DM547 øvelsestimer
20-09-19

Jonas Eriksen

20. september 2019

Antal fremmødte:

Opgave 1.7.18

Vi skal vise at hvis $n, m \in \mathbb{Z}$ og $m \cdot n$ er lige, så er m lige eller n lige.

Bruger *kontraposition:* n ulige $\wedge$ m ulige $\Rightarrow$ $m \cdot n$ ulige.

Vi skriver $n = 2r + 1$ og $m = 2k + 1$, hvor $r, k \in \mathbb{Z}$ jf. def. af ulige heltal.

$$\begin{aligned} m \cdot n &= (2k+1)(2r+1) \\ &= 4kr + 2k + 2r + 1 \\ &= 2\underbrace{(2kr + k + r)}_{\in \mathbb{Z}} + 1 \end{aligned}$$

Nederste linje er ulige jf. def. af ulige heltal.

$\square$

Opgave 1.7.29

Vi skal vise at hvis $n \in \mathbb{Z}^+$, så er n ulige hvis og kun hvis $5n + 6$ er ulige (altså "$\Leftrightarrow$").

Pf. "$\Rightarrow$" (kontrapositionsbevis):

Kontraposition: n lige $\Rightarrow$ $5n + 6$ lige for $n \in \mathbb{Z}$.

$n = 2k$ hvor $k \in \mathbb{Z}$ jf. def. af lige heltal.

$$\begin{aligned} 5n + 6 &= 5(2k) + 6 \\ &= 10k + 6 \\ &= 2\underbrace{(5k + 3)}_{\in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Nederste linje er lige jf. def. af lige heltal.
Pf. "$\Leftarrow$" (direkte bevis):

$n = 2s + 1$ hvor $s \in \mathbb{Z}$ jf. def. af ulige heltal.

$$\begin{aligned} 5n + 6 &= 5(2s + 1) + 6 \\ &= 10s + 5 + 6 \\ &= 10s + 11 \\ &= 2\underbrace{(5s + 5)}_{\in \mathbb{Z}} + 1 \end{aligned}$$

Nederste linje er ulige jf. def. af ulige heltal.

$\square$

Opgave 1.7.36

Er denne ræsonnering for at finde løsningen på ligningen $\sqrt{2x^2 - 1} = x$ korrekt?

1. $\sqrt{2x^2 - 1} = x$ er givet.
2. $2x^2 - 1 = x^2$ fås ved at kvadrere begge sider af (1).
3. $x^2 - 1 = 0$ fås ved at fratrække x^2 fra begge sider af (2).
4. $(x - 1)(x + 1) = 0$ fås ved at fås ved at faktorisere venstresiden af $x^2 - 1$.
5. $x = 1$ eller $x = -1$ hvilket følger af at hvis $ab = 0$ så er $a = 0$ eller $b = 0$.

Nej.

Den går galt i trin (2), fordi informationen om at x er ikke-negativ går tabt. Denne information er nødvendig fordi kvadratrodsfunktionen ikke er defineret for negative tal. Havde informationen været med, var $x = -1$ blevet forkastet til sidst. Udover dette er argumentationen rigtig.

Opgave 1.7.41

Vi skal vise at mindst ét af de reelle tal $a_1, a_2, \dots a_n$ er større end eller lig med gennemsnittet af disse tal. Bagefter skal vi redegøre for, hvilken bevismetode, der blev brugt.

(Modstridsbevis.)

Lad $A = 1/n \cdot \sum_{i=1}^n a_i$ (gns.). Antag (til modstrid) $a_i < A$ for $i = 1, \dots, n$. Det følger at

$$a_1 + a_2 + \cdots a_n < n \cdot A. \tag{1}$$

Vi ved at A er givet ved

$$A = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \Leftrightarrow A \cdot n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n \tag{2}$$

Ved at substituere udtrykket for $A \cdot n$ fra eq. (2) ind i eq. (1), får vi

$$a_1 + a_2 + \cdots a_n < a_1 + a_2 + \cdots a_n$$

hvilket er en modstrid. Det vil sige at vores antagelse var forkert, hvoraf det følger, at det vi skulle vise er sandt.

$\square$

Opgave 1.7.43

Vis at hvis $n \in \mathbb{Z}$, så er disse fire udsagn ækvivalente:

(i) n er lige

(ii) $n + 1$ er ulige

(iii) $3n + 1$ er ulige

(iv) $3n$ er lige

Viser at $(i) \Leftrightarrow (ii)$, $(iii) \Leftrightarrow (iv)$ og $(i) \Leftrightarrow (iv)$. Vi bruger definitionerne $n = 2k, k \in \mathbb{Z}$ når n er lige og $n = 2k + 1, k \in \mathbb{Z}$ når n er ulige.

$(i) \Leftrightarrow (ii):\ n = 2k \Leftrightarrow n + 1 = 2k + 1$

$(iii) \Leftrightarrow (iv):\ 3n + 1 = 2k + 1 \Leftrightarrow 3n = 2k$

$(i) \Leftrightarrow (iv):\ n = 2k \Leftrightarrow 3n = 3(2k) = 6k = 2(3k)$

Vha. disse biimplikationer kan man 'komme fra' alle udsagn til alle udsagn. Derfor har vi nu vist, at de fire udsagn er ækvivalente.

$\square$

Opgave 1.8.11

Vi skal vise at der er 100 positive heltal efter hinanden, der ikke er kvadrattal. Er beviset konstruktivt eller ikke-konstruktivt?

$2500 = 50^2$ og $2601 = 51^2$ og kvadrattalsfunktionen er voksende, så 2501 til 2600 er ikke kvadrattal.

$\square$

Konstruktivt eksistensbevis.

Opgave 1.8.32

Vis at der der ikke er nogle heltalsløsninger for x og y til ligningen $2x^2 + 5y^2 = 14$.

Betragt leddet $5y^2$. Observér at $y \in \{-1, 0, 1\}$, fordi hvis $|y| > 1$, så er $5y^2 > 14$. Leddet kan derfor kun antage værdierne $5 \cdot (-1)^2 = 5 \cdot 1^2 = 5$ eller $5 \cdot 0^2 = 0$.

Det følger at x kan antage værdien

$$2x^2 + 0 = 14 \Leftrightarrow x^2 = \frac{14}{2} = 7 \Leftrightarrow x = \sqrt{7} \notin \mathbb{Z}$$

og

$$2x^2 + 5 = 14 \Leftrightarrow x^2 = \frac{14-5}{2} = 4,5 \Leftrightarrow x = \sqrt{4,5} \notin \mathbb{Z}$$

Altså kan vi konkludere at der ikke er nogle heltalsløsninger for x og y.

Opgave fra hjemmeside

Lad $n \in \mathbb{N}$ og $P(n)$ være udsagnet

$$\sum_{i=0}^{n} 3^i = \frac{1}{2}(3^{n+1} - 1)$$

I denne opgave skal vi bevise at $P(n)$ er sand for alle $n \in \mathbb{N}$.

1) Hvad er udsagnet $P(0)$?

$P(0):\ 3^0 = \frac{1}{2}(3^{0+1} - 1)$.

2) Bevis $P(0)$, d.v.s. udfør basisskridtet.

$P(0):\ 3^0 = 1 = \frac{1}{2}(3^{0+1} - 1) = \frac{1}{2}(3^1 - 1) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$

3) Opskriv induktionsantagelsen.

Vi antager at $P(k)$ er sandt for et vilkårligt heltal $k \geq 0$, dvs.:

$$\sum_{i=0}^{k} 3^i = \frac{1}{2}(3^{k+1} - 1)$$

4) Hvad skal der bevises i induktionsskridtet?

Det skal bevises at $P(k) \Rightarrow P(k+1)$. Med andre ord skal vi vise, at det følger af vores induktionsantagelse $P(k)$ at udsagnet $P(k+1)$ også er sandt.

(Helt konkret skulle vi gerne ende med $\sum_{i=0}^{k+1} 3^i = \frac{1}{2}(3^{(k+2} - 1))$

5) Unfør induktionsskridtet. Angiv hvor du bruger induktionsantagelsen.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{k+1} 3^i &= 3^0 + 3^1 + \cdots + 3^k + 3^{k+1} \\
&= \frac{1}{2}(3^{k+1} - 1) + 3^{k+1} && \text{(Iflg. induktionsantagelsen)} \\
&= \frac{3^{k+1} - 1 + 2 \cdot 3^{k+1}}{2} \\
&= \frac{3 \cdot 3^{k+1} - 1}{2} && \text{(Samler leddene i tælleren)} \\
&= \frac{3^{k+2} - 1}{2} \\
&= \frac{1}{2}(3^{k+2} - 1) && \text{(Trækker 1/2 ud af brøk)}
\end{aligned}$$

6) Forklar, hvorfor disse skridt udgør et bevis for at $P(n)$ er sand for alle $n \in \mathbb{N}$.

Brug stige-/domino-analogien.

Opgave 1.7.42

Vi skal bruge opgave 1.7.41 til at vise, at hvis de 10 første positive heltal placeres rundt om en cirkel i en vilkårlig rækkefølge, så eksisterer der tre heltal i på hinanden følgende lokationer rundt om cirklen, der har en sum større end eller lig med 17.

Observation 1: Der er 10 tripletter når de 10 første heltal placeres rundt om en cirkel (lav illustration med cirkel):

$$
\begin{aligned}
A_1 &= a_1 + a_2 + a_3 \\
A_2 &= a_2 + a_3 + a_4 \\
A_3 &= a_3 + a_4 + a_5 \\
&\vdots \\
A_{10} &= a_{10} + a_1 + a_2
\end{aligned}
$$

Observation 2: a_i for $i = 1, \ldots, 10$ indgår i præcis 3 tripletter.

Vi kender ikke værdien af $A_1, \ldots, A_{10}$ men deres samlede sum må være

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{10} A_i &= (a_1 + a_2 + a_3) + (a_2 + a_3 + a_4) + \cdots + (a_{10} + a_1 + a_2) && \text{(Jf. observation 1)} \\
&= 3 \cdot (a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10}) && \text{(Jf. observation 2)} \\
&= 3 \cdot (1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10) \\
&= 3 \cdot 55 \\
&= 165
\end{aligned}
$$

Så den gennemsnitlige værdi af en triplet er

$$\frac{165}{10} = 16.5$$

Da $16,5 \notin \mathbb{Z}$ må der $\exists i : A_i \geq 17$ jf. modstriden fra opgave 1.7.41.

$\square$