DM547 øvelsestimer
30-09-19

Jonas Eriksen

1. oktober 2019

Antal fremmødte:

Opgave 2.2.21

Vis at hvis A og B er mængder, så er

a) $A - B = A \cap \overline{B}$

$$\begin{aligned} A - B =& \{x \in U |\ x \in A \wedge x \notin B\} && \text{Def. 2.2.4} \\ =& \{x \in U |\ x \in A \wedge x \in \overline{B}\} && \text{Def. 2.2.5} \\ =& A \cap \overline{B} && \text{Def 2.2.2 \& Def. 2.2.5} \end{aligned}$$

$\square$

b) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$

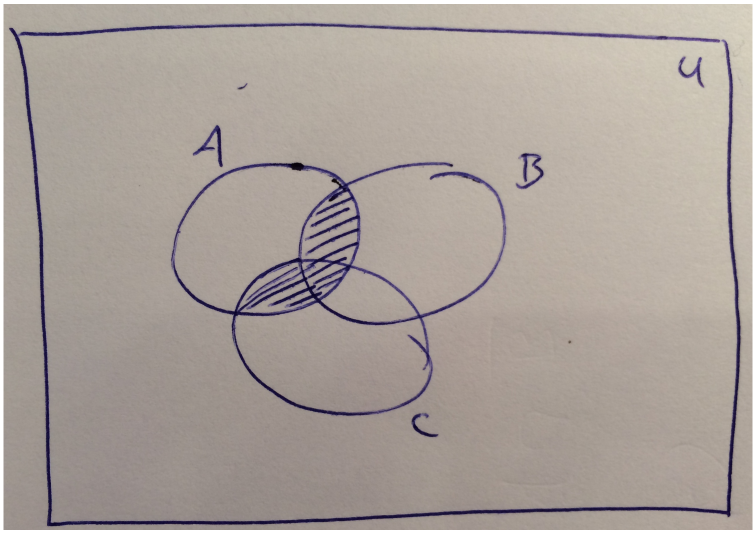
$$\begin{aligned} (A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) =& A \cap (B \cup \overline{B}) && \text{Den distributive lov} \\ =& A \cap U && \text{Komplement-loven} \\ =& A && \text{Identitets-loven} \end{aligned}$$

$\square$

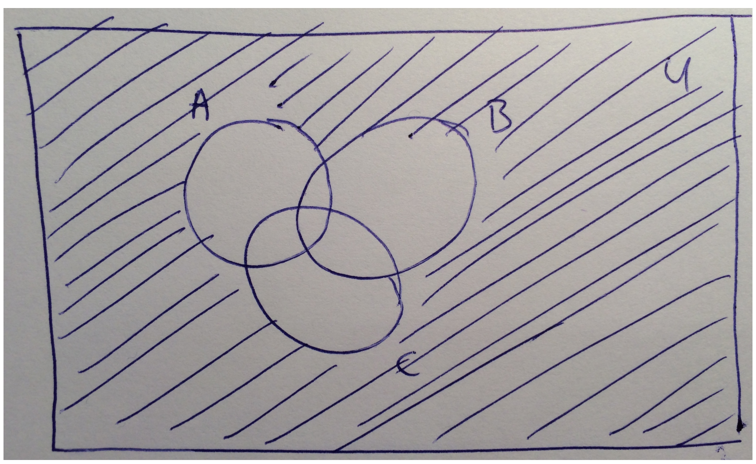
Opgave 2.2.28

Tegn Venn-diagrammerne for hver af de nedenstående kombinationer af af mængderne A, B, C.

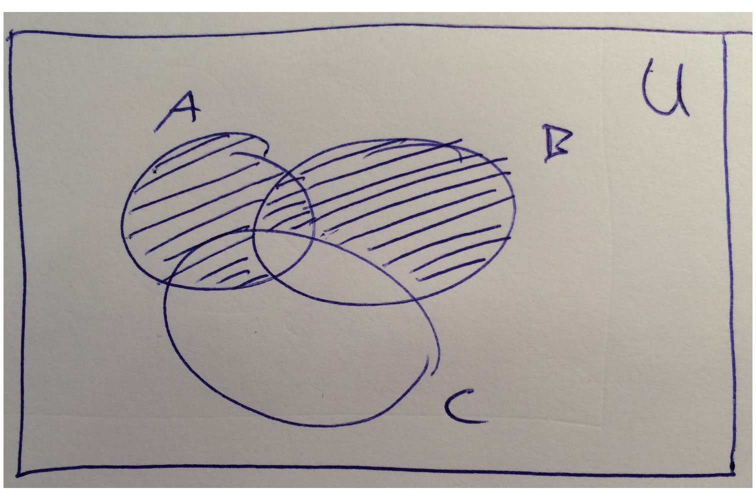
a) $A \cap (B \cup C)$



b) $\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}$



c) $(A - B) \cup (A - C) \cup (B - C)$



Opgave 2.2.32

Kan vi konkludere at $A = B$, hvis A, B og C er mængder sådan at

a) $A \cup C = B \cup C$?

Nej. Modeksempel: Hvis $A = \{a, b\}$, $B = \{c, d\}$ og $C = \{a, b, c, d\}$, så er $A \cup C = B \cup C = \{a, b, c, d\}$, men $A \neq B$.

b) $A \cap C = B \cap C$?

Nej. Modeksempel: Hvis $A = \{c, d\}$, $B = \{c, e\}$ og $C = \{a, b, c\}$ så er $A \cap C = B \cap C = \{c\}$, men $A \neq B$.

c) $A \cup C = B \cup C$ og $A \cap C = B \cap C$?

Ja. Dette viser vi ved at vise at $A \subseteq B$ og $B \subseteq A$. Vi viser nu at $A \subseteq B$ ved at vise, at hvis vi vælger et vilkårligt element i A, så er det også i B.

Lad $x \in A$ være et vilkårligt element. Der er to cases:

1. Hvis $x \in C$: Så er $x \in A \cap C$. Det følger af første lighed i hypotesen at $x \in B \cap C$ og dermed er $x \in B$.

2. Hvis $x \notin C$: Så er $x \in A \cup C$. Det følger af anden lighed i hypotesen at $x \in B \cup C$. Heraf får vi at $x \in B$ da $x \notin C$.

Da $x \in B$ i begge cases, kan vi konkludere, at $A \subseteq B$. Et helt analogt bevis kan laves for, at $B \subseteq A$. Vi kan derfor konkludere at $A = B$.

$\square$

Opgave 2.3.9

Find disse værdier

a) $\lceil \frac{3}{4} \rceil$

$\lceil \frac{3}{4} \rceil = \lceil 0,75 \rceil = 1$

b) $\lfloor \frac{7}{8} \rfloor$

$\lfloor \frac{7}{8} \rfloor = 0$

c) $\lceil -\frac{3}{4} \rceil$

$\lceil -\frac{3}{4} \rceil = -\lfloor \frac{3}{4} \rfloor = -0 = 0$. (Se Table 2.3.1, s. 159.)

d) $\lfloor -\frac{7}{8} \rfloor$

$\lfloor -\frac{7}{8} \rfloor = -\lceil \frac{7}{8} \rceil = -1$. (Se Table 2.3.1, s. 159.)

e) $\lceil 3 \rceil$

$\lceil 3 \rceil = 3$

f) $\lfloor -1 \rfloor$

$\lfloor -1 \rfloor = -1$

g) $\lfloor \frac{1}{2} + \lceil \frac{3}{2} \rceil \rfloor$

$\lfloor \frac{1}{2} + \lceil \frac{3}{2} \rceil \rfloor = \lfloor \frac{1}{2} + 2 \rfloor = \lfloor \frac{5}{2} \rfloor = 2$.

h) $\lfloor \frac{1}{2} \cdot \lfloor \frac{5}{2} \rfloor \rfloor$

$\lfloor \frac{1}{2} \cdot \lfloor \frac{5}{2} \rfloor \rfloor = \lfloor \frac{1}{2} \cdot 2 \rfloor = \lfloor 1 \rfloor = 1$.

Opgave 2.3.12/Opgave 2.3.13/Opgave fra hjemmeside 1

Afgør om disse funktioner fra $\mathbb{Z}$ til $\mathbb{Z}$ er én-til-én (injektive), om de er på (surjektive) og om de er en én-til-én korrespondance (bijektion).

a) $f(n) = n - 1$

Denne funktion er injektiv. For $n, m \in \mathbb{Z}$ gælder det, at $f(n) = f(m) \Rightarrow n - 1 = m - 1 \Rightarrow n = m$.

Denne funktion er surjektiv fordi $\forall m \in \mathbb{Z} : \exists n \in \mathbb{Z} : (m = n - 1)$. D.v.s. alle elementer i sekundærmængden mappes til af et element i definitionsmængden.

Funktionen er en bijektion fordi den både er injektiv og surjektiv.

b) $f(n) = n^2 + 1$

Denne funktion er ikke injektiv, da fx $f(2) = f(-2) = 5$.

Denne funktion er ikke surjekiv da $\nexists n \in \mathbb{Z} : f(n) < 0$. D.v.s. der kan ikke mappes til de negative tal.

Funktionen er ikke en bijektion da den hverken er injektiv eller surjektiv.

c) $f(n) = n^3$

Denne funktion er injektiv. For $n, m \in \mathbb{Z}$ gælder det at $f(n) = f(m) \Rightarrow n^3 = m^3 \Rightarrow n = m$.

Denne funktion er ikke surjektiv da der fx $\nexists n \in \mathbb{Z} : n^3 = 2$. Altså er der ikke noget element i definitionsmængden, der mapper til 2.

Funktionen er ikke en bijektion fordi den ikke er surjektiv.

d) $f(n) = \lceil \frac{n}{2} \rceil$

Denne funktion er ikke injektiv, da fx $\lceil \frac{3}{2} \rceil = \lceil \frac{4}{2} \rceil = 2$ men $3 \neq 4$.

Denne funktion er surjektiv, da det gælder at $\forall m \in \mathbb{Z} : \exists n \in \mathbb{Z} : f(n) = m$, fx $n = 2m$.

Funktionen er ikke en bijektion fordi den ikke er injektiv.