N3 *Zadanie numeryczne*

Rozwiązać układ $(N+1)\times(N+1)$ równań postaci

$$\begin{cases} y_0 & = 1 \\ (D_2 y)_n + y_n & = 0\,, \quad n = 1\ldots(N-1) \\ y_N & = 0\,, \end{cases} \tag{1}$$

gdzie $N = 1000$, $h = 0.01$, a

$$(D_2 y)_n = \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2}. \tag{2}$$

Rozwiązanie przedstawić graficznie (nh, y_n).
Uwaga: najważniejsze w rozwiązaniu zadanie będzie dobranie odpowiedniego algorytmu i optymalizacaja (dla bardzo dużego N).

N4 *Zadanie numeryczne*
Rozwiązać układ $(N+1)\times(N+1)$ równań postaci

$$\begin{cases} y_0 & = 1 \\ (D_2 y)_n + y_n & = 0\,, \quad n = 1\ldots(N-1) \\ y_{N-1} - 2y_N + y_0 & = 0\,, \end{cases} \tag{3}$$

gdzie $N = 1000$, $h = 0.01$, a

$$(D_2 y)_n = \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2}. \tag{4}$$

Rozwiązanie przedstawić graficznie (nh, y_n).
Uwaga: najważniejsze w rozwiązaniu zadanie będzie dobranie odpowiedniego algorytmu i optymalizacaja (dla bardzo dużego N).

N5 *Zadanie numeryczne*
Rozwiązać układ $(N+1)\times(N+1)$ równań postaci

$$\begin{cases} y_0 & = 1 \\ (D_2 y)_n + y_n & = 0\,, \quad n = 1\ldots(N-1) \\ -3y_0 + 4y_1 + y_2 & = 0\,, \end{cases} \tag{5}$$

gdzie $N = 1000$, $h = 0.01$, a

$$(D_2 y)_n = \frac{y_{n-1} - 2y_n + y_{n+1}}{h^2}. \tag{6}$$

Rozwiązanie przedstawić graficznie (nh, y_n).
Wskazówka: Poprzestawiać układ równań tak, aby wyliczyć pierwsze wyrazy w sposób jawny.
Uwaga: najważniejsze w rozwiązaniu zadanie będzie dobranie odpowiedniego algorytmu i optymalizacaja (dla bardzo dużego N).

N6 *Zadanie numeryczne*
Zaimplementować metodę:

- relaksacyjną (Richardsona)

$$x^{(n+1)} = x^{(n)} + \gamma\left(b - Ax^{(n)}\right)\,,$$

- Jacobiego:

$$x^{(n+1)} = D^{-1}\left(b - Rx^{(n)}\right)\,,$$

- Gausa-Seidla

$$x^{(n+1)} = L^{-1}\left(b - Ux^{(n)}\right)\,,$$

- Successive OverRelaxation

$$x_i^{(n+1)} = (1-\omega)x_i^{(n)} + \frac{\omega}{a_{ii}}\left(b_i - \sum_{j<i} a_{ij}x_j^{(n+1)} - \sum_{j>i} a_{ij}x_j^{(n)}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, N\,.$$

Znaleźć rozwiązania układu z zadania N3 z dokładnością 10^{-10}. Która metoda jest najszybsza? Proszę uwzględnić strukturę układu równań.
Dlaczego z tym układem są problemy? Jak "naprawić" układ aby dało sie go rozwązać iteracyjnie?
Jeśli nie znasz odpowiedzi na powyższe pytania znajdź rozwiązanie dla układu *prawie* takiego jak w zadaniu N3, zastępując równania $(D_2y)_n + y_n = 0$ równaniami $-(D_2y)_n + y_n = 0$. Układ wygodnie jest zapisać w postaci

$$\begin{cases} y_0 & = 1 \\ -(D_2y)_n + y_n & = 0\,, \quad n = 1\ldots(N-1) \\ -\frac{y_{N-1}-2y_N+y_0}{h^2} & = 0\,, \end{cases} \tag{7}$$

Uwaga: w razie dalszych problemów z wykorzystaniem macierzy z zadania N3 można skorzystać z macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \qquad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

i walczyć o 3 punkty.

N7 *Zadanie numeryczne*
Zaimplementować metodę gradientów sprzężonych dla układu z zadania N6 z poprzedniego zestawu.

N8 *Zadanie numeryczne*
Znaleźć wartości własne macierzy z dokładnością 10^{-8}

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

korzystając z metody potęgowej, Rayleigha i metody iteracyjnej QR:

$$\begin{aligned} B^{(0)} &= A, \\ Q^{(n)}R^{(n)} &= B^{(n)}, \\ B^{(n+1)} &:= R^{(n)}Q^{(n)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Uwaga: Metoda Rayleigha będzie omówiona na zajęciach, ale można też oprzeć się o sekcję 3 https://mathreview.uwaterloo.ca/archive/voli/1/panju.pdf.

N9 *Zadanie numeryczne*
Znaleźć cztery najmniejsze wartości i wektory własne macierzy $N \times N$ z dokładnością 10^{-8}, której elementy są dane jako

$$A_{nm} = -\frac{\delta_{n-1,m}}{h^2} + \left(\frac{2}{h^2} + 4 - \frac{6}{\cosh^2 x_n}\right)\delta_{n,m} - \frac{\delta_{n+1,m}}{h^2}\,, \tag{10}$$

gdzie N duże $\sim 100\ldots1000$,

$$h = \frac{2L}{N-1} \qquad x_n = -L + nh\,, \qquad L = 10. \tag{11}$$

Cztery znalezione wektory proszę przedstawić w postaci graficznej - wykresu (x_n, y_n), gdzie y_n $n-$ta składowa wektora.

N10 *Zadanie numeryczne*
Znaleźć wszystkie rozwiązania równania $\det(A-\lambda\mathbb{1})$ trzema metodami (poszukiwania miejsc zerowych) z dokładnością 10^{-8}. Które metody działają najszybciej?

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

N11 *Zadanie numeryczne*
Narysować zbiór $\{x_n : n > 100\}$ (atraktor) w zależności od parametru $k \in [2,4]$ dla odwzorowania logistycznego.

$$x_{n+1} = kx_n(1-x_n)\,. \tag{12}$$

http://pl.wikipedia.org/wiki/Odwzorowanie_logistyczne

N12 *Zadanie numeryczne*

$$z^3 - 1 = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

metodą Newtona. Zaznaczyć różnymi kolorami baseny atrakcji poszczególnych rozwiązań na płaszczyźnie $(\mathrm{Re}z, \mathrm{Im}z)$. Do zaznaczania basenów w gnuplocie można użyć komendy
`plot <data file> with image`
gdzie `<data file>` plik zawierający dane typu

```
x1   y1   n1
x2   y2   n2
x3   y3   n3
```

gdzie x_1, y_1 współrzędne (np część rzeczywista i urojona z), a n numer basenu (ewentualnie zmodyfikowany o ilość koniecznych iteracji aby dojść dostatecznie blisko któregoś z rozwiązań).

N11 *Zadanie numeryczne*
Znajdź interpolację funkcji

$$f_1(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ oraz } f_2(x) = e^{-x^2}$$

na przedziale $x \in [-5,5]$

- dla N równoodległych punktów. Dla jakiego N otrzymamy najmniejszy błąd przybliżenia $\sigma = \max\left|f(x) - f_{approx}(x)\right|$? Dlaczego z funkcją f_1 są takie problemy?
  Narysuj wykresy (również poza punktami interpolacji!) dla N minimalizującego błąd. *2 ptk.*
- dla N punktów $x_n = 5\cos\left(\frac{n\pi}{N-1}\right)$. Jaką teraz można uzyskać dokładność? Dlaczego? *2 ptk.*
- Wykonaj aproksymację przy użyciu splajnów kubicznych dla N równoodległych punktów. Ile punktów by musiało być aby osiągnąć dokładność taką jak w poprzednim podpunkcie? *2 ptk.*
- Wykonaj aproksymację przy użyciu funkcji sinc

  $$f(x) \approx \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n)\phi_n(x)\,, \qquad \phi_n(x) = \frac{\sin\left[\frac{\pi}{h}(x-x_n)\right]}{\frac{\pi}{h}(x-x_n)}\,, \qquad x_n = -5 + hn\,, \qquad h = \frac{10}{N-1}\,,$$

  przyjmując, że poza zakresem funkcja przyjmuje wartość 0. Ile punktów by musiało być aby osiągnąć dokładność taką jak w poprzednim podpunkcie? *2 ptk.*

Uwaga: w tym zadaniu najważniejsza jest właściwa analiza i wnioski i to one stanowią podstawę oceny.

N12 *Zadanie numeryczne*
Obliczyć całkę

$$\int_{-1}^{1} \frac{\exp(x^2)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

z dokładnością do 10^{-6} za pomocą złożonej metody trapezów, Simpsona i reguły 3/8, stosując iteracyjne zagęszczanie podprzedziałów.
Uwaga: za liczenie dwukrotnie (lub więcej) wartości funkcji w obrębie jednej metody przy zagęszczaniu będą odejmowane punkty.
Wskazówka: zmienić zmienne tak aby pozbyć się nieskończoności na brzegach przedziału.

N13 *Zadanie numeryczne*
Znajdź rozwiązanie układu równań (z dokładnością $\sim 10^{-6}$)

$$\begin{cases} -\dfrac{u_{n-1} - 2u_n + u_{n+1}}{h^2} + 2u_n(u_n^2 - 1) & = 0, \qquad n = 1, \dots, N-1 \\ u_0 & = 0, \\ u_N & = 1, \end{cases} \tag{13}$$

gdzie $N \sim 100 - 1000$, $h = 20/(N-1)$. Narysuj wykres rozwiązania.