DM547 øvelsestimer
11-11-19

Jonas Eriksen

12. november 2019

Opgave 4.3.16

Afgør om disse heltal er parvist indbyrdes primiske.

a) 21, 34, 55

$$
\begin{aligned}
\gcd(21, 34): \quad 34 &= 21 \cdot 1 + 13 \\
21 &= 13 \cdot 1 + 8 \\
13 &= 8 \cdot 1 + 5 \\
8 &= 5 \cdot 1 + 3 \\
5 &= 3 \cdot 1 + 2 \\
3 &= 2 \cdot 1 + 1 \\
2 &= 1 \cdot 1 + 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\gcd(21, 55): \quad 55 &= 21 \cdot 2 + 13 \\
21 &= 13 \cdot 1 + 8 \\
13 &= 8 \cdot 1 + 5 \\
8 &= 5 \cdot 1 + 3 \\
5 &= 3 \cdot 1 + 2 \\
3 &= 2 \cdot 1 + 1 \\
2 &= 1 \cdot 1 + 0
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\gcd(34,55): \quad 55 =& 34\cdot 1+21\\ 34 =& 21\cdot 1+13\\ 21 =& 13\cdot 1+8\\ 13 =& 8\cdot 1+5\\ 8 =& 5\cdot 1+3\\ 5 =& 3\cdot 1+2\\ 3 =& 2\cdot 1+1\\ 2 =& 1\cdot 1+0\end{aligned}$$

Da $\gcd(21,34)=\gcd(21,55)=\gcd(34,55)=1$, så er 21, 34 og 55 parvist indbyrdes primiske.

b) 14, 17, 85

$$\begin{aligned}\gcd(14,85): \quad 85 =& 14\cdot 6+1\\ 14 =& 1\cdot 14+0\end{aligned}$$

Så $\gcd(14,85)=1$.

Da 17 er et primtal ved vi at $\gcd(14,17)=1$.

$$\gcd(17,85): \quad 85 = 17\cdot 5+0$$

Så $\gcd(85,17)=17$.

Derfor er 14, 17 og 85 ikke parvist indbyrdes primiske.

Opgave 4.3.25

Hvad er den største fælles divisor for disse par af heltal?

a) $3^7\cdot 5^3\cdot 7^3$, $2^{11}\cdot 3^5\cdot 5^9$.

Bruger example 4.3.13, der benytter sig af tallenes primtalsfaktorisering, og får

$$\begin{aligned}\gcd(3^7\cdot 5^3\cdot 7^3, 2^{11}\cdot 3^5\cdot 5^9) =& 2^{\min(0,11)}\cdot 3^{\min(7,5)}\cdot 5^{\min(3,9)}\cdot 7^{\min(3,0)}\\ =& 2^0\cdot 3^5\cdot 5^3\cdot 7^0\\ =& 3^5\cdot 5^3\end{aligned}$$

b) $11\cdot 13\cdot 17$, $2^9\cdot 3^7\cdot 5^5\cdot 7^3$.

De to tal har ingen primtalsfaktorer til fælles, så derfor er $\gcd(11\cdot 13\cdot 17, 2^9\cdot 3^7\cdot 5^5\cdot 7^3)=1$. (Fordi alle tallene i formlen for gcd ville blive opløftet i 0).

Opgave 4.3.26

Hvad er det mindste fælles multiplum af heltals-parrene fra opgave 4.3.24?

a) $2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5$, $2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2$.

Bruger example 4.3.15 og får

$$\begin{aligned} \operatorname{lcm}(2^2 \cdot 3^3 \cdot 5^5, 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^2) =& 2^{\max(2,5)} \cdot 3^{\max(3,3)} \cdot 5^{\max(5,2)} \\ =& 2^5 \cdot 3^3 \cdot 5^5 \end{aligned}$$

b) $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13$, $2^{11} \cdot 3^9 \cdot 11 \cdot 17^{14}$.

Bruger example 4.3.15 og får

$$\begin{aligned} \operatorname{lcm}(2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13, 2^{11} \cdot 3^9 \cdot 11 \cdot 17^{14}) =& 2^{\max(1,11)} \cdot 3^{\max(1,9)} \cdot 5^{\max(1,0)} \cdot 7^{\max(1,0)} \\ & \cdot 11^{\max(1,1)} \cdot 13^{\max(1,0)} \cdot 17^{\max(0,14)} \\ =& 2^{11} \cdot 3^9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 17^{14} \end{aligned}$$

Opgave 4.3.28

Find $\gcd(1000, 625)$ og $\operatorname{lcm}(1000, 625)$ og verificér at $\gcd(1000, 625) \cdot \operatorname{lcm}(1000, 625) = 1000 \cdot 625$.

Finder $\gcd(1000, 625)$.

$$\begin{aligned} \gcd(1000, 625): \quad 1000 =& 625 \cdot 1 + 375 \\ 625 =& 375 \cdot 1 + 250 \\ 375 =& 250 \cdot 1 + 125 \\ 250 =& 125 \cdot 2 + 0 \end{aligned}$$

Så $\gcd(1000, 625) = 125$.

Finder $\operatorname{lcm}(1000, 625)$ ved først at primtalsfaktorisere 1000 (se example 4.3.4 for fremgangsmåde):

$$\begin{aligned} &1000/2 = 500 \\ &500/2 = 250 \\ &250/5 = 50 \\ &50/5 = 10 \\ &10/5 = 2 \\ &2: \text{ primtal} \end{aligned}$$

Så $1000 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 2 = 2^3 \cdot 5^3$.

Primtalsfaktoriserer 625 med samme fremgangsmåde:

$$\begin{aligned}
&625/5 = 125\\
&125/5 = 25\\
&25/5 = 5\\
&5: \text{ primtal}
\end{aligned}$$

Så $625 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^4$.

Derfor er $\mathrm{lcm}(1000, 625) = 2^{\max(3,0)} \cdot 5^{\max(3,4)} = 2^3 \cdot 5^4$.

Vi verificerer med lommeregner at $\gcd(1000, 625) \cdot \mathrm{lcm}(1000, 625) = 2^3 \cdot 5^3 \cdot 2^3 \cdot 5^4 = 1000 \cdot 625$, hvilket passer.

Opgave 2.6.1

Lad

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 4 & 6 \\ 1 & 1 & 3 & 7 \end{bmatrix}$$

a) Hvilken størrelse har $\mathbf{A}$?

3×4, fordi 3 rækker og 4 søjler.

b) Hvad er den tredje søjle i $\mathbf{A}$?

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

c) Hvad er den anden række i $\mathbf{A}$?

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

d) Hvad er elementet i position $(3, 2)$?

1.

e) Hvad er $\mathbf{A}^t$?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

Opgave 2.6.2

Find $\mathbf{A}+\mathbf{B}$, hvor

a)

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 4\\ -1 & 2 & 2\\ 0 & -2 & -3\end{bmatrix}, \mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1 & 3 & 5\\ 2 & 2 & -3\\ 2 & -3 & 0\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1+(-1) & 0+3 & 4+5\\ -1+2 & 2+2 & 2+(-3)\\ 0+2 & -2+(-3) & -3+0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 3 & 9\\ 1 & 4 & -1\\ 2 & -5 & -3\end{bmatrix}$$

b)

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 5 & 6\\ -4 & -3 & 5 & -2\end{bmatrix}, \mathbf{B}=\begin{bmatrix}-3 & 9 & -3 & 4\\ 0 & -2 & -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=\begin{bmatrix}-1+(-3) & 0+9 & 5+(-3) & 6+4\\ -4+0 & -3+(-2) & 5+(-1) & -2+2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-4 & 9 & 2 & 10\\ -4 & -5 & 4 & 0\end{bmatrix}$$

Opgave 2.6.3

Find $\mathbf{AB}$, hvis

a)

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{bmatrix}, \mathbf{B}=\begin{bmatrix}0 & 4\\ 1 & 3\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}2\cdot 0+1\cdot 1 & 2\cdot 4+1\cdot 3\\ 3\cdot 0+2\cdot 1 & 3\cdot 4+2\cdot 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 11\\ 2 & 18\end{bmatrix}$$

b)

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\\ 2 & 3\end{bmatrix}, \mathbf{B}=\begin{bmatrix}3 & -2 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$\mathbf{AB}=\begin{bmatrix}1\cdot 3+(-1)\cdot 1 & 1\cdot(-2)+(-1)\cdot 0 & 1\cdot(-1)+(-1)\cdot 2\\ 0\cdot 3+1\cdot 1 & 0\cdot(-2)+1\cdot 0 & 0\cdot(-1)+1\cdot 2\\ 2\cdot 3+3\cdot 1 & 2\cdot(-2)+3\cdot 0 & 2\cdot(-1)+3\cdot 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -2 & -3\\ 1 & 0 & 2\\ 9 & -4 & 4\end{bmatrix}$$

Opgave 2.6.10

Lad $\mathbf{A}$ være en 3×4 matrix, $\mathbf{B}$ være en 4×5 matrix og C være en 4×4 matrix. Afgør, hvilke af de følgende produkter, der er definerede samt størrelsen af dem, der er definerede.

(Et produkt er defineret når antallet af søjler i den første matrix er lig med antallet af rækker i den anden matrix.)

a) AB

AB er defineret, fordi **A** har 4 søjler og **B** har 4 rækker. Størrelsen på **AB** er 3×5.

b) BA

BA er ikke defineret, fordi **B** har 5 søjler og **A** har 3 rækker.

c) AC

AC er defineret, fordi **A** har 4 søjler og **C** har 4 rækker. Størrelsen på **AC** er 3×4.

d) CA

CA er ikke defineret, fordi **C** har 4 søjler og **A** har 3 rækker.

e) BC

BC er ikke defineret, fordi **B** har 5 søjler og **C** har 4 rækker.

f) CB

CB er defineret, fordi **C** har 4 søjler og **B** har 4 rækker. Størrelsen på **CB** er 4×5.

Opgave 2.6.18

Vis at

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

er den inverse af

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 7 & -8 & 5 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Når vi skal vise at to 3×3 matricer er hinandens inverse, skal vi vise at $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_3$ pr. definition.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 7 & -8 & 5 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2\cdot 7 + 3\cdot(-4) + (-1)\cdot 1 & 2\cdot(-8) + 3\cdot 5 + (-1)\cdot(-1) & 2\cdot 5 + 3\cdot(-3) + (-1)\cdot 1 \\ 1\cdot 7 + 2\cdot(-4) + 1\cdot 1 & 1\cdot(-8) + 2\cdot 5 + 1\cdot(-1) & 1\cdot 5 + 2\cdot(-3) + 1\cdot 1 \\ -1\cdot 7 + (-1)\cdot(-4) + 3\cdot 1 & -1\cdot(-8) + (-1)\cdot 5 + 3\cdot(-1) & -1\cdot 5 + (-1)\cdot(-3) + 3\cdot 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

og

$$\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 7 & -8 & 5 \\ -4 & 5 & -3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7\cdot 2 + (-8)\cdot 1 + 5\cdot(-1) & 7\cdot 3 + (-8)\cdot 2 + 5\cdot(-1) & 7\cdot(-1) + (-8)\cdot 1 + 5\cdot 3 \\ -4\cdot 2 + 5\cdot 1 + (-3)\cdot(-1) & -4\cdot 3 + 5\cdot 2 + (-3)\cdot(-1) & -4\cdot(-1) + 5\cdot 1 + (-3)\cdot 3 \\ 1\cdot 2 + (-1)\cdot 1 + 1\cdot(-1) & 1\cdot 3 + (-1)\cdot 2 + 1\cdot(-1) & 1\cdot(-1) + (-1)\cdot 1 + 1\cdot 3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nu har vi vist at $\mathbf{AB} = \mathbf{BA} = \mathbf{I}_3$, hvilket var det, vi skulle.

$\square$

Opgave fra hjemmeside 1

Transponér matricen $\mathbf{A}$ fra opgave 3a og 3b.

Matricen fra 3a)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Matricen 3b)

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Eksamen januar 2016, opgave 7

Betragt matricerne

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

a) Beregn $\mathbf{A} + \mathbf{B}$.

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1+1 & 2+2 & 3+3 \\ 2+1 & 4+2 & 6+3 \\ 4+1 & 5+2 & 6+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \\ 5 & 7 & 9 \end{bmatrix}$$

b) Beregn $\mathbf{AB}$.

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 1 + 3\cdot 1 & 1\cdot 2 + 2\cdot 2 + 3\cdot 2 & 1\cdot 3 + 2\cdot 3 + 3\cdot 3 \\ 2\cdot 1 + 4\cdot 1 + 6\cdot 1 & 2\cdot 2 + 4\cdot 2 + 6\cdot 2 & 2\cdot 3 + 4\cdot 3 + 6\cdot 3 \\ 4\cdot 1 + 5\cdot 1 + 6\cdot 1 & 4\cdot 2 + 5\cdot 2 + 6\cdot 2 & 4\cdot 3 + 5\cdot 3 + 6\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 12 & 18 \\ 12 & 24 & 36 \\ 15 & 30 & 45 \end{bmatrix}$$

c) Er $\mathbf{A}$ symmetrisk?

Vi skal tjekke om $\mathbf{A} = \mathbf{A}^t$. Hvis det er tilfældet, så er $\mathbf{A}$ symmetrisk, ellers er $\mathbf{A}$ ikke symmetrisk (Def. 2.6.7.).

$$\mathbf{A}^t = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Vi kan nu observere at $\mathbf{A} \neq \mathbf{A}^t$, så $\mathbf{A}$ er ikke symmertisk.

(Alternativt kunne vi blot bemærke at $3 = a_{13} \neq a_{31} = 4$, hvoraf det følger, at $\mathbf{A}$ ikke kan være symmetrisk.)

Opgave 2.6.5

Find en matrix $\mathbf{A}$ sådan at

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Vi bemærker at $\mathbf{A}$ må være en 2×2-matrix fordi resultatet er en 2×2 matrix. Lad

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$$

Vi opskriver nu de fire ligninger, vi får, når vi ganger den kendte matrix med den ubekendte matrix **A**.

$$2 \cdot a_1 + 3 \cdot a_3 = 3 \tag{1}$$
$$2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_4 = 0 \tag{2}$$
$$1 \cdot a_1 + 4 \cdot a_3 = 1 \tag{3}$$
$$1 \cdot a_2 + 4 \cdot a_4 = 2 \tag{4}$$

Observér at (1) og (3) udgør et ligningssystem og at (2) og (4) udgør et ligningssystem, fordi de to par har samme ubekendte.

Vi løser først ligningssystemet, der består af (1) og (3). Først isolerer vi a_1 i (1):

$$\begin{aligned} 2 \cdot a_1 + 3 \cdot a_3 &= 3 && \Leftrightarrow \\ 2 \cdot a_1 &= 3 - 3 \cdot a_3 && \Leftrightarrow \\ a_1 &= \frac{3 - 3 \cdot a_3}{2} \end{aligned}$$

Dette udtryk indsætter vi i (3) og finder værdien for a_3:

$$\begin{aligned} \frac{3 - 3 \cdot a_3}{2} + 4 \cdot a_3 &= 1 && \Leftrightarrow \\ \frac{3 - 3 \cdot a_3 + 2 \cdot 4 \cdot a_3}{2} &= 1 && \Leftrightarrow \\ 3 - 3 \cdot a_3 + 8 \cdot a_3 &= 1 \cdot 2 && \Leftrightarrow \\ 3 + 5 \cdot a_3 &= 2 && \Leftrightarrow \\ 5 \cdot a_3 &= -1 && \Leftrightarrow \\ a_3 &= \frac{-1}{5} \end{aligned}$$

Vi benytter nu $a_3 = -\frac{1}{5}$ til at finde værdien for a_1 ved at sætte det ind i (1), hvor vi havde isoleret a_1:

$$a_1 = \frac{3 - 3 \cdot a_3}{2} = \frac{3 - 3 \cdot \frac{-1}{5}}{2} = \frac{3 + \frac{3}{5}}{2} = \frac{\frac{18}{5}}{2} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$$

Så nu ved vi at $a_1 = 9/5$ og $a_3 = -1/5$.

Nu løser vi på helt samme måde ligningssystemet, der består af (2) og (4).

Isolerer a_2 i (2):

$$\begin{aligned} 2 \cdot a_2 + 3 \cdot a_4 &= 0 && \Leftrightarrow \\ 2 \cdot a_2 &= -3 \cdot a_4 && \Leftrightarrow \\ a_2 &= \frac{-3 \cdot a_4}{2} \end{aligned}$$

Dette udtryk indsætter vi i (4) og finder værdien for a_4:

$$\begin{aligned}
\frac{-3\cdot a_4}{2}+4\cdot a_4 &= 2 && \Leftrightarrow\\
\frac{-3\cdot a_4+2\cdot 4\cdot a_4}{2} &= 2 && \Leftrightarrow\\
5\cdot a_4 &= 2\cdot 2 && \Leftrightarrow\\
a_4 &= \frac{4}{5}
\end{aligned}$$

Vi benytter nu $a_4 = \frac{4}{5}$ til at finde værdien for a_2 ved at sætte det ind i (2), hvor vi havde isoleret a_2:

$$a_2 = \frac{-3\cdot a_4}{2} = \frac{-3\cdot \frac{4}{5}}{2} = \frac{\frac{-12}{5}}{2} = \frac{-12}{10} = -\frac{6}{5}$$

Vi har nu udregnet alle ubekendte og har fundet svaret som er

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9/5 & -6/5 \\ -1/5 & 4/5 \end{bmatrix}$$

Opgave 2.6.15

Lad

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Find en formel for $\mathbf{A}^n$, når $n \in \mathbb{Z}^+$.

Vi starter med at inspicere resultatet for lave værdier af n og forsøger at finde et mønster.

$$\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1+1\cdot 0 & 1\cdot 1+1\cdot 1 \\ 0\cdot 1+1\cdot 0 & 1\cdot 0+1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2\cdot\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1+2\cdot 0 & 1\cdot 1+2\cdot 1 \\ 0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot 1+1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^4 = \mathbf{A}^3\cdot\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1\cdot 1+3\cdot 0 & 1\cdot 1+3\cdot 1 \\ 0\cdot 1+1\cdot 0 & 0\cdot 1+1\cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi observerer et mønster og postulerer, at

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Opgave fra hjemmeside 2

Kan du bevise at din formel fra opgave 2.6.15 er korrekt?

Vi postulerede formlen

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Vi beviser at vores postulat er sandt v.h.a. simpel induktion over n.

Basistrin.

Da $\mathbf{A}^1 = \mathbf{A}$ ved vi fra opgave 2.6.15 at vores formel holder i basistrinnet.

Induktionstrin.

Med induktionsantagelsen

$$\mathbf{A}^k = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

for et vilkårligt $k \in \mathbb{Z}^+$ får vi

$$\mathbf{A}^{k+1} = \mathbf{A}^k \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + k \cdot 0 & 1 \cdot 1 + k \cdot 1 \\ 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0 & 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 + k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dermed har vi bevist at formel holder for alle $n \in \mathbb{Z}^+$.

$\square$