DM549 TE-timer
11-10-18

Jonas A. H. Eriksen

11. oktober 2019

Antal fremmødte:

Opgave 9.4.1

Lad R være en relation på mængden $\{0, 1, 2, 3\}$, hvor $R = \{(0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 0)\}$. Find

a) den refleksive lukning af R

$$R \cup \{(0, 0), (3, 3)\} = \{(0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 0), (0, 0), (3, 3)\}$$

b) den symmetriske lukning af R

$$R \cup \{(1, 0), (2, 1), (0, 2), (0, 3)\} = \{(0, 1), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 0), (1, 0), (2, 1), (0, 2), (0, 3)\}$$

.

Opgave 1 fra hjemmeside

Find den transitive lukning af $R = \{(1, 1), (2, 3), (3, 4), (3, 5), (5, 1)\}$.

R indeholder $(2, 3)$, $(3, 4)$ og $(3, 5)$. Derfor skal elementerne $(2, 4)$ og $(2, 5)$ tilføjes. Desuden indeholder R $(3, 5)$ og og $(5, 1)$, hvorfor $(3, 1)$ skal tilføles. Dette giver os

$$R \cup \{(2, 4), (2, 5), (3, 1)\} = \{(1, 1), (2, 3), (3, 4), (3, 5), (5, 1), (2, 4), (2, 5), (3, 1)\}$$

Nu har vi $(2, 3)$ og $(3, 1)$, hvorfor vi tilføjer $(2, 1)$. Det giver os

$$\{(1, 1), (2, 3), (3, 4), (3, 5), (5, 1), (2, 4), (2, 5), (3, 1), (2, 1)\}$$

Relationen er nu transitiv, hvorfor vi har fundet lukningen.

Eksamen januar 2010, opgave 5.g

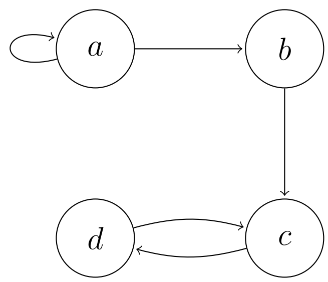
Lad R være en relation på mængden $\{a, b, c, d\}$, der indeholder elementerne

$$(a,a),(a,b),(b,c),(c,d),(d,c)$$

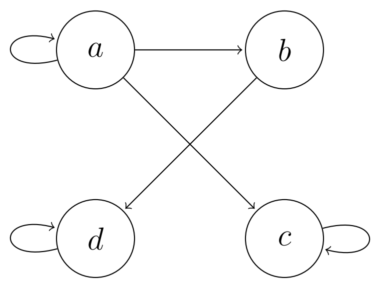
Tegn den orienterede graf for R^1, R^2, R^3 og R^4 og for den transitive lukning $t(R)$.

Til denne opgave bruger vi Sætning 9.4.1, der siger at $(a,b) \in R^n \Leftrightarrow \exists$ vej af længde n i G_R.

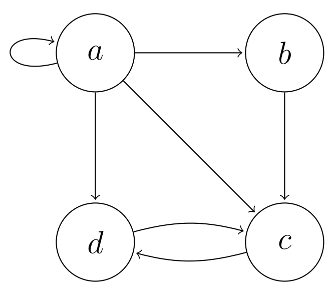
R^1:



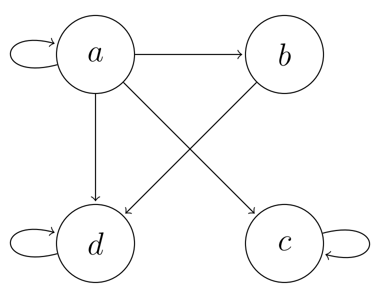
R^2:



R^3:



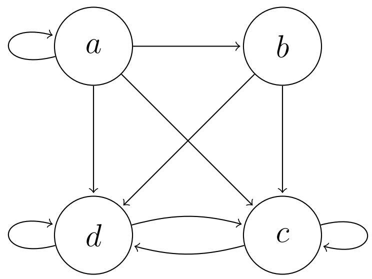
R^4:



For at finde $t(R)$ bruger vi sætning 9.4.2 som fortæller os at $t(R) = R^*$, hvor $R^* = \bigcup_{n=1}^{\infty} R^n$ (Def 9.4.3).

Vi ved i dette tilfælde at $R^* = R^1 \cup R^2 \cup R^3 \cup R^4$, fordi hvis der er en sti fra a til b, så er der en sti af længde højst 4 fra a til b, da R er en relation over 4 elementer (så grafrepræsentationen har 4 knuder). Med andre ord så kan vi umuligt tilføje nye elementer ved at inkludere fx R^5.

Vi får $t(R)$ ved at tage foreningsmængden af kanterne i de forrige fire grafer:



Opgave 9.5.1

Hvilke af nedenstående relationer på mængden $\{0, 1, 2, 3\}$ er ækvivalensrelationer? Afgør for de relationer, der ikke er ækvivalensrelationer, hvilken egenskab de mangler.

a) $\{(0, 0), (1, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

Relationen er refleksiv, symmetrisk (også antisymmetrisk) og transitiv. Derfor: ækvivalensrelation.

b) $\{(0, 0), (0, 2), (2, 0), (2, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 3)\}$

Relationen er ikke refleksiv (mangler $(1, 1)$). Den er symmetrisk. Den er ikke transitiv – fx er $(0, 2)$ og $(2, 3)$ i relationen, men $(0, 3)$ er ikke. Derfor: ikke en ækvivalensrelation.

c) $\{(0, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$

Relationen er refleksiv, symmetrisk og transitiv. Derfor: ækvivalensrelation.

e) $\{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (2, 0), (2, 2), (3, 3)\}$

Relationen er refleksiv. Relationen er ikke symmetrisk da $(1, 2)$ er i relationen men $(2, 1)$ er ikke. Relationen er ikke transitiv da fx $(2, 0)$ og $(0, 1)$ er i relationen men $(2, 1)$ er ikke. Derfor: ikke en ækvivalensrelation.

Opgave 9.5.2

Hvilke af disse relationer på mængden bestående af alle mennesker er ækvivalensrelationer? Afgør for de relationer, der ikke er ækvivalensrelationer, hvilken egenskab de mangler.

b) $\{(a, b) |\, a$ og b har samme forældre$\}$

- *Refleksiv.* Ja. Alle har samme forældre som sig selv.
- *Symmetrisk.* Ja. b samme forældre som $a \Leftrightarrow a$ samme forældre som b.
- *Transitiv.* Ja. a samme forældre som $b \wedge b$ samme forældre som $c \Rightarrow a$ samme forældre som c

Derfor: ækvivalensrelation.

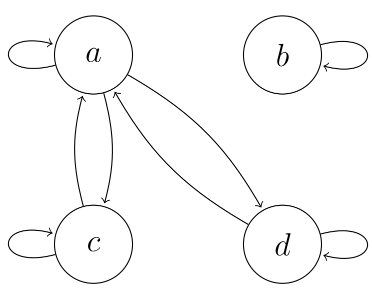
d) $\{(a, b) |\, a$ og b har mødt hinanden$\}$

- *Refleksiv.* Ja. Hvis vi antager at alle har mødt sig selv.
- *Symmetrisk.* Ja. a mødt $b \Leftrightarrow b$ mødt a.
- *Transitiv.* Nej. Jeg har mødt Peter og Peter har mødt sin gamle nabo, men jeg har ikke mødt Peters gamle nabo.

Derfor: ikke en ækvivalensrelation.

Opgave 9.5.21

I denne opgave skal vi afgøre, hvorvidt relationen repræsenteret ved nedenstående graf er en ækvivalensrelation.

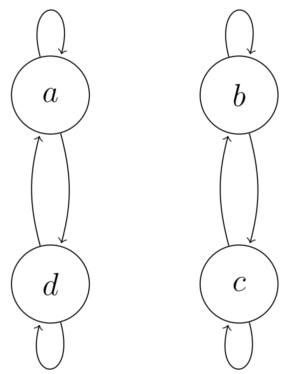


- *Refleksiv.* Ja. Alle knuder har selv-løkke.
- *Symmetrisk.* Ja.
- *Transitiv.* Nej. Fx er (c, a) og (a, d) begge er i relationen, men (c, d) er ikke.

Derfor: ikke en ækvivalensrelation.

Opgave 9.5.22

I denne opgave skal vi afgøre, hvorvidt relationen repræsenteret ved nedenstående graf er en ækvivalensrelation.



- *Refleksiv.* Ja.
- *Symmetrisk.* Ja.
- *Transitiv.* Ja.

Derfor: ækvivalensrelation.

Opgave 9.5.26

Hvad er ækvivalensklasserne i ækvivalensrelationerne i opgave 9.5.1? (Det var kun **(a)** og **(c)** der er ækvivalensrelationer.)

*Ækvivalensklasser for **(a)**.* Relationen var $\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3)\}$. Ækvivalensklasser

$$\begin{aligned}[0] =& \{0\}\\ [1] =& \{1\}\\ [2] =& \{2\}\\ [3] =& \{3\}\end{aligned}$$

*Ækvivalensklasser for **(c)**.* Relationen var $\{(0,0),(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$. Ækvivalensklasser

$$\begin{aligned}[0] =& \{0\}\\ [1] =& [2] = \{1,2\}\\ [3] =& \{3\}\end{aligned}$$

$\square$

Opgave 9.5.27

Hvad er ækvivalensklasserne i ækvivalensrelationerne i opgave 9.5.2?

Ækvivalensklsser for ***(b).*** Relationen var $\{(a, b) | \, a$ og b har samme forældre$\}$. Ækvivalensklasserne for denne relation udgøres her af mængden af personer med samme forældre.

(Desuden var **(a)** i opgave 9.5.2 er ækvivalensrelation, men den skulle ikke laves. I denne relation er ækvivalensklasserne mængden af personer med samme alder.)

$\square$

Opgave 9.5.41

Hvilken af disse samlinger af delmængder er partitioner af $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$?

(Vi husker på at en partition af en mængde S er et antal disjunkte mængder, hvis foreningsmængde er præcis S).

a) $\{1, 2\}$, $\{2, 3, 4\}$, $\{4, 5, 6\}$

Nej. $\{1, 2\} \cap \{2, 3, 4\} = \{2\} \neq \emptyset$.

b) $\{1\}$, $\{2, 3, 6\}$, $\{4\}$, $\{5\}$

Ja. $\{1\} \cup \{2, 3, 6\} \cup \{4\} \cup \{5\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ og mængderne er disjunkte.

c) $\{2, 4, 6\}$, $\{1, 3, 5\}$

Ja. $\{2, 4, 6\} \cup \{1, 3, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ og mængderne er disjunkte.

d) $\{1, 4, 5\}$, $\{2, 6\}$

Nej. $\{1, 4, 5\} \cup \{2, 6\} = \{1, 2, 3, 4, 5\} \neq \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Opgave 9.5.47

Oprems alle de ordnede par i ækvivalensrelationen der laves af partitionen $\{0\}$, $\{1, 2\}$, $\{3, 4, 5\}$ af mængden $\{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Vi ved at en ækvivalensrelation er refleksiv. Derfor må den indeholde parrene $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(2, 2)$, $(3, 3)$, $(4, 4)$ og $(5, 5)$.

$\{0\}$ er i en ækvivalensklasse for sig (da den udgør i mængde for sig i partitionen). Derfor indgår den ikke i flere ordnede par.

En ækvivalensrelation er symmetrisk, hvorfor relationen må indeholde $(1,2)$ og $(2,1)$, fordi ellers var de ikke havnet i samme ækvivalensklasse. Det samme gælder de ordnede par $(3,4)$, $(4,3)$, $(3,5)$, $(5,3)$, $(4,5)$ og $(5,4)$. Således er relationen også transitiv, hvilket den også skal være i kraft at være en ækvivalensrelation. Derfor er svaret

$$\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(1,2),(2,1),(3,4),(4,3),(3,5),(5,3),(4,5),(5,4)\}$$

Opgave 9.5.3

Hvilke af disse relationer på mængden af alle funktioner fra $\mathbb{Z}$ til $\mathbb{Z}$ er ækvivalensrelationer? Afgør for de relationer, der ikke er ækvivalensrelationer, hvilken egenskab de mangler.

a) $\{(f,g) |\, f(1) = g(1)\}$

- *Refleksiv.* Ja. $f = g \Rightarrow f(1) = g(1)$.
- *Symmetrisk.* Ja. $f(1) = g(1) \Leftrightarrow g(1) = f(1)$.
- *Transitiv.* Ja. $f(1) = g(1) \wedge g(1) = h(1) \Rightarrow f(1) = h(1)$.

Derfor: ækvivalensrelation.

b) $\{(f,g) |\, f(0) = g(0)$ eller $f(1) = g(1)\}$

- *Refleksiv.* Ja. $f = g \Rightarrow f(0) = g(0) \wedge f(1) = g(1)$.
- *Symmetrisk.* Ja. $f(0) = g(0) \vee f(1) = g(1) \Rightarrow g(0) = f(0) \vee g(1) = f(1)$.
- *Transitiv.* Nej. $f(0) = g(0) \wedge g(1) = h(1) \not\Rightarrow f(0) = h(0) \vee f(1) = h(1)$

Derfor: ikke en ækvivalensrelation.

c) $\{(f,g) |\, f(x) - g(x) = 1, \forall x \in \mathbb{Z}\}$

- *Refleksiv.* Nej. $f = g \Rightarrow \forall x(f(x) - g(x) = 0 \neq 1)$.
- *Symmetrisk.* Nej. $f(x) - g(x) = 1 \not\Rightarrow g(x) - f(x) = 1$ (subtraktion er ikke kommutativ).
- *Transitiv.* Nej. $f(x) - g(x) = 1 \wedge g(x) - h(x) = 1 \not\Rightarrow f(x) - h(x) = 1$.

Derfor: ikke en ækvivalensrelation.

Opgave 9.5.15

Lad R være relationen på mængden af ordnede par af positive heltal, hvorom det gælder at $((a,b),(c,d)) \in R$ hvis og kun hvis $a+d=b+c$. Vis at R er en ækvivalensrelation.

R er refleksiv fordi hvis $((a,b),(a,b)) \in R$, da $a+b=b+a$.

R er symmetrisk fordi hvis $((a,b),(c,d)) \in R$ så er $a+d=b+c$, altså er $c+b=d+a$ (rykker bare rundt på led), hvorfor $((c,d),(a,b)) \in R$.

R er transitiv fordi $((a,b),(c,d)) \in R$ og $((c,d),(e,f)) \in R$ så er $a+d=b+c$ og $c+f=d+e$. Så kan vi lave følgende omskrivninger

$$\begin{aligned}
a+d+c+f &= b+c+d+e \\
\Leftrightarrow a+f &= b+e && \text{Forkerter med } c+d \\
&\Rightarrow ((a,b),(e,f)) \in R
\end{aligned}$$

hvilket viser at R også er transitiv. Nu har vi vist at at R er en ækvivalensrelation ved at vise at den er både refleksiv, symmetrisk og transitiv.

□

Opgave 2 fra hjemmeside

Angiv ækvivalensklassen for $(1,2)$ m.h.t. relationen R i opgave 9.5.15.

De ordnede par af positive heltal, der indgår i ækvivalensklassen for $(1,2)$ er dem, der er relateret til $(1,2)$ gennem R.

Hvis $(1,2)$ er det første talpar, altså $((1,2),(a,b)) \in R$, hvor $a,b \in \mathbb{Z}^+$, så kan vi skrive $1+b=2+a$. Dette er opfyldt når $b=a+1$. Hvis $(1,2)$ er det andet talpar, altså $((a,b),(1,2)) \in R$, hvor $a,b \in \mathbb{Z}^+$, så kan vi skrive $a+2=b+1$. Dette er igen opfyldt når $b=a+1$.

Altså indgår indgår alle talpar (a,b), hvor $a,b \in \mathbb{Z}^+$ og hvorom det gælder at $b=a+1$ i ækvivalensklassen for $(1,2)$ m.h.t. R.

□