DM547 øvelsestimer
13-09-19

Jonas Eriksen

13. september 2019

Antal fremmødte:

Opgave fra hjemmeside

Angiv for hvert af de følgende om $(a) \Rightarrow (b)$, $(b) \Rightarrow (a)$, $(a) \Leftrightarrow (b)$.

1) (a): $p \vee q$ (b): $p \wedge q$

$(b) \Rightarrow (a)$.

2) (a): $\neg p \vee q$ (b): $p \Rightarrow q$.

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \Rightarrow q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Så $(a) \Leftrightarrow (b)$.

3) (a): $\neg(p \wedge q)$ (b): $p \vee q$

p	q	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$p \vee q$
T	T	T	F	T
T	F	F	T	T
F	T	F	T	T
F	F	F	T	F

Så ingen af delene.

4) (a): $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ $\qquad$ (b): $p \vee (q \wedge r)$.

$(a) \Rightarrow (b)$ og $(b) \Rightarrow (a)$ fordi:

$$\begin{aligned} & (p \vee q) \wedge (p \vee r) \\ \Leftrightarrow \quad & p \vee (q \wedge r) && \text{(Jf. distributive lov, table 1.3.6 på s. 29)} \end{aligned}$$

Så $(a) \Leftrightarrow (b)$.

5) (a): $\neg p \Rightarrow q$ $\qquad$ (b): $\neg q \Rightarrow p$

$(a) \Leftrightarrow (b)$ fordi:

$$\begin{aligned} & \neg p \Rightarrow q \\ \Leftrightarrow \quad & \neg q \Rightarrow \neg(\neg p) && \text{(Kontraposition)} \\ \Leftrightarrow \quad & \neg q \Rightarrow p \end{aligned}$$

Opgave 1.4.5

Lad $P(x)$: "x bruger mere end 5 timer alle hverdage til undervisning", hvor universet for x er alle studerende. Udtryk hver af disse kvantificerede udasgn på dansk.

a) $\exists x : P(x)$

Der eksisterer en studerende, der bruger mere end 5 timer alle hverdage til undervnsning.

b) $\forall x : P(x)$

Alle studerende bruger mere end 5 timer alle hverdage til undervisning.

c) $\exists x : \neg P(x)$

Der eksisterer en studerende, der ikke bruger mere end 5 timer alle hverdage til undervisning.

d) $\forall x : \neg P(x)$

For alle studerende gælder det, at de ikke bruger mere end 5 timer alle hverdage til undervisning.

Opgave 1.4.10

Lad

- $C(x)$: x har en kat
- $D(x)$: x har en hund
- $F(x)$: x har en fritte

Udtryk disse sætninger vha. $c(x)$, $D(x)$, $F(x)$, kvantorer samt logiske konnektiver. Universet for x er alle studerende i dette fag.

a) En studerende har en kat, en hund og en fritte.

$\exists x : (C(x) \wedge D(x) \wedge F(x))$

b) Alle studerende har en kat, en hund eller en fritte.

$\forall x : (C(x) \vee D(x) \vee F(x))$

c) En studerende har en kat og en fritte men ikke en hund.

$\exists x : (C(x) \wedge F(x) \wedge \neg D(x))$

d) Ingen studerende har en kat, en hund og en fritte.

$\forall x : \neg(C(x) \wedge D(x) \wedge F(x)) \quad \Leftrightarrow \quad \forall x : (\neg C(x) \vee \neg D(x) \vee \neg F(x))$

e) For hver af de tre dyr kat, hund og fritte, er der en studerende, der har dette dyr som kæledyr.

$\exists x : C(x) \wedge \exists x : D(x) \wedge \exists x : F(x)$ eller alternativt $\exists x, y, z : (C(x) \wedge D(y) \wedge F(z))$

Opgave 1.4.11

Lad $P(x) : x = x^2$, hvor universet for x er $\mathbb{Z}$. Hvad er sandhedsværdierne af nedenstående udsagn?

a) $P(0)$

$0 = 0^2$, så sandt.

b) $P(1)$

$1 = 1^2$, så sandt.

c) $P(2)$

$2 \neq 2^2 = 4$, så falsk.

d) $P(-1)$

$-1 \neq (-1)^2 = 1$, så falsk.

e) $\exists x : P(x)$

Sandt jf. (a) og (b).

f) $\forall x : P(x)$

Falsk jf. fx (c).

Opgave 1.4.15

Afgør sandhedsværdierne af nedenstående udsagn når unversiet for de frie variabler er $\mathbb{Z}$.

a) $\forall n : (n^2 \geq 0)$

Sandt.

b) $\exists n : (n^2 = 2)$

Falsk fordi $n^2 = 2 \Leftrightarrow n = \sqrt{2} \notin \mathbb{Z}$ (faktisk er $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

c) $\forall n : (n^2 \geq n)$

Sandt fordi n^2 er monotonisk voksende funnktion samt positiv når n er negativ.

d) $\exists n : (n^2 \leq 0)$

Falsk jf. (a).

Opgave 1.4.17

Lad domænet for $P(x)$ være heltallene 0, 1, 2, 3 og 4. Skriv disse logiske udsagn vha. disjunktioner, konjunktioner og negationer.

a) $\exists x : P(x)$

$P(0) \vee P(1) \vee P(2) \vee P(3) \vee P(4)$

b) $\forall x : P(x)$

$P(0) \wedge P(1) \wedge P(2) \wedge P(3) \wedge P(4)$

c) $\exists x : \neg P(x)$

$\neg P(0) \vee \neg P(1) \vee \neg P(2) \vee \neg P(3) \vee \neg P(4)$

d) $\forall x : \neg P(x)$

$\neg P(0) \wedge \neg P(1) \wedge \neg P(2) \wedge \neg P(3) \wedge \neg P(4)$

e) $\nexists x : P(x)$

$\nexists x : P(x) \Leftrightarrow \forall x : \neg P(x)$ dvs. samme som (d).

f) $\neg \forall x : P(x)$

$\neg \forall x : P(x) \Leftrightarrow \exists x : \neg P(x)$ dvs. samme som (c).

Opgave 1.4.54

Som det er nævnt i bogen, så angiver notationen $\exists! x : \ P(x)$ at der eksisterer et unikt x sådan at $P(x)$ er sand. Vi skal afgøre, hvad sandhedsværdien af følgende udsagn når universet et alle heltal.

a) $\exists! x : (x > 1)$.

Falsk.

b) $\exists! x : (x^2 = 1)$.

Falsk fordi $1^2 = (-1)^2 = 1$.

c) $\exists! x : (x + 3 = 2x)$.

Sandt fordi kun sandt for $x = 3$.

d) $\exists! x : (x = x + 1)$.

Falsk.

Opgave 1.4.62

Lad

- $P(x)$: x er en tydelig forklaring.
- $Q(x)$: x er tilfredsstillende.
- $R(x)$: x er en undskyldning.

Lad universet være al dansk tekst. Vi skal så udtrykke de følgende udsagn v.h.a. kvantorer, logiske konnektiver og $P(x)$, $Q(x)$ og $R(x)$.

a) Alle tydelige forklaringer er tilfredsstillende.

Kan formuleres som "for alle x, hvis x er en tydelig forklaring, så er x tilfredsstillende." D.v.s.

$$\forall x : (P(x) \Rightarrow Q(x))$$

b) Nogle undskyldninger er utilfredsstillende.

Kan formuleres som "der eksisterer et x, så x er en undskyldning og utilfredsstillende." D.v.s.

$$\exists x : \ (R(x) \wedge \neg Q(x))$$

c) Nogle undskyldninger er ikke tydelige forklaringer.

Kan formuleres som "der eksisterer et x, så x er en undskyldning og ikke en tydelig forklaring". D.v.s.

$$\exists x : \ (R(x) \wedge \neg P(x))$$

d) Følger (c) af (a) og (b).

Ja.

Antag $(a) \wedge (b)$. D.v.s. at $\exists k$ sådan at

$$(P(k) \Rightarrow Q(k)) \wedge (R(k) \wedge \neg Q(k))$$

er sand.
Dette kan vi omskrive:

$$\begin{array}{lll} & (P(k) \Rightarrow Q(k)) \wedge (R(k) \wedge \neg Q(k)) & \\ \Leftrightarrow & (\neg Q(k) \Rightarrow \neg P(k)) \wedge (R(k) \wedge \neg Q(k)) & \text{kontrapositiv af venstresiden} \\ \Leftrightarrow & \neg P(k) \wedge R(k) \wedge \neg Q(k) & \text{fordi } \neg Q(k) \text{ må være sand.} \\ \Rightarrow & \neg P(k) \wedge R(k) & \end{array}$$

Da vi har vist ovenstående for et k, har vi vist at $\exists x : (R(x) \land \neg P(x))$.

$\square$

Opgave 1.4.47

Vis at $\exists x : (P(x) \lor Q(x)) \Leftrightarrow \exists x : P(x) \lor \exists x : Q(x)$.

Pf. "$\Rightarrow$:

Antag $\exists x : (P(x) \lor Q(x))$. Så må der $\exists a$ i universet for x sådan at $P(x)$ eller $Q(x)$ er sande. Vi observerer at

$$P(a) \Rightarrow \exists x : P(x)$$

og

$$Q(x) \Rightarrow \exists x : Q(x)$$

Det følger at $\exists x : (P(x) \lor Q(x)) \Rightarrow \exists x : P(x) \lor \exists x : Q(x)$.

Pf. "$\Leftarrow$:

Antag $\exists x : P(x) \lor \exists x : Q(x)$. Så må der $\exists a, b$ i universet for x sådan at $P(a)$ eller $Q(b)$ (eller begge) er sande. Det følger at $\exists x : P(x) \lor \exists x : Q(x) \Rightarrow \exists x : (P(x) \lor Q(x))$.

$\square$

Opgave 1.4.53

Vis at $\exists x : P(x) \land \exists x : Q(x) \not\Leftrightarrow \exists x : (P(x) \land Q(x))$.

Antag $\exists x : P(x) \land \exists x : Q(x)$. Så må der $\exists a, b$ in universet for x sådan at $P(a)$ og $Q(b)$ er sand. Men da det *ikke nødvendigvis* er tilfældet at $a = b$ så følger det at $\exists x : P(x) \land \exists x : Q(x) \not\Rightarrow \exists x : (P(x) \land Q(x))$. Vi kan derfor slutte at $\exists x : P(x) \land \exists x : Q(x) \not\Leftrightarrow \exists x : (P(x) \land Q(x))$.

$\square$

Opgave 1.4.55

Find sandhedsværdien af disse udsagn.

a) $\exists! x : P(x) \Rightarrow \exists x : P(x)$.

Sandt.

b) $\forall x : P(x) \Rightarrow \exists! x : P(x)$.

Falsk. (Med mindre domænet for x har størrelse præcis 1 – i så fald er udsagnet sandt.)

c) $\exists! x : \neg P(x) \Rightarrow \neg\forall x : P(x)$.

Sandt fordi $\neg\forall x : P(x) \Leftrightarrow \exists x : \neg P(x)$ samt (a).