

# Warum spherical harmonics?

Andrea Hanke

Johannes Hahn

08.08.21 – 15.08.21

## Inhaltsverzeichnis

<b>0</b>	<b>Wiederholung: Gruppen, Vektorräume und bilineare Abbildungen</b>	<b>3</b>
0.1	Gruppen . . . . .	3
0.2	Vektorräume . . . . .	4
0.3	Bilineare Abbildungen . . . . .	6
0.	Aufgaben, die in einer LA-Vorlesung dran gewesen sein könnten . . . . .	9
<b>1</b>	<b>Warum Tensoren?</b>	<b>10</b>
1.1	Das Tensorprodukt . . . . .	10
1.2	Elementare Eigenschaften des Tensorprodukts . . . . .	14
1.3	Index-Notation – Die Sicht des 19.Jahrhunderts . . . . .	15
1.4	Lineare Abbildungen zwischen Tensoren und ihre Klassifikation . . . . .	16
1.5	Anhang: Sinn und Unsinn von Basen . . . . .	20
	Blatt 1 . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Darstellungstheorie – Warum und was ist das überhaupt?</b>	<b>28</b>
2.1	Einige Nutzen von Darstellungstheorie . . . . .	28
2.2	Was ist eine Darstellung? . . . . .	29
2.3	Wie kann ich mir eine Darstellung basteln? . . . . .	31
2.4	Weitere grundlegende Begriffe der Darstellungstheorie . . . . .	32
	Blatt 2 . . . . .	34
<b>3</b>	<b>Darstellungstheorie – Level 0</b>	<b>37</b>
3.1	Der Mittelwerttrick: Summieren und integrieren über eine Gruppe . . . . .	37
3.2	Symmetrische Tensoren: Die Verbindung zwischen Polynomen und Tensoren	39
3.3	Natürliche Abbildungen . . . . .	40
3.4	Vollständigkeit der Klassifikation der linearen Tensor-Abbildungen . . . . .	41
	Blatt 3 . . . . .	44
<b>4</b>	<b>Darstellungstheorie – Level 1</b>	<b>45</b>
4.1	Lemma von Schur . . . . .	45
4.2	Satz von Maschke und Test auf Irreduzibilität . . . . .	46

4.3	Einige irreduzible Darstellungen von Isometriegruppen . . . . .	47
	Blatt 4 . . . . .	50
<b>5</b>	<b>Darstellungstheorie – Level 2: Charaktertheorie</b>	<b>51</b>
	Blatt 5 . . . . .	54
<b>6</b>	<b>Darstellungstheorie von <math>O_1</math></b>	<b>55</b>
<b>7</b>	<b>Darstellungstheorie von <math>O_2</math></b>	<b>56</b>
<b>8</b>	<b>Darstellungstheorie von <math>O_3</math></b>	<b>61</b>
<b>9</b>	<b>Warum Spherical Harmonics?</b>	<b>66</b>
9.1	Die Suche nach einer guten Basis . . . . .	66
9.2	Die Gelfand-Zetlin Basis . . . . .	68
	Blatt 9 . . . . .	76

# 0 Wiederholung: Gruppen, Vektorräume und bilineare Abbildungen

## 0.1 Gruppen

**0.1 Definition** (Gruppen und Gruppenhomomorphismen):

Eine Gruppe  $(G, \cdot)$  besteht aus

- einer Menge  $G$ ,
- einer Abbildung  $\cdot : G \times G, (g, h) \mapsto g \cdot h$ , genannt Multiplikation,

die die Gruppen-Axiome in Tabelle 0.1 erfüllen.

Gruppen-Axiome	Bedeutung
Assoziativität	$\forall g_1, g_2, g_3 \in G : g_1 \cdot (g_2 \cdot g_3) = (g_1 \cdot g_2) \cdot g_3$
Neutrales Element bzw. „Eins“	$\exists 1 \in V \forall g \in G : g \cdot 1 = g = 1 \cdot g$
Inverse Elemente	$\forall g \in G \exists h \in G : g \cdot h = 1 = h \cdot g$
Optional kann gelten	
Kommutativität (abelsche Gruppe)	$\forall g, h \in G : g \cdot h = h \cdot g$
Axiom von Gruppenhomomorphismen	Bedeutung
Verträglichkeit mit Multiplikation	$\forall g, h \in G : f(g \cdot h) = f(g) \cdot f(h)$

Tabelle 0.1: Definierende Eigenschaften von Gruppen und Gruppenhomomorphismen

Sind  $G, H$  zwei Gruppen und  $f : G \rightarrow H$  eine Abbildung, so heißt  $f$  Gruppenhomomorphismus, falls sie mit den beiden Multiplikationen verträglich ist.

Existiert ein Homomorphismus  $f' : W \rightarrow V$  mit  $f \circ f' = f' \circ f = \text{id}$ , so nennt man  $f$  Isomorphismus der Gruppen.

## 0.2 Beispiel:

Wir interessieren uns vor allem für bestimmte Symmetriegruppen. Diese treten meist als „Menge aller bijektiven Abbildungen  $X \rightarrow X$  mit [Zusatzeigenschaft]“ mit der Komposition als Gruppenverknüpfung auf. Das neutrale Element ist dann immer die Identität  $\text{id}_X$ , das inverse Gruppenelement ist dann immer die Umkehrabbildung.

Konkret kommen folgende Gruppen bei uns vor:

- Für jede natürliche Zahl die symmetrische Gruppe oder Gruppe aller Permutationen

$$S_n := \{ f : \{1, \dots, n\} \rightarrow \{1, \dots, n\} \mid f \text{ bijektiv} \}$$

- Für jeden Vektorraum  $X$  die allgemeine lineare Gruppe

$$GL(X) := \{ f : X \rightarrow X \mid f \text{ linear und invertierbar} \}$$

und die spezielle lineare Gruppe  $SL(X) := \{ f \in GL(X) \mid \det(f) = 1 \}$

- Für jeden  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $X$ , auf dem wir ein Skalarprodukt gegeben haben, die orthogonale Gruppe oder Gruppe der Isometrien.

$$\begin{aligned} O(X) &:= \{ f : X \rightarrow X \mid \forall x \in X : \|f(x)\| = \|x\| \} \\ &= \{ f : X \rightarrow X \mid \forall x, x' \in X : \langle f(x), f(x') \rangle = \langle x, x' \rangle \} \end{aligned}$$

und die spezielle orthogonale Gruppe oder Gruppe der Drehungen  $SO(X) := O(X) \cap SL(X)$ .

- Für jeden  $\mathbb{C}$ -Vektorraum, auf dem wir ein komplexes Skalarprodukt gegeben haben, analog auch die unitäre Gruppe

$$\begin{aligned} U(X) &:= \{ f : X \rightarrow X \mid \forall x \in X : \|f(x)\| = \|x\| \} \\ &= \{ f : X \rightarrow X \mid \forall x, x' \in X : \langle f(x), f(x') \rangle = \langle x, x' \rangle \} \end{aligned}$$

und die spezielle unitäre Gruppe  $SU(X) := U(X) \cap SL(X)$ .

Alle orthogonalen/unitären Gruppen von Räumen gleicher Dimension sind isomorph, deshalb schreiben wir auch  $(S)O_n$  bzw.  $(S)U_n$ , wenn wir die orthogonale/unitäre Gruppe eines  $n$ -dimensionalen Raums meinen.

## 0.2 Vektorräume

Wir kennen uns bereits mit Vektorräumen aus. Typische Beispiele sind  $\mathbb{R}^3$  oder der Raum der Polynome von einem bestimmten Grad  $n$ . Da uns in diesem Kurs noch weitere Vektorräume begegnen werden und zum Vergleich mit anderen mathematischen Objekten (z.B. Darstellungen), ist hier ihre Definition zusammengefasst.

### 0.3 Definition (Vektorräume und lineare Abbildungen):

Sei  $K$  ein Körper. Ein  $K$ -Vektorraum  $(V, +, \cdot)$  besteht aus

- einer Menge  $V$ ,
- einer Abbildung  $+: V \times V \rightarrow V, (v, w) \mapsto v + w$ , genannt (Vektor)addition und
- einer Abbildung  $\cdot: K \times V \rightarrow V, (\lambda, v) \mapsto \lambda \cdot v$ , genannt Skalarmultiplikation.

Vektorraum-Axiom	Bedeutung
$(V, +)$ ist eine abelsche Gruppe	Addition verhält sich wie erwartet
Assoziativität	$\forall u, v, w \in V : u + (v + w) = (u + v) + w$
Neutrales Element bzw. „Null“	$\exists 0 \in V \forall v \in V : v + 0 = 0 + v$
Inverse bzw. „negative“ Elemente	$\forall v \in V \exists w \in V : v + w = 0$
Kommutativität	$\forall u, v \in V : u + v = v + u$
Eigenschaften der Skalarmultiplikation	
Assoziativität	$\forall a, b \in K, v \in V : a \cdot (b \cdot v) = (a \cdot b) \cdot v$
Normierung bzw. Nichttrivialität	$\forall v \in V : 1 \cdot v = v$ , wobei 1 das Einselement des Körpers bezeichnet
Verträglichkeit von Addition und Skalarmultiplikation	
Distributivität bzgl. $(V, +)$	$\forall a \in K, u, v \in V : a \cdot (u + v) = a \cdot u + a \cdot v$
Distributivität bzgl. $(K, +)$	$\forall a, b \in K, v \in V : (a + b) \cdot v = a \cdot v + b \cdot v$
Axiome linearer Abbildungen	Bedeutung
Additivität	$\forall v_1, v_2 \in V : f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2)$
Homogenität	$\forall \lambda \in K, v \in V : f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v)$

Tabelle 0.2: Definierende Eigenschaften von Vektorräumen und linearen Abbildungen

die die Vektorraum-Axiome in Tabelle 0.2 erfüllen. Alles, was Element eines Vektorraums ist, kann Vektor genannt werden.

Sind  $V, W$  zwei  $K$ -Vektorräume und  $f : V \rightarrow W$  eine Abbildung, so heißt  $f$  ( $K$ -)lineare Abbildung oder (Vektorraum-)Homomorphismus, falls die beiden Axiome in Tabelle 0.2 erfüllt sind. Den Raum aller  $K$ -linearen Abbildungen von  $V$  nach  $W$  bezeichnen wir mit  $\text{Hom}_K(V, W)$ . Eine  $K$ -lineare Abbildung von  $V$  nach  $V$  (also gleicher Definitions- und Zielraum) heißt (Vektorraum-)Endomorphismus, der Raum aller solcher Abbildungen wird mit  $\text{End}_K(V)$  notiert.

Existiert ein Homomorphismus  $f' : W \rightarrow V$  mit  $f \circ f' = f' \circ f = \text{id}$ , so nennt man  $f$  Isomorphismus der Vektorräume.

**0.4:** Wir sind praktisch ausschließlich an  $\mathbb{R}$ - und  $\mathbb{C}$ -Vektorräumen interessiert in diesem Kurs.

**0.5 Definition (Kern & Bild):**

Ist  $f : V \rightarrow W$  eine  $K$ -lineare Abbildung, so ist

$$\ker(f) := \{ v \in V \mid f(v) = 0 \}$$

der Kern von  $f$  und

$$\operatorname{im}(f) := \{ w \in W \mid \exists v \in V : f(v) = w \}$$

das Bild von  $f$ .

### 0.3 Bilineare Abbildungen

**0.6:** Es gibt i.A. keine Multiplikation zweier Vektoren miteinander in irgendeinem Sinne. Wir können immer Skalare mit Vektoren multiplizieren, aber nicht Vektoren mit Vektoren. Nichts desto trotz ist es *manchmal* doch so, dass zusätzlich zu Addition und Skalarmultiplikation eine weitere Operation existiert, die ein sinnvolles Konzept von Multiplikation liefert, z.B.

a.) Der Vektorraum der Polynome  $\mathbb{K}[X]$  hat die Polynommultiplikation, d.h.

$$\left( \sum_{i=0}^n a_i X^i \right) \cdot \left( \sum_{j=0}^m b_j X^j \right) := \sum_{k=0}^{n+m} \left( \sum_{\substack{i,j \\ i+j=k}} a_i b_j \right) X^k$$

b.) Der Vektorraum der Funktionen  $X \rightarrow \mathbb{K}$  für einen festen Definitionsbereich  $X$  hat die punktweise Multiplikation, d.h.

$$f \cdot g := x \mapsto f(x)g(x)$$

c.) Die Hintereinanderausführung von linearen Abbildungen  $\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W) \times \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(U, V) \rightarrow \operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(U, W)$ ,  $(f, g) \mapsto f \circ g$  ist eine Abbildung, die sich in vielerlei Hinsicht auch wie eine Multiplikation verhält. Für  $U = V = W$  erhält man insbesondere eine Multiplikation  $\operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V) \times \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V) \rightarrow \operatorname{End}_{\mathbb{K}}(V)$ .

Nach Wahl von je einer Basis können wir  $\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ ,  $\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(U, V)$  und  $\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(U, W)$  mit  $\mathbb{K}^{n \times m}$ ,  $\mathbb{K}^{m \times p}$  und  $\mathbb{K}^{n \times p}$  identifizieren. Die Hintereinanderausführung von linearen Abbildung entspricht dann der Matrixmultiplikation.

d.) ...

Axiom	Bedeutung
Linearität:	
im ersten Argument	$\forall v_1, v_2 \in V, w \in W : \phi(v_1 + v_2, w) = \phi(v_1, w) + \phi(v_2, w)$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, v \in W, w \in W : \phi(\lambda v, w) = \lambda \phi(v, w)$
im zweiten Argument	$\forall v \in V, w_1, w_2 \in W : \phi(v, w_1 + w_2) = \phi(v, w_1) + \phi(v, w_2)$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}, v \in W, w \in W : \phi(v, \lambda w) = \lambda \phi(v, w)$
Falls $\phi : V \times V \rightarrow X$ , kann optional gelten:	
Symmetrie bzw. Kommutativität	$\forall u, v \in V : \phi(u, v) = \phi(v, u)$
Antisymmetrie	$\forall u, v \in V : \phi(u, v) = -\phi(v, u)$
Falls $\phi : V \times V \rightarrow V$ , kann optional gelten:	
Assoziativität	$\forall u, v, w \in V : \phi(u, \phi(v, w)) = \phi(\phi(u, v), w)$

Tabelle 0.3: Eigenschaften von bilinearen Abbildungen

### 0.7 Definition (Bilineare & multilineare Abbildungen):

Sind  $V, W, X$  drei  $\mathbb{K}$ -Vektorräume, so heißt eine Abbildung  $\phi : V \times W \rightarrow X$  bilinear, falls sie beiden Linearitätsbedingungen in Tabelle 0.7 erfüllt, d.h. die Funktion ist separat linear, wenn man nur den ersten oder nur den zweiten Input variiert und den anderen festhält.

Für Abbildungen  $V_1 \times V_2 \times V_3 \rightarrow X$ , die von drei Inputvektoren abhängig sind, kann man entsprechend definieren, dass eine Abbildung trilinear heißt, wenn sie die drei Distributivgesetze erfüllt. Für vier, fünf, ...  $k$  Input-Vektoren spricht man entsprechend von  $k$ -fach linearen Abbildungen.

### 0.8 Beispiel:

Die drei genannten „Multiplikationen“ von oben sind bilinear. Polynommultiplikation und punktweise Multiplikation von Funktionen sind kommutativ und assoziativ. Die Komposition  $\text{End}_{\mathbb{K}}(V) \times \text{End}_{\mathbb{K}}(V) \rightarrow \text{End}_{\mathbb{K}}(V)$  ist assoziativ, aber nicht kommutativ, falls  $\dim(V) > 1$ .

Es gibt viele weitere, äußerst nützliche Beispiele.

- d.) Richtungsableitungen sind bilinear in der Richtung und der Funktion:

Sei  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  ein geeigneter Definitionsbereich (z.B. eine offene Menge). Sei außerdem  $f : X \rightarrow \mathbb{C}$  eine differenzierbare Funktion. Dann existieren insbesondere alle Richtungsableitungen  $(\partial_v f)(x_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(x_0) - f(x_0 + tv)}{t}$  in allen Punkten  $x_0 \in X$ . Die Abbildungsvorschrift  $(v, f) \mapsto \partial_v f$  liefert eine bilineare Abbildung für mehrere Kombinationen von Vektorräumen, z.B.  $\mathbb{R}^n \times C^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^0(\mathbb{R}^n)$  oder  $\mathbb{R}^n \times C^\infty(\mathbb{R}^n) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}^n)$ .

e.) Allgemeiner: Lineare Differentialoperatoren:

Für mehrfach differenzierbare Funktionen kann man natürlich auch mehrere Ableitungsschritte hintereinander ausführen. Auf diese Weise erhält man multilineare Abbildungen:  $k$ -faches Ableiten in  $k$  Richtungen, also der Differentialoperator  $\partial_{v_1} \partial_{v_2} \cdots \partial_{v_k}$  ist  $k$ -fach linear in den Vektoren  $v_1, \dots, v_k$  als Inputs. Die Anwendung auf eine Funktion ist entsprechend  $(k+1)$ -fach linear in den  $k$  Richtungsvektoren und der Funktion als Inputs.

Als  $k$ -lineare Abbildung ist dies eine symmetrische Abbildung, d.h.  $\partial_v \partial_w f = \partial_w \partial_v f$ , sofern  $f$  zweimal stetig differenzierbar ist. Das ist der Satz von Schwarz<sup>1</sup>.

f.) Kreuzprodukt:

Es gibt eine besondere bilineare Abbildung  $\times : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , genannt Kreuzprodukt, die in anderen Dimensionen keine gute Analogie hat, nämlich

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} y_1 z_2 - y_2 z_1 \\ x_1 z_2 - x_2 z_1 \\ x_1 y_2 - x_2 y_1 \end{pmatrix}$$

Es ist bilinear, aber weder kommutativ noch assoziativ. Stattdessen ist es antisymmetrisch.

---

<sup>1</sup>Hermann Amandus Schwarz (1843 – 1921), dt. Mathematiker.



## Aufgaben

### Aufgabe 0.1. – Simultane Diagonalisierbarkeit

Es seien  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  diagonalisierbare Endomorphismen eines  $K$ -Vektorraums  $V$ . Es gelte  $\alpha_i \circ \alpha_j = \alpha_j \circ \alpha_i$  für alle  $1 \leq i, j \leq n$ .

Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, dass die Endomorphismen *simultan diagonalisierbar* sind, d.h. dass eine Basis von  $V$  existiert mit der Eigenschaft, dass jeder Vektor in  $B$  ein Eigenvektor für alle  $\alpha_i$  ist.

- a.) Zeige, dass  $\alpha_1$  sich zu einem Endomorphismus  $\alpha_{1,\mu}$  von  $\text{Eig}_\mu(\alpha_2)$  einschränkt für  $\lambda \in K$ .
- b.) Zeige, dass  $\text{Eig}_\lambda(\alpha_{1,\mu}) = \text{Eig}_\lambda(\alpha_1) \cap \text{Eig}_\mu(\alpha_2)$  und

$$\text{Eig}_\lambda(\alpha_1) = \bigoplus_{\mu \in \sigma(\alpha_2)} \text{Eig}_\lambda(\alpha_{1,\mu})$$

gilt.

- c.) Folgere daraus die Aussage für  $n = 2$ , indem du zeigst, dass  $\alpha_{1,\mu}$  diagonalisierbar ist.
- d.) Beweise den allgemeinen Fall per Induktion.
- e.) Beweise auch den Fall von unendlich vielen, paarweise kommutierenden  $\alpha$  unter der Annahme, dass  $V$  endlich-dimensional ist.

### Aufgabe 0.2. – Hermite-Normalform

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  sei beliebig. Zeige:

- a.) Es gibt eine unitäre Matrix  $U$ , sodass

$$U^H A U = \begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & A' \end{pmatrix}$$

ist. Hinweis: Was heißt das für die erste Spalte von  $U$ ?

- b.) Folgere: Es gibt eine (andere) unitäre Matrix  $U$ , sodass  $U^H A U$  obere Dreiecksgestalt hat.

Hinweis: Benutze, dass alle Polynome über  $\mathbb{C}$  vollständig in Linearfaktoren zerfallen.

### Aufgabe 0.3. – Normale Matrizen

Eine Matrix  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  heißt normal, falls  $AA^H = A^H A$  gilt. Beispiele für normale Matrizen sind hermitesche und unitäre Matrizen, insbesondere auch reelle symmetrische bzw. orthogonale Matrizen.

Zeige:

- a.) Wenn  $A$  eine Dreiecksmatrix und gleichzeitig eine normale Matrix ist, dann ist  $A$  automatisch eine Diagonalmatrix.
- b.) Folgere: Normale Matrizen sind immer unitär diagonalisierbar.
- c.) Umgekehrt ist jede unitär diagonalisierbare Matrix auch normal.

# 1 Warum Tensoren?

## 1.1 Das Tensorprodukt

**1.1:** Bilineare Abbildungen sind in vielerlei Hinsicht ähnlich zu linearen Abbildungen, z.B. kann man sie durch Basiswahl eindeutig beschreiben, d.h.

Wenn  $V, W$  zwei  $K$ -Vektorräume sind,  $b_1, \dots, b_n$  eine Basis von  $V$  und  $c_1, \dots, c_m$  eine Basis von  $W$ , und  $\phi : V \times W \rightarrow X$  eine bilineare Abbildung, dann sind alle Werte  $\phi(v, w)$  bereits eindeutig festgelegt, wenn man  $\phi(b_i, c_j)$  für alle  $i$  und  $j$  kennt, und umgekehrt liefert jede beliebige Wahl von Vektoren  $x_{ij} \in X$  genau eine bilineare Abbildung  $\psi : V \times W \rightarrow X$ , die  $\psi(b_i, c_j) = x_{ij}$  erfüllt.

Weiter könnte man z.B. jetzt den Raum aller bilinearen Abbildungen  $Bil(V, W; X)$  betrachten und beweisen, dass das selbst ein Vektorraum ist genau wie der Raum der linearen Abbildungen zwischen zwei festen Vektorräumen selbst ein Vektorraum ist.

Ähnliches gilt auch für  $k$ -lineare Abbildungen. Außerdem kann man sich davon überzeugen, dass diese Strukturen mit Hintereinanderausführung von Abbildungen verträglich sind. Hier ist noch zu beachten, dass multilineare Abbildungen viel mehr Möglichkeiten haben, zwei Abbildungen hintereinander auszuführen, z.B. könnte man zwei bilineare Abbildungen hintereinander ausführen, indem man

$$\phi(\psi(u, v), w) \quad \text{oder} \quad \phi(u, \psi(v, w))$$

bildet und i.A. sind das zwei verschiedene 3-lineare Abbildungen. Man hat bereits drei fundamental verschiedene Möglichkeiten, lineare und bilineare Abbildungen miteinander zu kombinieren: Man kann  $\phi(\alpha(u), v)$ ,  $\phi(u, \alpha(w))$  oder  $\alpha(\phi(u, v))$  bilden je nachdem, was davon tatsächlich definiert ist. Alle Kombinationen sind jedoch wieder bilineare Abbildungen. Wenn man allgemein  $k$ - und  $m$ -lineare Abbildungen miteinander kombinieren will, hat man sehr schnell eine explodierende Anzahl verschiedener Möglichkeiten vor sich. Sie alle liefern wieder multilineare Abbildungen als Ergebnis und alle Möglichkeiten  $a$  verschiedene multilineare Abbildungen auf diese Weise zu kombinieren, sind selbst  $a$ -fach lineare Operationen zwischen den entsprechenden Abbildungsräumen.

Man könnte all das jetzt für alle diese Kombinationen beweisen, wenn man zu viel Freizeit und Tinte hat. Alle Beweise sind langweilig, wenn man den linearen Fall einmal verstanden hat und funktionieren in der Tat völlig analog.<sup>2</sup> Das große Problem ist eigentlich, eine geeignete Notation zu finden, die einem erlaubt, diese Beweise alle nur einmal und dafür allgemein zu führen, statt in jeder neuen Kombination von vorne anfangen zu müssen. Und selbst wenn man sich so eine Notation überlegt, dann steht man noch vor einigen technischen, aber völlig trivialen Problemen, die mehr Arbeit verlangen als man für solche Trivialitäten erwartet. Wenn man beispielsweise eine Notation erfindet um zwei multilineare Abbildungen miteinander zu verbinden, dann stellt sich die Frage, ob alle Arten, drei multilineare Abbildungen zu verbinden, sich durch schrittweises Verbinden

---

<sup>2</sup>Wer's nicht glaubt, probiere es selbst aus und finde alle diese Beweise, bis das notwendige Maß an Langeweile erreicht ist.

von je zweien erhalten lassen und ob dafür eine geeignete Form von Assoziativität gilt. Erneut stellt man fest, dass die Antwort „ja“ ist, die geeignete Form von Assoziativität gilt und die Beweise alle analog zum linearen Fall laufen.

**1.2:** All diese Fälle sind letztendlich so sehr ähnlich zum linearen Fall, dass es in der Tat eine Konstruktion gibt, die es einem erlaubt, multilineare Abbildungen als echte lineare Abbildungen aufzufassen, sodass man überhaupt nichts mehr beweisen muss, das über den (schon bekannten) linearen Fall und die Existenz und grundlegenden Eigenschaften dieser Konstruktion hinaus geht. Dieses Konstrukt ist das *Tensorprodukt*.

**1.3 Satz und Definition** (Universelle Eigenschaft und Existenz des Tensorprodukts): Es seien  $V, W$  zwei  $K$ -Vektorräume. Es gibt eine „universelle bilineare Abbildung“, d.h. es gibt ein Vektorraum  $T$  und eine bilineare Abbildung  $\tau : V \times W \rightarrow T$ , sodass jede bilineare Abbildung  $\phi : V \times W \rightarrow X$  sich schreiben lässt als  $f \circ \tau$  mit einer eindeutig bestimmten linearen Abbildung  $f : T \rightarrow X$ .

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{\tau} & T \\ & \searrow \phi & \downarrow \exists! f \\ & & X \end{array}$$

$T$  und  $\tau$  sind in der Tat eindeutig bestimmt bis auf einen eindeutigen Isomorphismus, d.h. wenn  $\tau' : V \times W \rightarrow T'$  eine weitere universelle bilineare Abbildung ist, dann gibt es genau einen Isomorphismus  $\alpha : T \rightarrow T'$ , sodass  $\alpha(\tau(v, w)) = \tau'(v, w)$  gilt. Man schreibt üblicherweise  $V \otimes W$  statt  $T$  und  $v \otimes w$  statt  $\tau(v, w)$  für diesen eindeutig bestimmten Vektorraum und bilineare Abbildung und nennt sie Tensorprodukt von  $V$  und  $W$ . (Achtung: Das Tensorprodukt ist streng genommen die Kombination aus  $T$  und  $\tau$ , nicht nur  $T$ ).

**1.4:** Ausgeschrieben sagt die universelle Eigenschaft folgendes: Von einer Abbildungsvorschrift  $\phi : (v, w) \mapsto x_{v,w}$ , die je einen Inputvektor aus  $V$  und einen aus  $W$  nimmt und einen Vektor aus  $X$  produziert, gibt es genau dann eine Realisierung dieser Abbildungsvorschrift als lineare Abbildung  $f : V \otimes W \rightarrow X$  mit  $f(v \otimes w) = x_{v,w}$ , wenn  $\phi$  bilinear ist.

Jede bilineare Abbildung kann so eindeutig als lineare Abbildung auf dem Tensorprodukt der beiden Inputräume betrachtet werden, und umgekehrt kann jede lineare Abbildung auf einem Tensorprodukt als bilineare Abbildung aufgefasst werden, indem man sie auf die Menge der reinen Tensoren einschränkt.

**1.5 Definition** (Reine Tensoren):

Ein Element von  $V \otimes W$ , das die Form  $v \otimes w$  hat, wird als reiner Tensor bezeichnet.

**1.6** (Diskussion: reine vs. nicht-reine Tensoren): Ein wichtiger, vielleicht der wichtigste Grund, Tensorräume als eigenständiges Objekt einzuführen statt ausschließlich mit multilinearen Abbildungen zu arbeiten ist die Existenz von nicht-reinen Tensoren: Eine Summe  $v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 + \dots + v_k \otimes w_k$  (die natürlich immer existiert, weil  $V \otimes W$  ja ein Vektorraum ist) ist i.A. kein reiner Tensor, lässt sich also i.A. nicht darstellen als  $v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 + \dots + v_k \otimes w_k = x \otimes y$ .

Es stellt sich heraus, dass viele der wirklich interessanten Tensoren, die einem so in freier Wildbahn begegnen, nicht rein sind.

### 1.7 Beispiel:

In der Quantenmechanik wird das Tensorprodukt benutzt, um mehrere interagierende Quanten-Systeme als ein einziges großes System zu betrachten: Wenn  $V$  und  $W$  der Zustandsraum je einer Menge  $X$  bzw.  $Y$  quantenmechanischer Teilchen sind, dann ist  $V \otimes W$  der Zustandsraum des quantenmechanischen Systems, das aus den Teilchen von  $X$  und  $Y$  besteht und beliebige Interaktionen zwischen ihnen erlaubt. Ein reiner Tensor  $v \otimes w$  entspricht in dieser Sichtweise demjenige Zustand des Gesamtsystems, in dem sich die Teilchen aus  $X$  im Zustand  $v$ , und das aus  $Y$  im Zustand  $w$  befinden. Die nicht-reinen Tensoren entsprechen dann „Überlagerungen“ solcher reinen Zustände und das fundamental wichtige Phänomen von „verschränkten“ Teilchen ist ein Ausdruck dessen, dass eben nicht alle Zustände reine Zustände sind, in denen man die Teilchen von  $X$  unabhängig von denen in  $Y$  einen Zustand zuschreiben kann: Es kann z.B. ein Zustand der Form  $x_1 \otimes y_1 + x_2 \otimes y_2$  konstruiert (und auch experimentell realisiert) werden, in dem  $x_1$  und  $x_2$  sowie  $y_1$  und  $y_2$  beide jeweils senkrecht zueinander sind. In solch einem Zustand des Gesamtsystems können die  $X$ -Teilchen in Zustand  $x_1$  oder  $x_2$  gemessen werden, aber nur dann, wenn gleichzeitig die  $Y$ -Teilchen in Zustand  $y_1$  bzw.  $y_2$  liegen. Es kann eben nicht unabhängig voneinander der  $X$ -Anteil in Zustand  $x_1$  sein, während der  $Y$ -Anteil des Gesamtsystems in Zustand  $y_2$  ist (hier geht die Orthogonalität ein).

### 1.8 Beispiel (Casimir<sup>3</sup>-Element):

Ist  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und haben wir ein Skalarprodukt fest gewählt, so gibt es einen besonderen Tensor  $\Omega_V \in V \otimes V$ , den wir *Casimir-Element* nennen. Für *jede* Orthonormalbasis  $e_1, \dots, e_n$  von  $V$  lässt er sich schreiben als

$$\Omega_V = \sum_{i=1}^n e_i \otimes e_i$$

(laut Aufgabe 1.1 ist dies wohldefiniert) Für  $V = \mathbb{R}^3$  und die Standardbasis  $e_x, e_y, e_z$  ist etwa

$$\Omega_{\mathbb{R}^3} = e_x \otimes e_x + e_y \otimes e_y + e_z \otimes e_z$$

Betrachten wir den Raum der linearen Differentialoperatoren erster Ordnung auf  $C^\infty(V)$ , d.h. der Vektorraum der Operatoren  $\{\partial_v \mid v \in V\}$ . Darin schreibt sich das Casimir-Element als

$$\Omega = \sum_{i=1}^n \partial_{e_i} \otimes \partial_{e_i}$$

---

<sup>3</sup>Hendrik Brugt Gerhard Casimir, 1909 – 2000, niederländischer Physiker

Wenn wir die Komposition von Operatoren (eine bilineare Abbildung) auf diesen Tensor anwenden, erhalten wir den Laplace<sup>4</sup>-Operator:

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \partial_{e_i}^2$$

Man beachte insbesondere, dass das Ergebnis der Summe auf der rechten Seite unabhängig von der gewählten Basis ist, obwohl die einzelnen Summanden es natürlich nicht sind. Das erklärt z.B., wieso der Laplace-Operator und viele ähnlich aussehende Konstruktionen physikalische sinnvolle Objekte liefern, obwohl ihre Definition auf den ersten Blick basisabhängig zu sein scheint.

**1.9:** Man kann sich jedoch leicht davon überzeugen, dass die Menge aller Summen von reinen Tensoren tatsächlich das volle Tensorprodukt abdeckt:

$$V \otimes W = \{ v_1 \otimes w_1 + v_2 \otimes w_2 + \dots + v_k \otimes w_k \mid k \in \mathbb{N}, v_i \in V, w_i \in W \}$$

In der Welt der Quantenmechanik würde man dazu also z.B. sagen: Der Zustandsraum des aus zwei Einzelsystemen kombinierten Systems besteht aus allen Kombinationen von reinen Zuständen der Einzelsysteme sowie allen Überlagerungen dessen.

Es ist i.A. ein sehr schwieriges Problem, einem konkreten Tensor anzusehen, ob er rein ist oder nicht, und wenn nicht, welche reinen Zustände man zusammen addieren muss, um ihn zu erhalten. Nicht einmal die Anzahl der mindestens notwendigen Summanden ist einfach zu finden im Allgemeinen.

**1.10 (Diskussion: Das Wort „Tensor“):** Im Gegensatz zum Wort „Vektor“, das fast immer „Element eines Vektorraums“ bedeutet und selten anders verwendet wird, ist das Wort „Tensor“ etwas überbelegt. Die verschiedenen Verwendungsformen des Wortes fallen grob in zwei Kategorien: 1.) „ich habe keine Ahnung, was Tensoren sind, aber andere Leute benutzen das Wort, also tue ich das auch“ und 2.) irgendetwas, das mit Tensorprodukten zu tun hat.

Zu 1. später mehr, zu 2. nur soviel: „Tensor“ kann sowohl „Element eines Tensorprodukts von Vektorräumen“ bedeuten (so werden wir das Wort verwenden) als auch einen von diversen, verwandten Begriffen, z.B. wird das auch als Kurzform für „Operator zwischen Tensorpotenzen  $V^{\otimes a} \rightarrow V^{\otimes b}$ , die mit einer bestimmten Symmetrie verträglich sind“ oder „Elemente eines Tensorprodukts, die unter einer bestimmten Symmetrie invariant sind“ oder von Tensorfeld verwendet. Ein Tensorfeld ist eine Funktion, die jedem Punkt eines aktuell relevanten geometrischen Raums (oder Raumzeit)  $X$  je ein Element  $t(x) \in V_x \otimes V_x \otimes V_x \otimes \dots$  zuordnet, wobei gewisse Stetigkeitseigenschaften gefordert werden, die für zwei eng beieinander liegende Punkte  $x, x'$  fordern, dass  $V_x$  und  $V_{x'}$  „im Wesentlichen der gleiche Raum“ sind und  $t(x), t(x')$  in selbigem eng beieinander liegen (formal ist das natürlich eine richtige  $\epsilon$ - $\delta$ -artige Definition). Ggf. wird auch nicht nur ein Vektorraum

---

<sup>4</sup>Pierre-Simon, marquis de Laplace, 1749 — 1827, franz. Gelehrter, Mathematiker, Physiker, Philosoph uvm.

$V_x$  pro Punkt verwendet, sondern mehrere. Je nachdem, welche Zusatzeigenschaften man an solch ein Tensorfeld stellt, wird auch nicht nur das Tensorprodukt der Vektorräume selbst, sondern auch eine vom Tensorprodukt abgeleitete Konstruktion betrachtet (z.B. symmetrische Potenzen).

## 1.2 Elementare Eigenschaften des Tensorprodukts

### 1.11 Lemma ( $K \otimes V = V$ ):

Ist  $V$  ein  $K$ -Vektorraum, so ist

$$\begin{cases} K \otimes V & \xrightarrow{\sim} V \\ \alpha \otimes v & \mapsto \alpha v \\ 1 \otimes v & \xleftarrow{\sim} v \end{cases}$$

ein Paar zueinander inverser, natürlicher Isomorphismen.

**1.12:** Wir erlauben uns deshalb, wann immer es uns nützlich erscheint,  $K \otimes V$  und  $V \otimes K$  als identisch zu  $V$  zu betrachten. Dabei meinen wir immer die obige Identifizierung.

**1.13:** Da das Tensorprodukt für alle Paare von  $K$ -Vektorräumen definiert ist und selbst wieder ein  $K$ -Vektorraum ist, können wir natürlich auch Tensorprodukte von Tensorprodukten bilden. Es stellt sich die Frage, ob es eine Rolle spielt, wie genau wir das tun.

### 1.14 Lemma und Definition (Assoziativität des Tensorprodukts & Höhere Tensorgrade):

Für alle  $K$ -Vektorräume  $V_1, V_2, V_3$  ist

$$\begin{cases} V_1 \otimes (V_2 \otimes V_3) & \rightarrow (V_1 \otimes V_2) \otimes V_3 \\ v_1 \otimes (v_2 \otimes v_3) & \mapsto (v_1 \otimes v_2) \otimes v_3 \end{cases}$$

ein natürlicher Isomorphismus.

Wir erlauben es uns, aufgrund der Natürlichkeit dieses Isomorphismus, Klammern in mehrfachen Tensorprodukten wegzulassen und kurz  $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3 \otimes \dots \otimes V_k$  zu schreiben. Der Kürze halber definieren wir außerdem die Tensorpotenzen

$$V^{\otimes k} := \begin{cases} K & k = 0 \\ \underbrace{V \otimes V \otimes \dots \otimes V}_{k \text{ Faktoren}} & k > 0 \end{cases}$$

Man spricht in diesem Zusammenhang auch von Tensoren vom Grad  $k$ .

**1.15:** Mit dieser Notation gelten dann (abzüglich eben jener natürlicher Isomorphismen) die „Potenzgesetze“:

$$V^{\otimes n} \otimes V^{\otimes m} = V^{\otimes(n+m)}$$

$$(V^{\otimes n})^{\otimes m} = V^{\otimes nm}$$

### 1.3 Index-Notation – Die Sicht des 19. Jahrhunderts

**1.16:** Alle vorher angedeuteten Aussagen über multilineare Abbildungen kann man auf Sätze über lineare Abbildungen und Tensorprodukte zurückführen, z.B.

**1.17 Lemma und Definition** (Standardskalarprodukt auf Tensorpotenzen):

Haben wir ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $V$  gegeben, ist das Standardskalarprodukt (auch „von  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  induziertes Skalarprodukt“) auf  $V^{\otimes m}$  definiert mit der Vorschrift

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \begin{cases} V^{\otimes m} \times V^{\otimes m} & \rightarrow K \\ \langle v_1 \otimes \cdots \otimes v_m, w_1 \otimes \cdots \otimes w_m \rangle & \mapsto \langle v_1, w_1 \rangle \cdots \langle v_m, w_m \rangle \end{cases}$$

und ihrer linearen Fortsetzung.

**1.18 Lemma** (Dimension von Tensorprodukten<sup>5</sup>):

Es gilt  $\dim(V \otimes W) = \dim(V) \cdot \dim(W)$ .

Präziser: Für jede Basis  $(b_i)_{i \in I}$  von  $V$  und  $(c_j)_{j \in J}$  von  $W$  ist  $(v_i \otimes w_j)_{i \in I, j \in J}$  eine Basis von  $V \otimes W$ .

**1.19 Korollar:**

Entsprechendes gilt auch für mehrfache Tensorprodukte, insbesondere für Tensorpotenzen: Ist  $e_1, \dots, e_n$  eine Basis von  $V$ , so ist  $\{e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_k} \mid i_j \in \{1, \dots, n\}\}$  eine Basis von  $V^{\otimes k}$ .

Haben wir ein Skalarprodukt auf  $V$  gegeben und ist  $e_1, \dots, e_n$  eine Orthonormalbasis von  $V$  bzgl. dieses Skalarprodukts, so ist diese Basis des Tensorprodukts auch eine Orthonormalbasis bzgl. des Standardskalarprodukts auf  $V^{\otimes k}$ .

**1.20 Definition:**

Wenn  $e_1, \dots, e_n$  zufällig eine Basis ist, die man „Standardbasis“ nennt, dann nennt man  $\{e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_k}\}$  auch Standardbasis von  $V^{\otimes k}$ .

Diese Basis wird sehr häufig implizit verwendet (siehe Aufgabe 1.3).

**1.21** (Index-Notation – Was ist das?): Insbesondere heißt das, dass jeder Tensor  $t \in V \otimes W$  eine eindeutige Koordinaten-Darstellung bzgl. solch einer Basis hat, d.h. es gibt eindeutig bestimmte Skalare  $t_{ij}$  sodass

$$t = \sum_{i \in I, j \in J} t_{ij} b_i \otimes c_j$$

gilt und umgekehrt liefert jede Wahl von  $|I| \times |J|$  vielen Skalaren  $t_{ij}$  auf diese Weise genau einen Tensor.

---

<sup>5</sup>Wer mit unendlich-dimensionalen Vektorräumen nicht gut genug vertraut ist, denke sich ein „für endlich-dimensionale Vektorräume“ hinzu.

Es hat sich in der Physik und Ingenieurwissenschaften daher leider (unhelfreicherweise<sup>6</sup>) eingebürgert, das Wort „Tensor“ austauschbar mit „Ansammlungen von Zahlen, die mehrere Indizes haben“ zu verwenden.

## 1.4 Lineare Abbildungen zwischen Tensoren und ihre Klassifikation

**1.22** (Wozu Brauer-Diagramme?): Sobald man Tensoren kennt und sich fest vornimmt, nicht den Fehler früherer Generationen zu wiederholen und von Anfang an basis-frei mit Tensoren zu arbeiten, dann stellt sich sofort die Frage, welche Abbildungen zwischen Tensoren natürlich genug sind, um basis-frei beschreibbar zu sein. Diese Abbildungen sind durch „Brauer-Diagramme“ klassifizierbar.

Wir werden in einem folgenden Kapitel beweisen: Die Menge aller sinnvollen / natürlichen linearen Abbildungen zwischen Tensoren ist gleich Menge aller Linearkombinationen von allen Brauer-Diagrammen.

**1.23 Definition** (Brauer<sup>7</sup>-Diagramm und deren Multiplikation):

Ein Brauer-Diagramm ist ein besonderer Graph. Er besteht aus zwei Zeilen von Knoten,  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , Knoten in der oberen Zeile und  $n + 2z$ ,  $z \in \mathbb{Z}$ , Knoten in der unteren Zeile. Die Knoten sind paarweise miteinander verbunden, dabei dürfen die Verbindungen sowohl von einer Zeile zur anderen gehen, als auch innerhalb einer Zeile zwei Knoten miteinander verbinden.

Brauer-Diagramme verstehen wir als visuelle Darstellung von bestimmten linearen Abbildungen  $V^{\otimes n} \rightarrow V^{\otimes(n+2z)}$  für einen festen  $K$ -Vektorraum  $V$ . Entsprechend können sie miteinander addiert und auch mit Skalaren aus  $K$  multipliziert werden.

Zwei Brauer-Diagramme können außerdem miteinander multipliziert werden zu einem dritten Brauer-Diagramm. Dies entspricht der Hintereinanderausführung zweier linearer Abbildungen. Ausgerechnet wird das Brauer-Diagramm der zusammengesetzten Abbildung, indem die zwei Brauer-Diagramme übereinander geschrieben werden und die Knoten der unteren Zeile vom ersten Diagramm reihenfolgeerhaltend mit den Knoten der oberen Zeile vom zweiten Diagramm verbunden werden. Falls geschlossene Kreise in diesem 4-zeiligen Graph existieren, so wird das Ergebnis für jeden geschlossenen Kreis mit einem Skalarfaktor  $\alpha$  multipliziert, für unsere Anwendungen ist  $\alpha$  gleich der Dimension des Vektorraums  $V$ , von dem wir Tensorprodukte bilden,

$$\alpha = \dim V.$$

Bei  $k$  geschlossenen Kreisen ist das Ergebnis dann der Graph, der die Verbindung der obersten Knoten-Zeile zur untersten Knoten-Zeile darstellt multipliziert mit  $\alpha^k$ .

---

<sup>6</sup>Wir nennen ja keine Namen, aber wer den Fehler macht, Johannes zu fragen, wieso er das unhilfreich findet, darf sich die nächste halbe bis dreiviertel Stunde genaustens all die vielen Gründe anhören.

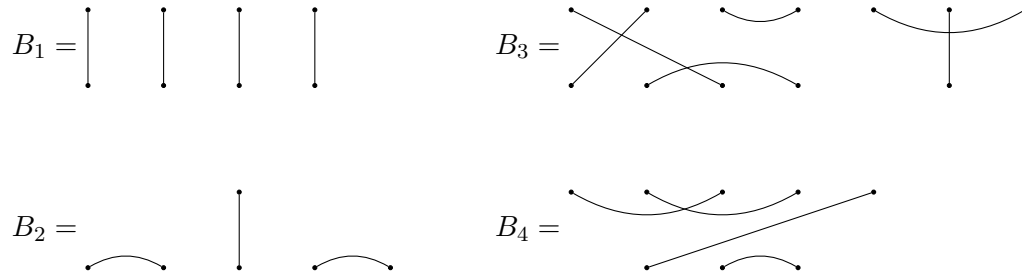
Wer lesen will, blättere vor bis Abschnitt 1.5.

<sup>7</sup>Richard Dagobert Brauer, 1901 – 1977, dt. Mathematiker



### 1.24 Beispiel (Brauer-Diagramme):

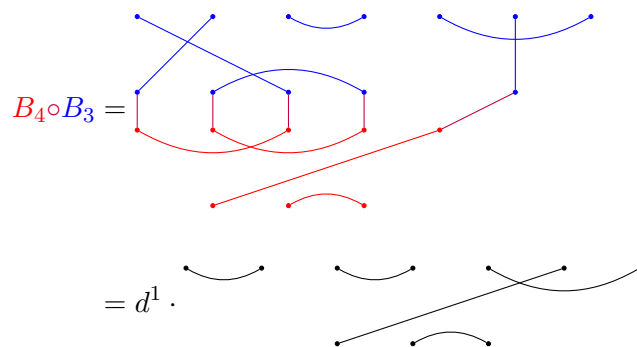
Folgende Graphen sind alles Brauer-Diagramme:



$B_1$  ist die Identität auf  $V^{\otimes 4}$ .

### 1.25 Beispiel (Multiplikation zweier Brauer-Diagramme):

Sei  $d$  die Dimension des Vektorraums  $V$ , auf dessen Tensorpotenzen wir lineare Abbildungen betrachten. Das Produkt von  $B_3$  und  $B_4$  im oberen Beispiel, bzw. die lineare Abbildung, die durch  $B_4 \circ B_3$  beschrieben wird, wird dann folgendermaßen berechnet:



d.h. es ist das  $d$ -fache der linearen Abbildung, die durch das Brauer-Diagramm in der letzten Zeile gegeben ist.

Auf einen reinen Tensor angewandt werden Brauer-Diagramme, indem jeder einzelne Tensorfaktor reihenfolgeerhaltend den Knoten der oberen Zeile zugeordnet wird, auf gemischte Tensoren mit linearer Fortsetzung. Dabei sind mit entsprechender Definition (siehe unten) die Brauer-Diagramme eine vollständige Beschreibung aller *nützlichen* bzw. *natürlichen* Arten von linearen Abbildungen. Was genau eine Abbildung nützlich macht, werden wir später mit Hilfe von Darstellungstheorie herausfinden. Zunächst wollen wir hier die verschiedenen linearen Abbildungen zwischen Tensoren klassifizieren:

### 1.26 Beispiel (Permutation bilden von einem Tensor):

Sei  $\sigma \in S_n$  eine Permutation. Dann definiert die Abbildung

$$\Pi_\sigma : \begin{cases} V^{\otimes n} & \rightarrow V^{\otimes n} \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_n & \mapsto v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma^{-1}(n)} \end{cases}$$

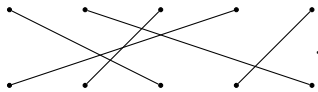
die durch  $\sigma^{-1}$  bestimmte Permutation der Faktoren des Tensors. Für einen allgemeinen Tensor ist diese Permutation als lineare Fortsetzung der obigen Abbildung gegeben.

Das Brauer-Diagramm von  $\Pi_\sigma$  enthält in beiden Zeilen  $n$  Knoten und die Kanten verbinden nur Knoten von der oberen Zeile mit Knoten der unteren Zeile. Die genauen Verbindungen ergeben sich aus der Permutation  $\sigma^{-1}$ . Jedem Input  $k$  von  $\sigma^{-1}$  wird das Ergebnis  $l = \sigma^{-1}(k)$  zugeordnet. Im Brauer-Diagramm wird dann der  $k$ -te Knoten der oberen Zeile (gezählt von links nach rechts) mit dem  $l$ -ten Knoten der unteren Zeile verbunden. Mit der Zwei-Zeilen-Schreibweise von  $\sigma^{-1}$  lässt sich dies gut ablesen, z.B. sei:

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\Rightarrow \sigma^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

Das zu  $\Pi_\sigma$  zugehörige Brauer-Diagramm ist dann:



Insbesondere ist  $\Pi_{\text{id}}$  die identische Abbildung  $V^{\otimes n} \rightarrow V^{\otimes n}$ .

### 1.27 Beispiel (Spur nehmen von einem Tensor):

Es sei auf  $V$  ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  gegeben. Dann definiert für  $k \neq l$  die Abbildung

$$\text{tr}_{kl} : \begin{cases} V^{\otimes n} & \rightarrow V^{\otimes n-2} \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_k \otimes \cdots \otimes v_l \otimes \cdots \otimes v_n & \mapsto \langle v_k, v_l \rangle v_1 \otimes \cdots \otimes \hat{v}_k \otimes \cdots \otimes \hat{v}_l \otimes \cdots \otimes v_n \end{cases}$$

die Spur zwischen dem  $k$ -ten und  $l$ -ten Faktor des Tensors. Für einen allgemeinen Tensor ist die Spur als lineare Fortsetzung der obigen Abbildung gegeben.

Das Brauer-Diagramm der Spur besteht aus  $n$  Knoten in der oberen und  $n-2$  Knoten in der unteren Zeile. Der  $k$ -te und  $l$ -te Knoten der oberen Zeile sind mit einer Kante verbunden, solche Kanten nennen wir *waagerecht*. Alle anderen Knoten sind mit ausschließlich senkrechten Kanten verbunden, z.B. für  $\text{tr}_{6,7}$  auf  $V^{\otimes 7}$ :



Diese Definition ist auch in entgegengesetzte Richtung zu verstehen: Wenden wir ein Brauer-Diagramm, welches zwei obere Knoten miteinander verbindet, auf einen reinen Tensor an, so ist zwischen den beiden entsprechenden Faktoren des Tensors die Spur zu bilden.

(In den Aufgaben findet sich auch eine, die erklärt, wieso diese Abbildung ausgerechnet „Spur“ heißt)

### 1.28 Beispiel (Einfügen des Casimir-Elements):

Sei  $\Omega_V$  das Casimir-Element zu  $V$ . Dann definiert die Abbildung

$$\Omega : \begin{cases} V^{\otimes n} & \rightarrow V^{\otimes n+2} \\ v_1 \otimes \cdots \otimes v_n & \mapsto v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \otimes \Omega_V \end{cases}$$

die Einfügung des Casimir-Elements an den Tensor. Für einen allgemeinen Tensor ist die Einfügung des Casimir-Elements als lineare Fortsetzung der obigen Abbildung gegeben.

Das Brauer-Diagramm der Einfügung des Casimir-Elements besteht aus  $n$  Knoten in der oberen und  $n+2$  Knoten in der unteren Zeile. Die letzten beiden Knoten der unteren Zeile sind mit einer Kante verbunden. Alle anderen Knoten sind mit ausschließlich senkrechten Kanten verbunden, z.B. :



Diese Definition ist auch in entgegengesetzte Richtung zu verstehen: Wenden wir ein Brauer-Diagramm, welches zwei untere Knoten miteinander verbindet, auf einen reinen Tensor an, so ist an den beiden entsprechenden Faktoren des Tensors das Casimir-Element einzufügen.

**1.29:** An welchen zwei Stellen die zwei Faktoren des Casimir-Elements eingefügt werden, kann man sich im Prinzip aussuchen, das entspricht dann der Hintereinanderausführung von  $\Omega_V$ -Einfügung und Permutation. Insbesondere können die beiden Hälften von  $\Omega_V$  auch voneinander getrennt werden, z.B. wird mit

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n+1 & n+2 \\ n+2 & 2 & \cdots & n+1 & 1 \end{bmatrix} \in S_{n+2}$$

durch

$$\Pi_\sigma \circ \Omega(v_1 \cdots \otimes \cdots v_n) \tag{1}$$

das mit  $\Omega$  eingefügte  $\Omega_V$  in zwei Teile zerlegt.

**1.30:** Man überlegt sich jetzt leicht, dass jedes Brauer-Diagramm als Multiplikation von (mehreren) Permutationen, Spuren und Casimir-Elementen erhalten werden kann, diese drei Beispiele also im Wesentlichen alle Fälle abdecken.

**1.31 (Bilineare Abbildungen):** Bilineare, tri- und  $k$ -fach lineare Abbildungen zwischen Tensoren lassen sich auf lineare Abbildungen zurückführen, indem man das Tensorprodukt der Input-Tensoren bildet und dann eine beliebige lineare Abbildung ausführt. Unsere angestrebte Klassifikation behandelt also in Wirklichkeit mehr als nur den linearen Fall.

## 1.5 Anhang: Sinn und Unsinn von Basen

**1.32** (Ko- und kontravariantes Transformieren): Wir haben in 1.21 bereits beschrieben, wie man mittels einer Basis von  $V$  jedem Tensor aus  $V^{\otimes k}$  seine Koordinaten bzgl. dieser Basis zuordnen kann.

Wählt man eine andere Basis von  $V$ , so erhält man natürlich andere Zahlen als Koordinaten. Immer noch  $\dim(V)^k$  viele, aber andere. Jedoch sind die Unterschiede i.A. nicht völlig beliebig (wie Fall  $k = 1$ ), denn sie sind eben durch einen Basiswechsel in den Faktoren des Tensorprodukts verursacht.

In der Tat haben die Physiker eigene Sprechweise erfunden, um das auszudrücken: Man sagt, dass sich ein Satz von indizierten Zahlen „kovariant transformiert“ (bzw. „kontravariant“) und meint damit nicht etwa, dass diese Zahlen eine besondere Eigenschaft hätten, sondern, dass die Methode, mit der man diese Zahlen bestimmt hat, eine besondere Eigenschaft hat, nämlich bei anderer Basiswahl ein anderes Ergebnis zu produzieren, dass aber aus der Basiswechselmatrix auf bestimmte Weise vorhersehbar ist. Manche Physiker nehmen das zum Anlass, um zu definieren, dass ein Tensor nicht nur *ein* Satz von indizierten Zahlen sei, sondern eine Abbildung  $\{\text{Basen}\} \rightarrow \{\text{Zahlen mit Indizes}\}$ , die genau dieser Transformationsregel gehorcht.

Soweit, so verwirrend, aber natürlich wird einem dann auch erklärt, dass es auch „kontravariante Tensoren“ gibt, die sich irgendwie ähnlich, aber ganz anders verhalten, sowie gemischte Tensoren, bei denen manche Indizes ko- und manche kontravariant gemeint sind. In Indexschreibweise äußert sich das oft so, dass manche Indizes oben und manche unten notiert werden, wobei sich leider nicht einmal alle Physiker einig sind, ob die oberen jetzt die ko- oder die kontravarianten sein sollen.

**1.33** (Index-Notation – Warum ist das ein Problem?): Index-Notation erschwert durch die Fixierung auf Basen und Koordinaten im Wesentlichen alles, was wichtig ist: Das Verstehen von und das Arbeiten mit Tensoren.

- Index-Schreibweise – Koordinaten allgemein – verlieren wichtige Informationen und geht am Wesentlichen vorbei: Ein Vektor/Tensor ist eben nicht eine Ansammlung von Zahlen, sondern ein Element eines Vektorraums.

Ja, der Raum der Polynome in zwei Variablen mit Grad  $\leq 5$  ist 36-dimensional, aber das Polynom  $x^2 + y^2$  deshalb als Ansammlung von 36 (relativ beliebigen) Zahlen zu betrachten, also als Element von  $\mathbb{R}^{36}$ , verliert die ganz wesentliche Information, z.B. dass es sich um ein Polynom handelt, dass dieser Vektorraum Unterraum eines größeren Polynomraums ist, in dem weitere Strukturen wie z.B. Polynommultiplikation, Differenzieren, uvm. existieren.

Der Übergang von abstrakten Vektoren/Tensoren zu Koordinatendarstellungen bzgl. beliebiger Basen, erhält exakt die Information, die in der Vektorraumstruktur alleine steckt, d.h. in Addition und Skalarmultiplikation. Alle zusätzliche Struktur, die in einer konkreten Situation vielleicht außerdem vorhanden und nützlich (!) sein könnte, wird weggeworfen.

Wenn man alles nur als Ansammlung von Zahlen versteht, ist auch klar, wieso der Unterschied zwischen „ko-“ und „kontravarianten“ Tensoren so mysteriös ist. Wenn man abstrakt arbeitet, ist ganz klar, was passiert! Das sind einfach Tensoren aus unterschiedlichen Räumen!

Die eine Sorte Tensoren ist Element von  $V^{\otimes k}$ , während die anderen Elemente von  $(V^*)^{\otimes k}$  sind. Tensoren mit gemischter Varianz sind entsprechend Elemente von  $V^{\otimes k_1} \otimes (V^*)^{\otimes k_2}$ . Natürlich sind  $V$  und  $V^*$  als Vektorräume isomorph, d.h. sie haben die gleiche Dimension, man benötigt also die gleiche Anzahl an Indizes. Aber dabei verliert man eben die wesentliche Information, dass  $V$  und  $V^*$  doch trotz allen verschieden sind und verschiedene Objekte und Sichtweisen mathematisch beschreiben.<sup>8</sup>

Für uns wird z.B. ganz wesentlich sein, dass Tensorräume Zusatzstrukturen besitzen, die man in beliebigen Koordinaten nicht (oder nur mit unnötig viel Aufwand) sehen kann.

- Index-Schreibweise – Koordinaten allgemein – zäumen das Pferd von hinten auf:

Wenn man einmal einen globalen Standpunkt einnimmt, erkennt man, dass es selten sinnvoll ist, tatsächlich in Koordinaten zu arbeiten, da die einzigen Operationen, die überhaupt physikalisch sinnvoll sind, zwangsläufig basis-unabhängig sein müssen. Das Universum hat halt keine bevorzugte Basis. Es gibt keine bevorzugten Richtungen im Universum; wieso also nicht von Anfang an mit Objekte und Operationen arbeiten, die basis-unabhängig sind?

Und in den Fällen, in denen die physikalische Situation eben doch eine Raumrichtung bevorzugt, z.B. weil es sich um ein rotationssymmetrisches Problem handelt und die Drehachse eine besondere Richtung in so einem System ist? In den Fällen ist es auch nicht sinnvoll, *beliebige* Basen zu betrachten. Man will eine Basis wählen, die Zusatzinformationen wie z.B. die Drehsymmetrie, möglichst gut widerspiegeln.

Woher weiß man, welche Zusatzstruktur tatsächlich die nützliche ist für die eigene Frage? Man weiß es eben nicht. Zumindest nicht vorher. Erst, wenn man tatsächlich eine (Teil-)Antwort auf die Frage gefunden hat, kann man überhaupt sagen, welche Zusatzstrukturen nützlich war und welche nicht, und welche Basiswahl also die sinnvollste für das Problem ist.

Der Ausgangspunkt sollte also immer zunächst eine basis-freie Sichtweise sein, in die erst nachdem tatsächlich Bedarf erkannt wurde, eine präzise ausgewählte Basis eingeführt wird. Und selbst dann ist es sinnvoll, nicht allzu viel Basis zu wählen. Im Falle einer Rotationssymmetrie ist z.B. *nur* die Drehachse eine ausgezeichnete Raumrichtung, d.h. sie legt nur einen von drei gesuchten Basisvektoren (halbwegs) fest. Für die anderen beiden gilt genau das gleiche: Man sollte solange wie möglich

---

<sup>8</sup>Übrigens erklärt diese Sichtweise auch, wieso sich die Physiker nicht immer einig sind, was ko- und was kontravariant ist: Für endlich-dimensionale Vektorräume ist nicht nur  $V^*$  der duale Vektorraum von  $V$ , sondern auch  $V$  der duale Vektorraum von  $V^*$ . Man kann sich also aussuchen, welches das fundamentalere Objekt von beiden ist.

abstrakt arbeiten und erst, wenn das Problem es tatsächlich erfordert, eine Basis wählen.

- Index-Schreibweise erzeugt unnötige Arbeit:

Eine beliebige Kollektion von Zahlen wird aber nur dann zu einem Tensor, wenn man eine Basis wählt, bzgl. derer man diese Zahlen dann als Koordinaten liest. Man muss sich also stets fragen: „Wenn ich eine andere Basis wähle und in dieser neuen Situation noch einmal neue Zahlen generiere und als Koordinaten bzgl. der neuen Basis benutze, kommt ein anderer Tensor heraus oder nicht?“ und man will immer, dass die Antwort „Nein“ ist, d.h. man will, dass sich die Zahlen „ko-“ oder „kontravariant“ oder „gemischt“ „transformieren“. Ein „ja“ hieße zwangsläufig, dass man etwas falsch gemacht hat, eben weil physikalisch sinnvolle Ergebnisse nicht basis-abhängig sind.

Die Konsequenz daraus ist aber, dass man eigentlich jedes Index-Monster, das einem begegnet, erst einmal mit viel langweiligem Rechenaufwand darauf überprüfen sollte, ob es überhaupt basis-unabhängig ist. Wer hat die Zeit dafür? Niemand! Und wieso sollte man auch so viel Aufwand investieren, wenn die Antwort, die man haben will, sowieso immer die gleiche ist?

Nicht nur macht die abstrakte Sichtweise den Aufwand kleiner, sie macht ihn zu Null, denn, wenn man von Anfang an basisfrei arbeitet, stellt sich die Frage, ob eine gewisse Konstruktion basisunabhängig ist, überhaupt nicht. Wenn nirgendwo Basen benutzt wurden, muss alles, was getan wurde, natürlich basisunabhängig sein!

- „Aber, wenn ich Dinge ausrechnen will, brauche ich doch Basen!“

Auch das ist ein weitverbreitetes Missverständnis. Viele Dinge sind in der Tat auch völlig basisfrei berechenbar, mindestens z.B. alle physikalisch sinnvollen Dinge, denn die sind eben – wie wir bereits festgestellt haben – von sich aus basisfrei und somit zwangsläufig auch basisfrei berechenbar, wenn sie überhaupt berechenbar sind. Und in der Tat kann man sie dann auch immer auf einem basisfreien Wege ausrechnen.

Man muss sich auch einmal klarmachen, was man mit „ausrechnen“ meint und wozu man das tut. Was bedeutet es z.B. einen Spannungstensor „auszurechnen“? Der Spannungstensor ist eben keine Zahl. Er ist ein Tensor. Was würde es in Analogie bedeuten, einen Vektor, z.B. eine Drehachse „auszurechnen“? Die Drehachse ist die Drehachse, das, worum sich das System dreht. Welche andere Information möchte man über diesen Vektor ausrechnen? Und was würde man damit anfangen?

Natürlich kann man zwanghaft Koordinaten einführen und die Koordinaten dieses Vektors ausrechnen. Die Koordinaten haben aber keine eigenständige physikalische Bedeutung. Mit den Koordinaten an sich lässt sich also nichts anfangen. Einzig das Gesamtobjekt ist physikalisch sinnvoll. Das einzige, was man mit den Koordinaten tun könnte, ist also, sie wieder zu einem Vektor zusammensetzen, um diesen in

einem nächsten Rechenschritt weiterzuverwenden. Wieso dann aber Koordinaten einführen?<sup>9</sup>

Man beachte, dass die Frage nach einem *effizienten* Ausrechnen eine völlig andere ist! Für diese Art von Fragen gilt: „premature optimization is the root of all evil (or at least most of it)“<sup>10</sup>. Eine Basiswahl alleine macht nichts effizient. Die *richtige* Basis in der richtigen Situation macht Dinge effizient und auch nur, wenn man sie richtig einsetzt. Stumpf drauf losrechnen ist selten tatsächlich effizient.

---

<sup>9</sup>Das ignoriert natürlich ein paar außer-physikalische Aspekte, z.B. könnten ja in einer komplexen Gesamtberechnung einzelne Teilschritte durchaus von verschiedenen Leuten ausgerechnet werden. In diesem Fall ist das Einführen von Koordinaten eine Notwendigkeit, um ein Zwischenergebnis von einem Team zum anderen kommunizieren zu können.

<sup>10</sup>Donald Ervin Knuth, geb. 1938, amer. Informatiker und Mathematiker

## Aufgaben

### Aufgabe 1.1. – Casimir-Elemente von euklidischen Räumen

Es sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und  $e_1, \dots, e_n$  eine Orthonormalbasis.

a.) Zeige, dass der Casimir-Tensor

$$\Omega_V := \sum_{i=1}^n e_i \otimes e_i$$

unabhängig von der Basiswahl ist, d.h. wenn  $e'_1, \dots, e'_n$  eine weitere Orthonormalbasis von  $V$  ist, dann gilt:

$$\sum_{i=1}^n e_i \otimes e_i = \sum_{i=1}^n e'_i \otimes e'_i$$

Hinweis: Orthogonale Matrizen.

b.) Zeige, dass  $\Omega_V$  „isotrop“ ist, d.h. für alle Isometrien  $\rho : V \rightarrow V$  gilt: Die lineare Fortsetzung  $\rho^{\otimes 2}$  von  $v_1 \otimes v_2 \mapsto \rho(v_1) \otimes \rho(v_2)$  erfüllt  $\rho^{\otimes 2}(\Omega_V) = \Omega_V$ . Hinweis: Benutze a.

### Aufgabe 1.2. – Casimir-Elemente allgemein

Es sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $K$ -Vektorraum,  $b_1, \dots, b_n$  eine beliebige Basis von  $V$  und  $b_1^*, \dots, b_n^*$  die dazu passende duale Basis von  $V^*$ .

a.) Zeige, dass

$$\Omega := \sum_{i=1}^n b_i \otimes b_i^* \in V \otimes V^*$$

unabhängig von der Basiswahl ist.

Hinweis: Wenn  $A$  eine Basiswechselmatrix zwischen zwei Basen von  $V$  ist, wie sieht dann die Basiswechselmatrix der beiden dazugehörigen dualen Basen von  $V^*$  aus?

b.) Wie entspricht das dem Casimir-Element euklidischer Räume?

i.) Zeige zunächst, dass die Abbildung  $V \rightarrow V^*, v \mapsto \langle v, - \rangle$  ein Isomorphismus  $V \rightarrow V^*$  ist.

ii.) Was tut diese Abbildung mit einer Orthonormalbasis?

### Aufgabe 1.3. – Aber Tensoren sind doch so Buchstaben mit Indizes

Häufig wird einem von Physikern oder Ingenieuren ein Tensor lediglich als ein Buchstabe mit Indizes untergejubelt - z.B. der Spannungstensor  $\sigma_{ij}$ . Wir wollen verstehen, wie der Zusammenhang mit unserer Definition ist.

Es sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und  $e_1, \dots, e_n$  eine Orthonormalbasis. Wir betrachten das  $m$ -fache Tensorprodukt  $V^{\otimes m}$ . Wer mag, kann zur Vereinfachung  $n = 3$  und  $K = \mathbb{R}$  wählen.



- a.) Einen beliebigen Tensor aus  $V^{\otimes m}$  schreiben wir z.B. als  $T \in V^{\otimes m}$ , während er andernorts mit  $T_{j_1 \dots j_m}$  bezeichnet wird, was streng genommen nur eine Kollektion besonders nummerierter Zahlen aus  $K$  ist. Wie ist der Zusammenhang zwischen  $T$  und  $T_{j_1 \dots j_m}$ ?

Hinweise: Von  $V$  induzierte Basiswahl für  $V^{\otimes m}$ , Vergleiche mit einem Vektor  $v \in V$  und  $v_i$ .

- b.) Ein sehr häufig verwendeter „Buchstabe mit Indizes“ ist das Kronecker- $\delta$ , oder auch der  $\delta_{ij}$ -Tensor. Um welchen Tensor handelt es sich hier? Hinweis: Übersetze in die Schreibweise mit dem Tensorprodukt  $\otimes$ .

- c.) Die Spur eines Tensors zwischen seinem  $k$ -ten und  $l$ -ten Faktor wird in Indexschreibweise als Dopplung eines bestimmten Indexes an den entsprechenden Stellen notiert,  $T_{j_1 \dots j_{k-1} i j_{k+1} \dots j_{l-1} i j_{l+1} \dots j_m}$ , die eine Summe über  $i$  von 1 bis  $n$  impliziert (a.k.a. *Einstein'sche Summenkonvention*). Überzeuge dich, dass dies unserer Definition von Spur entspricht.

Üblich zum Spur nehmen ist auch eine Schreibweise mit dem Kronecker- $\delta$ :

$$T_{j_1 \dots j_{k-1} i j_{k+1} \dots j_{l-1} i j_{l+1} \dots j_m} \delta_{ir},$$

ebenfalls mit impliziter Summe über gedoppelte Indizes. Zeige, dass dies die gleiche Operation beschreibt.

- d.) Eine weitere häufiger zu findende Schreibweise mit dem Kronecker- $\delta$  ist die folgende:

$$T_{j_1 \dots j_{k-1} j_k j_{k+1} \dots j_{l-1} j_l j_{l+1} \dots j_m} \delta_{ir},$$

was üblicherweise gekürzt wird auf  $T_{j_1 \dots j_m} \delta_{j_{m+1} j_{m+2}}$ . Was ist der Unterschied zu c.)? Schreibe diesen Tensor ohne Indizes auf.

#### Aufgabe 1.4. – Was denn für Indizes?

Schön, dass dir die Index-Schreibweise noch nicht begegnet ist. Da wir in unserem Kurs so wenig wie möglich mit dieser Schreibweise arbeiten wollen, kann dies zu deinem Vorteil sein.

Es sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum mit Skalarprodukt und  $e_1, \dots, e_n$  eine Orthonormalbasis. Wir betrachten das  $m$ -fache Tensorprodukt  $V^{\otimes m}$ . Wer mag, kann zur Vereinfachung  $n = 3$  und  $K = \mathbb{R}$  wählen. Zeige, dass  $\text{tr}_{ir}(T) = \text{tr}_{i,m} \circ \text{tr}_{r,m+2} \circ \Omega(T)$  gilt.

#### Aufgabe 1.5. – Brauer-Diagramme

Wir wollen uns im Folgenden anhand ein paar Beispielen überzeugen, dass die Multiplikation zweier Brauer-Diagrammen tatsächlich dem Hintereinanderausführen der dazugehörigen linearen Abbildungen entspricht.

- a.) Schreibe die Brauer-Diagramme von den beiden Abbildungen  $\Pi_\sigma$  und  $\Omega$  aus Gleichung 1 auf und berechne das Brauer-Diagramm der Abbildung  $\Pi_\sigma \circ \Omega$ .

- b.) Wir haben für die Multiplikation zweier Brauer-Diagramme definiert, dass für jeden geschlossenen Kreis das Ergebnis-Diagramm mit dem Faktor  $\dim V$  multipliziert wird. Dieser Faktor muss so festgelegt werden, um Brauer-Diagramme als äquivalente Schreibweise für die vorgestellten linearen Abbildungen zwischen Tensoren benutzen zu können. Warum?

Hinweis: Spur vom Casimir-Element

- c.) Gegeben seien die folgenden Brauer-Diagramme:



Zeige, dass das Ergebnis der Multiplikation  $B_6 \circ B_5$  der linearen Abbildung, die durch Hintereinanderausführen von  $B_5$  und  $B_6$  gegeben ist, entspricht. Zeige dies auch für  $B_7 \circ B_8$ .

### Aufgabe 1.6. – Vom Sinn und Unsinn der Basen

- a.) Anna und Bernd stehen einer flachen Wand gegenüber. Anna hat die Position  $(9.5, 4, 0)^T$  und einen Ball in der Hand. Bernd steht bei  $(5.5, 2, 0)^T$  und die Wand hat Normalengleichung

$$2x - 1.5y = 12.5$$

mit Normalenvektor  $\mathbf{n} = (2, -1.5, 0)^T$  und Stützvektor  $\mathbf{p} = (4, -3, 0)^T$ .

Anna möchte Bernd den Ball so zuwerfen, dass er einmal an der Wand abprallt und dann in Bernds Händen landet. Dabei soll der Ball den Boden nicht berühren. Berechne die Trajektorie vom Ball und die Kraft, mit der Anna den Ball abwerfen muss unter der Annahme von Reibungsfreiheit, Vakuum etc.

Wir wollen jetzt nicht die Lösung für dieses Problem finden, sondern vielmehr fragen: Ist die hier gewählte Basis zur Beschreibung der Ausgangssituation oder für die Berechnung hilfreich? Wäre es nicht viel einfacher, die Situation basisfrei zu beschreiben? Wie sähe eine solche Beschreibung aus?

Die Frage selbst können wir basisfrei z.B. so formulieren:

- b.) Anna und Bernd stehen 2.5 Meter voneinander entfernt in einer ebenen Wiese einer flachen Wand gegenüber. Beide haben einen Abstand zur Wand von 5 Metern. Anna hat einen Ball in der Hand und möchte ihn Bernd so zuwerfen, dass er einmal an der Wand abprallt und dann in Bernds Händen landet. Dabei soll der Ball den Boden nicht berühren. Berechne die Trajektorie vom Ball und die Kraft, mit der Anna den Ball abwerfen muss unter der Annahme von Reibungsfreiheit, Vakuum etc.

Welche Basis würde man am ehesten wählen, um diese Aufgabe zu lösen und warum? Welche Wahlfreiheiten haben wir? Gibt es mehr als eine sinnvolle Basis?

### Aufgabe 1.7. – Wilde Behauptungen (schwer)

Im Skript wurde behauptet:

„alle physikalisch sinnvollen Dinge [sind] von sich aus basisfrei und somit zwangsläufig auch basisfrei berechenbar, wenn sie überhaupt berechenbar sind“

Überzeuge dich davon, dass das nicht nur so daher gesagt ist, sondern ein beweisbarer Fakt ist. Insbesondere ist hier als Teilbehauptung enthalten: Es ist möglich, physikalisch sinnvolle Daten (sowohl die Input- als auch Output-Daten der Berechnung) basisfrei so zu repräsentieren, dass damit immer noch Berechnungen möglich sind.

(Und es sei erneut davor gewarnt, dass „berechnen“ nicht „effizient berechnen“ bedeutet)

### Aufgabe 1.8. – Komplexifizierung

Offensichtlich ist  $\mathbb{R}^n$  eine Teilmenge eines  $\mathbb{C}$ -Vektorraums, nämlich  $\mathbb{C}^n$ . Dies tritt häufiger auf: Der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der Polynome mit reellen Koeffizienten  $\mathbb{R}[x_1, \dots, x_n]$  Teilmenge des  $\mathbb{C}$ -Vektorraums der Polynome mit komplexen Koeffizienten  $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ , der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum der (stetigen/differenzierbaren/...) Funktionen  $X \rightarrow \mathbb{R}$  ist Teilmenge des  $\mathbb{C}$ -Vektorraums der (stetigen/differenzierbaren/...) Funktionen  $X \rightarrow \mathbb{C}$ .

Ziel dieser Aufgabe ist es, zu zeigen, dass das kein Zufall ist, sondern dass wir jeden  $\mathbb{R}$ -Vektorraum auf natürliche, basisfreie Weise als Teilmenge eines  $\mathbb{C}$ -Vektorraums betrachten können, der sich „nur durch die Wahl der Koeffizienten von  $V$  unterscheidet“.

a.) Vorbereitung: Erwinnere dich daran, dass  $\mathbb{C}$  auch als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aufgefasst werden kann.

Allgemeiner: Erwinnere dich daran, dass jeder  $\mathbb{C}$ -Vektorraum auch als  $\mathbb{R}$ -Vektorraum aufgefasst werden kann. (Dies nennt man Restriktion der Skalare)

b.) Definiere die Komplexifizierung  $V_{\mathbb{C}}$  (auch Skalarerweiterung genannt) als den folgenden  $\mathbb{C}$ -Vektorraum: Seine Elemente sind dieselben wie die des  $\mathbb{R}$ -Vektorraums  $\mathbb{C} \otimes_{\mathbb{R}} V$  (=Tensorprodukt von  $\mathbb{R}$ -Vektorräumen). Die Addition ist auch die des Tensorprodukts. Die Multiplikation mit Skalaren ist hingegen gegeben durch

$$\forall z, w \in \mathbb{C}, v \in V : z \cdot (w \otimes v) := (zw) \otimes v$$

Zeige, dass diese Addition und Skalarmultiplikation wirklich einen  $\mathbb{C}$ -Vektorraum definiert.

c.) Überzeuge dich davon, dass die obigen Beispiele alle Komplexifizierungen sind.

d.) Zeige, dass Skalarerweiterung die Dimension erhält in folgendem Sinne:  $\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{C}}(V_{\mathbb{C}})$  (Wer es für nötig erachtet, darf sich wieder „für endlich-dimensionale  $V$ “ dazudenken). Präziser: Zeige, dass  $\{1 \otimes b \mid b \in B\}$  eine  $\mathbb{C}$ -Basis von  $V_{\mathbb{C}}$  ist, wenn  $B$  eine  $\mathbb{R}$ -Basis von  $V$  ist.

e.) Was tut Restriktion der Skalare hingegen mit der Dimension?

f.) Komplexifizierung ist „funktoriell“, also mit linearen Abbildungen verträglich: Ist  $f : V \rightarrow W$  eine  $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung, dann ist  $f_{\mathbb{C}} : V_{\mathbb{C}} \rightarrow W_{\mathbb{C}}, z \otimes v \mapsto z \otimes f(v)$  eine  $\mathbb{C}$ -lineare Abbildung. Es gilt  $(\text{id}_V)_{\mathbb{C}} = \text{id}_{V_{\mathbb{C}}}$  und  $(f \circ g)_{\mathbb{C}} = f_{\mathbb{C}} \circ g_{\mathbb{C}}$ .

## 2 Darstellungstheorie – Warum und was ist das überhaupt?

### 2.1 Einige Nutzen von Darstellungstheorie

**Geschickte Basiswahl** Wie dem ein oder anderen aufgefallen sein wird, haben wir in dem vorherigen Kapitel Tensoren eingeführt, ohne eine Basis für deren Vektorraum zu benötigen oder vielleicht im Nachgang eine Basis zu konstruieren. Allgemeine Aussagen lassen sich schließlich auch weitgehend basisfrei, oder zumindest basis-unabhängig machen. Jetzt wollen manche jedoch Tensoren nicht nur einfach so für ein bisschen hübsche Mathematik benutzen sondern tatsächlich mal ein Problem mit Zahlen (und zwar nicht nach dem Mathematiker-Prinzip „Sei  $a \in \mathbb{R}$ ...“, sondern halt mal welche mit echten Ziffern) möglichst *effizient* ausrechnen. Dafür möchte man meistens ab irgendeinem Punkt eine Basis wählen, idealerweise eine, die orthonormal bezüglich eines gewählten Skalarproduktes ist.

Hieraus ließe sich recht simpel eine orthonormale Basis für den Tensorraum ableiten. Aber ist diese Basis auch eine gute Basis? Was macht eine „gute“ Basis überhaupt aus?

Diese Frage lässt sich auch auf den Vektorraum der Tensoren übertragen. Wir werden genauer definieren, was es für eine Basis heißt, günstig gewählt zu sein und herausfinden, wie solch eine Basis für symmetrische Tensoren bzw. Polynome aussieht.

#### **Einschränkung auf erlaubte lineare Abbildungen zwischen Tensoren und ihre Klassifikation**

Wie für Tensoren bereits deutlich wurde, gibt es unendlich viele lineare Abbildungen zwischen den Tensorräumen. Jetzt wollen wir mit Tensoren jedoch meistens physikalische Probleme beschreiben, die bestimmten grundsätzlichen Symmetrien unterliegen. So wird z.B. ein Ball bei gleichen Bedingungen immer die gleiche Flugbahn haben, ganz egal wie wir das Koordinatensystem drehen, um die Flugbahn zu berechnen. Diese Erkenntnis lässt sich in mathematische Forderungen gießen, welche uns die *natürlichen* linearen Abbildungen zwischen Tensoren klassifizieren lässt.

**Berechnungen mit linearen Abbildungen** Wie wir zuvor gelernt haben, lässt sich im Prinzip jede (multi-)lineare Abbildung durch eine i.A. sehr große Matrix darstellen. Nun ist eine Berechnung dann besonders einfach (bzw. bei Nutzung eines Computers besonders schnell), wenn diese Matrix viele Nullen hat. Dies ist ein beliebter Grund in der angewandten Numerik, um einen Basiswechsel durchzuführen: Ziel ist es, die Basis so zu drehen, dass eine voll besetzte Matrix maximal viele Nullen hat, da sich so bei hinreichend großen Dimensionen die Rechenzeit insgesamt stark reduziert.

Mit Hilfe der Darstellungstheorie können wir sogar einen Schritt weiter gehen – Wir werden für eine bestimmte Klasse von linearen Abbildungen nicht nur Basen finden, die uns viele Nullen in der Matrix geben, sondern uns auch verstehen lässt, wieso diese Nullen da stehen.

## 2.2 Was ist eine Darstellung?

### 2.1 Definition (Darstellungen):

Sei  $G$  eine Gruppe und  $\mathbb{K}$  ein Körper. Eine Darstellung von  $G$  über  $\mathbb{K}$  besteht aus

- einem  $\mathbb{K}$ -Vektorraum  $T$ ,
- einer Abbildung  $\cdot : G \times T \rightarrow T, (g, t) \mapsto g \cdot t$ , genannt „Operation“ (der Gruppe auf dem Vektorraum),

die die Axiome in Tabelle 2.1 erfüllen. Man sagt auch „ $G$  operiert auf dem Vektorraum  $T$ “ statt „ $T$  ist eine Darstellung von  $G$ “.

Axiome von Darstellungen	Bedeutung
Linearität	$\forall g \in G : (T \rightarrow T, v \mapsto g \cdot v)$ ist eine lineare Abbildung
Assoziativität	$\forall g, h \in G \forall v \in T : g \cdot (h \cdot v) = (g \cdot h) \cdot v$
Nichttrivialität/Normierung	$\forall v \in T : 1_G \cdot v = v$
Axiome von Homomorphismen	Bedeutung
$\mathbb{K}$ -Linearität	$f$ ist eine lineare Abbildung $U \rightarrow T$
$G$ -Linearität	$\forall g \in G, u \in U : f(g \cdot u) = g \cdot f(u)$

Tabelle 2.1: Definierende Eigenschaften von Darstellungen und Homomorphismen zwischen Darstellungen

Sind  $U, T$  zwei Darstellungen von  $G$  und  $f : U \rightarrow T$  eine Abbildung, so heißt  $f$  Homomorphismus oder  $\mathbb{K}G$ -lineare Abbildung, falls die beiden Axiome in Tabelle 2.1 erfüllt sind. Den Raum aller  $\mathbb{K}G$ -linearen Abbildungen von  $T$  nach  $W$  bezeichnen wir mit  $\text{Hom}_{\mathbb{K}G}(U, T)$ . Eine  $\mathbb{K}G$ -lineare Abbildung von  $T$  nach  $T$  (also gleicher Definitions- und Zielraum) heißt Endomorphismus, der Raum aller solcher Abbildungen wird mit  $\text{End}_{\mathbb{K}G}(T)$  notiert.

Existiert ein Homomorphismus  $f' : V \rightarrow U$  mit  $f \circ f' = f' \circ f = \text{id}$ , so nennt man  $f$  Isomorphismus der Darstellungen.

### Vereinbarung:

Wir werden ausschließlich endlich-dimensionale Darstellungen betrachten. Es gibt auch eine reichhaltige Theorie unendlich-dimensionaler Darstellungen, die für uns aber nicht relevant sein wird.

Wir werden uns außerdem ausschließlich für die Fälle  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  und ein bisschen  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  interessieren und andere Körper außen vor lassen. (Typischerweise ist Darstellungstheorie über  $\mathbb{C}$  immer der einfachste Fall und Darstellungstheorie über anderen Körpern als  $\mathbb{C}$  ist mindestens genauso schwierig oder schwieriger)

**2.2:** Eine Darstellung kann alternativ aufgefasst werden als Gruppenhomomorphismus  $G \rightarrow GL(T)$ : Jedem Gruppenelement  $g \in G$  wird die (invertierbare!) lineare Abbildung  $v \mapsto g \cdot v$  zugeordnet. Ist umgekehrt ein Gruppenhomomorphismus  $\mathcal{D} : G \rightarrow GL(T)$  gegeben, so kann man  $T$  als  $G$ -Darstellung auffassen, indem man  $g \cdot v := \mathcal{D}(g)(v)$  definiert. Diese beiden Sichtweisen sind völlig identisch und beliebig austauschbar. Je nach Situation kann es einfacher sein, einen Homomorphismus nach  $GL(T)$  oder direkt die Operation der Gruppe auf  $T$  zu definieren. Insbesondere können wir eindimensionale Darstellungen äquivalent auch als Gruppenhomomorphismen  $G \rightarrow \mathbb{K} \setminus 0$  auffassen.

Hat man aus irgendeinem Grund eine Basis von  $T$  gegeben, kann man bekanntlich lineare Abbildungen mit Matrizen identifizieren. Eine Darstellung ist in dieser Sichtweise dann eine Abbildung  $D : G \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$ , die jedem Gruppenelement  $g \in G$  eine (invertierbare) Matrix  $D(g)$  zuordnet, sodass  $D(1) = 1_{n \times n}$  und  $D(g \cdot h) = D(g) \cdot D(h)$  erfüllt sind. Solch eine Abbildung nennt man dann auch Matrixdarstellung.

**2.3 Beispiel:** •  $GL(T)$  operiert auf  $T$  via  $g \cdot v := g(v)$ , die sogenannte natürliche oder kanonische Darstellung.

- Die symmetrische Gruppe  $S_m$  operiert auf  $\mathbb{K}^m$  durch Vertauschen der Komponenten (die sogenannte Permutations- oder kanonische Darstellung):

$$\sigma \cdot (x_1, \dots, x_m) := (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(m)})$$

und auf der Tensorpotenz  $T = V^{\otimes m}$  durch Vertauschen der Faktoren:

$$\sigma \cdot v_1 \otimes \dots \otimes v_m := v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma^{-1}(m)}$$

- Jede beliebige Gruppe hat triviale Darstellungen, nämlich für jeden beliebigen Vektorraum  $T$ :

$$g \cdot v := v$$

Spricht man von *der* trivialen Darstellung meint man damit diejenige mit  $T = \mathbb{K}$ .

- Die symmetrische Gruppe hat eine nichttriviale, eindimensionale Darstellung mit  $T = \mathbb{K}$ , das Signum  $\text{sgn} : G \rightarrow \mathbb{K}$ :

$$\text{sgn}(\sigma) := \begin{cases} -1 & \text{falls } \sigma \text{ ungerade viele Inversionen enthält} \\ +1 & \text{andernfalls} \end{cases}$$

- Der Raum  $T := \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  der Polynome in  $n$  Variablen mit Koeffizienten aus  $\mathbb{K}$  ist eine Darstellung für die Gruppe  $G = GL_n(\mathbb{K})$  der invertierbaren  $n \times n$ -Matrizen via:

$$g \cdot p := p \left( \sum_{i=1}^n (g^{-1})_{1i} X_i, \sum_{i=1}^n (g^{-1})_{2i} X_i, \dots, \sum_{i=1}^n (g^{-1})_{ni} X_i \right)$$

Für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  oder  $\mathbb{C}$  können wir  $T$  auch als Raum der polynomiellen Abbildungen  $\mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}$  auffassen. Dann schreibt sich dieselbe Definition etwas einfacher als

$$g \cdot p := X \mapsto p(g^{-1}(X))$$

(Aufgabe 2.1: Beweise, dass das  $^{-1}$ , das ab und zu auftrat, wirklich notwendig ist)

### 2.3 Wie kann ich mir eine Darstellung basteln?

#### 2.4 Lemma und Definition (Neue Darstellungen aus vorhandenen):

Sei  $G$  eine Gruppe und  $U, T$  Darstellungen von  $G$  über einem festen Körper  $\mathbb{K}$ . Die folgenden sind dann auch Darstellungen von  $G$ :

- a.) Die direkte Summe  $U \oplus T := \{ (u, t) \mid u \in U, t \in T \}$  wird zu einer Darstellung durch

$$g \cdot (u, t) := (gu, gt)$$

- b.) Das Tensorprodukt  $U \otimes T$  durch

$$g(u \otimes t) := (gu) \otimes (gt)$$

Das beinhaltet insbesondere alle Tensorpotenzen  $U^{\otimes k}$ .

- c.) Der Raum der  $\mathbb{K}$ -linearen Abbildungen  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, T)$  durch

$$g \cdot f := u \mapsto gf(g^{-1}u)$$

- d.) Der Dualraum  $U^* := \text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, \mathbb{K})$  durch

$$g \cdot \phi := u \mapsto \phi(g^{-1}u)$$

(Aufgabe 2.1 Beweise, dass das  $^{-1}$  wirklich notwendig ist)

- e.) Ist  $H \leq G$  eine Untergruppe von  $G$ , dann operiert  $H$  natürlich auch auf  $T$ . Die Darstellung von  $H$ , die wir so erhalten, nennt man Restriktion von  $T$  auf  $H$ .

**2.5:** Man beachte, dass d. ein Spezialfall von c. ist, wobei man für  $W$  die triviale Darstellung  $\mathbb{K}$  eingesetzt hat.

**2.6 Beispiel** (Zentrales Beispiel – Die zwei- und dreidimensionalen Dreh- bzw. Isometriegruppen):

Wie bereits festgestellt, ist jeder Vektorraum  $V$  eine  $GL(V)$ -Darstellung. Ist  $V$  ein reeller Vektorraum, auf dem ein Skalarprodukt gegeben ist, so hat  $GL(V)$  die Untergruppe der Isometrien  $O(V)$ , d.h. die Gruppe aller mit dem Skalarprodukt verträglichen Abbildungen:

$$O(V) := \{ f \in GL(V) \mid \forall v, w \in V : \langle f(v), f(w) \rangle := \langle v, w \rangle \}$$

In dieser Gruppe enthalten sind z.B. alle Rotationen, alle Spiegelungen sowie die Inversion  $\iota : v \mapsto -v$  (die manchmal eine Drehung ist).

Wir werden die Darstellungstheorie der Isometriegruppen von zwei- und dreidimensionalen reellen Vektorräumen entwickeln. Wir werden also  $V, V^{\otimes m}$ , den Raum der polynomiellen Abbildungen  $V \rightarrow \mathbb{K}$  uvm. als Darstellungen von  $O(V)$  auffassen.

Es ist außerdem manchmal von Vorteil, den dreidimensionalen Raum auch als Darstellung für die zweidimensionale Isometriegruppe auffassen, indem wir  $O_2$  als Untergruppe von  $O_3$  auffassen. Dies geschieht, indem wir eine Ebene  $E \leq V$  festlegen und  $O_2(E)$

$$g(u + u') := gu + u'$$

festlegen für alle  $u \in E$  und  $u' \in E^\perp$ , d.h. die gewählte Ebene verhält sich wie die kanonische Darstellung von  $O_2$ , während jeder Vektor in der zu ihr orthogonalen Gerade fixiert wird. Da  $V = E \oplus E^\perp$  gilt, haben wir damit die Operation für alle Vektoren aus  $V$  festgelegt.

Dies ist sinnvoll in physikalischen Systemen mit einer festen (unendlich ausgedehnten) Ebene, wo zwar alles rotations- und spiegelsymmetrisch ist, aber nur solange diese Ebene erhalten bleibt.

## 2.4 Weitere grundlegende Begriffe der Darstellungstheorie

**2.7 Definition** (Unterdarstellungen):

Sei  $T$  eine Darstellung von  $G$ . Ein Untervektorraum  $U \leq T$  heißt  $G$ -invarianter Unterraum oder Unterdarstellung von  $T$ , falls  $U$  unter der Gruppenoperation abgeschlossen ist, d.h.

$$\forall g \in G : g \cdot U = U$$

**2.8 Beispiel:** •  $\{0\}$  und  $T$  sind immer Unterdarstellungen von  $T$ .

- Die Gerade  $U_1 = \{ \lambda(1, 1, \dots, 1) \mid \lambda \in K \}$  und die Hyperebene  $U_2 := \{ (x_1, \dots, x_m) \mid \sum_{i=1}^m x_i = 0 \}$  sind zwei Unterdarstellungen der Permutationsdarstellung von  $G = S_m$  auf  $T = \mathbb{K}^m$ . Falls  $\mathbb{K} \in \{ \mathbb{R}, \mathbb{C} \}$  ist, dann gilt  $T = U_1 \oplus U_2$ .



### 2.9 Definition (Irreduzible Darstellungen):

Eine Darstellung, die exakt zwei Unterdarstellungen hat (nämlich  $\{0\}$  und sich selbst), heißt irreduzibel oder einfach. Eine nicht-einfache Darstellung heißt entsprechend auch reduzibel.

**2.10:** Man vergleiche mit der Definition einer Primzahl als natürliche Zahl, die genau zwei Teiler hat.

**2.11:** Weil wir „exakt zwei“ und nicht „höchstens zwei“ fordern, ist der Nullvektorraum  $\{0\}$  niemals eine irreduzible Darstellung.

**2.12 Beispiel:** • Aus Dimensionsgründen ist jede eindimensionale Darstellung automatisch irreduzibel.

- $V$  ist eine irreduzible Darstellung von  $GL(V)$  unabhängig vom Körper.
- $\mathbb{K}^n$  ist eine irreduzible Darstellung von  $O_n$ , sowohl für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  als auch  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .
- $\mathbb{K}^3$  ist *nicht* irreduzibel als Darstellung von  $O_2$ .

**2.13:** An den letzten beiden Beispielen erkennen wir, dass die Restriktion einer irreduziblen Darstellung auf eine Untergruppe selbst wieder irreduzibel sein kann, aber nicht muss: Wenn man von  $GL_3$  zu  $O_3$  einschränkt, bleibt  $\mathbb{K}^3$  irreduzibel; wenn wir von  $O_3$  zu  $O_2$  einschränken, bleibt es das nicht.

Auch die anderen Konstruktionsmöglichkeiten von neuen Darstellungen aus bekannten erhalten i.A. Irreduzibilität nicht:

- Die direkte Summe von zwei Darstellungen  $\neq 0$  ist niemals irreduzibel, weil die beiden Summanden invariante Unterräume sind.
- Das Tensorprodukt von Darstellungen ist immer reduzibel, wenn mindestens einer der Faktoren reduzibel ist, denn  $(U_1 \oplus U_2) \otimes W = (U_1 \otimes W) \oplus (U_2 \otimes W)$ . Das Tensorprodukt von irreduziblen Darstellungen ist i.A. aber auch nicht irreduzibel, z.B. ist  $T \otimes T$  niemals irreduzibel, wenn  $T$  nicht zufällig eindimensional ist. (Wenn es eindimensional ist, ist  $T \otimes T$  natürlich auch eindimensional und dementsprechend ausnahmsweise doch irreduzibel)

Es ist i.A. ein sehr schweres Problem, zu bestimmen, ob ein Tensorprodukt von zwei irreduziblen wieder irreduzibel ist und, wenn es das nicht ist, wie die irreduziblen Unterräume des Tensorprodukts genau aussehen. Im Falle  $G = O_3$  ist diese Fragestellung unter dem Namen „Clebsch<sup>11</sup>-Gordan<sup>12</sup>-Theorie“ bekannt.

Einzige Ausnahme ist das Dualisieren:

### 2.14 Lemma:

Eine endlichdimensionale Darstellung  $T$  ist irreduzibel genau dann, wenn  $T^*$  irreduzibel ist.

---

<sup>11</sup>Alfred Clebsch, 1833–1872, dt. Mathematiker

<sup>12</sup>Paul Albert Gordan, 1832–1912, dt. Mathematiker

## Aufgaben

### Aufgabe 2.1. – Komische Minus Einsen: Invertieren für die Assoziativitätsbedingung (leicht)

a.) In den Beispielen wurde definiert, dass die symmetrische Gruppe  $S_m$  durch

$$\sigma \cdot (x_1, \dots, x_m) := (x_{\sigma^{-1}(1)}, \dots, x_{\sigma^{-1}(m)})$$

auf  $\mathbb{K}^m$  auf der Tensorpotenz  $V^{\otimes m}$  durch

$$\sigma \cdot v_1 \otimes \dots \otimes v_m := v_{\sigma^{-1}(1)} \otimes \dots \otimes v_{\sigma^{-1}(m)}$$

operiert.

b.) Ebenfalls definiert wurde, dass bei einer gegebenen Darstellung  $T$  der Dualraum  $T^* := \text{Hom}_K(T, K)$  zu einer Darstellung derselben Gruppe wird, indem man sie durch

$$g \cdot \phi := t \mapsto \phi(g^{-1}t)$$

operieren lässt.

c.) Ebenfalls definiert wurde, dass  $G = GL_n(\mathbb{K})$  auf  $T := \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$  dem Raum der polynomiellen Abbildungen durch

$$g \cdot p := X \mapsto p(g^{-1}X)$$

operieren lässt.

Beweise, dass das Invertieren in diesen Definitionen nötig ist, damit die Assoziativitätsbedingung gilt.

### Aufgabe 2.2. – Darstellung der symmetrischen Gruppe mit Matrizen

Wie lautet die Matrixdarstellung zu der obigen Darstellung von  $S_m$  auf  $\mathbb{K}^m$ ?

### Aufgabe 2.3. – Dualisiere eine Matrixdarstellung

Wenn  $\mathcal{D} : G \rightarrow \mathbb{K}^{n \times n}$  eine Matrixdarstellung von  $G$  auf  $T$  bzgl. irgendeiner fest gewählten Basis  $B \subseteq T$  ist, wie lautet die Matrixdarstellung  $\mathcal{D}^*$  der dualen Darstellung von  $G$  auf dem Dualraum  $T^*$  bzgl. der dualen Basis  $B^*$ ?

### Aufgabe 2.4. – Basiswechsel einer Darstellung

Wenn  $\mathcal{D}, \mathcal{D}' : G \rightarrow GL_n(\mathbb{K})$  zwei Matrixdarstellungen derselben Darstellung von  $G$  auf  $T$  sind, d.h.  $\mathcal{D}$  bzgl. einer Basis  $B$  und  $\mathcal{D}'$  bzgl. einer zweiten Basis  $B'$  gedacht ist, und wenn  $S \in GL_n(\mathbb{K})$  die Basiswechselmatrix von  $B$  nach  $B'$  ist, was ist dann der Zusammenhang zwischen  $\mathcal{D}$ ,  $S$  und  $\mathcal{D}'$ ?

**Aufgabe 2.5. – Isomorphismus zwischen Tensorprodukt und linearen Abbildungen**

- a.) Es seien  $U$  und  $T$  zwei endlich-dimensionale Darstellungen von  $G$ . Man beweise, dass die beiden Darstellungen  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, T)$  und  $U^* \otimes T$  via

$$\alpha : U^* \otimes T \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(U, T), \phi \otimes t \mapsto (u \mapsto \phi(u)t)$$

isomorph sind.

Insbesondere erhalten wir im Spezialfall  $U = T$  einen Isomorphismus zwischen  $U^* \otimes U$  und  $\text{End}_{\mathbb{K}}(U)$ .

- b.) Für  $U = T$ , wie lautet der Tensor, der durch  $\alpha$  auf  $\text{id}_U$  abgebildet wird?
- c.) Zeige: Die Auswertungsabbildung  $\varepsilon : U^* \otimes U \rightarrow \mathbb{K}, \phi \otimes u \mapsto \phi(u)$  ist  $G$ -linear.
- d.)  $\varepsilon \circ \alpha^{-1}$  ist eine  $G$ -lineare Abbildung  $\beta : \text{End}_{\mathbb{K}}(U) \rightarrow \mathbb{K}$ . Welche?

**Aufgabe 2.6. – „Matrizen als 2-Tensoren“**

Wir benutzen die Bezeichnungen der vorherigen Aufgabe.

- a.) Wenn je eine Basis  $B \subseteq U, C \subseteq T$  gewählt ist, dann sei  $B^*$  die dazu gehörige duale Basis von  $U^*$ . Was tut  $\alpha$  dann mit den Elementen der Basis  $\{b^* \otimes c \mid b \in B, c \in C\}$ ? Wie sehen die Darstellungsmatrizen dieser linearen Abbildungen aus?
- b.) Wenn wir mittels  $\alpha$  und Basiswahl also  $U^* \otimes U$  mit  $\mathbb{K}^{n \times n}$  identifizieren, welcher Abbildung  $U^* \otimes U \rightarrow \mathbb{K}$  entspricht dann die Spurabbildung  $\text{tr} : \mathbb{K}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{K}$ ?

**Aufgabe 2.7. – Reduzibilität von  $T \otimes T$**

Zeige, dass  $T \otimes T$  (und entsprechend auch keine höhere Tensorpotenz) niemals irreduzibel ist, wenn  $\dim(T) \neq 1$  ist.

**Aufgabe 2.8. – Irreduzibilität von  $T^* \implies$  Irreduzibilität von  $T$ ?**

Zeige, dass  $T$  irreduzibel ist, wenn  $T^*$  es ist.

**Aufgabe 2.9. – Kanonische Darstellung von  $SO_2$**

- a.) Zeige, dass die kanonische Darstellung  $V = \mathbb{R}^2$  von  $G = SO_2$  irreduzibel ist.
- b.) Zeige, dass die komplexifizierte Darstellung  $V_{\mathbb{C}} = \mathbb{C}^2$  von  $G$  reduzibel ist.
- c.) Finde die irreduziblen Unterdarstellungen von  $V_{\mathbb{C}}$ .  
Hinweis: Eigenräume.

**Aufgabe 2.10. – Die kanonische Darstellung von  $SO_3$  ist irreduzibel**

Zeige, dass  $\mathbb{K}^3$  eine irreduzible Darstellung von  $G = SO_3$  ist sowohl für  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  als auch für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

**Aufgabe 2.11. – (Nicht-)Isomorphie von  $V$  und  $V^*$** 

Sei  $V$  ein endlich-dimensionaler  $\mathbb{R}$ -Vektorraum. Zweck dieser Aufgabe ist es, genauer zu beleuchten, wieso  $V$  und  $V^*$  grundverschiedene Vektorräume sind, obwohl sie als Vektorräume ja isomorph sind (d.h. die gleiche Dimension haben)

- a.) **Manchmal sind sie isomorph – Satz von Riesz.** Es sei ein Skalarprodukt  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  auf  $V$  gegeben. Zeige, dass  $V$  und  $V^*$  als  $O(V)$ -Darstellungen via  $V \rightarrow V^*, v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$  isomorph sind.
- b.) (leicht bis mittel) **Manchmal aber auch nicht.** Zeige, dass  $V$  und  $V^*$  *nicht* isomorph sind als  $GL(V)$ -Darstellungen.

**2.15:** In allen Kontexten, in denen auch mit schiefen Koordinatensystemen gerechnet werden muss, *muss* deshalb zwischen  $V$  und  $V^*$  sowie zwischen ko- und kontravarianten Tensoren unterschieden werden, da es keinen in diesem Kontext natürlichen Isomorphismus  $V \cong V^*$  gibt.

In allen Kontexten, in denen ausschließlich mit orthonormierten Koordinatensystemen gerechnet wird, existiert hingegen ein für diesen Kontext natürlicher Isomorphismus, sodass es sinnvoll ist, alle Tensoren gleich zu behandeln. Die Unnatürlichkeit des allgemeinen Falls wird so in der Wahl des Skalarprodukts versteckt.

**Aufgabe 2.12. – Quotienten**

Das duale Konzept zu Unterdarstellungen sind Quotientendarstellungen. Zeige: Ist  $V$  eine Darstellung von  $G$  und  $U \leq V$  ein  $G$ -invarianter Unterraum, dann ist auch der Quotient  $V/U$  eine Darstellung von  $G$  via  $g \cdot \bar{v} := \overline{g \cdot v}$ .

## 3 Darstellungstheorie – Level 0

### 3.1 Der Mittelwerttrick: Summieren und integrieren über eine Gruppe

#### 3.1 Definition (Symmetrische Tensoren):

Ein Tensor  $m$ -ten Grades  $t \in V^{\otimes m}$  heißt symmetrisch, wenn er ein Fixpunkt der Operation der Permutationsgruppe  $S_m$  ist, d.h. wenn

$$\forall \sigma \in S_m : \sigma \cdot t = t$$

gilt. Der Raum der symmetrischen Tensoren wird symmetrische (Tensor-)Potenz genannt und  $\text{Sym}^m(V)$  geschrieben.

#### 3.2 Beispiel:

- $v \otimes v \otimes \cdots \otimes v$  ist symmetrisch und umgekehrt: Ein reiner Tensor  $v_1 \otimes v_2 \otimes \cdots \otimes v_m$  ist genau dann symmetrisch, wenn alle  $v_1, \dots, v_m$  Vielfache eines Vektors  $v$  sind.

- $v \otimes w + w \otimes v$  ist symmetrisch. Man beachte, dass  $v \otimes w + w \otimes v = (v + w) \otimes (v + w) - v \otimes v - w \otimes w$  ist. Man kann allgemein zeigen, dass  $\text{Sym}^m(V) = \text{span}_{\mathbb{K}} \{ v \otimes \cdots \otimes v \mid v \in V \}$  ist.

#### 3.3 Lemma (Mittelwerttrick):

Die Projektion auf den Unterraum der symmetrischen Tensoren ist gegeben durch

$$q(t) := \frac{1}{|S_m|} \sum_{\sigma \in S_m} \sigma \cdot t$$

und ist  $O_n$ -linear. Zur Erinnerung:  $|S_m| = m!$ .

Die obige Idee, den Mittelwert über eine Gruppe zu bilden und daraus eine Projektion zu basteln, werden wir häufiger verwenden. Definieren wir uns also allgemeiner:

#### 3.4 Definition (Mittelwerttrick für endliche Gruppen):

Es sei  $T$  eine Darstellung von  $G$ . Der Mittelwert der Wirkung einer endlichen Gruppe  $G$  auf einen Vektor  $t \in T$  berechnet sich wie folgt:

$$\frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g(t)$$

Dies ist genau die Projektion von  $T$  auf den Untervektorraum der  $G$ -Fixpunkte.

**3.5:** Da wir uns vorwiegend mit  $O_3$  beschäftigen, reicht diese Definition allerdings nicht aus. Wie uns bestimmt bereits aufgefallen ist, ist  $O_3$  nicht endlich, was uns auf den ersten Blick ein paar Schwierigkeiten für die obige Operation einhandelt. Zum Glück zählt  $O_3$  zu den kompakten Gruppen, sodass wir die Summe infinitesimalisieren können, ohne über ein unendliches Volumen zu integrieren.

**3.6 Definition** (Mittelwerttrick für kompakte Gruppen & Integration über kompakte Gruppen):

Sei  $G$  eine kompakte Gruppe mit Darstellung auf einem Vektorraum  $T$ . Dann können wir den Mittelwerttrick auffassen als Integral über die Wirkung von  $G$  auf einen Vektor  $t \in T$ :

$$\frac{1}{|G|} \int_G g(t) \, dg$$

Auch dies ist die Projektion von  $T$  auf den Untervektorraum der  $G$ -Fixpunkte.

Wir werden nicht präzise machen, wie das Integral tatsächlich definiert ist. Man kann aber zeigen, dass für alle kompakten Gruppen  $G$  ein Integral  $\int_G$  existiert (das sogenannte Haar<sup>13</sup>-Integral), das stetige Funktionen von  $G$  in einen endlich-dimensionalen  $\mathbb{R}$ - oder  $\mathbb{C}$ -Vektorraum  $X$  als Input nimmt, einen Wert aus  $X$  als Output hat und u.A. folgende Eigenschaften hat:

- a.) Das Volumen von  $G$ , also  $|G| = \int_G 1 \, dg$  kann auf einen beliebigen konstanten Faktor  $\neq 0$  festgelegt werden. Wir setzen der Einfachheit halber immer  $|G| = 1$ .
- b.) Das Integral ist rechts- und linksinvariant, es gilt also für alle  $\phi : G \rightarrow X$  und jedes feste Gruppenelement  $h \in G$ :

$$\int_G \phi(gh) \, dg = \int_G \phi(g) \, dg = \int_G \phi(hg) \, dg$$

(Im üblichen Sinne: Das eine Integral existiert genau dann, wenn das andere existiert, und dann haben beide den gleichen Wert)

- c.) Invertieren ist volumenerhaltend, d.h. es gilt für alle  $\phi : G \rightarrow X$ :

$$\int_G \phi(g) \, dg = \int_G \phi(g^{-1}) \, dg$$

- d.) Konstante (also nicht vom Gruppenelement abhängige) lineare Abbildungen  $f : X \rightarrow X'$  können am Integral vorbeigezogen werden, es gilt also für alle  $\phi : G \rightarrow X$ :

$$\int_G f(\phi(g)) \, dg = f \left( \int_G \phi(g) \, dg \right)$$

Konkrete Beispiele für Haar-Integrale:

- Für endliche Gruppen ist das Haar-Integral einfach der diskrete Mittelwert:  $\int_G \phi(g) \, dg = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \phi(g)$ .
- Für die zweidimensionale Drehgruppe  $G = SO_2$  ist das Haarintegral durch Integration über alle Drehwinkel  $\alpha \in [0, 2\pi]$  gegeben (ggf. normiert mit  $\frac{1}{2\pi}$ , damit das Gesamtvolumen 1 wird)

---

<sup>13</sup>Alfréd Haar (1885–1933), ungarischer Mathematiker

- Für die Drehgruppe  $SO_3$  ist das Haar-Integral gegeben durch ein Doppelintegral der Form  $\int_{S^2} \int_{[0,2\pi]} \dots \sin(\alpha) d\alpha dv$ : Es wird über die Einheitssphäre  $S^2$  integriert, das sind alle Drehachsen, und über  $[0, 2\pi]$ , das sind alle möglichen Drehwinkel. Da eine Drehung um Winkel  $\alpha$  um eine Achse  $v$  dasselbe ist wie eine Drehung um  $-\alpha$  um die Achse  $-v$ , haben wir dabei jede Drehung doppelt erwischt, aber das kann man ausgleichen, indem man dem Normierungsfaktor eine zusätzliche  $\frac{1}{2}$  spendiert.
- Die Isometriegruppen  $O_2$  und  $O_3$  bestehen aus der Untergruppe der Drehungen  $SO_n$  und ihrem Komplement, die beide jeweils die Hälfte des Gesamtvolumens haben. Das Komplement hat jeweils die Form  $h \cdot SO_n = \{hg \mid g \in SO_n\}$  für ein beliebiges, fest gewähltes Gruppenelement  $h \in O_n \setminus SO_n$ . Über das Komplement zu integrieren funktioniert also genauso wie über  $SO_n$  selbst zu integrieren. Man integriert über  $O_n$ , indem man die Integrale über beide Hälften addiert.

Äquivalent zur Existenz des Haar-Integrals ist die Existenz einer „uniformen“ Wahrscheinlichkeitsverteilung auf  $G$ . Man kann also alternativ das Integral auch mit einer Monte-Carlo-Methode definieren als „Wähle unabhängig und gleichverteilt  $N$  zufällige Gruppenelemente, bilde den Mittelwert  $\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \phi(g_i)$  und lasse  $N \rightarrow \infty$  gehen“.

## 3.2 Symmetrische Tensoren: Die Verbindung zwischen Polynomen und Tensoren

**3.7 Satz** (Isomorphismus von Polynom(iellen Abbildung)en und symmetrischen Tensoren):

Moralisch sind symmetrische Tensoren und Polynome dasselbe, also „natürlich“ isomorph zueinander. Präzise lässt sich das wie folgt fassen:

- a.) Es sei  $e_1, e_2, \dots, e_n$  eine Basis von  $V$ . Der Raum der Polynome ist isomorph zu  $\bigoplus_{m=0}^{\infty} \text{Sym}^m(V)$ . Der Isomorphismus ist die Einschränkung der Abbildung

$$\begin{cases} \bigoplus_{m=0}^{\infty} V^{\otimes m} & \rightarrow \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \\ e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_m} & \mapsto x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdot \dots \cdot x_{i_m} \end{cases}$$

auf  $\text{Sym}^n(V)$ . Die umgekehrte Richtung ist durch  $x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n} \mapsto q(e_1^{\otimes k_1} \otimes e_2^{\otimes k_2} \otimes \dots \otimes e_n^{\otimes k_n})$  gegeben, wobei  $q$  die Projektion auf  $\text{Sym}^n(V)$  ist.

Diese Aussage ist in dieser Form nicht basis-frei und kann auch nicht ohne Weiteres basis-frei gemacht werden, da es in  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$  ja  $n$  ausgezeichnete Elemente vom Grad 1 gibt, eben die  $n$  Unbekannten. Jeder Isomorphismus würde also auch eine Basis von  $V$  auszeichnen.

Eine moralisch äquivalente, basisfreie Aussage ist aber die folgende:

- b.) Der Raum der polynomiellen Abbildungen  $V \rightarrow \mathbb{K}$  ist isomorph zu  $\bigoplus_{m=0}^{\infty} \text{Sym}^m(V)$ . Der Isomorphismus ist die Einschränkung der Abbildung

$$\begin{cases} \bigoplus_{m=0}^{\infty} V^{\otimes m} & \rightarrow \mathbb{K}[V] \\ v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \dots \otimes v_{i_m} & \mapsto (v \mapsto \langle v_{i_1}, v \rangle \cdot \langle v_{i_2}, v \rangle \cdot \dots \cdot \langle v_{i_m}, v \rangle) \end{cases}$$

auf  $\text{Sym}^n(V)$ .

- c.) In beiden Fällen gilt: Die Räume sind als Darstellungen der orthogonalen Gruppe isomorph; die angegebenen Isomorphismen sind  $O_n$ -linear.

*Beweis.* Da das Produkt von Polynomen kommutativ ist, werden  $e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_m}$  und alle Permutationen  $e_{i_{\sigma(1)}} \otimes e_{i_{\sigma(2)}} \otimes \cdots \otimes e_{i_{\sigma(m)}}$  auf denselben Wert abgebildet. Also wird der Mittelwert dieser  $m!$  Tensoren ebenfalls auf denselben Wert abgebildet, d.h.  $q(e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \cdots \otimes e_{i_m})$  geht auch auf  $x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdots x_{i_m}$ . Das zeigt, dass die beiden in a. definierten Abbildungen zueinander invers sind.

Indem man eine Orthonormalbasis für  $e_1, \dots, e_n$  einsetzt, sieht man, dass in b. tatsächlich derselbe Isomorphismus definiert wird, da  $v \mapsto \langle e_i, v \rangle$  genau die  $i$ -te Koordinatenabbildung bzgl. dieser Basis ist, d.h. die Abbildung, die den Vektor mit den Koordinaten  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  auf  $x_i$  schickt. An der Schreibweise in b. sieht man aber leichter als der in a., dass die Isomorphismen  $O_n$ -linear sind.  $\square$

### 3.3 Natürliche Abbildungen

**3.8:** Im Kontext unserer physikalischen Welt wollen wir Messungen von Quantitäten durchführen. Diese Quantitäten können unter anderem als Zahlen, Vektoren oder Tensoren verstanden werden, z. B. beschreibt der Spannungstensor die Zug-, Druck- und Scherspannungen in einem Festkörper.

Eine fundamentale Eigenschaft, die wir von allen messbaren Quantitäten erwarten, ist, dass das Ergebnis der Messung unabhängig von der Wahl des Koordinatensystem ist. Ein bestimmter Geschwindigkeitsvektor sollte immer in die gleiche Richtung zeigen, völlig unabhängig davon, ob seine Koordinaten nun  $(3, 4, 0)$  oder  $(0, 0, 5)$  sind. Gleiches gilt für seine Länge, oder die Determinante einer Matrix (=das Volumen eines gewissen räumlichen Körpers). Generell sind wir an den Eigenschaften interessiert, die charakteristisch sind für das untersuchte System, nicht für das Koordinatensystem, mit dem wir das System untersuchen.

Konkreter: Die Eigenschaften sollen *unabhängig von der Drehung und Orientierung* des Koordinatensystems sein; die Basisvektoren zu rotieren, zu invertieren oder zu spiegeln sollte den gemessenen Wert einer Eigenschaft nicht verändern.

Gleiches gilt auch bei Interaktionen in der physikalischen Welt, die Wirkung eines bestimmten Zustandes auf zukünftige Zustände ist ebenfalls völlig unabhängig von dem Koordinatensystem, mit dem wir den Zustand und seine Wirkung beschreiben. Der resultierende Zustand muss also unabhängig von der Drehung/Spiegelung des Koordinatensystems sein. Dual dazu könnte man fordern: Dreht/spiegelt man den Input (und lässt dafür das Koordinatensystem gleich), so muss sich auch der Output genauso drehen/spiegeln.

Diese Idee lässt sich mathematisch präzisieren, sobald einem klar ist, dass jeder physikalische Prozess eine Abbildung von einem Zustand in einen anderen ist, die mit der Gruppe  $O_3$  verträglich ist. Auch eine Messung ist z.B. eine Abbildung vom Zustand auf eine Zahl.

### 3.9 Definition (Natürliche Abbildungen):

Es sei  $G$  eine Gruppe,  $X$  und  $Y$  zwei Darstellungen von  $G$  über  $\mathbb{K}$  und  $\phi$  eine lineare



Abbildung von  $X$  nach  $Y$ . Wir nennen  $\phi$  natürlich<sup>14</sup>, wenn

$$\forall \rho \in G : \phi \circ \rho = \rho \circ \phi.$$

**3.10:** D.h. mit den Worten aus dem Darstellungstheorie-Kapitel: Sie muss  $\mathbb{K}G$ -linear sein.

**3.11:** In unserem Kurs behandeln wir nur lineare Abbildungen, wobei multi-lineare Abbildungen durch das Tensorprodukt linearisiert werden können. Wir könnten deshalb auch über natürliche polynomielle Abbildungen reden, wenn wir das wollten.  $G$  ist für uns typischerweise  $O_3$ , wir betrachten also  $\mathbb{K}O_3$ -lineare Abbildungen.

### 3.4 Vollständigkeit der Klassifikation der linearen Tensor-Abbildungen

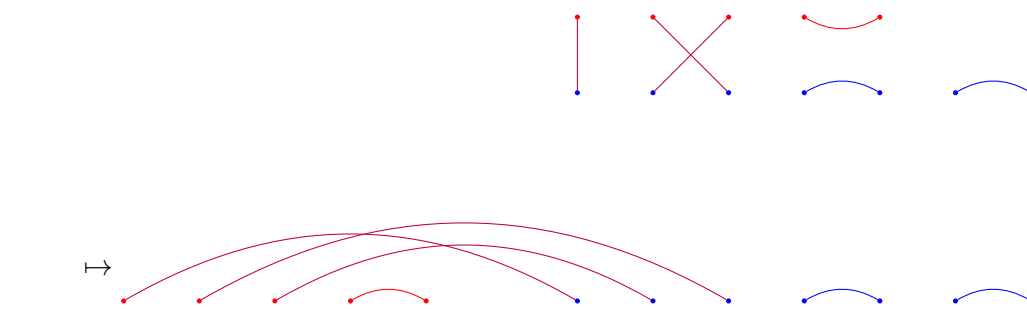
Wenden wir uns nun den Abbildungen zwischen Tensoren zu. Wir haben sie im ersten Kapitel bereits klassifiziert mit folgendem Versprechen:

**3.12 Satz** (Brauer-Diagramme beschreiben alle natürlichen linearen Abbildungen zwischen Tensoren):

Die Menge aller Linearkombinationen von allen Brauer-Diagrammen ist gleich der Menge aller  $O_n$ -linearen Abbildungen zwischen Tensoren.

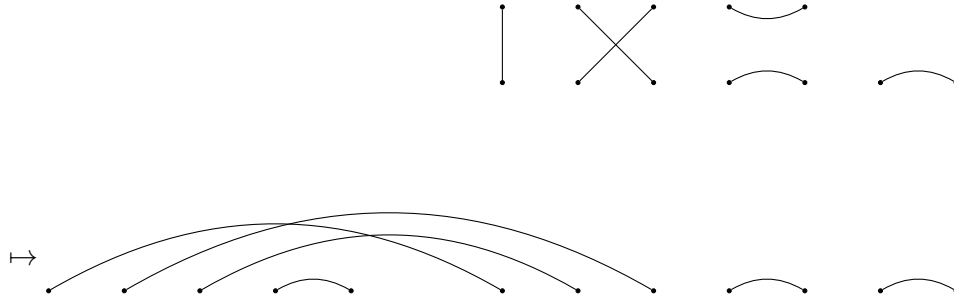
*Beweis per Induktion.* Zunächst gilt es festzustellen, dass die drei Klassen von linearen Abbildungen zwischen Tensoren, die wir mittels Brauer-Diagrammen definiert haben (1.26, 1.27 und 1.28) tatsächlich natürliche Abbildungen sind (s. Aufgabe 3.2). Die Hintereinanderausführung und Linearkombination von linearen natürlichen Abbildungen ist selbst ebenfalls eine lineare natürliche Abbildung.

In Aufgabe 2.5 haben wir festgestellt, dass jede lineare Abbildung  $V^{\otimes m} \rightarrow V^{\otimes n}$  einem Element des Tensorraums  $(V^{\otimes m})^* \otimes V^{\otimes n}$  entspricht. Die Suche nach einer  $O_3$ -kompatiblen linearen Abbildung  $V^{\otimes m} \rightarrow V^{\otimes n}$  entspricht also der Suche nach einem  $O_3$  Fixpunkt in  $(V^{\otimes m})^* \otimes V^{\otimes n}$ . Dieser Schritt lässt sich an Hand eines farbigen Brauer-Diagramms verdeutlichen: Die Knoten der oberen Zeile werden nach unten vor die untere Zeile verschoben und alle Kanten werden beibehalten. Das Ergebnis lässt sich als ein Brauer-Diagramm lesen, welches nur aus Casimir-Elementen besteht und keinen Knoten in der oberen Zeile hat, also streng genommen als eine Abbildung  $\mathbb{K} \rightarrow (V^{\otimes m})^* \otimes V^{\otimes n}$ .



<sup>14</sup>Es gibt eine allgemeinere, viel technischere Definition, was „natürlich“ heißt, aber sie reduziert sich in den für uns wichtigen Fällen im Wesentlichen auf die hier gegebene Definition.

Um unser gewohntes Brauer-Diagramm zu erhalten, wenden wir außerdem den Isomorphismus  $v \mapsto \langle v, \cdot \rangle$  zwischen  $V$  und  $V^*$  an und überführen die lineare Abbildung  $V^{\otimes m} \rightarrow V^{\otimes n}$  in ein Element des Tensorraums  $V^{\otimes m} \otimes V^{\otimes n} = V^{\otimes m+n}$ :



Es ist noch zu klären, dass tatsächlich keine Abbildung übersehen wurde, z.B. weil sie nicht als Brauer-Diagramm darstellbar ist. Für diese Suche wenden wir wieder den Mittelwert-Trick an, diesmal mit einer kompakten Gruppe anstelle einer endlichen, d.h. wir integrieren anstelle zu summieren. Das Maß  $|O_3|$  können wir wählen und setzen es auf 1, unsere Projektion auf den Raum der Fixpunkte sieht also folgendermaßen aus:

$$\Psi_{O_3}^{m,n} : \begin{cases} V^{\otimes m+n} & \rightarrow V^{\otimes m+n} \\ v & \mapsto \int_{O_3} \rho(v) d\rho \end{cases} \quad (2)$$

Wir könnten nun allgemeine Tensoren auf ihre Fixpunkte projizieren. Es ist als Übung sinnvoll, zunächst ein paar Beispiele explizit auszurechnen (siehe Aufgabe 3.4).

Den vollständigen Beweis führen wir nun per Induktion über  $d := \dim(V)$ .

Induktionsbehauptung: Das Mittelwertintegral über  $O_d$  dargestellt auf  $V^{\otimes n}$  ergibt immer eine Linearkombination der Permutation von Casimir-Elementen  $\Omega_V$  (mglw. ist diese auch 0), wobei wir die Permutation von Casimir-Elementen auch mit einem entsprechenden einzeiligen Brauer-Diagramm darstellen können.

Induktionsanfang: Dazu bestimmen wir zunächst den Fixpunktraum von  $O_1$  dargestellt auf  $\mathbb{K}$ , d.h. wir berechnen

$$\int_{O_1} \rho(v^{\otimes n}) d\rho, v \in \mathbb{R}$$

Wir haben also für  $d = 1$  festgestellt, dass der Fixpunktraum mit geraden Potenzen von Casimir-Elementen aufgespannt wird, für einen bestimmten Tensorgrad  $2n$  ist der Fixpunktraum eindimensional und wird von  $v^{\otimes 2n} = \Omega^{\otimes n}$  aufgespannt.

Induktionsschritt: Für  $d + 1$  nutzen wir folgenden Zusammenhang,  $v_i \in \mathbb{R}^{d+1}$  :

$$\begin{aligned} \int_{O_{d+1}} \rho(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) d\rho &= \int_{O_d} \int_{O_{d+1}} \tau(\rho(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)) d\rho d\tau \\ &= \int_{O_{d+1}} \int_{O_d} \tau(\rho(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)) d\rho d\tau \quad \text{Satz v. Fubini-Tonelli} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{O_{d+1}} \int_{O_d} \rho(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) d\rho d\tau \quad \text{Substitution } \rho \rightarrow \tau^{-1}\rho \\
&= \int_{O_{d+1}} \int_{O_d} \rho(\tau(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n)) d\tau d\rho \quad \text{Substitution } \rho \rightarrow \rho\tau
\end{aligned}$$

wobei wir  $O_d$  in  $O_{d+1}$  auf bestimmte Weise einbetten: Jede Einbettung von  $O_d$  in  $O_{d+1}$  wird eine ausgezeichnete Richtung haben, deren Unterraum von der Untergruppe nicht verändert wird. Wir wählen uns die Einbettung so, dass  $v_1$  von  $O_d$  nicht verändert wird und zerlegen alle  $v_i$  in zu  $v_1$  senkrechte und parallele Anteile,

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_n = v_1 \otimes (v_2^\parallel + v_2^\perp) \otimes \cdots \otimes (v_n^\parallel + v_n^\perp).$$

wobei  $v_i^\parallel = c_i v_1$  jeweils ein Vielfaches von  $v_1$  ist. Damit ist

$$\begin{aligned}
\tau(v_1 \otimes \cdots \otimes v_n) &= \tau(v_1) \otimes (\tau(v_2^\parallel) + \tau(v_2^\perp)) \otimes \cdots \otimes (\tau(v_n^\parallel) + \tau(v_n^\perp)) \\
&= v_1 \otimes (c_2 v_1 + \tau(v_2^\perp)) \otimes \cdots \otimes (c_n v_1 + \tau(v_n^\perp)).
\end{aligned}$$

Durch Ausmultiplizieren bekommen wir eine Summe von reinen Tensoren, in denen jeder Faktor parallel oder senkrecht zu  $v_1$  ist. Für jeden reinen Tensor können wir uns eine Permutation aussuchen, die alle senkrechten Faktoren nach rechts schiebt und alle parallelen Faktoren nach links. Die Skalare  $c_i$  können in einer Konstante zusammengefasst werden, welche wir zur Einfachheit auf 1 setzen. Rechnen wir also o.B.d.A. mit dem Tensor

$$v_1^{\otimes l} \otimes \tau(v_{l+1}^\perp) \otimes \cdots \otimes \tau(v_n^\perp),$$

so erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\int_{O_{d+1}} \int_{O_d} \rho(v_1^{\otimes l} \otimes \tau(v_{l+1}^\perp) \otimes \cdots \otimes \tau(v_n^\perp)) d\tau d\rho \\
&= \int_{O_{d+1}} \rho(v_1)^{\otimes l} \otimes \rho\left(\int_{O_d} \tau(v_{l+1}^\perp) \otimes \cdots \otimes \tau(v_n^\perp) d\tau\right) d\rho
\end{aligned}$$

Das innere Integral ergibt nach Induktionsvoraussetzung eine Linearkombination von Permutationen von Casimir-Elementen  $\Omega_{\mathbb{K}^d}$ . Jedes einzelne Casimir-Element können wir nun schreiben als  $\Omega_{\mathbb{K}^d} = \Omega_{\mathbb{K}^{d+1}} - v_1 \otimes v_1$ , wobei wir o.b.d.A. annehmen können, dass  $v_1$  normiert ist. Diese Summe multiplizieren wir erneut aus, sodass wir Permutationen von Tensoren der Form

$$v_1^{\otimes l+2k} \otimes \underbrace{\Omega_{\mathbb{K}^{d+1}} \otimes \cdots \otimes \Omega_{\mathbb{K}^{d+1}}}_{\frac{n-l-2k}{2} \text{ viele}}$$

erhalten. Integrieren wir diesen Tensor über  $O_{d+1}$ :

$$\begin{aligned}
&\int_{O_{d+1}} \rho(v_1)^{\otimes l+2k} \otimes \rho(\Omega_{\mathbb{K}^{d+1}}) \otimes \cdots \otimes \rho(\Omega_{\mathbb{K}^{d+1}}) d\rho \\
&= \int_{O_{d+1}} \rho(v_1)^{\otimes l+2k} d\rho \otimes \Omega_{\mathbb{K}^{d+1}} \otimes \cdots \otimes \Omega_{\mathbb{K}^{d+1}},
\end{aligned}$$

und laut Aufgaben Aufgaben 3.4f.) und 3.4g.) ist auch das verbliebene Integral eine Linearkombination Permutationen von Casimir-Elementen.  $\square$

## Aufgaben

### Aufgabe 3.1. – Casimir-Element der Polynome

Wir haben einen Isomorphismus zwischen Polynomen und symmetrischen Tensoren. Welches Polynom entspricht dem Casimir-Element  $\Omega_V \in V \otimes V$  auf Polynomseite?

### Aufgabe 3.2. – Brauer-Diagramme sind natürliche Abbildungen

Zeige, dass die drei Klassen von linearen Abbildungen zwischen Tensoren, die wir mittels Brauer-Diagrammen definiert haben, tatsächlich natürliche Abbildungen sind:

- a.) Permutation (1.26)
- b.) Spur nehmen (1.27)
- c.) Casimir-Element einfügen (1.28)

### Aufgabe 3.3. – Bunte Casimir-Elemente

In der grafischen Darstellung der Überführung einer linearen Abbildung  $V^{\otimes m} \rightarrow V^{\otimes n}$  zu einem Element des Tensorraums  $(V^{\otimes m})^* \otimes V^{\otimes n}$  haben wir Casimir-Elemente mit drei verschiedenen Farben gezeichnet. Überzeuge dich, dass diese drei Farben nicht nur der Übersichtlichkeit dienen, sondern auch die verschiedenen Arten von Casimir-Elementen deutlich machen. Wie ist es gerechtfertigt, dass die Permutation oder Identität ebenfalls auf ein Casimir-Element abgebildet wird? Wo versteckt sich die Permutation?

Wir haben *farbige Brauer-Diagramme* ohne Definition eingeführt, hole dies nach und finde eine sinnvolle Definition.

### Aufgabe 3.4. – Tensoren auf $O_3$ -Fixpunkte projizieren

Projiziere die folgenden Tensoren auf ihre  $O_3$  Fixpunkte, indem du das entsprechende Integral über  $O_3$  löst:

- a.) 1-Tensor  $v \in \mathbb{R}^3$ .
- b.)  $u \otimes u$  mit  $u \in \mathbb{R}^3$ .
- c.)  $u \otimes v$  mit  $u \perp v \in \mathbb{R}^3$ .
- d.)  $u \otimes (u + v)$  mit  $u \perp v \in \mathbb{R}^3$ .
- e.)  $u \otimes v \otimes w$  mit  $u, v, w \in \mathbb{R}^3$ .
- f.)  $u^{\otimes n}$  mit  $u \in \mathbb{R}^3$  und  $n$  gerade. Hinweis: Polynome und symmetrische Tensoren.
- g.)  $u^{\otimes n}$  mit  $u \in \mathbb{R}^3$  und  $n$  ungerade.

## 4 Darstellungstheorie – Level 1

**4.1:** Wir wollen nun zwei Sätze beweisen und diskutieren, die die ersten beiden wirklich nichttrivialen Resultate und zugleich das Rückgrat der Darstellungstheorie bilden.

Der erste solche Satz ist das Lemma von Schur.<sup>15</sup>



### 4.1 Lemma von Schur

**4.2 Satz** (Lemma von Schur<sup>16</sup>):

Sei  $T$  eine endlich-dimensionale, irreduzible Darstellung von  $G$  über dem Körper  $\mathbb{K}$ .

- a.) Jede  $\mathbb{K}G$ -lineare Abbildung  $T \rightarrow S$  ist entweder Null oder injektiv.
- b.) Jede  $\mathbb{K}G$ -lineare Abbildung  $U \rightarrow T$  ist entweder Null oder surjektiv.
- c.) Ist  $T'$  eine weitere irreduzible Darstellung von  $G$ , so unterscheiden sich alle von Null verschiedenen Abbildungen  $T \rightarrow T'$  (von denen es keine geben muss) um einen Isomorphismus  $T \rightarrow T'$ .
- d.) Ist  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ , so ist  $\text{End}_{\mathbb{K}G}(T) = \mathbb{C} \text{id}_T := \{ \lambda \text{id}_T \mid \lambda \in \mathbb{C} \}$ . Insbesondere: In der Situation von c. gibt es also bis auf konstante Vielfache genau eine  $\mathbb{C}G$ -lineare Abbildung  $T \rightarrow T'$ .

**4.3:** Man beachte die starke Einschränkung, die die Struktur einer  $G$ -Darstellung bewirkt: Während es  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildungen wie Sand am Meer gibt und insbesondere  $\text{End}_{\mathbb{K}}(T)$  streng monoton mit der Dimension von  $T$  anwächst, hat  $\text{End}_{\mathbb{K}G}(T)$  extrem wenige, für  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$  sogar nur einen Freiheitsgrad, solange  $T$  irreduzibel ist. Das ist letztlich die abstrakte Erklärung dafür, wieso wir relativ wenige „natürliche“ Abbildungen zwischen Tensorräumen gefunden haben.

*Beweis.* a. folgt aus der Beobachtung, dass  $\ker(f)$  eine Unterdarstellung von  $T$  ist. b. folgt daraus, dass  $\text{im}(f)$  eine Unterdarstellung von  $T$  ist. Da  $T$  irreduzibel ist, gibt es also nur zwei Möglichkeiten: Null oder ganz  $T$ .

c. Sind  $f, g : T \rightarrow T'$  zwei von Null verschiedene Homomorphismen, dann folgt aus a. und b., dass sie bijektiv sind. Entsprechend ist  $\tau := f^{-1} \circ g$  ein Isomorphismus  $T \rightarrow T$ , d.h.  $g = f \circ \tau$  unterscheidet sich von  $f$  durch Multiplikation mit einem Isomorphismus.

d. Ist nun  $f \in \text{End}_{\mathbb{C}G}(T)$  beliebig, so gibt es einen Eigenwert  $\lambda \in \mathbb{C}$  von  $f$ . Hier benutzen wir, dass  $T$  ein endlichdimensionaler  $\mathbb{C}$ -Vektorraum ist. Also ist  $f - \lambda \text{id}_T$  ein Endomorphismus, der einen nichttrivialen Kern hat. Der Kern ist, wie wir bereits festgestellt haben, eine Unterdarstellung von  $T$ . Die einzige nichttriviale Unterdarstellung ist  $T$  selbst. Also muss  $f - \lambda \text{id} = 0$  sein, d.h.  $f$  ist ein Vielfaches der Identität.  $\square$

<sup>15</sup>Man sagt ja, ein Mathematiker sei erst dann wirklich erfolgreich, wenn ein Lemma nach ihm benannt wurde...

<sup>16</sup>Issai Schur (1875–1941), russisch-deutsch-israelischer Mathematiker

**4.4:** In d. ist es ganz wesentlich, dass wir mit dem Körper der komplexen Zahlen arbeiten. Es ist in der allgemeinen Situation immer noch korrekt, dass  $E := \text{End}_{\mathbb{K}G}(V)$  ausschließlich aus Null und invertierbaren Abbildungen besteht, dass  $E$  also ein Schiefkörper ist (d.h. so wie ein Körper, nur dass Kommutativität der Multiplikation nicht gelten muss), aber ohne die Eigenschaft, algebraisch abgeschlossen zu sein, kann es (und wird es) Darstellungen geben, für die  $E$  nicht  $\mathbb{K}$  selbst, sondern ein größerer Schiefkörper, ist.

Beispielsweise gibt es über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  drei endlich-dimensionale Schiefkörper:  $\mathbb{R}$  selbst,  $\mathbb{C}$  sowie die Quaternionen  $\mathbb{H}$ . Entsprechend finden sich auch Gruppen  $G$ , die irreduzible Darstellungen  $T$  mit  $\dim_{\mathbb{R}} \text{End}_{\mathbb{R}G}(T) = 2$  oder  $= 4$  besitzen.

Die Gruppen  $G = O_3$  und  $G = O_2$ , die uns vor allem interessieren, haben interessanterweise keine solche Darstellungen. Die Gruppe der zweidimensionalen Drehungen  $G = SO_2$  zeigt aber tatsächlich dieses Phänomen; sogar haben *alle* bis auf eine irreduzible reelle Darstellung von  $SO_2$  einen zweidimensionalen Endomorphismenraum.

## 4.2 Satz von Maschke und Test auf Irreduzibilität

### 4.5 Satz (Satz von Maschke<sup>17</sup>):

Ist  $G$  eine kompakte Gruppe und  $T$  eine stetige, endlich-dimensionale Darstellung von  $G$ , dann ist  $T$  halbeinfach, d.h.  $T$  ist die direkte Summe von einigen seiner einfachen Unterdarstellungen:

- a.) Es gibt irreduzible Unterdarstellungen  $T_i$  mit  $T = T_1 \oplus T_2 \oplus \cdots \oplus T_k$ .

Speziell für unseren Fall  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  ist es sinnvoll, von Skalarprodukten auf  $T$  zu sprechen. Dann gelten folgende zusätzliche Aussagen:

- b.) Es gibt ein  $G$ -invariantes Skalarprodukt, d.h. eines, dass  $\forall g \in G, v, w \in T$  :  $\langle gv, gw \rangle = \langle v, w \rangle$  erfüllt. Äquivalent formuliert: Die Darstellung  $\mathcal{D} : G \rightarrow GL(T)$  ist in Wirklichkeit eine Darstellung  $G \rightarrow O(T)$  (bzw.  $U(T)$  im komplexen Fall).
- c.) Ist ein  $G$ -invariantes Skalarprodukt gegeben, kann man die Zerlegung in a. sogar so wählen, dass die Summanden paarweise senkrecht aufeinander stehen. Unterdarstellungen, die nicht zueinander isomorph sind, sind sogar bzgl. *jedem*  $G$ -invarianten Skalarprodukt senkrecht aufeinander.

*Beweis.* a. gilt allgemein für alle Körper, aber wir zeigen nur den reellen/komplexen Fall. Dazu beginnen wir mit b.: Zunächst gibt es überhaupt ein Skalarprodukt  $[\cdot, \cdot] : T \times T \rightarrow \mathbb{K}$ . Mit Hilfe des Mittelwerttricks können wir daraus ein  $G$ -invariantes Skalarprodukt zaubern:

$$\langle v, w \rangle := \int_G [gv, gw] dg$$

Für jedes feste  $g$  ist  $(v, w) \mapsto [gv, gw]$  selbst ein Skalarprodukt. Der Mittelwert  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  ist also auch ein Skalarprodukt, weil es ein Grenzwert von (reellen, nicht-negativen) Linearkombinationen von Skalarprodukten ist. Nach Konstruktion ist es auch  $G$ -invariant.

<sup>17</sup>Heinrich Maschke, 1853–1908, dt. Mathematiker

Daraus folgt nun a., denn wenn wir eine Unterdarstellung  $U \leq T$  haben, dann ist das orthogonale Komplement (bzgl.  $\langle, \rangle$ ) auch eine Unterdarstellung von  $T$  und wir haben eine Zerlegung  $T = U \oplus U^\perp$ . Jetzt zerlegen wir die Darstellungen  $U$  und  $U^\perp$  so lange nach demselben Prinzip, bis wir nicht weiter zerlegen können (es gibt ein Ende, weil  $T$  endlich-dimensional ist), weil es keine nichttrivialen, echten Unterdarstellungen mehr gibt, d.h. bis wir bei irreduziblen Summanden angekommen sind.

c. folgt aus dem Lemma von Schur: Wenn ein beliebiges  $G$ -invariantes Skalarprodukt und  $U, U' \leq T$  zwei irreduzible Unterdarstellungen sind, dann können wir die orthogonale Projektion bzgl.  $\langle, \rangle$  auf  $U$  betrachten und auf  $U'$  einschränken. Damit erhalten wir eine  $\mathbb{K}G$ -lineare Abbildung  $U' \rightarrow U$ . Wenn  $U$  und  $U'$  nicht isomorph sind, dann kann es keine bijektive  $\mathbb{K}G$ -lineare Abbildung zwischen ihnen geben und laut dem Lemma von Schur ist die einzige andere Möglichkeit die Nullabbildung, d.h.  $U$  und  $U'$  sind senkrecht bzgl.  $\langle, \rangle$ .  $\square$

**4.6:** Der Satz von Maschke ist falsch für beliebige Gruppen und beliebige Darstellungen. Selbst sehr einfache, nichtkompakte Gruppen erfüllen ihn nicht, selbst für sehr einfach gestrickte Darstellungen. Schon  $G = \mathbb{Z}$  ist ein Gegenbeispiel.

Und selbst, wenn die Gruppe kompakt ist, müssen unstetige oder unendlich-dimensionale Darstellungen ihn nicht erfüllen.

**4.7 Korollar** (Umkehrung des Lemmas von Schur):

Ist  $T$  eine endlich-dimensionale, stetige Darstellung der kompakten Gruppe  $G$  über  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , dann gilt:  $\dim_{\mathbb{K}} \text{End}_{\mathbb{K}G}(T) = 1 \implies T$  ist irreduzibel.

*Beweis.* Die Voraussetzungen erlauben es uns, auf  $T$  den Satz von Maschke anzuwenden, d.h.  $T = T_1 \oplus T_2 \oplus \dots$  zu zerlegen. Wenn  $T$  nicht selbst irreduzibel wäre, dann gäbe es mindestens zwei solche Summanden und die beiden Projektionen  $(v_1, v_2, \dots) \mapsto (v_1, 0, \dots)$  bzw.  $(v_1, v_2, \dots) \mapsto (0, v_2, \dots)$  wären zwei lineare unabhängige  $\mathbb{K}G$ -lineare Abbildungen  $T \rightarrow T$  und somit ein Widerspruch zur Annahme  $\dim_{\mathbb{K}} \text{End}_{\mathbb{K}G}(T) = 1$ .  $\square$

**4.8:** Der Satz von Maschke sagt uns, dass wir jede Darstellung bis auf Isomorphie festlegen können, indem wir angeben, wie oft welche irreduzible Darstellung als direkter Summand in  $T$  vorkommt. Ein fundamentales Problem des Studiums einer (oder aller) Darstellungen ist deshalb erstens die Frage, welche irreduziblen Darstellungen die jeweilige Gruppe überhaupt besitzt. Je nach Gruppe ist das ein mehr oder weniger schwieriges Problem. Und zweitens stellt sich die Frage, wie man die Vielfachheiten der irreduziblen Summanden in einer gegebenen Darstellung bestimmt.

Beide Fragen stellen sich als erstaunlich zugänglich heraus, wenn man Charaktertheorie kennt.

### 4.3 Einige irreduzible Darstellungen von Isometriegruppen

**4.9:** Wir sind immer noch daran interessiert, die Darstellungen von  $O_2$  und  $O_3$  zu verstehen, und, wie wir eben gelernt haben, ist ein Wesentlicher Teil dieses Vorhabens die Aufgabe, die irreduziblen Darstellungen dieser Gruppen zu finden.

In Aufgabe 2.10 haben wir gelernt, dass die kanonische Darstellung  $V = \mathbb{K}^3$  von  $O_3$  irreduzibel ist. Wir wissen, dass jede Gruppe eine triviale Darstellung hat, die auch immer irreduzibel ist. Aber welche gibt es noch?

**4.10 Definition** (Spurfreie Tensoren):

Die Tensoren im Kern der Spur  $\text{tr}_{i,j} : \text{Sym}^m(V) \rightarrow \text{Sym}^{m-2}(V)$  werden spurfreie Tensoren genannt. Der Raum der symmetrischen, spurfreien Tensoren bezeichnen wir mit  $\text{STF}^m$  („symmetric trace-free“).

**4.11 Lemma:**

Die spurfreien symmetrischen Tensoren sind eine  $O_n$ -Unterdarstellung von  $V^{\otimes m}$ .

**4.12 Lemma:**

Der Isomorphismus zwischen symmetrischen Tensoren und polynomiellen Abbildungen übersetzt...

- a.) ...die Spur in ein Vielfaches des Laplace-Operators.
- b.) ...die spurfreien symmetrischen Tensoren in harmonische Polynome

$${}^n\mathcal{H}_{\mathbb{K}}^k := \{ p \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \mid p \text{ homogen vom Grad } k, \Delta p = 0 \}$$

**4.13 Satz** (Zerlegung der symmetrischen Tensoren in irreduzible Unterdarstellungen): a.)

Die Darstellungen  $\text{STF}^m(V)$  sind paarweise nicht isomorph und irreduzibel.

- b.) Die Zerlegung von  $\text{Sym}^m(V)$  in irreduzible Bestandteile ist gegeben durch:

$$\text{Sym}^m(V) \cong \text{STF}^m(V) \oplus \text{STF}^{m-2}(V) \oplus \text{STF}^{m-4}(V) \oplus \dots$$

*Beweis.* a. Wir betrachten die Möglichkeiten für  $O_n$ -lineare Abbildungen  $f : \text{STF}^m(V) \rightarrow \text{STF}^k(V)$ . Indem wir vorher die orthogonale Projektion auf  $\text{STF}^m(V)$  anwenden und hinterher die Einbettung  $\text{STF}^k(V) \rightarrow V^{\otimes k}$  können wir  $f$  als Einschränkung einer  $O_n$ -lineare Abbildung  $V^{\otimes m} \rightarrow V^{\otimes k}$  auffassen. Und wir wissen, wie solche Abbildungen aussehen. Was tun also die Brauer-Diagramme eingeschränkt auf  $\text{STF}^m(V)$ ? Wenn auch nur eine Spur vorkommt, ist die Abbildung null, weil  $\text{STF}^m$  ja der Kern der Spur(en) ist.

Insbesondere muss also  $m \leq k$  sein, damit es überhaupt Brauer-Diagramme geben kann, die auf  $\text{STF}^m(V)$  nicht Null sind. Gäbe es eine von Null verschiedene  $O_n$ -lineare Abbildung  $\text{STF}^m \rightarrow \text{STF}^k$ , so müssten die beiden Darstellungen mindestens einen isomorphen irreduziblen Summanden haben (Satz von Maschke+Lemma von Schur). Die Umkehrabbildung auf diesem liefert eine von Null verschiedene  $O_n$ -lineare Abbildung in die andere Richtung; es müsste also mit dem gleichen Argument auch  $m \geq k$  sein.

Die Darstellungen sind also insbesondere paarweise nicht-isomorph. Wie viele Freiheitsgrade haben wir, um eine  $O_n$ -lineare Abbildung  $\text{STF}^m \rightarrow \text{STF}^m$  festzulegen? Wir wissen,



dass in Brauer-Diagrammen, die nicht die Null-Abbildung sind, keine Spuren vorkommen können. Weil  $m = k$  ist, können also auch keine Casimir-Element-Einfügungen vorkommen; es muss sich um Permutationen handeln. Aber  $\text{STF}^m \subseteq \text{Sym}^m$ , d.h. alle Permutationsabbildungen sind dieselbe Abbildung auch  $\text{STF}^m$ . Das heißt, es gibt höchstens einen Freiheitsgrad. Aus der Umkehrung des Lemmas von Schur folgern wir, dass  $\text{STF}^m$  irreduzibel sein muss.

b. Die Spur  $\text{Sym}^m(V) \rightarrow \text{Sym}^{m-2}(V)$  ist eine surjektive,  $O_n$ -lineare Abbildung mit Kern  $\text{STF}^m$ . Das liefert uns einen Isomorphismus zwischen dem orthogonalen Komplement von  $\text{STF}^m$  und  $\text{Sym}^{m-2}(V)$ , und somit  $\text{Sym}^m(V) \cong \text{STF}^m(V) \oplus \text{Sym}^{m-2}(V)$ , woraus induktiv die Behauptung folgt.  $\square$

## Aufgaben

### Aufgabe 4.1. – Satz von Schur über Körpern $\neq \mathbb{C}$

In Aufgabe 2.9 wurde gezeigt, dass die kanonische Darstellung  $V = \mathbb{R}^2$  von  $G = SO_2$  irreduzibel ist. Zeige, dass  $\text{End}_{\mathbb{R}G}(V)$  2-dimensional ist.

### Aufgabe 4.2. – Der Satz von Maschke ist falsch für nichtkompakte Gruppen (leichter als es aussieht)

Zeige, dass nicht jede endlich-dimensionale Darstellung von  $G = \mathbb{Z}$  in irreduzible Unterdarstellungen zerlegt werden kann.

Hinweis: Das ist eine leicht getarnte Aussage, die bereits aus der LA-I-Vorlesung bekannt ist.

### Aufgabe 4.3. – Isomorphismus zwischen irreduziblen Darstellungen von Polynomen und Tensoren

Wir wissen, dass sich der Raum der symmetrischen Tensoren in irreduzible zerlegt wie folgt:

$$\text{Sym}^m(V) \cong \text{STF}^m(V) \oplus \text{STF}^{m-2}(V) \oplus \text{STF}^{m-4}(V) \oplus \dots$$

Und wir wissen, dass  $\text{Sym}^m(V)$  zum Raum der homogenen Polynome vom Grad  $m$  isomorph ist. Also zerlegt sich diese Darstellung ganz genauso. Wir wollen den Isomorphismus explizit beschreiben.

- a.) Erinnerung: Der Polynom-Tensor-Isomorphismus identifiziert  $\text{STF}^m(V)$  mit dem Unterraum der *harmonischen*, homogenen Polynome vom Grad  $m$ .  
Finde Unterdarstellungen vom Polynomraum vom Grad  $m$ , die zum Raum der harmonischen Polynome vom Grad  $m - 2k$  isomorph sind.
- b.) Benutze den Polynom-Tensor-Isomorphismus in der anderen Richtung um die entsprechenden Unterdarstellung von  $\text{Sym}^m(V)$  zu finden, die zu  $\text{STF}^{m-2k}(V)$  isomorph sind.

### Aufgabe 4.4. – Isomorphismus zwischen irreduziblen Darstellungen von Polynomen und Tensoren II

Mit Hilfe des Isomorphismus zwischen  $\text{Sym}^l(V)$  und dem Raum der homogenen, polynomiellen Abbildungen  $V \rightarrow \mathbb{K}$  vom Grad  $l$  können wir mehr Strukturen als nur Unterdarstellungen von einer in die andere Sprache übersetzen.

- a.) Zeige, dass der Isomorphismus die Spur  $\text{tr} : \text{Sym}^l(V) \rightarrow \text{Sym}^{l-2}(V)$  in  $\frac{1}{l(l-1)}\Delta$  übersetzt.
- b.) Zeige, dass der Isomorphismus das Standardskalarprodukt (also das von  $V^{\otimes l}$  eingeschränkt auf den Unterraum  $\text{Sym}^l(V)$ ) übersetzt in  $\langle p, q \rangle = p(\partial)q$ . Wobei  $p(\partial)$  den Differentialoperator meint, der entsteht, wenn man jedes  $x$  in  $p$  durch  $\partial_x$ , jedes  $y$  durch  $\partial_y$  und jedes  $z$  durch  $\partial_z$  ersetzt.

## 5 Darstellungstheorie – Level 2: Charaktertheorie

### 5.1 Definition (Charaktere):

Es sei  $G$  eine Gruppe und  $\mathcal{D} : G \rightarrow GL(T)$  eine endlich-dimensionale Darstellung von  $G$  über  $\mathbb{K}$ . Der Charakter von  $T$  ist die Abbildung

$$\chi_T : G \rightarrow \mathbb{K}, g \mapsto \text{tr}(\mathcal{D}(g))$$

Ist  $D : G \rightarrow GL_n(\mathbb{K})$  eine Matrixdarstellung von  $\mathcal{D}$  bzgl. irgendeiner Basis, so ist  $\chi_T(g)$  also auch gleich der Spur der Matrix  $D(g)$ . Ist  $T$  eine irreduzible Darstellung, so nennt man  $\chi_T$  irreduziblen Charakter.



**5.2:** Man beachte, dass die Spur einer Matrix unabhängig von der Basiswahl ist. Man erinnere sich, dass allgemein

$$\forall A, B \in \mathbb{K}^{n \times n} : \text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$$

gilt, für invertierbare  $A$  also auch  $\text{tr}(ABA^{-1}) = \text{tr}(B)$ .

Oder basisfrei formuliert: Für alle  $\mathbb{K}$ -linearen Abbildungen  $\phi : X \rightleftharpoons Y : \psi$  zwischen endlichdimensionalen  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen gilt  $\text{tr}(\phi \circ \psi) = \text{tr}(\psi \circ \phi)$ , für invertierbare  $\phi$  also auch  $\text{tr}(\phi \circ \psi \circ \phi^{-1}) = \text{tr}(\psi)$ .

### 5.3 Lemma:

Charaktere erfüllen:

- a.) Charaktere unterscheiden nicht zwischen isomorphen Darstellungen:  $T \cong T' \implies \chi_T = \chi_{T'}$ .
- b.) Charaktere unterscheiden nicht zwischen konjugierten Elementen: Sind  $g, g' \in G$  konjugiert, d.h. existiert ein  $h \in G$  mit  $g' = hgh^{-1}$ , so gilt  $\chi_T(g) = \chi_T(g')$ .

*Beweis.* Beide Aussagen folgen aus dieser Eigenschaft der Spur: Ist  $\phi : T \rightarrow T'$  ein Isomorphismus, dann ist  $\mathcal{D}'(g) = \phi \circ \mathcal{D}(g) \circ \phi^{-1}$  und somit  $\text{tr}(\mathcal{D}(g)) = \text{tr}(\mathcal{D}'(g))$ . Sind  $g, g'$  konjugiert, so ist  $\mathcal{D}(g') = \mathcal{D}(h)\mathcal{D}(g)\mathcal{D}(h)^{-1}$  und somit  $\text{tr}(\mathcal{D}(g)) = \text{tr}(\mathcal{D}(g'))$ .  $\square$

**5.4:** Es scheint, als ob Charaktere viel Information über ihre Darstellung verlieren würden, wenn sie die ganze Abbildung  $\mathcal{D}(g)$  auf eine einzelne Zahl reduzieren und dann auch noch sehr viele Gruppenelemente dieselbe Zahl zugeordnet bekommen. Im allgemeinsten Fall ist das auch so.

Das große Wunder ist aber, dass im für uns interessanten Fall einer kompakten Gruppe und stetiger Darstellungen, nicht zu viel Information verloren geht, sondern Charaktere immer noch hinreichend viel enthalten, um ihre Darstellung vollständig bis auf Isomorphie zu beschreiben, d.h. in unserem Fall gilt die Umkehrung von a.

**5.5 Satz** (1.Orthogonalitätsrelation):

Es sei  $G$  eine kompakte Gruppe und  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ . Auf der Menge der stetigen Abbildungen  $G \rightarrow \mathbb{C}$  definieren wir die folgende Bilinearform:

$$\langle \phi, \psi \rangle = \int_G \phi(g) \psi(g^{-1}) dg$$

Speziell für Charaktere von stetigen Darstellungen gilt:

$$\langle \chi_T, \chi_{T'} \rangle = \dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathbb{K}G}(T, T')$$

Insbesondere gilt für irreduzible Charaktere:

$$\langle \chi_T, \chi_{T'} \rangle = \begin{cases} 0 & \text{falls } T \not\cong T' \\ \dim_{\mathbb{K}} \text{End}_{\mathbb{K}G}(T) & \text{falls } T \cong T' \end{cases}$$

*Beweis.* Wir betrachten die beiden Darstellungen  $\mathcal{D}$  und  $\mathcal{D}'$  von  $T$  bzw.  $T'$  sowie die Darstellung  $X := \text{Hom}_{\mathbb{K}}(T, T')$ . Zur Erinnerung:  $G$  operiert auf  $X$  via  $g\phi := \mathcal{D}(g) \circ \phi \circ \mathcal{D}'(g)^{-1}$ , d.h.  $g\phi$  ist die Abbildung  $t \mapsto g \cdot \phi(g^{-1} \cdot t)$ . Anhand dieser Definition ist klar, dass der Raum der  $G$ -Fixpunkte von  $X$  genau der Raum der  $\mathbb{K}G$ -linearen Abbildungen ist.

Wir wenden also wieder einmal den Mittelwerttrick an: Die Projektion auf den Fixpunkt-raum ist gegeben durch

$$pr(\phi) := \int_G g \circ \phi \circ g^{-1} dg$$

Wenn wir nun die Dimension des Fixpunktraums bestimmen wollen, können wir die Spur der Projektion ausrechnen. Weil (konstante)  $\mathbb{K}$ -lineare Abbildungen mit dem Integral vertauschen, erhalten wir also

$$\dim_{\mathbb{K}} \text{Hom}_{\mathbb{K}G}(T, T') = \text{tr}(pr) = \text{tr} \left( \phi \mapsto \int_G g \circ \phi \circ g^{-1} dg \right) = \int_G \text{tr}(\phi \mapsto g \circ \phi \circ g^{-1}) dg$$

Es ist eine Standardaufgabe aus der linearen Algebra, zu beweisen, dass die Abbildung  $\text{Hom}_{\mathbb{K}}(T, T') \rightarrow \text{Hom}_{\mathbb{K}}(T, T'), \phi \mapsto \alpha \circ \phi \circ \beta$  genau die Spur  $\text{tr}(\alpha) \text{tr}(\beta)$  hat. Also ist der Integrand gleich  $\chi_T(g) \chi_{T'}(g^{-1})$  und das zeigt die Behauptung.  $\square$

**5.6** (Diverse Charakterformeln): Für sehr viele Standardkonstruktionen ist es möglich, explizit anzugeben, wie sie sich mit Charakteren vertragen:

- a.)  $\chi_{T \oplus T'} = \chi_T + \chi_{T'}$
- b.)  $\chi_{T \otimes T'} = \chi_T \cdot \chi_{T'}$
- c.)  $\chi_{T^*} = \overline{\chi_T}$
- d.) Es gibt explizite, aber relativ aufwändige kombinatorische Formeln, die z.B. die Charaktere der symmetrischen Potenzen  $\text{Sym}^m(T)$  durch  $\chi_T$  ausdrücken.

e.) uvm.

### 5.7 Korollar:

Ist  $G$  eine kompakte Gruppe und  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ , so gilt für stetige, endlich-dimensionale Darstellungen:

$$\chi_T = \chi_{T'} \iff T \cong T'$$

*Beweis.* Die  $\Leftarrow$  Richtung ist bekannt. Wir zeigen also die andere. Aufgrund des Satzes von Maschke genügt es, zu zeigen, dass  $T$  und  $T'$  isomorphe irreduzible Darstellungen in den gleichen Vielfachheiten enthalten.

Wenn also  $T \cong T_1^{\oplus n_1} \oplus \dots \oplus T_k^{\oplus n_k}$  und  $T' \cong T_1^{\oplus n'_1} \oplus \dots \oplus T_k^{\oplus n'_k}$  mit paarweise nicht-isomorphen, irreduziblen Darstellungen  $T_i$  ist, dann wollen wir  $n_i = n'_i$  zeigen. Die Charaktere erfüllen

$$\chi_T = n_1\chi_{T_1} + \dots + n_k\chi_{T_k} \quad \text{bzw.} \quad \chi_{T'} = n'_1\chi_{T_1} + \dots + n'_k\chi_{T_k}$$

Die Orthogonalitätsrelation zeigt, dass die  $\chi_{T_i}$  paarweise orthogonal bzgl. der dort definierten Bilinearform sind. Also gilt

$$n_i = \frac{\langle \chi_T, \chi_{T_i} \rangle}{\dim_{\mathbb{K}} \text{End}_{\mathbb{K}G}(T_i)} = \frac{\langle \chi_{T'}, \chi_{T_i} \rangle}{\dim_{\mathbb{K}} \text{End}_{\mathbb{K}G}(T_i)} = n'_i$$

und das wollten wir zeigen. □

## Aufgaben

### Aufgabe 5.1. – Konjugation in orthogonalen Gruppen

Wir haben festgestellt, dass Charaktere von Darstellungen nicht zwischen konjugierten Elementen unterscheiden, d.h.

$$g = hg'h^{-1} \implies \chi(g) = \chi(g')$$

Es scheint also nützlich zu sein, genau zu verstehen, welche Gruppenelemente zueinander konjugiert sind.

Wir betrachten zunächst  $G = O_2$ .

a.) Zeige, dass die Rotation um  $\alpha$  und  $-\alpha$  zueinander konjugiert sind.

Machen wir nun mit  $G = SO_3$  und  $O_3$  weiter.

b.) Zeige, dass alle Rotation um  $\alpha$  zueinander konjugiert. Präziser: Zeige, dass

$$\forall g \in O_3 : g\rho_{\alpha,v}g^{-1} = \rho_{\alpha,g(v)}$$

gilt, wobei  $\rho_{\alpha,v}$  die Rotation um den Winkel  $\alpha$  und die Drehachse  $\mathbb{R}v$  ist.

c.) Zeige, dass  $g\iota g^{-1} = \iota$  für alle  $g \in O_3$  gilt, wobei  $\iota$  die Inversion  $v \mapsto -v$  ist.

Und ganz allgemein für  $G = O_n$ :

d.) Zeige, dass alle Spiegelungen zueinander konjugiert sind. Präziser: Zeige, dass

$$\forall g \in O_2 : gs_vg^{-1} = s_{g(v)}$$

gilt, wobei  $s_v$  die Spiegelung an der Geraden  $\mathbb{R}v$  ist.

## 6 Darstellungstheorie von $O_1$

### Aufgabe 6.1. – Darstellungstheorie von $O_1$

Beweise alles, was man über Darstellungstheorie der Gruppe mit zwei Elementen  $G = O_1 = \{\pm 1\}$  über  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  wissen muss:

- a.) Es gibt genau zwei irreduzible Darstellungen, beide eindimensional, nämlich die triviale  $G \rightarrow \mathbb{K}, g \mapsto 1$  und die nichttriviale  $G \rightarrow \mathbb{K}, \pm 1 \mapsto \pm 1$ .
- b.) Man kann jede Darstellung von  $G$  über  $\mathbb{K}$  (selbst unendlich-dimensionale) explizit in irreduzible Bestandteile zerlegen, indem man eine Eigenbasis von  $\mathcal{D}(-1)$  findet. Gib eine explizite, basisfreie Formel für die Projektionen auf die beiden Eigenräume an.

Hinweis: Eine Darstellung von  $G$  ist der Raum der Funktionen  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ , auf der  $-1$  durch  $f \mapsto \check{f}$  operiert, wobei  $\check{f}(x) := f(-x)$  ist. Die beiden Eigenräume sind dir als „gerade“ bzw. „ungerade“ Funktionen bereits bekannt. Eine andere Darstellung ist der Raum der quadratischen Matrizen  $\mathbb{K}^{k \times k}$ , auf dem  $-1$  durch  $A \mapsto A^T$  operiert. Die beiden Eigenräume sind dir als symmetrische bzw. antisymmetrische Matrizen bekannt. Lasse dich von diesen beiden Beispielen inspirieren.

## 7 Darstellungstheorie von $O_2$

**7.1:** Ein kurioser Fakt über  $O_2$  und  $SO_2$  ist, dass man diese Gruppe durch Matrizen basisfrei beschreiben kann:

$$O_2 = \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}}_{=SO_2} \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

Etwas genauer: Eine ebene Drehung hat bzgl. *jeder* Orthonormalbasis der Ebene eine Matrix der Form  $\rho_\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix}$ ; es kann sich der Winkel  $\alpha$  in  $-\alpha$  ändern, wenn der Basiswechsel nicht orientierungserhaltend ist, aber das war's auch schon.

Eine Spiegelung ist immer von der Form  $\begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix}$ ; dabei ist der Winkel  $\alpha$  aber von der Basiswahl abhängig, denn in diesem Fall legt  $\alpha$  fest, wie die Gerade, an der gespiegelt wird, im Vergleich zur Basis orientiert ist. (Man beachte aber, dass für uns wichtige Informationen wie die Spur der Matrix unabhängig von  $\alpha$  sind)

**7.2 Satz** (Darstellungstheorie von kommutativen Gruppen):

Es sei  $G$  eine kompakte, *kommutative* Gruppe. Dann ist jede stetige, irreduzible, endlich-dimensionale Darstellung über  $\mathbb{C}$  eindimensional.

*Beweis.* Im Satz von Maschke 4.5 haben wir gezeigt, dass man die Darstellung  $\mathcal{D} : G \rightarrow GL(T)$  so wählen kann, dass sie ein (komplexes) Skalarprodukt invariant lässt, also jedes  $\mathcal{D}(g)$  eine *unitäre* Abbildung  $T \rightarrow T$  ist.

Unitäre Abbildungen sind diagonalisierbar (siehe Aufgabe 0.3.b.)). Da die Gruppe  $G$  kommutativ ist, kommutieren die Abbildungen  $\mathcal{D}(g)$  natürlich auch miteinander. Es ist ein Fakt der linearen Algebra (und keine schwere Übungsaufgabe, siehe Aufgabe 0.1), dass man kommutierende, diagonalisierbare Abbildungen auch *simultan* diagonalisieren kann, d.h. man kann eine Basis  $b_1, \dots, b_n$  von  $T$  aus *gemeinsamen* Eigenvektoren finden, sodass also

$$\forall g : g \cdot b_i = \lambda_i(g) b_i$$

gilt für geeignete Funktionen  $\lambda_i : G \rightarrow \mathbb{C}$ . Insbesondere sind die eindimensionalen Unterräume  $\mathbb{C}b_i$  Unterdarstellungen von  $T$ . Alle mindestens zwei-dimensionalen Darstellungen sind mit anderen Worten reduzibel.  $\square$

**7.3:** Es gilt auch die Umkehrung: Besitzt eine kompakte Gruppe nur eindimensionale irreduzible Darstellungen, dann ist sie kommutativ.

**7.4:** Fourieranalyse basiert wesentlich auf dieser Aussage. Die verschiedenen Formen der Fourieranalyse haben alle das gleiche zugrunde liegende Prinzip: Die Zerlegung von (meist unendlich-dimensionalen) Darstellungen einer kommutativen Gruppe in ihre eindimensionalen, irreduziblen Bestandteile. Die Fourier-Basis enthält dann aus jeder irreduziblen Komponente genau einen Vektor. Der Unterschied zwischen den verschiedenen Arten von Fouriertransformation ist, welches die dahinter stehende Gruppe ist:



- Die diskrete Fouriertransformation (inkl. FFT) ist die Darstellungstheorie der zyklischen Gruppen  $C_n = \{ \exp(\frac{2\pi ki}{n}) \mid k = 0, \dots, n-1 \}$ .
- Die Fouriertransformation periodischer Funktionen (=Fourierreihe) ist die Darstellungstheorie der Kreisgruppe  $S^1 = \{ \exp(i\alpha) \mid \alpha \in [0, 2\pi) \}$  (welche zu  $SO_2$  isomorph ist).
- Die kontinuierliche Fouriertransformation ist die Darstellungstheorie der reellen Gerade  $\mathbb{R}$ . ( $\mathbb{R}$  ist nicht kompakt, aber lokalkompakt. Für solche Gruppen gibt es auch ein Haar-Integral)

Für eine beliebige, (lokal)kompakte kommutative Gruppe spricht man auch von Pontrjagin-Dualität nach Л. С. Понтрягин <sup>18 19</sup>.

**7.5:** Eine weitere, äquivalente Sichtweise auf diesen Satz ist, dass die Darstellungstheorie von kommutativen Gruppen im Wesentlichen nur Eigenwerttheorie ist: Die irreduziblen Unterräume sind alle Eigenräume für die „Wurzeln“<sup>20</sup> genannten Eigenwert-Funktionen  $\lambda_i : G \rightarrow \mathbb{C}$ . Wenn man diese kennt, dann sind die irreduziblen Unterdarstellungen eines beliebigen  $T$  einfach auszurechnen: Es sind die dazugehörigen Eigenräume.

Die Darstellungstheorie reduziert sich also darauf, aus der Struktur der Gruppe abzuleiten, welche Wurzeln es überhaupt gibt, d.h. welche Eigenwerte überhaupt vorkommen.

Diese Idee ist erstaunlich mächtig, erstaunlicherweise auch um die Darstellungstheorie nichtkommutativer Gruppen zu verstehen, indem man sich gewisse, besonders große kommutative Untergruppen ansieht.

## 7.6 Satz und Definition (Darstellungstheorie von $SO_2$ über $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ):

Sei  $V$  ein reeller, zwei-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt.

Jede stetige, endlich-dimensionale, irreduzible Darstellung von  $G = SO_2(V)$  über  $\mathbb{C}$  ist zu genau einer der Darstellungen

$$\mathcal{O}^m : \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \mapsto e^{im\alpha}$$

für die Magnetquantenzahl  $m \in \mathbb{Z}$  isomorph und diese Darstellungen sind paarweise nicht-isomorph.

*Beweis.* Dass die Darstellungen irreduzibel sind, ist klar, da sie eindimensional sind. Dass sie stetig sind, sieht man ihnen an. Dass sie paarweise nicht isomorph sind, kann man direkt überprüfen, oder man benutzt abstrakt, dass ihre Charaktere verschieden sind. Der nichttriviale Teil ist also zu zeigen, dass jede endlich-dimensionale, stetige, irreduzible Darstellung in dieser Liste vorkommt.  $SO_2$  ist kommutativ, also muss jede irreduzible

<sup>18</sup>Lev S. Pontrjagin, Лев Семёнович Понтрягин (1908-1988), russ. Mathematiker

<sup>19</sup>Wir nennen ja keine Namen, aber Andrea bestand darauf, dass man unbedingt das kyrillische Original bräuhete, um den Namen korrekt aussprechen zu können.

<sup>20</sup>engl. roots; „Wurzel“ im Sinne von „Lösung einer Polynomgleichung“. Eigenwerte sind die Nullstellen des charakteristischen Polynoms, daher kommt diese Bezeichnung.

Darstellung ein-dimensional sein, d.h. es handelt sich um eine stetige Abbildung  $\mathcal{D} : G \rightarrow \mathbb{C}$ . Betrachte die Rotationen um  $\alpha := \frac{2\pi}{n}$ . Dies sind Gruppenelemente mit  $\rho_\alpha^n = 1$ . Also muss auch  $\mathcal{D}(\rho_\alpha)^n = 1$  gelten, d.h.  $\mathcal{D}(\rho_\alpha) = \exp(\frac{2\pi im}{n})$  für ein geeignetes  $m \in \mathbb{Z}$ . Ohne Stetigkeit könnte dieses  $m$  von  $n$  abhängig sein. Wir zeigen, dass es unabhängig von  $n$  ist, wenn  $\mathcal{D}$  stetig ist.

Es gilt natürlich auch  $\mathcal{D}(\rho_\alpha^k) = (\exp(\frac{2\pi im}{n}))^k = \exp(\frac{2\pi i \cdot mk}{n})$ , d.h. die  $n$  Elemente  $1 = \rho_\alpha^0, \rho_\alpha^1, \dots, \rho_\alpha^{n-1}$  erfüllen die Gleichung, die wir haben wollen, bereits. Welches  $m$  erhalten wir, wenn wir von  $n$  zu  $2n$  wechseln, d.h. den Winkel halbieren? Die Drehung um  $\alpha/2$  erfüllt  $\rho_{\alpha/2}^2 = \rho_\alpha$ , d.h.  $\mathcal{D}(\rho_{\alpha/2})$  ist eine der beiden Quadratwurzeln von  $\mathcal{D}(\rho_\alpha) = \exp(\frac{2\pi im}{n})$ , also entweder  $\exp(\frac{2\pi im}{2n})$  oder  $\exp(\frac{2\pi i(m+n)}{2n})$ . Wenn  $n$  hinreichend groß ist, sind  $\rho_\alpha$  und  $\rho_{\alpha/2}$  aber nah beieinander, und die Stetigkeitsbedingung verlangt, dass auch  $\mathcal{D}(\rho_\alpha)$  und  $\mathcal{D}(\rho_{\alpha/2})$  beide nah beieinander sind, was  $m+n$  ausschließt, weil das auf der entgegengesetzten Seite des Einheitskreises liegt.

Per Induktion erfüllen also alle Drehungen um  $\frac{2\pi}{2^k n}$  die Gleichung, die wir haben wollen. Jede Drehung kann durch diese beliebig genau approximiert werden. Aus der Stetigkeit folgt also, dass alle Drehungen die Gleichung erfüllen.  $\square$

**7.7:** Wenn man  $SO_2 = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \mid \alpha \in \mathbb{R} \right\}$  auf die Komplexifizierung  $V_{\mathbb{C}}$  wirken lässt, dann erkennt man leicht, dass  $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$  die beiden Eigenräume dieser kommutativen Gruppe aufspannen. Ein ähnlich kurioser Fakt wie zuvor ist also, dass  $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$  ähnlich unabhängig von der Wahl einer Orthonormalbasis von  $V$  ist wie die Matrixdarstellung  $SO_2$ : Wählt man eine andere Basis, dann ist der Vektor mit den Koordinaten  $\begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}$  bis auf einen Faktor  $e^{i\beta}$  der gleiche wie zuvor.

Das hat zur Folge, dass gewisse Konstrukte, die hochgradig koordinatenabhängig zu sein scheinen, in Wirklichkeit nicht oder nur sehr wenig von der Basiswahl abhängen. Im Zusammenhang von Rotationsgruppen trifft man z.B. auf den Drehimpulsoperator  $L$  (basis-unabhängig) seine Komponenten in den drei gewählten Koordinatenrichtungen  $L_x, L_y, L_z$  (hochgradig basis-abhängig) und die davon abgeleiteten Operatoren  $L_{\pm} := L_x \pm iL_y$  (unabhängig von der Wahl der Basis in der  $x$ - $y$ -Ebene bis auf diese komplexe Phase).

**7.8:** Wenn man den komplexen Fall einmal hat, könnte man den reellen Fall daraus folgern.

**7.9 Korollar** (Darstellungstheorie von  $SO_2$  über  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ):

Sei  $V$  ein reeller, zwei-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt.

Jede stetige, endlich-dimensionale, irreduzible Darstellung von  $G = SO_2(V)$  über  $\mathbb{R}$  ist entweder die triviale Darstellung oder zu genau einer der Darstellungen

$$\mathcal{D}_m : \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(m\alpha) & -\sin(m\alpha) \\ \sin(m\alpha) & \cos(m\alpha) \end{pmatrix}$$

für eine natürliche Zahl  $m > 0$  isomorph und diese Darstellungen sind paarweise nicht-isomorph.  $\mathcal{D}_m$  ist genau die Darstellung  ${}^2\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^m$  auf den harmonischen, homogenen Polynomen vom Grad  $m$ , die wir bereits zuvor konstruiert hatten.

**7.10:** Wenn man nun die Spiegelungen hinzunimmt, ist die Gruppe nicht länger kommutativ. Eine wichtige Beobachtung ist, dass in  $O_2$  die Drehung um  $\alpha$  und die Drehung um  $-\alpha$  zueinander konjugiert sind (siehe Aufgabe 5.1). Wenn wir Darstellungen also in Termen von Charakteren klassifizieren wollten, dann halten wir fest, dass Charaktere von  $O_2$  nicht zwischen diesen beiden unterscheidet.

Andererseits können wir natürlich jede  $O_2$ -Darstellung auf  $SO_2$  einschränken und in irreduzible Bestandteile bzgl.  $SO_2$  zerlegen, deren Charaktere wir jetzt kennen. Der Wert  $\chi_T(\rho_\alpha)$  muss eine Summe von Exponentialfunktionen  $\sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m e^{im\alpha}$  sein und es muss  $a_m = a_{-m}$  gelten, damit  $\alpha$  und  $-\alpha$  auf den gleichen Wert abgebildet werden.

**7.11 Satz** (Darstellungstheorie von  $O_2$ ):

Sei  $V$  ein reeller, zwei-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt.

Jede stetige, endlich-dimensionale, irreduzible Darstellung von  $G = O_2(V)$  über  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  ist isomorph zu genau einer Darstellung der folgenden Liste:

a.) Die triviale Darstellung  $O_2 \rightarrow \mathbb{C}, g \mapsto 1$

b.) Die Determinante  $\det : O_2 \rightarrow \mathbb{C}$ , d.h.  $g \mapsto \begin{cases} +1 & g \in SO_2 \\ -1 & g \notin SO_2 \end{cases}$ .

c.) Eine der Darstellungen

$$\mathcal{D}_m : \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \mp \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \pm \cos(\alpha) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \cos(m\alpha) & \mp \sin(m\alpha) \\ \sin(m\alpha) & \pm \cos(m\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\text{für eine natürliche Zahl } m > 0 \text{ mit dazugehörigem Charakter } \chi_m(g) = \begin{cases} 2 \cos(m\alpha) & g = \rho_\alpha \\ 0 & g \notin SO_2 \end{cases}.$$

$\mathcal{D}_m$  ist isomorph zur Darstellung  $\text{STF}^m(V)$  bzw. dem Raum  ${}^2\mathcal{H}_{\mathbb{K}}^m$  der harmonischen, homogenen Polynome vom Grad  $m$ .

*Beweis.* Man kann von Hand nachprüfen, dass diese Definitionen tatsächlich Darstellungen sind. Die beiden eindimensionalen sind automatisch auch irreduzibel.

Wir zeigen die Irreduzibilität von  $\mathcal{D}_k$ , indem wir die Bilinearform auf Charakteren anwenden und  $\langle \chi_m, \chi \rangle$  für einen beliebigen Charakter  $\chi$  von  $O_2$  ausrechnen:

$$\begin{aligned} \langle \chi_m, \chi \rangle_{O_2} &= \frac{1}{2} \int_{SO_2} \chi_m(g) \chi(g^{-1}) dg + \frac{1}{2} \int_{SO_2} \underbrace{\chi_m(hg)}_{=0} \chi((hg)^{-1}) dg && \text{für } h \in O_2 \setminus SO_2 \\ &= \frac{1}{2} \int_{SO_2} \chi_m(g) \chi(g^{-1}) d\alpha \\ &= \frac{1}{2} \langle (\chi_m)|_{SO_2}, \chi|_{SO_2} \rangle_{SO_2} \end{aligned}$$

Speziell für  $\chi = \chi_m$  selbst ist das

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} \langle e^{im\alpha} + e^{-im\alpha}, e^{im\alpha} + e^{-im\alpha} \rangle_{SO_2} \\ &= \frac{1}{2} (1^2 + 1^2) = 1 \end{aligned}$$

Orthogonalitätsrelation

Also sind die  $\chi_m$  tatsächlich irreduzible Charaktere von  $O_2$  nach 4.7.

Unsere Behauptung ist u.A., dass es keine weiteren, uns noch unbekannten irreduziblen Charaktere von  $O_2$  gibt. Wir nehmen uns also einen irreduziblen Charakter  $\chi$ , der nicht einer der  $\chi_m$  ist und auch nicht trivial ist, und zeigen, dass er gleich der Determinante sein muss.

Wir haben schon festgestellt, dass in  $O_2$  die Charakterwerte eingeschränkt auf  $SO_2$  immer die Form  $\chi(\rho_\alpha) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m \cdot e^{im\alpha}$  mit  $a_m = a_{-m} \in \mathbb{N}$  haben müssen. Wenn wir nun ausnutzen, dass  $\langle \chi_m, \chi \rangle_{O_2} = 0$  sein müsste aufgrund der Orthogonalitätsrelation, dann folgern wir  $a_m = 0$  für  $m \neq 0$ , d.h.  $\chi(\rho_\alpha) = a_0$  ist konstant auf  $SO_2$ . Das Komplement von  $SO_2$  besteht ausschließlich aus Spiegelungen und die sind alle zueinander konjugiert, sodass  $\chi$  auch auf dem Komplement  $O_2 \setminus SO_2$  konstant sein muss. Die Orthogonalitätsrelation  $\langle 1, \chi \rangle_{O_2} = 0$  impliziert dann, dass die Konstante auf dem Komplement genau  $-a_0$  sein muss, d.h.  $\chi = a_0 \cdot \det$ . Wegen der Irreduzibilität muss  $a_0 = 1$  sein.

Damit ist also insbesondere zeigt, dass die Darstellungen  $\text{STF}^m(V) \cong {}^2\mathcal{H}_{\mathbb{K}}^m$ , die wir schon vor der Charaktertheorie als irreduzibel erkannt hatten, irgendwo in der Liste vorkommen müssen.

Für Polynome in zwei Variablen kann man zufällig explizit die harmonischen hinschreiben: Es sind genau die Real- und Imaginärteile der Polynome in einer komplexen Variable. In Grad  $m$  haben wir also  $\Re((x + iy)^m)$  und  $\Im((x + iy)^m)$  als Basis des Raums der harmonischen Polynome vom Grad  $m$ . Auf  $\mathbb{R}^2$ , also der komplexen Ebene operiert  $SO_2$  durch einfache Drehung, also Multiplikation mit  $e^{i\alpha}$ . Im Polynomraum wird also insbesondere  $z^m$  auf  $e^{im\alpha} z^m$  abgebildet, d.h. auf den Grad- $m$ -Polynomen operiert  $SO_2$  durch  $m$ -fache Drehung, also muss es die irreduzible Darstellung  $\mathcal{D}_m$  sein.  $\square$

**7.12:** Die Darstellung  $\mathcal{D}_m$  funktioniert so, wie wir sie angegeben haben, über  $\mathbb{R}$  und  $\mathbb{C}$ . Wenn man nur am komplexen Fall interessiert ist, kann man auch die Eigenbasis von  $SO_2$  betrachten. Dann schreibt sich die Darstellung als

$$\mathcal{D}_m : \begin{cases} \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} e^{-im\alpha} & \\ & e^{im\alpha} \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & e^{-im\alpha} \\ e^{im\alpha} & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

## 8 Darstellungstheorie von $O_3$

**8.1 Lemma** (Die  $O_{n-1}$ -Sicht auf eine  $O_n$ -Darstellung):

Sei  $V$  ein  $n$ -dimensionaler, reeller Vektorraum mit Skalarprodukt und  $E \leq V$  ein  $(n-1)$ -dimensionaler Untervektorraum darin. Dann ist die Einschränkung der  $O(V)$ -Darstellung  $\text{STF}^l(V)$  auf die Untergruppe  $O(E) \leq O(V)$  isomorph zu  $\text{Sym}^l(E) \oplus \text{Sym}^{l-1}(E)$ .

*Beweis.* Man sieht den Isomorphismus besonders gut, wenn man benutzt, dass  $\text{STF}^l(V)$  isomorph zum Raum der harmonischen, homogenen, polynomiellen Funktionen  $V \rightarrow \mathbb{K}$  vom Grad  $l$  ist, d.h. zu

$$\mathcal{H} := \left\{ p : V \rightarrow \mathbb{K} \text{ polynomiell} \mid \forall \lambda \in \mathbb{K} : p(\lambda x) = \lambda^l p(x) \wedge \Delta p = 0 \right\}$$

Wir wählen einen Vektor  $e_z$  der Länge 1, der senkrecht auf  $E$  steht. Die Polynomfunktion  $\langle e_z, \cdot \rangle$  bezeichnen wir einfach als  $z$ .

Dann können wir jede polynomielle Funktion  $p$  nach Potenzen von  $z$  sortieren, d.h. wir können  $p$  schreiben als  $p = \sum_{a=0}^l p_a \cdot z^a$  mit eindeutig bestimmten, homogenen Polynomen  $p_a : E \rightarrow \mathbb{K}$  vom Grad  $l-a$ . In dieser Schreibweise können wir ein Kriterium aufschreiben, wie wir  $p$  als harmonisch erkennen, da wir den Laplace-Operator  $\Delta = \Delta_V$  als  $\Delta_V = \Delta_E + \partial_z^2$  zerlegen können (man erinnere sich an die entsprechende Zerlegung des Casimir-Elements  $\Omega_V = \Omega_E + e_z \otimes e_z$ ):

$$\begin{aligned} 0 &= \Delta p \\ \iff \partial_z^2 p &= -\Delta_E p \\ \iff \sum_{a \geq 2} p_a \cdot a(a-1)z^{a-2} &= -\sum_a (\Delta_E p_a) \cdot z^a \\ \iff \sum_a p_{a+2} \cdot (a+2)(a+1)z^a &= -\sum_a (\Delta_E p_a) \cdot z^a \\ \iff \forall a : p_{a+2} &= \frac{-\Delta_E p_a}{(a+1)(a+2)} \end{aligned}$$

Harmonische Polynomfunktionen sind also eindeutig festgelegt, indem wir eine beliebige homogene Polynomfunktion  $E \rightarrow \mathbb{K}$  vom Grad  $l$  für  $p_0$  und eine beliebige homogene Polynomfunktion  $E \rightarrow \mathbb{K}$  vom Grad  $l-1$  für  $p_1$  festlegen und alle anderen  $p_a$  mittels der Rekursion bestimmen. Wir erhalten so einen Isomorphismus von  $\mathbb{K}$ -Vektorräumen

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Sym}^l(E) \oplus \text{Sym}^{l-1}(E) & \leftrightarrow \text{STF}^l(V) \\ (f, g) & \mapsto f \cdot z^0 + g \cdot z^1 + \frac{-\Delta_E f \cdot z^2}{1 \cdot 2} + \frac{-\Delta_E g \cdot z^3}{2 \cdot 3} + \frac{(-\Delta_E)^2 f \cdot z^4}{3 \cdot 4} + \frac{(-\Delta_E)^2 g \cdot z^5}{4 \cdot 5} + \dots \\ (p_0, p_1) & \leftarrow \sum_{a=0}^l p_a z^a \end{array} \right.$$

Da  $\Delta_E$  ein mit  $O(E)$  verträglicher Differentialoperator ist, ist dieser Isomorphismus sogar  $O(E)$ -linear.  $\square$

**8.2** (Struktur von  $SO_3$ ): Jedes Element von  $SO_3$  ist bekanntlich eine Drehung  $\rho_{\alpha, v}$  um eine Drehachse  $v \in S^2$  und einen Drehwinkel  $\alpha$ . Wir erinnern noch einmal, dass  $\rho_{\alpha, v} = \rho_{-\alpha, -v}$  ist.

Besonders wichtig für uns ist, dass alle Drehungen um den gleichen Drehwinkel zueinander konjugiert sind. Insbesondere sind also alle Charaktere aller Darstellungen von  $SO_3$  nur von  $\alpha$ , nicht von  $v$  abhängige, (gerade) Funktionen. Wenn wir also die Charakterwerte für die Elemente einer geschickt gewählten  $SO_2$ -Untergruppe (d.h. alle Drehungen um alle Winkel, aber um eine feste, richtig gewählte Drehachse) ausrechnen können, haben wir schon alle Charakterwerte ausgerechnet.

### 8.3 Satz und Definition (Darstellungstheorie von $SO_3$ ):

Es sei  $V$  ein drei-dimensionaler, reeller Vektorraum mit Skalarprodukt.

Jede stetige, endlich-dimensionale, irreduzible Darstellung von  $G = SO_3(V)$  über  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  ist zu  $\text{STF}^l(V)$  bzw.  ${}^3\mathcal{H}_{\mathbb{K}}^l$  für die Nebenquantenzahl  $l \in \mathbb{N}$  isomorph. Der Charakter von  $\text{STF}^l(V)$  ist genau  $\chi_l(\rho_{\alpha,v}) = \sum_{m=-l}^l e^{im\alpha} = 1 + \sum_{m=1}^l 2\cos(m\alpha)$ .

*Beweis.* Wir zeigen zunächst, dass der Charakter der Darstellung  $\text{STF}^l(V)$  genau die angegebene Form hat. Wie wir eben festgestellt haben, ist es ausreichend, eine feste Drehachse zu betrachten und für jeden Drehwinkel um diese Achse den Charakterwert auszurechnen.

Sobald wir die Drehachse fixiert haben, zeigt das eben bewiesene Lemma, dass  $\text{STF}^l(V)$  als  $SO_2(E)$ -Darstellung isomorph ist zu  $\text{Sym}^l(E) \oplus \text{Sym}^{l-1}(E)$  ist, wobei  $E$  die Ebene ist, die senkrecht zur Drehachse ist. Und wie sich die symmetrischen Tensoren in irreduzible zerlegen, wissen wir bereits.

Insbesondere können wir also die Charaktere explizit ausrechnen: Es ist

$$\begin{aligned}\chi_{\text{STF}^l(V)}(\rho_{\alpha,v}) &= \chi_{\text{Sym}^l(E)}(\rho_{\alpha}) + \chi_{\text{Sym}^{l-1}(E)}(\rho_{\alpha}) \\ &= (2\cos(l\alpha) + 2\cos((l-2)\alpha) + \dots) \\ &\quad + (2\cos((l-1)\alpha) + 2\cos((l-3)\alpha) + \dots) \\ &= 1 + \sum_{m=1}^l 2\cos(m\alpha)\end{aligned}$$

wie behauptet.

Wieso sind das nun alle irreduziblen Charaktere? Wir haben bereits festgestellt, dass jeder Charakter  $\chi : SO_3(V) \rightarrow \mathbb{K}$  nur vom Drehwinkel  $\alpha$  abhängig ist und eine gerade Funktion von  $\alpha$  ist. Als Darstellung von  $SO_2(E)$  betrachtet, muss es also die Form  $a_0 + \sum_{l>0} a_l \cdot 2\cos(l\alpha)$  mit  $a_l \in \mathbb{N}$  haben. Die Funktionen  $2\cos(k\alpha)$  bilden eine Basis des Vektorraum solcher Funktionen, Die Funktionen  $1 + \sum_{j=1}^l 2\cos(j\alpha)$  also auch. Es kann also keinen weiteren irreduziblen Charakter geben, denn der müsste im selben Vektorraum liegen, aber orthogonal zu allen diesen Basiselementen sein.  $\square$

**8.4:** Man beachte, dass beide Basen im letzten Abschnitt des Beweises zwar Orthonormalbasen sind, aber bzgl. verschiedener Skalarprodukte (Haar-Integral von  $SO_2$  vs.  $SO_3$ ).

**8.5 (Struktur von  $O_3$ ):** Die entscheidende Einsicht für den Schritt von  $SO_3$  zu  $O_3$  ist, dass die Inversion

$$\iota := \begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix} = -\text{id}_V$$

ein zentrales Element der Gruppe ist, d.h.  $\forall g \in O_3 : g\iota = \iota g$  erfüllt, und zum anderen Determinante  $-1$  hat. Konsequenz daraus ist, dass wir  $O_3$  als direktes Produkt von  $SO_3$  und einer Gruppe mit zwei Elementen zerlegen können:

$$\begin{cases} O_3 & \leftrightarrow & SO_3 \times \{\pm 1\} \\ g & \mapsto & (\det(g)g, \det(g)) \\ s \cdot \rho & \leftrightarrow & (\rho, s) \end{cases}$$

ein Paar von zueinander inversen Isomorphismen.

Die Darstellungstheorie von Gruppen, die sich als direktes Produkt zerlegen, lässt sich sehr sauber auf die Darstellungstheorie der einzelnen Faktoren reduzieren.

**8.6 Satz** (Darstellungstheorie von direkten Produkten  $G \times H$ ):

Es seien  $G_1$  und  $G_2$  zwei kompakte Gruppen. Wir betrachten  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ .

- a.) Sind  $T_1$  und  $T_2$  zwei stetige, komplexe, endlich-dimensionale, irreduzible Darstellungen von  $G_1$  bzw.  $G_2$ , dann ist das Tensorprodukt  $T := T_1 \otimes T_2$  der beiden Vektorräume eine  $G_1 \times G_2$ -Darstellung via

$$(g_1, g_2) \cdot (t_1 \otimes t_2) := (g_1 t_1) \otimes (g_2 t_2)$$

und diese ist selbst irreduzibel. Für die Charaktere gilt  $\chi_T(g_1, g_2) = \chi_{T_1}(g_1) \cdot \chi_{T_2}(g_2)$ .

- b.) Es auch gilt die Umkehrung: Jede stetige, komplexe, endlich-dimensionale, irreduzible Darstellung  $T$  von  $G_1 \times G_2$  ist isomorph zu einem Tensorprodukt wie in a. für geeignete Darstellungen  $T_1$  und  $T_2$

**8.7:** Unter bestimmten technischen Voraussetzungen gilt die eine, die andere oder beide Aussagen auch im reellen Fall. Unter anderen technischen Voraussetzungen gelten eine oder beide Aussagen auch allgemeiner ohne die Annahmen Stetigkeit bzw. endliche Dimension.

Wir wollen keine Zeit mit dem Definieren dieser Bedingungen oder dem Beweis des allgemeinen Falls verbringen, denn der Fall  $O_3 \cong SO_3 \times \{\pm 1\}$ , der uns gerade am meisten interessiert, erfüllt diese Voraussetzungen sowieso alle und der zweite Faktor  $\{\pm 1\}$  ist so einfach gestrickt, dass man einen besonders einfachen Beweis zu Fuß hinkommt.

*Beweis des Falls  $G_1 = SO_3$ ,  $G_2 = \{\pm 1\}$  über  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ .* a. Wir wissen bereits, dass  $G_2$  genau zwei irreduzible Darstellungen hat: Die triviale Darstellung  $G_2 \rightarrow \mathbb{K}, s \mapsto 1$  und

die Darstellung  $G_2 \rightarrow \mathbb{K}, s \mapsto s$ . Jedenfalls sind beides eindimensionale Darstellungen, deren zugrundeliegender Vektorraum also  $\mathbb{K}$  selbst ist.

Das Tensorprodukt  $T = T_1 \otimes T_2 = T_1 \otimes \mathbb{K}$  ist also nichts anderes als  $T_1$  selbst und die Operation des Produkts schreibt sich als:  $(\rho, s)t_1 = \tau(s) \cdot (\rho t_1)$  für alle  $\rho \in SO_3, s \in \{\pm 1\}$ , wobei  $\tau : \{\pm 1\} \rightarrow \mathbb{K}$  entweder die triviale Darstellung  $\tau(s) = 1$  oder die nichttriviale Darstellung  $\tau(s) = s$  ist.

Wie sehen die Unterdarstellungen dieser  $O_3$ -Darstellung also aus? Es sind Untervektorräume, die unter der Operation von  $SO_3$  und unter Multiplikation mit  $\pm 1$  abgeschlossen sind. Zweiteres ist natürlich immer erfüllt, sodass die Unterdarstellungen von  $T$  also exakt dieselben Untervektorräume sind wie die Unterdarstellungen von  $T_1$  (nur dass wir sie eben jetzt als  $O_3$ -Darstellungen auffassen statt als  $SO_3$ -Darstellungen).

Insbesondere ist  $T$  irreduzibel, weil  $T_1$  genau zwei Unterdarstellungen hat.

b. Es sei umgekehrt  $\mathcal{D} : O_3 \rightarrow GL(T)$  eine irreduzible Darstellung von  $O_3$ . Dann erfüllt  $\mathcal{D}(\iota)^2 = 1$ , also ist  $\mathcal{D}(\iota)$  diagonalisierbar. Wir können also  $T$  in die beiden Eigenräume von  $\mathcal{D}(\iota)$  zerlegen.

Andererseits ist  $\iota$  zentral, erfüllt also  $g\iota = \iota g$  für alle  $g \in O_3$ , d.h.  $\mathcal{D}(\iota)$  ist eine  $O_3$ -lineare Abbildung  $T \rightarrow T$ . Die beiden Eigenräume sind also nicht nur Untervektorräume, sondern sogar Unterdarstellungen von  $T$ . Da  $T$  irreduzibel ist, ist also genau einer der beiden gleich Null und der andere gleich  $T$ .

Mit anderen Worten: Alle Elemente  $t \in T$  erfüllen  $\mathcal{D}(\iota)t = \lambda t$ , entweder mit  $\lambda = +1$  oder mit  $\lambda = -1$ . Im ersten Fall setzen wir  $T_2 :=$ triviale Darstellung, im zweiten  $T_2 :=$ nichttriviale Darstellung. In beiden Fällen setzen wir  $T_1 = T$ .  $\square$

### 8.8 Korollar (Darstellungstheorie von $O_3$ ):

Es sei  $V$  ein drei-dimensionaler, reeller Vektorraum mit Skalarprodukt.

Jede stetige, endlich-dimensionale, irreduzible Darstellung von  $G = O_3(V)$  über  $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$  ist zu  $STF_{\pm}^l(V)$  für ein  $l \in \mathbb{N}$  und eine Wahl des Vorzeichens isomorph. Dabei meint  $STF_{\pm}^l(V)$  die Darstellung, deren Einschränkung auf  $SO_3$  gerade  $STF^l(V)$  ist und auf der die Inversion  $\iota$  anhand des gewählten Vorzeichens operiert:

$$\iota \cdot t := \begin{cases} t & t \in STF_+^l(V) \\ -t & t \in STF_-^l(V) \end{cases}$$

Der Charakter von  $STF_{\pm}^l(V)$  ist gegeben durch

$$\chi_{\pm, l}(g) = \begin{cases} \sum_{m=-l}^l e^{im\alpha} & g = \rho_{\alpha, v} \in SO_3(V) \\ \pm 1 & g \text{ ist eine Spiegelung} \\ \pm(2k+1) & g = \iota \end{cases}$$

**8.9:** Die triviale Darstellung ist  $STF_+^0(V)$ . Die einzige nichttriviale, eindimensionale Darstellung, die Determinante  $\det : O_3 \rightarrow \mathbb{K}$  ist  $STF_-^0(V)$ .

Der Raum der harmonischen, spurfreien Tensoren  $STF^l(V)$  ist die Darstellung, die im Satz  $STF_+^l(V)$  heißt, falls  $l$  gerade ist, und  $STF_-^l(V)$ , falls  $l$  ungerade ist. Das heißt bis auf diesen Vorzeichen-Twist hatten wir bereits alle irreduziblen Darstellungen gefunden.



**8.10 (Pseudo-Tensoren):** Die Konstruktion, die uns aus einer  $SO_3$ -Darstellung  $T_1$  und einer der beiden eindimensionalen Darstellungen  $T_2$  von  $\{\pm 1\}$  eine  $O_3$ -Darstellung  $T = T_1 \otimes T_2$  macht, die denselben zugrundeliegenden Vektorraum wie  $T_1$  hat, benötigte nirgendwo, dass  $T_1$  irreduzibel ist. Insbesondere können wir auch Darstellungen wie  $T_1 = V^{\otimes k}$  mit dem nichttrivialen  $T_2$  twisten.

Physiker bezeichnen das Resultat als Raum der Pseudotensoren und nennen die Elemente dieses Raums dann auch Pseudotensor. Das ist verwirrend, denn natürlich sieht man dem einzelnen Element nicht an, ob es ein Tensor oder ein Pseudotensor ist, d.h. ob es gerade als Element von  $V^{\otimes k}$  oder  $V^{\otimes k} \otimes \det$  betrachtet wird, denn der zugrundeliegende Vektorraum und damit auch die zugrundeliegende Menge dieser beiden Darstellungen ist ja der/dieselbe. Der Unterschied zwischen Tensoren und Pseudotensoren ist, wie die Gruppe  $O_3$  (vor allem die Elemente mit Determinante  $-1$ ) auf diesem Vektorraum operiert.

## 9 Warum Spherical Harmonics?

### 9.1 Die Suche nach einer guten Basis

Auch wenn wir eingangs in unserem Kurs so sehr über Basen geschimpft haben<sup>21</sup>, so ist uns natürlich bewusst, dass gerade für effiziente Berechnungen eine Basis praktisch immer gewählt wird. Welche Basis man wählt, ist dabei von großer Bedeutung: Andrea hat in ihrer Doktor-Arbeit eine bestimmte Berechnung, welche z.B. zur Modellierung von Luftbewegung millionenfach wiederholt genutzt werden soll, um den Faktor 1000 verschnellern können, und das nur durch geschickte Basiswahl.

**9.1:** Meistens ist eine Basis geschickt gewählt, wenn sie orthogonal bzgl. eines zum Problem passenden Skalarprodukts ist. Nun gibt es aber viele Skalarprodukte, die man wählen kann, die durchaus auch unterschiedliches Verständnis von Orthogonalität festlegen. Schauen wir uns einmal einige Beispiele für mögliche Skalarprodukte auf dem Raum der Polynome an:

### 9.2 Beispiel:

Sei  $B$  die Kugel in  $\mathbb{R}^3$  mit Radius 1. Dann ist mit

$$\langle f, g \rangle_B := \int_B fg \, dB$$

ein Skalarprodukt auf dem Raum der Polynome gegeben.

### 9.3 Beispiel:

Sei  $Z$  ein Zylinder in  $\mathbb{R}^3$ , z.B. mit Radius und Höhe 1. Dann ist mit

$$\langle f, g \rangle_Z := \int_Z fg \, dZ$$

ein Skalarprodukt auf dem Raum der Polynome gegeben.

### 9.4 Beispiel:

Sei  $K$  ein Kegelstumpf in  $\mathbb{R}^3$ , z.B. mit oberem Radius und Höhe 1 sowie unterem Radius  $\frac{1}{2}$ . Dann ist mit

$$\langle f, g \rangle_K := \int_K fg \, dK$$

ein Skalarprodukt auf dem Raum der Polynome gegeben.

---

<sup>21</sup>Wir wollen keine Namen nennen, aber Johannes war besonders hartnäckig...

**9.5 Beispiel:**

Sei  $Q$  ein Quader in  $\mathbb{R}^3$ , z.B. mit den Kantenlängen 1, 2 und 3. Dann ist mit

$$\langle f, g \rangle_Q := \int_Q fg \, dQ$$

ein Skalarprodukt auf dem Raum der Polynome gegeben.

**9.6 Zentrale Fragestellung:**

Wäre es nicht praktisch, eine Basis zu finden, die für möglichst viele Skalarprodukte orthogonal ist? Wie würdet ihr mit dem neu erworbenen Wissen nach solch einer Basis suchen?

Diskutiert über eure Ansätze und versucht einen Algorithmus zu entwickeln, der eine möglichst allgemein einsetzbare Basis konstruiert.

## 9.2 Die Gelfand-Zetlin Basis

**9.7 Definition** (Konstruktion der Гельфанд-Цетлин-Базы (Gelfand<sup>22</sup>-Zetlin<sup>23</sup>-Basis): Sei  $G$  eine Gruppe mit halb-einfacher Darstellung auf einem Vektorraum  $V$  und  $U_0^i$  einer der irreduziblen Unterräume von  $V$ . Für diesen Unterraum wird eine Gelfand-Zetlin-Basis wie folgt konstruiert:

- 1.) Setze das Level  $k = 0$ ,  $H_0 = G$
- 2.) Bestimme für jeden Unterraum  $U_k^i$ :
  - i.) Berechne  $\dim U_k^i$
  - ii.) Ist  $U_k^i$  1-dimensional? Dann wähle einen von Null verschiedenen Vektor aus  $U_k^i$  als einen der Basisvektoren von  $U_0^1$ .
  - iii.) Ist  $U_k^i$  mehr als 1-dimensional? Dann merke dir  $U_k^i$  für den nächsten Schritt.
- 3.) Wähle geschickt eine Untergruppe  $H_{k+1}$  von  $H_k$ , sodass jeder Unterraum  $U_k^i$  mit  $\dim U_k^i > 1$  in paarweise nicht-isomorphe für  $H_{k+1}$  irreduzible Unterräume zerfällt. (Klappt dies nicht, ist entweder eine andere Untergruppe zu finden, oder es gibt keine Gelfand-Zetlin-Basis).
- 4.) Nummeriere die Unterräume des nächst-höheren Levels: Nenne alle für  $H_{k+1}$  irreduziblen Unterräume  $U_{k+1}^1, U_{k+1}^2, \dots$ , inklusive der bereits für  $H_k$  1-dimensionalen Unterräume.
- 5.) Erhöhe das Level um 1:  $k \leftarrow k + 1$ .
- 6.) Wiederhole die Schritte 2.) bis 5.), bis alle Unterräume vom nächst-höheren Level 1-dimensional sind.
- 7.)  $k_{\max} = k$

**9.8:** Formal betrachtet, brauchen die 1-dimensionalen Untervektorräume nicht für Schritt 3.) ausgeschlossen werden. Sie werden für jede Untergruppe 1-dimensional bleiben und sich nicht weiter ändern, entsprechend braucht man sie für die weiteren Schritte auch nicht zu berücksichtigen.

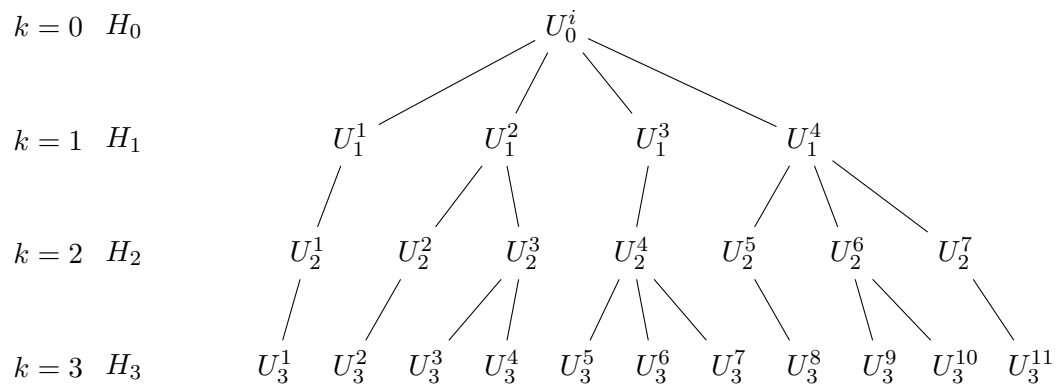
**9.9 Definition** (Гельфанд-Цетлин-Дерево (Gelfand-Zetlin-Baum)):

Mit der Konstruktion nach 9.7 bauen wir einen Baum mit  $k_{\max} + 1$  Levels. Der Stammknoten ist  $U_0^i$ , die Blätter sind alle gefundenen 1-dimensionalen Unterräume. Die Knoten zwischen dem Stammknoten und den Blättern entsprechen den irreduziblen Unterräumen der jeweiligen Level, die Kanten verbinden einen irreduziblen Unterraum  $U$  eines Levels mit allen irreduziblen Unterräumen des nächst-höheren Levels, die aus  $U$  im Schritt 3.)

<sup>22</sup>Israel Gelfand, Израиль Моисеевич Гельфанд (1913–2009), sowjetischer Mathematiker

<sup>23</sup>Michael Zetlin, Михаил Львович Цетлин (1924–1966), russ. Mathematiker und Physiker; Der Name wird leider auf viele verschiedene Weisen transkribiert, u.A. eben Zetlin (meist im dt. Sprachraum), aber auch Tsetlin (engl. Sprachraum), Cetlin, Tzetlin, Zeitlin, Zetlin

herauskommen. Eindimensionale Unterräume, die bereits in kleineren Leveln auftreten, werden hier als Knoten auf jedem höheren Level wiederholt bis zum maximalen Level. Diesen Baum nennen wir Gelfand-Zetlin-Baum. Er kann z.B. wie folgt aussehen:



In einem Gelfand-Zetlin-Baum sind alle Darstellungen paarweise ungleich. Es kann aber auftreten, dass manche Darstellungen isomorph zueinander sind (wobei die Kinder eines Knotens niemals isomorph zueinander sein dürfen).

**9.10:** Die Wahl der Untergruppen-Kette  $H_1, \dots, H_{k_{\max}}$  ist hier spielentscheidend und keinesfalls eindeutig. Aus diesem Grund gehört zu einer vollständigen Anweisung „Wähle eine Gelfand-Zetlin-Basis für  $G$  auf  $V$ “ auch die Angabe der Untergruppenkette  $H_1, \dots, H_{k_{\max}}$ .

**9.11:** Auch wenn die Konstruktion einer Gelfand-Zetlin-Basis klappt, hat man nicht unbedingt etwas gewonnen. Wenn man dazu besonders exotische Untergruppen benutzen muss, bringt einem die Gelfand-Zetlin-Basis in der Anwendung nicht besonders viel. Eigentlich möchte man sich erst für eine Untergruppenkette  $H_0, \dots, H_{k_{\max}}$  entscheiden und dann schauen, ob die Konstruktion funktioniert.

#### 9.12 Definition (Гельфанд-Цетлин-База):

Sei  $G$  eine Gruppe mit Darstellung auf einem Vektorraum  $V$  und  $G$  zerlege  $V$  in seine irreduziblen Unterräume  $U_0^1, \dots, U_0^n$ . Wähle außerdem eine Untergruppenkette  $H_1 \supseteq \dots \supseteq H_{k_{\max}}$ . Für jeden dieser Unterräume wird nun einzeln eine Basis  $\mathcal{B}$  konstruiert nach 9.7.  $\mathcal{B}$  heißt dann Gelfand-Zetlin-Basis von der Darstellung  $V$  bezüglich  $H_1, \dots, H_{k_{\max}}$ .

**9.13:** Wir sind insbesondere an der Darstellung von  $O_3$  auf dem Polynomraum und der Einbettung von  $O_2, SO_2$  bzw.  $O_1$  interessiert. Praktischerweise gilt  $O_3 \supseteq O_2 \supseteq SO_2$  und  $O_3 \supseteq O_2 \supseteq O_1$  und somit bilden die Gruppen  $O_3, O_2, SO_2, O_1$  zwei Untergruppenketten.

#### 9.14 Zentrale Fragestellung (Fortsetzung):

Kann man mit den beiden Untergruppenketten  $O_3 \supseteq O_2 \supseteq SO_2$  und  $O_3 \supseteq O_2 \supseteq O_1$  dargestellt auf dem komplexen oder reellen Polynomraum eine Gelfand-Zetlin-Basis basteln? Wie sehen solche von uns gewünschte Basen nun konkret aus?

Teilt euch in Gruppen auf und erstellt Gelfand-Zetlin-Bäume zu den vier Kombinationen

$O_3 \supsetneq O_2 \supsetneq SO_2$  dargestellt auf  $\mathbb{C}[x, y, z]$      $O_3 \supsetneq O_2 \supsetneq SO_2$  dargestellt auf  $\mathbb{R}[x, y, z]$

$O_3 \supsetneq O_2 \supsetneq O_1$  dargestellt auf  $\mathbb{C}[x, y, z]$      $O_3 \supsetneq O_2 \supsetneq O_1$  dargestellt auf  $\mathbb{R}[x, y, z]$

Hinweis: Eine der vier Fälle funktioniert nicht – warum?

**9.15 Hauptsatz** (Spherical Harmonics sind eine Gelfand-Zetlin-Basis):

Die Darstellung von  $O_3$  auf dem Polynomraum (egal, ob mit reellen oder komplexen Koeffizienten) hat eine Gelfand-Zetlin-Basis bezüglich Untergruppenkette  $O_3 \geq O_2 \geq O_1$ . Die Element dieser Basis heißen reelle Spherical Harmonics oder auch Kugelflächenfunktionen. Sofern man mit komplexen Koeffizienten arbeitet, gibt es eine zweite Gelfand-Zetlin-Basis bezüglich der Untergruppenkette  $O_3 \geq O_2 \geq SO_2$ . Die Elemente dieser Gelfand-Zetlin-Basis heißen komplexe Spherical Harmonics.

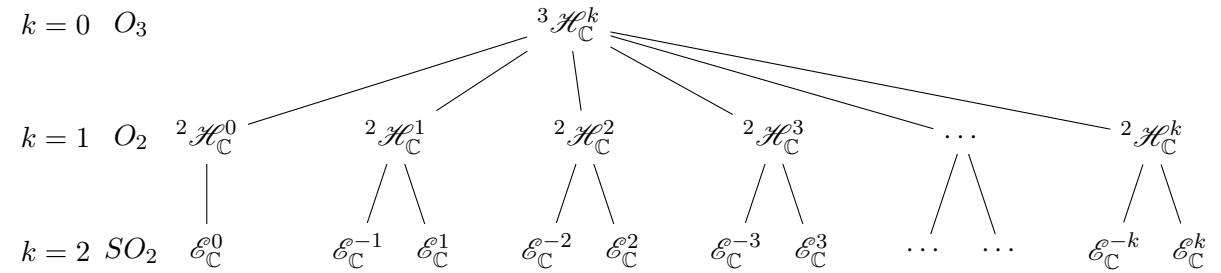
**9.16:** Unsere Definition einer Gelfand-Zetlin-Basis legt genau genommen nicht nur eine Basis fest, da wir für jedes Basiselement die freie Wahl eines skalaren Faktors haben. In Situation, wo ein Skalarprodukt gegeben ist, haben wir also die Länge der Basisvektoren nicht festgelegt.

Da die Spherical Harmonics aber auch in vielen verschiedenen, mehr oder weniger üblichen Versionen existieren, die sich alle nur in der Wahl eines Normierungsfaktors (und manchmal eines Vorzeichens) unterscheiden, haben wir keine Skrupel, diese Uneindeutigkeit in der Definition zu lassen.

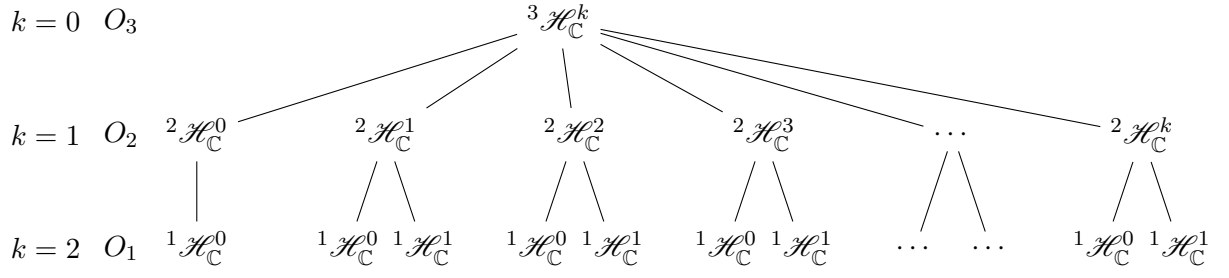
Es ist andererseits auch nicht überraschend, dass die Längen dieser Vektoren nicht allgemein festgenagelt ist, denn wir haben ja bereits festgestellt, dass sie für viele verschiedene Skalarprodukten eine Orthogonalbasis definieren. Wo sich diese Skalarprodukte also voneinander unterscheiden, ist die Frage, welche Länge (und ggf. Vorzeichen) sie diesen Basisvektoren zuordnen. Je nachdem, welches Skalarprodukt man gerade bevorzugt, ist also die eine oder andere Wahl der Normierung die sinnvollere. In einem anderen Kontext mit einem anderen Skalarprodukt sind die Spherical Harmonics dann immer noch orthogonal, aber plötzlich nicht mehr normiert.

In diesem Sinne ist es sinnvoll, die Wahl des Normierungsfaktor nicht als wesentlichen Teil der Definition zu verstehen.

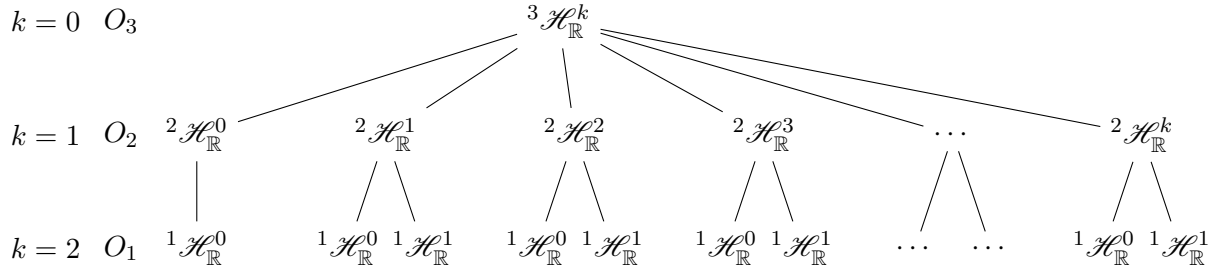
**9.17 Lemma** (Gelfand-Zetlin-Baum für  $O_3 \supsetneq O_2 \supsetneq SO_2$  dargestellt auf  $\mathbb{C}[x, y, z]$ ):



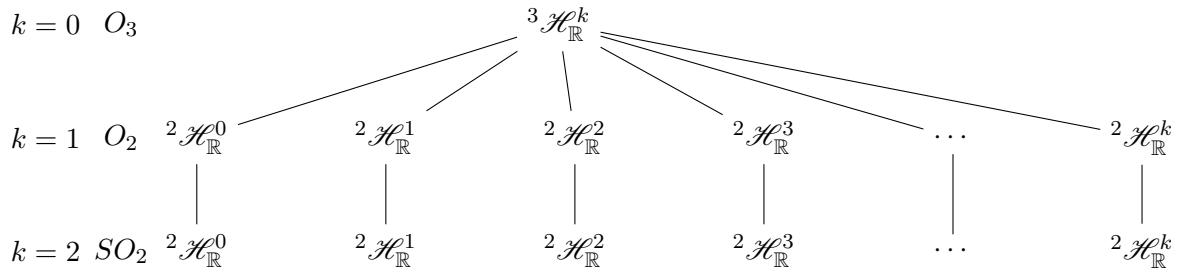
**9.18 Lemma** (Gelfand-Zetlin-Baum für  $O_3 \supsetneq O_2 \supsetneq O_1$  dargestellt auf  $\mathbb{C}[x, y, z]$ ):



**9.19 Lemma** (Gelfand-Zetlin-Baum für  $O_3 \geq O_2 \geq O_1$  dargestellt auf  $\mathbb{R}[x, y, z]$ ):



**9.20 Lemma** (Versuchter Gelfand-Zetlin-Baum für  $O_3 \geq O_2 \geq SO_2$  dargestellt auf  $\mathbb{R}[x, y, z]$ ):



*Beweis.* Siehe vorherige Kapitel, insbesondere wie sich Darstellungen von  $O_3$  in  $O_2$ -Darstellungen zerlegen.  $\square$

**9.21:** Meistens werden einem Spherical Harmonics als Basis-Satz mit besonderen Eigenschaften vorgesetzt und nicht als Gelfand-Zetlin-Basis definiert. Es fehlt also noch die Überprüfung, dass die üblichen Spherical Harmonics auch mit der Definition nach [9.15](#) übereinstimmen.

**9.22 Lemma** (Die Bezeichnung „Spherical Harmonics“ ist gerechtfertigt):

Die Gelfand-Zetlin-Basis von  $O_3 \geq O_2 \geq SO_2$  dargestellt auf  $\mathbb{C}[x, y, z]$  stimmt auf der Sphäre (bis auf den von uns nicht näher bestimmten Normierungsfaktor) mit den komplexen Spherical Harmonics, wie sie üblicherweise gegeben sind, überein.

Gleiches gilt für die Gelfand-Zetlin-Basis von  $O_3 \geq O_2 \geq O_1$  dargestellt auf  $\mathbb{R}[x, y, z]$  für die reellen Spherical Harmonics.



**9.23:** Die Wahl der Einbettungen für die Untergruppen legen Richtungen in  $V$  fest: Die Wahl wie  $SO_2$  bzw.  $O_2$  in  $O_3$  eingebettet wurde, legt eine Ebene  $E \leq V$ , in der  $(S)O_2$  nichttrivial operiert, und die dazu senkrechte Achse fest. Die Wahl der Einbettung von  $O_1$  in  $O_2$  legt außerdem fest, wie sich diese Ebene noch weiter in zwei orthogonale Richtungen zerlegt: Eine, in der  $O_1$  nichttrivial operiert, und die dazu senkrechte Richtung.

Eine äquivalente Betrachtungsweise ist folgende: Die Gelfand-Zetlin-Basen bzgl.  $O_3 \geq O_2 \geq O_1$  existieren für alle  $STF^l(V)$ , insbesondere also für  $l = 1$ , was einfach der Raum  $V$  selbst ist. Für  $O_3 \geq O_2 \geq SO_2$  wird entsprechend die Gelfand-Zetlin-Basis von  $STF^1(V_{\mathbb{C}}) = V_{\mathbb{C}}$  ausgezeichnet. Man erinnere sich, dass wir für  $SO_2$  beobachtet hatten, dass die Gruppe zwei kanonische Richtungen in der Komplexifizierung der Ebene festlegt, nämlich die beiden Eigenräume. Das ist genau das, was hier passiert.

*Beweis.* Wir wählen fast die Standardeinbettungen unserer Untergruppen bzgl. der Standardbasis von  $V = \mathbb{R}^3$ , präzise wählen wir

$$\begin{cases} O_1 & \rightarrow O_2 \\ s & \mapsto \begin{pmatrix} 1 & \\ & s \end{pmatrix} \end{cases}$$

$$\begin{cases} O_2 & \rightarrow O_3 \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \mapsto \begin{pmatrix} a & b & \\ c & d & \\ & & 1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Insbesondere ist die  $z$ -Achse also die Drehachse unserer  $SO_2$ -Untergruppe,  $E = \mathbb{R}e_x + \mathbb{R}e_y$  die dazu senkrechte Ebene und unsere  $O_1$ -Untergruppe ist so gewählt, dass die  $y$ -Richtung diejenige ist, die gespiegelt wird.

Zentral in unserem Beweis, wie die Darstellungstheorie von  $SO_3(V)$  und  $O_3(V)$  aussieht war Lemma 8.1, welches uns einen expliziten Isomorphismus der Restriktion von  ${}^3\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^l$  auf  $O_2(E)$  liefert, nämlich zur  $O_2(E)$ -Darstellung  $\text{Sym}^l(E) \oplus \text{Sym}^{l-1}(E)$ . Wenn wir das als Raum von Polynomen auffassen, dann wissen wir, dass die homogenen Polynome in  $\mathbb{C}[x, y]$  vom Grad  $l$  bzw.  $l-1$  folgende Zerlegung in irreduzible  $O_2(E)$ -Unterdarstellungen haben:

$$\begin{aligned} \text{Sym}^l(E) &\cong \{ p \in \mathbb{C}[x, y] \mid p \text{ homogen vom Grad } l \} \\ &= {}^2\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^l \oplus (x^2 + y^2)^1 \cdot {}^2\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{l-2} \oplus (x^2 + y^2)^2 \cdot {}^2\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^{l-4} \oplus \dots \end{aligned}$$

d.h. jedes homogene Polynom vom Grad  $l$  lässt sich eindeutig zerlegen als  $p = \sum_a (x^2 + y^2)^a \cdot h_a$  mit einem homogenen, harmonischen Polynom  $h_a$  vom Grad  $l - 2a$ . Wenn wir also eine Basis für den Raum der harmonischen, homogenen Polynome in  $x, y$  haben, können wir eine Basis für den Raum aller homogenen Polynome in  $x, y$  finden. Und diese können wir mit dem Isomorphismus zu einer Basis von der harmonischen, homogenen Polynome in  $x, y, z$  übersetzen.

Wenn wir nun von  $O_2$  weiter zu  $SO_2$  einschränken, haben wir gezeigt, dass alle  $SO_2$ -Darstellung sich anhand einer Eigenraum-Zerlegung in irreduzible  $SO_2$ -Unterdarstellungen zerlegt. Man sieht leicht, dass die Polynome  $(x + iy)^m, (x - iy)^m \in \mathbb{C}[x, y]$  die  $SO_2$ -Eigenbasis von  ${}^2\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^m$  ist, d.h. das unterste Level unserer Gelfand-Zetlin-Basis.

Wenn wir das alles wieder zusammensetzen, ergibt also folgende Sicht: Die Polynome

$$(x \pm iy)^l, (x \pm iy)^{l-1}, (x^2 + y^2)(x \pm iy)^{l-2}, (x^2 + y^2)(x \pm iy)^{l-3}, \dots$$

bilden eine Basis von

$$\text{Sym}^l(E) \oplus \text{Sym}^{l-1}(E) \cong \{ p \in \mathbb{C}[x, y] \mid p \text{ homogen vom Grad } l \} \oplus \{ p \in \mathbb{C}[x, y] \mid p \text{ homogen vom Grad } l-1 \}$$

von denen jeweils zwei eine irreduzible  $O_2$ -Darstellung aufspannen. Und der Isomorphismus zu  ${}^3\mathcal{H}_{\mathbb{C}}^l$  übersetzt diese in die folgende Basis (sogenannte „Solid Harmonics“):

$$\begin{aligned} R_l^{\pm l} &:= (x \pm iy)^l z^0, \\ R_l^{\pm(l-1)} &:= (x \pm iy)^{l-1} z^1 \\ R_l^{\pm(l-2)} &:= (x^2 + y^2)(x \pm iy)^{l-2} z^0 + (\partial_x^2 + \partial_y^2) \left( (x^2 + y^2)(x \pm iy)^{l-2} \right) z^2, \\ R_l^{\pm(l-3)} &:= (x^2 + y^2)(x \pm iy)^{l-3} z^1 + (\partial_x^2 + \partial_y^2) \left( (x^2 + y^2)(x \pm iy)^{l-3} \right) z^3, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Dies sind natürlich alle homogene Polynome vom Grad  $l$ , d.h. wenn man sie in Kugelkoordinaten schreibt, dann zerlegen sie sich als

$$R_l^m(r \cos(\phi) \sin(\theta), r \sin(\phi) \sin(\theta), r \cos(\theta)) = r^l Y_l^m(\phi, \theta)$$

für eine auf der Sphäre definierten Funktion  $Y_l^m$ . Weil  $R_l^m$  nach Konstruktion ein Eigenvektor für  $SO_2$  mit Eigenwert  $e^{im\alpha}$  ist, lässt sich ein Faktor  $e^{im\phi}$  ausklammern (siehe auch Aufgabe 9.3). Wegen  $x^2 + y^2 = r^2 \sin(\theta)^2 = r^2(1 - \cos(\theta)^2)$  und  $z = r \cos(\theta)$ , lässt sich alles andere in  $Y_l^m$  als Polynom von  $\cos(\theta)$  ausdrücken, sodass wir die Darstellung  $Y_l^m = e^{im\phi} P_l^m(\cos(\theta))$  finden. Wenn man das hinreichend explizit ausschreibt, sieht man, dass die  $P_l^m$  dabei (bis auf den Normierungsfaktor) genau die Definition der Legendre<sup>24</sup>-Polynome erfüllen, die in der üblichen Definition von  $Y_l^m$  vorkommen. Man beachte z.B., dass  $x^2 + y^2 = r^2 \sin(\theta)^2 = r^2(1 - \cos(\theta)^2)$  ist. Das sind genau die  $(1 - x^2)$ -Faktoren, die bei der Definition der Legendre-Polynome eine Rolle spielen.

Für den reellen Fall wählen wir stattdessen die Basis  $\Re((x + iy)^m)$  und  $\Im((x + iy)^m)$  des Raums  ${}^2\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^m$  der harmonischen, homogenen Polynome vom Grad  $m$  in den zwei Variablen  $x, y$ . So, wie wir  $O_1$  eingebettet haben, operiert die Spiegelung in  $O_1$  genau durch  $(x, y, z) \mapsto (x, -y, z)$ , d.h. durch komplexe Konjugation des Inputs  $x + iy$  dieser Polynome, d.h.  $\Re((x + iy)^m)$  wird dadurch gar nicht verändert und  $\Im((x + iy)^m)$  ist ein Eigenvektor zum Eigenwert  $-1$ . Genau das erwarten wir vom  $O_2$ -Level einer Gelfand-Zetlin-Basis.

Wenden wir dasselbe Prinzip wie zuvor an, um daraus eine Basis von  ${}^3\mathcal{H}_{\mathbb{R}}^l$  zu machen, so erhalten wir die reellen Solid Harmonics und daraus völlig analog wie zuvor die reellen spherical harmonics.  $\square$

<sup>24</sup>Adrien-Marie Legendre (1752–1833), franz. Mathematiker

**9.24:** Man beachte wie viele der üblicherweise hart erarbeiteten Eigenschaften der spherical harmonics uns durch den Ansatz, sie als Gelfand-Zetlin-Basis zu verstehen, sehr viel einfacher zugänglich werden:

- Sie sind orthogonal bzgl. der üblichen Skalarprodukte, weil alle üblichen Skalarprodukte  $O_3$ -invariant oder mindestens  $O_2$ -invariant (für Ansätze in Zylinder-Koordinaten) sind und nicht-isomorphe irreduzible Unterräume automatisch senkrecht aufeinander stehen, egal welches invariante Skalarprodukt man betrachtet.
- Sie erfüllen die Rotationsbedingung  $Y_l^m \circ \rho_{\alpha,z} = e^{im\alpha} Y_l^m$ , weil wir sie explizit als Eigenvektoren für die Rotationsgruppe  $SO_2$  konstruiert haben.
- Sie erfüllen diverse Paritätsbedingungen, weil alle diese Paritäten durch Spiegelungen in  $O_2$  bzw.  $O_3$  oder durch die Inversion  $\iota \in O_3$  realisiert sind.
- Sie interagieren sinnvoll mit dem Drehimpulsoperator  $L = r \times \nabla$ . Beispielsweise sind sie Eigenfunktionen für den Operator  $L^2 := L_x^2 + L_y^2 + L_z^2 : \mathbb{C}[x, y, z] \rightarrow \mathbb{C}[x, y, z]$ , weil diese Operatoren  $SO_3$ -linear sind und wegen Schur's Lemma sind alle  $SO_3$ -linearen Operatoren  $\mathcal{H}^{l_1} \rightarrow \mathcal{H}^{l_2}$  gleich Null für  $l_1 \neq l_2$  und Vielfache der Identität für  $l_1 = l_2$ , d.h.  $\mathcal{H}^l$  ist ein Eigenraum des Operators. Gleichzeitig sind die spherical harmonics auch Eigenfunktionen für  $L_z$ , weil sie als Gelfand-Zetlin-Basis eben auch an die Untergruppe  $SO_2$  angepasst sind und somit die gleichen Verträglichkeitseigenschaften für den  $SO_2$ -linearen Operator  $L_z$  zeigen.
- Clebsch<sup>25</sup>-Gordan<sup>26</sup>-Koeffizienten sind eng verbunden mit der Analyse, wie sich das Tensorprodukt von zwei irreduziblen Darstellungen, z.B. also  $\mathcal{H}^{l_1} \otimes \mathcal{H}^{l_2}$ , selbst wieder in irreduzible zerlegen lässt. Dafür liefern Gelfand-Zetlin-Basen viele nützliche Struktur.
- uvm.

---

<sup>25</sup>Rudolf Friedrich Alfred Clebsch, 1833 – 1872, dt. Mathematiker

<sup>26</sup>Paul Albert Gordan, 1837 — 1912, dt. Mathematiker

## Aufgaben

### Aufgabe 9.1. – Basiswechsel zwischen verschiedenen Gelfand-Zetlin-Basen

Man kann zwischen den für die vier Fälle aus 9.14 gefundenen Basen wechseln. Gib hierfür explizite Formeln an. Was sagt dies über die relative Lage der Basisvektoren zueinander aus?

### Aufgabe 9.2. – Gelfand-Zetlin-Wald

Wo ein Baum ist, gibt es meist mehrere und wenn hinreichend viele aufeinander hocken, hat man einen Wald. Da ein Gelfand-Zetlin-Baum mit einer irreduziblen Darstellung anfängt, liegt die Idee nahe, einen Gelfand-Zetlin-Wald für halbeinfache Darstellungen zu definieren.

Hierbei gilt zu klären: Wie geht man mit mehrfach auftretenden isomorphen oder gleichen irreduziblen Unterdarstellungen um? Ist es sinnvoll, diese alle einzeln als Knoten aufzuzählen?

Finde eine sinnvolle Definition des Gelfand-Zetlin-Waldes.

Hinweise:

- Man kann einen *Verzweigungsgraph* definieren. Dies ist ein Gelfand-Zetlin-Baum, der isomorphe Unterräume als einen Knoten miteinander identifiziert. Er enthält genauso viel Information, wie ein Gelfand-Zetlin-Baum.
- Kann man es sich durch geschickte Einschränkung auf bestimmte halbeinfache Darstellungen relativ einfach machen?
- Nach welchen Kriterien kann man die irreduziblen Unterdarstellungen voneinander trennen?

### Aufgabe 9.3.

Betrachte einen  $n$ -dimensionalen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  mit Skalarprodukt.

Es sei  $r^2$  das Polynom  $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2$  und  $\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \dots + \partial_n^2$  der Laplace-Operator für  $V$ .

- a.) Zeige:  $\rho := p \mapsto r^2 \cdot p$  und  $\Delta$  sind  $O_n$ -lineare Abbildungen  $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ .
- b.) Berechne  $(\rho \circ \Delta - \Delta \circ \rho)(p)$  für ein homogenes Polynom  $p$  vom Grad  $l$ .
- c.) In unserer expliziten Formel für die (komplexen) spherical harmonics kamen Ausdrücke der Form  $(\partial_x^2 + \partial_y^2)^a ((x^2 + y^2)^b (x \pm iy)^m)$  vor. Beweise, dass sich  $(x + iy)^m$  aus diesem Ausdruck ausklammern lässt.