DM547 øvelsestimer
28-10-19

Jonas Eriksen

28. oktober 2019

Antal fremmødte:

Opgave 9.6.1

Hvilke af disse relationer på $\{0, 1, 2, 3\}$ er partielle ordninger? Afgør for de relationer, der ikke er partielle ordninger, hvilke egenskaber de mangler.

a) $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

- *Refleksiv.* Ja.
- *Antisymmetrisk.* Ja.
- *Transitiv.* Ja.

Derfor: Partiel ordning.

b) $\{(0, 0), (1, 1), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$

- *Refleksiv.* Ja.
- *Antisymmetrisk.* Nej. $(2, 3) \in R$ og $(3, 2) \in R$.
- *Transitiv.* Nej. $(3, 2) \in R$ og $(2, 0) \in R$, men $(3, 0) \notin R$

Derfor: Ikke partiel ordning.

Opgave 9.6.3

Er (S, R) et poset, hvis S er mængden af alle mennesker i verden og $(a, b) \in R$, hvor a og b er mennesker, hvis

a) a er højere end b?

- *Refleksiv.* Nej. Ingen mennesker er højere end sig selv.
- *Antisymmetrisk.* Ja. Hvis a højere end b kan b ikke være højere end a.
- *Transitiv.* Ja. Hvis a højere end b og b højere end c så må a være højere end c.

Derfor: Ikke partiel ordning/poset.

b) a er ikke højere end b?

- *Refleksiv.* Ja. Alle er ikke-højere end sig selv.
- *Antisymmetrisk.* Nej. a ikke højere end b og b ikke-højere end $a \Leftrightarrow a$ og b lige høje. Så alle mennesker, der er lige høje er symmetrisk relaterede til hinanden gennem R.
- *Transitiv.* Ja.

Derfor: Ikke partiel ordning/poset.

c) $a = b$ eller a er forfader til b?

- *Refleksiv.* Ja. Alle mennesker 'lig med' sig selv.
- *Antisymmetrisk.* Ja. Hvis a forfader til b kan b ikke være forfader til a.
- *Transitiv.* Ja. a forfader til b og b forfader til c betyder at a forfader til c.

Derfor: Partiel ordning/poset.

d) a og b har en fælles ven?

- *Refleksiv.* Ja. Alle har en fælles ved med sig selv (antagelse: alle har ≥ 1 ven).
- *Antisymmetrisk.* Nej. Hvis a har en fælles ven med b har b en fælles ven med a.
- *Transitiv.* Nej. a har fælles ven med b og b har fælles ven med c betyder ikke nødvendigvis at a har fælles ven med c. (Bemærk: Der står intet om at a og b selv er venner).

Derfor: Ikke partiel ordning/poset.

Opgave 9.6.5

Hvilke er disse er posets?

a) $(\mathbb{Z}, =)$

Refleksiv, antisymmetrisk og transitiv på $\mathbb{Z}$. Derfor: poset.

b) $(\mathbb{Z}, \neq)$

Ikke refleksiv, ikke antisymmetrisk (fx $3 \neq 4 \Leftrightarrow 4 \neq 3$) og transitiv på $\mathbb{Z}$. Derfor: ikke poset.

c) $(\mathbb{Z}, \geq)$

Refleksiv, antisymmetrisk og transitiv på $\mathbb{Z}$. Derfor: poset.

d) $(\mathbb{Z}, \nmid)$

Ikke refleksiv (alle heltal går op i sig selv), ikke antisymmetrisk (fx $3 \nmid 7$ og $7 \nmid 3$) og ikke transitiv (fx $3 \nmid 5$ og $5 \nmid 6$, men $3|6$). Derfor: ikke poset.

Opgave 9.6.7

Afgør om relationen repræsenteret ved $0 - 1$ matricen er en partiel ordning.

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(Vi kalder rækker/kolonner for a, b, c).

Refleksiv (diagonalen indeholder kun 1-taller), ikke antisymmetrisk (fx $(a, b) \in R$ og $(b, a) \in R$) og ikke transitiv (fx $(b, a) \in R$ og $(a, c) \in R$, men $(b, c) \notin R$). Derfor: ikke partiel ordning.

Opgave 9.6.14

Hvilke af disse par af elementer er sammenlignelige i poset'et $(\mathbb{Z}^+, |)$?

a) $5, 15$

Sammenlignelige da $5|15$.

b) $6, 9$

Ikke sammenlignelige da $6 \nmid 9$ og $9 \nmid 6$.

c) $8, 16$

Sammenlignelige da $8|16$.

d) $7, 7$

Sammenlignelige da $7|7$.

Opgave 9.6.17

Find den leksikografiske ordning af disse n-tupler.

(Ligesom med ord i ordbogen sammenligner vi fra venstre mod højre.)

a) $(1, 1, 2), (1, 2, 1)$

$(1, 1, 2) \prec (1, 2, 1)$.

b) $(0, 1, 2, 3), (0, 1, 3, 2)$

$(0, 1, 2, 3) \prec (0, 1, 3, 2)$.

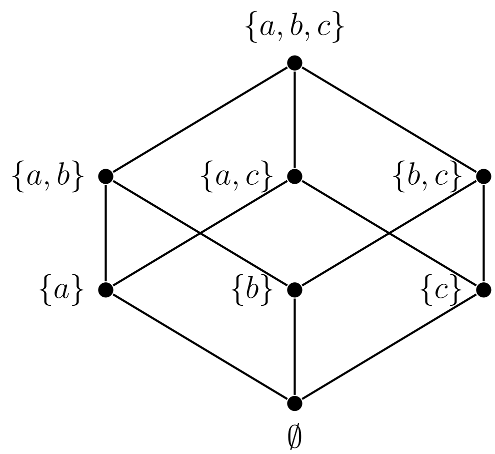
c) $(1, 0, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 1, 0)$

$(0, 1, 1, 1, 0) \prec (1, 0, 1, 0, 1)$.

Opgave 9.6.24

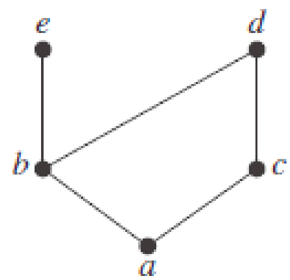
Tegn Hasse-diagrammet for inklusion på mængden $\mathcal{P}(S)$, hvor $S = \{a, b, c\}$ (d.v.s. $(\mathcal{P}(S), \subseteq)$).

For at tegne et Hasse-diagram tegner vi en grafrepræsentation af relationen, fjerner alle løkker (fordi en partiel orden er refleksiv), gør kanter uorienterede (fordi en partiel orden er antisymmetrisk; vi læser diagrammet nedefra og op) og fjerner de transitive kanter (fordi en partiel orden er transitiv). I denne opgave tegner vi ikke grafen fordi det er for omfattende. Hasse-diagrammet bliver:

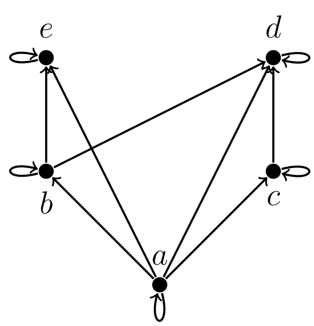


Opgave 9.6.26

Oprems alle ordnede par, der indgår i den partielle ordning repræsenteret ved dette Hasse-diagram



Vi kan lave Hasse-diagrammet om til en almindelig grafrepræsentation, hvorved vi får



Så de ordnede par er:

$$\{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (e, e), (a, b), (a, c), (c, d), (b, d), (b, e), (a, e), (a, d)\}$$

.

Opgave 4.1.1

Dividerer 17 disse tal?

a) 68

Ja. $68 = 17 \cdot 4$.

b) 84

Nej. $\nexists c \in \mathbb{Z} : 84 = 17 \cdot c$. $(85/17 \approx 4,94.)$

c) 357

Ja. $357 = 17 \cdot 21$.

d) 1001

Nej. $\nexists c \in \mathbb{Z} : 1001 = 17 \cdot c$. $(1001/17 \approx 58,88.)$

Opgave 4.1.2

Vis at hvis a er et heltal forskelligt fra 0, så gælder følgende

a) $1|a$.

Vi observerer at $a = 1 \cdot a$, hvilket medfører at $1|a$ iflg. Def. 4.1.1, fordi $a \in \mathbb{Z}$.

$\square$

b) $a|0$.

Vi observerer at $0 = a \cdot 0$, hvilket medfører at $a|0$, iflg. Def. 4.1.1.

$\square$

Opgave 4.1.3

Vis at del (ii) af Sætning 4.1.1 er sand (d.v.s. $a|b \Rightarrow a|bc, \forall a, b, c \in \mathbb{Z}, a \neq 0$).

Direkte bevis. Antag at $a|b$:

$$\begin{aligned} a|b &\Leftrightarrow b = ak && \text{(Jf. Def 4.1.1; } k \in \mathbb{Z}\text{)} \\ &\Rightarrow bc = akc && \text{(Ganger med } c \text{ på begge sider)} \\ &\Rightarrow bc = a(kc) && (k, c \in \mathbb{Z} \text{ så } kc \in \mathbb{Z}) \\ &\Rightarrow a|bc && \text{(Jf. Def. 4.1.1)} \end{aligned}$$

□

Opgave 4.1.4

Vis at del (*iii*) af Sætning 4.1.1 er sand (d.v.s. $a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$).

Direkte bevis: Antag at $a|b$ og $b|c$. Så ved vi at $\exists s, r \in \mathbb{Z}$ sådan at $b = as$ og $c = br$. Ved at substituere udtrykket for b ind i den udtrykket for c får vi $c = (as)r = a(sr)$, og da $sr \in \mathbb{Z}$ følger det af Def. 4.1.1 at $a|c$.

□