# DM547 øvelsestimer
# 04-10-19

Jonas Eriksen

3. oktober 2019

# Antal fremmødte:

## Opgave 2.3.38

Find $f \circ g$ og $g \circ f$, hvor $f(x) = x^2 + 1$ og $g(x) = x + 2$ er funktioner fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}(f \circ g)(x) =& f(g(x)) \\ =& f(x+2) \\ =& (x+2)^2 + 1 \\ =& x^2 + 2x + 2x + 4 + 1 \\ =& x^2 + 4x + 5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) =& g(f(x)) \\ =& g(x^2+1) \\ =& (x^2+1) + 2 \\ =& x^2 + 3\end{aligned}$$

## Opgave 2.3.39

Find $f + g$ og $f \cdot g$, hvor $f$ og $g$ er givet i opgave 36 [NB: Trykfejl i bogen, hvor der henvises til opgave 38 i stedet for opgave 36].

$$\begin{aligned}(f + g)(x) =& (x^2+1) + (x+2) \\ =& x^2 + x + 3\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(f \cdot g)(x) =& (x^2+1)(x+2) \\
=& x^3 + 2x^2 + x + 2
\end{aligned}
$$

$\square$

## Opgave 2.3.41

Vis at funktionen $f(x) = ax + b$ fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$, hvor $a$ og $b$ er konstanter og $a \neq 0$, er invertibel og find den inverse til $f$.

For at vise at $f$ er invertibel, skal vi vise at den er en bijektion fra $\mathbb{R}$ til $\mathbb{R}$.

For at vise, at $f$ er injektiv, skal vi vise, at $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$ for to vilkårlige $x, y \in \mathbb{R}$ (Def. 2.3.5, s. 150). Lad $s, r \in \mathbb{R}$. Så gælder det, at

$$
f(s) = f(r) \Rightarrow as + b = ar + b \Rightarrow as = ar \Rightarrow s = r
$$

Så $f$ er injektiv.

For at vise at $f$ er surjektiv, skal vi vise at $\forall y \in \mathbb{R} : \ \exists x \in \mathbb{R} : \ f(x) = y$ (Def 2.3.7, s. 151). Lad $y \in \mathbb{R}$. Så kan vi sætte $x = \frac{y-b}{a} \in \mathbb{R}$ (som vi får ved at isolere $x$ i forskriften for $f$). Dette giver os

$$
f\left(\frac{y-b}{a}\right) = a\left(\frac{y-b}{a}\right) + b = \frac{a(y-b)}{a} + b = (y-b) + b = y
$$

så $f$ er surjektiv.

Da vi nu har vist at $f$ både er injektiv og surjektiv, har vi vist at den er en bijektion, hvorfor den har en invers $f^{-1}$ . Denne finder vi ved at isolere $x$ i forskriften for $f$, hvilket vi gjorde da vi viste at $f$ er surjektiv ovenfor. Så $f^{-1}(x) = \frac{x-b}{a}$. (Bemærk at det er ligegyldigt hvad vi kalder vores variabel, som vi her har kaldt $x$).

## Opgave 2.3.71

Find den inverse funktion til $f(x) = x^3 + 1$

$$
y = x^3 + 1 \Leftrightarrow y - 1 = x^3 \Leftrightarrow (y-1)^{1/3} = x
$$

Så $f^{-1}(x) = (x-1)^{1/3}$.

# Opgave 5.3.1

Find $f(1), f(2), f(3)$ og $f(4)$, hvis $f(n)$ er rekursivt defineret ved $f(0) = 1$ og for $n = 1, 2, 3, \ldots$ er

**a)** $f(n+1) = f(n) + 2$

$$\begin{aligned} f(1) =& f(0) + 2 = 1 + 2 = 3 \\ f(2) =& f(1) + 2 = 3 + 2 = 5 \\ f(3) =& f(2) + 2 = 5 + 2 = 7 \\ f(4) =& f(3) + 2 = 7 + 2 = 9 \end{aligned}$$

**b)** $f(n+1) = 3 \cdot f(n)$

$$\begin{aligned} f(1) =& 3 \cdot f(0) = 3 \cdot 1 = 3 \\ f(2) =& 3 \cdot f(1) = 3 \cdot 3 = 9 \\ f(3) =& 3 \cdot f(2) = 3 \cdot 9 = 27 \\ f(4) =& 3 \cdot f(3) = 3 \cdot 27 = 81 \end{aligned}$$

**c)** $f(n+1) = 2^{f(n)}$

$$\begin{aligned} f(1) =& 2^{f(0)} = 2^1 = 2 \\ f(2) =& 2^{f(1)} = 2^2 = 4 \\ f(3) =& 2^{f(2)} = 2^4 = 16 \\ f(4) =& 2^{f(3)} = 2^{16} = 65536 \end{aligned}$$

**d)** $f(n+1) = f(n)^2 + f(n) + 1$

$$\begin{aligned} f(1) =& f(0)^2 + f(0) + 1 = 1^2 + 1 + 1 = 3 \\ f(2) =& f(1)^2 + f(1) + 1 = 3^2 + 3 + 1 = 13 \\ f(3) =& f(2)^2 + f(2) + 1 = 13^2 + 13 + 1 = 183 \\ f(4) =& f(3)^2 + f(3) + 1 = 183^2 + 183 + 1 = 33673 \end{aligned}$$

$\square$

# Opgave 5.3.7

Giv en rekursiv definition af følgen $\{a_n\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, hvis følgende gælder.

**a)** $a_n = 6n$

$a_1 = 6 \cdot 1 = 6$ og $a_n = a_{n-1} + 6$ når $n > 1$ (fordi $6n$ stiger med 6 hver gang $n$ stiger med 1).

**b)** $a_n = 2n + 1$

$a_1 = 2 \cdot 1 + 1 = 3$ og $a_n = a_{n-1} + 2$ når $n > 1$ (fordi $2n + 1$ stiger med 2 hver gang $n$ stiger med 1).

**c)** $a_n = 10^n$

$a_1 = 10^1 = 10$ og $a_n = 10a_{n-1}$ når $n > 1$ (fordi $10^n$ bliver tidoblet hver gang $n$ stiger med 1).

**d)** $a_n = 5$

$a_1 = 5$ og $a_n = 5$ når $n > 1$.

## Eksamen januar 2009, opgave 4

Betragt rækken $\{a_n\}$ defineret ved

$$a_n = \begin{cases} n, & \text{hvis } 1 \leq n \leq 2 \\ a_{n-1} + 2a_{n-2}, & \text{hvis } n \geq 3 \end{cases}$$

Bevis vha. induktion at $a_n = 2^{n-1}$, for alle $n \geq 1$.

<u>Basistrin.</u>

Vi skal bruge to trin:

$$\begin{aligned} a_1 &= 1 = 2^0 \\ a_2 &= 2 = 2^1 \end{aligned}$$

<u>Induktionsantagelse.</u>

Vi antager at $a_k = 2^{k-1}$ og at $a_{k-1} = 2^{k-2}$, for $k \geq 2$.

<u>Induktionstrin.</u>

$$
\begin{aligned}
a_{k+1} =& a_k + 2a_{k-1} && \text{Iflg. definitionen}\\
=& 2^{k-1} + 2 \cdot 2^{k-2} && \text{Iflg. induktionsantagelsen}\\
=& 2^{k-1} + 2^{k-1} && \text{Potensregneregel}\\
=& 2 \cdot 2^{k-1} && \text{Samler leddene}\\
=& 2^k && \text{Potensregneregel}
\end{aligned}
$$

□

## Opgave fra hjemmeside 1

Bevis at alle heltal $n \geq 8$ kan skrives som en sum af 3−taller of 5−taller. Findes der et heltal $k$, sådan at alle heltal $n \geq k$ kan skrives som summen af 4−taller og 5−taller?

Vi viser udsagnet $P(n): \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 8: \ \exists a, b \in \mathbb{N}: \ (n = 3a + 5b)$ ved stærk induktion over $n$.

<u>Basistrin.</u>

Vi skal bruge tre trin:

$$
\begin{aligned}
8 =& 5 + 3\\
9 =& 3 + 3 + 3\\
10 =& 5 + 5
\end{aligned}
$$

<u>Induktionsantagelse.</u>

Vi antager $P(k-2)$, d.v.s. $\exists a, b \in \mathbb{N}: \ (k - 2 = 3a + 5b)$ for $k \geq 10$.

<u>Induktionstrin.</u>

$$
\begin{aligned}
k + 1 =& (k-2) + 3 &&\\
=& (3a + 5b) + 3 && \text{Iflg. ind. ant.}\\
=& 3(a + 1) + 5b &&
\end{aligned}
$$

hvor vi kan se at $a + 1 \in \mathbb{N}$, fordi $a \in \mathbb{N}$ jf. induktionsantagelsen.

□

Vil vil nu vise, at det er muligt at skrive alle heltal større end eller lig med 12 som en sum af 4−taller og 5−taller. Vi formaliserer udsagnet som $Q(n): \ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 12: \ \exists a, b \in \mathbb{N}: (n = 4a + 5b)$.

Basistrin.

Vi skal bruge fire trin:

$$\begin{aligned}12 =&4+4+4\\13 =&5+4+4\\14 =&5+5+4\\15 =&5+5+5\end{aligned}$$

Induktionsantagelse.

Vi antager $P(k-3)$, d.v.s. $\exists a, b \in \mathbb{N}: \ (k-3 = 4a+5b)$ for $k \geq 15$.

Induktionstrin.

$$\begin{aligned}k+1 =&(k-3)+4\\=&(4a+5b)+4 && \text{Iflg. ind. ant.}\\=&4(a+1)+5b\end{aligned}$$

hvor vi kan se at $a+1 \in \mathbb{N}$, fordi $a \in \mathbb{N}$ jf. induktionsantagelsen.

$\square$

# Opgave fra hjemmeside 2

Hvad er der galt med nedenstående "bevis"?

*Påstand:* Alle naturlige tal $n$ er lige.
*Bevis:* Ved stærk induktion over $n$.
Basis: 0 er et lige tal.
Induktionsantagelse: Ethvert naturligt tal $m < n$ er lige. D.v.s. $m = 2k$, hvor $k \in \mathbb{Z}$.
Induktionstrin:

$$\begin{aligned}n =&(n-2)+2\\=&2k+2 && \text{hvor } k \in \mathbb{Z} \text{ (iflg. ind.ant.)}\\=&2(k+1) && \text{hvor } k+1 \in \mathbb{Z}\end{aligned}$$

Fejlen består for det første af at påstanden basistrinnet kun vises at $n = 0$ og at der i induktionstrinnet udføres et 'spring' af længde 2 fra $n-2$ til $n$. Dette sker i første linje, hvor $n$ udtrykkes som $(n-2)+2$. Så det der faktisk bliver vist er, at hvert andet tal, startende ved 0 er lige, hvilket naturligvis er sandt. Det viser bare ikke det, der skulle vises, nemlig at *alle* tal er lige (hvilket selvfølgelig er falsk).

$\square$