

tabular[t]cAndrea Hanke

# Warum spherical harmonics?

Johannes Hahn

Andrea Hanke

7. Juni 2021

## Inhaltsverzeichnis

<b>0 Einführung</b>	<b>2</b>
<b>1 Warum Tensoren?</b>	<b>2</b>
1.1 Wiederholung: Vektorräume . . . . .	2
1.2 Bilineare Abbildungen . . . . .	4
1.3 Das Tensorprodukt . . . . .	6
Blatt 1 . . . . .	11
1.1. Casimir-Elemente von euklidischen Räumen . . . . .	11
1.2. Casimir-Elemente allgemein . . . . .	11
1.3. Aber Tensoren sind doch so Buchstaben mit Indizes . . . . .	11
1.4. Was denn für Indizes? . . . . .	12
<b>2 Warum Darstellungstheorie?</b>	<b>13</b>
2.1 Geschickte Basiswahl . . . . .	13
2.2 Einschränkung auf erlaubte lineare Abbildungen zwischen Tensoren und ihre Klassifikation . . . . .	14
2.3 Berechnungen mit linearen Abbildungen . . . . .	14
Blatt 2 . . . . .	15

## 0 Einführung

### 1 Warum Tensoren?

#### 1.1 Wiederholung: Vektorräume

Wir kennen uns bereits mit Vektorräumen aus. Typische Beispiele sind  $\mathbb{R}^3$  oder der Raum der Polynome von einem bestimmten Grad  $n$ . Da uns in diesem Kurs noch weitere Vektorräume begegnen werden und zum Vergleich mit anderen mathematischen Objekten (z.B. Darstellungen), ist hier ihre Definition zusammengefasst.

**1.1 Definition** (Vektorräume und lineare Abbildungen):

Sei  $K$  ein Körper. Ein  $K$ -Vektorraum  $(V, +, \cdot)$  besteht aus

- einer Menge  $V$ ,
- einer Abbildung  $+: V \times V \rightarrow V, (v, w) \mapsto v + w$ , genannt (Vektor)addition und
- einer Abbildung  $\cdot: K \times V \rightarrow V, (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$ , genannt Skalarmultiplikation.

die die Vektorraum-Axiome in Tabelle 1.1 erfüllen. Alles, was Element eines Vektorraums ist, kann Vektor genannt werden.

Vektorraum-Axiom	Bedeutung
$(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe	Addition verhält sich wie erwartet
Assoziativität	$\forall u, v, w \in V : u + (v + w) = (u + v) + w$
Neutrales Element bzw. „Null“	$\exists 0 \in V \forall v \in V : v + 0 = 0 + v$
Inverse bzw. „negative“ Elemente	$\forall v \in V \exists w \in V : v + w = 0$
Kommutativität	$\forall u, v \in V : u + v = v + u$
Eigenschaften der Skalarmultiplikation	
Assoziativität	$\forall a, b \in K, v \in V : a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v$
Normierung bzw. Nichttrivialität	$\forall v \in V : 1 \cdot v = v$ , wobei 1 das Einselement des Körpers bezeichnet
Verträglichkeit von Addition und Skalarmultiplikation	
Distributivität bzgl. $(V, +)$	$\forall a \in K, u, v \in V : a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$
Distributivität bzgl. $(K, +)$	$\forall a, b \in K, v \in V : (a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$
Axiome linearer Abbildungen	Bedeutung
Additivität	$\forall v_1, v_2 \in V : f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
Homogenität	$\forall \lambda \in K, v \in V : f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$

Tabelle 1.1: Definierende Eigenschaften von Vektorräumen und linearen Abbildungen

Sind  $V, W$  zwei  $K$ -Vektorräume und  $f: V \rightarrow W$  eine Abbildung, so heißt  $f$  ( $K$ -)lineare Abbildung oder (Vektorraum-)Homomorphismus, falls die beiden Axiome in Tabelle 1.1

erfüllt sind. Den Raum aller  $K$ -linearen Abbildungen von  $V$  nach  $W$  bezeichnen wir mit  $\text{Hom}_K(V, W)$ . Eine  $K$ -lineare Abbildungen von  $V$  nach  $V$  (also gleicher Definitions- und Zielraum) heißt (Vektorraum-)Endomorphismus, der Raum aller solcher Abbildungen wird mit  $\text{End}_K(V)$  notiert.

**1.2:** Wir sind praktisch ausschließlich an  $\mathbb{R}$ - und  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen interessiert in diesem Kurs.

**1.3 Definition (Kern & Bild):**

Ist  $f : V \rightarrow W$  eine  $K$ -lineare Abbildung, so ist

$$\ker(f) := \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}$$

der Kern von  $f$  und

$$\text{im}(f) := \{ w \in W \mid \exists v \in V : f(v) = w \}$$

das Bild von  $f$ .

## 1.2 Bilineare Abbildungen

**1.4:** Es gibt i.A. keine Multiplikation zweier Vektoren miteinander in irgendeinem Sinne. Wir können immer Skalare mit Vektoren multiplizieren, aber nicht Vektoren mit Vektoren. Nichts desto trotz ist es *manchmal* doch so, dass zusätzlich zu Addition und Skalarmultiplikation eine weitere Operation existiert, die ein sinnvolles Konzept von Multiplikation liefert, z.B.

a.) Der Vektorraum der Polynome  $\mathbb{R}[X]$  hat die Polynommultiplikation, d.h.

$$\left( \sum_{i=0}^n a_i X^i \right) \cdot \left( \sum_{j=0}^m b_j X^j \right) := \sum_{k=0}^{n+m} \left( \sum_{\substack{i,j \\ i+j=k}} a_i b_j \right) X^k$$

b.) Der Vektorraum der Funktionen  $X \rightarrow \mathbb{C}$  für einen festen Definitionsbereich  $X$  hat die punktweise Multiplikation, d.h.

$$f \cdot g := x \mapsto f(x)g(x)$$

c.) Die Hintereinanderausführung von linearen Abbildungen  $\text{Hom}_K(V, W) \times \text{Hom}_K(U, V) \rightarrow \text{Hom}_K(U, W)$ ,  $(f, g) \mapsto f \circ g$  ist eine Abbildung, die sich in vielerlei Hinsicht auch wie eine Multiplikation verhält. Für  $U = V = W$  erhält man insbesondere eine Multiplikation  $\text{End}_K(V) \times \text{End}_K(V) \rightarrow \text{End}_K(V)$ .

Nach Wahl von je einer Basis können wir  $\text{Hom}_K(V, W)$ ,  $\text{Hom}_K(U, V)$  und  $\text{Hom}_K(U, W)$  mit  $K^{n \times m}$ ,  $K^{m \times p}$  und  $K^{n \times p}$  identifizieren. Die Hintereinanderausführung von linearen Abbildung entspricht dann der Matrixmultiplikation.

d.) ...

**1.5 Definition** (Bilineare & multilineare Abbildungen):

Sind  $V, W, X$  drei  $K$ -Vektorräume, so heißt eine Abbildung  $\phi : V \times W \rightarrow X$  bilinear, falls sie beiden Linearitätsbedingungen in Tabelle 1.5 erfüllt, d.h. die Funktion ist separat linear, wenn man nur den ersten oder nur den zweiten Input variiert und den anderen festhält.

Axiom	Bedeutung
Linearität:	
im ersten Argument	$\forall v_1, v_2 \in V, w \in W : \phi(v_1 + v_2, w) = \phi(v_1, w) + \phi(v_2, w)$ $\forall \lambda \in K, v \in V, w \in W : \phi(\lambda v, w) = \lambda \phi(v, w)$
im zweiten Argument	$\forall v \in V, w_1, w_2 \in W : \phi(v, w_1 + w_2) = \phi(v, w_1) + \phi(v, w_2)$ $\forall \lambda \in K, v \in V, w \in W : \phi(v, \lambda w) = \lambda \phi(v, w)$
Falls $\phi : V \times V \rightarrow X$ , kann optional gelten:	
Symmetrie bzw. Kommutativität	$\forall u, v \in V : \phi(u, v) = \phi(v, u)$
Antisymmetrie	$\forall u, v \in V : \phi(u, v) = -\phi(v, u)$
Falls $\phi : V \times V \rightarrow V$ , kann optional gelten:	
Assoziativität	$\forall u, v, w \in V : \phi(u, \phi(v, w)) = \phi(\phi(u, v), w)$

Tabelle 1.2: Eigenschaften von bilinearen Abbildungen

Für Abbildungen  $V_1 \times V_2 \times V_3 \rightarrow X$ , die von drei Inputvektoren abhängig sind, kann man entsprechend definieren, dass eine Abbildung trilinear heißt, wenn sie die drei Distributivgesetze erfüllt. Für vier, fünf, ...  $k$  Input-Vektoren spricht man entsprechend von  $k$ -fach linearen Abbildungen.

**1.6 Beispiel:**

Die drei genannten „Multiplikationen“ von oben sind bilinear. Polynommultiplikation und punktweise Multiplikation von Funktionen sind kommutativ und assoziativ. Die Komposition  $\text{End}_K(V) \times \text{End}_K(V) \rightarrow \text{End}_K(V)$  ist assoziativ, aber nicht kommutativ, falls  $\dim(V) > 1$ .

Es gibt viele weitere, äußerst nützliche Beispiele.

d.) Richtungsableitungen sind bilinear in der Richtung und der Funktion:

Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  ein geeigneter Definitionsbereich (z.B. eine offene Menge). Sei außerdem  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  eine differenzierbare Funktion. Dann existieren insbesondere alle Richtungsableitungen  $(\partial_v f)(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 + tv)}{t}$  in allen Punkten  $x_0 \in X$ . Die Abbildungsvorschrift  $(v, f) \mapsto \partial_v f$  liefert eine bilineare Abbildung für mehrere Kombinationen von Vektorräumen, z.B.  $\mathbb{R}^n \times C^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^0(\mathbb{R}^n)$  oder  $\mathbb{R}^n \times C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

e.) Allgemeiner: Lineare Differentialoperatoren:

Für mehrfach differenzierbare Funktionen kann man natürlich auch mehrere Ableitungsschritte hintereinander ausführen. Auf diese Weise erhält man multilineare Abbildungen:  $k$ -faches Ableiten in  $k$  Richtungen, also der Differentialoperator  $\partial_{v_1} \partial_{v_2} \cdots \partial_{v_k}$  ist  $k$ -fach linear in den Vektoren  $v_1, \dots, v_k$  als Inputs. Die Anwendung auf eine Funktion ist entsprechend  $(k+1)$ -fach linear in den  $k$  Richtungsvektoren und der Funktion als Inputs.

Als  $k$ -lineare Abbildung ist dies eine symmetrische Abbildung, d.h.  $\partial_v \partial_w f = \partial_w \partial_v f$ , sofern  $f$  zweimal stetig differenzierbar ist. Das ist der Satz von Schwarz<sup>1</sup>.

f.) Kreuzprodukt:

Es gibt eine besondere bilineare Abbildung  $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , genannt Kreuzprodukt, die in anderen Dimensionen keine gute Analogie hat, nämlich

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ x_1 z_2 - x_2 z_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Es ist bilinear, aber weder kommutativ noch assoziativ. Stattdessen ist es antisymmetrisch.

## 1.3 Das Tensorprodukt

**1.7:** Bilineare Abbildungen sind in vielerlei Hinsicht ähnlich zu linearen Abbildungen, z.B. kann man sie durch Basiswahl eindeutig beschreiben, d.h.

Wenn  $V, W$  zwei  $K$ -Vektorräume sind,  $b_1, \dots, b_n$  eine Basis von  $V$  und  $c_1, \dots, c_m$  eine Basis von  $W$ , und  $\phi : V \times W \rightarrow X$  eine bilineare Abbildung, dann sind alle Werte  $\phi(v, w)$  bereits eindeutig festgelegt, wenn man  $\phi(b_i, c_j)$  für alle  $i$  und  $j$  kennt, und umgekehrt liefert jede beliebige Wahl von Vektoren  $x_{ij} \in X$  genau eine bilineare Abbildung  $\psi : V \times W \rightarrow X$ , die  $\psi(b_i, c_j) = x_{ij}$  erfüllt.

Weiter könnte man z.B. jetzt den Raum aller bilinearen Abbildungen  $Bil(V, W; X)$  betrachten und beweisen, dass das selbst ein Vektorraum ist genau wie der Raum der linearen Abbildungen zwischen zwei festen Vektorräumen selbst ein Vektorraum ist.

<sup>1</sup>Hermann Amandus Schwarz (1843 – 1921), dt. Mathematiker.

Ähnliches gilt auch für  $k$ -lineare Abbildungen. Außerdem kann man sich davon überzeugen, dass diese Strukturen mit Hintereinanderausführung von Abbildungen verträglich sind. Hier ist noch zu beachten, dass multilineare Abbildungen viel mehr Möglichkeiten haben, zwei Abbildungen hintereinander auszuführen, z.B. könnte man zwei bilineare Abbildungen hintereinander ausführen, indem man

$$\phi(\psi(u, v), w) \quad \text{oder} \quad \phi(u, \psi(v, w))$$

bildet und i.A. sind das zwei verschiedene 3-lineare Abbildungen. Man hat bereits drei fundamental verschiedene Möglichkeiten, lineare und bilineare Abbildungen miteinander zu kombinieren: Man kann  $\phi(\alpha(u), v)$ ,  $\phi(u, \alpha(w))$  oder  $\alpha(\phi(u, v))$  bilden je nachdem, was davon tatsächlich definiert ist. Alle Kombinationen sind jedoch wieder bilineare Abbildungen. Wenn man allgemein  $k$ - und  $m$ -lineare Abbildungen miteinander kombinieren will, hat man sehr schnell eine explodierende Anzahl verschiedener Möglichkeiten vor sich. Sie alle liefern wieder multilineare Abbildungen als Ergebnis und alle Möglichkeiten  $a$  verschiedene multilineare Abbildungen auf diese Weise zu kombinieren, sind selbst  $a$ -fach lineare Operationen zwischen den entsprechenden Abbildungsräumen.

Man könnte all das jetzt für alle diese Kombinationen beweisen, wenn man zu viel Freizeit und Tinte hat. Alle Beweise sind langweilig, wenn man den linearen Fall einmal verstanden hat und funktionieren in der Tat völlig analog.<sup>2</sup> Das große Problem ist eigentlich, eine geeignete Notation zu finden, die einem erlaubt, diese Beweise alle nur einmal und dafür allgemein zu führen, statt in jeder neuen Kombination von vorne anfangen zu müssen. Und selbst wenn man sich so eine Notation überlegt, dann steht man noch vor einigen technischen, aber völlig trivialen Problemen, die mehr Arbeit verlangen als man für solche Trivialitäten erwartet. Wenn man beispielsweise eine Notation erfindet um zwei multilineare Abbildungen miteinander zu verbinden, dann stellt sich die Frage, ob alle Arten, drei multilineare Abbildungen zu verbinden, sich durch schrittweises Verbinden von je zweien erhalten lassen und ob dafür eine geeignete Form von Assoziativität gilt. Erneut stellt man fest, dass die Antwort „ja“ ist, die geeignete Form von Assoziativität gilt und die Beweise alle analog zum linearen Fall laufen.

**1.8:** All diese Fälle sind letztendlich so sehr ähnlich zum linearen Fall, dass es in der Tat eine Konstruktion gibt, die es einem erlaubt, multilineare Abbildungen als echte lineare Abbildungen aufzufassen, sodass man überhaupt nichts mehr beweisen muss, das über den (schon bekannten) linearen Fall und die Existenz und grundlegenden Eigenschaften dieser Konstruktion hinaus geht. Dieses Konstrukt ist das *Tensorprodukt*.

**1.9 Satz und Definition** (Universelle Eigenschaft und Existenz des Tensorprodukts): Es seien  $V, W$  zwei  $K$ -Vektorräume. Es gibt eine „universelle bilineare Abbildung“, d.h. es gibt ein Vektorraum  $T$  und eine bilineare Abbildung  $\tau : V \times W \rightarrow T$ , sodass jede bilineare Abbildung  $\phi : V \times W \rightarrow X$  sich schreiben lässt als  $f \circ \tau$  mit einer eindeutig bestimmten linearen Abbildung  $f : T \rightarrow X$ .

---

<sup>2</sup>Wer's nicht glaubt, probiere es selbst aus und finde alle diese Beweise, bis das notwendige Maß an Langeweile erreicht ist.

$T$  und  $\tau$  sind in der Tat eindeutig bestimmt bis auf einen eindeutigen Isomorphismus, d.h. wenn  $\tau' : V \times W \rightarrow T'$  eine weitere universelle bilineare Abbildung ist, dann gibt es genau einen Isomorphismus  $\alpha : T \rightarrow T'$ , sodass

Diagram

$$V \times W \xrightarrow{\tau} T \xrightarrow{\alpha} T' = \tau'$$

gilt. Man schreibt üblicherweise  $V \otimes W$  statt  $T$  und  $v \otimes w$  statt  $\tau(v, w)$  für diesen eindeutig bestimmten Vektorraum und bilineare Abbildung und nennt sie Tensorprodukt von  $V$  und  $W$ . (Achtung: Das Tensorprodukt ist streng genommen die Kombination aus  $T$  und  $\tau$ , nicht nur  $T$ ).

**1.10:** Ausgeschrieben sagt die universelle Eigenschaft folgendes: Von einer Abbildungsvorschrift  $\phi : (v, w) \mapsto x_{v,w}$ , die je einen Inputvektor aus  $V$  und einen aus  $W$  nimmt und einen Vektor aus  $X$  produziert, gibt es genau dann eine Realisierung dieser Abbildungsvorschrift als lineare Abbildung  $f : V \otimes W \rightarrow X$  mit  $f(v \otimes w) = x_{v,w}$ , wenn  $\phi$  bilinear ist.

Jede bilineare Abbildung kann so eindeutig als lineare Abbildung auf dem Tensorprodukt der beiden Inputräume betrachtet werden, und umgekehrt kann jede lineare Abbildung auf einem Tensorprodukt als bilineare Abbildung aufgefasst werden, indem man sie auf die Menge der reinen Tensoren einschränkt.

### 1.11 Definition (Reine Tensoren):

Ein Element von  $V \otimes W$ , das die Form  $v \otimes w$  hat, wird als reiner Tensor bezeichnet.

**1.12** (Diskussion: reine vs. nicht-reine Tensoren): Ein wichtiger, vielleicht der wichtigste Grund, Tensorräume als eigenständiges Objekt einzuführen statt ausschließlich mit multilinearen Abbildungen zu arbeiten ist die Existenz von nicht-reinen Tensoren: Eine Summe  $v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 + \dots + v_k \otimes w_k$  (die natürlich immer existiert, weil  $V \otimes W$  ja ein Vektorraum ist) ist i.A. kein reiner Tensor, lässt sich also i.A. nicht darstellen als  $v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 + \dots + v_k \otimes w_k = x \otimes y$ .

Es stellt sich heraus, dass viele der wirklich interessanten Tensoren, die einem so in freier Wildbahn begegnen, nicht rein sind.

Beispiel: In der Quantenmechanik wird das Tensorprodukt benutzt, um mehrere interagierende Quanten-Systeme als ein einziges großes System zu betrachten: Wenn  $V$  und  $W$  der Zustandsraum je einer Menge  $X$  bzw.  $Y$  quantenmechanischer Teilchen sind, dann ist  $V \otimes W$  der Zustandsraum des quantenmechanischen Systems, das aus den Teilchen von  $X$  und  $Y$  besteht und beliebige Interaktionen zwischen ihnen erlaubt. Ein reiner Tensor  $v \otimes w$  entspricht in dieser Sichtweise demjenige Zustand des Gesamtsystems, in dem sich die Teilchen aus  $X$  im Zustand  $v$ , und das aus  $Y$  im Zustand  $w$  befinden. Die nicht-reinen Tensoren entsprechen dann „Überlagerungen“ solcher reinen Zustände und das fundamental wichtige Phänomen von „verschränkten“ Teilchen ist ein Ausdruck dessen, dass eben nicht alle Zustände reine Zustände sind, in denen man die Teilchen von  $X$  unabhängig von denen in  $Y$  einen Zustand zuschreiben kann: Es kann z.B. ein Zustand der Form  $x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2$  konstruiert (und auch experimentell realisiert) werden, in



dem  $x_1$  und  $x_2$  sowie  $y_1$  und  $y_2$  beide jeweils senkrecht zueinander sind. In solch einem Zustand des Gesamtsystems können die  $X$ -Teilchen in Zustand  $x_1$  oder  $x_2$  gemessen werden, aber nur dann, wenn gleichzeitig die  $Y$ -Teilchen in Zustand  $y_1$  bzw.  $y_2$  liegen. Es kann eben nicht unabhängig voneinander der  $X$ -Anteil in Zustand  $x_1$  sein, während der  $Y$ -Anteil des Gesamtsystems in Zustand  $y_2$  ist (hier geht die Orthogonalität ein).

### 1.13 Beispiel (Casimir-Element):

Ist  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und haben wir ein Skalarprodukt fest gewählt, so gibt es einen besonderen Tensor  $\Omega_V \in V \otimes V$ . Für *jede* Orthogonalbasis  $e_1, \dots, e_n$  von  $V$  lässt er sich schreiben als

$$\Omega_V = \sum_{i=1}^n e_i \otimes e_i$$

Für  $V = \mathbb{R}^3$  und die Standardbasis  $e_x, e_y, e_z$  ist etwa

$$\Omega_{\mathbb{R}^3} = e_x \otimes e_x + e_y \otimes e_y + e_z \otimes e_z$$

Betrachten wir den Raum der linearen Differentialoperatoren erster Ordnung auf  $C^\infty(V)$ , d.h. der Vektorraum der Operatoren  $\{\partial_v \mid v \in V\}$ . Darin schreibt sich das Casimir-Element als

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \partial_{v_i} \otimes \partial_{e_i}$$

Wenn wir die Komposition von Operatoren (eine bilineare Abbildung) auf diesen Tensor anwenden, erhalten wir den Laplace-Operator:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{e_i}^2$$

Man beachte insbesondere, dass das Ergebnis der Summe auf der rechten Seite unabhängig von der gewählten Basis ist, obwohl die einzelnen Summanden es natürlich nicht sind. Das erklärt z.B., wieso der Laplace-Operator und viele ähnlich aussehende Konstruktionen physikalische sinnvolle Objekte liefern, obwohl ihre Definition auf den ersten Blick basisabhängig zu sein scheint.

**1.14:** Man kann sich jedoch leicht davon überzeugen, dass die Menge aller Summen von reinen Tensoren tatsächlich das volle Tensorprodukt abdeckt:

$$V \otimes W = \{ v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 + \dots + v_k \otimes w_k \mid k \in \mathbb{N}, v_i \in V, w_i \in W \}$$

In der Welt der Quantenmechanik würde man dazu also z.B. sagen: Der Zustandsraum des aus zwei Einzelsystemen kombinierten Systems besteht aus allen Kombinationen von reinen Zuständen der Einzelsysteme sowie allen Überlagerungen dessen.

Es ist i.A. ein sehr schwieriges Problem, einem konkreten Tensor anzusehen, ob er rein ist oder nicht, und wenn nicht, welche reinen Zustände man zusammen addieren muss, um ihn zu erhalten. Nicht einmal die Anzahl der mindestens notwendigen Summanden ist einfach zu finden im Allgemeinen.

**1.15** (Diskussion: Das Wort „Tensor“): Im Gegensatz zum Wort „Vektor“, das zumindestens meistens „Element eines Vektorraums“ bedeutet und selten anders verwendet wird, ist das Wort „Tensor“ etwas überbelegt. Die verschiedenen Verwendungsformen des Wortes fallen grob in zwei Kategorien: 1.) „ich habe keine Ahnung, was Tensoren sind, aber andere Leute benutzen das Wort, also tue ich das auch“ und 2.) irgendetwas, das tatsächlich mit Tensorprodukten zu tun hat.

Zu 1. später mehr, zu 2. nur soviel: „Tensor“ kann sowohl „Element eines Tensorprodukts von Vektorräumen“ bedeuten (so werden wir das Wort verwenden) als auch einen von diversen, verwandten Begriffe, z.B. wird das auch als Kurzform von Tensorfeld verwendet. Ein Tensorfeld ist eine Funktion, die jedem Punkt des gerade betrachteten geometrischen Raums  $X$  (oder Raumzeit) je ein Element  $t(x) \in V_x \otimes V_x \otimes V_x \otimes \dots$  zuordnet, wobei gewisse Stetigkeitseigenschaften gefordert werden, die für zwei eng beieinander liegende Punkte  $x, x'$  fordern, dass  $V_x$  und  $V_{x'}$  „im Wesentlichen der gleiche Raum“ sind und  $t(x), t(x')$  ebenfalls eng zusammen liegen (formal ist das natürlich eine richtige  $\epsilon$ - $\delta$ -artige Definition). Ggf. wird auch nicht nur ein Vektorraum  $V_x$  pro Punkt verwendet, sondern mehrere. Je nachdem, welche Zusatzeigenschaften man an solch ein Tensorfeld stellt, wird auch nicht nur das Tensorprodukt der Vektorräume selbst, sondern auch eine vom Tensorprodukt abgeleitete Konstruktion betrachtet (z.B. symmetrische oder äußere Potenzen, siehe weiter unten).

Physiker sprechen außerdem noch „Pseudotensoren“, die aber mathematisch gesehen auch nur Tensoren wie alle anderen sind. Der Unterschied liegt darin, dass der Tensorraum, aus dem sie kommen, mit einer Zusatzstruktur versehen wird, der einer Darstellung. Während „gewöhnliche“ Tensoren ihre Tensorprodukte in der „offensichtlichen“ Weise als Darstellung auffassen, wird bei Pseudotensoren ein „Twist“ auf die Darstellung angewendet.

## Aufgaben

### Aufgabe 1.1. – Casimir-Elemente von euklidischen Räumen

Es sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und  $e_1, \dots, e_n$  eine Orthonormalbasis.

a.) Zeige, dass der Casimir-Tensor

$$\Omega_V := \sum_{i=1}^n e_i \otimes e_i$$

unabhängig von der Basiswahl ist, d.h. wenn  $e'_1, \dots, e'_n$  eine weitere Orthonormalbasis von  $V$  ist, dann gilt:

$$\sum_{i=1}^n e_i \otimes e_i = \sum_{i=1}^n e'_i \otimes e'_i$$

Hinweis: Orthogonale Matrizen.

b.) Zeige, dass  $\Omega_V$  „isotrop“ ist, d.h. für alle Isometrien  $Q : V \rightarrow V$  gilt:

$$(Q \otimes Q)(\Omega) = \Omega$$

Hinweis: Benutze a.

### Aufgabe 1.2. – Casimir-Elemente allgemein

Es sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $K$ -Vektorraum,  $b_1, \dots, b_n$  eine beliebige Basis von  $V$  und  $b_1^*, \dots, b_n^*$  die dazu duale Basis von  $V^*$ .

a.) Zeige, dass

$$\Omega := \sum_{i=1}^n b_i \otimes b_i^* \in V \otimes V^*$$

unabhängig von der Basiswahl ist.

Hinweis: Wenn  $A$  eine Basiswechselmatrix zwischen zwei Basen von  $V$  ist, wie sieht dann die Basiswechselmatrix der beiden dazugehörigen dualen Basen von  $V^*$  aus?

b.) Wie entspricht das dem Casimir-Element euklidischer Räume?

i.) Zeige zunächst, dass die Abbildung  $V \rightarrow V^*, v \mapsto \langle v, - \rangle$  ein Isomorphismus  $V \rightarrow V^*$  ist.

ii.) Was tut diese Abbildung mit einer Orthonormalbasis?

### Aufgabe 1.3. – Aber Tensoren sind doch so Buchstaben mit Indizes

Häufig wird einem von Physikern oder Ingenieuren ein Tensor lediglich als ein Buchstabe mit Indizes untergejubelt - z.B. der Spannungstensor  $\sigma_{ij}$ . Es sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und  $e_1, \dots, e_n$  eine Orthonormalbasis. Wir betrachten das  $m$ -fache Tensorprodukt  $V^{\otimes m}$ . Wer mag, kann zur Vereinfachung  $n = 3$  und  $K = \mathbb{R}$  wählen.

- a.) Einen beliebigen Tensor aus  $V^{\otimes m}$  schreiben wir z.B. als  $T \in V^{\otimes m}$ , während er andernorts mit  $T_{j_1 \dots j_n}$  bezeichnet wird, was streng genommen nur eine Kollektion besonders nummerierter Zahlen aus  $K$  ist. Wie ist der Zusammenhang zwischen  $T$  und  $T_{j_1 \dots j_n}$ ?

Hinweise: Von  $V$  induzierte Basiswahl für  $V^{\otimes m}$ , Vergleiche mit einem Vektor  $v \in V$  und  $v_i$ .

- b.) Ein sehr häufig verwendeter "Buchstabe mit Indizes" ist das Kronecker- $\delta$ , oder auch der  $\delta_{ij}$ -Tensor. Um welchen Tensor handelt es sich hier? Hinweis: Übersetze in die Schreibweise mit dem Tensorprodukt  $\otimes$ .

- c.) Die Spur eines Tensors zwischen seinem  $k$ -ten und  $l$ -ten Faktor wird in Indexschreibweise als Dopplung eines bestimmten Indexes an den entsprechenden Stellen notiert,  $T_{j_1 \dots j_{k-1} i j_{k+1} \dots j_{l-1} i j_{l+1} \dots j_m}$ , die eine Summe über  $i$  von 1 bis  $n$  impliziert (a.k.a. *Einstein'sche Summenkonvention*). Überzeuge dich, dass dies unserer Definition von Spur entspricht.

Üblich zum Spur nehmen ist auch eine Schreibweise mit dem Kronecker- $\delta$ :

$$T_{j_1 \dots j_{k-1} i j_{k+1} \dots j_{l-1} i j_{l+1} \dots j_m} \delta_{ir},$$

ebenfalls mit impliziter Summe über gedoppelte Indizes. Zeige, dass dies die gleiche Operation beschreibt.

- d.) Eine weitere häufiger zu findende Schreibweise mit dem Kronecker- $\delta$  ist die folgende:

$$T_{j_1 \dots j_{k-1} j_k j_{k+1} \dots j_{l-1} j_l j_{l+1} \dots j_m} \delta_{ir},$$

was üblicherweise gekürzt wird auf  $T_{j_1 \dots j_m} \delta_{j_{m+1} j_{m+2}}$ . Was ist der Unterschied zu c.)? Schreibe diesen Tensor ohne Indizes auf.

#### Aufgabe 1.4. – Was denn für Indizes?

Schön, dass dir die Index-Schreibweise noch nicht begegnet ist. Da wir in unserem Kurs so wenig wie möglich mit dieser Schreibweise arbeiten wollen wie möglich, kann dies zu deinem Vorteil sein.

Es sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und  $e_1, \dots, e_n$  eine Orthonormalbasis. Wir betrachten das  $m$ -fache Tensorprodukt  $V^{\otimes m}$ . Wer mag, kann zur Vereinfachung  $n = 3$  und  $K = \mathbb{R}$  wählen. Zeige, dass  $\text{tr}_{(i,r)}(T) = \text{tr}_{(i,n+1)(r,n+2)}(T \otimes \Omega_V)$  gilt.

## 2 Warum Darstellungstheorie?

### 2.1 Geschickte Basiswahl

Wie dem ein oder anderen aufgefallen sein wird, haben wir in dem vorherigen Kapitel Tensoren eingeführt, ohne eine Basis für deren Vektorraum zu benötigen oder vielleicht im Nachgang eine Basis zu konstruieren. Allgemeine Aussagen lassen sich schließlich auch weitgehend basisfrei, oder zumindest basis-unabhängig machen. Jetzt wollen manche jedoch Tensoren nicht nur einfach so für ein bisschen hübsche Mathematik benutzen sondern tatsächlich mal ein Problem mit Zahlen (und zwar nicht nach dem Mathematiker-Prinzip "Sei  $a \in \mathbb{R} \dots$ ", sondern halt mal welche mit echten Ziffern) ausrechnen. Dafür braucht man ab irgendeinem Punkt eine Basis, idealerweise eine, die orthonormal bezüglich eines gewählten Skalarproduktes ist. Haben wir ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $V$  gegeben, ist das Standardskalarprodukt auf  $V^{\otimes m}$  definiert mit der Vorschrift

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V^{\otimes m} \times V^{\otimes m} \rightarrow K \quad (1)$$

$$\langle v_1 \otimes \dots \otimes v_m, w_1 \otimes \dots \otimes w_m \rangle \mapsto \langle v_1, w_1 \rangle \cdot \dots \cdot \langle v_m, w_m \rangle \quad (2)$$

und ihrer linearen Fortsetzung. Gegeben eine Orthonormalbasis  $e_1, \dots, e_n$  von  $V$  lässt sich bezüglich des Standardskalarproduktes sehr einfach eine noch zu normierende, aber orthogonale Basis für  $V^{\otimes m}$  bestehend aus allen Kombinationen der Basisvektoren  $e_i$  konstruieren:

$$\{e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_m} \mid j_k \in 1 \dots n\} \quad (3)$$

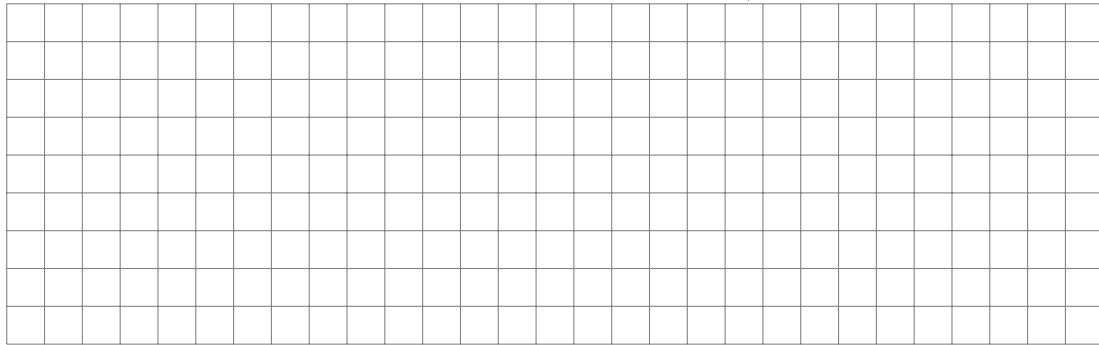
Sie wird häufig implizit verwendet (siehe Aufgabe ??). Hieraus ließe sich recht simpel eine orthonormale Basis für den Tensorraum ableiten. Aber ist diese Basis auch eine gute Basis? Was macht eine "gute" Basis überhaupt aus?

Betrachten wir einmal kurz ein Problem aus der uns bekannten, 3-dimensionalen Welt: Anna und Bernd stehen 5 Meter voneinander entfernt in einer ebenen Wiese einer flachen Wand gegenüber. Anna ist weiter weg von der Wand (Abstand: 4m) als Bernd (Abstand: 3m) und hat einen Ball in der Hand. Anna möchte Bernd den Ball so zuwerfen, dass er einmal an der Wand abprallt und dann in Bernds Händen landet. Dabei soll der Ball den Boden nur zwischen der Wand und Bernd berühren und zwar genau 1 mal. Berechne die Trajektorie vom Ball und die Kraft, mit der Anna den Ball abwerfen muss unter der Annahme von Reibungsfreiheit.

Schriftart der Aufgabe verändern (kleiner, dicker?)



Wir wollen jetzt nicht die Lösung für dieses Problem finden, sondern viel mehr fragen: Welche orthonormale Basis würde man am ehesten wählen, um sie zu lösen und warum?



Diese Frage lässt sich auch auf den Vektorraum der Tensoren übertragen. Wir werden genauer definieren, was es für eine Basis heißt, günstig gewählt zu sein und herausfinden, wie solch eine Basis für symmetrische Tensoren bzw. Polynome aussieht.

## 2.2 Einschränkung auf erlaubte lineare Abbildungen zwischen Tensoren und ihre Klassifikation

Wie für Tensoren bereits deutlich wurde, gibt es unendlich viele lineare Abbildungen zwischen den Tensorräumen. Jetzt wollen wir mit Tensoren jedoch meistens physikalische Probleme beschreiben, die bestimmten grundsätzlichen Symmetrien unterliegen. So wird z.B. ein Ball bei gleichen Bedingungen immer die gleiche Flugbahn haben, ganz egal wie wir das Koordinatensystem drehen, um die Flugbahn zu berechnen. Dieses Erkenntnis lässt sich in mathematische Forderungen gießen, welche uns die linearen Abbildungen zwischen Tensoren als nur 4 Arten klassifizieren lässt.

## 2.3 Berechnungen mit linearen Abbildungen

Wie wir zuvor gelernt haben, lässt sich im Prinzip jede multi-lineare Abbildung durch eine i.A. sehr große Matrix darstellen. Nun ist eine Berechnung dann besonders einfach (bzw. bei Nutzung eines Computers besonders schnell), wenn die Matrix viele 0en hat. Dies ist ein beliebter Grund in der angewandten Numerik, um einen Basiswechsel durchzuführen: Ziel ist es, die Basis so zu drehen, dass eine voll besetzte Matrix maximal viele 0 hat, da sich so bei hinreichend großen Dimensionen die Rechenzeit insgesamt stark reduziert.

Mit Hilfe der Darstellungstheorie können wir sogar einen Schritt weiter gehen - Wir werden für eine bestimmte Klasse von linearen Abbildungen eine Basis finden, die uns maximal viele 0en in der Matrix garantiert.

## Aufgaben