DM547 øvelsestimer
07-10-19

Jonas Eriksen

11. oktober 2019

Antal fremmødte:

Opgave 5.2.10

Antag at en chokoladebar består af n firkanter arrangeret i et rektangulært mønster. Hele chokoladebaren, eller et hvilket som helst mindre rektangulært stykke af den, kan knækkes langs en vertikal eller horisontal linje, der adskiller stykkerne. Hvis vi antager at der kun kan knækkes ét stykke af gangen, så skal vi afgøre, hvor mange knæk man skal foretage efter hinanden for at brække chokoladebaren op i n separate firkanter. Brug stærk induktion til at bevise svaret.

- Plade med 1 firkant: 0 knæk.
- Plade med 2 firkater: 1 knæk.
- Plade med 3 firkater: 2 knæk.
- Plade med 4 firkater: 3 knæk.

Postulerer mønster: Chokoladebar med n firkanter kræver $n - 1$ knæk for at få chokoladebaren brækket op i n separate firkanter.

Bevis ved stærk induktion over n.

Basisskridt.

Vist ovenfor.

Induktionsantagelse.

Vi antager for $n > 1$ at en chokoladeplade af størrelse k kan deles til separate firkanter ved hjælp af $k - 1$ knæk for alle $k < n$.

Induktionsskridt.

Hvis vi har en plads af størrelse n som vi skal dele op, så skal vi foretage ét første knæk et vilkårligt sted. Dette deler pladen op i to stykker som vi kalder n_1 og n_2, der har størrelserne hhv. k og $n-k$, hvor $0 < k < n$.

Ifølge induktionsantagelsen kan n_1 deles op i k separate firkanter vha. $k-1$ knæk. Ligeledes kan n_2 deles op i $n-k$ separate firkanter vha. $n-k-1$ knæk.

Det vil sige at pladen med n firkanter kan deles med $k-1+n-k-1+1 = n-1$ knæk (det sidste $+1$ er fordi vi skulle bruge ét knæk på at dele pladen af størrelse n op i n_1 og n_2). Dermed har vi vist det vi skulle.

□

Opgave 5.2.25

Lad $P(n)$ være et åbent udsagn. Afgør for hvilke positive heltal n udsagnet $P(n)$ må være sandt, og begrund svaret, når

a) $P(1)$ er sand; for alle positive heltal n, hvis $P(n)$ er sand, så er $P(n+2)$ sand.

$P(3)$ er sand fordi $P(1)$ er sand. $P(5)$ er sand fordi $P(3)$ er sand. $P(7)$ er sand fordi $P(5)$ er sand etc. Derfor: $P(n)$ er sand for alle de ulige, positive heltal n.

b) $P(1)$ og $P(2)$ er sande; for alle positive heltal n, hvis $P(n)$ og $P(n+1)$ er sande, så er $P(n+2)$ sand.

$P(3)$ er sand fordi $P(1)$ og $P(2)$ er sande. $P(4)$ er sand fordi $P(2)$ og $P(3)$ er sande. $P(5)$ er sand fordi $P(3)$ og $P(4)$ er sande etc. Derfor: $P(n)$ er sand for alle positive heltal n.

c) $P(1)$ er sand; for alle positive heltal n, hvis $P(n)$ er sand, så er $P(2n)$ sand.

$P(2)$ er sand fordi $P(1)$ er sand. $P(4)$ er sand fordi $P(2)$ er sand. $P(8)$ er sand fordi $P(4)$ er sand etc. Derfor: $P(n)$ er sand for alle alle positive heltal n, der kan skrives på formen 2^k, hvor $k \in \mathbb{N}$.

d) $P(1)$ er sand; for alle positive heltal n, hvis $P(n)$ er sand, så er $P(n+1)$ sand.

$P(2)$ er sand fordi $P(1)$ er sand. $P(3)$ er sand fordi $P(2)$ er sand. $P(4)$ er sand fordi $P(3)$ er sand etc. Derfor: $P(n)$ er sand for alle positive heltal n. Dette svarer desuden til det man gør i simpel induktion.

Opgave 9.1.1

Opskriv de ordnede par i relation R fra $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ til $B = \{0, 1, 2, 3\}$, hvor $(a, b) \in R$ hvis og kun hvis

a) $a = b$

$R = \{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$.

b) $a + b = 4$

$R = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 0)\}$.

Opgave 9.1.3.a

For relationen $R = \{(2, 2), (2, 3), (2, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$ på mængden $\{1, 2, 3, 4\}$, skal vi afgøre om den er refleksiv, symmetrisk, antisymmetrisk og/eller transitiv.

- *Refleksiv.* Nej. $(1, 1) \notin R$ og $(4, 4) \notin R$.
- *Symmetrisk.* Nej. Fx $(2, 4) \in R$, men $(4, 2) \notin R$.
- *Antisymmetrisk.* Nej. Fx $(2, 3) \in R$ og $(3, 2) \in R$.
- *Transitiv.* Ja. $(2, 3) \in R$, $(3, 4) \in R$ og $(2, 4) \in R$ samt $(3, 2) \in R$, $(2, 4) \in R$ og $(3, 4) \in R$.

Opgave 9.1.7

Afgør om relationen R på mængden af alle heltal er refleksiv, symmetrisk, antisymmetrisk og/eller transitiv, når $(a, b) \in R$ hvis og kun hvis

a) $x \neq y$

- *Refleksiv.* Nej. $\forall x \in \mathbb{Z} : (x = x)$. D.v.s. intet heltal er forskelligt fra sig selv.
- *Symmetrisk.* Ja. $x \neq y \Leftrightarrow y \neq x$.
- *Antisymmetrisk.* Nej. Fx $(2, 3) \in R$ og $(3, 2) \in R$.
- *Transitiv.* Nej. Fx $2 \neq 3$ og $3 \neq 2$ men $2 = 2$.

f) x og y er enten begge negative eller begge ikke-negative.

- *Refleksiv.* Ja. Ethvert tal har samme fortegn som sig selv.
- *Symmetrisk.* Ja. x har samme fortegn som $y \Leftrightarrow y$ har samme fortegn som x.

- *Antisymmetrisk.* Nej. Fx $(2,3) \in R$ og $(3,2) \in R$.
- *Transitiv.* Ja. For $x, y, z \in \mathbb{Z}$ gælder det at $(x,y) \in R \wedge (y,z) \in R \Rightarrow (x,z) \in R$, fordi x, y, z alle tre enten er negative eller ikke-negative.

Opgave 9.1.32

Lad R og S være relationer hvor$R = \{(1,2),(1,3),(2,3),(2,4),(3,1)\}$ og $S = \{(2,1),(3,1),(3,2),(4,2)\}$. Find $S \circ R$.

$$S \circ R = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$$

.

Opgave 9.1.33

Lad R være en relation på mængden af mennesker, der består af par (a,b), hvor a er forælder til b. Lad S være en relation på mængden af mennesker, der består af par (a,b), hvor a og b er søskende. Hvad er $S \circ R$ og $R \circ S$?

$S \circ R$ er relationen $a \to b \to c$, hvor a er forælder til b og b er søskende til c. D.v.s. at $S \circ R = R$ (antagelse: alle søskende har samme forælder).

$R \circ S$ er relationen $a \to b \to c$, hvor a er søskende til b og b er forælder til c. Det vil sige at $R \circ S$ består af (a,c), hvor a er onkel/faster/moster til c.

Opgave 9.1.36

Vi har først tre relationer:

$R_1 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a > b\}$	Større end relationen
$R_2 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \geq b\}$	Større end eller lig med relationen
$R_4 = \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq b\}$	Mindre end eller lig med relationen

Vi skal nu finde

b) $R_1 \circ R_2$

For at (a,c) skal være i $R_1 \circ R_2$ skal vi finde et b sådan at $(a,b) \in R_2$ og $(b,c) \in R_1$. Det vil altså sige at $a \geq b$ og $b > c$, og dermed $a > c$, hvilket netop er relation $R_1 \circ R_2 = R_1$.

d) $R_1 \circ R_4$

For at (a, c) skal være i $R_1 \circ R_4$ skal vi finde et b sådan at $(a, b) \in R_4$ og $(b, c) \in R_1$. Det vil sige $a \leq b$ og $b > c$. Et sådant b kan altid findes ved at vælge en værdi, der både er højere end a og c. Så denne relation holder altid, hvorfor $R_1 \circ R_4 = \mathbb{R}^2$.

Opgave 9.1.40

Lad R være forældrerelationen på alle mennesker. Hvornår er et ordnet par i relationen R^3?

Fra Def. 9.1.7 ved vi at $R^3 = R^2 \circ R$ og $R^2 = R \circ R$. Et par (a, c) er i R^2, hvis og kun hvis $(a, b) \in R$ og $(b, c) \in R$. Med andre ord, så er $(a, c) \in R^2$, hvis og kun hvis a er forælder til c's forælder, d.v.s. a er c's bedsteforælder. Tilsvarende, så er (a, c) i R^3 hvis og kun hvis $(a, b) \in R^2$ og $(b, c) \in R$. Det vil sige at $(a, c) \in R^3$ hvis og kun hvis a er c's bedsteforælders forælder, d.v.s. a er c's oldeforælder.

Opgave 9.3.1.b

Repræsentér relationen $\{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ på mængden $\{1, 2, 3\}$ med en matrix med elementer i stigende orden.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Opgave 9.3.9

Hvor mange pladser (entries) forskellige fra 0 har relationen R på $A = \{1, 2, 3, \ldots, 100\}$ hvis

a) $R = \{(a, b) | \, a > b\}$?

Matricen vil se sådan her ud

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Antal 1-taller: Ét i anden række; to i tredje række; tre i fjerde række; $\ldots$; 99 i 100ne række. I alt:

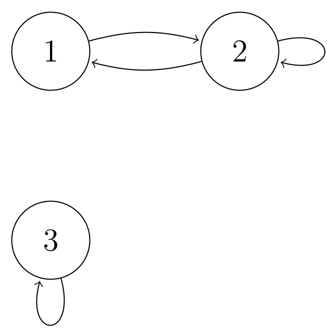
$$\sum_{i=1}^{99} i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{99 \cdot 100}{2} = 4950$$

c) $R = \{(a,b) | \, a = b+1\}$?

Der vil kun være 0'er i første række, fordi der ikke er et tal b i A sådan at $1 = b+1$ (det ville kræve at $b \leq 0$). I alle andre rækker, vil der være præcis ét 1-tal. D.v.s. at der alt i alt vil være 99 pladser der er forskellige fra 0.

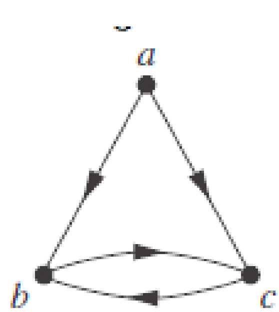
Opgave 9.3.18.b

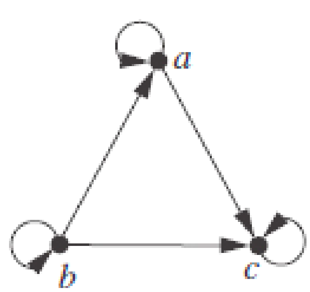
Tegn en orienteret graf for relationen i opgave 9.3.1b.

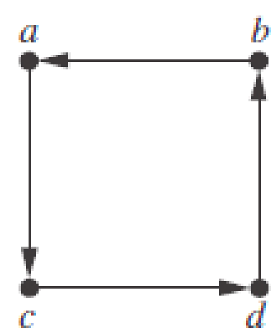


Opgave 9.3.31

Afgør om relationerne repræsenteret ved orienterede grafer i opgaverne 9.3.23 (venstre), 9.3.24 (midt) og 9.3.25 (højre) er irrefleksive, refleksive, symmetriske, antisymmetriske og/eller transitive.







Grafen fra opgave 9.3.23:

- *Refleksiv.* Nej. Ingen knuder har selv-løkker.

- *Irrefleksiv.* Ja. Fordi ingen knuder har selv-løkker.
- *Symmetrisk.* Nej.
- *Antisymmetrisk.* Nej.
- *Transitiv.* Nej. (b, c) og (c, b) men ikke (b, b).

Grafen fra opgave 9.3.24:

- *Refleksiv.* Ja.
- *Irrefleksiv.* Nej. Fordi refleksiv.
- *Symmetrisk.* Nej.
- *Antisymmetrisk.* Ja.
- *Transitiv.* Ja.

Grafen fra opgave 9.3.25:

- *Refleksiv.* Nej.
- *Irrefleksiv.* Ja.
- *Symmetrisk.* Nej.
- *Antisymmetrisk.* Ja.
- *Transitiv.* Nej.