(v_1, w) + \phi(v_2, w)$
	$\forall \lambda \in K, v \in W, w \in W : \phi(\lambda v, w) = \lambda\phi(v, w)$
im zweiten Argument	$\forall v \in V, w_1, w_2 \in W : \phi(v, w_1 + w_2) = \phi(v, w_1) + \phi(v, w_2)$
	$\forall \lambda \in K, v \in W, w \in W : \phi(v, \lambda w) = \lambda\phi(v, w)$
Falls $\phi : V \times V \to X$, kann optional gelten:	
Symmetrie bzw. Kommutativität	$\forall u, v \in V : \phi(u, v) = \phi(v, u)$
Antisymmetrie	$\forall u, v \in V : \phi(u, v) = -\phi(v, u)$
Falls $\phi : V \times V \to V$, kann optional gelten:	
Assoziativität	$\forall u, v, w \in V : \phi(u, \phi(v, w)) = \phi(\phi(u, v), w)$

Tabelle 1.2: Eigenschaften von bilinearen Abbildungen

Für Abbildungen $V_1 \times V_2 \times V_3 \to X$, die von drei Inputvektoren abhängig sind, kann man entsprechend definieren, dass eine Abbildung trilinear heißt, wenn sie die drei Distributivgesetze erfüllt. Für vier, fünf, ... k Input-Vektoren spricht man entsprechend von k-fach linearen Abbildungen.

1.6 Beispiel:
Die drei genannten „Multiplikationen“ von oben sind bilinear. Polynommultiplikation und

punktweise Multiplikation von Funktionen sind kommutativ und assoziativ. Die Komposition $\mathrm{End}_K(V) \times \mathrm{End}_K(V) \to \mathrm{End}_K(V)$ ist assoziativ, aber nicht kommutativ, falls $\dim(V) > 1$.
Es gibt viele weitere, äußerst nützliche Beispiele.

d.) Richtungsableitungen sind bilinear in der Richtung und der Funktion:

Sei $X \subseteq \mathbb{R}^n$ ein geeigneter Definitionsbereich (z.B. eine offene Menge). Sei außerdem $f : X \to \mathbb{C}$ eine differenzierbare Funktion. Dann existieren insbesondere alle Richtungsableitungen $(\partial_v f)(x_0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x_0)-f(x_0+tv)}{t}$ in allen Punkten $x_0 \in X$. Die Abbildungsvorschrift $(v, f) \mapsto \partial_v f$ liefert eine bilineare Abbildung für mehrere Kombinationen von Vektorräumen, z.B. $\mathbb{R}^n \times C^1(\mathbb{R}^n) \to C^0(\mathbb{R}^n)$ oder $\mathbb{R}^n \times C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

e.) Allgemeiner: Lineare Differentialoperatoren:

Für mehrfach differenzierbare Funktionen kann man natürlich auch mehrere Ableitungsschritte hintereinander ausführen. Auf diese Weise erhält man multilineare Abbildungen: k-faches Ableiten in k Richtungen, also der Differentialoperator $\partial_{v_1}\partial_{v_2}\cdots\partial_{v_k}$ ist k-fach linear in den Vektoren $v_1, ..., v_k$ als Inputs. Die Anwendung auf eine Funktion ist entsprechend $(k + 1)$-fach linear in den k Richtungsvektoren und der Funktion als Inputs.

Als k-lineare Abbildung ist dies eine symmetrische Abbildung, d.h. $\partial_v \partial w f = \partial_w \partial_v f$, sofern f zweimal stetig differenzierbar ist. Das ist der Satz von Schwarz[1].

f.) Kreuzprodukt:

Es gibt eine besondere bilineare Abbildung $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, genannt Kreuzprodukt, die in anderen Dimensionen keine gute Analogie hat, nämlich

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ x_1 z_2 - x_2 z_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Es ist bilinear, aber weder kommutativ noch assoziativ. Stattdessen ist es antisymmetrisch.

1.3 Das Tensorprodukt

1.7: Bilineare Abbildungen sind in vielerlei Hinsicht ähnlich zu linearen Abbildungen, z.B. kann man sie durch Basiswahl eindeutig beschreiben, d.h.

Wenn V, W zwei K-Vektorräume sind, $b_1, \dots, b_n$ eine Basis von V und $c_1, \dots c_m$ eine Basis von W, und $\phi : V \times W \to X$ eine bilineare Abbildung, dann sind alle Werte $\phi(v, w)$ bereits eindeutig festgelegt, wenn man $\phi(b_i, c_j)$ für alle i und j kennt, und umgekehrt liefert jede beliebige Wahl von Vektoren $x_{ij} \in X$ genau eine bilineare Abbildung $\psi : V \times W \to X$, die $\psi(b_i, c_j) = x_{ij}$ erfüllt.

[1] Hermann Amandus Schwarz (1843 – 1921), dt. Mathematiker.

Weiter könnte man z.B. jetzt den Raum aller bilinearen Abbildungen $Bil(V, W; X)$ betrachten und beweisen, dass das selbst ein Vektorraum ist genau wie der Raum der linearen Abbildungen zwischen zwei festen Vektorräumen selbst ein Vektorraum ist.

Ähnliches gilt auch für k-lineare Abbildungen. Außerdem kann man sich davon überzeugen, dass diese Strukturen mit Hintereinanderausführung von Abbildungen verträglich sind. Hier ist noch zu beachten, dass multilineare Abbildungen viel mehr Möglichkeiten haben, zwei Abbildungen hintereinander auszuführen, z.B. könnte man zwei bilineare Abbildungen hintereinander ausführen, indem man

$$\phi(\psi(u, v), w) \quad \text{oder} \quad \phi(u, \psi(v, w))$$

bildet und i.A. sind das zwei verschiedene 3-lineare Abbildungen. Man hat bereits drei fundamental verschiedene Möglichkeiten, lineare und bilineare Abbildungen miteinander zu kombinieren: Man kann $\phi(\alpha(u), v)$, $\phi(u, \alpha(w))$ oder $\alpha(\phi(u, v))$ bilden je nachdem, was davon tatsächlich definiert ist. Alle Kombinationen sind jedoch wieder bilineare Abbildungen. Wenn man allgemein k- und m-lineare Abbildungen miteinander kombinieren will, hat man sehr schnell eine explodierende Anzahl verschiedener Möglichkeiten vor sich. Sie alle liefern wieder multilineare Abbildungen als Ergebnis und alle Möglichkeiten a verschiedene multilineare Abbildungen auf diese Weise zu kombinieren, sind selbst a-fach lineare Operationen zwischen den entsprechenden Abbildungsräumen.

Man könnte all das jetzt für alle diese Kombinationen beweisen, wenn man zu viel Freizeit und Tinte hat. Alle Beweise sind langweilig, wenn man den linearen Fall einmal verstanden hat und funktionieren in der Tat völlig analog.[2] Das große Problem ist eigentlich, eine geeignete Notation zu finden, die einem erlaubt, diese Beweise alle nur einmal und dafür allgemein zu führen, statt in jeder neuen Kombination von vorne anfangen zu müssen. Und selbst wenn man sich so eine Notation überlegt, dann steht man noch vor einigen technischen, aber völlig trivialen Problemen, die mehr Arbeit verlangen als man für solche Trivialitäten erwartet. Wenn man beispielsweise eine Notation erfindet um zwei multilineare Abbildungen miteinander zu verbinden, dann stellt sich die Frage, ob alle Arten, drei multilineare Abbildungen zu verbinden, sich durch schrittweises Verbinden von je zweien erhalten lassen und ob dafür eine geeignete Form von Assoziativität gilt. Erneut stellt man fest, dass die Antwort „ja“ ist, die geeignete Form von Assoziativität gilt und die Beweise alle analog zum linearen Fall laufen.

1.8: All diese Fälle sind letztendlich so sehr ähnlich zum linearen Fall, dass es in der Tat eine Konstruktion gibt, die es einem erlaubt, multilineare Abbildungen als echte lineare Abbildungen aufzufassen, sodass man überhaupt nichts mehr beweisen muss, das über den (schon bekannten) linearen Fall und die Existenz und grundlegenden Eigenschaften dieser Konstruktion hinaus geht. Dieses Konstrukt ist das *Tensorprodukt.*

1.9 Satz und Definition (Universelle Eigenschaft und Existenz des Tensorprodukts)**:** Es seien V, W zwei K-Vektorräume. Es gibt eine „universelle bilineare Abbildung“, d.h.

[2] Wer's nicht glaubt, probiere es selbst aus und finde alle diese Beweise, bis das notwendige Maß an Langeweile erreicht ist.

es gibt ein Vektorraum T und eine bilineare Abbildung $\tau : V \times W \to T$, sodass *jede* bilineare Abbildung $\phi : V \times W \to X$ sich schreiben lässt als $f \circ \tau$ mit einer eindeutig bestimmten linearen Abbildung $f : T \to X$.

$$\begin{tikzcd} V \times W \arrow[r, "\tau"] \arrow[dr, "\phi"'] & T \arrow[d, dotted, "\exists! f"] \\ & X \end{tikzcd}$$

T und τ sind in der Tat eindeutig bestimmt bis auf einen eindeutigen Isomorphismus, d.h. wenn $\tau' : V \times W \to T'$ eine weitere universelle bilineare Abbildung ist, dann gibt es genau einen Isomorphismus $\alpha : T \to T'$, sodass $\alpha(\tau(v, w)) = \tau'(v, w)$ gilt. Man schreibt üblicherweise $V \otimes W$ statt T und $v \otimes w$ statt $\tau(v, w)$ für diesen eindeutig bestimmten Vektorraum und bilineare Abbildung und nennt sie Tensorprodukt von V und W. (Achtung: Das Tensorprodukt ist streng genommen die Kombination aus T und τ, nicht nur T).

1.10: Ausgeschrieben sagt die universelle Eigenschaft folgendes: Von einer Abbildungsvorschrift $\phi : (v, w) \mapsto x_{v,w}$, die je einen Inputvektor aus V und einen aus W nimmt und einen Vektor aus X produziert, gibt es genau dann eine Realisierung dieser Abbildungsvorschrift als lineare Abbildung $f : V \otimes W \to X$ mit $f(v \otimes w) = x_{v,w}$, wenn ϕ bilinear ist.
Jede bilineare Abbildung kann so eindeutig als lineare Abbildung auf dem Tensorprodukt der beiden Inputräume betrachtet werden, und umgekehrt kann jede lineare Abbildung auf einem Tensorprodukt als bilineare Abbildung aufgefasst werden, indem man sie auf die Menge der reinen Tensoren einschränkt.

1.11 Definition (Reine Tensoren)**:**
Ein Element von $V \otimes W$, das die Form $v \otimes w$ hat, wird als reiner Tensor bezeichnet.

1.12 (Diskussion: reine vs. nicht-reine Tensoren)**:** Ein wichtiger, vielleicht der wichtigste Grund, Tensorräume als eigenständiges Objekt einzuführen statt ausschließlich mit multilinearen Abbildungen zu arbeiten ist die Existenz von nicht-reinen Tensoren: Eine Summe $v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 + \ldots + v_k \otimes w_k$ (die natürlich immer existiert, weil $V \otimes W$ ja ein Vektorraum ist) ist i.A. kein reiner Tensor, lässt sich also i.A. nicht darstellen als $v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 + \ldots + v_k \otimes w_k = x \otimes y$.

Es stellt sich heraus, dass viele der wirklich interessanten Tensoren, die einem so in freier Wildbahn begegnen, nicht rein sind.
Beispiel: In der Quantenmechanik wird das Tensorprodukt benutzt, um mehrere interagierende Quanten-Systeme als ein einziges großes System zu betrachten: Wenn V und W der Zustandsraum je einer Menge X bzw. Y quantenmechanischer Teilchen sind, dann ist $V \otimes W$ der Zustandsraum des quantenmechanischen Systems, das aus den Teilchen von X und Y besteht und beliebige Interaktionen zwischen ihnen erlaubt. Ein reiner Tensor $v \otimes w$ entspricht in dieser Sichtweise demjenige Zustand des Gesamtsystems, in dem sich die Teilchen aus X im Zustand v, und das aus Y im Zustand w befinden. Die nicht-reinen Tensoren entsprechen dann „Überlagerungen“ solcher reinen Zustände und

das fundamental wichtige Phänomen von „verschränkten" Teilchen ist ein Ausdruck dessen, dass eben nicht alle Zustände reine Zustände sind, in denen man die Teilchen von X unabhängig von denen in Y einen Zustand zuschreiben kann: Es kann z.B. ein Zustand der Form $x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2$ konstruiert (und auch experimentell realisiert) werden, in dem x_1 und x_2 sowie y_1 und y_2 beide jeweils senkrecht zueinander sind. In solch einem Zustand des Gesamtsystems können die X-Teilchen in Zustand x_1 oder x_2 gemessen werden, aber nur dann, wenn gleichzeitig die Y-Teilchen in Zustand y_1 bzw. y_2 liegen. Es kann eben nicht unabhängig voneinander der X-Anteil in Zustand x_1 sein, während der Y-Anteil des Gesamtsystems in Zustand y_2 ist (hier geht die Orthogonalität ein).

1.13 Beispiel (Casimir-Element)**:**
Ist V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum und haben wir ein Skalarprodukt fest gewählt, so gibt es einen besonderen Tensor $\Omega_V \in V \otimes V$. Für *jede* Orthogonalbasis $e_1, \ldots, e_n$ von V lässt er sich schreiben als

$$\Omega_V = \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e_i$$

Für $V = \mathbb{R}^3$ und die Standardbasis e_x, ey, e_z ist etwa

$$\Omega_{\mathbb{R}^3} = e_x \otimes e_x + e_y \otimes e_y + e_z \otimes e_z$$

Betrachten wir den Raum der linearen Differentialoperatoren erster Ordnung auf $C^\infty(V)$, d.h. der Vektorraum der Operatoren $\{\, \partial_v \mid v \in V \,\}$. Darin schreibt sich das Casimir-Element als

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} \partial_{e_i} \otimes \partial_{e_i}$$

Wenn wir die Komposition von Operatoren (eine bilineare Abbildung) auf diesen Tensor anwenden, erhalten wir den Laplace-Operator:

$$\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial_{e_i}^2$$

Man beachte insbesondere, dass das Ergebnis der Summe auf der rechten Seite unabhängig von der gewählten Basis ist, obwohl die einzelnen Summanden es natürlich nicht sind. Das erklärt z.B., wieso der Laplace-Operator und viele ähnlich aussehende Konstruktionen physikalische sinnvolle Objekte liefern, obwohl ihre Definition auf den ersten Blick basisabhängig zu sein scheint.

1.14: Man kann sich jedoch leicht davon überzeugen, dass die Menge aller Summen von reinen Tensoren tatsächlich das volle Tensorprodukt abdeckt:

$$V \otimes W = \{\, v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 + \ldots + v_k \otimes w_k \mid k \in \mathbb{N}, v_i \in V, w_i \in W \,\}$$

In der Welt der Quantenmechanik würde man dazu also z.B. sagen: Der Zustandsraum des aus zwei Einzelsystemen kombinierten Systems besteht aus allen Kombinationen von reinen Zuständen der Einzelsysteme sowie allen Überlagerungen dessen.
Es ist i.A. ein sehr schwieriges Problem, einem konkreten Tensor anzusehen, ob er rein ist oder nicht, und wenn nicht, welche reinen Zustände man zusammen addieren muss, um ihn zu erhalten. Nicht einmal die Anzahl der mindestens notwendigen Summanden ist einfach zu finden im Allgemeinen.

1.15 (Diskussion: Das Wort „Tensor"): Im Gegensatz zum Wort „Vektor", das zumindestens meistens „Element eines Vektorraums" bedeutet und selten anders verwendet wird, ist das Wort „Tensor" etwas überbelegt. Die verschiedenen Verwendungsformen des Worten fallen grob in zwei Kategorien: 1.) „ich habe keine Ahnung, was Tensoren sind, aber andere Leute benutzen das Wort, also tue ich das auch" und 2.) irgendetwas, das tatsächlich mit Tensorprodukten zu tun hat.

Zu 1. später mehr, zu 2. nur soviel: „Tensor" kann sowohl „Element eines Tensorprodukts von Vektorräumen" bedeuten (so werden wir das Wort verwenden) als auch einen von diversen, verwandten Begriffe, z.B. wird das auch als Kurzform von Tensorfeld verwendet. Ein Tensorfeld ist ein Funktion, die jedem Punkt des gerade betrachten geometrischen Raums X (oder Raumzeit) je ein Element $t(x) \in V_x \otimes V_x \otimes V_x \otimes ...$ zuordnet, wobei gewisse Stetigkeitseigenschaften gefordert werden, die für zwei eng beieinander liegende Punkte x, x' fordern, dass V_x und $V_{x'}$ „im Wesentlichen der gleiche Raum" sind und $t(x), t(x')$ ebenfalls eng zusammen liegen (formal ist das natürlich eine richtige ϵ-δ-artige Definition). Ggf. wird auch nicht nur ein Vektorraum V_x pro Punkt verwendet, sondern mehrere. Je nachdem, welche Zusatzeigenschaften man an solch ein Tensorfeld stellt, wird auch nicht nur das Tensorprodukt der Vektorräume selbst, sondern auch eine vom Tensorprodukt abgeleitete Konstruktion betrachtet (z.B. symmetrische oder äußere Potenzen, siehe weiter unten).

1.4 Elementare Eigenschaften des Tensorprodukts

1.16 Lemma ($K \otimes V = V$):
Ist V ein K-Vektorraum, so ist

$$\begin{cases} K \otimes V & \leftrightarrows & V \\ \alpha \otimes v & \mapsto & \alpha v \\ 1 \otimes v & \leftarrow\!\shortmid & v \end{cases}$$

ein paar zueinander inverser Vektorraum-Isomorphismen.

1.17: Wir erlauben uns deshalb, wann immer es uns nützlich erscheint, $K \otimes V$ und $V \otimes K$ als identisch zu V zu betrachten. Dabei meinen wir immer die obige Identifizierung.

1.18: Da das Tensorprodukt für alle Paare von K-Vektorräumen definiert ist und selbst wieder ein K-Vektorraum ist, können wir natürlich auch Tensorprodukte von Tensorprodukten bilden. Es stellt sich die Frage, ob es eine Rolle spielt, wie genau wir das tun.

1.19 Lemma und Definition (Assoziativität des Tensorprodukts & Höhere Tensorgrade)**:**
Für alle K-Vektorräume V_1, V_2, V_3 ist

$$\begin{array}{rcl} V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) & \to & (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \\ v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3) & \mapsto & (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3 \end{array}$$

ein Isomorphismus.
Wir erlauben es uns, aufgrund der Natürlichkeit dieses Isomorphismus, Klammern in mehrfachen Tensorprodukten wegzulassen und kurz $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \otimes \cdots \otimes V_k$ zu schreiben.
Der Kürze halber definieren wir die Tensorpotenzen

$$V^{\otimes k} := \begin{cases} K & k = 0 \\ \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{k\text{-mal}} & k > 0 \end{cases}$$

1.20: Mit dieser Notation gelten dann (abzüglich eben jener natürlicher Isomorphismen) die „Potenzgesetze“:

$$V^{\otimes n} \otimes V^{\otimes m} = V^{\otimes (n+m)}$$

$$(V^{\otimes n})^{\otimes m} = V^{\otimes nm}$$

1.5 Index-Notation - Was das ist und wie man sie loswird

1.21: Alle vorher angedeuteten Aussagen über multilineare Abbildungen kann man auf Sätze über lineare Abbildungen und Tensorprodukte zurückführen, z.B.

1.22 Lemma (Dimension von Tensorprodukten[3])**:**
Es gilt $\dim(V \otimes W) = \dim(V) \cdot \dim(W)$.
Präziser: Für jede Basis $(b_i)_{i \in I}$ von V und $(c_j)_{j \in J}$ von W ist $(v_i \otimes w_j)_{i \in I, j \in J}$ eine Basis von $V \otimes W$.

1.23 Korollar:
Entsprechendes gilt auch für mehrfache Tensorprodukte, insbesondere für Tensorpotenzen: Ist $e_1, \ldots, e_n$ eine Basis von V, so ist $\{\, e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \mid i_j \in \{\, 1, \ldots, n \,\}\,\}$ eine Basis von $V^{\otimes k}$.
Wenn $e_1, \ldots, e_n$ zufällig eine Basis ist, die man „Standardbasis“ nennt, dann nennt man $\{\, e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \,\}$ auch Standardbasis von $V^{\otimes k}$.

[3] Wer mit unendlich-dimensionalen Vektorräumen nicht gut genug vertraut ist, denke sich ein „für endlich-dimensionale Vektorräume“ hinzu.

1.24 (Index-Notation – Was ist das?)**:** Insbesondere heißt das, dass jeder Tensor $t \in V \otimes W$ eine eindeutige Koordinaten-Darstellung bzgl. solch einer Basis hat, d.h. es gibt eindeutig bestimmte Skalare t_{ij} sodass

$$t = \sum_{i \in I, j \in J} t_{ij} b_i \otimes c_j$$

gilt und umgekehrt liefert jede Wahl von $|I| \times |J|$ vielen Skalaren t_{ij} auf diese Weise genau einen Tensor.
Es hat sich in der Physik und Ingenieurwissenschaftlich eingebürgert, das Wort „Tensor" austauschbar mit „Ansammlungen von Zahlen, die mehrere Indizes haben" zu verwenden.

Wählt man eine andere Basis von V oder W, so erhält man natürlich andere Zahlen als Koordinaten. Immer noch $|I| \times |J|$ viele, aber andere. Jedoch sind die Unterschiede nicht völlig beliebig, denn sie sind eben durch einen Basiswechsel in den Faktoren des Tensorprodukts verursacht.
In der Tat haben die Physiker eigene Sprechweise erfunden, um das auszudrücken: Man sagt, dass sich ein Satz von indizierten Zahlen „kovariant transformiert" (bzw. „kontravariant") und meint damit nicht etwa, dass diese Zahlen eine besondere Eigenschaft hätten, sondern, dass die Methode, mit der man diese Zahlen bestimmt hat, eine besondere Eigenschaft hat, nämlich bei anderer Basiswahl ein anderes Ergebnis zu produzieren, dass aber aus der Basiswechselmatrix auf bestimmte Weise vorhersehbar ist. Manche Physiker nehmen das zum Anlass, um zu definieren, dass ein Tensor nicht nur *ein* Satz von indizierten Zahlen sei, sondern eine Abbildung $\{ \text{Basen} \} \to \{ \text{Zahlen mit Indizes} \}$, die genau dieser Transformationsregel gehorcht.

Soweit, so verwirrend, aber natürlich wird einem dann auch erklärt, dass es auch „kontravariante Tensoren" gibt, die sich irgendwie ähnlich, aber ganz anders verhalten, sowie gemischte Tensoren, bei denen manche Indizes ko- und manche kontravariant gemeint sind. In Indexschreibweise äußert sich das oft so, dass manche Indizes oben und manche unten notiert werden, wobei sich leider nicht einmal alle Physiker einig sind, ob die oberen jetzt die ko- oder die kontravarianten sein sollen.

1.25 (Index-Notation – Warum ist das ein Problem?)**:** Index-Notation erschwert im Wesentlichen alles, was wichtig ist: Das Verstehen von und das Arbeiten mit Tensoren.

- Index-Schreibweise, Koordinaten allgemein verlieren wesentliche Informationen und geht am Wesentlichen vorbei: Ein Vektor/Tensor ist eben nicht eine Ansammlung von Zahlen, sondern ein Element eines Vektorraums.

  Ja, der Raum der Polynome in zwei Variablen mit Grad ≤ 5 ist 36-dimensional, aber das Polynom $x^2 + y^2$ deshalb als Ansammlung von 36 (relativ beliebigen) Zahlen zu betrachten, also als Element von $\mathbb{R}^{36}$, verliert die ganz wesentliche Information, z.B. dass es sich um ein Polynom handelt, dass dieser Vektorraum Unterraum eines größeren Polynomraums ist, in dem weitere Strukturen wie z.B. Polynommultiplikation, Differenzieren, uvm. existieren.

Der Übergang von abstrakten Vektoren/Tensoren zu Koordinatendarstellungen bzgl. beliebiger Basen, erhält exakt die Information, die in der Vektorraumstruktur alleine steckt, d.h. in Addition und Skalarmultiplikation. Alle zusätzliche Struktur, die in einer konkreten Situation vielleicht außerdem vorhanden und nützlich (!) sein könnte, wird weggeworfen.

Wenn man alles nur als Ansammlung von Zahlen versteht, ist klar auch, wieso der Unterschied zwischen „ko-" und „kontravarianten" Tensoren so mysteriös ist. Wenn man abstrakt arbeitet, ist ganz klar, was passiert! Das sind einfach Tensoren aus unterschiedlichen Räumen!

Die eine Sorte Tensoren ist Element von $V^{\otimes k}$, während die anderen Elemente von $(V^*)^{\otimes k}$ sind. Tensoren mit gemischter Varianz sind entsprechend Elemente von $V^{\otimes k_1} \otimes (V^*)^{\otimes k_2}$. Natürlich sind V und V^* als Vektorräume isomorph, d.h. sie haben die gleiche Dimension, man benötigt also die gleiche Anzahl an Indizes, die auch alle über denselben Zahlenbereich laufen, wenn man die Koordinaten durchnummeriert. Aber dabei verliert man eben die wesentliche Information, dass V und V^* doch trotz allen verschieden sind und verschiedene Objekte und Sichtweisen mathematisch beschreiben.[4]

- Index-Schreibweise, Koordinaten allgemein zäumen das Pferd von hinten auf:

  Es ist nur äußerst selten sinnvoll, tatsächlich in Koordinaten zu arbeiten, da die einzigen Operationen, die überhaupt physikalisch sinnvoll sind, zwangsläufig basisunabhängig sein müssen. Das Universum hat halt keine bevorzugte Basis. Es gibt keine bevorzugten Richtungen im Universum, es gibt keine bevorzugte Skalierung[5], Wieso also nicht von Anfang an mit Objekte und Operationen arbeiten, die basisunabhängig sind?

  Und in den Fällen, in denen die physikalische Situation eben doch eine Raumrichtung bevorzugt, z.B. weil es sich um ein rotationssymmetrisches Problem handelt und die Drehachse eine besondere Richtung in so einem System ist? In den Fällen ist es auch nicht sinnvoll, *beliebige* Basen zu betrachten. Man will eine Basis wählen, die Zusatzinformationen wie z.B. die Drehsymmetrie, möglichst gut widerspiegeln.

  Woher weiß man, welche Zusatzstruktur tatsächlich die nützliche ist für die eigene Frage? Man weiß es eben nicht. Zumindest nicht vorher. Erst, wenn man tatsächlich eine (Teil-)Antwort auf die Frage gefunden hat, kann man überhaupt sagen, welche Zusatzstrukturen nützlich war und welche nicht, und welche Basiswahl also die sinnvollste für das Problem ist.

  Der Ausgangspunkt sollte also immer zunächst eine basis-freie Sichtweise sein, in die erst nachdem tatsächlich Bedarf erkannt wurde, eine präzise ausgewählte Ba-

[4] Übrigens erklärt diese Sichtweise auch, wieso sich die Physiker nicht immer einig sind, was ko- und was kontravariant ist: Für endlich-dimensionale Vektorräume ist nicht nur V^* der duale Vektorraum von V, sondern auch V der duale Vektorraum von V^*. Man kann sich also aussuchen, welches das fundamentalere Objekt von beiden ist.

[5] Und nein, die Plank-Skala zählt nicht, da sie für den momentanen Stand der Wissenschaft reine Spekulation ist

sis eingeführt wird. Und selbst ist es sinnvoll, nicht allzu viel Basis zu wählen. Im Falle einer Rotationssymmetrie ist z.B. *nur* die Drehachse eine ausgezeichnete Raumrichtung, d.h. sie legt nur einen von drei gesuchten Basisvektoren (halbwegs) fest. Für die anderen beiden gilt genau das gleiche: Man sollte solange wie möglich abstrakt arbeiten und erst, wenn das Problem es tatsächlich erfordert, eine Basis wählen.

- Index-Schreibweise erzeugt unnötige Arbeit:

  Eine beliebige Kollektion von Zahlen wird aber nur dann zu einem Tensor, wenn man eine Basis wählt, bzgl. derer man diese Zahlen dann als Koordinaten liest. Man muss sich also stets fragen: „Wenn ich eine andere Basis wähle und in dieser neuen Situation noch einmal neue Zahlen generiere und als Koordinaten bzgl. der neuen Basis benutze, kommt ein anderer Tensor heraus oder nicht?“ und man will immer, dass die Antwort „Nein“ ist, d.h. man will, dass sich die Zahlen „ko-“ oder „kontravariant“ oder „gemischt“ „transformieren“. Ein „ja“ hieße zwangsläufig, dass man etwas falsch gemacht hat, eben weil physikalisch sinnvolle Ergebnisse nicht basis-abhängig sind.

  Die Konsequenz daraus, ist aber, dass man eigentlich jedes Index-Monster, das einem begegnet, erst einmal mit viel langweiligem Rechenaufwand darauf überprüfen sollte, ob es überhaupt basis-unabhängig ist. Wer hat die Zeit dafür? Niemand! Und wieso sollte man auch so viel Aufwand investieren, wenn die Antwort, die man haben will, sowieso immer die gleiche ist?

  Nicht nur macht die abstrakte Sichtweise den Aufwand kleiner, sie macht ihn zu Null, denn, wenn man von Anfang an basisfrei arbeitet, stellt sich die Frage, ob eine gewisse Konstruktion basisunabhängig ist, überhaupt nicht. Wenn nirgendwo Basen benutzt wurden, muss alles, was getan wurde, natürlich basisunabhängig sein!

- „Aber, wenn ich Dinge ausrechnen will, brauche ich doch Basen!“

  Auch das ist ein weitverbreitetes Missverständnis. Viele Dinge sind in der Tat auch völlig basisfrei berechenbar, mindestens z.B. alle physikalisch sinnvollen Dinge, denn die sind eben – wie wir bereits festgestellt haben – von sich aus basisfrei und somit zwangsläufig auch basisfrei berechenbar, wenn sie überhaupt berechenbar sind. Und in der Tat kann man sie dann auch immer auf einem basisfreien Wege ausrechnen.

  Man muss sich auch einmal klarmachen, was man mit „ausrechnen“ meint und wozu man das tut. Was bedeutet es z.B. einen Spannungstensor „auszurechnen“ ? Der Spannungstensor ist eben keine Zahl. Er ist ein Tensor. Was würde es in Analogie bedeuten, einen Vektor, z.B. eine Drehachse „auszurechnen“ ? Die Drehachse ist die Drehachse, das, worum sich das System dreht. Welche andere Information möchte man über diesen Vektor ausrechnen? Und was würde man damit anfangen?

  Natürlich kann man zwanghaft Koordinaten einführen und die Koordinaten dieses Vektors ausrechnen. Die Koordinaten haben aber keine eigenständige physikalische Bedeutung. Mit den Koordinaten an sich lässt sich also nichts anfangen. Einzig das

Gesamtobjekt ist physikalisch sinnvoll. Das einzige, was man mit den Koordinaten tun könnte, ist also, sie wieder zu einem Vektor zusammenzusetzen, um diesen in einem nächsten Rechenschritt weiterzuverwenden. Wieso dann aber Koordinaten einführen?[6]

Man beachte, dass die Frage nach einem *effizienten* Ausrechnen eine völlig andere ist! Für diese Art von Fragen gilt: „premature optimization is the root of all evil (or at least most of it)“[7]. Eine Basiswahl alleine macht nichts effizient. Die *richtige* Basis in der richtigen Situation macht Dinge effizient und auch nur, wenn man sie richtig einsetzt. Stumpf drauf losrechnen ist selten tatsächlich effizient.

1.6

1.26 Lemma:
Sind $f : V \to W, g : V' \to W'$ zwei lineare Abbildungen zwischen K-Vektorräumen, so gibt es genau eine lineare Abbildung $V \otimes V' \to W \otimes W'$, die $v \otimes v'$ auf $f(v) \otimes g(v')$ abbildet. Diese Abbildung wird der Bequemlichkeit halber auch als $f \otimes g$ bezeichnet.

1.27: Sind die Dimensionen endlich und hat man Basen der jeweiligen Vektorräume gewählt, so kann man f und g durch ihre Darstellungsmatrix angeben. Die Darstellungsmatrix von $f \otimes g$ ist dann das sogenannte „Kronecker-Produkt“ der Matrizen F und G. Je nachdem, wie man die Tensorbasis $\{ b_i \otimes c_j \}$ anordnet (zeilen- oder spaltenweise durchnummerieren), ist das Kronecker-Produkt durch

$$F \otimes G = \begin{pmatrix} f_{11}G & f_{12}G & \cdots & f_{1m}G \\ f_{21}G & f_{22}G & \cdots & f_{2m}G \\ \vdots G & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}G & f_{n2}G & \cdots & f_{nm}G \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} Fg_{11} & Fg_{12} & \cdots & Fg_{1m'} \\ Fg_{21} & Fg_{22} & \cdots & Fg_{2m'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Fg_{n'1} & Fg_{n'2} & \cdots & Fg_{n'm'} \end{pmatrix}$$

gegeben.

[6]Das ignoriert natürlich ein paar außer-physikalische Aspekte, z.B. könnten ja in einer komplexen Gesamtberechnung einzelne Teilschritte durchaus von verschiedenen Leuten ausgerechnet werden. In diesem Fall ist das Einführen von Koordinaten eine Notwendigkeit, um ein Zwischenergebnis von einem Team zum anderen kommunizieren zu können.
[7]Donald Ervin Knuth, geb. 1938, amer. Informatiker und Mathematiker

Aufgaben

Aufgabe 1.1. – Casimir-Elemente von euklidischen Räumen
Es sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und $e_1, ..., e_n$ eine Orthonormalbasis.

a.) Zeige, dass der Casimir-Tensor

$$\Omega_V := \sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e_i$$

unabhängig von der Basiswahl ist, d.h. wenn $e'_1, ..., e'_n$ eine weitere Orthonormalbasis von V ist, dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{n} e_i \otimes e_i = \sum_{i=1}^{n} e'_i \otimes e'_i$$

Hinweis: Orthogonale Matrizen.

b.) Zeige, dass Ω_V „isotrop" ist, d.h. für alle Isometrien $Q : V \to V$ gilt:

$$(Q \otimes Q)(\Omega) = \Omega$$

Hinweis: Benutze a.

Aufgabe 1.2. – Casimir-Elemente allgemein
Es sei V ein endlich-dimensionaler K-Vektorraum, $b_1, ..., b_n$ eine beliebige Basis von V und $b_1^*, ..., b_n^*$ die dazu duale Basis von V^*.

a.) Zeige, dass

$$\Omega := \sum_{i=1}^{n} b_i \otimes b_i^* \in V \otimes V^*$$

unabhängig von der Basiswahl ist.
Hinweis: Wenn A eine Basiswechselmatrix zwischen zwei Basen von V ist, wie sieht dann die Basiswechselmatrix der beiden dazugehörigen dualen Basen von V^* aus?

b.) Wie entspricht das dem Casimir-Element euklidischer Räume?

i.) Zeige zunächst, dass die Abbildung $V \to V^*, v \mapsto \langle v, - \rangle$ ein Isomorphismus $V \to V^*$ ist.

ii.) Was tut diese Abbildung mit einer Orthonormalbasis?

Aufgabe 1.3. – Aber Tensoren sind doch so Buchstaben mit Indizes
Häufig wird einem von Physikern oder Ingenieuren ein Tensor lediglich als ein Buchstabe mit Indizes untergejubelt - z.B. der Spannungstensor σ_{ij}. Wir wollen verstehen, wie der Zusammenhang mit unserer Definition ist.
Es sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und $e_1, ..., e_n$ eine Orthonormalbasis. Wir betrachten das m-fache Tensorprodukt $V^{\otimes m}$. Wer mag, kann zur Vereinfachung $n = 3$ und $K = \mathbb{R}$ wählen.

a.) Einen beliebigen Tensor aus $V^{\otimes m}$ schreiben wir z.B. als $T \in V^{\otimes m}$, während er andernorts mit $T_{j_1 \cdots j_n}$ bezeichnet wird, was streng genommen nur eine Kollektion besonders nummerierter Zahlen aus K ist. Wie ist der Zusammenhang zwischen T und $T_{j_1 \cdots j_n}$?
Hinweise: Von V induzierte Basiswahl für $V^{\otimes m}$, Vergleiche mit einem Vektor $v \in V$ und v_i.

b.) Ein sehr häufig verwendeter „Buchstabe mit Indizes" ist das Kronecker-δ, oder auch der δ_{ij}-Tensor. Um welchen Tensor handelt es sich hier? Hinweis: Übersetze in die Schreibweise mit dem Tensorprodukt $\otimes$.

c.) Die Spur eines Tensors zwischen seinem k-ten und l-ten Faktor wird in Indexschreibweise als Dopplung eines bestimmten Indexes an den entsprechenden Stellen notiert, $T_{j_1 \cdots j_{k-1} i j_{k+1} \cdots j_{l-1} i j_{l+1} \cdots j_m}$, die eine Summe über i von 1 bis n impliziert (a.k.a. *Einstein'sche Summenkonvention*). Überzeuge dich, dass dies unserer Definition von Spur entspricht.
Üblich zum Spur nehmen ist auch eine Schreibweise mit dem Kronecker-δ:

$$T_{j_1 \cdots j_{k-1} i j_{k+1} \cdots j_{l-1} r j_{l+1} \cdots j_m} \delta_{ir},$$

ebenfalls mit impliziter Summe über gedoppelte Indizes. Zeige, dass dies die gleiche Operation beschreibt.

d.) Eine weitere häufiger zu findende Schreibweise mit dem Kronecker-δ ist die folgende:

$$T_{j_1 \cdots j_{k-1} j_k j_{k+1} \cdots j_{l-1} j_l j_{l+1} \cdots j_m} \delta_{ir},$$

was üblicherweise gekürzt wird auf $T_{j_1 \cdots j_m} \delta_{j_{m+1} j_{m+2}}$. Was ist der Unterschied zu c.)? Schreibe diesen Tensor ohne Indizes auf.

Aufgabe 1.4. – Was denn für Indizes?

Schön, dass dir die Index-Schreibweise noch nicht begegnet ist. Da wir in unserem Kurs so wenig wie möglich mit dieser Schreibweise arbeiten wollen, kann dies zu deinem Vorteil sein.
Es sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum mit Skalarprodukt und $e_1, ..., e_n$ eine Orthonormalbasis. Wir betrachten das m-fache Tensorprodukt $V^{\otimes m}$. Wer mag, kann zur Vereinfachung $n = 3$ und $K = \mathbb{R}$ wählen. Zeige, dass $tr_{(i,r)}(T) = tr_{(i,n+1)(r,n+2)}(T \otimes \Omega_V)$ gilt.

Aufgabe 1.5. – Wilde Behauptungen (schwer)

Im Skript wurde behauptet:
„alle physikalisch sinnvollen Dinge [sind] von sich aus basisfrei und somit zwangsläufig auch basisfrei berechenbar, wenn sie überhaupt berechenbar sind"
Überzeuge dich davon, dass das nicht nur so daher gesagt ist, sondern ein beweisbarer Fakt ist. Insbesondere ist hier als Teilbehauptung enthalten: Es ist möglich, physikalisch sinnvolle Daten (sowohl die Input- als auch Output-Daten der Berechnung) basisfrei so zu repräsentieren, dass damit immer noch Berechnungen möglich sind.

(Und es sei erneut davor gewarnt, dass „berechnen" nicht „effizient berechnen" bedeutet)

2 Warum Darstellungstheorie?

- Brauer's theorem: Fixpunkte der Tensoralgebra durch Mittelwertbilden. Integrale für alle Tensoren aus einer Standardbasis explizit berechenbar. Mit Handwaving gleich Brauer-Diagram

2.1 Geschickte Basiswahl

Wie dem ein oder anderen aufgefallen sein wird, haben wir in dem vorherigen Kapitel Tensoren eingeführt, ohne eine Basis für deren Vektorraum zu benötigen oder vielleicht im Nachgang eine Basis zu konstruieren. Allgemeine Aussagen lassen sich schließlich auch weitgehend basisfrei, oder zumindest basis-unabhängig machen. Jetzt wollen manche jedoch Tensoren nicht nur einfach so für ein bisschen hübsche Mathematik benutzen sondern tatsächlich mal ein Problem mit Zahlen (und zwar nicht nach dem Mathematiker-Prinzip "Sei $a \in \mathbb{R}$...", sondern halt mal welche mit echten Ziffern) ausrechnen. Dafür braucht man ab irgendeinem Punkt eine Basis, idealerweise eine, die orthonormal bezüglich eines gewählten Skalarproduktes ist. Haben wir ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf V gegeben, ist das Standardskalarprodukt auf $V^{\otimes m}$ definiert mit der Vorschrift

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V^{\otimes m} \times V^{\otimes m} \to K \tag{1}$$

$$\langle v_1 \otimes \cdots \otimes v_m, w_1 \otimes \cdots \otimes w_m \rangle \mapsto \langle v_1, w_1 \rangle \cdot \cdots \cdot \langle v_m, w_m \rangle \tag{2}$$

und ihrer linearen Fortsetzung. Gegeben eine Orthonormalbasis $e_1, ..., e_n$ von V lässt sich bezüglich des Standardskalarproduktes sehr einfach eine noch zu normierende, aber orthogonale Basis für $V^{\otimes m}$ bestehend aus allen Kombinationen der Basisvektoren e_i konstruieren:

$$\{e_{j_1} \otimes \cdots \otimes e_{j_m} | j_k \in 1 \cdots n\} \tag{3}$$

Sie wird häufig implizit verwendet (siehe Aufgabe 1.3). Hieraus ließe sich recht simpel eine orthonormale Basis für den Tensorraum ableiten. Aber ist diese Basis auch eine gute Basis? Was macht eine "gute" Basis überhaupt aus?

Betrachten wir einmal kurz ein Problem aus der uns bekannten, 3-dimensionalen Welt:

Anna und Bernd stehen einer flachen Wand gegenüber. Anna hat die Position $(9.5, 4, 0)^T$ und einen Ball in der Hand. Bernd steht bei $(5.5, 2, 0)^T$ und die Wand hat Normalengleichung

$$2x - 1.5y = 12.5$$

mit Normalenvektor $\mathbf{n} = (2, -1.5, 0)^T$ und Stützvektor $\mathbf{p} = (4, -3, 0)^T$. Anna möchte Bernd den Ball so zuwerfen, dass er einmal an der Wand abprallt und dann in Bernds Händen landet. Dabei soll der Ball den Boden nicht berühren. Berechne die Trajektorie vom Ball und die Kraft, mit der Anna den Ball abwerfen muss unter der Annahme von Reibungsfreiheit.

Wir wollen jetzt nicht die Lösung für dieses Problem finden, sondern viel mehr fragen: Ist die hier gewählte Basis zur Beschreibung der Ausgangssituation oder für die Berechnung hilfreich?

Formulieren wir das gleiche Problem etwas um:

Anna und Bernd stehen 2.5 Meter voneinander entfernt in einer ebenen Wiese einer flachen Wand gegenüber. Beide haben einen Abstand zur Wand von 5 Metern. Anna hat einen Ball in der Hand und möchte ihn Bernd so zuwerfen, dass er einmal an der Wand abprallt und dann in Bernds Händen landet. Dabei soll der Ball den Boden nicht berühren. Berechne die Trajektorie vom Ball und die Kraft, mit der Anna den Ball abwerfen muss unter der Annahme von Reibungsfreiheit.

Welche Basis würde man am ehesten wählen, um diese Aufgabe zu lösen und warum?

Welche Wahlfreiheiten haben wir?

Diese Frage lässt sich auch auf den Vektorraum der Tensoren übertragen. Wir werden genauer definieren, was es für eine Basis heißt, günstig gewählt zu sein und herausfinden, wie solch eine Basis für symmetrische Tensoren bzw. Polynome aussieht.

2.2 Einschränkung auf erlaubte lineare Abbildungen zwischen Tensoren und ihre Klassifikation

Wie für Tensoren bereits deutlich wurde, gibt es unendlich viele lineare Abbildungen zwischen den Tensorräumen. Jetzt wollen wir mit Tensoren jedoch meistens physikalische Probleme beschreiben, die bestimmten grundsätzlichen Symmetrien unterliegen. So wird z.B. ein Ball bei gleichen Bedingungen immer die gleiche Flugbahn haben, ganz egal wie wir das Koordinatensystem drehen, um die Flugbahn zu berechnen. Diese Erkenntnis lässt sich in mathematische Forderungen gießen, welche uns die linearen Abbildungen zwischen Tensoren als nur 4 Arten klassifizieren lässt.

2.3 Berechnungen mit linearen Abbildungen

Wie wir zuvor gelernt haben, lässt sich im Prinzip jede multi-lineare Abbildung durch eine i.A. sehr große Matrix darstellen. Nun ist eine Berechnung dann besonders einfach (bzw. bei Nutzung eines Computers besonders schnell), wenn die Matrix viele 0en hat. Dies ist ein beliebter Grund in der angewandten Numerik, um einen Basiswechsel durchzuführen: Ziel ist es, die Basis so zu drehen, dass eine voll besetzte Matrix maximal viele 0 hat, da sich so bei hinreichend großen Dimensionen die Rechenzeit insgesamt stark reduziert.
Mit Hilfe der Darstellungstheorie können wir sogar einen Schritt weiter gehen - Wir werden für eine bestimmte Klasse von linearen Abbildungen eine Basis finden, die uns maximal viele 0en in der Matrix garantiert.

Aufgaben