DM547 øvelsestimer
27-09-19

Jonas Eriksen

28. september 2019

Antal fremmødte:

Forklar eksempel 10 på s. 344

Eksemplet viser, hvordan man kan bruge et induktionsbevis til at vise, at en mængde S med $|S| = n$ har 2^n delmængder.

I *basistrinnet* vises det, hvor mange delmængder den tomme mængde $\emptyset$ har, fordi den tomme mængde er mængden med den mindst mulige kardinalitet, nemlig 0. Den har 1 delmængde (definition), hvorfor det er sandt at en mængde med 0 elementer har $2^0 = 1$ delmængder.

Induktionsantagelsen er, at en mængde S med $|S| = k$ har 2^k delmængder.

I *induktionstrinnet* bliver det vist, at det følger af induktionsantagelsen, at en mængde med $k + 1$ elementer har 2^{k+1} delmængder. Dette bliver gjort ved at definere en ny mængde $T = S \cup \{a\}$, hvor $S = T - \{a\}$. D.v.s. at den eneste forskel på T og S er at T har ét ekstra element, nemlig a (så $S \subset T$). Så $|T| = |S| + 1 = k + 1$.

Derefter bliver induktionsantagelsen taget i brug til at afgøre, hvor mange delmængder T har. Her bemærkes det, at for enhver delmængde X af S, har T præcis to delmængder, nemlig X og $X \cup \{a\}$ – altså én delmængde som er den samme som for S og én delmængde der er delmængden for S forenet med elementet a. Og da vi ved at S har 2^k delmængder fra induktionsantagelsen, så må T have $2 \cdot 2^k = 2^{k+1}$ delmængder.

$\square$

Opgave 2.1.2

Brug mængdebyggernotation til at beskrive nedenstående mængder.

a) $\{0, 3, 6, 9, 12\}$

Fx $\{3x|\ x \in \mathbb{N}, x \leq 4\}$.

b) $\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$

Fx $\{x \in \mathbb{Z}|\ |x| \leq 3\}$.

Opgave 2.1.7

Afgør hvorvidt de følgende mængde-par er lig med hinanden.

a) $\{1, 3, 3, 3, 5, 5, 5, 5, 5\}$ og $\{5, 3, 1\}$

Lig med hinanden.

b) $\{\{1\}\}$ og $\{1, \{1\}\}$.

Ikke lig med hinanden.

c) $\emptyset$ og $\{\emptyset\}$

Ikke lig med hinanden.

Opgave 2.1.9

Er 2 et element i mængden?

a) $\{x \in \mathbb{R}|\ x \text{ er et heltal større end } 1\}$.

Ja.

b) $\{x \in \mathbb{R}|\ x \text{ er kvadratet af et heltal}\}$.

Nej.

c) $\{2, \{2\}\}$.

Ja.

d) $\{\{2\}, \{\{2\}\}\}$.

Nej.

e) $\{\{2\}, \{2, \{2\}\}\}$.

Nej.

f) $\{\{\{2\}\}\}$.

Nej.

Opgave 2.1.13

Afgør om hvert af de nedenstående udsagn er sandt eller falsk.

a) $x \in \{x\}$.

Sandt.

b) $\{x\} \subseteq \{x\}$.

Sandt. (Se sætning 2.1.1, s. 126).

c) $\{x\} \in \{x\}$.

Falsk.

d) $\{x\} \in \{\{x\}\}$.

Sandt.

e) $\emptyset \subseteq \{x\}$.

Sandt. (Se sætning 2.1.1, s. 126).

f) $\emptyset \in \{x\}$.

Falsk.

Opgave 2.1.21

Hvad er kardinaliteten af hvert af de følgende mængder?

a) $\{a\}$.

1.

b) $\{\{a\}\}$.

1.

c) $\{a, \{a\}\}$.

2.

d) $\{a, \{a\}, \{a, \{a\}\}\}$.

3.

Opgave 2.1.23

Find potensmængden af hver af de nedenstående mængder, hvor a og b er distinkte elementer.

a) $\{a\}$

$\mathcal{P}(\{a\}) = \{\{a\}, \emptyset\}$.

b) $\{a, b\}$

$\mathcal{P}(\{a, b\}) = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}, \emptyset\}$.

c) $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

$\mathcal{P}(\{\emptyset, \{\emptyset\}\}) = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}\}\}$.

Opgave 2.1.29

Lad $A = \{a, b, c, d\}$ og $B = \{y, z\}$. Find:

a) $A \times B$.

$A \times B = \{(a, y), (a, z), (b, y), (b, z), (c, y), (c, z)(d, y), (d, z)\}$.

b) $B \times A$

$B \times A = \{(y, a), (y, b), (y, c), (y, d), (z, a), (z, b), (z, c), (z, d)\}$.

Eksamen februar 2015, opgave 1

I det følgende lader vi $U = \{1, 2, 3, \ldots, 15\}$ være universet. Betragt de to mængder

$$\begin{aligned} A =& \{2n \mid n \in S\} \\ B =& \{3n + 2 \mid n \in S\} \end{aligned}$$

hvor $S = \{1, 2, 3, 4\}$. Angiv samtlige elementer i hver af følgende mængder.

a) A

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 =& 2 \\ 2 \cdot 2 =& 4 \\ 2 \cdot 3 =& 6 \\ 2 \cdot 4 =& 8 \end{aligned}$$

Derfor er svaret $\{2, 4, 6, 8\}$.

b) B

$$\begin{aligned} 3 \cdot 1 + 2 =& 5 \\ 3 \cdot 2 + 2 =& 8 \\ 3 \cdot 3 + 2 =& 11 \\ 3 \cdot 4 + 2 =& 14 \end{aligned}$$

Derfor er svaret $\{5, 8, 11, 14\}$.

c) $A \cap B$

$\{8\}$.

d) $A \cup B$

$\{2, 4, 6, 8, 5, 11, 14\}$.

e) $A - B$

$\{2, 4, 6\}$.

f) $\overline{A}$

$\{1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$.

Eksamen DM547 januar 2015, opgave 4

Betragt mængden $A = \{2n+1 \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Hvilke af nedenstående mængder er lig med A?

$$
\begin{aligned}
S_1 =& \{1, 2, 4, 8, \ldots\} \\
S_2 =& \{2, 3, 5, 9, \ldots\} \\
S_3 =& \{1, 3, 5, 7, \ldots\} \\
S_4 =& \{\ldots, -3, -1, 1, 3, \ldots\} \\
S_5 =& \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : \; n = 2k+1\} \\
S_6 =& \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists! k \in \mathbb{Z} : \; n = 2k+1\} \\
S_7 =& \{n \in \mathbb{Z} \mid \forall k \in \mathbb{Z} : \; n \neq 2k\} \\
S_8 =& \{n \in \mathbb{Z} \mid \exists k \in \mathbb{Z} : \; 2n+1 = k\}
\end{aligned}
$$

Vi starter med at bemærke, at A er mængden af alle ulige heltal (husk tilbage på definitionen af ulige heltal, d.v.s. Def. 1.7.1, s. 86).

$S_1 \neq A$, fordi S_1 indeholder lige heltal, som fx $2, 4, 5, 8$.

$S_2 \neq A$, fordi S_2 inderholder et lige tal, nemlig 2.

$S_3 \neq A$, fordi S_3 kun indeholder de positive ulige, positive heltal, mens A inderholder alle ulige heltal.

$S_4 = A$, fordi S_4 er mængden af alle ulige heltal og A er mængden af alle ulige heltal.

$S_5 = A$, fordi S_5 er mængden af alle ulige heltal (husk igen tilbage på Def 1.7.1).

$S_6 = A$, fordi S_6 er mængden af alle ulige heltal – også selvom der bruges en unikheds-kvantor.

$S_7 = A$, fordi S_7 er mængden af alle heltal der ikke er lige, d.v.s. mængden af heltal, der er ulige.

$S_8 \neq A$, fordi S_8 er mængden af alle heltal.

$\square$