

# Warum spherical harmonics?

Johannes Hahn      Andrea Hanke

08.08.21 – 15.08.21

## Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Einführung</b>	<b>3</b>
<b>1</b>	<b>Wiederholung: Gruppen, Vektorräume und bilineare Abbildungen</b>	<b>3</b>
1.1	Gruppen . . . . .	3
1.2	Vektorräume . . . . .	3
1.3	Bilineare Abbildungen . . . . .	5
Blatt 1	. . . . .	8
1.1.	Simultane Diagonalisierbarkeit . . . . .	8
1.2.	Hermite Normalform . . . . .	8
1.3.	Normale Matrizen . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Warum Tensoren?</b>	<b>9</b>
2.1	Das Tensorprodukt . . . . .	9
2.2	Elementare Eigenschaften des Tensorprodukts . . . . .	12
2.3	Index-Notation - Was das ist und wie man sie loswird . . . . .	13
2.4	Lineare Abbildungen zwischen Tensoren . . . . .	18
Blatt 2	. . . . .	23
2.1.	Casimir-Elemente von euklidischen Räumen . . . . .	23
2.2.	Casimir-Elemente allgemein . . . . .	23
2.3.	Aber Tensoren sind doch so Buchstaben mit Indizes . . . . .	23
2.4.	Was denn für Indizes? . . . . .	24
2.5.	Warum heißt das Spur? . . . . .	24
2.6.	Brauer-Diagramme . . . . .	24
2.7.	Wiederholung von Isomorphie zwischen Vektorräumen: Matrix vs. 2-Tensor . . . . .	25
2.8.	Wilde Behauptungen . . . . .	25
<b>3</b>	<b>Warum Darstellungstheorie?</b>	<b>26</b>
3.1	Geschickte Basiswahl . . . . .	26
3.2	Einschränkung auf erlaubte lineare Abbildungen zwischen Tensoren und ihre Klassifikation . . . . .	27

3.3	Berechnungen mit linearen Abbildungen . . . . .	27
3.4	Elementare Darstellungstheorie . . . . .	28
Blatt 3	. . . . .	33
3.1.	Komische Minus Einsen . . . . .	33
Aufgabe 3.2	. . . . .	33
Aufgabe 3.3	. . . . .	33
3.4.	Basiswechsel . . . . .	33
Aufgabe 3.5	. . . . .	34
Aufgabe 3.6	. . . . .	34
Aufgabe 3.7	. . . . .	34
3.8.	Kanonische Darstellung von $SO_2$ . . . . .	34
3.9.	Die kanonische Darstellung von $SO_3$ ist irreduzibel . . . . .	34
3.10.	Was geht bei $SO_2$ schief? . . . . .	34
3.11.	(Nicht-)Isomorphie von $V$ und $V^*$ . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Darstellungstheorie – Level 0</b>	<b>36</b>
4.1	Symmetrische Tensoren: Die Verbindung zwischen Polynomen und Tensoren	36
4.2	Natürliche Abbildungen und die Klassifikation der linearen Tensor-Abbildungen	39
Blatt 4	. . . . .	43
Aufgabe 4.1	. . . . .	43
4.2.	Die 4 Klassen von linearen Tensor-Abbildungen sind natürlich . . . .	43
4.3.	Bunte Casimir-Elemente . . . . .	43
4.4.	Tensoren auf $O_3$ -Fixpunkte projizieren . . . . .	43
<b>5</b>	<b>Darstellungstheorie – Level 1</b>	<b>44</b>
5.1	Einige irreduzible Darstellungen von Isometriegruppen . . . . .	46
Blatt 5	. . . . .	49
5.1.	Satz von Schur über Körpern $\neq \mathbb{C}$ . . . . .	49
5.2.	Der Satz von Maschke ist falsch für nichtkompakte Gruppen . . . . .	49
Aufgabe 5.3	. . . . .	49
Aufgabe 5.4	. . . . .	49
Aufgabe 5.5	. . . . .	49
<b>6</b>	<b>Darstellungstheorie – Level 2</b>	<b>50</b>
<b>7</b>	<b>Darstellungstheorie von <math>O_2</math></b>	<b>53</b>
<b>8</b>	<b>Darstellungstheorie von <math>O_3</math></b>	<b>57</b>
<b>9</b>	<b>Warum Spherical Harmonics?</b>	<b>58</b>

## 0 Einführung

## 1 Wiederholung: Gruppen, Vektorräume und bilineare Abbildungen

### 1.1 Gruppen

**1.1 Definition** (Gruppen und Gruppenhomomorphismen):

Eine Gruppe  $(G, \cdot)$  besteht aus

- einer Menge  $G$ ,
- einer Abbildung  $\cdot : G \times G, (g, h) \mapsto g \cdot h$ , genannt Multiplikation,

die die Gruppen-Axiome in Tabelle 1.1 erfüllen.

Gruppen-Axiome	Bedeutung
Assoziativität	$\forall g_1, g_2, g_3 \in G : g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$
Neutrales Element bzw. „Eins“	$\exists 1 \in V \forall g \in G : g \cdot 1 = g = 1 \cdot g$
Inverse Elemente	$\forall g \in G \exists h \in G : g \cdot h = 1 = h \cdot g$
Optional kann gelten	
Kommutativität (abelsche Gruppe)	$\forall g, h \in G : g \cdot h = h \cdot g$
Axiom von Gruppenhomomorphismen	Bedeutung
Verträglichkeit mit Multiplikation	$\forall g, h \in G : f(g \cdot h) = f(g) \cdot f(h)$

Tabelle 1.1: Definierende Eigenschaften von Gruppen und Gruppenhomomorphismen

Sind  $G, H$  zwei Gruppen und  $f : G \rightarrow H$  eine Abbildung, so heißt  $f$  Gruppenhomomorphismus, falls sie mit den beiden Multiplikationen verträglich ist.

Existiert ein Homomorphismus  $f' : W \rightarrow V$  mit  $f \circ f' = f' \circ f = \text{id}$ , so nennt man  $f$  Isomorphismus der Gruppen.

### 1.2 Vektorräume

Wir kennen uns bereits mit Vektorräumen aus. Typische Beispiele sind  $\mathbb{R}^3$  oder der Raum der Polynome von einem bestimmten Grad  $n$ . Da uns in diesem Kurs noch weitere Vektorräume begegnen werden und zum Vergleich mit anderen mathematischen Objekten (z.B. Darstellungen), ist hier ihre Definition zusammengefasst.

**1.2 Definition** (Vektorräume und lineare Abbildungen):

Sei  $K$  ein Körper. Ein  $K$ -Vektorraum  $(V, +, \cdot)$  besteht aus

- einer Menge  $V$ ,
- einer Abbildung  $+: V \times V \rightarrow V, (v, w) \mapsto v + w$ , genannt (Vektor)addition und
- einer Abbildung  $\cdot: K \times V \rightarrow V, (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$ , genannt Skalarmultiplikation.

die die Vektorraum-Axiome in Tabelle 1.2 erfüllen. Alles, was Element eines Vektorraums ist, kann Vektor genannt werden.

Vektorraum-Axiom	Bedeutung
$(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe	Addition verhält sich wie erwartet
Assoziativität	$\forall u, v, w \in V : u + (v + w) = (u + v) + w$
Neutrales Element bzw. „Null“	$\exists 0 \in V \forall v \in V : v + 0 = 0 + v$
Inverse bzw. „negative“ Elemente	$\forall v \in V \exists w \in V : v + w = 0$
Kommutativität	$\forall u, v \in V : u + v = v + u$
Eigenschaften der Skalarmultiplikation	
Assoziativität	$\forall a, b \in K, v \in V : a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v$
Normierung bzw. Nichttrivialität	$\forall v \in V : 1 \cdot v = v$ , wobei 1 das Einselement des Körpers bezeichnet
Verträglichkeit von Addition und Skalarmultiplikation	
Distributivität bzgl. $(V, +)$	$\forall a \in K, u, v \in V : a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$
Distributivität bzgl. $(K, +)$	$\forall a, b \in K, v \in V : (a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$
Axiome linearer Abbildungen	Bedeutung
Additivität	$\forall v_1, v_2 \in V : f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
Homogenität	$\forall \lambda \in K, v \in V : f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$

Tabelle 1.2: Definierende Eigenschaften von Vektorräumen und linearen Abbildungen

Sind  $V, W$  zwei  $K$ -Vektorräume und  $f: V \rightarrow W$  eine Abbildung, so heißt  $f$  ( $K$ -)lineare Abbildung oder (Vektorraum-)Homomorphismus, falls die beiden Axiome in Tabelle 1.2

erfüllt sind. Den Raum aller  $K$ -linearen Abbildungen von  $V$  nach  $W$  bezeichnen wir mit  $\text{Hom}_K(V, W)$ . Eine  $K$ -lineare Abbildung von  $V$  nach  $V$  (also gleicher Definitions- und Zielraum) heißt (Vektorraum-)Endomorphismus, der Raum aller solcher Abbildungen wird mit  $\text{End}_K(V)$  notiert.

Existiert ein Homomorphismus  $f' : W \rightarrow V$  mit  $f \circ f' = f' \circ f = \text{id}$ , so nennt man  $f$  Isomorphismus der Vektorräume.

**1.3:** Wir sind praktisch ausschließlich an  $\mathbb{R}$ - und  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen interessiert in diesem Kurs.

**1.4 Definition** (Kern & Bild):

Ist  $f : V \rightarrow W$  eine  $K$ -lineare Abbildung, so ist

$$\ker(f) := \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}$$

der Kern von  $f$  und

$$\text{im}(f) := \{ w \in W \mid \exists v \in V : f(v) = w \}$$

das Bild von  $f$ .

### 1.3 Bilineare Abbildungen

**1.5:** Es gibt i.A. keine Multiplikation zweier Vektoren miteinander in irgendeinem Sinne. Wir können immer Skalare mit Vektoren multiplizieren, aber nicht Vektoren mit Vektoren. Nichts desto trotz ist es *manchmal* doch so, dass zusätzlich zu Addition und Skalarmultiplikation eine weitere Operation existiert, die ein sinnvolles Konzept von Multiplikation liefert, z.B.

a.) Der Vektorraum der Polynome  $\mathbb{R}[X]$  hat die Polynommultiplikation, d.h.

$$\left( \sum_{i=0}^n a_i X^i \right) \cdot \left( \sum_{j=0}^m b_j X^j \right) := \sum_{k=0}^{n+m} \left( \sum_{\substack{i,j \\ i+j=k}} a_i b_j \right) X^k$$

b.) Der Vektorraum der Funktionen  $X \rightarrow \mathbb{C}$  für einen festen Definitionsbereich  $X$  hat die punktweise Multiplikation, d.h.

$$f \cdot g := x \mapsto f(x)g(x)$$

c.) Die Hintereinanderausführung von linearen Abbildungen  $\text{Hom}_K(V, W) \times \text{Hom}_K(U, V) \rightarrow \text{Hom}_K(U, W)$ ,  $(f, g) \mapsto f \circ g$  ist eine Abbildung, die sich in vielerlei Hinsicht auch wie eine Multiplikation verhält. Für  $U = V = W$  erhält man insbesondere eine Multiplikation  $\text{End}_K(V) \times \text{End}_K(V) \rightarrow \text{End}_K(V)$ .

Nach Wahl von je einer Basis können wir  $\text{Hom}_K(V, W)$ ,  $\text{Hom}_K(U, V)$  und  $\text{Hom}_K(U, W)$  mit  $K^{n \times m}$ ,  $K^{m \times p}$  und  $K^{n \times p}$  identifizieren. Die Hintereinanderausführung von linearen Abbildung entspricht dann der Matrixmultiplikation.

d.) ...

**1.6 Definition** (Bilineare & multilineare Abbildungen):

Sind  $V, W, X$  drei  $K$ -Vektorräume, so heißt eine Abbildung  $\phi : V \times W \rightarrow X$  **bilinear**, falls sie beiden Linearitätsbedingungen in Tabelle 1.6 erfüllt, d.h. die Funktion ist separat linear, wenn man nur den ersten oder nur den zweiten Input variiert und den anderen festhält.

Axiom	Bedeutung
Linearität:	
im ersten Argument	$\forall v_1, v_2 \in V, w \in W : \phi(v_1 + v_2, w) = \phi(v_1, w) + \phi(v_2, w)$ $\forall \lambda \in K, v \in W, w \in W : \phi(\lambda v, w) = \lambda \phi(v, w)$
im zweiten Argument	$\forall v \in V, w_1, w_2 \in W : \phi(v, w_1 + w_2) = \phi(v, w_1) + \phi(v, w_2)$ $\forall \lambda \in K, v \in W, w \in W : \phi(v, \lambda w) = \lambda \phi(v, w)$
Falls $\phi : V \times V \rightarrow X$ , kann optional gelten:	
Symmetrie bzw. Kommutativität	$\forall u, v \in V : \phi(u, v) = \phi(v, u)$
Antisymmetrie	$\forall u, v \in V : \phi(u, v) = -\phi(v, u)$
Falls $\phi : V \times V \rightarrow V$ , kann optional gelten:	
Assoziativität	$\forall u, v, w \in V : \phi(u, \phi(v, w)) = \phi(\phi(u, v), w)$

Tabelle 1.3: Eigenschaften von bilinearen Abbildungen

Für Abbildungen  $V_1 \times V_2 \times V_3 \rightarrow X$ , die von drei Inputvektoren abhängig sind, kann man entsprechend definieren, dass eine Abbildung **trilinear** heißt, wenn sie die drei Distributivgesetze erfüllt. Für vier, fünf, ...  $k$  Input-Vektoren spricht man entsprechend von  **$k$ -fach linearen** Abbildungen.

**1.7 Beispiel:**

Die drei genannten „Multiplikationen“ von oben sind bilinear. Polynommultiplikation und punktweise Multiplikation von Funktionen sind kommutativ und assoziativ. Die Komposition  $\text{End}_K(V) \times \text{End}_K(V) \rightarrow \text{End}_K(V)$  ist assoziativ, aber nicht kommutativ, falls  $\dim(V) > 1$ .

Es gibt viele weitere, äußerst nützliche Beispiele.

d.) Richtungsableitungen sind bilinear in der Richtung und der Funktion:

Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  ein geeigneter Definitionsbereich (z.B. eine offene Menge). Sei außerdem  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  eine differenzierbare Funktion. Dann existieren insbesondere alle Richtungsableitungen  $(\partial_v f)(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 + tv)}{t}$  in allen Punkten  $x_0 \in X$ . Die Abbildungsvorschrift  $(v, f) \mapsto \partial_v f$  liefert eine bilineare Abbildung für mehrere Kombinationen von Vektorräumen, z.B.  $\mathbb{R}^n \times C^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^0(\mathbb{R}^n)$  oder  $\mathbb{R}^n \times C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

e.) Allgemeiner: Lineare Differentialoperatoren:

Für mehrfach differenzierbare Funktionen kann man natürlich auch mehrere Ableitungsschritte hintereinander ausführen. Auf diese Weise erhält man multilineare Abbildungen:  $k$ -faches Ableiten in  $k$  Richtungen, also der Differentialoperator  $\partial_{v_1} \partial_{v_2} \cdots \partial_{v_k}$  ist  $k$ -fach linear in den Vektoren  $v_1, \dots, v_k$  als Inputs. Die Anwendung auf eine Funktion ist entsprechend  $(k+1)$ -fach linear in den  $k$  Richtungsvektoren und der Funktion als Inputs.

Als  $k$ -lineare Abbildung ist dies eine symmetrische Abbildung, d.h.  $\partial_v \partial_w f = \partial_w \partial_v f$ , sofern  $f$  zweimal stetig differenzierbar ist. Das ist der Satz von Schwarz<sup>1</sup>.

f.) Kreuzprodukt:

Es gibt eine besondere bilineare Abbildung  $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , genannt Kreuzprodukt, die in anderen Dimensionen keine gute Analogie hat, nämlich

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ x_1 z_2 - x_2 z_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Es ist bilinear, aber weder kommutativ noch assoziativ. Stattdessen ist es antisymmetrisch.

---

<sup>1</sup>Hermann Amandus Schwarz (1843 – 1921), dt. Mathematiker.

## Aufgaben

### Aufgabe 1.1. – Simultane Diagonalisierbarkeit

Es seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  diagonalisierbare Endomorphismen von  $V$ . Es gelte  $\alpha_i \circ \alpha_j = \alpha_j \circ \alpha_i$  für alle  $1 \leq i, j \leq n$ .

Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, dass die Endomorphismen *simultan diagonalisierbar* sind, d.h. dass eine Basis von  $V$  existiert mit der Eigenschaft, dass jeder Vektor in  $B$  ein Eigenvektor für alle  $\alpha_i$  ist.

- a.) Zeige, dass  $\alpha_1$  sich zu einem Endomorphismus  $\alpha_{1,\mu}$  von  $\text{Eig}_\mu(\alpha_2)$  einschränkt für  $\lambda \in K$ .
- b.) Zeige, dass  $\text{Eig}_\lambda(\alpha_{1,\mu}) = \text{Eig}_\lambda(\alpha_1) \cap \text{Eig}_\mu(\alpha_2)$  und

$$\text{Eig}_\lambda(\alpha_1) = \bigoplus_{\mu \in \sigma(\alpha_2)} \text{Eig}_\lambda(\alpha_{1,\mu})$$

gilt.

- c.) Folgere daraus die Aussage für  $n = 2$ , indem du zeigst, dass  $\alpha_{1,\mu}$  diagonalisierbar ist.
- d.) Beweise den allgemeinen Fall per Induktion.
- e.) Beweise auch den Fall von unendlich vielen, paarweise kommutierenden  $\alpha$  unter der Annahme, dass  $V$  endlich-dimensional ist.

### Aufgabe 1.2. – Hermite Normalform

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  sei beliebig. Zeige:

- a.) Es gibt eine unitäre Matrix  $U$ , sodass

$$U^H A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

ist. Hinweis: Was heißt das für die erste Spalte von  $U$ ?

- b.) Folgere: Es gibt eine (andere) unitäre Matrix  $U$ , sodass  $U^H A U$  obere Dreiecksgestalt hat.

Hinweis: Benutze, dass alle Polynome über  $\mathbb{C}$  vollständig in Linearfaktoren zerfallen.

### Aufgabe 1.3. – Normale Matrizen

Eine Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  heißt normal, falls  $AA^H = A^H A$  gilt. Beispiele für normale Matrizen sind hermitesche und unitäre Matrizen, insbesondere auch reelle symmetrische bzw. orthogonale Matrizen.

Zeige:

- a.) Wenn  $A$  eine Dreiecksmatrix und gleichzeitig eine normale Matrix ist, dann ist  $A$  automatisch eine Diagonalmatrix.
- b.) Folgere: Normale Matrizen sind immer unitär diagonalisierbar.
- c.) Umgekehrt ist jede unitär diagonalisierbare Matrix auch normal.



## 2 Warum Tensoren?

### 2.1 Das Tensorprodukt

**2.1:** Bilineare Abbildungen sind in vielerlei Hinsicht ähnlich zu linearen Abbildungen, z.B. kann man sie durch Basiswahl eindeutig beschreiben, d.h.

Wenn  $V, W$  zwei  $K$ -Vektorräume sind,  $b_1, \dots, b_n$  eine Basis von  $V$  und  $c_1, \dots, c_m$  eine Basis von  $W$ , und  $\phi : V \times W \rightarrow X$  eine bilineare Abbildung, dann sind alle Werte  $\phi(v, w)$  bereits eindeutig festgelegt, wenn man  $\phi(b_i, c_j)$  für alle  $i$  und  $j$  kennt, und umgekehrt liefert jede beliebige Wahl von Vektoren  $x_{ij} \in X$  genau eine bilineare Abbildung  $\psi : V \times W \rightarrow X$ , die  $\psi(b_i, c_j) = x_{ij}$  erfüllt.

Weiter könnte man z.B. jetzt den Raum aller bilinearen Abbildungen  $Bil(V, W; X)$  betrachten und beweisen, dass das selbst ein Vektorraum ist genau wie der Raum der linearen Abbildungen zwischen zwei festen Vektorräumen selbst ein Vektorraum ist.

Ähnliches gilt auch für  $k$ -lineare Abbildungen. Außerdem kann man sich davon überzeugen, dass diese Strukturen mit Hintereinanderausführung von Abbildungen verträglich sind. Hier ist noch zu beachten, dass multilineare Abbildungen viel mehr Möglichkeiten haben, zwei Abbildungen hintereinander auszuführen, z.B. könnte man zwei bilineare Abbildungen hintereinander ausführen, indem man

$$\phi(\psi(u, v), w) \quad \text{oder} \quad \phi(u, \psi(v, w))$$

bildet und i.A. sind das zwei verschiedene 3-lineare Abbildungen. Man hat bereits drei fundamental verschiedene Möglichkeiten, lineare und bilineare Abbildungen miteinander zu kombinieren: Man kann  $\phi(\alpha(u), v)$ ,  $\phi(u, \alpha(w))$  oder  $\alpha(\phi(u, v))$  bilden je nachdem, was davon tatsächlich definiert ist. Alle Kombinationen sind jedoch wieder bilineare Abbildungen. Wenn man allgemein  $k$ - und  $m$ -lineare Abbildungen miteinander kombinieren will, hat man sehr schnell eine explodierende Anzahl verschiedener Möglichkeiten vor sich. Sie alle liefern wieder multilineare Abbildungen als Ergebnis und alle Möglichkeiten  $a$  verschiedene multilineare Abbildungen auf diese Weise zu kombinieren, sind selbst  $a$ -fach lineare Operationen zwischen den entsprechenden Abbildungsräumen.

Man könnte all das jetzt für alle diese Kombinationen beweisen, wenn man zu viel Freizeit und Tinte hat. Alle Beweise sind langweilig, wenn man den linearen Fall einmal verstanden hat und funktionieren in der Tat völlig analog.<sup>2</sup> Das große Problem ist eigentlich, eine geeignete Notation zu finden, die einem erlaubt, diese Beweise alle nur einmal und dafür allgemein zu führen, statt in jeder neuen Kombination von vorne anfangen zu müssen. Und selbst wenn man sich so eine Notation überlegt, dann steht man noch vor einigen technischen, aber völlig trivialen Problemen, die mehr Arbeit verlangen als man für solche Trivialitäten erwartet. Wenn man beispielsweise eine Notation erfindet um zwei multilineare Abbildungen miteinander zu verbinden, dann stellt sich die Frage, ob alle Arten, drei multilineare Abbildungen zu verbinden, sich durch schrittweises Verbinden

---

<sup>2</sup>Wer's nicht glaubt, probiere es selbst aus und finde alle diese Beweise, bis das notwendige Maß an Langeweile erreicht ist.

von je zweien erhalten lassen und ob dafür eine geeignete Form von Assoziativität gilt. Erneut stellt man fest, dass die Antwort „ja“ ist, die geeignete Form von Assoziativität gilt und die Beweise alle analog zum linearen Fall laufen.

**2.2:** All diese Fälle sind letztendlich so sehr ähnlich zum linearen Fall, dass es in der Tat eine Konstruktion gibt, die es einem erlaubt, multilineare Abbildungen als echte lineare Abbildungen aufzufassen, sodass man überhaupt nichts mehr beweisen muss, das über den (schon bekannten) linearen Fall und die Existenz und grundlegenden Eigenschaften dieser Konstruktion hinaus geht. Dieses Konstrukt ist das *Tensorprodukt*.

**2.3 Satz und Definition** (Universelle Eigenschaft und Existenz des Tensorprodukts): Es seien  $V, W$  zwei  $K$ -Vektorräume. Es gibt eine „universelle bilineare Abbildung“, d.h. es gibt ein Vektorraum  $T$  und eine bilineare Abbildung  $\tau : V \times W \rightarrow T$ , sodass jede bilineare Abbildung  $\phi : V \times W \rightarrow X$  sich schreiben lässt als  $f \circ \tau$  mit einer eindeutig bestimmten linearen Abbildung  $f : T \rightarrow X$ .

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\tau} & T \\ & \searrow \phi & \downarrow \exists! f \\ & & X \end{array}$$

$T$  und  $\tau$  sind in der Tat eindeutig bestimmt bis auf einen eindeutigen Isomorphismus, d.h. wenn  $\tau' : V \times W \rightarrow T'$  eine weitere universelle bilineare Abbildung ist, dann gibt es genau einen Isomorphismus  $\alpha : T \rightarrow T'$ , sodass  $\alpha(\tau(v, w)) = \tau'(v, w)$  gilt. Man schreibt üblicherweise  $V \otimes W$  statt  $T$  und  $v \otimes w$  statt  $\tau(v, w)$  für diesen eindeutig bestimmten Vektorraum und bilineare Abbildung und nennt sie Tensorprodukt von  $V$  und  $W$ . (Achtung: Das Tensorprodukt ist streng genommen die Kombination aus  $T$  und  $\tau$ , nicht nur  $T$ ).

**2.4:** Ausgeschrieben sagt die universelle Eigenschaft folgendes: Von einer Abbildungsvorschrift  $\phi : (v, w) \mapsto x_{v,w}$ , die je einen Inputvektor aus  $V$  und einen aus  $W$  nimmt und einen Vektor aus  $X$  produziert, gibt es genau dann eine Realisierung dieser Abbildungsvorschrift als lineare Abbildung  $f : V \otimes W \rightarrow X$  mit  $f(v \otimes w) = x_{v,w}$ , wenn  $\phi$  bilinear ist.

Jede bilineare Abbildung kann so eindeutig als lineare Abbildung auf dem Tensorprodukt der beiden Inputräume betrachtet werden, und umgekehrt kann jede lineare Abbildung auf einem Tensorprodukt als bilineare Abbildung aufgefasst werden, indem man sie auf die Menge der reinen Tensoren einschränkt.

**2.5 Definition** (Reine Tensoren):

Ein Element von  $V \otimes W$ , das die Form  $v \otimes w$  hat, wird als reiner Tensor bezeichnet.

**2.6** (Diskussion: reine vs. nicht-reine Tensoren): Ein wichtiger, vielleicht der wichtigste Grund, Tensorräume als eigenständiges Objekt einzuführen statt ausschließlich mit multilinearen Abbildungen zu arbeiten ist die Existenz von nicht-reinen Tensoren: Eine Summe  $v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 + \dots + v_k \otimes w_k$  (die natürlich immer existiert, weil  $V \otimes W$  ja ein Vektorraum ist) ist i.A. kein reiner Tensor, lässt sich also i.A. nicht darstellen als  $v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 + \dots + v_k \otimes w_k = x \otimes y$ .

Es stellt sich heraus, dass viele der wirklich interessanten Tensoren, die einem so in freier Wildbahn begegnen, nicht rein sind.

Beispiel: In der Quantenmechanik wird das Tensorprodukt benutzt, um mehrere interagierende Quanten-Systeme als ein einziges großes System zu betrachten: Wenn  $V$  und  $W$  der Zustandsraum je einer Menge  $X$  bzw.  $Y$  quantenmechanischer Teilchen sind, dann ist  $V \otimes W$  der Zustandsraum des quantenmechanischen Systems, das aus den Teilchen von  $X$  und  $Y$  besteht und beliebige Interaktionen zwischen ihnen erlaubt. Ein reiner Tensor  $v \otimes w$  entspricht in dieser Sichtweise demjenige Zustand des Gesamtsystems, in dem sich die Teilchen aus  $X$  im Zustand  $v$ , und das aus  $Y$  im Zustand  $w$  befinden. Die nicht-reinen Tensoren entsprechen dann „Überlagerungen“ solcher reinen Zustände und das fundamental wichtige Phänomen von „verschränkten“ Teilchen ist ein Ausdruck dessen, dass eben nicht alle Zustände reine Zustände sind, in denen man die Teilchen von  $X$  unabhängig von denen in  $Y$  einen Zustand zuschreiben kann: Es kann z.B. ein Zustand der Form  $x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2$  konstruiert (und auch experimentell realisiert) werden, in dem  $x_1$  und  $x_2$  sowie  $y_1$  und  $y_2$  beide jeweils senkrecht zueinander sind. In solch einem Zustand des Gesamtsystems können die  $X$ -Teilchen in Zustand  $x_1$  oder  $x_2$  gemessen werden, aber nur dann, wenn gleichzeitig die  $Y$ -Teilchen in Zustand  $y_1$  bzw.  $y_2$  liegen. Es kann eben nicht unabhängig voneinander der  $X$ -Anteil in Zustand  $x_1$  sein, während der  $Y$ -Anteil des Gesamtsystems in Zustand  $y_2$  ist (hier geht die Orthogonalität ein).

## 2.7 Beispiel (Casimir-Element):

Ist  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und haben wir ein Skalarprodukt fest gewählt, so gibt es einen besonderen Tensor  $\Omega_V \in V \otimes V$ . Für jede Orthogonalbasis  $e_1, \dots, e_n$  von  $V$  lässt er sich schreiben als

$$\Omega_V = \sum_{i=1}^n e_i \otimes e_i$$

Für  $V = \mathbb{R}^3$  und die Standardbasis  $e_x, e_y, e_z$  ist etwa

$$\Omega_{\mathbb{R}^3} = e_x \otimes e_x + e_y \otimes e_y + e_z \otimes e_z$$

Betrachten wir den Raum der linearen Differentialoperatoren erster Ordnung auf  $C^\infty(V)$ , d.h. der Vektorraum der Operatoren  $\{\partial_v \mid v \in V\}$ . Darin schreibt sich das Casimir-Element als

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \partial_{e_i} \otimes \partial_{e_i}$$

Wenn wir die Komposition von Operatoren (eine bilineare Abbildung) auf diesen Tensor anwenden, erhalten wir den Laplace-Operator:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{e_i}^2$$

Man beachte insbesondere, dass das Ergebnis der Summe auf der rechten Seite unabhängig von der gewählten Basis ist, obwohl die einzelnen Summanden es natürlich nicht sind. Das erklärt z.B., wieso der Laplace-Operator und viele ähnlich aussehende Konstruktionen physikalische sinnvolle Objekte liefern, obwohl ihre Definition auf den ersten Blick basisabhängig zu sein scheint.

**2.8:** Man kann sich jedoch leicht davon überzeugen, dass die Menge aller Summen von reinen Tensoren tatsächlich das volle Tensorprodukt abdeckt:

$$V \otimes W = \{ v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 + \dots + v_k \otimes w_k \mid k \in \mathbb{N}, v_i \in V, w_i \in W \}$$

In der Welt der Quantenmechanik würde man dazu also z.B. sagen: Der Zustandsraum des aus zwei Einzelsystemen kombinierten Systems besteht aus allen Kombinationen von reinen Zuständen der Einzelsysteme sowie allen Überlagerungen dessen.

Es ist i.A. ein sehr schwieriges Problem, einem konkreten Tensor anzusehen, ob er rein ist oder nicht, und wenn nicht, welche reinen Zustände man zusammen addieren muss, um ihn zu erhalten. Nicht einmal die Anzahl der mindestens notwendigen Summanden ist einfach zu finden im Allgemeinen.

**2.9** (Diskussion: Das Wort „Tensor“): Im Gegensatz zum Wort „Vektor“, das zumindestens meistens „Element eines Vektorraums“ bedeutet und selten anders verwendet wird, ist das Wort „Tensor“ etwas überbelegt. Die verschiedenen Verwendungsformen des Wortes fallen grob in zwei Kategorien: 1.) „ich habe keine Ahnung, was Tensoren sind, aber andere Leute benutzen das Wort, also tue ich das auch“ und 2.) irgendetwas, das tatsächlich mit Tensorprodukten zu tun hat.

Zu 1. später mehr, zu 2. nur soviel: „Tensor“ kann sowohl „Element eines Tensorprodukts von Vektorräumen“ bedeuten (so werden wir das Wort verwenden) als auch einen von diversen, verwandten Begriffe, z.B. wird das auch als Kurzform von Tensorfeld verwendet. Ein Tensorfeld ist eine Funktion, die jedem Punkt des gerade betrachteten geometrischen Raums  $X$  (oder Raumzeit) je ein Element  $t(x) \in V_x \otimes V_x \otimes V_x \otimes \dots$  zuordnet, wobei gewisse Stetigkeitseigenschaften gefordert werden, die für zwei eng beieinander liegende Punkte  $x, x'$  fordern, dass  $V_x$  und  $V_{x'}$  „im Wesentlichen der gleiche Raum“ sind und  $t(x), t(x')$  ebenfalls eng zusammen liegen (formal ist das natürlich eine richtige  $\epsilon$ - $\delta$ -artige Definition). Ggf. wird auch nicht nur ein Vektorraum  $V_x$  pro Punkt verwendet, sondern mehrere. Je nachdem, welche Zusatzeigenschaften man an solch ein Tensorfeld stellt, wird auch nicht nur das Tensorprodukt der Vektorräume selbst, sondern auch eine vom Tensorprodukt abgeleitete Konstruktion betrachtet (z.B. symmetrische oder äußere Potenzen, siehe weiter unten).

## 2.2 Elementare Eigenschaften des Tensorprodukts

**2.10 Lemma** ( $K \otimes V = V$ ):

Ist  $V$  ein  $K$ -Vektorraum, so ist

$$\begin{cases} K \otimes V & \xrightarrow{\sim} V \\ \alpha \otimes v & \mapsto \alpha v \\ 1 \otimes v & \xleftarrow{\sim} v \end{cases}$$

ein Paar zueinander inverser Vektorraum-Isomorphismen.

**2.11:** Wir erlauben uns deshalb, wann immer es uns nützlich erscheint,  $K \otimes V$  und  $V \otimes K$  als identisch zu  $V$  zu betrachten. Dabei meinen wir immer die obige Identifizierung.

**2.12:** Da das Tensorprodukt für alle Paare von  $K$ -Vektorräumen definiert ist und selbst wieder ein  $K$ -Vektorraum ist, können wir natürlich auch Tensorprodukte von Tensorprodukten bilden. Es stellt sich die Frage, ob es eine Rolle spielt, wie genau wir das tun.

**2.13 Lemma und Definition** (Assoziativität des Tensorprodukts & Höhere Tensorgrade):

Für alle  $K$ -Vektorräume  $V_1, V_2, V_3$  ist

$$\begin{cases} V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) & \rightarrow (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \\ v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3) & \mapsto (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3 \end{cases}$$

ein Isomorphismus.

Wir erlauben es uns, aufgrund der Natürlichkeit dieses Isomorphismus, Klammern in mehrfachen Tensorprodukten wegzulassen und kurz  $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \otimes \cdots \otimes V_k$  zu schreiben. Der Kürze halber definieren wir die Tensorpotenzen

$$V^{\otimes k} := \begin{cases} K & k = 0 \\ \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{k\text{-mal}} & k > 0 \end{cases}$$

**2.14:** Mit dieser Notation gelten dann (abzüglich eben jener natürlicher Isomorphismen) die „Potenzgesetze“:

$$V^{\otimes n} \otimes V^{\otimes m} = V^{\otimes(n+m)}$$

$$(V^{\otimes n})^{\otimes m} = V^{\otimes nm}$$

## 2.3 Index-Notation - Was das ist und wie man sie loswird

**2.15:** Alle vorher angedeuteten Aussagen über multilineare Abbildungen kann man auf Sätze über lineare Abbildungen und Tensorprodukte zurückführen, z.B.

**2.16 Lemma und Definition** (Standardskalarprodukt auf Tensorpotenzen):

Haben wir ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $V$  gegeben, ist das Standardskalarprodukt (auch „von  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induziertes Skalarprodukt“) auf  $V^{\otimes m}$  definiert mit der Vorschrift

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} V^{\otimes m} \times V^{\otimes m} & \rightarrow K \\ \langle v_1 \otimes \cdots \otimes v_m, w_1 \otimes \cdots \otimes w_m \rangle & \mapsto \langle v_1, w_1 \rangle \cdots \langle v_m, w_m \rangle \end{cases}$$

und ihrer linearen Fortsetzung.

**2.17 Lemma** (Dimension von Tensorprodukten<sup>3</sup>):

Es gilt  $\dim(V \otimes W) = \dim(V) \cdot \dim(W)$ .

Präziser: Für jede Basis  $(b_i)_{i \in I}$  von  $V$  und  $(c_j)_{j \in J}$  von  $W$  ist  $(v_i \otimes w_j)_{i \in I, j \in J}$  eine Basis von  $V \otimes W$ .

**2.18 Korollar:**

Entsprechendes gilt auch für mehrfache Tensorprodukte, insbesondere für Tensorpotenzen: Ist  $e_1, \dots, e_n$  eine Basis von  $V$ , so ist  $\{e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_k} \mid i_j \in \{1, \dots, n\}\}$  eine Basis von  $V^{\otimes k}$ .

Haben wir ein Skalarprodukt auf  $V$  gegeben und ist  $e_1, \dots, e_n$  eine Orthonormalbasis von  $V$  bzgl. dieses Skalarprodukts, so ist diese Basis des Tensorprodukts auch eine Orthonormalbasis bzgl. des Standardskalarprodukts auf  $V^{\otimes k}$ .

**2.19 Definition:**

Wenn  $e_1, \dots, e_n$  zufällig eine Basis ist, die man „Standardbasis“ nennt, dann nennt man  $\{e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_k}\}$  auch Standardbasis von  $V^{\otimes k}$ .

Diese Basis wird sehr häufig implizit verwendet (siehe Aufgabe 2.3).

**2.20** (Index-Notation – Was ist das?): Insbesondere heißt das, dass jeder Tensor  $t \in V \otimes W$  eine eindeutige Koordinaten-Darstellung bzgl. solch einer Basis hat, d.h. es gibt eindeutig bestimmte Skalare  $t_{ij}$  sodass

$$t = \sum_{i \in I, j \in J} t_{ij} b_i \otimes c_j$$

gilt und umgekehrt liefert jede Wahl von  $|I| \times |J|$  vielen Skalaren  $t_{ij}$  auf diese Weise genau einen Tensor.

Es hat sich in der Physik und Ingenieurwissenschaften eingebürgert, das Wort „Tensor“ austauschbar mit „Ansammlungen von Zahlen, die mehrere Indizes haben“ zu verwenden.

Wählt man eine andere Basis von  $V$  oder  $W$ , so erhält man natürlich andere Zahlen als Koordinaten. Immer noch  $|I| \times |J|$  viele, aber andere. Jedoch sind die Unterschiede nicht völlig beliebig, denn sie sind eben durch einen Basiswechsel in den Faktoren des Tensorprodukts verursacht.

In der Tat haben die Physiker eigene Sprechweise erfunden, um das auszudrücken: Man sagt, dass sich ein Satz von indizierten Zahlen „kovariant transformiert“ (bzw. „kontravariant“) und meint damit nicht etwa, dass diese Zahlen eine besondere Eigenschaft hätten, sondern, dass die Methode, mit der man diese Zahlen bestimmt hat, eine besondere Eigenschaft hat, nämlich bei anderer Basiswahl ein anderes Ergebnis zu produzieren, dass aber aus der Basiswechselmatrix auf bestimmte Weise vorhersehbar ist. Manche Physiker nehmen das zum Anlass, um zu definieren, dass ein Tensor nicht nur *ein* Satz von indizierten Zahlen sei, sondern eine Abbildung  $\{\text{Basen}\} \rightarrow \{\text{Zahlen mit Indizes}\}$ , die genau dieser Transformationsregel gehorcht.

<sup>3</sup>Wer mit unendlich-dimensionalen Vektorräumen nicht gut genug vertraut ist, denke sich ein „für endlich-dimensionale Vektorräume“ hinzu.

Soweit, so verwirrend, aber natürlich wird einem dann auch erklärt, dass es auch „kontravariante Tensoren“ gibt, die sich irgendwie ähnlich, aber ganz anders verhalten, sowie gemischte Tensoren, bei denen manche Indizes ko- und manche kontravariant gemeint sind. In Indexschreibweise äußert sich das oft so, dass manche Indizes oben und manche unten notiert werden, wobei sich leider nicht einmal alle Physiker einig sind, ob die oberen jetzt die ko- oder die kontravarianten sein sollen.

**2.21** (Index-Notation – Warum ist das ein Problem?): Index-Notation erschwert im Wesentlichen alles, was wichtig ist: Das Verstehen von und das Arbeiten mit Tensoren.

- Index-Schreibweise, Koordinaten allgemein verlieren wesentliche Informationen und geht am Wesentlichen vorbei: Ein Vektor/Tensor ist eben nicht eine Ansammlung von Zahlen, sondern ein Element eines Vektorraums.

Ja, der Raum der Polynome in zwei Variablen mit Grad  $\leq 5$  ist 36-dimensional, aber das Polynom  $x^2 + y^2$  deshalb als Ansammlung von 36 (relativ beliebigen) Zahlen zu betrachten, also als Element von  $\mathbb{R}^{36}$ , verliert die ganz wesentliche Information, z.B. dass es sich um ein Polynom handelt, dass dieser Vektorraum Unterraum eines größeren Polynomraums ist, in dem weitere Strukturen wie z.B. Polynommultiplikation, Differenzieren, uvm. existieren.

Der Übergang von abstrakten Vektoren/Tensoren zu Koordinatendarstellungen bzgl. beliebiger Basen, erhält exakt die Information, die in der Vektorraumstruktur alleine steckt, d.h. in Addition und Skalarmultiplikation. Alle zusätzliche Struktur, die in einer konkreten Situation vielleicht außerdem vorhanden und nützlich (!) sein könnte, wird weggeworfen.

Wenn man alles nur als Ansammlung von Zahlen versteht, ist auch klar, wieso der Unterschied zwischen „ko-“ und „kontravarianten“ Tensoren so mysteriös ist. Wenn man abstrakt arbeitet, ist ganz klar, was passiert! Das sind einfach Tensoren aus unterschiedlichen Räumen!

Die eine Sorte Tensoren ist Element von  $V^{\otimes k}$ , während die anderen Elemente von  $(V^*)^{\otimes k}$  sind. Tensoren mit gemischter Varianz sind entsprechend Elemente von  $V^{\otimes k_1} \otimes (V^*)^{\otimes k_2}$ . Natürlich sind  $V$  und  $V^*$  als Vektorräume isomorph, d.h. sie haben die gleiche Dimension, man benötigt also die gleiche Anzahl an Indizes, die auch alle über denselben Zahlenbereich laufen, wenn man die Koordinaten durchnummeriert. Aber dabei verliert man eben die wesentliche Information, dass  $V$  und  $V^*$  doch trotz allen verschieden sind und verschiedene Objekte und Sichtweisen mathematisch beschreiben.<sup>4</sup>

- Index-Schreibweise, Koordinaten allgemein zäumen das Pferd von hinten auf:

---

<sup>4</sup>Übrigens erklärt diese Sichtweise auch, wieso sich die Physiker nicht immer einig sind, was ko- und was kontravariant ist: Für endlich-dimensionale Vektorräume ist nicht nur  $V^*$  der duale Vektorraum von  $V$ , sondern auch  $V$  der duale Vektorraum von  $V^*$ . Man kann sich also aussuchen, welches das fundamentalere Objekt von beiden ist.

Es ist nur äußerst selten sinnvoll, tatsächlich in Koordinaten zu arbeiten, da die einzigen Operationen, die überhaupt physikalisch sinnvoll sind, zwangsläufig basis-unabhängig sein müssen. Das Universum hat halt keine bevorzugte Basis. Es gibt keine bevorzugten Richtungen im Universum, es gibt keine bevorzugte Skalierung<sup>5</sup>, Wieso also nicht von Anfang an mit Objekte und Operationen arbeiten, die basis-unabhängig sind?

Und in den Fällen, in denen die physikalische Situation eben doch eine Raumrichtung bevorzugt, z.B. weil es sich um ein rotationssymmetrisches Problem handelt und die Drehachse eine besondere Richtung in so einem System ist? In den Fällen ist es auch nicht sinnvoll, *beliebige* Basen zu betrachten. Man will eine Basis wählen, die Zusatzinformationen wie z.B. die Drehsymmetrie, möglichst gut widerspiegeln.

Woher weiß man, welche Zusatzstruktur tatsächlich die nützliche ist für die eigene Frage? Man weiß es eben nicht. Zumindest nicht vorher. Erst, wenn man tatsächlich eine (Teil-)Antwort auf die Frage gefunden hat, kann man überhaupt sagen, welche Zusatzstrukturen nützlich war und welche nicht, und welche Basiswahl also die sinnvollste für das Problem ist.

Der Ausgangspunkt sollte also immer zunächst eine basis-freie Sichtweise sein, in die erst nachdem tatsächlich Bedarf erkannt wurde, eine präzise ausgewählte Basis eingeführt wird. Und selbst dann ist es sinnvoll, nicht allzu viel Basis zu wählen. Im Falle einer Rotationssymmetrie ist z.B. *nur* die Drehachse eine ausgezeichnete Raumrichtung, d.h. sie legt nur einen von drei gesuchten Basisvektoren (halbwegs) fest. Für die anderen beiden gilt genau das gleiche: Man sollte solange wie möglich abstrakt arbeiten und erst, wenn das Problem es tatsächlich erfordert, eine Basis wählen.

- Index-Schreibweise erzeugt unnötige Arbeit:

Eine beliebige Kollektion von Zahlen wird aber nur dann zu einem Tensor, wenn man eine Basis wählt, bzgl. derer man diese Zahlen dann als Koordinaten liest. Man muss sich also stets fragen: „Wenn ich eine andere Basis wähle und in dieser neuen Situation noch einmal neue Zahlen generiere und als Koordinaten bzgl. der neuen Basis benutze, kommt ein anderer Tensor heraus oder nicht?“ und man will immer, dass die Antwort „Nein“ ist, d.h. man will, dass sich die Zahlen „ko-“ oder „kontravariant“ oder „gemischt“ „transformieren“. Ein „ja“ hieße zwangsläufig, dass man etwas falsch gemacht hat, eben weil physikalisch sinnvolle Ergebnisse nicht basis-abhängig sind.

Die Konsequenz daraus ist aber, dass man eigentlich jedes Index-Monster, das einem begegnet, erst einmal mit viel langweiligem Rechenaufwand darauf überprüfen sollte, ob es überhaupt basis-unabhängig ist. Wer hat die Zeit dafür? Niemand! Und wieso sollte man auch so viel Aufwand investieren, wenn die Antwort, die man haben will, sowieso immer die gleiche ist?

---

<sup>5</sup>Und nein, die Plank-Skala zählt nicht, da sie für den momentanen Stand der Wissenschaft reine Spekulation ist



Nicht nur macht die abstrakte Sichtweise den Aufwand kleiner, sie macht ihn zu Null, denn, wenn man von Anfang an basisfrei arbeitet, stellt sich die Frage, ob eine gewisse Konstruktion basisunabhängig ist, überhaupt nicht. Wenn nirgendwo Basen benutzt wurden, muss alles, was getan wurde, natürlich basisunabhängig sein!

- „Aber, wenn ich Dinge ausrechnen will, brauche ich doch Basen!“

Auch das ist ein weitverbreitetes Missverständnis. Viele Dinge sind in der Tat auch völlig basisfrei berechenbar, mindestens z.B. alle physikalisch sinnvollen Dinge, denn die sind eben – wie wir bereits festgestellt haben – von sich aus basisfrei und somit zwangsläufig auch basisfrei berechenbar, wenn sie überhaupt berechenbar sind. Und in der Tat kann man sie dann auch immer auf einem basisfreien Wege ausrechnen.

Man muss sich auch einmal klarmachen, was man mit „ausrechnen“ meint und wozu man das tut. Was bedeutet es z.B. einen Spannungstensor „auszurechnen“ ? Der Spannungstensor ist eben keine Zahl. Er ist ein Tensor. Was würde es in Analogie bedeuten, einen Vektor, z.B. eine Drehachse „auszurechnen“ ? Die Drehachse ist die Drehachse, das, worum sich das System dreht. Welche andere Information möchte man über diesen Vektor ausrechnen? Und was würde man damit anfangen?

Natürlich kann man zwanghaft Koordinaten einführen und die Koordinaten dieses Vektors ausrechnen. Die Koordinaten haben aber keine eigenständige physikalische Bedeutung. Mit den Koordinaten an sich lässt sich also nichts anfangen. Einzig das Gesamtobjekt ist physikalisch sinnvoll. Das einzige, was man mit den Koordinaten tun könnte, ist also, sie wieder zu einem Vektor zusammensetzen, um diesen in einem nächsten Rechenschritt weiterzuverwenden. Wieso dann aber Koordinaten einführen?<sup>6</sup>

Man beachte, dass die Frage nach einem *effizienten* Ausrechnen eine völlig andere ist! Für diese Art von Fragen gilt: „premature optimization is the root of all evil (or at least most of it)“<sup>7</sup>. Eine Basiswahl alleine macht nichts effizient. Die *richtige* Basis in der richtigen Situation macht Dinge effizient und auch nur, wenn man sie richtig einsetzt. Stumpf drauf losrechnen ist selten tatsächlich effizient.

Betrachten wir einmal kurz ein Problem aus der uns bekannten, 3-dimensionalen Welt:

---

<sup>6</sup>Das ignoriert natürlich ein paar außer-physikalische Aspekte, z.B. könnten ja in einer komplexen Gesamtberechnung einzelne Teilschritte durchaus von verschiedenen Leuten ausgerechnet werden. In diesem Fall ist das Einführen von Koordinaten eine Notwendigkeit, um ein Zwischenergebnis von einem Team zum anderen kommunizieren zu können.

<sup>7</sup>Donald Ervin Knuth, geb. 1938, amer. Informatiker und Mathematiker

Anna und Bernd stehen einer flachen Wand gegenüber. Anna hat die Position  $(9.5, 4, 0)^T$  und einen Ball in der Hand. Bernd steht bei  $(5.5, 2, 0)^T$  und die Wand hat Normalengleichung

$$2x - 1.5y = 12.5$$

mit Normalenvektor  $\mathbf{n} = (2, -1.5, 0)^T$  und Stützvektor  $\mathbf{p} = (4, -3, 0)^T$ . Anna möchte Bernd den Ball so zuwerfen, dass er einmal an der Wand abprallt und dann in Bernds Händen landet. Dabei soll der Ball den Boden nicht berühren. Berechne die Trajektorie vom Ball und die Kraft, mit der Anna den Ball abwerfen muss unter der Annahme von Reibungsfreiheit.

Wir wollen jetzt nicht die Lösung für dieses Problem finden, sondern vielmehr fragen: Ist die hier gewählte Basis zur Beschreibung der Ausgangssituation oder für die Berechnung hilfreich? Wäre es nicht viel einfacher, die Situation basisfrei zu beschreiben? Wie sähe eine solche Beschreibung aus?

## 2.4 Lineare Abbildungen zwischen Tensoren

### 2.22 Definition (Brauer-Diagramm und deren Multiplikation):

Ein Brauer-Diagramm ist ein besonderer Graph. Er besteht aus zwei Zeilen von Knoten,  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , Knoten in der oberen Zeile und  $n + 2z$ ,  $z \in \mathbb{Z}$ , Knoten in der unteren Zeile. Die Knoten sind paarweise miteinander verbunden, dabei dürfen die Verbindungen sowohl von einer Zeile zur anderen gehen, als auch innerhalb einer Zeile zwei Knoten miteinander verbinden.

Brauer-Diagramme verstehen wir als visuelle Darstellung von linearen Abbildungen zwischen Tensoren. Entsprechend können sie linear miteinander kombiniert und auch mit Skalaren aus dem zum Tensorraum gehörenden Körper multipliziert werden.

Zwei Brauer-Diagramme können außerdem miteinander multipliziert werden zu einem

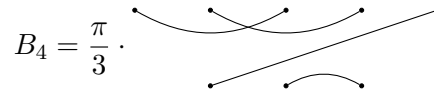
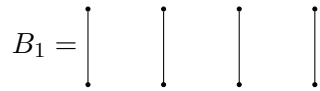
dritten Brauer-Diagramm. Dies entspricht der Hintereinanderausführung zweier linearer Abbildungen. Ausgerechnet wird das Brauer-Diagramm der zusammengesetzten Abbildung, indem die zwei Brauer-Diagramme übereinander geschrieben werden und die Knoten der unteren Zeile vom ersten Diagramm reihenfolgeerhaltend mit den Knoten der oberen Zeile vom zweiten Diagramm verbunden werden. Falls geschlossene Kreise in diesem 4-zeiligen Graph existieren, so wird das Ergebnis für jeden geschlossenen Kreis mit einem Skalarfaktor  $\alpha$  multipliziert, für unsere Anwendungen ist  $\alpha$  gleich der Dimension des Vektorraums  $V$ , von dem wir Tensorprodukte bilden,

$$\alpha = \dim V.$$

Bei  $k$  geschlossenen Kreisen ist das Ergebnis dann der Graph, der die Verbindung der obersten Knoten-Zeile zur untersten Knoten-Zeile darstellt multipliziert mit  $\alpha^k$ .

### 2.23 Beispiel (Brauer-Diagramme):

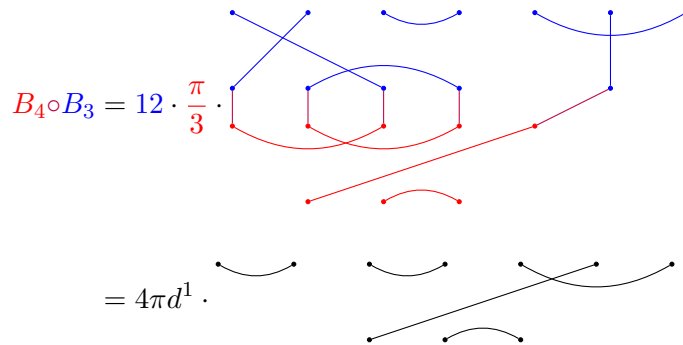
Folgende Graphen sind alles Brauer-Diagramme:



$B_1$  ist die Identität auf  $V^{\otimes 4}$ .

### 2.24 Beispiel (Multiplikation zweier Brauer-Diagramme):

Sei  $d$  die Dimension des Vektorraums  $V$ , auf dessen Tensorprodukte wir lineare Abbildungen betrachten. Das Produkt von  $B_3$  und  $B_4$  im oberen Beispiel, bzw. die lineare Abbildung, die durch  $B_4 \circ B_3$  beschrieben wird, wird dann folgendermaßen berechnet:



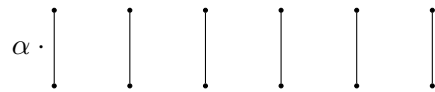
Auf einen reinen Tensor angewandt werden Brauer-Diagramme, indem jeder einzelne Tensorfaktor reihenfolgeerhaltend den Knoten der oberen Zeile zugeordnet wird, auf gemischte Tensoren mit linearer Fortsetzung. Dabei sind mit entsprechender Definition

(siehe unten) die Brauer-Diagramme eine vollständige Beschreibung aller *nützlichen*, bzw. *natürlichen* Arten von linearen Abbildungen. Was genau eine Abbildung nützlich macht, werden wir später mit Hilfe von Darstellungstheorie herausfinden. Zunächst wollen wir hier die verschiedenen linearen Abbildungen zwischen Tensoren klassifizieren:

**2.25 Definition** (Skalarmultiplikation eines Tensors):

Sei  $v$  ein Tensor aus  $V^{\otimes n}$ . Dann ist die Multiplikation von  $v$  mit einem  $\alpha \in K$ ,  $\alpha \cdot v$  eine lineare Abbildung von  $V^{\otimes n}$  nach  $V^{\otimes n}$ .

Das Brauer-Diagramm der Skalarmultiplikation ist die Identität multipliziert mit  $\alpha$ . Es hat also  $n$  Knoten in jeder Zeile und besteht nur aus senkrechten Verbindungen, das sind Verbindungen zwischen dem  $k$ -ten Knoten der oberen Zeile und dem  $k$ -ten Knoten der unteren Zeile, z.B. mit  $n = 6$ :



**2.26 Definition** (Permutation bilden von einem Tensor):

Sei  $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$  ein reiner Tensor aus  $V^{\otimes n}$  und  $\sigma \in S_n$  eine Permutation. Dann definiert die Abbildung

$$\Pi_\sigma : \begin{cases} V^{\otimes n} & \rightarrow V^{\otimes n} \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_n & \mapsto v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)} \end{cases}$$

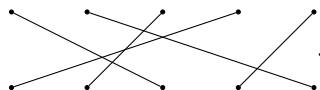
die durch  $\sigma^{-1}$  bestimmte Permutation der Faktoren des Tensors. Für einen allgemeinen Tensor ist diese Permutation als lineare Fortsetzung der obigen Abbildung gegeben.

Das Brauer-Diagramm der Permutation  $\sigma$  enthält je Zeile  $n$  Knoten und die Kanten verbinden nur Knoten von der oberen Zeile mit Knoten der unteren Zeile. Die genauen Verbindungen ergeben sich aus der Permutation  $\sigma^{-1}$ . Jedem Input  $k$  von  $\sigma^{-1}$  wird das Ergebnis  $l = \sigma^{-1}(k)$  zugeordnet. Im Brauer-Diagramm wird dann der  $k$ -te Knoten der oberen Zeile (gezählt von links nach rechts) mit dem  $l$ -ten Knoten der unteren Zeile verbunden. Mit der 2-Zeilen-Schreibweise von  $\sigma^{-1}$  lässt sich dies gut ablesen, z.B. sei:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\implies \sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Das zu  $\Pi_\sigma$  zugehörige Brauer-Diagramm ist dann:



**2.27 Definition** (Spur nehmen von einem Tensor):

Sei  $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$  ein reiner Tensor aus  $V^{\otimes n}$ . Dann definiert die Abbildung

$$\text{tr}_{kl} : \begin{cases} V^{\otimes n} & \rightarrow V^{\otimes n-2} \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \otimes \cdots \otimes v_l \otimes \cdots \otimes v_n & \mapsto \langle v_k, v_l \rangle v_1 \otimes \cdots \otimes \hat{v}_k \otimes \cdots \otimes \hat{v}_l \otimes \cdots \otimes v_n \end{cases}$$

die Spur zwischen dem  $k$ -ten und  $l$ -ten Faktor des Tensors. Für einen allgemeinen Tensor ist die Spur als lineare Fortsetzung der obigen Abbildung gegeben.

Das Brauer-Diagramm der Spur besteht aus  $n$  Knoten in der oberen und  $n-2$  Knoten in der unteren Zeile. Der  $k$ -te und  $l$ -te Knoten der oberen Zeile sind mit einer Kante verbunden, solche Kanten nennen wir waagerecht. Alle anderen Knoten sind mit ausschließlich senkrechten Kanten verbunden, z.B. für  $\text{tr}_{6,7}$  auf  $V^{\otimes 7}$ :



Diese Definition ist auch in entgegengesetzte Richtung zu verstehen: Wenden wir ein Brauer-Diagramm, welches zwei obere Knoten miteinander verbindet, auf einen reinen Tensor an, so ist zwischen den beiden entsprechenden Faktoren des Tensors die Spur zu bilden.

**2.28 Definition** (Einfügen des Casimir-Elements):

Sei  $v_1 \otimes \cdots \otimes v_n$  ein reiner Tensor aus  $V^{\otimes n}$  und  $\Omega_V$  das Casimir-Element zu  $V$ . Dann definiert die Abbildung

$$\Omega : \begin{cases} V^{\otimes n} & \rightarrow V^{\otimes n+2} \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_n & \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes \Omega_V \end{cases}$$

die Einfügung des Casimir-Elements an den Tensor. Für einen allgemeinen Tensor ist die Einfügung des Casimir-Elements als lineare Fortsetzung der obigen Abbildung gegeben.

Das Brauer-Diagramm der Einfügung des Casimir-Elements besteht aus  $n$  Knoten in der oberen und  $n+2$  Knoten in der unteren Zeile. Die letzten beiden Knoten der unteren Zeile sind mit einer Kante verbunden. Alle anderen Knoten sind mit ausschließlich senkrechten Kanten verbunden, z.B. :



Diese Definition ist auch in entgegengesetzte Richtung zu verstehen: Wenden wir ein Brauer-Diagramm, welches zwei untere Knoten miteinander verbindet, auf einen reinen Tensor an, so ist an den beiden entsprechenden Faktoren des Tensors das Casimir-Element einzufügen.

An welchen zwei Stellen die zwei Faktoren des Casimir-Elements eingefügt werden, kann man sich im Prinzip aussuchen, das entspricht dann der Hintereinanderausführung von

$\Omega_V$ -Einfügung und Permutation. Insbesondere können die beiden Hälften von  $\Omega_V$  auch voneinander getrennt werden, z.B. wird mit

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n+1 & n+2 \\ n+2 & 2 & \cdots & n+1 & 1 \end{bmatrix} \in S_{n+2}$$

durch

$$\Pi_\sigma \circ \Omega(v_1 \cdots \otimes \cdots v_n) \quad (1)$$

das mit  $\Omega$  eingefügte  $\Omega_V$  in zwei Teile zerlegt.

**2.29** (Brauer-Diagramme beschreiben alle sinnvollen (bzw. natürlichen) linearen Abbildungen zwischen Tensoren): Die Menge aller Linearkombinationen von allen Brauer-Diagrammen ist gleich der Menge aller natürlichen linearen Abbildungen zwischen Tensoren.

**2.30** (Bilineare Abbildungen): Bilineare Abbildungen zwischen Tensoren lassen sich auf lineare Abbildungen zurückführen, indem man das Tensorprodukt der beiden Input-Tensoren bildet und dann eine beliebige lineare Abbildung ausführt.

### 2.31 Lemma und Definition:

Sind  $f : V \rightarrow W, g : V' \rightarrow W'$  zwei lineare Abbildungen zwischen  $K$ -Vektorräumen, so gibt es genau eine lineare Abbildung  $V \otimes V' \rightarrow W \otimes W'$ , die  $v \otimes v'$  auf  $f(v) \otimes g(v')$  abbildet.

Diese Abbildung wird der Bequemlichkeit halber auch als  $f \otimes g$  bezeichnet. Für mehr als zwei Tensorfaktoren schreiben wir dann analog auch  $f \otimes g \otimes h \otimes \cdots$ .

### 2.32 Beispiel:

Wir können die Spur in dieser Schreibweise auch anders aufschreiben, z.B. ist

$$\text{tr}_{12} = \langle \cdot, \cdot \rangle \otimes \text{id}$$

wenn wir es als Abbildung  $(V \otimes V) \otimes (V^{\otimes n-2}) \rightarrow K \otimes V^{\otimes n-2} = V^{\otimes n-2}$  auffassen. Oft ist dies vereinfachend, zum Beispiel sieht man dieser Schreibweise an, was das Hintereinanderausführen von zwei Spuren bewirkt und dass diese zwei Abbildungen kommutieren.

**2.33:** Sind die Dimensionen endlich und hat man Basen der jeweiligen Vektorräume gewählt, so kann man  $f$  und  $g$  durch ihre Darstellungsmatrix angeben. Die Darstellungsmatrix von  $f \otimes g$  ist dann das sogenannte „Kronecker-Produkt“ der Matrizen  $F$  und  $G$ . Je nachdem, wie man die Tensorbasis  $\{b_i \otimes c_j\}$  anordnet (zeilen- oder spaltenweise durchnummerieren), ist das Kronecker-Produkt durch

$$F \otimes G = \begin{pmatrix} f_{11}G & f_{12}G & \cdots & f_{1m}G \\ f_{21}G & f_{22}G & \cdots & f_{2m}G \\ \vdots G & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1}G & f_{n2}G & \cdots & f_{nm}G \end{pmatrix} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} Fg_{11} & Fg_{12} & \cdots & Fg_{1m'} \\ Fg_{21} & Fg_{22} & \cdots & Fg_{2m'} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Fg_{n'1} & Fg_{n'2} & \cdots & Fg_{n'm'} \end{pmatrix}$$

gegeben.

## Aufgaben

### Aufgabe 2.1. – Casimir-Elemente von euklidischen Räumen

Es sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und  $e_1, \dots, e_n$  eine Orthonormalbasis.

a.) Zeige, dass der Casimir-Tensor

$$\Omega_V := \sum_{i=1}^n e_i \otimes e_i$$

unabhängig von der Basiswahl ist, d.h. wenn  $e'_1, \dots, e'_n$  eine weitere Orthonormalbasis von  $V$  ist, dann gilt:

$$\sum_{i=1}^n e_i \otimes e_i = \sum_{i=1}^n e'_i \otimes e'_i$$

Hinweis: Orthogonale Matrizen.

b.) Zeige, dass  $\Omega_V$  „isotrop“ ist, d.h. für alle Isometrien  $Q : V \rightarrow V$  gilt:

$$(Q \otimes Q)(\Omega) = \Omega$$

Hinweis: Benutze a.

### Aufgabe 2.2. – Casimir-Elemente allgemein

Es sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $K$ -Vektorraum,  $b_1, \dots, b_n$  eine beliebige Basis von  $V$  und  $b_1^*, \dots, b_n^*$  die dazu duale Basis von  $V^*$ .

a.) Zeige, dass

$$\Omega := \sum_{i=1}^n b_i \otimes b_i^* \in V \otimes V^*$$

unabhängig von der Basiswahl ist.

Hinweis: Wenn  $A$  eine Basiswechselmatrix zwischen zwei Basen von  $V$  ist, wie sieht dann die Basiswechselmatrix der beiden dazugehörigen dualen Basen von  $V^*$  aus?

b.) Wie entspricht das dem Casimir-Element euklidischer Räume?

i.) Zeige zunächst, dass die Abbildung  $V \rightarrow V^*, v \mapsto \langle v, - \rangle$  ein Isomorphismus  $V \rightarrow V^*$  ist.

ii.) Was tut diese Abbildung mit einer Orthonormalbasis?

### Aufgabe 2.3. – Aber Tensoren sind doch so Buchstaben mit Indizes

Häufig wird einem von Physikern oder Ingenieuren ein Tensor lediglich als ein Buchstabe mit Indizes untergejubelt - z.B. der Spannungstensor  $\sigma_{ij}$ . Wir wollen verstehen, wie der Zusammenhang mit unserer Definition ist.

Es sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und  $e_1, \dots, e_n$  eine Orthonormalbasis. Wir betrachten das  $m$ -fache Tensorprodukt  $V^{\otimes m}$ . Wer mag, kann zur Vereinfachung  $n = 3$  und  $K = \mathbb{R}$  wählen.

- a.) Einen beliebigen Tensor aus  $V^{\otimes m}$  schreiben wir z.B. als  $T \in V^{\otimes m}$ , während er andernorts mit  $T_{j_1 \dots j_n}$  bezeichnet wird, was streng genommen nur eine Kollektion besonders nummerierter Zahlen aus  $K$  ist. Wie ist der Zusammenhang zwischen  $T$  und  $T_{j_1 \dots j_n}$ ?  
Hinweise: Von  $V$  induzierte Basiswahl für  $V^{\otimes m}$ , Vergleiche mit einem Vektor  $v \in V$  und  $v_i$ .
- b.) Ein sehr häufig verwendeter „Buchstabe mit Indizes“ ist das Kronecker- $\delta$ , oder auch der  $\delta_{ij}$ -Tensor. Um welchen Tensor handelt es sich hier? Hinweis: Übersetze in die Schreibweise mit dem Tensorprodukt  $\otimes$ .
- c.) Die Spur eines Tensors zwischen seinem  $k$ -ten und  $l$ -ten Faktor wird in Indexschreibweise als Dopplung eines bestimmten Indexes an den entsprechenden Stellen notiert,  $T_{j_1 \dots j_{k-1} i j_{k+1} \dots j_{l-1} i j_{l+1} \dots j_m}$ , die eine Summe über  $i$  von 1 bis  $n$  impliziert (a.k.a. *Einstein'sche Summenkonvention*). Überzeuge dich, dass dies unserer Definition von Spur entspricht.  
Üblich zum Spur nehmen ist auch eine Schreibweise mit dem Kronecker- $\delta$ :

$$T_{j_1 \dots j_{k-1} i j_{k+1} \dots j_{l-1} i j_{l+1} \dots j_m} \delta_{ir},$$

ebenfalls mit impliziter Summe über gedoppelte Indizes. Zeige, dass dies die gleiche Operation beschreibt.

- d.) Eine weitere häufiger zu findende Schreibweise mit dem Kronecker- $\delta$  ist die folgende:

$$T_{j_1 \dots j_{k-1} j_k j_{k+1} \dots j_{l-1} j_l j_{l+1} \dots j_m} \delta_{ir},$$

was üblicherweise gekürzt wird auf  $T_{j_1 \dots j_m} \delta_{j_{m+1} j_{m+2}}$ . Was ist der Unterschied zu c.)? Schreibe diesen Tensor ohne Indizes auf.

#### Aufgabe 2.4. – Was denn für Indizes?

Schön, dass dir die Index-Schreibweise noch nicht begegnet ist. Da wir in unserem Kurs so wenig wie möglich mit dieser Schreibweise arbeiten wollen, kann dies zu deinem Vorteil sein.

Es sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und  $e_1, \dots, e_n$  eine Orthonormalbasis. Wir betrachten das  $m$ -fache Tensorprodukt  $V^{\otimes m}$ . Wer mag, kann zur Vereinfachung  $n = 3$  und  $K = \mathbb{R}$  wählen. Zeige, dass  $\text{tr}_{ir}(T) = \text{tr}_{i,m+1} \circ \text{tr}_{r,m+1} \circ \Omega(T)$  gilt.

#### Aufgabe 2.5. – Warum heißt das Spur?

Der Begriff Spur kommt einem üblicherweise als Summe der Diagonaleinträge einer Matrix unter. Überzeuge dich, dass es sich im Falle von 2-Tensoren um genau diese Operation handelt.

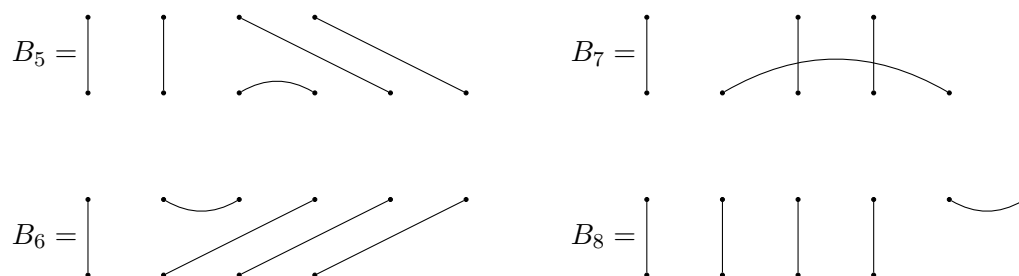
#### Aufgabe 2.6. – Brauer-Diagramme

Wir wollen uns im Folgenden anhand ein paar Beispielen überzeugen, dass die Multiplikation zweier Brauer-Diagrammen tatsächlich dem Hintereinanderausführen der dazugehörigen linearen Abbildungen entspricht.



- a.) Schreibe die Brauer-Diagramme von den beiden Abbildungen  $\Pi_\sigma$  und  $\Omega$  aus Gleichung 1 auf und berechne das Brauer-Diagramm der Abbildung  $\Pi_\sigma \circ \Omega$ .
- b.) Wir haben für die Multiplikation zweier Brauer-Diagramme definiert, dass für jeden geschlossenen Kreis das Ergebnis-Diagramm mit dem Faktor  $\dim V$  multipliziert wird. Dieser Faktor muss so festgelegt werden, um Brauer-Diagramme als äquivalente Schreibweise für die vorgestellten linearen Abbildungen zwischen Tensoren benutzen zu können. Warum?  
Hinweis: Spur vom Casimir-Element

c.) Gegeben seien die folgenden Brauer-Diagramme:



Zeige, dass das Ergebnis der Multiplikation  $B_6 \circ B_5$  der linearen Abbildung, die durch Hintereinanderausführen von  $B_5$  und  $B_6$  gegeben ist, entspricht. Zeige dies auch für  $B_7 \circ B_8$ .

### Aufgabe 2.7. – Wiederholung von Isomorphie zwischen Vektorräumen: Matrix vs. 2-Tensor

Matrizen und 2-Tensoren sind einander sehr ähnlich, so ähnlich sogar, dass sie zueinander isomorph sind. Gegeben ein  $K$ -Vektorraum  $V$  der Dimension  $n$ . Genauer: Der Raum der Matrizen  $K^{n \times n}$  und  $V \otimes V^*$  sind isomorph zueinander. Wir wollen nun diesen Isomorphismus genauer betrachten.

$V \otimes V$ ,  $V \otimes V^*$ ,  $V^* \otimes V^*$

Ins Darstellungstheoriekapitel

### Aufgabe 2.8. – Wilde Behauptungen (schwer)

Im Skript wurde behauptet:

„alle physikalisch sinnvollen Dinge [sind] von sich aus basisfrei und somit zwangsläufig auch basisfrei berechenbar, wenn sie überhaupt berechenbar sind“

Überzeuge dich davon, dass das nicht nur so daher gesagt ist, sondern ein beweisbarer Fakt ist. Insbesondere ist hier als Teilbehauptung enthalten: Es ist möglich, physikalisch sinnvolle Daten (sowohl die Input- als auch Output-Daten der Berechnung) basisfrei so zu repräsentieren, dass damit immer noch Berechnungen möglich sind.

(Und es sei erneut davor gewarnt, dass „berechnen“ nicht „effizient berechnen“ bedeutet)

### 3 Warum Darstellungstheorie?

#### 3.1 Geschickte Basiswahl

Wie dem ein oder anderen aufgefallen sein wird, haben wir in dem vorherigen Kapitel Tensoren eingeführt, ohne eine Basis für deren Vektorraum zu benötigen oder vielleicht im Nachgang eine Basis zu konstruieren. Allgemeine Aussagen lassen sich schließlich auch weitgehend basisfrei, oder zumindest basis-unabhängig machen. Jetzt wollen manche jedoch Tensoren nicht nur einfach so für ein bisschen hübsche Mathematik benutzen sondern tatsächlich mal ein Problem mit Zahlen (und zwar nicht nach dem Mathematiker-Prinzip "Sei  $a \in \mathbb{R} \dots$ ", sondern halt mal welche mit echten Ziffern) möglichst *effizient* ausrechnen. Dafür möchte man meistens ab irgendeinem Punkt eine Basis wählen, idealerweise eine, die orthonormal bezüglich eines gewählten Skalarproduktes ist.

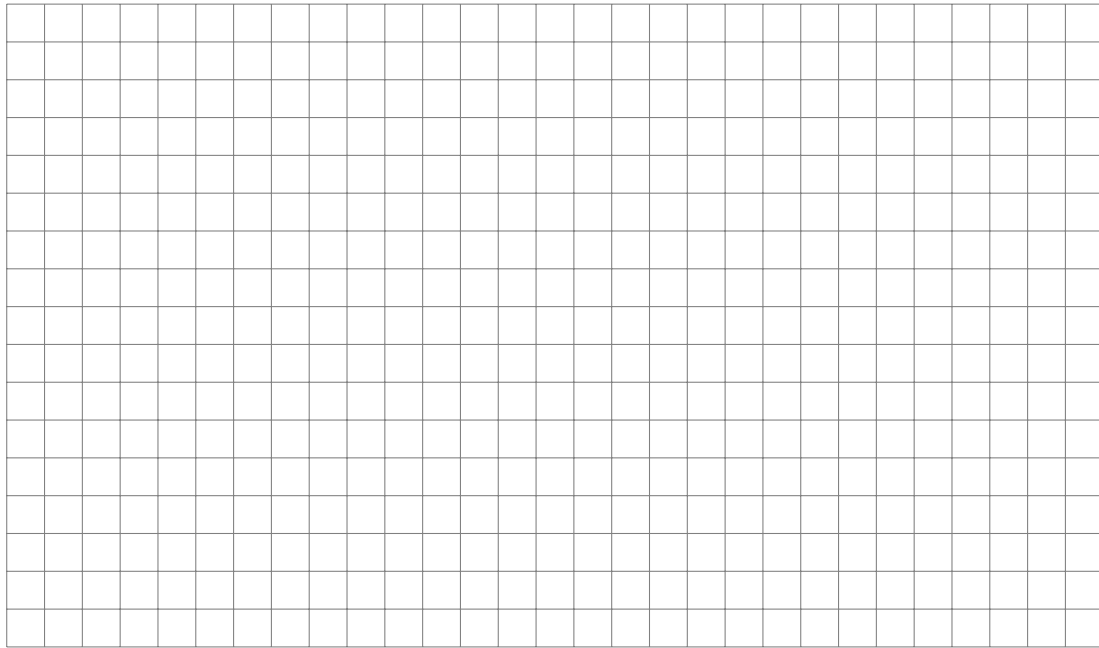
Hieraus ließe sich recht simpel eine orthonormale Basis für den Tensorraum ableiten. Aber ist diese Basis auch eine gute Basis? Was macht eine "gute" Basis überhaupt aus?

Gehen wir zu unseren Ballwerfern Anna und Bernd zurück. Formulieren wir das gleiche Problem etwas um:

Anna und Bernd stehen 2.5 Meter voneinander entfernt in einer ebenen Wiese einer flachen Wand gegenüber. Beide haben einen Abstand zur Wand von 5 Metern. Anna hat einen Ball in der Hand und möchte ihn Bernd so zuwerfen, dass er einmal an der Wand abprallt und dann in Bernds Händen landet. Dabei soll der Ball den Boden nicht berühren. Berechne die Trajektorie vom Ball und die Kraft, mit der Anna den Ball abwerfen muss unter der Annahme von Reibungsfreiheit.



Welche Basis würde man am ehesten wählen, um diese Aufgabe zu lösen und warum? Welche Wahlfreiheiten haben wir? Gibt es mehr als eine sinnvolle Basis?



Diese Frage lässt sich auch auf den Vektorraum der Tensoren übertragen. Wir werden genauer definieren, was es für eine Basis heißt, günstig gewählt zu sein und herausfinden, wie solch eine Basis für symmetrische Tensoren bzw. Polynome aussieht.

### 3.2 Einschränkung auf erlaubte lineare Abbildungen zwischen Tensoren und ihre Klassifikation

Wie für Tensoren bereits deutlich wurde, gibt es unendlich viele lineare Abbildungen zwischen den Tensorräumen. Jetzt wollen wir mit Tensoren jedoch meistens physikalische Probleme beschreiben, die bestimmten grundsätzlichen Symmetrien unterliegen. So wird z.B. ein Ball bei gleichen Bedingungen immer die gleiche Flugbahn haben, ganz egal wie wir das Koordinatensystem drehen, um die Flugbahn zu berechnen. Dieses Erkenntnis lässt sich in mathematische Forderungen gießen, welche uns die linearen Abbildungen zwischen Tensoren als nur 4 Arten klassifizieren lässt.

### 3.3 Berechnungen mit linearen Abbildungen

Wie wir zuvor gelernt haben, lässt sich im Prinzip jede multi-lineare Abbildung durch eine i.A. sehr große Matrix darstellen. Nun ist eine Berechnung dann besonders einfach (bzw. bei Nutzung eines Computers besonders schnell), wenn die Matrix viele 0en hat. Dies ist ein beliebter Grund in der angewandten Numerik, um einen Basiswechsel durchzuführen: Ziel ist es, die Basis so zu drehen, dass eine voll besetzte Matrix maximal viele 0 hat, da sich so bei hinreichend großen Dimensionen die Rechenzeit insgesamt stark reduziert. Mit Hilfe der Darstellungstheorie können wir sogar einen Schritt weiter gehen - Wir werden für eine bestimmte Klasse von linearen Abbildungen eine Basis finden, die uns maximal viele 0en in der Matrix garantiert.

### 3.4 Elementare Darstellungstheorie

#### 3.1 Definition (Darstellungen):

Sei  $G$  eine Gruppe und  $\mathbb{K}$  ein Körper. Eine Darstellung von  $G$  über  $\mathbb{K}$  besteht aus

- einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $V$ ,
- einer Abbildung  $\cdot : G \times V \rightarrow V, (g, v) \mapsto g \cdot v$ , genannt „Operation“ (der Gruppe auf dem Vektorraum),

die die Axiome in Tabelle 3.1 erfüllen. Man sagt auch „ $G$  operiert auf dem Vektorraum  $V$ “ statt „ $G$  ist eine Darstellung von  $G$ “.

Axiome von Darstellungen	Bedeutung
Linearität	$\forall g \in G : (V \rightarrow V, v \mapsto g \cdot v)$ ist eine lineare Abbildung
Assoziativität	$\forall g, h \in G \forall v \in V : g \cdot (h \cdot v) = (g \cdot h) \cdot v$
Nichttrivialität/Normierung	$\forall v \in V : 1_G \cdot v = v$
Axiome von Homomorphismen	Bedeutung
$\mathbb{K}$ -Linearität	$f$ ist eine lineare Abbildung $V \rightarrow W$
$G$ -Linearität	$\forall g \in G, v \in V : f(g \cdot v) = g \cdot f(v)$

Tabelle 3.1: Definierende Eigenschaften von Darstellungen und Homomorphismen zwischen Darstellungen

Sind  $V, W$  zwei Darstellungen von  $G$  und  $f : V \rightarrow W$  eine Abbildung, so heißt  $f$  Homomorphismus oder  $\mathbb{K}G$ -lineare Abbildung, falls die beiden Axiome in Tabelle 3.1 erfüllt sind. Den Raum aller  $\mathbb{K}G$ -linearen Abbildungen von  $V$  nach  $W$  bezeichnen wir mit  $\text{Hom}_{\mathbb{K}G}(V, W)$ . Eine  $\mathbb{K}G$ -lineare Abbildung von  $V$  nach  $V$  (also gleicher Definitions- und Zielraum) heißt Endomorphismus, der Raum aller solcher Abbildungen wird mit  $\text{End}_{\mathbb{K}G}(V)$  notiert.

Existiert ein Homomorphismus  $f' : W \rightarrow V$  mit  $f \circ f' = f' \circ f = \text{id}$ , so nennt man  $f$  Isomorphismus der Darstellungen.

#### Vereinbarung:

Wir werden ausschließlich endlichdimensionale Darstellungen betrachten. Es gibt auch eine reichhaltige Theorie unendlichdimensionaler Darstellungen, die für uns aber nicht relevant sein wird.

Wir werden uns außerdem ausschließlich für die Fälle  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  und ein bisschen  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  interessieren und andere Körper außen vor lassen. (Typischerweise ist Darstellungstheorie über  $\mathbb{C}$  immer der einfachste Fall und Darstellungstheorie über anderen Körpern als  $\mathbb{C}$  ist mindestens genauso schwierig oder schwieriger)

**3.2:** Eine Darstellung kann alternativ aufgefasst werden als Gruppenhomomorphismus  $G \rightarrow GL(V)$ : Jedem Gruppenelement  $g \in G$  wird die (invertierbare!) lineare Abbildung  $v \mapsto gv$  zugeordnet. Ist umgekehrt ein Gruppenhomomorphismus  $\mathcal{D} : G \rightarrow GL(V)$  gegeben, so kann man  $V$  als  $G$ -Darstellung auffassen, indem man  $g \cdot v := \mathcal{D}(g)(v)$  definiert. Diese beiden Sichtweisen sind völlig identisch und beliebig austauschbar. Je nach Situation kann es einfacher sein, einen Homomorphismus nach  $GL(V)$  oder direkt die Operation der Gruppe auf  $V$  zu definieren.

Hat man aus irgendeinem Grund eine Basis von  $V$  gegeben, kann man bekanntlich lineare Abbildungen mit Matrizen identifizieren. Eine Darstellung ist in dieser Sichtweise dann eine Abbildung  $D : G \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ , die jedem Gruppenelement  $g \in G$  eine (invertierbare) Matrix  $D(g)$  zuordnet, sodass  $D(1) = 1_{n \times n}$  und  $D(g \cdot h) = D(g) \cdot D(h)$  erfüllt sind. Solch eine Abbildung nennt man dann auch Matrixdarstellung.

**3.3 Beispiel:** •  $GL(V)$  operiert auf  $V$  via  $g \cdot v := g(v)$ , die sogenannte natürliche oder kanonische Darstellung.

- Die symmetrische Gruppe  $Sym(m)$  (Gruppe aller Permutationen der Zahlen  $1, \dots, m$ ) operiert auf  $\mathbb{K}^m$  durch Vertauschen der Koordinaten (die sogenannte Permutations- oder kanonische Darstellung):

$$\sigma \cdot (v_1, \dots, v_m) := (v_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, v_{\sigma^{-1}(m)})$$

und auf der Tensorpotenz  $V^{\otimes m}$  durch Vertauschen der Faktoren:

$$\sigma \cdot v_1 \otimes \dots \otimes v_m := v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma^{-1}(m)}$$

(Aufgabe 3.1: Beweise, dass das  $^{-1}$  wirklich notwendig ist)

- Jede beliebige Gruppe hat triviale Darstellungen, nämlich für jeden beliebigen Vektorraum  $V$ :

$$g \cdot v := v$$

Spricht man von *der* trivialen Darstellung meint man damit diejenige mit  $V = \mathbb{K}$ .

- Die symmetrische Gruppe hat eine nichttriviale, eindimensionale Darstellung mit  $V = \mathbb{K}$ , das Signum:

$$\sigma \cdot 1_{\mathbb{K}} := \text{sgn}(\sigma) := \begin{cases} -1 & \text{falls } \sigma \text{ ungerade viele Inversionen enthält} \\ +1 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

- Der Raum  $V := \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  der Polynome in  $n$  Variablen mit Koeffizienten aus  $\mathbb{K}$  ist eine Darstellung für die Gruppe  $G = GL_n(\mathbb{K})$  der invertierbaren  $n \times n$ -Matrizen via:

$$g \cdot p := p \left( \sum_{i=1}^n (g^{-1})_{1i} X_i, \sum_{i=1}^n (g^{-1})_{2i} X_i, \dots, \sum_{i=1}^n (g^{-1})_{ni} X_i \right)$$

Für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  können wir  $V$  auch als Raum der polynomiellen Abbildungen  $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$  auffassen. Dann schreibt sich dieselbe Definition etwas einfacher als

$$g \cdot p := X \mapsto p(g^{-1}(X))$$

(Aufgabe 3.1: Beweise, dass das  $^{-1}$  wirklich notwendig ist)

### 3.4 Lemma und Definition (Neue Darstellungen aus vorhandenen):

Sei  $G$  eine Gruppe und  $V, W$  Darstellungen von  $G$  über einem festen Körper  $\mathbb{K}$ . Die folgenden sind dann auch Darstellungen von  $G$ :

- Die direkte Summe  $V \oplus W := \{ (v, w) \mid v \in V, w \in W \}$  wird zu einer Darstellung durch

$$g \cdot (v, w) := (gv, gw)$$

- Das Tensorprodukt  $V \otimes W$  durch

$$g(v \otimes w) := (gv) \otimes (gw)$$

- Der Raum der  $\mathbb{K}$ -linearen Abbildungen  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$  durch

$$g \cdot f := v \mapsto gf(g^{-1}v)$$

- Der Dualraum  $V^* := \text{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$  durch

$$g \cdot \phi := v \mapsto \phi(g^{-1}v)$$

(Aufgabe 3.1 Beweise, dass das  $^{-1}$  wirklich notwendig ist)

Ist  $H \leq G$  eine Untergruppe von  $G$ , dann operiert  $H$  natürlich auch auf  $V$ . Die Darstellung von  $H$ , die wir so erhalten, nennt man Restriktion von  $V$  auf  $H$ .

**3.5:** Man beachte, dass d. ein Spezialfall von c. ist, wobei man für  $W$  die triviale Darstellung  $\mathbb{K}$  eingesetzt hat.

**3.6 Beispiel** (Zentrales Beispiel – Die zwei- und dreidimensionalen Dreh- bzw. Isometriegruppen):

Wie bereits festgestellt, ist jeder Vektorraum  $V$  eine  $GL(V)$ -Darstellung. Ist  $V$  ein reeller Vektorraum, auf dem ein Skalarprodukt gegeben ist, so hat  $GL(V)$  die Untergruppe der Isometrien  $O(V)$ , d.h. die Gruppe aller mit dem Skalarprodukt verträglichen Abbildungen:

$$O(V) := \{ f \in GL(V) \mid \forall v, w \in V : \langle f(v), f(w) \rangle := \langle v, w \rangle \}$$

In dieser Gruppe enthalten sind z.B. alle Rotationen, alle Spiegelungen sowie die Inversion  $v \mapsto -v$  (die manchmal eine Drehung ist).

Wir werden die Darstellungstheorie der Isometriegruppen von zwei- und dreidimensionalen reellen Vektorräumen entwickeln. Wir werden also  $V$ ,  $V^{\otimes m}$ , den Raum der polynomiellen Abbildungen  $V \rightarrow \mathbb{K}$  uvm. als Darstellungen von  $O(V)$  auffassen.

Es ist außerdem manchmal von Vorteil, den dreidimensionalen Raum auch als Darstellung für die zweidimensionale Isometriegruppe auffassen, indem wir  $O_2$  als Untergruppe von  $O_3$  auffassen. Dies ist sinnvoll in physikalischen Systemen mit einer festen (unendlich ausgedehnten) Ebene, wo zwar alles rotations- und spiegelsymmetrisch ist, aber nur solange diese Ebene erhalten bleibt.

**3.7 Definition** (Unterdarstellungen):

Sei  $V$  eine Darstellung von  $G$ . Ein Untervektorraum  $U \leq V$  heißt  $G$ -invarianter Unterraum oder Unterdarstellung von  $V$ , falls  $U$  unter der Gruppenoperation abgeschlossen ist, d.h.

$$\forall g \in G : g \cdot U = U$$

**3.8 Lemma** (Quotienten):

Das duale Konzept zu Unterdarstellungen sind Quotientendarstellungen: Ist  $V$  eine Darstellung von  $G$  und  $U \leq V$  ein  $G$ -invarianter Unterraum, dann ist auch der Quotient  $V/U$  eine Darstellung von  $G$  via  $g \cdot \bar{v} := \overline{g \cdot v}$ .

**3.9 Beispiel:** •  $\{0\}$  und  $V$  sind immer Unterdarstellungen von  $V$ .

- Die Gerade  $U_1 = \{ \lambda(1, 1, \dots, 1) \mid \lambda \in K \}$  und die Hyperebene  $U_2 := \{ (x_1, \dots, x_m) \mid \sum_{i=1}^m x_i = 0 \}$  sind zwei Unterdarstellungen der Permutationsdarstellung von  $G = \text{Sym}(m)$  auf  $V = \mathbb{K}^m$ . Falls  $\mathbb{K} \in \{ \mathbb{R}, \mathbb{C} \}$  ist, dann gilt  $V = U_1 \oplus U_2$ .

**3.10 Definition** (Irreduzible Darstellungen):

Eine Darstellung, die exakt zwei Unterdarstellungen hat (nämlich  $\{0\}$  und sich selbst), heißt irreduzibel oder einfach. Eine nicht-einfache Darstellung heißt entsprechend auf reduzibel.

**3.11:** Man vergleiche mit der Definition einer Primzahl als natürliche Zahl, die genau zwei Teiler hat.

**3.12:** Weil wir „exakt zwei“ und nicht „höchstens zwei“ fordern, ist der Nullvektorraum  $\{0\}$  niemals eine irreduzible Darstellung.

**3.13 Beispiel:** • Aus Dimensionsgründen ist jede eindimensionale Darstellung automatisch irreduzibel.

- $V$  ist eine irreduzible Darstellung von  $GL(V)$ .
- $\mathbb{K}^3$  ist eine irreduzible Darstellung von  $O_3$ .
- $\mathbb{K}^3$  ist *nicht* irreduzibel als Darstellung von  $O_2$ .

**3.14:** An den letzten beiden Beispielen erkennen wir, dass die Restriktion einer irreduziblen Darstellung auf eine Untergruppe selbst wieder irreduzibel sein kann, aber nicht muss: Wenn man von  $GL_3$  zu  $O_3$  einschränkt, bleibt  $\mathbb{K}^3$  irreduzibel; wenn wir von  $O_3$  zu  $O_2$  einschränken, bleibt es das nicht.

Auch die anderen Konstruktionsmöglichkeiten von neuen Darstellungen aus bekannten erhalten i.A. Irreduzibilität nicht:

- Die direkte Summe von zwei Darstellungen  $\neq 0$  ist niemals irreduzibel, weil die beiden Summanden invariante Unterräume sind.
- Das Tensorprodukt von Darstellungen ist immer reduzibel, wenn mindestens einer der Faktoren reduzibel ist, denn  $(U_1 \oplus U_2) \otimes W = (U_1 \otimes W) \oplus (U_2 \otimes W)$ . Das Tensorprodukt von irreduziblen Darstellungen ist i.A. aber auch nicht irreduzibel, z.B. ist  $V \otimes V$  niemals irreduzibel, wenn  $V$  nicht zufällig eindimensional ist. (Wenn es eindimensional ist, ist  $V \otimes V$  natürlich auch eindimensional und dementsprechend ausnahmsweise doch irreduzibel)

Es ist i.A. ein sehr schweres Problem, zu bestimmen, ob ein Tensorprodukt von zwei irreduziblen wieder irreduzibel ist und, wenn es das nicht ist, wie die irreduziblen Unterräume des Tensorprodukts genau aussehen. Im Falle  $G = O_3$  ist diese Fragestellung unter dem Namen „Clebsch<sup>8</sup>-Gordan<sup>9</sup>-Theorie“ bekannt.

Einzige Ausnahme ist das Dualisieren:

### 3.15 Lemma:

Eine endlichdimensionale Darstellung  $V$  ist irreduzibel genau dann, wenn  $V^*$  irreduzibel ist.

---

<sup>8</sup>Alfred Clebsch, 1833–1872, dt. Mathematiker

<sup>9</sup>Paul Albert Gordan, 1832–1912, dt. Mathematiker



## Aufgaben

### Aufgabe 3.1. – Komische Minus Einsen (leicht)

a.) In den Beispielen wurde definiert, dass die symmetrische Gruppe  $Sym(m)$  durch

$$\sigma \cdot (v_1, \dots, v_m) := (v_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, v_{\sigma^{-1}(m)})$$

auf  $K^m$  auf der Tensorpotenz  $V^{\otimes m}$  durch

$$\sigma \cdot v_1 \otimes \dots \otimes v_m := v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma^{-1}(m)}$$

operiert.

b.) Ebenfalls definiert wurde, dass bei einer gegebenen Darstellung  $V$  der Dualraum  $V^* := \text{Hom}_K(V, K)$  zu einer Darstellung derselben Gruppe wird, indem man sie durch

$$g \cdot \phi := v \mapsto \phi(g^{-1}v)$$

operieren lässt.

c.) Ebenfalls definiert wurde, dass  $G = GL_n(\mathbb{K})$  auf  $V := \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  dem Raum der polynomiellen Abbildungen durch

$$g \cdot p := v \mapsto p(g^{-1}X)$$

operieren lässt.

Beweise, dass das Invertieren in diesen Definitionen nötig ist, damit die Assoziativitätsbedingung gilt.

### Aufgabe 3.2.

Wie lautet die Matrixdarstellung zu der obigen Darstellung von  $Sym(m)$  auf  $K^m$ ?

### Aufgabe 3.3.

Wenn  $\mathcal{D} : G \rightarrow K^{n \times n}$  eine Matrixdarstellung von  $G$  auf  $V$  bzgl. irgendeiner fest gewählten Basis  $B \subseteq V$  ist, wie lautet die Matrixdarstellung  $\mathcal{D}^*$  der dualen Darstellung von  $G$  auf dem Dualraum  $V^*$  bzgl. der dualen Basis  $B^*$ ?

### Aufgabe 3.4. – Basiswechsel

Wenn  $\mathcal{D}$  und  $\mathcal{D}'$  zwei Matrixdarstellungen derselben Darstellung von  $G$  auf  $V$  sind, wenn d.h.  $\mathcal{D}$  bzgl. einer Basis  $B$  und  $\mathcal{D}'$  bzgl. einer zweiten Basis  $B'$  gedacht ist, und wenn  $S$  die Basiswechselmatrix von  $B$  nach  $B'$  ist, was ist dann der Zusammenhang zwischen  $\mathcal{D}$ ,  $S$  und  $\mathcal{D}'$ ?

**Aufgabe 3.5.**

- a.) Es seien  $V$  und  $W$  zwei endlich-dimensionale Darstellungen von  $G$ . Man beweise, dass die beiden Darstellungen  $\text{Hom}_K(V, W)$  und  $V^* \otimes W$  via

$$\alpha : V^* \otimes W \rightarrow \text{Hom}_K(V, W), \phi \otimes w \mapsto (v \mapsto \phi(v)w)$$

isomorph sind.

Insbesondere erhalten wir im Spezialfall  $V = W$  einen Isomorphismus zwischen  $V^* \otimes V$  und  $\text{Hom}_K(V, V)$ .

- b.) Für  $V = W$ , wie lautet der Tensor, der durch den Isomorphismus auf  $\text{id}_V$  abgebildet wird?
- c.) Zeige: Die Auswertungsabbildung  $\varepsilon : V^* \otimes V \rightarrow K, \phi \otimes v \mapsto \phi(v)$  ist  $G$ -linear.
- d.)  $\varepsilon \circ \alpha^{-1}$  ist eine  $G$ -lineare Abbildung  $\beta : \text{Hom}_K(V, V) \rightarrow K$ . Welche?

**Aufgabe 3.6.**

Zeige, dass  $V \otimes V$  niemals irreduzibel ist, wenn  $\dim(V) \neq 1$  ist.

**Aufgabe 3.7.**

Zeige, dass  $V$  irreduzibel ist, wenn  $V^*$  es ist.

**Aufgabe 3.8. – Kanonische Darstellung von  $SO_2$** 

- a.) Zeige, dass die kanonische Darstellung  $V = \mathbb{R}^2$  von  $G = SO_2$  irreduzibel ist.
- b.) Zeige, dass die komplexifizierte Darstellung  $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$  von  $G$  reduzibel ist.
- c.) Finde die irreduziblen Unterdarstellungen von  $V_{\mathbb{C}}$ .  
Hinweis: Eigenräume.

**Aufgabe 3.9. – Die kanonische Darstellung von  $SO_3$  ist irreduzibel**

Zeige, dass  $\mathbb{K}^3$  eine irreduzible Darstellung von  $G = SO_3$  ist sowohl für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  als auch für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

**Aufgabe 3.10. – Was geht bei  $SO_2$  schief?**

Spoiler:  $SO_2$  ist kommutativ.

- a.) Zeige (oder erinnere dich) zunächst: Ist  $\lambda \in \mathbb{C}$  beliebig und sind  $\alpha, \beta \in \text{End}_{\mathbb{C}}(V)$  zwei kommutierende Endomorphismen (d.h.  $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha$ ), dann ist der Eigenraum  $\text{Eig}_{\lambda}(\alpha)$  ein  $\beta$ -invarianter Untervektorraum.
- b.) Zeige, dass alle endlich-dimensionalen, irreduziblen, komplexen Darstellungen einer kommutativen Gruppe  $G$  eindimensional sind.

**Aufgabe 3.11. – (Nicht-)Isomorphie von  $V$  und  $V^*$** 

Sei  $V$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Zweck dieser Aufgabe ist es, genauer zu beleuchten, wieso  $V$  und  $V^*$  Grund verschiedene Vektorräume sind, obwohl sie als Vektorräume ja isomorph sind (d.h. die gleiche Dimension haben)

- a.) **Manchmal sind sie isomorph – Satz von Riesz.** Es sei ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $V$  gegeben. Zeige, dass  $V$  und  $V^*$  als  $SO(V)$ -Darstellungen via  $V \rightarrow V^*, v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$  isomorph sind.
- b.) (schwerer als man denkt) **Manchmal aber auch nicht.** Zeige, dass  $V$  und  $V^*$  *nicht* isomorph sind als  $GL(V)$ -Darstellungen.  
(Sobald wir Charaktertheorie haben, wird's einfach)

**3.16:** In allen Kontexten, in denen auch mit schiefen Koordinatensystemen gerechnet werden muss, *muss* deshalb zwischen  $V$  und  $V^*$  sowie zwischen ko- und kontravarianten Tensoren unterschieden werden, da es keinen in diesem Kontext natürlichen Isomorphismus  $V \cong V^*$  gibt.

In allen Kontexten, in denen ausschließlich mit orthonormierten Koordinatensystemen gerechnet wird, existiert hingegen ein für diesen Kontext natürlicher Isomorphismus, sodass es sinnvoll ist, alle Tensoren gleich zu behandeln. Die Unnatürlichkeit des allgemeinen Falls wird so in der Wahl des Skalarprodukts versteckt.

## 4 Darstellungstheorie – Level 0

### 4.1 Symmetrische Tensoren: Die Verbindung zwischen Polynomen und Tensoren

#### 4.1 Definition:

Ein Tensor  $m$ -ten Grades  $t \in V^{\otimes m}$  heißt symmetrisch, wenn er ein Fixpunkt der Operation der Permutationsgruppe  $S_m$  ist, d.h. wenn

$$\forall \sigma \in S_m : \sigma \cdot t = t$$

gilt. Der Raum der symmetrischen Tensoren wird symmetrische (Tensor-)Potenz genannt und  $\text{Sym}^m(V)$  geschrieben.

**4.2 Beispiel:** •  $v \otimes v \otimes \cdots \otimes v$  ist symmetrisch und umgekehrt: Ein reiner Tensor  $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_m$  ist genau dann symmetrisch, wenn alle  $v_1, \dots, v_m$  Vielfache eines Vektors  $v$  sind.

- $v \otimes w + w \otimes v$  ist symmetrisch. Man beachte, dass  $v \otimes w + w \otimes v = (v + w) \otimes (v + w) - v \otimes v - w \otimes w$  ist. Man kann allgemein zeigen, dass  $\text{Sym}^m(V) = \text{span} \{ v \otimes \cdots \otimes v \mid v \in V \}$  ist.

#### 4.3 Lemma (Mittelwerttrick):

Die Projektion auf den Unterraum der symmetrischen Tensoren gegeben durch

$$q(t) := \frac{1}{|S_m|} \sum_{\sigma \in S_m} \sigma \cdot t$$

und  $O_n$ -linear. Zur Erinnerung:  $|S_m| = m!$ .

Die obige Idee, den Mittelwert über eine Gruppe zu bilden und daraus eine Projektion zu basteln, werden wir häufiger verwenden. Definieren wir uns also allgemeiner:

#### 4.4 Definition (Mittelwerttrick für endliche Gruppen):

Der Mittelwert der Wirkung einer endlichen Gruppe  $G$  auf einen Vektor  $v$  des Darstellungsraumes berechnet sich wie folgt:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(v)$$

Dies ist genau die Projektion von  $V$  auf den Unterraum der  $G$ -Fixpunktraum.

**4.5:** Da wir uns vorwiegend mit  $O_3$  beschäftigen, reicht diese Definition allerdings nicht aus. Wie uns bestimmt bereits aufgefallen ist, ist  $O_3$  nicht endlich, was uns auf den ersten Blick ein paar Schwierigkeiten für die obige Operation einhandelt. Zum Glück zählt  $O_3$  zu den kompakten Gruppen, sodass wir die Summe infinitesimalisieren können, ohne über ein unendliches Volumen zu integrieren.

**4.6 Definition** (Mittelwerttrick für kompakte Gruppen & Integration über kompakte Gruppen):

Sei  $G$  eine kompakte Gruppe mit Darstellung auf einem Vektorraum  $V$ . Dann können wir den Mittelwerttrick auffassen als Integral über die Wirkung von  $G$  auf einen Vektor  $v \in V$ :

$$\frac{1}{|G|} \int_G g(v) \, dg$$

Auch dies ist die Projektion von  $V$  auf den Unterraum der  $G$ -Fixpunkte.

Wir werden nicht präzise machen, wie das Integral tatsächlich definiert ist. Man kann aber zeigen, dass für alle kompakten Gruppen  $G$  ein Integral  $\int_G$  existiert (das sogenannte Haar<sup>10</sup>-Integral), das stetige Funktionen von  $G$  in einen endlich-dimensionalen  $\mathbb{R}$ - oder  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $X$  als Input nimmt, einen Wert aus  $X$  als Output hat und u.A. folgende Eigenschaften hat:

- a.) Das Volumen von  $G$ , also  $|G| = \int_G 1 \, dg$  kann auf einen beliebigen konstanten Faktor  $\neq 0$  festgelegt werden. Wir setzen der Einfachheit halber immer  $|G| = 1$ .
- b.) Das Integral ist rechts- und linksinvariant, es gilt also für alle  $\phi : G \rightarrow X$  und jedes feste Gruppenelement  $h \in G$ :

$$\int_G \phi(gh) \, dg = \int_G \phi(g) \, dg = \int_G \phi(hg) \, dg$$

(Im üblichen Sinne: Das eine Integral existiert genau dann, wenn das andere existiert, und dann haben beide den gleichen Wert)

- c.) Invertieren ist volumenerhaltend, d.h. es gilt für alle  $\phi : G \rightarrow X$ :

$$\int_G \phi(g) \, dg = \int_G \phi(g^{-1}) \, dg$$

- d.) Konstante (also nicht vom Gruppenelement abhängige) lineare Abbildungen  $f : X \rightarrow X'$  können am Integral vorbeigezogen werden, es gilt also für alle  $\phi : G \rightarrow X$ :

$$\int_G f(\phi(g)) \, dg = f \left( \int_G \phi(g) \, dg \right)$$

Konkrete Beispiele für Haar-Integrale:

- Für endliche Gruppen ist das Haar-Integral einfach der diskrete Mittelwert:  $\int_G \phi(g) \, dg = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g)$ .
- Für die zweidimensionale Drehgruppe  $G = SO_2$  ist das Haarintegral durch Integration über alle Drehwinkel  $\alpha \in [0, 2\pi]$  gegeben (ggf. normiert mit  $\frac{1}{2\pi}$ , damit das Gesamtvolumen 1 wird)

---

<sup>10</sup>Alfréd Haar (1885–1933), ungarischer Mathematiker

- Für die Drehgruppe  $SO_3$  ist das Haar-Integral gegeben durch ein Doppelintegral der Form  $\int_{S^2} \int_{[0,2\pi]} \dots d\alpha dv$ : Es wird über die Einheitssphäre  $S^2$  integriert, das sind alle Drehachsen, und über  $[0, 2\pi]$ , das sind alle möglichen Drehwinkel. Da eine Drehung um Winkel  $\alpha$  um eine Achse  $v$  dasselbe ist wie eine Drehung um  $-\alpha$  um die Achse  $-v$ , haben wir dabei jede Drehung doppelt erwisch, aber das kann man ausgleichen, indem man dem Normierungsfaktor eine zusätzliche  $\frac{1}{2}$  spendiert.
- Die Isometriegruppen  $O_2$  und  $O_3$  bestehen aus der Untergruppe der Drehungen  $SO_n$  und ihrem Komplement, die beide jeweils die Hälfte des Gesamtvolumens haben. Das Komplement hat jeweils die Form  $h \cdot SO_n = \{hg \mid g \in SO_n\}$  für ein beliebiges, fest gewähltes Gruppenelement  $h \in O_n \setminus SO_n$ . Über das Komplement zu integrieren funktioniert also genauso wie über  $SO_n$  selbst zu integrieren. Man kann integriert über  $O_n$ , indem man die Integrale über beide Hälften summiert.

Äquivalent zur Existenz des Haar-Integrals ist die Existenz einer „uniformen“ Wahrscheinlichkeitsverteilung auf  $G$ . Man kann also alternativ das Integral auch mit einer Monte-Carlo-Methode definieren als „Wähle unabhängig und gleichverteilt  $N$  zufällige Gruppenelemente, bilde den Mittelwert  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(g_i)$  und lasse  $N \rightarrow \infty$  gehen“.

**4.7 Satz** (Isomorphismus von Polynom(iellen Abbildungen) und symmetrischen Tensoren): a.)

Es sei  $e_1, e_2, \dots, e_n$  eine Basis von  $V$ . Der Raum der Polynome ist isomorph zu  $\bigoplus_{m=0}^{\infty} \text{Sym}^m(V)$ . Der Isomorphismus ist die Einschränkung der Abbildung

$$\begin{cases} \bigoplus_{m=0}^{\infty} V^{\otimes m} & \rightarrow \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \\ e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_m} & \mapsto x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \dots \cdot x_{i_m} \end{cases}$$

Die umgekehrte Richtung ist durch  $x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} \mapsto q(e_1^{\otimes k_1} \otimes e_2^{\otimes k_2} \otimes \dots \otimes e_n^{\otimes k_n})$  gegeben.

Diese Aussage ist nicht basis-frei und kann auch nicht basis-frei gemacht werden, da es in  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  ja  $n$  ausgezeichnete Elemente vom Grad 1 gibt, eben die Unbekannten. Jeder Isomorphismus würde also auch eine Basis von  $V$  auszeichnen.

Eine moralisch äquivalente, basisfreie Aussage ist aber die folgende:

- b.) Der Raum der polynomiellen Abbildungen  $V \rightarrow \mathbb{K}$  ist isomorph zu  $\bigoplus_{m=0}^{\infty} \text{Sym}^m(V)$ . Der Isomorphismus ist die Einschränkung der Abbildung

$$\begin{cases} \bigoplus_{m=0}^{\infty} V^{\otimes m} & \rightarrow \mathbb{K}[V] \\ v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \dots \otimes v_{i_m} & \mapsto (v \mapsto \langle v_{i_1}, v \rangle \cdot \langle v_{i_2}, v \rangle \cdot \dots \cdot \langle v_{i_m}, v \rangle) \end{cases}$$

- c.) In beiden Fällen gilt: Die Räume sind als Darstellungen der orthogonalen Gruppe isomorph; die angegebenen Isomorphismen sind  $O_n$ -linear.

*Beweis.* Da das Produkt von Polynomen kommutativ ist, werden  $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_m}$  und alle Permutationen  $e_{i_{\sigma(1)}} \otimes e_{i_{\sigma(2)}} \otimes \dots \otimes e_{i_{\sigma(m)}}$  auf denselben Wert abgebildet. Also wird der Mittelwert dieser  $m!$  Tensoren ebenfalls auf denselben Wert abgebildet, d.h.

$q(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_m})$  geht auch auf  $x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdots x_{i_m}$ . Das zeigt, dass die beiden in a. definierten Abbildungen zueinander invers sind.

Indem man eine Orthonormalbasis für  $e_1, \dots, e_n$  einsetzt, sieht man, dass in b. tatsächlich derselbe Isomorphismus definiert wird, da  $v \mapsto \langle e_i, v \rangle$  genau die  $i$ -te Koordinatenabbildung bzgl. dieser Basis ist, d.h. die Abbildung, die den Vektor mit den Koordinaten  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  auf  $x_i$  schickt. An der Schreibweise in b. sieht man aber leichter als der in a., dass die Isomorphismen  $O_n$ -linear sind.  $\square$

## 4.2 Natürliche Abbildungen und die Klassifikation der linearen Tensor-Abbildungen

Im Kontext unserer physikalischen Welt wollen wir Messungen von Quantitäten durchführen. Diese Quantitäten können unter anderem als Tensoren verstanden werden, z. B. beschreibt der Spannungstensor die Zug-, Druck- und Scherspannungen in einem Festkörper.

Eine fundamentale Eigenschaft, die wir von allen messbaren Quantitäten erwarten, ist, dass das Ergebnis der Messung unabhängig von der Wahl des Koordinatensystem ist. Ein bestimmter Geschwindigkeitsvektor sollte immer in die gleiche Richtung zeigen, völlig unabhängig davon, ob seine Koordinaten nun  $(3, 4, 0)$  oder  $(0, 0, 5)$  sind. Gleiches gilt für seine Länge, oder die Determinante einer Matrix. Generell sind wir an den Eigenschaften interessiert, die charakteristisch sind für das untersuchte System, nicht für das Koordinatensystem, mit dem wir das System untersuchen.

Konkreter: Die Eigenschaften sollen *unabhängig von der Orientierung* des Koordinatensystems sein, die Basisvektoren zu rotieren, zu invertieren oder zu spiegeln sollte den gemessenen Wert einer Eigenschaft nicht verändern.

Gleiches gilt auch bei Interaktionen in der physikalischen Welt, die Wirkung eines bestimmten Zustandes auf zukünftige Zustände ist ebenfalls völlig unabhängig von dem Koordinatensystem, mit dem wir den Zustand und seine Wirkung beschreiben.

Diese Idee lässt sich mathematisch präzisieren, sobald einem klar ist, dass jeder physikalische Prozess eine Abbildung von einem Zustand in einen anderen ist. Auch eine Messung ist eine Abbildung vom Zustand auf eine Zahl.

### 4.8 Definition (Natürliche Abbildungen):

Sei  $\phi$  eine Abbildung von  $X$  nach  $Y$ , mit  $X, Y$  zwei Vektorräume und  $G$  eine Gruppe.  $\phi$  heißt *natürlich*, oder  *$G$ -kompatibel*, wenn

$$\forall \rho \in G : \phi \circ \rho = \rho \circ \phi.$$

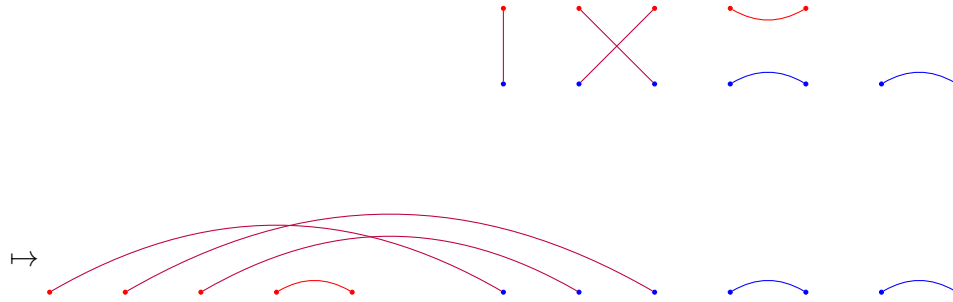
In unserem Kurs behandeln wir nur lineare Abbildungen, wobei multi-lineare Abbildungen durch das Tensorprodukt linearisiert werden können.  $G$  ist für uns typischerweise  $O_3$ , wir betrachten also  $O_3$ -kompatible, lineare Abbildungen.

Wenden wir uns nun den Abbildungen zwischen Tensoren zu. Wir haben sie im ersten Kapitel bereits klassifiziert mit folgendem Versprechen:

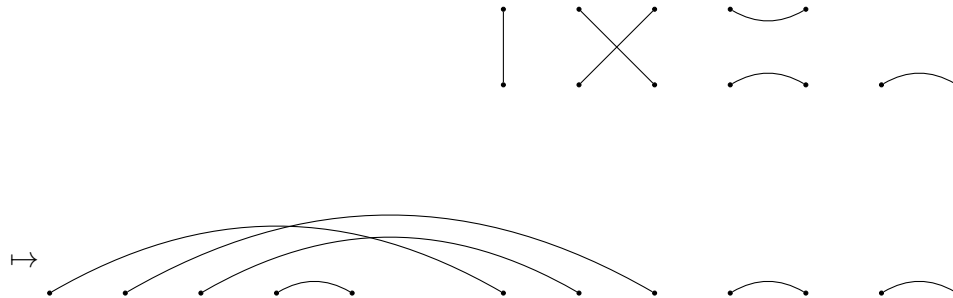
**4.9 Satz** (Brauer-Diagramme beschreiben alle natürlichen linearen Abbildungen zwischen Tensoren):

Die Menge aller Linearkombinationen von allen Brauer-Diagrammen ist gleich der Menge aller natürlichen linearen Abbildungen zwischen Tensoren.

*Beweis per Induktion.* Zunächst gilt es festzustellen, dass die vier Klassen von linearen Abbildungen zwischen Tensoren (2.25, 2.26, 2.27 und 2.28) tatsächlich natürliche Abbildungen sind (s. Aufgabe 4.2). Die Hintereinanderausführung und Linearkombination von linearen natürlichen Abbildungen ist selbst ebenfalls eine lineare natürliche Abbildung. In Aufgabe 3.5 haben wir festgestellt, dass jede lineare Abbildung  $V^{\otimes m} \rightarrow V^{\otimes n}$  einem Element des Tensorraums  $(V^{\otimes m})^* \otimes V^{\otimes n}$  entspricht. Die Suche nach einer  $O_3$ -kompatiblen linearen Abbildung  $V^{\otimes m} \rightarrow V^{\otimes n}$  entspricht also der Suche nach einem  $O_3$  Fixpunkt in  $(V^{\otimes m})^* \otimes V^{\otimes n}$ . Dieser Schritt lässt sich an Hand eines farbigen Brauer-Diagramms verdeutlichen: Die Knoten der oberen Zeile werden nach unten vor die untere Zeile verschoben und alle Kanten werden beibehalten. Das Ergebnis lässt sich als ein Brauer-Diagramm lesen, welches nur aus Casimir-Elementen besteht und keinen Knoten in der oberen Zeile hat, also streng genommen als eine Abbildung  $\mathbb{R} \rightarrow (V^{\otimes m})^* \otimes V^{\otimes n}$ .



Um unser gewohntes Brauer-Diagramm zu erhalten, wenden wir außerdem den Isomorphismus zwischen  $V^*$  und  $V$  an und überführen die lineare Abbildung  $V^{\otimes m} \rightarrow V^{\otimes n}$  in ein Element des Tensorraums  $V^{\otimes m} \otimes V^{\otimes n} = V^{\otimes m+n}$ :



Es ist noch zu klären, dass tatsächlich keine Abbildung übersehen wurde, z.B. weil sie nicht als Brauer-Diagramm darstellbar ist. Für diese Suche wenden wir wieder den Mittelwert-Trick an, diesmal mit einer kompakten Gruppe anstelle einer endlichen, d.h. wir integrieren anstelle zu summieren. Das Maß  $|O_3|$  können wir wählen und setzen es auf 1, unsere Projektion auf den Raum der Fixpunkte sieht also folgendermaßen aus:

$$\Psi_{O_3}^{mn} : \begin{cases} V^{*\otimes m} \otimes V^{\otimes n} & \rightarrow & V^{*\otimes m} \otimes V^{\otimes n} \\ v & \mapsto & \int_{O_3} \rho(v) d\rho \end{cases} \quad (2)$$



Wir könnten nun allgemeine Tensoren auf ihre Fixpunkte projizieren, werden uns hier zunächst auf ein paar Beispiele einschränken (siehe Aufgabe 4.4).

Den vollständigen Beweis führen wir nun per Induktion über  $d := \dim(V)$ .

Induktionsbehauptung: Das Mittelwertintegral über  $O_d$  dargestellt auf  $V^{\otimes n}$  ergibt immer eine Linearkombination der Permutation von Casimir-Elementen  $\Omega_V$  (mglw. ist diese auch 0), wobei wir die Permutation von Casimir-Elementen auch mit einem entsprechenden einzeiligen Brauer-Diagramm darstellen können.

Induktionsanfang: Dazu bestimmen wir zunächst den Fixpunktraum von  $O_1$  dargestellt auf  $\mathbb{R}$ :

$$\int_{O_1} \rho(v^{\otimes n}) d\rho, v \in \mathbb{R}$$

Wir haben also für  $d = 1$  festgestellt, dass der Fixpunktraum mit geraden Potenzen von Casimir-Elementen aufgespannt wird, für einen bestimmten Tensorgrad  $2n$  ist der Fixpunktraum eindimensional und wird von  $v^{\otimes 2n}$  aufgespannt.

Induktionsschritt: Für  $d + 1$  nutzen wir folgenden Zusammenhang,  $v_i \in \mathbb{R}^{d+1}$  :

$$\begin{aligned} \int_{O_{d+1}} \rho(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) d\rho &= \int_{O_d} \int_{O_{d+1}} \tau(\rho(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)) d\rho d\tau \\ &= \int_{O_{d+1}} \int_{O_d} \rho(\tau(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)) d\tau d\rho \end{aligned}$$

wobei wir  $O_d$  in  $O_{d+1}$  auf bestimmte Weise einbetten. Jede Einbettung von  $O_d$  in  $O_{d+1}$  wird eine ausgezeichnete Richtung haben, deren Unterraum von der Untergruppe nicht verändert wird. Wir wählen uns die Standardeinbettung so, dass  $v_1$  von  $O_d$  nicht verändert wird und zerlegen alle  $v_i$  in zu  $v_1$  senkrechte und parallele Anteile,

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_n = v_1 \otimes (c_2 v_1 + s_2 v_2^\perp) \otimes \cdots \otimes (c_n v_1 + s_n v_n^\perp).$$

Damit ist

$$\begin{aligned} \tau(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) &= \tau(v_1) \otimes (c_2 \tau(v_1) + s_2 \tau(v_2^\perp)) \otimes \cdots \otimes (c_n \tau(v_1) + s_n \tau(v_n^\perp)) \\ &= v_1 \otimes (c_2 v_1 + s_2 \tau(v_2^\perp)) \otimes \cdots \otimes (c_n v_1 + s_n \tau(v_n^\perp)). \end{aligned}$$

Durch Ausmultiplizieren bekommen wir eine Summe von reinen Tensoren, in denen jeder Faktor parallel oder senkrecht zu  $v_1$  ist. Für jeden reinen Tensor können wir uns eine Permutation aussuchen, die alle senkrechten Faktoren nach rechts schiebt und alle parallelen Faktoren nach links. Die Skalare  $s_i$  und  $c_i$  können in einer Konstante zusammengefasst werden, welche wir zur Einfachheit auf 1 setzen. Rechnen wir also o.B.d.A. mit dem Tensor

$$v_1^{\otimes l} \otimes \tau(v_{l+1}^\perp) \otimes \cdots \otimes \tau(v_n^\perp),$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned} &\int_{O_{d+1}} \int_{O_d} \rho(v_1^{\otimes l} \otimes \tau(v_{l+1}^\perp) \otimes \cdots \otimes \tau(v_n^\perp)) d\tau d\rho \\ &= \int_{O_{d+1}} \rho(v_1)^{\otimes l} \otimes \rho\left(\int_{O_d} \tau(v_{l+1}^\perp) \otimes \cdots \otimes \tau(v_n^\perp) d\tau\right) d\rho \end{aligned}$$

Das innere Integral ergibt nach Induktionsvoraussetzung eine Linearkombination von Permutationen von Casimir-Elementen  $\Omega_{\mathbb{R}^d}$ . Jedes einzelne Casimir-Element können wir nun schreiben als  $\Omega_{\mathbb{R}^d} = \Omega_{\mathbb{R}^{d+1}} - v_1 \otimes v_1$ , wobei wir o.b.d.A. annehmen können, dass  $v_1$  normiert ist. Diese Summe multiplizieren wir erneut aus, sodass wir Permutationen von Tensoren der Form

$$v_1^{\otimes l+2k} \otimes \underbrace{\Omega_{\mathbb{R}^{d+1}} \otimes \cdots \otimes \Omega_{\mathbb{R}^{d+1}}}_{\frac{n-l-2k}{2} \text{ viele}}$$

erhalten. Integrieren wir diesen Tensor über  $O_{d+1}$ :

$$\begin{aligned} & \int_{O_{d+1}} \rho(v_1)^{\otimes l+2k} \otimes \rho(\Omega_{\mathbb{R}^{d+1}}) \otimes \cdots \otimes \rho(\Omega_{\mathbb{R}^{d+1}}) \, d\rho \\ &= \int_{O_{d+1}} \rho(v_1)^{\otimes l+2k} \, d\rho \otimes \Omega_{\mathbb{R}^{d+1}} \otimes \cdots \otimes \Omega_{\mathbb{R}^{d+1}}, \end{aligned}$$

und laut Aufgaben Aufgaben 4.4f.) und 4.4g.) ist auch das verbliebene Integral eine Linearkombination Permutationen von Casimir-Elementen.  $\square$

## Aufgaben

### Aufgabe 4.1.

Wir haben einen Isomorphismus zwischen Polynomen und symmetrischen Tensoren. Welches Polynom entspricht dem Casimir-Element  $\Omega$  auf Polynomseite?

### Aufgabe 4.2. – Die 4 Klassen von linearen Tensor-Abbildungen sind natürlich

Zeige, dass die vier Klassen von linearen Abbildungen zwischen Tensoren tatsächlich natürliche Abbildungen sind:

- a.) Skalarmultiplikation (2.25)
- b.) Permutation (2.26)
- c.) Spur nehmen (2.27)
- d.) Casimir-Element einfügen (2.28)

### Aufgabe 4.3. – Bunte Casimir-Elemente

In der grafischen Darstellung der Überführung einer linearen Abbildung  $V^{\otimes m} \rightarrow V^{\otimes n}$  zu einem Element des Tensorraums  $(V^{\otimes m})^* \otimes V^{\otimes n}$  haben wir Casimir-Elemente mit drei verschiedenen Farben gezeichnet. Überzeuge dich, dass diese drei Farben nicht nur der Übersichtlichkeit dienen, sondern auch die verschiedenen Arten von Casimir-Elementen deutlich machen. Wie ist es gerechtfertigt, dass die Permutation oder Identität ebenfalls auf ein Casimir-Element abgebildet wird? Wo versteckt sich die Permutation?

Wir haben *farbige Brauer-Diagramme* ohne Definition eingeführt, hole dies nach und finde eine sinnvolle Definition.

### Aufgabe 4.4. – Tensoren auf $O_3$ -Fixpunkte projizieren

Projiziere die folgenden Tensoren auf ihre  $O_3$  Fixpunkte, indem du das entsprechende Integral über  $O_3$  löst:

- a.) 1-Tensor  $v \in \mathbb{R}^3$ .
- b.)  $u \otimes u$  mit  $u \in \mathbb{R}^3$ .
- c.)  $u \otimes v$  mit  $u \perp v \in \mathbb{R}^3$ .
- d.)  $u \otimes (u + v)$  mit  $u \perp v \in \mathbb{R}^3$ .
- e.)  $u \otimes v \otimes w$  mit  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ .
- f.)  $u^{\otimes n}$  mit  $u \in \mathbb{R}^3$  und  $n$  gerade. Hinweis: Polynome und symmetrische Tensoren.
- g.)  $u^{\otimes n}$  mit  $u \in \mathbb{R}^3$  und  $n$  ungerade.

## 5 Darstellungstheorie – Level 1

**5.1:** Wir wollen nun zwei Sätze beweisen und diskutieren, die die ersten beiden wirklich nichttrivialen Resultate und zugleich das Rückgrat der Darstellungstheorie bilden. Der erste Satz ist das Lemma von Schur.

**5.2 Satz** (Lemma von Schur<sup>11</sup>):

Sei  $T$  eine endlich-dimensionale, irreduzible Darstellung von  $G$  über dem Körper  $\mathbb{K}$ .

- a.) Jede  $\mathbb{K}G$ -lineare Abbildung  $T \rightarrow S$  ist entweder Null oder injektiv.
- b.) Jede  $\mathbb{K}G$ -lineare Abbildung  $U \rightarrow T$  ist entweder Null oder surjektiv.
- c.) Ist  $T'$  eine weitere irreduzible Darstellung von  $G$ , so unterscheiden sich alle von Null verschiedenen Abbildungen  $T \rightarrow T'$  (von denen es keine geben muss) um einen Isomorphismus  $T \rightarrow T'$ .
- d.) Ist  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , so ist  $\text{End}_{\mathbb{K}G}(T) = \mathbb{C} \text{id}_T := \{ \lambda \text{id}_T \mid \lambda \in \mathbb{C} \}$ . Insbesondere: In der Situation von c. gibt es also bis auf konstante Vielfache genau eine  $\mathbb{C}G$ -lineare Abbildung  $T \rightarrow T'$ .

**5.3:** Man beachte die starke Einschränkung, die die Struktur einer  $G$ -Darstellung bewirkt: Während es  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildungen wie Sand am Meer gibt und insbesondere  $\text{End}_{\mathbb{K}}(T)$  streng monoton mit der Dimension von  $T$  anwächst, hat  $\text{End}_{\mathbb{K}G}(T)$  extrem wenige, für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  sogar nur einen Freiheitsgrad, solange  $T$  irreduzibel ist. Das ist letztlich die Erklärung dafür, wieso wir relativ wenige „natürliche“ Abbildungen zwischen Tensorräumen gefunden haben.

*Beweis.* a. folgt aus der Beobachtung, dass  $\ker(f)$  eine Unterdarstellung von  $T$  ist. b. folgt daraus, dass  $\text{im}(f)$  eine Unterdarstellung von  $T$  ist. Da  $T$  irreduzibel ist, gibt es also nur zwei Möglichkeiten: Null oder ganz  $T$ .

c. Sind  $f, g : T \rightarrow T'$  zwei von Null verschiedene Homomorphismen, dann folgt aus a. und b., dass sie bijektiv sind. Entsprechend ist  $\tau := f^{-1} \circ g$  ein Isomorphismus  $T \rightarrow T$ , d.h.  $g = f \circ \tau$  unterscheidet sich von  $f$  durch Multiplikation mit einem Isomorphismus.

d. Ist nun  $f \in \text{End}_{\mathbb{C}G}(T)$  beliebig, so gibt es einen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$  von  $f$ . Hier benutzen wir, dass  $T$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{C}$ -Vektorraum ist. Also ist  $f - \lambda \text{id}_T$  ein Endomorphismus, der einen nichttrivialen Kern hat. Der Kern ist, wie wir bereits festgestellt haben, eine Unterdarstellung von  $T$ . Die einzige nichttriviale Unterdarstellung ist  $T$  selbst. Also muss  $f - \lambda \text{id} = 0$  sein, d.h.  $f$  ist ein Vielfaches der Identität.  $\square$

**5.4:** In d. ist es ganz wesentlich, dass wir mit dem Körper der komplexen Zahlen arbeiten. Es ist in der allgemeinen Situation immer noch korrekt, dass  $E := \text{End}_{\mathbb{K}G}(V)$  ausschließlich aus Null und invertierbaren Abbildungen besteht, dass  $E$  also ein Schiefkörper ist (d.h. so wie ein Körper, nur dass Kommutativität der Multiplikation nicht

---

<sup>11</sup>Issai Schur (1875–1941), russisch-deutsch-israelischer Mathematiker

gelten muss), aber ohne die Eigenschaft, algebraisch abgeschlossen zu sein, kann es (und wird es) Darstellungen geben, für die  $E$  nicht  $\mathbb{K}$  selbst, sondern ein größerer Schiefkörper, ist.

Beispielsweise gibt es über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  drei endlich-dimensionale Schiefkörper:  $\mathbb{R}$  selbst,  $\mathbb{C}$  sowie die Quaternionen  $\mathbb{H}$ . Entsprechend finden sich auch Gruppen  $G$ , die irreduzible Darstellungen  $T$  mit  $\dim_{\mathbb{R}} \text{End}_{\mathbb{R}G}(T) = 2$  oder  $= 4$  besitzen.

Die Gruppen  $G = O_3$  und  $G = O_2$ , die uns vor allem interessieren, haben interessanterweise keine solche Darstellungen. Die Gruppe der zweidimensionalen Drehungen  $G = SO_2$  zeigt aber tatsächlich dieses Phänomen; sogar haben *alle* bis auf eine irreduzible reelle Darstellung von  $SO_2$  einen zweidimensionalen Endomorphismenraum.

### 5.5 Satz (Satz von Maschke):

Ist  $G$  eine kompakte Gruppe und  $T$  eine stetige, endlich-dimensionale Darstellung von  $G$ , dann ist  $T$  *halbeinfach*, d.h.  $T$  ist die direkte Summe von einigen seiner einfachen Unterdarstellungen:

- a.) Es gibt irreduzible Unterdarstellungen  $T_i$  mit  $T = T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_k$ .

Speziell für unseren Fall  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  ist es sinnvoll, von Skalarprodukten auf  $T$  zu sprechen. Dann gelten folgende zusätzliche Aussagen:

- b.) Es gibt ein  $G$ -invariantes Skalarprodukt, d.h. eines, dass  $\forall g \in G, v, w \in T : \langle gv, gw \rangle = \langle v, w \rangle$  erfüllt. Äquivalent formuliert: Die Darstellung  $\mathcal{D} : G \rightarrow GL(T)$  ist in Wirklichkeit eine Darstellung  $G \rightarrow O(T)$  (bzw.  $U(T)$  im komplexen Fall).
- c.) Ist ein  $G$ -invariantes Skalarprodukt gegeben, kann man die Zerlegung in a. sogar so wählen, dass die Summanden paarweise senkrecht aufeinander stehen. Unterdarstellungen, die nicht zueinander isomorph sind, sind sogar bzgl. *jedem*  $G$ -invarianten Skalarprodukt senkrecht aufeinander.

*Beweis.* a. gilt allgemein für alle Körper  $\mathbb{K}$ , aber wir zeigen nur den reellen/komplexen Fall. Dazu beginnen wir mit b.: Zunächst gibt es überhaupt ein Skalarprodukt  $[\cdot, \cdot] : T \times T \rightarrow \mathbb{K}$ . Mit Hilfe des Mittelwerttricks können wir daraus ein  $G$ -invariantes Skalarprodukt zaubern:

$$\langle v, w \rangle := \int_G [gv, gw] dg$$

Für jedes feste  $g$  ist  $(v, w) \mapsto [gv, gw]$  selbst ein Skalarprodukt. Der Mittelwert  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist also auch ein Skalarprodukt, weil es ein Grenzwert von (reellen, nicht-negativen) Linearkombinationen von Skalarprodukten ist. Nach Konstruktion ist es auch  $G$ -invariant.

Daraus folgt nun a., denn wenn wir eine Unterdarstellung  $U \leq T$  haben, dann ist das orthogonale Komplement (bzgl.  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ) auch eine Unterdarstellung von  $T$  und wir haben eine Zerlegung  $T = U \oplus U^\perp$ . Jetzt zerlegen wir  $U$  und  $U^\perp$  so lange weiter, bis wir nicht weiter zerlegen können (es gibt ein Ende, weil  $T$  endlich-dimensional ist), weil es keine nichttrivialen, echten Untermoduln mehr gibt, d.h. bis wir bei irreduziblen Summanden angekommen sind.

c. folgt aus dem Lemma von Schur: Wenn ein beliebiges  $G$ -invariantes Skalarprodukt und  $U, U' \leq T$  zwei irreduzible Unterdarstellungen sind, dann können wir die orthogonale Projektion bzgl.  $\langle, \rangle$  auf  $U$  betrachten und auf  $U'$  einschränken. Damit erhalten wir eine  $\mathbb{K}G$ -lineare Abbildung  $U' \rightarrow U$ . Wenn  $U$  und  $U'$  nicht isomorph sind, dann kann es keine bijektive  $\mathbb{K}G$ -lineare Abbildung zwischen ihnen geben und laut dem Lemma von Schur ist die einzige andere Möglichkeit die Nullabbildung, d.h.  $U$  und  $U'$  sind senkrecht bzgl.  $\langle, \rangle$ .  $\square$

**5.6:** Der Satz von Maschke ist falsch für beliebige Gruppen und beliebige Darstellungen. Selbst sehr einfache, nichtkompakte Gruppen erfüllen ihn nicht, selbst für sehr einfach gestrickte Darstellungen. Schon  $G = \mathbb{Z}$  ist ein Gegenbeispiel.

Und selbst, wenn die Gruppe kompakt ist, müssen unstetige oder unendlich-dimensionale Darstellungen ihn nicht erfüllen.

**5.7 Korollar** (Umkehrung des Satzes von Schur):

Ist  $T$  eine endlich-dimensionale, stetige Darstellung der kompakten Gruppe  $G$  über  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , dann gilt:  $\dim_{\mathbb{K}} \text{End}_{\mathbb{K}G}(T) = 1 \implies T$  ist irreduzibel.

*Beweis.* Die Voraussetzungen erlauben es uns, auf  $T$  den Satz von Maschke anzuwenden, d.h.  $T = T_1 \oplus T_2 \oplus \dots$  zu zerlegen. Wenn  $T$  nicht selbst irreduzibel wäre, dann gäbe es mindestens zwei solche Summanden und die beiden Projektionen  $(v_1, v_2, \dots) \mapsto (v_1, 0, \dots)$  bzw.  $(v_1, v_2, \dots) \mapsto (0, v_2, \dots)$  wären zwei lineare unabhängige  $\mathbb{K}G$ -lineare Abbildungen  $T \rightarrow T$  und somit ein Widerspruch zur Annahme  $\dim_{\mathbb{K}} \text{End}_{\mathbb{K}G}(T) = 1$ .  $\square$

**5.8:** Der Satz von Maschke sagt uns, dass wir jede Darstellung bis auf Isomorphie festlegen können, indem wir angeben, wie oft welche irreduzible Darstellung als direkter Summand in  $T$  vorkommt. Ein fundamentales Problem das Studium einer (oder aller) Darstellungen ist deshalb erstens die Frage, welche irreduziblen Darstellungen die jeweilige Gruppe überhaupt besitzt. Je nach Gruppe ist das ein mehr oder weniger schwieriges Problem. Und zweitens stellt sich die Frage, wie man die Vielfachheiten der irreduziblen Summanden in einer gegebenen Darstellung bestimmt.

Beide Fragen stellen sich als erstaunlich zugänglich heraus, wenn man Charaktertheorie kennt.

## 5.1 Einige irreduzible Darstellungen von Isometriegruppen

**5.9:** Wir sind immer noch daran interessiert, die Darstellungen von  $O_2$  und  $O_3$  zu verstehen, und, wie wir eben gelernt haben, ist ein Wesentlicher Teil dieses Vorhabens die Aufgabe, die irreduziblen Darstellungen dieser Gruppen zu finden.

In Aufgabe 3.9 haben wir gelernt, dass die kanonische Darstellung von  $O_3$  irreduzibel ist. Wir wissen, dass jede Gruppe eine triviale Darstellung hat, die auch immer irreduzibel ist. Aber welche gibt es noch? In Aufgabe 5.4 wurde gezeigt, dass es keine ein- oder zwei-dimensionalen Kandidaten gibt.

**5.10 Definition** (Spurfreie Tensoren):

Die Tensoren im Kern der Spur  $\text{tr}_{i,j} : \text{Sym}^m(V) \rightarrow \text{Sym}^{m-2}(V)$  werden spurfreie Tensoren genannt. Der Raum der symmetrischen, spurfreien Tensoren bezeichnen wir mit  $STF^m$  („symmetric trace-free“).

**5.11 Lemma:**

Die spurfreien symmetrischen Tensoren sind eine  $O_n$ -Unterdarstellung von  $V^{\otimes m}$ .

**5.12 Lemma:**

Der Isomorphismus zwischen symmetrischen Tensoren und polynomiellen Abbildungen übersetzt...

- a.) ...die Spur in den Laplace-Operator
- b.) ...die spurfreien symmetrischen Tensoren in harmonische Polynome.

**5.13 Satz** (Zerlegung der symmetrischen Tensoren in irreduzible Unterdarstellungen): a.)

Die Darstellungen  $STF^m(V)$  sind paarweise nicht isomorph und irreduzibel.

- b.) Mit der Projektion  $q$  auf die symmetrischen Tensoren gilt:

$$\text{Sym}^m(V) \cong STF^m(V) \oplus STF^{m-2}(V) \oplus STF^{m-4}(V) \oplus \dots$$

*Beweis.* a. Wir betrachten die Möglichkeiten für  $O_n$ -lineare Abbildungen  $f : STF^m(V) \rightarrow STF^k(V)$ . Indem wir vorher die orthogonale Projektion auf  $STF^m(V)$  anwenden und hinterher die Einbettung  $STF^k(V) \rightarrow V^{\otimes k}$  können wir  $f$  als Einschränkung einer  $O_n$ -lineare Abbildung  $V^{\otimes m} \rightarrow V^{\otimes k}$  auffassen. Und wir wissen, wie solche Abbildungen aussehen. Was tun also die Brauer-Diagramme eingeschränkt auf  $STF^m(V)$ ? Wenn auch nur eine Spur vorkommt, ist die Abbildung null, weil  $STF^m$  ja der Kern der Spur(en) ist.

Insbesondere muss also  $m \leq k$  sein, damit es überhaupt Brauer-Diagramme geben kann, die auf  $STF^m(V)$  nicht Null sind. Gäbe es eine von Null verschiedene  $O_n$ -lineare Abbildung  $STF^m \rightarrow STF^k$ , so müssten die beiden Darstellungen mindestens einen isomorphen irreduziblen Summanden haben. Die Umkehrabbildung auf diesem liefert eine von Null verschiedene  $O_n$ -lineare Abbildung in die andere Richtung; es müsste also mit dem gleichen Argument auch  $m \geq k$  sein.

Die Darstellungen sind also insbesondere paarweise nicht-isomorph. Wie viele Freiheitsgrade haben wir, um eine  $O_n$ -lineare Abbildung  $STF^m \rightarrow STF^m$  festzulegen? Wir wissen, dass in Brauer-Diagrammen, die nicht die Null-Abbildung sind, keine Spuren vorkommen können. Weil  $m = k$  ist, können also auch keine Casimir-Element-Einfügungen vorkommen; es muss sich um Permutationen handeln. Aber  $STF^m \subseteq \text{Sym}^m$ , d.h. alle Permutationsabbildungen sind dieselbe Abbildung auch  $STF^m$ . Das heißt, es gibt höchstens einen Freiheitsgrad. Aus der Umkehrung des Lemmas von Schur folgern wir, dass  $STF^m$  irreduzibel sein muss.

b. Die Spur  $Sym^m(V) \rightarrow Sym^{m-2}(V)$  ist eine surjektive,  $O_n$ -lineare Abbildung mit Kern  $STF^m$ . Das liefert uns einen Isomorphismus zwischen dem orthogonalen Komplement von  $STF^m$  und  $Sym^{m-2}(V)$ , und somit  $Sym^m(V) \cong STF^m(V) \oplus Sym^{m-2}(V)$ , woraus induktiv die Behauptung folgt.  $\square$



## Aufgaben

### Aufgabe 5.1. – Satz von Schur über Körpern $\neq \mathbb{C}$

In 3.8 wurde gezeigt, dass die kanonische Darstellung  $V = \mathbb{R}^2$  von  $G = SO_2$  irreduzibel ist. Zeige, dass  $\text{End}_{\mathbb{R}G}(V)$  2-dimensional ist.

### Aufgabe 5.2. – Der Satz von Maschke ist falsch für nichtkompakte Gruppen (leichter als es aussieht)

Zeige, dass nicht jede endlich-dimensionale Darstellung von  $G = \mathbb{Z}$  in irreduzible Unterdarstellungen zerlegt werden kann.

Hinweis: Das ist eine leicht getarnte Aussage, die bereits aus der LA-I-Vorlesung bekannt ist.

### Aufgabe 5.3.

Es sei  $V = V_1^{\oplus m_1} \oplus V_2^{\oplus m_2} \oplus \dots \oplus V_k^{\oplus m_k}$  eine Darstellung von  $G$ , wobei die  $V_i$  paarweise nicht-isomorphe, irreduzible Unterdarstellungen seien. Zeige, dass

$$\dim \text{End}_{\mathbb{K}G}(V) = m_1^2 + m_2^2 + \dots + m_k^2$$

gilt.

### Aufgabe 5.4.

Zeige, dass die einzigen reellen oder komplexen Darstellungen von  $G = SO_3$  von Dimension  $< 3$  trivial sind.

Hinweis: Verwende, dass laut Satz von Maschke die Darstellung  $\Delta : G \rightarrow SO(V)$  gewählt werden kann.

### Aufgabe 5.5.

Wir wissen, dass sich der Raum der symmetrischen Tensoren in irreduzible zerlegt wie folgt:

$$\text{Sym}^m(V) \cong STF^m(V) \oplus STF^{m-2}(V) \oplus STF^{m-4}(V) \oplus \dots$$

Und wir wissen, dass  $\text{Sym}^m(V)$  zum Raum der homogenen Polynome vom Grad  $m$  isomorph ist. Also zerlegt sich diese Darstellung ganz genauso. Wir wollen den Isomorphismus explizit beschreiben.

- a.) Erinnerung: Der Polynom-Tensor-Isomorphismus identifiziert  $STF^m(V)$  mit dem Unterraum der *harmonischen*, homogenen Polynome vom Grad  $m$ .  
Finde Unterdarstellungen vom Polynomraum vom Grad  $m$ , die zum Raum der harmonischen Polynome vom Grad  $m - 2k$  isomorph sind.
- b.) Benutze den Polynom-Tensor-Isomorphismus in der anderen Richtung um die entsprechenden Unterdarstellung von  $\text{Sym}^m(V)$  zu finden, die zu  $STF^{m-2k}(V)$  isomorph sind.

## 6 Darstellungstheorie – Level 2

### 6.1 Definition (Charaktere):

Es sei  $G$  eine Gruppe und  $\mathcal{D} : G \rightarrow GL(T)$  eine endlichdimensionale Darstellung von  $G$  über  $\mathbb{K}$ . Der Charakter von  $T$  ist die Abbildung

$$\chi_T : G \rightarrow \mathbb{K}, g \mapsto \text{tr}(\mathcal{D}(g))$$

Ist  $D : G \rightarrow GL_n(\mathbb{K})$  eine Matrixdarstellung von  $\mathcal{D}$  bzgl. irgendeiner Basis, so ist  $\chi_T(g)$  also auch gleich der Spur der Matrix  $D(g)$ .

Ist  $T$  eine irreduzible Darstellung, so nennt man  $\chi_T$  irreduziblen Charakter.

**6.2:** Man beachte, dass die Spur einer Matrix unabhängig von der Basiswahl ist. Man erinnere sich, dass allgemein

$$\forall A, B \in \mathbb{K}^{n \times n} : \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

gilt, für invertierbare  $A$  also auch  $\text{tr}(ABA^{-1}) = \text{tr}(B)$ .

Oder basisfrei formuliert: Für alle  $\mathbb{K}$ -linearen Abbildungen  $\phi : X \rightleftharpoons Y : \psi$  zwischen endlichdimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen gilt  $\text{tr}(\phi \circ \psi) = \text{tr}(\psi \circ \phi)$ , für invertierbare  $\phi$  also auch  $\text{tr}(\phi \circ \psi \circ \phi^{-1}) = \text{tr}(\psi)$ .

### 6.3 Lemma:

Charaktere erfüllen:

- a.) Charaktere unterscheiden nicht zwischen isomorphen Darstellungen:  $T \cong T' \implies \chi_T = \chi_{T'}$ .
- b.) Charaktere unterscheiden nicht zwischen konjugierten Elementen: Sind  $g, g' \in G$  konjugiert, d.h. existiert ein  $h \in G$  mit  $g' = hgh^{-1}$ , so gilt  $\chi_T(g) = \chi_T(g')$ .

*Beweis.* Beide Aussagen folgen aus dieser Eigenschaft der Spur: Ist  $\phi : T \rightarrow T'$  ein Isomorphismus, dann ist  $\mathcal{D}'(g) = \phi \circ \mathcal{D}(g) \circ \phi^{-1}$  und somit  $\text{tr}(\mathcal{D}(g)) = \text{tr}(\mathcal{D}'(g))$ . Sind  $g, g'$  konjugiert, so ist  $\mathcal{D}(g') = \mathcal{D}(h)\mathcal{D}(g)\mathcal{D}(h)^{-1}$  und somit  $\text{tr}(\mathcal{D}(g)) = \text{tr}(\mathcal{D}(g'))$ .  $\square$

**6.4:** Es scheint, als ob Charaktere viel Information über ihre Darstellung verlieren würden, wenn sie die ganze Abbildung  $\mathcal{D}(g)$  auf eine einzelne Zahl reduzieren und dann auch noch sehr viele Gruppenelemente dieselbe Zahl zugeordnet bekommen. Im allgemeinsten Fall ist das auch so.

Das große Wunder ist aber, dass im für uns interessanten Fall einer kompakten Gruppe und stetiger Darstellungen, nicht zu viel Information verloren geht, sondern Charaktere immer noch hinreichend viel enthalten, um ihre Darstellung vollständig bis auf Isomorphie zu beschreiben, d.h. in unserem Fall gilt die Umkehrung von a.

### 6.5 Satz (1.Orthogonalitätsrelation):

Es sei  $G$  eine kompakte Gruppe und  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Auf der Menge der stetigen Abbildungen  $G \rightarrow \mathbb{C}$  definieren wir die folgende Bilinearform:

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_G \phi(g)\psi(g^{-1}) \, dg$$

Speziell für Charaktere von stetigen Darstellungen gilt:

$$\langle \chi_T, \chi_{T'} \rangle = \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}G}(T, T')$$

Insbesondere gilt für irreduzible Charaktere:

$$\langle \chi_T, \chi_{T'} \rangle = \begin{cases} 0 & \text{falls } T \not\cong T' \\ \dim_{\mathbb{K}} \operatorname{End}_{\mathbb{K}G}(T) & \text{falls } T \cong T' \end{cases}$$

*Beweis.* Wir betrachten die beiden Darstellungen  $\mathcal{D}$  und  $\mathcal{D}'$  von  $T$  bzw.  $T'$  sowie die Darstellung  $X := \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(T, T')$ . Zur Erinnerung:  $G$  operiert auf  $X$  via  $g\phi := \mathcal{D}(g) \circ \phi \circ \mathcal{D}'(g)^{-1}$ , d.h.  $g\phi$  ist die Abbildung  $t \mapsto g \cdot \phi(g^{-1} \cdot t)$ . Anhand dieser Definition ist klar, dass der Raum der  $G$ -Fixpunkte von  $X$  genau der Raum der  $\mathbb{K}G$ -linearen Abbildungen ist.

Wir wenden also wieder einmal den Mittelwerttrick an: Die Projektion auf den Fixpunkt-raum ist gegeben durch

$$pr(\phi) := \int_G g \circ \phi \circ g^{-1} dg$$

Wenn wir nun die Dimension des Fixpunkttraums bestimmen wollen, können wir die Spur der Projektion ausrechnen. Weil (konstante)  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildungen mit dem Integral vertauschen, erhalten wir also

$$\dim_{\mathbb{K}} \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}G}(T, T') = \operatorname{tr}(pr) = \operatorname{tr} \left( \phi \mapsto \int_G g \circ \phi \circ g^{-1} dg \right) = \int_G \operatorname{tr}(\phi \mapsto g \circ \phi \circ g^{-1}) dg$$

Es ist eine Standardaufgabe aus der linearen Algebra, zu beweisen, dass die Abbildung  $\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(T, T') \rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(T, T'), \phi \mapsto \alpha \circ \phi \circ \beta$  genau die Spur  $\operatorname{tr}(\alpha) \operatorname{tr}(\beta)$  hat. Also ist der Integrand gleich  $\chi_T(g) \chi_{T'}(g^{-1})$  und das zeigt die Behauptung.  $\square$

**6.6 (Diverse Charakterformeln):** Für sehr viele Standardkonstruktionen ist es möglich, explizit anzugeben, wie sie sich mit Charakteren vertragen:

- a.)  $\chi_{T \oplus T'} = \chi_T + \chi_{T'}$
- b.)  $\chi_{T \otimes T'} = \chi_T \cdot \chi_{T'}$
- c.)  $\chi_{T^*} = \overline{\chi_T}$
- d.) Es gibt explizite, aber relativ aufwändige kombinatorische Formeln, die z.B. die Charaktere der symmetrischen Potenzen  $\operatorname{Sym}^m(T)$  durch  $\chi_T$  ausdrücken.
- e.) uvm.

### 6.7 Korollar:

Ist  $G$  eine kompakte Gruppe und  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , so gilt für stetige, endlich-dimensionale Darstellungen:

$$\chi_T = \chi_{T'} \iff T \cong T'$$

*Beweis.* Aufgrund des Satzes von Maschke genügt es, zu zeigen, dass  $T$  und  $T'$  isomorphe irreduzible Darstellungen in den gleichen Vielfachheiten enthalten.

Wenn also  $T \cong T_1^{\oplus n_1} \oplus \dots \oplus T_k^{\oplus n_k}$  und  $T' \cong T_1^{\oplus n'_1} \oplus \dots \oplus T_k^{\oplus n'_k}$  mit paarweise nicht-isomorphen, irreduziblen Darstellungen  $T_i$  ist, dann wollen wir  $n_i = n'_i$  zeigen. Die Charaktere erfüllen

$$\chi_T = n_1\chi_{T_1} + \dots + n_k\chi_{T_k} \quad \text{bzw.} \quad \chi_{T'} = n'_1\chi_{T_1} + \dots + n'_k\chi_{T_k}$$

Die Orthogonalitätsrelation zeigt, dass die  $\chi_{T_i}$  paarweise orthogonal bzgl. der dort definierten Bilinearform sind. Also gilt

$$n_i = \frac{\langle \chi_T, \chi_{T_i} \rangle}{\dim_{\mathbb{K}} \text{End}_{\mathbb{K}G}(T_i)} = \frac{\langle \chi_{T'}, \chi_{T_i} \rangle}{\dim_{\mathbb{K}} \text{End}_{\mathbb{K}G}(T_i)} = n'_i$$

und das wollten wir zeigen. □

## 7 Darstellungstheorie von $O_2$

**7.1:** Ein kurioser Fakt über  $O_2$  und  $SO_2$  ist, dass man diese Gruppe durch Matrizen basisfrei beschreiben kann:

$$O_2 = \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}}_{=SO_2} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Etwas genauer: Eine ebene Drehung hat bzgl. *jeder* Orthonormalbasis der Ebene eine Matrix der Form  $\rho_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ ; es kann sich der Winkel  $\alpha$  in  $-\alpha$  ändern, wenn der Basiswechsel nicht orientierungserhaltend ist, aber das war's auch schon.

Eine Spiegelung ist immer von der Form  $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$ ; dabei ist der Winkel  $\alpha$  aber von der Basiswahl abhängig, denn in diesem Fall legt  $\alpha$  fest, wie die Gerade, an der gespiegelt wird, im Vergleich zur Basis orientiert ist. (Man beachte aber, dass für uns wichtige Informationen wie die Spur der Matrix unabhängig von  $\alpha$  sind)

**7.2 Satz** (Darstellungstheorie von kommutativen Gruppen):

Es sei  $G$  eine kompakte, *kommutative* Gruppe. Dann ist jede stetige, irreduzible, endlich-dimensionale Darstellung über  $\mathbb{C}$  eindimensional.

*Beweis.* Im Satz von Maschke 5.5 haben wir gezeigt, dass man die Darstellung  $\mathcal{D} : G \rightarrow GL(T)$  so wählen kann, dass sie ein Skalarprodukt invariant lässt, also jedes  $\mathcal{D}(g)$  eine *unitäre* Abbildung  $T \rightarrow T$  ist.

Unitäre Abbildungen sind diagonalisierbar (siehe Aufgabe 1.3.b.)). Da die Gruppe  $G$  kommutativ ist, kommutieren die Abbildungen  $\mathcal{D}(g)$  natürlich auch miteinander. Es ist ein Fakt der linearen Algebra (und keine schwere Übungsaufgabe, siehe Aufgabe 1.1), dass man kommutierende, diagonalisierbare Abbildungen auch *simultan* diagonalisieren kann, d.h. man kann eine Basis  $b_1, \dots, b_n$  von  $T$  aus *gemeinsamen* Eigenvektoren finden, sodass also

$$\forall g : g \cdot b_i = \lambda_i(g) b_i$$

gilt für geeignete Funktionen  $\lambda_i : G \rightarrow \mathbb{C}$ . Insbesondere sind die eindimensionalen Unterräume  $\mathbb{C}b_i$  Unterdarstellungen von  $T$ . Alle mindestens zwei-dimensionalen Darstellungen sind mit anderen Worten reduzibel.  $\square$

**7.3:** Es gilt auch die Umkehrung: Besitzt eine kompakte Gruppe nur eindimensionale irreduzible Darstellungen, dann ist sie kommutativ.

**7.4:** Fourieranalyse basiert wesentlich auf dieser Aussage. Die verschiedenen Formen der Fourieranalyse haben alle das gleiche zugrunde liegende Prinzip: Die Zerlegung von (meist unendlich-dimensionalen) Darstellungen einer kommutativen Gruppe in ihre eindimensionalen, irreduziblen Bestandteile. Die geschieht, indem man eine Basis so wählt, dass aus diesen eindimensionalen Untervektorräumen je ein Vektor Teil der Basis ist. Der Unterschied zwischen den verschiedenen Arten von Fouriertransformation ist, welches die dahinter stehende Gruppe ist:

- Die diskrete Fouriertransformation (inkl. FFT) ist die Darstellungstheorie der zyklischen Gruppen  $C_n = \{ \exp(\frac{2\pi ki}{n}) \mid k = 0, \dots, n-1 \}$ .
- Die Fouriertransformation periodischer Funktionen (=Fourierreihe) ist die Darstellungstheorie der Kreisgruppe  $S^1 = \{ \exp(i\alpha) \mid \alpha \in [0, 2\pi) \}$  (welche zu  $SO_2$  isomorph ist)
- Die kontinuierliche Fouriertransformation ist die Darstellungstheorie der reellen Gerade  $\mathbb{R}$ . ( $\mathbb{R}$  ist nicht kompakt, aber lokalkompakt. Für solche Gruppen gibt es auch ein Haar-Integral)

Für eine beliebige, (lokal)kompakte kommutative Gruppe spricht man auch von Понтрягин<sup>12</sup>-Dualität.

### 7.5 Satz (Darstellungstheorie von $SO_2$ über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ):

Jede stetige, endlich-dimensionale, irreduzible Darstellung von  $G = SO_2$  über  $\mathbb{C}$  ist zu genau einer der Darstellungen

$$\mathcal{D}_k : \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \mapsto e^{ik\alpha}$$

für eine ganze Zahl  $k$  isomorph und diese Darstellungen sind paarweise nicht-isomorph.

*Beweis.* Dass die Darstellungen irreduzibel sind, ist klar, da sie eindimensional sind. Dass sie stetig sind, sieht man ihnen an. Dass sie paarweise nicht isomorph sind, kann man direkt überprüfen, oder man benutzt abstrakt, dass ihre Charaktere verschieden sind. Der nichttriviale Teil ist also zu zeigen, dass jede endlich-dimensionale, stetige, irreduzible Darstellung in dieser Liste vorkommt.  $SO_2$  ist kommutativ, also muss jede irreduzible Darstellung ein-dimensional sein, d.h. es handelt sich um eine stetige Abbildung  $\mathcal{D} : G \rightarrow \mathbb{C}$ . Betrachte die Rotationen um  $\alpha := \frac{2\pi}{n}$ . Dies sind Gruppenelemente mit  $\rho_\alpha^n = 1$ . Also muss auch  $\mathcal{D}(\rho_\alpha)^n = 1$  gelten, d.h.  $\mathcal{D}(\rho_\alpha) = \exp(\frac{2\pi ik}{n})$  für ein geeignetes  $k \in \mathbb{Z}$ . Ohne Stetigkeit könnte dieses  $k$  von  $n$  abhängig sein. Wir zeigen, dass es unabhängig von  $n$  ist, wenn  $\mathcal{D}$  stetig ist.

Es gilt natürlich auch  $\mathcal{D}(\rho_\alpha^m) = (\exp(\frac{2\pi ik}{n}))^m = \exp(\frac{2\pi i \cdot km}{n})$ , d.h. die  $n$  Elemente  $1 = \rho_\alpha^0, \rho_\alpha^1, \dots, \rho_\alpha^{n-1}$  erfüllen die Gleichung, die wir haben wollen, bereits. Welches  $k$  erhalten wir, wenn wir von  $n$  zu  $2n$  wechseln? Die Drehung um  $\alpha/2$  erfüllt  $\rho_{\alpha/2}^2 = \rho_\alpha$ , d.h.  $\mathcal{D}(\rho_{\alpha/2})$  ist eine der beiden Quadratwurzeln von  $\mathcal{D}(\rho_\alpha) = \exp(\frac{2\pi ik}{n})$ , also entweder  $\exp(\frac{2\pi ik}{2n})$  oder  $\exp(\frac{2\pi i(k+n)}{2n})$ . Wenn  $n$  hinreichend groß ist, sind  $\rho_\alpha$  und  $\rho_{\alpha/2}$  aber nah beieinander, und die Stetigkeitsbedingung verlangt, dass auch  $\mathcal{D}(\rho_\alpha)$  und  $\mathcal{D}(\rho_{\alpha/2})$  beide nah beieinander sind, was  $k+n$  ausschließt, weil das auf der entgegengesetzten Seite des Einheitskreises liegt.

Per Induktion erfüllen also alle Drehungen um  $\frac{2\pi}{2^n}$  die Gleichung, die wir haben wollen. Jede Drehung kann durch diese beliebig genau approximiert werden. Aus der Stetigkeit folgt also, dass alle Drehungen die Gleichung erfüllen.  $\square$

<sup>12</sup>Lev Pontrjagin, Лев Семёнович Понтрягин (1908-1988), russ. Mathematiker

**7.6:** Wenn man den komplexen Fall einmal hat, kann man den reellen Fall daraus folgern.

**7.7 Korollar** (Darstellungstheorie von  $SO_2$  über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ):

Jede stetige, endlich-dimensionale, irreduzible Darstellung von  $G = SO_2$  über  $\mathbb{R}$  ist entweder die triviale Darstellung oder zu genau einer der Darstellungen

$$\mathcal{D}_k : \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(k\alpha) & -\sin(k\alpha) \\ \sin(k\alpha) & \cos(k\alpha) \end{pmatrix}$$

für eine natürliche Zahl  $k > 0$  isomorph und diese Darstellungen sind paarweise nicht-isomorph.

**7.8:** Wenn man nun die Spiegelungen hinzunimmt, ist die Gruppe nicht länger kommutativ. Eine wichtige Beobachtung ist, dass in  $O_2$  die Drehung um  $\alpha$  und die Drehung um  $-\alpha$  zueinander konjugiert sind. Wenn wir Darstellungen also in Termen von Charakteren klassifizieren wollten, dann halten wir fest, dass Charaktere von  $O_2$  nicht zwischen diesen beiden unterscheidet.

Andererseits können wir natürlich jede  $O_2$ -Darstellung auf  $SO_2$  einschränken und in irreduzible Bestandteile bzgl.  $SO_2$  zerlegen, deren Charaktere wir jetzt kennen. Der Wert  $\chi_T(\rho_\alpha)$  muss also eine Summe von Exponentialfunktionen sein. Welche solche Summen unterscheiden nicht zwischen  $\alpha$  und  $-\alpha$ ?  $2\cos(\alpha) = e^{i\alpha k} + e^{-i\alpha k}$  und Kombinationen davon.

Weil  $O_2$  nur einen „Faktor 2 entfernt“ von  $SO_2$  ist (z.B. bzgl. Volumen, aber auch im etwas technischen gruppentheoretischen Sinne  $O_2/SO_2 \cong C_2$ ), liegt die Vermutung nahe, dass diese einfachen Kombinationen schon die Charaktere von  $O_2$  sind.

**7.9 Satz** (Darstellungstheorie von  $O_2$ ):

Jede stetige, endlich-dimensionale, irreduzible Darstellung von  $O_2$  über  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  ist entweder die triviale Darstellung oder zu genau einer der Darstellungen

$$\mathcal{D}_k : \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \mp \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \pm \cos(\alpha) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(k\alpha) & \mp \sin(k\alpha) \\ \sin(k\alpha) & \pm \cos(k\alpha) \end{pmatrix}$$

für eine natürliche Zahl  $k > 0$  isomorph und diese Darstellungen sind paarweise nicht-isomorph. In der Tat ist  $\mathcal{D}_k$  isomorph zur Darstellung  $STF^k$ .

*Beweis.* Man kann von Hand nachprüfen, dass diese Definitionen tatsächlich Darstellungen sind. Indem wir die Spur bilden, können wir den Charakter bestimmen: Für Drehungen um  $\pm\alpha$  ist  $\chi_k(\rho_\alpha) = 2\cos(k\alpha)$  und für Spiegelungen ist  $\chi_k() = 0$ . Wir zeigen die Irreduzibilität, indem wir die Bilinearform auf Charakteren anwenden und  $\langle \chi_k, \chi \rangle$  für einen beliebigen Charakter  $\chi$  von  $O_2$  ausrechnen:

$$\begin{aligned} \langle \chi_k, \chi \rangle_{O_2} &= \frac{1}{2} \int_{SO_2} \chi_k(g) \chi_k(g^{-1}) dg + \frac{1}{2} \int_{SO_2} \underbrace{\chi_k(hg)}_{=0} \chi((hg)^{-1}) dg && \text{für } h \in O_2 \setminus SO_2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{SO_2} \chi_k(g) \chi(g^{-1}) d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \langle (\chi_k)|_{SO_2}, (\chi)|_{SO_2} \rangle_{SO_2} \end{aligned}$$

Speziell für  $\chi = \chi_k$  also:

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \langle e^{ik\alpha} + e^{-ik\alpha}, e^{ik\alpha} + e^{-ik\alpha} \rangle_{SO_2} \\ &= \frac{1}{2} (1^2 + 1^2) \end{aligned} \quad \text{Orthogonalitätsrelation}$$

Also sind die  $\chi_k$  tatsächlich irreduzible Charaktere von  $O_2$  nach 5.7. Unsere Behauptung ist u.A., dass es keine weiteren irreduziblen Charaktere von  $O_2$  gibt. Wir haben schon festgestellt, dass in  $O_2$  die Charakterwerte eingeschränkt auf  $SO_2$  immer Summen von  $2\cos(k\alpha)$  sein müssen. Diese werden aber schon alle mittels  $\chi_k$  realisiert, d.h.  $\chi$  kann nicht senkrecht auf allen  $\chi_k$  stehen, da in  $\chi_{SO_2}$  ja irgendwelche  $2\cos(k\alpha)$  mit positivem Koeffizienten vorkommen müssen, wenn  $\chi \neq 0$ . Also kann  $\chi$  insbesondere nicht ein uns noch unbekannter irreduzibler Charakter sein, denn der müsste ja auf allen schon bekannten Charakteren senkrecht stehen.

Damit ist also insbesondere gezeigt, dass die Darstellungen  $STF^k$ , die wir schon vor der Charaktertheorie als irreduzibel erkannt hatten, irgendwo in dieser Liste vorkommen müssen. Wir nutzen aus, dass  $STF^k$  zum Raum der homogenen, harmonischen Polynome in zwei Variablen vom Grad  $k$  isomorph ist.

Für Polynome in zwei Variablen kann man zufällig explizit die harmonischen hinschreiben: Es sind genau die Real- und Imaginärteile der Polynome in einer komplexen Variable. In Grad  $k$  haben wir also  $\Re((x + iy)^k)$  und  $\Im((x + iy)^k)$  als Basis des Raums der harmonischen Polynome vom Grad  $k$ . Auf  $\mathbb{R}^2$ , also der komplexen Ebene operiert  $SO_2$  durch einfache Drehung, also Multiplikation mit  $e^{i\alpha}$ . Im Polynomraum wird also insbesondere  $z^k$  auf  $e^{ik\alpha} z^k$  abgebildet, d.h. auf den Grad- $k$ -Polynomen operiert  $SO_2$  durch  $k$ -fache Drehung, also muss es die irreduzible Darstellung  $\mathcal{D}_k$  sein.  $\square$



## 8 Darstellungstheorie von $O_3$

## 9 Warum Spherical Harmonics?

Auch wenn wir eingangs in unserem Kurs so sehr über Basen geschimpft haben<sup>13</sup>, so ist uns natürlich bewusst, dass gerade für effiziente Berechnungen eine Basis praktisch immer gewählt wird. Welche Basis man wählt, ist dabei von großer Bedeutung: Andrea hat in ihrer Doktor-Arbeit eine bestimmte Berechnung, welche z.B. zur Modellierung von Luftbewegung millionenfach wiederholt genutzt werden soll, um den Faktor 1000 verschnellern können, und das nur durch geschickte Basiswahl.

**9.1:** Am besten wählt man eine Basis, die möglichst gut an das gegebene Problem angepasst ist, doch was genau heißt das? Für die Auswahl an Problemen in diesem Kurs haben wir festgelegt, dass es sich um Probleme in unserer physikalischen Welt handeln soll. Wir haben uns bereits angeschaut, wie sich diese Einschränkung mathematisch äußert: Alles was wir messen wollen, muss natürlich, also  $O_3$ -verträglich sein. Wir haben uns auch schon mit der Darstellungstheorie von  $O_3$  und einigen ihrer Untergruppen beschäftigt und festgestellt, dass  $O_3$  den Raum der Polynome (oder äquivalent: den Raum der symmetrischen Tensoren) in irreduzible Unterräume zerlegt.

**9.2:** Die irreduziblen Unterräume sind besonders: Wir haben bereits sehr gut verstanden, dass sie immer (also für jedes  $O_3$ -verträgliche Skalarprodukt) senkrecht zueinander stehen und dass lineare Abbildungen zwischen zwei irreduziblen Unterräumen entweder 0 oder ein Vielfaches der Identität sein können. Wenn man also eine lineare Wirkung berechnen möchte, erspart man sich durch die Zerlegung in irreduzible Unterräume einiges an Arbeit: Alles, was zu bestimmen ist, sind die Konstanten, mit der die Identität zwischen zwei zueinander isomorphen irreduziblen Unterräumen koppeln.

**9.3:** Im übrigen: Für bilineare Abbildungen ist es etwas komplizierter, aber die grundsätzliche Aussage bleibt bestehen: Alle Abbildungen sind entweder 0 oder Vielfache einer Identität (auch dann wenn die Identität etwas komplizierter zu berechnen ist).

**9.4:** All dies legt nahe, dass eine Basiswahl, die an die irreduziblen Unterräume angepasst ist, praktisch immer eine gute Idee ist. Jetzt sind diese irreduziblen Unterräume aber allermeistens nicht ein-dimensional, wie sucht man sich nun eine möglichst kanonische Basis aus?

**9.5:** Hinzu kommt, dass die irreduziblen Unterräume zwar für ganz  $O_3$  irreduzibel sind, aber es gibt einige Probleme in der Physik, die eher einer Einbettung von  $O_2$  in  $O_3$  gleichen, z.B. (Teilchen-) Kollision an einer Wand, eine ausgezeichnete Richtung haben, z.B. die Bewegung von geladenen Teilchen durch einen Kondensator, oder rotierende Systeme beschreiben (Einbettung von  $SO_2$  in  $O_3$ ).

**9.6:** Idealerweise ist unsere Basis auch für solche Fälle ausgelegt. Es stellt sich heraus, dass beide Probleme gleichzeitig gelöst werden können.

---

<sup>13</sup>Wir wollen keine Namen nennen, aber Johannes war besonders hartnäckig...

**9.7 Definition** (Konstruktion der Гельфанд-Цетлин-Базы (Gelfand<sup>14</sup>-Zetlin<sup>15</sup>-Basis): Sei  $G$  eine Gruppe mit halb-einfacher Darstellung auf einem Vektorraum  $V$  und  $U_0^i$  einer der irreduziblen Unterräume von  $V$ . Für diesen Unterraum wird dessen Gelfand-Zetlin-Basis wie folgt konstruiert:

- 1.) Setze das Level  $l = 0, H_0 = G$
- 2.) Bestimme für jeden Unterraum  $U_l^i$ :
  - i.) Berechne  $\dim U_l^i$
  - ii.) Ist  $U_l^i$  1-dimensional? Dann wähle einen Vektor aus  $U_l^i$  als einen der Basisvektoren von  $U_0^1$ .
  - iii.) Ist  $U_l^i > 1$ -dimensional? Dann merke dir  $U_l^i$  für den nächsten Schritt.
- 3.) Wähle geschickt eine möglichst große Untergruppe  $H_{l+1}$  von  $H_l$ , sodass jeder Unterraum  $U_l^i$  mit  $\dim U_l^i > 1$  in für  $H_{l+1}$  irreduzible Unterräume zerfällt. Dabei müssen alle Unterräume, die von einem gemeinsamen  $U_l^i$  stammen, paarweise nicht isomorph sein (Klappt dies nicht, ist entweder eine andere Untergruppe zu finden, oder es gibt keine Gelfand-Zetlin-Basis).
- 4.) Nummeriere die Unterräume des nächst-höheren Levels: Nenne alle für  $H_{l+1}$  irreduziblen Unterräume  $U_{l+1}^1, \dots, U_{l+1}^k$ , inklusive der bereits für  $H_l$  1-dimensionalen Unterräume.
- 5.) Erhöhe das Level um 1:  $l + +$ .
- 6.) Wiederhole die Schritte 2.) bis 5.), bis alle Unterräume vom nächst-höheren Level 1-dimensional sind.
- 7.)  $l_{\max} = l$

**9.8:** Formal betrachtet, brauchen die 1-dimensionalen Untergruppen nicht für Schritt 3.) ausgeschlossen werden. Sie werden für jede Untergruppe 1-dimensional bleiben und sich nicht weiter ändern, entsprechend braucht man sie für die weiteren Schritte auch nicht zu berücksichtigen.

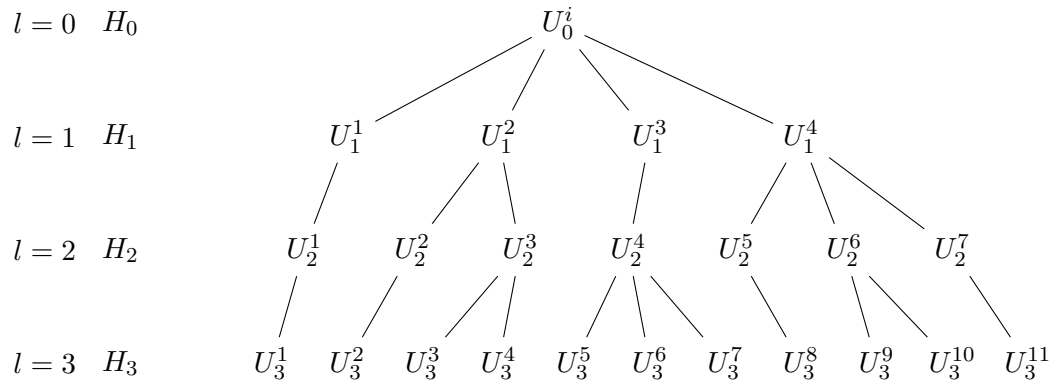
**9.9 Definition** (Гельфанд-Цетлин-Дерево (Gelfand-Zetlin-Baum)):

Mit der Konstruktion nach 9.7 bauen wir einen Baum mit  $l_{\max}$  Levels. Der Stammknoten ist  $U_0^i$ , die Blätter sind alle gefundenen 1-dimensionale Unterräume. Die Knoten zwischen dem Stammknoten und den Blättern entsprechen den irreduziblen Unterräumen der jeweiligen Level, die Kanten verbinden einen irreduziblen Unterraum  $U$  eines Levels mit allen irreduziblen Unterräumen des nächst-höheren Levels, die aus  $U$  im Schritt 3.) herauskommen. Eindimensionale Unterräume, die bereits in kleineren Levels auftreten,

<sup>14</sup>Israel Gelfand, Израиль Моисеевич Гельфанд (1913-2009), sovietischer Mathematiker

<sup>15</sup>Michael Zetlin, Михаил Львович Цетлин (1924-1966), russ. Mathematiker und Physiker

werden hier als Knoten auf jedem höheren Level wiederholt bis zum maximalen Level. Diesen Baum nennen wir Gelfand-Zetlin-Baum. Er kann z.B. wie folgt aussehen:



In einem Gelfand-Zetlin-Baum sind alle Darstellungen paarweise ungleich. Es kann aber auftreten, dass manche Darstellungen isomorph zueinander sind (wobei die Kinder eines Knotens niemals isomorph zueinander sein dürfen).

**9.10:** Die Wahl der Untergruppen-Kette  $H_1 \cdots H_{l_{\max}}$  ist hier spielentscheidend und keinesfalls eindeutig. Aus diesem Grund gehört zu einer vollständigen Anweisung „Wähle eine Gelfand-Zetlin-Basis für  $G$  auf  $V$ “ auch die Angabe der Untergruppenkette  $H_1 \cdots H_{l_{\max}}$ .

**9.11:** Auch wenn die Konstruktion einer Gelfand-Zetlin-Basis klappt, hat man nicht unbedingt etwas gewonnen. Wenn man dazu besonders exotische Untergruppen benutzen muss, bringt einem die Gelfand-Zetlin-Basis in der Anwendung nicht besonders viel. Eigentlich möchte man sich erst für eine Untergruppenkette  $H_0 \cdots H_{l_{\max}}$  entscheiden und dann schauen, ob die Konstruktion funktioniert.

**9.12 Definition** (Гельфанд-Цетлин-База):

Sei  $G$  eine Gruppe mit Darstellung auf einem Vektorraum  $V$  und  $G$  zerlege  $V$  in seine irreduziblen Unterräume  $U_0^1, \dots, U_0^k$ . Wähle außerdem eine Untergruppenkette  $H_1 \supseteq \cdots \supseteq H_{l_{\max}}$ . Für jeden dieser Unterräume wird nun einzeln eine Basis  $\mathcal{B}$  konstruiert nach 9.7.  $\mathcal{B}$  heißt dann Gelfand-Zetlin-Basis von der Darstellung  $V$  bezüglich  $H_1, \dots, H_{l_{\max}}$ .

**9.13:** Wie in 9.5 bereits angemerkt, sind wir insbesondere an der Darstellung von  $O_3$  auf dem Polynomraum und der Einbettung von  $O_2$ ,  $SO_2$  und  $O_1$  interessiert. Praktischerweise gilt  $O_3 \supseteq O_2 \supseteq SO_2 \supseteq O_1$  und somit bilden die Gruppen  $O_3, O_2, SO_2, O_1$  eine Untergruppenkette.

**9.14 Hauptsatz** (Spherical Harmonics sind eine Gelfand-Zetlin-Basis):

Die Darstellung von  $O_3$  auf dem Polynomraum hat eine Gelfand-Zetlin-Basis bezüglich Untergruppenkette  $O_2, SO_2, O_1$ . Die Elemente dieser Gelfand-Zetlin-Basis heißen *Spherical Harmonics* oder auch *Kugelflächenfunktionen*.