DM547 øvelsestimer
16-09-19

Jonas Eriksen

20. september 2019

Antal fremmødte:

Opgave 1.5.9

Lad $L(x, y)$ være udsagnet "x elsker y", hvor universet for både x og y er alle mennesker i verden. Vi skal så bruge kvantorer til at udtrykke nedenstående sætninger.

a) Alle elsker Jerry.

$\forall x : L(x, \text{Jerry})$.

b) Alle elsker nogen.

$\forall x : \exists y : L(x, y)$.

c) Der er en som alle elsker.

$\exists x : \forall y : L(y, x)$.

d) Ingen elsker alle.

$\neg\exists x : \forall y : L(x, y) \Leftrightarrow \forall x : \exists y : \neg L(x, y)$.

Opgave 1.5.19

Vi skal udtrykke disse sætninger v.h.a. matematiske og logiske operatorer, prædikater og kvantorer. Universet er alle heltal.

a) Summen af to negative heltal er negativ.

$\forall x : \forall y : ((x < 0) \wedge (y < 0) \Rightarrow (x + y < 0))$.

b) Differensen mellem to positive heltal er ikke nødvedigvis positiv.

$\exists x : \exists y : ((x > 0) \wedge (y > 0) \wedge (x - y \leq 0))$.

c) Summen af kvadratet af to heltal er større end eller lig med kvadratet på deres sum.

$\forall x : \forall y : (x^2 + y^2 \geq (x + y)^2)$.

d) Den absolutte værdi af produktet af to heltal er produktet af deres absolutte værdier.

$\forall x : \forall y : (|x \cdot y| = |x| \cdot |y|)$.

Opgave 1.5.27

Vi skal afgøre sandhedsværdien af de nedenstående udsagn, hvis universet er alle heltal.

a) $\forall n : \exists m : (n^2 < m)$.

Sandt. Fx $m = n^2 + 1$.

b) $\exists n : \forall m : (n < m^2)$.

Sandt. Fx $n = -1$.

c) $\forall n : \exists m : (n + m = 0)$.

Sandt. Vælger $m = -n$.

d) $\exists n : \forall m : (n \cdot m = m)$.

Sandt. Vælger $n = 1$.

e) $\exists n : \exists m : (n^2 + m^2 = 5)$.

Sandt. Vælger $n = 2$ og $m = 1$.

f) $\exists n : \exists m : (n^2 + m^2 = 6)$.

Falsk. Det er klart at enten m eller n skal være 0. Lad (w.l.o.g.) $m = 0$. Så må det gælde at $n^2 = 6 \Leftrightarrow n = \sqrt{6} \approx 2,45 \notin \mathbb{Z}$. Så n eksisterer ikke.

i) $\forall n : \forall m : \exists p : (p = (m + n)/2)$.

Falsk. Hvis $m + n$ er ulige er $p = (m + n)/2 \notin \mathbb{Z}$.

Opgave 1.5.30

Vi skal omskrive de nedenstående udsagn, så negationen kun indgår inde i prædikaterne (d.v.s. ingen negation uden for kvantorer eller udtryk med logiske konnektiver).

Til denne opgave bruger vi De Morgans love for negering af kvantificerede udsagn.

a) $\neg\exists y : \exists x : P(x, y)$

$$\begin{aligned} & \neg\exists y : \exists x : P(x, y) \\ \Leftrightarrow\ & \forall y : \neg\exists x : P(x, y) \\ \Leftrightarrow\ & \forall y : \forall x : \neg P(x, y) \end{aligned}$$

b) $\neg\forall x : \exists y : P(x, y)$

$$\begin{aligned} & \neg\forall x : \exists y : P(x, y) \\ \Leftrightarrow\ & \exists x : \neg\exists y : P(x, y) \\ \Leftrightarrow\ & \exists x : \forall y : \neg P(x, y) \end{aligned}$$

c) $\neg\exists y : (Q(y) \land \forall x : \neg R(x, y))$.

$$\begin{aligned} & \neg\exists y : (Q(y) \land \forall x : \neg R(x, y)) \\ \Leftrightarrow\ & \forall y : \neg(Q(y) \land \forall x : \neg R(x, y)) \\ \Leftrightarrow\ & \forall y : (\neg Q(y) \lor \neg\forall x : \neg R(x, y)) \\ \Leftrightarrow\ & \forall y : (\neg Q(y) \lor \exists x : \neg(\neg R(x, y))) \\ \Leftrightarrow\ & \forall y : (\neg Q(y) \lor \exists x : R(x)) \end{aligned}$$

Opgave 1.5.38

Vi skal udtrykke negationen de nedenstående sætninger v.h.a. kvantorer samt på dansk.

a) Alle studerende i denne klasse kan lide matematik.

"Der eksisterer en studerende i denne klasse, der ikke kan lide matematik."

Lad $P(x)$ være udsagnet: "x kan lide matematik." Lad universet for x være alle studerende i denne klasse.

$$\exists x : \neg P(x)$$

b) Der er en studerende i denne klasse, som aldrig har set en computer.

"Alle studerende i denne klasse har set en computer."

Lad $C(x, y)$ være udsagnet: "x har set y." Lad universet for x være alle studerende i denne klasse og lad y være alle computere.

$$\forall x : \exists y : C(x, y)$$

c) Der er en studerende i denne klasse, som har taget alle matematikkurser udbudt af universitetet.

"Ingen studerende i denne klasse har taget alle matematikkurser udbudt af universitetet."

Lad $M(x, k)$ være udsagnet: "x har taget k." Lad universet for x være alle studerende i denne klasse. Lad universet for k være alle matematikkurser udbudt af universitetet.

$$\forall x : \exists k : \neg M(x, k)$$

d) Der er en studerende i denne klasse, der har været i mindst ét rum i alle bygninger på campus.

"Ingen studerende i denne klasser har været i mindst ét rum i alle bygninger på campus."

Lad $L(r, b)$ være udsagnet: "lokale r ligger i bygning b". Lad universet for b være alle bygninger på campus og r er alle rum i alle bygninger på campus. Lad $V(s, r)$ være udsagnet: "s har været i lokale r." Lad universet for s være alle studerende i denne klasse og r er det samme som før.

$$\forall s : \exists b : \forall r : (L(r, b) \Rightarrow \neg V(s, r))$$

$\square$

Opgave 1.5.39

Find et modeksempel, hvis det er muligt, for de nedenstående kvantificerede udsagn, hvor universet for alle variabler er alle heltal.

a) $\forall x: \forall y: (x^2 = y^2 \Rightarrow x = y)$.

$x = -2$ og $y = 2$ fordi $(-2)^2 = 2^2 = 4$ men $-2 \neq 2$.

b) $\forall x: \exists y: (y^2 = x)$.

$x = -1$ fordi $\forall y : y^2 \geq 0$.

c) $\forall x: \forall y: (x \cdot y \geq x)$.

$x = 10$ og $y = 0$ fordi $10 \cdot 0 = 0 \not\geq 10$.

Opgave 1.7.1

Vi skal v.h.a. et direkte bevis vise, at summen af to ulige heltal er lige.

Lad n og m være to vilkårlige ulige heltal. Fra def. 1.7.1 (s. 87) ved vi, at de kan skrives som $n = 2s + 1$ og $m = 2t + 1$, hvor $s, t \in \mathbb{Z}$. Det følger at

$$\begin{aligned} n + m &= (2s + 1) + (2t + 1) \\ &= 2s + 2t + 2 \\ &= 2\underbrace{(s + t + 1)}_{\in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Sidste linje er definitionen på et lige heltal.

$\square$

Opgave 1.7.5

Vi skal vise at hvis $n + m$ og $n + p$ er lige, så er $m + p$ lige, $m, n, p \in \mathbb{Z}$. Bagefter skal vi redegøre for, hvilken bevismetode vi brugte.

Vi skriver $n + m = 2k$ og $n + p = 2s$, $k, s \in \mathbb{Z}$, jf. def. af lige heltal.

$$\begin{aligned} m + p &= (n + m) + (n + p) - 2n \\ &= 2k + 2s - 2n \\ &= 2\underbrace{(k + s - n)}_{\in \mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Nederste linje er lige jf. definitionen af lige heltal.

$\square$

Dette var et *direkte bevis*, fordi vi startede med at antage at hypotesen var sand for derefter at slutte at konklusionen også måtte være sand gennem en række “mellemregninger.”