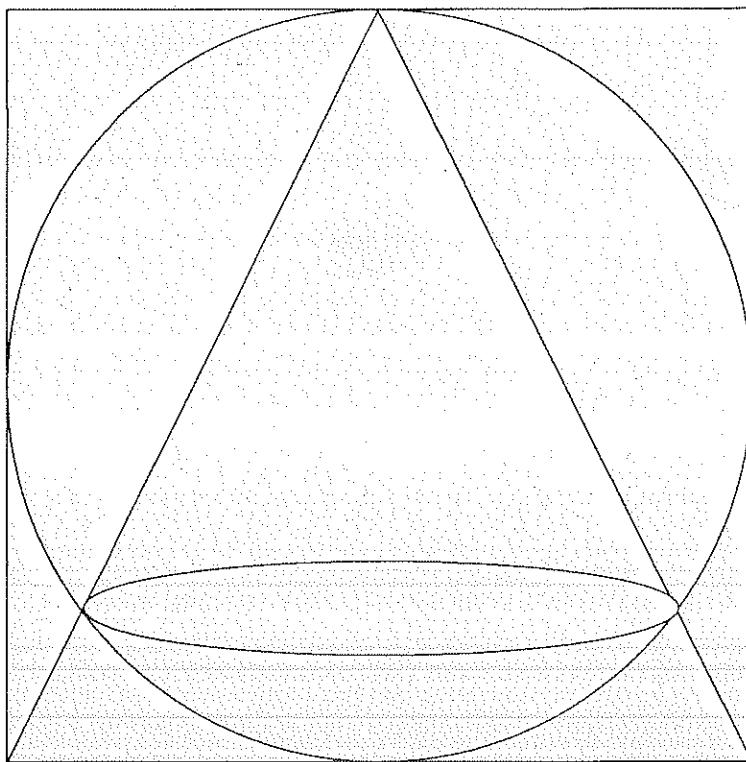


516.22
C1079F
8-1
I.P. 2322

GEOMETRIA PLANA Y DEL ESPACIO GEOMETRIA ANALITICA DIBUJO



ESCUELA POLITECNICA
DEL EJERCITO
BIBLIOTECA ESPE-L
LATA CUNGA

No. 5.021 Fecha: 2007
Precio: 23,00. Donación: 5,00

G. CALVACHE
T. ROSERO
M. YACELGA

2009

MINISTERIO DE EDUCACION Y CULTURA

Certificados de Inscripción y de Derechos de Autor

Nº 002482; 002483

Prohibida la reproducción parcial o total de este libro.

PRESENTACIÓN

Este texto de Geometría está dedicado a los estudiantes que se preparan para ingresar a las diferentes Instituciones que imparten Educación Superior en las diferentes ramas de la Ingeniería. El mismo pretende ser una guía y ayuda tanto para el docente y estudiante que están inmersos en el aprendizaje de esta asignatura.

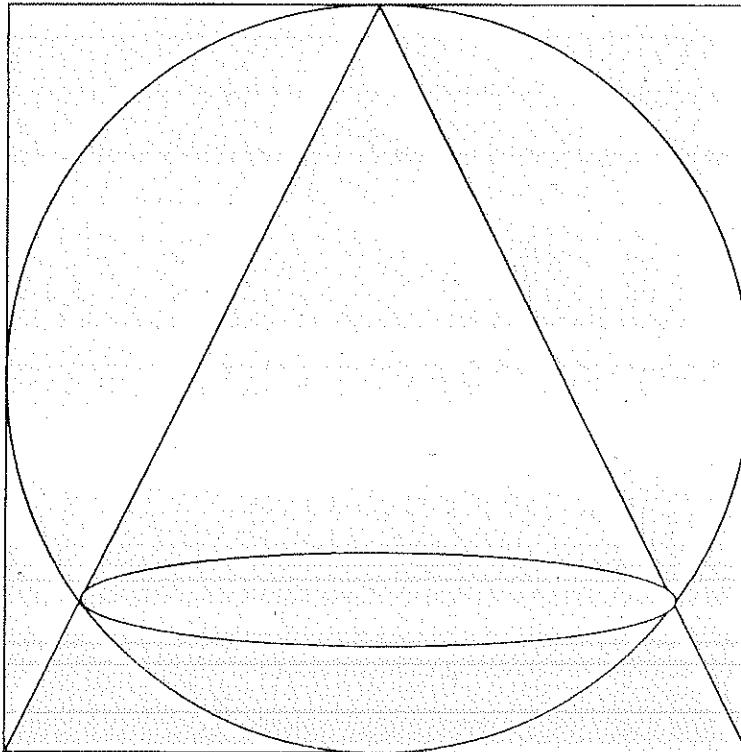
El Objetivo es lograr unificar los conocimientos de Geometría que los estudiantes reciben en los establecimientos de Educación Media.

La respuesta favorable que tenga este trabajo y sus recomendaciones que nos hagan llegar, constituirá un estímulo para continuar trabajando.

LOS AUTORES

GEOMETRIA PLANA

EJERCICIOS PROPUESTOS Y EJERCICIOS RESUELTOS



**G. CALVACHE
T. ROSERO
M. YACELGA**

CONTENIDOS

UNIDAD 1 CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Términos no definidos	1
Plano	1
Punto	2
Posición relativa Punto – Plano	2
Figuras Geométricas	2
Recta	2
Posición relativa Punto – Recta	3
Posición relativa de dos rectas en un plano	3
Segmento	3
Segmento Abierto	3
Segmento Semiabierto	3
Semirecta	3
Rayo	4
Proposiciones	4
Problema	6
Congruencia	6
Equivalencia	6
Semejanza	6
Identidad	6
La Demostración	7

UNIDAD 2 PROPORCIONALIDAD

Razón	11
Proporción	11
Segmento Unitario	13
Longitud de un Segmento	13
Propiedades de un Segmento	13

Operaciones con Segmentos	13
División de un Segmento en partes congruentes	14
División Interna de un Segmento	15
División Externa de un Segmento	15
División Armónica de un Segmento	15
División en Media y Extrema razón de un Segmento	15
Ejercicios	16

UNIDAD 3 ANGULOS

Definición	25
Representación gráfica y elementos	25
Denominación	25
Unidades de medida	25
Medida de un ángulo	25
Congruencia de ángulos	25
Clases de ángulos	26
Rectas perpendiculares	27
Perpendicular de un Punto a una Recta	27
Distancia de un Punto a una Recta	27
Proyección Ortogonal	27
Mediatriz	28
Simetría	28
Bisectriz	29
Propiedades	29
Ejercicios	32

UNIDAD 4 POLIGONOS

Definiciones Básicas	39
Clasificación	39
Líneas y Puntos fundamentales	41
Propiedades	43

Congruencia de Triángulos	56
---------------------------------	----

Triángulos Isósceles y Equilátero	58
---	----

Triángulo Rectángulo	58
----------------------------	----

Desigualdades	59
---------------------	----

Ejercicios	59
------------------	----

Transversales	77
---------------------	----

Semejanza de Triángulos	77
-------------------------------	----

Relaciones Métricas y Trigonométricas	90
---	----

Área de un Triángulo	111
----------------------------	-----

Lugares Geométricos Básicos	120
-----------------------------------	-----

UNIDAD 5

CÍRCULOS

Definiciones Básicas	121
----------------------------	-----

Líneas y Puntos Fundamentales	121
-------------------------------------	-----

Ángulos en un Círculo	122
-----------------------------	-----

Ejercicios	124
------------------	-----

Cuerdas	132
---------------	-----

Tangentes y Secantes	133
----------------------------	-----

Círculo y Triángulo	135
---------------------------	-----

Ejercicios	138
------------------	-----

Posición Relativa de dos Círculos	157
---	-----

Ejercicios	158
------------------	-----

Áreas Circulares	169
------------------------	-----

UNIDAD 6

POLÍGONOS Y CUADRILATEROS

Definición	187
------------------	-----

Congruencia de Polígonos	187
--------------------------------	-----

Semejanza de Polígonos	187
------------------------------	-----

Propiedades	189
-------------------	-----

Propiedades de los Polígonos Regulares	190
--	-----

Ejercicios	194
Cuadriláteros	202
Paralelogramo	205
Rombo	206
Rectángulo	207
Cuadrado	207
Trapecio	208
Trapecio Isósceles	209
Trapecio Rectángulo	209
Ejercicios II.....	209

1. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Geometría, es la ciencia de las formas espaciales del mundo material, se basa en un conjunto de proposiciones que estudia la forma, propiedades y medida de las figuras y cuerpos geométricos; entendiéndose por proposición el enunciado de una ley o un principio.

Es necesario considerar que las proposiciones no deben ser contradictorias y todos los resultados y conclusiones que se obtengan de ellas tampoco deben ser contradictorios entre sí, ni con los conocimientos ya existentes.

La geometría es una ciencia y un arte, es decir, es al mismo tiempo matemática y filosofía. Forma uno de los sistemas más perfectos de lógica que se conocen. Proporciona una disciplina mental y conocimientos indispensables para seguir estudios superiores.

Aunque la geometría es una de las partes más antiguas de la matemática, en la actualidad ha encontrado nuevas áreas de aplicación en campos tan diversos como la exploración del espacio.

En geometría aprendemos a comprobar las proposiciones por razonamiento deductivo o inductivo, analizando un problema en términos de los datos que se den, las leyes y principios que pueden aceptarse como verdaderos y mediante una reflexión cuidadosa, lógica y exacta, seleccionar una solución para el problema.

Una causa común de desavenencias, no sólo en geometría, sino en todas las actividades humanas, es el hecho de que la misma palabra puede tener distintos significados para diferentes personas; por tanto es necesario que los términos que usemos en las demostraciones tengan el mismo significado para cada uno de nosotros.

1.1. TÉRMINOS NO DEFINIDOS

Los objetos que rodean al hombre, forman en su mente el concepto de rectas y de curvas, de figuras planas y de cuerpos con formas y volúmenes diferentes.

Al observar varios cuerpos geométricos, algunos tienen la misma forma, ejemplo: el tronco de un árbol, una lata de conservas, un tubo de oleoducto; tienen una forma común, sin tomar en cuenta su material, color, peso, posición, etc., se produce en nuestra mente una idea abstracta a la cual se le da un nombre en este caso, **cilindro**.

Del mismo modo, en la construcción de una casa, las paredes (verticales) y pisos (horizontales), nos da la idea de perpendicularidad y paralelismo.

Los conceptos geométricos básicos son por lo tanto abstractos y existen sólo en nuestra mente. Los conocimientos iniciales de las propiedades y de las formas espaciales se obtienen por inducción, es decir, por medio de observaciones y experiencias reiteradas.

En el idioma existen palabras que son difíciles definir y se los describe en términos de otras palabras igualmente no definidas; tales definiciones se llaman "tautologías".

De esta manera, muchas palabras no se pueden definir sin caer en un círculo vicioso y siempre empezaremos con uno o más términos que no están definidos.

Al usar un término no definido, se supone que la palabra es tan elemental que todos conocen su significado, puesto que no hay palabras más sencillas para definir el término.

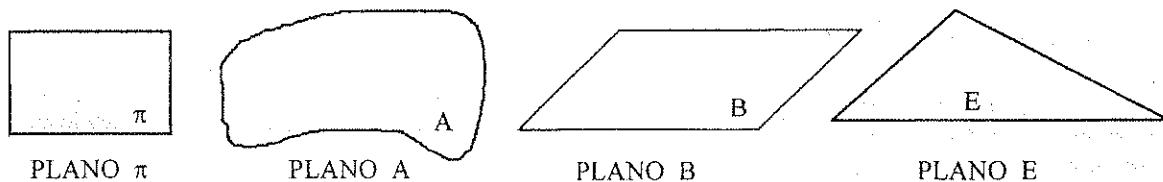
La geometría usa los siguientes términos no definidos: punto, recta, plano, espacio y medida.

En la primera parte del contenido de este trabajo presentaremos proposiciones que relacionen puntos y rectas, los puntos serán los elementos de un plano y las rectas serán subconjuntos del mismo plano formadas por puntos, de ésta manera desarrollaremos la Geometría Plana; posteriormente añadiremos otras proposiciones que relacionen planos, puntos y planos, rectas y planos para desarrollar la Geometría del espacio.

1.2. PLANO

Una hoja de papel lo más extensa posible da la idea del concepto abstracto de plano.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y DENOMINACIÓN



Por medio de una letra mayúscula ubicada en el interior de su representación.

1.3. PUNTO

Para desarrollar muchos sistemas matemáticos, se empieza considerando un conjunto de elementos. Los elementos considerados en geometría son llamados **puntos**. Podemos representar el punto con una minúscula marca en el pizarrón; pero ésta no es un punto; si podríamos subdividir la marca y cada parte subdividirla nuevamente en marcas más pequeñas y así indefinidamente, todavía no tendríamos un punto.

Euclides definió el punto como el elemento geométrico que tiene posición pero no dimensión, sin embargo la palabra “posición y dimensión” tampoco han sido definidas y no se estaría mejor que antes, tendríamos varias palabras que definir en vez de una; la solución del dilema es sencilla: la palabra punto no se define. Lo esencial es que todos tenemos una noción intuitiva bastante buena de lo que es un punto.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y DENOMINACIÓN

Por medio de una marca (· o x).

Por medio de una letra mayúscula escrita cerca de la representación gráfica, ejemplo :

· A o x A

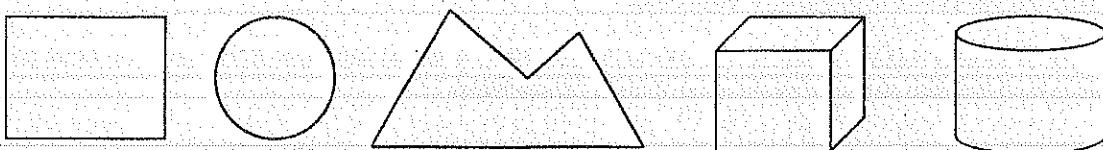
1.4. POSICIÓN RELATIVA PUNTO - PLANO

1) COPLANAR. Si el punto es elemento del plano.

2) EXTERNO. Si el punto no es elemento del plano.

1.5. FIGURAS GEOMÉTRICAS

Al observar los diferentes cuerpos y figuras geométricas, encontraremos que todos tienen algo en común y son los puntos. De esto podríamos concluir que una figura geométrica es un conjunto no vacío de puntos.



1.6. RECTA

La huella dejada al doblar una hoja de papel nos da la idea abstracta de recta. En dicha recta pueden marcarse infinitos puntos, por lo tanto, la recta es una figura geométrica, subconjunto de un plano, formada por un conjunto de puntos.

DETERMINACIÓN

Dos puntos determinan una recta.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y DENOMINACIÓN



Por medio de dos puntos cualesquiera de la recta, o por medio de un punto de la recta.

1.7. POSICIÓN RELATIVA PUNTO - RECTA

1) COLINEAL. Si el punto es elemento de la recta.



2) EXTERNO. Si el punto no es elemento de la recta.

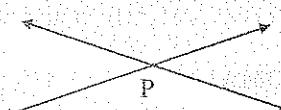


1.8. POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS EN UN PLANO

1) PARALELAS. Si la intersección es un conjunto vacío.



2) SECANTES. Si su intersección es un punto.



1.9. SEGMENTO (\overline{AB})

Es la figura geométrica de puntos colineales cuyos elementos son los puntos A y B y todos los puntos entre A y B. Los puntos A y B se llaman extremos.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y DENOMINACIÓN



1.10. SEGMENTO ABIERTO ($\overline{\overline{AB}}$)

Es la figura geométrica de puntos colineales, cuyos elementos están comprendidos entre los puntos A y B.

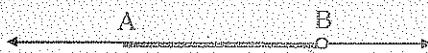
REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y DENOMINACIÓN



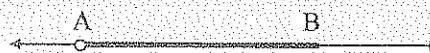
1.11. SEGMENTO SEMIABIERTO ($\overline{\overline{AB}}$ o \overline{AB})

Es la figura geométrica de puntos colineales, cuyos elementos están comprendidos entre los puntos A y B incluyendo ya sea el punto A o el punto B.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y DENOMINACIÓN



Segmento semiabierto en B: ($\overline{\overline{AB}}$)



Segmento semiabierto en A: (\overline{AB})

1.12. SEMIRECTA (\overrightarrow{AB})

Es la figura geométrica de puntos colineales, cuyos elementos están al mismo lado de A y B excluyendo A.

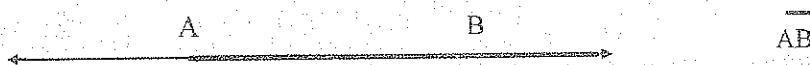
REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y DENOMINACIÓN



1.13. RAYO (AB)

Es la figura geométrica de puntos colineales, cuyos elementos están al mismo lado de A y B incluyendo A.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y DENOMINACIÓN



A es el origen y B indica la dirección.

1.14. PROPOSICIÓN

Es el enunciado de una verdad, de un principio, de una propiedad.

Las proposiciones más comunes que se utilizan son : axiomas, postulados, teoremas y corolarios.

1.14.1. AXIOMA

Es la proposición, que siendo evidente, no requiere demostración. Es el resultado de la observación o experimentación; los axiomas son propiedades de cualquier asignatura.

1. Axioma de identidad. $a = a$

2. Axioma de sustitución. Toda cantidad puede reemplazarse por su igual.

3. Propiedades de igualdad.

- Dos cantidades iguales a una tercera son iguales entre sí.
- Si a cantidades iguales se suman, restan, multiplican, dividen, se elevan a una misma potencia o se extraen la misma raíz los resultados son iguales.

4. Propiedades de las desigualdades.

- El todo es mayor que cualquiera de sus partes e igual a la suma de las mismas.
- Si una cantidad es mayor que otra y ésta mayor que una tercera, la primera es mayor que la tercera.
- Si en los dos miembros de una desigualdad, se ejecuta una misma operación con números positivos, el sentido de la desigualdad no cambia.
- Si se suman dos desigualdades de un mismo sentido, el resultado es otra desigualdad en el mismo sentido.
- Si los dos miembros de una desigualdad se restan de los dos miembros de una igualdad, el resultado es una desigualdad de sentido contrario a la dada.
- Si se cambian los signos de los dos miembros de una desigualdad, la desigualdad cambia de sentido.

1.14.2. POSTULADOS

Son proposiciones, cuya verdad aunque no tenga la evidencia de un axioma, se lo acepta sin demostración. A diferencia de los axiomas, éstos son propiedades geométricas.

- Por dos puntos distintos pasa una sola recta.
- Una recta es un conjunto ordenado de puntos, no existe primero ni último. Entre dos puntos siempre existe otro.
- Toda recta puede prolongarse indefinidamente en los dos sentidos.
- La distancia entre dos puntos es la longitud del segmento que los une.
- Por tres puntos dados no colineales pasa un plano y sólo uno.
- Si dos puntos están en un mismo plano, la recta que los contiene pertenece al plano.
- Se puede trazar un círculo con centro y radio dados.
- Toda figura puede hacerse cambiar de posición sin alterar su forma y dimensiones.

1.14.3. TEOREMA

Es la proposición cuya verdad necesita ser demostrada; una vez demostrado un teorema se lo puede utilizar para la demostración de otros teoremas, junto con axiomas, postulados, definiciones, etc..

Un teorema se compone de : **Hipótesis** y **Tesis**.

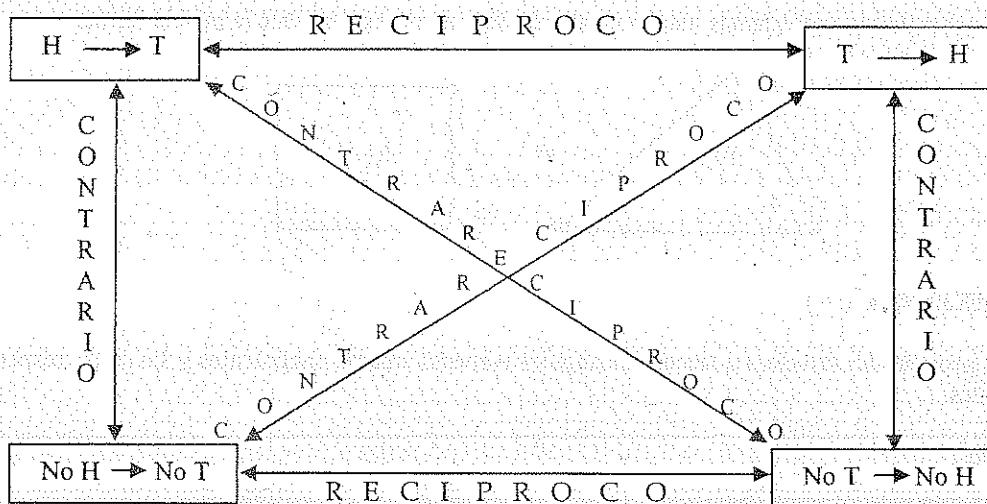
- **Hipótesis**, son las condiciones o datos del teorema.
- **Tesis**, es la propiedad a demostrar.

1.14.3.1. RELACIONES ENTRE TEOREMAS

Según como se tome la hipótesis y tesis de un teorema, pueden existir los siguientes teoremas :

- **DIRECTO** : Es el enunciado de un teorema .
- **RECÍPROCO** : Es la proposición que tiene por hipótesis y tesis, la tesis y la hipótesis del teorema directo. Un teorema recíproco puede ser verdadero o falso.
- **CONTRARIO** : Es la proposición que tiene por hipótesis y tesis las negaciones respectivas de la hipótesis y la tesis del teorema directo.
- **CONTRARECÍPROCO** : Es la proposición contraria a la recíproca de la directa.

DIRECTO



ESQUEMA DE LA RELACIÓN ENTRE LOS TEOREMAS

EJEMPLO:

- **Directo.**- Todos los puntos de la mediatriz de un segmento, equidistan de sus extremos.
- **Recíproco.**- Todos los puntos que equidistan de los extremos de un segmento, pertenecen a la mediatriz del segmento.
- **Contrario.**- Todo punto externo a la mediatriz de un segmento no equidista de los extremos del segmento.
- **Contrarecíproco.**- Todo punto que no equidista de los extremos de un segmento, no pertenece a la mediatriz del segmento.

1.14.4. COROLARIO

Es una proposición, consecuencia directa de un teorema demostrado, por tanto no hace falta demostración.

1.15. PROBLEMA

Es una situación particular que se plantea para ser resuelta.

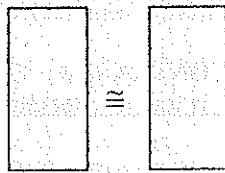
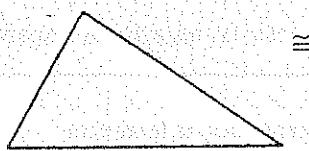
1.16. CONGRUENCIA (\cong)

Dos figuras geométricas congruentes tienen exactamente la misma forma y medida y al superponerlas coinciden en todos sus puntos.

La congruencia implica de hecho una igualdad de medida, pero no siempre la igualdad de medida implica congruencia.

En segmentos y ángulos, la igualdad de medida implica congruencia.

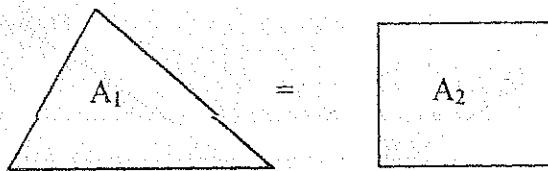
EJEMPLOS:



1.17. EQUIVALENCIA (=)

Dos figuras geométricas equivalentes tienen igual medida y no necesariamente la misma forma.

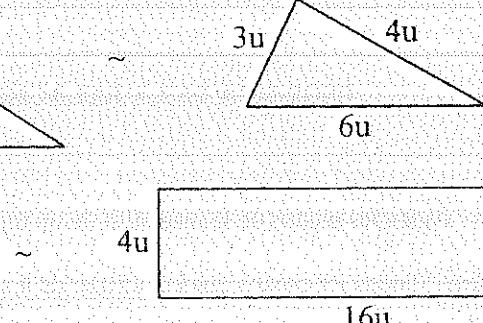
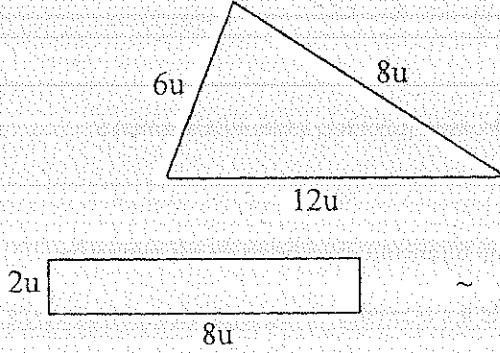
EJEMPLO:



1.18. SEMEJANZA (~)

Dos figuras geométricas semejantes tienen sus ángulos respectivamente congruentes y sus lados respectivamente proporcionales.

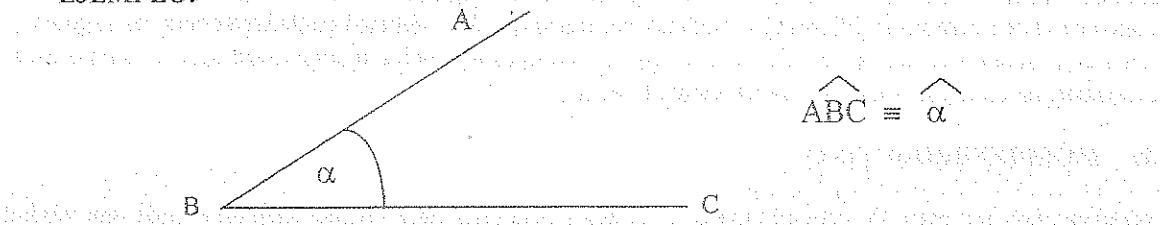
EJEMPLOS :



Dos figuras geométricas semejantes tienen exactamente la misma forma pero distinto tamaño.

1.19. IDENTIDAD (\equiv)

Cuando nos referimos a una misma figura geométrica.

EJEMPLO:**1.20. LA DEMOSTRACIÓN**

Es un conjunto de razonamientos, por medio de los cuales la veracidad de la proposición que se demuestra se deduce de axiomas y verdades antes demostradas o conocidas.

En geometría se admiten sin demostración sólo un pequeño número de verdades fundamentales o axiomas; todas las demás verdades (teoremas), se demuestran basándose en estos axiomas mediante una serie de deducciones. La veracidad de los propios axiomas está garantizada porque tanto ellos mismos, como los teoremas que se demuestran apoyándose en ellos, han sido comprobados por reiteradas observaciones y larga experiencia.

La demostración se realiza en virtud del requerimiento de una de las leyes fundamentales de nuestro pensamiento, el principio de la razón suficiente, que establece la necesidad de que la veracidad de nuestras afirmaciones esté rigurosamente fundamentada.

Una demostración bien estructurada sólo puede apoyarse en proposiciones antes demostradas, siendo inadmisible toda alegación a la evidencia.

La demostración es necesaria también para fundamentar la generalidad de la proposición que se demuestra, es decir, la posibilidad de su aplicación a todos los casos particulares.

Finalmente, por medio de las demostraciones, las verdades geométricas se reducen a un sistema armonioso de conocimientos científicos, en el cual se pone de manifiesto todas las relaciones internas que existen entre las diversas propiedades de las formas espaciales. "Llamando espaciales aquellas propiedades por las cuales se determinan la forma, la magnitud y la posición mutua de los objetos".

1.20.1. MÉTODOS DE DEMOSTRACIÓN**1.20.1.1. MÉTODO INDUCTIVO**

Es un razonamiento que parte de conocimientos o verdades particulares para obtener mediante ellos una verdad general, o que observa varios fenómenos para inferir la ley que los explica.

EJEMPLOS:

- Demostrar que el cuadrado de cualquier número impar disminuido en una unidad da un número múltiplo de ocho.

Demostración: $3^2 - 1 = 9 - 1 = 8 = 8 \times 1$

$$5^2 - 1 = 25 - 1 = 24 = 8 \times 3$$

$$7^2 - 1 = 49 - 1 = 48 = 8 \times 6$$

$$9^2 - 1 = 81 - 1 = 80 = 8 \times 10$$

.....

$$(2n-1)^2 - 1 = 4n^2 - 4n = 4n(n-1)$$

$4n(n-1)$ es múltiplo de 4 y $(n-1)$ son dos números sucesivos, de los cuales uno de ellos es par y múltiplo de 2, por lo tanto, $4n(n-1)$ es múltiplo de 8.

- Queremos saber el valor del sumatorio de las medidas de los ángulos internos de un triángulo. Para esto escogemos varios triángulos diferentes y mediante un transportador medimos cuidadosamente los ángulos, y al realizar el sumatorio nos da en todos los casos π ; entonces se llega a la conclusión que el sumatorio de las medidas de los ángulos internos de un triángulo es π .

1.20.1.2. MÉTODO DEDUCTIVO

Es un razonamiento que parte de conocimientos o verdades generales para obtener mediante ellos una verdad particular.

La mayoría de los teoremas y problemas geométricos se demuestran usando el método deductivo.

1.20.2. PROCEDIMIENTO DE UNA DEMOSTRACIÓN

Los teoremas pueden demostrarse por dos procedimientos : directo e indirecto.

La demostración directa, prueba la veracidad de la proposición, estableciendo una relación directa entre ella y las demostradas con anterioridad.

La demostración indirecta, pone en duda la veracidad de la proposición que se demuestra y tomándola por falsa, llegamos a una contradicción con las condiciones del teorema o con una proposición ya demostrada.

Por esto, la demostración indirecta se llama también “demostración por reducción al absurdo”.

1.20.3. INSTRUCCIONES PARA UNA DEMOSTRACIÓN

Cuando se buscan argumentos para realizar una demostración, se puede recurrir a los experimentos, las observaciones, o a las proposiciones ya demostradas anteriormente. Por lo tanto, en el curso de una demostración , también se puede usar una combinación de la inducción y la deducción.

Conviene subrayar, que todas las demostraciones deben ser exhaustivas. En particular, hay que enunciar precisamente y, si es necesario demostrar todos los teoremas a los cuales se hace referencia en el proceso de demostración.

En la mayoría de los problemas, el dibujo desempeña un papel importantísimo, permitiendo encontrar (e incluso sugerir) la idea de la resolución. Por eso conviene trazar los dibujos minuciosas y exactamente, saber notar en ellos las propiedades geométricas que se puedan aprovechar.

A veces una propiedad, señalada con acierto en el dibujo, permite deducir la resolución del problema.

En resumen las instrucciones para una demostración serían las siguientes :

1. Hacer un gráfico que represente lo más exactamente posible el enunciado de la proposición, empleando letras mayúsculas para cada punto notable. Indicar con marcas, símbolos, letras, etc. en la figura, las partes de medidas iguales.
2. Expressar la hipótesis en forma simbólica.
3. Expressar la tesis en forma simbólica.
4. Realizar la demostración, en la misma que debe constar de proposiciones y razones.

NOTA: En el presente texto, las demostraciones no contienen razones, quedando como inquietud para el estudiante.

EJEMPLOS :**PROCEDIMIENTO DIRECTO**

H) $AB = CD$

T) $AC = BD$

D) $AB = CD \quad (1) \text{ (Hipótesis)}$

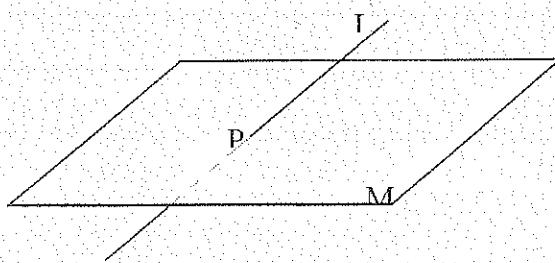
$BC = BC \quad (2) \text{ (Identidad)}$

$AB + BC = CD + BC \quad (1) + (2)$

$\Rightarrow AC = BD //.$

PROCEDIMIENTO INDIRECTO

Si una recta interseca a un plano que no la contiene, entonces la intersección contiene un solo punto.



H) \leftrightarrow L interseca al plano M en .P
 \leftrightarrow L \notin al plano M

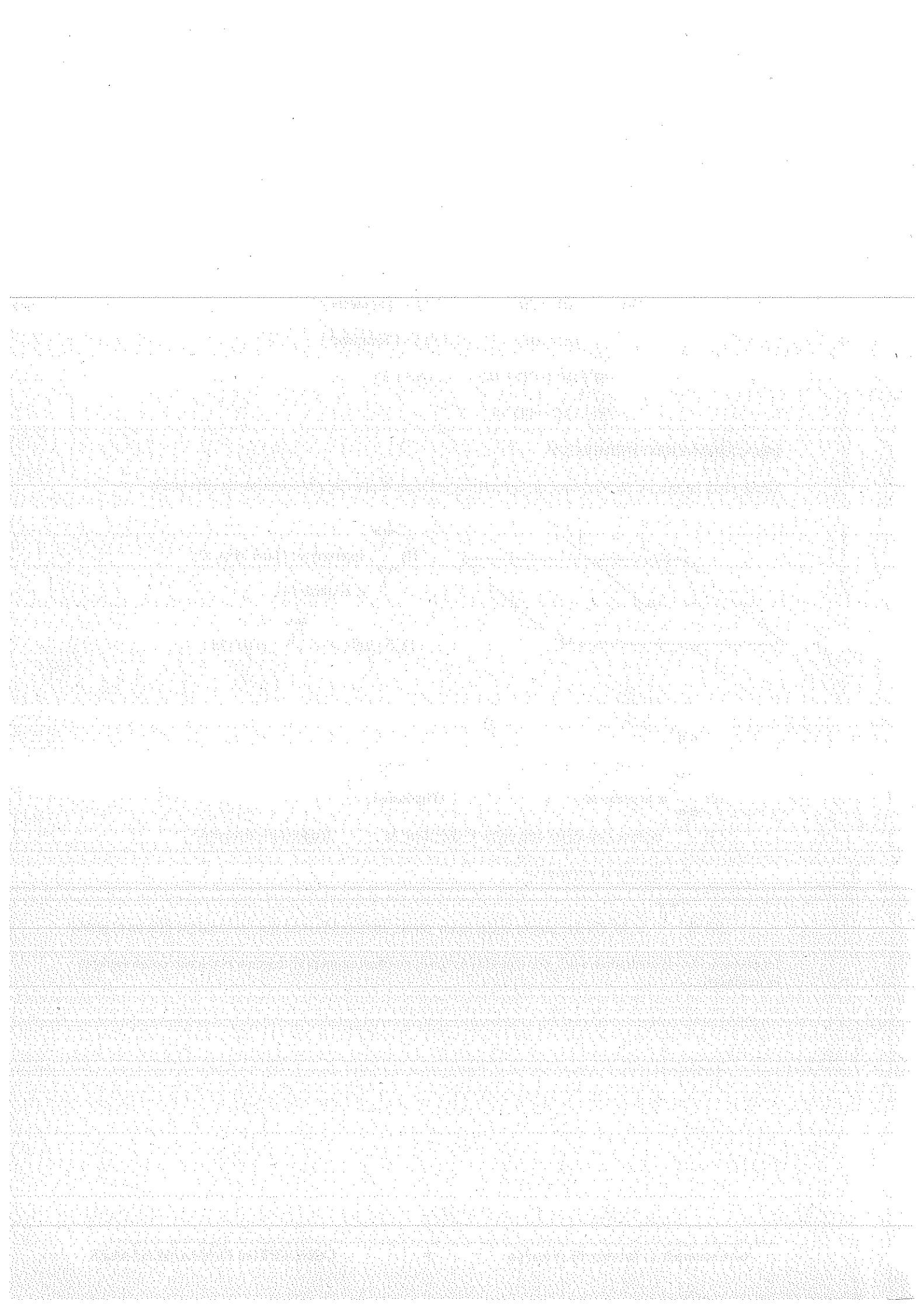
T) .P y solo .P \in L y plano M

- D) (1) \leftrightarrow L interseca al plano M en .P (Hipótesis)
(2) \leftrightarrow L \notin al plano M (Hipótesis)
(3) \leftrightarrow L interseca en algún otro punto Q del plano M (suposición temporal)

.P y .Q están en el plano M

(4) \Rightarrow \leftrightarrow L \in M (Si dos puntos están en un plano, entonces la recta que los contiene está en el plano)

La proposición (4) contradice a (2), por tanto (3) es falso; en consecuencia el teorema planteado como ejemplo es verdadero.



UNIDAD 2

2. PROPORCIONALIDAD

2.1. RAZÓN

La mayor parte de las ideas que se expresan en la actualidad, están basadas en la comparación de números y cantidades. Cuando se dice la distancia de Quito a Guayaquil es de 550 Km., se está comparando con una unidad llamada Kilómetro.

DEFINICIÓN

La razón es una comparación de una cantidad respecto a otra cantidad semejante, el resultado es un número abstracto, es decir no tiene unidades.

Es importante hacer notar qué una razón es un cociente entre cantidades semejantes, porque no tendrían significado encontrar la razón de la medida de un segmento a la de un ángulo.

Una razón es una fracción, por lo tanto, todas las propiedades que tiene una fracción se aplican a las razones.

REPRESENTACIÓN

Para representar la razón 15 a 4, se lo hace : $\frac{15}{4}$, $15/4$, $15 \div 4$

El 15 y el 4 se denominan términos de la razón.

2.2. PROPORCIÓN

Es la igualdad de dos razones. Si dos razones tienen el mismo valor, las razones pueden igualarse como una proporción, por ejemplo : $\frac{4}{12} = \frac{12}{36}$

Si tres o más razones son iguales, se tiene una serie de razones iguales.

REPRESENTACIÓN

Si las razones $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d}$ son iguales, la proporción puede representarse como :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}; \quad a \div b = c \div d$$

DENOMINACIÓN

Se lee "a es a b como c es a d" o también "a y c son proporcionales a b y d".

TÉRMINOS

Son los elementos que forman la proporción; a es el primer término, b el segundo, c el tercero y d el cuarto término.

EXTREMOS : a y d

MEDIOS : b y c

ANTECEDENTES : a y c

CONSECUENTES : b y d

2.2.1. CUARTA PROPORCIONAL

De tres cantidades, es el cuarto término de la proporción, así, en la proporción: $\frac{a}{x} = \frac{b}{c}$, x es la cuarta proporcional entre a, b y c .

2.2.2. MEDIA PROPORCIONAL (Media Geométrica o Proporción Continua)

Si en una proporción, el segundo y tercero o primero y cuarto término son iguales, se dice, que cualquiera de los dos es media proporcional entre el primero y cuarto o segundo y tercero términos de la proporción

respectivamente, así: $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$ o $\frac{x}{a} = \frac{b}{x}$; entonces x es media proporcional entre a y b . $x^2 = ab$, $x = \sqrt{ab}$
(media geométrica)

2.2.3. PROPIEDADES DE LAS PROPORCIONES

1.- En una proporción pueden invertirse las razones.

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ entonces } \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$$

$$\text{Ejemplo: } \frac{17}{5} = \frac{51}{15} \Rightarrow \frac{5}{17} = \frac{15}{51}$$

2.- El producto de los extremos es igual al producto de los medios.

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ entonces } a \times d = b \times c$$

$$\text{Ejemplo: } \frac{17}{5} = \frac{51}{15} \Rightarrow 17 \times 15 = 51 \times 5$$

3.- En una proporción a cada antecedente se puede sumar su respectivo consecuente, o, a cada consecuente se puede sumar su respectivo antecedente.

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ entonces } \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \quad \text{o} \quad \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$$

$$\text{Ejemplo: } \frac{17}{5} = \frac{51}{15} \Rightarrow \frac{17+5}{5} = \frac{51+15}{15} \quad \text{o} \quad \frac{17}{5+17} = \frac{51}{15+51}$$

4.- En una proporción a cada antecedente se puede restar su respectivo consecuente, o, a cada consecuente se puede restar su respectivo antecedente.

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ entonces } \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \quad \text{o} \quad \frac{a}{b-a} = \frac{c}{d-c}$$

$$\text{Ejemplo: } \frac{17}{5} = \frac{51}{15} \Rightarrow \frac{17-5}{5} = \frac{51-15}{15} \quad \text{o} \quad \frac{17}{5-17} = \frac{51}{15-51}$$

5.- En una serie de razones iguales, la suma de los antecedentes, es a la suma de los consecuentes, como uno cualquiera de sus antecedentes es a su respectivo consecuente.

$$\text{Si } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots, \text{ entonces } \frac{a+c+e+\dots}{b+d+f+\dots} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \dots$$

$$\text{Ejemplo: } \frac{17}{5} = \frac{51}{15} = \frac{153}{45} \Rightarrow \frac{17 + 51 + 153}{5 + 15 + 45} = \frac{17}{5} = \frac{51}{15} = \frac{153}{45}$$

2.3. SEGMENTO UNITARIO

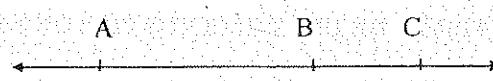
Es el segmento arbitrario que se toma como unidad para medir otros segmentos.

2.4. LONGITUD DE UN SEGMENTO (\overline{AB})

Es un número que representa las veces que está contenido el segmento unitario en el segmento \overline{AB} .

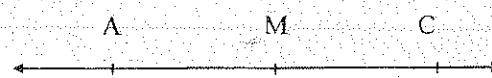
2.5. PROPIEDADES DE UN SEGMENTO

1.- Dados los puntos colineales A, B y C:



B está entre A y C, si $AB + BC = AC$

2.- Dados los puntos colineales A, M y C:



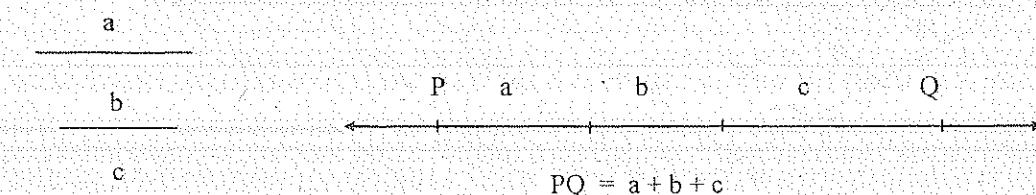
M es el punto medio del segmento \overline{AC} , si $AM = MC$.

2.6. OPERACIONES CON SEGMENTOS

2.6.1. SUMA DE SEGMENTOS

Consiste en encontrar un segmento de longitud igual a la suma de las longitudes de los segmentos dados.

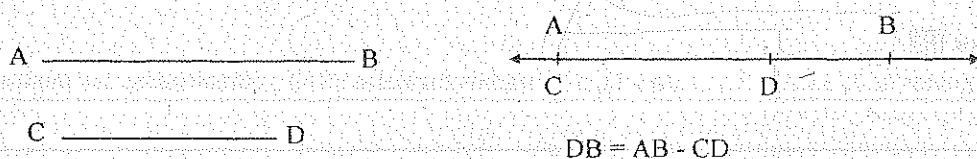
Gráficamente, el segmento que representa la suma se obtiene ubicando consecutivamente en una misma recta los segmentos dados.



2.6.2. RESTA DE SEGMENTOS

Restar de un segmento otro menor, consiste en encontrar un tercer segmento tal que, sumado al segundo de por resultado el primero.

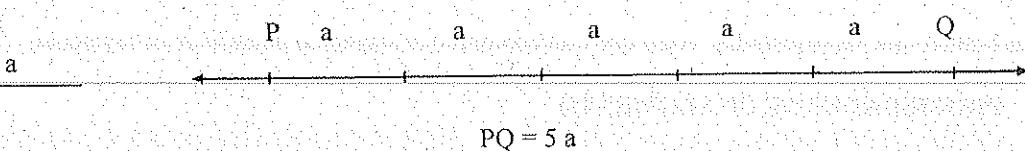
Gráficamente, se ubican los dos segmentos en un mismo rayo, de modo que el origen del rayo sea extremo común de los dos segmentos. El segmento determinado por los otros dos extremos de los segmentos dados, es el segmento diferencia.



2.6.3. MULTIPLICACIÓN DE UN SEGMENTO POR UN NÚMERO

Consiste en encontrar un segmento de longitud igual al producto de la longitud del segmento dado por el número.

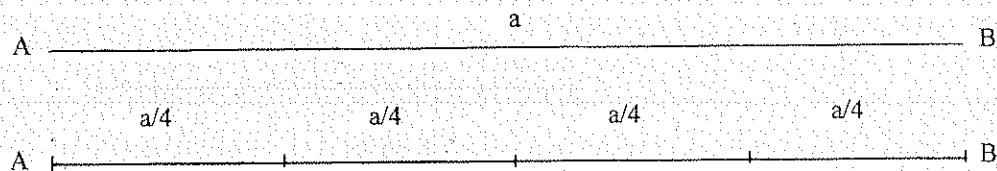
Gráficamente, el segmento que representa el producto, se obtiene sumando el segmento dado tantas veces como indique el número.



2.6.4. DIVISIÓN DE UN SEGMENTO POR UN NÚMERO

Es el segmento tal que multiplicado por el número nos da el segmento dado.

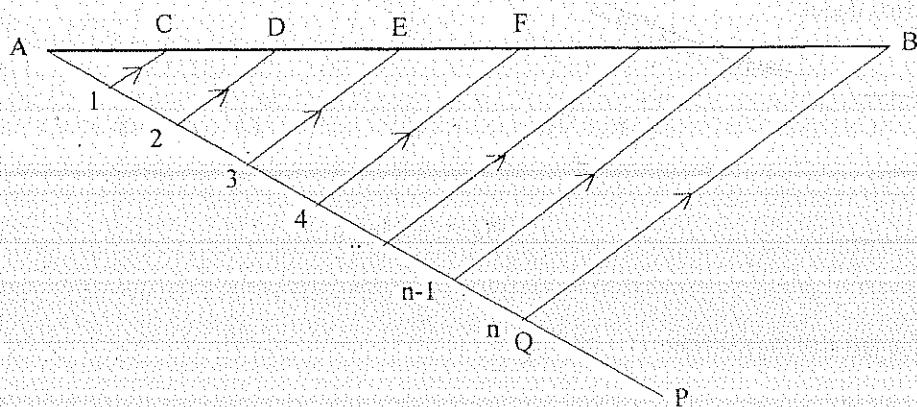
Gráficamente, el segmento dado se debe dividir en tantas partes iguales como indica el número. Cualquiera de las partes iguales es el segmento buscado.



2.7. DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN n PARTES CONGRUENTES

SOLUCIÓN GRÁFICA

Dato: \overline{AB}



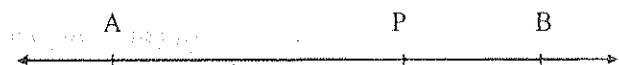
CONSTRUCCIÓN

1. \overline{AP} recta cualquiera
2. En \overline{AP} tomamos n partes congruentes.
3. $AQ = n$
4. Trazamos \overline{BQ}
5. Por los puntos 1, 2, 3, ..., $(n - 1)$, n trazamos paralelas a \overline{BQ} , obteniéndose los puntos de división C, D, E, F, \dots

2.8. DIVISIÓN INTERNA DE UN SEGMENTO

Consiste en localizar un punto situado en el interior de un segmento, tal que forme dos segmentos que estén en una razón dada m/n.

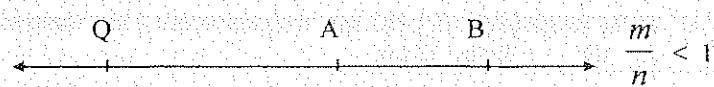
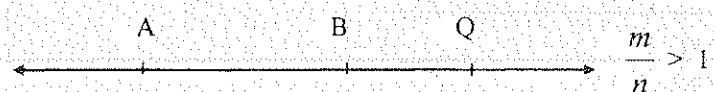
Si P es el punto que divide interíormente al segmento \overline{AB} , se cumple: $\frac{AP}{PB} = \frac{m}{n}$



2.9. DIVISIÓN EXTERNA DE UN SEGMENTO

Consiste en ubicar un punto en la prolongación de un segmento, tal que forme dos segmentos que estén en una relación dada m/n.

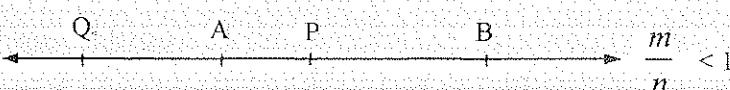
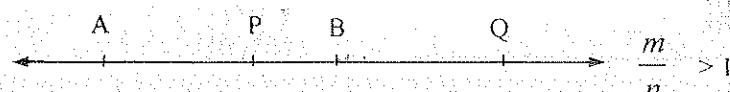
Si Q es el punto que divide externamente al segmento \overline{AB} , se cumple: $\frac{AQ}{BQ} = \frac{m}{n}$



2.10. DIVISIÓN ARMÓNICA DE UN SEGMENTO

Consiste en dividir un segmento interna y externamente en una misma razón.

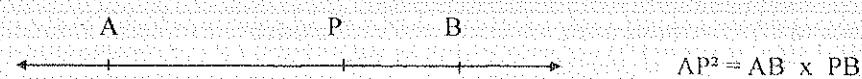
Si P y Q dividen armónicamente al segmento \overline{AB} , se cumple: $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{BQ} = \frac{m}{n}$



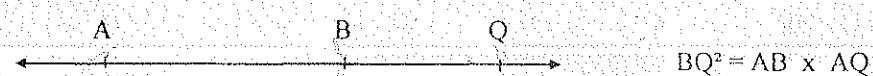
2.11. DIVISIÓN EN MEDIA Y EXTREMA RAZÓN DE UN SEGMENTO

Consiste en dividir un segmento interna o externamente en dos segmentos tales que, uno de ellos es media proporcional entre el segmento dado y el otro de la división.

Si P divide internamente en media y extrema razón al segmento \overline{AB} , se cumple:

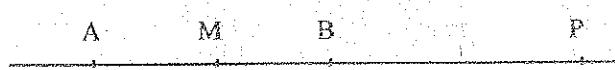


Si Q divide externamente en media y extrema razón al segmento \overline{AB} , se cumple:



2.12. EJERCICIOS.

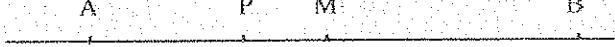
1.



H) $AM = MB$

T) $2PM = PA + PB$

2.



H) $2PM = PB - PA$

T) $AM = MB$

3.



H) $AB = \frac{7}{5} BC$

T) $\frac{BC}{AC} = ?$

Resp. $\frac{5}{12}$

4.



H) $BC = \frac{3}{4} AB$

T) $\frac{AC}{BC} = ?$

Resp. $\frac{7}{3}$

5. Dados los puntos colineales A, B y C. Si las longitudes AB y BC son proporcionales a los números 9 y 5 respectivamente, y $AC = 504$ u., calcular AB . Resp. 324 u.

6. Dados los puntos colineales A, B, C y D. Si $BD - AB = 2BC$.
Demostrar que $AC = CD$

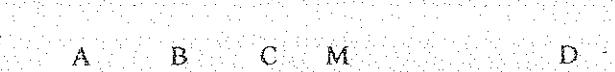
7.



H) $AB = BD - AC$

T) $CD = 2 AB$

8.



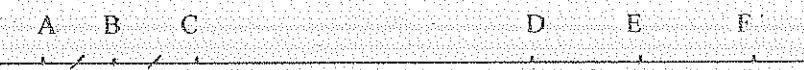
H) $AM = AB + AC$

$AB = BC$

$AM = MD$

T) $CD = 2 AC$

9.



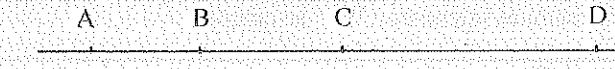
H) $CD = 2 AB$

$BF = \frac{3}{2} CE$

T) $DE = 2 EF$

10. Dados los puntos colineales A, R, P, C y D tales que: $AP = PD$, $AR = PC$ y $RC = 20$. Calcular AD.
Resp. 40

11.



H) $AC + BD = 14$
 $AD = 11$

T) $BC = ?$

Resp. 3

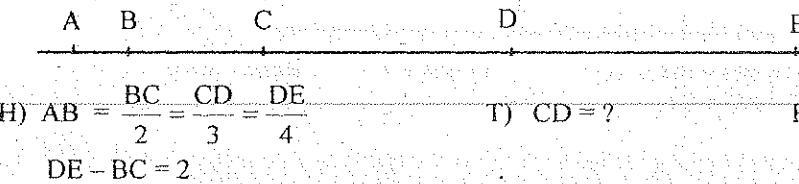
12. Si en el gráfico: $CD = 2 AB$. Demostrar que: $AC = \frac{BD + BC}{2}$



13. Dados los puntos colineales A, B, C y D. Si $AD = 24$ u., $CD = 8$ u. y $\frac{AB}{BC} = 3$
 Calcular BC. Resp. 4 u.

14. Dados los puntos colineales consecutivos Q, A, B y P tales que: $QA = 20$ m.,
 $BP = 40$ m. y QB y AP están en la razón 4/5. Calcular AB. Resp 60 m.

15.



$$DE - BC = 2$$

16. Dados los puntos colineales A, B, C, D, E y F. Si $AB = BD$, $BC = CE$, $DE = EF$
 y $BD - EF = 6$ u.. Calcular CD. Resp. 3 u.

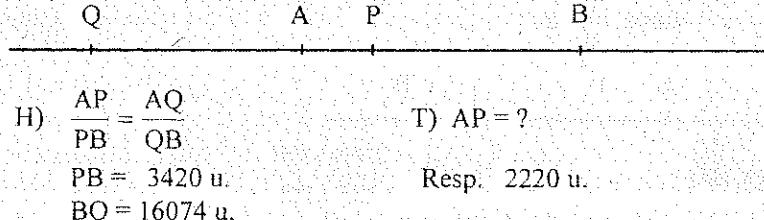
17. Dados los puntos colineales A, B, C, D y E. Si $BC = 3AB$, $\frac{CD}{BC} = \frac{1}{3}$ y $\frac{AC}{CE} = \frac{4}{9}$

Encontrar $\frac{DE}{BC}$

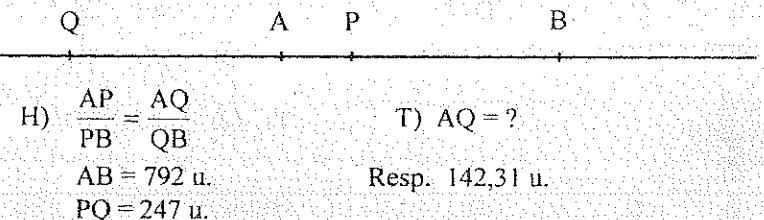
$$\text{Resp. } \frac{8}{3}$$

18. Dados los puntos colineales A, B, C, D y E. Si $\frac{BD}{CE} = \frac{2}{5}$, $DE - AB = 6$, $AE = 40$ y $BD = 10$. Calcular CD. Resp. 7 u.

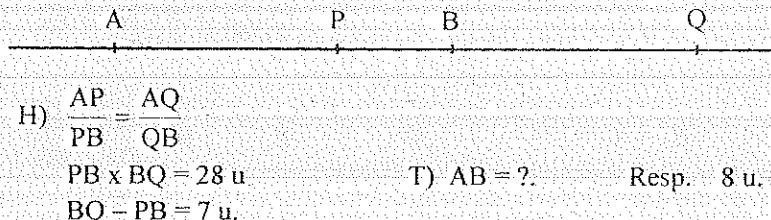
19.



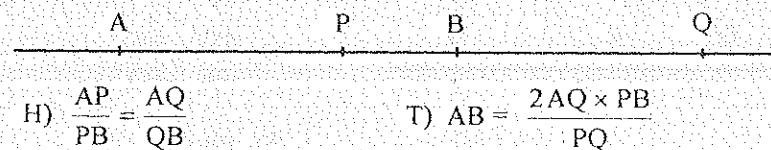
20.



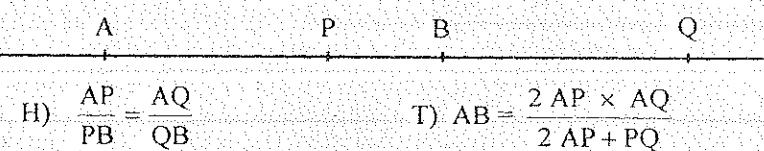
21.



22.



23.



24.

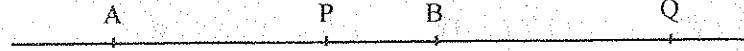


H) $AP \times BQ = PB \times AQ$
 $AP = PQ = 20 \text{ u.}$

T) $PB = ?$

Resp. 6,6 u.

25.

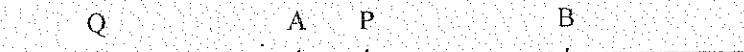


H) $AP \times BQ = PB \times AQ$
 $AP = BQ = 8 \text{ u.}$

T) $PB = ?$

Resp. 3,3 u.

26.



H) $AP \times BQ = PB \times AQ$

T) $PB = \frac{2}{3}AB$

$AQ = AB$

27. En una recta se toman los puntos A, B, C y D de manera que: $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{BD}$

Demostrar que $BC = \frac{AB \times BD}{AB + BD}$

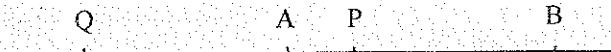
28. En una recta se toman los puntos A, B, C, D, E,, sabiendo que $AB = 0.1 \text{ u.}$

$BC = 0.02 \text{ u.}$, $CD = 0.003 \text{ u.}$, ... Calcular la longitud del segmento que es la suma de los segmentos

dados.

Resp. $\frac{10}{81} \text{ u.}$

29.



H) $AP \times BQ = PB \times AQ$

T) $AB = \frac{2PB \times QB}{BQ + PB}$

30.



H) $\frac{1}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}$

T) $AB^2 = BC \times BD$

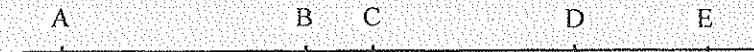
31.



H) $BC = \frac{3}{7}AC$

T) $BD = \frac{4CD + 3AD}{7}$

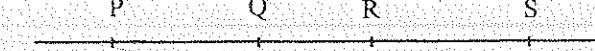
32.



H) $\frac{AB}{AD} = \frac{DE}{EB}$

T) $AD = EB$

33.



H) $\frac{PQ}{PR} = \frac{SR}{SQ}$

T) $PR = QS$

34.



H) $AB = BC$

T) $BE = ?$

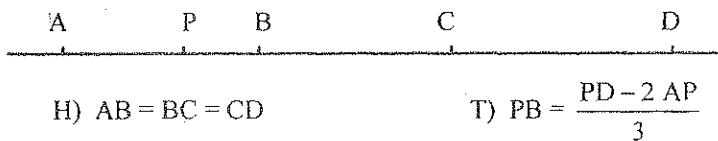
Resp. 9 u

$DE = EF$

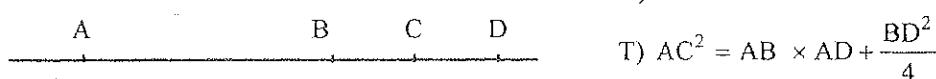
$AD = 10 \text{ u.}$

$CF = 8 \text{ u.}$

35.

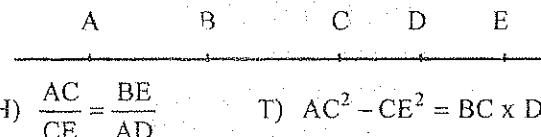


36.

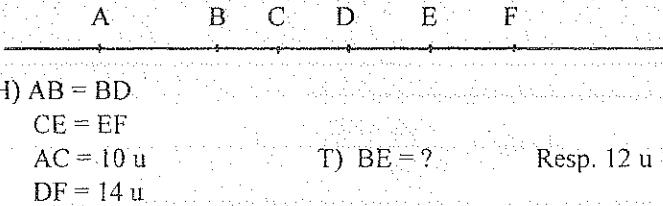


37. En una recta se ubican los puntos colineales A, B, C, D, E y F. Si: $AB = BC$, $CE = EF$ y $AD = DF$, demostrar que $CD = EF - BC$.

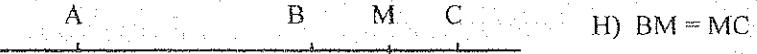
38.



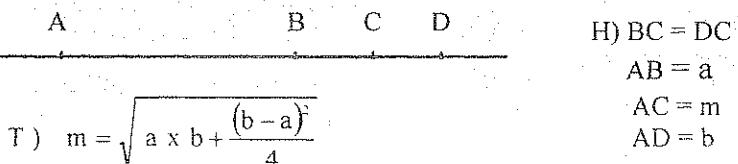
39.



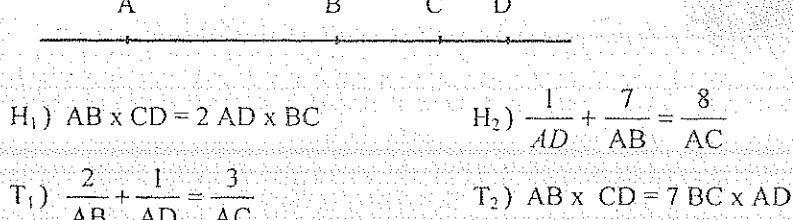
40.



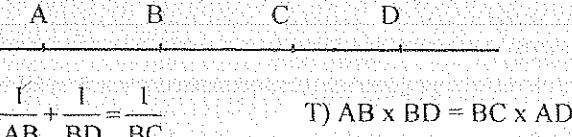
41.



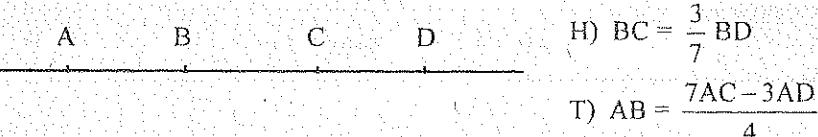
42.



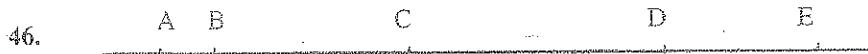
43.



44.



45. En una recta se toman los puntos consecutivos A, B, C, D, E y F, de modo que: $BE = \frac{5}{8} AF$. Calcular BE sabiendo que $AC + BD + CE + DF = 39 \text{ u}$. Resp. 15 u.



H) $AC = \frac{AD}{2}$; $DE = \frac{AE}{3}$; $CD = 5 \text{ u.}$

T) $DE = ?$ Resp. 5 u.



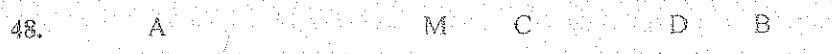
H) $AB = BC$; $CD = 2 AC$

$EF = FG$; $DE = 2 EG$

$AB + FG = 4,5 \text{ u.}$

T) $BF = ?$

Resp. 22,5 u.



H) $AM = MB$

$CD = 2 MC = 2 DB$

$AM - CD = 4 \text{ u.}$

T) $DB = ?$

Resp. 2 u.



H) $3 AD \times BC = AB \times CD$

T) $BC = \frac{AB \times BD}{4 AB + 3 BD}$



H) $3 AD \times BC = AB \times CD$

$AD = 4 AB$

$AC = 5 \text{ u.}$

T) $AB = ?$

Resp. 4,06 u.



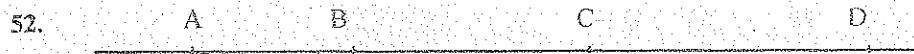
H) $CD = 2 AB$

$AC = 8 \text{ u.}$

$BD = 14 \text{ u.}$

T) $BC = ?$

Resp. 2 u.

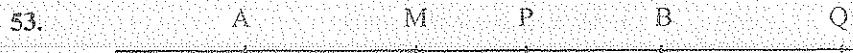


H) $BC = 3 \text{ u.}$

$AC + BD = 14 \text{ u.}$

T) $AD = ?$

Resp. 11 u.



H) $AP \times BQ = PB \times AQ$

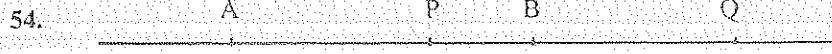
$AM = MB$

$MP = 3 \text{ u.}$

$MQ = 12 \text{ u.}$

T) $MB = ?$

Resp. 6 u.



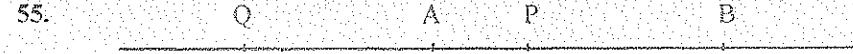
H) $AP \times BQ = PB \times AQ$

$AP = 6 \text{ u.}$

$PQ = 14 \text{ u.}$

T) $AB = ?$

Resp. 9,2 u.



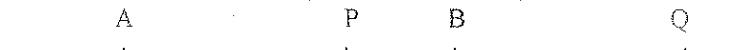
H) $AQ \times PB = AP \times BQ$ T) $\frac{2}{AB} = \frac{1}{AP} - \frac{1}{AQ}$

56. Sobre una recta se toman los puntos A, B, C y D tal que $AB = 1$ u., $CD = 3$ u. y $\frac{1}{BC} + \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD} = 1$.

Hallar BC .

Resp. 2 u.

57.



H) $AP \times BQ = PB \times AQ$ T) $AB = \frac{2PB \times BQ}{BQ - PB}$

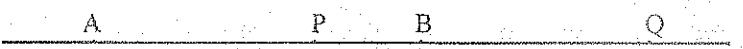
58.



H₁) $\frac{1}{PB} + \frac{1}{BQ} = \frac{2}{AB}$ H₂) $AB = \frac{2AP \times BQ}{PQ}$

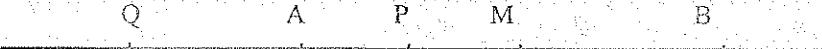
T) $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$

59.



H) $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$ T) $\frac{1}{PB} - \frac{1}{BQ} = \frac{2}{AB}$ T) $AB = \frac{2AP \times BQ}{PQ}$

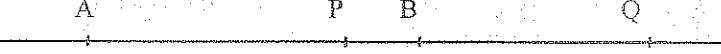
60.



H) $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$ T) $MB^2 = MP \times MQ$

$AM = MB$

61.



H) $PB \times AQ = AP \times BQ$ T) $BQ = 2PB$
 $AP = PQ$

62.



H) $\frac{5}{AQ} = \frac{1}{AP}$ T) $AP \times BQ = AQ \times PB$
 $AQ = 3AB$

63.



H) $\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB}$ T) $AP = ?$ Resp. 554.55 u.
 $PB = 12.43$ u
 $BQ = 13$ u.

64.



H) $PA = 10$ u. T) $PC = ?$ Resp. 60 u.

$PB = 30$ u

$\frac{AC}{5} = \frac{BC}{3}$

65.



H) $\frac{EC}{CF} = \frac{EB}{BF}$; $BE = \frac{3}{4}BC$; $EC = 2$ u.

T) $BF = ?$ Resp. 12 u.

66.



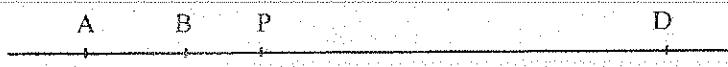
H) $AM = \frac{MB}{3}$

$AP = 30 \text{ u}$
 $PM = 24 \text{ u}$

T) $PB = ?$ Resp. 6 u.

67. Los segmentos a, b, c son proporcionales a los números 7, 5 y 6 respectivamente.
Si: $a + b + c = 12 \text{ u}$, calcular las medidas de a, b y c. Resp. 4,67; 3,33; 4 u.

68.

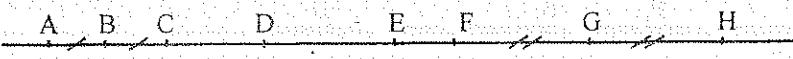


H) $AP = \frac{PD}{3}$

$BD - 3AB = 24 \text{ u}$.

T) $BP = ?$ Resp. 6 u.

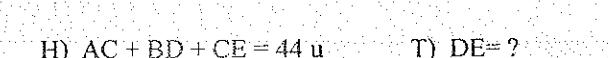
69.



T) $BG = \frac{AD + CE + DF + EH}{2}$

A B C D E

70.



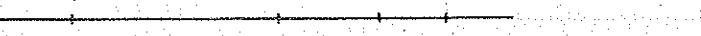
H) $AC + BD + CE = 44 \text{ u}$

$AE = 25 \text{ u}$.

$DE = 2AB$

T) $DE = ?$ Resp. 4 u.

71.



H) $AB = \frac{AC + CD}{2}$

$BD^2 - 2BD + 1 = 0$

T) $AB = ?$ Resp. 1 u.

72. Dados los puntos colineales $A_0, A_1, A_2, \dots, A_n$; si:

$A_0A_1 = a$

$A_1A_2 = 1$

$A_2A_3 = 1/a$, donde a es un número real. Hallar A_0A_n . Resp. $a^2/(a-1)$

73. A, B, C, D y E son puntos colineales tales que: $2AB = 3BC = 4CD = 5DE$ y $AE + BD = 56$. Hallar AB.
Resp. 15 u.

74. A, B, C, D, E, F, G y H son puntos colineales tales que los segmentos CF, BG y AH son proporcionales a los números 12, 20 y 30 respectivamente, y $AD + BE + CF + DG + EH = 620 \text{ u}$. Hallar CF; BG y AH.
Resp. 120; 200; 300 u.

75. A, B, C, D, E y F son puntos colineales tales que: $CD = 8$; $AF = 28$; $AB = EF$ y $BC = DE$. Hallar AD.
Resp. 18 u.

76.



H) $AC = \frac{9}{4}CD$; $AB = \frac{7}{8}CD$; $BC = \frac{33}{2}$

T) $AD = ?$ Resp. 39 u.

77.



H) $CD = 2EF$
 $AC = CE$
 $BD = DF$

T) $AB = 3EF$

78.



$$H) \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$$

$$T) \frac{2}{AC} - \frac{2}{BD} = \frac{1}{AB} - \frac{1}{CD}$$

79.

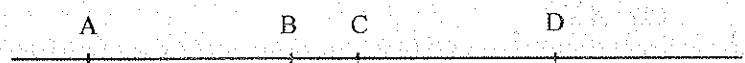


$$H) AM = MC$$

$$T) MN = \frac{AB + CD}{2}$$

$$BN = ND$$

80.



$$H) \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$$

$$T) CD = ?$$

Resp. 8 u.; 12 u.

$$AD = 24 \text{ u.}$$

$$BC = 4 \text{ u.}$$

81. A, B, C, D y E son puntos colineales tales que: $\frac{BC}{CE} = \frac{AB}{AE}$; DE = 6 u; CD = 4 u y BD = DE. Hallar AC.

Resp. 5 u.

2.12.1. EJERCICIOS RESUELTOS

21.



$$PB \times BQ = 28 \text{ u.}$$

$$BQ - PB = 7 \text{ u.}$$

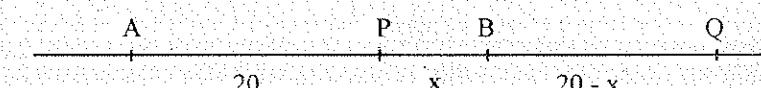
$$2 \text{ ecuaciones} \Rightarrow BQ^2 - 7 BQ - 28 = 0$$

$$\therefore BQ = 9,84 \text{ u. } //$$

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{QB} \Rightarrow \frac{AB - 2,84}{2,84} = \frac{AB + 9,84}{9,84}$$

$$\therefore AB = 8 \text{ u. } //$$

24.



$$AP = PQ = 20 \text{ u.}$$

$$AP \times BQ = PB \times AQ \Rightarrow 20(20 - x) = 40x$$

$$\therefore x = PB = 6,6 \text{ u. } //$$

35.

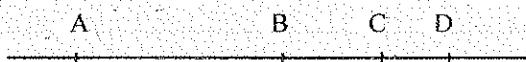


$$AB = AP + PB$$

$$PD = PB + 2 AB \quad \therefore PD = PB + 2(AP + PB)$$

$$PD - 2 AP = 3 PB \Rightarrow PB = \frac{PD - 2AP}{3} \quad //$$

42.



$$AB \times CD = 2 AD \times BC$$

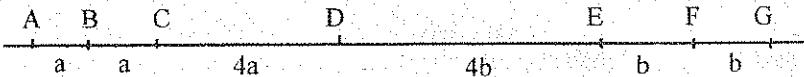
$$AB \times (AD - AC) = 2 AD \times (AC - AB)$$

$$AB \times AD - AB \times AC = 2 AD \times AC - 2 AD \times AB$$

$$3AB \times AD = 2AD \times AC + AB \times AC$$

$$\Rightarrow \frac{2}{AB} + \frac{1}{AD} = \frac{3}{AC} \quad //$$

47.



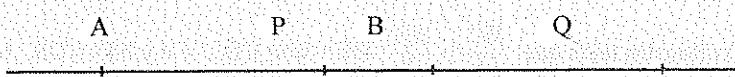
$$AB = BC = a \quad \therefore CD = 4a$$

$$EF = FG = b \quad \therefore DE = 4b$$

$$AB + FG = a + b = 4,5 \text{ u.}$$

$$BF = a + 4a + 4b + b = 5(a + b) = 5(4,5) = 22,5 \text{ u.} \quad //$$

59.



$$T_1) \quad \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{BQ}$$

$$T_2) \quad \frac{AP}{PB} = \frac{AQ}{BQ}$$

$$\frac{AB - PB}{PB} = \frac{AB + BQ}{BQ}$$

$$AP \times BQ = AQ \times PB = (AB + BQ) \times (PQ - BQ)$$

$$\frac{AB}{PB} - 1 = \frac{AB}{BQ} + 1$$

$$AP \times BQ = AB \times PQ + BQ \times PQ - AB \times BQ - BQ^2$$

$$AB \cdot \frac{1}{PB} - \frac{1}{QB} = 2$$

$$AP \times BQ = AB \times PQ + BQ \times (PQ - AB - BQ)$$

$$\therefore \frac{1}{PB} - \frac{1}{QB} = \frac{2}{AB}$$

$$AP \times BQ = AB \times PQ - AP \times BQ$$

$$2AP \times BQ = AB \times PQ$$

$$\therefore AB = \frac{2AP \times BQ}{PQ}$$

72.



$$AoAn = (a + 1 + 1/a + 1/a^2 + \dots)$$

$$AoAn - a = (1 + 1/a + 1/a^2 + \dots)$$

$$a(AoAn - a) = a(1 + 1/a + 1/a^2 + \dots) = AoAn$$

$$aAoAn - a^2 = AoAn$$

$$\therefore AoAn = a^2/(a - 1) \quad //$$

UNIDAD 3

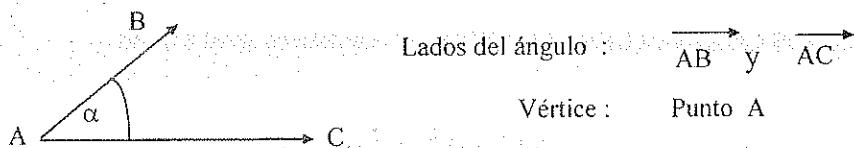
3. ÁNGULOS

3.1. DEFINICIÓN

Es la figura geométrica que está formada por dos rayos que tienen el mismo origen.

Dos rectas no paralelas en un mismo plano determinan un ángulo.

3.2. REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y ELEMENTOS



3.3. DENOMINACIÓN

1. Por la letra del vértice entre las otras dos : $\angle BAC$, \widehat{BAC}

2. Por la letra del vértice : $\angle A$, \widehat{A}

3. Por una letra, símbolo o número en el ángulo : $\angle \alpha$, $\widehat{\alpha}$

3.4. UNIDADES DE MEDIDA

RADIÁN (rad.): Es la medida de un ángulo, cuya longitud del arco subtendido es igual al radio del círculo.

GRADO SEXAGESIMAL: Si a una revolución completa se la divide en 360 partes de igual medida, a cada una de estas partes iguales se denomina grado. ($^{\circ}$).

$$1 \text{ REVOLUCIÓN} = 360^{\circ} = 2\pi \text{ rad. } (\pi = 3.14159265\dots)$$

Los submúltiplos del grado sexagesimal son el minuto y el segundo.

$$1 \text{ minuto (1')} = 1^{\circ} / 60 ; \quad 1 \text{ segundo (1'')} = 1' / 60$$

CUADRO DE EQUIVALENCIAS PARA ÁNGULOS SEXAGESIMAL RADIAN

360°	2π
270°	$3/2\pi$
180°	π
90°	$\pi/2$
60°	$\pi/3$
45°	$\pi/4$
30°	$\pi/6$

3.5. MEDIDA DE UN ÁNGULO

Es un número que representa las veces que está contenida la unidad de medida en el ángulo.

3.6. CONGRUENCIA DE ÁNGULOS

Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida, así :

$$m \angle A = \pi/3 \text{ rad}$$

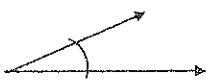
$$m \angle B = \pi/3 \text{ rad}$$

$$m \angle A = m \angle B \Rightarrow \angle A \cong \angle B$$

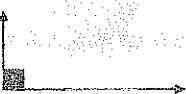
3.7. CLASES DE ÁNGULOS

3.7.1. POR SU MEDIDA

1. **AGUDO.** Su medida es menor a $\pi/2$ rad



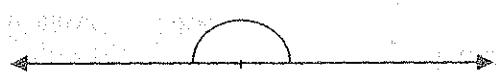
2. **RECTO.** Su medida es igual a $\pi/2$ rad



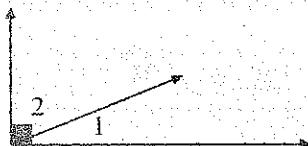
3. **OBTUSO.** Su medida es mayor a $\pi/2$ rad
y menor a π rad.



4. **ÁNGULO DE LADOS COLINEALES (LLANO).** Su medida es igual a π rad.

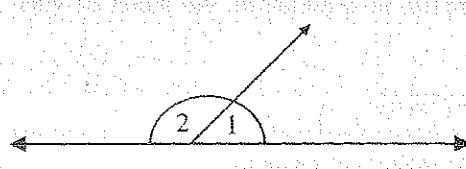


5. **ÁNGULOS COMPLEMENTARIOS.** Son dos ángulos cuya suma de medidas es igual a $\pi/2$ rad. A cada ángulo se lo llama el complemento del otro.



$$m\angle 1 + m\angle 2 = \pi/2 \text{ rad.}$$

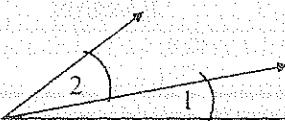
6. **ANGULO SUPLEMENTARIO.** Son dos ángulos cuya suma de medidas es igual a π rad. A cada ángulo se lo llama el suplemento del otro.



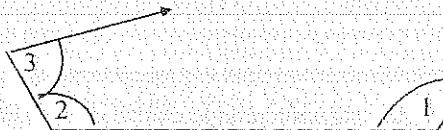
$$m\angle 1 + m\angle 2 = \pi \text{ rad.}$$

3.7.2. POR SU POSICIÓN

1. **ADYACENTES.** Son dos ángulos que tienen el mismo vértice y un lado común.

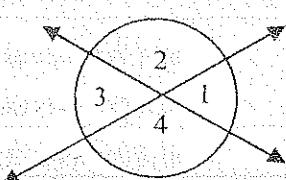


2. **CONSECUKTIVOS.** Son los ángulos que tienen un lado común y se forman siguiendo un mismo sentido.

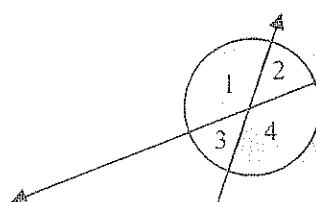


3. **OPUESTOS POR EL VÉRTICE.** Son dos ángulos no adyacentes, formados cuando dos rectas se intersecan.

$$\begin{aligned} &41 \text{ y } 43 \\ &42 \text{ y } 44 \end{aligned}$$



4. ÁNGULOS FORMADOS EN DOS RECTAS CORTADAS POR UNA TRANSVERSAL.



a) INTERNOS : $\angle 3, \angle 4, \angle 5, \angle 6$

b) EXTERNOS : $\angle 1, \angle 2, \angle 7, \angle 8$

c) ALTERNOS INTERNOS : $\angle 3$ y $\angle 6$
 $\angle 4$ y $\angle 5$

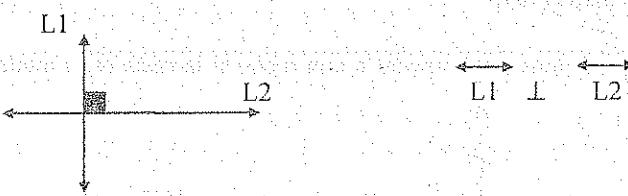
d) ALTERNOS EXTERNOS : $\angle 1$ y $\angle 8$
 $\angle 2$ y $\angle 7$

e) CORRESPONDIENTES :

$\angle 1$ y $\angle 5$; $\angle 2$ y $\angle 6$
 $\angle 3$ y $\angle 7$; $\angle 4$ y $\angle 8$

3.8. RECTAS PERPENDICULARES

Dos rectas son perpendiculares si, y sólo si, se intersecan formando un ángulo recto.



3.9. PERPENDICULAR DE UN PUNTO A UNA RECTA

Es el segmento trazado desde el punto hasta la recta y forma con ella un ángulo de $\pi/2$ rad. PP'

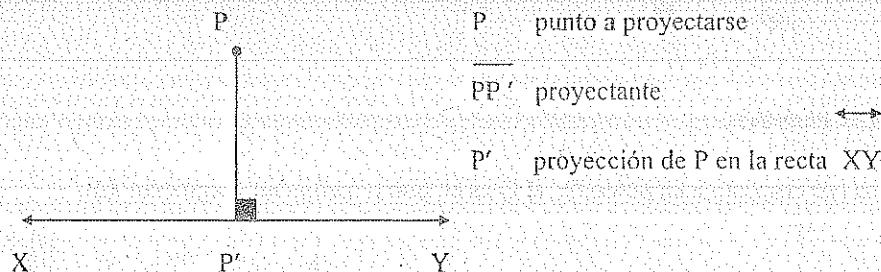
3.10. DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA

Es la longitud del segmento perpendicular del punto a la recta. PP'

3.11. PROYECCIÓN ORTOGONAL

3.11.1. DE UN PUNTO SOBRE UNA RECTA

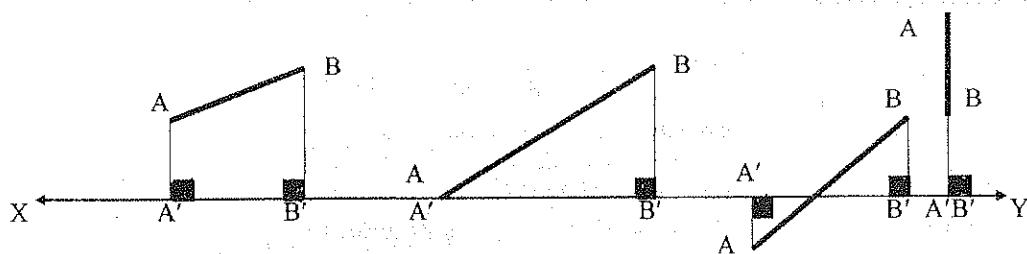
Es el pie de la perpendicular trazada por dicho punto a la recta.



3.11.2. DE UN SEGMENTO SOBRE UNA RECTA

Es el segmento comprendido entre las proyecciones de los puntos extremos del segmento a proyectarse.

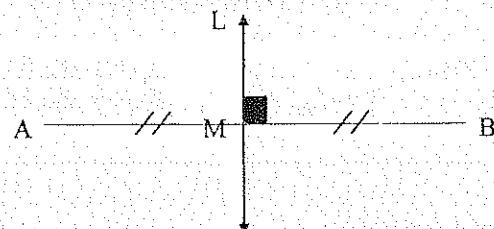
$A'B'$ proyección del segmento AB en la recta XY .



3.12. MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO

Es la recta perpendicular trazada por el punto medio de un segmento.

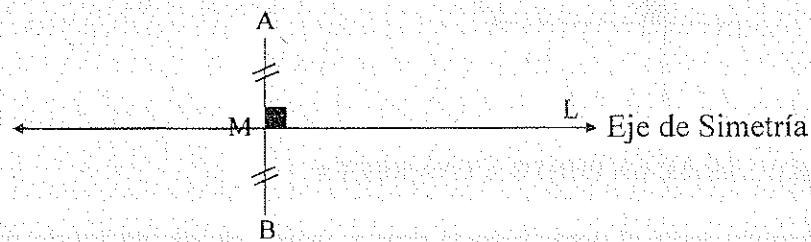
$$\begin{aligned}
 & AM = MB \\
 \iff & L \perp AB \\
 \iff & L \text{ Mediatriz de } AB
 \end{aligned}$$



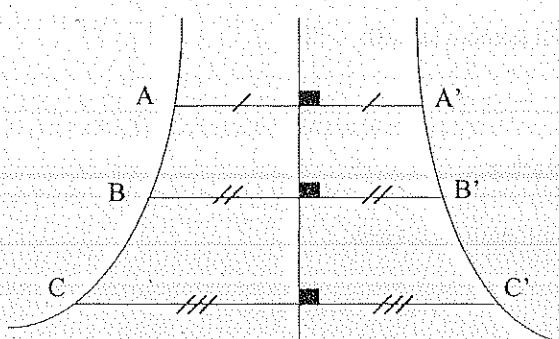
3.13. SIMETRÍA

3.13.1. CON RESPECTO A UNA RECTA

Se dice que dos puntos A y B son simétricos con respecto a una recta, si la recta es la mediatriz del segmento AB.

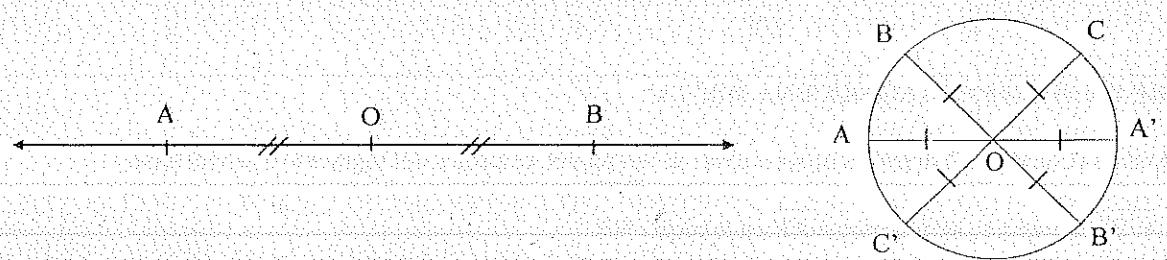


Una figura geométrica es simétrica con respecto a una recta, si cada uno de sus puntos forma parte de un par de puntos simétricos con respecto a la recta.



3.13.2. CON RESPECTO A UN PUNTO

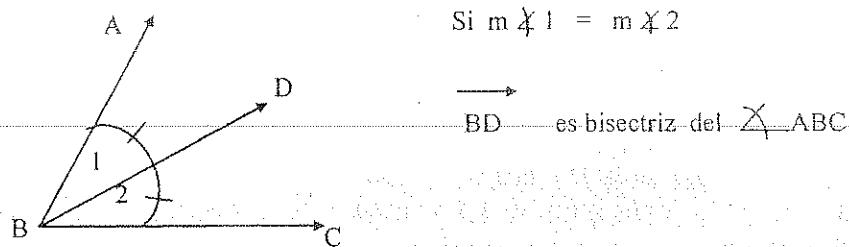
Dos puntos A y B son simétricos con respecto a un punto O, si O es el punto medio del segmento AB.



Una figura geométrica es simétrica con respecto a un punto O, si cada uno de sus puntos forma parte de un par de puntos simétricos con respecto a O.

3.14. BISECTRIZ

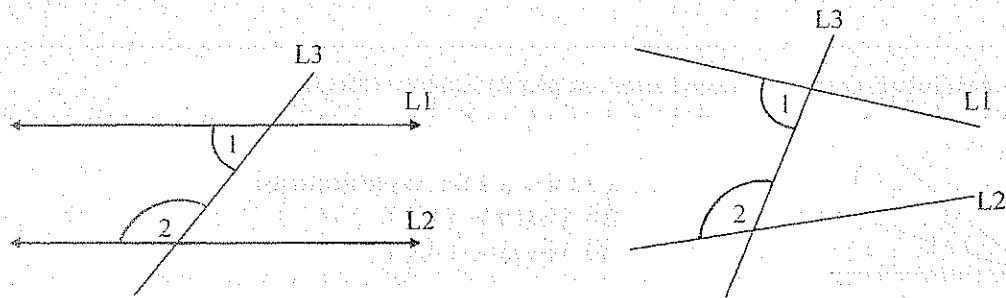
Es el rayo que divide a un ángulo dado en dos ángulos de igual medida.



3.15. PROPIEDADES

POSTULADO

Si en un plano, dos rectas son cortadas por una transversal, y si la suma de las medidas de los ángulos internos formados de un mismo lado es igual a π rad., las dos rectas son paralelas; caso contrario, las dos rectas se intersecan en un punto.



Si: $m \angle 1 + m \angle 2 = \pi$ rad.

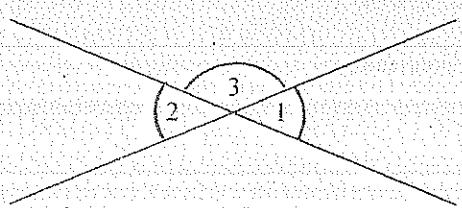
$$\Rightarrow L_1 \parallel L_2$$

Si: $m \angle 1 + m \angle 2 \neq \pi$ rad.

$$\Rightarrow L_1 \text{ y } L_2 \text{ se intersecan}$$

TEOREMA # 1.

Los ángulos opuestos por el vértice, son congruentes.



H) $\angle 1 \cong \angle 2$ opuestos por el vértice

T) $\angle 1 \cong \angle 2$

$$D) m \angle 1 + m \angle 3 = \pi \text{ rad}$$

$$m \angle 2 + m \angle 3 = \pi \text{ rad}$$

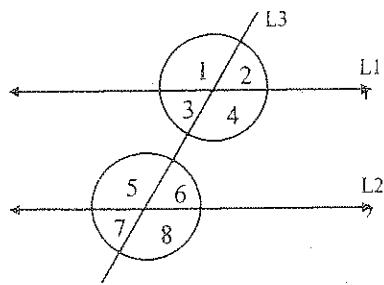
$$m \angle 1 + m \angle 3 = m \angle 2 + m \angle 3$$

$$m \angle 1 = m \angle 2$$

$$\angle 1 \cong \angle 2 \quad //$$

TEOREMA # 2.

Los ángulos alternos internos, alternos externos y correspondientes, formados en dos rectas paralelas cortadas por una transversal, son congruentes.



H) $\overleftrightarrow{L_1} \parallel \overleftrightarrow{L_2}$

T_a) $m\angle 3 \cong m\angle 6$

T_b) $m\angle 1 \cong m\angle 8$

T_c) $m\angle 1 \cong m\angle 5$

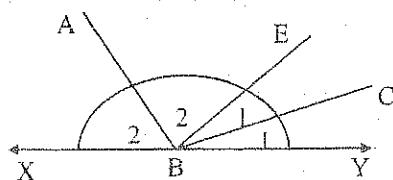
D_a) $m\angle 3 + m\angle 5 = \pi \text{ rad}$
 $m\angle 5 + m\angle 6 = \pi \text{ rad}$
 $m\angle 3 + m\angle 5 = m\angle 5 + m\angle 6$
 $m\angle 3 = m\angle 6$
 $\Rightarrow \angle 3 \cong \angle 6 \text{ //}.$

D_b) $m\angle 1 + m\angle 3 = \pi \text{ rad}$
 $m\angle 6 + m\angle 8 = \pi \text{ rad}$
 $m\angle 1 + m\angle 3 = m\angle 6 + m\angle 8$
 $m\angle 3 = m\angle 6$
 $m\angle 1 = m\angle 8$
 $\Rightarrow \angle 1 \cong \angle 8 \text{ //}.$

D_c) $m\angle 1 = m\angle 8$
 $m\angle 5 = m\angle 8$
 $m\angle 1 = m\angle 5 \Rightarrow \angle 1 \cong \angle 5 \text{ //}.$

TEOREMA # 3.

Las bisectrices de dos ángulos adyacentes suplementarios son perpendiculares entre sí.



H) $\angle XBE \text{ y } \angle EBY$ suplementarios
 \overline{BA} bisectriz $\angle XBE$
 \overline{BC} bisectriz $\angle EBY$

T) $\overline{BA} \perp \overline{BC}$

D) $2m\angle 1 + 2m\angle 2 = \pi \text{ rad}$
 $m\angle 1 + m\angle 2 = \pi/2 \text{ rad}$
 $m\angle ABC = \pi/2 \text{ rad} \Rightarrow BA \perp BC \text{ //}.$

TEOREMA # 4.

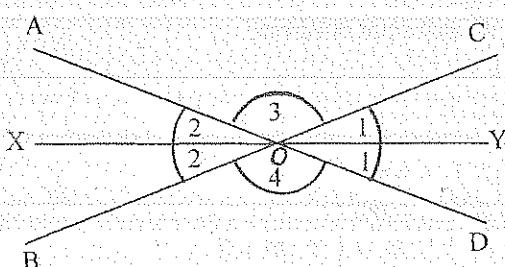
Las bisectrices de dos ángulos opuestos por el vértice, son colineales.

H) $\angle AOB$ y $\angle COD$ Opuestos por el vértice

\overline{OX} bisectriz $\angle AOB$

\overline{OY} bisectriz $\angle COD$

T) $X-O-Y$ Colineales

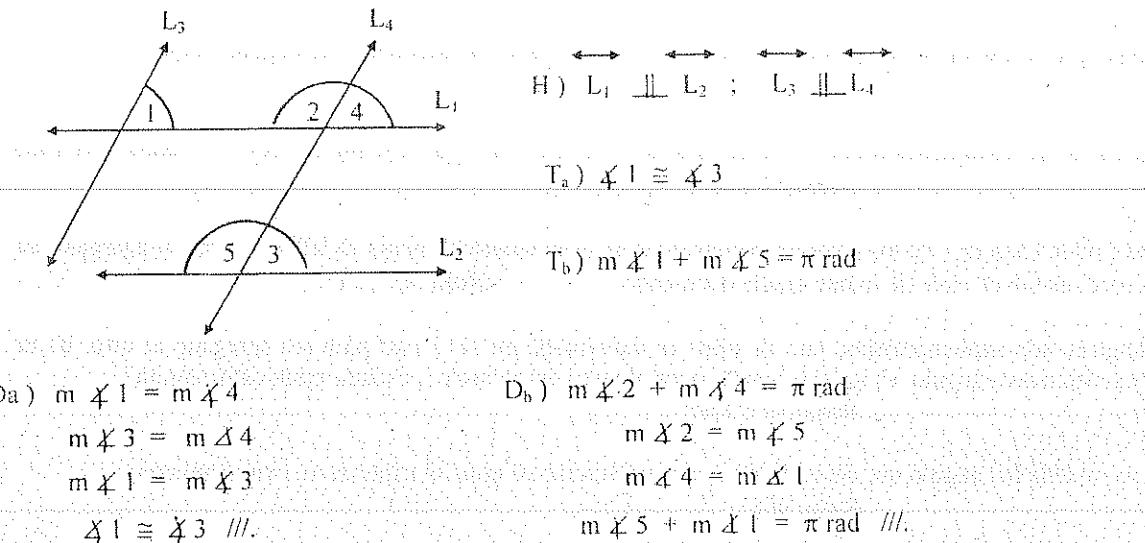


D) $2m\angle 1 + 2m\angle 2 + m\angle 3 + m\angle 4 = 2\pi \text{ rad}$
 $m\angle 3 = m\angle 4$
 $2m\angle 1 + 2m\angle 2 + 2m\angle 3 = 2\pi \text{ rad}$
 $m\angle 1 + m\angle 2 + m\angle 3 = \pi \text{ rad}$

$X-O-Y$ colineales //.

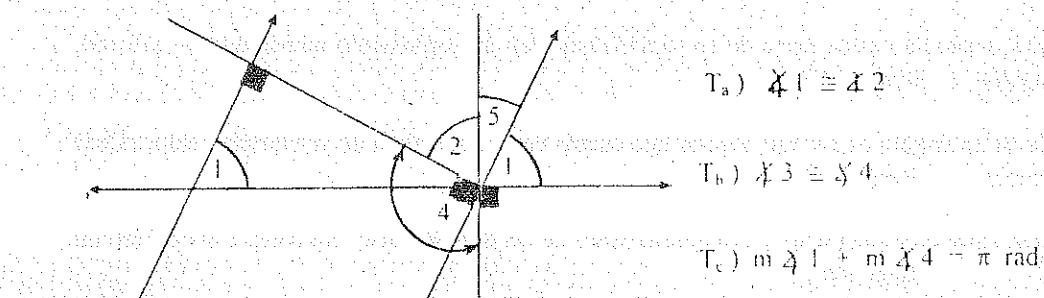
TEOREMA # 5.

Si dos ángulos tienen sus lados respectivamente paralelos, son congruentes (paralelos en el mismo sentido) o suplementarios.



TEOREMA # 6.

Si dos ángulos tienen sus lados respectivamente perpendiculares, son congruentes o suplementarios.



D_a) $m\angle 2 + m\angle 5 = \pi/2 \text{ rad}$
 $m\angle 5 + m\angle 1 = \pi/2 \text{ rad}$
 $m\angle 5 + m\angle 1 = m\angle 2 + m\angle 5$
 $m\angle 1 = m\angle 2$
 $\Rightarrow \angle 1 \cong \angle 2 \text{ //}.$

D_b) $m\angle 1 + m\angle 3 = \pi \text{ rad}$
 $m\angle 2 + m\angle 4 = \pi \text{ rad}$
 $m\angle 3 = m\angle 4$
 $\Rightarrow \angle 3 \cong \angle 4 \text{ //}.$

D_c) $m\angle 1 + m\angle 3 = \pi \text{ rad}$
 $m\angle 3 = m\angle 4$
 $\Rightarrow m\angle 1 + m\angle 4 = \pi \text{ rad} \text{ //}.$

3.16. EJERCICIOS

1.- Uno de los ángulos complementarios, aumentado en $\pi/6$ rad. es igual al otro. ¿Cuánto mide cada ángulo?
 Resp. $30^\circ; 60^\circ$

2.- La diferencia de dos ángulos suplementarios es $\pi/3$ rad. Hallar el complemento del ángulo menor.
 Resp. 30°

3.- Dos ángulos son complementarios, y uno de ellos es $\pi/10$ rad. más, que el triple del otro. ¿Cuánto mide cada ángulo?
 Resp. $72^\circ; 18^\circ$

4.- ¿Cuánto mide cada uno de los ángulos suplementarios, si quitando al menor de ellos $\pi/9$ rad. y agregándose al mayor, éste resulta el triple de lo que queda del menor.
 Resp. $65^\circ; 115^\circ$

5.- Dos ángulos son suplementarios; uno de ellos es disminuido en $\pi/12$ rad. para ser agregado al otro, de tal manera que éste nuevo ángulo, es igual a cuatro veces el resto del primero. ¿Cuánto mide cada ángulo?
 Resp. $51^\circ; 129^\circ$

6.- Hallar la medida del ángulo que disminuido en su suplemento es igual al triple de su complemento.
 Resp. 90°

7.- Uno de los ángulos suplementarios es los $3/5$ del otro ángulo. ¿Cuánto mide cada ángulo?
 Resp. $67.5^\circ; 112.5^\circ$

8.- De dos ángulos complementarios, los $4/3$ de uno de ellos más la sexta parte del otro forman un ángulo recto. ¿Cuánto mide cada ángulo?
 Resp. $64.29^\circ; 25.71^\circ$

9.- ¿Cuánto mide un ángulo que es igual a su suplemento? Resp. 90°

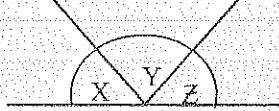
10.- Los $4/7$ de un ángulo menos la cuarta parte de su suplemento, dan su suplemento aumentado en $\pi/6$ rad. ¿Cuánto mide el ángulo? Resp. 140°

11.- Dos veces la medida de un ángulo es $\pi/6$ rad. menos que cuatro veces la medida de su complemento. ¿Cuál es la medida del ángulo? Resp. 55°

12.- ¿Cuál es la diferencia entre el suplemento y el complemento de un ángulo que equivale a los $3/7$ de un ángulo recto? Resp. 90°

13.- El doble del complemento de un ángulo más el triple de su suplemento es 500° . Hallar la medida del ángulo. Resp. 44°

14.- Los ángulos X, Y, Z son proporcionales a los números $3, 5$ y 7 . Hallar el ángulo Z .



Resp. 84°

15.- Calcular el valor de dos ángulos suplementarios, de modo que, si al quíntuplo del menor se le disminuye la mitad del mayor, se obtiene el triple del menor aumentado en $\pi/18$ rad. Resp. $40^\circ, 140^\circ$

16.- Dos ángulos suplementarios están en la razón $5/4$. Hallar sus medidas. Resp. $100^\circ; 80^\circ$

17.- Si al suplemento del suplemento de un ángulo se le aumenta el complemento del complemento del mismo ángulo, resulta el cuádruplo del complemento del mismo ángulo. Hallar el ángulo. Resp. 60°

18.- La medida de uno de los ángulos de un par de ángulos complementarios, es el doble de la medida del otro mas $\pi/20$. Encontrar la medida de cada ángulo. Resp. $27^\circ; 63^\circ$

19.- La diferencia entre los $5/6$ del suplemento de un ángulo y el complemento de la mitad del ángulo excede en 5° al doble del complemento del ángulo. Calcular la medida del ángulo. Resp. 75°

- 20.- El duplo del suplemento de un ángulo es igual al suplemento de la diferencia entre el suplemento y el complemento del ángulo. Calcular la medida del ángulo. Resp. 135°

21.- La suma del complemento de un $\frac{4}{3}\alpha$ con el suplemento de su ángulo doble, es igual a $3/2$ del complemento de un $\frac{4}{3}\beta$. Si: $m\frac{4}{3}\alpha - m\frac{4}{3}\beta = 3\pi/20$ rad. Calcular el complemento del ángulo $\frac{4}{3}\alpha$. Resp. 27°

22.- Dos ángulos adyacentes complementarios están en la razón de 2 a 3. Hallar el valor del ángulo formado por la bisectriz del ángulo menor con el lado no común. Resp. 72°

23.- La suma del suplemento de un ángulo con el complemento de su ángulo doble es mayor en 110° al tercio del ángulo. Hallar la medida del ángulo. Resp. 48°

24.- Si el suplemento del complemento de un ángulo más el complemento del suplemento de su ángulo doble es igual al doble del complemento del ángulo. Encontrar la medida del ángulo. Resp. 36°

25.- La sexta parte del suplemento del complemento de un ángulo es igual a la mitad de la cuarta parte del suplemento del complemento de 50° . Hallar la medida del ángulo. Resp. 15°

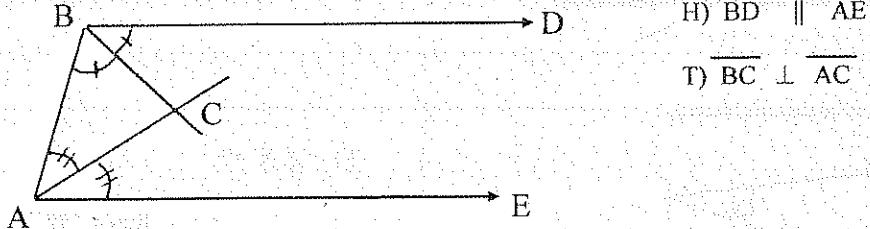
26.- Los ángulos X BAC agudo y X CAD recto, son adyacentes. Determinar la medida del ángulo formado por

las bisectrices de los ángulos $\angle BAC$ y $\angle BAD$. Resp. 45°

27.

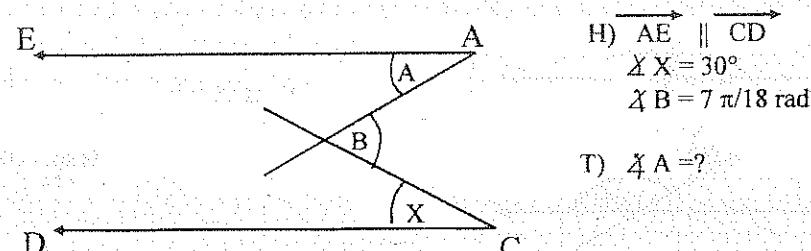
B → D H) BD || AE

- 27 -



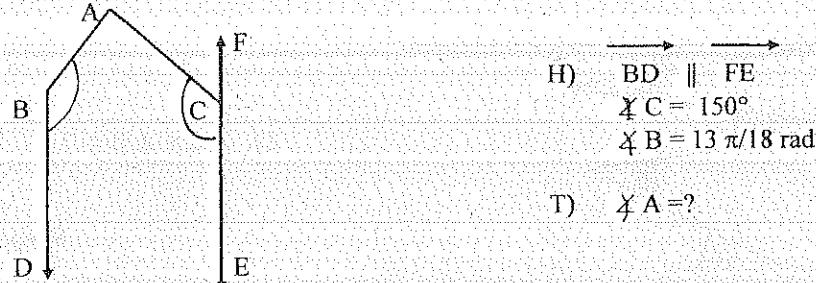
28.- En un ángulo llano $\angle AOD$ se trazan los ángulos adyacentes $\angle AOB$, $\angle BOC$ y $\angle COD$. Si las bisectrices de los ángulos $\angle AOB$ y $\angle COD$ forman un ángulo de 130° , hallar la medida del ángulo $\angle BOC$. Resp. 80°

-29-



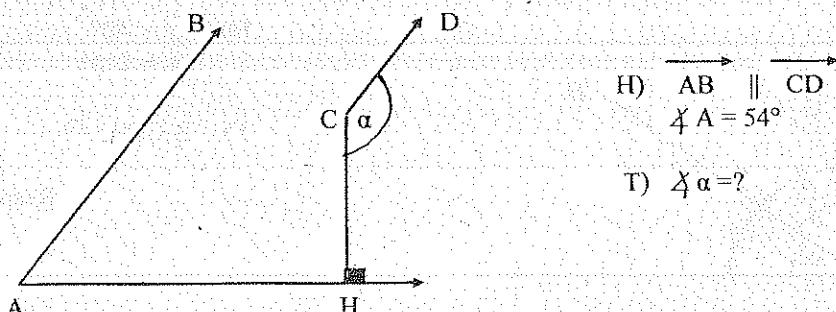
T) $\Delta A = ?$ Resp. 40°

30



T) $\nabla A = ?$ Resp. 80°

31



T) $x_0 \equiv ?$

32.-

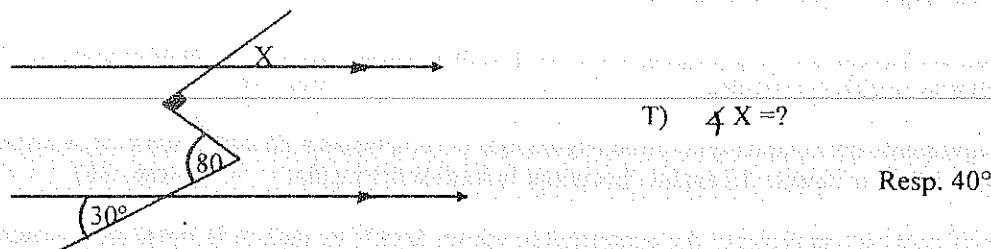


$$\text{H) } \frac{\overrightarrow{BA}}{\overrightarrow{BC}} \parallel \frac{\overrightarrow{DC}}{\overrightarrow{DE}}$$

$$\angle B = 3\pi/4 \text{ rad}$$

$$\text{T) } \angle I = ? \quad \text{Resp. } 45^\circ$$

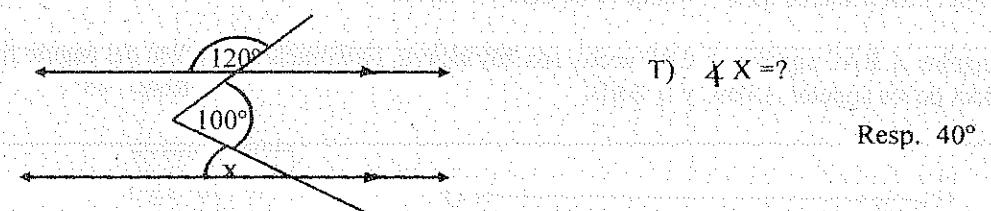
33.



$$\text{T) } \angle X = ?$$

$$\text{Resp. } 40^\circ$$

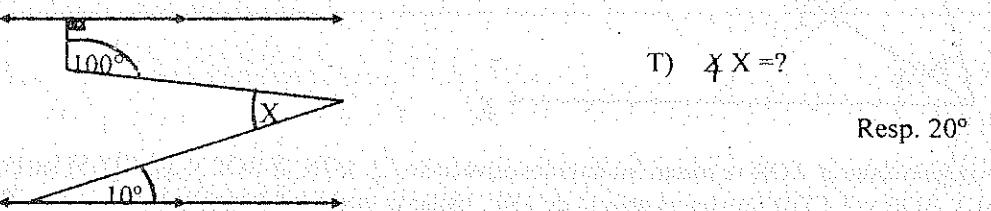
34.



$$\text{T) } \angle X = ?$$

$$\text{Resp. } 40^\circ$$

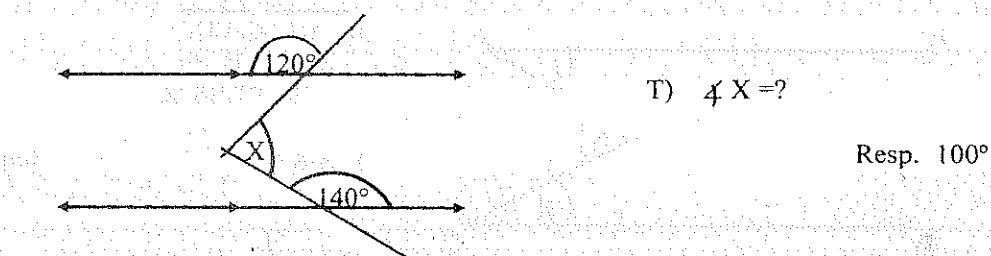
35.



$$\text{T) } \angle X = ?$$

$$\text{Resp. } 20^\circ$$

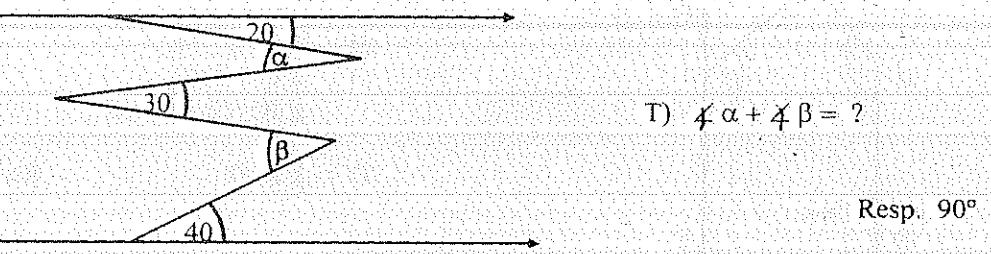
36.



$$\text{T) } \angle X = ?$$

$$\text{Resp. } 100^\circ$$

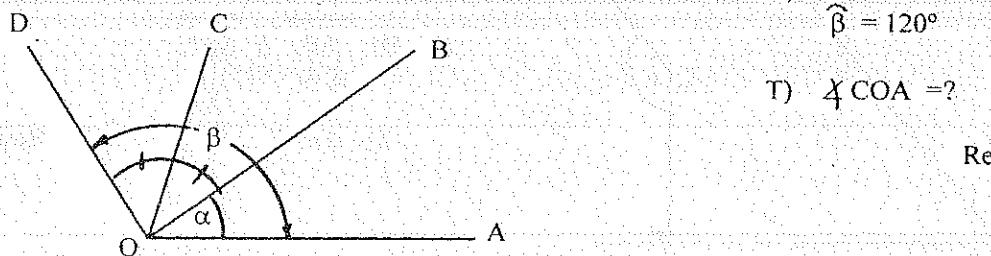
37.



$$\text{T) } \angle \alpha + \angle \beta = ?$$

$$\text{Resp. } 90^\circ$$

38.

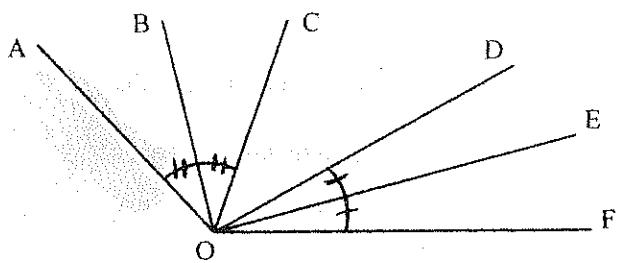


$$\text{H) } \hat{\alpha} = 40^\circ \\ \hat{\beta} = 120^\circ$$

$$\text{T) } \angle COA = ?$$

$$\text{Resp. } 80^\circ$$

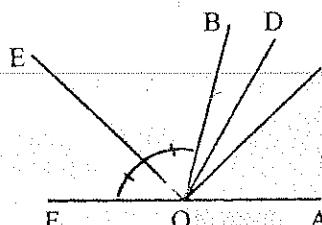
39.



- H) $\angle AOD = 100^\circ$
T) $\angle BOE = ?$

Resp. 80°

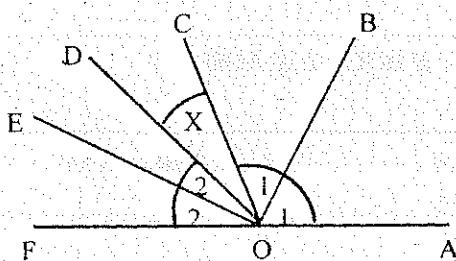
40.



- H) $\angle COA = \angle COB$
 $\angle EOB = 56^\circ$
 $\angle DOA = \angle EOF$

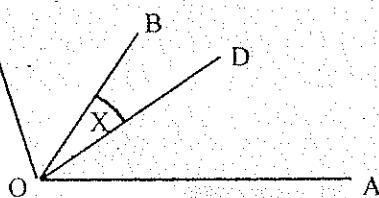
T) $\angle DOC = ?$ Resp. 22°

41.



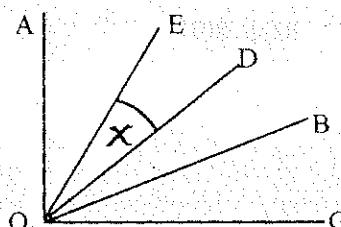
- H) $\angle EOF = 5\pi/9$ rad.
T) $\angle X = ?$ Resp. 20°

42.



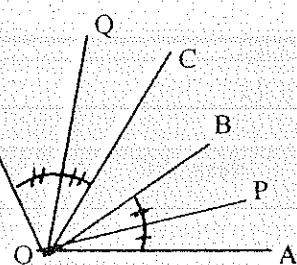
- H) $\angle AOB - \angle BOC = \pi/6$ rad
 $\angle DOA = \angle DOC$
T) $\angle X = ?$ Resp. 15°

43.



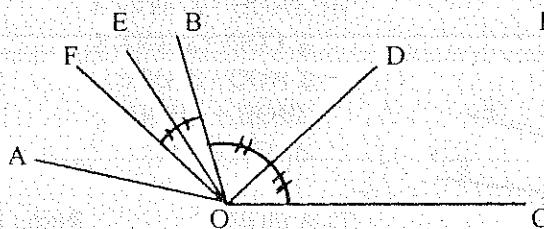
- H) $\angle AOE = \angle EOF$
 $\angle AOD = \angle DOC$
 $\angle AOC - \angle AOB = \pi/9$ rad
T) $\angle X = ?$ Resp. 10°

44.



- H) $\angle AOC = 5\pi/18$ rad
 $\angle BOD = \pi/2$ rad
T) $\angle POQ = ?$ Resp. 70°

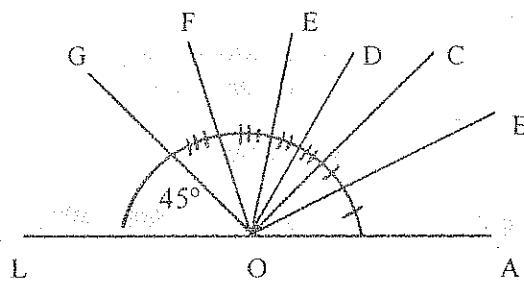
45.



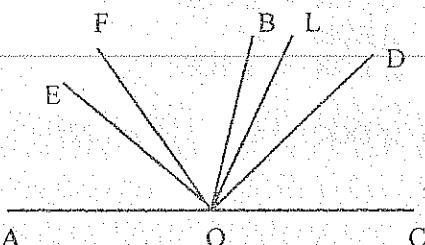
- H) $\angle FOB = \angle AOF$
 $\angle EOF = 15^\circ$
 $\angle BOC - \angle AOB = 2\pi/9$ rad
T) $\angle FOD = ?$ Resp. 80°

46. Se tienen los rayos \overrightarrow{OP} , \overrightarrow{OQ} , \overrightarrow{OT} . El ángulo formado por las bisectrices de los ángulos $\angle POT$ y $\angle POQ$ disminuido en $\frac{1}{2}$ del complemento de un $\angle X$ es igual a 4° . Determinar el $\angle X$ si la diferencia entre los ángulos $\angle POT$ y $\angle POQ$ es igual a 20° . Resp. 82°

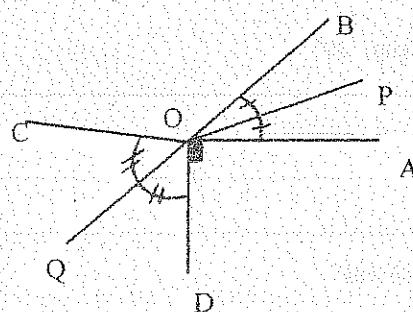
47.

H) $\angle EOF$ bisectriz $\neq \angle COL$ T) $\angle COE = ?$ Resp. 45°

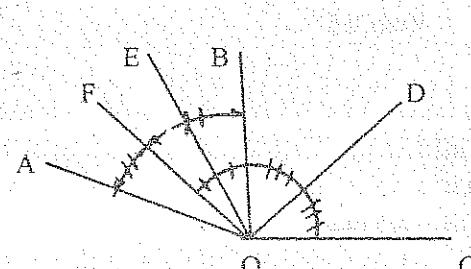
48.

H) $\angle DOC = \angle DOB$ $\angle BOE = \angle EOA$ $\angle AOF = \angle FOD$ $\angle EOL = \angle LOC$ T) $\angle FOL = ?$ Resp. 45°

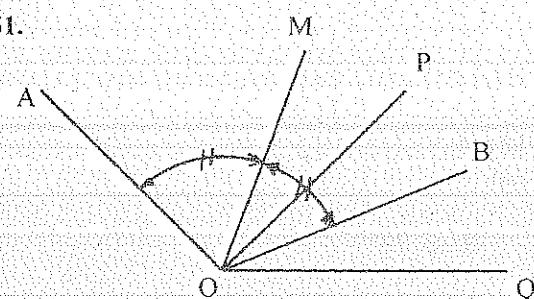
49.

H) $\angle DOA = \angle BOC = 2 \angle AOB$ T) $\angle POQ = ?$ Resp. 180° y $22,5^\circ$ $\angle POA = ?$

50.

H) $\angle 1 = 15^\circ$ $\angle BOC - \angle AOB = 2\pi/9 \text{ rad}$ T) $\angle FOD = ?$ Resp. 80°

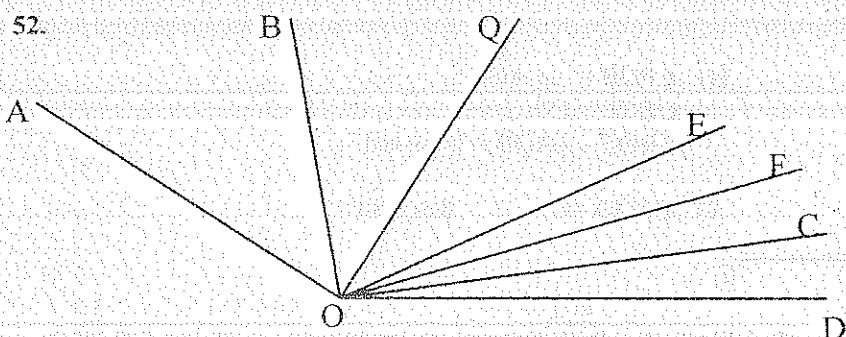
51.

H) $\angle MOP = 20^\circ$ $\angle MOQ = 80^\circ$

$$\frac{\angle AOP}{\angle POB} = \frac{\angle AOO}{\angle BOO}$$

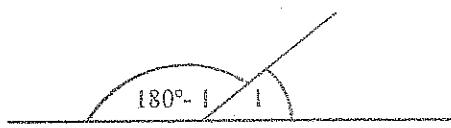
T) $\angle MOB = ?$ Resp. 40°

52.

H) $\angle AOB = \angle AOF/3$ $\angle COD = \angle FOD/3$ $\angle AOQ = \angle QOC$ $\angle BOE = \angle EOD$ $\angle AOD = 150^\circ$ T) $\angle QOE = ?$ Resp. 25°

3.17 EJERCICIOS RESUELTOS

5.



$$\text{D) } 180^\circ - \angle 1 + 15^\circ = 4(\angle 1 - 15^\circ)$$

$$\therefore \angle 1 = 51^\circ$$

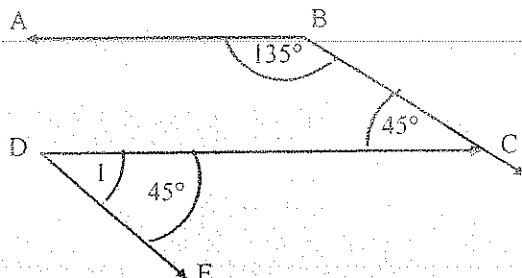
$$\angle 2 = 129^\circ$$

6.

$$\text{D) } \angle 1 - (180^\circ - \angle 1) = 3(90^\circ - \angle 1)$$

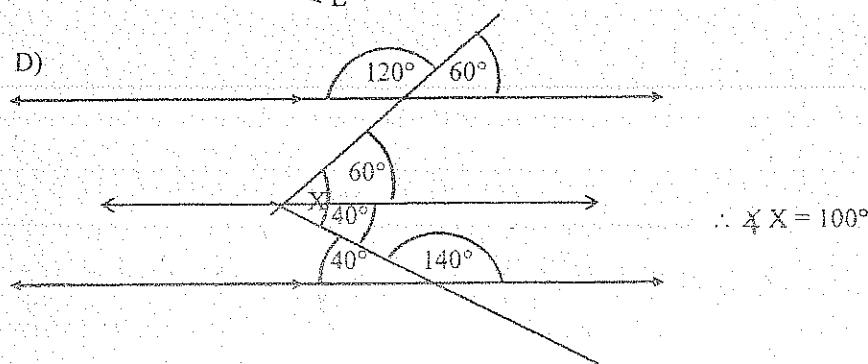
$$\therefore \angle 1 = 90^\circ$$

32. D)



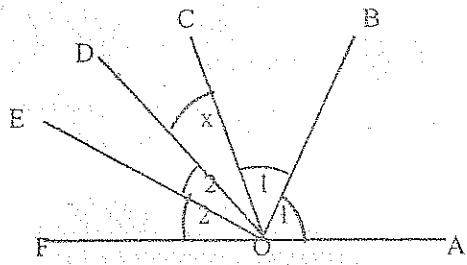
$$\therefore \angle 1 = 45^\circ$$

36. D)



$$\therefore \angle X = 100^\circ$$

41.



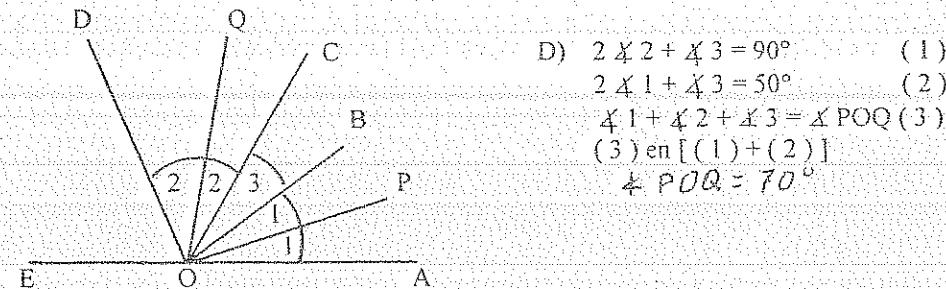
$$\text{D) } 2\angle 1 + \angle X + 2\angle 2 = 180^\circ \quad (1)$$

$$\angle 1 + \angle X + \angle 2 = 100^\circ \quad (2)$$

$$(1) - 2(2)$$

$$\therefore \angle X = 20^\circ$$

44.



$$\text{D) } 2\angle 2 + \angle 3 = 90^\circ \quad (1)$$

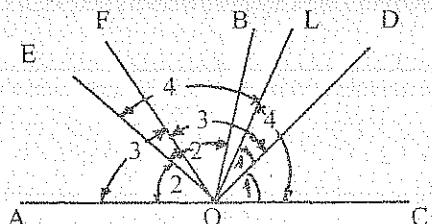
$$2\angle 1 + \angle 3 = 50^\circ \quad (2)$$

$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = \angle POQ \quad (3)$$

$$(3) \text{ en } [(1) + (2)]$$

$$\angle POQ = 70^\circ$$

48.



$$\text{D) } \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ \quad (1)$$

$$2\angle 3 + \angle 1 = 180^\circ \quad (2)$$

$$2\angle 4 + \angle 2 = 180^\circ \quad (3)$$

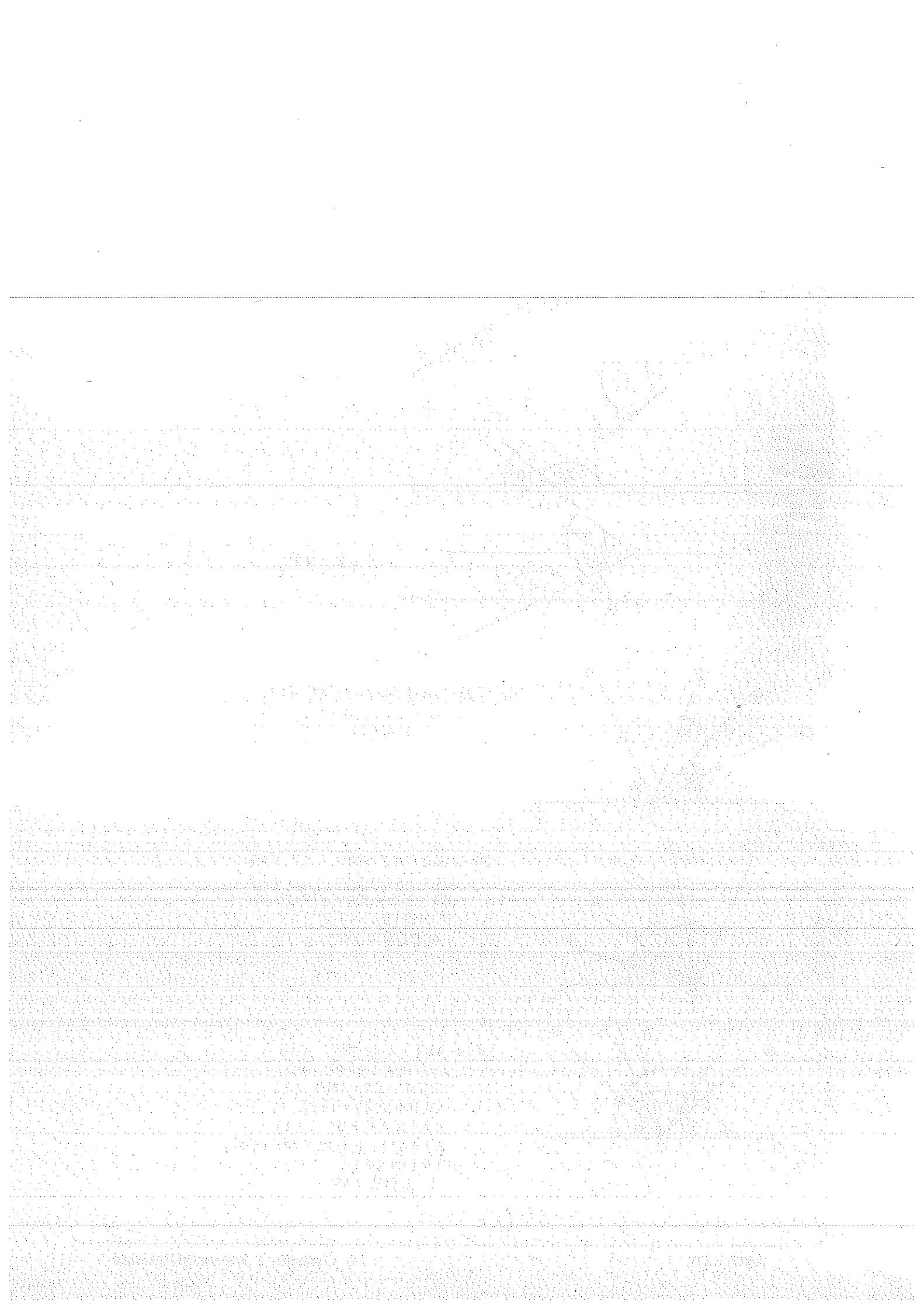
$$(1) \text{ en } [(2) + (3)]$$

$$\therefore \angle 3 + \angle 4 = 135^\circ \quad (4)$$

$$\angle 3 + \angle 4 + \angle FOL = 180^\circ \quad (5)$$

$$(4) \text{ en } (5)$$

$$\therefore \angle FOL = 45^\circ$$



UNIDAD 4

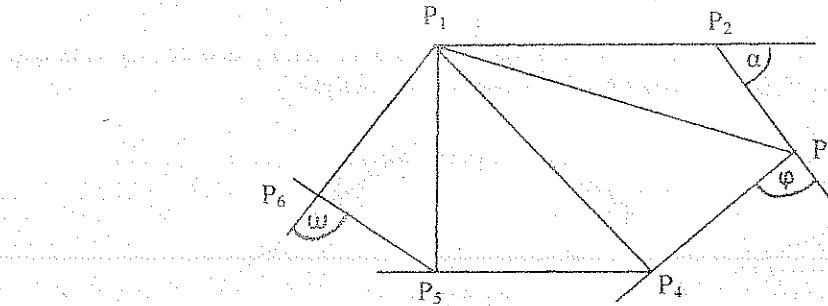
4. POLÍGONOS

4.1. DEFINICIÓN.

$P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$ son n puntos coplanares distintos ($n \geq 3$) y si al formar con estos puntos n segmentos, cumplen las siguientes condiciones :

1. Ningún par de segmentos se intersecan excepto en los puntos extremos.
2. Ningún par de segmentos con extremos comunes son colineales.

La figura geométrica formada es un polígono.



4.2. ELEMENTOS

1.- VÉRTICES. Son los n puntos coplanares dados. $P_1, P_2, P_3, \dots, P_n$

2.- LADOS. Son los segmentos que unen los puntos coplanares dados.

$$\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \overline{P_3P_4}, \overline{P_4P_5}, \dots$$

PERÍMETRO. (P). Es igual a la suma de las longitudes de los lados del polígono.

$$P = P_1P_2 + P_2P_3 + P_3P_4 + \dots$$

3.- DIAGONALES. Son los segmentos que unen dos vértices no consecutivos del polígono.

$$\overline{P_1P_3}, \overline{P_1P_4}, \overline{P_1P_5}, \dots$$

4.- ÁNGULOS INTERNOS. Son los ángulos formados por dos lados del polígono.

$$\widehat{P_1P_2P_3}, \widehat{P_2P_3P_4}, \widehat{P_3P_4P_5}, \dots$$

5.- ÁNGULOS EXTERNOS. Son los ángulos formados por un lado y la prolongación de otro lado consecutivo.

$$\angle \alpha, \angle \varphi, \angle \omega, \dots$$

4.3. DENOMINACIÓN

Por las letras de los n puntos siguiendo un mismo sentido: Polígono $P_1 P_2 P_3 \dots P_n$

4.4. CLASIFICACIÓN

1.- POR EL NÚMERO DE LADOS. Los polígonos pueden ser :

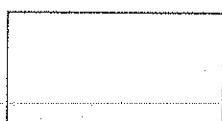
Triángulo	(3 lados)
Cuadrilátero	(4 lados)
Pentágono	(5 lados)
Hexágono	(6 lados)
Heptágono	(7 lados)

2.- POR SUS ELEMENTOS. Los polígonos pueden ser:

EQUIANGULAR. Es el polígono que tiene todos sus ángulos internos congruentes.

EQUILÁTERO. Es el polígono que tiene todos sus lados congruentes.

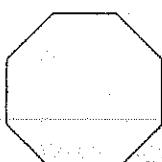
POLÍGONO REGULAR. Es aquel que a la vez es equilátero y equiángular.



EQUIANGULAR

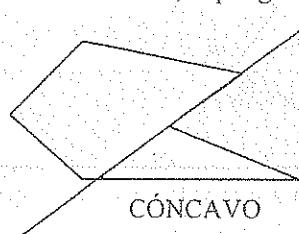


EQUILÁTERO

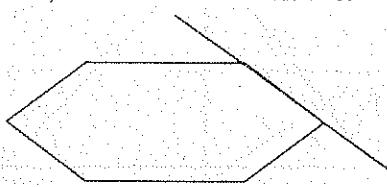


REGULAR

3.- CÓNCAVOS Y CONVEXOS. Si todos los puntos de un polígono están a un mismo lado de una recta que contiene a cualquiera de sus lados, el polígono es convexo, de lo contrario es cóncavo.



CÓNCAVO

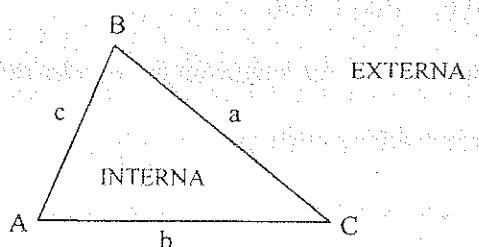


CONVEXO

4.5. TRIÁNGULO

Es la figura geométrica formada por tres segmentos, que unen tres puntos no colineales.

Todo triángulo determina en su plano dos subconjuntos: la región interna y la región externa del triángulo.



Cada lado se opone a un vértice. Los lados se representan con la letra minúscula de su vértice opuesto:

$$\overline{AB} = c, \overline{BC} = a, \overline{AC} = b$$

4.5.1. DENOMINACIÓN

Por los vértices: ΔABC

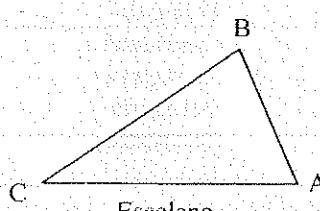
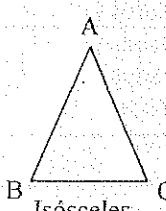
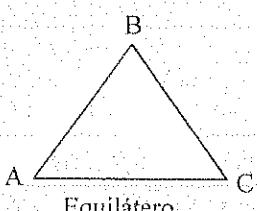
4.5.2. CLASIFICACIÓN

I.- POR SUS LADOS. Los triángulos pueden ser :

EQUILÁTERO. Si sus tres lados son congruentes. $\overline{AB} \cong \overline{BC} \cong \overline{AC}$

ISÓSCELES. Si dos de sus lados son congruentes. $\overline{AB} \cong \overline{AC}$

ESCALENO. Si sus tres lados no son congruentes.



2.- POR SUS ÁNGULOS. Los triángulos pueden ser:

EQUIÁNGULO. Si sus tres ángulos internos son congruentes. $\hat{A} \cong \hat{B} \cong \hat{C}$

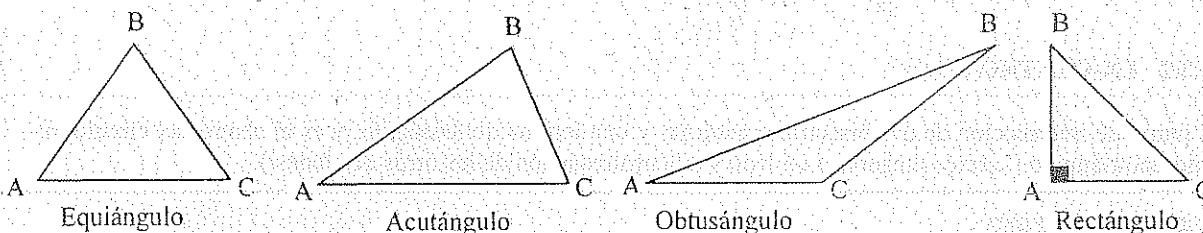
ACUTÁNGULO. Si sus tres ángulos internos son agudos.

OBTUSÁNGULO. Si uno de sus ángulos internos es obtuso.

$$\pi/2 \text{ rad} < \hat{C} < \pi \text{ rad}$$

RECTÁNGULO. Si uno de sus ángulos internos es recto. $\hat{A} = \pi/2 \text{ rad}$

Los lados que forman el ángulo recto se llaman catetos (AB y AC) y el lado opuesto al ángulo recto se llama hipotenusa (BC).



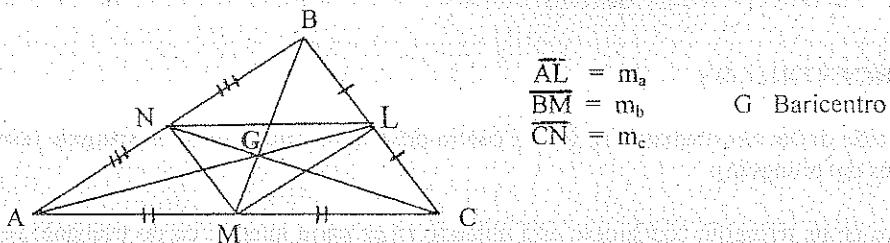
4.5.3. LÍNEAS Y PUNTOS FUNDAMENTALES

4.5.3.1. BASE

La base de un triángulo es cualquiera de sus tres lados.

4.5.3.2. MEDIANA

Es el segmento que une un vértice del triángulo y el punto medio del lado opuesto.



4.5.3.2.1 BARICENTRO (G)

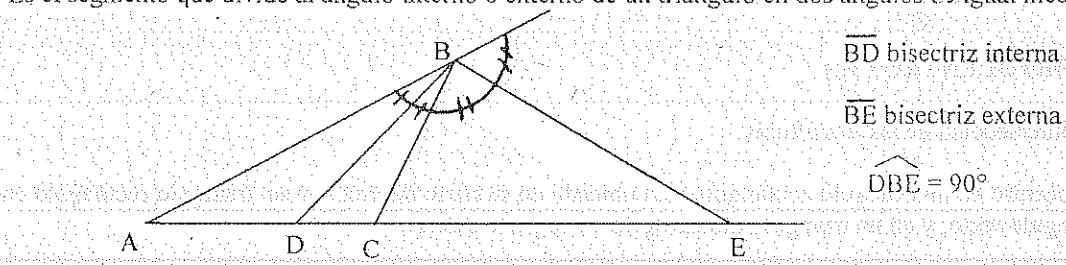
Es el punto de intersección de las tres medianas, y es el centro de gravedad del triángulo.

El baricentro siempre está ubicado en la parte interna de un triángulo.

El baricentro forma en cada mediana dos segmentos, uno doble del otro; el del vértice es el doble del otro: $AG = 2GL$; $BG = 2GM$; $CG = 2GN$.

4.5.3.3. BISECTRIZ

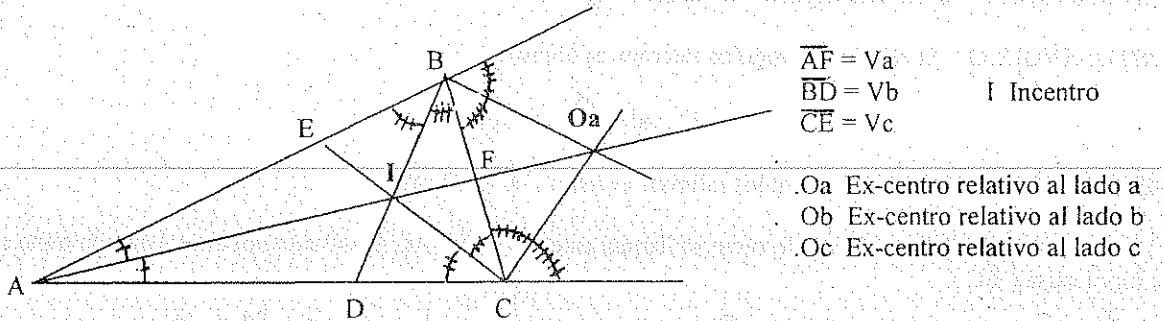
Es el segmento que divide al ángulo interno o externo de un triángulo en dos ángulos de igual medida.



4.5.3.3.1. INCENTRO (I)

Es el punto de intersección de las tres bisectrices internas y es el centro del círculo inscrito en el triángulo (círculo tangente a sus tres lados).

El incentro siempre está ubicado en la parte interna de un triángulo:

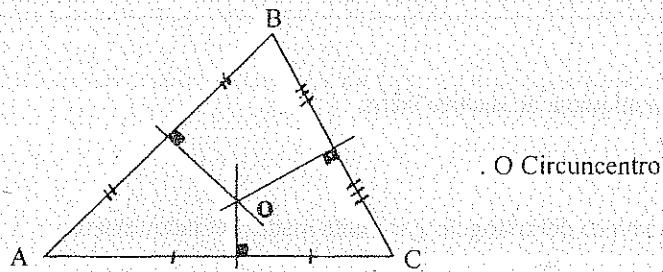


4.5.3.3.2. EX-CENTRO (Oa)

Es el punto de intersección de dos bisectrices externas y una interna del triángulo, y es el centro del círculo ex-inscrito del triángulo (círculo tangente a un lado y a la prolongación de los otros dos lados).

4.5.3.4. MEDIATRIZ

Es la recta perpendicular trazada en el punto medio de un lado del triángulo.



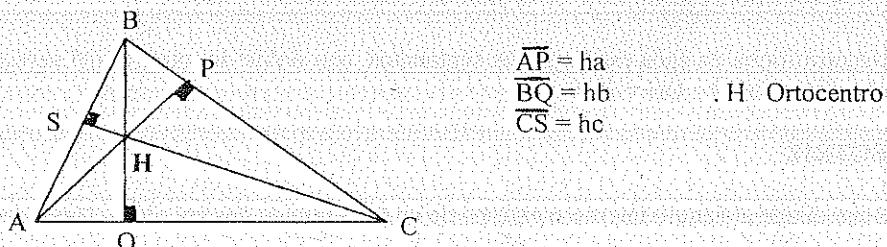
4.5.3.4.1. CIRCUNCENTRO (O)

Es el punto de intersección de las tres mediatrices, y es el centro del círculo circunscrito al triángulo (círculo que pasa por los tres vértices del triángulo).

El circuncentro en un triángulo acutángulo está ubicado en su parte interna; en un triángulo rectángulo en el punto medio de la hipotenusa; y en un triángulo obtusángulo en su parte externa.

4.5.3.5. ALTURA

Es el segmento perpendicular trazado desde un vértice del triángulo al lado opuesto o a su prolongación.



4.5.3.5.1. ORTOCENTRO (H)

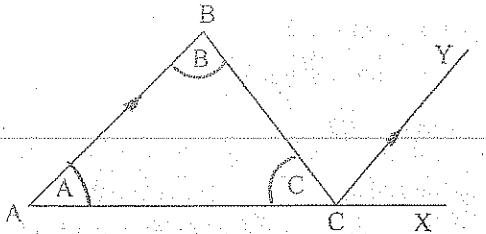
Es el punto de intersección de las tres alturas.

El ortocentro en un triángulo acutángulo está ubicado en su parte interna; en un triángulo rectángulo en el vértice del ángulo recto; y en un triángulo obtusángulo en su parte externa.

4.5.4. ÁNGULOS EN UN TRIÁNGULO

TEOREMA # 1

En un triángulo, la suma de las medidas de los ángulos internos es igual a 180° o π rad.



H) $\triangle ABC$ escaleno

$$\text{T) } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ = \pi \text{ rad}$$

D) $\overline{CY} \parallel \overline{AB}$ (construcción)

$$\widehat{XY} = \hat{A}$$

$$\widehat{YCB} = \hat{B}$$

$$\widehat{XY} + \widehat{YCB} = \widehat{BCX} = \hat{A} + \hat{B}$$

$$\widehat{BCX} + \hat{C} = 180^\circ = \pi \text{ rad}$$

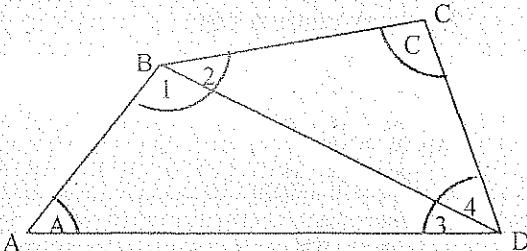
$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ = \pi \text{ rad} \quad //.$$

COROLARIOS

- 1.- Un ángulo externo de un triángulo es igual a la suma de las medidas de los ángulos internos no adyacentes, y por lo tanto mayor que cada uno de ellos.
- 2.- Un triángulo no puede tener más de un ángulo recto ni más de un ángulo obtuso.
- 3.- En un triángulo rectángulo, los ángulos agudos son complementarios.

TEOREMA # 2

La suma de los ángulos internos de un cuadrilátero es igual a 360° o 2π rad..



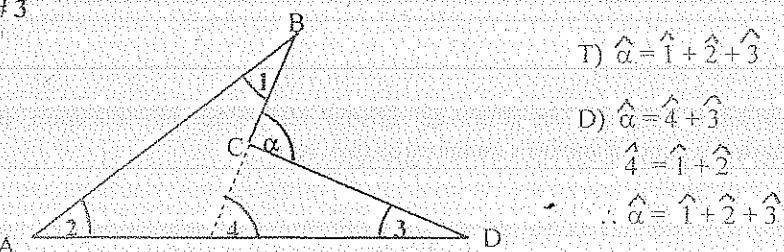
$$\text{T) } \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad.}$$

$$\text{D) } \hat{A} + \hat{1} + \hat{3} = 180^\circ = \pi \text{ rad.}$$

$$\hat{2} + \hat{C} + \hat{4} = 180^\circ = \pi \text{ rad.}$$

$$\therefore \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ = 2\pi \text{ rad.}$$

TEOREMA # 3



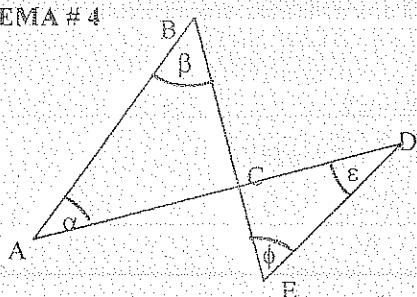
$$\text{T) } \hat{\alpha} = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3}$$

$$\text{D) } \hat{\alpha} = \hat{4} + \hat{3}$$

$$\hat{4} = \hat{1} + \hat{2}$$

$$\therefore \hat{\alpha} = \hat{1} + \hat{2} + \hat{3}$$

TEOREMA # 4



$$\text{T) } \hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{\phi} + \hat{\epsilon}$$

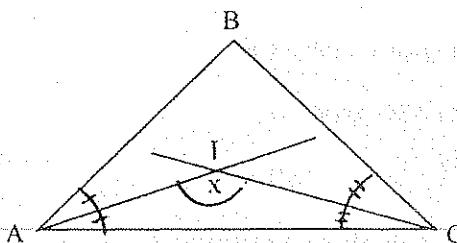
$$\text{D) } \hat{\alpha} + \hat{\beta} + \hat{ACB} = 180^\circ$$

$$\hat{\phi} + \hat{\epsilon} + \hat{ACB} = 180^\circ$$

$$\therefore \hat{\alpha} + \hat{\beta} = \hat{\phi} + \hat{\epsilon}$$

TEOREMA # 5

El ángulo formado por dos bisectrices internas de un triángulo es igual a $\pi/2$ rad más la mitad de la medida del ángulo interno no bisecado.

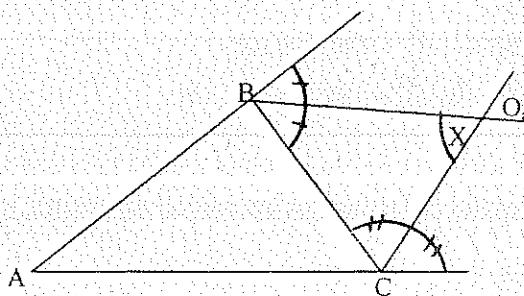


H) I Incentro del ΔABC

$$\begin{aligned} T) \quad & \hat{X} = \pi/2 + \hat{B}/2 \\ D) \quad & \hat{X} = \pi - \hat{A}/2 - \hat{C}/2 \\ & \hat{A}/2 + \hat{B}/2 + \hat{C}/2 = \pi/2 \\ \therefore \quad & \hat{X} = \pi/2 + \hat{B}/2 \end{aligned}$$

TEOREMA # 6

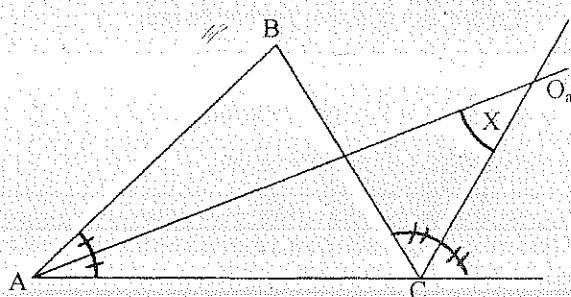
El ángulo formado por dos bisectrices externas de un triángulo, es igual a $\pi/2$ rad disminuido en la mitad del ángulo interno en el tercer vértice.



$$\begin{aligned} H) \quad & O_a \text{ ex-centro del } \Delta ABC \\ T) \quad & \hat{X} = \pi/2 - \hat{A}/2 \\ D) \quad & \hat{X} = \pi - \hat{B} - \hat{C} \\ & \hat{B} = \hat{A}/2 + \hat{B}/2 \\ & \hat{C} = \hat{A}/2 + \hat{C}/2 \\ & \hat{A}/2 + \hat{B}/2 + \hat{C}/2 = \pi/2 \\ \therefore \quad & \hat{X} = \pi/2 - \hat{A}/2 \end{aligned}$$

TEOREMA # 7

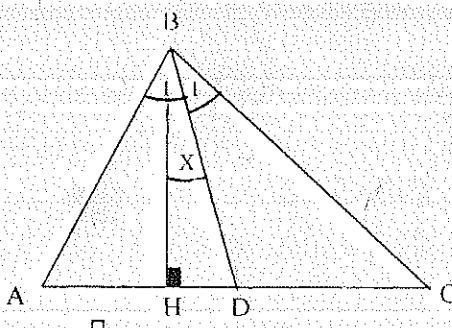
El ángulo formado por las bisectrices interna y externa de dos vértices diferentes de un triángulo, es igual a la mitad de la medida del ángulo interno en el tercer vértice.



$$\begin{aligned} H) \quad & O_a \text{ ex-centro } \Delta ABC \\ T) \quad & \hat{X} = \hat{B}/2 \\ D) \quad & \hat{X} = \hat{C} - \hat{B}/2 \\ & \hat{C} = \hat{B}/2 + \hat{B}/2 \\ \therefore \quad & \hat{X} = \hat{B}/2 \end{aligned}$$

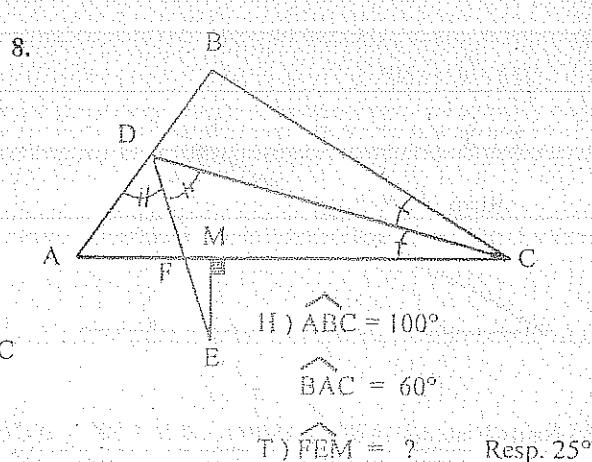
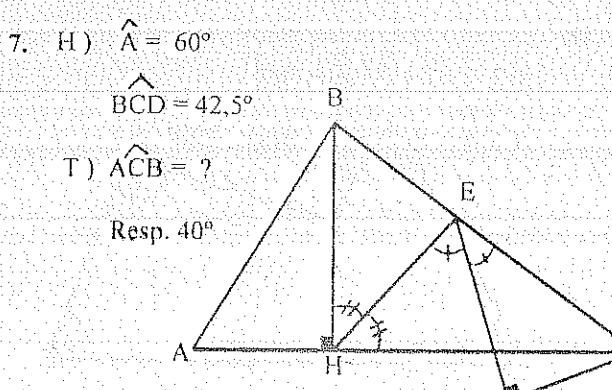
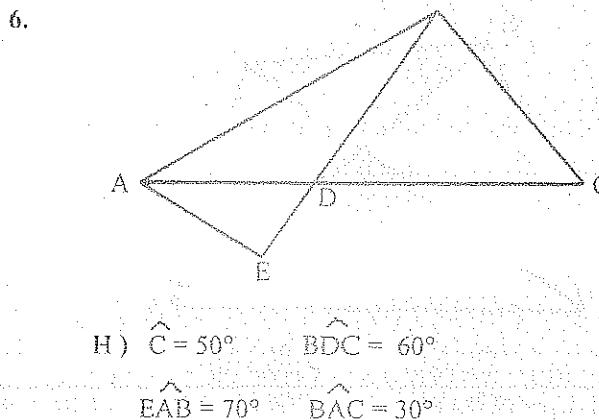
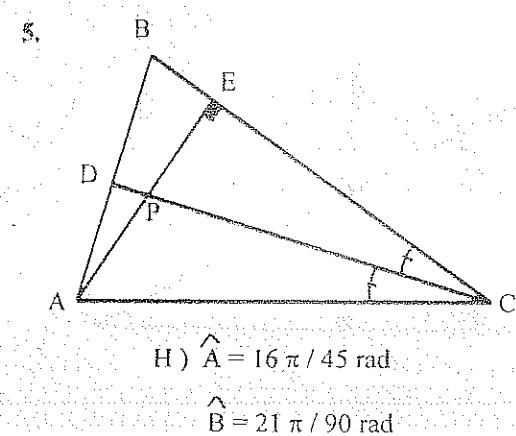
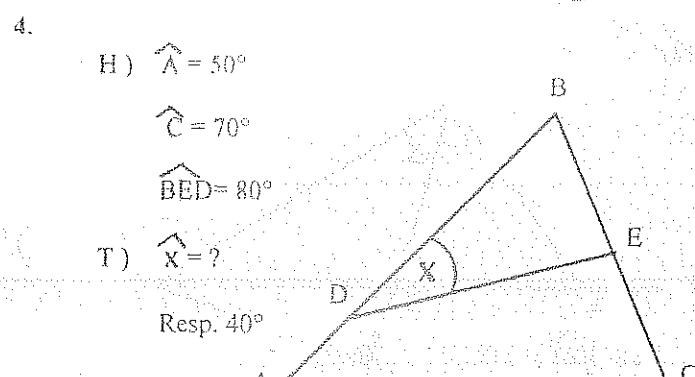
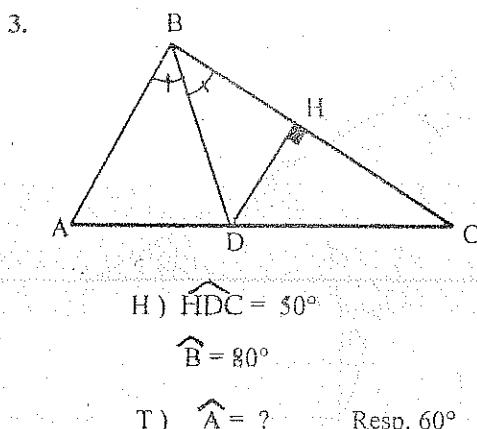
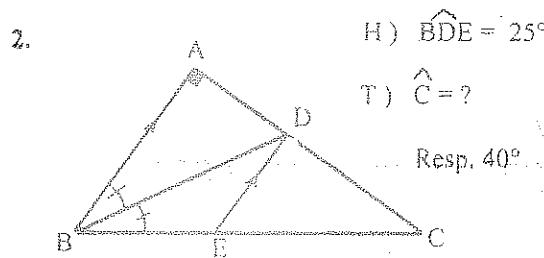
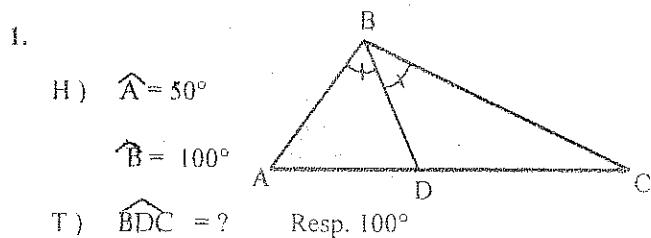
TEOREMA # 8

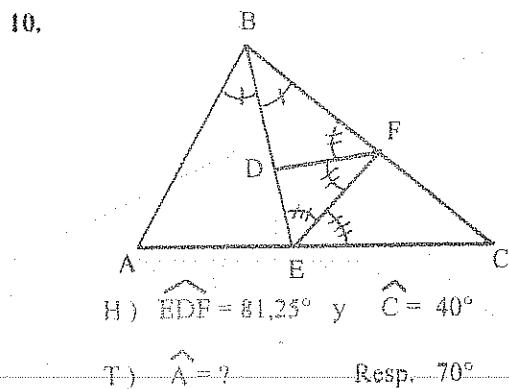
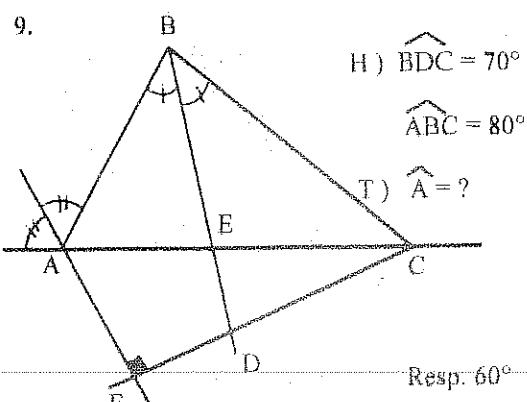
El ángulo formado por la bisectriz interna y la altura del mismo vértice de un triángulo, es igual a la semidiferencia de las medidas de los ángulos internos en los otros dos vértices.



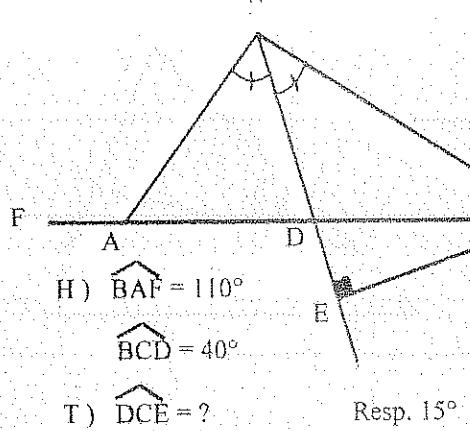
$$\begin{aligned} H) \quad & \overline{BD} \text{ Bisectriz del } \Delta ABC \\ & \overline{BH} \text{ Altura del } \Delta ABC \\ T) \quad & \hat{X} = \frac{\hat{A} - \hat{C}}{2} \\ D) \quad & \hat{B} - \hat{X} + \hat{A} = \pi/2 \\ & \hat{A} + \hat{X} + \hat{C} = \pi/2 \\ & \hat{X} = \frac{\hat{A} - \hat{C}}{2} \end{aligned}$$

4.5.5. EJERCICIOS

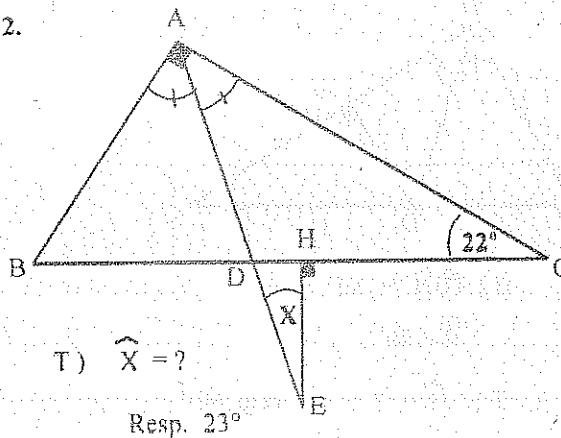




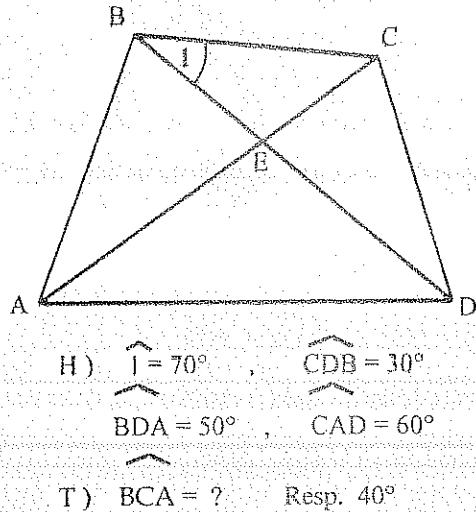
11.



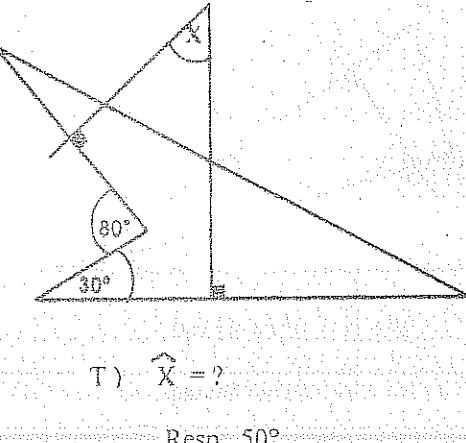
12.



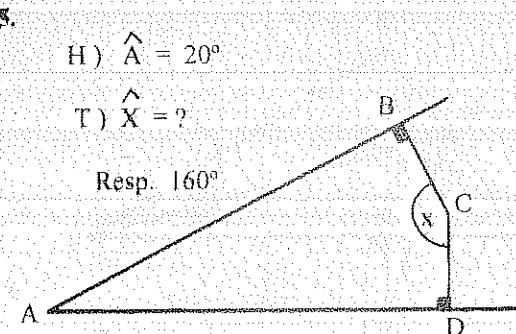
13.



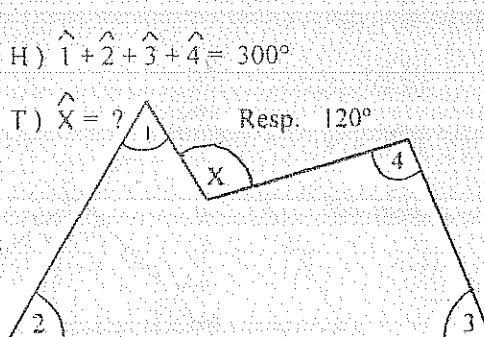
14.



15.



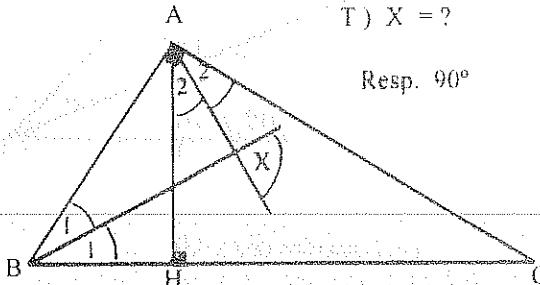
16.



17. En un triángulo ABC escaleno, $\widehat{A} = 50^\circ$ y su bisectriz forma con el lado BC dos ángulos que difieren en 20° . Calcular los ángulos \widehat{B} y \widehat{C} . Resp. 55° , 75°

18. En un triángulo ABC: $\hat{A} = 35^\circ$ y $\hat{B} = 50^\circ$. Calcular el ángulo formado por la altura del vértice B y la bisectriz del vértice C.
Resp. $42,5^\circ$

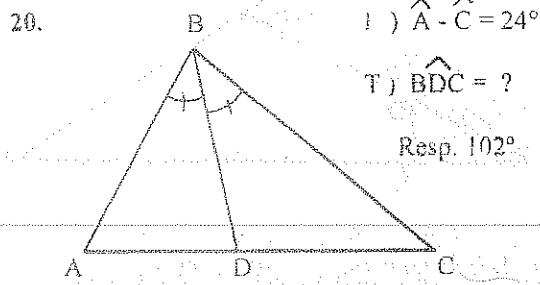
19.



T) $\hat{X} = ?$

Resp. 90°

20.

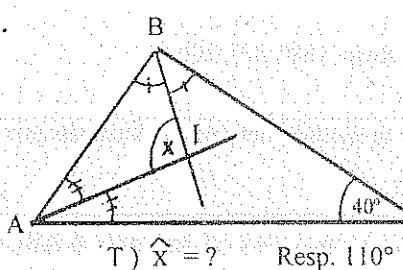


T) $\hat{A} - \hat{C} = 24^\circ$

T) $\hat{BDC} = ?$

Resp. 102°

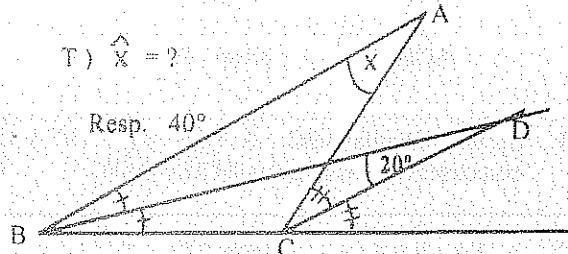
21.



T) $\hat{X} = ?$

Resp. 110°

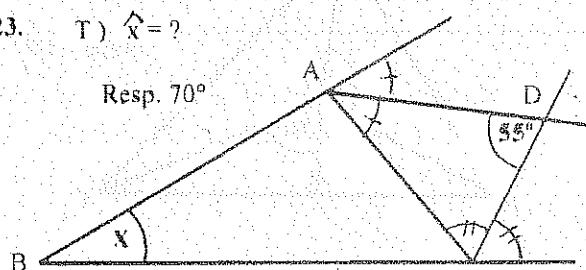
22.



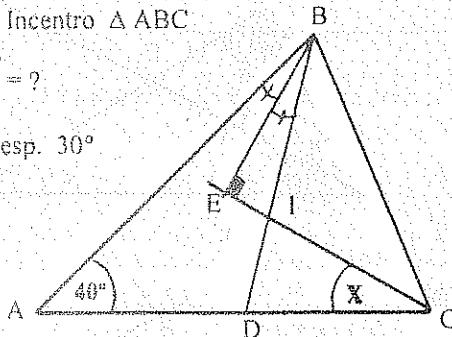
T) $\hat{X} = ?$

Resp. 40°

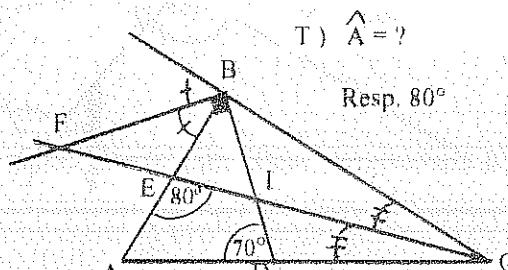
23.

Resp. 70° 24. H), I Incentro $\triangle ABC$

T) $\hat{X} = ?$

Resp. 30° 

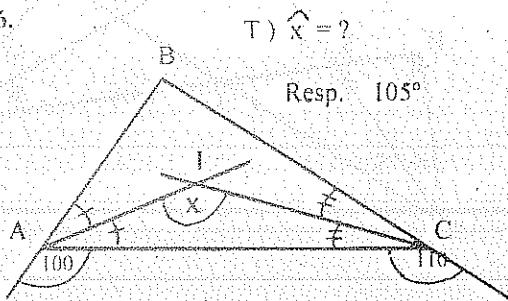
25.



T) $\hat{A} = ?$

Resp. 80°

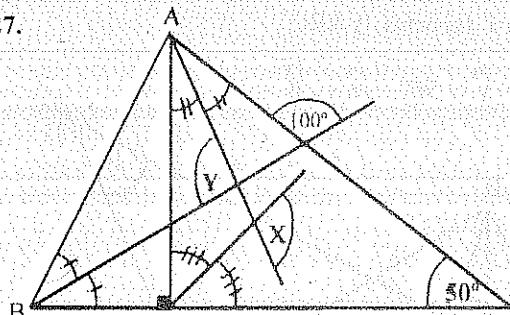
26.



T) $\hat{X} = ?$

Resp. 105°

27.



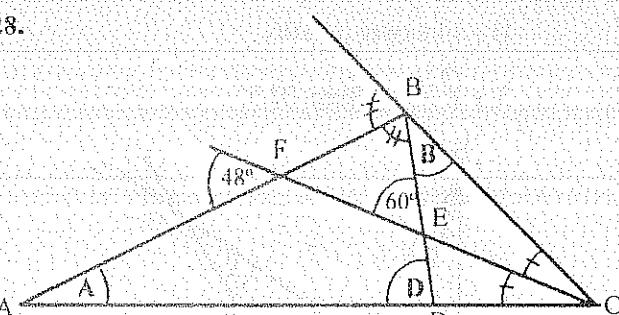
T) $\hat{X} = ?$

Resp. 115°

T) $\hat{Y} = ?$

Resp. 100°

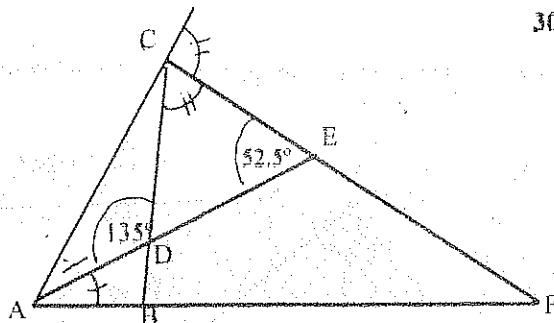
28.



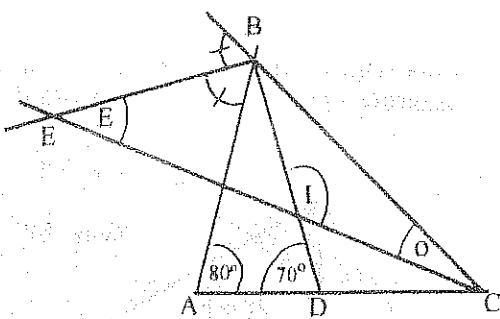
T) $\hat{A} = ?$ $\hat{B} = ?$; $\hat{D} = ?$

Resp. $24^\circ, 36^\circ, 84^\circ$

29.



30.



T) $\hat{BAC} = ?$

Resp. 60°

ABC = ?

Resp. 105°

ACB = ?

Resp. 15° H) I incentro del ΔABC

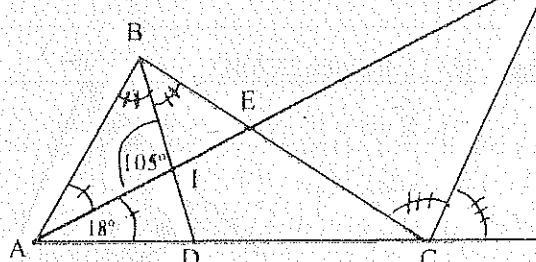
T) $\hat{I} = ? ; \hat{E} = ? ; \hat{O} = ?$

Resp. $130^\circ, 40^\circ, 20^\circ$

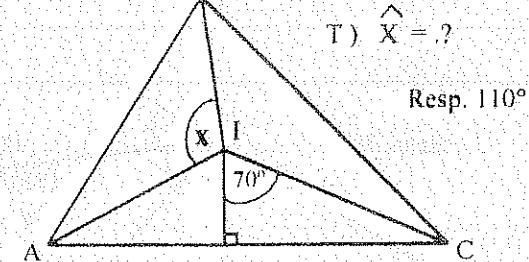
31. En un triángulo ABC: $\hat{A} = 23^\circ$ y $\hat{C} = 34^\circ$ y Ortocentro H, hallar la medida del ángulo formado por las bisectrices de los ángulos BCH y BAH . Resp. 90°

32.

T) $\hat{F} = ?$

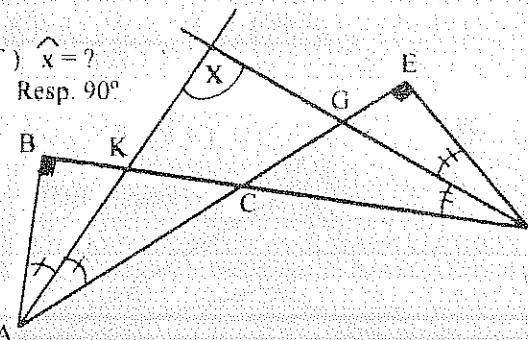
Resp. 57° 

33.

H) I Incentro ΔABC 

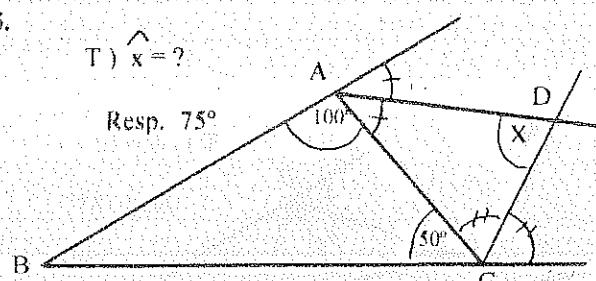
34.

T) $\hat{x} = ?$

Resp. 90° 

35.

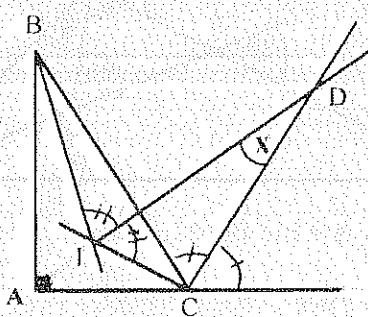
T) $\hat{x} = ?$

Resp. 75° 

36.

H) I Incentro ΔABC

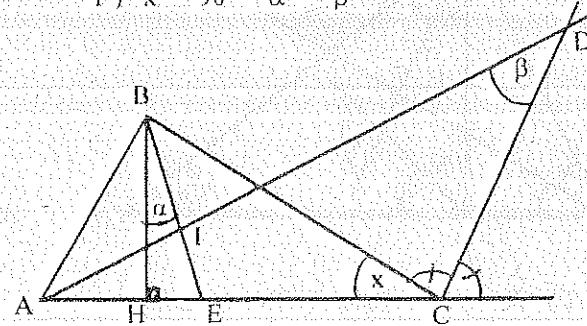
T) $\hat{x} = ?$ Resp. 22.5°



37.

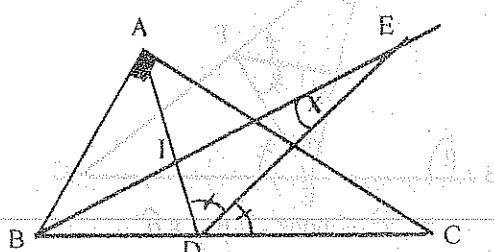
H) I Incentro ΔABC

T) $\hat{x} = 90^\circ - \alpha - \beta$



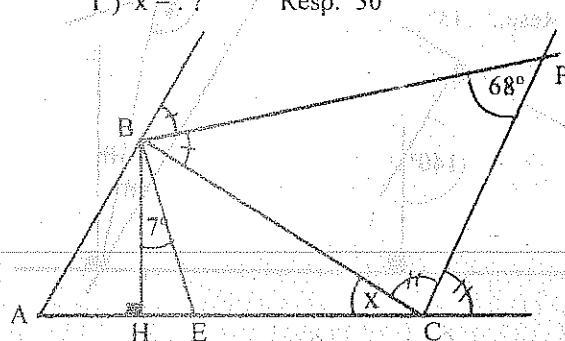
38. H) .1 Incentro $\triangle ABC$

$$T) \hat{X} = ? \quad \text{Resp. } 22.5^\circ$$



39. H) $\hat{A}BE = \hat{EBC}$

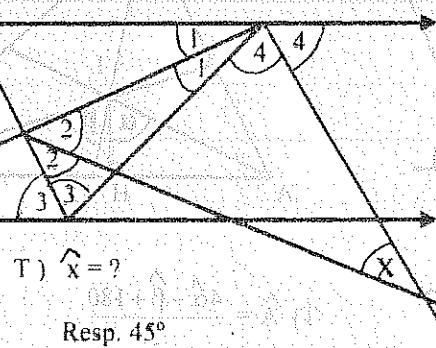
$$T) x = ? \quad \text{Resp. } 30^\circ$$



40. En un triángulo obtusángulo ABC ($C > 90^\circ$), si P es el pie de la altura h_a , Q pie de la altura de h_b y H es el ortocentro, demostrar que el ángulo \hat{PHQ} es igual a la suma de los ángulos \hat{A} y \hat{B} .

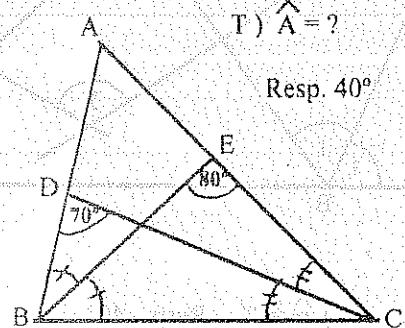
41. En un triángulo ABC, obtusángulo ($\hat{A} > 90^\circ$), H es el ortocentro. Demostrar que las bisectrices de los ángulos HBA y HCA son perpendiculares entre sí.

42.



$$T) \hat{x} = ? \quad \text{Resp. } 45^\circ$$

43.



$$T) \hat{A} = ?$$

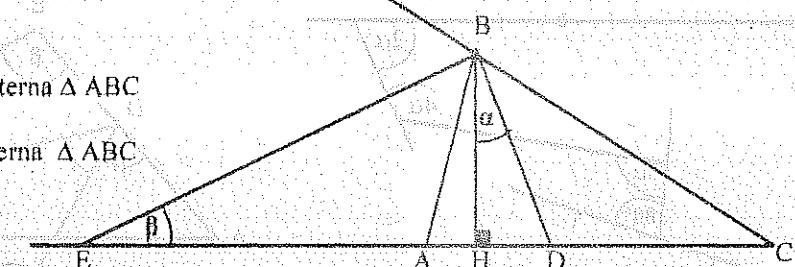
Resp. 40°

44.

H) \overline{BE} Bisectriz externa $\triangle ABC$

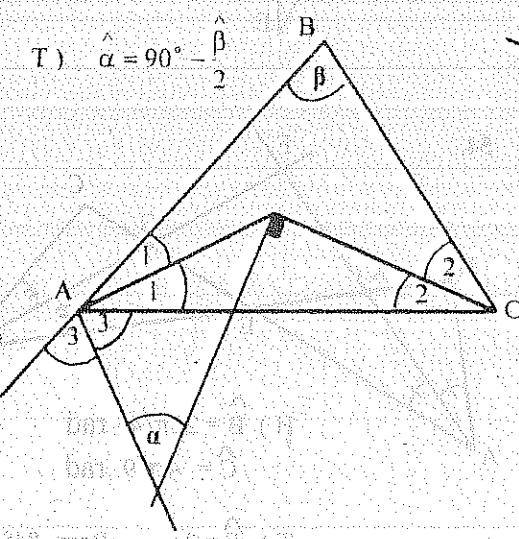
\overline{BD} Bisectriz interna $\triangle ABC$

$$T) \hat{\alpha} = \hat{\beta}$$



45.

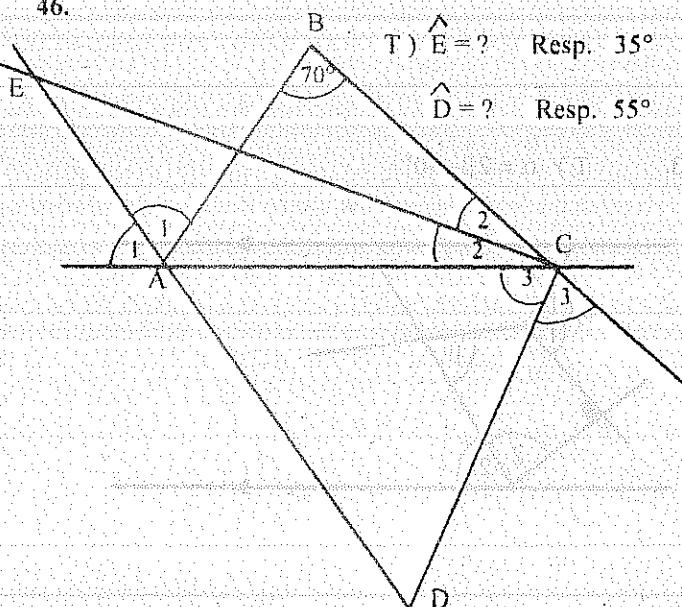
$$T) \hat{\alpha} = 90^\circ - \frac{\hat{\beta}}{2}$$



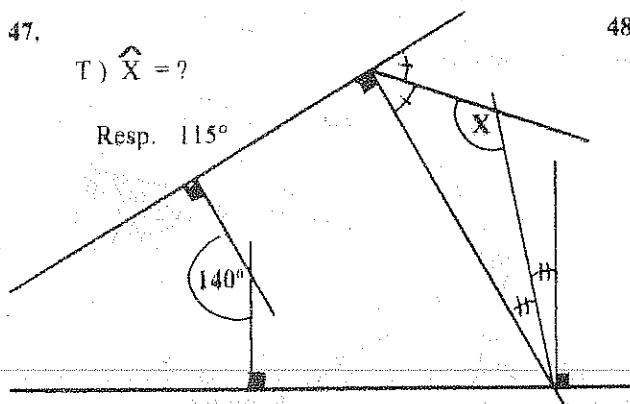
46.

$$T) \hat{E} = ? \quad \text{Resp. } 35^\circ$$

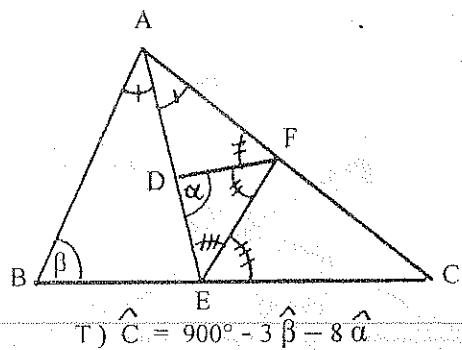
$$\hat{D} = ? \quad \text{Resp. } 55^\circ$$



47.

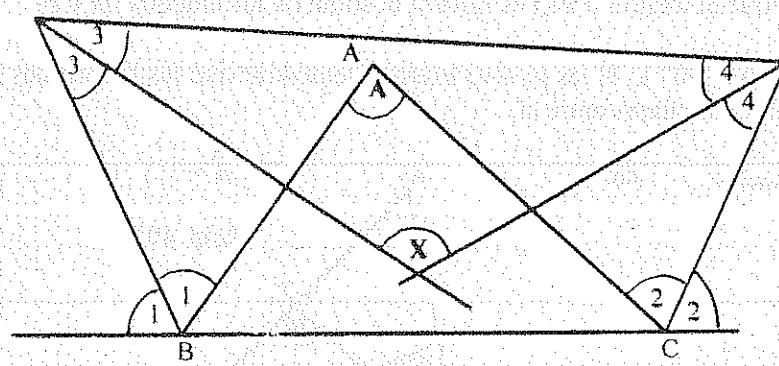


48.

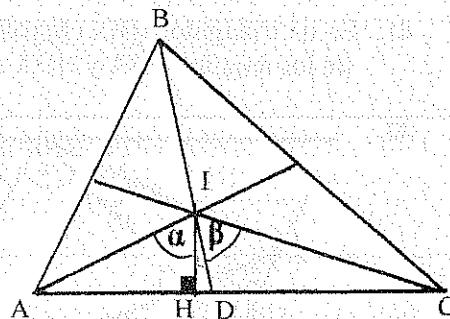


49.

T) $\hat{X} = 135^\circ - \hat{A}/4$

50. H). I Incentro ΔABC

T) $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$

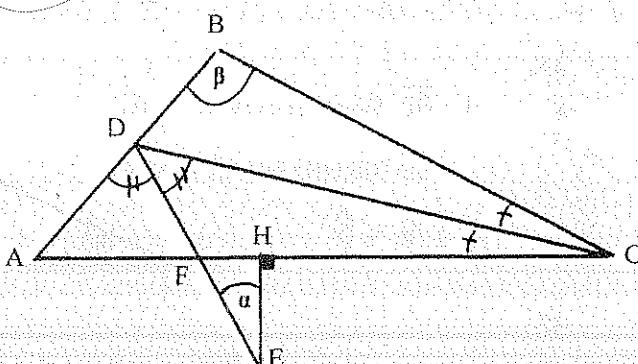
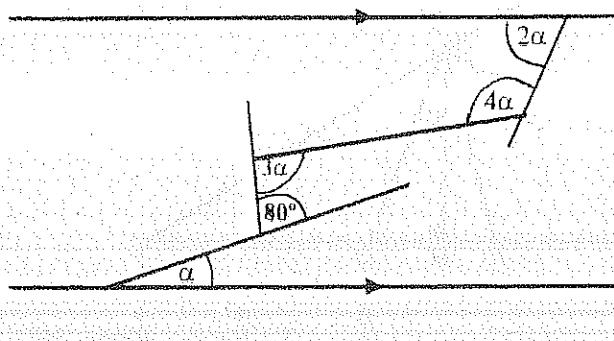


51.

T) $\hat{\alpha} = ?$ Resp. 40°

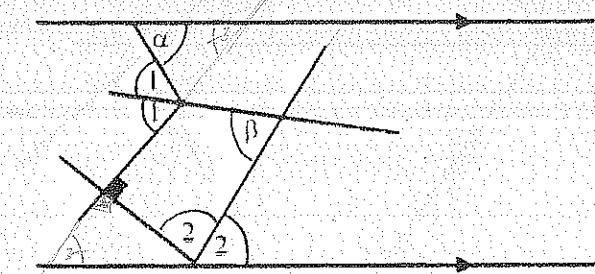
52.

T) $\hat{A} = \frac{4\hat{\alpha} - \hat{\beta} + 180}{3}$

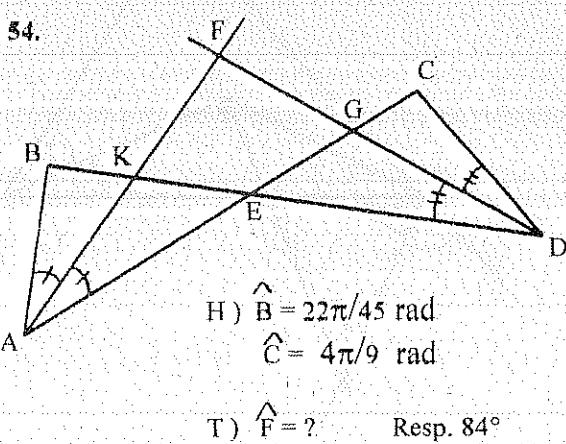


53.

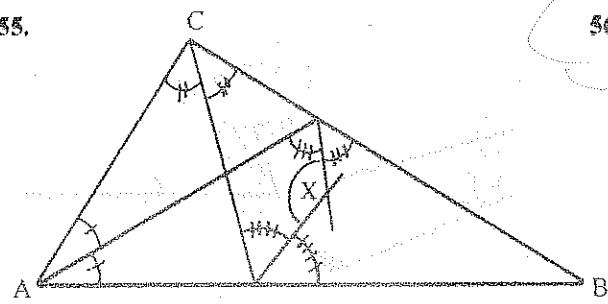
T) $\hat{\alpha} = 2\hat{\beta} - 90^\circ$



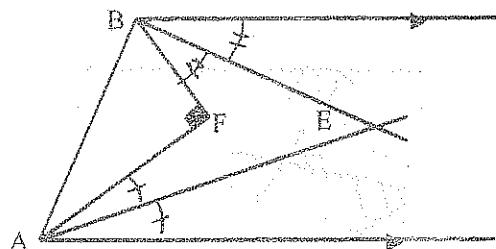
54.



55.



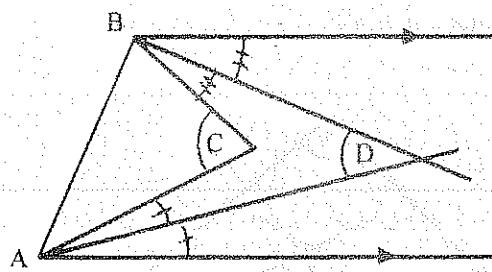
56.



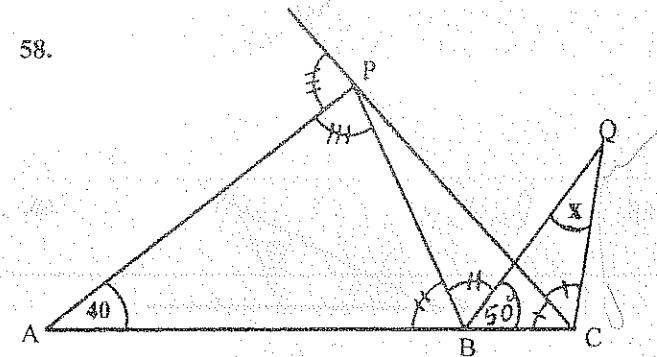
$$T) \hat{X} = 135^\circ + \hat{B}/4$$

$$T) \hat{E} = ? \quad \text{Resp. } 45^\circ$$

57.



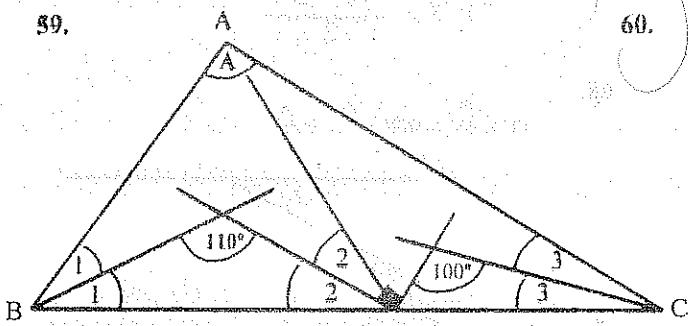
58.



$$T) \hat{D} = \hat{C}/2$$

$$T) \hat{X} = ? \quad \text{Resp. } 60^\circ$$

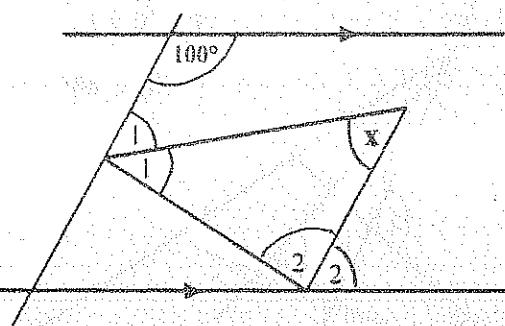
59.



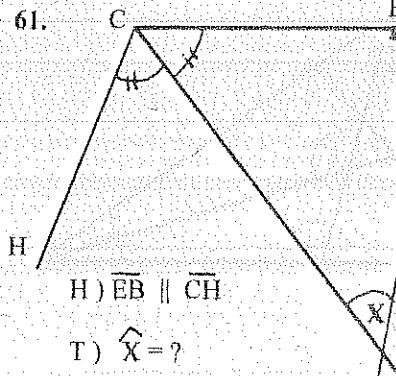
60.

$$T) \hat{X} = ? \quad \text{Resp. } 50^\circ$$

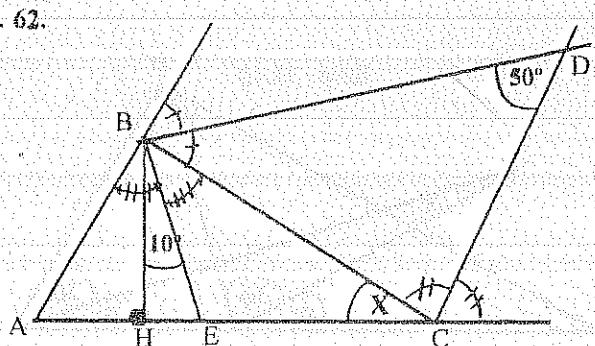
$$T) \hat{A} = ? \quad \text{Resp. } 60^\circ$$



61.



62.



$$H) \overline{EB} \parallel \overline{CH}$$

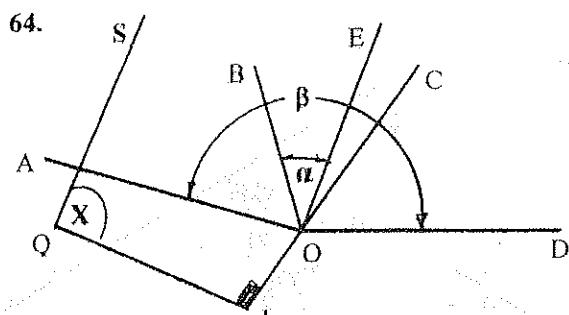
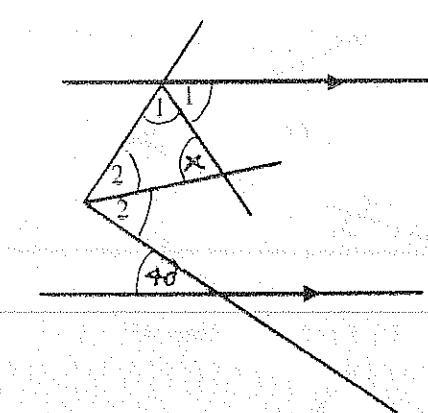
$$T) \hat{X} = ?$$

$$\text{Resp. } 45^\circ$$

$$T) \hat{X} = ? \quad \text{Resp. } 60^\circ$$

52

63. T) $\hat{X} = ?$ Resp. 70°

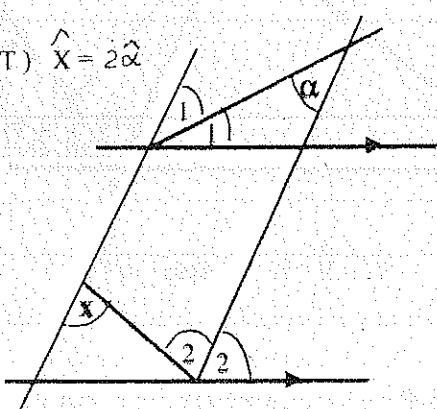


H) $\hat{AOE} = \hat{EOD}$

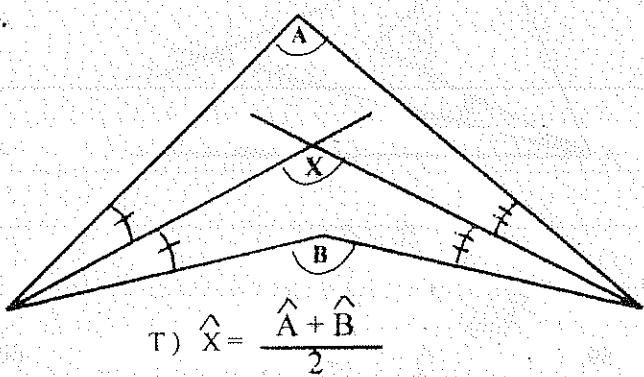
$\hat{AOB} = \hat{BOC}$ y $\overline{QS} \parallel \overline{OE}$

T) $\hat{X} = 90^\circ + \frac{\beta}{2} - 2\alpha$

65. T) $\hat{X} = 2\alpha$



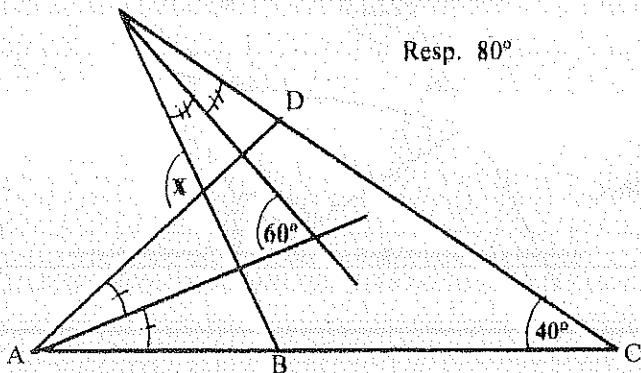
66.



T) $\hat{X} = \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}$

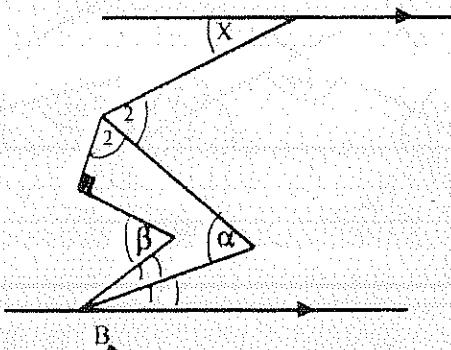
67.

E T) $\hat{X} = ?$

Resp. 80°

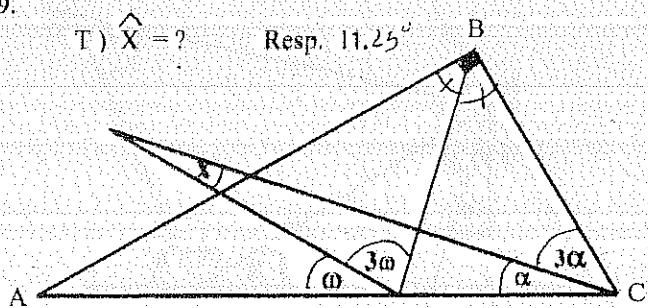
68.

T) $\hat{X} = 90^\circ + \beta - 2\alpha$

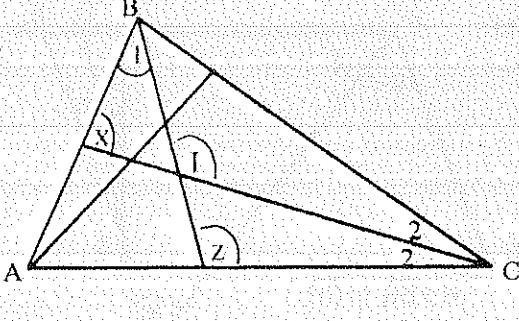


69.

T) $\hat{X} = ?$

Resp. 11.25° 

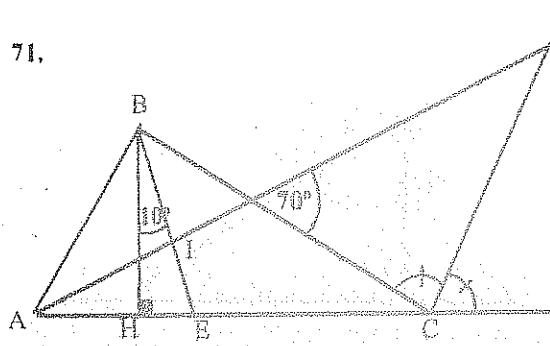
70.

H) .I Incentro $\triangle ABC$

$\hat{X} + \hat{Z} = 195^\circ$

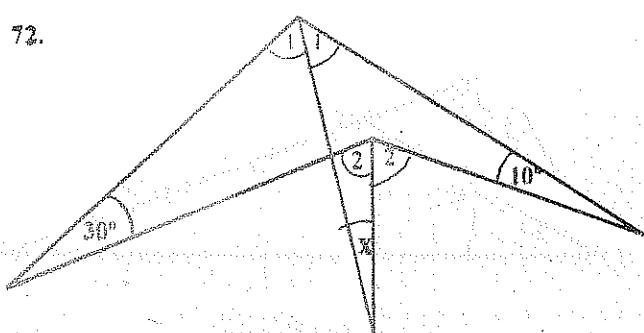
T) $\hat{I} = ?$ Resp. 125°

71.

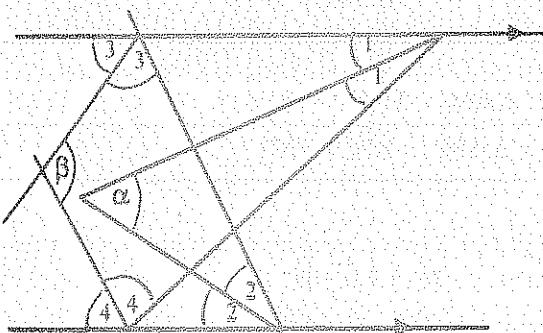
H) I Incentro $\triangle ABC$

- T) $\hat{A} = ?$ Resp. 60°
 $\hat{B} = ?$ Resp. 80°
 $\hat{C} = ?$ Resp. 40°

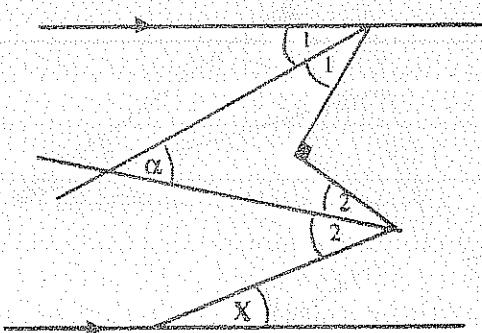
72.

T) $\hat{X} = ?$ Resp. 10°

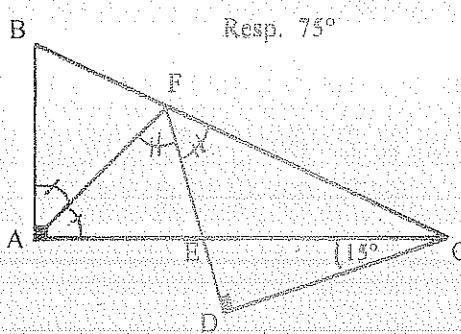
73.

T) $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 180^\circ$ 

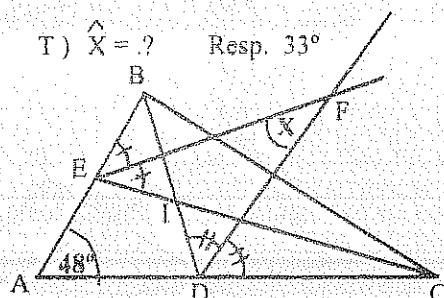
74.

T) $\hat{X} = 90^\circ - 2\hat{\alpha}$ 

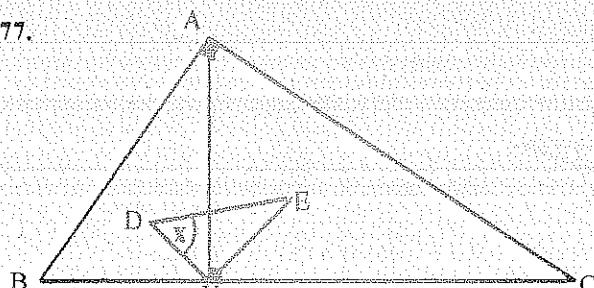
75.

T) $\hat{B} = ?$ Resp. 75° 

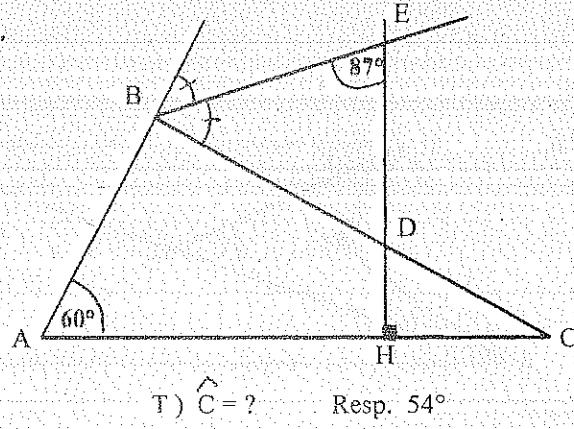
76.

H) I Incentro $\triangle ABC$ T) $\hat{X} = ?$ Resp. 33° 

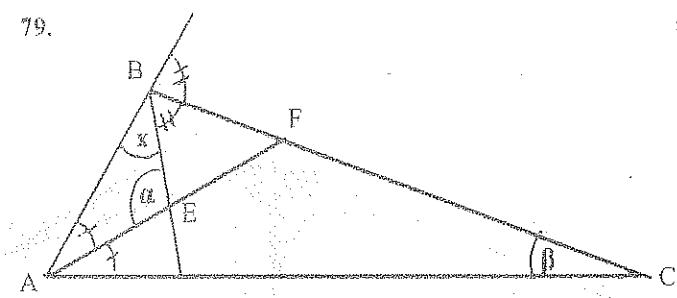
77.

H) D Incentro $\triangle ABH$ E Incentro $\triangle AHC$ T) $\hat{X} = \hat{B}$

78.

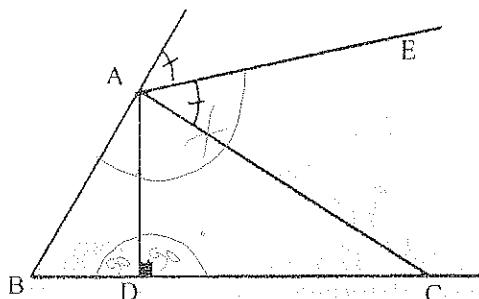
T) $\hat{C} = ?$ Resp. 54°

79.



$$T) \quad X = \frac{540 + 2\beta - 4\gamma}{3}$$

80.

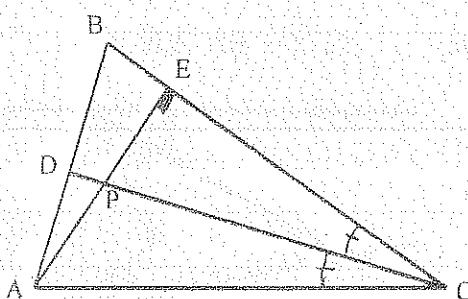


$$H) \quad \hat{B} - \hat{C} = 15^\circ$$

$$T) \quad \hat{EAD} = ? \quad \text{Resp. } 97.5^\circ$$

4.5.5.1 EJERCICIOS RESUELTOS

5.

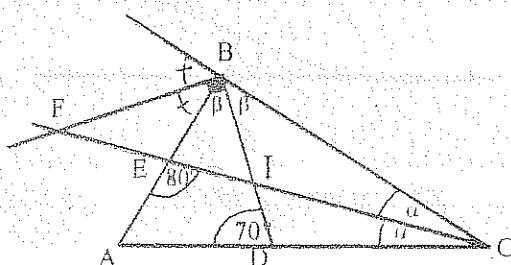


$$\begin{aligned} D) \quad \Delta ABC: \quad & \hat{A} = 64^\circ \\ & \hat{B} = 42^\circ \\ & \therefore \hat{C} = 74^\circ \text{ y } \hat{1} = 37^\circ \end{aligned}$$

$$\Delta BAC: \quad \hat{BAC} = 16^\circ$$

$$\Delta APC: \quad \hat{APC} = 127^\circ$$

25.



$$D) \quad 70^\circ = 2\hat{\alpha} + \hat{\beta}$$

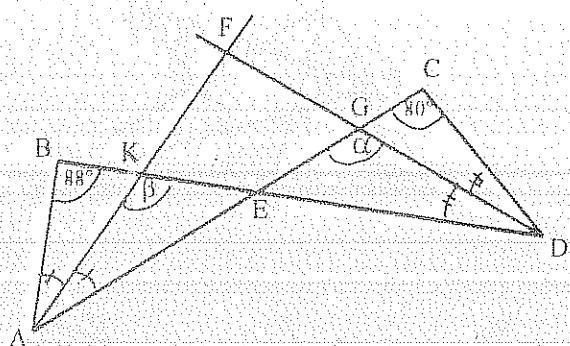
$$80^\circ = \hat{\alpha} + 2\hat{\beta}$$

$$\therefore \hat{\alpha} + \hat{\beta} = 50^\circ$$

$$\Delta FBI: \quad \hat{F} = \hat{A}/2 = 180^\circ - 90^\circ - (\hat{\alpha} + \hat{\beta})$$

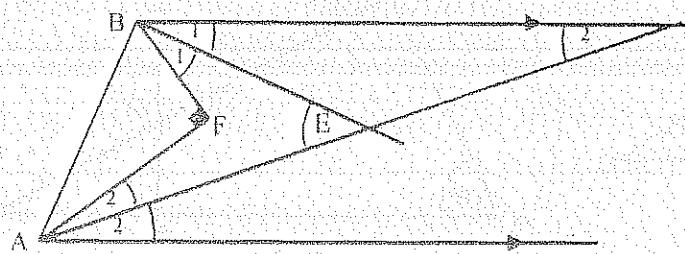
$$\therefore \hat{A} = 80^\circ$$

54.



$$\begin{aligned} D) \quad & \hat{\alpha} = \hat{C} + \hat{D}/2 = \hat{F} + \hat{A}/2 \quad (1) \\ & \hat{\beta} = \hat{B} + \hat{A}/2 = \hat{F} + \hat{D}/2 \quad (2) \\ & \hat{B} + \hat{C} = 2\hat{F} \quad (1) + (2) \\ & \hat{F} = (\hat{B} + \hat{C})/2 \\ & \therefore \hat{F} = 84^\circ \end{aligned}$$

56.

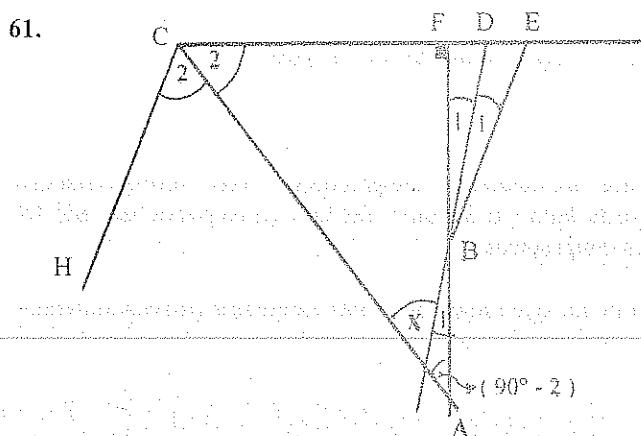


$$D) \quad 90^\circ = \hat{1} + \hat{E} + \hat{2} \quad (1)$$

$$\hat{E} = \hat{1} + \hat{2} \quad (2)$$

$$\therefore \hat{E} = 45^\circ \quad (2) \text{ en (1)}$$

61.



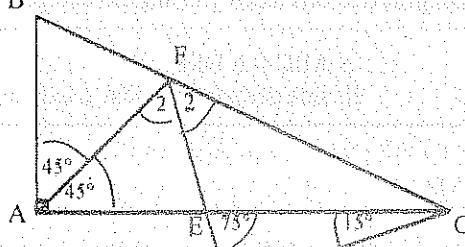
$$D) \quad \hat{E} = 180^\circ - 2\hat{2} = 90^\circ - 2\hat{1}$$

$$90^\circ = 2(\hat{2} - \hat{1})$$

$$45^\circ = \hat{2} - \hat{1}$$

$$\therefore \hat{x} = \hat{1} + (90^\circ - \hat{2}) = 45^\circ$$

75



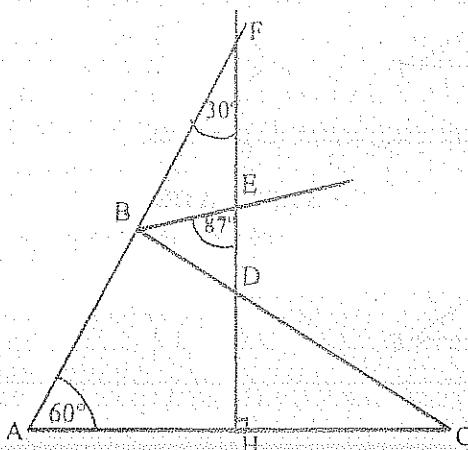
D) $\triangle AEF$: $\hat{2} = 180^\circ - 75^\circ - 45^\circ$

$$\hat{z} = 60^\circ$$

$$2\hat{A} = 120^\circ = \hat{B} + 45^\circ$$

$$\therefore \hat{B} = 75^\circ$$

78.



D) $87^\circ = \angle 1 + 30^\circ$

$$\hat{1} = 57^\circ$$

$$2\hat{F} = 114^\circ = 60^\circ + \hat{C}$$

$$\therefore \hat{C} = 54^\circ$$

4.5.6. CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS

Si dos triángulos son congruentes tienen todos sus elementos respectivamente congruentes.

Se denota este hecho escribiendo $\Delta ABC \cong \Delta FED$

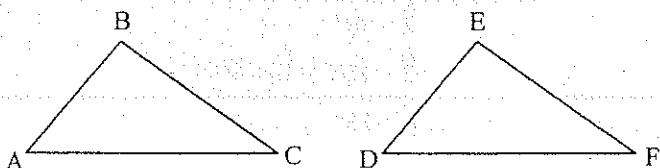
Para todo par de triángulos congruentes, la relación entre sus elementos congruentes es una correspondencia biunívoca. Entonces, en dos triángulos congruentes, a cada lado (o ángulo) del uno corresponde un lado (o ángulo) congruente en el otro, llamados correspondientes congruentes.

Se demuestra que dos triángulos son congruentes para concluir que todos los demás elementos correspondientes son congruentes.

4.5.6.1. POSTULADOS DE CONGRUENCIA

4.5.6.1.1. TRIÁNGULOS ESCALENOS

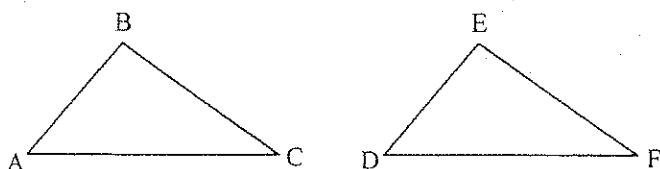
1. Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente congruentes dos lados y el ángulo comprendido.



$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

Es una correspondencia (L.A.L).

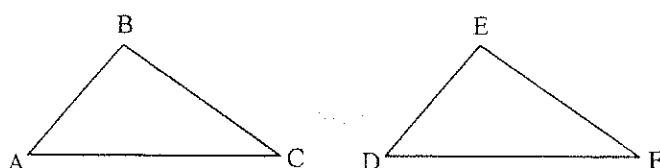
2. Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente congruentes un lado y dos ángulos.



$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

Es una correspondencia (A.L.A).

3. Dos triángulos son congruentes si tienen respectivamente congruentes sus tres lados.



$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

Es una correspondencia (L.L.L).

4.5.6.1.2. TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

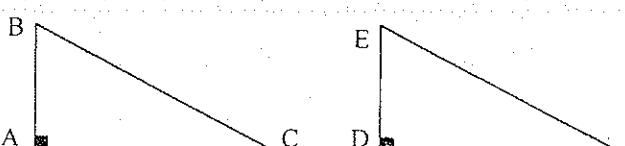
1. Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen los catetos respectivamente congruentes.



$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

Es una correspondencia (C.C).

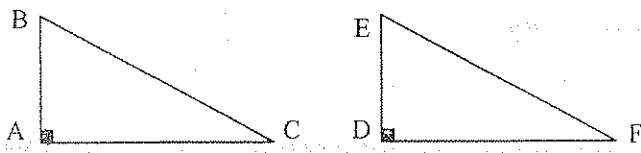
2. Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen la hipotenusa y un ángulo agudo respectivamente congruentes.



$$\Delta ABC \cong \Delta DEF$$

Es una correspondencia (H.A).

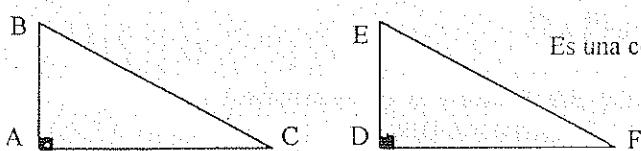
3. Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen un cateto y un ángulo agudo respectivamente congruentes.



$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

Es una correspondencia (C.A.).

4. Dos triángulos rectángulos son congruentes si tienen la hipotenusa y un cateto respectivamente congruentes.



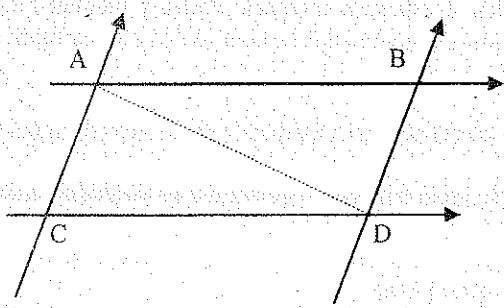
$$\triangle ABC \cong \triangle DEF$$

Es una correspondencia (H.C.).

4.5.6.2. PROPIEDADES DE PARALELAS

TEOREMA # 1

Los segmentos de rectas paralelas y limitados por otro par de rectas paralelas son congruentes.



$$\begin{aligned} H) \quad & \overline{AB} // \overline{CD} \\ & \overline{AC} // \overline{BD} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T) \quad & AB = CD \\ & AC = BD \end{aligned}$$

$$D) \quad \triangle ACD \wedge \triangle ABD$$

$$\begin{aligned} \widehat{CAD} &\cong \widehat{ADB} \quad (\Lambda) \\ \overline{AD} &\cong \overline{AD} \quad (L) \end{aligned}$$

$$\widehat{CDA} \cong \widehat{BAD} \quad (\Lambda)$$

$$\therefore \triangle ACD \cong \triangle ABD \quad (\text{A.L.A.})$$

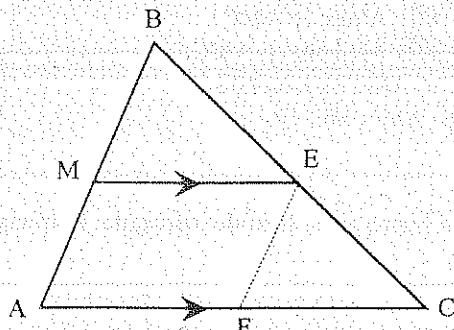
$$\Rightarrow \begin{aligned} \overline{AB} &\cong \overline{CD} \\ \overline{AC} &\cong \overline{BD} \quad // \end{aligned}$$

COROLARIO

Dos rectas paralelas son equidistantes en toda su extensión.

TEOREMA # 2

La recta que biseca a un lado de un triángulo y es paralela a otro lado, biseca también al tercer lado.



$$\begin{aligned} H) \quad & BM = MA \\ & ME // AC \end{aligned}$$

$$T) \quad BE = EC$$

$$D) \quad \overline{EF} // \overline{AB} \quad (\text{construcción})$$

$$\therefore BM = MA = EF$$

$$\triangle MBE \wedge \triangle FEC$$

$$\widehat{B} = \widehat{FEC} \quad (\Lambda)$$

$$BM = EF \quad (L)$$

$$\widehat{A} = \widehat{BME} = \widehat{EFC} \quad (\Lambda)$$

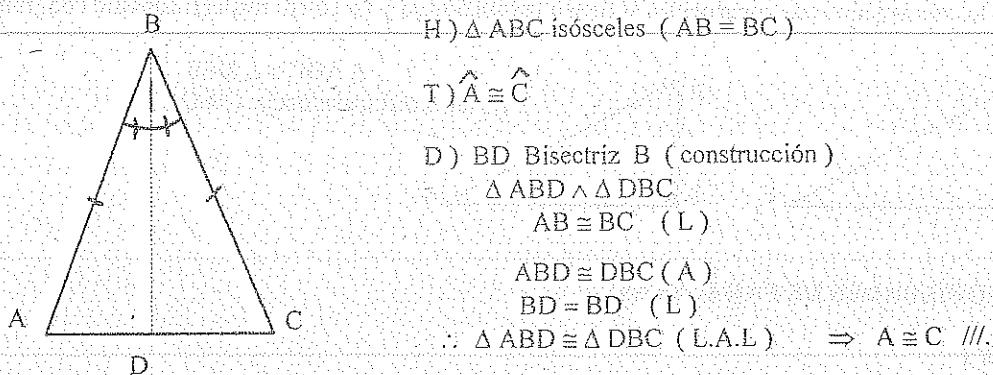
$$\therefore \triangle MBE \cong \triangle CFE \quad (\text{A.L.A.}) \Rightarrow BE = EC \quad //$$

COROLARIO

El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado e igual a su mitad.

4.5.6.3. TRIÁNGULO ISÓSCELES Y EQUILÁTERO**TEOREMA # 1**

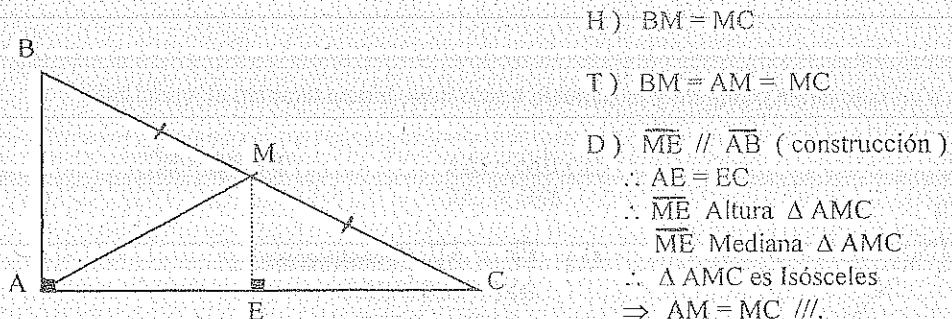
Si dos lados de un mismo triángulo son congruentes entre sí, los ángulos opuestos a dichos lados también son congruentes.

**COROLARIOS.**

1. Si dos ángulos de un triángulo son congruentes, entonces los lados opuestos a estos ángulos son también congruentes.
2. La bisectriz del ángulo desigual de un triángulo isósceles, es también mediana, altura y mediatrix de dicho triángulo; y reciprocamente, un triángulo en el cual una línea fundamental es también otra línea fundamental, el triángulo es isósceles.
3. En un triángulo isósceles todos sus puntos fundamentales pertenecen a la mediatrix de su lado desigual.
4. Todo triángulo equilátero es equiángulo; y reciprocamente, todo triángulo equiángulo es también equilátero.
5. En un triángulo equilátero las bisectrices, medianas, alturas y mediatrixes de los tres vértices son congruentes. El incentro, baricentro, ortocentro y circuncentro son el mismo punto.

4.5.6.4. TRIÁNGULO RECTÁNGULO**TEOREMA # 1**

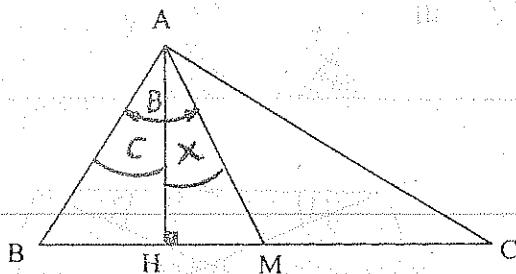
El punto medio de la hipotenusa equidista de los tres vértices del triángulo rectángulo.

**COROLARIO**

Si una mediana de un triángulo es igual a los dos segmentos que forma en el lado del triángulo, el triángulo es rectángulo.

TEOREMA # 2

El ángulo formado por la altura y la mediana relativas a la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la diferencia de los ángulos agudos.

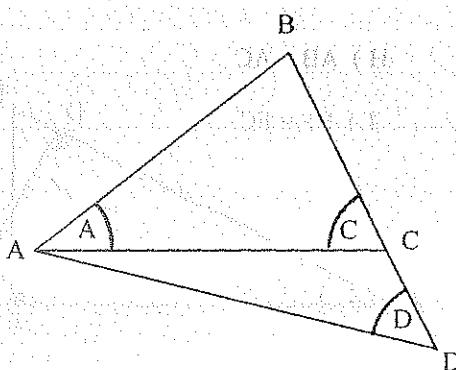


- H) \overline{AH} Altura ΔABC
 AM Mediana ΔABC
- T) $\hat{X} = \hat{B} - \hat{C}$
- D) $AM = BM = MC$
- $\widehat{BAH} = \hat{C}$
 $\widehat{BAM} = \hat{B}$
 $\therefore \hat{X} = \hat{B} - \hat{C}$ ///.

7 DESIGUALDADES

TEOREMA # 1

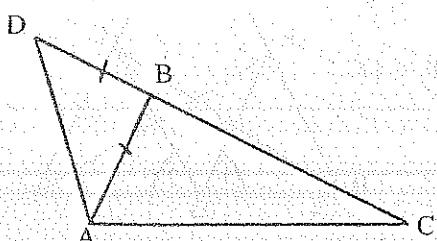
Si dos lados de un triángulo no son congruentes, los ángulos opuestos a ellos tampoco lo son y el ángulo de mayor medida se opone al lado mayor; y reciprocamente.



- H) $AB > BC$ T) $\hat{C} > \hat{A}$
- D) $AB = BD$ (construcción)
 $\therefore \Delta ABD$ isósceles
- $\hat{D} = \hat{DAC} + \hat{A}$
 $\Rightarrow \hat{D} > \hat{A}$
- $\hat{C} = \hat{DAC} + \hat{D}$
 $\Rightarrow \hat{C} > \hat{D}$
 $\therefore \hat{C} > \hat{A}$ ///.

TEOREMA # 2

En cualquier triángulo la suma de las longitudes de dos lados cualesquiera es mayor que la longitud del tercer lado.

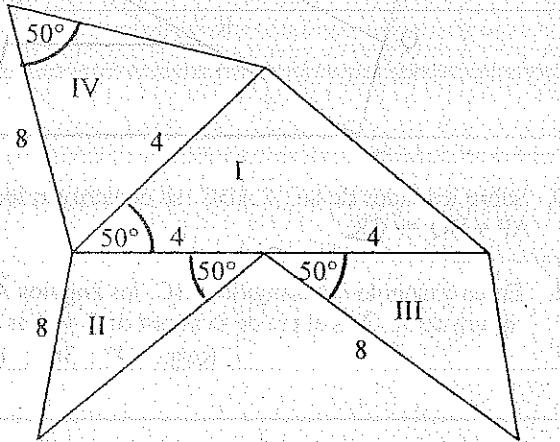


- H) ΔABC Escaleno T) $AB + BC > AC$
- D) $AB = BD$ (construcción)
- $\therefore \hat{D} \cong \hat{BAD}$
 $\Rightarrow DAC > \hat{D}$
 $\Rightarrow DC > AC$
 $BD + BC > AC$
 $\therefore AB + BC > AC$ ///.

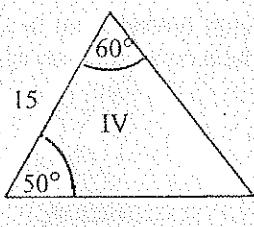
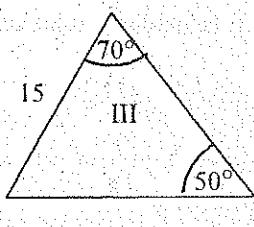
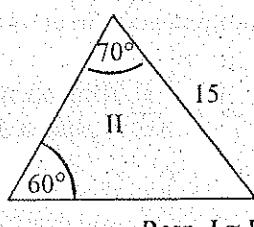
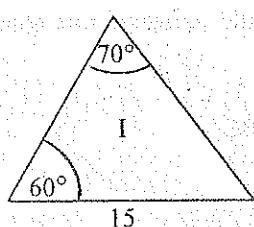
4.5.8. EJERCICIOS

1. Indique que par de triángulos son congruentes

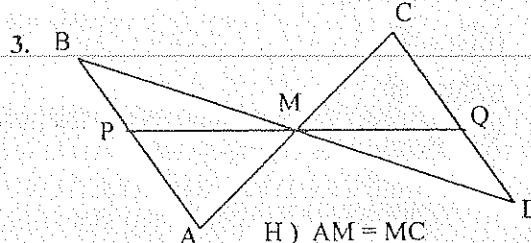
Resp. I \cong III



2. Indique qué par de triángulos son congruentes

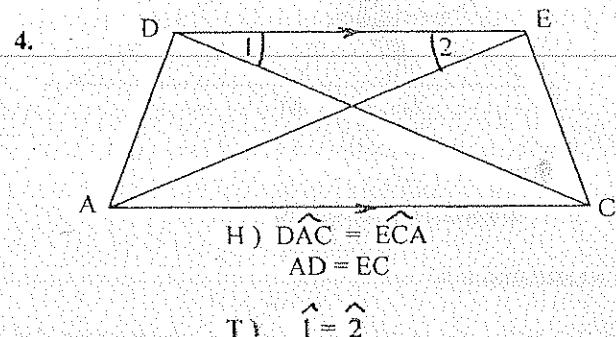


Resp. $I \cong IV$



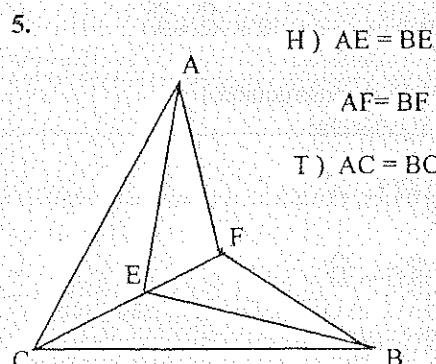
H) $AM = MC$
 $BM = MD$

T) $PM = MQ$



H) $\widehat{DAC} = \widehat{ECA}$
 $AD = EC$

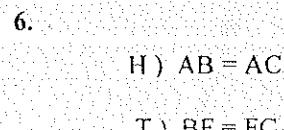
T) $\widehat{1} = \widehat{2}$



H) $AE = BE$

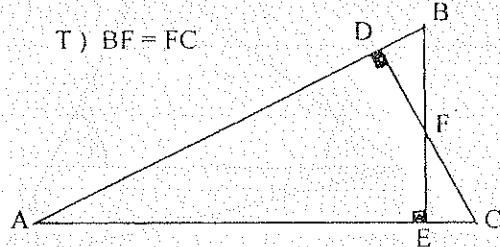
A) $AF = BF$

T) $AC = BC$



H) $AB = AC$

T) $BF = FC$



H) $AE = BD$

T) $AC = CB$

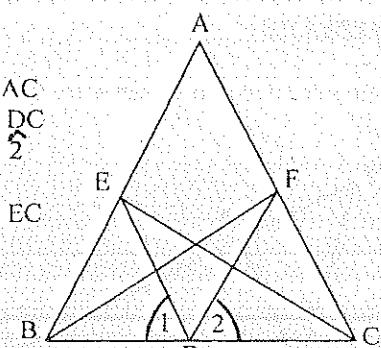
8.

H) $AB = AC$

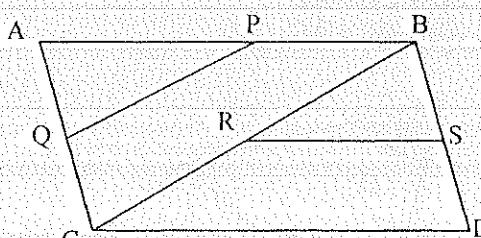
B) $BD = DC$

$\widehat{1} = \widehat{2}$

T) $BF = EC$



9.



H) $AP = PB$

A) $AQ = QC$

BR = RC

BS = SD

$AB \parallel CD$

AB = CD

T) $\triangle APQ \cong \triangle BRS$

10. Sobre los lados de un $\triangle ABC$ se construyen los triángulos equiláteros BPC, CQA y ARB. Demostrar que: $AP = BQ = CR$.

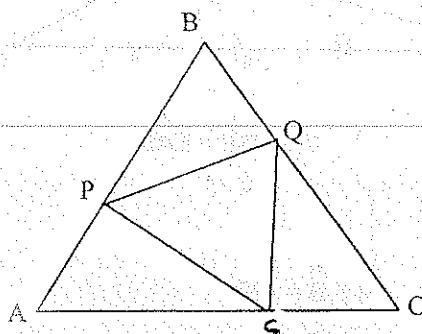
11. En un triángulo obtusángulo ABC, los ángulos \widehat{A} y \widehat{B} están en la razón 2/3, el ángulo $\widehat{PHQ} = 60^\circ$, P es pie la altura de A, Q es el pie de la altura de B y H es el ortocentro. Hallar los ángulos \widehat{A} , \widehat{B} y \widehat{C} . ($C > 90^\circ$)

Resp. 24° ; 36° ; 120°

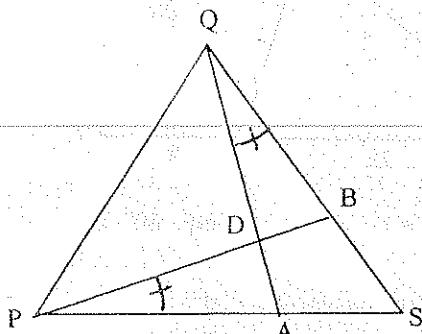
12. En el triángulo escaleno ABC, el ángulo \hat{B} mide 110° y O es el circuncentro. ¿Cuánto mide el ángulo AOC ?.
Resp. 140°

13. En un triángulo ABC; $AB = AC$; $\hat{A} = 120^\circ$; I su incentro; O su Circuncentro y E su Excentro relativo a la bisectriz interna del ángulo B . Hallar la medida del ángulo IEO .
Resp. 30°

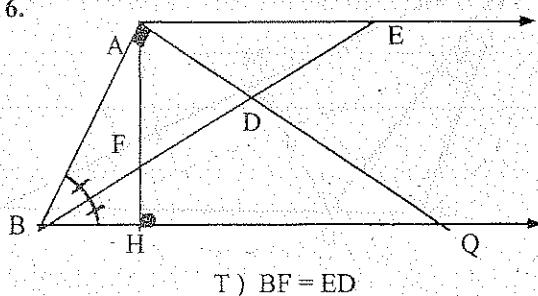
14.

H) $\triangle ABC \sim \triangle PQS$ EquiláterosT) $\triangleAPS \cong \triangleBPQ \cong \triangleCSQ$

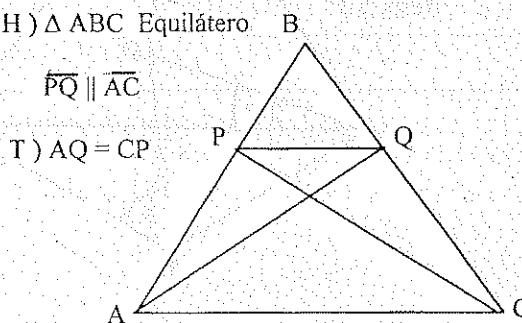
15.

H) $\triangle PQS$ EquiláteroT) $PA = QB$

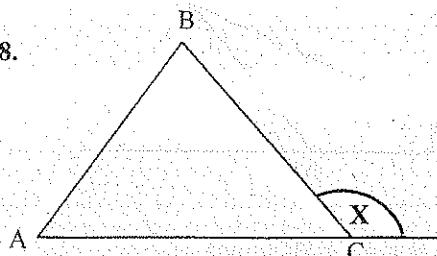
16.

T) $BF = ED$

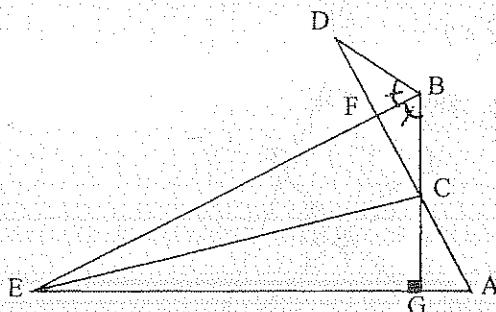
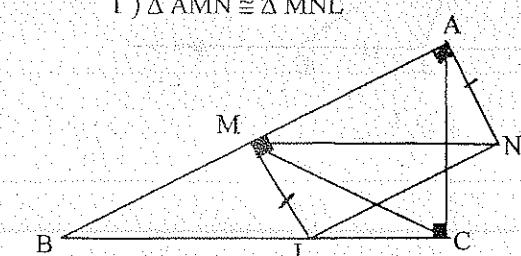
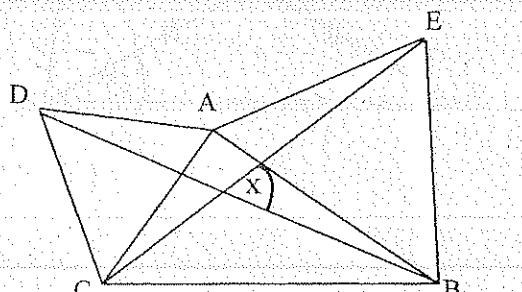
17.

H) $\triangle ABC$ Equilátero $PQ \parallel AC$ T) $AQ = CP$

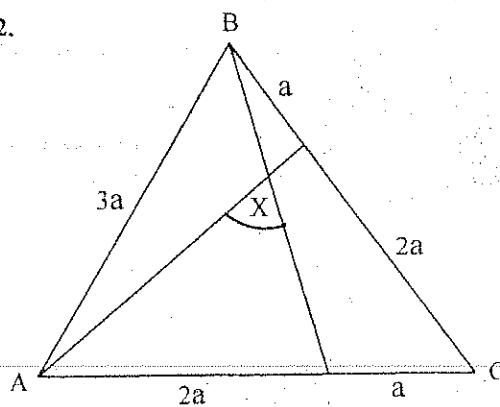
18.

H) $AB = BC$ $\hat{B} = 50^\circ$ T) $\hat{X} = ?$ Resp. 115°

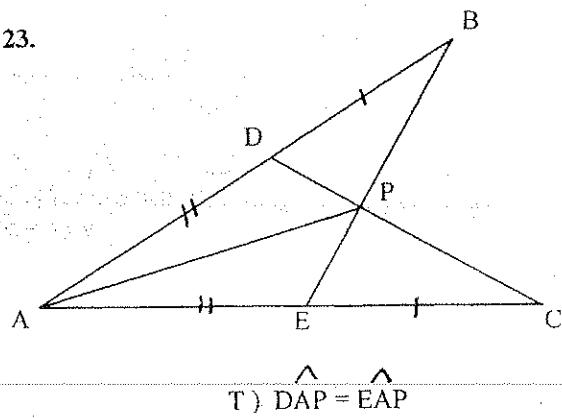
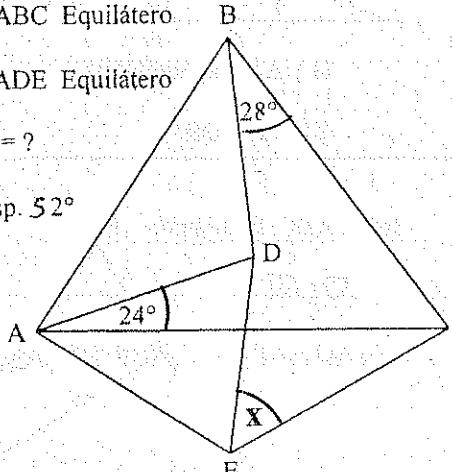
19.

H) $BD = BC = CA$ T) \overline{EC} Bisectriz \hat{FEG} 20. H) $MN \parallel BC$ $AM = MB$ $ML = AN$ T) $\triangle AMN \cong \triangle MNL$ 21. H) $\triangle ACD$ y $\triangle AEB$ EquiláterosT) $\hat{X} = ?$ Resp. 60° 

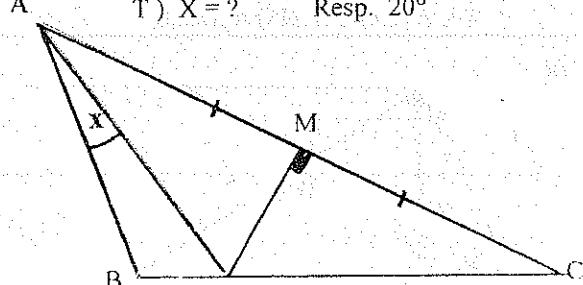
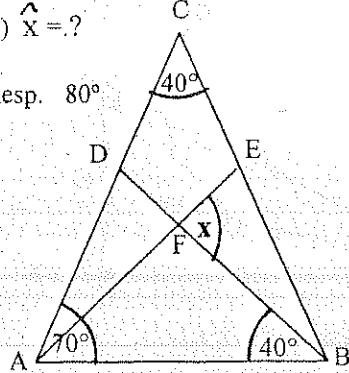
22.

T) $\hat{X} = ?$ Resp. 60°

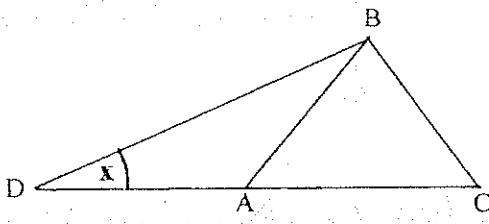
23.

T) $\hat{DAP} = \hat{EAP}$ 24. H) $\triangle ABC$ Equilátero $\triangle ADE$ EquiláteroT) $\hat{X} = ?$ Resp. 52° 

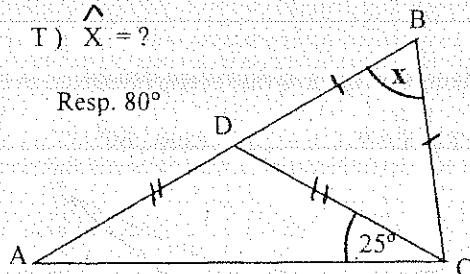
25.

H) $\hat{B} = 100^\circ$ $\hat{C} = 30^\circ$ T) $\hat{X} = ?$ Resp. 20° 26. H) $DC = CE$ T) $\hat{X} = ?$ Resp. 80° 

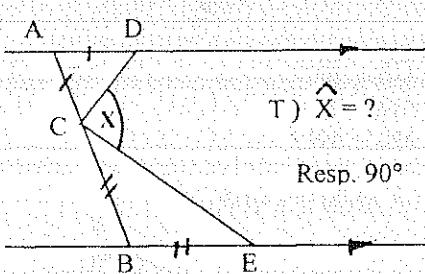
27.

H) $AB = BC = AD$ $\hat{X} = 40^\circ$ T) $\hat{C} = ?$ Resp. 80°

28.

T) $\hat{X} = ?$ Resp. 80° 

29.

T) $\hat{X} = ?$ Resp. 90°

30. H) $BD = DC = EC$
T) $\hat{X} = ?$
Resp. 20°

31. T) $\hat{X} = ?$
Resp. 36°

32. T) $\hat{X} = ?$
Resp. 15°

33. H) $AB = AC = AD$
T) $\hat{X} = ?$
Resp. 45°

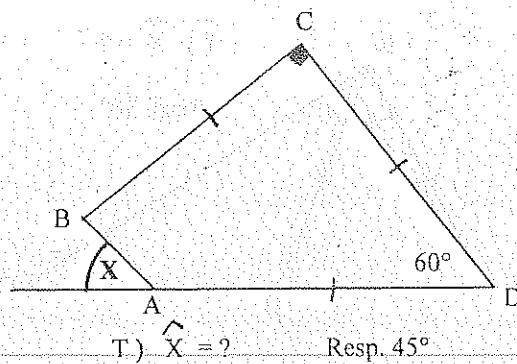
34. H) $DC = DE = DH$
T) $\hat{X} = ?$
Resp. 80°

35. H) $CA = CD = CE$
T) $\hat{1} = \hat{2}$

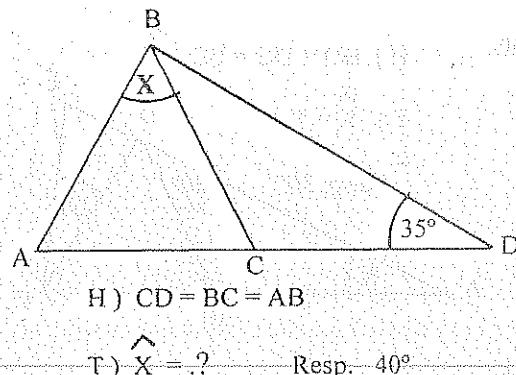
36. H) $AL = LP$
 $PM = MC$
T) $\hat{X} = \hat{B}$

37. H) $BH = HD$
 $\hat{ACD} = \hat{ECD}$
T) $\hat{E} = ?$
Resp. 90°

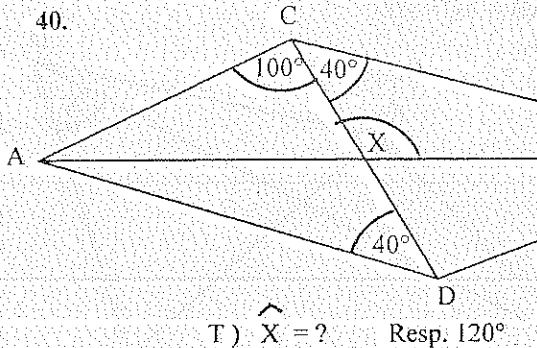
38.



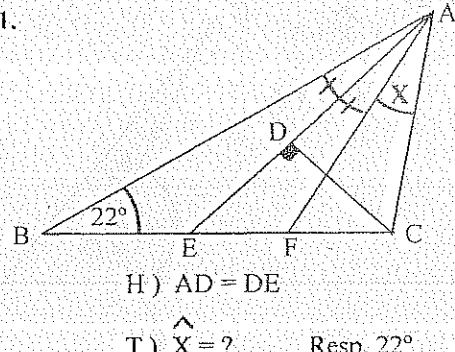
39.



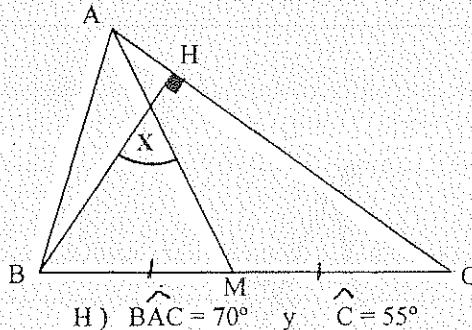
40.



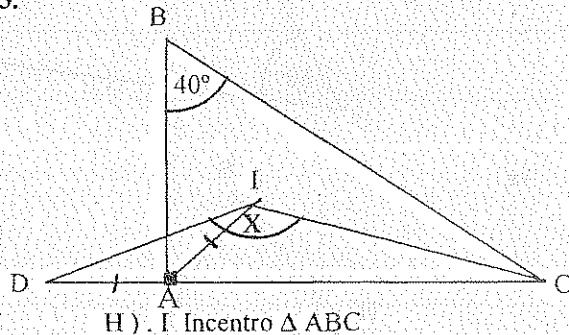
41.



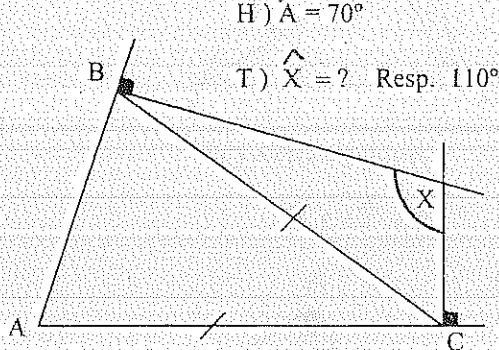
42.



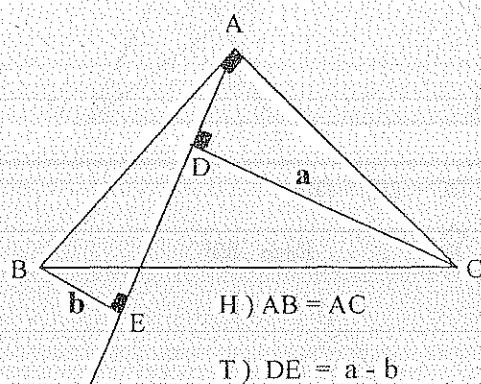
43.



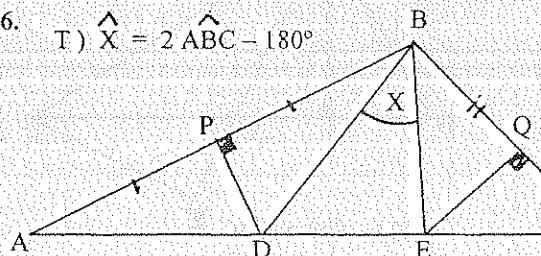
44.



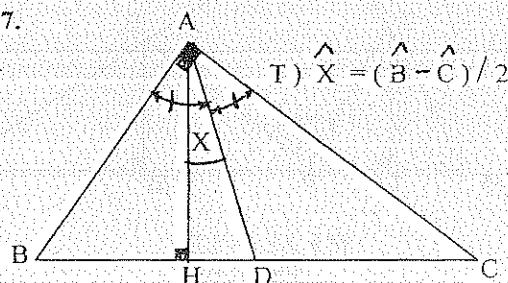
45.



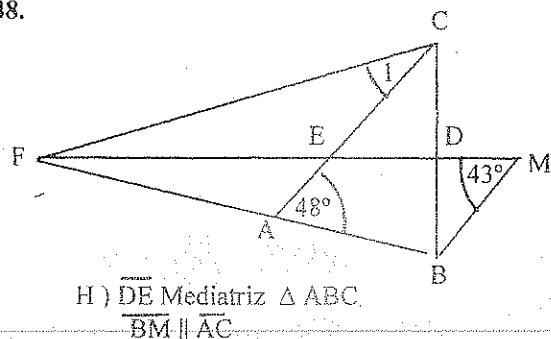
46.



47.

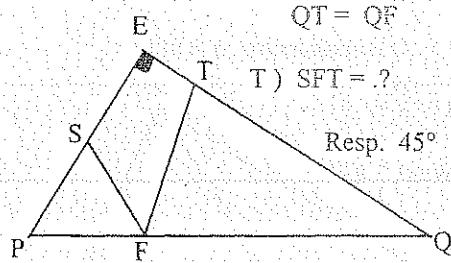


48.

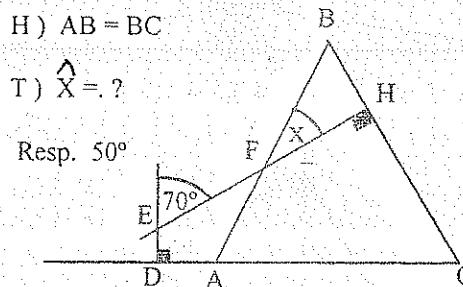


T) $\hat{I} = ?$ Resp. 38°

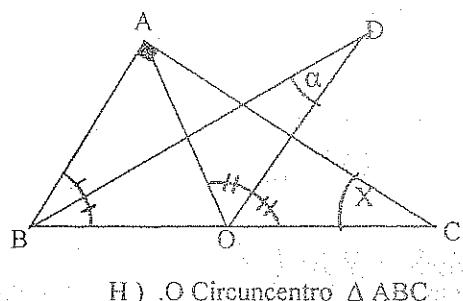
50.



52.

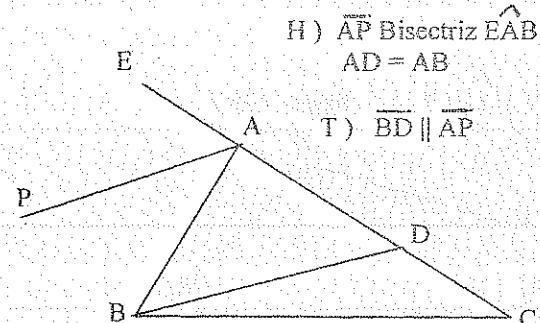


49.

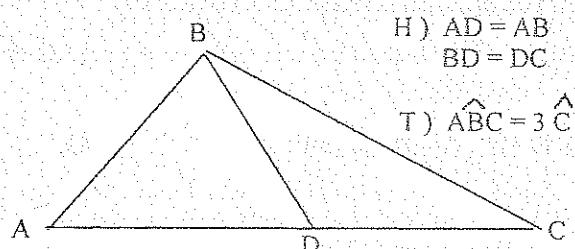


T) $\hat{X} = 90^\circ - 2\hat{\alpha}$

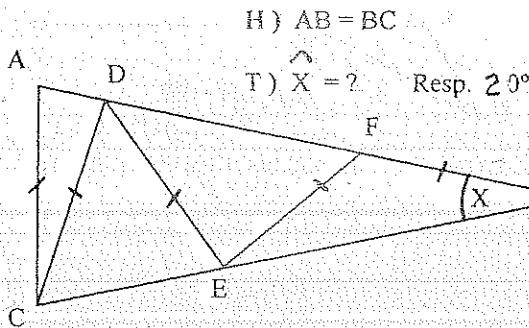
51.



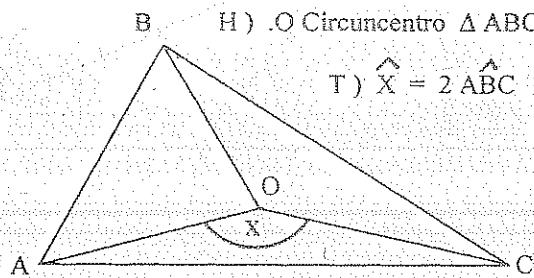
53.



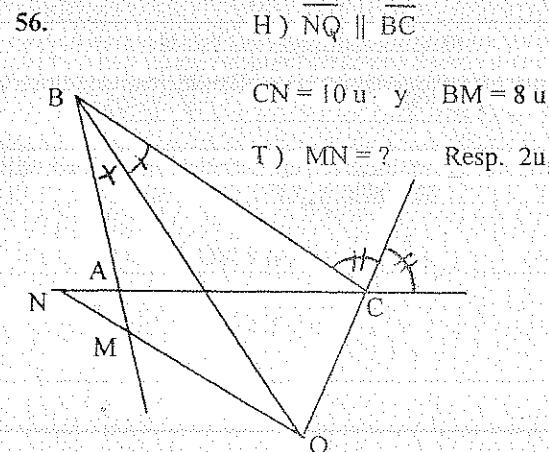
54.



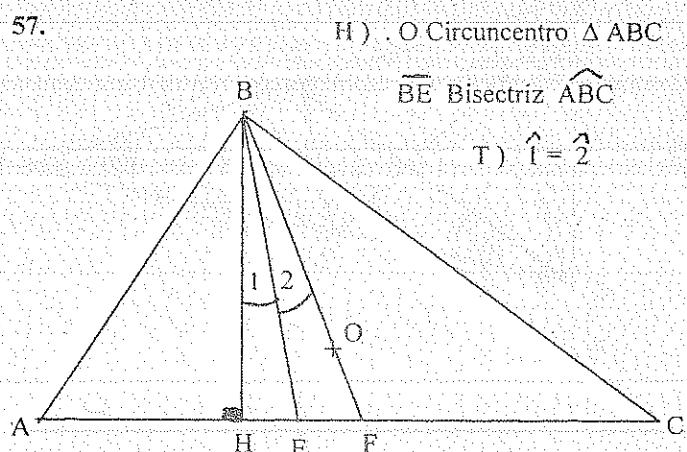
55.



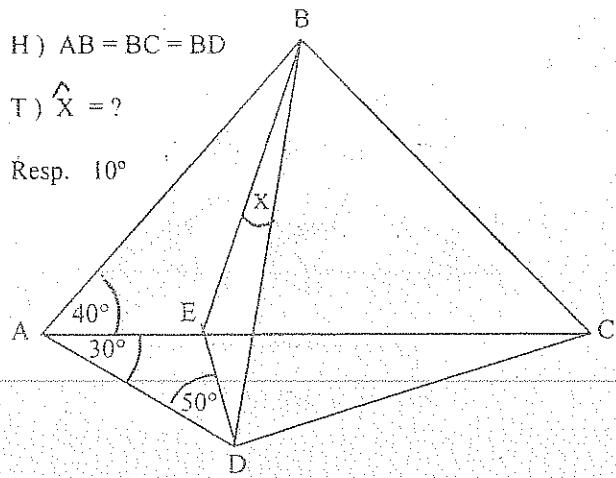
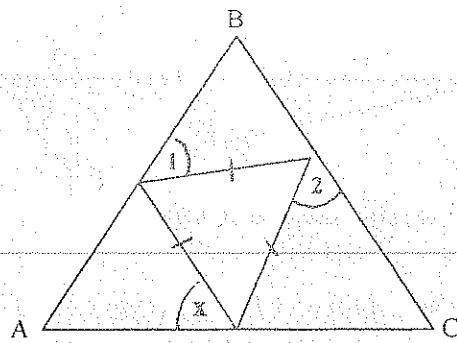
56.



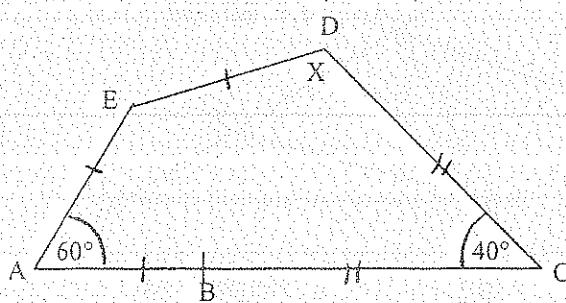
57.



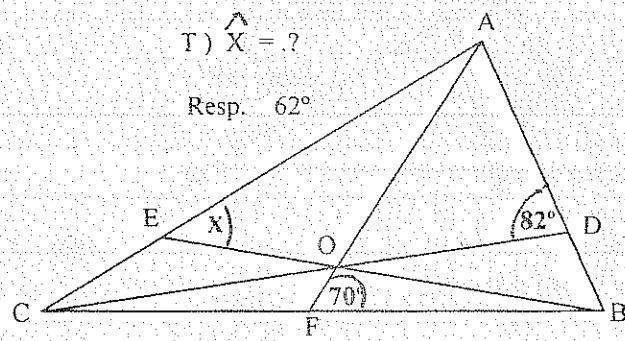
66

58. H) $AB = BC = BD$ T) $\hat{X} = ?$ Resp. 10° 59. H) $AB = BC$ T) $\hat{X} = (\hat{1} + \hat{2}) / 2$ 

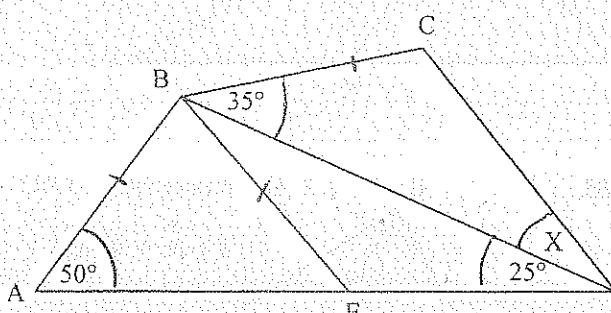
60.

T) $\hat{X} = ?$ Resp. 120° 

61.

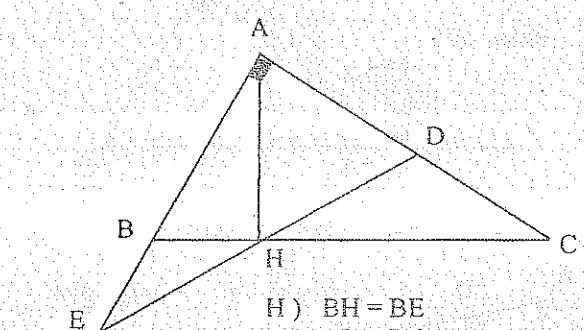
H) O Circuncentro $\triangle ABC$ T) $\hat{X} = ?$ Resp. 62° 

62.

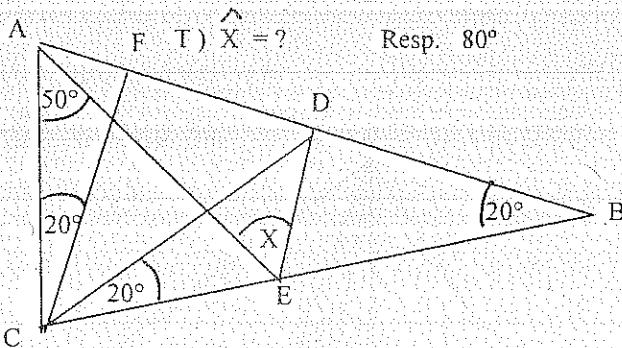
T) $\hat{X} = ?$ Resp. 30° 

63.

A

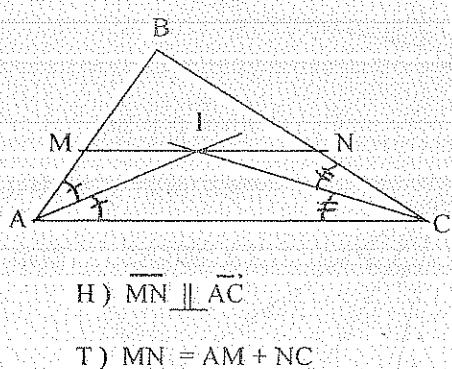


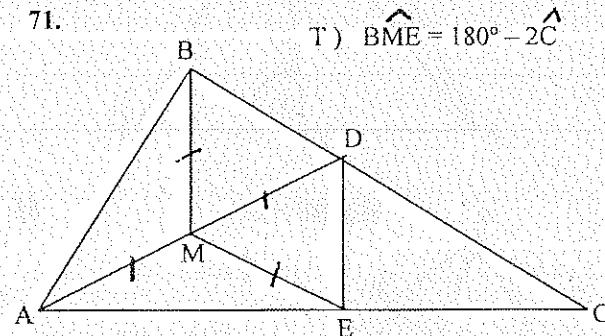
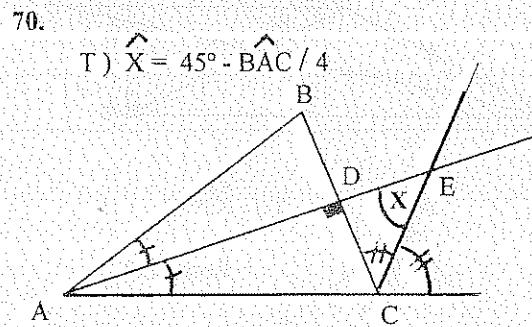
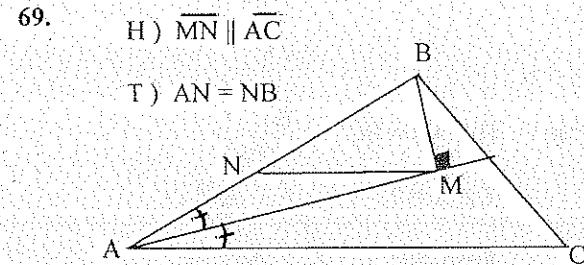
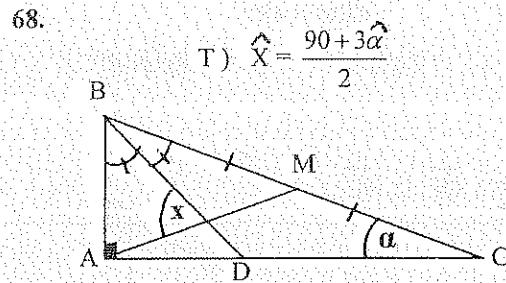
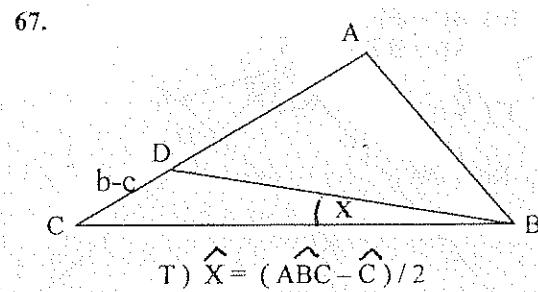
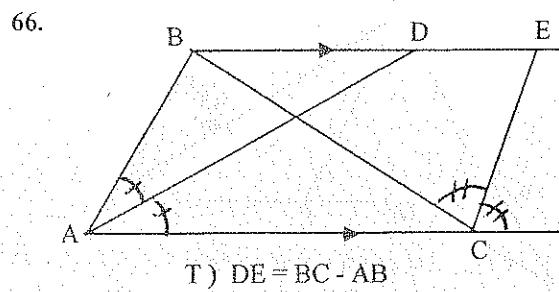
64.

H) $AB = BC$ 

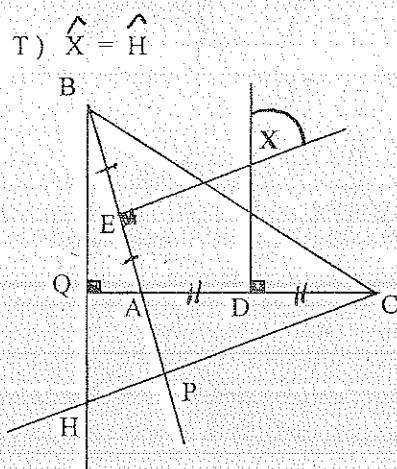
65.

6.

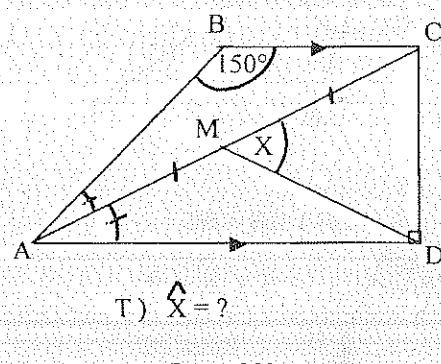




72. H). H) Ortocentro $\triangle ABC$

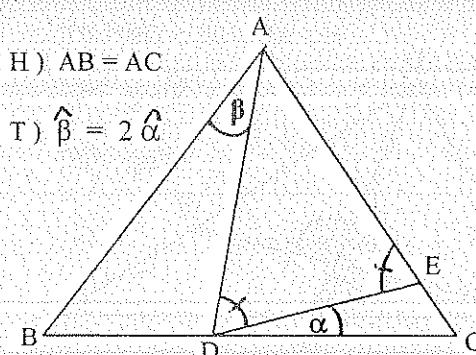


73.

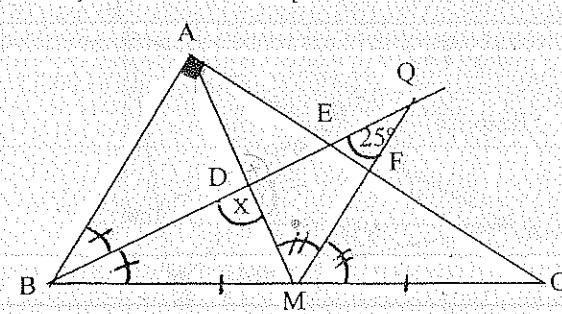


Resp. 30°

74. H) $AB = AC$

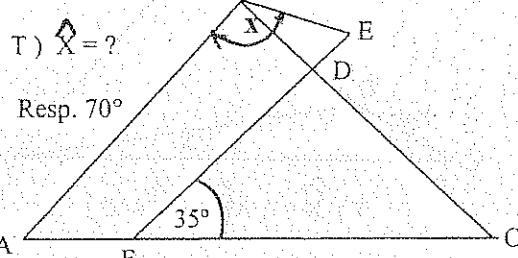


75. T) $\hat{X} = ?$ Resp. 75°



76.

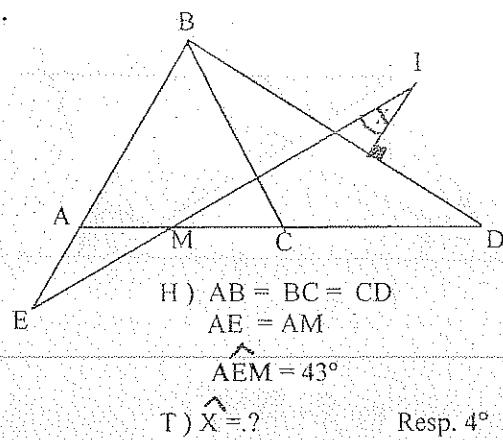
$$\text{H) } BD = BE \\ AB = BC$$



$$\text{T) } \hat{X} = ?$$

Resp. 70°

77.



$$\text{H) } AB = BC = CD \\ AE = AM$$

$$\text{AEM} = 43^\circ$$

$$\text{T) } \hat{X} = ?$$

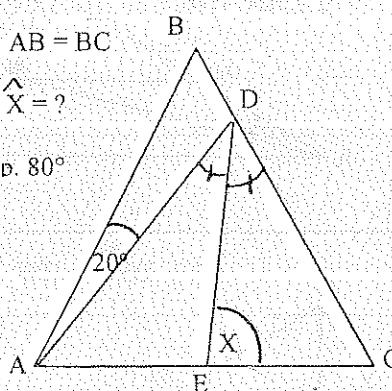
Resp. 4°

78.

$$\text{H) } AB = BC$$

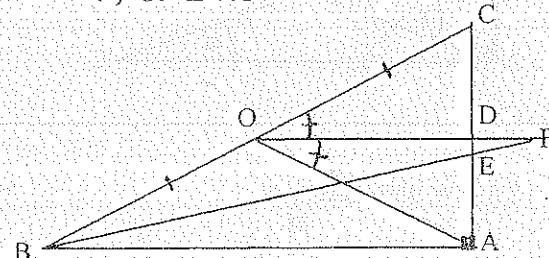
$$\text{T) } \hat{X} = ?$$

Resp. 80°



79.

$$\text{T) } \overline{OF} \perp \overline{AC}$$

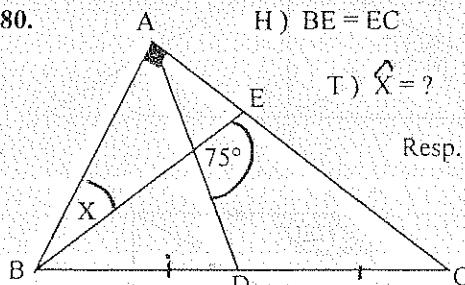


80.

$$\text{H) } BE = EC$$

$$\text{T) } \hat{X} = ?$$

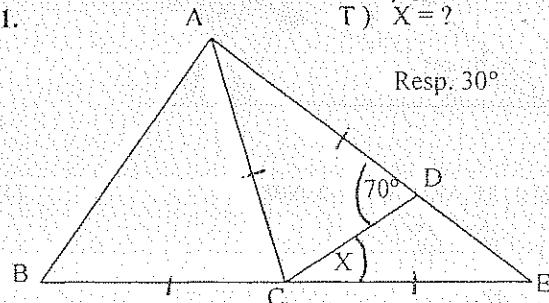
Resp. 40°



81.

$$\text{T) } \hat{X} = ?$$

Resp. 30°

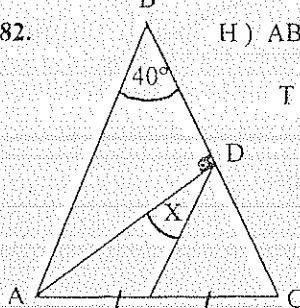


82.

$$\text{H) } AB = BC$$

$$\text{T) } \hat{X} = ?$$

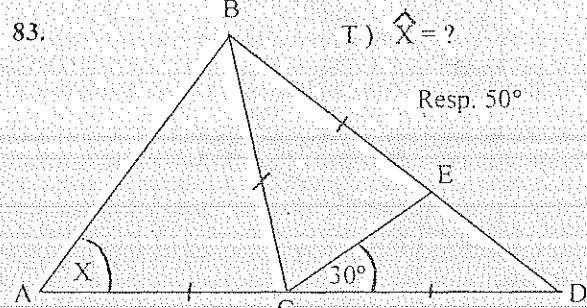
Resp. 20°



83.

$$\text{T) } \hat{X} = ?$$

Resp. 50°

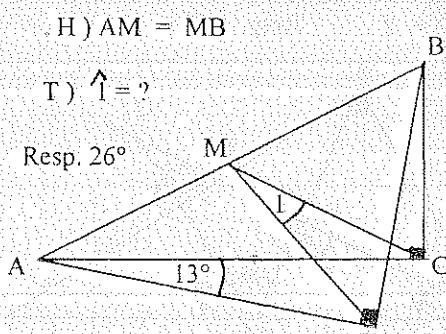


84.

$$\text{H) } AM = MB$$

$$\text{T) } \hat{l} = ?$$

Resp. 26°

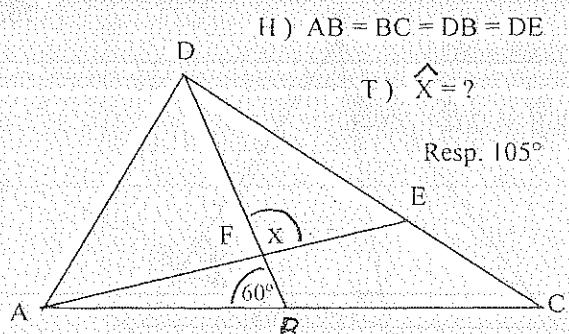


85.

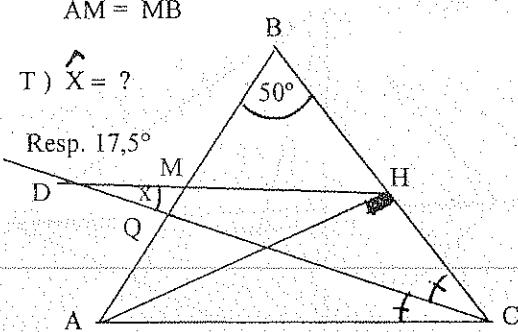
$$\text{H) } AB = BC = DB = DE$$

$$\text{T) } \hat{X} = ?$$

Resp. 105°



86. H) $AB = BC$
 $AM = MB$

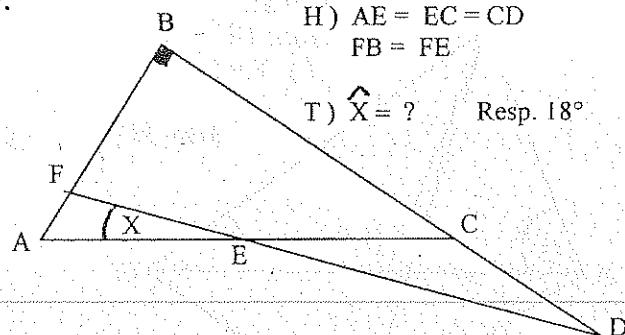


T) $\hat{X} = ?$

Resp. $17,5^\circ$

- 87.

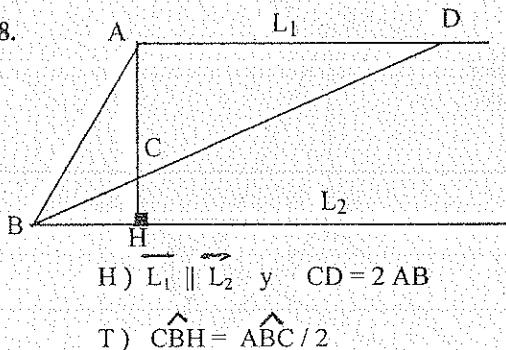
- H) $AE = EC = CD$
 $FB = FE$



T) $\hat{X} = ?$

Resp. 18°

- 88.



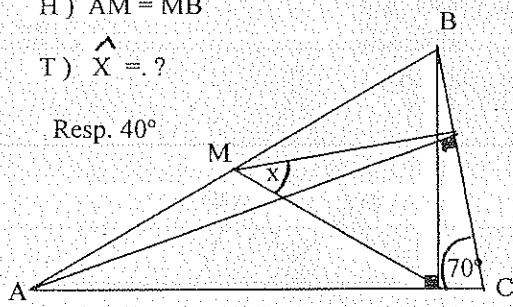
H) $L_1 \parallel L_2$ y $CD = 2 AB$

T) $\hat{CBH} = \hat{ABC}/2$

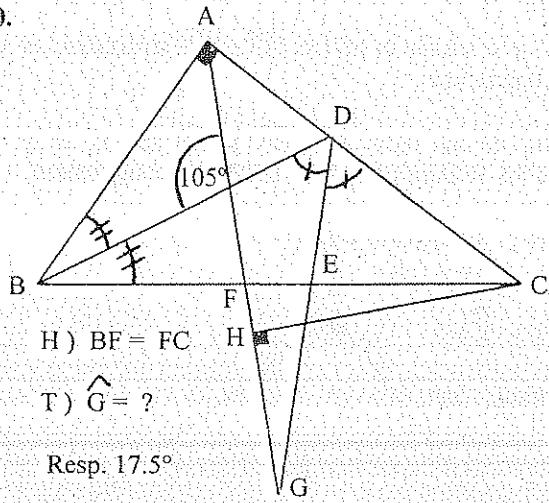
89. H) $AM = MB$

T) $\hat{X} = ?$

Resp. 40°



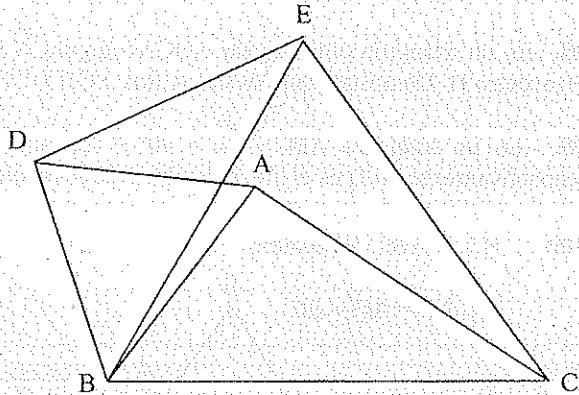
- 90.



H) $BF = FC$
T) $\hat{G} = ?$

Resp. $17,5^\circ$

- 91.



H) $\Delta ABD \sim \Delta BEC$ Equiláteros

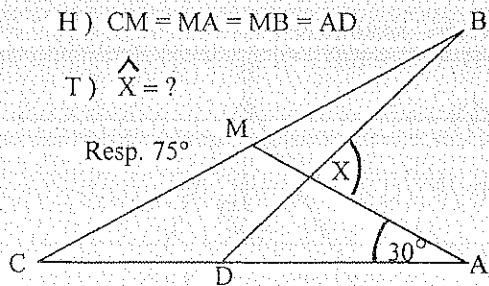
T) $DE = AC$

- 92.

- H) $CM = MA = MB = AD$

T) $\hat{X} = ?$

Resp. 75°

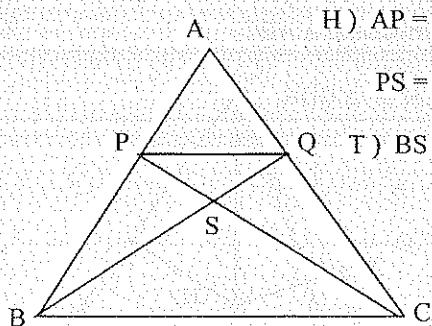


- 93.

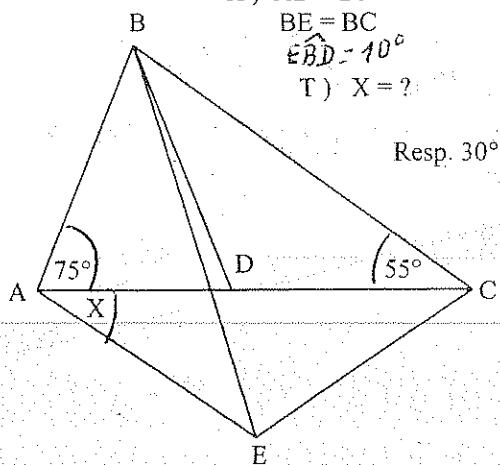
- H) $AP = AQ$

$PS = SQ$

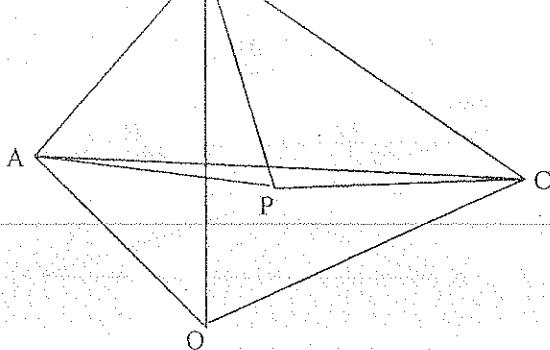
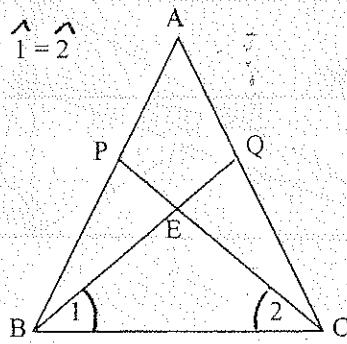
T) $BS = SC$



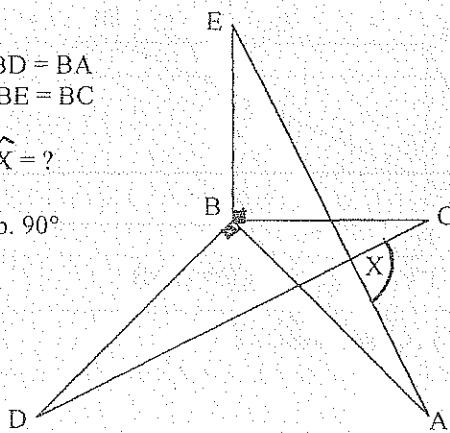
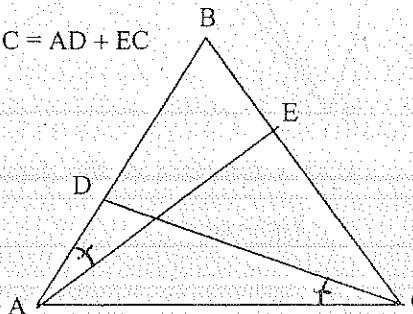
94.

H) $AB = BD$ $BE = BC$ $\angle EBD = 10^\circ$ T) $X = ?$ 

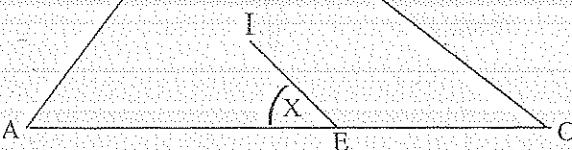
95.

H) $\triangle ABP \cong \triangle BCQ$ EquiláterosT) $AQ = CP$ 96. H) $AP = AQ$
 $PB = QC$ T) $\hat{1} = \hat{2}$ 97. H) $BD = BA$
 $BE = BC$ T) $\hat{X} = ?$

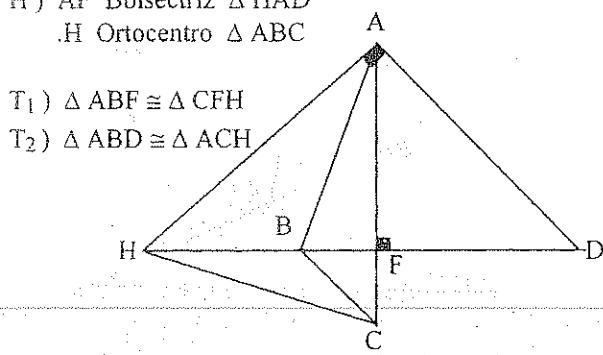
Resp. 90°

98. En un triángulo obtusángulo ABC el ángulo \hat{A} mide 45° y se trazan la alturas \overline{AP} y \overline{CQ} cortándose en el ortocentro H. Demostrar que los triángulos AQH y CQB son congruentes.99. En un triángulo ABC ($\hat{B} > 90^\circ$) los puntos medios de los lados \overline{BC} , \overline{CA} y \overline{AB} son L, M y N respectivamente. Si D es el pie de la altura de A demostrar que los triángulos LMN y DMN son congruentes.100. H) $\triangle ABC$ EquiláteroT) $AC = AD + EC$ 101. H) I Incentro $\triangle ABC$ $AB = AC$ T) $\hat{X} = ?$

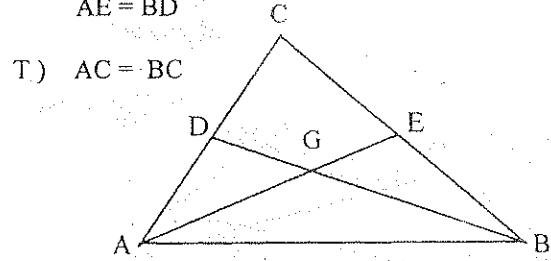
Resp. 45°

102. H) H Ortocentro $\triangle ABC$ T) $\triangle ACH \cong \triangle BDA$

104. H) AF Bbisectriz Δ HAD
H Ortocentro Δ ABC



- $$105. \quad H) . G \text{ Baricentro } \triangle ABC \\ AE = BD \quad C$$



-

107. A H) MB = MD
T) $\widehat{X} = \widehat{C}$

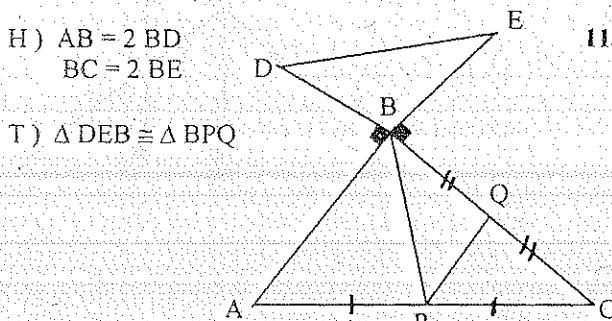
108. En un triángulo isósceles, la suma de las perpendiculares trazadas desde un punto cualquiera de la base a los lados congruentes, es igual a una altura lateral.

109. Si el triángulo ABC es equilátero y P un punto interior del triángulo; desde P se trazan \overline{PQ} , \overline{PR} y \overline{PS} perpendiculares a los lados. Demostrar que: $PQ + PR + PS$ es una línea fundamental.

110. Demostrar que la diferencia de las perpendiculares trazadas a los lados de un triángulo isósceles y a su prolongación desde la prolongación de su base, es una altura lateral.

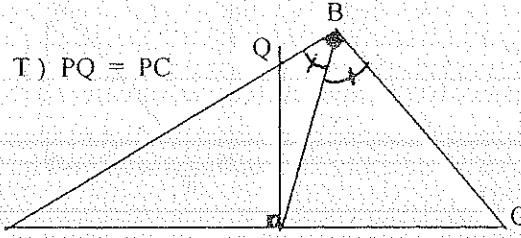
III. Si desde un punto exterior a un triángulo equilátero, se trazan perpendiculares a los tres lados, el exceso de la suma de dos de dichas perpendiculares sobre la tercera es una línea fundamental.

- $$112. \quad H) AB = 2 BD \\ BC = 2 BE$$



- 113

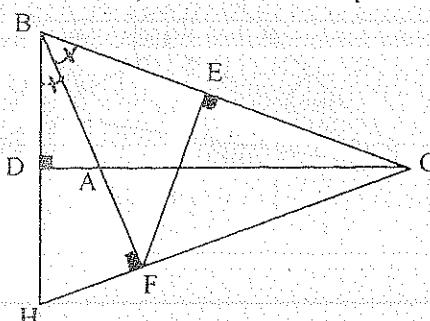
- 第二章 計算機



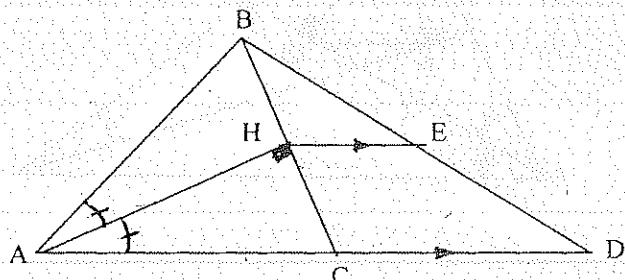
- $$H) FE = 6$$

115. H) CD = 8.

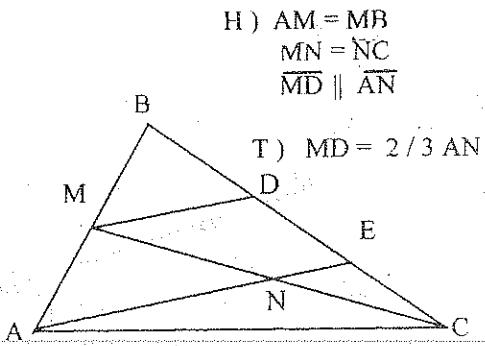
- T) DC = ? Resp. 12 u.



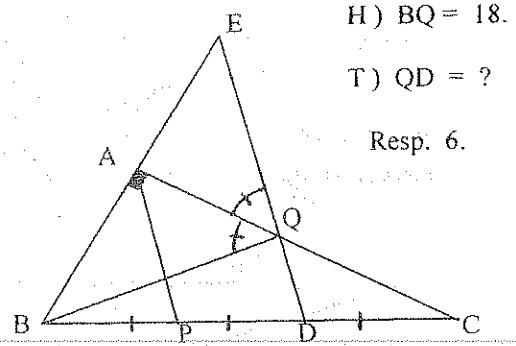
- T) HE = ? Resp. 4.



116.

T) $MD = 2/3 AN$

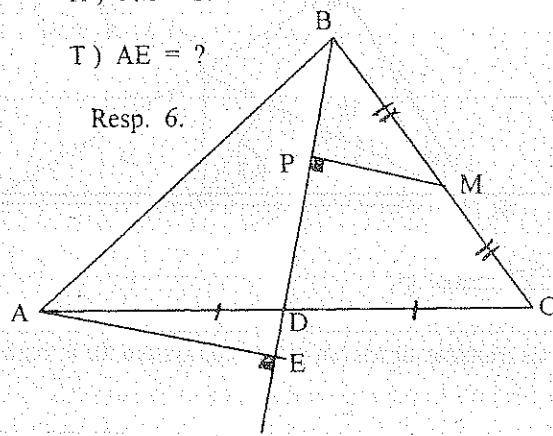
117.



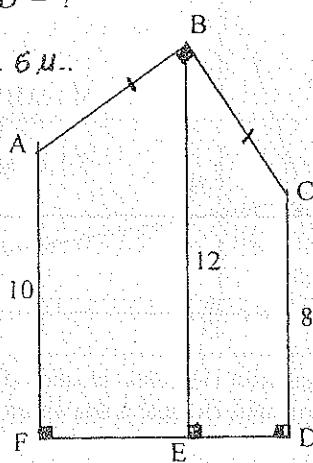
Resp. 6.

118. H) $PM = 3$.T) $AE = ?$

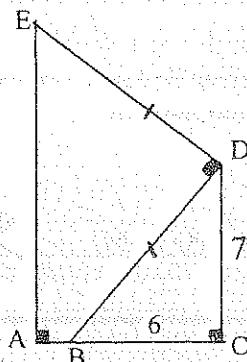
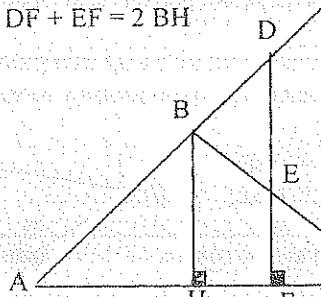
Resp. 6.

119. T) $FD = ?$

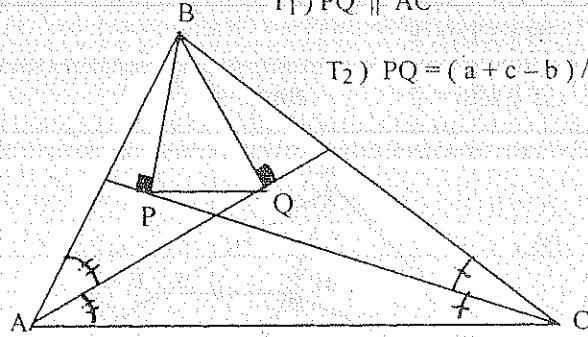
Resp. 6.

120. T) $AE = ?$

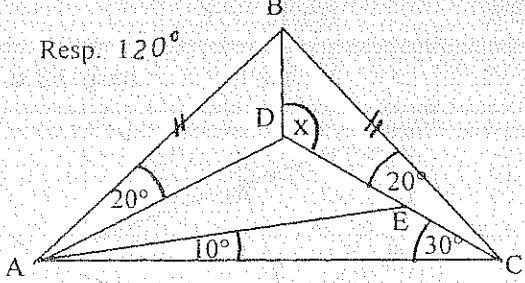
Resp. 13.

121. H) $AB = BC$ T) $DF + EF = 2 BH$ 

122.

T₁) $\overline{PQ} \parallel \overline{AC}$ T₂) $PQ = (a + c - b)/2$ 

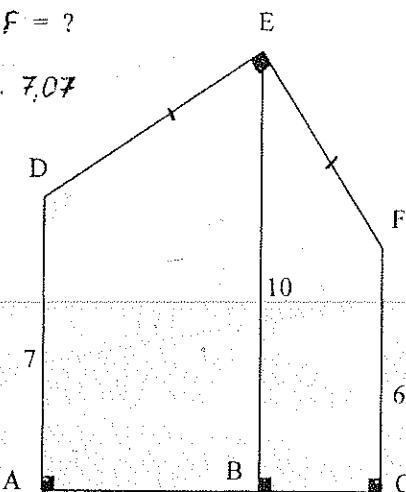
123.

T) $x = ?$ Resp. 120° 

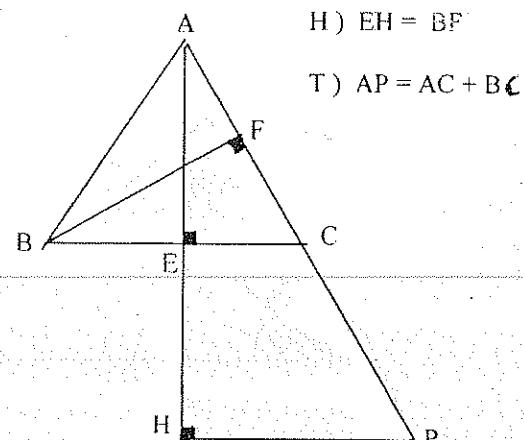
124.

T) $\overline{DF} = ?$

Resp. 7,07



125.



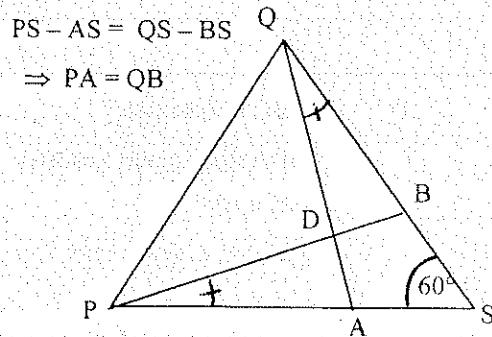
H) $EH = BP$

T) $AP = AC + BC$

4.5.8.1 EJERCICIOS RESUELTOS

15. D) $\triangle AQS \cong \triangle PBS$ (A.L.A.)

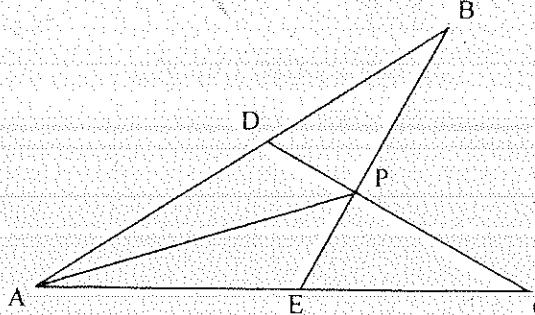
$\therefore AS = BS$



23. D) $\triangle ABE \cong \triangle ADC$ ($\hat{B} = \hat{C}$)

$\triangle DBP \cong \triangle EPC$ (A.L.A.) $\therefore BP = CP$

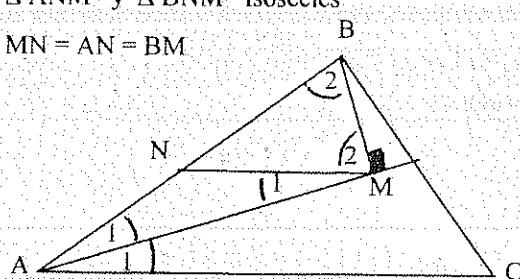
$\triangle ABP \cong \triangle ACP$ (L.A.L.) $\therefore \hat{BAP} = \hat{CAP}$



69. D) $\hat{1} + \hat{2} = 90^\circ$

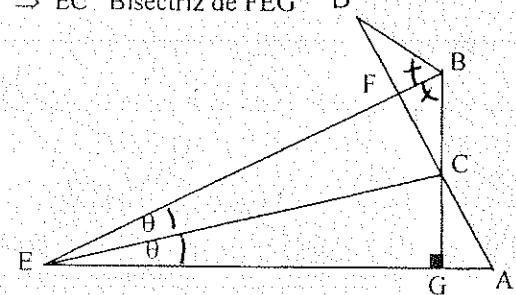
 $\triangle ANM$ y $\triangle BNM$ Isósceles

$MN = AN = BN$



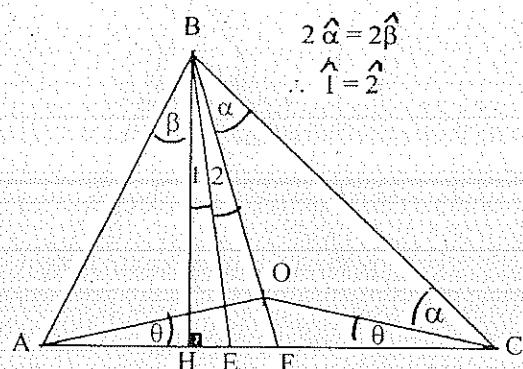
19. $\triangle EFC \cong \triangle EGC$ (A.L.A.)

$\therefore \hat{\theta} = \hat{\theta}$

 $\Rightarrow \overline{EC}$ Bisectriz de \hat{FEG} 

57. D) $\triangle CBH$ y $\triangle HBA$ Rectángulos

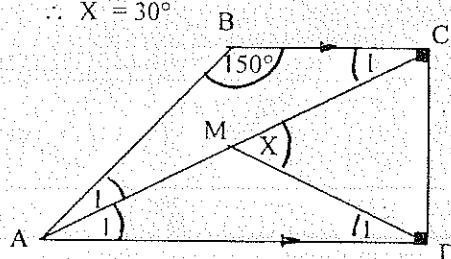
$\hat{1} + \hat{2} + 2\hat{\alpha} + \hat{\theta} = \hat{\beta} + \hat{\theta} + (\hat{1} + \hat{2} + \hat{\beta})$



73. D) $MA = MC = MD$

$\hat{1} = 15^\circ$

$\therefore \hat{X} = 30^\circ$

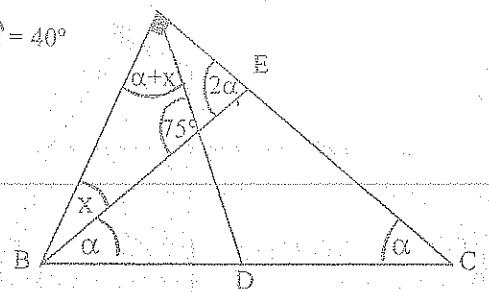


80. D) $\triangle BEC$ y $\triangle ABD$ Isósceles
 $2\hat{\alpha} + \hat{x} = 90^\circ$

$$\hat{\alpha} + 2\hat{x} + 75^\circ = 180^\circ$$

$$\hat{\alpha} + \hat{x} = 65^\circ$$

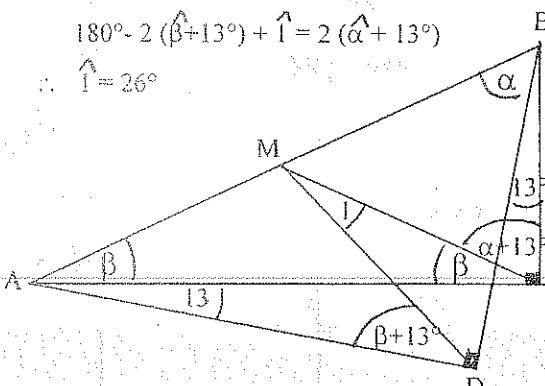
$$\therefore \hat{x} = 40^\circ$$



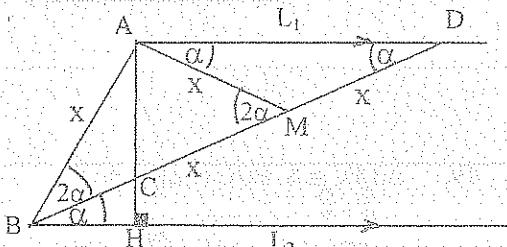
84. D) $\hat{\alpha} + \hat{\beta} + 13^\circ = 90^\circ$
 $\hat{\alpha} + \hat{\beta} = 77^\circ$ y en el $\triangle AMC$

$$180^\circ - 2(\hat{\beta} + 13^\circ) + \hat{l} = 2(\hat{\alpha} + 13^\circ)$$

$$\therefore \hat{l} = 26^\circ$$



88.



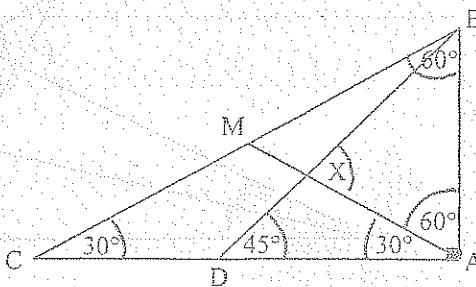
- D) M punto medio de CD (Construcción)

$$AM = CM = MD = AB = x$$

$\triangle ABM$ Equilátero $\therefore 2\hat{\alpha} = 60^\circ$

$$\angle CBH = \angle ABH/3$$

92.



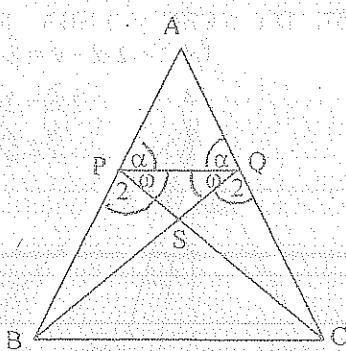
- D) $\triangle ABC$ Rectángulo

$\triangle BDA$ Rectángulo isósceles

$$\hat{BDA} = 45^\circ$$

$$\therefore \hat{x} = 45^\circ + 30^\circ = 75^\circ$$

93.



- D) $\hat{\alpha} = \hat{\alpha}$

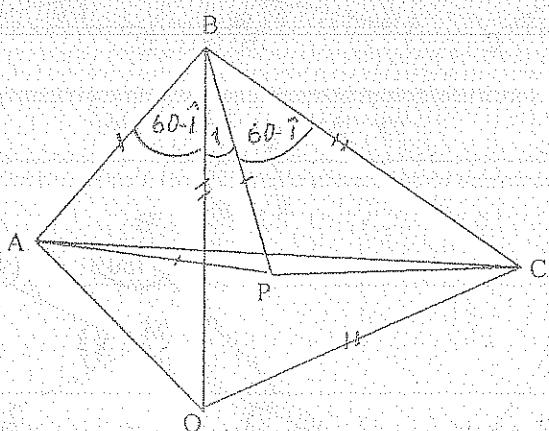
$$\hat{\omega} = \hat{\omega}$$

$$2 = 2$$

$\therefore \triangle PSB \cong \triangle QSC$ (A.L.A.)

$$\Rightarrow BS = SC$$

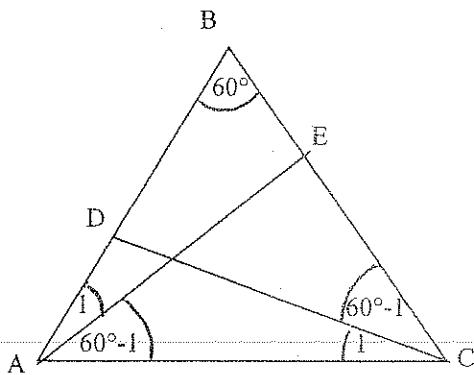
95.



- D) $\triangle ABQ \cong \triangle PBC$ (L.A.L.)

$$\therefore AQ \cong CP$$

100.



D) $\triangle ABE \cong \triangle ADC$ (A.L.A.)

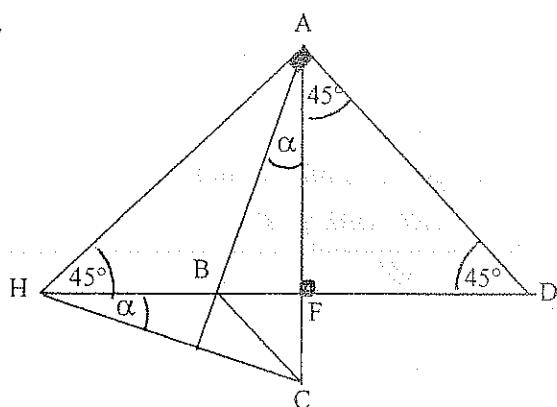
$\therefore BE = AD$

$BD = EC$

$AC = AB = AD + DB$

$\Rightarrow AC = AD + EC$

104.



D) F Circuncentro del $\triangle ADH$

$HF = FD = AF$

$\hat{\alpha} \cong \hat{\alpha}$ Complementarios

$\triangle ABF \cong \triangle CFH$ (ángulo, cateto)

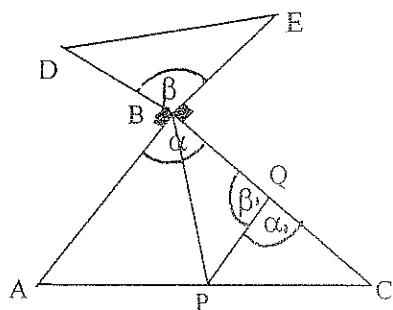
$AB = CH$

$AD = AH$

$45^\circ + \hat{\alpha} = 45^\circ + \hat{\alpha}$

$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACH$ (L.A.L.)

112.



D) $PQ \parallel AB \quad \therefore \hat{\alpha} = \hat{\alpha}_1$

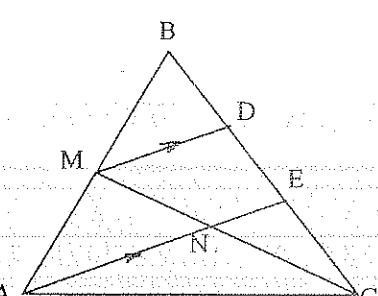
$PQ = AB/2 \quad \therefore PQ = BD$

$BQ = BC/2 \quad \therefore BQ = BE$

$\hat{\beta} = \hat{\beta}_1$ (suplementos de α y α_1)

$\therefore \triangle DEB \cong \triangle BPQ$ (L.A.L.)

116.

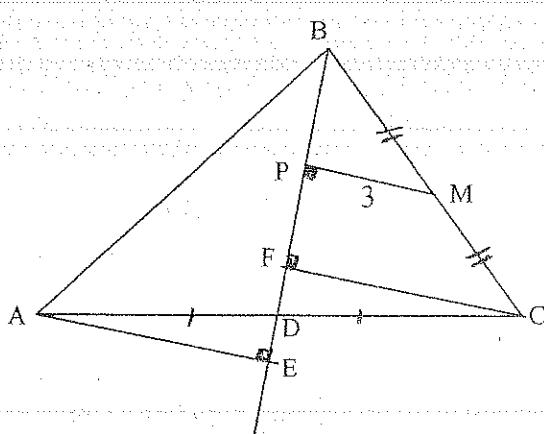


D) $MD = (AN + NE)/2$

$MD = AN/2 + \frac{1}{2}(MD/2)$

$MD = 2/3(AN)$

118.

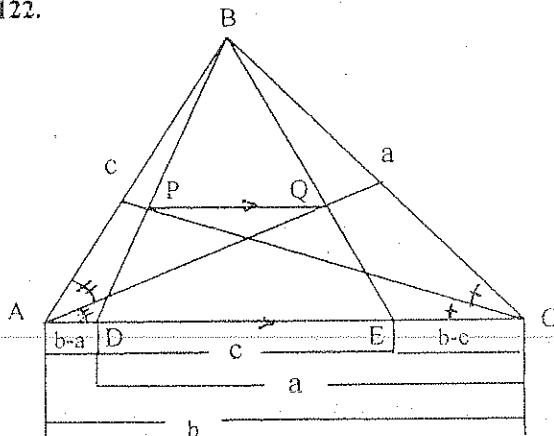


D) $CF = 2PM = 6$

$\triangle AED \cong \triangle CDF$ (A.L.A.)

$\therefore CF = AE = 6$

122.

D) $\triangle ABE \text{ y } \triangle CBD$ Isósceles

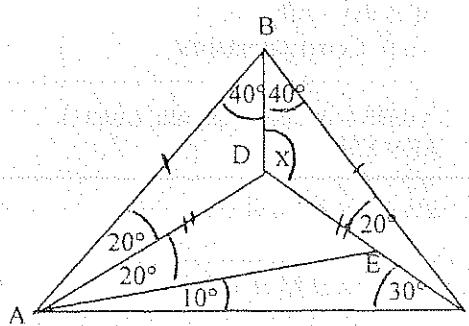
P punto medio de BD

Q punto medio de BE $\therefore \overline{PQ} \parallel \overline{AC}$

$$PQ = \frac{1}{2}(DE) = \frac{1}{2}(b - b + a - b + c)$$

$$PQ = \frac{1}{2}(a + c - b)$$

123.

D) $AD = DC$ $\therefore \triangle ABD \cong \triangle CBD$ (L.A.L.)

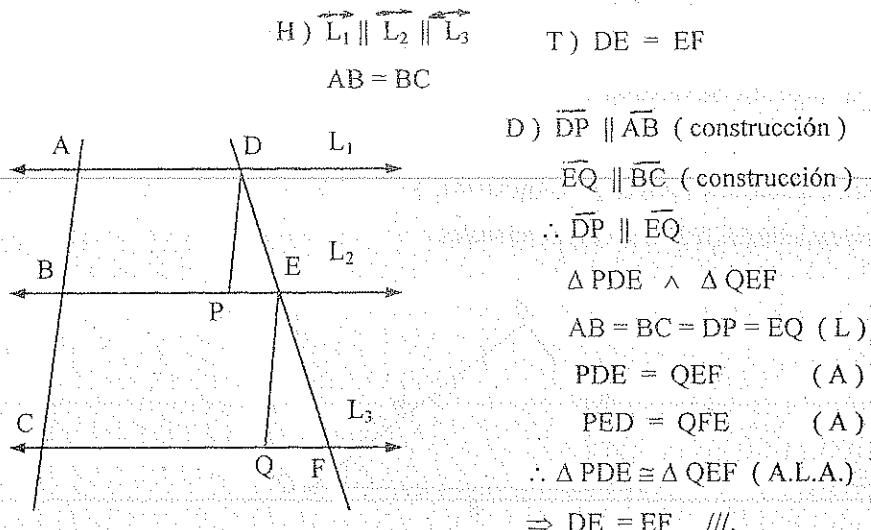
$$\hat{ABD} = \hat{DBC} = 40^\circ$$

$$\Rightarrow x = 120^\circ$$

4.5.9. SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

TEOREMA # 1

Si tres o más rectas paralelas determinan segmentos congruentes en una transversal, determinan segmentos congruentes en cualquier otra transversal.

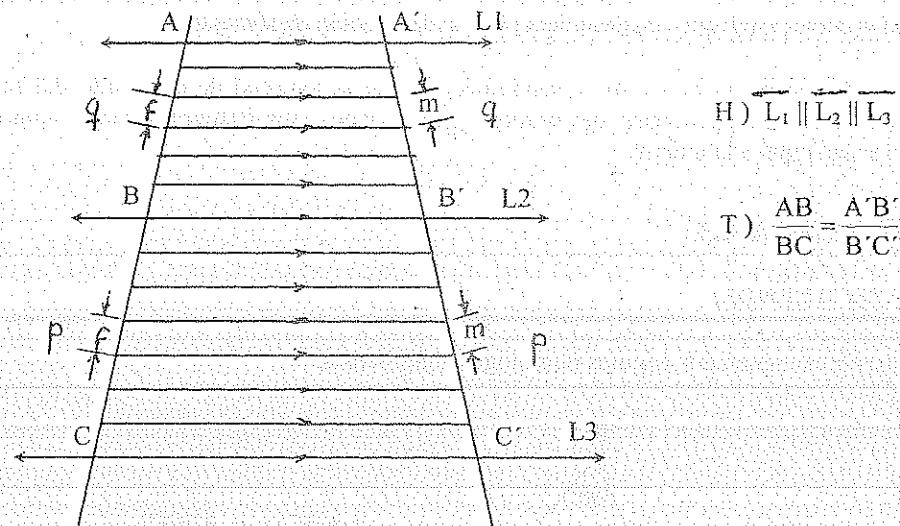


COROLARIO

Si se divide un lado de un triángulo en partes congruentes y por los puntos de división se trazan paralelas a otro lado, el tercer lado queda dividido en igual número de partes congruentes.

TEOREMA # 2 TEOREMA BÁSICO DE SEMEJANZA DE TRIÁNGULOS

Los segmentos de dos transversales interceptados entre paralelas, son proporcionales.



- D) 1. Dividimos \overline{AB} en q segmentos de igual longitud (f) y \overline{BC} en p segmentos de igual longitud (f).
2. Por los puntos de división trazamos paralelas a $\overline{L_3}$.
3. Se obtienen q segmentos de longitud (m) en $\overline{A'B'}$ y p segmentos de longitud m en $\overline{B'C'}$.

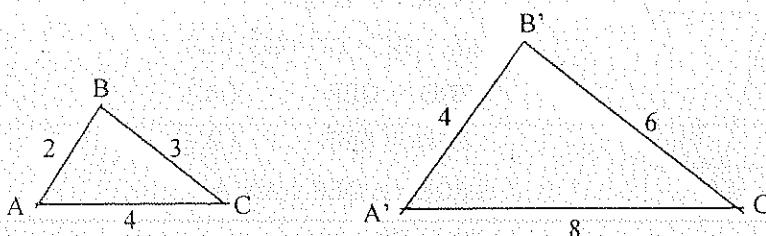
$$4. \quad f = \frac{AB}{q} = \frac{BC}{p} \quad \Rightarrow \quad \frac{AB}{BC} = \frac{q}{p}$$

$$m = \frac{A'B'}{q} = \frac{B'C'}{p} \Rightarrow \frac{A'B'}{B'C'} = \frac{q}{p} \quad (\text{que igualando})$$

$$\therefore \frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'} \quad III.$$

La definición de semejanza exige dos condiciones :

1. Los ángulos correspondientes deben ser congruentes, y
2. Los lados correspondientes deben ser proporcionales.



Si los ángulos correspondientes son congruentes:

$$\begin{aligned}\hat{A} &\cong \hat{A}' \\ \hat{B} &\cong \hat{B}' \\ \hat{C} &\cong \hat{C}'\end{aligned}$$

y los lados correspondientes son proporcionales : $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'} = \frac{1}{2}$, entonces decimos que la correspondencia es una semejanza, y se esccribe $\Delta ABC \approx \Delta A'B'C'$

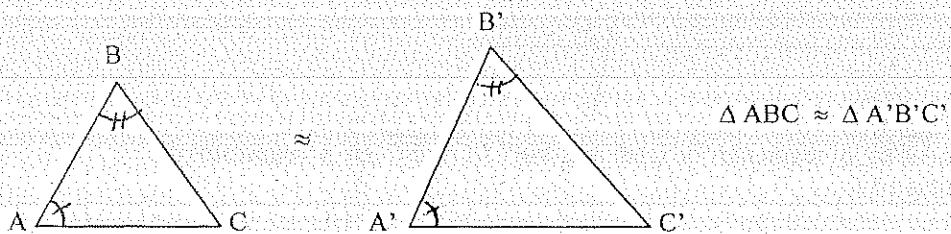
La razón de dos lados correspondientes cualesquiera ($1/2$) es la relación de semejanza.

Desde luego esta correspondencia no es una congruencia porque la longitud de cada lado del segundo triángulo es dos veces la del lado correspondiente del primero, por lo tanto, dos triángulos serán congruentes cuando su razón de semejanza sea igual a la unidad.

4.5.9.1. POSTULADOS DE SEMEJANZA

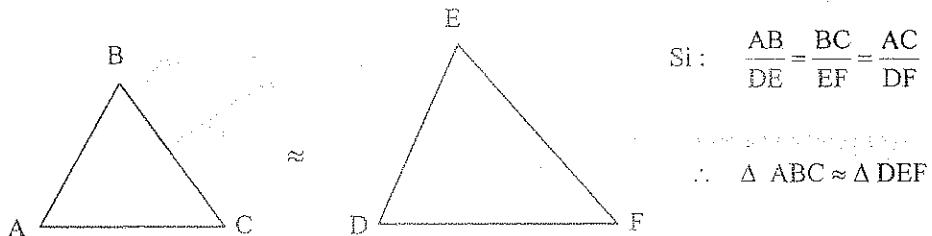
4.5.9.1.1. TRIÁNGULOS ESCALENOS

1. Dos triángulos son *semejantes* si tienen dos ángulos homólogos congruentes.

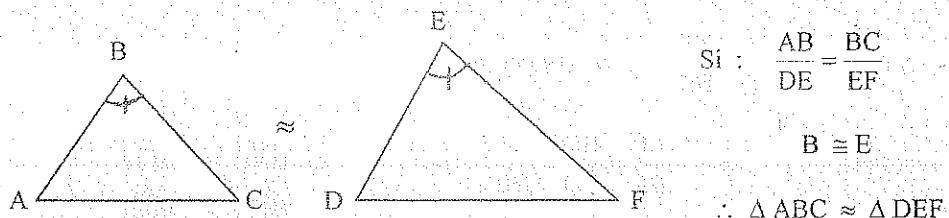


2. Toda recta paralela a uno de los lados de un triángulo, da origen a otro triángulo semejante con el primero.
3. Dos triángulos son semejantes si tienen lados respectivamente paralelos o perpendiculares.

4. Si los lados correspondientes de dos triángulos son respectivamente proporcionales, los dos triángulos son semejantes.

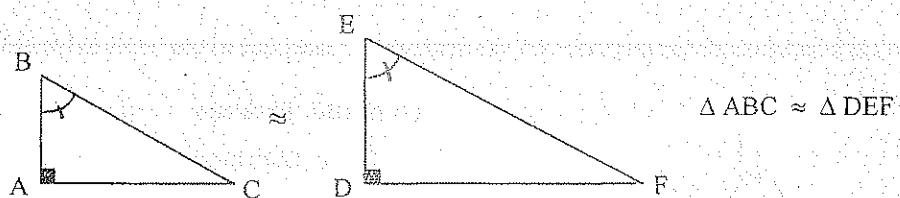


5. Si en dos triángulos, dos lados homólogos son proporcionales y los ángulos comprendidos son congruentes, los triángulos son semejantes.



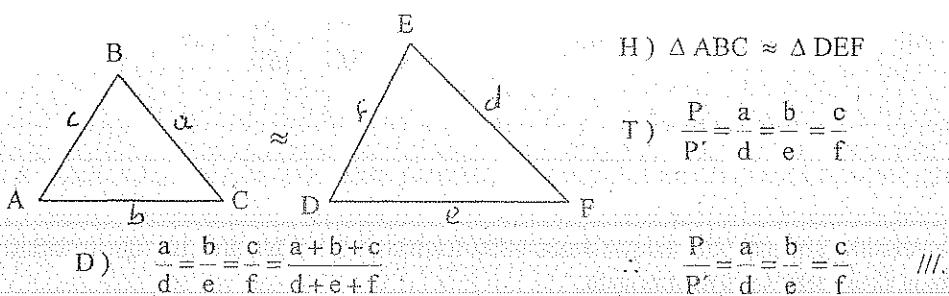
4.5.9.1.2. TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

1. Dos triángulos rectángulos son semejantes si tienen un ángulo agudo correspondiente congruente.



TEOREMA # 1

Los perímetros de dos triángulos semejantes, están en la misma relación que los lados homólogos.

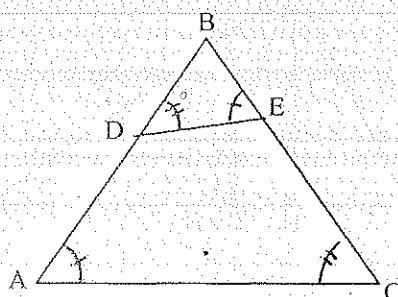


4.5.9.2 ANTIPARALELAS

$$\text{Si : } \hat{A} \cong \hat{E}$$

$$\hat{C} \cong \hat{D}$$

$\therefore \overline{DE}$ es antiparalela del lado \overline{AC}

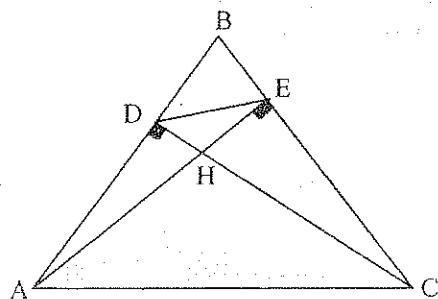


TEOREMA # 1

El segmento que une los pies de dos alturas de un triángulo es antiparalela de un lado.

H) $\triangle ABC$ Escaleno

. H su OrtoCentro

T) \overline{DE} Antiparalela del lado \overline{AC} D) $\triangle ABE \sim \triangle DBC$ (rectángulos y \widehat{B} común)

$$\therefore \triangle ABE \approx \triangle DBC \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{BE}{BD} = \frac{AE}{DC}; \quad \therefore \frac{AB}{BE} = \frac{BC}{BD}$$

 $\triangle ABC \sim \triangle DBE$ ($\frac{AB}{BE} = \frac{BC}{BD}$ y \widehat{B} común)

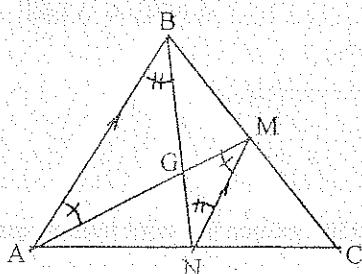
$$\therefore \triangle ABC \approx \triangle DBE \Rightarrow \frac{AB}{BE} = \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{DE}; \quad \therefore \widehat{BAC} = \widehat{BED}$$

$$\widehat{BCA} = \widehat{BDE}$$

 $\Rightarrow \overline{DE}$ es antiparalela del lado \overline{AC}

4.5.9.3. PROPIEDAD DEL BARICENTRO

El Baricentro divide a cada una de las medianas en dos segmentos, tales que el uno es el doble del otro.

H) $\triangle ABC$ Escaleno

. G su Baricentro

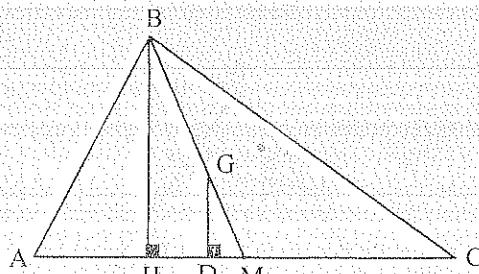
T) $AG = 2 GM$

$$D) \overline{MN} \parallel \overline{AB} \therefore \triangle ABG \approx \triangle MNG \Rightarrow \frac{AB}{MN} = \frac{BG}{NG} = \frac{AG}{MG} = 2$$

$$\therefore AG = 2 MG$$

TEOREMA # 1.

La longitud del segmento perpendicular trazado desde el Baricentro de un triángulo a uno de sus lados, es igual a la tercera parte de la altura relativa al mismo lado.

H) $\triangle ABC$ Escaleno

. G su Baricentro

T) $GD = BH/3$

$$D) \triangle BHM \approx \triangle GDM \Rightarrow \frac{BH}{GD} = \frac{BM}{GM} = \frac{HM}{DM} = 3$$

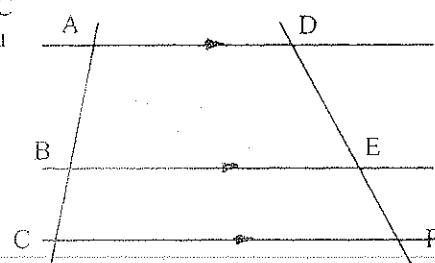
$$\therefore GD = BH/3$$

4.5.9.4. EJERCICIOS

1. H) $AB = 2 BC$
 $DF = 24 \text{ u}$

T) $DE = ?$

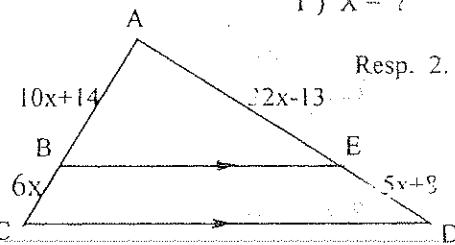
Resp. 16 u



2.

T) $X = ?$

Resp. 2.



3.

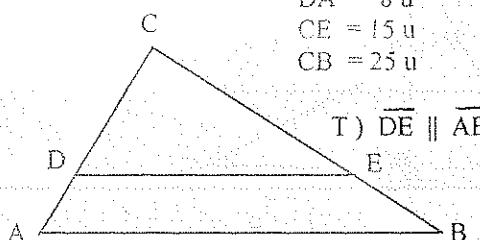
H) $CD = 12 \text{ u}$

$DA = 8 \text{ u}$

$CE = 15 \text{ u}$

$CB = 25 \text{ u}$

T) $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$

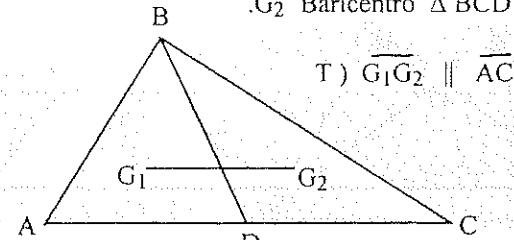


4.

H) G_1 Baricentro $\triangle ABD$

G_2 Baricentro $\triangle BCD$

T) $\overline{G_1G_2} \parallel \overline{AC}$

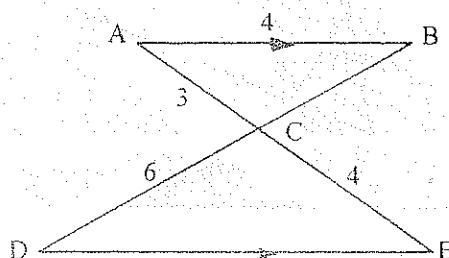


5. T1) $BC = ?$

Resp. 4,50 u.

T2) $DE = ?$

Resp. 5,33 u.

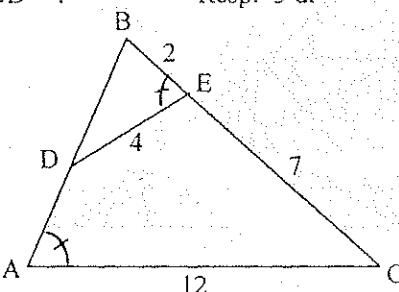


6. T1) $AB = ?$

Resp. 6 u.

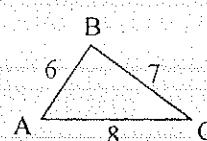
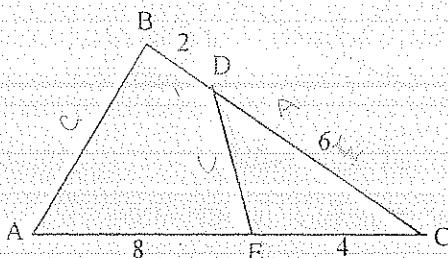
T2) $BD = ?$

Resp. 3 u.



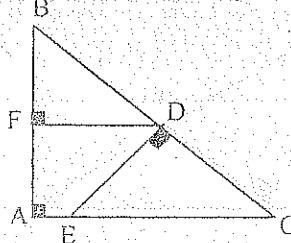
7. T) $\triangle ABC \approx \triangle DEC$

8. T) $\triangle ABC \approx \triangle DEF$



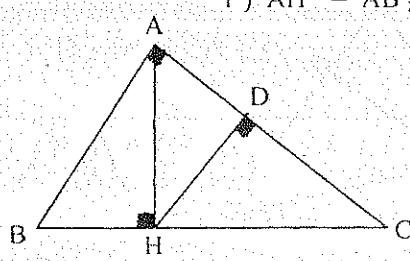
9.

T) $DE \times BD = EC \times BF$

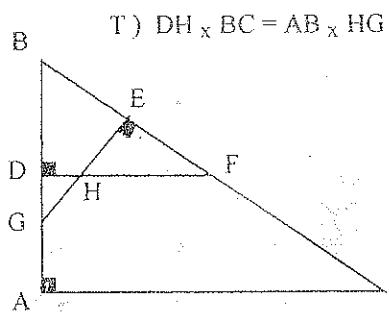


10.

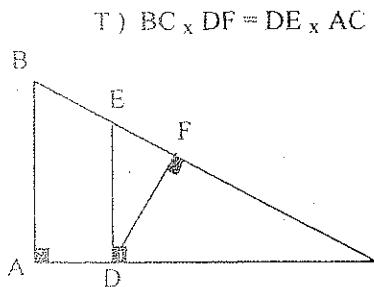
T) $AH^2 = AB \times HD$



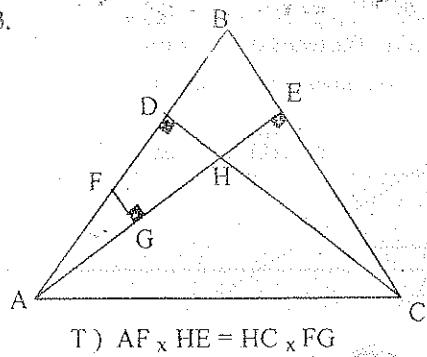
11.



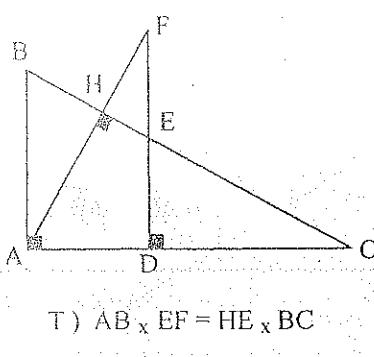
12.



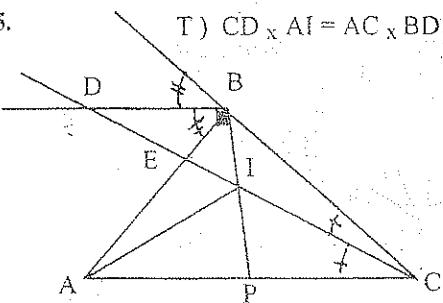
13.



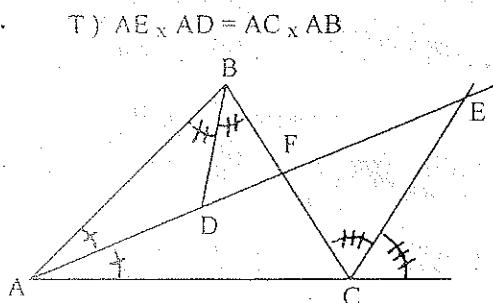
14.



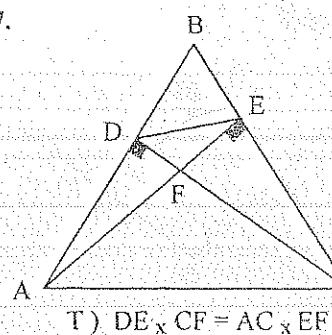
15.



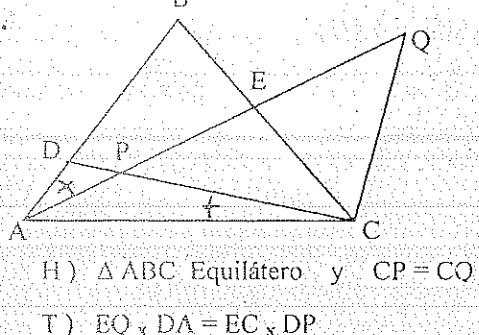
16.



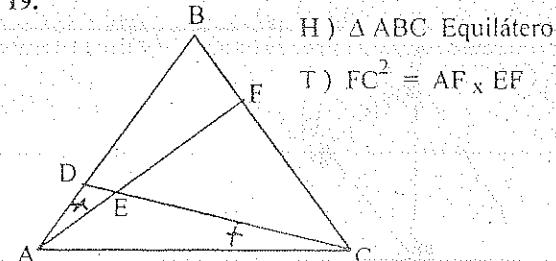
17.



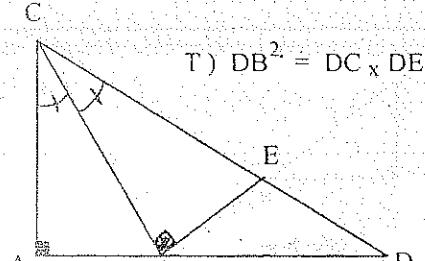
18.



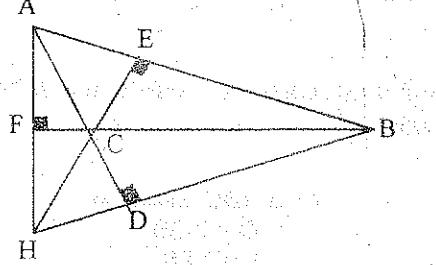
19.



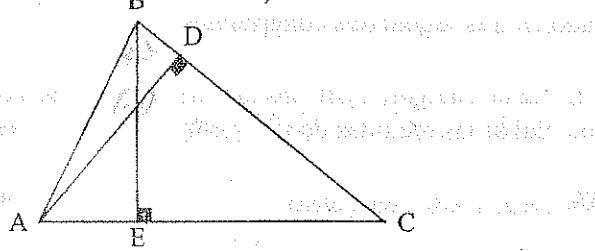
20.



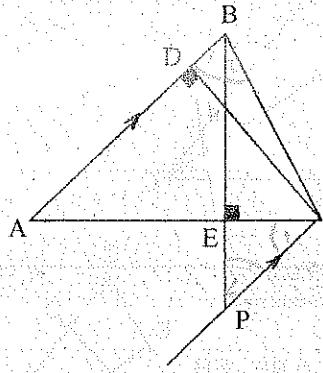
21. T) $AC \times CD = HC \times CE$



22. T) $BC / AC = hb / ha$

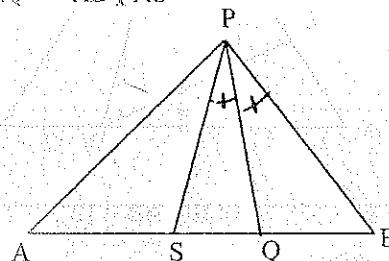


23. T) $EC \times BH = DH \times CP$

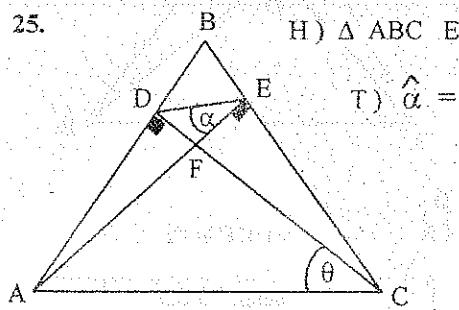


24. H) $AP = AQ$

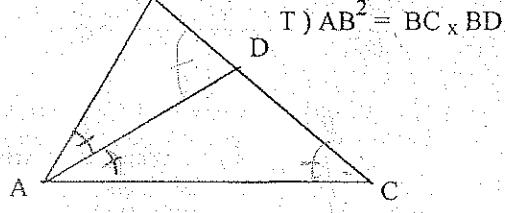
T) $AQ^2 = AB \times AS$



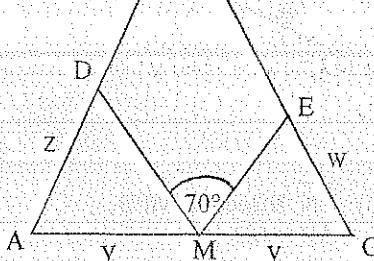
25. H) ΔABC Escaleno
T) $\hat{\alpha} = \hat{\theta}$



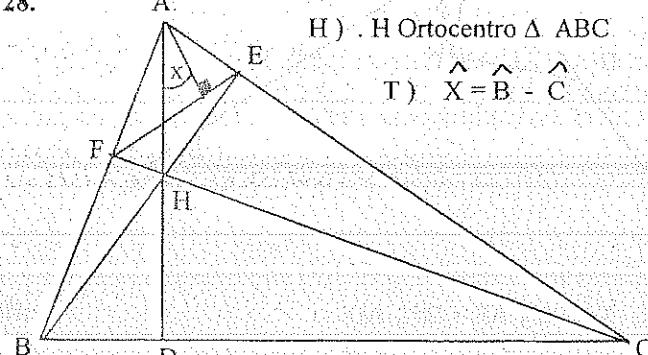
26. H) $\hat{C} = \hat{A} / 2$



27. H) $AB = BC$
T) $y^2 = z \times w$

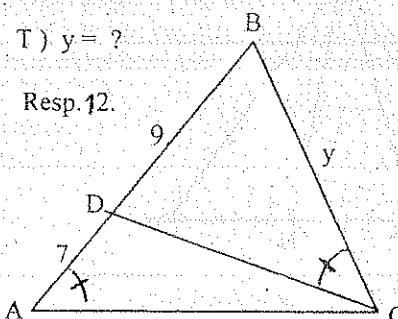


28. A. H) . H Ortocentro ΔABC
T) $\hat{X} = \hat{B} - \hat{C}$



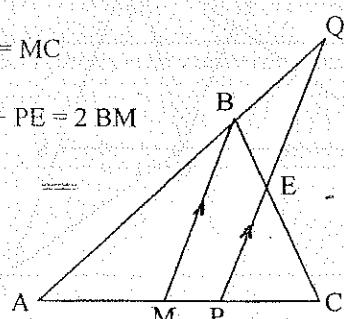
29. T) $y = ?$

Resp. 12.



30. H) $AM = MC$

T) $PQ + PE = 2 BM$



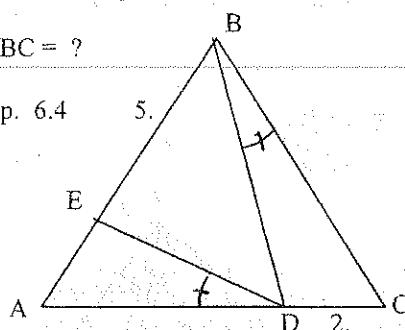
31. Demostrar que las paralelas trazadas a dos lados de un triángulo por el baricentro, dividen al tercer lado en tres segmentos congruentes.

32. En el triángulo ABC las alturas \overline{AP} y \overline{CS} se cortan en el punto H. Si $AB = AC$, $AH = 9$ m y $HP = 3$ m. Hallar las medidas de CH y HS .
Resp. 6,60 u.; 4,03 u.

33. H) ΔABC Equilátero

T) $BC = ?$

Resp. 6.4

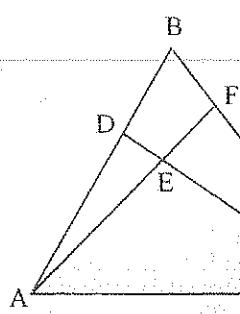


34.

H) ΔABC Escaleno

$AD = 2 DB$
 $CF = 2 FB$

T) $DE \times EA = EC \times EF$

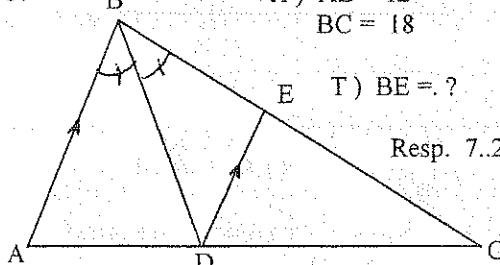


35.

H) $AB = 12$
 $BC = 18$

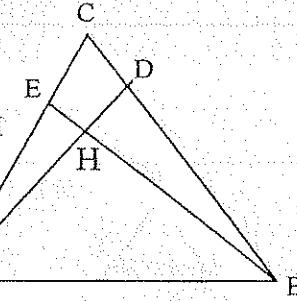
T) $BE = ?$

Resp. 7.2



36. H) ΔABC Escaleno
. H su OrtoCentro

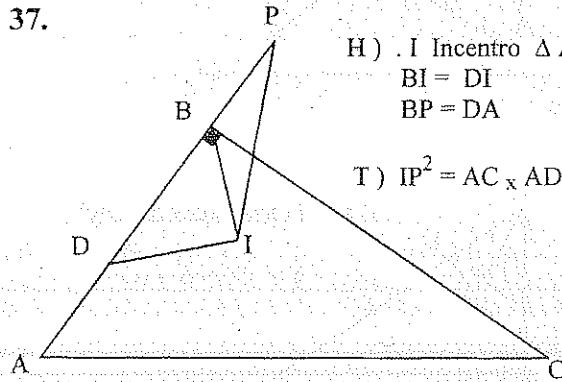
T) $AE \times EC = BE \times EH$



37.

H) I Incentro ΔABC
 $BI = DI$
 $BP = DA$

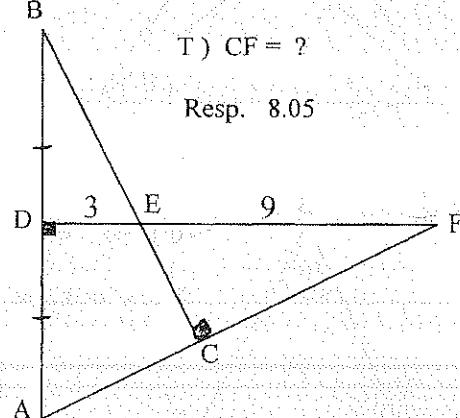
T) $IP^2 = AC \times AD$



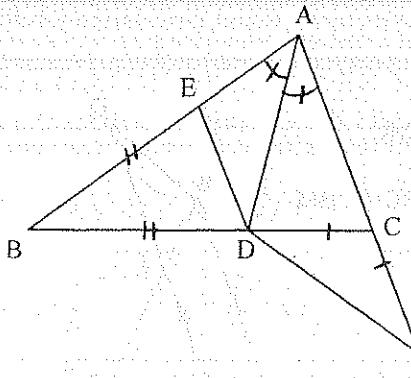
38.

T) $CF = ?$

Resp. 8.05



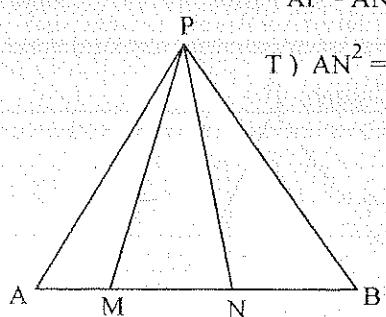
39. T) $DE \times AF = DF \times AD$



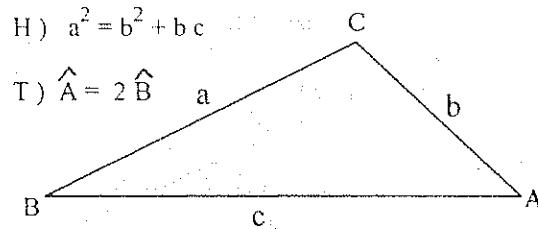
40.

H) \overline{PN} Bisectriz MPB
 $AP = AN$

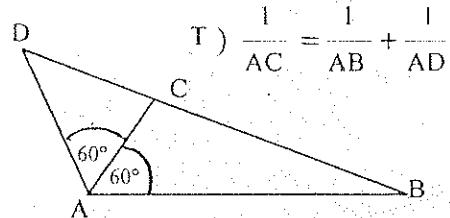
T) $AN^2 = AB \times AM$



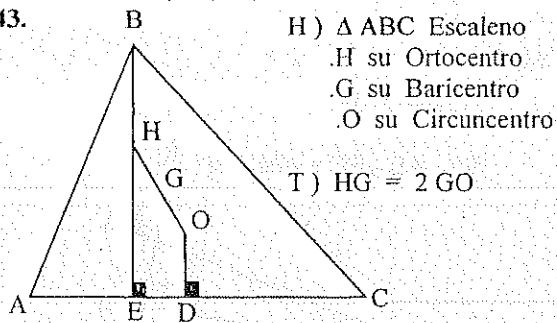
41.



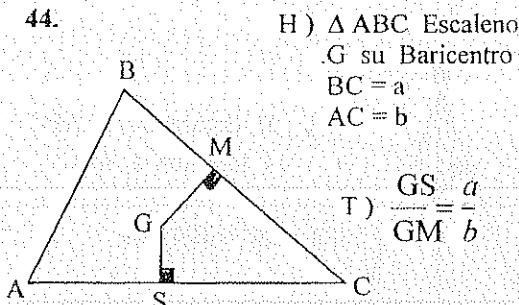
42.



43.

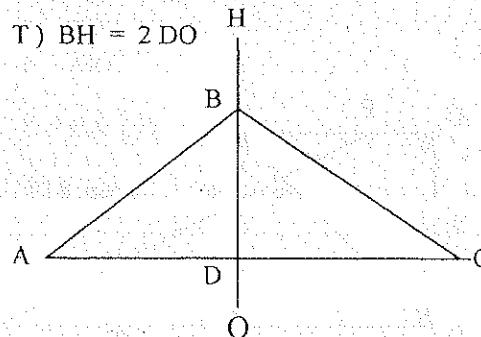


44.

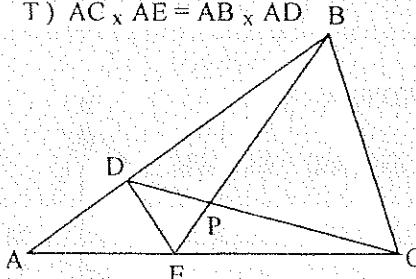
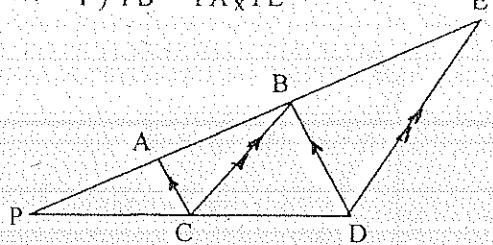
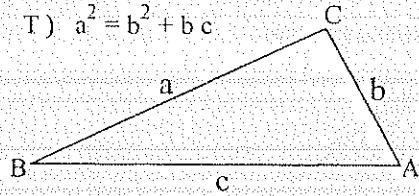


45.

H) .H Ortocentro ΔABC
.O Circuncentro ΔABC



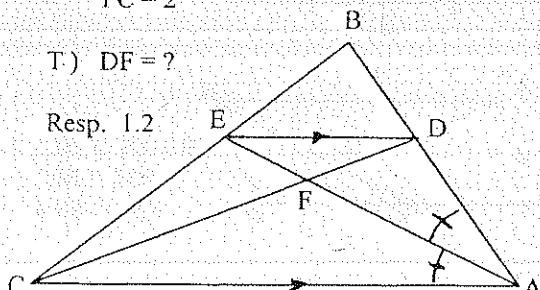
46.

H) $DP \times PC = PE \times BP$ T) $AC \times AE = AB \times AD$ 47. T) $PB^2 = PA \times PE$ 48. H) $\hat{A} = 2 \hat{B}$ T) $a^2 = b^2 + bc$ 

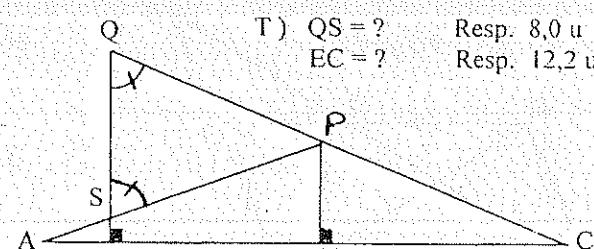
49. H) $AB = 6$
 $AC = 4$
 $FC = 2$

T) $DF = ?$

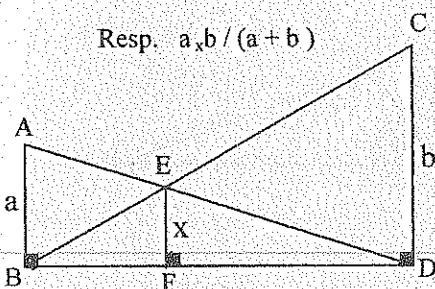
Resp. 1.2



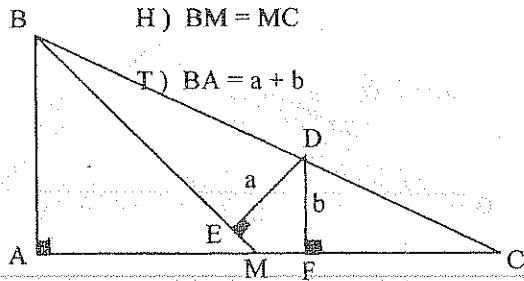
50.

H) $QC = 22$ $AS = 6$ $PE = 7$ T) $QS = ?$ $EC = ?$ Resp. 8,0 u
Resp. 12,2 u

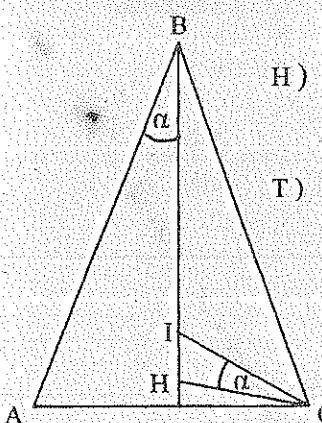
86

51. T) $X = f(a, b)$?Resp. $a, b / (a + b)$ 

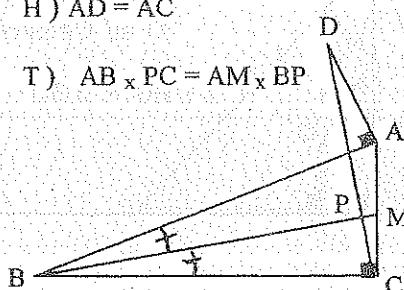
52.

H) $BM = MC$ T) $BA = a + b$ 

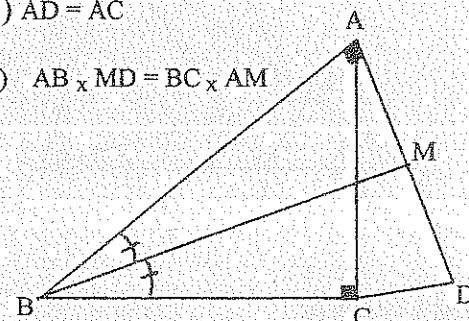
53.

H) . H Orto centro $\triangle ABC$. I Incentro $\triangle ABC$ T) $CH^2 = BH \times IH$ 

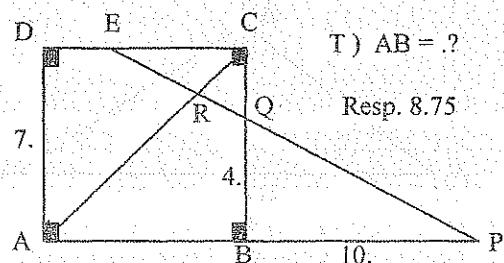
54.

H) $AD = AC$ T) $AB \times PC = AM \times BP$ 

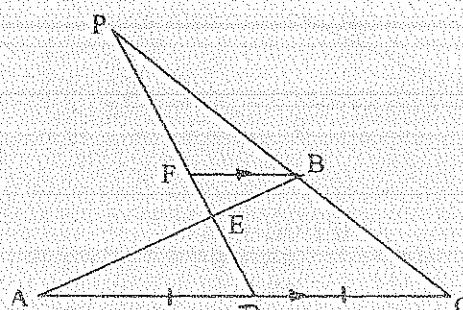
55.

H) $AD = AC$ T) $AB \times MD = BC \times AM$ 

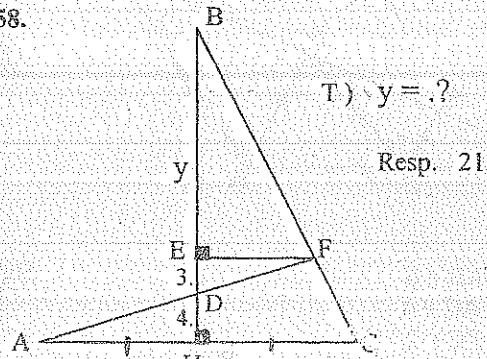
56.

H) $\frac{CR}{RA} = \frac{2}{5}$ T) $AB = ?$ 

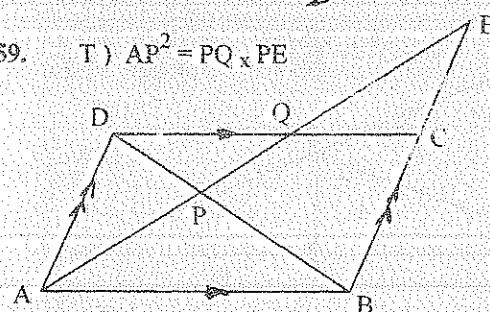
57.

T) $DE \times PF = EF \times DP$ 

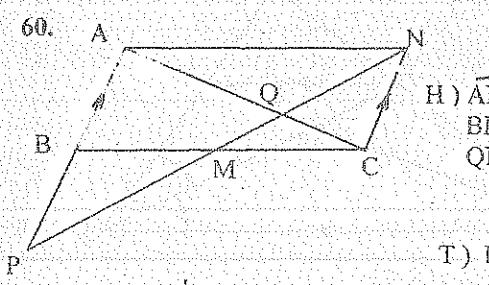
58.

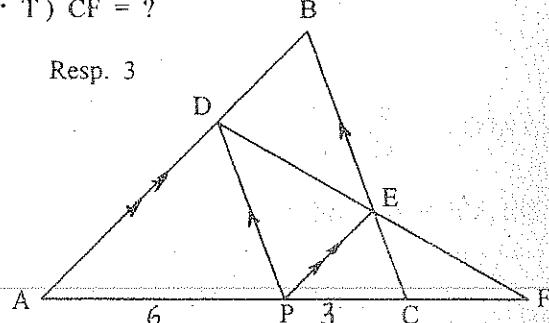
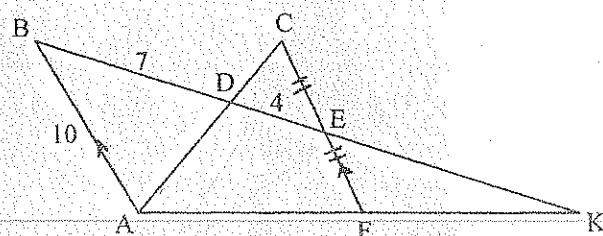
T) $y = ?$
Resp. 21

59.

T) $AP^2 = PQ \times PE$ 

60.

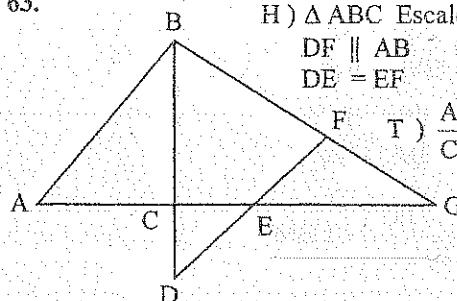
H) $\overline{AN} \parallel \overline{BC}$
 $BM = MC$
 $QN = 20 \text{ u}$ T) $MP = ?$ Resp. 48 u

61. T) $CF = ?$ 62. T) $EK = ?$ Resp. 14.64

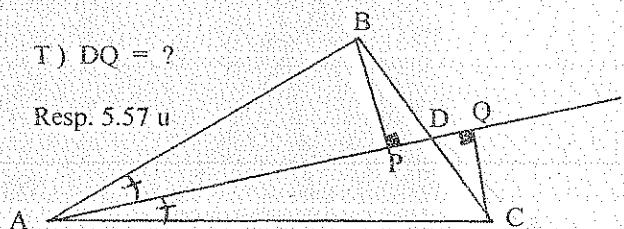
63.

H) $\triangle ABC$ Escaleno $DF \parallel AB$ $DE = EF$

$$F \quad T) \frac{AC}{CE} = \frac{AG}{EG}$$

64. H) $AP = 10 \text{ u}$ $PD = 3 \text{ u}$ T) $DQ = ?$

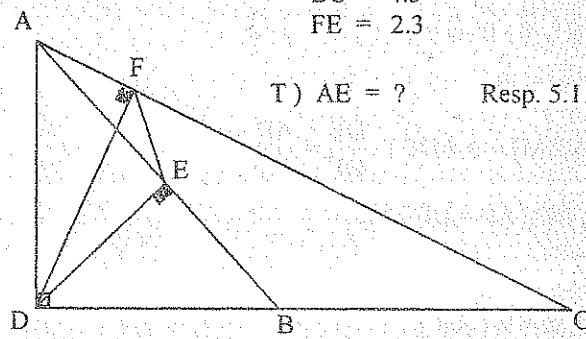
Resp. 5.57 u



65.

H) $AC = 10$ $BC = 4.5$ $FE = 2.3$ T) $AE = ?$

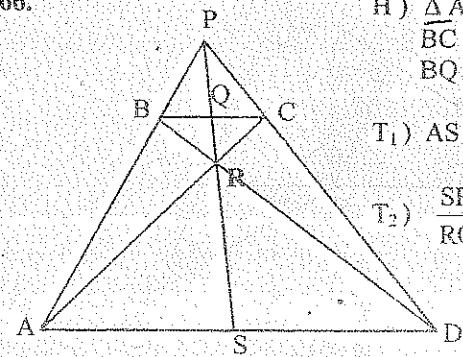
Resp. 5.11



66.

H) $\triangle APD$ Escaleno $BC \parallel AD$ $BQ = QC$ T₁) $AS = SD$

$$T_2) \frac{SR}{RQ} = \frac{SP}{PQ}$$

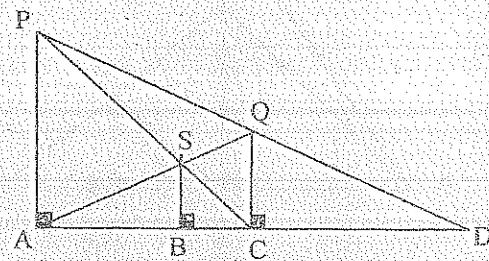


67.

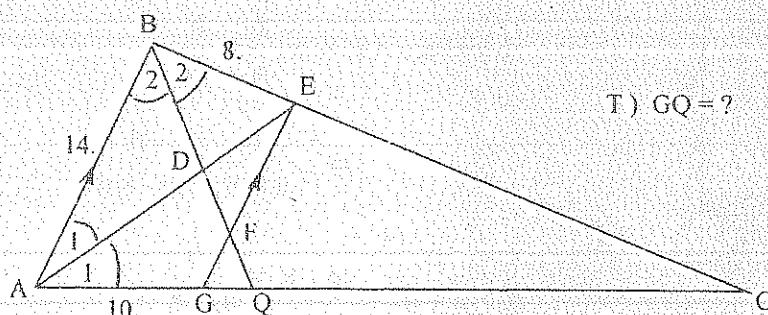


$$T) \frac{BE}{AB} = \frac{AD}{AC} \times \frac{BC}{AB} + \frac{CD}{AC} \times \frac{AC}{AB}$$

68.



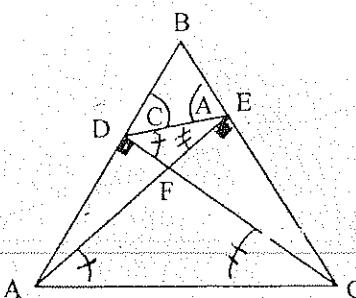
69.

T) $GQ = ?$

Resp. 5/3

4.5.9.4.1. EJERCICIOS RESUELTOS

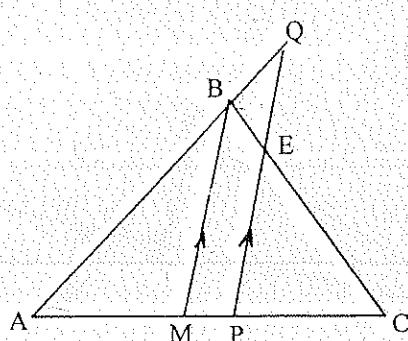
17.



$$D) (\Delta DFE \approx \Delta AFC) \quad \frac{DE}{AC} = \frac{EF}{CF}$$

$$\therefore DE \times CF = AC \times EF$$

30.

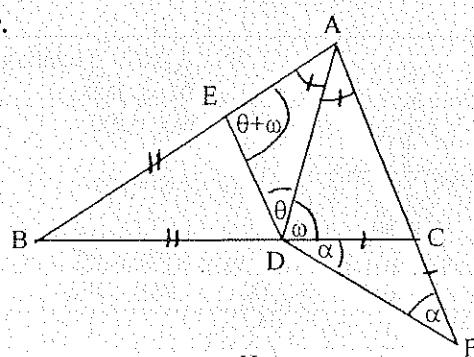


$$D) (\Delta AQP \approx \Delta ABM) \quad \frac{PQ}{BM} = \frac{AP}{AM}$$

$$(\Delta PEC \approx \Delta BMC) \quad \frac{PE}{BM} = \frac{PC}{MC}$$

$$PQ + PE = BM \times \frac{AP + PC}{AB/2} = 2BM$$

39.



$$D) \Delta BDE \text{ isósceles} \quad \therefore \hat{\theta} + \hat{\omega} = \hat{\theta} + \hat{\omega}$$

 ΔEAD y ΔADF

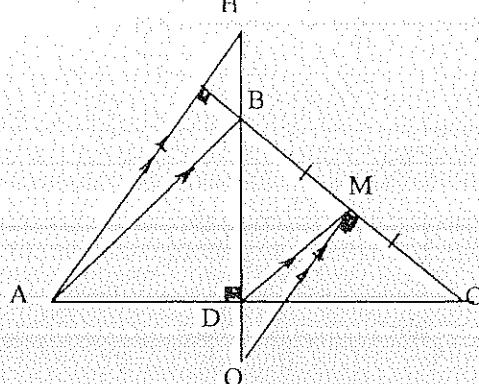
$$180^\circ - \hat{\theta} - \hat{\theta} - \hat{\omega} = 180^\circ - \hat{\omega} - \hat{\alpha} - \hat{\alpha}$$

$$\therefore \hat{\alpha} = \hat{\theta}$$

$$(\Delta EAD \approx \Delta ADF) \quad \frac{DE}{DF} = \frac{AD}{AF}$$

$$\therefore DE \times AF = DF \times AD$$

45.



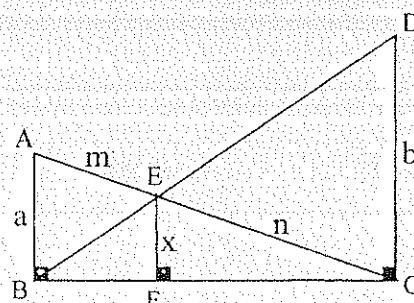
$$D) DM = \frac{1}{2}(AB)$$

 $\Delta ABH \approx \Delta DOM$ (lados paralelos)

$$\frac{DO}{BH} = \frac{DM}{AB} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore DO = \frac{1}{2}BN$$

51.



$$D) (\Delta ABC \approx \Delta EFC) \quad \frac{x}{a} = \frac{n}{m+n}$$

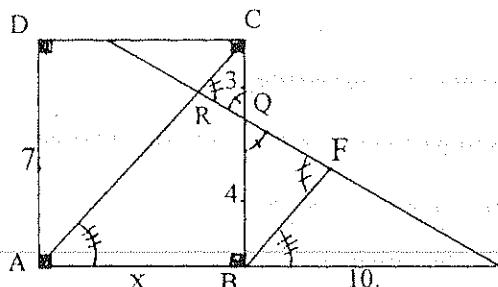
$$(\Delta ABE \approx \Delta EDC) \quad \frac{b}{a} = \frac{n}{m}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{a+b} = \frac{n}{m+n}$$

$$\therefore \frac{x}{a} = \frac{b}{a+b} \Rightarrow x = \frac{ab}{a+b}$$

56.

$$D) (\Delta RCQ \approx \Delta QBF) \quad \frac{CR}{BF} = \frac{3}{4}$$

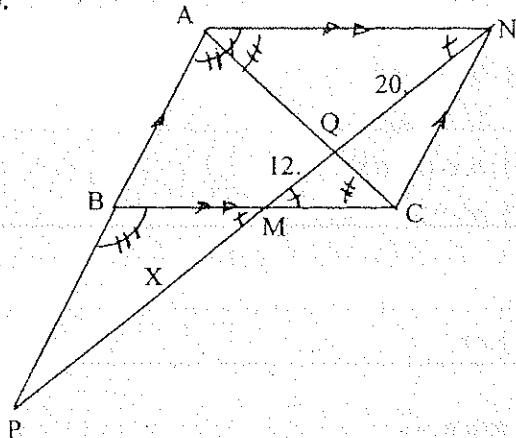


$$(\Delta ARP \approx \Delta BFP) \quad \frac{AR}{BF} = \frac{x+10}{10}$$

$$\text{dividiendo} \quad \frac{CR}{AR} = \frac{3}{4} \times \frac{10}{x+10} = \frac{2}{5}$$

$$X = 8.75 \text{ u}$$

60.

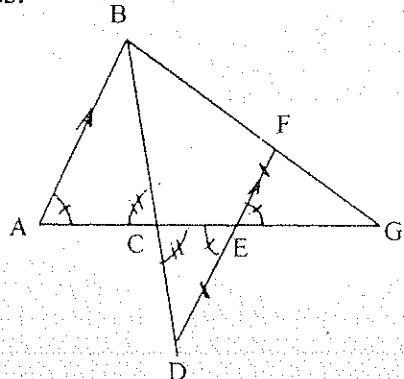


$$D) (\Delta MQC \approx \Delta AQN) \quad \frac{MC}{AN} = \frac{12}{20}$$

$$(\Delta PAN \approx \Delta PBM) \quad \frac{BM}{AN} = \frac{x}{32+x}$$

$$\frac{12}{20} = \frac{x}{32+x} \Rightarrow x = 48 \text{ u}$$

63.



$$D) (\Delta ABC \approx \Delta CDE) \quad \frac{AC}{CE} = \frac{AB}{ED}$$

$$(\Delta ABG \approx \Delta EFG) \quad \frac{AG}{EG} = \frac{AB}{EF}$$

$$\therefore \frac{AC}{CE} = \frac{AG}{EG}$$

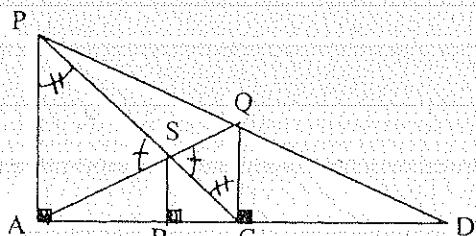
68.

$$D) (\Delta APS \approx \Delta SQC) \quad \frac{AP}{CQ} = \frac{AS}{SQ}$$

$$(\text{THALES}) \quad \frac{AS}{SQ} = \frac{AB}{BC}$$

$$(\Delta APD \approx \Delta CQD) \quad \frac{AP}{CQ} = \frac{AD}{CD}$$

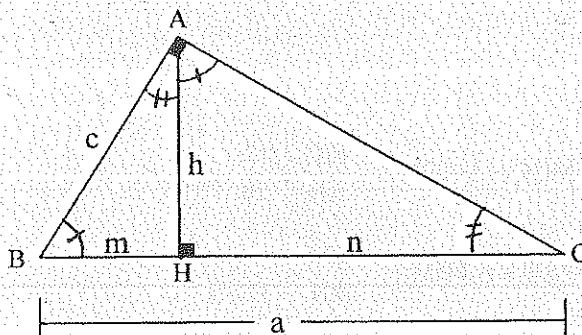
$$\therefore \frac{AP}{CQ} = \frac{AS}{SQ} = \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{CD}$$



4.5.10. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

4.5.10.1. RELACIONES MÉTRICAS

1. Un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección en la hipotenusa.
2. La altura relativa a la hipotenusa es media proporcional entre los segmentos que determina en la hipotenusa.
3. El producto de los catetos es igual al producto entre la hipotenusa y su altura relativa.
4. El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.



H) ΔABC Rectángulo

$$T_1) b^2 = a \times n$$

$$T_2) h^2 = m \times n$$

$$T_3) b \times c = a \times h$$

$$T_4) a^2 = b^2 + c^2$$

$$D_1) \Delta ABC \approx \Delta CAH : \frac{n}{b} = \frac{b}{a} \Rightarrow b^2 = a \times n$$

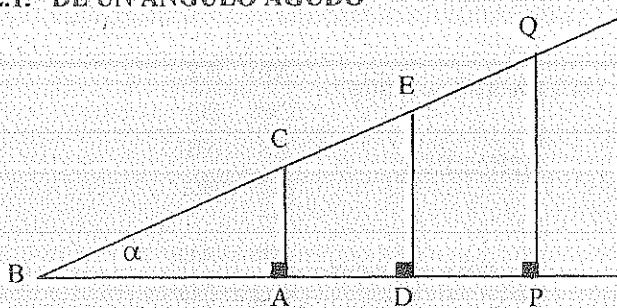
$$D_2) \Delta ABH \approx \Delta CAH : \frac{m}{h} = \frac{h}{n} \Rightarrow h^2 = m \times n$$

$$D_3) \Delta ABC \approx \Delta ABH : \frac{c}{a} = \frac{h}{b} \Rightarrow b \times c = a \times h$$

$$\begin{aligned} D_4) b^2 &= a \times n \\ c^2 &= a \times m \\ \therefore b^2 + c^2 &= a \times (m + n) = a^2 \quad \Rightarrow \quad b^2 + c^2 = a^2 \end{aligned}$$

4.5.10.2. RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

4.5.10.2.1. DE UN ÁNGULO AGUDO

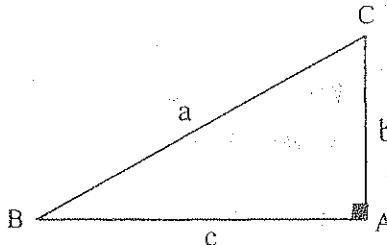


$$\frac{AC}{BC} = \frac{DE}{BE} = \frac{PQ}{BQ} = \dots = \operatorname{Sen} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\frac{AB}{BC} = \frac{BD}{BE} = \frac{BP}{BQ} = \dots = \operatorname{Cos} \alpha = \frac{\text{cateto adyacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{DE}{BD} = \frac{PQ}{BP} = \dots = \operatorname{Tan} \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto adyacente}}$$

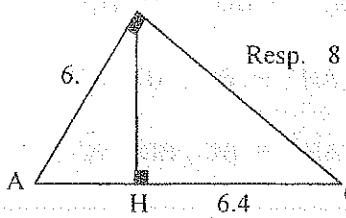
4.5.10.2.2. DE ANGULOS COMPLEMENTARIOS



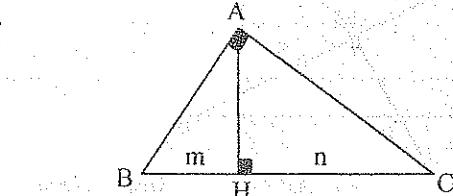
$$\operatorname{Sen} \hat{B} = \frac{b}{a} = \operatorname{Cos} \hat{C} = \operatorname{Cos} (90^\circ - \hat{B})$$

$$\operatorname{Cos} \hat{B} = \frac{c}{a} = \operatorname{Sen} \hat{C} = \operatorname{Sen} (90^\circ - \hat{B})$$

4.5.10.3. EJERCICIOS

1. T) $BC = ?$ 

3.



$$H) \frac{m}{n} = \frac{9}{16}$$

$$b \times c = 8$$

T) $BC = ?$ Resp. 4,084. Resolver un triángulo rectángulo ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) dados:

- a) $\hat{B} = 37^\circ$, $p = 137$ u. Resp. $a = 114,15$ u.
 b) $c - b = 7,60$ u., $B = 42^\circ$ Resp. $b = 68,7$ u.
 c) $p = 12$ u., $h_a = 4,80$ u. Resp. $a = 10$ u.
 d) $a = 10$ u., $v_a = 3,40$ u. Resp. $b = 4,38$ u.

5. ¿ Cuál es la relación numérica entre los catetos de un triángulo rectángulo para que las medianas m_a y m_b se corten en un ángulo recto? ($\hat{A} = 90^\circ$) Resp. $\sqrt{2}/2$

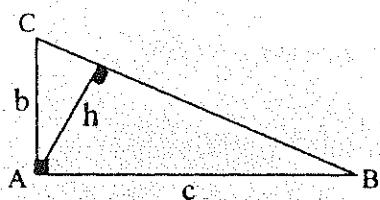
6. Si en un triángulo dos medianas se cortan perpendicularmente, demostrar que la suma de los cuadrados de sus longitudes es igual al cuadrado de la longitud de la tercera mediana.

7. Calcular la distancia del ortocentro al baricentro en un triángulo rectángulo, si el valor de la hipotenusa es 25 m. Resp. $25/3$ m.8. Calcular el valor de los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, sabiendo que la altura relativa al ángulo recto, divide a la hipotenusa en dos segmentos, el uno es el triple del otro. Resp. 30° ; 60° 9. Demostrar que el ΔABC es triángulo rectángulo si la altura y la mediana trazadas desde el vértice \hat{B} divide al B en tres partes congruentes.

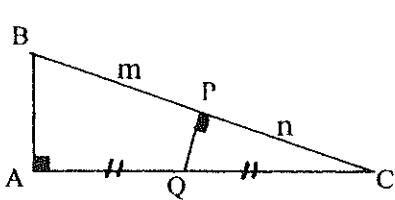
10. Los lados de un triángulo de son 8u, 10u y 11u que se lo quiere convertir a triángulo rectángulo, aumentando o disminuyendo dichos lados una misma cantidad. ¿ Cuál es esa cantidad? Resp. 4,55 u.

11. Una persona camina 4 Km al Norte, 6 Km al Este y 7 Km al Norte. ¿ A qué distancia está del punto de partida? Resp. 12,52 Km

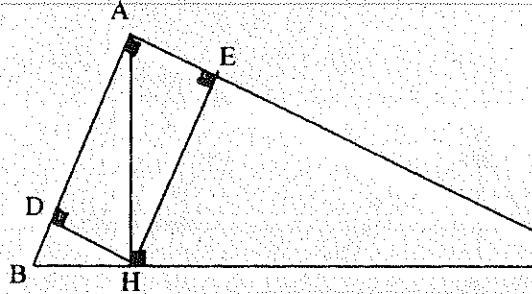
12.



13.



14.



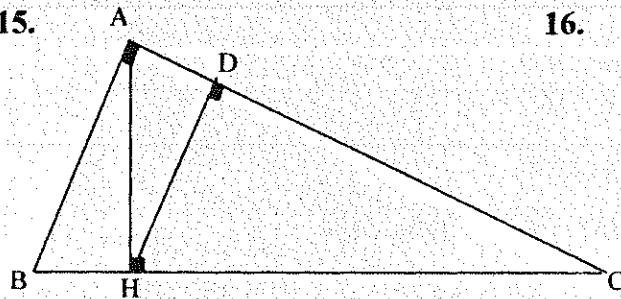
$$T_1) \frac{b^3}{c^3} = \frac{EC}{BD}$$

$$T_2) a^{2/3} = BD^{2/3} + CE^{2/3}$$

$$T_3) AH^3 = BC \times AD \times AE$$

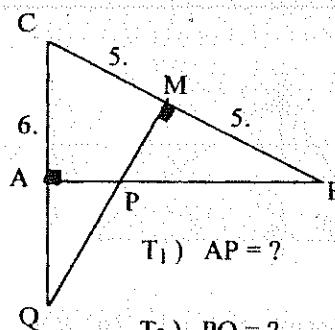
$$T_4) AH^3 = BC \times BD \times EC$$

15.



$$T) DC = b^3 / a^2$$

16.



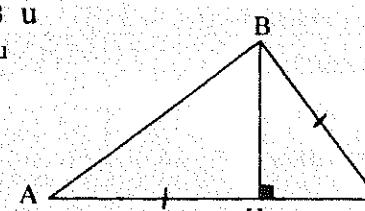
$$T_1) AP = ? \quad \text{Resp. } 1.75 \text{ u.}$$

$$T_2) PQ = ? \quad \text{Resp. } 2.92 \text{ u.}$$

17. H) $BH = \sqrt{3} \text{ u}$
 $AC = 3 \text{ u}$

T) $AB = ?$

Resp. $\sqrt{7} \text{ u}$

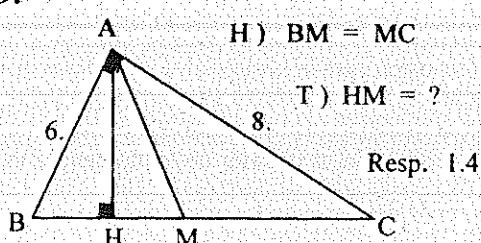


18. H) $BC = 20$

T) $AB = ?$

Resp. 8.94

19.

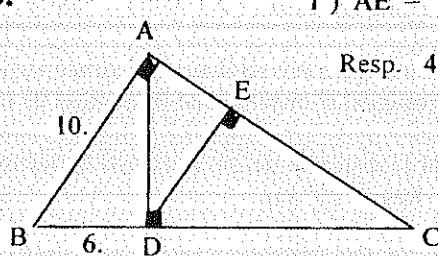


H) $BM = MC$

T) $HM = ?$

Resp. 1.4

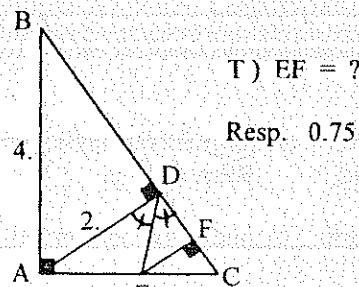
20.



T) $AE = ?$

Resp. 4.8

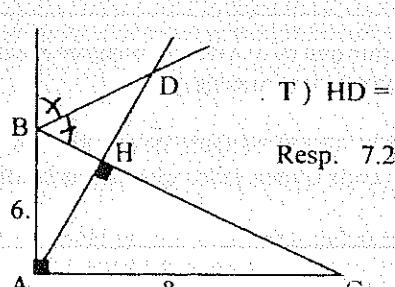
21.



T) $EF = ?$

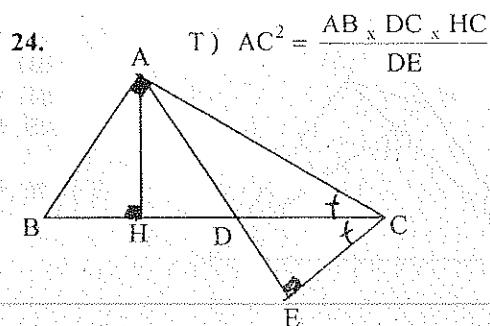
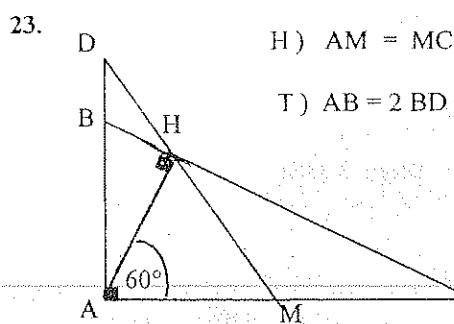
Resp. 0.75

22.

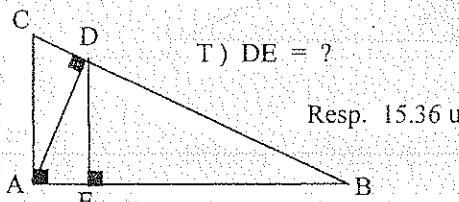


T) $HD = ?$

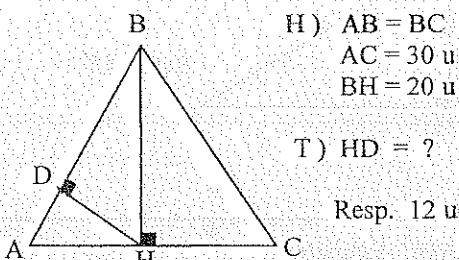
Resp. 7.2



25. H) $CB = 40 \text{ u}$
 $AB = 32 \text{ u}$



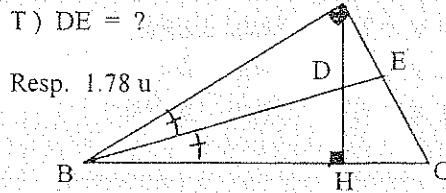
26. H) $AB = BC$
 $AC = 30 \text{ u}$
 $BH = 20 \text{ u}$



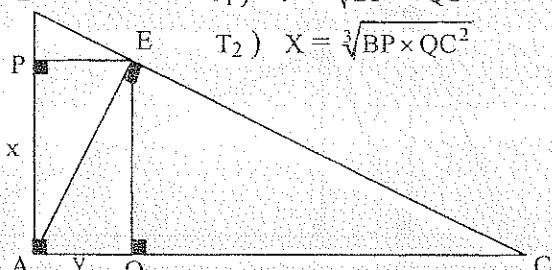
27. En un triángulo isósceles ABC el \hat{A} mide 110° y $BA = 10 \text{ u}$. Hallar la distancia entre el ortocentro y el circuncentro del triángulo ABC. Resp. 14.7 u

28. Las medianas \overline{AD} y \overline{BE} de un triángulo escaleno ABC son perpendiculares entre sí; miden 12 u y 9 u, respectivamente. Calcular los lados del triángulo. Resp. $AB = 10 \text{ u}$; $BC = 14.4 \text{ u}$; $AC = 17.08 \text{ u}$.

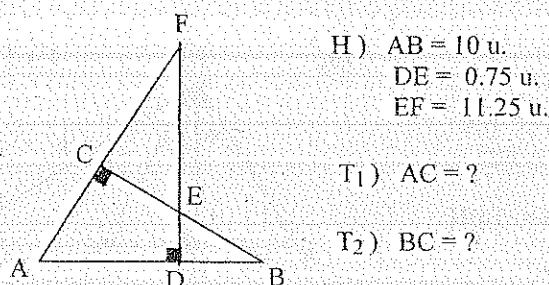
29. H) $AB = 6 \text{ u}$
 $AD = 2.4 \text{ u}$



30. T₁) $Y = \sqrt[3]{BP^2 \times QC}$
T₂) $X = \sqrt[3]{BP \times QC^2}$

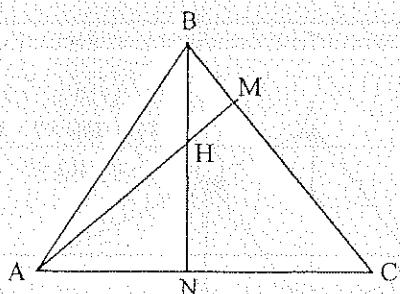


31.



- T₁) $AC = ?$ Resp. 6 u.
T₂) $BC = ?$ Resp. 8 u.

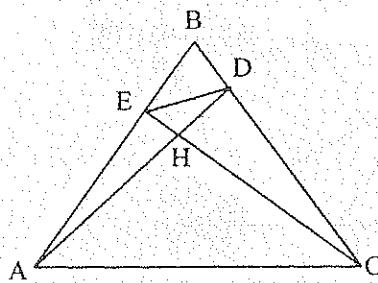
32.



- H) H. Ortocentro $\triangle ABC$
 $MC = 3 \text{ u}$,
 $NC = 2 \text{ u}$,
 $AC + BC = 14 \text{ u}$.

- T₁) $AH = ?$ Resp. 6.85 u.
T₂) $BH = ?$ Resp. 2.78 u.

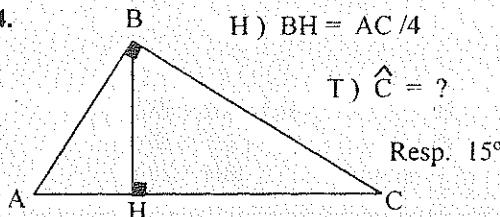
33.



- H) H. Ortocentro $\triangle ABC$
 $BD = 2 \text{ u.}$
 $BE = 3 \text{ u.}$
 $AB + BC = 20 \text{ u.}$

T) $DE = ?$ Resp. 3.16 u.

34.

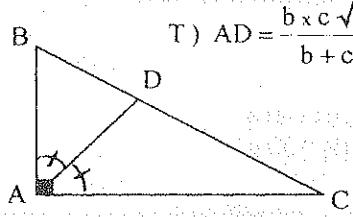


H) $BH = AC/4$

T) $\hat{C} = ?$

Resp. 15°

35.



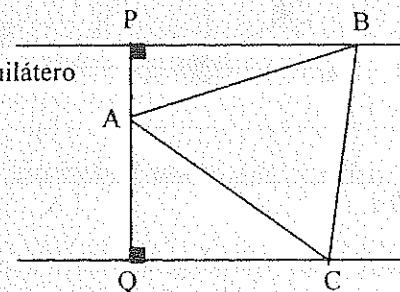
T) $AD = \frac{b \times c \sqrt{2}}{b+c}$

36.

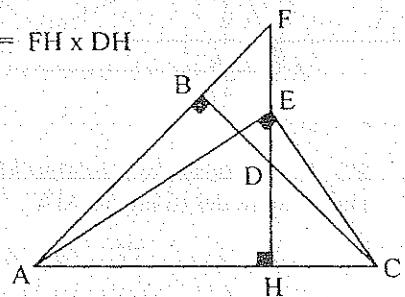
- H) $\triangle ABC$ Equilátero
 $AP = 3 \text{ u.}$
 $AQ = 7 \text{ u.}$

T) $AB = ?$

Resp. 11.84 u



T) $EH^2 = FH \times DH$



H) $BH = 7.2 \text{ u.}$

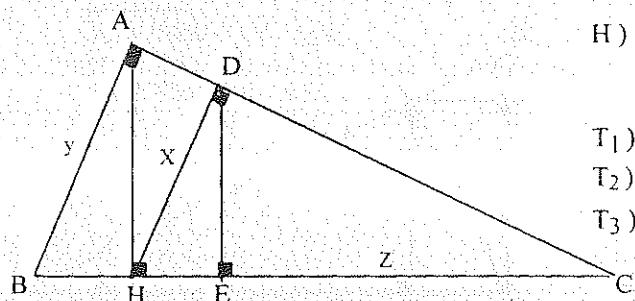
$HC = 12.8 \text{ u.}$

T₁) $x = ?$ Resp. 7.68 u.

T₂) $y = ?$ Resp. 12 u.

T₃) $z = ?$ Resp. 8.19 u.

38.



H) $BH = 7.2 \text{ u.}$

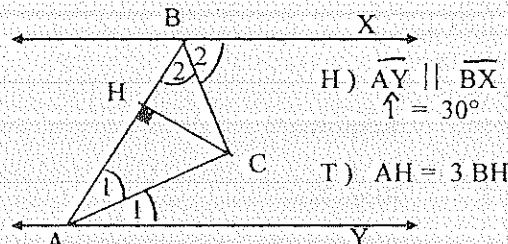
$HC = 12.8 \text{ u.}$

T₁) $x = ?$ Resp. 7.68 u.

T₂) $y = ?$ Resp. 12 u.

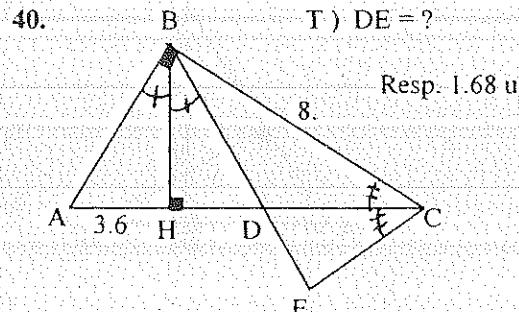
T₃) $z = ?$ Resp. 8.19 u.

39.



H) $AY \parallel BX$
 $\uparrow = 30^\circ$

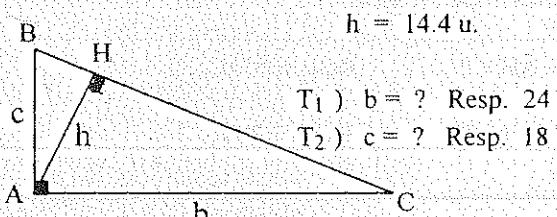
T) $AH = 3 BH$



T) $DE = ?$

Resp. 1.68 u.

41.



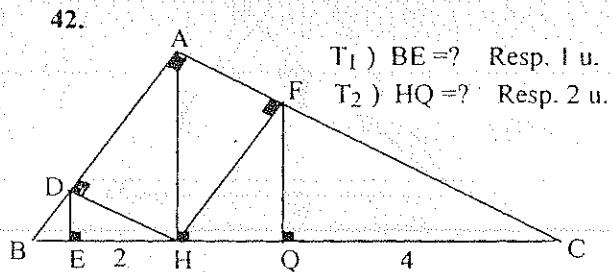
H) $BC + b + c = 72 \text{ u.}$

$h = 14.4 \text{ u.}$

T₁) $b = ?$ Resp. 24 u.

T₂) $c = ?$ Resp. 18 u.

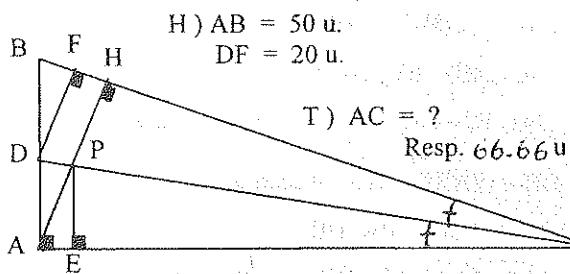
42.



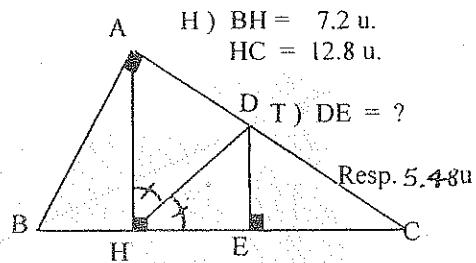
T₁) $BE = ?$ Resp. 1 u.

T₂) $HQ = ?$ Resp. 2 u.

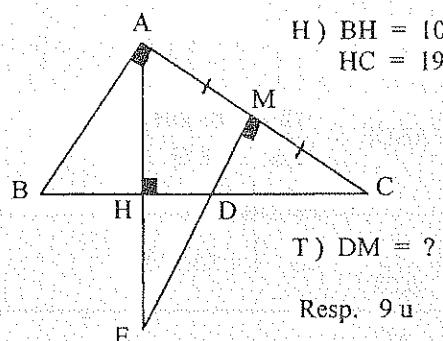
43.



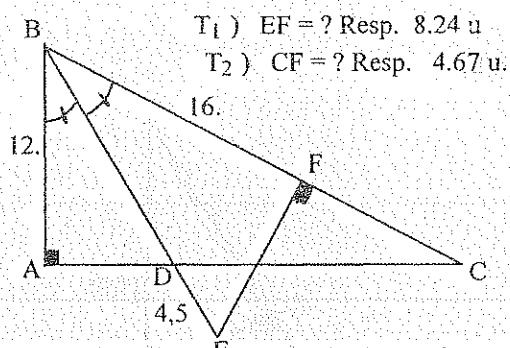
44.



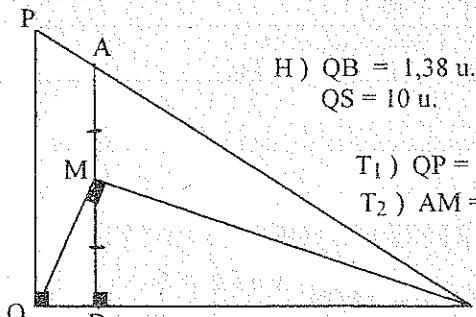
45.



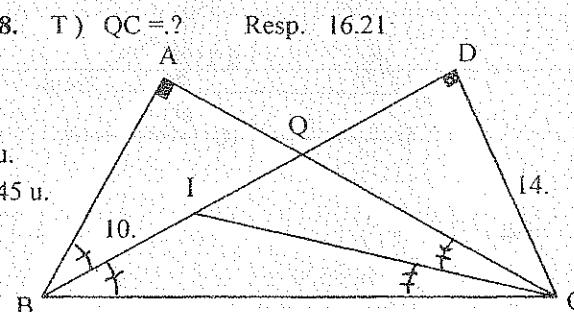
46.



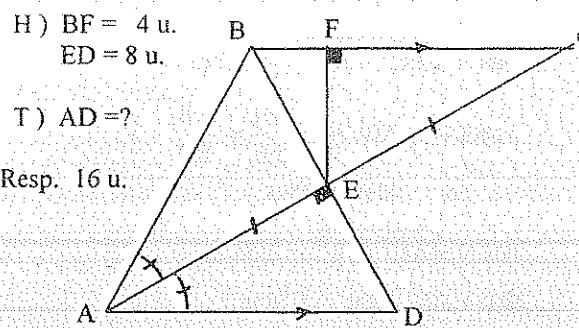
47.



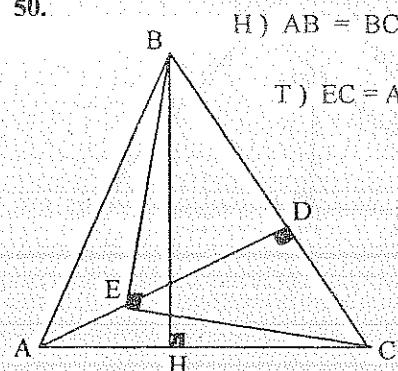
48.



49.

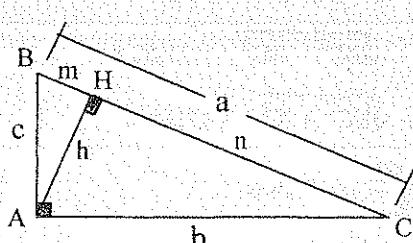


50.



4.5.10.3.1. EJERCICIOS RESUELTOS

12.



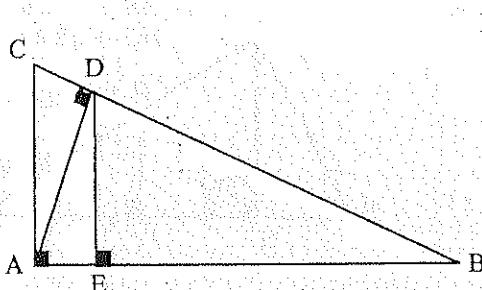
$$\begin{aligned} D) & \quad b^2 = a \cdot n \\ & \quad c^2 = a \cdot m \end{aligned}$$

$$h^2 = m \cdot n$$

$$h^2 = \frac{b^2}{a} \times \frac{c^2}{a} = \frac{b^2 \times c^2}{b^2 + c^2}$$

$$\therefore \frac{1}{h^2} = \frac{b^2 + c^2}{b^2 \times c^2} = \frac{1}{c^2} + \frac{1}{b^2}$$

25.



$$D) AC = \sqrt{BC^2 - AB^2} = 24 \text{ u.}$$

$$AC \times AB = BC \times AD$$

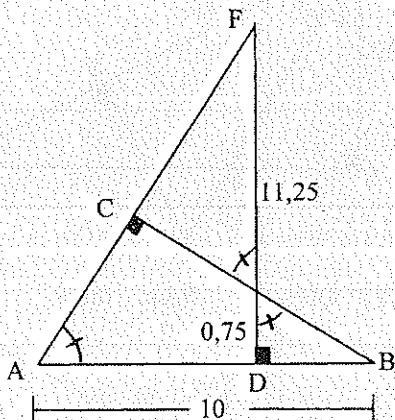
$$24 \times 32 = 40 \times AD \quad \therefore AD = 19,2 \text{ u.}$$

$$DB = \sqrt{AB^2 - AD^2} = 25,6 \text{ u.}$$

$$AD \times DB = AB \times DE$$

$$19,2 \times 25,6 = 32 \times DE \quad \therefore DE = 15,36 \text{ u.}$$

31.



$$D) \Delta AFD \approx \Delta BDE : \frac{12}{DB} = \frac{10 - DB}{0,75}$$

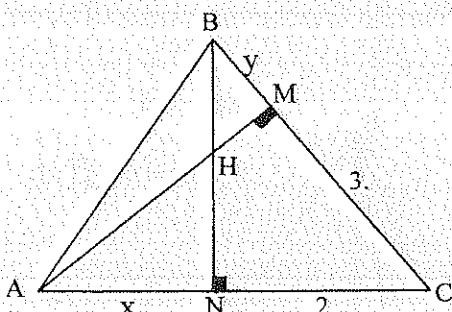
$$\Rightarrow DB = 1 \text{ u.}$$

$$\operatorname{Tg} \hat{l} = \frac{1}{0,75} \quad \Rightarrow \quad \hat{l} = 53,13^\circ$$

$$\cos \hat{l} = \frac{AC}{10} \quad \Rightarrow \quad AC = 6 \text{ u.}$$

$$CB = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ u.}$$

32.



$$D) (x + 2) + (y + 3) = 14 \quad \therefore x + y = 9$$

$$\Delta ACM \approx \Delta BCN : \frac{x + 2}{y + 3} = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow x = 6,4 \text{ u.}, \quad y = 2,6 \text{ u.}$$

$$BN = \sqrt{BC^2 - NC^2} = 5,2 \text{ u.}$$

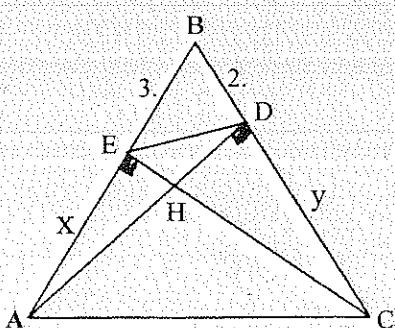
$$\Delta AHN \approx \Delta BCN : \frac{AH}{5,6} = \frac{6,4}{5,2}$$

$$\Rightarrow AH = 6,85 \text{ u.}$$

$$HN = \sqrt{AH^2 - X^2} = 2,56 \text{ u.}$$

$$\therefore BH = BN - HN = 2,78 \text{ u}$$

33.



$$D) \Delta ABC \approx \Delta EBD : \frac{2}{3+x} = \frac{3}{2+y} = \frac{DE}{AC}$$

$$(x + 3) + (y + 2) = 20$$

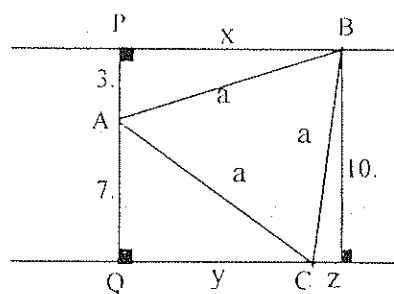
$$\Rightarrow x = 5 \text{ u.}; \quad y = 10 \text{ u.}$$

$$EC = \sqrt{BC^2 - BE^2} = 11,62 \text{ u.}$$

$$AC = \sqrt{EC^2 + X^2} = 12,64 \text{ u.}$$

$$\therefore DE = \frac{2 \cdot AC}{8} = 3,16 \text{ u.}$$

36.



$$\text{D) } x^2 = a^2 - 3^2$$

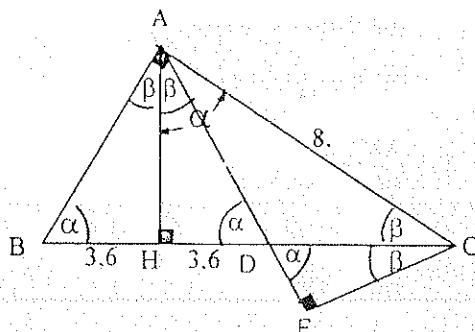
$$y^2 = a^2 - 7^2$$

$$z^2 = a^2 - 10^2$$

$$x = y + z$$

$$\therefore a = 10,26 \text{ u.}$$

40.

D) En el $\triangle ABC$:

$$8^2 = (7,2 + DC) \times (3,6 + DC)$$

$$\therefore DC = 2,8 \text{ u.}$$

$$\triangle CED \approx \triangle ABC : \frac{x}{10} = \frac{CE}{8}$$

$$CE = 2,24 \text{ u.}$$

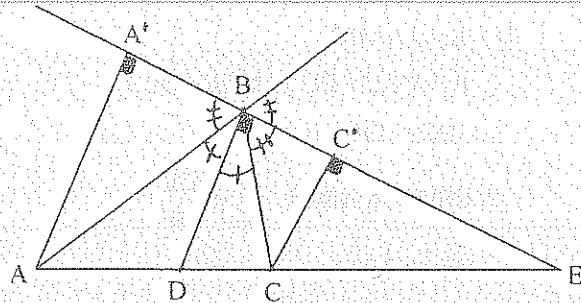
$$DE = \sqrt{2,8^2 + 2,24^2} = 1,68 \text{ u.}$$

4.5.11. RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS ESCALENOS

4.5.11.1. RELACIONES MÉTRICAS

4.5.11.1.1. PROPIEDAD DE LAS BISECTRICES

En todo triángulo, la bisectriz de un ángulo interno o externo divide al lado opuesto en partes proporcionales a los otros dos lados del triángulo.



H) $\triangle ABC$ Escaleno

\overline{BD} Bisectriz Interna

\overline{BE} Bisectriz Externa

$$T_1) \frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}$$

$$T_2) \frac{AB}{BC} = \frac{AE}{CE}$$

D) $\overline{AA'} \wedge \overline{CC'} \perp \overline{BE}$ (Construcción)

$$\therefore \overline{AA'} \parallel \overline{BD} \parallel \overline{CC'} \Rightarrow \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}$$

$$\overset{\wedge}{ABA'} = \overset{\wedge}{CBC}$$

$$\therefore \triangle AA'B \approx \triangle CC'B \Rightarrow \frac{AB}{BC} = \frac{AB}{BC} = \frac{AA}{CC}$$

$$\therefore \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC} \quad \text{Bisectriz Interna}$$

$$\triangle AA'E \approx \triangle CCE \Rightarrow \frac{AE}{CE} = \frac{AA}{CC} = \frac{AE}{CE}$$

$$\therefore \frac{AE}{CE} = \frac{AB}{BC} \quad \text{Bisectriz Externa}$$

COROLARIO

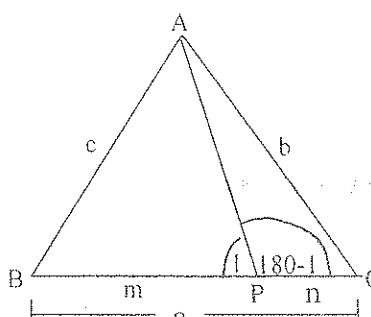
Las bisectrices interna y externa en un mismo vértice de un triángulo, divide armónicamente al lado opuesto en la razón de los otros dos lados del triángulo.

$$\frac{AD}{DC} = \frac{AE}{CE} = \frac{AB}{BC}$$

4.5.11.1.2. TEOREMA DE STEWART

El cuadrado de la longitud del segmento que une el vértice de un triángulo con un punto interior cualquiera del lado opuesto, multiplicado por dicho lado, es igual a la suma de los productos de las longitudes de los segmentos determinados multiplicado por el cuadrado de las longitudes de los lados no consecutivos, menos el producto de dichos segmentos por el lado en el que están contenidos.

$$T) AP^2 \cdot a = m_x b^2 + n_x c^2 - m_x n_x a$$



$$D) \triangle ABP: c^2 = m^2 + AP^2 - 2m AP \cos \hat{l}$$

$$\triangle APC: b^2 = n^2 + AP^2 + 2n AP \cos(180^\circ - \hat{l})$$

$$\cos(180^\circ - \hat{l}) = -\cos \hat{l}$$

$$\therefore \frac{m^2 + AP^2 - c^2}{2m AP} = \frac{b^2 - n^2 - AP^2}{2n AP}$$

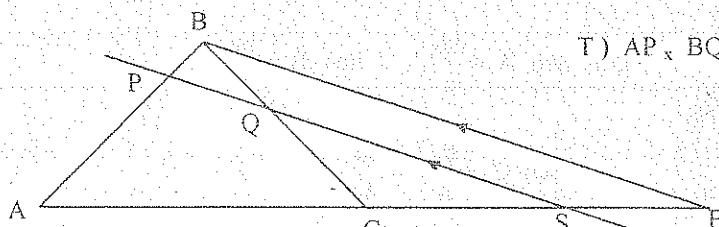
$$m_x m^2 + n_x AP^2 - n_x c^2 = m_x b^2 - m_x n^2 - m_x AP^2$$

$$AP^2(m+n) = m_x b^2 + n_x c^2 - m_x n(m+n)$$

$$\therefore AP^2 \times a = m_x b^2 + n_x c^2 - m_x n \times a$$

4.5.11.1.3. TEOREMA DE MENELAO

Si una transversal determina sobre los lados de un triángulo seis segmentos, el producto de tres de ellos que no tengan extremos comunes es igual al producto de los otros tres.



$$T) AP \times BQ \times CS = PB \times QC \times AS$$

$$D) BE \parallel PS \quad (\text{Construcción})$$

$$\frac{AP}{PB} = \frac{AS}{SE}$$

$$SE = \frac{BQ \times CS}{QC} = \frac{AS \times PB}{AP}$$

$$\frac{BQ}{QC} = \frac{SE}{CS}$$

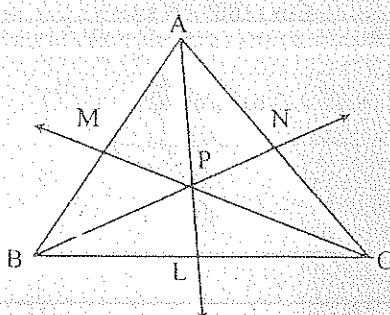
$$\Rightarrow AP \times BQ \times SC = PB \times QC \times AS$$

COROLARIO

Si tres puntos en los lados de un triángulo determinan seis segmentos que cumplen el teorema de Menelao, los tres puntos son colineales.

4.5.11.1.4. TEOREMA DE CEVA

Si desde los vértices de un triángulo se trazan rayos que pasan por un punto interior, se obtienen seis segmentos sobre los lados del triángulo tal que, el producto de los tres segmentos que no tengan extremos comunes es igual al producto de los otros tres.



$$T) AM \times BL \times NC = MB \times LC \times AN$$

D) ΔABL , CM transversal: $AM \times BC \times PL = MB \times LC \times AP$

ΔACL , BN transversal: $AN \times BC \times PL = NC \times BL \times AP$

$$\frac{AM \times BC \times PL}{AN \times BC \times PL} = \frac{MB \times LC \times AP}{NC \times BL \times AP} \Rightarrow AM \times BL \times NC = MB \times LC \times AN$$

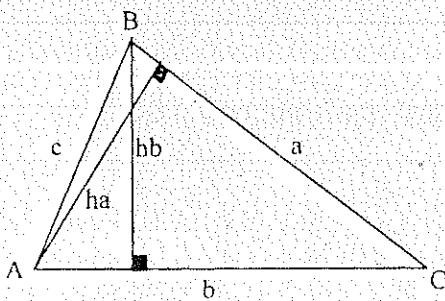
COROLARIO

Si desde los vértices de un triángulo se trazan rayos que determinen en los lados, seis segmentos que cumplen el teorema de Ceva, los rayos son concurrentes.

4.5.11.2. RELACIONES TRIGONOMÉTRICAS

4.5.11.2.1. LEY DE SENOS

Los lados de un triángulo son proporcionales a las funciones seno de los ángulos opuestos.



$$T) \quad \frac{a}{\operatorname{Sen} A} = \frac{b}{\operatorname{Sen} B} = \frac{c}{\operatorname{Sen} C}$$

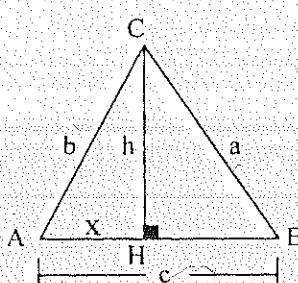
$$D) \quad \operatorname{Sen} A = \frac{hb}{c}; \quad \operatorname{Sen} B = \frac{ha}{c};$$

$$\operatorname{Sen} C = \frac{h_b}{a} = \frac{h_a}{b}$$

$$\therefore \frac{a}{\operatorname{Sen} A} = \frac{b}{\operatorname{Sen} B} = \frac{c}{\operatorname{Sen} C}$$

4.5.11.2.2. LEY DE COSEINOS

El cuadrado de un lado de un triángulo es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el doble producto de dichos lados, por el coseno del ángulo que forman.

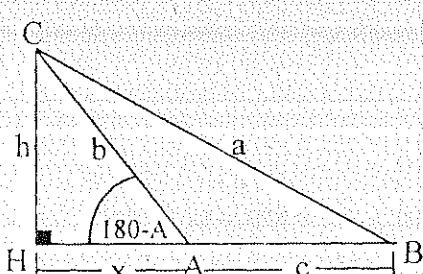


$$T) \quad a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

$$D) \quad \Delta BCH: \quad h^2 = a^2 - (c \pm x)^2$$

$$\Delta ACH: \quad h^2 = b^2 - x^2$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 \pm 2cx$$

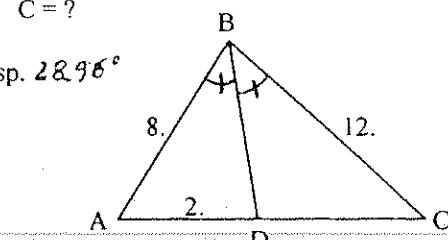


$$\cos A = \frac{x}{b} = -\cos(180^\circ - A) = -\frac{x}{b}$$

$$\therefore a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

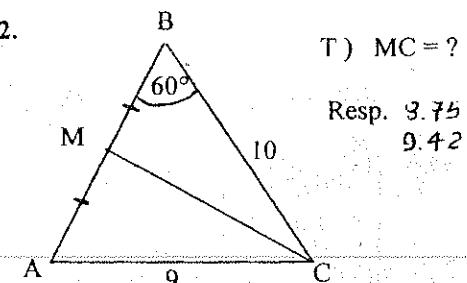
4.5.11.3. EJERCICIOS

1. T) $\hat{C} = ?$

Resp. 28.96° 

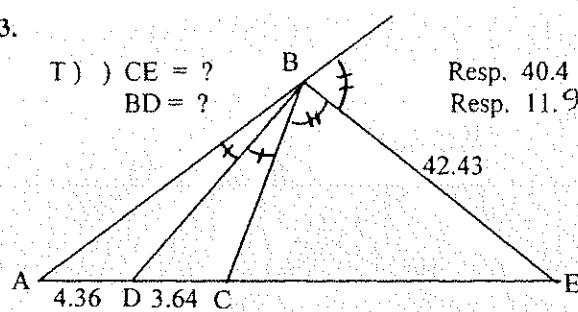
2.

T) $MC = ?$

Resp. 3.75
9.42

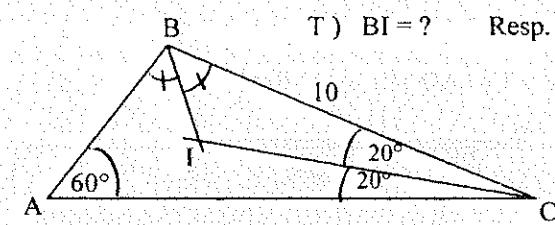
3.

T) $CE = ?$
BD = ?

Resp. 40.4
Resp. 11.94

4.

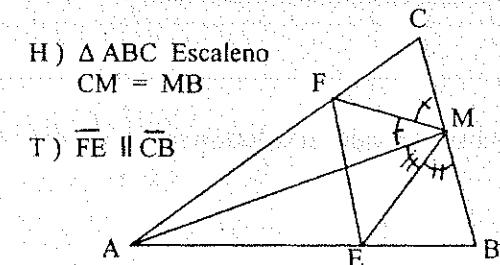
T) $BI = ?$ Resp. 3.95



5.

H) $\triangle ABC$ Especial
 $CM = MB$

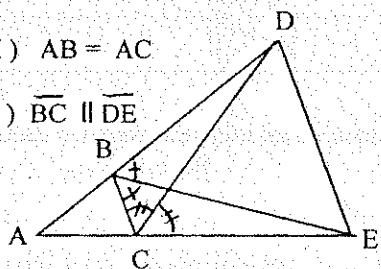
T) $\overline{FE} \parallel \overline{CB}$



6.

H) $AB = AC$

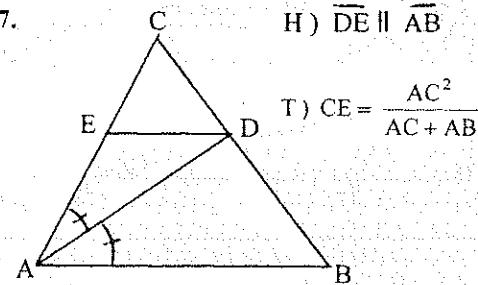
T) $\overline{BC} \parallel \overline{DE}$



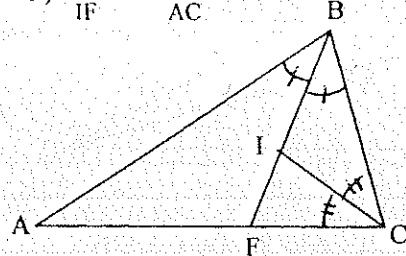
7.

H) $\overline{DE} \parallel \overline{AB}$

T) $CE = \frac{AC^2}{AC + AB}$

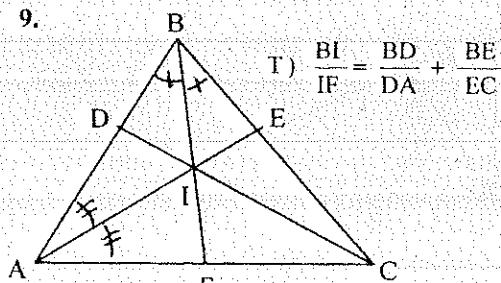


8. T) $\frac{BI}{IF} = \frac{AB + BC}{AC}$



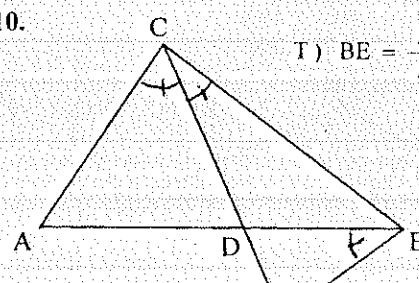
9.

T) $\frac{BI}{IF} = \frac{BD}{DA} + \frac{BE}{EC}$



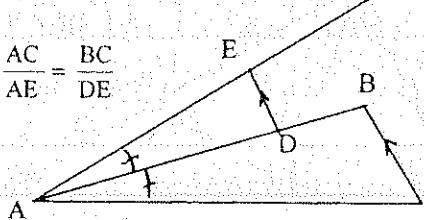
10.

T) $BE = \frac{AB \times CE}{AC + BC}$



11.

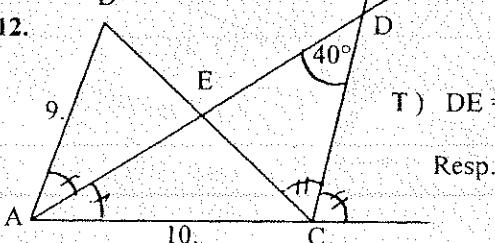
T) $\frac{AC}{AE} = \frac{BC}{DE}$



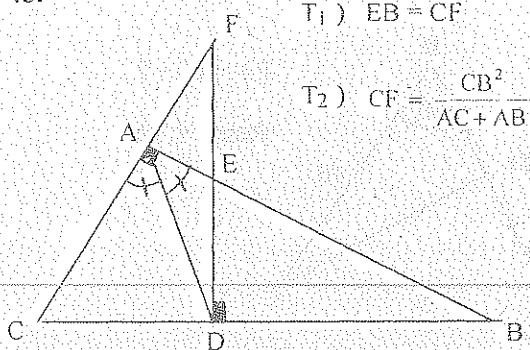
12.

T) $DE = ?$

Resp. 4.33

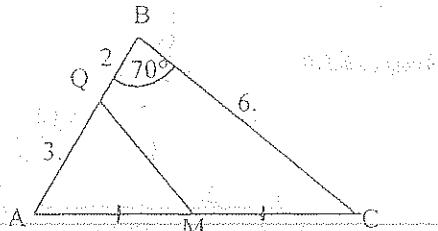


13.



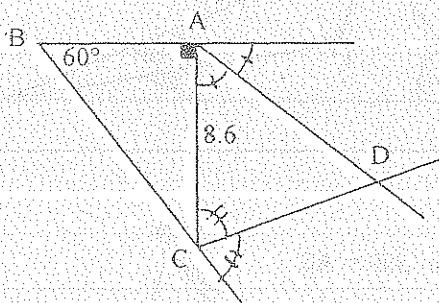
14.

T) QM = ? Resp. 3.21



15. T) AD = ?

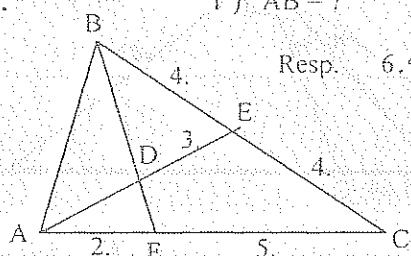
Resp. 9.6



16.

T) AB = ?

Resp. 6.43



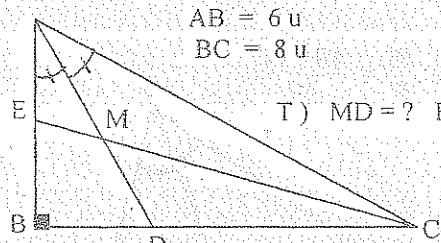
17. Los lados de un triángulo son: a = 20 u.; b = 16 u. y c = 14 u. Calcular la distancia entre el vértice A y su
Ortocentro.
Resp. 2.04 u.

18.

H) EC Mediana $\triangle ABC$

AB = 6 u

BC = 8 u

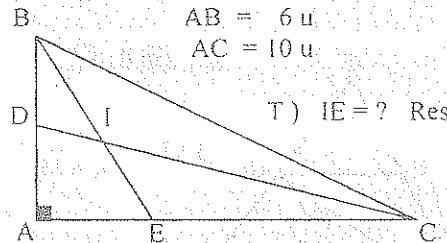


19.

H) I Incentro $\triangle ABC$

AB = 6 u

AC = 10 u



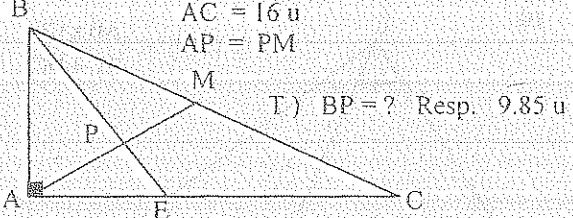
20.

H) AM Mediana $\triangle ABC$

AB = 12 u

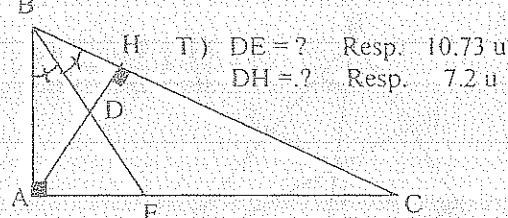
AC = 16 u

AP = PM



21. H) AB = 24 u

BC = 40 u

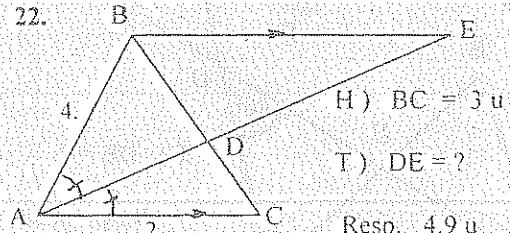


22.

H) BC = 3 u

T) DE = ?

Resp. 4.9 u

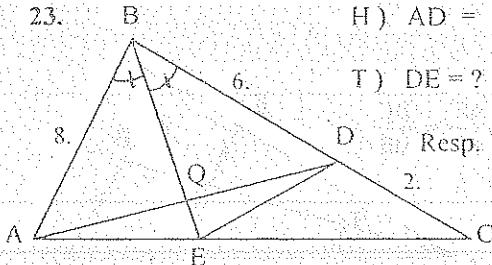


23.

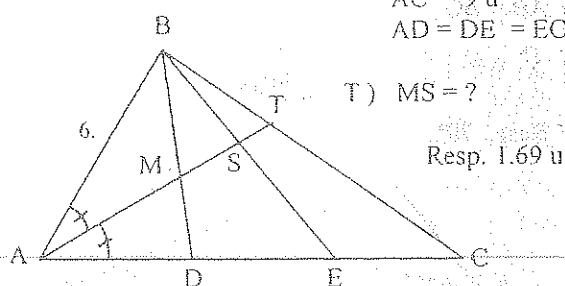
H) AD = 10 u

T) DE = ?

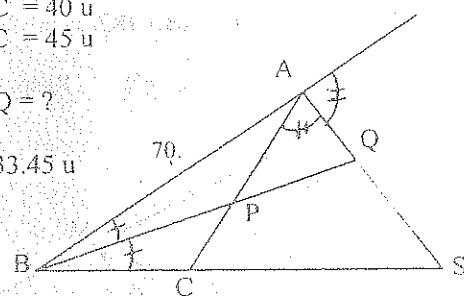
Resp. 4.47 u



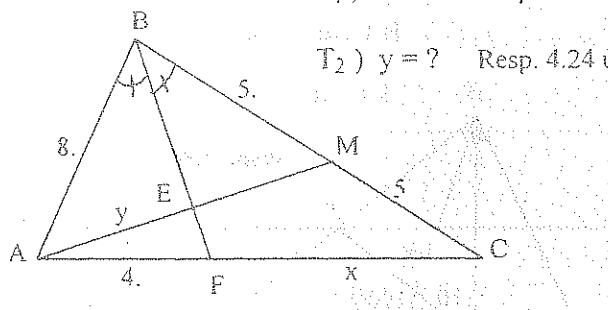
24.

25. H) $BC = 40 \text{ u}$ $AC = 45 \text{ u}$ T) $PQ = ?$

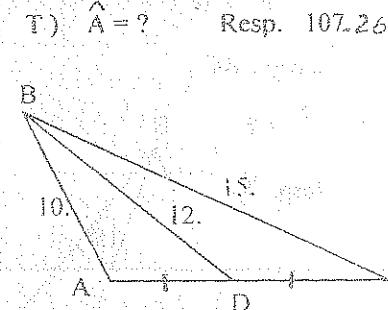
Resp. 33.45 u



26.



27.

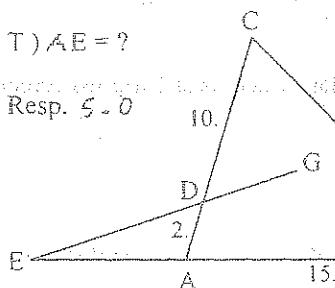
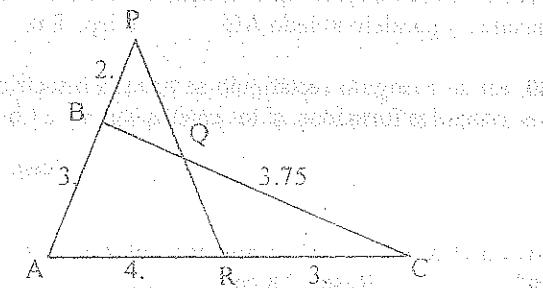


28. En el $\triangle ABC$ las alturas \overline{AP} y \overline{CS} se cortan en el punto H. Si $AB = AC$, $AH = 9 \text{ m}$. y $HP = 3 \text{ m}$, hallar las medidas de CH y HS .

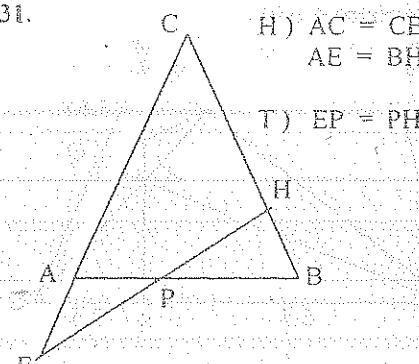
Resp. 6,72 m ; 4,02 m.

29. H) G Baricentro $\triangle ABC$ T) $AE = ?$

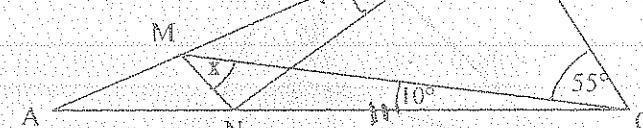
Resp. 5 - 0

30. T) $BQ = ?$ Resp. 2

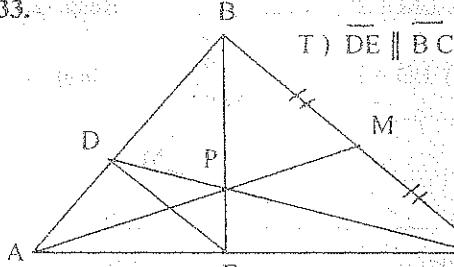
31.

32. T) $X = ?$

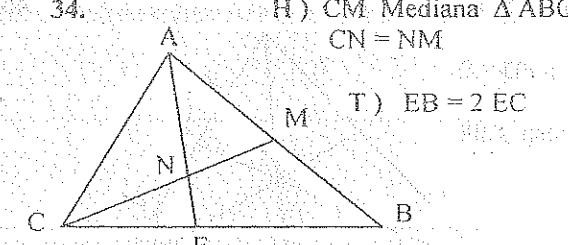
Resp. 302°



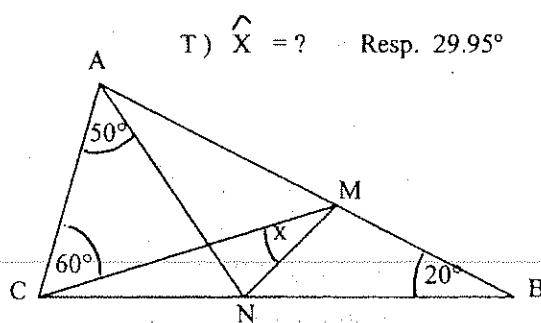
33.



34.

H) CM Mediana $\triangle ABC$
CN = NMT) $EB = 2 EC$ 

35. H) $AB = BC$

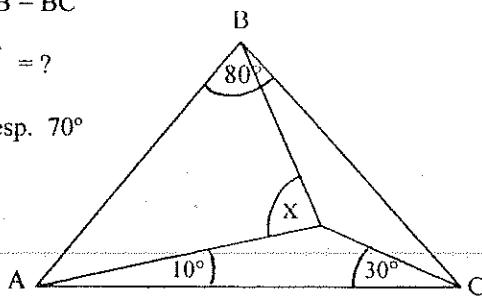


T) $\hat{X} = ?$ Resp. 29.95°

36.

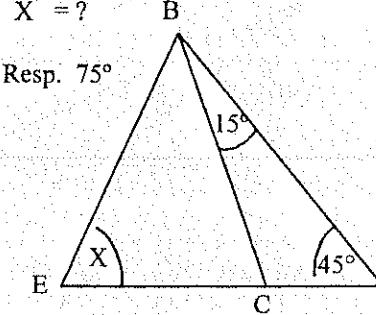
H) $AB = BC$

T) $\hat{X} = ?$

Resp. 70° 

37. H) $CE = 2AC$

T) $\hat{X} = ?$

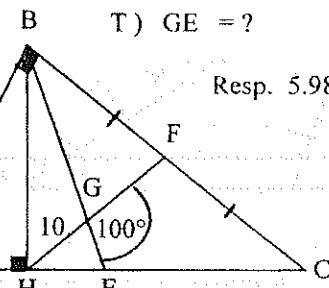
Resp. 75°

38.

H) $AE = EC$

T) $GE = ?$

Resp. 5.98



39. Los lados de un ΔABC miden: $a = 9$ u., $b = 10$ u. y $c = 14$ u. Hallar la medida del segmento trazado por su incentro y paralelo al lado AB. Resp. 8 u.

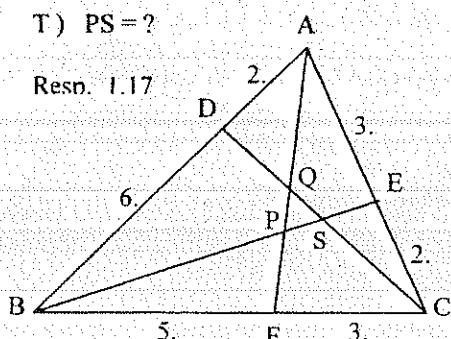
40. En un triángulo rectángulo se traza la bisectriz del ángulo recto. Hallar la distancia entre los ortocentros de los triángulos formados, si los catetos son b y c ($b > c$).

Resp. $\frac{b-c}{b+c} \sqrt{b^2 + c^2}$

41. En el ΔABC , \overline{AD} es bisectriz del $\angle A$, $AD = 8$ cm., $AB = 7$ cm. y $AC = 11,2$ cm. Encontrar la longitud de BC. Resp. 7,8 cm.

42. T) $PS = ?$

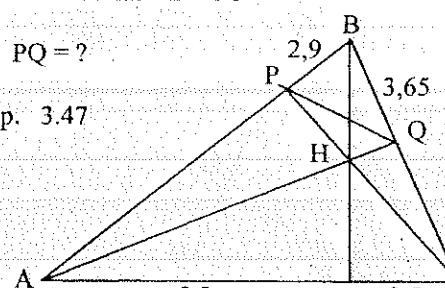
Resn. 1.17



43. H) . H Ortocentro ΔABC

T) $PQ = ?$

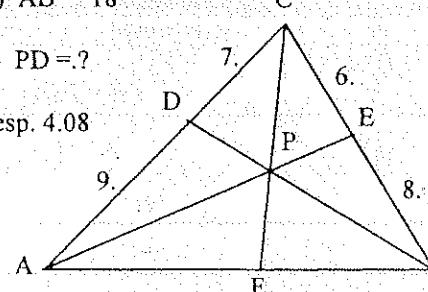
Resp. 3.47



44. H) $AB = 18$

T) $PD = ?$

Resp. 4.08

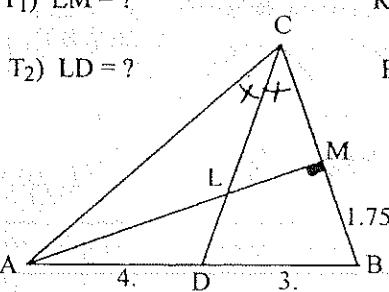


45. T₁) $LM = ?$

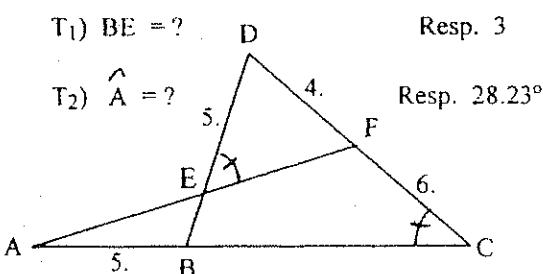
Resp. 2,35

T₂) $LD = ?$

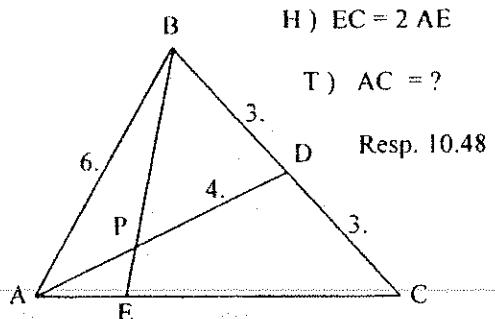
Resp. 1,14 u



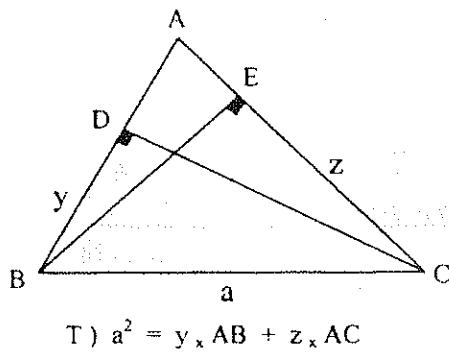
46.



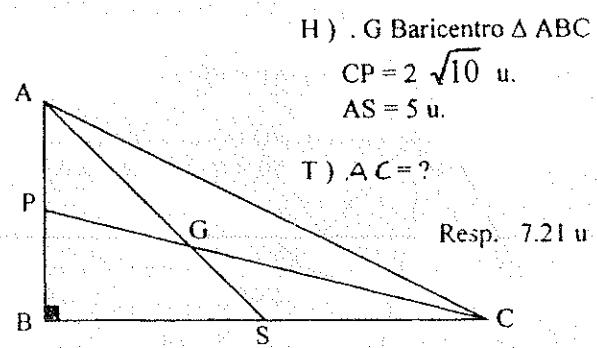
47.



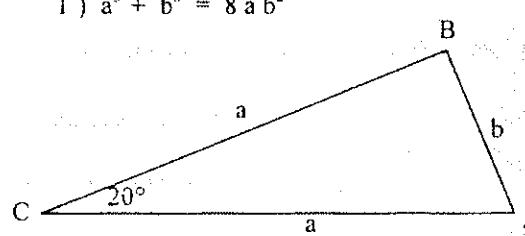
48.



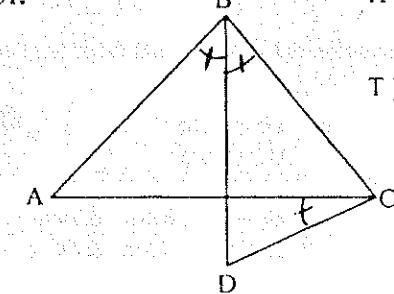
49.



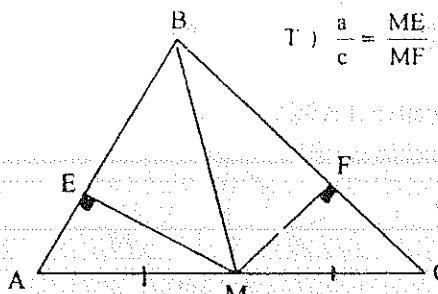
50.



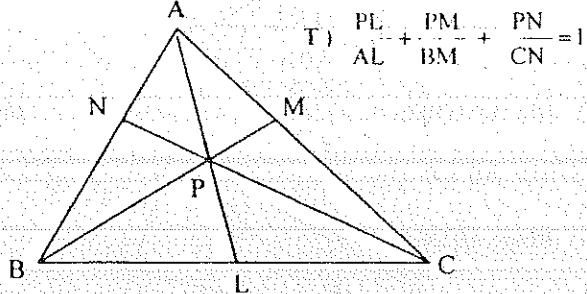
51.



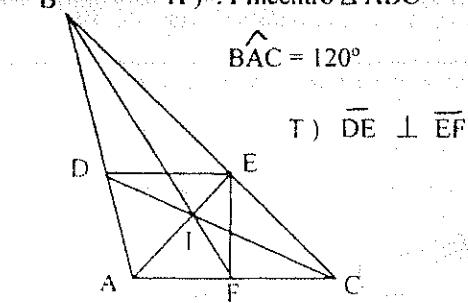
52.



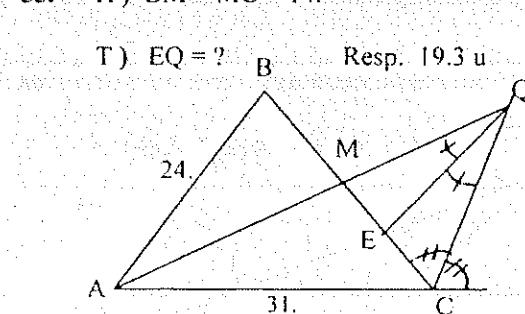
53.



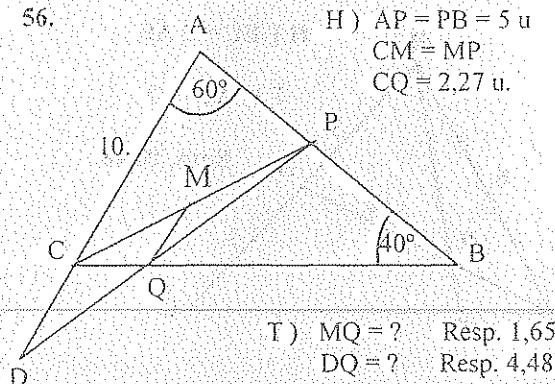
54.



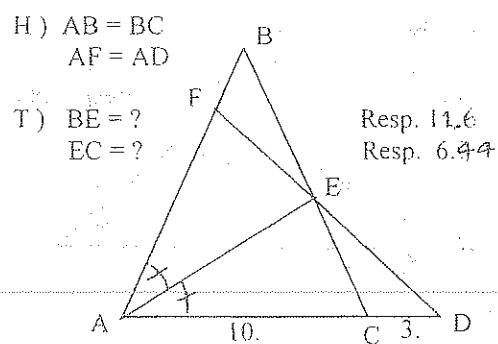
55.



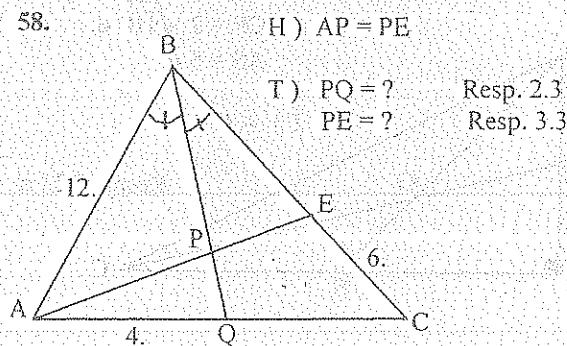
56.



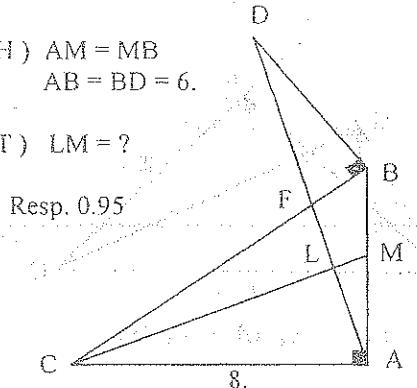
57.



58.



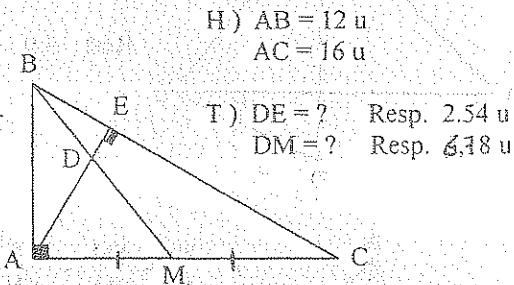
59.



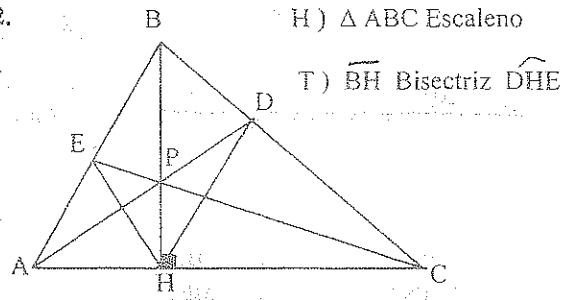
60.

Si se sabe que los lados del $\triangle ABC$ satisfacen la relación: $AC \cdot AB = BC^2 - AC^2$. Demostrar que: $\hat{A} = 2 \hat{B}$.

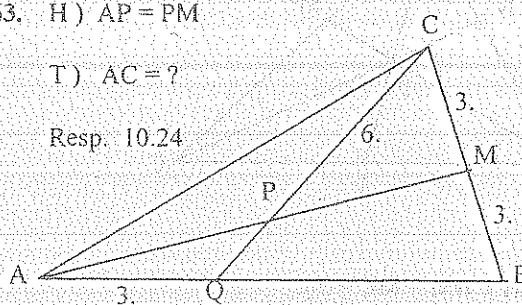
61.



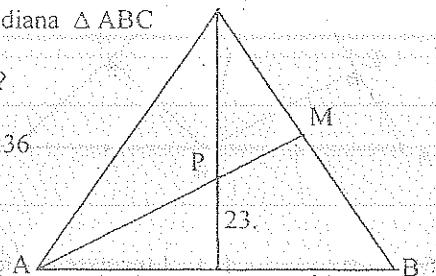
62.

63. H) $AP = PM$ T) $AC = ?$

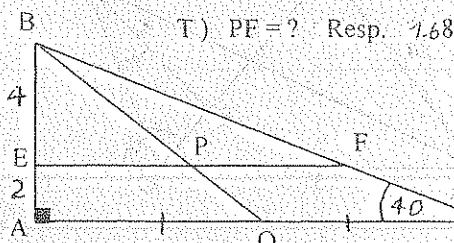
Resp. 10,24

64. H) CD Bisectriz $\triangle ABC$ AM Mediana $\triangle ABC$ T) $PM = ?$

Resp. 18,36



65.

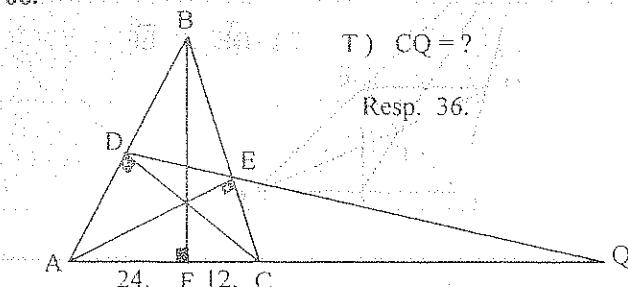
H) $EF \parallel AC$ T) $PF = ?$ Resp. 7,68

66.

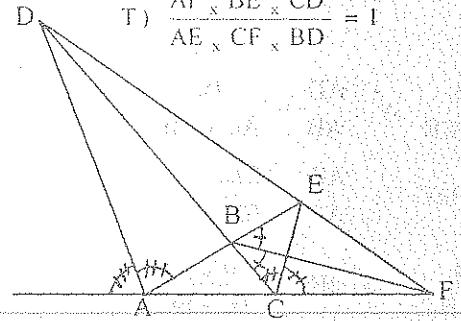
H)

 CD Bisectriz $\triangle ABC$ AM Mediana $\triangle ABC$ T) $CQ = ?$

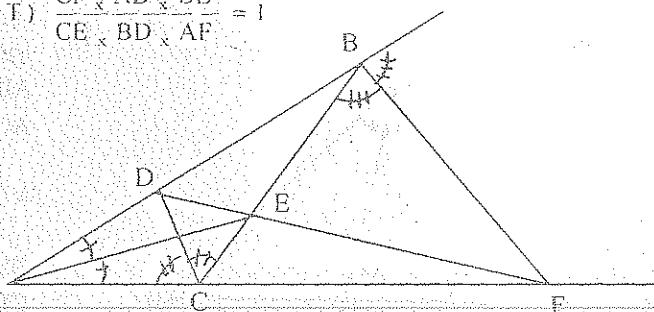
Resp. 36



67. T) $\frac{AF \times BE \times CD}{AE \times CF \times BD} = 1$

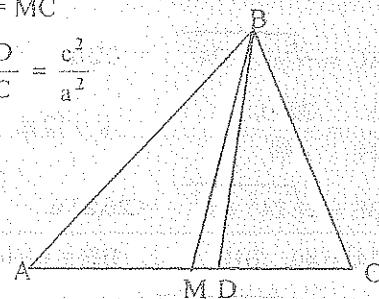


68. T) $\frac{CF \times AD \times BE}{CE \times BD \times AF} = 1$



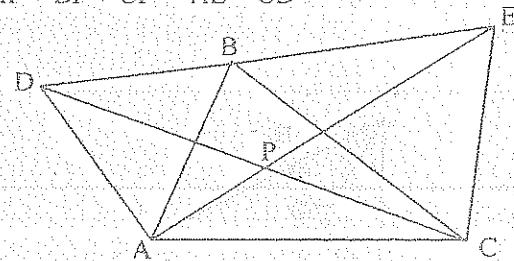
69. H) $\widehat{ABD} = \widehat{MBC}$
AM = MC

T) $\frac{AM \times AD}{MC \times DC} = \frac{c^2}{a^2}$



70. H) $\triangle ADB$ y $\triangle BCE$ Equiláteros

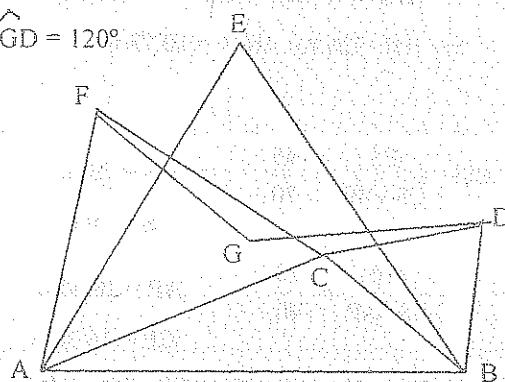
T) AP + BP + CP = AE = CD



71. H) $\triangle s ACF$, $\triangle BCD$ y $\triangle ABE$ Equiláteros
. G Baricentro $\triangle ABE$

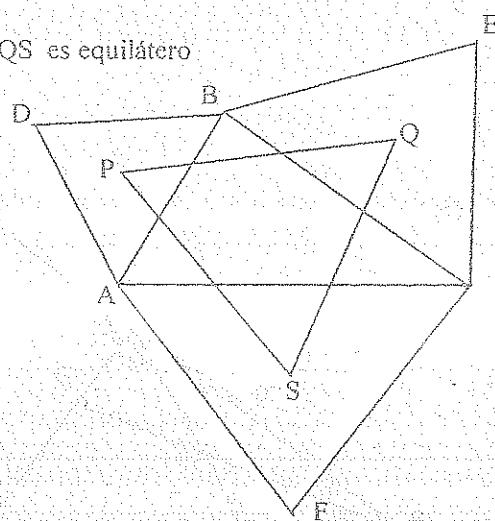
T₁) FG = GD

T₂) $\widehat{FGD} = 120^\circ$



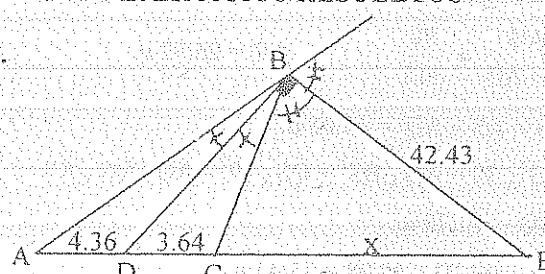
72. H) $\triangle s ABD$, $\triangle BCE$ y $\triangle ACF$ Equiláteros
P, Q y S son sus Baricentros

T) $\triangle PQS$ es equilátero



4.5.11.3.1. EJERCICIOS RESUELTOS

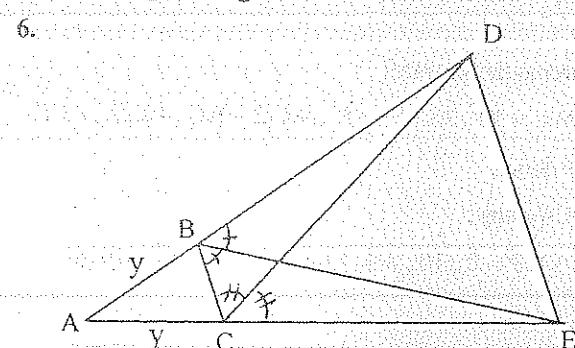
3.



D) $\frac{4,36}{3,64} = \frac{8+x}{x} \Rightarrow x = 40,4 \text{ u.}$

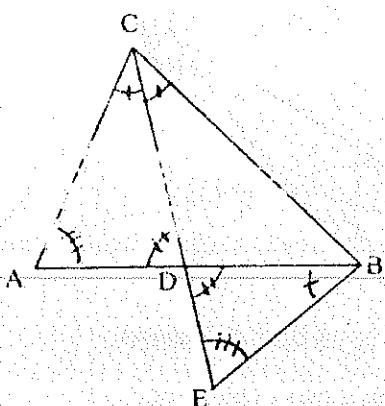
$BD = \sqrt{44^2 - 42,43^2} = 11,8 \text{ u.}$

6.



D) $\frac{y}{BC} = \frac{AE}{CE}$
 $\frac{y}{BC} = \frac{AD}{BD}$
 $\frac{AE}{CE} = \frac{AD}{BD} \Rightarrow \overline{BC} \parallel \overline{DE}$

10.



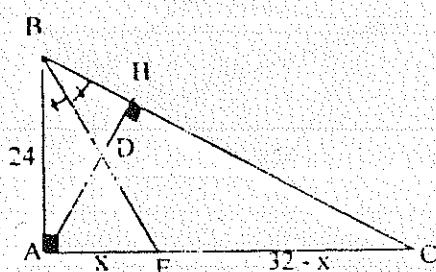
$$\text{D) } \frac{AD}{DB} = \frac{AC}{CB}$$

$$\therefore \frac{AD}{AC} = \frac{AB}{AC+CB} \quad \text{y} \quad \frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AC+CB}$$

$$\Delta ACD \approx \Delta BEC : \quad \frac{AD}{AC} = \frac{BE}{CE}$$

$$\frac{BE}{CE} = \frac{AB}{AC+BC} \Rightarrow BE = \frac{AB \cdot CE}{AC+BC}$$

21.



$$\text{D) } AC = \sqrt{40^2 - 24^2} = 32 \text{ u.}$$

$$\frac{x}{24} = \frac{32-x}{40} \quad \therefore x = 12 \text{ u.}$$

$$BE = \sqrt{24^2 + x^2} = 26,83 \text{ u.}$$

$$24^2 = 40 \cdot BH \quad \therefore BH = 14,4 \text{ u.}$$

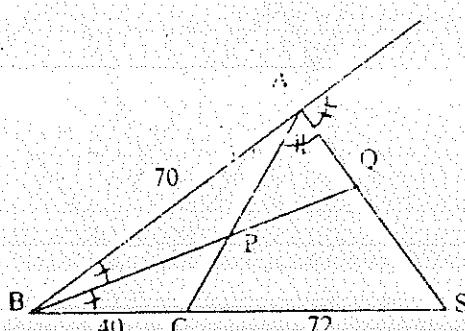
$$AH = \sqrt{24^2 - BH^2} = 19,2 \text{ u.}$$

$$\frac{HD}{AH-HD} = \frac{BH}{AB} \quad \therefore HD = 7,2 \text{ u.}$$

$$BD = \sqrt{BH^2 + HD^2} = 16,1 \text{ u.}$$

$$\Rightarrow DE = 26,83 - 16,1 = 10,73 \text{ u.}$$

25.



$$\text{D) } \frac{CS}{CS+40} = \frac{45}{70} \quad \therefore CS = 72 \text{ u.}$$

$$AS = 70 \text{ u.}$$

$$\frac{AP}{45-AP} = \frac{70}{40} \quad \therefore AP = 28,63 \text{ u.}$$

$$CP = 16,36 \text{ u.}$$

$$BP^2 \cdot 50 = AP \cdot 40^2 + CP \cdot 70^2 - AP \cdot CP \cdot 50$$

$$\therefore BP = 48,28 \text{ u.}$$

$$\frac{A'Q}{70-AQ} = \frac{70}{112} \quad \therefore AQ = 26,92 \text{ u.}$$

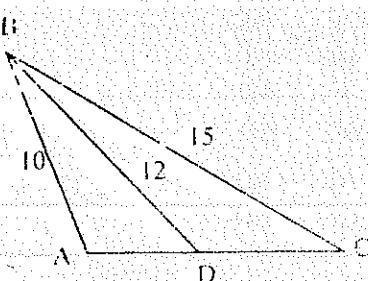
$$QS = AS - AQ = 43,08 \text{ u.}$$

$$BQ^2 \cdot 70 = AQ \cdot BS^2 + QS \cdot 70^2 - AQ \cdot QS \cdot AS$$

$$\therefore BQ = 81,73 \text{ u.}$$

$$\Rightarrow PQ = 81,73 - 48,28 = 33,45 \text{ u.}$$

27.



$$\text{D) Teorema de Stewart:}$$

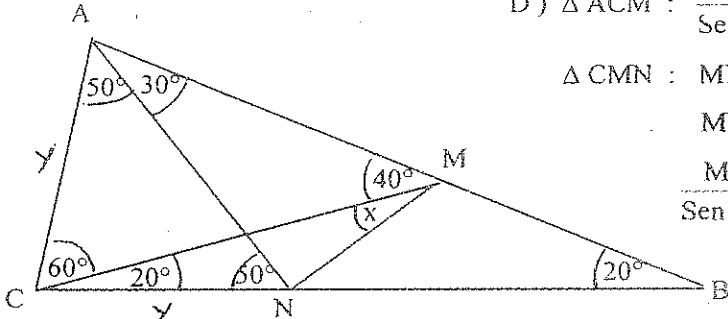
$$12^2 \cdot AC = 10^2 \cdot AC/2 + 15^2 \cdot AC/2 - AC \cdot AC/2 \cdot AC/2$$

$$\therefore AC = 8,6 \text{ u.}$$

$$\text{I.c.y Cosenos:}$$

$$12^2 = 10^2 + 4,3^2 - 2 \cdot 10 \cdot 4,3 \cdot \cos A \quad \therefore \hat{A} = 107,6^\circ$$

35.



$$D) \triangle ACM : \frac{CM}{\operatorname{Sen} 80^\circ} = \frac{y}{\operatorname{Sen} 40^\circ} \therefore CM = 1,53 y$$

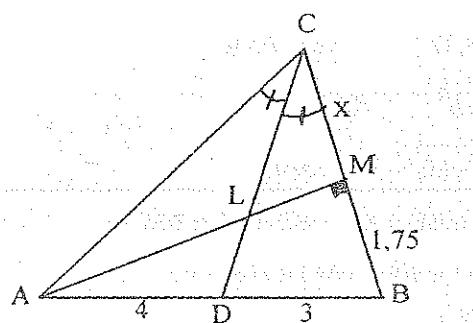
$$\triangle CMN : MN^2 = y^2 + CM^2 - 2 \cdot y \cdot CM \cdot \cos 20^\circ$$

$$MN = 0,6 y$$

$$\frac{MN}{\operatorname{Sen} 20^\circ} = \frac{y}{\operatorname{Sen} x} \therefore \hat{x} = 29,9^\circ$$

45.

$$D) AM = \sqrt{7^2 - 1,75^2} = 6,77 = \sqrt{AC^2 - x^2}$$



$$\frac{4}{3} = \frac{AC}{1,75+x} \therefore x = 4,25 \text{ u.}$$

$$AC = 8 \text{ u. y } AM = 6,77 \text{ u.}$$

$$CD^2 = 7^2 = 4^2 + 3^2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot \cos 7$$

$$CD = 6 \text{ u.}$$

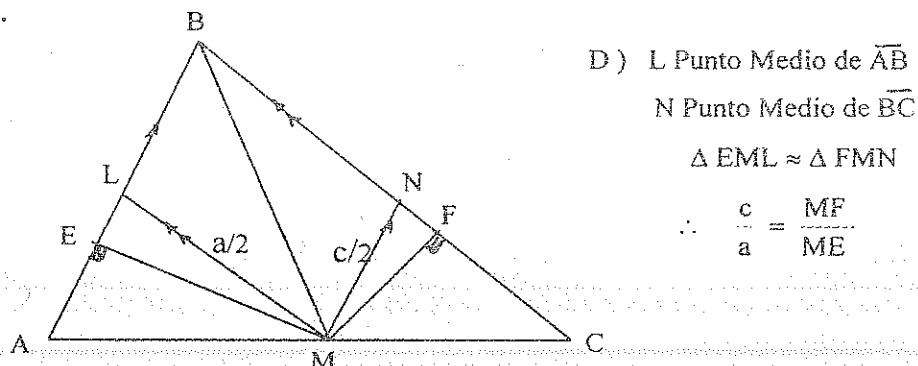
$$LM \times 4 \times 6 = (6,77 - LM) \times 3 \times 4,25$$

$$\Rightarrow LM = 2,35 \text{ u.}$$

$$CL = \sqrt{x^2 + LM^2} = 4,86 \text{ u.}$$

$$\Rightarrow LD = CD - CL = 1,14 \text{ u.}$$

52.



$$D) L \text{ Punto Medio de } \overline{AB}$$

$$N \text{ Punto Medio de } \overline{BC}$$

$$\triangle EML \approx \triangle FMN$$

$$\therefore \frac{c}{a} = \frac{MF}{ME}$$

55.

$$D) \triangle ABC : 24^2 = 28^2 + 31^2 - 2 \cdot 28 \cdot 31 \cdot \cos C \therefore C = 43^\circ$$

$$\triangle AMC : AM^2 = 31^2 + 14^2 - 2 \cdot 31 \cdot 14 \cdot \cos 43^\circ \therefore AM = 24 \text{ u.}$$

$$14^2 = 24^2 + 31^2 - 2 \cdot 24 \cdot 31 \cdot \cos 3 \therefore 3 = 26^\circ$$

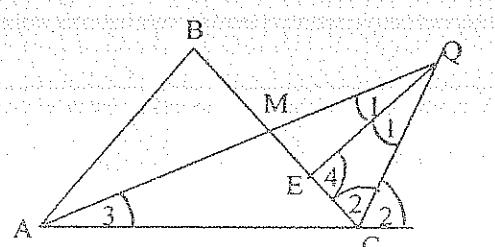
$$C + 2 \hat{2} = 180^\circ \therefore \hat{2} = 66^\circ$$

$$\hat{3} + \hat{C} + \hat{2} + 2 \hat{1} = 180^\circ \therefore \hat{1} = 20^\circ$$

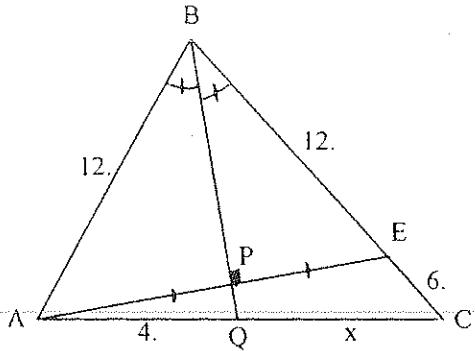
$$\hat{4} + \hat{2} + \hat{1} = 180^\circ \therefore \hat{4} = 94^\circ$$

$$\frac{QC}{\operatorname{Sen} 26^\circ} = \frac{31}{\operatorname{Sen} 40^\circ} \therefore QC = 21,24 \text{ u.}$$

$$\frac{EQ}{\operatorname{Sen} 66^\circ} = \frac{21,24}{\operatorname{Sen} 94^\circ} \therefore EQ = 19,3 \text{ u.}$$



58.



$$D) \frac{x}{4} = \frac{18}{12} \quad \therefore x = 6 \text{ u.}$$

$$BQ^2 \times 10 = 4 \times 18^2 + 6 \times 12^2 - 4 \times 6 \times 10$$

$$\therefore BQ = 13,85 \text{ u.}$$

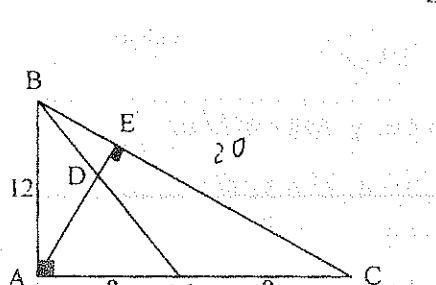
$$PQ \times 12 \times 10 = (BQ - PQ) \times 6 \times 4$$

$$\therefore PQ = 2,3 \text{ u.}$$

$$PB = 13,85 - 2,3 = 11,54 \text{ u.}$$

$$PA = PE = \sqrt{12^2 - PB^2} = 3,29 \text{ u.}$$

61.



$$D) BC = \sqrt{16^2 + 12^2} = 20 \text{ u.}$$

$$AE \times 20 = 16 \times 12 \quad \therefore AE = 9,6 \text{ u.}$$

$$BM = \sqrt{12^2 - 8^2} = 8,9 \text{ u.}$$

$$EC = \sqrt{AC^2 - AE^2} = 12,8 \text{ u.}$$

$$\Delta BMC : DM \times BE \times AC = BD \times EC \times AM$$

$$DM \times 7,2 \times 16 = (8,9 - DM) \times 12,8 \times 8$$

$$\therefore DM = 4,18 \text{ u.}$$

$$\Delta AEC : DE \times AM \times BC = AD \times MC \times BE$$

$$DE \times 8 \times 20 = (9,6 - DE) \times 8 \times 7,2$$

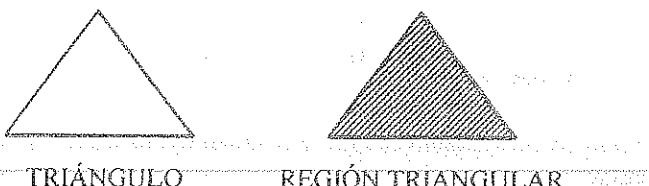
$$\Rightarrow DE = 2,54 \text{ u.}$$

4.5.12. ÁREA DE UN TRIÁNGULO

La palabra área se emplea de dos modos diferentes. Área puede significar una región, por ejemplo: un parque, un terreno, etc. o, es el número asociado a la medida de una región triangular.

4.5.12.1 REGIÓN TRIANGULAR

Es la unión de un triángulo y su interior.



4.5.12.2 UNIDAD DE ÁREA

Es la región determinada por un cuadrado, que tiene por lado la unidad de longitud.



4.5.12.3 ÁREA DE UNA REGIÓN TRIANGULAR

Es un número que expresa cuantas veces está contenida la unidad de área en la región triangular.

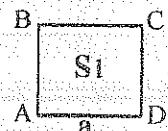
La longitud de un segmento puede medirse directamente usando una regla o una cinta métrica; la medida de un ángulo se obtiene con un graduador o transportador, pero el área de una región triangular no puede medirse, porque en la mayoría de los casos es inexacta, razón por la cual el área de una región se calcula mediante una fórmula.

Con el objetivo de acortar su nombre, se usará área del triángulo como equivalente al área de una región triangular.

4.5.12.4. POSTULADOS

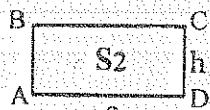
1. Si dos triángulos son congruentes, tienen áreas iguales.
2. Si dos triángulos tienen áreas iguales, son equivalentes.
3. El área de un triángulo es igual a la suma de las áreas de los triángulos en que se pueda descomponer.
4. El área de un cuadrado es igual al cuadrado de su lado.

$$A_{ABCD} = A_1 = a^2$$



5. El área de un rectángulo es igual al producto de su base por su altura.

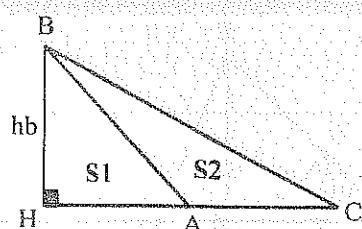
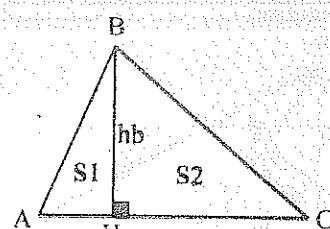
$$A_{ABCD} = A_2 = a \times h$$



4.5.12.5. TEOREMAS

1. El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de su base por su altura correspondiente.

$$T) A_{\Delta ABC} = \frac{AC \times hb}{2}$$



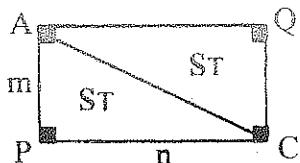
D) APCQ Rectángulo

$$A \square APCQ = 2 A_T$$

$$m \times n = 2 A_T$$

$$A_T = A \Delta APC = \frac{m \times n}{2}$$

$$A \Delta ABC = \frac{HC \times hb}{2} + \frac{HA \times hb}{2} \Rightarrow A \Delta ABC = \frac{AC \times hb}{2}$$



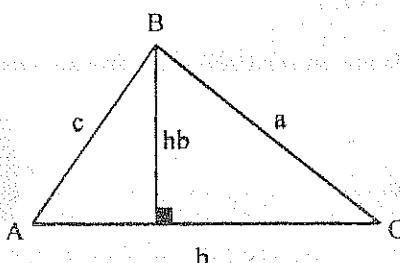
2. El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de dos lados por el seno del ángulo formado por éstos lados.

$$T) A \Delta ABC = \frac{b \times c \times \operatorname{Sen} A}{2}$$

$$D) \operatorname{Sen} A = \frac{hb}{c}$$

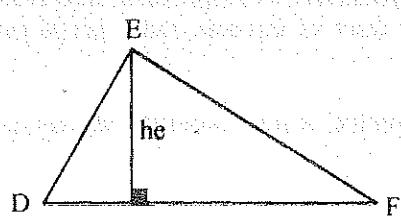
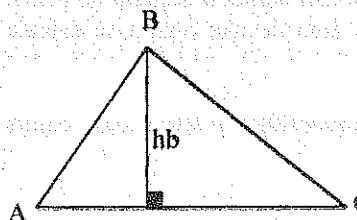
$$A \Delta ABC = \frac{b \times hb}{2}$$

$$A \Delta ABC = \frac{b \times c \times \operatorname{Sen} A}{2}$$



4.5.12.6. RELACIONES ENTRE ÁREAS DE TRIÁNGULOS

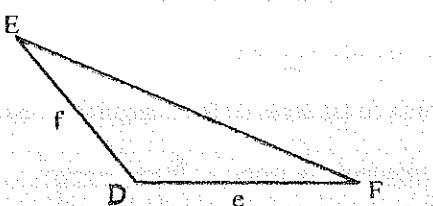
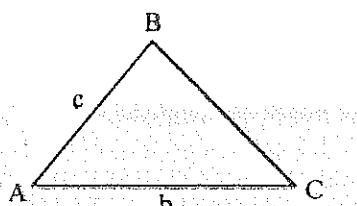
1. Si tienen un lado respectivamente congruente.



$$\text{Si: } AC = DF$$

$$\frac{A \Delta ABC}{A \Delta DEF} = \frac{hb}{he}$$

2. Si tienen dos lados respectivamente congruentes.



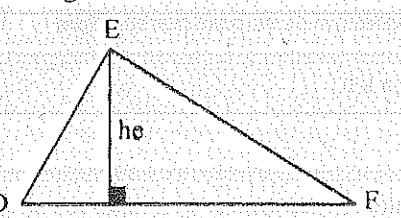
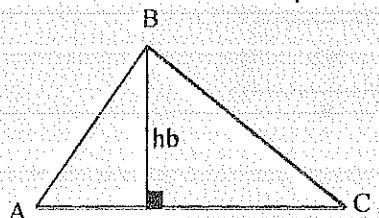
$$\text{Si: } b = e$$

$$c = f$$

$$\frac{A \Delta ABC}{A \Delta DEF} = \frac{\operatorname{Sen} A}{\operatorname{Sen} D}$$

3. Si tienen tres lados respectivamente congruentes, son equivalentes. $A_1 = A_2$

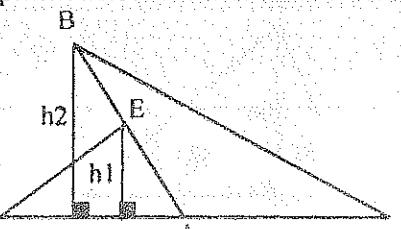
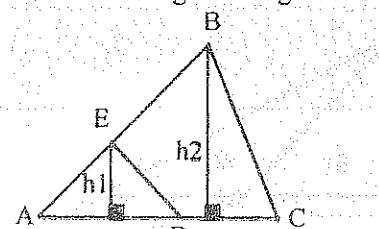
4. Si tienen una altura respectivamente congruente.



$$\text{Si: } hb = he$$

$$\frac{A \Delta ABC}{A \Delta DEF} = \frac{AC}{DF}$$

5. Si tienen ángulos congruentes o suplementarios



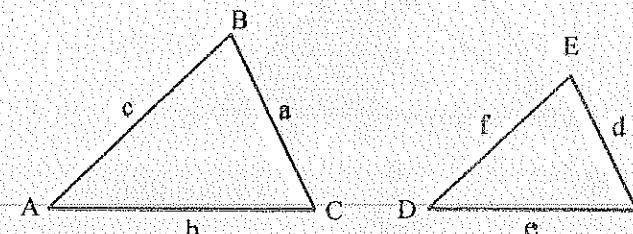
$$\text{Si: } \hat{BAC} = \hat{EAD}$$

$$\text{o } \hat{BAC} + \hat{EAD} = 180^\circ$$

$$\therefore \frac{h2}{h1} = \frac{AB}{AE}$$

$$\text{y } \frac{A\Delta ABC}{A\Delta ADE} = \frac{AC \times h_2}{AD \times h_1} \Rightarrow \frac{A\Delta ABC}{A\Delta AED} = \frac{AC \times AB}{AE \times AD}$$

6. Si tienen dos ángulos respectivamente congruentes.



$$\begin{aligned} &\text{Si : } A = D \\ &B = E \\ &\therefore \Delta ABC \approx \Delta DEF \\ &\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{A\Delta ABC}{A\Delta DEF} = \frac{b \times c}{f \times e} = \frac{a^2}{d^2} = \dots$$

4.5.13. EJERCICIOS

1. H) $AB = 15 \text{ u.}$
 $AD = 3,75 \text{ u.}$

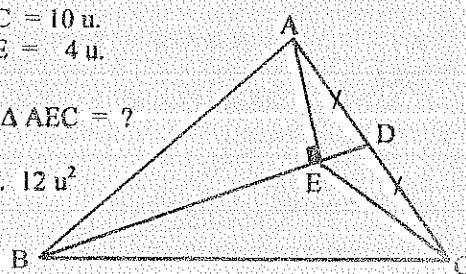
T) $A\Delta BDH = ?$

Resp. $21,9 \text{ u}^2$

2. H) $AC = 10 \text{ u.}$
 $AE = 4 \text{ u.}$

T) $A\Delta AEC = ?$

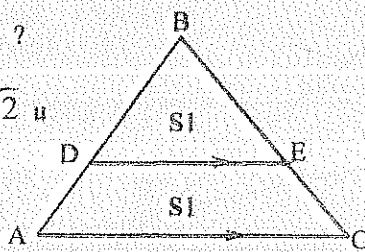
Resp. 12 u^2



3. H) $DE = 4 \text{ u.}$

T) $AC = ?$

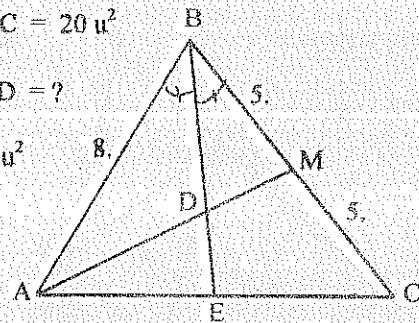
Resp. $4\sqrt{2} \text{ u}$



4. H) $A\Delta ABC = 20 \text{ u}^2$

T) $A\Delta ABD = ?$

Resp. $6,14 \text{ u}^2$

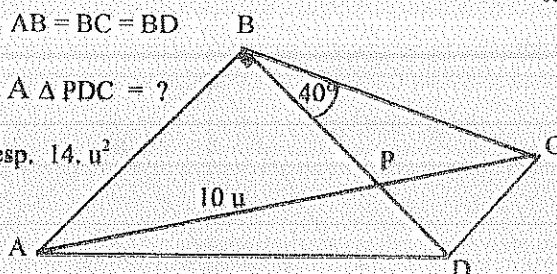


5.

H) $AB = BC = BD$

T) $A\Delta PDC = ?$

Resp. 14 u^2

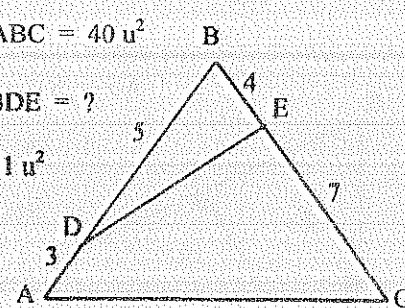


6.

H) $A\Delta ABC = 40 \text{ u}^2$

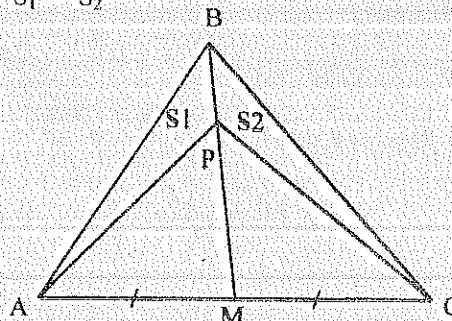
T) $A\Delta BDE = ?$

Resp. $9,1 \text{ u}^2$

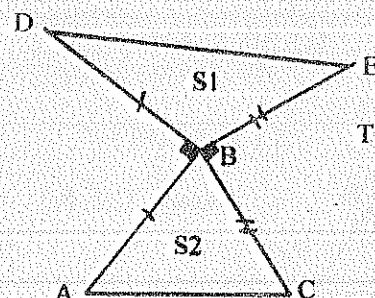


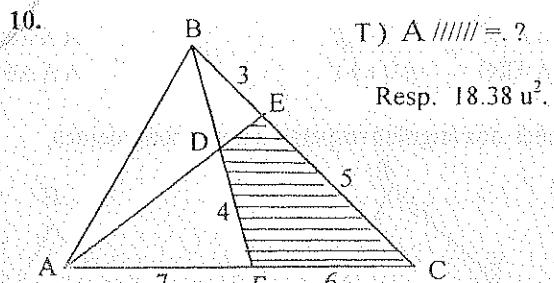
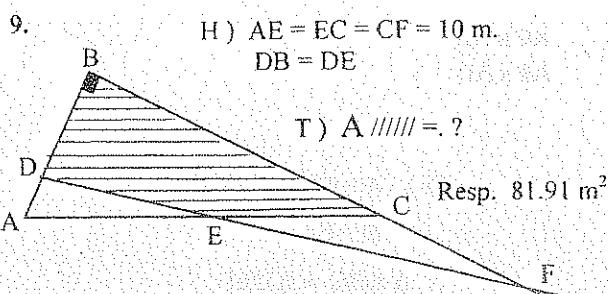
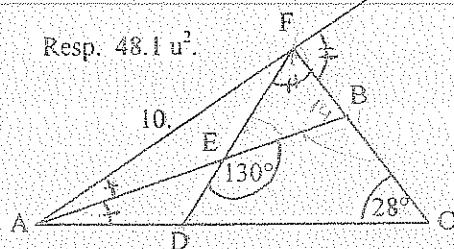
7.

T) $S_1 = S_2$



8.



11. T) $A_{\text{shaded}} = ?$ Resp. 48.1 u^2 12. T) $A_{\Delta BDC} = ?$

Resp. 5.94 u^2

13. T) $A_{\Delta AEF} = ?$

Resp. 13.8 u^2

14. H) $BM = 9 \text{ m}$

T) $A_{\text{shaded}} = ?$

Resp. 12.76 m^2

15. T₁) $CF = ?$

T₂) $AX = ?$

Resp. 3 u

Resp. 8 u^2

16. H) $AC = 8 \text{ m}$

DF = 10.45 m

T) $A_{\Delta FCE} = ?$

Resp. 12 m^2

17. H) $AB = 6 \text{ u}$
 $AC = 8 \text{ u}$

T) $DC = ?$

Resp. 5.66 u

18. T) $A_{\Delta ADH} = ?$

Resp. 2.97 u^2

19. H) $AB = 8 \text{ m}$
 $AC = 6 \text{ m}$

T) $A_{\Delta EDH} = ?$

Resp. 1.73 m^2

20. H) $BD = 15$

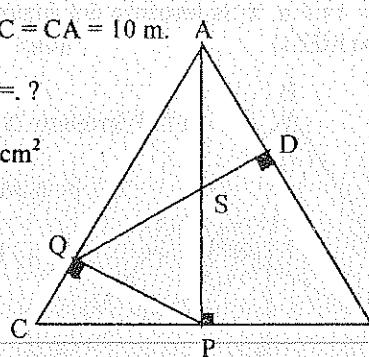
T) $A_{\Delta ABC} = ?$

Resp. 119.92 u^2

TRIÁNGULOS

*

G. Calvache, T. Rosero, M. Yacelga

38. H) $AB = BC = CA = 10 \text{ m.}$ T) $A_{PQS} = ?$ Resp. 8.12 cm^2 

39.

H) G Baricentro ΔABC $\overline{FL} \parallel \overline{AB}$ $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$ $\overline{MI} \parallel \overline{CB}$ $S_1 = 9 \text{ m}^2$ T) $A_{\Delta ABC} = ?$ Resp. 81 u^2

41.

H) $BC = 14 \text{ m.}$ $AE = 16 \text{ m.}$ $AB = 10 \text{ m.}$ T) $A_{DBE} = ?$ Resp. 19.8 m^2

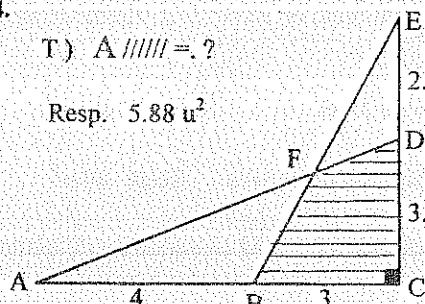
42.

H) $AB = BC$ $BD = DC$ $BH = HD$ $AC = 12 \text{ m.}$ T) $A_{ABC} = ?$ Resp. $12\sqrt{3} \text{ cm}^2$

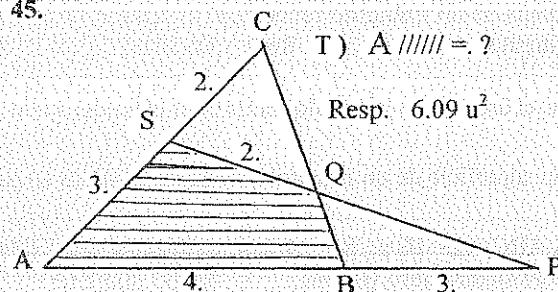
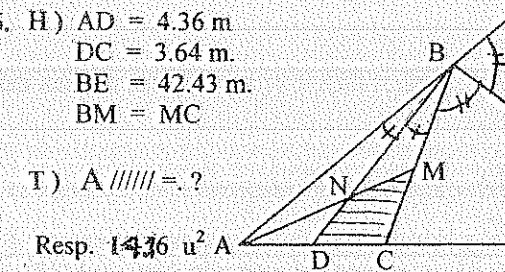
43.

T) $A_{\Delta DBA} = ?$ Resp. 8.64 m^2

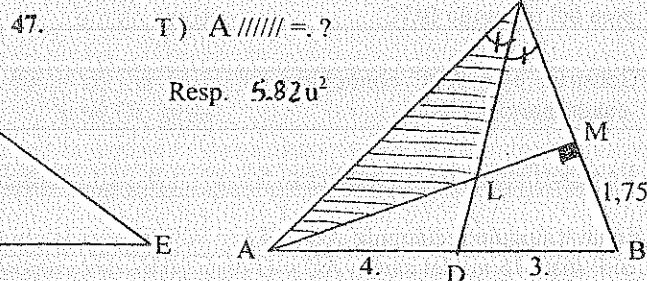
44.

T) $A_{|||||} = ?$ Resp. 5.88 u^2 

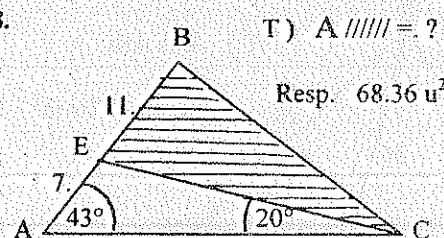
45.

T) $A_{|||||} = ?$ Resp. 6.09 u^2 46. H) $AD = 4.36 \text{ m.}$ $DC = 3.64 \text{ m.}$ $BE = 42.43 \text{ m.}$ $BM = MC$ T) $A_{|||||} = ?$ Resp. 14.36 u^2 

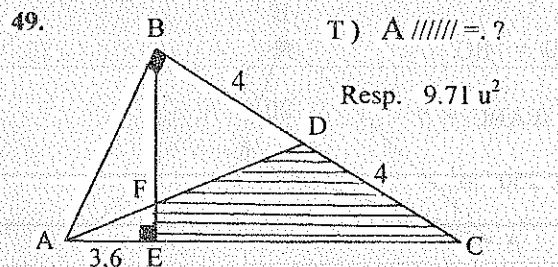
47.

T) $A_{|||||} = ?$ Resp. 5.82 u^2 

48.

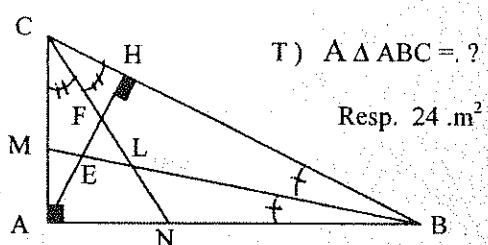
T) $A_{|||||} = ?$ Resp. 68.36 u^2 

49.

T) $A_{|||||} = ?$ Resp. 9.71 u^2 

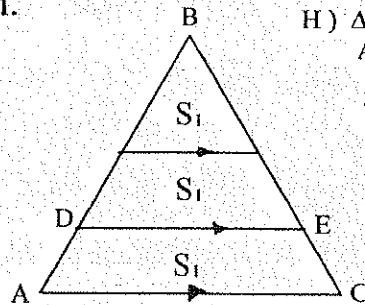
50.

- H) $BC = 10 \text{ m}$
 $EF = 1/3 \text{ m}$



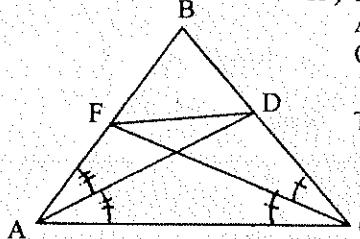
51.

- H) ΔABC Equilátero
 $AC = 12 \text{ u.}$

T) $DE = ?$ Resp. $4\sqrt{6} \text{ u.}$

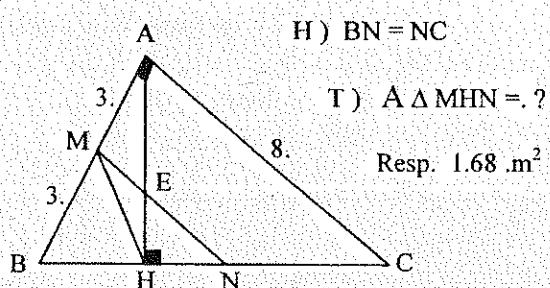
52.

- H) $AB = 21 \text{ m.}$
 $AC = 28 \text{ m.}$
 $CB = 20 \text{ m.}$



53.

- T) $A\Delta AFD = ?$
 Resp. 52.3 m^2

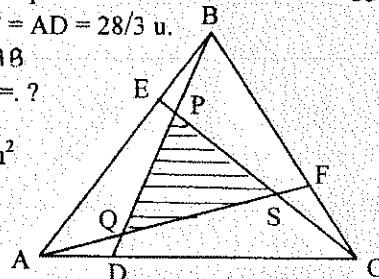
H) $BN = NC$

- T) $A\Delta MHN = ?$
 Resp. 1.68 m^2

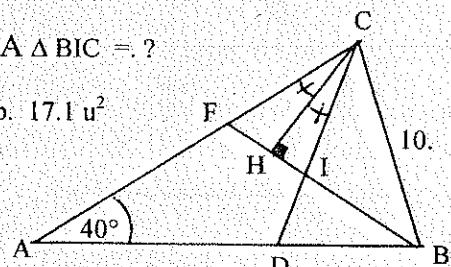
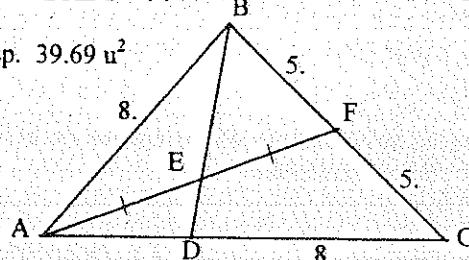
54. H) ΔABC Equilátero

$$BE = CF = AD = 28/3 \text{ u.}$$

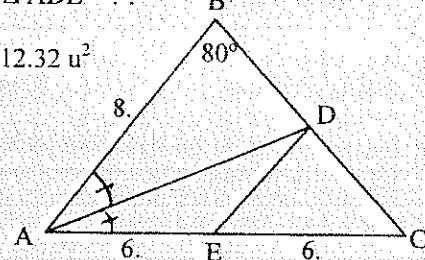
$$AE \leq AB$$

T) $A\Delta AED = ?$ Resp. 46.9 u^2 

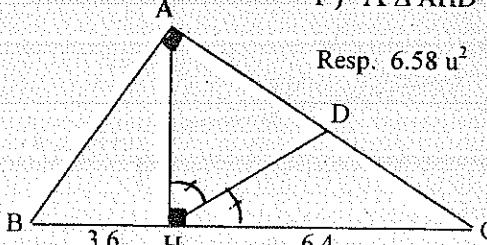
55.

H) I Incentro ΔABC T) $A\Delta BIC = ?$ Resp. 17.1 u^2 56. T) $A\Delta ABC = ?$ Resp. 39.69 u^2 

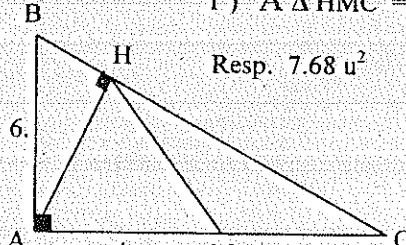
57.

T) $A\Delta ADE = ?$ Resp. 12.32 u^2 

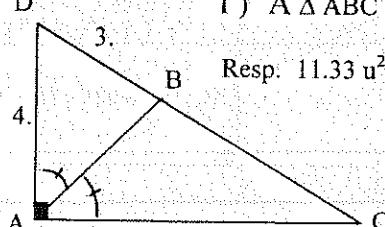
58.

T) $A\Delta AHD = ?$ Resp. 6.58 u^2 

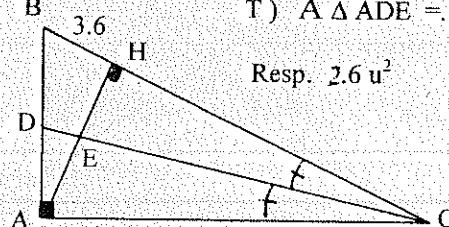
59.

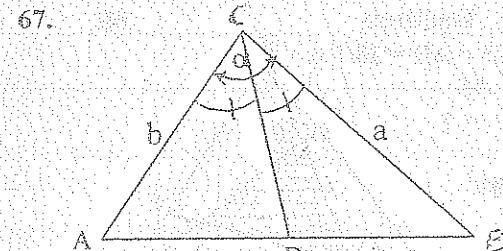
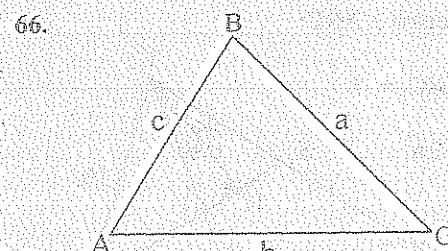
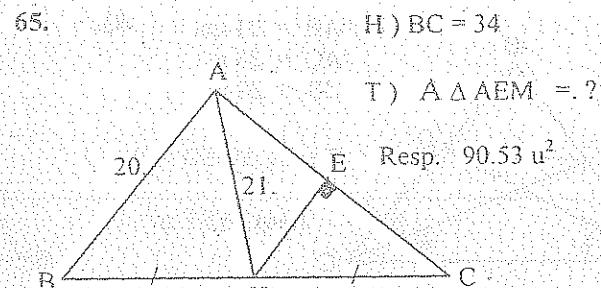
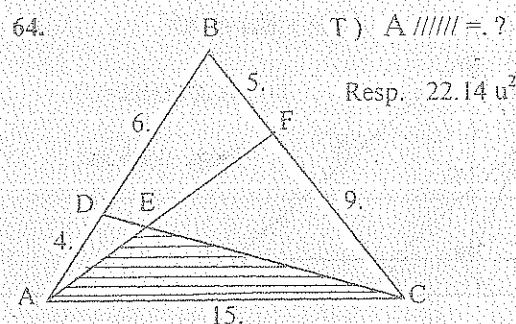
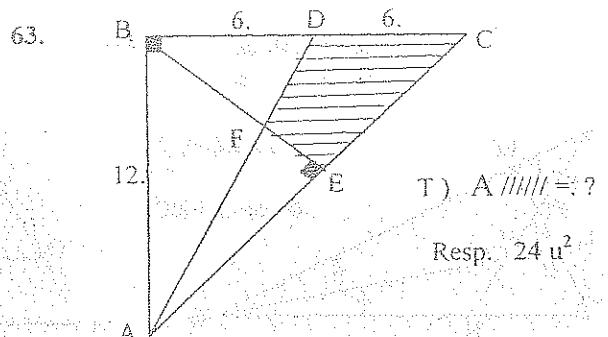
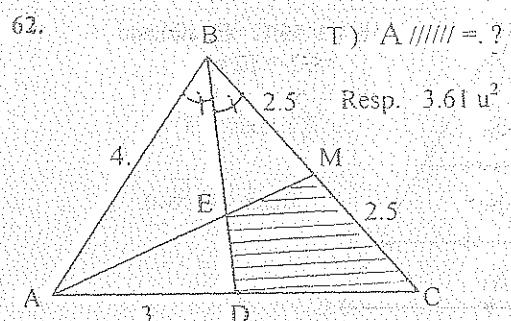
T) $A\Delta HMC = ?$ Resp. 7.68 u^2 

60.

T) $A\Delta ABC = ?$ Resp. 11.33 u^2 

61.

T) $A\Delta ADE = ?$ Resp. 2.6 u^2 

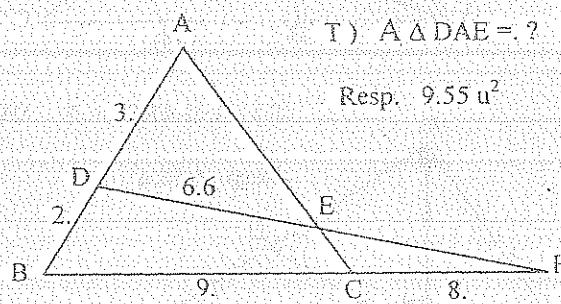
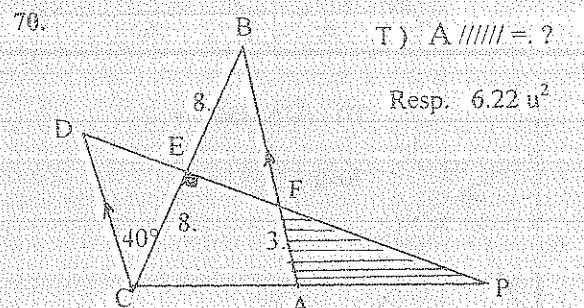


$$T) A \Delta ABC = \frac{a^2 \times \operatorname{Sen} B \times \operatorname{Sen} C}{2 \operatorname{Sen} A}$$

$$T) BD = \frac{2 a \times b \times \operatorname{Cos} \alpha/2}{(a+b)^2}$$

68. Los lados de un $\triangle ABC$ son: $b = 36$ u., $c = 25$ u. y es equivalente a un triángulo equilátero de lado 30 u.
Hallar el lado a. Resp. 31.95 u.

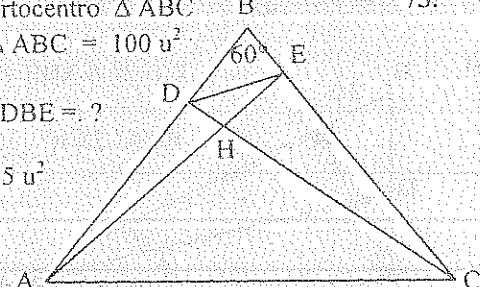
69. Hallar el área de un triángulo rectángulo, sabiendo que las proyecciones de los catetos en la bisectriz del ángulo recto miden 58 u. y 62 u. respectivamente. Resp. $3595.76 u^2$



72. H) H Ortocentro $\triangle ABC$
 $A \Delta ABC = 100 u^2$

$$T) A \Delta DBE = ?$$

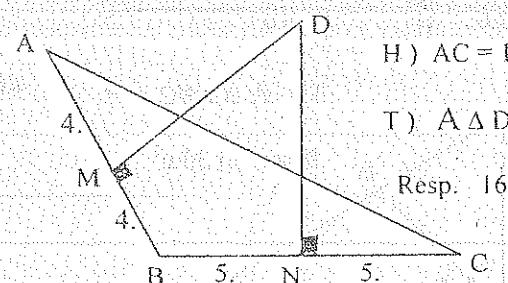
Resp. $25 u^2$



- H) $AC = 16$

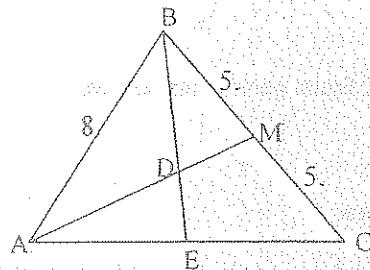
$$T) A \Delta DFG = ?$$

Resp. $16.5 u^2$



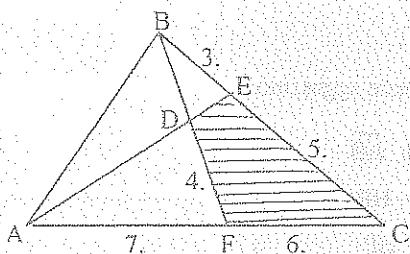
4.5.13.1. EJERCICIOS RESUELTOS

4.



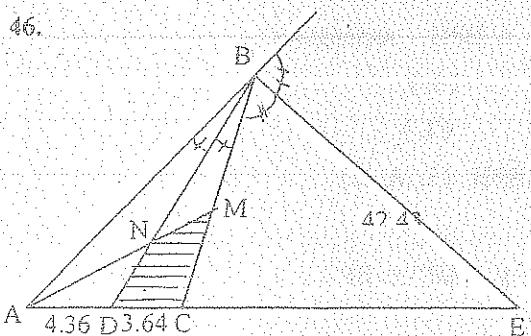
$$\begin{aligned} D) \quad 20 u^2 &= \frac{80 \operatorname{Sen} B}{2} \quad \therefore B = 30^\circ \\ AM^2 &= 8^2 + 5^2 - 2 \times 8 \times 5 \times \operatorname{Cos} 30^\circ \\ AM &= 4,44 \text{ u.} \\ \frac{AD}{4,44 - AD} &= \frac{8}{5} \quad \therefore AD = 2,73 \text{ u.} \\ DM &= 1,71 \text{ u.} \\ \frac{A \parallel\!/ \! /}{A \Delta ABM} &= \frac{2,73}{4,44} \Rightarrow A \parallel\!/ \! / = 6,14 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

10.



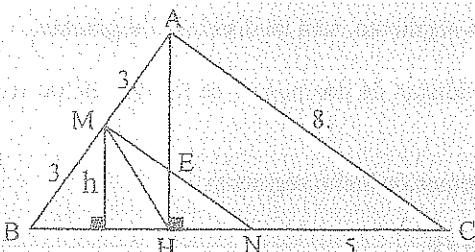
$$\begin{aligned} D) \quad BD \times 5 \times 7 &= 4 \times 3 \times 13 \\ \therefore BD &= 4,45 \text{ u.} \\ A \Delta FBC &= 22,94 \text{ u}^2 \\ A \Delta DBE &= \frac{3 \times 4,45}{8 \times 8,4} \\ \therefore A \Delta DBE &= 4,56 \text{ u}^2 \\ A \parallel\!/ \! / &= 22,94 - 4,56 = 18,38 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

46.



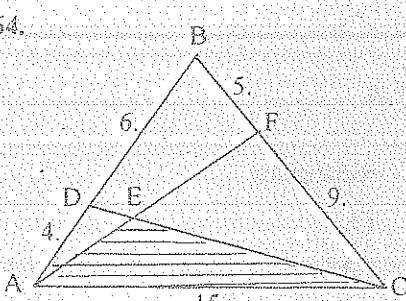
$$\begin{aligned} D) \quad \text{Idem Ejercicio \# 2 de 4.12.2.7.1} \\ CE &= 40,44 \text{ u.} \\ BD &= 11,18 \text{ u.} \\ BN \times MC \times AD &= ND \times BM \times AC \\ \frac{BN}{ND} &= \frac{8}{4,36} \quad y \quad \frac{BN}{BD} = \frac{8}{12,36} \\ \frac{A \Delta DBC}{A \Delta DBE} &= \frac{3,64}{44,08} \Rightarrow A \Delta DBC = 19,6 \text{ u}^2 \\ \frac{A \Delta NBM}{A \Delta DBC} &= \frac{BN \times BM}{BD \times BC} \Rightarrow A \Delta NBM = 6,34 \text{ u}^2 \\ A \parallel\!/ \! / &= 19,6 - 6,34 = 13,01 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

53.



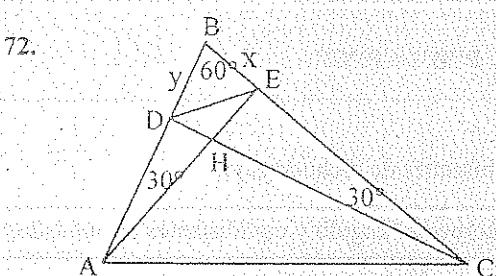
$$\begin{aligned} D) \quad BC &= \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ u.} \\ AH \times 10 &= 8 \times 6 \quad \therefore AH = 4,8 \text{ u.} \\ AH^2 &= BH \times (10 - BH) \quad \therefore BH = 3,6 \text{ u.} \\ HN &= 5 - 3,6 = 1,4 \text{ u.} \\ A \Delta MHN &= (HN/2) \times (AH/2) = 1,68 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

64.



$$\begin{aligned} D) \quad 15^2 &= 14^2 + 10^2 - 2 \times 10 \times 14 \operatorname{Cos} B \\ \therefore B &= 75,31^\circ \\ DC^2 &= 14^2 + 6^2 - 2 \times 6 \times 14 \operatorname{Cos} 75,31^\circ \\ \therefore DC &= 13,76 \text{ u.} \\ DE \times 10 &= (13,76 - DE) \times 4 \times 5 \\ \therefore DE &= 2,5 \text{ u.} \quad EC = 11,26 \text{ u.} \\ A \Delta ABC &= 70 \text{ u}^2 \\ A \Delta ADC &= (4/10) \times 70 = 28 \text{ u}^2 \\ \Rightarrow A \parallel\!/ \! / &= (11,26/13,76) \times 28 = 22,14 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

72.



$$\begin{aligned} D) \quad \frac{A \Delta DBE}{A \Delta ABC} &= \frac{x \times y}{AB \times BC} \\ \operatorname{Cos} 60^\circ &= \frac{x}{AB} = \frac{y}{BC} = \frac{1}{2} \\ \frac{A \Delta DBE}{A \Delta ABC} &= \frac{x \times y}{2 \times x \times 2y} \\ \therefore A \Delta DBE &= 25 \text{ u}^2 \end{aligned}$$

4.5.14. LUGARES GEOMÉTRICOS BÁSICOS

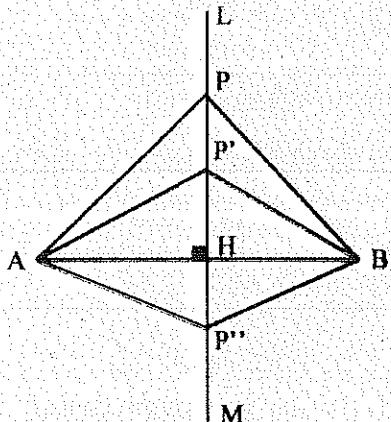
4.5.14.1. DEFINICIÓN

Se llama lugar geométrico de los puntos que gozan de cierta propiedad, a la figura geométrica tal que:

1. Todos los puntos gozan de esa propiedad.
2. Todos los puntos que gozan de esa propiedad pertenecen a la figura.
3. Todos los puntos que no sean elementos del lugar geométrico no deben cumplir las condiciones dadas.

4.5.14.2. PROPIEDAD DE LA MEDIATRIZ DE UN SEGMENTO

Todo punto de la mediatrix de un segmento equidista de los extremos de este segmento.



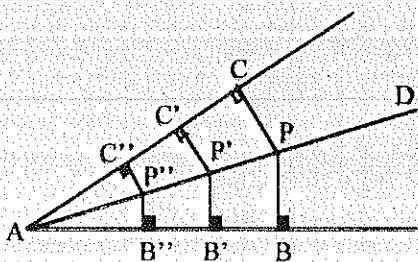
$$\begin{aligned}
 &H) LM \perp AB \\
 &AH = HB \\
 &T) AP = BP \\
 &D) \Delta APH \wedge \Delta BPH \text{ rectángulos} \\
 &\quad AH = HB \quad (L) \\
 &\quad HP = HP \quad (L) \\
 &\therefore \Delta APH \cong \Delta BPH \quad (L.A.L.) \\
 &\Rightarrow AP = BP \\
 &\text{idem. } AP' = BP' \text{ y } AP'' = BP''
 \end{aligned}$$

COROLARIOS.

1. Todo punto que equidista de los extremos de un segmento, pertenece a la mediatrix de dicho segmento.
2. Si una recta tiene dos puntos equidistantes de los extremos de un segmento, será mediatrix del segmento.
3. Si dos rectas se cortan de manera que dos puntos de la una equidistan de dos puntos de la otra, dichas rectas son perpendiculares entre si.
4. La mediatrix de un segmento, es el lugar geométrico de los extremos de dicho segmento.

4.5.14.3. PROPIEDAD DE LA BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

Todo punto de la bisectriz de un ángulo equidista de los lados del ángulo.



$$\begin{aligned}
 &H) AD \text{ Bisectriz del } A \\
 &T) PB = PC \\
 &D) \Delta APB \wedge \Delta APC \text{ rectángulos} \\
 &\quad AP = AP \quad (L) \\
 &\quad BAP = CAP \quad (A) \\
 &\therefore \Delta APB \cong \Delta APC \quad (A.L.A.) \\
 &\Rightarrow PB = PC \\
 &\text{idem. } P'B' = P'C' \text{ y } P''B'' = P''C'
 \end{aligned}$$

COROLARIOS

1. Todo punto equidistante de los lados de un ángulo, pertenece a la bisectriz de dicho ángulo.
2. La bisectriz de un ángulo es el lugar geométrico de los puntos internos al ángulo y equidistantes de los lados del ángulo.

UNIDAD 5

5. EL CÍRCULO

5.1. DEFINICIONES BÁSICAS

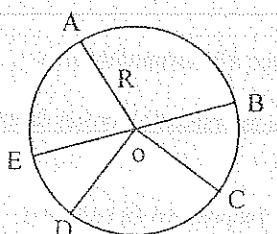
5.1.1. CIRCUNFERENCIA

Es el lugar geométrico de los puntos de un plano que se encuentran a la misma distancia R del centro O ; la longitud constante R se llama radio.

5.1.2. CÍRCULO

Es el conjunto de todos los puntos de la circunferencia y de los puntos internos a la misma.

Una circunferencia y un círculo se representan por su centro y su radio.



$\odot(O, R)$

• O centro

$OA = OB = OC = OD = \dots = R$

5.2. LINEAS Y PUNTOS FUNDAMENTALES

5.2.1. CUERDA

Es el segmento cuyos extremos son puntos de la circunferencia. Cuerda AB

5.2.2. DIÁMETRO

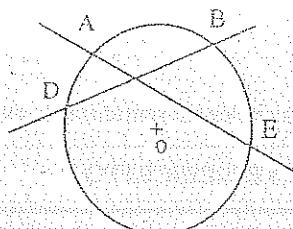
Es la cuerda que contiene el centro del círculo, es la mayor de las cuerdas e igual al doble del radio.

Diámetro BE = $2R$

5.2.3. SECANTE

Es una recta que corta a la circunferencia en dos puntos.

Secantes AE y BD

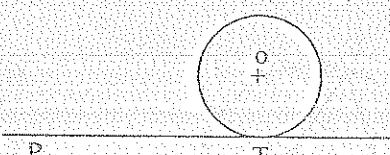


5.2.4. TANGENTE

Es una recta que interseca a la circunferencia en un solo punto, llamado punto de tangencia o punto de contacto.

Tangente PT

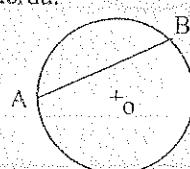
Punto de tangencia T



5.2.5. ARCO (AB)

Es una parte cualquiera de la circunferencia comprendida entre dos puntos. Los extremos de una cuerda dividen a la circunferencia en dos arcos, llamados arcos subtendidos por la cuerda.

Salvo indicación contraria, el arco subtendido por una cuerda se refiere al arco menor de los dos.

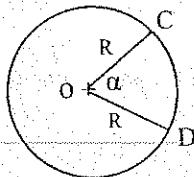


5.3. ÁNGULOS EN UN CÍRCULO

5.3.1. ÁNGULO CENTRAL (α)

Es el ángulo cuyo vértice en el centro del círculo y sus lados son radios.

$$\widehat{COD} = \widehat{\alpha} = \widehat{CD}$$



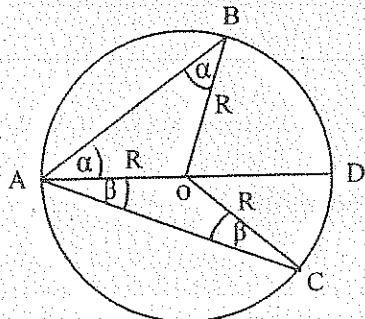
Se dice que el \widehat{COD} interseca al \widehat{CD} y que el \widehat{CD} subtiende al ángulo central \widehat{COD} .

Por definición, un ángulo central se mide por el arco intersecado por sus lados.

5.3.2. ÁNGULO INSCRITO

Es el ángulo cuyos lados son cuerdas del círculo y su vértice pertenece a la circunferencia.

La medida de un ángulo inscrito es igual a la mitad del arco intersecado por sus lados.



H) \widehat{BAC} Inscrito en $\odot(O, R)$

$$T) \widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2}$$

D) ΔAOB y ΔAOC Isósceles

$$\widehat{BOD} = 2\widehat{\alpha} = \widehat{BD}$$

$$\widehat{COD} = 2\widehat{\beta} = \widehat{DC}$$

$$\widehat{\alpha} = \frac{\widehat{BD}}{2} \quad y \quad \widehat{\beta} = \frac{\widehat{DC}}{2}$$

$$\therefore \widehat{BAC} = \frac{\widehat{BD} + \widehat{DC}}{2} = \frac{\widehat{BC}}{2} \quad III.$$

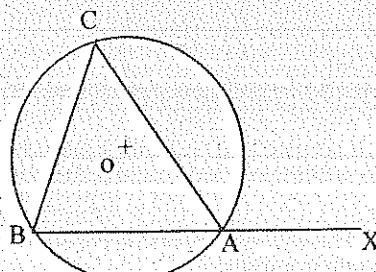
COROLARIO.

Todo ángulo inscrito en un semicírculo, es un ángulo recto.

5.3.3. ÁNGULO EX-INSKRITO

Es el ángulo formado por una cuerda y la prolongación de otra.

La medida de un ángulo ex-inscrito es igual a la semisuma de los arcos subtendidos por las cu



H) \widehat{CAX} Ex-inscrito en $\odot(O, R)$

$$T) \widehat{CAX} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{AB}}{2}$$

D) $\widehat{CAX} = \widehat{C} + \widehat{B}$

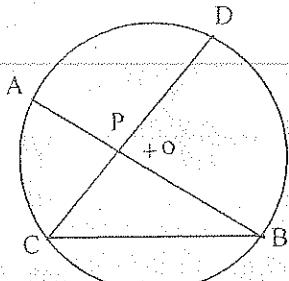
$$\widehat{CAX} = \frac{\widehat{AB}}{2} + \frac{\widehat{AC}}{2}$$

$$\therefore \widehat{CAX} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{AC}}{2} \quad III.$$

5.3.4. ANGULO INTERNO

Es el ángulo formado por dos cuerdas que se cortan.

La medida de un ángulo interno es igual a la semisuma de los arcos comprendidos entre los lados del ángulo y los lados de su ángulo opuesto por el vértice.



H) \widehat{APC} Interno en $\odot(O, R)$

$$T) \widehat{APC} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2}$$

$$D) \widehat{ABC} = \frac{\widehat{AC}}{2} \quad y \quad \widehat{DCB} = \frac{\widehat{BD}}{2}$$

$$\widehat{APC} = \widehat{ABC} + \widehat{DCB}$$

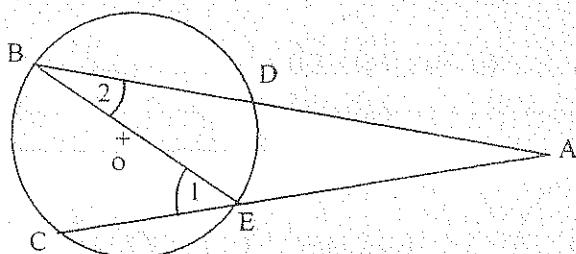
$$\widehat{APC} = \frac{\widehat{AC}}{2} + \frac{\widehat{BD}}{2}$$

$$\widehat{APC} = \frac{\widehat{AC} + \widehat{BD}}{2} \quad III.$$

5.3.5. ANGULO EXTERNO

Es el ángulo cuyo vértice está fuera del círculo y sus lados pueden ser dos secantes, dos tangentes o una secante y una tangente.

La medida de un ángulo externo es igual a la semidiferencia de los arcos comprendidos entre sus lados.



H) \widehat{A} Externo al $\odot(O, R)$

$$T) \widehat{A} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{DE}}{2}$$

$$D) \widehat{1} = \frac{\widehat{BC}}{2} \quad y \quad \widehat{2} = \frac{\widehat{DE}}{2}$$

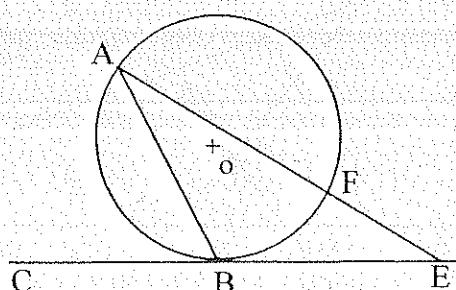
$$\widehat{A} = \widehat{1} - \widehat{2}$$

$$\widehat{A} = \frac{\widehat{BC} - \widehat{DE}}{2} \quad III.$$

5.3.6. ANGULO SEMI - INSCRITO

Es el ángulo formado por una cuerda y una tangente y su vértice es el punto de contacto.

La medida de un ángulo semi - inscrito es igual a la mitad del arco subtendido por la cuerda.



H) \widehat{CE} Tang. $\odot(O, R)$

\widehat{ABC} Semi - inscrito en $\odot(O, R)$

$$T) \widehat{ABC} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

$$D) \widehat{ABC} = \widehat{A} + \widehat{E}$$

$$\widehat{ABC} = \frac{\widehat{BF}}{2} + \left(\frac{\widehat{AB} - \widehat{BF}}{2} \right)$$

$$\widehat{ABC} = \frac{\widehat{AB}}{2} \quad III.$$

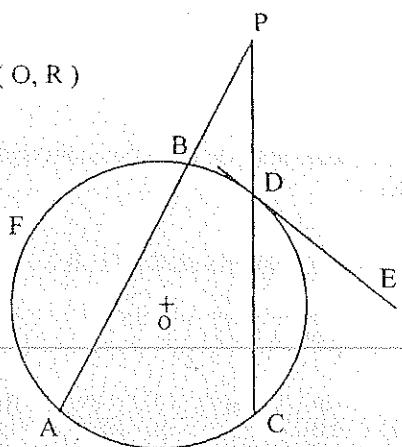
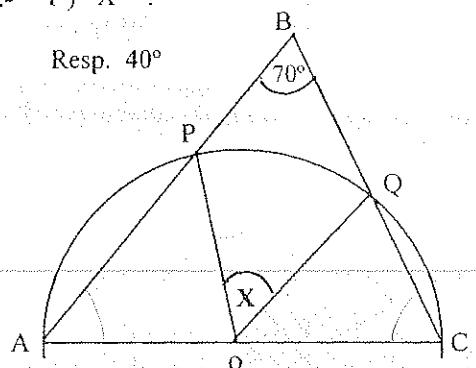
5.4. EJERCICIOS

1.- H) \widehat{DE} Tang. $\odot(O, R)$

$$\widehat{EDC} = \pi/3$$

$$\widehat{APC} = \pi/9$$

$$\widehat{AFB} = 2\pi/3$$

T) $\widehat{AC} = ?$ Resp. 80° 2.- T) $\widehat{X} = ?$ Resp. 40° 3.- H) \widehat{PT} Tang. $\odot(O, R)$

$$\widehat{AB} = 5\pi/9$$

T) $\widehat{A} = ?$ Resp. 45°

$$40^\circ$$

$$45^\circ$$

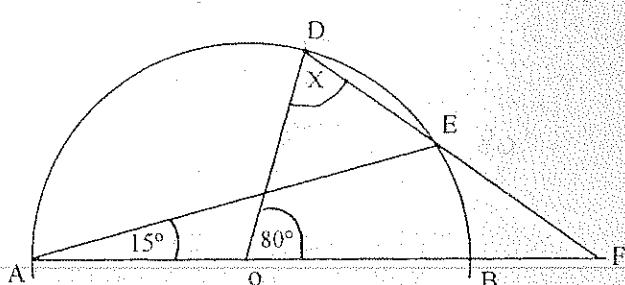
$$5\pi/9$$

$$110^\circ$$

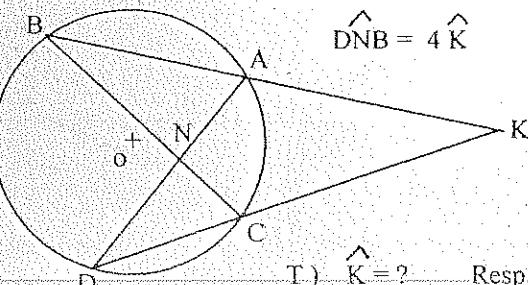
$$110^\circ$$

$$80^\circ$$

$$110^\circ$$

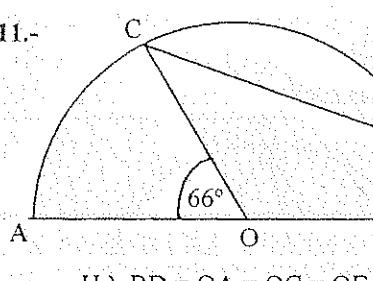
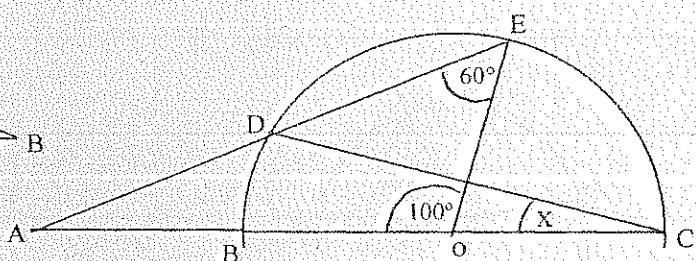
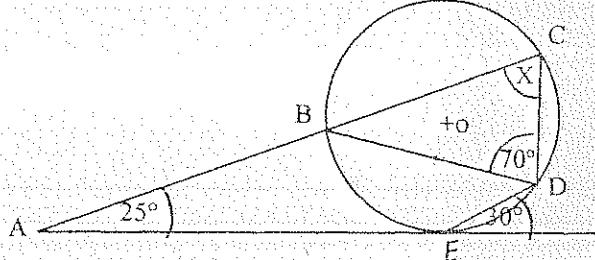
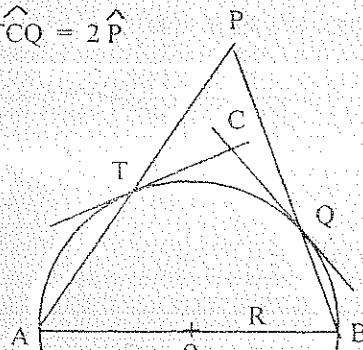
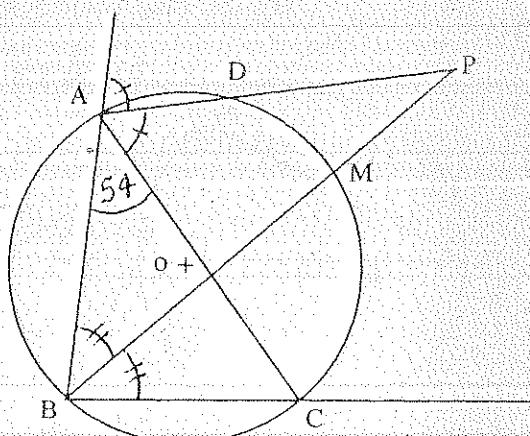
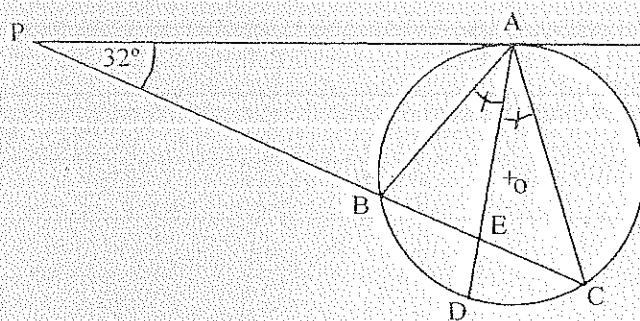
9.- T) $\hat{X} = ?$ Resp. 65° 

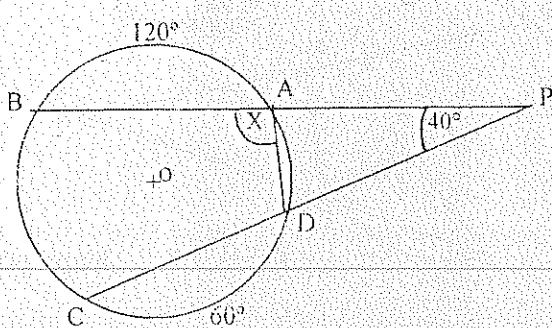
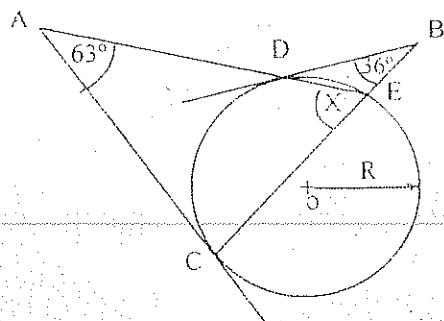
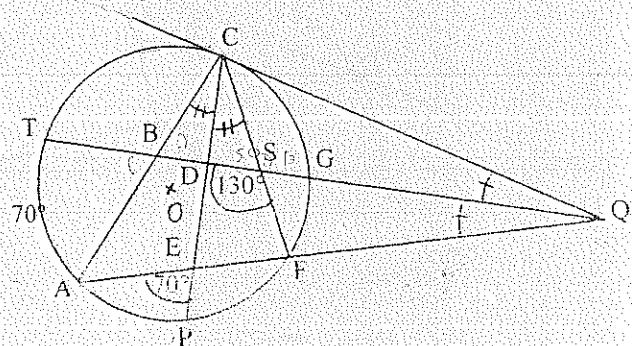
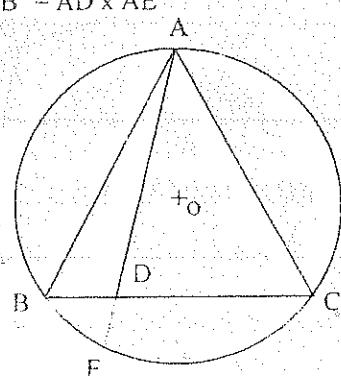
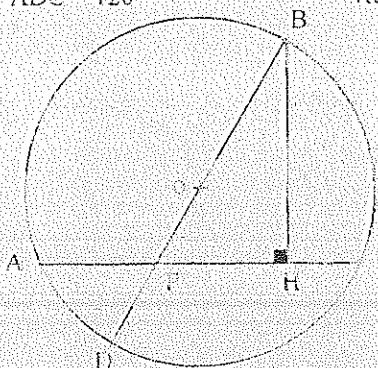
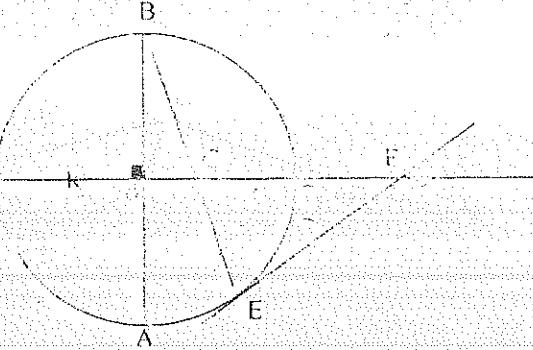
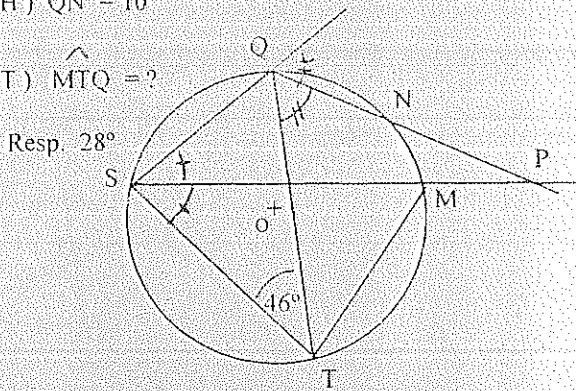
10.-

H) $\widehat{BD} = 7\pi/18$ $\hat{DNB} = 4 \hat{K}$ T) $\hat{K} = ?$ Resp. 14°

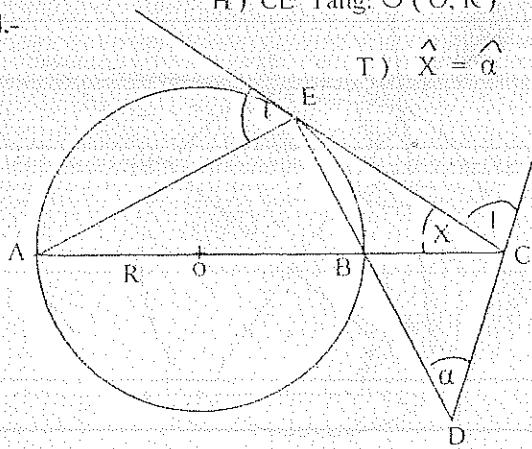
11.-

C

H) $BD = OA = OC = OE$ T) $\hat{B} = ?$ Resp. 22° 12.- T) $\hat{X} = ?$ Resp. 20° 13.- H) \overline{AE} Tang. $\odot(O, R)$ T) $\hat{X} = ?$ Resp. 72.5° 14.- H) \overline{CT} y \overline{CQ} Tangs. $\odot(O, R)$ T) $\hat{TCQ} = 2 \hat{P}$ 15.- H) $\widehat{AD} = 34^\circ$ T) $\hat{P} = ?$ Resp. 23° 16.- H) \overline{PA} Tang. $\odot(O, R)$ T) $\hat{E} = ?$ Resp. 106° 

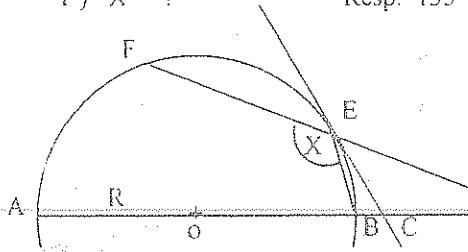
17.- T) $\hat{X} = ?$ Resp. 95° 18.- H) $\widehat{AC} \text{ y } \widehat{BD}$ Tang. $\odot(O, R)$ T) $\hat{X} = ?$ Resp. 51° 19.- H) \widehat{CQ} Tang. $\odot(O, R)$ T) $\widehat{TC} = ?$ Resp. 70° 20.- H) $AB = AC$ T) $AB^2 = AD \times AE$ 21.- H) $\widehat{PBH} = 30^\circ$ $\widehat{ADC} = 120^\circ$ T) $\widehat{A} = ?$ Resp. 45° 22.- H) \widehat{EF} Tang. $\odot(O, R)$ T) $F = ?$ $\widehat{OBC} = 3\pi/20$ Resp. 54° 23.- H) $\widehat{QN} = 10^\circ$ T) $\widehat{MTQ} = ?$ Resp. 28° 

24.-

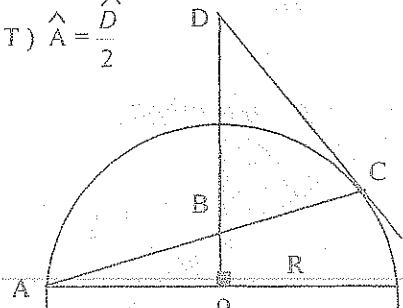
H) \widehat{CE} Tang. $\odot(O, R)$ T) $\widehat{X} = \alpha$ 

25.- H) \overline{EC} Tang. $\odot(O, R)$

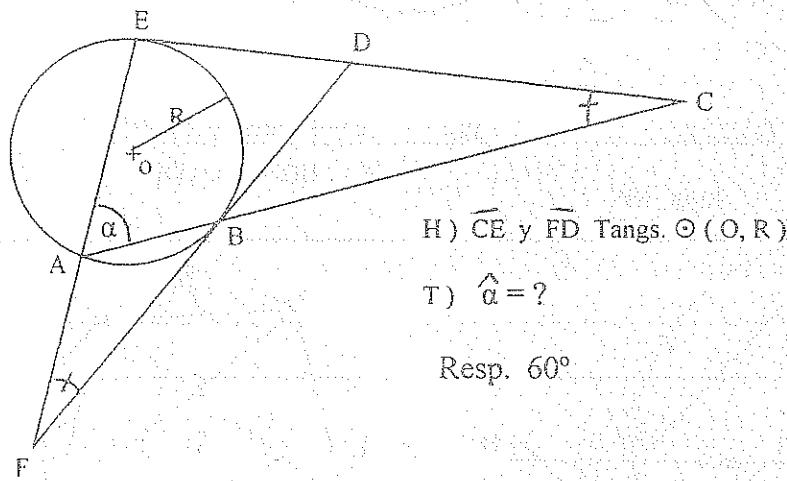
$$\begin{aligned} EC &= CD \\ T) \hat{x} &=? \end{aligned}$$

Resp. 135° 26.- H) \overline{DC} Tang. $\odot(O, R)$

$$T) \hat{A} = \frac{\hat{D}}{2}$$



27.-

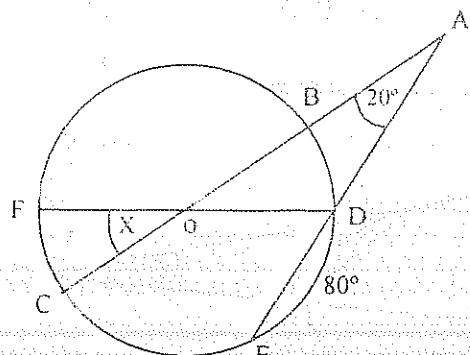
H) \overline{CE} y \overline{FD} Tang. $\odot(O, R)$

$$T) \hat{\alpha} = ?$$

Resp. 60°

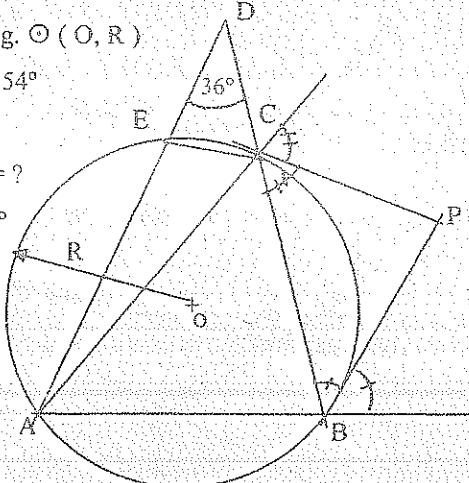
28.-

$$T) \hat{x} = ?$$

Resp. 30° 29.- H) \overline{CP} Tang. $\odot(O, R)$

$$\hat{CAB} = 54^\circ$$

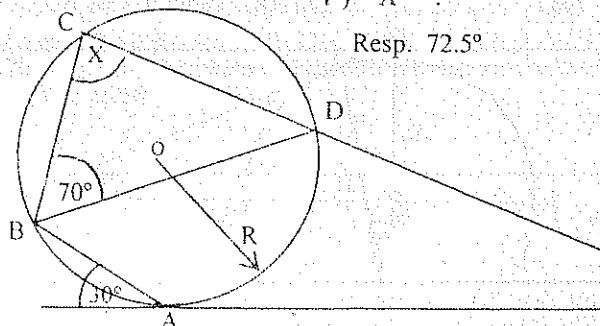
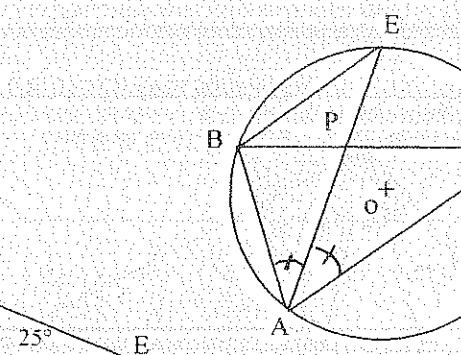
$$T) \hat{ECA} = ?$$

Resp. 18° 

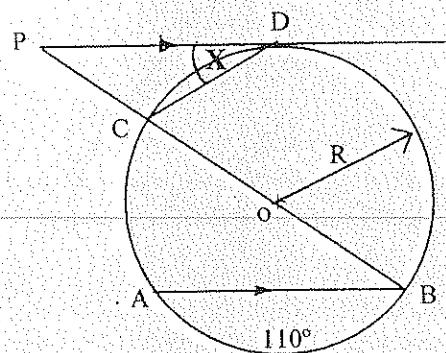
30.-

H) \overline{EA} Tang. $\odot(O, R)$

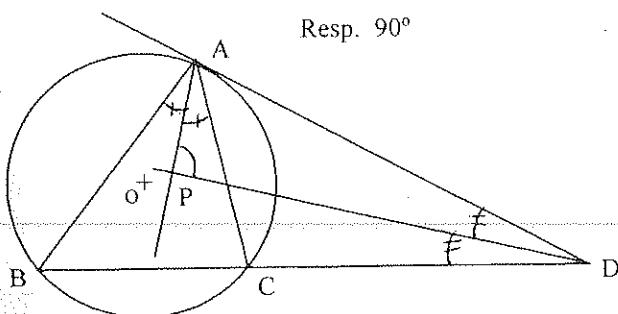
$$T) \hat{x} = ?$$

Resp. 72.5° 31.- T) $BE^2 = EP \times AE$ 

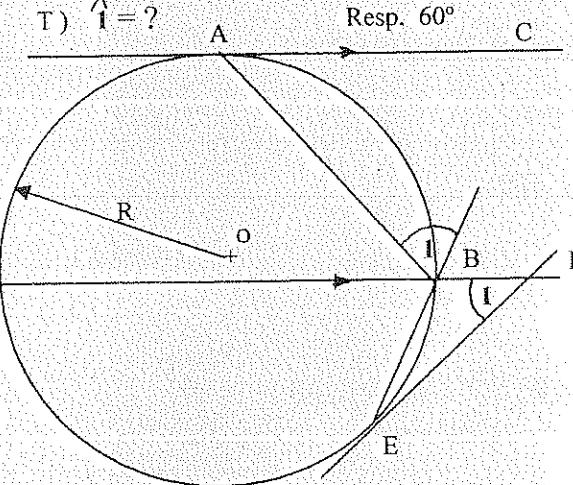
- 32.- H) \overline{PD} Tang. $\odot(O, R)$
T) $\hat{X} = ?$

Resp. 27.5°

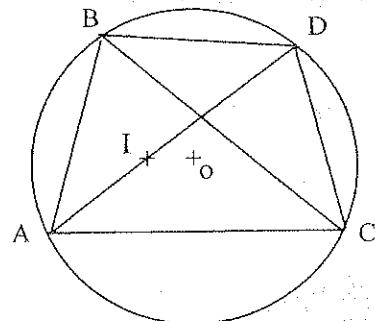
- H) \overline{AD} Tang. $\odot(O, R)$
T) $\hat{P} = ?$

Resp. 90°

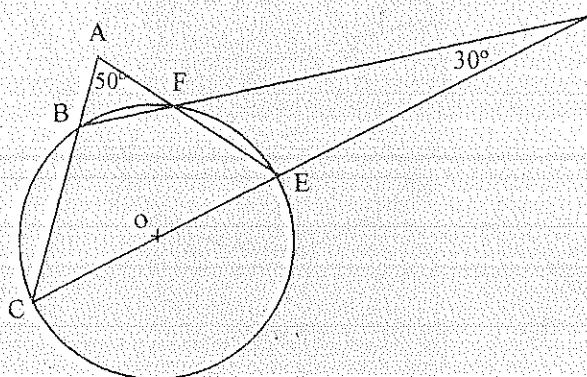
- 34.- H) \overline{AC} y \overline{DE} Tangs. $\odot(O, R)$
T) $\hat{I} = ?$

Resp. 60°

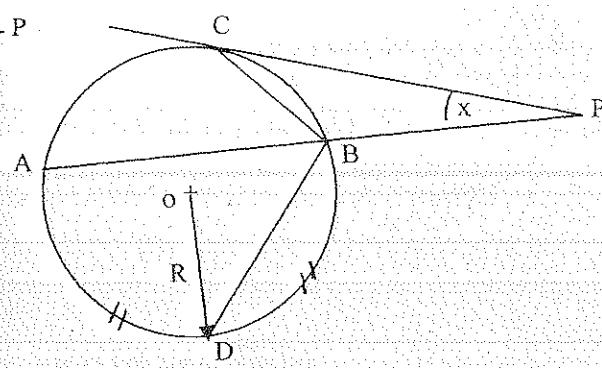
- H) • I Incentro $\triangle ABC$
T) $BD = DC = DI$



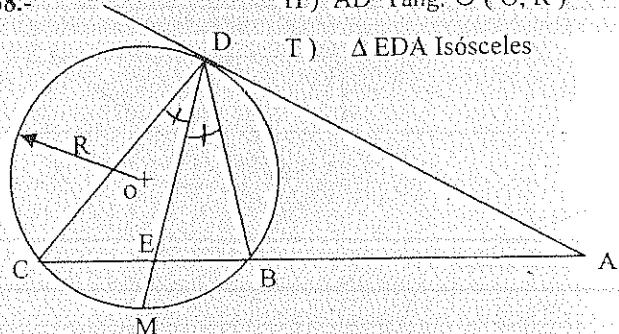
- 36.- T) $\hat{FE} = ?$ Resp. 20°



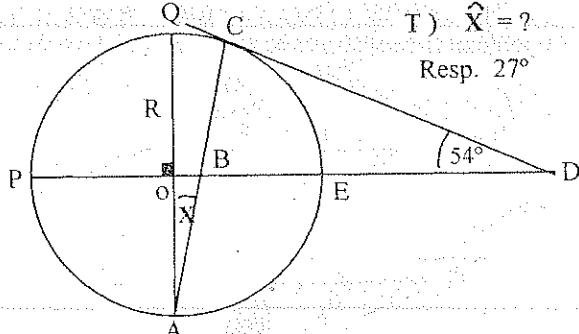
- 37.- H) \overline{PC} Tang. $\odot(O, R)$ T) $\hat{X} = ?$
 $\hat{CAD} = 220^\circ$ Resp. 40°



- 38.- H) \overline{AD} Tang. $\odot(O, R)$
T) $\triangle EDA$ Isósceles



- H) \overline{DC} Tang. $\odot(O, R)$

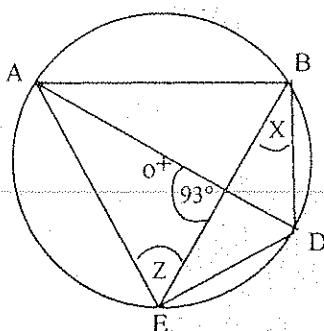


- T) $\hat{X} = ?$ Resp. 27°

40.- H) $\widehat{AB} - \widehat{DE} = 30^\circ$

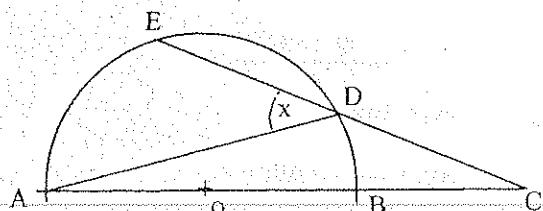
T₁) $\widehat{X} = ?$ Resp. 36°

T₂) $\widehat{Z} = ?$ Resp. 51°

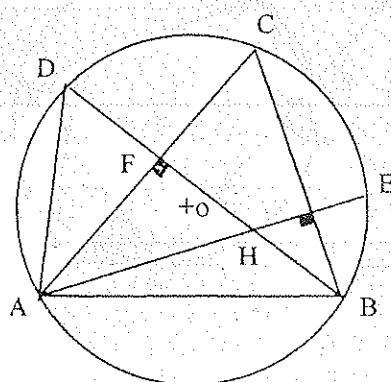


41.- H) $ED = DC = OA$

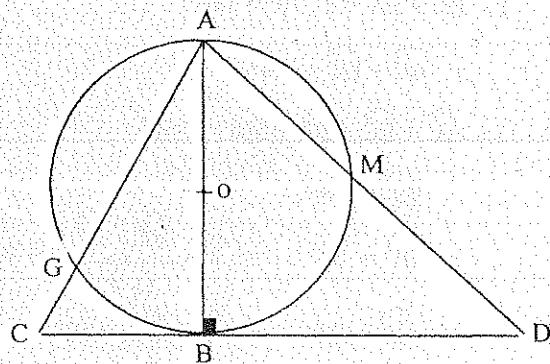
T) $\widehat{X} = ?$ Resp. 45°



42.- T) $DF = FH$



43.- T) $AC \times AG = AD \times AM$

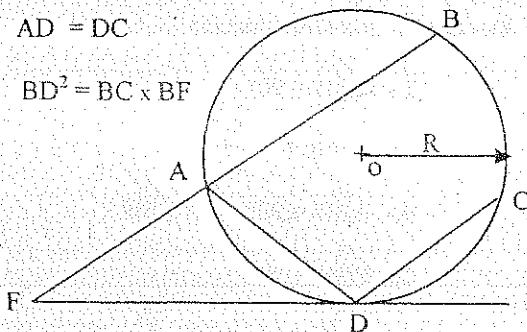


44.- Por el vértice A de un triángulo escaleno ABC y los pies de la mediana y la bisectriz relativas al vértice A, se hace pasar un círculo que corte a \overline{AB} y \overline{AC} en P y Q. Demostrar que $BP = CQ$.

45.- H) \overline{FD} Tang. $\odot(O, R)$

$AD = DC$

T) $BD^2 = BC \times BF$



5.4.1. EJERCICIOS RESUELTOS

5.- D) 1.- $\widehat{DOE} = \widehat{DE} = 53^\circ$

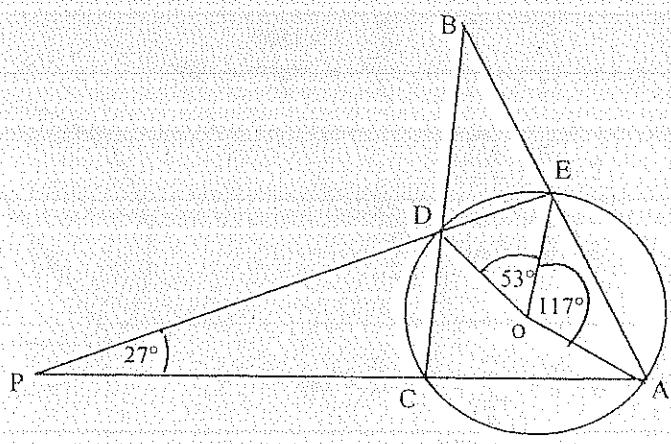
2.- $\widehat{EOA} = \widehat{EA} = 117^\circ$

3.- $27^\circ = \frac{\widehat{EA} - \widehat{DC}}{2}$
 $\Rightarrow \widehat{DC} = 63^\circ$

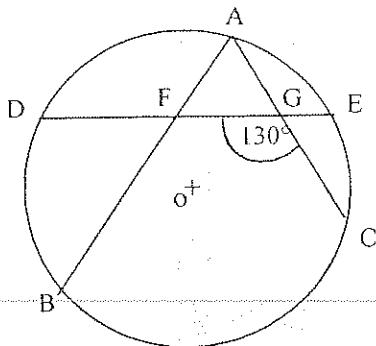
4.- $\widehat{AC} = 360^\circ - \widehat{DC} - \widehat{DE} - \widehat{EA}$

$\Rightarrow \widehat{AC} = 127^\circ$

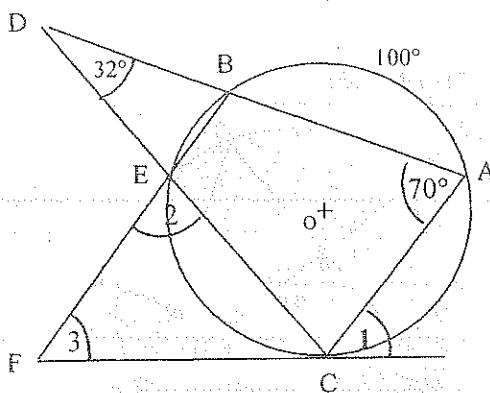
5.- $\widehat{B} = \frac{127^\circ - 53^\circ}{2} = 37^\circ$



$$\begin{aligned}
 6.- D) 1.- & 2\widehat{BD} + 2\widehat{AE} + \widehat{BC} = 360^\circ \\
 & (\widehat{BC} + \widehat{BD}) + \widehat{AE} \\
 2.- & 130^\circ = \frac{2}{2} \\
 & 130^\circ = \frac{360^\circ + \widehat{BC}}{4} \\
 \Rightarrow & \widehat{BC} = 160^\circ \\
 3.- & \widehat{BAC} = \frac{\widehat{BC}}{2} = 80^\circ
 \end{aligned}$$

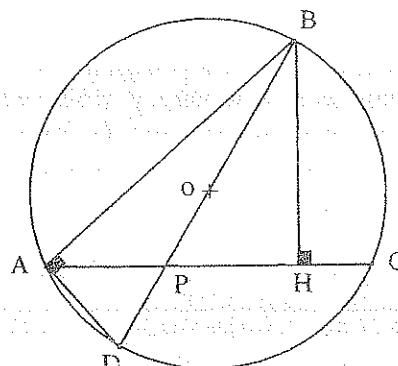


$$\begin{aligned}
 8.- D) 1.- & \widehat{AC} - \widehat{BE} = 2 \times 32^\circ = 64^\circ \\
 2.- & \widehat{EC} + \widehat{BE} = 2 \times 70^\circ = 140^\circ \\
 & \widehat{AC} + \widehat{EC} = 204^\circ \\
 3.- & \widehat{AC} + \widehat{EC} + \widehat{BE} + 100^\circ = 360^\circ \\
 \therefore & \widehat{BE} = 56^\circ \\
 \widehat{EC} = & 84^\circ \Rightarrow \widehat{2} = \frac{\widehat{BE} + \widehat{EC}}{2} = 70^\circ \\
 \widehat{AC} = & 120^\circ \Rightarrow \widehat{1} = \frac{\widehat{AC}}{2} = 60^\circ \\
 \Rightarrow \widehat{3} = & \frac{100^\circ + \widehat{AC} - \widehat{EC}}{2} = 68^\circ
 \end{aligned}$$



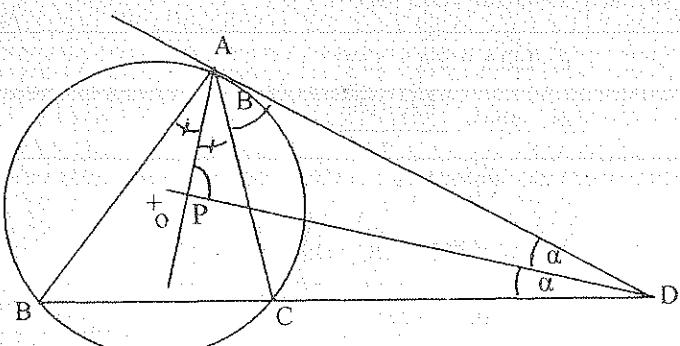
21.- D) I.- \widehat{AD} Construcción

$$\begin{aligned}
 2.- & \widehat{DAB} = 90^\circ \\
 3.- & \widehat{C} = \widehat{D} = \frac{\widehat{AB}}{2} \\
 4.- & \widehat{ABD} = 90^\circ - \widehat{C} = \widehat{CBH} \\
 5.- & \widehat{PBH} = 30^\circ \\
 6.- & \widehat{ABC} = 60^\circ = 90^\circ - \widehat{C} + 30^\circ + 90^\circ - \widehat{C} \Rightarrow \widehat{C} = 75^\circ \\
 7.- & \widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = 180^\circ = \widehat{A} + 60^\circ + 75^\circ \Rightarrow \widehat{A} = 45^\circ
 \end{aligned}$$



$$33.- D) I.- \frac{\widehat{A}}{2} + \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$$

$$\begin{aligned}
 2.- & \widehat{C} = \frac{\widehat{AB}}{2} \\
 3.- & \widehat{B} = \widehat{CAD} = \frac{\widehat{AC}}{2} \\
 \Rightarrow & \widehat{C} = \frac{\widehat{C} - \widehat{B}}{2} \\
 4.- & \widehat{P} + \frac{\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C}}{2} = 180^\circ \\
 \Rightarrow & \widehat{P} = 90^\circ
 \end{aligned}$$



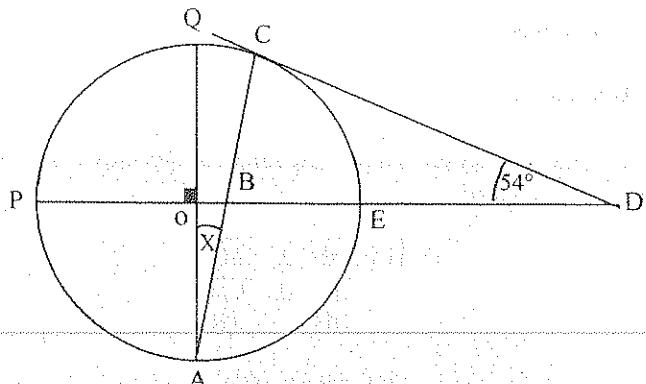
$$39.- \quad D) 1.- 180^\circ = \widehat{PC} + \widehat{CE}$$

$$2. - 54^\circ = \frac{\widehat{PC} \cdot \widehat{CE}}{?}$$

$$\Rightarrow \widehat{PC} = 144^\circ = 90^\circ + \widehat{OC}$$

$$\therefore \widehat{QC} = 54^\circ$$

$$3.- \quad \widehat{X} = \frac{\text{QC}}{2} = 27^\circ$$



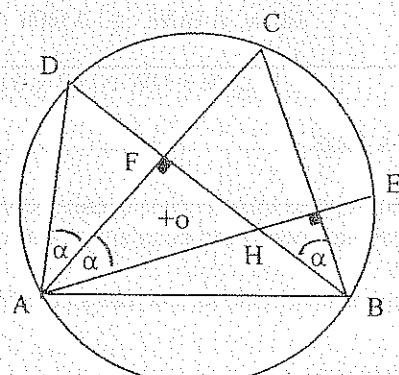
42.- D) I.- AD Construcción

$$2.- \hat{CAH} = \hat{CBH} = 90^\circ - \hat{C} = \hat{\alpha}$$

$$3.- \quad \widehat{CBD} = \widehat{CAD} = \frac{\widehat{DC}}{2} = \widehat{\alpha}$$

4. $\Delta \text{ADF} \cong \Delta \text{AFH}$ (A.L.A.)

$$\sum DF = FH$$



$$45.- D) I.- AD = DC \quad \therefore \overbrace{AD}^{\sim} = \overbrace{DC}^{\sim}$$

$$2. \quad \hat{\alpha} = \frac{\widehat{AD}}{?} = \frac{\widehat{DC}}{?}$$

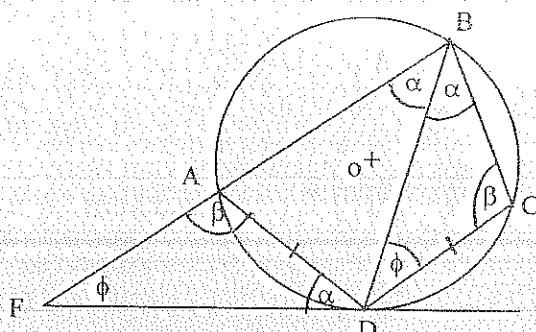
$$\hat{\beta} = \frac{\widehat{AB} + \widehat{AD}}{2}$$

$$\hat{\phi} = 180^\circ - \hat{\alpha} - \hat{\beta}$$

$$3. \therefore \Delta BFD \sim \Delta BDC \text{ (A.A.A)}$$

$$\frac{BF}{BD} = \frac{BD}{BC}$$

$$\Rightarrow BD^2 = BC \cdot BE$$



5.5. CUERDAS

TEOREMA # 1

En un mismo círculo las cuerdas equidistantes del centro son congruentes y recíprocamente, cuerdas congruentes equidistan del centro.

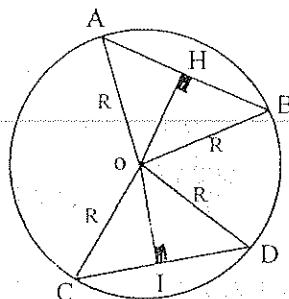
$$\begin{aligned} H) \quad & \overline{OH} \perp \overline{AB} \\ & \overline{OI} \perp \overline{CD} \\ & OH = OI \end{aligned}$$

$$T) \quad AB = CD$$

$$\begin{aligned} D) \quad & \Delta AOH \wedge \Delta COI \quad \text{Rectángulos} \\ & OA = OC = R \quad (L) \\ & OH = OI \quad (L) \\ & \Delta AOH \cong \Delta COI \quad (LL) \Rightarrow AH = CI \end{aligned}$$

$$\text{Idem } \Delta BOH \cong \Delta DOI \Rightarrow HB = ID$$

$$\therefore AH + HB = CI + ID \Rightarrow AB = CD \quad //.$$



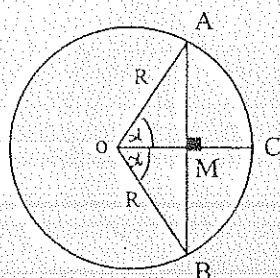
COROLARIOS

1.- En un mismo círculo, las cuerdas congruentes subtienden arcos congruentes y recíprocamente, arcos congruentes intersecan cuerdas congruentes.

2.- En un mismo círculo las cuerdas son congruentes si, y solo si, tienen ángulos centrales congruentes.

TEOREMA # 2

Una recta que pasa por el centro de un círculo y es perpendicular a una cuerda, biseca a la cuerda y al arco que lo subtiende.



$$H) \quad \overline{OC} \perp \overline{AB}$$

$$T_1) \quad AM = MB$$

$$T_2) \quad \widehat{AC} = \widehat{CB}$$

$$D) \quad \Delta AOM \wedge \Delta BOM \quad \text{Rectángulos}$$

$$OA = OB = R \quad (L)$$

$$OM = OM \quad (L)$$

$$\Delta AOM \cong \Delta BOM \quad (LL) \Rightarrow AM = MB \quad //.$$

$$\therefore \widehat{ACM} = \widehat{BOM} = \alpha = \widehat{AC} = \widehat{CB} \quad //.$$

COROLARIOS

1.- La mediatriz de una cuerda, pasa por el centro del círculo.

2.- Todo diámetro perpendicular a una cuerda, divide a ésta y a los arcos que subtienden en dos partes congruentes.

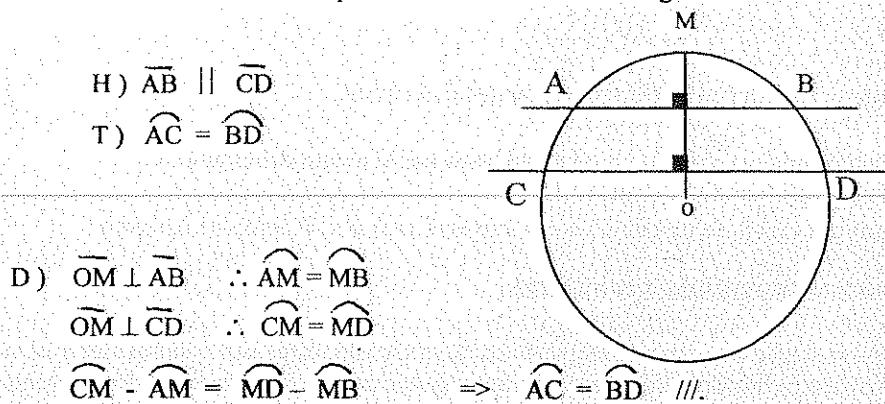
3.- Todo diámetro biseca al círculo y cada parte congruente se llama semicírculo.

4.- Dos diámetros perpendiculares entre sí, dividen al círculo en cuatro partes congruentes, y cada parte se llama cuadrante.

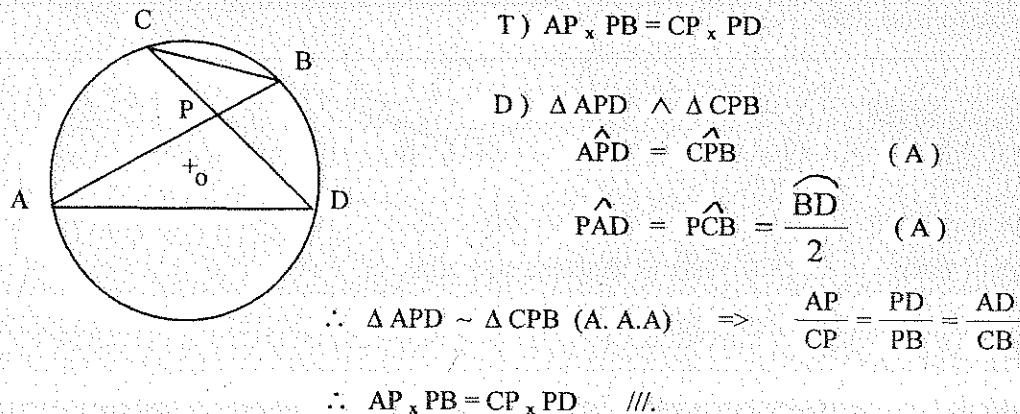
5.- Ángulos centrales congruentes intersecan arcos congruentes y recíprocamente, arcos congruentes subtienden ángulos centrales congruentes.

TEOREMA # 3

En todo círculo, dos cuerdas o secantes paralelas intersecan arcos congruentes.

**TEOREMA # 4**

Si dos cuerdas se cortan dentro de un círculo, el producto de las longitudes de los segmentos formados en la una, es igual al producto de las longitudes de los segmentos formados en la otra.

**5.6. TANGENTES Y SECANTES****TEOREMA # 1 (TANGENTE EN UN PUNTO)**

Si una recta es tangente a un círculo, es perpendicular al radio que tiene por extremo el punto de contacto.

H) \overline{AE} Tang. $\odot(O, R)$ en $\cdot T$
 $OT = R$

T) $\overline{AE} \perp \overline{OT}$

D) $AE \not\perp OT$

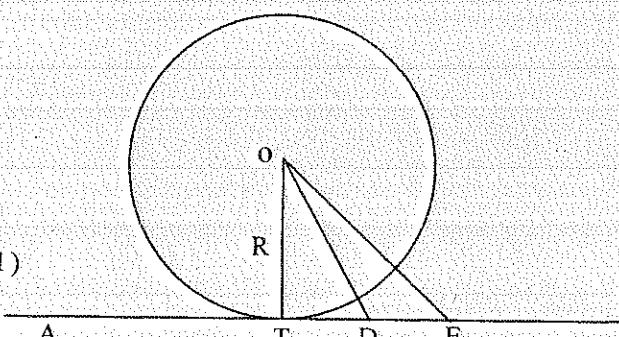
$\overline{OD} \perp \overline{AE}$ (Suposición temporal)

$DE = TD$ (Construcción)

$\therefore \widehat{TDO} = \widehat{EDO} = \frac{\pi}{2}$

$\Delta DOT \cong \Delta DOE$ (L.A.L)

$\Rightarrow OT = OE = R$



$\therefore \overline{TE}$ Cuerda y $\overline{TE} \in \overline{AE}$ Tangente (Absurdo)

$\therefore \overline{AE} \perp \overline{OT} \text{ //}.$

COROLARIOS

1. Toda recta perpendicular a un radio en su extremo es tangente al círculo.
2. La perpendicular a una tangente en el punto de contacto, pasa por el centro del círculo.
3. La perpendicular bajada del centro de un círculo a una tangente pasa por el punto de contacto.

TEOREMA # 2 (TANGENTES DESDE UN PUNTO)

Si desde un punto exterior se trazan dos segmentos tangentes a un círculo, éstos son congruentes y el segmento trazado del mismo punto al centro del círculo, es bisectriz del ángulo externo que forman las dos tangentes.

H) \overline{PA} y \overline{PB} Tangs. $\odot(O, R)$

T₁) $PA = PB$

T₂) \overline{PO} bisectriz de \widehat{APB}

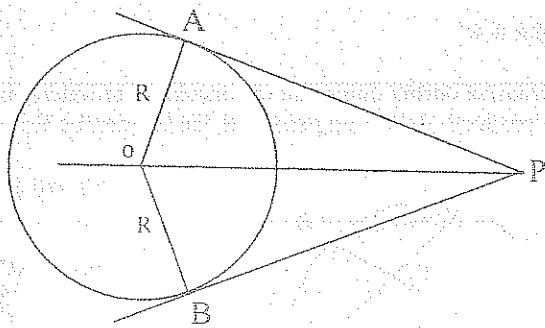
D) $\Delta OAP \wedge \Delta OBP$

$OA = OB = R$ (L)

$OP = OP$ (L)

$\therefore \Delta OAP \cong \Delta OBP$ (L.L.) $\Rightarrow PA = PB \text{ //}.$

$\widehat{APO} = \widehat{BPO} \Rightarrow \overline{PO}$ es Bisectriz del $\widehat{APB} \text{ //}.$



TEOREMA # 3

Si desde un punto exterior a un círculo se trazan a él una tangente y una secante, la tangente es media proporcional entre la secante y su parte externa.

H) \overline{PA} Tang. $\odot(O, R)$

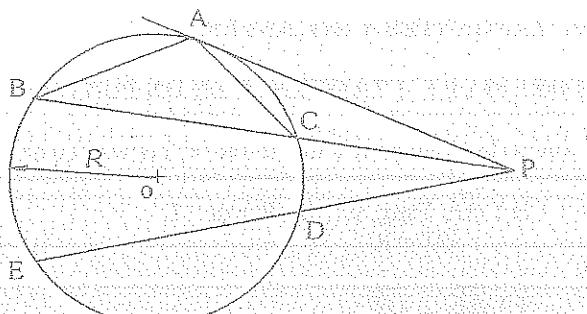
T) $PA^2 = BP \times CP$

D) $\Delta APB \wedge \Delta ACP$

$$\widehat{ABP} = \widehat{CAP} = \frac{\widehat{AC}}{2} \quad (\text{A})$$

$$\widehat{P} = \widehat{P} \quad (\text{A})$$

$\Delta APB \sim \Delta ACP$ (A.A.A.)



$$\frac{PA}{CP} = \frac{BP}{PA} = \frac{AB}{AC}$$

$$\Rightarrow PA^2 = BP \times CP \text{ //}.$$

COROLARIO

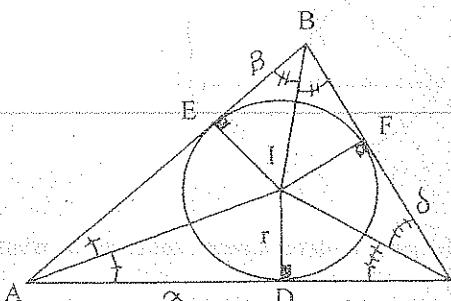
Si desde un punto exterior a un círculo se trazan a él dos secantes, el producto de las longitudes de una secante por su parte externa, es igual al producto de las longitudes de la otra secante por su parte externa.

$$PA^2 = BP \times CP = EP \times DP \text{ //}.$$

5.7. CÍRCULO Y TRIÁNGULO

5.7.1. CÍRCULO INSCRITO EN UN TRIÁNGULO

Es el círculo tangente a los tres lados del triángulo.



$\odot (I, r)$ Inscrito al ΔABC

I incentro

r radio del círculo inscrito

ΔABC Circunscrito al $\odot (I, r)$

TEOREMA # 1

La longitud de la tangente trazada desde un vértice de un triángulo al círculo inscrito, es igual a la diferencia entre el semiperímetro y el lado opuesto a dicho vértice.

$$T_1) \alpha = p - a$$

$$T_2) \beta = p - b$$

$$T_3) \delta = p - c$$

$$D) AD = AE = \alpha \Rightarrow 2p = 2(\alpha + \beta + \delta)$$

$$BE = BF = \beta \quad \therefore \alpha = p - a$$

$$CF = CD = \delta \quad \therefore \beta = p - b$$

$$\therefore \delta = p - c \quad //.$$

TEOREMA # 2

El área de un triángulo es igual al producto del semiperímetro por el radio del círculo inscrito.

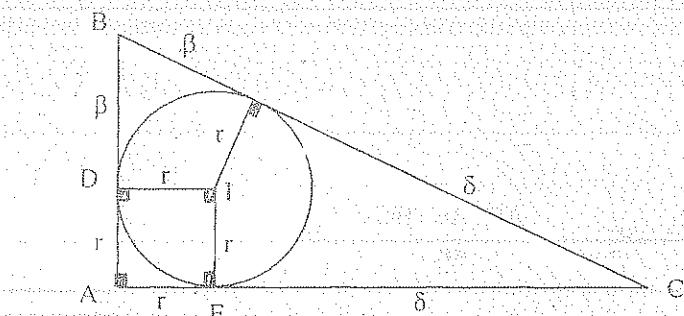
$$T) A \Delta ABC = p \cdot r$$

$$D) A \Delta ABC = A \Delta BIC + A \Delta AIC + A \Delta AIB = \frac{1}{2} (a \cdot r + b \cdot r + c \cdot r)$$

$$\therefore A \Delta ABC = p \cdot r \quad //.$$

TEOREMA # 3

El radio del círculo inscrito en un triángulo rectángulo es igual a la suma de las longitudes de los catetos, menos la longitud de la hipotenusa, todo dividido para dos.



$$T) r = \frac{b + c - a}{2}$$

$$D) r = b - \delta$$

$$r = c - \beta$$

$$r = \frac{b + c - a}{2} \quad //.$$

5.7.2. CÍRCULO CIRCUNSCRITO A UN TRIÁNGULO

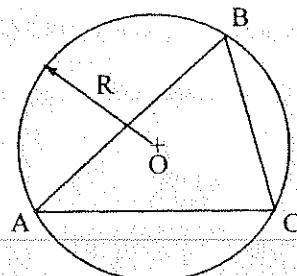
Es el círculo que tiene por cuerdas los tres lados del triángulo. Por tres puntos no colineales pasa un círculo y solo uno.

$\odot(O, R)$ Circunscrito al ΔABC

O Circuncentro del ΔABC

R radio del círculo circunscrito

ΔABC Inscribo al $\odot(O, R)$



TEOREMA # 1

El producto de dos lados cualesquiera de un triángulo, es igual al producto del diámetro del círculo circunscrito a éste, por la altura relativa al tercer lado.

$$T) AB \times AC = 2R \times AH$$

D) ΔABH y ΔACD Rectángulos

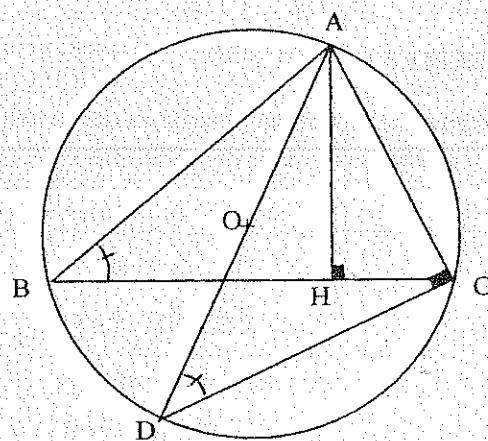
$$\widehat{ABH} = \widehat{ADC} = \frac{AC}{2}$$

$\therefore \Delta ABH \sim \Delta ACD$ (A.A.A.)

$$\Rightarrow \frac{AB}{AD} = \frac{AH}{AC} = \frac{BH}{DC}$$

$$AB \times AC = AD \times AH$$

$$AB \times AC = 2R \times AH \quad //.$$



TEOREMA # 2

En un triángulo, la razón entre una lado y el seno del ángulo opuesto es igual al diámetro del círculo circunscrito del triángulo.

$$T) \frac{AB}{\operatorname{Sen} C} = \frac{AC}{\operatorname{Sen} B} = \frac{BC}{\operatorname{Sen} A} = 2R$$

$$D) \operatorname{Sen} B = \frac{AH}{AB}$$

$$\therefore AB \times AC = 2R \times (AB \operatorname{Sen} B) \Rightarrow \frac{AC}{\operatorname{Sen} B} = 2R \quad //.$$

TEOREMA # 3

El área de un triángulo es igual al producto de los tres lados dividido para cuatro veces el radio del círculo circunscrito al triángulo.

$$T) A_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R}$$

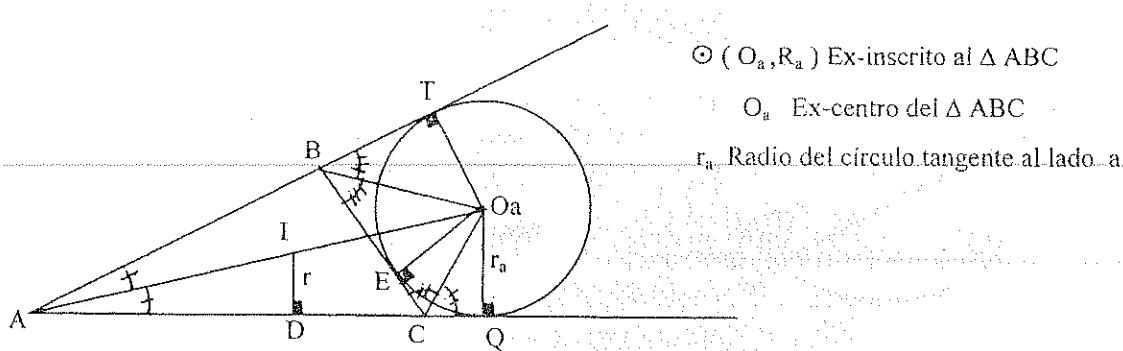
$$D) A_{\Delta ABC} = \frac{BC \cdot AH}{2}$$

$$AB \times AC = 2R \times AH$$

$$\therefore AH = \frac{AB \cdot AC}{2R} \Rightarrow A_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot BC}{4R} \quad //.$$

5.7.3. CÍRCULO EX-INSCRITO A UN TRIÁNGULO

Es el círculo tangente a un lado de un triángulo y a las prolongaciones de los otros dos lados.



TEOREMA # 1

La longitud de la tangente trazada desde un vértice de un triángulo al círculo ex-inscrito, es igual al semiperímetro.

$$\begin{aligned}
 T) \quad & AQ = p \\
 D) \quad & 2p = AB + BE + EC + AC \\
 & 2p = AB + BT + CQ + AC \\
 & 2p = AT + AQ = 2AQ \\
 \therefore \quad & p = AQ \quad //.
 \end{aligned}$$

TEOREMA # 2

El radio del círculo ex-inscrito es al radio del círculo inscrito de un mismo triángulo, como el semiperímetro es al semiperímetro menos la longitud del lado al que el círculo ex-inscrito es tangente.

$$\begin{aligned}
 T) \quad & \frac{r}{r_a} = \frac{p}{p-a} \\
 D) \quad & \Delta AO_a Q \sim \Delta AID \quad (\text{A.A.A.}) \quad \therefore \quad \frac{r}{r_a} = \frac{p}{p-a} \quad //.
 \end{aligned}$$

TEOREMA # 3

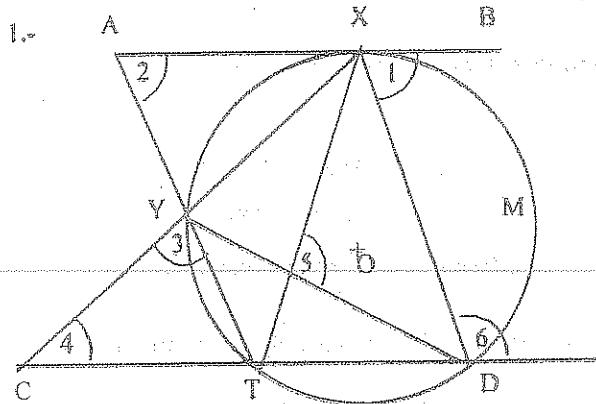
El área de un triángulo es igual al radio del círculo ex-inscrito por el semiperímetro menos el lado del triángulo al que es tangente el círculo.

$$\begin{aligned}
 T) \quad & A\Delta ABC = r_a(p-a) \\
 D) \quad & A\Delta ABC = A\Delta ACO_a + A\Delta ABO_a - A\Delta BCO_a \\
 & A\Delta ABC = \frac{1}{2}(b \times r_a + c \times r_a - a \times r_a) \\
 & A\Delta ABC = \frac{1}{2}r_a(b+c-a) \\
 \therefore \quad & A\Delta ABC = r_a(p-a) \quad //.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \quad & A\Delta ABC = r_b(p-b) \quad //.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \quad & A\Delta ABC = r_c(p-c) \quad //.
 \end{aligned}$$

5.8. EJERCICIOS



H) \overline{AB} Tang. $\odot(O, R)$
 $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$

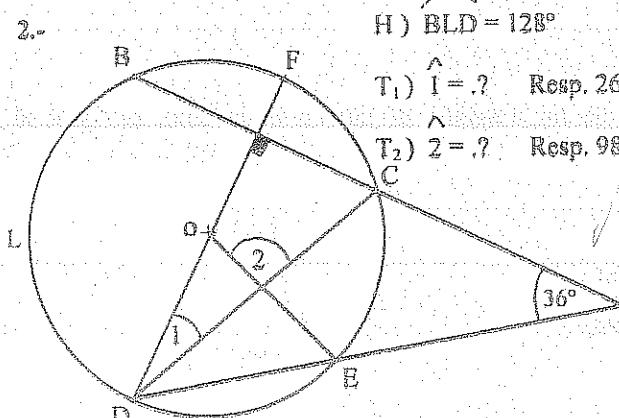
$$\widehat{XMD} = 140^\circ$$

$$\widehat{YT} = 50^\circ$$

T) Hallar las medidas de los ángulos:

$$\widehat{1}, \widehat{2}, \widehat{3}, \widehat{4}, \widehat{5} \text{ y } \widehat{6}$$

Resp. $70^\circ, 65^\circ, 70^\circ, 45^\circ, 95^\circ, 110^\circ$



H) $\widehat{BLD} = 128^\circ$

T₁) $\widehat{1} = ?$ Resp. 26°

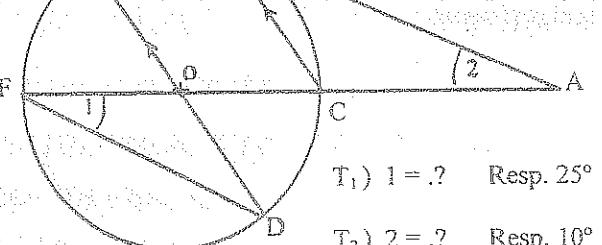
T₂) $\widehat{2} = ?$ Resp. 98°

3.-

H) \overline{AB} Tang. $\odot(O, R)$

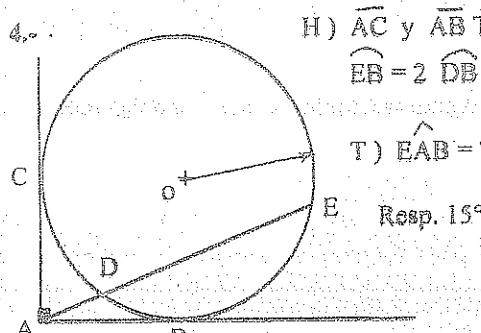
$\overline{ED} \parallel \overline{BC}$

$\widehat{CBA} = 40^\circ$



T₁) $\widehat{1} = ?$ Resp. 25°

T₂) $\widehat{2} = ?$ Resp. 10°



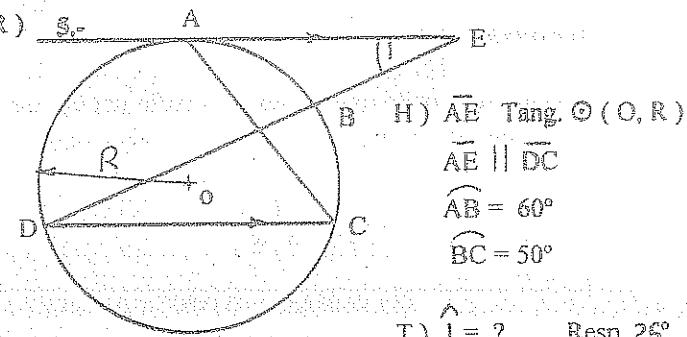
H) \overline{AC} y \overline{AB} Tangs. $\odot(O, R)$

$\widehat{EB} = 2 \widehat{DB}$

T) $\widehat{EAB} = ?$

E. Resp. 15°

5.-



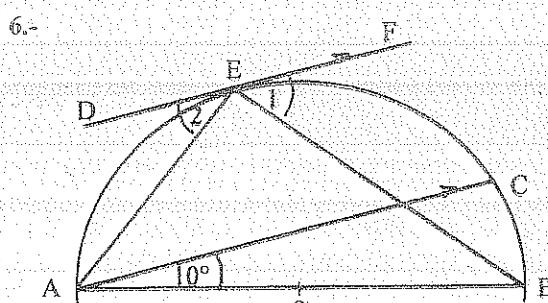
H) \overline{AE} Tang. $\odot(O, R)$

$\overline{AE} \parallel \overline{DC}$

$\widehat{AB} = 60^\circ$

$\widehat{BC} = 50^\circ$

T) $\widehat{1} = ?$ Resp. 25°

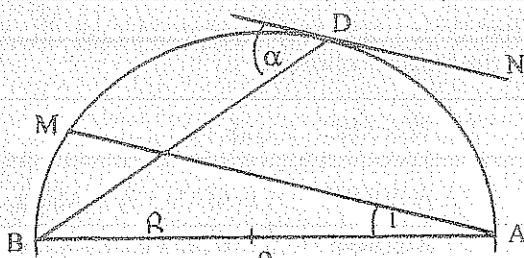


H) \overline{DF} Tang. $\odot(O, R)$
 $\overline{DF} \parallel \overline{AC}$

T₁) $\widehat{1} = ?$ Resp. 50°

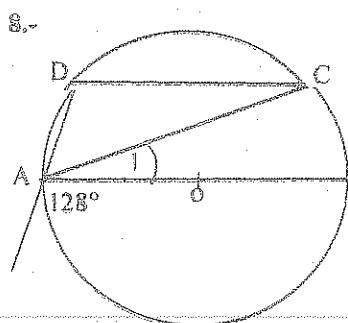
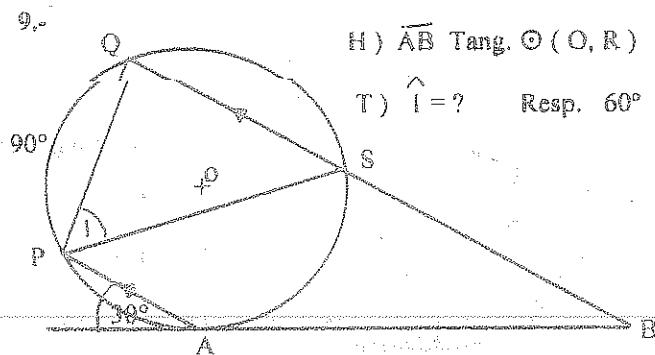
T₂) $\widehat{2} = ?$ Resp. 40°

7.-



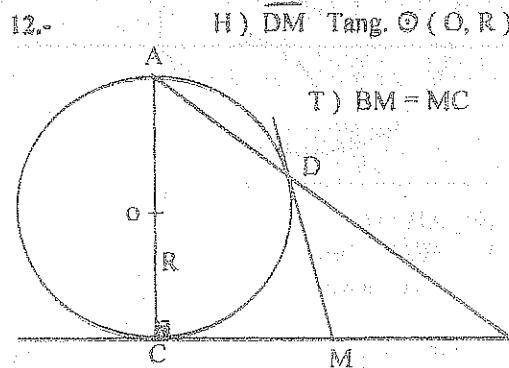
H) \overline{ND} Tang. $\odot(O, R)$
 $\overline{ND} \parallel \overline{AM}$

T) $\widehat{1} = 2\widehat{\alpha} - 90^\circ$

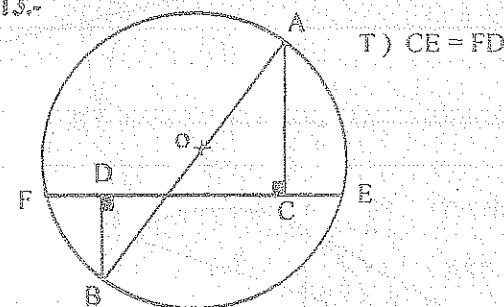
H) $\overline{CD} \parallel \overline{AB}$ T) $\hat{1} = ?$ Resp. 38° H) \overline{AB} Tang. $\odot(O, R)$ T) $\hat{1} = ?$ Resp. 60°

- 10.- En un triángulo rectángulo la relación entre los valores de los radios de los círculos inscrito y circunscrito es $2/5$. Determinar los valores de los ángulos del triángulo. Resp. $36.87^\circ, 53.13^\circ$

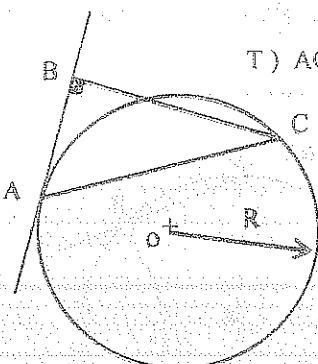
- 11.- Los lados de un triángulo a, b, c son iguales a 25, 24 y 27 cm. Respectivamente. Determinar R, r y r_b
Resp. $14.68, 7.25, 21.21$ cm.

H) \overline{DM} Tang. $\odot(O, R)$ T) $BM = MC$

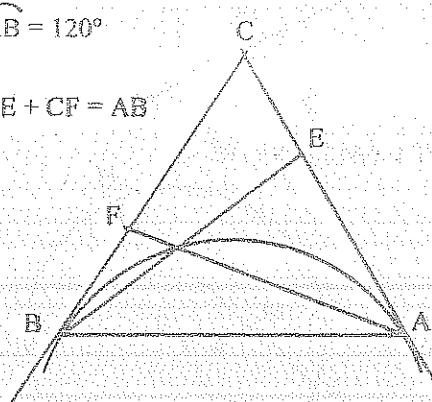
13.-

T) $CE = FD$

- 14.-
- H) \overline{AB} Tang. $\odot(O, R)$

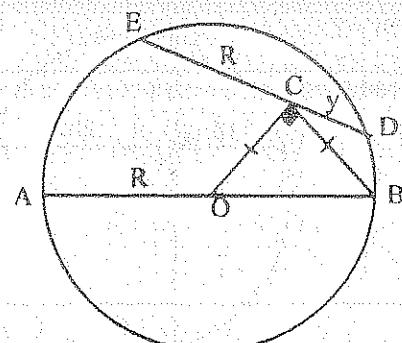
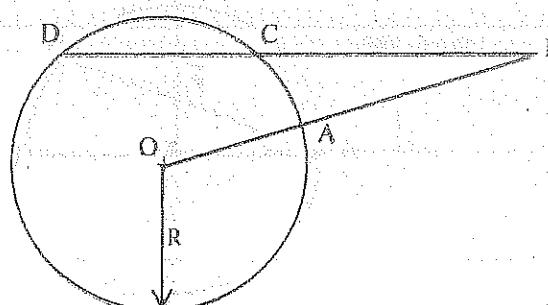
T) $AC^2 = 2R \times BC$ 

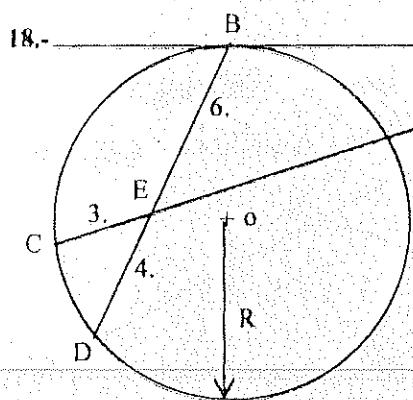
- 15.- H) \overline{AC} y \overline{CB} Tangs. $\odot(O, R)$

 $\widehat{AB} = 120^\circ$ T) $CE + CF = AB$ 

- 16.-
- H) $OB = a$

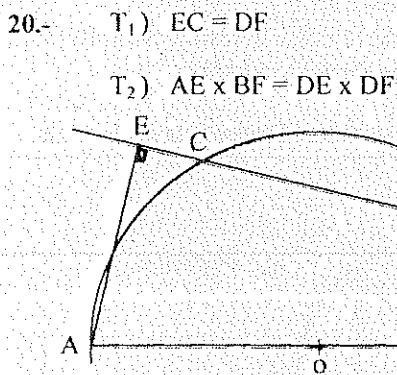
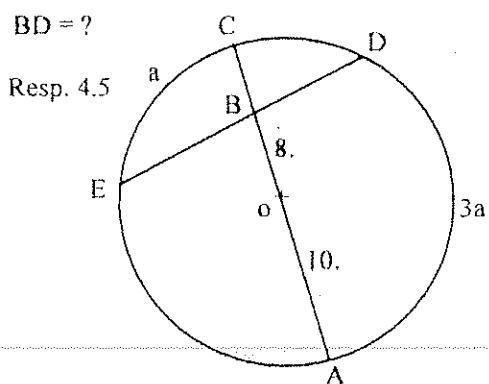
- T) $y = R/2$

T) $BD \times BC = a^2 - R^2$ 

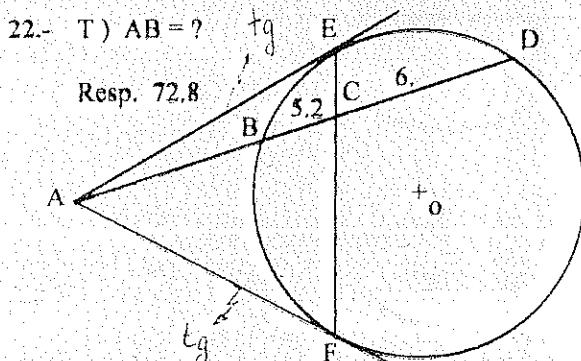
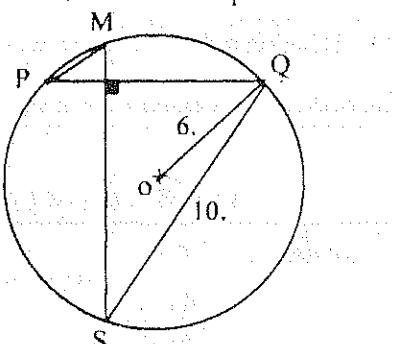


- A) $BD = ?$
 H) \overline{AB} Tang. $\odot(O, R)$
 AE = 17.
 T) $AB = ?$

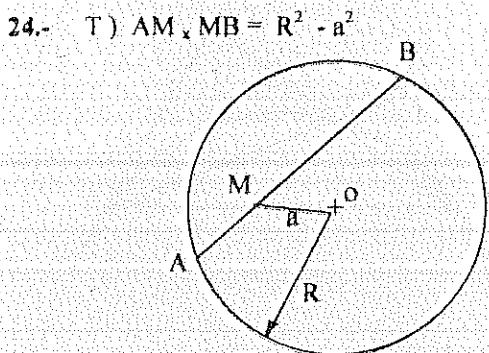
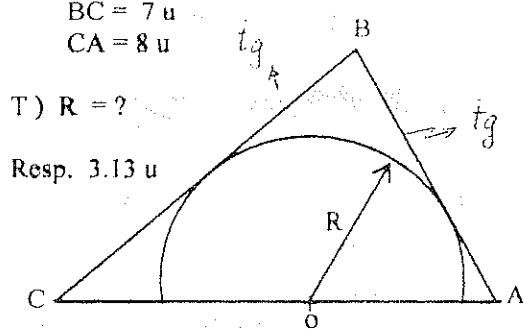
Resp. 13.41



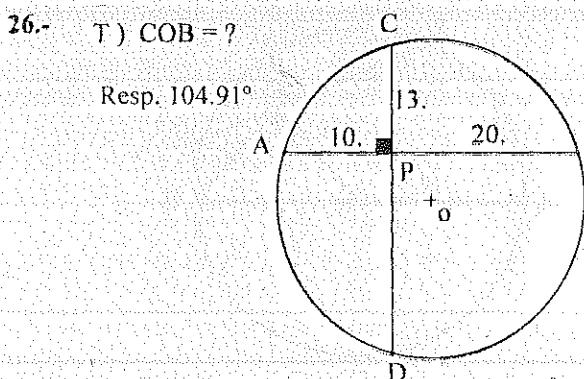
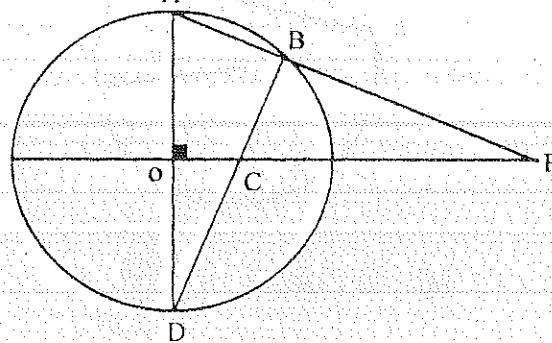
- 21.- T) $MP = ?$
 Resp. 6.63



- H) $AB = 6 u$
 BC = 7 u
 CA = 8 u

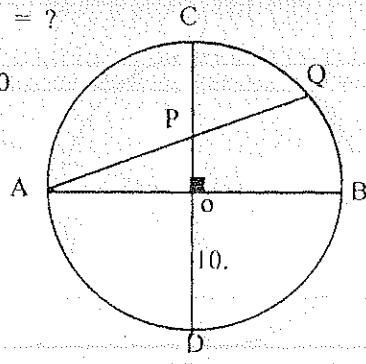


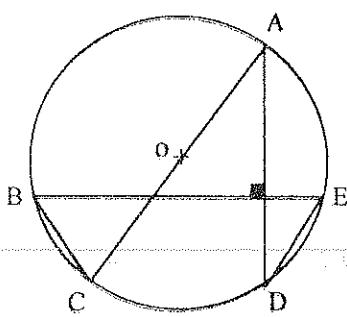
- 25.- T) $CO \times OF = AO^2$



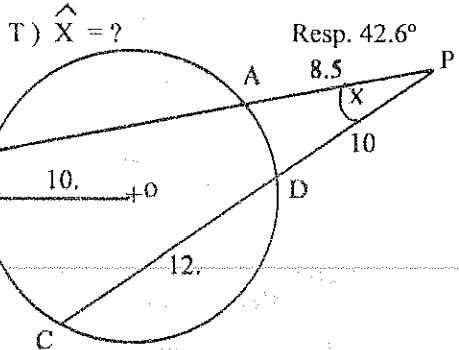
- 27.- T) $AP \cdot AQ = ?$

Resp. 200

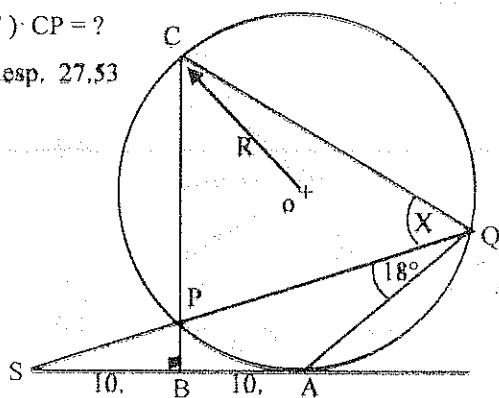


28.- T) $DE = CB$ 

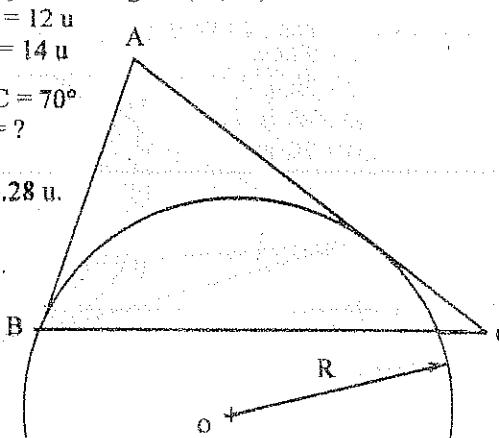
29.-

30.- H) \overline{AS} Tang. $\odot(O, R)$ T) $CP = ?$

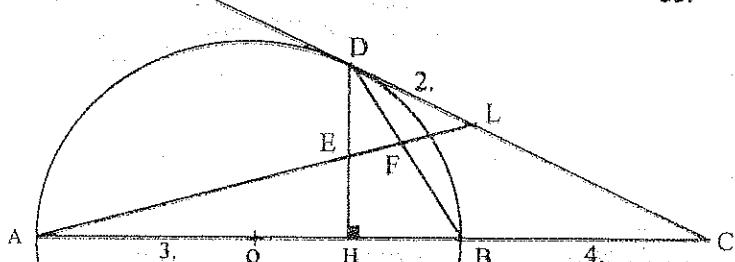
Resp. 27,53

31.- H) $\overline{AB} \text{ y } \overline{AC}$ Tang. $\odot(O, R)$ $BC = 12 \text{ u}$ $AC = 14 \text{ u}$ $\hat{ABC} = 70^\circ$ T) $R = ?$

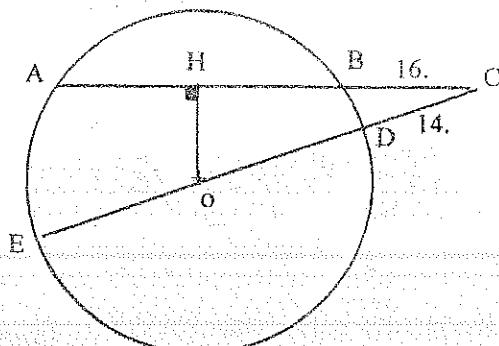
Resp. 6,28 u.



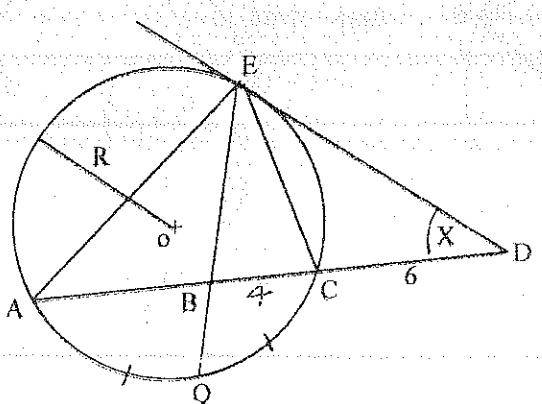
32.-

H) \overline{DC} Tang. $\odot(O, 3)$ T₁) $EF = ?$ Resp. 0,8T₂) $FB = ?$ Resp. 1,833.- H) $AB = 40$.T) $OH = ?$

Resp. 15.



34.-

H) \overline{DE} Tang. $\odot(O, R)$ $R = 6$ T₁) ΔEBD IsóscelesT₂) $AB = ?$

Resp. 6,67

T₃) $\hat{X} = ?$

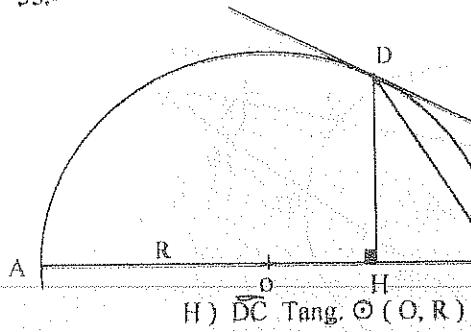
Resp. 44,5°

T₄) $BQ = ?$

Resp. 3,52

142

35.-

37.- H) \overline{AT} Tang. $\odot(O, R)$

$$AT = 25.8 \text{ u}$$

$$AC = 30 \text{ u}$$

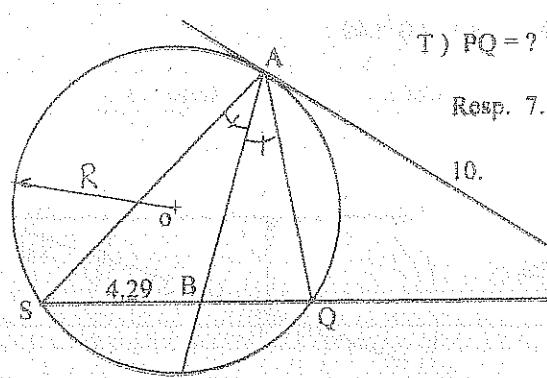
$$AD = 40 \text{ u}$$

$$CD = 20 \text{ u}$$

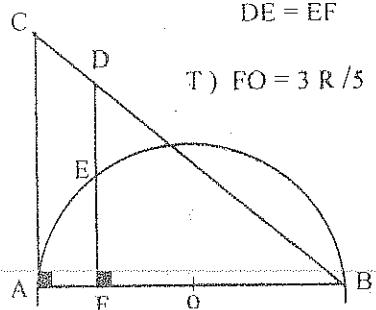
T) $BE = ?$

Resp. 11 u

39.-

41.- H) \overline{PA} y \overline{PC} Tang. $\odot(O, R)$ T) $x = ?$
Resp. 7.543.- Desde un punto A se trazan las tangentes \overline{AB} y \overline{AC} al círculo de radio R. Demostrar que la distancia del centro del círculo al incentro del ABC es R.

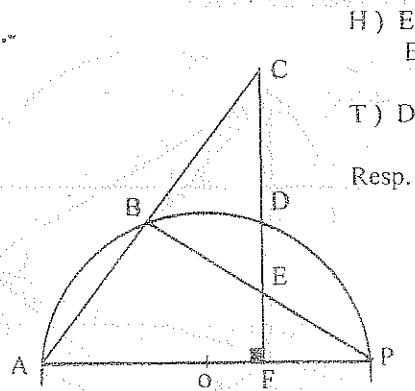
36.-

H) $AB = AC$ $DE = EF$ T) $FO = 3R/5$ 

38.-

H) $EC = 9 \text{ u}$ $EF = 3 \text{ u}$ T) $DF = ?$

Resp. 6 u



40.-

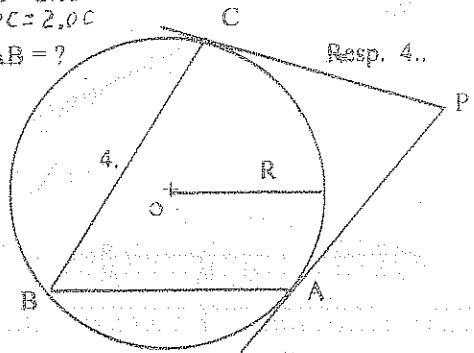
H) \overline{PA} y \overline{PC} Tangs. $\odot(O, R)$

$$R = 2.15$$

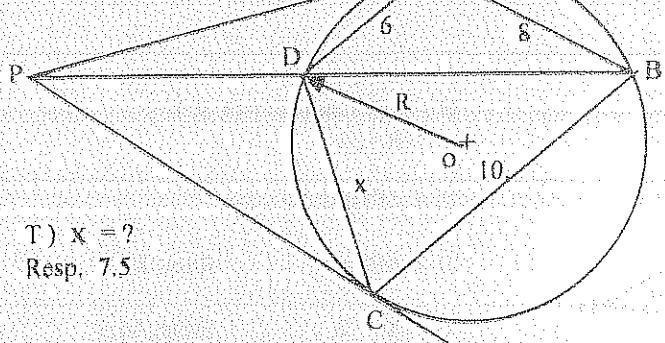
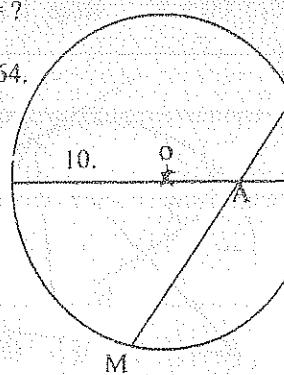
$$PC = 2.00$$

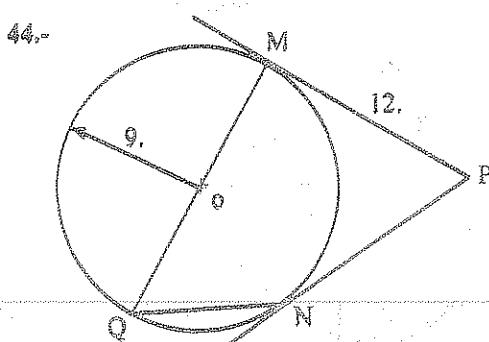
T) $AB = ?$

Resp. 4..

42.- H) $AD = DC = 4$.T) $AM = ?$

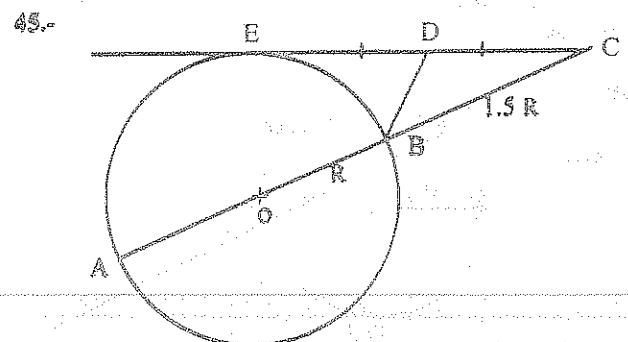
Resp. 12.64.





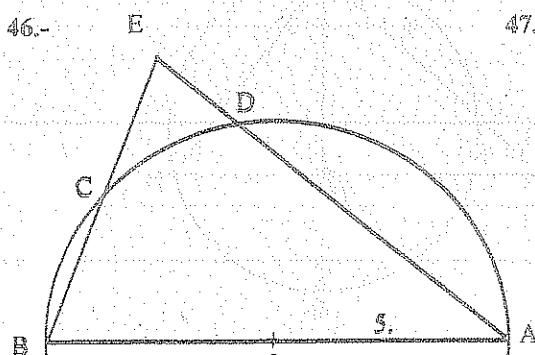
H) \overline{PM} y \overline{PN} Tang. $\odot(O, R)$

T) $NQ = ?$ Resp. 10.8



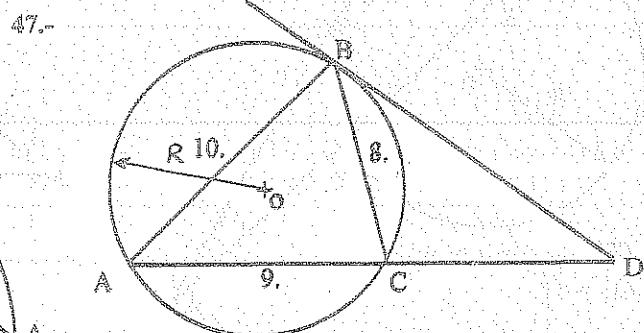
H) \overline{EC} Tang. $\odot(O, R)$

T) $\widehat{BDC} = ?$ Resp. 114.22



H) $\widehat{BC} = \widehat{CD} = 40^\circ$

T) $DE = ?$ Resp. 2.33

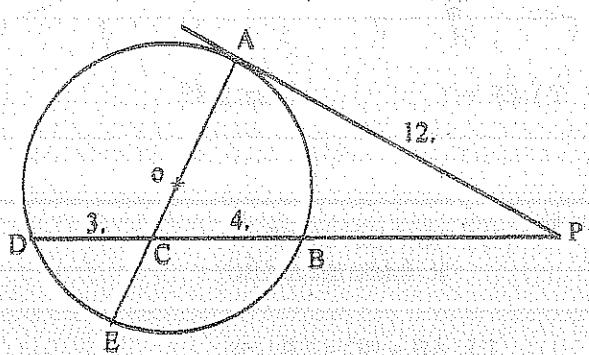


H) \overline{DB} Tang. $\odot(O, R)$

T) $DB = ?$ Resp. 6.4

48.- H) \overline{PA} Tang. $\odot(O, R)$

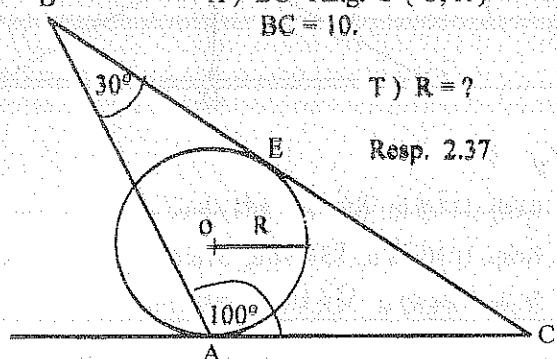
T) $CE = ?$ Resp. 2.4



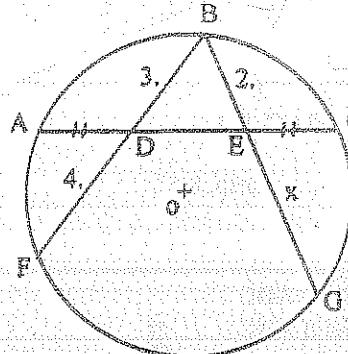
50.- B H) \overline{BC} Tang. $\odot(O, R)$
 $BC = 10.$

T) $R = ?$

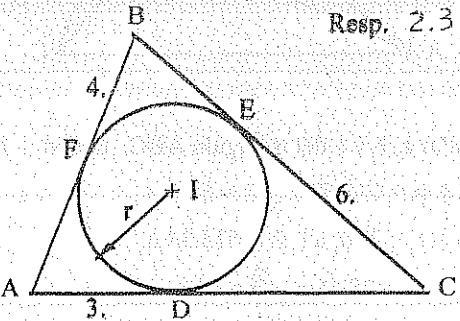
Resp. 2.37



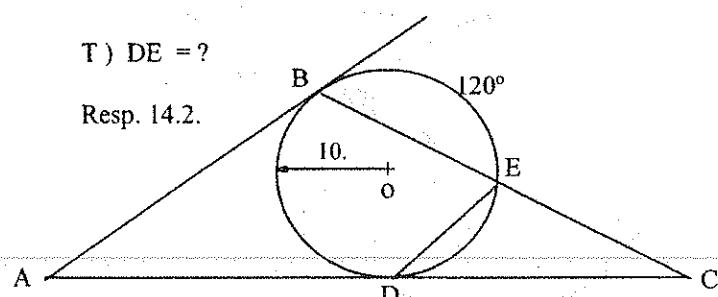
49.- T) $x = ?$ Resp. 6.



51.- T) $r = ?$
Resp. 2.35

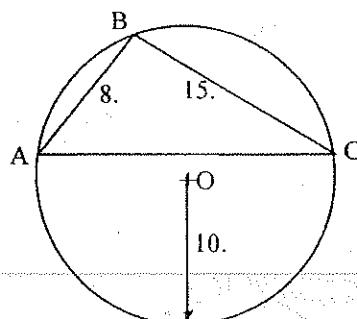


- 52.- H) \overline{AB} y \overline{AC} Tang. $\odot(O, R)$
 $AB = BC$

T) $DE = ?$

Resp. 14.2.

- 53.- T) $AC = ?$ Resp. 19.

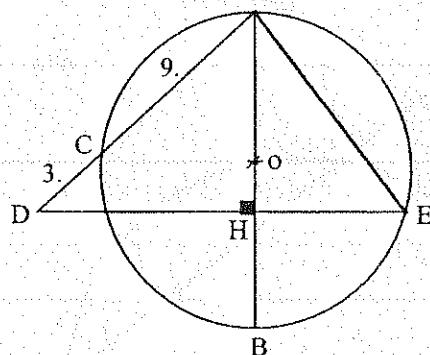


- 54.-

H) \overline{AB} Tang. $\odot(O, R)$
 $AE = 17$.

T) $R = ?$ Resp. 5.58

- 55.- T) $AE = ?$ A) Resp. 10.39

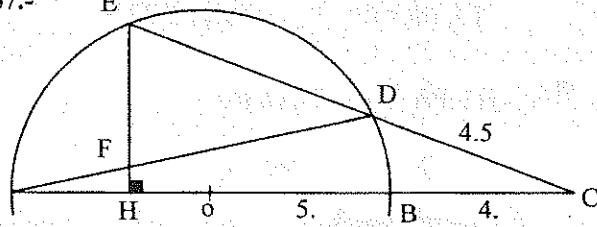


- 56.-

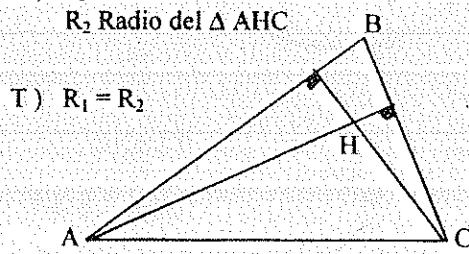
H) \overline{CB} Tang. $\odot(O, R)$

T) $BC = ?$ Resp. 8.57

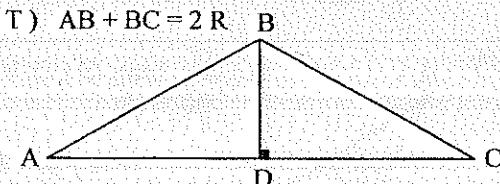
- 57.-

T) $EF = ?$ Resp. 3.85

- 58.- H) R_1 Radio del ΔABC
 R_2 Radio del ΔAHC

T) $R_1 = R_2$

- 59.- H) $AB = BC = 2 BD$
 R Radio del ΔABC

T) $AB + BC = 2R$

- 60.- Calcular a, b y c del triángulo ABC, dados: $A = 90^\circ$ y

- a) $p = 136.69 \text{ u}$, $R = 58.9 \text{ u}$
 b) $r = 200 \text{ u}$, $R = 515.34 \text{ u}$
 c) $r = 38.45 \text{ u}$, $\hat{B} = 42^\circ$

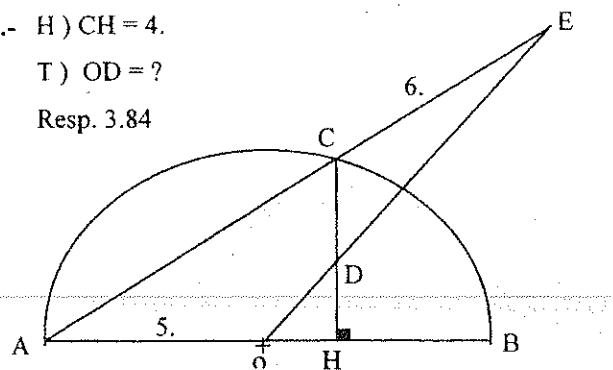
Resp. 117.8 u., 48.1 u., 107.48 u.

Resp. 1030.68 u., 854.64 u., 576 u.

Resp. 184.52 u., 112.80 u., 148.61 u.

61.- H) $CH = ?$ T) $OD = ?$

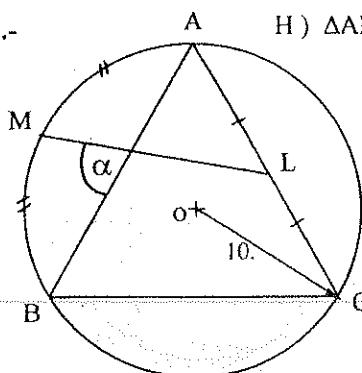
Resp. 3.84



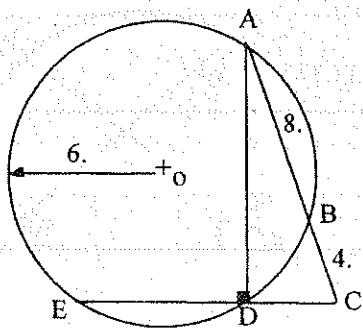
62.-

H) ΔABC EquiláteroT) $\hat{\alpha} = ?$

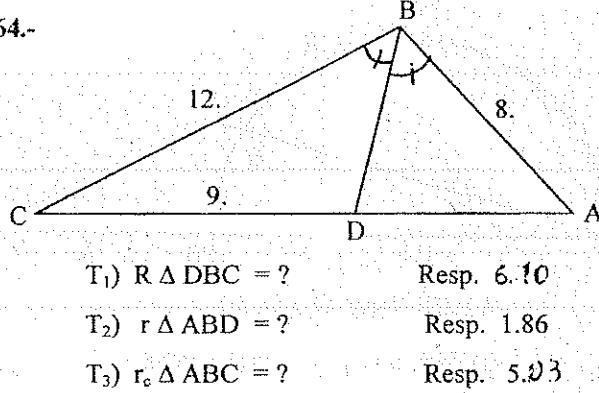
Resp. 70.9°

63.- T) $BD = ?$

Resp. 4.9



64.-

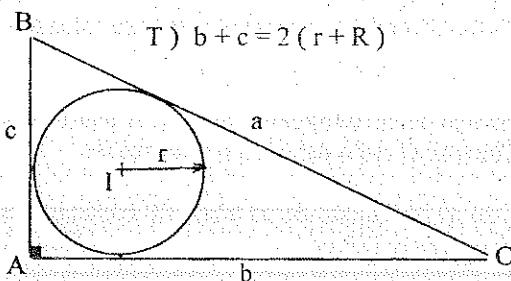
65.- H) $EO = 0.37$ T) $MD = ?$

Resp. 3.11

66.-

H) $\odot (I, r)$ Inscri. ΔABC

R Radio del círculo

Circunscrito ΔABC 

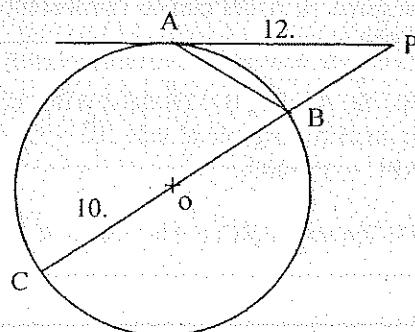
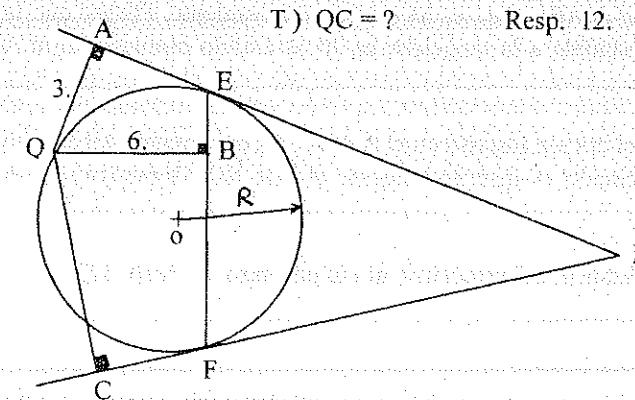
67.-

H) \overline{PA} y \overline{PC} Tang. $\odot (O, R)$ T) $QC = ?$

Resp. 12.

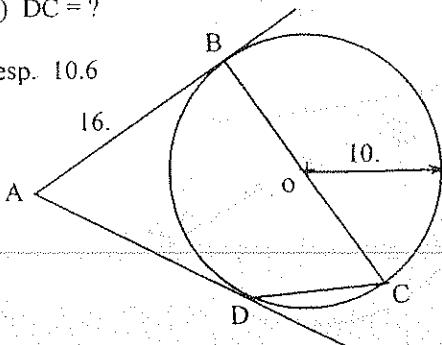
H) \overline{PA} Tang. $\odot (O, 10)$ T) $AB = ?$

Resp. 8.43

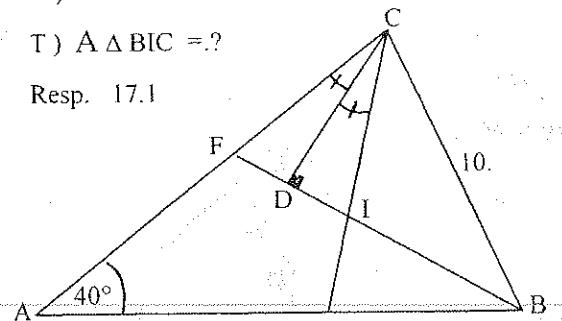


69.- H) \widehat{AB} y \widehat{AD} Tang. $\odot(O, 10)$ T) $DC = ?$

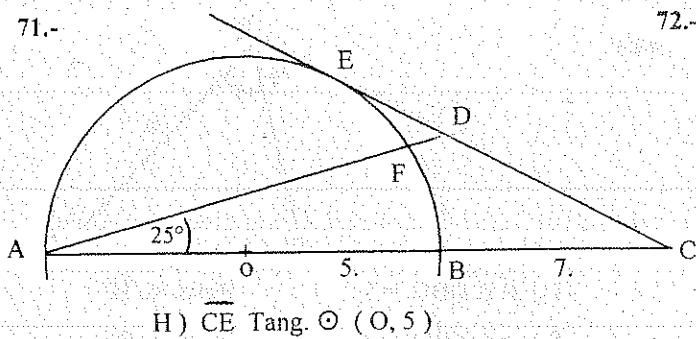
Resp. 10.6

70.- H) I Incentro $\triangle ABC$ T) $A\Delta BIC = ?$

Resp. 17.1



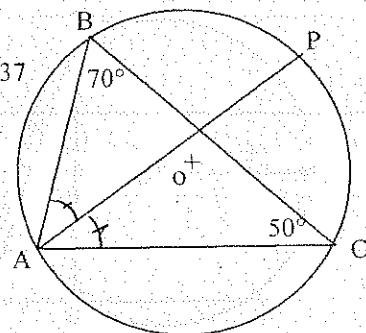
71.-

H) \overline{CE} Tang. $\odot(O, 5)$ T) $DF = ?$

Resp. 0.24

72.- H) $BC = 10$.T) $AP = ?$

Resp. 11.37



73.- En el interior de un círculo de radio igual a 13 cm, se tiene que un punto M que está a 5 cm del centro del círculo. Por M se traza una cuerda $AB = 25$ cm. Hallar la longitud de los segmentos en que el punto M divide a la cuerda AB .
Resp. 9 cm; 16. cm

74.- Hallar el área de un triángulo isósceles siendo el radio del círculo inscrito $r = 5$ m. y el radio del círculo ex-inscrito a los lados iguales $12m$.
Resp. 132.84 m^2 .

75.- El área de un triángulo es 600 m^2 , si uno de sus lados mide 75 m, el producto de los otros dos lados es 1300. Calcular el radio del círculo circunscrito
Resp. 40.63 m^2 .

76.- Uno de los catetos de un triángulo rectángulo mide 40 m. Calcular el radio del círculo inscrito, si el área del triángulo es 180 m^2
Resp. 4 m.

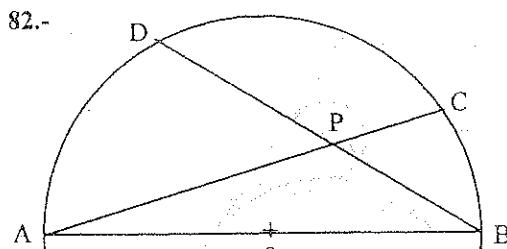
77.- Calcular los lados de un $\triangle ABC$, sabiendo que: $2a = b + c$; $R = 65 \text{ u.}$; $ha = 96 \text{ u.}$
Resp. 112 u.; 120u.; 104u.

78.- Dados los tres lados del $\triangle ABC$: $a = 10 \text{ u.}$, $b = 12 \text{ u.}$, $c = 16 \text{ u.}$ Calcular R y r .
Resp. 8 u.; 3.15 u.

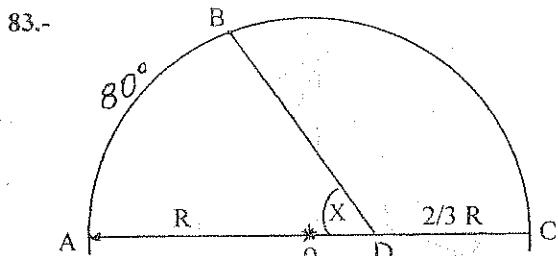
79.- Los puntos medios de los lados \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{AC} del $\triangle ABC$ son: L, M y N respectivamente. Probar que la tangente en A del círculo circunscrito al $\triangle ABC$, es paralela a la tangentes en M al círculo circunscrito al $\triangle LMN$.

80.- Si: $\hat{A} = 2\hat{C}$, $\hat{B} = 2\hat{A}$ del $\triangle ABC$; si O es el centro del círculo inscrito en el $\triangle ABC$, O_b es el centro del círculo ex-inscrito tangente al lado \overline{AC} y O_a es el centro del círculo ex-inscrito tangente al lado \overline{BC} . Demostrar que $\triangle ABC \sim \triangle OO_bO_a$.

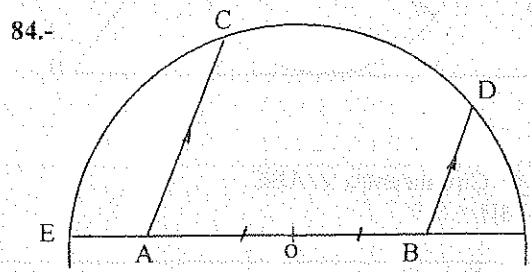
81.- En un $\triangle ABC$: $a = b = 10 \text{ u.}$; $\hat{C} = 104^\circ$. Hallar la distancia del ortocentro al circuncentro
Resp. 12. u.



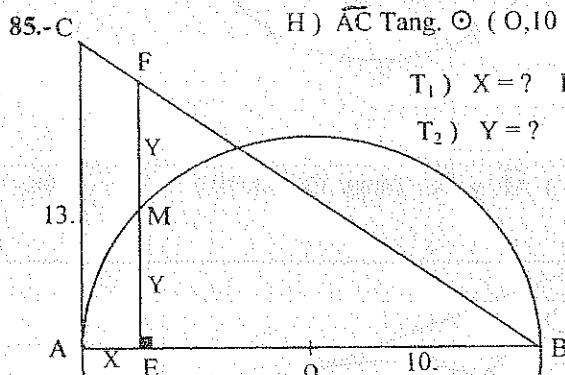
T) $AC \times AP + BD \times BP = AB^2$



T) $\hat{x} = ?$ Resp. 62.53°



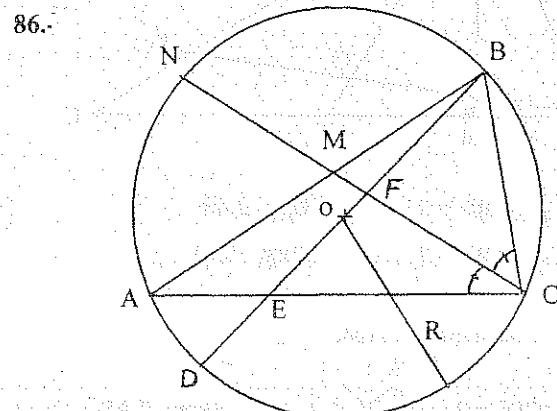
T) $AC \times BD = BF \times EB$



H) \widehat{AC} Tang. $\odot(O, 10)$

T₁) $X = ?$ Resp. 193°

T₂) $Y = ?$ Resp. 5.87°



H) $R = 5$ u.
 $BC = 6$ u.
 $AB = 9$ u.

T₁) $AE = ?$ Resp. 4.4 u

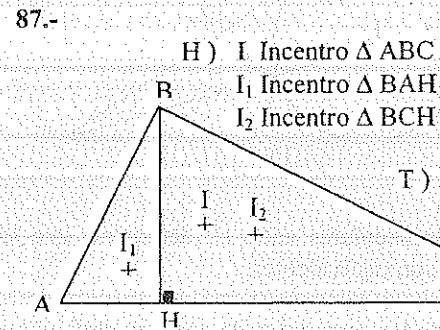
T₂) $MB = ?$ Resp. 3.4 u

T₃) $EB = ?$ Resp. 6.1 u

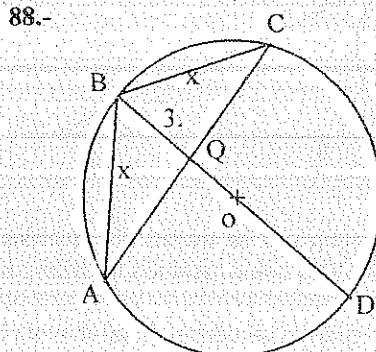
T₄) $MF = ?$ Resp. 1.49 u

T₅) $MN = ?$ Resp. 3.01 u.

T₆) $ED = ?$ Resp. 3.02 u.



T) $r^2 = r_1^2 + r_2^2$



H) $QD = 9$.

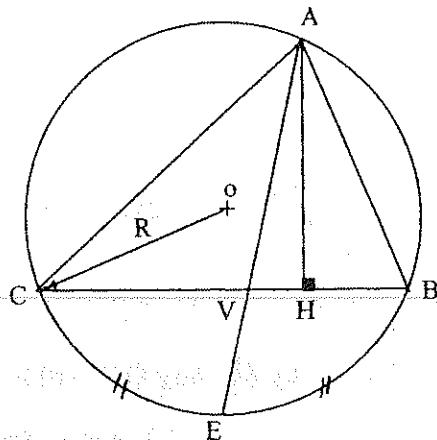
T) $x = ?$

Resp. 6.

- 89.- En un triángulo equilátero ABC, de lado a, se traza la altura BK. En los ΔBAK y ΔBCK se inscriben círculos y se traza la tangente externa común diferente al lado \overline{AC} . Hallar el área del triángulo formado por esta tangente y el vértice B. Resp. $(a^2 \sqrt{3})/12$

- 90.- En la base AC del triángulo isósceles ABC se forma un punto Q de manera que $AQ = m$ y $QC = n$ ($m > n$). En los triángulos ABQ y CBQ, están inscritos círculos. Hallar la distancia entre los puntos de tangencia de estos círculos en el lado \overline{BQ} . Resp. $(m - n)/2$

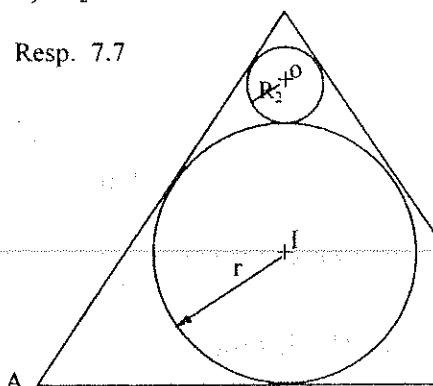
91.- T) $AE \times AV = AH \times 2R$



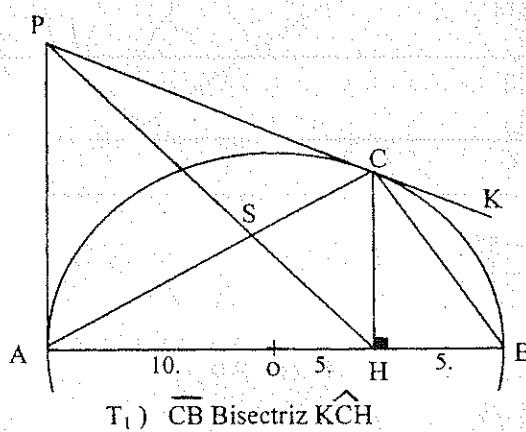
92.- H) $AB = BC = CA = 80$.

T) $R_2 = ?$

Resp. 7.7



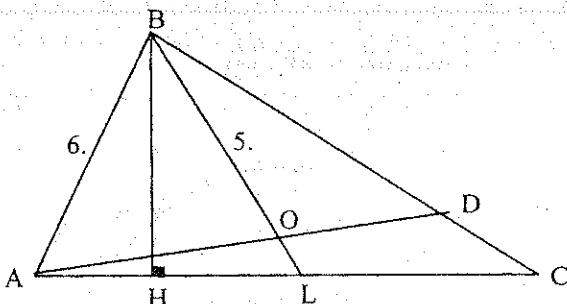
93.- H) \overline{AP} y \overline{PC} Tangs. $\odot(O, 10)$



T₁) CB Bisectriz KCH

T₂) PS = ? Resp. 7.65

94.- H) O Circuncentro $\triangle ABC$
 $BH = 5.5$



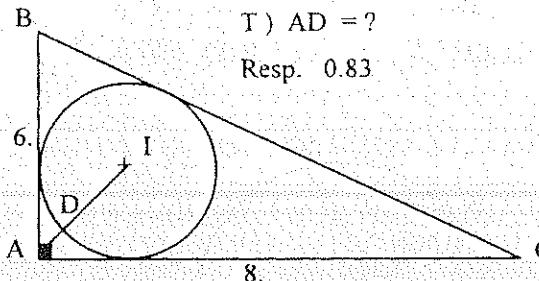
T₁) OD = ?

Resp. 2.48

T₂) OL = ?

Resp. 1.41

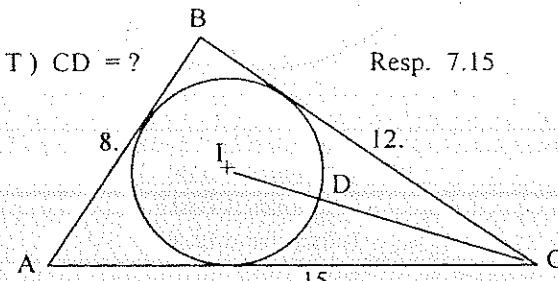
95.



T) AD = ?

Resp. 0.83

96.- H) I Incentro $\triangle ABC$



Resp. 7.15

97.- En un círculo de centro O se trazan dos cuerdas \overline{AC} y \overline{BD} perpendiculares entre sí; demostrar que los triángulos AOB y COD como también los triángulos BOC y AOD son equivalentes.

98.- En un círculo, dos cuerdas se cortan de tal manera que el producto de los segmentos de corte en cada una es de 145 cm^2 . La distancia del centro al punto de intersección es 12 u. Calcular el radio. Resp. 17 u.

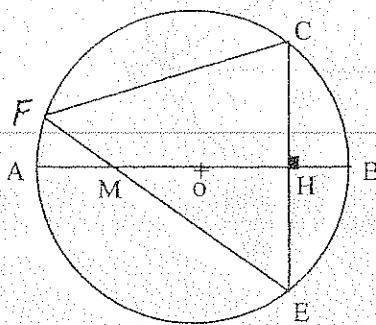
99.- Demostrar que la suma de los cuadrados de los segmentos que une un punto de un semicírculo, con los dos puntos de trisección del diámetro, es igual a $5/9$ del cuadrado del diámetro.

100.- Los lados de un $\triangle ABC$ son: $a = 21 \text{ u}$; $b = 30 \text{ u}$; $c = 33 \text{ u}$. Hallar: R , r y IO_a .

(O_a ex centro - I incentro del $\triangle ABC$). Resp. 16.84 u.; 7.34 u.; 22.25 u.

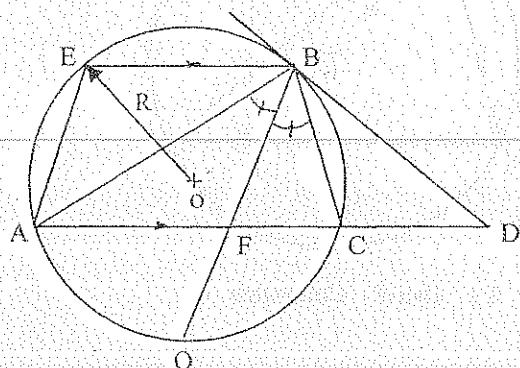
- 101.- H) $AM = MO = 10 \text{ u.}$
 $BH = 4 \text{ u.}$

T) $CF = ?$ Resp. 35.71 u.

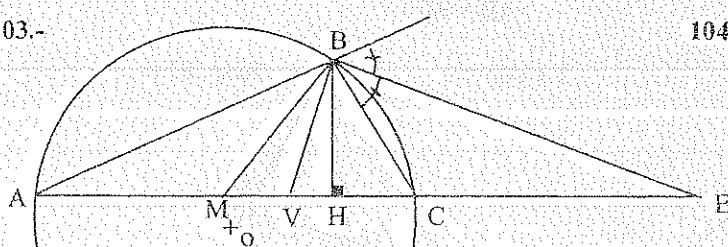


- 102.- H) $\overline{BD} \text{ Tang. } \odot(O, R)$

- T₁) $AB \times BC = EB \times BD$
T₂) $AB \times BC = BQ \times BF$



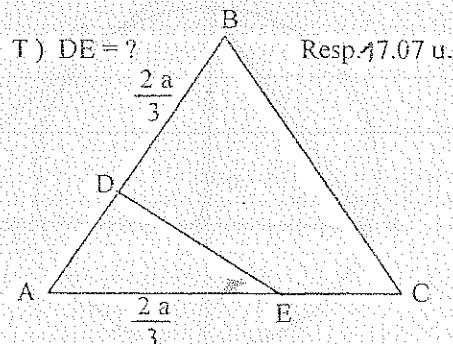
103.-



- H) $\triangle ABC$ Escaleno
 $AM = MC$
 \widehat{BV} Bisectriz \widehat{ABC}

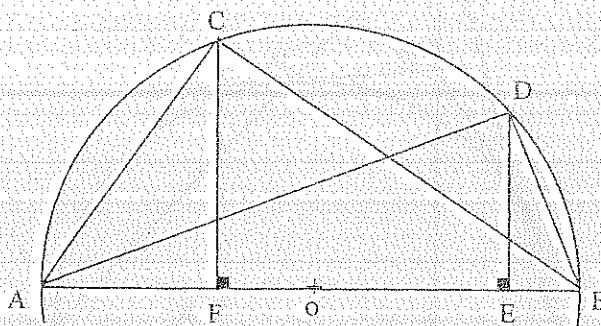
T) $AB \times BC = MH \times VE$

- 104.- H) $\triangle ABC$ Equilátero
 $a = 30 \text{ u.}$



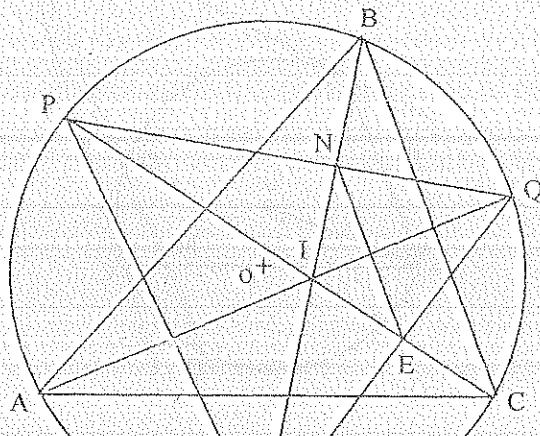
- 105.- H) I Incentro $\triangle ABC$

$$T) \frac{AC^2}{AD^2} = \frac{AF}{AE}$$

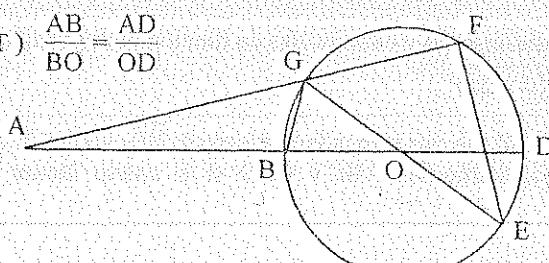


- 106.- H) I Incentro $\triangle ABC$

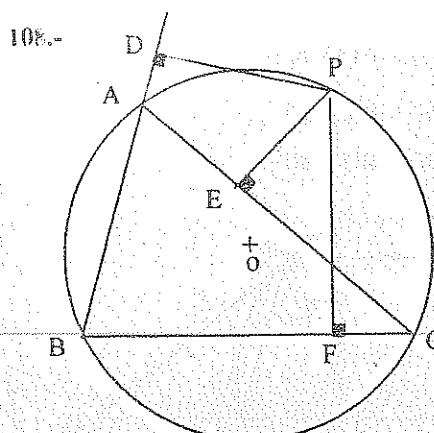
$$T) EN = BC/2$$



- 107.- T) $\frac{AB}{BO} = \frac{AD}{OD}$

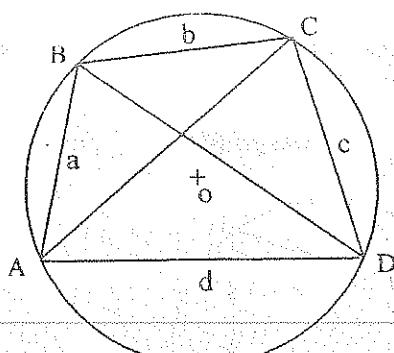


150



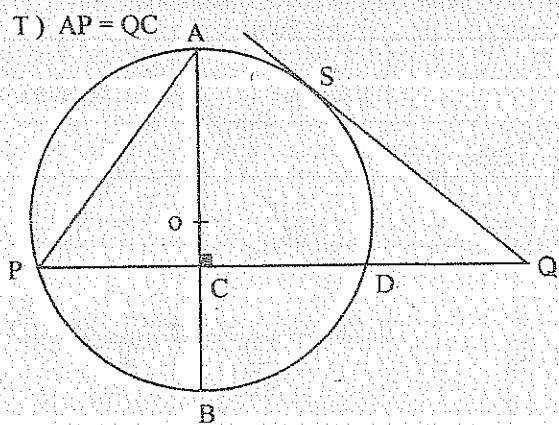
T) D-E-F Colineales

109.-

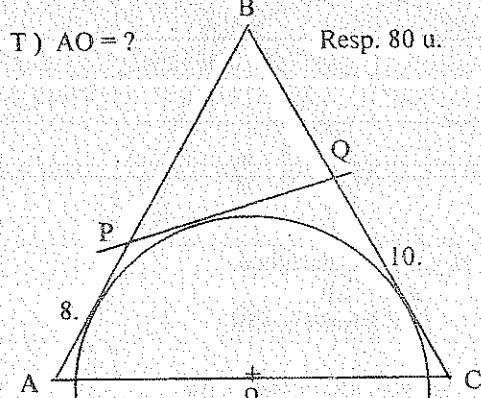


$$T) AC = \frac{ac + bd}{BD}$$

110.- H) QS = AC



111.- H) \overline{AB} , \overline{BC} y \overline{PQ} Tangs. $\odot(O; R)$
 $AB = BC$

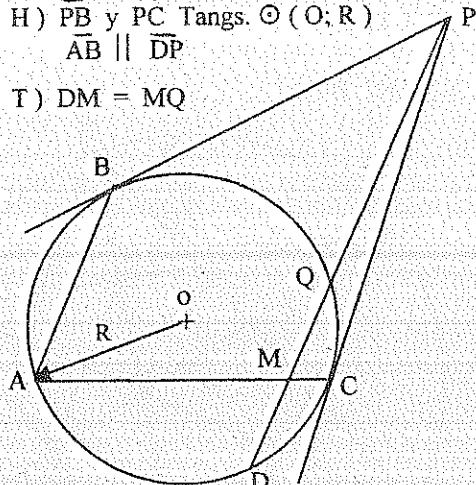


T) $AO = ?$

Resp. 80 u.

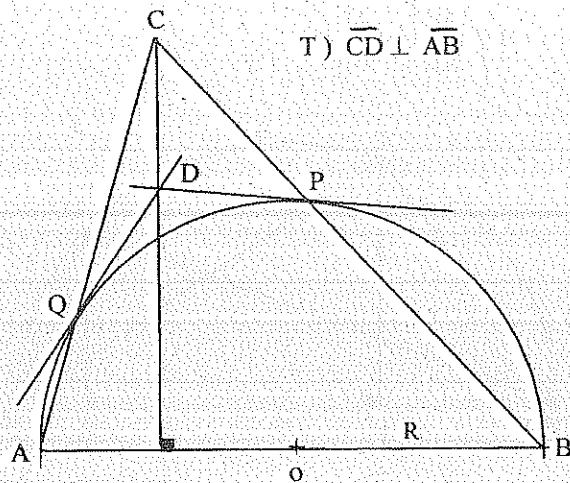
112.- H) \overline{PB} y \overline{PC} Tangs. $\odot(O; R)$
 $\overline{AB} \parallel \overline{DP}$

T) $DM = MQ$



113.- H) \overline{DP} y \overline{DQ} Tangs. $\odot(O; R)$

T) $\overline{CD} \perp \overline{AB}$



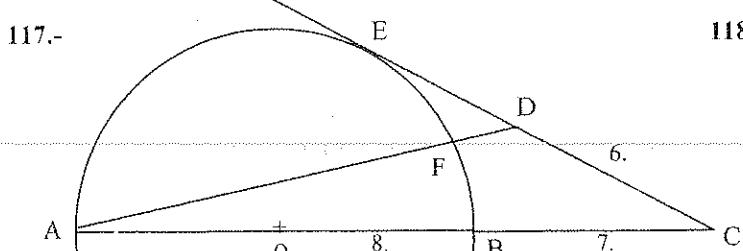
114.- Calcular la distancia entre los centros de los círculos inscrito y circunscrito en función de los radios.

$$\text{Resp. } \sqrt{R(R - 2r)}$$

115.- En un triángulo rectángulo ABC: $\hat{A} = 90^\circ$ y $\hat{C} = 30^\circ$, se tiene trazada la bisectriz \overline{BD} . Hallar la distancia entre los centros de los círculos inscritos en los triángulos ABC y CBD si el cateto menor es 1 u.
 Resp. 0,52 u.

116.- En un círculo se construyen tres cuerdas que se intersecan de dos en dos. Cada cuerda está dividida por los puntos de intersección en tres partes iguales. Hallar el radio del círculo si una cuerda es de longitud a.

$$\text{Resp. } \frac{a}{3\sqrt{3}}$$



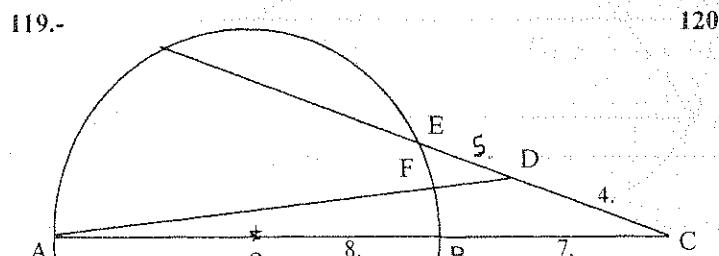
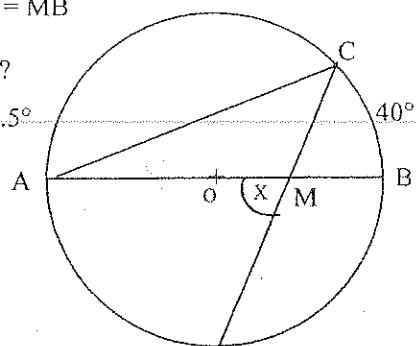
H) \overline{CE} Tang. $\odot(O; 8)$

T) $DE = ?$ Resp. 2.92

118.- H) $OM = MB$

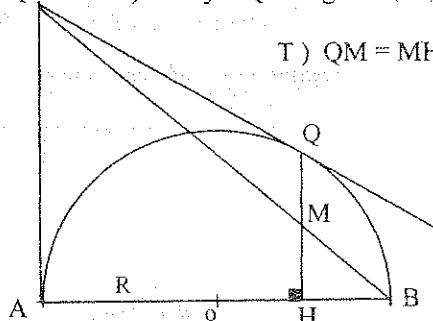
$$T) \hat{x} = ?$$

$$\text{Resp. } 67.5^\circ$$

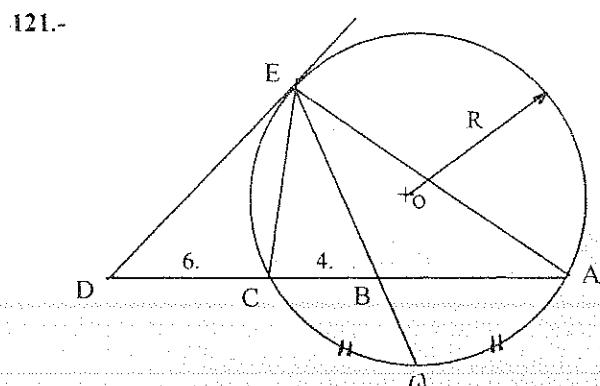


T) $FD = ?$ Resp. 3.5

120.- H) \overline{AP} y \overline{PQ} Tangs. $\odot(O; R)$



T) $QM = MH$



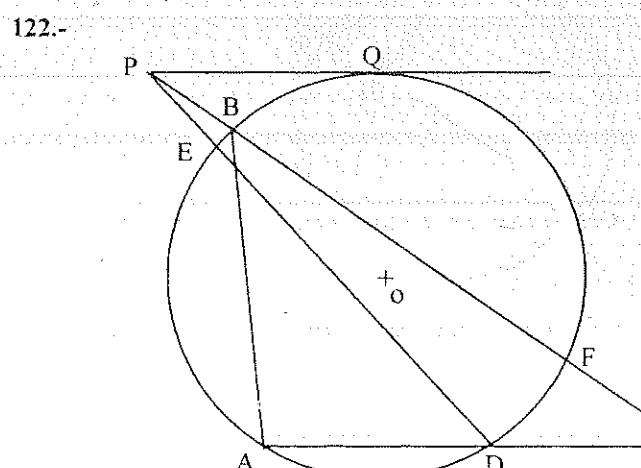
$$H) R = 10.$$

T₁) $\triangle EBD$ Isósceles

T₂) $AB = ?$ Resp. 6.67 u.

T₃) $\hat{EDC} = ?$ Resp. 80.8°

T₄) $BQ = ?$ Resp. 2.04 u.



H) \overline{PQ} Tang. $\odot(O, R)$

$$\overline{PQ} \parallel \overline{AD}$$

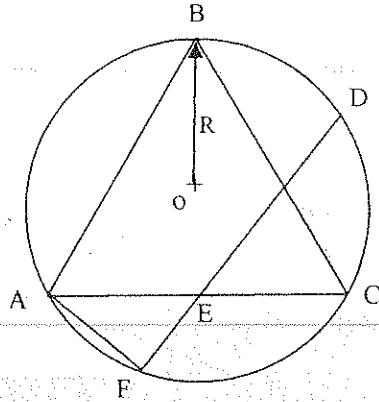
$$\hat{AQ} = 150^\circ$$

$$\hat{BQ} = 30^\circ$$

$$\hat{EQ} = 50^\circ$$

T) $\hat{ABC} = ?$ Resp. 76.7°

123.-



$$H) AB = BC = AC$$

$$\widehat{BD} = \widehat{DC}$$

$$AE = EC$$

$$R = 5 \text{ u.}$$

$$T_1) AF = ? \quad \text{Resp. } 3.27 \text{ u.}$$

$$T_2) DF = ? \quad \text{Resp. } 9.45 \text{ u.}$$

$$T_3) EF = ? \quad \text{Resp. } 2.84 \text{ u.}$$

124.-

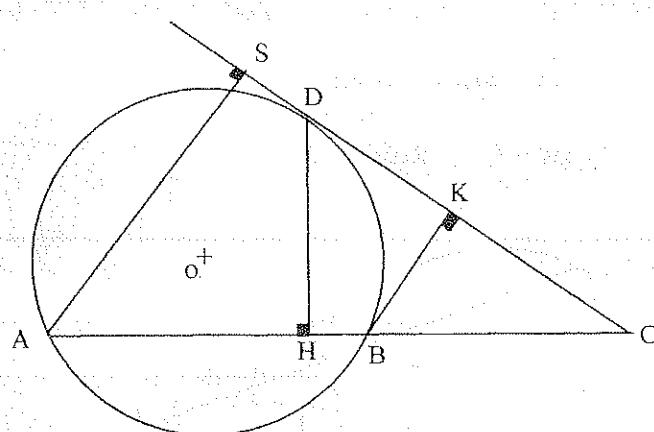
$$H) CS \text{ Tang. } \odot(O, R)$$

$$AB = 12.5 \text{ u.}$$

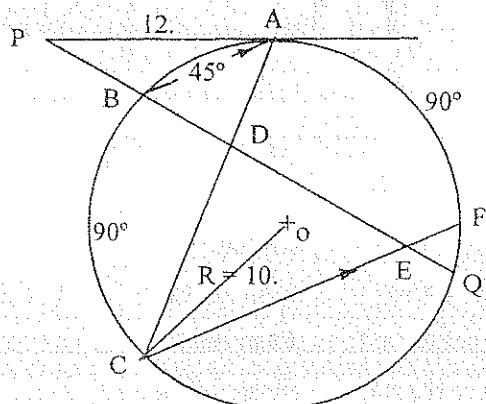
$$AS = 13.5 \text{ u.}$$

$$BK = 6 \text{ u.}$$

$$T) HD = ? \quad \text{Resp. } 9 \text{ u.}$$



125.-

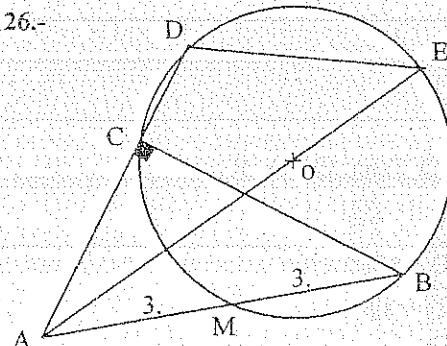


$$H) \overline{AP} \text{ Tang. } \odot(O, R)$$

$$T_1) BD = ? \quad \text{Resp. } 5.46 \text{ u.}$$

$$T_2) EF = ? \quad \text{Resp. } 3.29 \text{ u.}$$

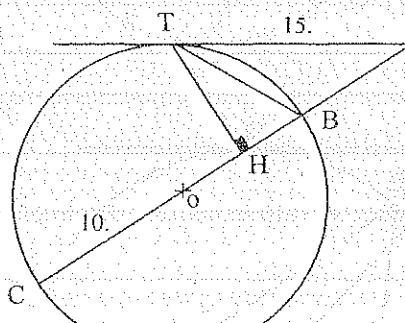
126.-



$$H) CAB = 70^\circ$$

$$T) DE = ? \quad \text{Resp. } 4.63 \text{ u.}$$

127.-



$$H) \overline{PT} \text{ Tang. } \odot(O; 10)$$

$$T_1) TB = ? \quad \text{Resp. } 9.43 \text{ u.}$$

$$T_2) TH = ? \quad \text{Resp. } 8.32 \text{ u.}$$

5.8.1. EJERCICIOS RESUELTOS

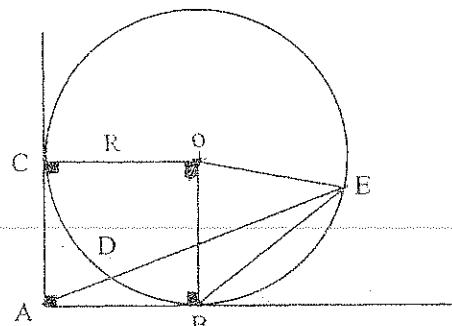
4.- 1.- $\widehat{EAB} = \frac{\widehat{EB} - \widehat{DB}}{2} = \frac{2\widehat{DB} - \widehat{DB}}{2} = \frac{\widehat{DB}}{2} = \widehat{DEB}$

2.- $\therefore \triangle ABE$ Isósceles

3.- $AC = AB = CO = BO = BE = EO = R$

4.- $\therefore \triangle OBE$ Equilátero y $\widehat{BE} = 60^\circ$

5.- $\Rightarrow \widehat{DB} = 30^\circ$ y $\widehat{EAB} = 15^\circ$



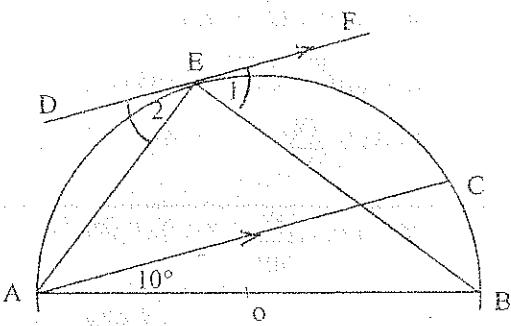
6.- 1.- $\widehat{CB} = 2 \times 10^\circ = 20^\circ$

2.- \overline{AB} Diámetro $\therefore \widehat{AE} + \widehat{EC} + 20^\circ = 180^\circ$

3.- $DF \parallel AC \Rightarrow \widehat{AE} = \widehat{EC} = 80^\circ$

4.- $\widehat{1} = \frac{\widehat{EC} + \widehat{CB}}{2} = 50^\circ$

$\widehat{2} = \frac{\widehat{AE}}{2} = 40^\circ$

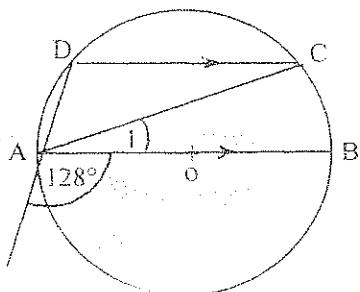


8.- 1.- $\widehat{DAB} = 180^\circ - 128^\circ = 52^\circ \therefore \widehat{DCB} = 104^\circ$

2.- \overline{AB} Diámetro y $\overline{DC} \parallel \overline{AB}$

$\widehat{AD} = \widehat{CB} = 180^\circ - \widehat{DCB} = 76^\circ$

3.- $\widehat{1} = \frac{\widehat{CB}}{2} = 38^\circ$



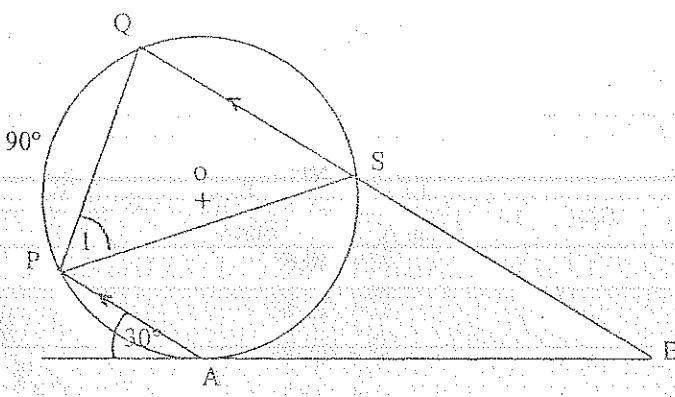
9.- 1.- $\widehat{AP} = 2 \times 30^\circ = 60^\circ$

2.- $\overline{AP} \parallel \overline{BQ} \Rightarrow \widehat{PQ} = \widehat{AS} = 90^\circ$

3.- $90^\circ + \widehat{QS} + 90^\circ + 60^\circ = 360^\circ$

$\therefore \widehat{QS} = 120^\circ$

4.- $\widehat{1} = \frac{\widehat{QS}}{2} = 60^\circ$



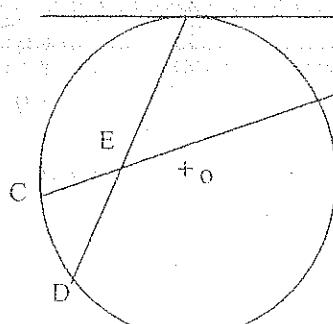
18.- 1.- $3 \times EF = 4 \times 6$

$\therefore EF = 8 \text{ u.}$

2.- $AF = 17 - EF = 9$

3.- $AB^2 = AC \times AF$

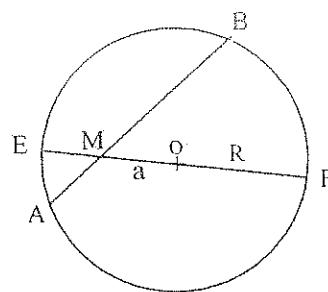
$\Rightarrow AB = 13.41 \text{ u.}$



24.- 1.- $OE = OF = R$ (Construcción)

2.- $AM \times MB = EM \times MF = (R - a) \times (R + a)$

$$\therefore AM \times MB = R^2 - a^2$$



29.- 1.- $(12 + 10) \times 10 = (AB + 8.5) \times 8.5$

$$\therefore AB = 17.38 \text{ u.}$$

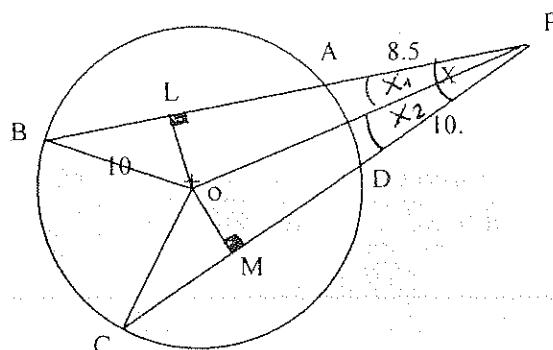
2.- $OM = \sqrt{10^2 - 6^2} = 8 \text{ u.}$

$$OL = \sqrt{10^2 - 8.69^2} = 4.95 \text{ u.}$$

3.- $\tan X_1 = \frac{OL}{LP} \Rightarrow X_1 = 16^\circ$

$$\tan X_2 = \frac{OM}{MP} \Rightarrow X_2 = 26.5^\circ$$

$$\Rightarrow X = 42.6^\circ$$



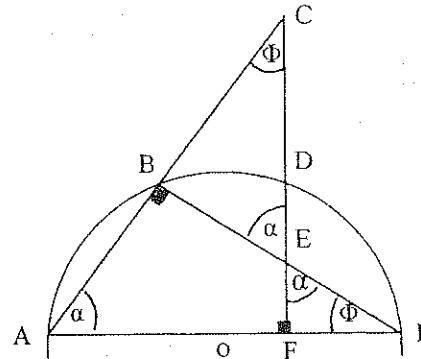
46.- 1.- $\hat{B} = 90^\circ \quad \therefore \alpha + \phi = 90^\circ$

2.- $\triangle ACF \sim \triangle EGF$ (A,A,A)

$$\frac{12}{FG} = \frac{AF}{3}$$

3.- $DF^2 = AF \times FG = 12 \times 3$

$$\therefore DF = 6 \text{ u.}$$



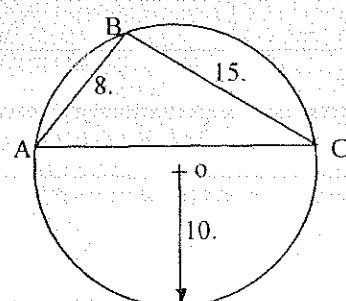
53.- 1.- $\frac{15}{\sin A} = \frac{8}{\sin C} = \frac{AC}{\sin B} = 2(10)$

$$\therefore A = 48.6^\circ$$

$$\hat{C} = 23.6^\circ$$

$$\hat{B} = 107.8^\circ$$

$$AC = 19 \text{ u.}$$



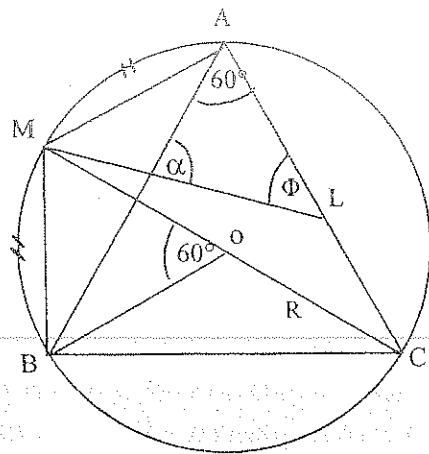
$$62.- \quad 1. - \frac{AC}{\sin 60^\circ} = 2R \quad \therefore AB = BC = CA = 17.32 \text{ m.}$$

$$2.- \widehat{AM} = \widehat{MB} = 60^\circ \quad \therefore AM = MB = R = 10 \text{ u.}$$

$$3.- \quad \widehat{MBL} = \frac{\widehat{MA} + \widehat{AC}}{2} = 90^\circ \quad \therefore \tan \phi = \frac{MB}{BL}$$

$$\Rightarrow \hat{\phi} = 49.1^\circ$$

$$4. \quad \hat{\alpha} = 180^\circ - 60^\circ - \hat{\phi} = 70.9^\circ$$



$$66.- \quad 1.~ AE = AF = r$$

$$2. \text{ } CE = CD \text{ v } BE = BD$$

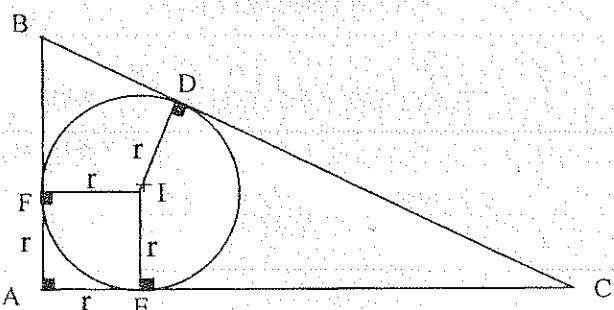
$$3. \quad b = r + CE = r + CD$$

$$A - c \equiv r + BE \equiv r + BD$$

$$b+c=2r+a$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{2} (b + c - a)$$

$$5 - a = 2R \Rightarrow b + c = 2r + 2R = 2(r + R)$$



$$70.- \quad 1.- \quad \hat{\phi} = 90^\circ + \frac{1}{4} \hat{A} = \frac{1}{2} \hat{C} + 90^\circ$$

$$\therefore \hat{\phi} = 110^\circ$$

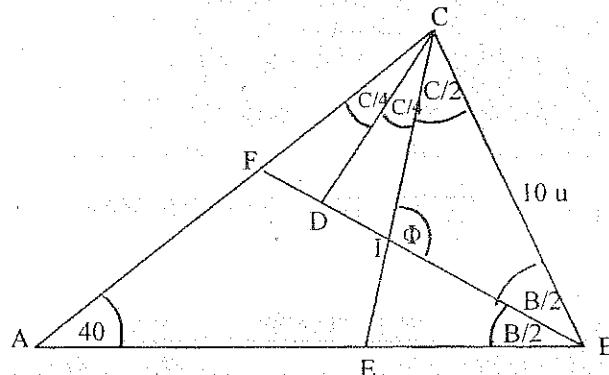
800

$$\hat{D} = 60^\circ$$

$$2. \frac{10}{\operatorname{Sen} \phi} = \frac{\operatorname{CI}}{\operatorname{Sen} \frac{1}{2} B}$$

$$\Rightarrow Cl = 5,32 \text{ u.}$$

$$3.- A \Delta BIC = \frac{1}{2} (Cl_x CB_x \operatorname{Sen} \frac{1}{2} C) = 17,1 u^2$$



$$83.- \quad \text{I.} \quad \widehat{\text{AOB}} = \widehat{\text{AB}} = 80^\circ$$

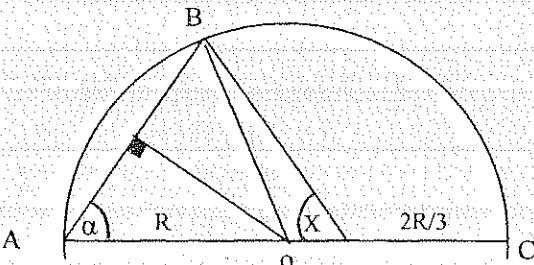
$$2.- \text{ Sen } 40^\circ = \frac{AB}{2} \Rightarrow AB = 1,28 \text{ R}$$

$$3.- \quad \hat{\alpha} = 90^\circ - 40^\circ = 50^\circ$$

$$4.- BE^2 = AB^2 + (R + R')^2 - 2 \cdot AB \cdot (R + R') \cdot \cos 50^\circ$$

$$\Rightarrow BE = 1,1 R$$

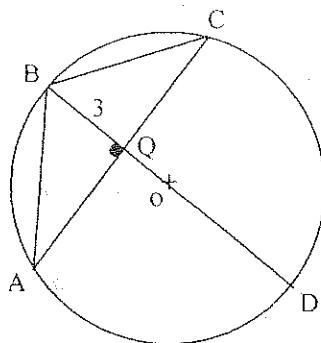
$$5.- \frac{AB}{\operatorname{Sen} x} = \frac{1.1 R}{\operatorname{Sen} 50^\circ} \Rightarrow \hat{x} = 63^\circ$$



- 88.- 1.- \widehat{BO} es Mediatriz de \overline{AC}
 $\therefore AQ = QC$

2.- $BQ \times QD = AQ \times QC$
 $\therefore AQ = QC = 5,196 \text{ u.}$

3.- $AB = \sqrt{AQ^2 + BQ^2} = 6$



- 93.- T.) I. - $\triangle ACH$; $\triangle CHB$ y $\triangle ACB$ Rectángulos
 2.- Las Tangentes $PA = PC \therefore \triangle APC$ Isósceles
 3.- $2\hat{\alpha} + \hat{\phi} + \hat{KCB} = 180^\circ \therefore \hat{KCB} = \hat{\phi}$
 $\Rightarrow \overline{CB}$ Bisectriz de \hat{KCH}

$$T_2.) \quad 1.- \quad CH^2 = 7.5 \times 2.5 \quad \therefore \quad CH = 4,33 \text{ u.} \\ \qquad \qquad \qquad AC = 8,66 \text{ u.}$$

$$2.- \text{Sen. } \alpha = \frac{7.5}{8.66} \Rightarrow \hat{\alpha} = 60^\circ$$

3.- Δ APC Equilátero

$$\therefore PA = PC = AC = 8,66 \text{ u.}$$

$$4.- PH = \sqrt{PA^2 + 7,5^2} = 11,4 \text{ u.}$$

5.- $\Delta \text{APS} \sim \Delta \text{CHS}$ (A,A₁)

$$\frac{PA}{CH} = \frac{PS}{PH - PS} \Rightarrow PS = 7,65 \text{ u.}$$

$$106.1 - AFS = \frac{\widehat{AS} + \widehat{PB} + \widehat{BQ}}{2} = \frac{\widehat{B}}{2} + \frac{\widehat{C}}{2} + \frac{\widehat{A}}{2} = 90^\circ$$

2.- Idem : $\hat{AFS} = \hat{BNO} = \hat{CES} = 90^\circ$

• Es Ortocentro del \triangle POS

3.- * Segundo problema # 39 Pag. 177 *

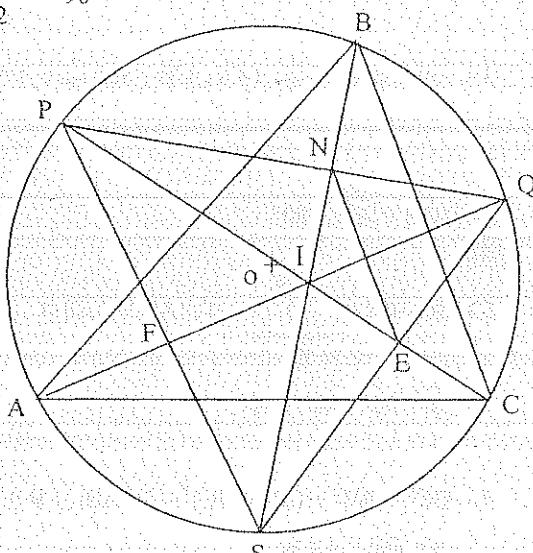
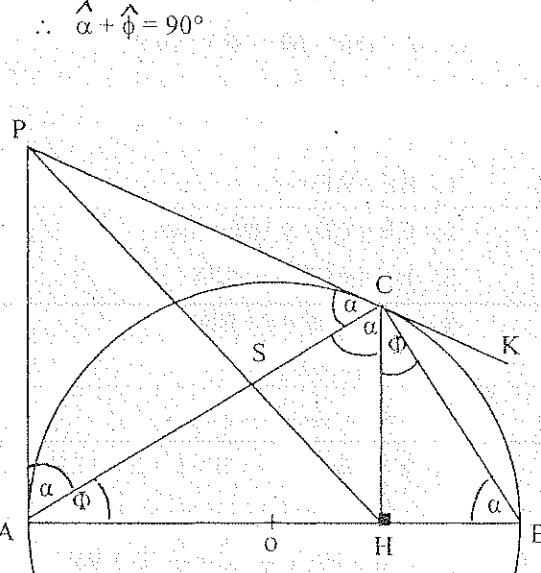
$$\therefore AF = FI$$

BN = NI

$$CE \approx EI$$

4.- En ΔBIC : E y N son puntos medios.

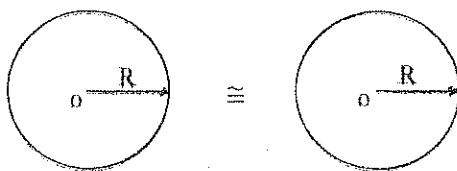
$$\therefore EN = \frac{BC}{2}$$



5.9. POSICIÓN RELATIVA DE DOS CÍRCULOS

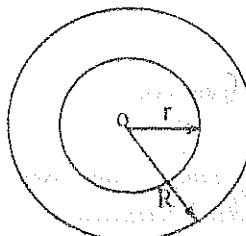
5.9.1. CONGRUENTES

Si tienen tres puntos comunes o, si sus radios son congruentes.



5.9.2. CONCÉNTRICOS

Si tienen el mismo centro pero diferente radio.



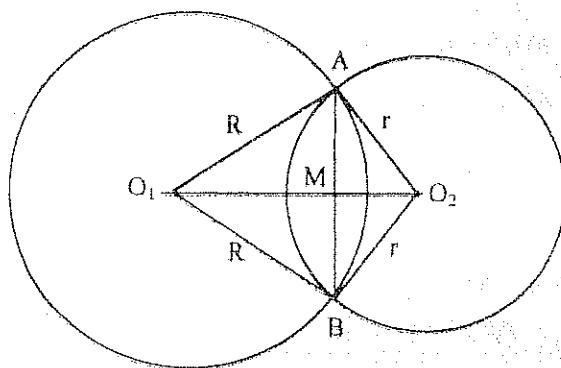
5.9.3. SECANTES

Si tienen dos puntos comunes (puntos de intersección).

El segmento que une los puntos de intersección se llama "cuerda común".

El segmento que une los centros se llama "línea de centros".

La línea de centros de dos círculos secantes es la mediatrix de la cuerda común, y es menor que la suma de sus radios y mayor que la diferencia.



H) (O_1, R) y (O_2, r)
son círculos secantes.

\overline{AB} cuerda común.

$$T_1) \quad \overline{O_1O_2} \perp \overline{AB}$$

$$T_2) \quad AM = MB$$

$$D) \quad AO_1 = BO_1 = R$$

$\therefore O_1$ Equidista de A y B

$$AO_2 = BO_2 = r$$

$\therefore O_2$ Equidista de A y B

$$\Rightarrow \overline{O_1O_2} \perp \overline{AB} \quad y \quad AM = MB \quad //.$$

Círculos Ortogonales son dos círculos secantes tales que, las tangentes trazadas en dichos puntos son perpendiculares entre sí.

El cuadrado de la distancia entre los centros de dos círculos ortogonales es igual a la suma de los cuadrados de sus radios.

5.9.4. TANGENTES

Si tienen un punto común.

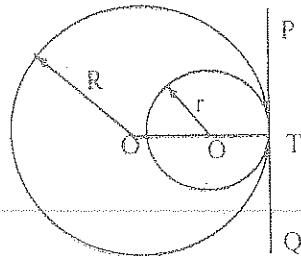
La recta que es tangente a dos círculos se llama "tangente común".

5.9.4.1. TANGENTES INTERNOS

Dos círculos son tangentes internos, si: los centros y el punto de tangencia son colineales; y la distancia entre los centros es igual a la diferencia de los radios.

\overline{PQ} Tangente común

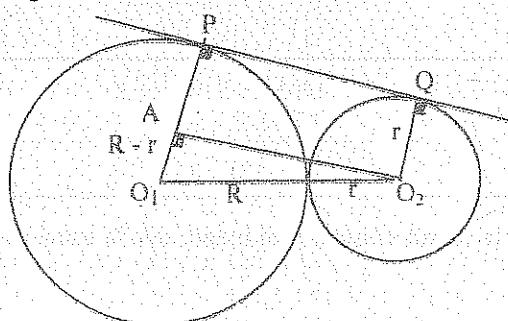
$$O_1O_2 = R - r$$



5.9.4.2. TANGENTES EXTERNOS

Dos círculos son tangentes externos, si: los centros y el punto de tangencia son colineales; y la distancia entre los centros es igual a la suma de los radios.

La tangente externa común de los círculos tangentes externos, es media proporcional entre sus diámetros.



H) PQ Tang. común

$$O_1O_2 = R + r$$

$$T) PQ^2 = 2R \times 2r$$

$$D) AO_2^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2$$

$$AO_2^2 = R^2 + 2Rr + r^2 - R^2 + 2Rr - r^2$$

$$AO_2^2 = 4Rr = PQ^2$$

$$\Rightarrow PQ^2 = 2R \times 2r \quad //.$$

5.9.5. EJERCICIOS

1.-

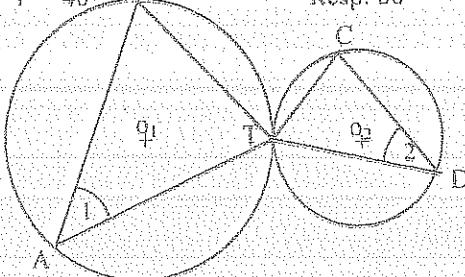
$$H) \widehat{BTC} = \frac{5\pi}{9}$$

$$\widehat{1} = 40^\circ$$

$$T) \widehat{2} = ?$$

$$T) \widehat{2} = ?$$

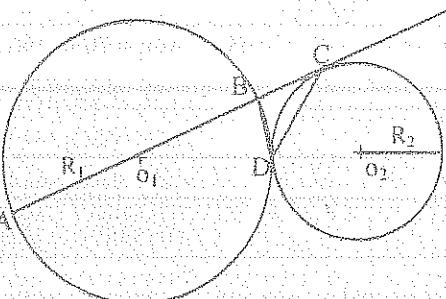
Resp. 60°



2.- H) $\odot(O_1, R_1)$ Tang. $\odot(O_2, R_2)$

\overline{AC} Tang. $\odot(O_2, R_2)$

$$T) \widehat{BDC} = \frac{\pi}{4}$$



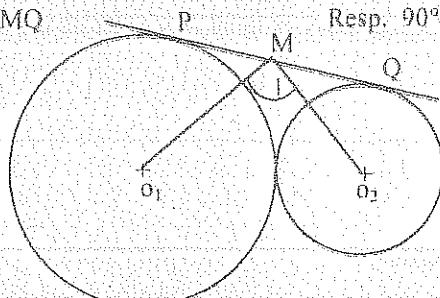
3.-

H) \overline{PQ} Tang. común

T) $\widehat{1} = ?$

$$PM = MQ$$

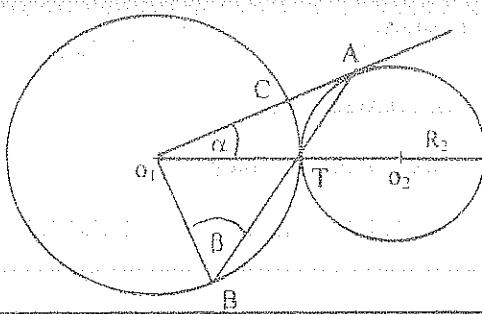
$$Resp. 90^\circ$$



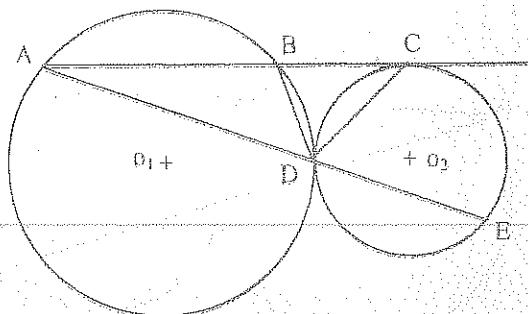
H) $\odot(O_1, R_1)$ Tang. $\odot(O_2, R_2)$

$$T) \widehat{\alpha} = 2\widehat{\beta} - 90^\circ$$

$\overline{O_1A}$ Tang. $\odot(O_2, R_2)$

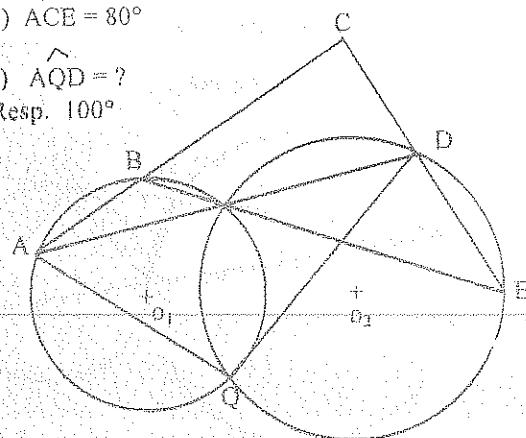


5.- H) \widehat{AC} Tang. $\odot(O_2, R_2)$
 $\widehat{BDC} = 50^\circ$

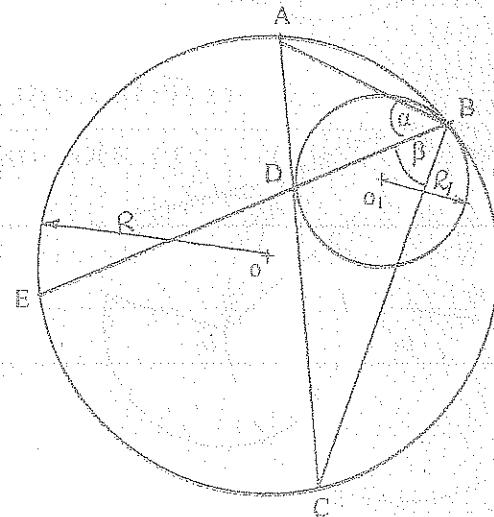


T) $\widehat{ADC} = ?$
 Resp. 130°

6.- H) $\widehat{ACE} = 80^\circ$
 T) $\widehat{AQD} = ?$
 Resp. 100°



7.-



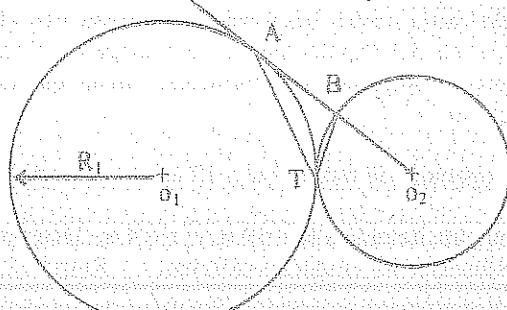
a) H) $\odot(O_1, R_1)$ Tang. $\odot(O, R)$
 \widehat{AC} Tang. $\odot(O_1; R_1)$
 T) $\widehat{\alpha} \cong \widehat{\beta}$

b) H) $\widehat{AB} = \frac{\pi}{3}$
 $\widehat{AE} = \frac{5\pi}{9}$

T) $\widehat{ADB} = ?$ Resp. 80°

8.- H) $\widehat{O_2A}$ Tang. $\odot(O_1, R_1)$

T) $\widehat{ATB} = ?$

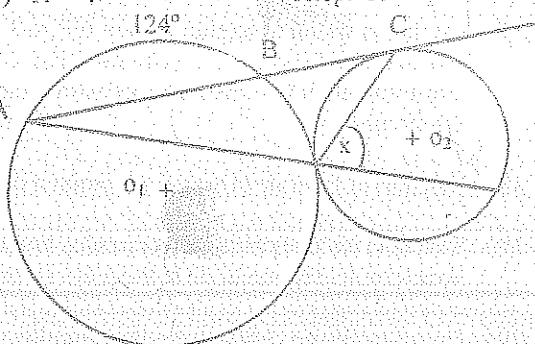


Resp. 45°

9.- H) \widehat{AC} Tang. $\odot(O_2, R_2)$

T) $\widehat{X} = ?$

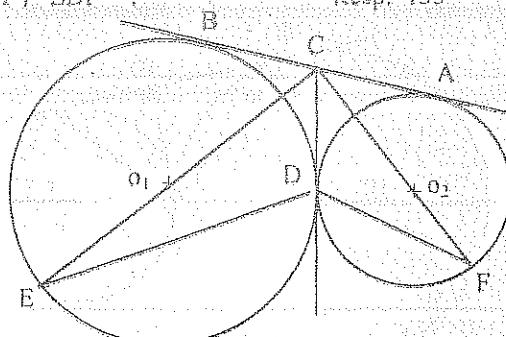
Resp. 59°



10.- H) \widehat{CD} Tang. Común.
 \widehat{AB} Tang. Común.

T) $\widehat{EDF} = ?$

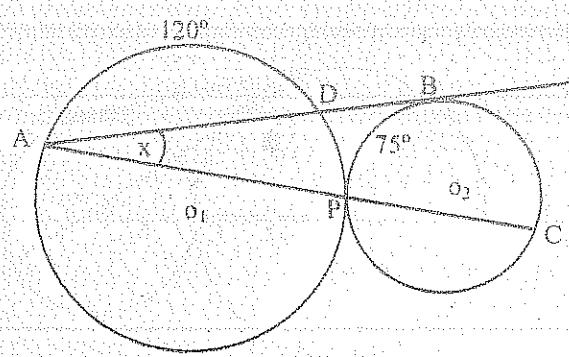
Resp. 135°



II.- H) \widehat{AB} Tang. $\odot(O_2, R_2)$

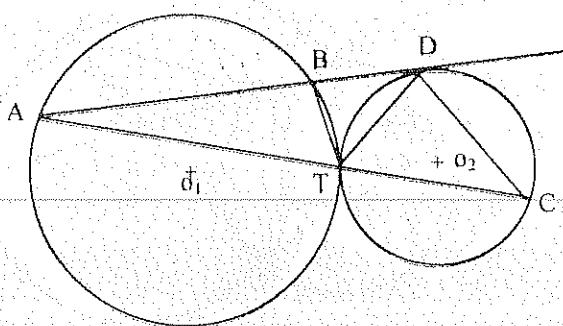
T) $\widehat{X} = ?$

Resp. 22.5°

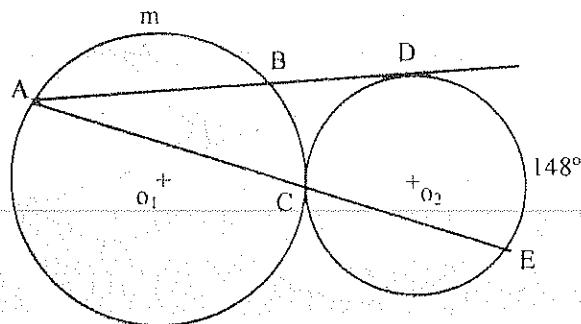
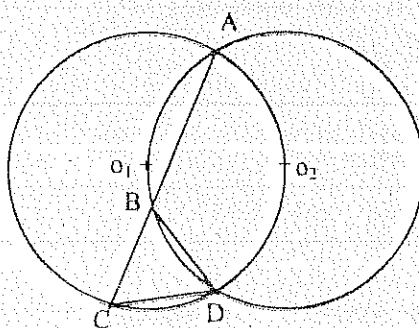
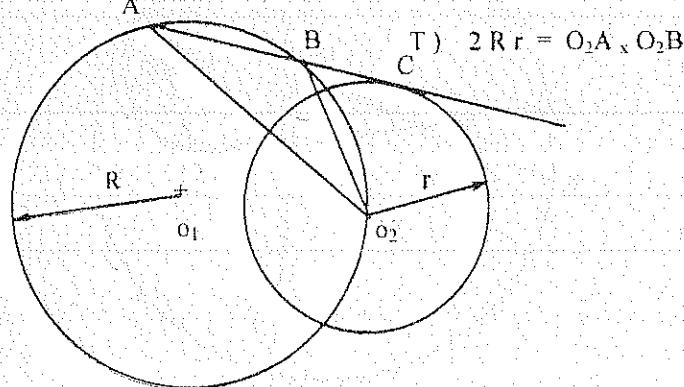


12.- H) \overline{AD} Tang. $\odot(O_2, R_2)$

T) $BT \times DC = TD \times BD$

13.- H) \overline{AD} Tang. $\odot(O_2, R_2)$

T) $m = ?$

Resp. 64° 14.- T) $\triangle CDB$ Equilátero15.- H) \overline{AC} Tang. $\odot(O_2, r)$ 16.- En un círculo de radio 10 u. En un diámetro se toma un punto A tal que $OA = 8$. Hallar el radio de un segundo círculo tangente al diámetro en A y al círculo dado. Resp. 1.8 u.

17.- Los lados de un triángulo miden 6,7 y 9 cm.; tomando como centro sus vértices se trazan tres círculos mutuamente tangentes. El círculo cuyo centro es el vértice del ángulo menor del triángulo es tangente interiormente a los otros dos, mientras que estos son entre sí tangentes exteriormente. Hallar los radios de los círculos. Resp. 11 u.; 4 u.; 2 u.

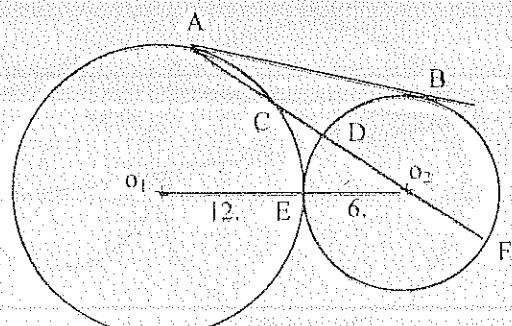
18.- Calcular el valor de la tangente común a dos círculos ortogonales de radios 9 u. y 12 u. Resp. 14.7 u.

19.- Se trazan las tangentes a dos círculos tangentes externamente de radios $R = 10$ u. y $r = 4$ u. Determinar la longitud del segmento de la tangente interna comprendida entre las tangentes externas. Resp. 12.65 u.

20.- Por el punto de contacto de dos círculos tangentes externamente se traza una secante común. Demostrar que las cuerdas son directamente proporcionales a sus radios.

21.- H) \overline{AB} Tang. Común

T) $CD = ?$

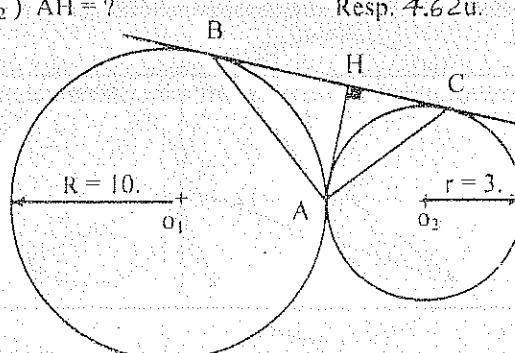
22.- H) \overline{BC} Tang. Común

T₁) $\widehat{BAC} = ?$

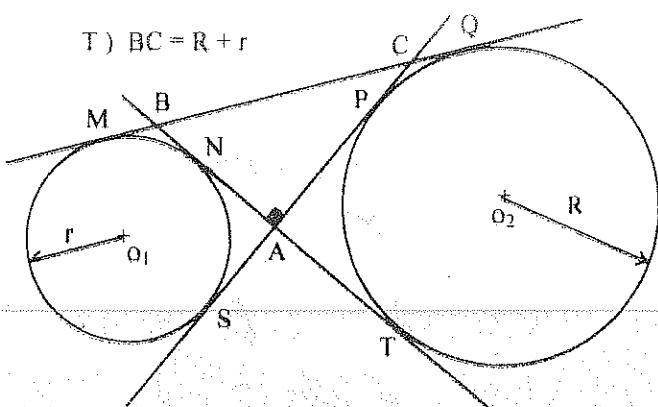
Resp. 90°

T₂) $AH = ?$

Resp. 4.62 u.

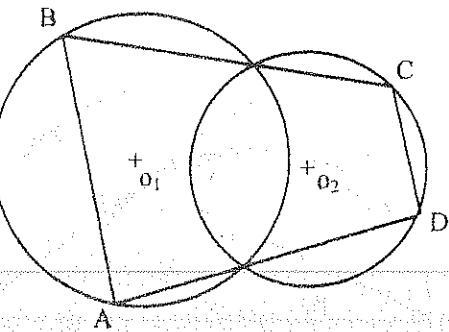


23.- H) \overline{MQ} , \overline{BT} , \overline{CS} Tang. Comunes

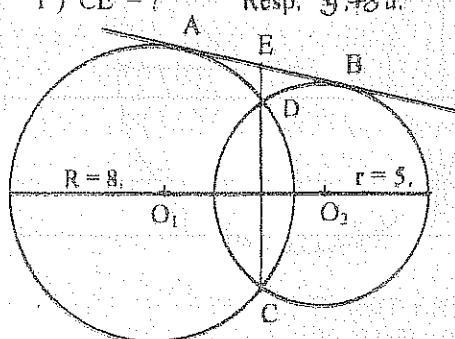


T) $BC = R + r$

24.- T) $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$



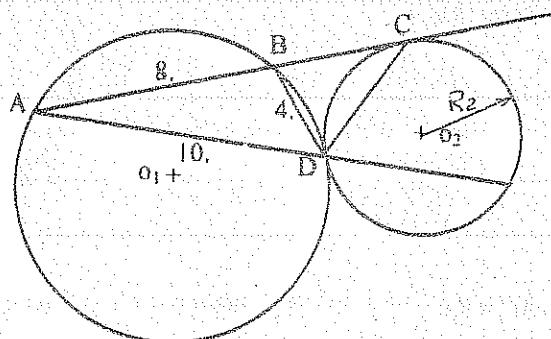
T) $CE = ?$ Resp. 9.48 u.



26.- H) \overline{AC} Tang. $\odot(O_2, R_2)$

T) $DC = ?$

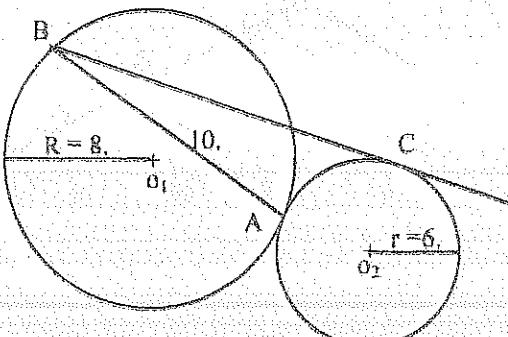
Resp. 5.19



27.- H) $\odot(O_1, R)$ Tang. $\odot(O_2, r)$

\overline{BC} Tang. $\odot(O_2, r)$

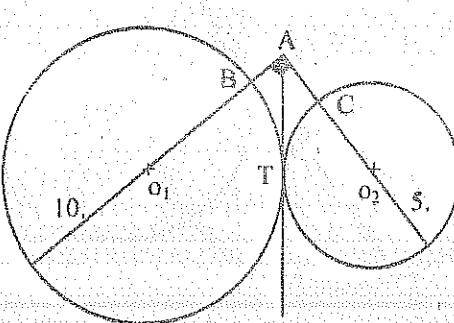
T) $\overline{BC} = ?$ Resp. 13.22



28.- H) $\odot(O_1, 10)$ Tang. $\odot(O_2, 5)$

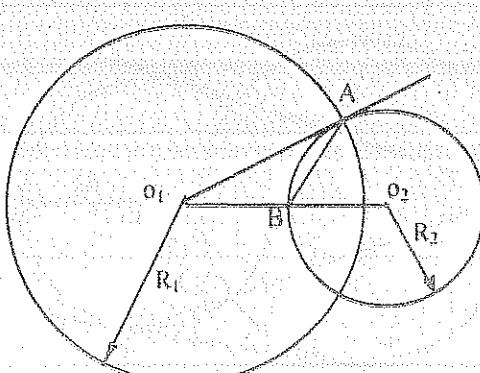
\overline{AT} Tang. Común

T) $AC = ?$ Resp. 3.65



29.- H) O_1A Tang. $\odot(O_2, R_2)$
 $O_1O_2 = 10$ u.
 $R_1 = 2R_2$

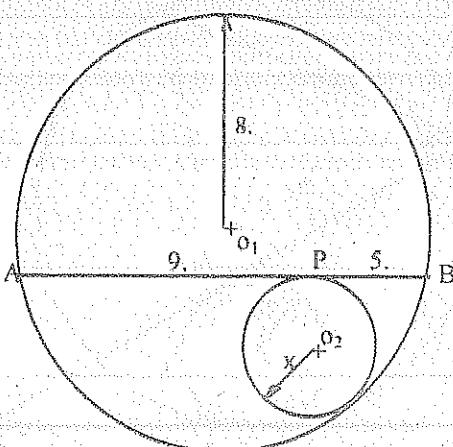
T) $AB = ?$ Resp. 4.7 u.



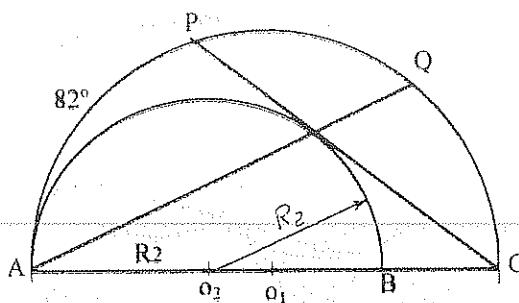
30.- H) $\odot(O_1, X)$ Tang. $\odot(O_2, 3)$

\overline{AB} Tang. $\odot(O_2, x)$ en P

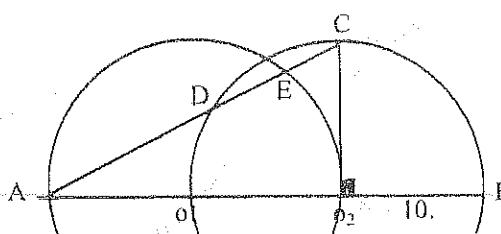
T) $X = ?$ Resp. 1.9.



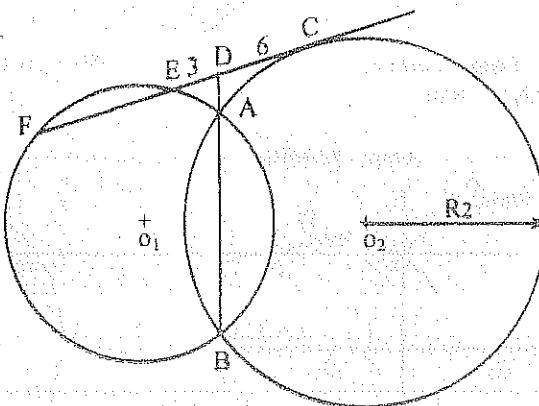
- 31.- H) \widehat{CP} Tang. $\odot(O_2, R_2)$
 T) $\widehat{CQ} = ?$ Resp. 49°



- 32.- T) $EC = ?$ Resp. 4.48



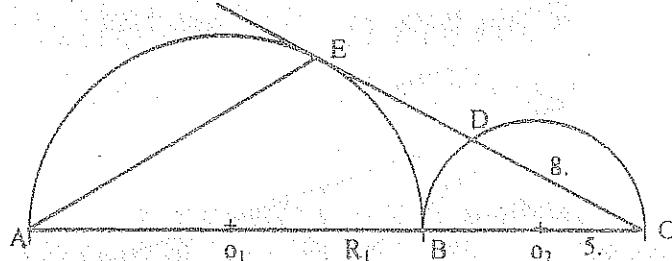
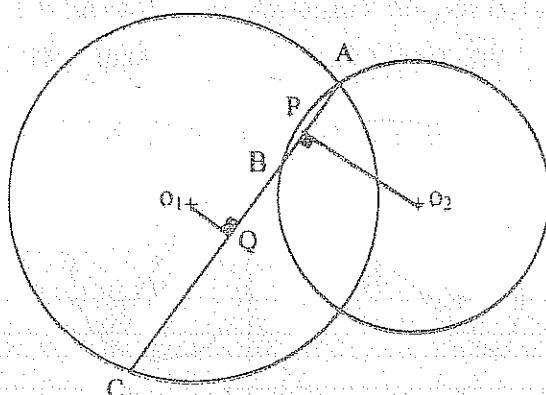
- 33.- H) \overline{FC} Tang. $\odot(O_2, R_2)$
 T) $EF = ?$
 Resp. 9 u.



- 34.- H) $AC = 8$ u.
 AB = 2 u.) T) $PQ = ?$
 Resp. 3 u.

- 35.- H) $\odot(O_1, R_1)$ Tang. $\odot(O_2, 5)$
 CE Tang. $\odot(O_1, R_1)$

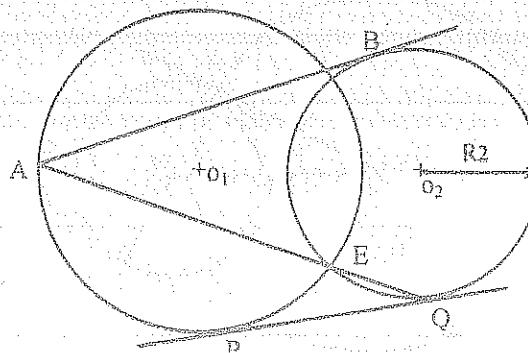
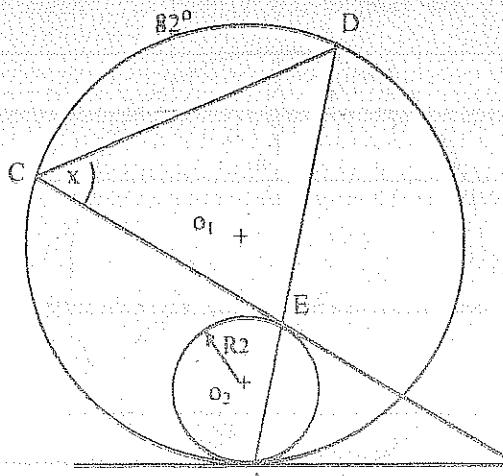
T) $AE = ?$ Resp. 26.8.



- 36.- H) \overline{AB} y \overline{CB} Tang. $\odot(O_2, R_2)$
 T) $\widehat{x} = ?$ Resp. 41°

- 37.- H) $AB = 10$ u. Tang. $\odot(O_3, R_2)$
 $\overline{PQ} = 6$ u. Tang. Común

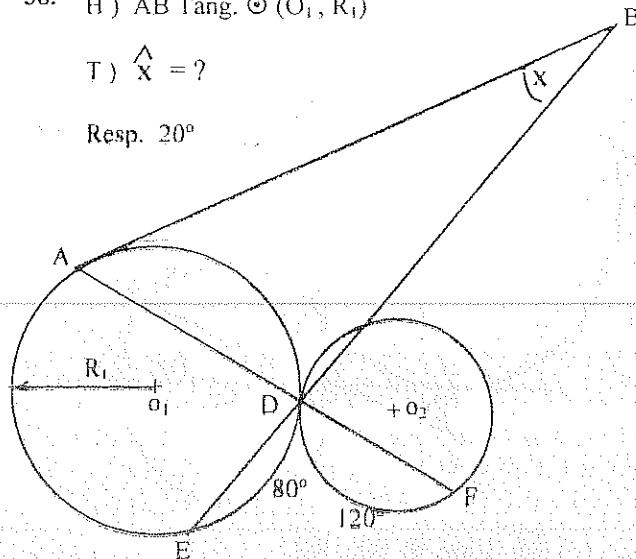
T) $AQ = ?$ Resp. 11.66 u.



38.- H) \widehat{AB} Tang. $\odot(O_1, R_1)$

$$T) \widehat{x} = ?$$

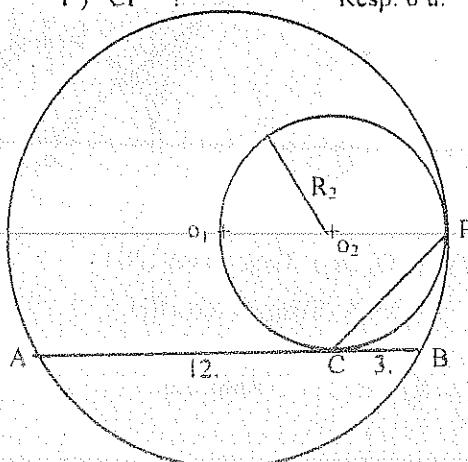
Resp. 20°



39.- H) \widehat{AB} Tang. $\odot(O_2, R_2)$

$$T) CP = ?$$

Resp. 6 u.



40.- Una recta es tangente a un círculo de radio 5 u. en M. En esta recta a ambos lados del punto M se toman los puntos A y B tal que $AM = MB = 10$ u. Hallar el radio del círculo que pasa por A y B, además que sea tangente al círculo dado.

Resp. 10 u.

41.- H) \widehat{FC} Tang. $\odot(O_1, R_1)$

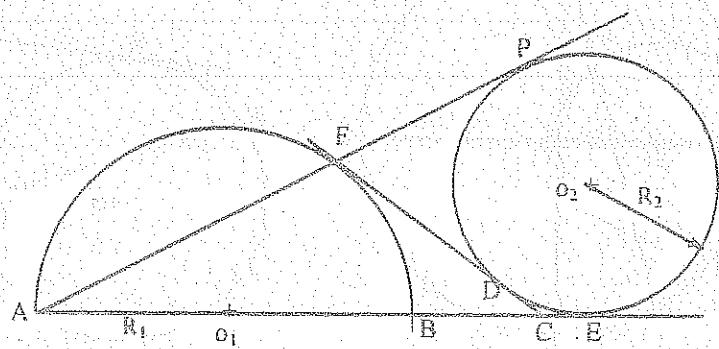
\widehat{AP} Tang. $\odot(O_2, R_2)$

\widehat{AE} Tang. $\odot(O_2, R_2)$

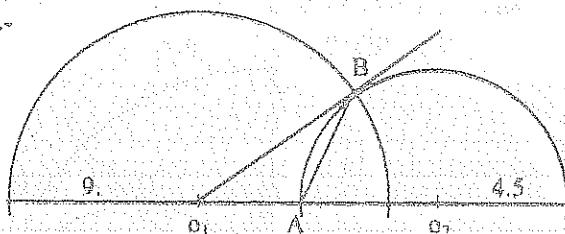
\widehat{FDC} Tang. Común

$\widehat{DE} = 30^\circ$

$$T) \widehat{PD} = \widehat{AF}$$



42.-



$$H) O_1O_2 = 10.$$

$$T) AB = ?$$

Resp. 4.73

43.- H) $\odot(O_1, s)$ Tang. $\odot(O_2, r)$

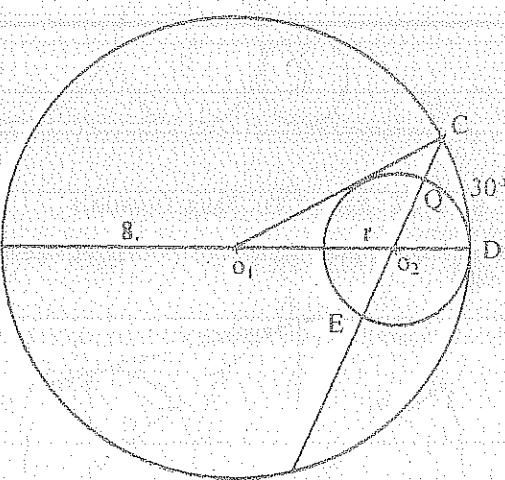
$\widehat{O_1C}$ Tang. $\odot(O_2, r)$

$$T_1) CQ = ?$$

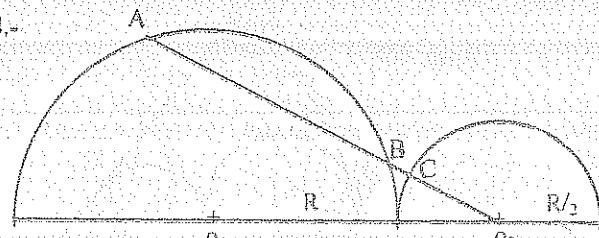
Resp. 1.64

$$T_2) EF = ?$$

Resp. 5.60



44.-



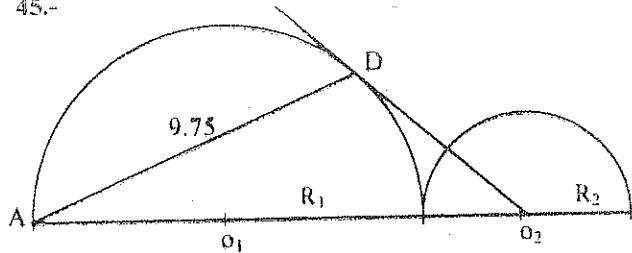
$$H) \odot(O_1, R) \text{ Tang. } \odot(O_2, R/2)$$

$$AO_2 = 2R = 10 \text{ u.}$$

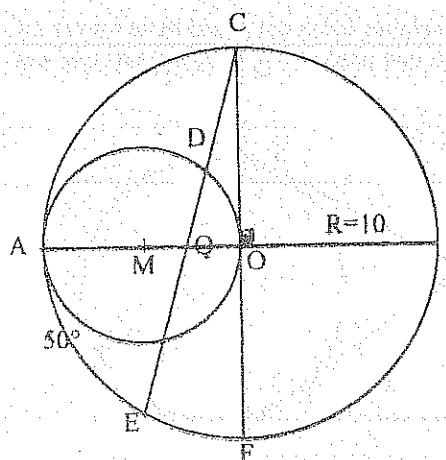
$$T) BC = ?$$

Resp. 6.3 u.

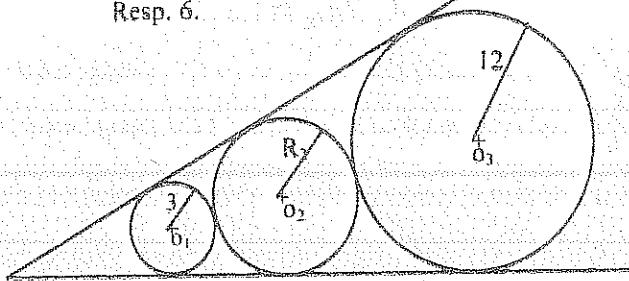
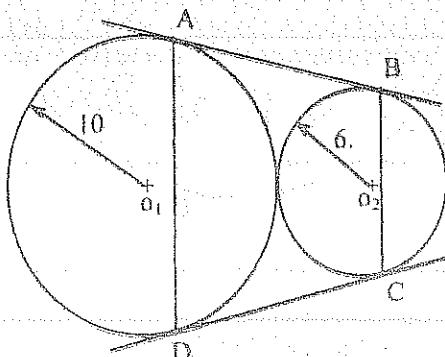
45.-

H) $\odot(O_1, R_1)$ Tang. $\odot(O_2, R_2)$ $O_2 D = 5$ Tang. $\odot(O_1, R_1)$ T) $R_2 = ?$ Resp. 2 u.47.- T) $DQ = ?$

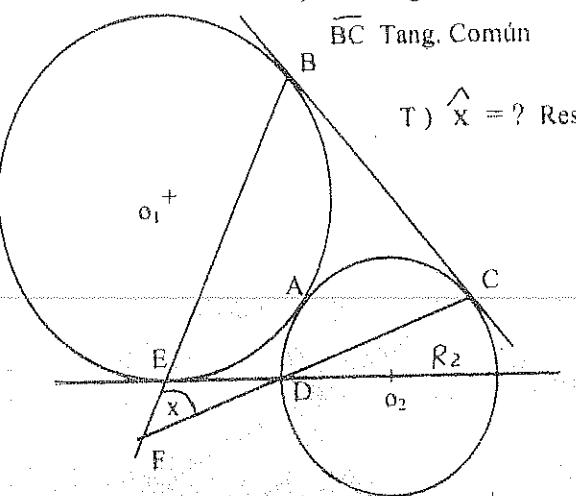
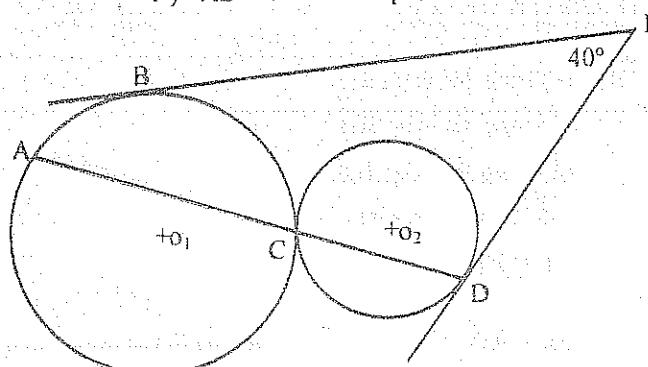
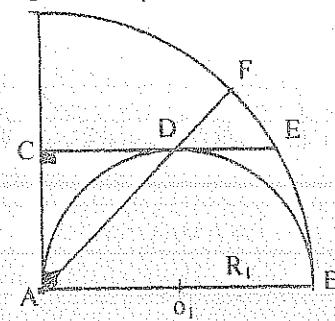
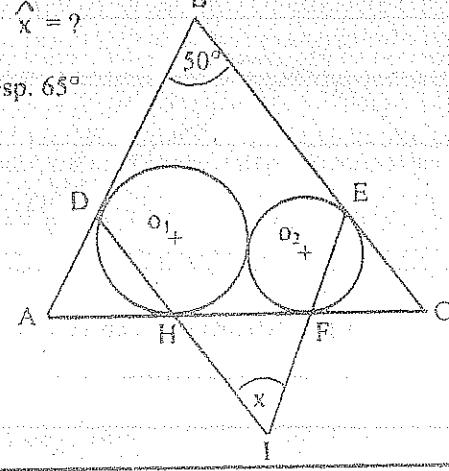
Resp. 4.37

49.- T) $R_2 = ?$

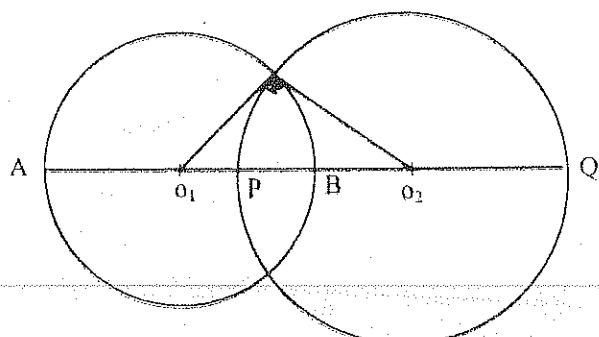
Resp. 6.

51.- H) \overline{AB} y \overline{CD} Tang. ComunesT) $(AD+BC)/2$ Resp. 15.49

46.-

H) \overline{DE} Tang. $\odot(O_1, R_1)$ \overline{BC} Tang. ComúnT) $\hat{x} = ?$ Resp. 45° 48.- H) \overline{PB} Tang. $\odot(O_1, R_1)$ \overline{PD} Tang. $\odot(O_2, R_2)$ T) $\widehat{AB} = ?$ Resp. 40° 50.- H) \overline{CE} Tang. $\odot(O_1, R_1)$ T) $\widehat{FE} = ?$ G Resp. 15° 52.- T) $\hat{x} = ?$ Resp. 65° 

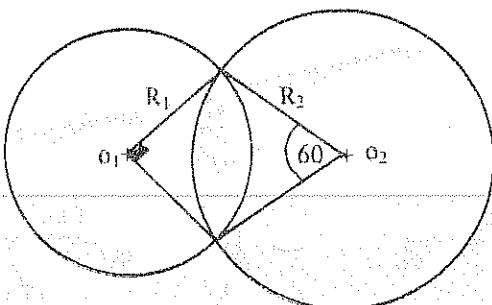
53.- T) $PB = (AP \times BQ) / AQ$



H) $O_1O_2 = a$

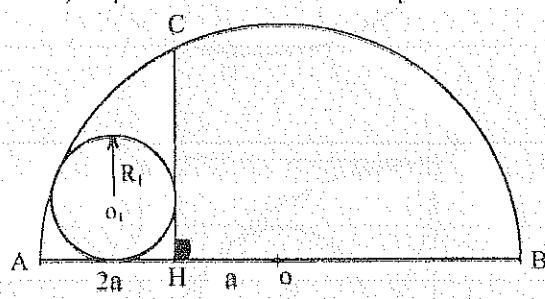
T₁) $R_1 = ?$ Resp. 0.52 a

T₂) $R_2 = ?$ Resp. 0.73 a



55.- T) $R_1 = ?$

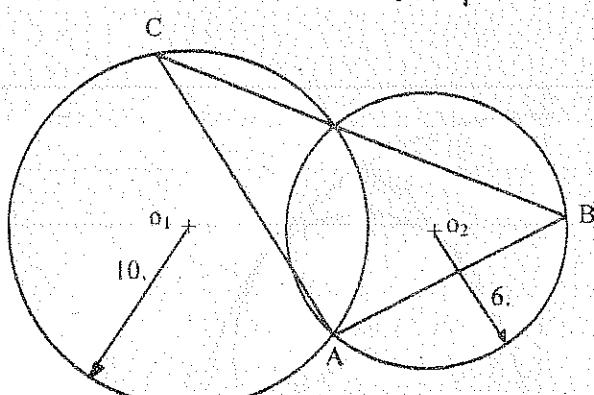
Resp. 0.9 a



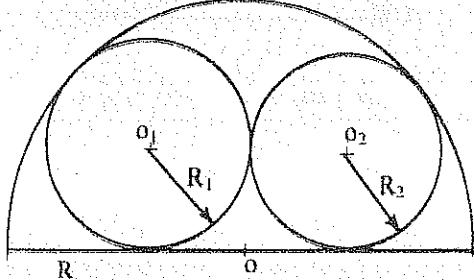
H) $AC = 14.$

T) $AB = ?$

Resp. 84



57.-



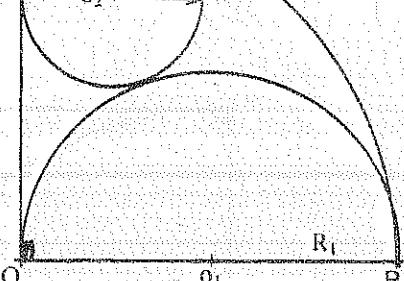
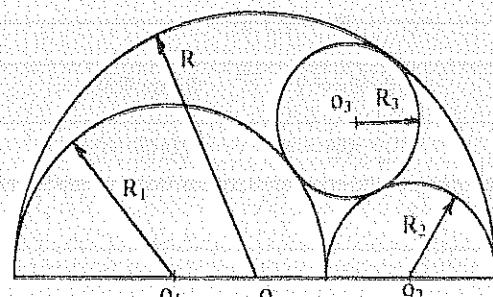
H) $R_2 = 2R_1/3$

$R_1 = 4.8 \text{ u.}$

T) $R = ?$

Resp. 10 u.

58.-



H) $OA = OB = a$

T₁) $R_1 = ?$ Resp. $a/2$

T₂) $R_2 = ?$ Resp. $a/4$

H) $R_1 = 2R_2$

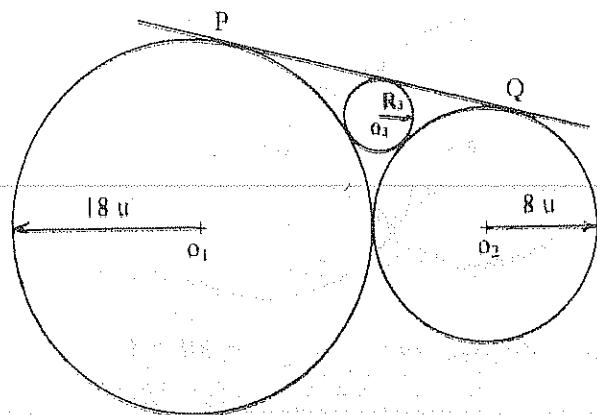
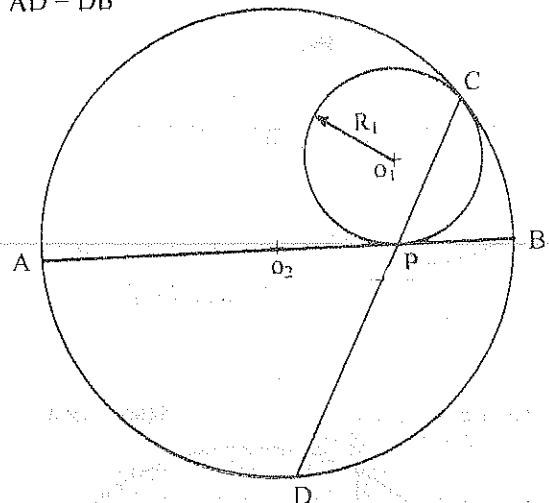
$R_1 = 2.86 \text{ u.}$

T) $R = ?$

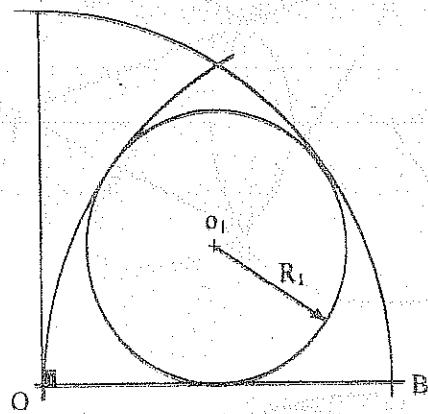
Resp. 10 u.

60.- H) \widehat{PQ} Tang. ComúnT) $R_3 = ?$

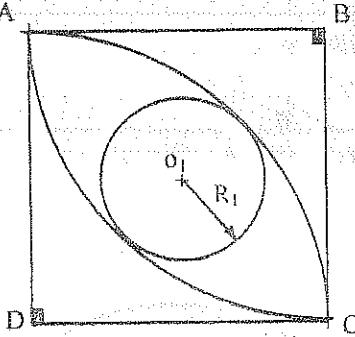
Resp. 2.88

61.- H) \overline{AB} Tang. $\odot (O_1, R_1)$ T) $\widehat{AD} = \widehat{DB}$ 

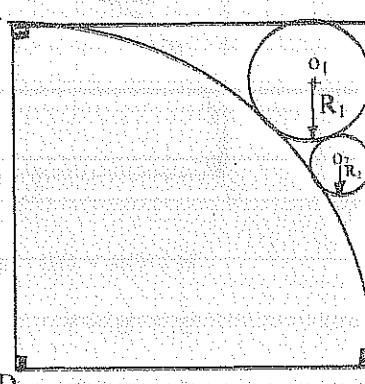
62.- A

H) $OA = OB = 40 \text{ u.}$ T) $R_1 = ?$ Resp. 15 u.

63.- A

H) $AB = BC = CD = AD = 10 \text{ u.}$ T) $R_1 = ?$ Resp. 2.9 u

64.- A

H) $AB = BC = CD = AD$ $R_1 = 1.7 \text{ u.}$ T₁) $R_2 = ?$ Resp. 0.9 u.T₂) $AB = ?$ Resp. 10 u.

5.9.5.1. EJERCICIOS RESUELTOS

7.-

$$T_1) 1. \widehat{ABS} = \widehat{ACB} = \frac{\widehat{AB}}{2}$$

$$2. \widehat{PBS} = \widehat{PBQ} = \frac{\widehat{PB}}{2}$$

$$\therefore \widehat{ACB} = \widehat{PBQ} = \omega$$

$$3. \text{ Idem: } \widehat{BAC} = \widehat{BPQ} = \varepsilon$$

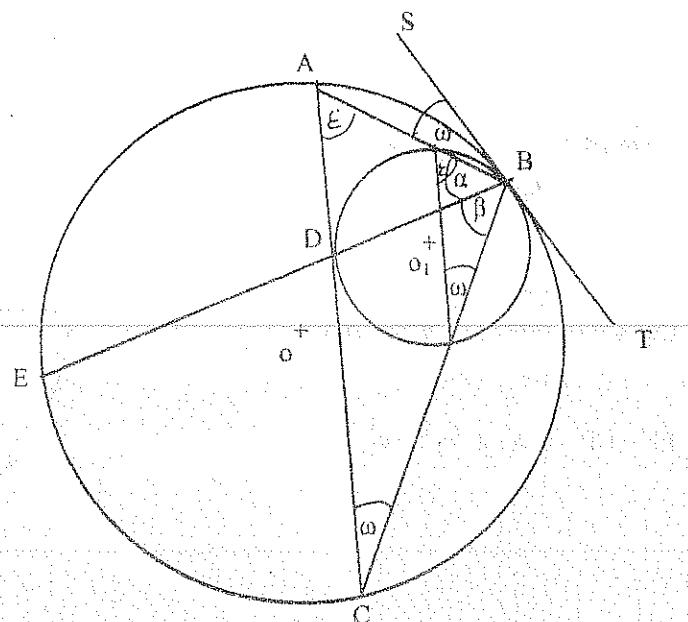
$$\therefore \overline{PQ} \parallel \overline{AC}$$

$$\Rightarrow \widehat{PD} = \widehat{DQ} = \alpha = \beta$$

$$T_2) 1. \widehat{\omega} = \frac{\widehat{AB}}{2} = 30^\circ$$

$$2. \alpha = \beta = \frac{\widehat{AE}}{2} = 50^\circ$$

$$\therefore X = \omega + \beta = 80^\circ$$



11.-

$$1. \widehat{APD} = \frac{\widehat{AD}}{2} = 60^\circ$$

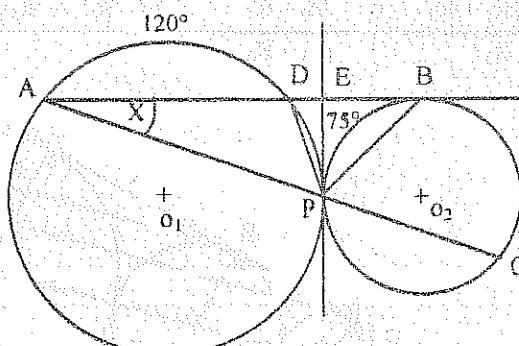
$$2. \widehat{DPE} = \widehat{X} = \frac{\widehat{DP}}{2}$$

$$3. \widehat{EPB} = \widehat{EBP} = \frac{\widehat{PB}}{2} = 37,5^\circ$$

$$4. \widehat{BPC} = \widehat{X} + \widehat{EBP}$$

$$\Rightarrow \widehat{APD} + \widehat{DPE} + \widehat{EPB} + \widehat{BPC} = 180^\circ$$

$$60^\circ + X + 37,5^\circ + X + 37,5^\circ = 180^\circ \quad \therefore X = 22^\circ$$



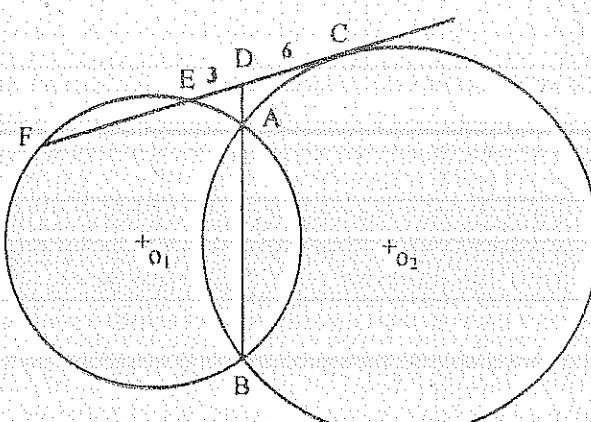
33.-

$$1. DF \times DE = DB \times DA = (3 + EF) \times 3$$

$$2. DC^2 = DB \times DA = 6^2$$

$$\therefore (3 + EF) \times 3 = 6^2$$

$$\Rightarrow EF = 9 \text{ u.}$$



43.-

$$1. \operatorname{Sen} 30^\circ = \frac{r}{8+r} \Rightarrow r = 2,6 \text{ u.}$$

$$2. CO_1^2 = 8^2 + (8 - r)^2 - 2 \times 8 \times (8 - r) \times \cos 30^\circ$$

$$\Rightarrow CO_1 = 4,3 \text{ u.}$$

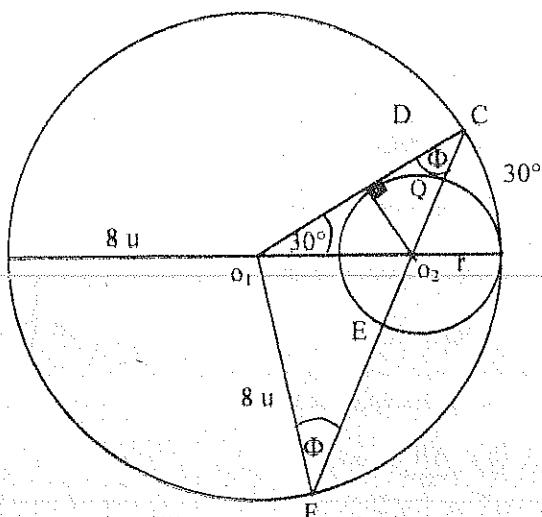
3.- $CQ = CO_1 - r = 1,64 \text{ u.}$

$$4.- \frac{CO_1}{\operatorname{Sen} 30^\circ} = \frac{8 + r}{\operatorname{Sen} \phi}$$

$$\Rightarrow \phi = 38,3^\circ$$

$$5.- \cos \phi = \frac{CF}{8} \Rightarrow CF = 12,5 \text{ u.}$$

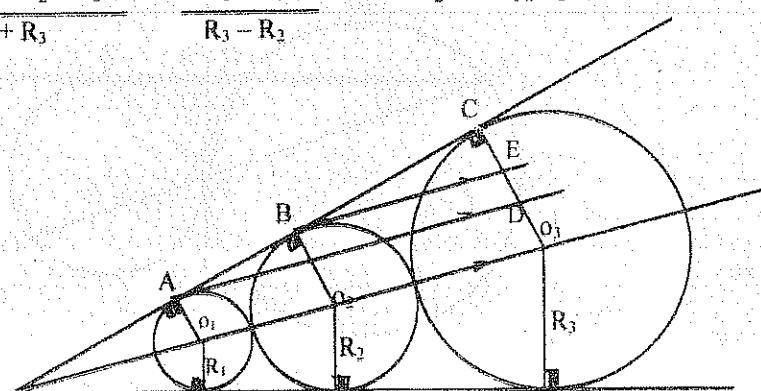
6.- $EF = CF - CO_2 - r = 5,6 \text{ u.}$



49.-

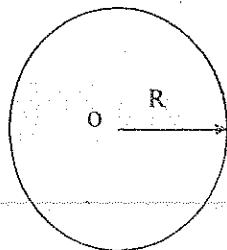
1.- $\Delta ACD \sim \Delta BCE$ (A,A,)

$$\frac{R_1 + 2R_2 + R_3}{R_1 + R_3} = \frac{R_3 - R_1}{R_3 - R_2} \Rightarrow R_2^2 = R_1 \times R_3$$



5.10. ÁREAS CIRCULARES

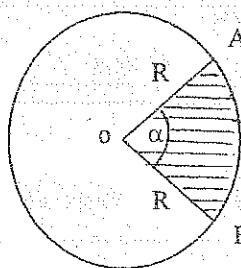
5.10.1. ÁREA DE UN CÍRCULO



$$S_{\Theta}(O, R) = \pi \times R^2$$

5.10.2. SECTOR CIRCULAR

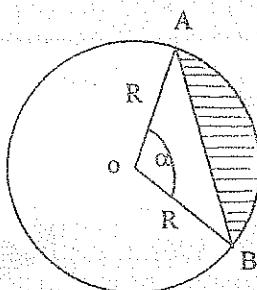
Es el área comprendida entre un arco y los radios correspondientes a los extremos de dicho arco.



$$S_{\text{sector } AB} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} \quad III.$$

5.10.3. SEGMENTO CIRCULAR

Es el área comprendida entre un arco y la cuerda correspondiente a los extremos de dicho arco.



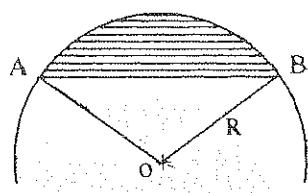
$$S_{\text{segmento } AB} = S_{\text{sector } AB} - S_{\triangle OAB}$$

$$S_{\text{segmento } AB} = \frac{\pi R^2 \alpha}{360} - \frac{R^2 \sin \alpha}{2}$$

$$S_{\text{segmento } AB} = \frac{R^2}{2} \left(\frac{\pi \alpha}{180} - \sin \alpha \right) \quad III.$$

5.10.1. EJERCICIOS

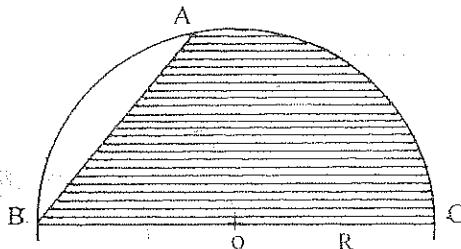
1.-



$$H) AB = 1.7 R$$

$$T) S_{III} = ? f(R) \quad \text{Resp. } 0.56 R^2$$

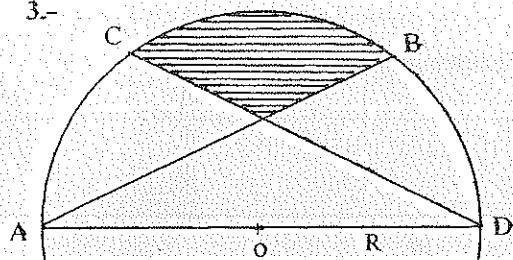
2.-



$$H) AB = 1.2 R$$

$$T) S_{III} = ? f(R) \quad \text{Resp. } 1.4 R^2$$

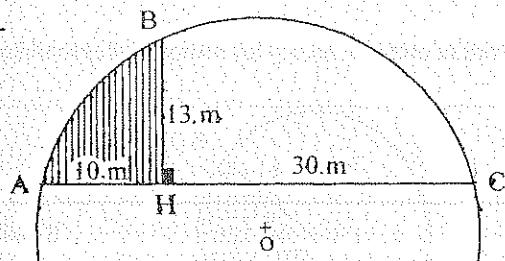
3.-



$$H) \widehat{AC} = \widehat{CB} = \widehat{DB}$$

$$T) S_{III} = ? f(R) \quad \text{Resp. } 0.235 R^2$$

4.-

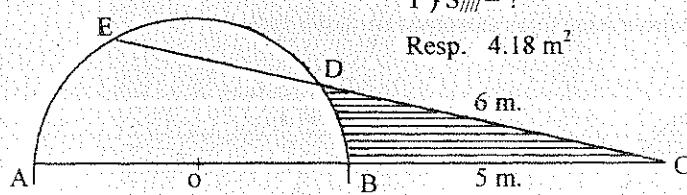


$$T) S_{III} = ? \quad \text{Resp. } 83.75 \text{ m}^2$$

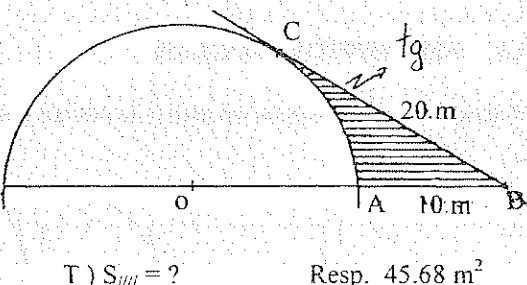
5.-

$$H) AO = OB = R = 2.5 \text{ m.}$$

$$T) S_{III} = ? \\ \text{Resp. } 4.18 \text{ m}^2$$



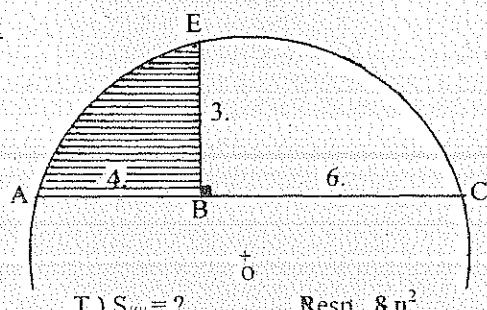
6.-



$$T) S_{III} = ?$$

$$\text{Resp. } 45.68 \text{ m}^2$$

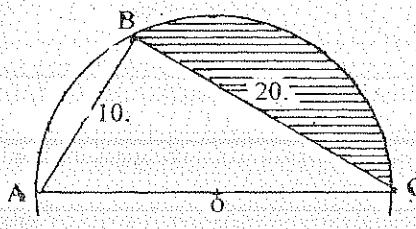
7.-



$$T) S_{III} = ?$$

$$\text{Resp. } 8 \text{ u}^2$$

8.-



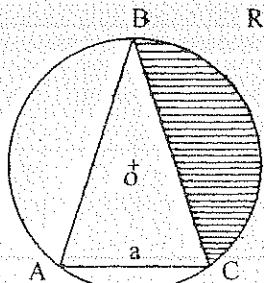
$$T) S_{III} = ?$$

$$\text{Resp. } 88.38$$

$$H) AB = BC = 2a$$

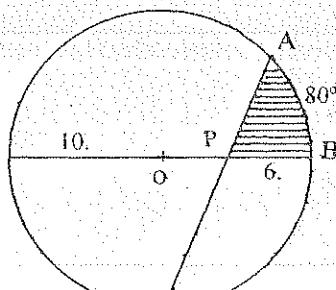
$$T) S_{III} = ? f(a)$$

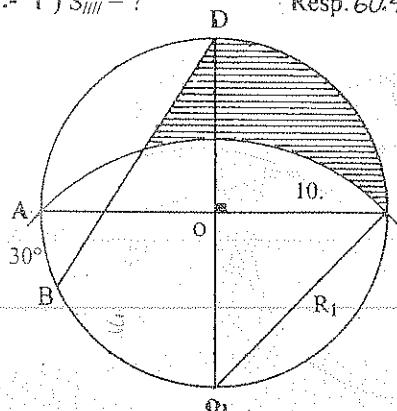
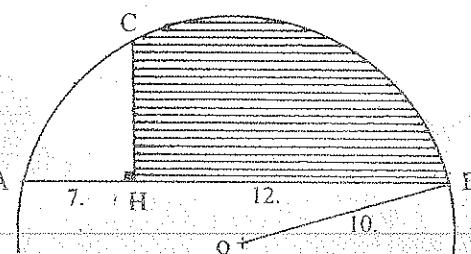
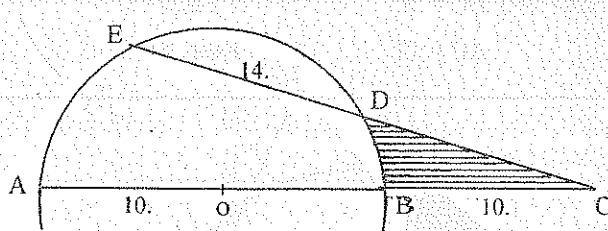
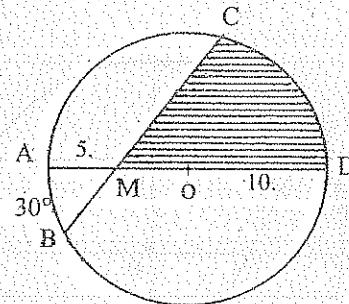
$$\text{Resp. } 1.05 a^2$$



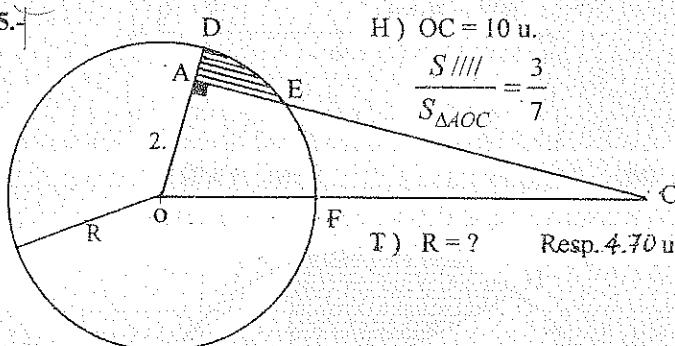
$$T) S_{III} = ?$$

$$\text{Resp. } 50.25 a^2$$

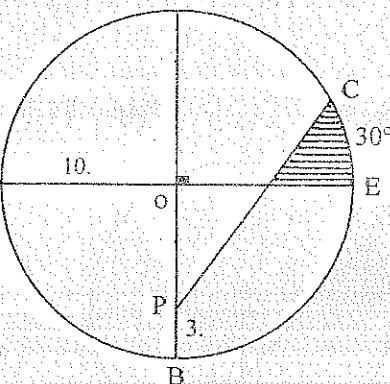


11.- T) $S_{III} = ?$ Resp. 60.47 u^2 12.- T) $S_{III} = ?$ Resp. 64.81 u^2 13.- T) $S_{III} = ?$ Resp. 20.49 u^2 14.- T) $S_{III} = ?$ Resp. 92.17 u^2

15.-

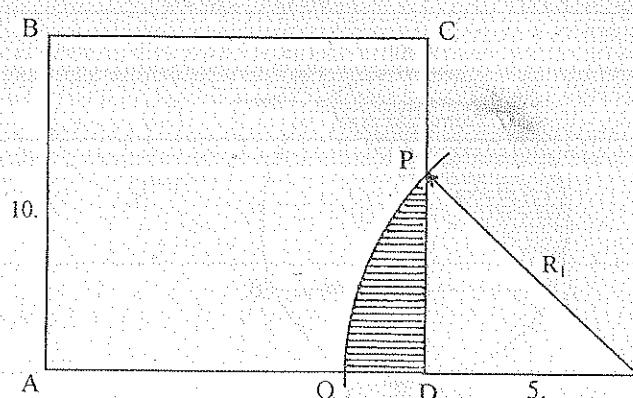
H) $OC = 10 \text{ u.}$

$$\frac{S_{III}}{S_{\Delta AOC}} = \frac{3}{7}$$

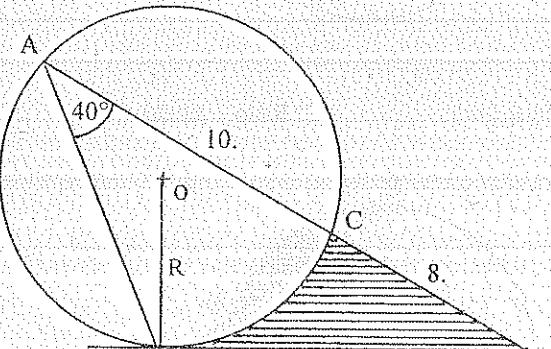
T) $R = ?$ Resp. 4.70 u. 16.- T) $S_{III} = ?$ Resp. 16.64 u^2

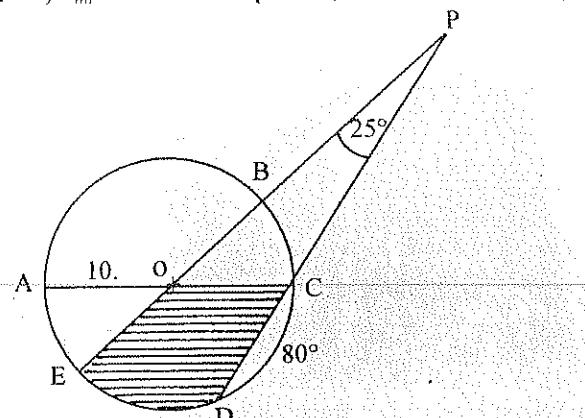
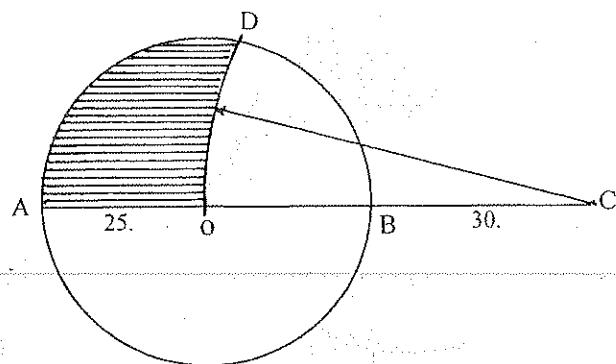
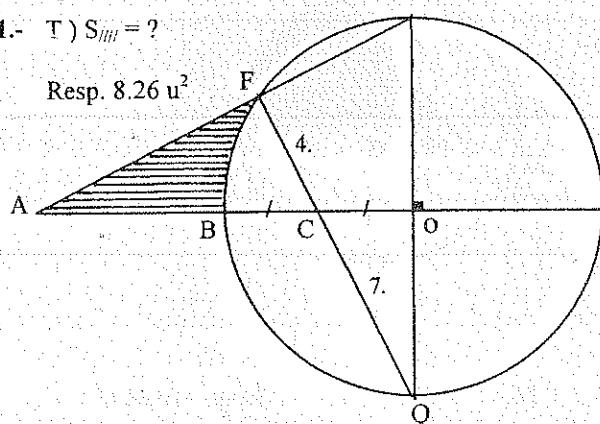
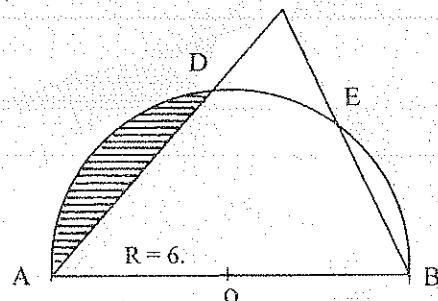
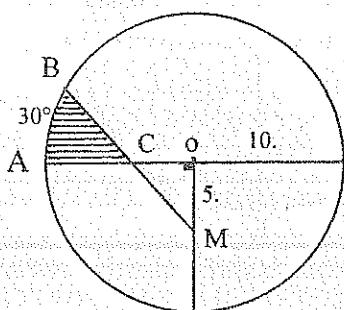
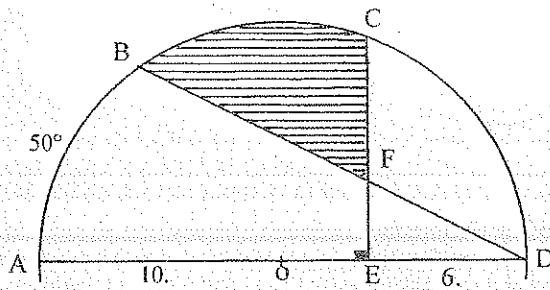
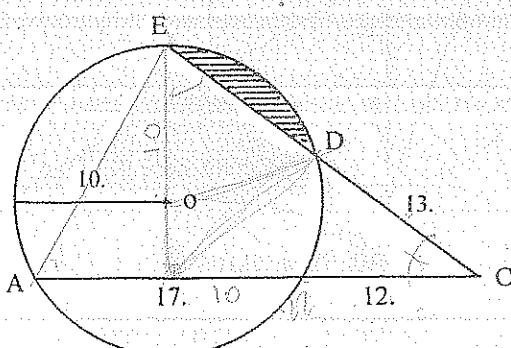
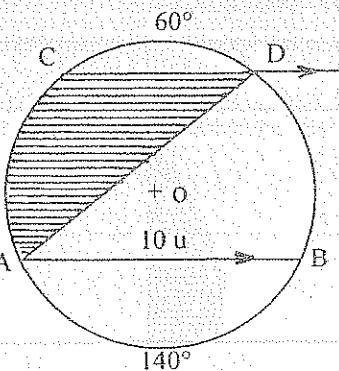
17.- H) ABCD Cuadrado

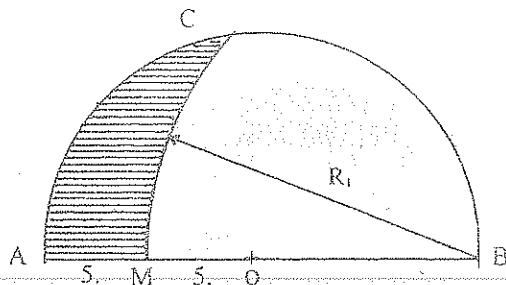
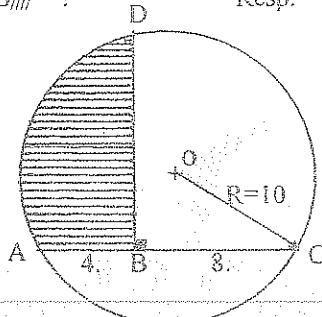
$$S_{III} = \frac{S_{ABCD}}{7}$$

T) $R_1 = ?$ Resp. 8.18 

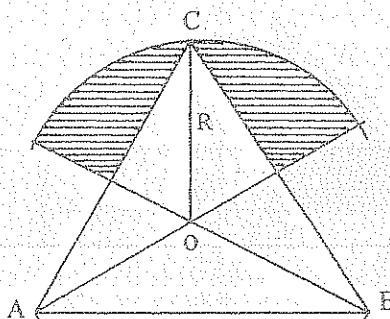
18.-

H) \overline{BD} Tang. $\odot(O, R)$ T) $S_{III} = ?$ Resp. 21.03 u^2

19.- T) $S_{III} = ?$ Resp. 16.20 u^2 20.- T) $S_{III} = ?$ Resp. 5.3849 u^2 21.- T) $S_{III} = ?$ Resp. 8.26 u^2 22.- H) $BC = 8.$ $AC = 12.$ T) $S_{III} = ?$ Resp. 14.44 u^2 23.- T) $S_{III} = ?$ Resp. 5.33 u^2 24.- T) $S_{III} = ?$ Resp. 43.82 u^2 25.- T) $S_{III} = ?$ Resp. 26.00 u^2 26.- T) $S_{III} = ?$ Resp. 23.7 u^2 

27.- T) $S_{III} = ?$ Resp. 40.6 u^2 28.- T) $S_{III} = ?$ Resp. 184.77 u^2 

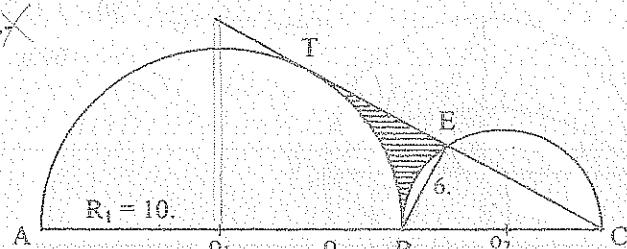
29.-

H) $\triangle ABC$ Equilátero de lado 20 m.

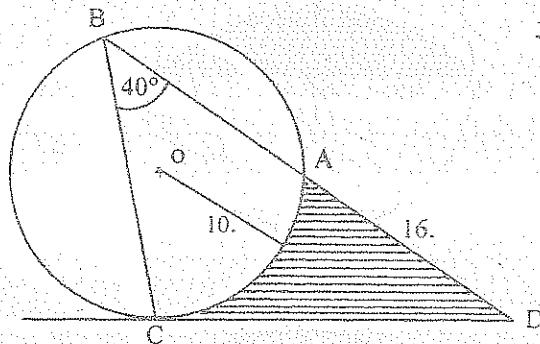
O su Circuncentro

T) $S_{III} = ?$ Resp. 81.76 m^2

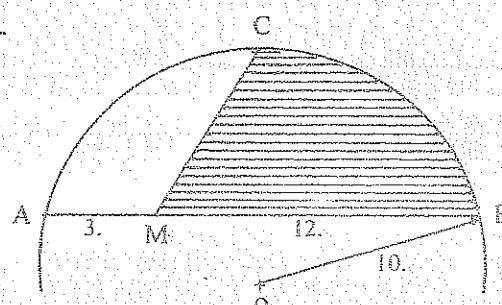
30. X

H) $\odot(O_1, 10)$ Tang $\odot(O_2, R_2)$ \overline{CT} Tang $\odot(O_2, R_2)$ T) $S_{III} = ?$ Resp. 13.06 u^2

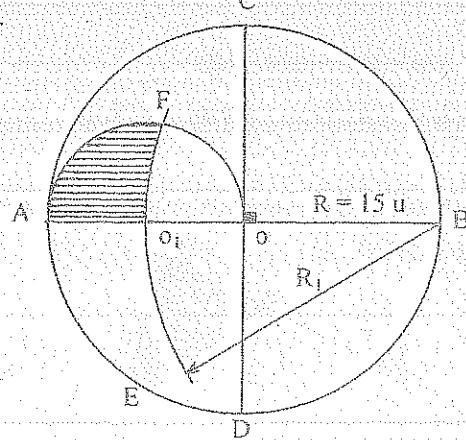
31.-

H) \overline{DC} Tang $\odot(O, 10)$ T) $S_{III} = ?$ Resp. 76.77 u^2

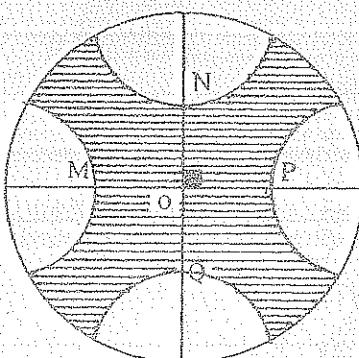
32.-

H) $\widehat{AC} = \widehat{CB}$ T) $S_{III} = ?$ Resp. 254 u^2

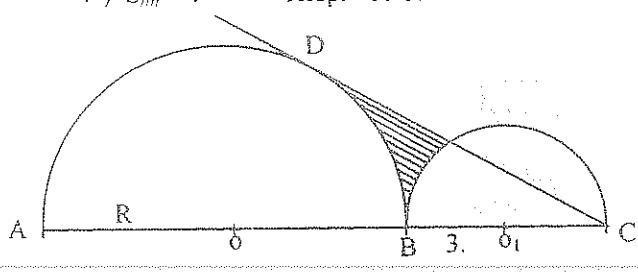
33.-

T) $S_{III} = ?$ Resp. 47.34 u^2

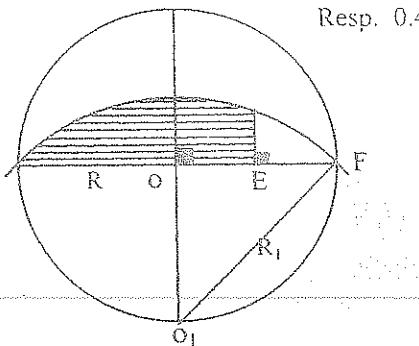
34.-

H) M, N, P y Q puntos medios de los radios. $R = 10 \text{ u}$.T) $S_{III} = ?$ Resp. 173.87 u^2

35.- H) $\overline{DC} = 14.84 \text{ u}$. Tang $\odot(O, R)$
 T) $S_{III} = ?$ Resp. 11.65 u^2



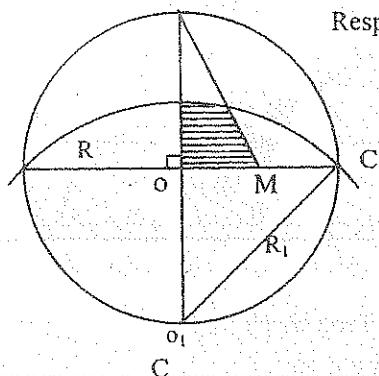
36.- H) $OE = EF$
 T) $S_{III} = ? f(R)$
 Resp. $0.47 R^2$



37.- H) $OM = MC = 5 \text{ u}$

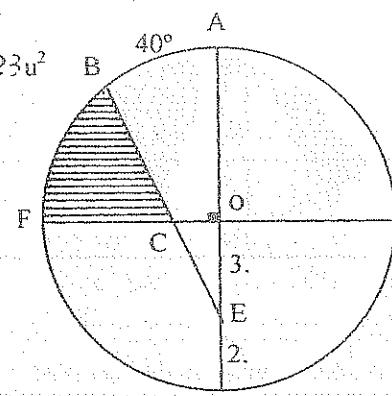
T) $S_{III} = ?$

Resp. 12.57 u^2

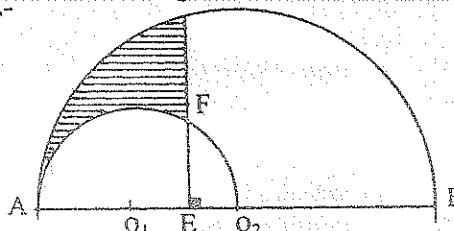


38.- T) $S_{III} = ?$

Resp. 8.23 u^2



39.-

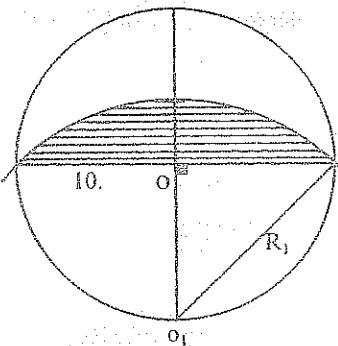


H) $AO_2 = O_2B = 10 \text{ cm}$
 $EO_2 = 2.5 \text{ cm}$

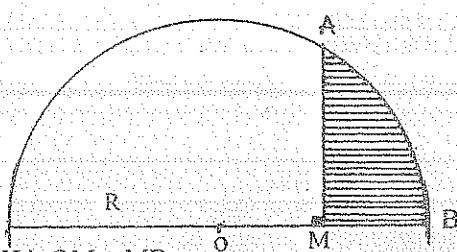
T) $S_{III} = ?$ Resp. 22.25 cm^2

40.- T) $S_{III} = ?$

Resp. 57 u^2



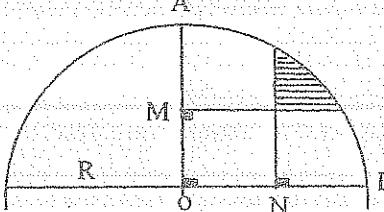
41.-



H) $OM = MB$

T) $S_{III} = ? f(R)$ Resp. $0.307 R^2$

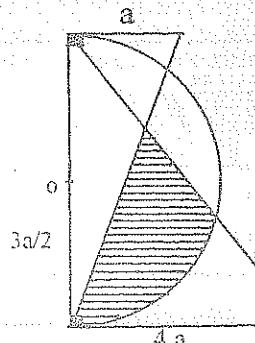
42.-



H) $AM = MO = ON = ND$

T) $S_{III} = ? f(R)$ Resp. $0.22 R^2$

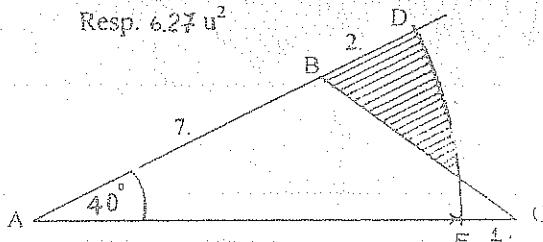
43.-

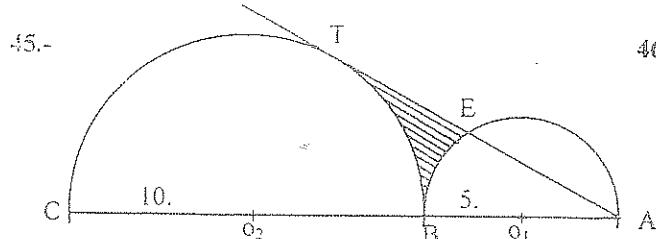


T) $S_{III} = ? f(a)$
 Resp. $1.97 a^2$

44.- T) $S_{III} = ? f(R)$

Resp. 6.27 u^2

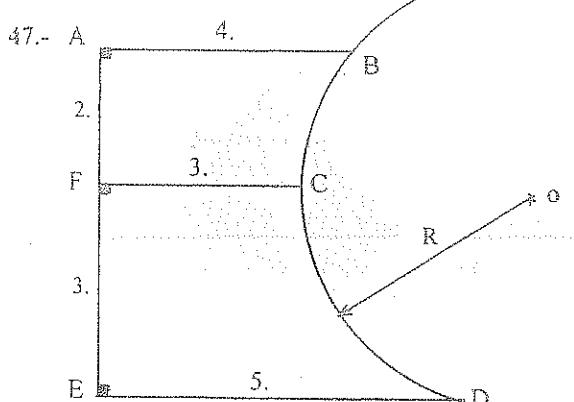
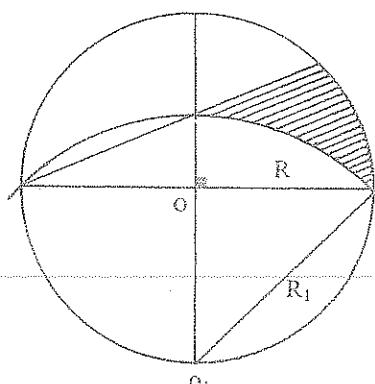




H) $\odot(O_1, 10)$ Tang $\odot(O_2, 5)$
 \overline{AT} Tang. $\odot(O_2, 10)$

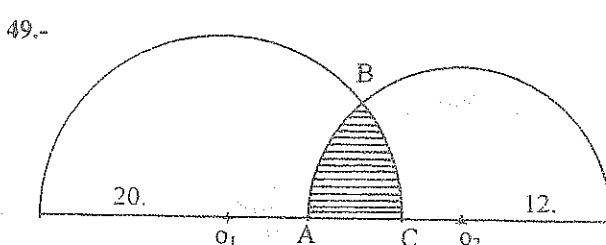
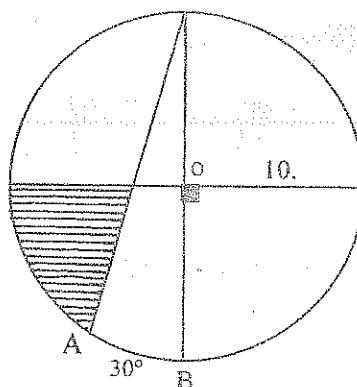
T) $S_{III} = ?$ Resp. 10.13 u^2

46.- T) $S_{III} = ? f(R)$ Resp. $0.25 R^2$



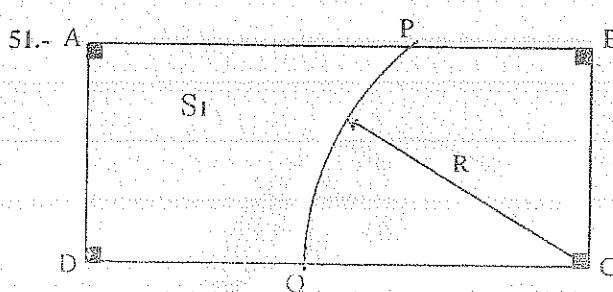
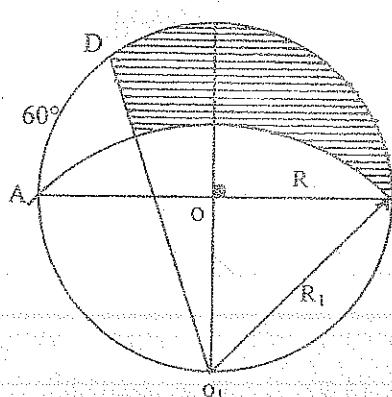
T) Área de la figura ABDE
 Resp. 22.03 u^2

48.- T) $S_{III} = ?$ Resp. 40.75 u^2



H) $O_1 O_2 = 24 \text{ u}$
 T) $S_{III} = ?$ Resp. 55.41 u^2

50.- T) $S_{III} = ? f(R)$ Resp. $0.28 R^2$

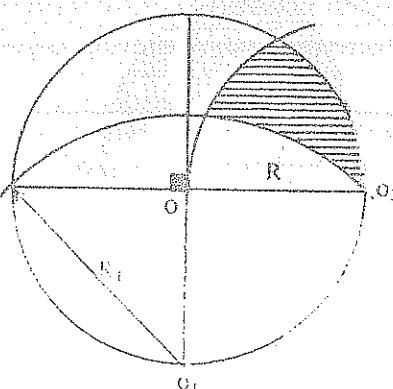


H) $AB = 30 \text{ u}$
 $AD = 10 \text{ u}$

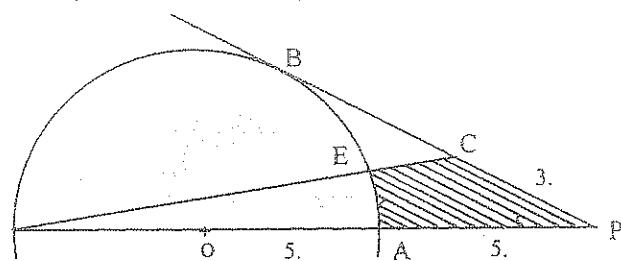
$$\frac{S_I}{S_{ABCD}} = \frac{1}{2}$$

Resp. 16.13 u

52.- T) $S_{III} = ? f(R)$ Resp. $0.34 R^2$



53.- T) $S_{III} = ?$ Resp. 5.25 u^2

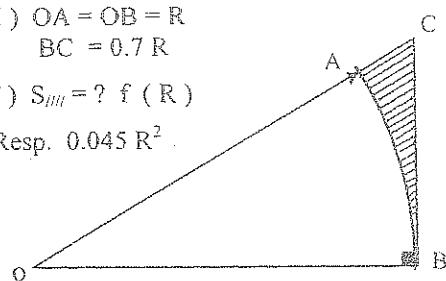


54.- H) $OA = OB = R$

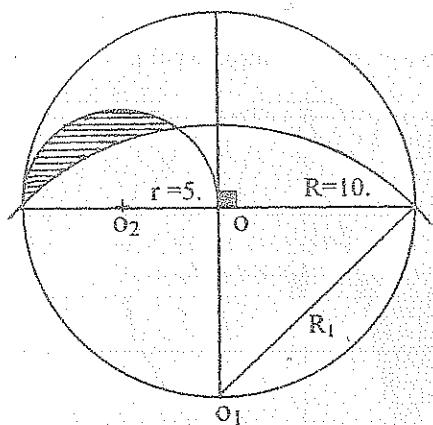
$BC = 0.7 R$

T) $S_{III} = ? f(R)$

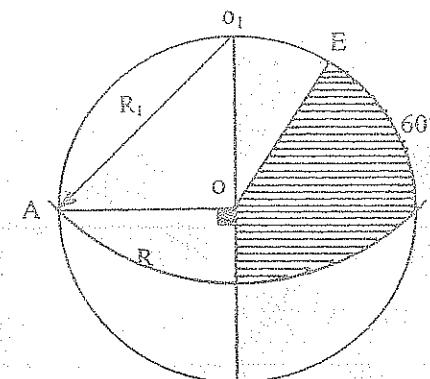
Resp. $0.045 R^2$



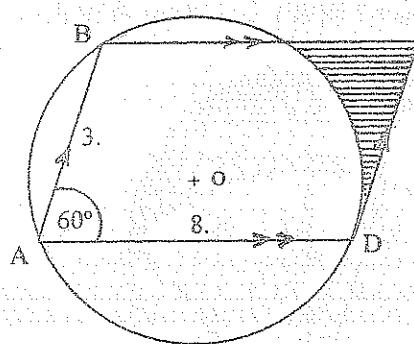
55.- T) $S_{III} = ?$ Resp. 13.38 u^2



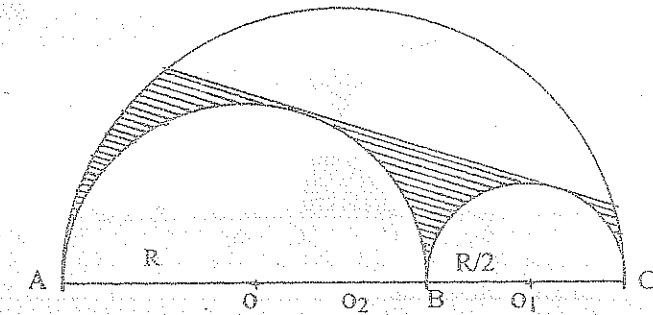
56.- T) $S_{III} = ? f(R)$ Resp. $0.809 R^2$



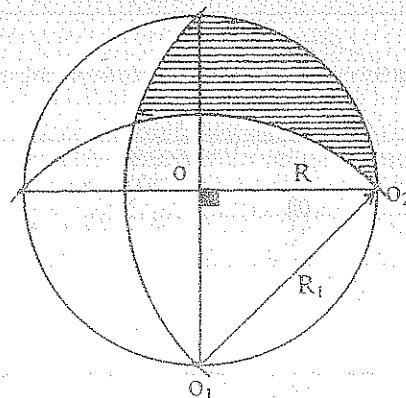
57.- T) $S_{III} = ?$ Resp. 3.30 u^2



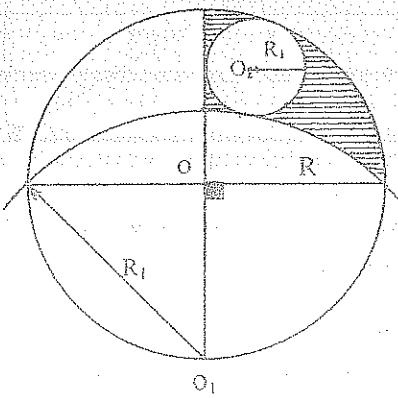
58.- T) $S_{III} = ? f(R)$ Resp. $0.4 R^2$



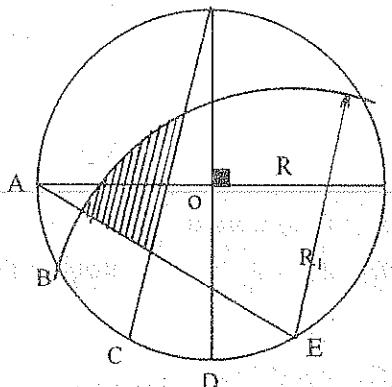
59.- T) $S_{III} = ? f(R)$ Resp. $0.627 R^2$



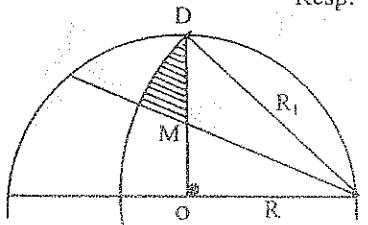
60.- T) $S_{III} = ? f(R)$ Resp. $0.26 R^2$



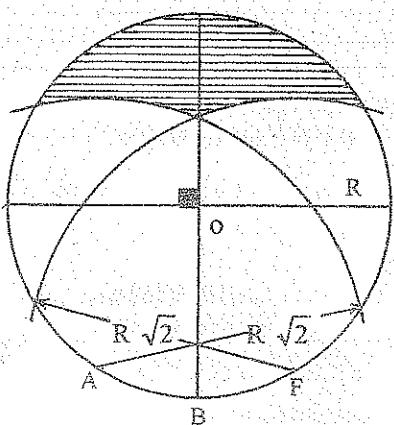
- 61.- H) $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = 30^\circ$
 T) $S_{III} = ? f(R)$ Resp. $0.136 R^2$



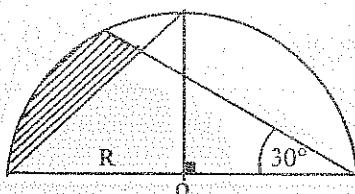
- 62.- H) $DM = MO$
 T) $S_{III} = ? f(R)$ Resp. $0.072 R^2$



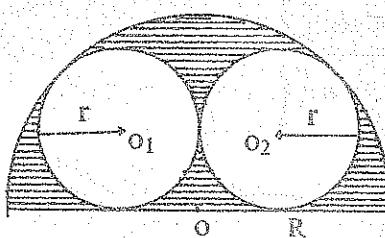
- 64.- H) $AB = BF = 30^\circ$
 T) $S_{III} = ? f(R)$ Resp. $0.372 R^2$



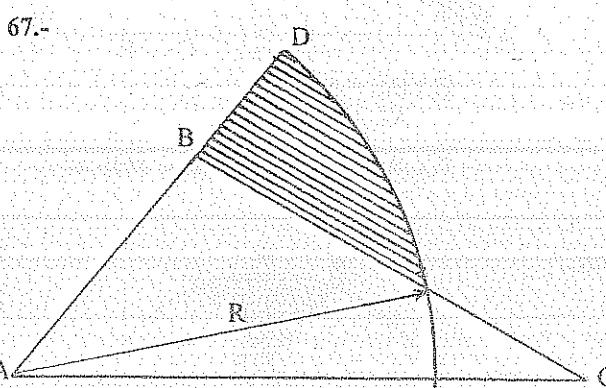
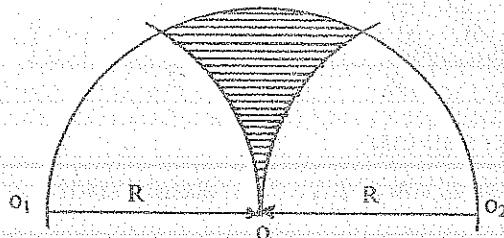
- 63.- T) $S_{III} = ? f(R)$ Resp. $0.224 R^2$



- 65.- T) $S_{III} = ? f(R)$ Resp. $0.492 R^2$



- 66.- T) $S_{III} = ? f(R)$ Resp. $0.34 R^2$

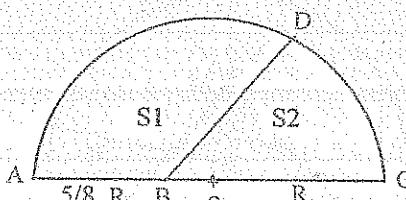


$$\begin{aligned} H) \quad & AB = 35 \text{ m.} \\ & BC = 66 \text{ m.} \\ & AC = 77 \text{ m.} \end{aligned}$$

$$\frac{S_{III}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3}{7}$$

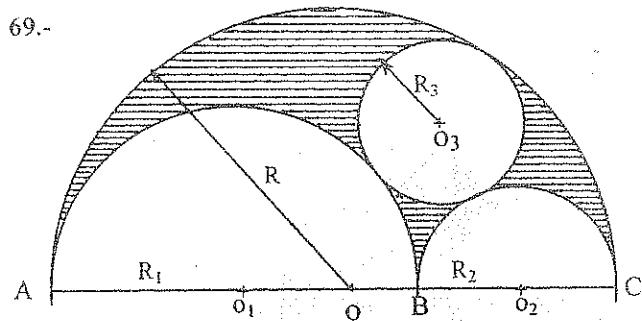
- T) $R = ?$ Resp. 51.6 m.

68.-



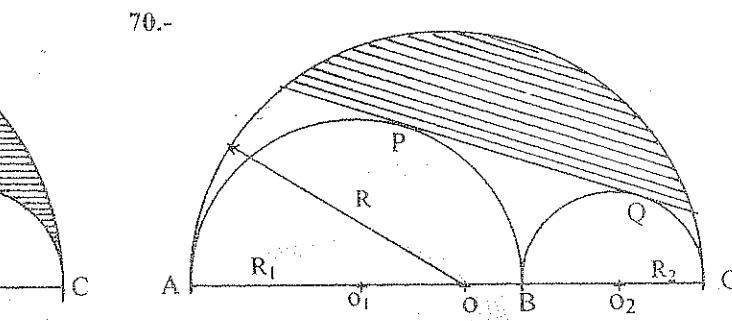
$$H) \quad \frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{2}$$

- T) $\widehat{DC} = ?$ Resp. 54.5°



$$H) R_1 = 2 R_2$$

$$T) S_{III} = ? f(R)$$

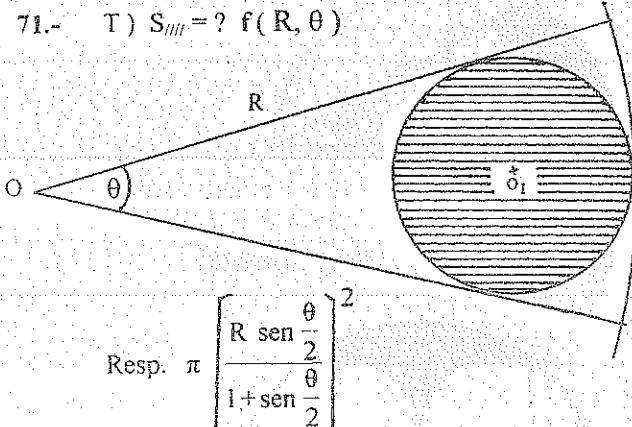


$$H) \overline{PQ} \text{ Tang. Común} \quad T) S_{III} = ? f(R)$$

$$R_1 = 2 R_2$$

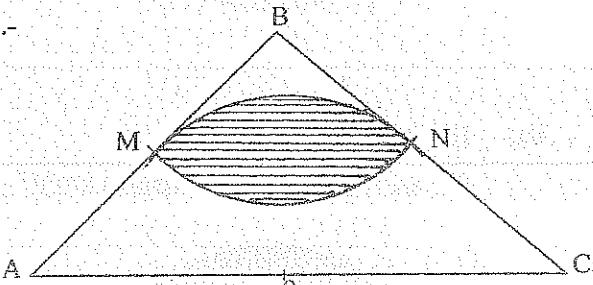
$$\text{Resp. } 0.178 R^2$$

$$71.- T) S_{III} = ? f(R, \theta)$$



$$\text{Resp. } \pi \left[\frac{R \sin \frac{\theta}{2}}{1 + \sin \frac{\theta}{2}} \right]^2$$

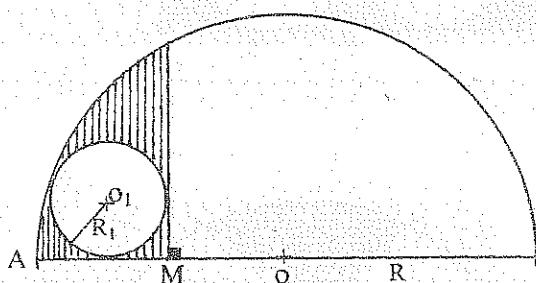
$$72.-$$



$$H) AB = BC = a \\ M \text{ y } N \text{ Puntos Medios}$$

$$T) S_{III} = ? f(a) \quad \text{Resp. } 0.143 a^2$$

$$73.-$$

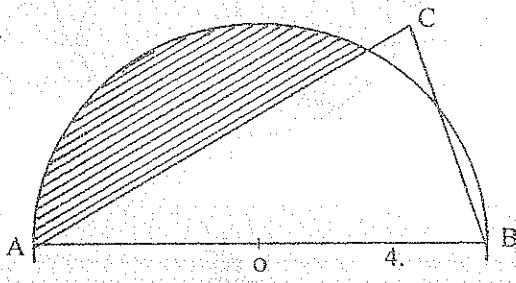


$$H) AM = MO$$

$$T) S_{III} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.14 R^2$$

$$74.-$$

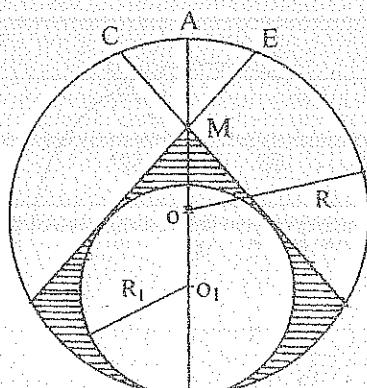


$$H) BC = 4 \text{ m.} \\ AC = 7 \text{ m.}$$

$$T) S_{III} = ?$$

$$\text{Resp. } 9.83 \text{ m}^2$$

$$75.-$$

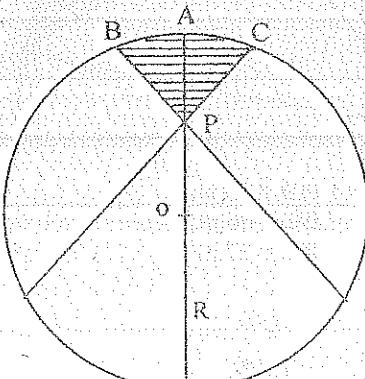


$$H) \widehat{AC} = \widehat{AE} = 20^\circ \\ AM = MO$$

$$T) S_{III} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.363 R^2$$

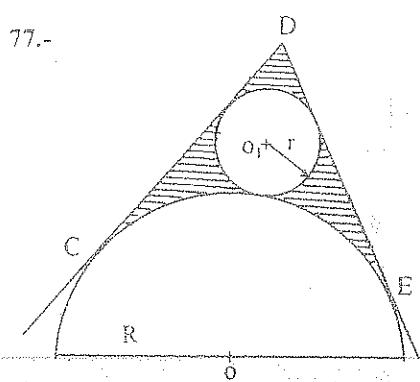
$$76.-$$



$$H) \widehat{AB} = \widehat{AC} = 20^\circ \\ AP = 2/3 R$$

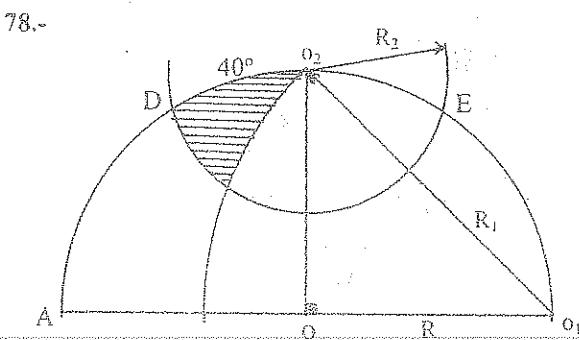
$$T) S_{III} = ? f(R)$$

$$\text{Resp. } 0.24 R^2$$

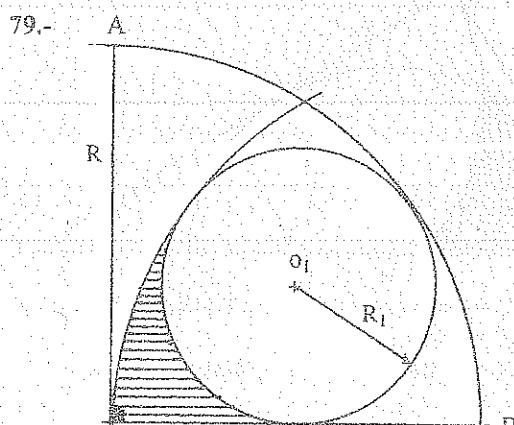


H) \overline{DC} y \overline{DE} Tang. $\odot(O_1, r)$
 $\widehat{CDE} = 60^\circ$

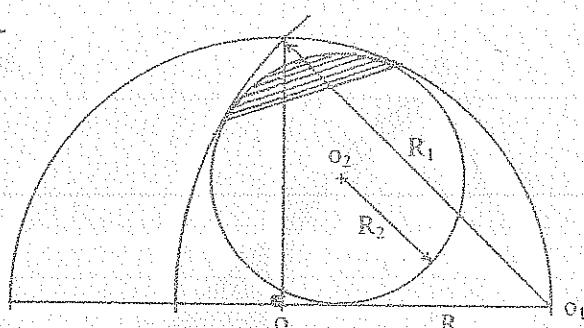
T) $S_{III} = ? f(R)$ Resp. $0.33 R^2$



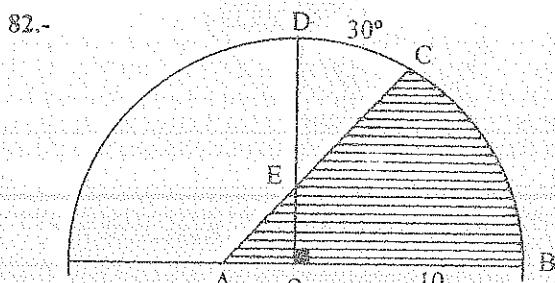
T) $S_{III} = ? f(R)$ Resp. $0.16 R^2$



T) $S_{III} = ? f(R)$ Resp. $0.072 R^2$

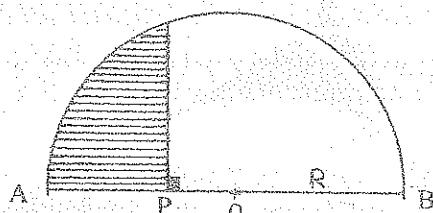


T) $S_{III} = ? f(R)$ Resp. $0.05 R^2$



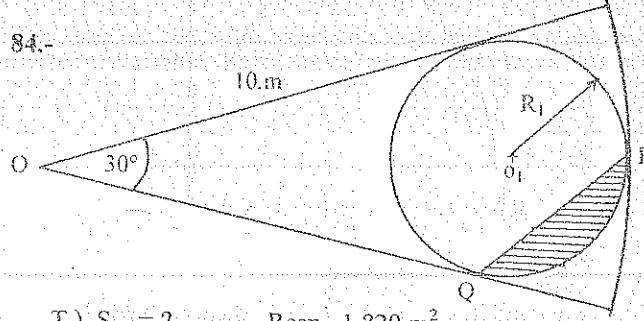
$$H) \frac{S_{III}}{S_T} = \frac{4}{7}$$

T) $ED = ?$ Resp. 4.51

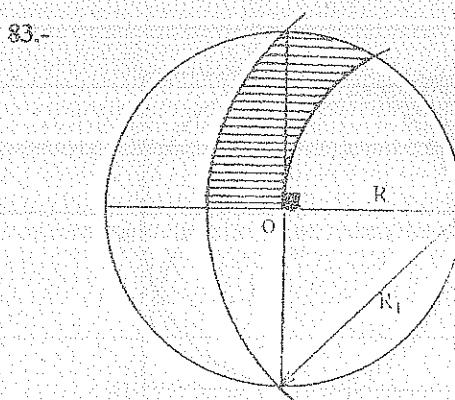


$$H) \frac{AB}{AP} = \frac{5}{2}$$

T) $S_{III} = ? f(R)$ Resp. $0.57 R^2$

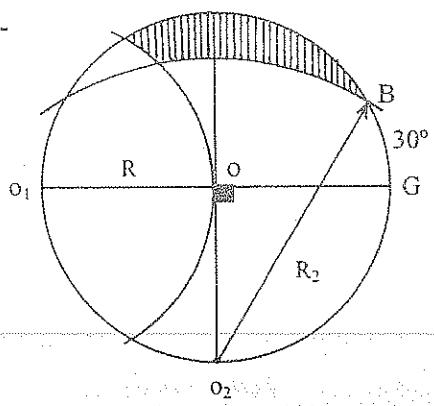


T) $S_{III} = ?$ Resp. 1.829 m^2



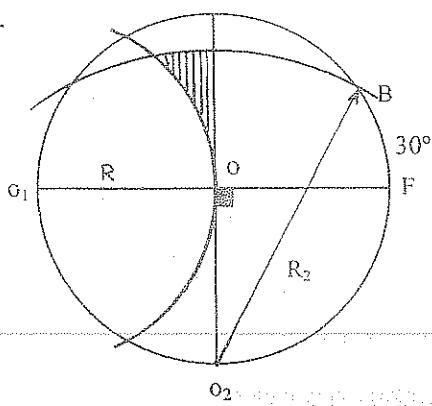
T) $S_{III} = ? f(R)$ Resp. $0.25 R^2$

85.-



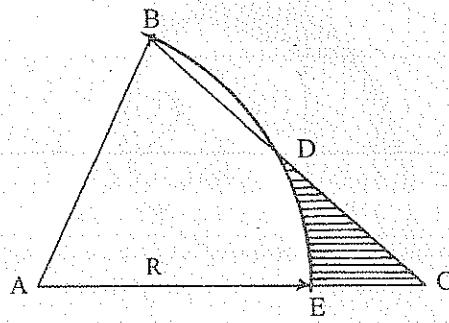
T) $S_{III} = ? f(R)$ Resp. $0.288 R^2$

86.-



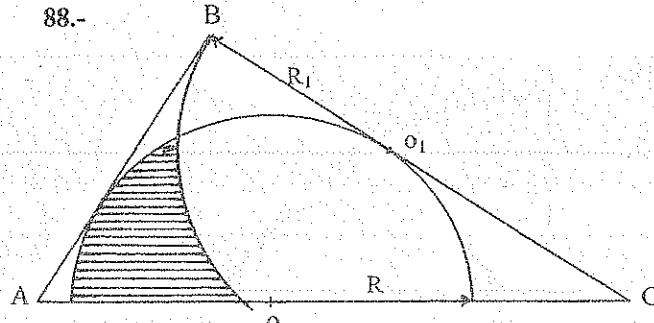
T) $S_{III} = ? f(R)$ Resp. $0.068 R^2$

87.-



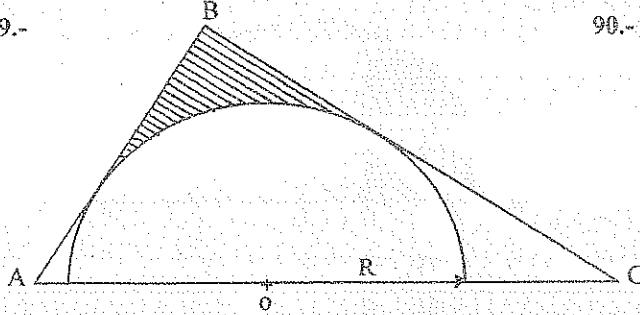
H) $AB = 5 \text{ m.}$
 $BC = 8 \text{ m.}$
 $AC = 7 \text{ m.}$
T) $S_{III} = ?$
Resp. 1.74 m^2

88.-



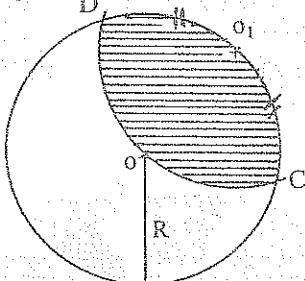
H) $AC = 10 \text{ m.}$
 $BC = 9 \text{ m.}$
 $AB = 7 \text{ m.}$
T) $S_{III} = ?$
Resp. 4.013 m^2

89.-



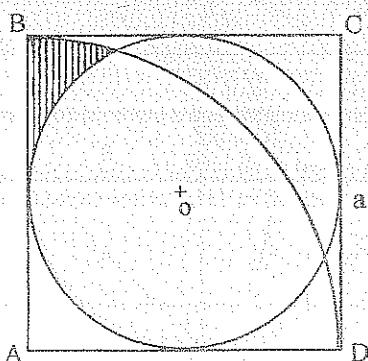
H) $AC = 10 \text{ m.}$
 $BC = 7 \text{ m.}$
 $AB = 5.5 \text{ m.}$
T) $S_{III} = ?$
Resp. 0.964 m^2

90.-



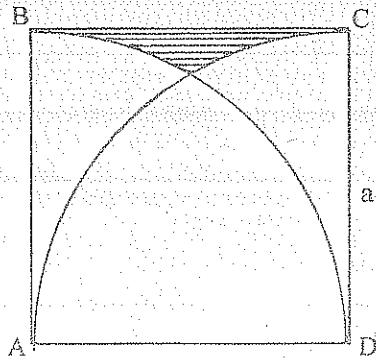
H) $DO_1 = 30^\circ$
T) $S_{III} = ? f(R)$ Resp. $0.64 R^2$

91.-

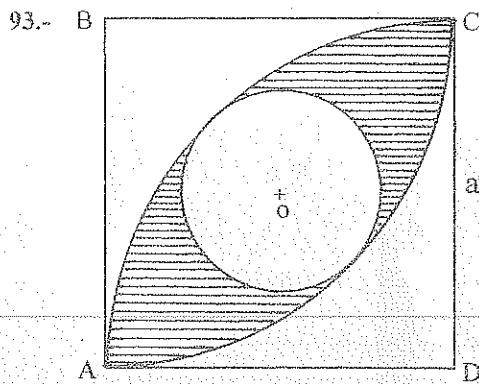


H) ABCD Cuadrado
T) $S_{III} = ? f(a)$ Resp. $0.046 a^2$

92.-

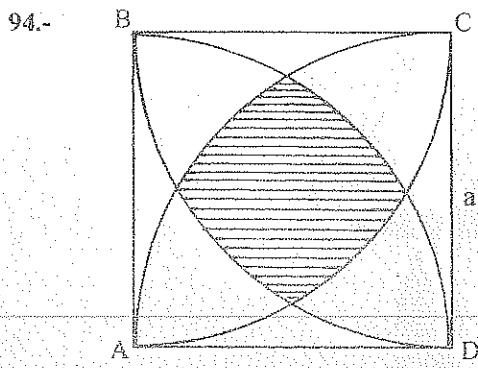


H) ABCD Cuadrado
T) $S_{III} = ? f(a)$ Resp. $0.042 a^2$



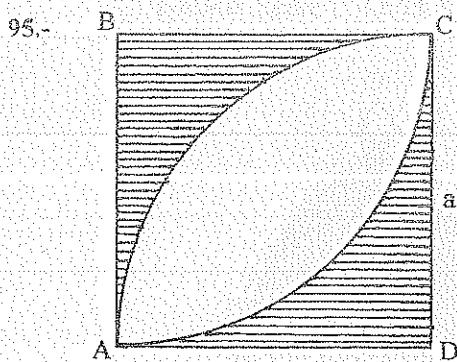
H) ABCD Cuadrado

T) $S_{III} = ? f(a)$ Resp. $0.301 a^2$



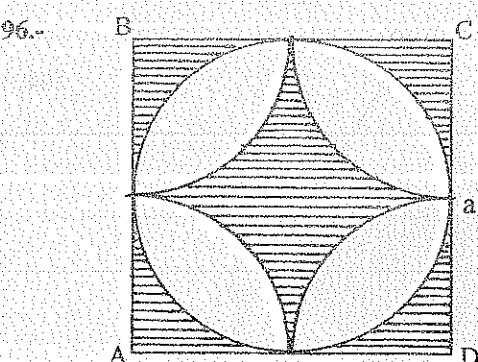
H) ABCD Cuadrado

T) $S_{III} = ? f(a)$ Resp. $0.315 a^2$



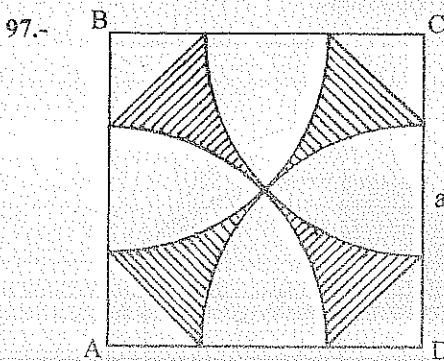
H) ABCD Cuadrado

T) $S_{III} = ? f(a)$ Resp. $0.429 a^2$



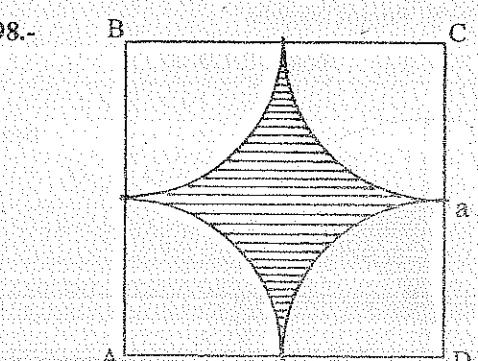
H) ABCD Cuadrado

T) $S_{III} = ? f(a)$ Resp. $0.47 a^2$



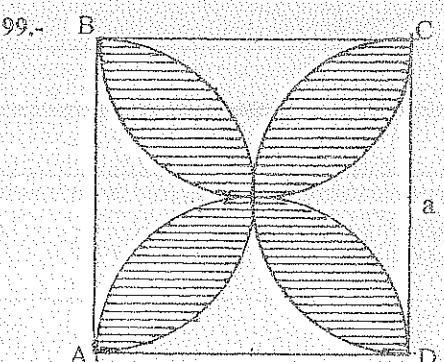
H) ABCD Cuadrado

T) $S_{III} = ? f(a)$ Resp. $0.257 a^2$



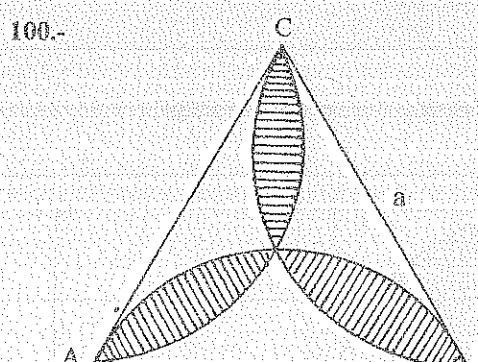
H) ABCD Cuadrado

T) $S_{III} = ? f(a)$ Resp. $0.215 a^2$



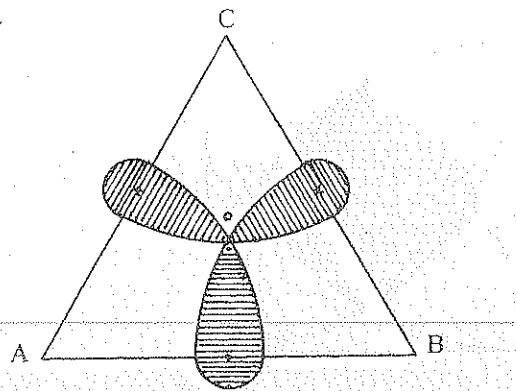
H) ABCD Cuadrado

T) $S_{III} = ? f(a)$ Resp. $0.571 a^2$

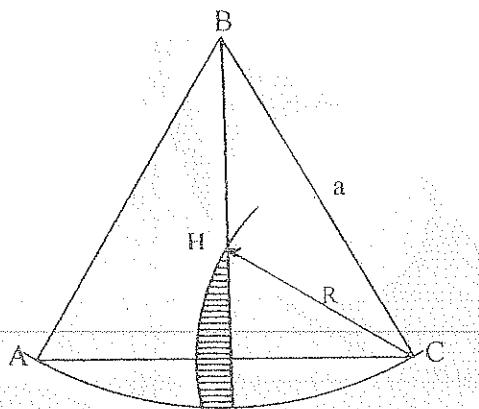
H) $\triangle ABC$ Equilátero

T) $S_{III} = ? f(a)$ Resp. $0.181 a^2$

101.-

H) ΔABC Equilátero de lado a T) $S_{III} = ? f(a)$ Resp. $0.119 a^2$

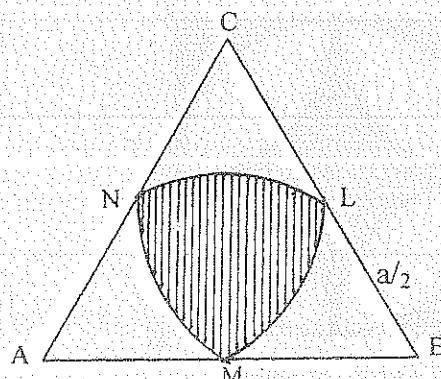
102.-

H) ΔABC Equilátero

H Ortocentro

T) $S_{III} = ? f(a)$ Resp. $0.024 a^2$

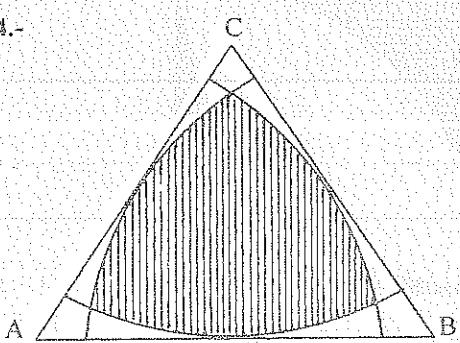
103.-

H) ΔABC Equilátero

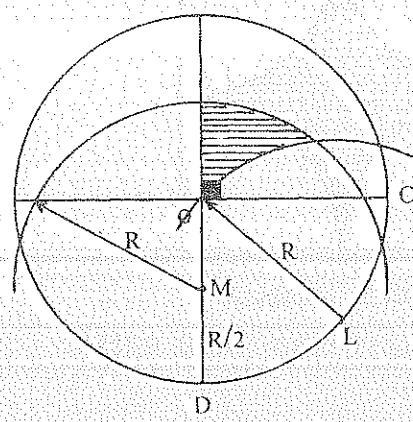
L, M y N Puntos Medios

T) $S_{III} = ? f(a)$ Resp. $0.176 a^2$

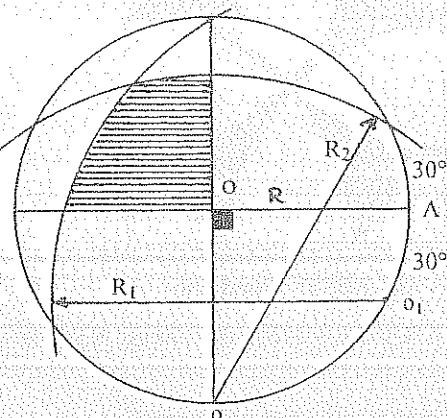
104.-

H) ΔABC EquiláteroT) $S_{III} = ? f(a)$ Resp. $0.344 a^2$

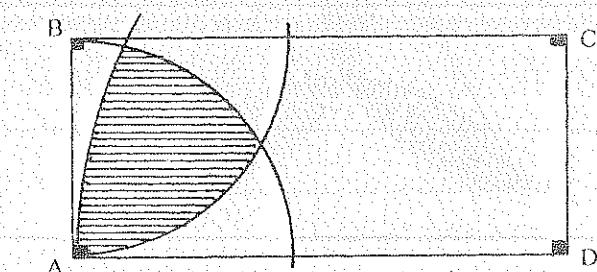
105.-

H) $\widehat{DL} = \widehat{LC}$ T) $S_{III} = ? f(R)$ Resp. $0.147 R^2$

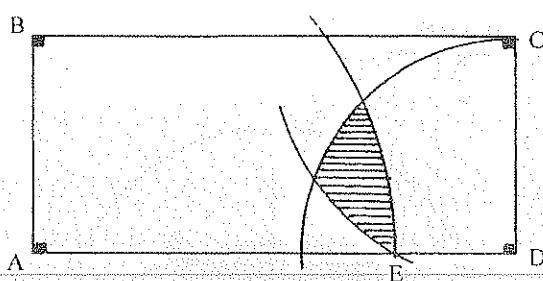
106.-

T) $S_{III} = ? f(R)$ Resp. $0.44 R^2$

107.-

H) $AB = 5 \text{ m.}$
 $AD = 10 \text{ m.}$ T) $S_{III} = ?$ Resp. 13.258 m^2

108.-



H) $AB = 6 \text{ m.}$
 $AD = 12 \text{ m.}$
 $ED = 3 \text{ m.}$

T) $S_{\text{III}} = ?$

Resp. 5.912 m^2

109.- Desde un punto se trazan dos tangentes a un círculo de radio 10 m. El ángulo que forman las tangentes es 80° . Determinar el área limitada por las tangentes y el arco de círculo. Resp. $31,84 \text{ m}^2$

110.- Siendo $R = 9 \text{ m.}$ el radio de un sector circular de 30° . ¿Cuánto mide el radio del círculo equivalente al sector circular? Resp. 2.598 m.

111.- El área del círculo inscrito en un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los círculos inscritos en los triángulos parciales que la altura determina sobre la hipotenusa.

112.- Dos círculos de radios $R = 14 \text{ m.}$ y $r = 6 \text{ m.}$ se cortan y la distancia entre sus centros es igual a $d = 10 \text{ m.}$ Hallar el área de su parte común. Resp. 97.96 m^2 .

113.- En el interior de un triángulo equilátero de lado 10 m. hay tres círculos iguales tangentes a los lados del triángulo y mutuamente tangentes entre sí. Hallar el área del triángulo curvilíneo formado por los arcos de los círculos mutuamente tangentes (siendo sus vértices los puntos de tangencia). Resp. 0.54 m^2 .

114.- En un círculo se trazan dos diámetros perpendiculares \overline{AB} y \overline{CD} ; con centro en D, se traza el arco \widehat{AB} y dos cuerdas cualesquiera \overline{DP} y \overline{DQ} , que cortan el arco \widehat{AB} en L y M. Los puntos P y Q se proyectan en el diámetro \overline{AB} en los puntos P' y Q' respectivamente. Demostrar que el área circular $LPMQ$ es equivalente al triángulo $DP'Q'$.

5.10.4.1. EJERCICIOS RESUELTOS

14.-

1.- $S_{\text{III}} = S_{\text{o} \triangle D} + S_{\Delta MOC} = \pi (10)^2 \times \frac{\phi}{360^\circ} + \frac{1}{2} (5 \times 10 \times \text{Sen}(180^\circ - \phi))$

2.- $BM^2 = 5^2 + 10^2 - 2 \times 5 \times 10 \times \text{Cos } 30^\circ$

$\therefore BM = 6.2 \text{ u.}$

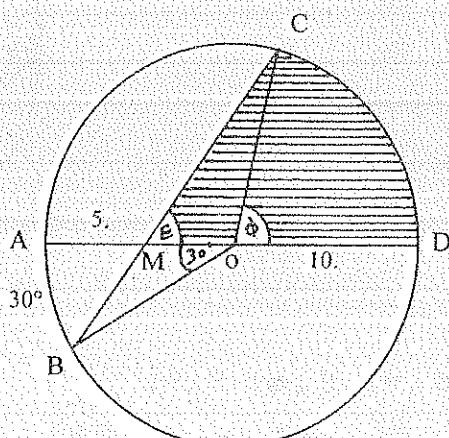
3.- $\frac{BM}{\text{Sen } 30^\circ} = \frac{10}{\text{Sen } \varepsilon}$

$\therefore \varepsilon = 53.7^\circ$

4.- $53.7^\circ = \frac{30^\circ + \widehat{CD}}{2}$

5.- $\Rightarrow \widehat{CD} = 77.4^\circ = \phi$

$\therefore S_{\text{III}} = 92 \text{ u}^2$



36.-

$$1.- S_{III} = S_A \hat{B} + S \Delta ABE = \frac{R_1^2}{2} \left(\frac{\phi \Pi}{180^\circ} - \operatorname{Sen} \phi \right) + \frac{AE \times BE}{2}$$

$$2.- R_1 = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$$

$$3.- CE = \sqrt{R^2 + (\frac{1}{2}R)^2} = \frac{1}{2}R\sqrt{5}$$

$$4.- \operatorname{Tan} \varepsilon = \frac{R}{\frac{1}{2}R} \Rightarrow \hat{\varepsilon} = 63,4^\circ$$

$$5.- BEC = 90^\circ + \varepsilon = 153,4^\circ$$

$$6.- R_1^2 = BE^2 + CE^2 - 2 \times BE \times CE \times \cos BEC$$

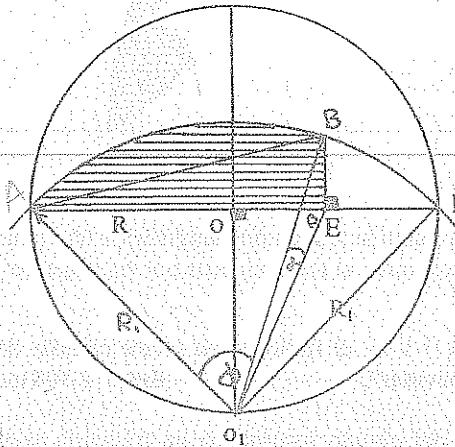
$$\Rightarrow BE = 0,32R$$

$$\frac{R_1}{\operatorname{Sen} 153,4^\circ} = \frac{BE}{\operatorname{Sen} \alpha}$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha} = 5,8^\circ$$

$$7.- \hat{\phi} = 45^\circ + (90^\circ - \hat{\varepsilon}) - \hat{\alpha} = 65,8^\circ$$

$$\Rightarrow S_{III} = 0,47R^2$$



52.-

$$1.- S_{III} = S \Delta ABO_2 + S_A \hat{B} + S_B \hat{O}_2 - S_A \hat{O}_2$$

$$2.- S_{III} = \frac{R_1 R \times \operatorname{Sen} \omega}{2} + \frac{R^2}{2} \left(\frac{\omega \Pi}{180^\circ} - \operatorname{Sen} \omega \right) + \frac{R^2}{2} \left(\frac{\beta \Pi}{180^\circ} - \operatorname{Sen} \beta \right) - \frac{R_1^2}{2} \left(\frac{\alpha \Pi}{180^\circ} - \operatorname{Sen} \alpha \right)$$

$$3.- R_1 = \sqrt{R^2 + R^2} = R\sqrt{2}$$

4.- $\triangle OBO_2$ Equilátero

$$\therefore \beta = 60^\circ \text{ y } BO_2 = R$$

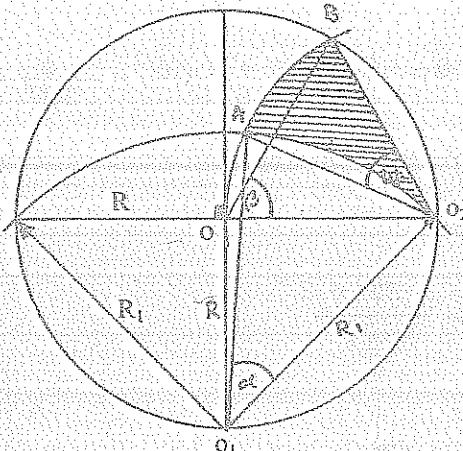
5.- $\triangle AO_1O_2$ Isósceles

$$\therefore \operatorname{Sen} \frac{1}{2}\alpha = \frac{\frac{1}{2}R}{R_1}$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha} = 41,4^\circ \text{ y } AO_2 = R$$

$$6.- \hat{\omega} = 60^\circ - (90^\circ - \frac{1}{2}\hat{\alpha} - 45^\circ) = 35,7^\circ$$

$$\therefore S_{III} = 0,34R^2$$

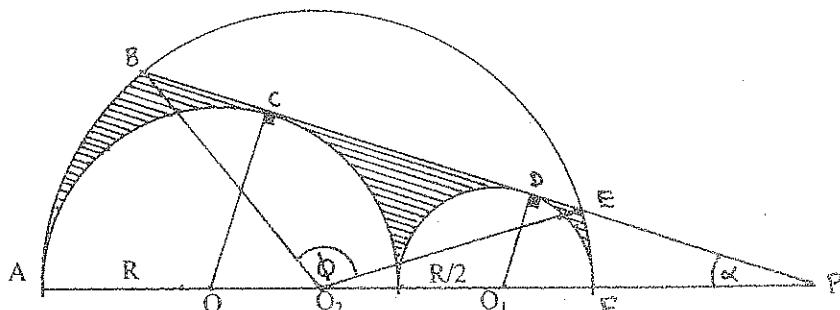


58.-

$$1.- S_{III} = S_A \hat{F} - S_B \hat{E} - S_A \hat{T} - S_T \hat{F}$$

$$2.- S_{III} = \frac{\Pi R_2^2}{2} + \frac{R_2^2}{2} \left(\frac{\phi \Pi}{180^\circ} - \operatorname{Sen} \phi \right) - \frac{\Pi R^2}{2} - \frac{\Pi (\frac{1}{2}R)^2}{2}$$

$$3.- AF = 2AO_2 = 2R + R = 3R \Rightarrow AO_2 = R_2 = \frac{1}{2}R = 1.5R$$



4.- $\Delta OCP \sim \Delta ODP$ (A, A, \sim)

$$\frac{R}{\frac{1}{2}R} = \frac{OP}{O_1P} = \frac{2R + FP}{\frac{1}{2}R + FP} \Rightarrow FP = R$$

$$5.- \operatorname{Sen} \alpha = \frac{R}{OP} \Rightarrow \alpha = 19,47^\circ$$

$$6.- \text{En } \Delta O_2EP \frac{1.5R}{\operatorname{Sen} 19,47^\circ} = \frac{2.5R}{\operatorname{Sen} O_2EP}$$

7.- En ΔO_2BE Isósceles $O_2EB = O_2BE = 33,75^\circ$ y $\hat{\phi} = 112,5^\circ$ $\therefore S_{III} = 0,4 R^2$

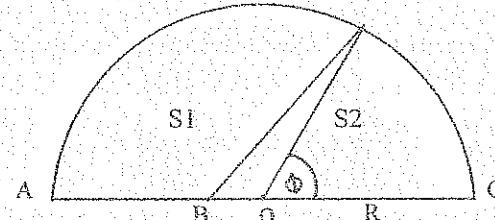
68.-

$$1.- \text{Si } \frac{S_1}{S_2} = \frac{3}{2}$$

$$2.- \frac{S_1 + S_2}{S_2} = \frac{3+2}{2}$$

$$\frac{\pi R^2}{2}$$

$$\therefore \frac{5}{2} = \frac{\phi R^2}{2} \quad \frac{R \times \frac{1}{2}R \times \operatorname{Sen} \phi}{2}$$



$$3.- \therefore 40\hat{\phi} + 15 \operatorname{Sen} \hat{\phi} = 16\pi \Rightarrow \phi = 54,5^\circ = \widehat{DC}$$

77.-

$$1.- S_{III} = S \Delta CDE - S_{C \oplus E} - S_{\odot(O_1, r)}$$

$$2.- S_{III} = \frac{CE^2 \sqrt{3}}{4} - \frac{R^2}{2} \left(\frac{\phi \pi}{180^\circ} - \operatorname{Sen} \phi \right) - \pi r^2$$

$$3.- \Delta CDE \text{ Equilátero : } \operatorname{Tan} 30^\circ = \frac{R}{DE}$$

$$\operatorname{y} \operatorname{Sen} 30^\circ = \frac{r}{DO_1}$$

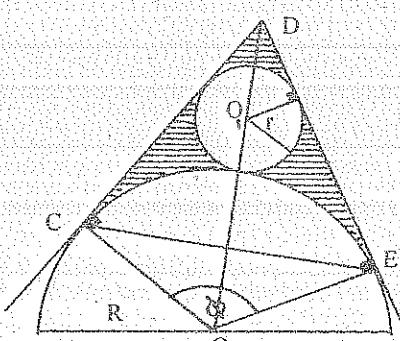
$$\Rightarrow CE = DE = DC = 1,73 R \quad \text{y} \quad DO_1 = 2r$$

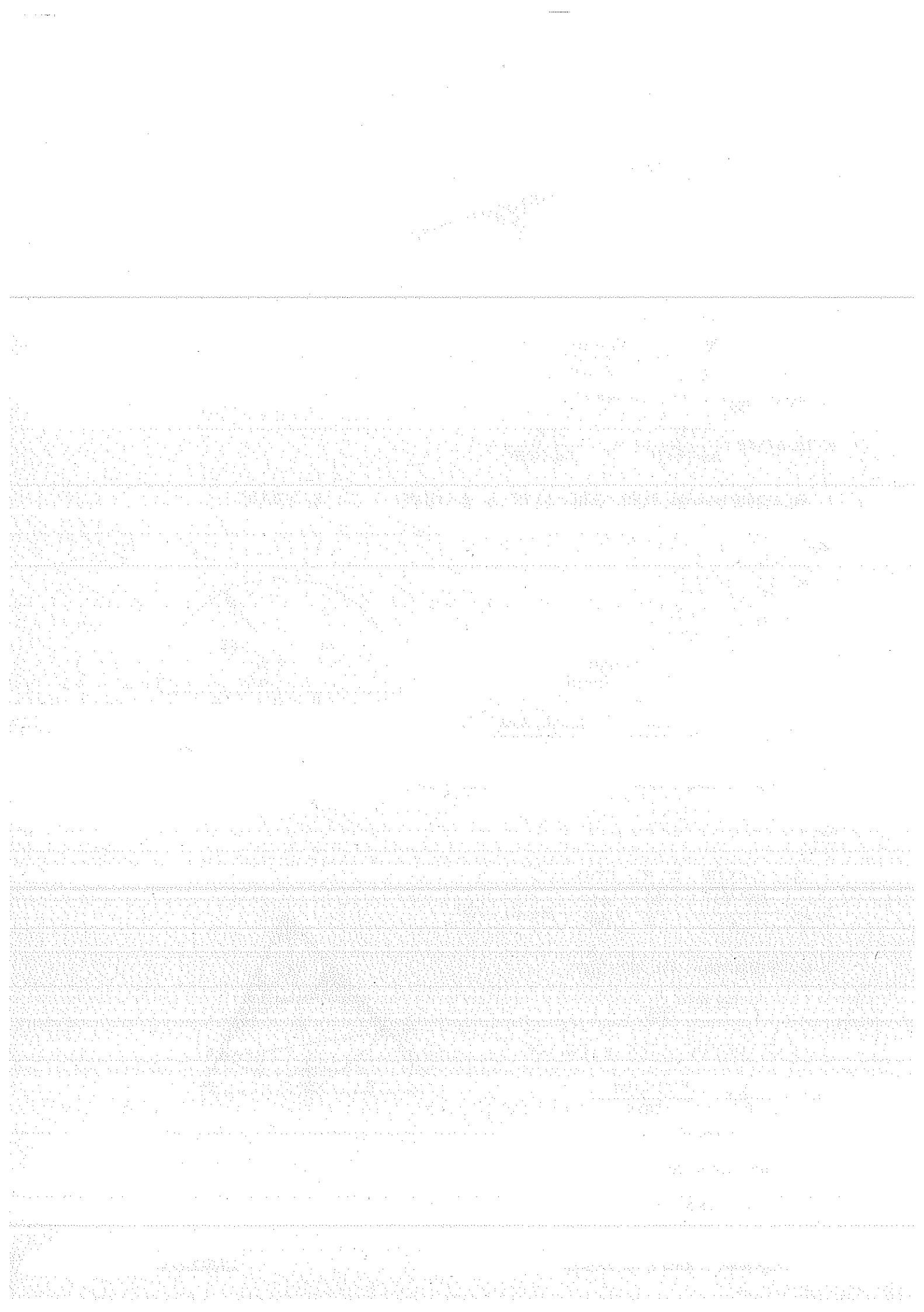
$$4.- \frac{R}{r} = \frac{R + r + DO_1}{DO_1}$$

$$\therefore r = \frac{1}{2}R$$

$$5.- \phi = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$$

$$\Rightarrow S_{III} = 0,35 R^2$$





UNIDAD 6

6. POLÍGONOS Y CUADRILÁTEROS

6.1. CONGRUENCIA DE POLÍGONOS

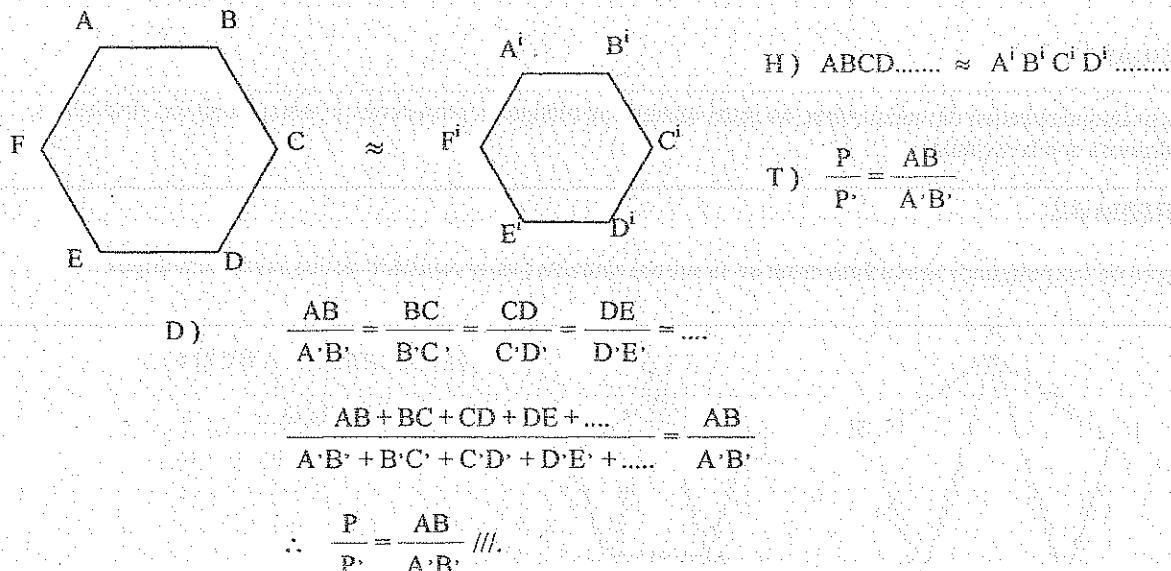
Dos polígonos son congruentes si tienen respectivamente congruentes sus lados y sus ángulos internos.

6.2. SEMEJANZA DE POLÍGONOS

Dos polígonos son semejantes si tienen respectivamente sus lados proporcionales y sus ángulos congruentes.

TEOREMA # 1

Los perímetros de dos polígonos semejantes son entre sí como dos lados homólogos.

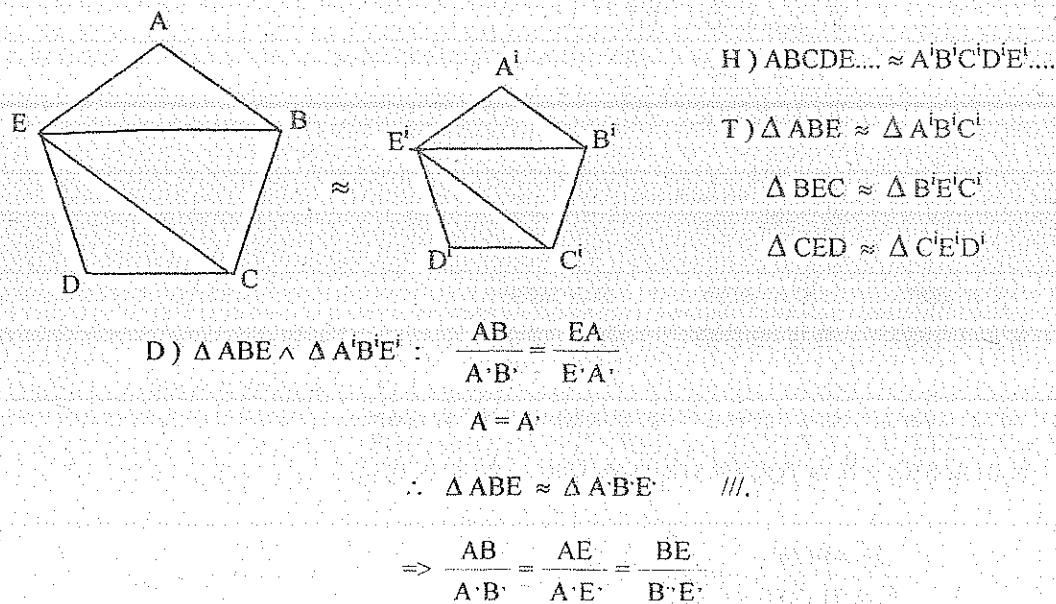


$$H) \quad ABCD \dots \approx A'B'C'D' \dots$$

$$T) \quad \frac{P}{P'} = \frac{AB}{A'B'}$$

TEOREMA # 2

Si dos polígonos son semejantes se pueden descomponer en un mismo número de triángulos semejantes, semejantemente dispuestos.



$$D) \quad \Delta ABE \wedge \Delta A'B'E' : \quad \frac{AB}{A'B'} = \frac{EA}{E'A'}$$

$$A = A'$$

$$\therefore \Delta ABE \approx \Delta A'B'E' \text{ //}.$$

$$\Rightarrow \frac{AB}{A'B'} = \frac{AE}{A'E'} = \frac{BE}{B'E'}$$

$$\Delta CED \sim \Delta C'E'D' : \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'}$$

$$D = D'$$

$$\therefore \Delta CED \approx \Delta C'E'D' \quad III.$$

$$\Rightarrow \frac{CD}{C'D'} = \frac{DE}{D'E'} = \frac{CE}{C'E'}$$

$$\Delta BEC \sim \Delta B'E'C' : \frac{BC}{B'C'} = \frac{BE}{B'E'} = \frac{CE}{C'E'}$$

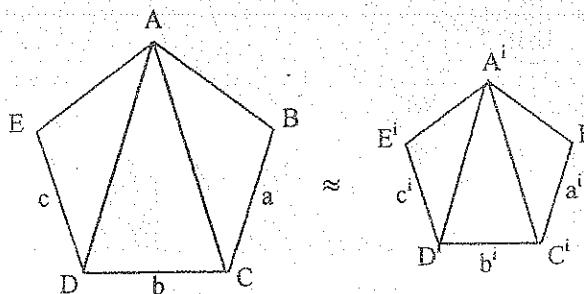
$$\therefore \Delta BCE \approx \Delta B'C'E' \quad III.$$

COROLARIO

Si dos polígonos pueden descomponerse en igual número de triángulos semejantes y semejantemente dispuestos, los polígonos son semejantes.

TEOREMA # 3

Las áreas de los polígonos semejantes están en la misma relación que el cuadrado de los lados homólogos.



$$H) ABCDE \dots \approx A'B'C'D'E' \dots$$

$$T) \frac{S_{\Delta ABC} \dots}{S_{\Delta A'B'C'} \dots} = \frac{a^2}{a_1^2} = \dots$$

$$D) \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}} = \frac{a^2}{a_1^2}$$

$$\frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta A'C'D'}} = \frac{b^2}{b_1^2}$$

$$\frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta A'D'E'}} = \frac{c^2}{c_1^2}$$

$$\frac{a}{b_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \dots$$

$$\frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}} = \frac{S_{\Delta ACD}}{S_{\Delta A'C'D'}} = \frac{S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta A'D'E'}} = \dots$$

$$\frac{S_{\Delta ABC} + S_{\Delta ACD} + S_{\Delta ADE}}{S_{\Delta A'B'C'} + S_{\Delta A'C'D'} + S_{\Delta A'D'E'}} = \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta A'B'C'}}$$

$$\therefore \frac{S_{\Delta ABCD \dots}}{S_{\Delta A'B'C'D' \dots}} = \frac{a^2}{a_1^2} = \dots \quad III.$$

6.3. NÚMERO DE DIAGONALES

TEOREMA # 1

El número de diagonales trazadas desde un vértice de un polígono de n lados es igual a $(n - 3)$.

Número de Lados n	Figura Geométrica	Número de Diagonales	Fórmula
3		0	$n - 3$
4		1	$n - 3$
5		2	$n - 3$
6		3	$n - 3$

TEOREMA # 2

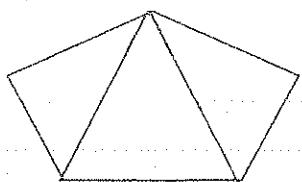
El número de diagonales totales de un polígono de n lados es igual a $\frac{n(n-3)}{2}$

Número de Lados n	Figura Geométrica	Número de Diagonales	Fórmula
3		0	$\frac{n(n-3)}{2}$
4		2	$\frac{n(n-3)}{2}$
5		5	$\frac{n(n-3)}{2}$
6		9	$\frac{n(n-3)}{2}$

6.4. SUMA DE ÁNGULOS

TEOREMA # 1

La suma de los ángulos internos de un polígono de n lados es igual al producto de dos ángulos rectos por el número de lados del polígono disminuido en dos.



$$T) \sum \angle \text{int.} = \pi (n - 2)$$

D) Construimos todas las diagonales desde un mismo vértice.

Se forman $(n - 2)$ Triángulos.

$$\therefore \sum \text{Áng. int. del polígono} = \sum \text{Áng. int. de todos los triángulos formados.}$$

$$\Rightarrow \sum \text{Áng. int. del polígono} = \pi(n - 2) \quad \text{///.}$$

TEOREMA # 2

La suma de los ángulos externos de un polígono formados al prolongar los lados en un mismo orden es igual a cuatro ángulos rectos.

$$T) \sum \text{Áng. ext.} = 2\pi$$

$$D) \hat{1} + \hat{A} = \pi$$

$$\hat{2} + \hat{B} = \pi$$

$$\hat{3} + \hat{C} = \pi$$

$$\vdots \hat{n} + \hat{N} = \pi$$

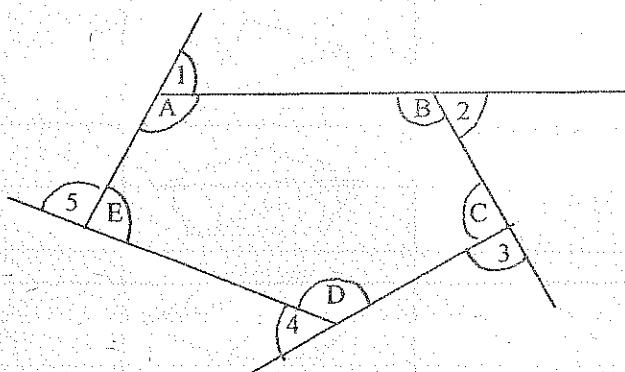
$$(\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \dots + \hat{n}) + (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \dots + \hat{N}) = n\pi$$

$$(\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \dots + \hat{N}) = (n - 2)\pi$$

$$\therefore (\hat{1} + \hat{2} + \hat{3} + \dots + \hat{n}) + (n - 2)\pi = n\pi$$

$$\therefore \sum \text{Áng. externos} = n\pi - (n - 2)\pi$$

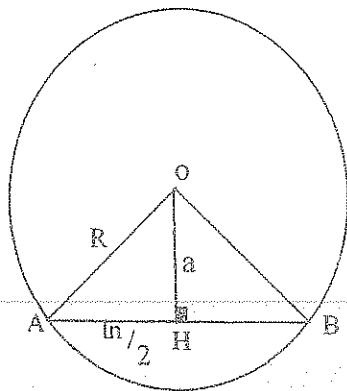
$$\therefore \sum \text{Áng. externos} = 2\pi \quad \text{///.}$$



6.5. PROPIEDADES DE LOS POLÍGONOS REGULARES

1. Todo polígono regular tiene un círculo inscrito y un círculo circunscrito. El radio del círculo circunscrito es el "radio del polígono" y el radio del círculo inscrito es su "apotema". Los dos círculos son concéntricos y su centro común es el "centro del polígono".
2. Si un círculo se divide en n arcos congruentes ($n \geq 3$) y se unen consecutivamente los puntos de división, el polígono inscrito resultante es regular. Las tangentes trazadas por los mismos puntos forman un polígono regular circunscrito.
3. Todo radio de un polígono regular biseca al ángulo interno.
4. "Ángulo central" de un polígono regular es el ángulo formado por dos radios que unen los extremos de sus lados con el centro del polígono.
5. Los ángulos centrales de un polígono regular de n lados son congruentes y cada uno tiene por medida $\frac{2\pi}{n}$.
6. El ángulo central de un polígono regular es el suplemento de su ángulo interno.
7. Dos polígonos regulares de igual número de lados son semejantes.
8. Cada ángulo interno de un polígono regular de n lados es igual a $\frac{\pi(n-2)}{n}$.

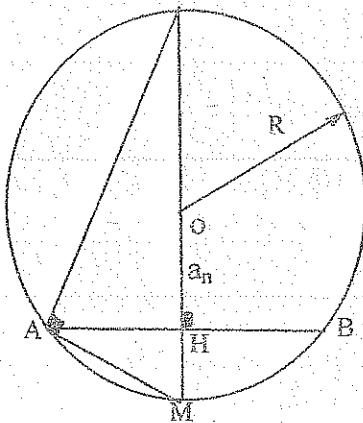
6.6. CÁLCULO DE LA APOTEMA DE UN POLÍGONO REGULAR DE "n" LADOS (a_n)



$$AB = l_n$$

$$a_n = \frac{1}{2} \sqrt{4R^2 - l_n^2}$$

6.7. CÁLCULO DEL LADO DE UN POLÍGONO REGULAR DE DOBLE NÚMERO DE LADOS (l_{2n})



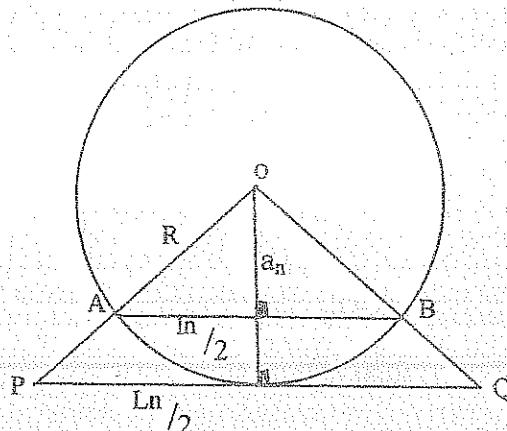
$$AB = l_n$$

$$AM = l_{2n}$$

$$AM^2 = 2R(R - a_n)$$

$$l_{2n} = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - l_n^2}}$$

6.8. CALCULO DEL LADO DE UN POLÍGONO REGULAR CIRCUNSCRITO DE LADO (L_n)



$$AB = l_n$$

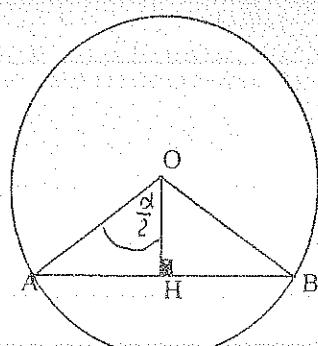
$$PQ = L_n$$

$$\frac{a_n}{R} = \frac{l_n}{L_n}$$

$$L_n = \frac{2RL_n}{\sqrt{4R^2 - l_n^2}}$$

6.9. CÁLCULO DEL LADO DE UN POLÍGONO REGULAR DE "n" LADOS (l_n), CONOCIDO R

1. TRIÁNGULO EQUILÁTERO (l_3).



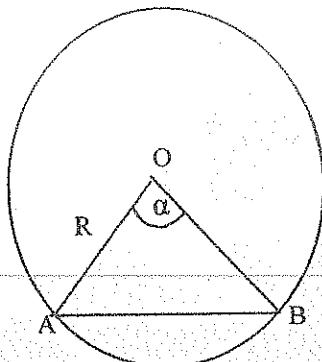
$$AB = l_3$$

$$\hat{AOB} = \hat{\alpha} = 2\pi/3$$

$$OH = \frac{R}{2}$$

$$AH = R \frac{\sqrt{3}}{2}$$

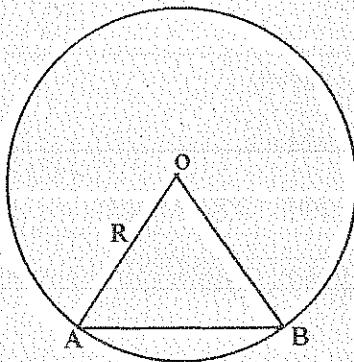
$$l_3 = 2AH = R\sqrt{3}$$

2. CUADRADO (I_4).

$$AB = I_4$$

$$\widehat{AOB} = \widehat{\alpha} = \pi/2$$

$$I_4 = R\sqrt{2}$$

3. HEXÁGONO REGULAR (I_6).

$$AB = I_6$$

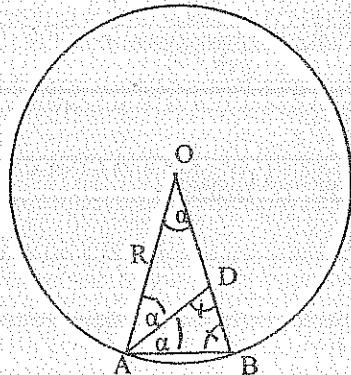
$$\widehat{AOB} = \widehat{\alpha} = \pi/3$$

$$I_6 = R$$

4. OCTÓGONO REGULAR (I_8).

$$I_4 = R\sqrt{2}$$

$$I_8 = \sqrt{2}R^2 - R\sqrt{4R^2 - (R\sqrt{2})^2} = R\sqrt{2 - \sqrt{2}}$$

5. DECÁGONO REGULAR (I_{10}).

$$AB = I_{10}$$

$$\widehat{AOB} = \widehat{\alpha} = \pi/5$$

$$AB = AD = DO = I_{10}$$

$$\frac{I_{10}}{R} = \frac{R - I_{10}}{I_{10}}$$

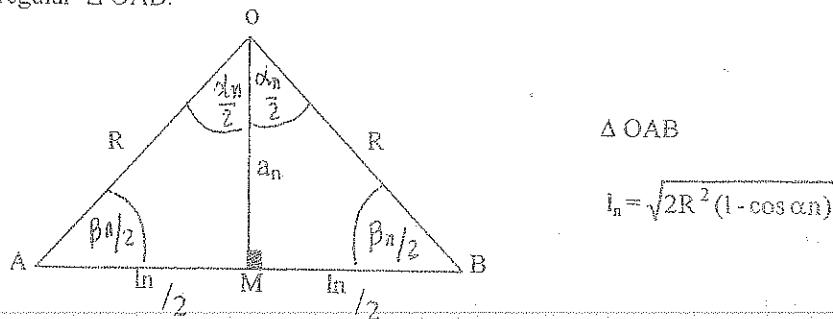
$$I_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$$

6. PENTÁGONO REGULAR (I_5)

$$I_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1) = \sqrt{2R^2 - R\sqrt{4R^2 - I_5^2}}$$

$$I_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}$$

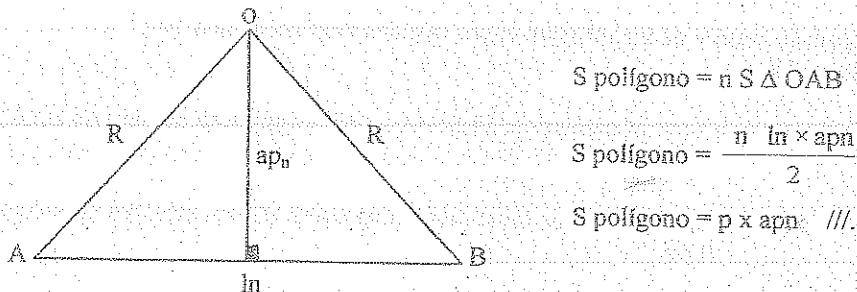
El lado de un polígono regular de n lados, se puede calcular tomando en cuenta el triángulo fundamental de un polígono regular ΔOAB .



6.10. SUPERFICIE

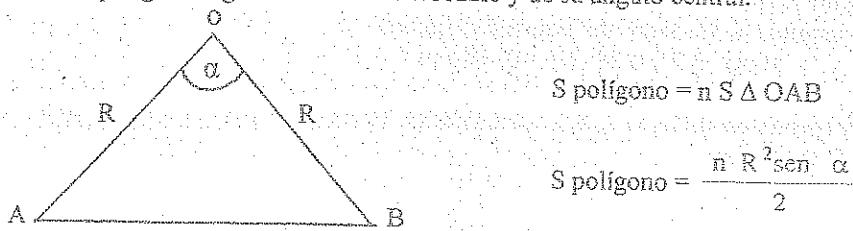
TEOREMA #1

El área de un polígono regular es igual al semiperímetro por su apotema.



TEOREMA #2

La superficie de un polígono regular en función del radio y de su ángulo central.



6.11. CALCULO DEL VALOR π . (PARA $R=1$)

N	l_n	$n l_n$	$K = n \frac{l_n}{2R}$
6	1.	6.	3.
12	0.517638	6.211657	3.105828
24	0.261052	6.265257	3.132628
48	0.130806	6.278700	3.139650
96	0.065438	6.282063	3.141031
192	0.032723	6.282905	3.141452
384	0.016362	6.283155	3.141557
768	0.008181	6.283169	3.141586

$$K = 3.141586 = \pi$$

6.12. CALCULO DE LA CIRCUNFERENCIA

La circunferencia es el límite hacia el cual tiende el perímetro de un polígono regular cuando el número de lados aumenta indefinidamente. Por lo tanto, la circunferencia es igual al perímetro de un círculo.

$$2p = n l_n$$

$$\text{si } n \Rightarrow \infty \quad \therefore 2p = \frac{C}{2R} = \Pi$$

$$\Rightarrow C = 2 \Pi R$$

6.13. EJERCICIOS

1. Hallar el número de lados de un polígono, cuyos ángulos internos suman once veces más que sus ángulos externos. Resp. 24

2. La suma de los ángulos internos y externos de un polígono es 5π . Cuántos lados tiene el polígono? Resp. 5

3. De cuántos lados es el polígono que tiene 170 diagonales totales? Resp. 20

4. Si el número de lados de un polígono se aumenta en tres, el número de diagonales totales aumenta en quince. Cuántos lados tiene el polígono? Resp. 5

5. Hallar el número de diagonales totales de un polígono cuyos ángulos internos suman 5π . Resp. 14

6. Cuántos lados tiene un polígono que tiene el número de diagonales totales igual a su número de lados. Resp. 5

7. Determinar el número de lados de un polígono que tiene cinco diagonales totales más que el polígono que tiene un lado menos. Resp. 7

8. Cuántos lados tiene un polígono, cuyos ángulos internos sumados, es igual a la suma de los ángulos internos y externos de otro polígono de 16 lados. Resp. 18

9. Los lados de un polígono miden 3; 5, 6, 8, y 10 m. respectivamente. El perímetro de un polígono semejante es 40 m. Encontrar la longitud de los lados del segundo polígono. Resp. 3,75; 6,25; 7,5; 10; 12,5 m.

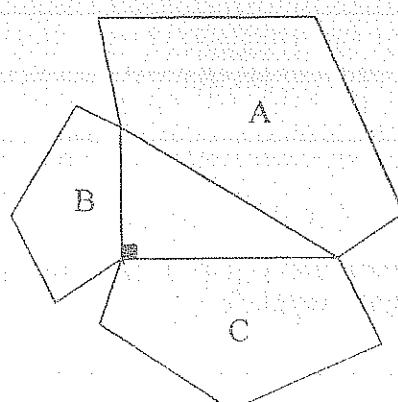
10. Los lados de un pentágono son de 2, 5, 7, 8, y 10 unidades. Hallar los lados de otro polígono semejante cuyo perímetro es de 50 unidades. Resp. 3,13; 4,69; 10,94; 12,50 y 15,63 u.

11. El número de vértices de un polígono más el número de diagonales totales es igual a 45. Cuantos lados tiene el polígono. Resp. 10

12. La suma de los ángulos internos de un polígono Q es igual a la suma de los ángulos internos y externos de un polígono P. Calcular el número de lados de Q si P tiene 16 lados. Resp. 18

13. Un círculo tiene cuatro cuerdas iguales de longitud 5m y cuatro cuerdas iguales de longitud 8m. Hallar el área del octógono formado por las cuerdas. Resp. 201,75 m²

14.



H) A, B, C, Polígonos Semejantes

T) $S_A = S_B + S_C$

15. Si los ángulos centrales de dos polígonos regulares difieren en $\frac{\pi}{20}$ y el número de diagonales trazadas desde un mismo vértice difiere en 9. Calcular el número de los lados del polígono. Resp. 15; 24
16. En dos polígonos regulares, los ángulos internos y los ángulos centrales difieren en 42° . Calcular el número de lados de cada polígono. Resp. 12; 5
17. La medida del ángulo central del polígono regular P es a la medida del ángulo interno del polígono regular Q como 3 es a 8. Si la diferencia entre el número total de diagonales del polígono P y del polígono Q es 11; hallar el número de lados de cada polígono. Resp. 8; 6
18. El polígono regular P tiene 2 lados más que el polígono regular Q y la diferencia entre sus ángulos centrales es de 6° . Determinar el número de lados de cada polígono. Resp. 10; 12.
19. El ángulo interno y el ángulo central de los polígonos regulares difieren en 126° y sus ángulos internos en 18° . Calcular el número de lados de cada polígono. Resp. 20; 10
20. En un polígono regular, el radio mide 4,54 cm. Y su apotema $3\sqrt{\frac{3}{2}}$ cm. Calcular el lado del polígono regular de doble número de lados. Si su apotema mide 14,93 cm. Resp. 9,7 cm.
21. El número de lados de dos polígonos regulares difieren en dos y sus ángulos centrales en 15° . Si la superficie del polígono regular de mayor número de lados es $50u^2$. Calcular cuánto mide su radio. Resp. 4,20 u.
22. Si la relación entre las diagonales totales de dos polígonos regulares es infinito y los ángulos centrales están en la relación $\frac{1}{4}$. Calcular la medida del ángulo interno del mayor polígono. Resp. 150°
23. La relación de las diagonales totales de dos polígonos regulares es infinito y el número de vértices difieren en 5. Si la superficie del polígono de mayor número de lados es $30m^2$. Hallar el valor de su apotema. Resp. 3m.
24. Un polígono regular tiene tres lados más que el otro, y su ángulo central mide 27° menos que el ángulo central del otro polígono. Cuántos lados tiene cada polígono. Resp. 5; 8
25. El número total de diagonales de un polígono regular es 27. Si su apotema es 5,14 u. Calcular su área. Resp. $86,54 u^2$
26. En un polígono regular, el ángulo central más un ángulo interno, más un ángulo externo es 210° . Calcular el número de diagonales totales. Resp. 54
27. El radio de un polígono regular es $10m$ y su área es $200\sqrt{2} m^2$. Determina el número total de diagonales que tiene el polígono. Resp. 20
28. Si el número de lados de un polígono regular aumenta en diez y cada ángulo del nuevo polígono es $\frac{\pi}{60}$ mayor que cada ángulo del primero. Cuántos lados tiene cada polígono. Resp. 30; 40
29. Si a un polígono regular se le aumenta un lado su ángulo interno aumenta en $\frac{\pi}{15}$. Cuántos lados tiene el polígono. Resp. 5
30. La suma de los ángulos internos de un polígono regular vale 56 rectos. Cuál es el valor del ángulo central de ese polígono. Resp. 12°
31. Si la suma de los ángulos internos de dos polígonos regulares difieren en 4π y sus ángulos centrales difieren en $\frac{\pi}{24}$. Calcular el número de lados de cada polígono. Resp. 12; 16
32. Un ángulo interno de un polígono regular de n lados es $\frac{\pi}{8}$ mayor que el ángulo de un polígono regular de $(n - 3)$ lados. Cuántos lados tiene cada polígono ? Resp. 9; 6

33. Se tiene dos polígonos regulares P y Q, el polígono P tiene 8 lados menos que el polígono Q y, cada ángulo interno tiene del polígono Q vale $\frac{\pi}{15}$ más que cada ángulo interno del polígono P. Encontrar el número de los lados de cada polígono. Resp. 12; 20
34. En un polígono regular el perímetro es de 12 cm. El radio 2 cm. y su apotema $\sqrt{3}$ cm. Calcular el perímetro y el radio de otro polígono regular de igual número de lados si su apotema es 3 cm.
Resp. 20 cm.; 3,47 cm.
35. Calcular el valor del lado y apotema del polígono regular inscrito, el lado del polígono regular circunscrito a un polígono de $n = 16$, si el radio del polígono es $R = 10$ u.
Resp. 3,92 u.; 9,81 u.; 3,98 u.
36. Dados los perímetros P_1 y P_2 de los polígonos regulares de igual número de lados, el uno circunscrito y el otro inscrito al mismo círculo. Encontrar los perímetros de los polígonos regulares inscrito y circunscrito de doble número de lados en el mismo círculo.
Resp. $2P_1P_2 / (P_1 + P_2)$; $\sqrt{P_1P_2}$
37. Un hexágono está inscrito en un círculo otro hexágono está circunscrito en el mismo círculo. Hallar el radio del círculo, si la diferencia entre los perímetros es a. Resp. $1,08 a$.
38. En un círculo de radio R está inscrito un hexágono regular ABCDEF. Hallar el radio del círculo inscrito en el $\triangle ACD$. Resp. $0,37 R$
39. Calcular el lado de un cuadrado inscrito en un círculo si la superficie de un octógono regular inscrito en el mismo círculo es $35,44 \text{ u}^2$. Resp. 5 u.
40. La diferencia del ángulo interno y del ángulo central de un polígono regular es de 36° . Hallar el número de lados del polígono. Resp. 5
41. Cuántos lados tiene el polígono regular si su ángulo interno es igual a su ángulo central. Resp. 4
42. Si el número de lados de dos polígonos regulares difieren en 2 y sus ángulos centrales difieren en 15° . Cuántos lados tienen cada polígono. Resp. 6, 8.
43. En un polígono regular, el ángulo interno es cuatro veces mayor que su ángulo externo. Cuántos lados tiene el polígono. Resp. 10
44. El radio de un polígono regular es de 5,54 u. y su apotema 5,1183 u. Determinar:
El valor de su lado. El valor de su ángulo central. El valor de su ángulo interno. El valor del área. El número total de sus diagonales. Resp. 4,24 u; 45° ; 135° ; $86,80 \text{ u}^2$; 20
45. Un polígono regular tiene su apotema $5\sqrt{3}$ y su lado 10 u. Hallar el número de diagonales totales del polígono. Resp. 9
46. El lado de un polígono regular de 12 lados mide 5 u. Cuánto mide el ángulo central, el radio y su apotema. Resp. 30° ; 9,66 u.; 9,33 u.
47. El número total de diagonales de un polígono regular es 27 y su área es $86,8 \text{ u}^2$. Calcular su apotema. Resp. 5,14 u.
48. En un polígono regular, la suma de los ángulos internos es 540° y su lado mide 4 u. Calcular su área. Resp. $27,44 \text{ u}^2$.
49. El radio de un polígono regular es 3 u., su apotema 2,772 u. Calcular su área. Resp. $25,46 \text{ u}^2$
50. Calcular la apotema de un pentágono regular inscrito en un círculo, si la superficie de un octógono regular inscrito en el mismo círculo es de $35,44 \text{ m}^2$. Resp. 2,86 m.

51. El lado de un pentágono regular es 8 u. Cuanto mide la apotema de otro pentágono semejante si su perímetro es 80 u. Resp. 11 u.

52. Calcular la superficie de un octógono regular inscrito en un círculo, si el lado del cuadrado inscrito en el mismo círculo es 5 u.. Resp. $35,44 \text{ u}^2$.

53. El lado de un polígono regular mide 12 u, si el número total de diagonales es igual al número de lados. Calcular la superficie. Resp. $247,75 \text{ u}^2$

54. Cual es la relación entre las áreas de dos pentágonos regulares, si el lado del segundo polígono es la apotema del primero. Resp. 2,11

55. Si los ángulos centrales de dos polígonos regulares difieren en 5° , y el número de lados de un polígono es el doble del número de lados del otro polígono. Calcular la relación de sus áreas si están inscritos en el mismo círculo. Resp. 1

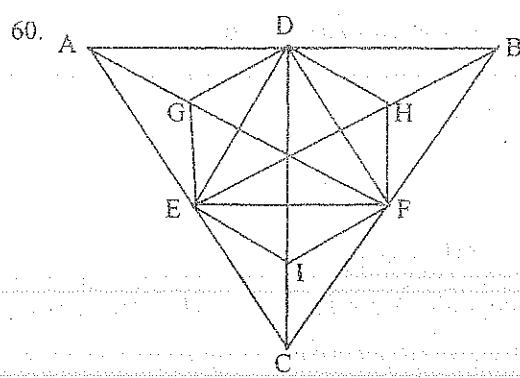
56. Los puntos medios de los lados de un n-ágono regular se unen mediante rectas para formar un nuevo n-ágono inscrito en el lado. Hallar la relación entre sus áreas:

$$\text{Resp. } = \cos^2 \frac{\pi}{n}$$

57. Si se prolongan en un mismo sentido todos los lados de un hexágono regular en una longitud igual a los lados y se unen los extremos de las prolongaciones. Hallar la razón de las áreas entre el hexágono dado y el polígono formado. Resp. 1/3

58. Hallar la relación de las áreas entre un hexágono regular inscrito y circunscrito en un mismo círculo. Resp. 4/3

59. Un cuadrado y un pentágono regular tienen perímetros iguales. Hallar la relación entre sus áreas. Resp. 0,9

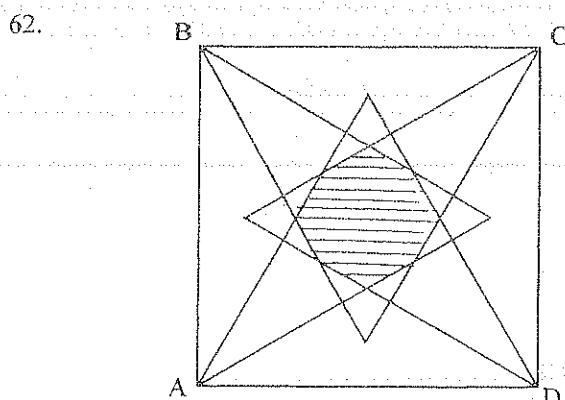


H) ΔABC Equilátero

FHDGEI Hexágono regular = A_6

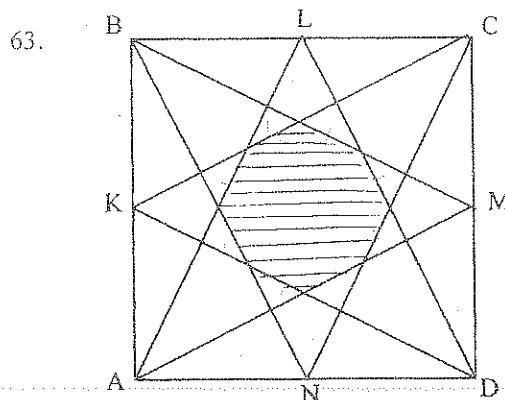
$$\text{T) } A_6^2 = A \Delta DEF \times A \Delta ABC$$

61. Dados un cuadrado ABCD, llamando O al centro del polígono, demostrar que los centros de los círculos inscritos en el triángulos AOB, BOC, COD, AOD, ABC, BCD, ADB y ADC son vértices de un octágono regular. Hallar el área del octágono si el lado del cuadrado es 10 u. Resp. 24 u^2



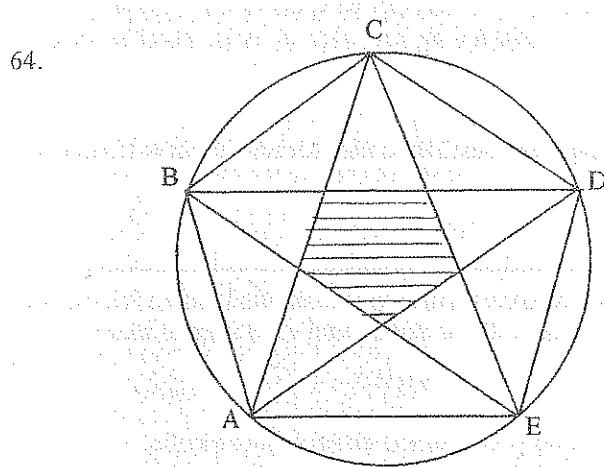
En un cuadrado de lado a , y sobre cada lado se construye interiormente un triángulo equilátero. Calcular la superficie del polígono.

$$\text{Resp. } 0,12 a^2$$



H) ABCD cuadrado de lado a
K, L, M, N puntos medios

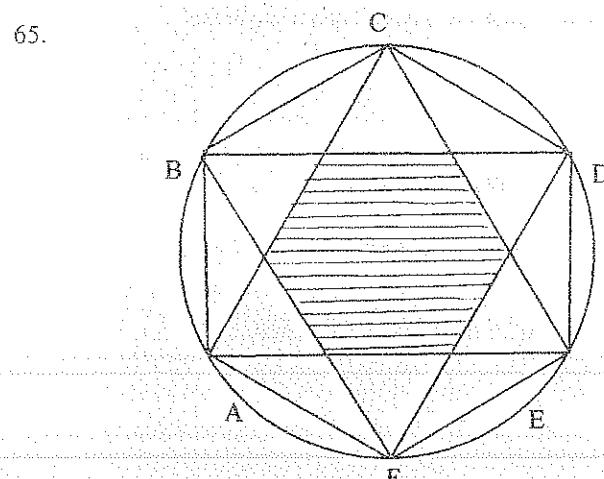
T) $\frac{S_{\text{hex}}}{S_{\text{cuadrado}}} = ?$ Resp. $\frac{1}{6} a^2$



H) ABCDE polígono regular

T) $\frac{S_{\text{pent}}}{S_{\text{círculo}}} = ?$

Resp. = 0,146



H) ABCDEF polígono regular

T) $\frac{S_{\text{hex}}}{S_{\text{círculo}}} = ?$

Resp. = $\frac{1}{3}$

66. Se tiene un triángulo acutángulo ABC inscrito en un círculo; los radios trazados desde cada vértice se prolongan hasta el círculo, y cada uno de estos puntos se unen con los otros dos vértices del triángulo, resultando un hexágono también inscrito. Hallar el área del hexágono si el área del triángulo ABC es S.
Resp. 2 S.

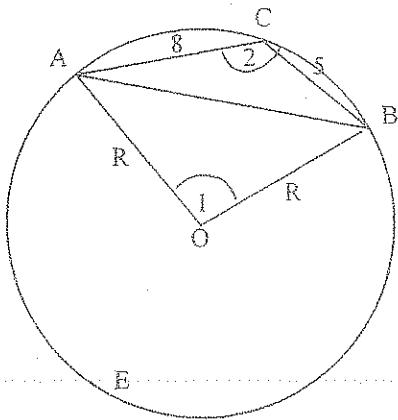
6.13.1. EJERCICIOS RESUELTOS

10. $P = 50$ y $P_1 = 2+5+7+8+10 = 32$

$$\frac{P}{P_1} = \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = \frac{d}{d_1} = \frac{e}{e_1} \quad y \quad \frac{50}{32} = \frac{a}{2} = \frac{b}{5} = \frac{c}{7} = \frac{d}{8} = \frac{e}{10}$$

$\therefore a = 3,13 ; b = 4,69 ; c = 10,94 ; d = 12,50 ; e = 15,63 \text{ u.}$

13.



$$4AC + 4BC = 360^\circ$$

$$AC + BC = 90^\circ \Rightarrow \hat{2}$$

$$\hat{2} = AEB / 2 = 270^\circ / 2 = 135^\circ$$

$$\Delta ABC: AB^2 = 8^2 + 5^2 - 2(8)(5) \cos 135^\circ$$

$$\therefore AB = 12,07$$

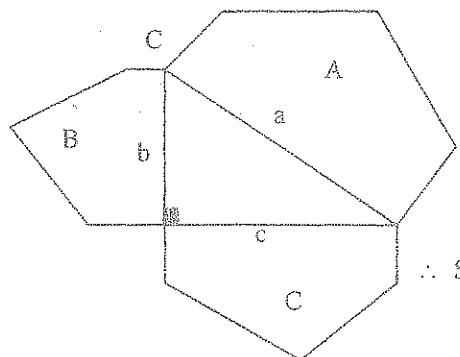
$$S \Delta ABC = (8 \times 5 \times \operatorname{Sen} 135^\circ) / 2 = (8 \times 5 \times 12,07) / 4R$$

$$\therefore R = 8,52$$

$$Sx = 4S \Delta ABC + 4S \Delta OAB = 4(8 \times 5 \times \operatorname{Sen} 135^\circ) / 2 + 4(8,52)^2 / 2$$

$$\therefore Sx = 201,75 \text{ m}^2$$

14.



$$\frac{S_B}{S_A} = \frac{b^2}{a^2} \quad (1)$$

$$\frac{S_C}{S_A} = \frac{c^2}{a^2} \quad (2)$$

$$\therefore S_A = S_B + S_C \quad (1) + (2)$$

18.

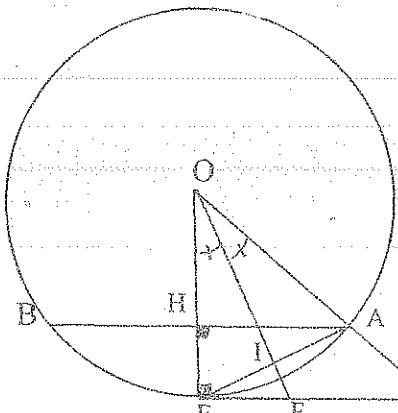
$$Q = n \quad \therefore \hat{\alpha}_1 = 360^\circ / n$$

$$P = n + 2 \quad \therefore \hat{\alpha}_2 = 360^\circ / (n + 2)$$

$$\{360^\circ / (n + 2)\} + 6 = 360^\circ / n$$

$$\Rightarrow n = 10 \quad y \quad \therefore Q = 10; P = 12$$

36.



$$P_1 = 2nAH \quad y \quad P_1 = 2nAE = 4nIE$$

$$P_2 = 2nEC \quad y \quad P_2 = 4nEF$$

$$\overline{OF} \text{ Bisectriz: } \frac{OC}{OE} = \frac{CF}{FE} \quad \therefore \frac{P_2}{P_1} = \frac{OC}{OE} = \frac{CF}{FE}$$

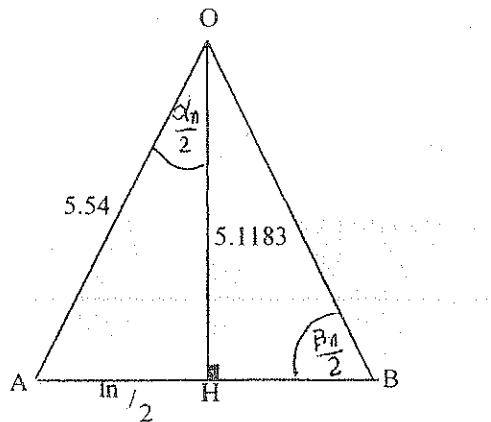
$$\Delta AHE \approx \Delta EIF: \frac{P_2 + P_1}{P_1} = \frac{CF + FE}{FE} \quad y \quad \frac{P_2 + P_1}{P_1} = \frac{CE}{FE}$$

$$\frac{AE}{EF} = \frac{AH}{EI} \quad y \quad \frac{\frac{P_1}{2n}}{\frac{P_2}{4n}} = \frac{\frac{P_1}{2n}}{\frac{P_1}{4n}}$$

$$\frac{P_2 - P_1}{P_2} = \frac{\frac{P_1}{2n}}{\frac{P_2}{4n}} \quad \therefore \quad P_2 = \frac{2P_1 P_2}{P_1 + P_2}$$

$$\therefore \quad P_1 = \sqrt{P_1 P_2}$$

44.



$$\left(\frac{ln}{2}\right)^2 = 5,54^2 - 5,1183^2$$

$$ln = 4,24 \text{ u.}$$

$$\cos \frac{\alpha_n}{2} = \frac{5,1183}{5,54}$$

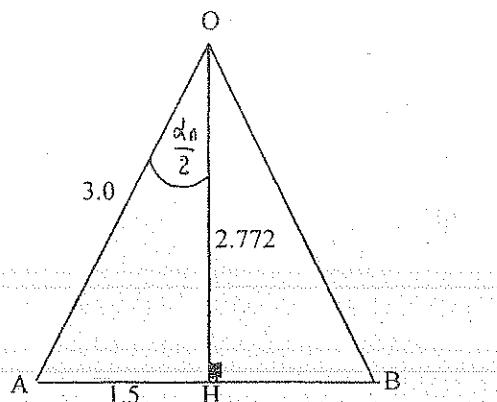
$$\hat{\alpha}_n = 45^\circ = \frac{360^\circ}{n} \Rightarrow n = 8$$

$$\frac{\beta_n}{2} = 67,5^\circ \Rightarrow \hat{\beta}_n = 135^\circ$$

$$S = 4 (5,54^2 \times \operatorname{Sen} 45^\circ) = 86,80 \text{ u}^2$$

$$\text{Diags} = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{8(8-3)}{2} = 20$$

49.

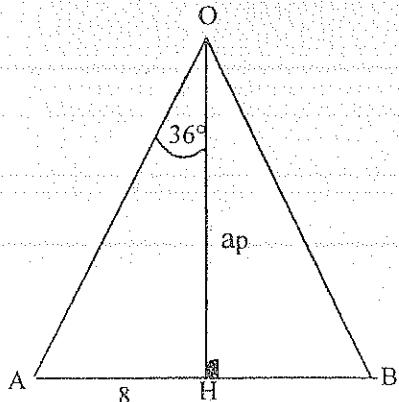


$$\cos \frac{\alpha_n}{2} = \frac{2,772}{3}$$

$$\hat{\alpha}_n = 45^\circ = \frac{360^\circ}{n} \Rightarrow n = 8$$

$$S = \frac{8(3 \times 3 \times \operatorname{Sen} 45^\circ)}{2} = 25,46 \text{ u}^2$$

51.



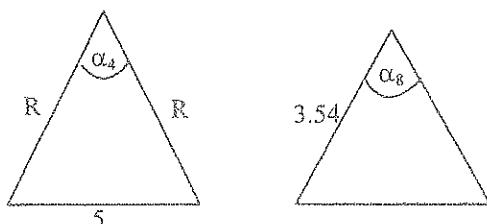
$$\hat{\alpha}_5 = \frac{360^\circ}{n} = 72^\circ$$

$$l_s = 8$$

$$P = 5 l_s = 80 \Rightarrow l_s = 16$$

$$\operatorname{Tg} 36^\circ = \frac{8}{ap} \Rightarrow a_p = 11 \text{ u.}$$

52.



$$\alpha_4 = \frac{360^\circ}{4} = 90^\circ$$

$$25 = 2 R^2 \Rightarrow R = 3,54$$

$$\alpha_8 = \frac{360^\circ}{8} = 45^\circ$$

$$S = 4 \times 3,54^2 \times \text{Sen } 45^\circ = 35,44 \text{ u}^2$$

55.

$$A = n \quad \therefore \quad \hat{\alpha}_A = \frac{360^\circ}{n}$$

$$B = 2n \quad \therefore \alpha_B = \frac{360^\circ}{2n}$$

$$\frac{360^\circ}{2n} + 5^\circ = \frac{360^\circ}{n} \Rightarrow n = 36$$

$$\hat{A} = 36^\circ \quad \text{y} \quad \hat{B} = 72^\circ$$

$$\hat{\alpha}_A = 10^\circ \text{ y } \hat{\alpha}_B = 5^\circ$$

$$\frac{S_A}{S_B} = \frac{36 R^2 \operatorname{Sen} 10^\circ}{76 R^2 \operatorname{Sen} 5^\circ} = 1,0$$

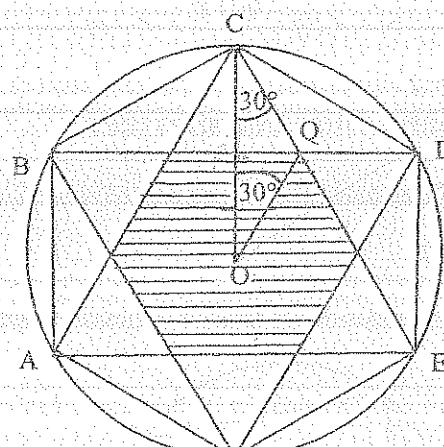
65.

$$\frac{S_{\text{HMM}}}{S_{\text{LPC}}} = \frac{Q^2}{Q^2}$$

OC OQ

$$\frac{OQ}{OC} = \frac{\sin 30^\circ}{\sin 120^\circ} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

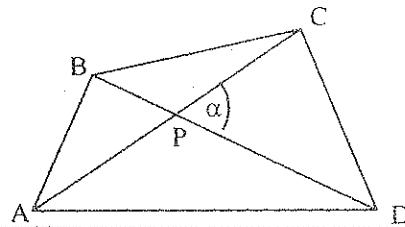
$$\frac{S_{\text{HII}}}{S_{\text{HI}}} = \frac{1}{3}$$



6.14. CUADRILÁTEROS

TEOREMA # 1

El área de un cuadrilátero es igual a la mitad del producto de dos diagonales por el seno del ángulo comprendido.



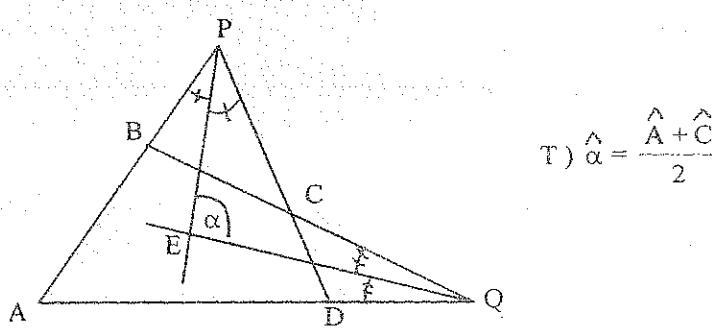
$$S_{ABCD} = S_{\triangle ABP} + S_{\triangle BPC} + S_{\triangle CPD} + S_{\triangle DPA}$$

$$S_{ABCD} = \frac{AP \times PB \sin \alpha}{2} + \frac{BP \times PC \sin(180^\circ - \alpha)}{2} + \frac{CP \times PD \sin \alpha}{2} + \frac{AP \times PD \sin(180^\circ - \alpha)}{2}$$

$$\therefore S_{ABCD} = \frac{AC \times BD \times \sin \alpha}{2} \quad //.$$

TEOREMA # 2.

El ángulo formado por las bisectrices de los ángulos obtenidos al prolongar los lados de un cuadrilátero es igual a la semisuma de los ángulos opuestos a este ángulo formado.



$$T) \hat{\alpha} = \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2}$$

$$D) \hat{\alpha} = \hat{l} + \hat{A} + \hat{2} \quad (1)$$

$$\hat{C} = \hat{l} + \hat{\alpha} + \hat{2} \quad (2)$$

$$\Rightarrow \hat{\alpha} - \hat{C} = \hat{A} - \hat{2} \quad (1) - (2)$$

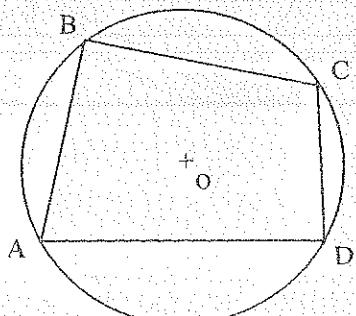
$$\therefore \hat{\alpha} = \frac{\hat{A} + \hat{C}}{2} \quad //.$$

6.14.1. CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE.

Este cuadrilátero se puede inscribir en un círculo, los lados son cuerdas del círculo.

TEOREMA # 1.

La suma de las medidas de los ángulos opuestos es igual a 180° .



$$\hat{A} = \frac{\hat{BCD}}{2}$$

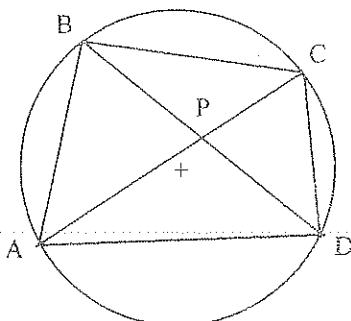
$$\hat{C} = \frac{\hat{BAD}}{2}$$

$$\therefore \hat{A} + \hat{C} = 180^\circ$$

$$\therefore \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$$

TEOREMA # 2. (POTENCIA DE UN PUNTO)

El producto de los segmentos formados en una diagonal es igual al producto de los segmentos formados en la otra.

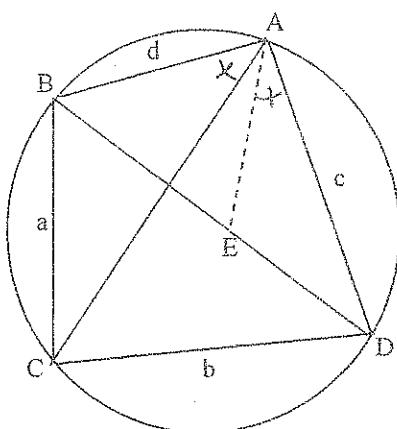


$$\Delta APD \approx \Delta BPC$$

$$AP \times PC = BP \times PD \quad //.$$

TEOREMA # 3. (PTOLOMEO)

En todo cuadrilátero inscriptible, el producto de las diagonales es igual a la suma de los productos de los lados opuestos.



$$T) AC \times BD = a \times c + b \times d$$

$$D) \hat{DAE} = \hat{BAC} \quad (\text{Construcción})$$

$$\hat{ADE} = \hat{ACB} = \frac{\hat{AB}}{2}$$

$$\Delta ADE \approx \Delta ABC : \frac{c}{AC} = \frac{DE}{a} = \frac{AE}{d} \therefore DE = \frac{a \times c}{AC}$$

$$\hat{BAE} = \hat{BAC} + \hat{EAC} = \hat{DAC} = \hat{DAE} + \hat{EAC}$$

$$\hat{ABE} = \hat{ACD} = \frac{\hat{AD}}{2}$$

$$\Delta AEB \approx \Delta ADC : \frac{d}{AC} = \frac{EB}{b} = \frac{AE}{c} \therefore EB = \frac{b \times d}{AC}$$

$$DE + EB = \frac{a \times c}{AC} + \frac{b \times d}{AC} \Rightarrow AC \times BD = a \times c + b \times d \quad //.$$

TEOREMA # 4. (SUPERFICIE)

$$T) S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

$$S_{ABCD} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta BCD} = \frac{BD \times h_1}{2} + \frac{BD \times h_2}{2}$$

$$S_{ABCD} = \frac{BD}{2} (h_1 + h_2) = \frac{BD \times CG}{2} \quad (1)$$

$$\Delta ACG : CG = \sqrt{AC^2 - AG^2} = \sqrt{AC^2 - EF^2} \quad (2)$$

$$\Delta ABC : d^2 = c^2 + BD^2 - 2 BD \times DE \quad (3)$$

$$\Delta BCD : a^2 = b^2 + BD^2 - 2 BD \times DF \quad (4)$$

$$\therefore EF = \frac{c^2 - b^2 - d^2 + a^2}{2 BD} \quad (3) - (4)$$

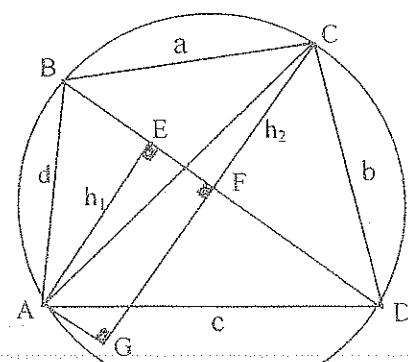
$$S_{ABCD} = \frac{BD}{2} \sqrt{AC^2 - \left(\frac{c^2 - b^2 - d^2 + a^2}{2 BD} \right)^2} \quad (4) \text{ y } (2) \text{ en } (1)$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{4} \sqrt{4AC^2 \times BD^2 - (c^2 - b^2 - d^2 + a^2)^2} \quad (6)$$

$$AC \times BD = a \times c + b \times d \quad (7)$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{4} \sqrt{(2ac + 2bd)^2 - (c^2 - b^2 - d^2 + a^2)^2} \quad (7) \text{ en } (6)$$

$$\therefore S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)} \quad //.$$



6.14.2. PROPIEDADES PARA DEMOSTRAR QUE UN CUADRILÁTERO ES INSCRIPTIBLE

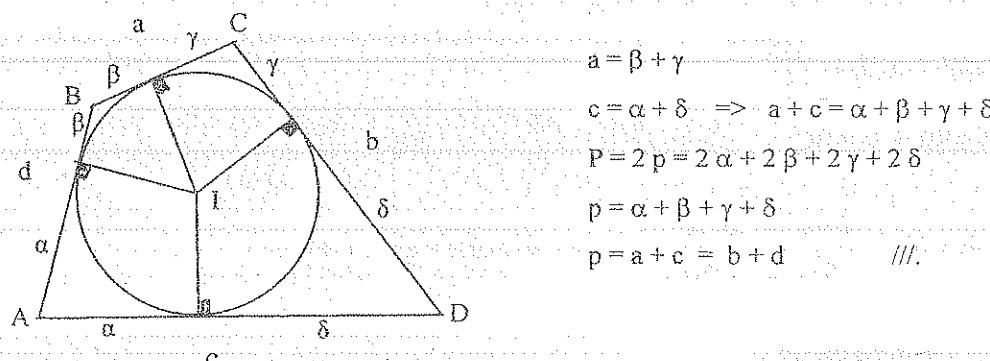
1. Si la suma de las medidas de los ángulos opuestos es 180° .
2. Si el producto de los segmentos formados en una diagonal es igual al producto de los segmentos formados en la otra.

6.14.3. CUADRILÁTERO CIRCUNSCRIPTIBLE

El cuadrilátero se puede circunscribir a un círculo, los lados son tangentes a este círculo.

TEOREMA # 1.

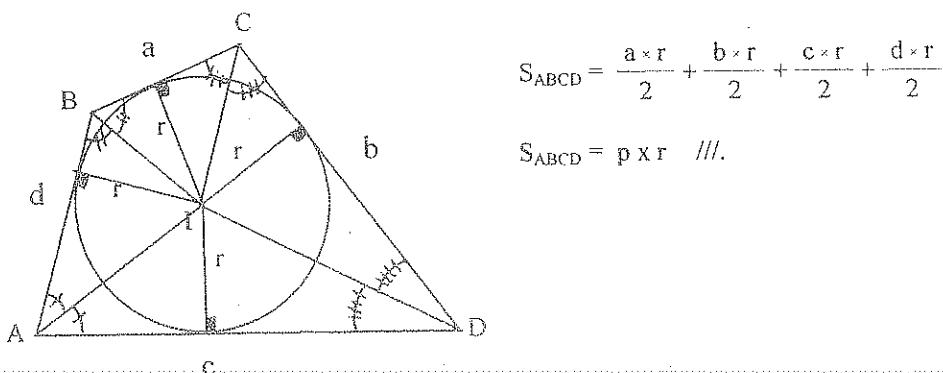
La suma de las longitudes de los lados opuestos es igual a la suma de las longitudes de los otros dos e igual al semiperímetro.



TEOREMA # 2.

El área de un cuadrilátero circunscriptible es igual al semiperímetro por el radio del círculo inscrito.

$$S_{ABCD} = S_{\Delta BIC} + S_{\Delta CID} + S_{\Delta AID} + S_{\Delta AIB}$$

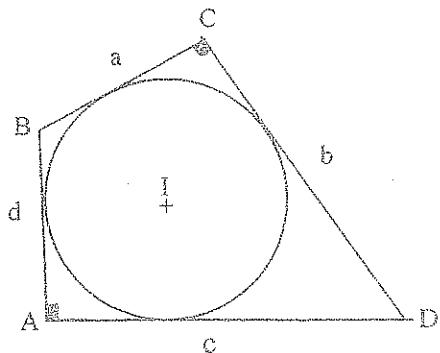


6.14.4. PROPIEDADES PARA DEMOSTRAR QUE UN CUADRILÁTERO ES CIRCUSCRIPTIBLE.

Si la suma de las longitudes de dos lados opuestos es igual al semiperímetro.

6.14.5. CUADRILÁTERO INSCRIPTIBLE Y CIRCUNSCRIPTIBLE A LA VEZ

TEOREMA #1 (SUPERFICIE)



$$(1) \text{ Inscriptible : } S_{ABCD} = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}$$

$$(2) \text{ Circunscriptible : } a+c = b+d = p$$

reemplazando (2) en (1)

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \sqrt{abcd} //.$$

6.14.6. PARALELOGRAMO

Es un cuadrilátero que tiene los lados opuestos paralelos e iguales.

6.14.6.1. PROPIEDADES

1. Las diagonales forman triángulos congruentes: $\Delta ABC \cong \Delta ACD$

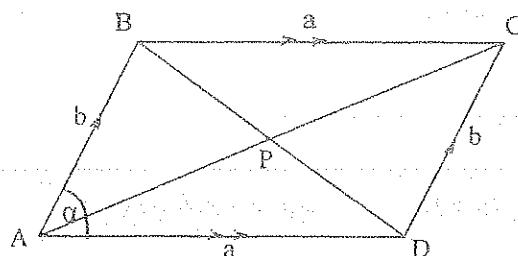
$$\Delta ABD \cong \Delta BCD$$

$$\Delta ABP \cong \Delta PCD$$

$$\Delta BPC \cong \Delta APD$$

2. Las diagonales se bisecan mutuamente: $AP = PC$ y $BP = PD$

2. El área de un paralelogramo es igual al producto de dos lados no paralelos por el seno del ángulo comprendido.

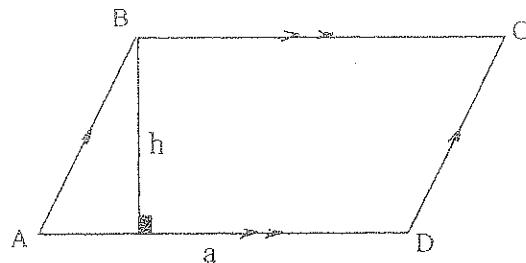


$$S_{ABCD} = 2 S_{\Delta ABD}$$

$$S_{ABCD} = 2 \left(\frac{a \times b \times \operatorname{Sen} \alpha}{2} \right)$$

$$S_{ABCD} = a \times b \times \operatorname{Sen} \alpha //.$$

4. El área de un paralelogramo es igual al producto de un lado por la altura correspondiente.



$$S_{ABCD} = 2 S_{\triangle ABD}$$

$$S_{ABCD} = 2 \frac{a \cdot h}{2}$$

$$S_{ABCD} = a \cdot h \quad //.$$

6.14.7. PROPIEDADES PARA DEMOSTRAR QUE UN CUADRILÁTERO ES UN PARALELOGRAMO

1. Si dos lados opuestos son iguales y paralelos.

2. Si las diagonales se bisecan mutuamente.

6.14.8. ROMBO

Es un paralelogramo que tiene los cuatro lados iguales.

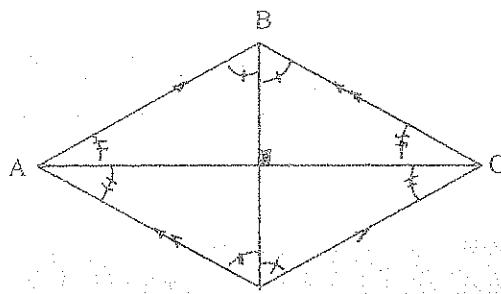
6.14.8.1. PROPIEDADES

1. Las diagonales son perpendiculares entre sí : $AC \perp BD$

2. Las diagonales son bisectrices de los ángulos internos.

3. El rombo es un cuadrilátero circunscriptible; el centro del círculo inscrito es el punto de intersección de las diagonales.

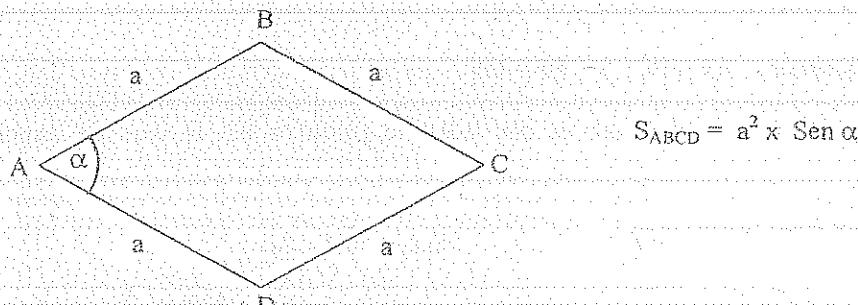
4. El área de un rombo es igual a la mitad del producto de las diagonales.



$$S_{ABCD} = \frac{AC \times BD \times \operatorname{Sen} 90^\circ}{2}$$

$$S_{ABCD} = \frac{AC \times BD}{2}$$

5. El área de un rombo es igual a la longitud de un lado al cuadrado por el seno de un ángulo interno.



$$S_{ABCD} = a^2 \times \operatorname{Sen} \alpha$$

6.14.9. PROPIEDADES PARA DEMOSTRAR QUE UN CUADRILÁTERO ES UN ROMBO

1. Si tiene los cuatro lados iguales.

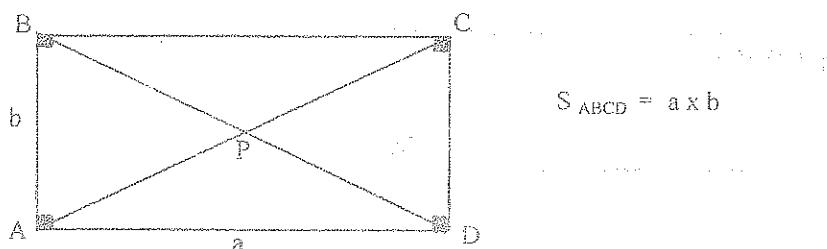
2. Si las diagonales son perpendiculares y se bisecan mutuamente.

6.14.10. RECTÁNGULO

Es un paralelogramo que tiene los cuatro ángulos internos iguales (90°).

6.14.10.1. PROPIEDADES

1. Las diagonales son iguales : $AC = BD$
2. Los cuatro segmentos formados en las diagonales son iguales : $AP = PC = BP = PD$
3. El rectángulo es un cuadrilátero inscriptible, el centro del círculo circunscrito es el punto de intersección de las diagonales.
4. La superficie de un rectángulo es igual al producto de los lados no paralelos.



6.14.11. PROPIEDADES PARA DEMOSTRAR QUE UN CUADRILÁTERO ES UN RECTÁNGULO

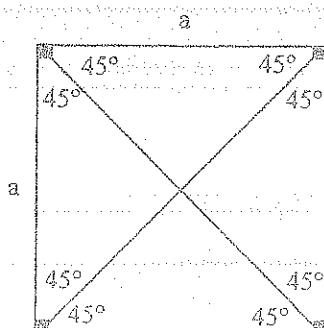
1. Si los cuatro ángulos internos son iguales (90°)
2. Si los cuatro segmentos formados en las diagonales son iguales.

6.14.12. CUADRADO

Es un polígono regular de cuatro lados.

6.14.12.1. PROPIEDADES

1. Tiene todas las propiedades de los polígonos regulares.
2. La superficie de un cuadrado es igual a la longitud de un lado elevado al cuadrado.

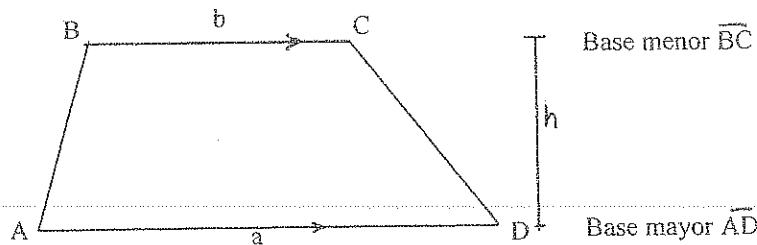


6.14.13. PROPIEDADES PARA DEMOSTRAR QUE UN CUADRILÁTERO ES UN CUADRADO

1. Si tiene todos los lados y todos sus ángulos respectivamente iguales.

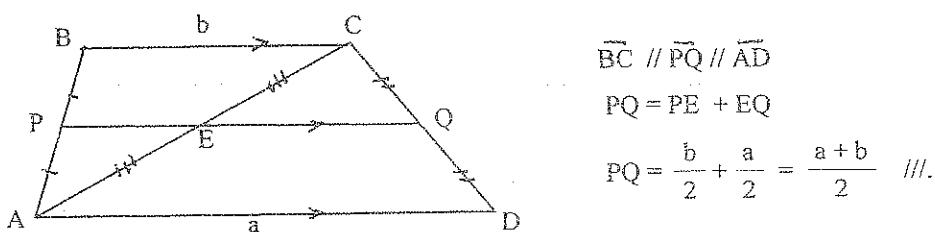
6.14.14. TRAPECIO.

Es un cuadrilátero que tiene dos lados opuestos paralelos.

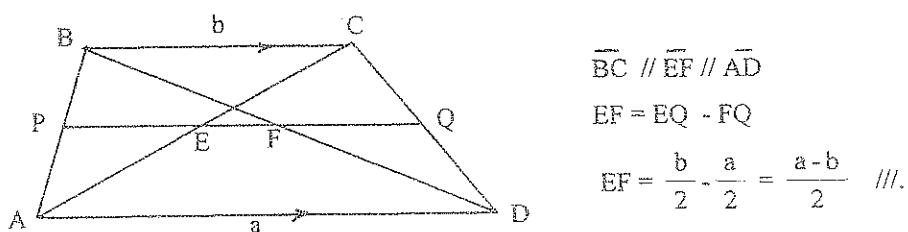


6.14.14.1. PROPIEDADES.

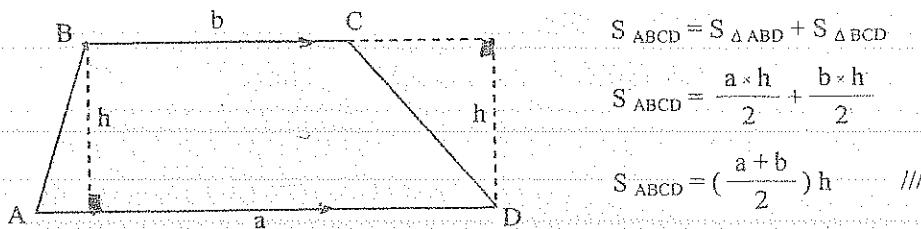
- El segmento que une los lados medios de los lados no paralelos, es paralelo a las bases e igual a la semisuma de las mismas. (**BASE MEDIA**)



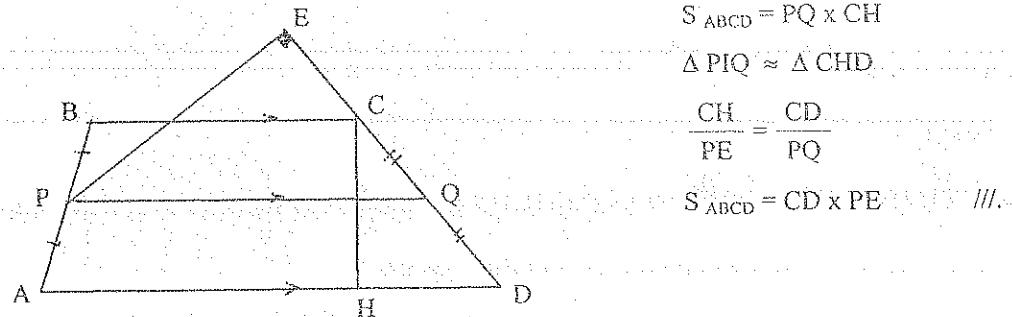
- El segmento que une los puntos medios de las diagonales, es paralelo a las bases e igual a la semidiferencia de las mismas.



- El área de un trapecio es igual a la semisuma de las bases por la altura.



- El área de un trapecio es igual al producto de uno de sus lados no paralelos por la longitud de la perpendicular bajada desde el punto medio del lado opuesto al primero.

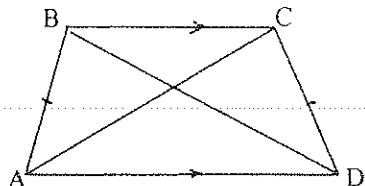


6.14.15. PROPIEDADES PARA DEMOSTRAR QUE UN CUADRILÁTERO ES UN TRAPECIO.

1. Si tiene dos lados opuestos paralelos.

6.14.16. TRAPECIO ISOSCELES

Es un trapecio que tiene los lados no paralelos iguales.



6.14.16.1. PROPIEDADES.

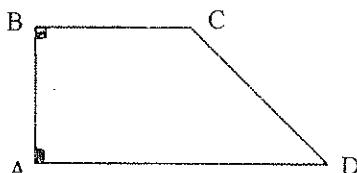
1. Los ángulos en las bases son respectivamente iguales : $\hat{A} = \hat{D}$ y $\hat{B} = \hat{C}$
2. Las diagonales son iguales : $AC = BD$
3. El trapecio isósceles es un cuadrilátero inscriptible.

6.14.17. PROPIEDADES PARA DEMOSTRAR QUE UN CUADRILÁTERO ES UN TRAPECIO ISOSCELES

Si tiene dos lados opuestos paralelos y los otros dos son iguales.

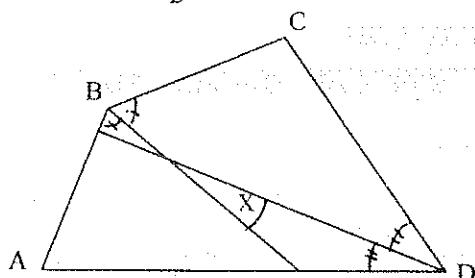
6.14.18. TRAPECIO RECTÁNGULO

Es un trapecio que tiene un lado no paralelo perpendicular a las bases.

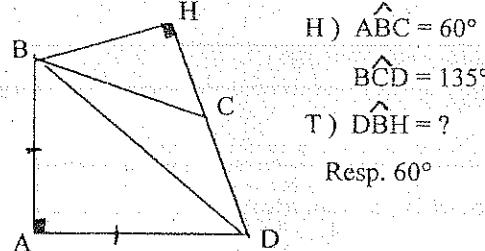


6.14.19. EJERCICIOS

1.- T) $X = \frac{\hat{C} - \hat{A}}{2}$



2.-



H) $\hat{ABC} = 60^\circ$

$\hat{BCD} = 135^\circ$

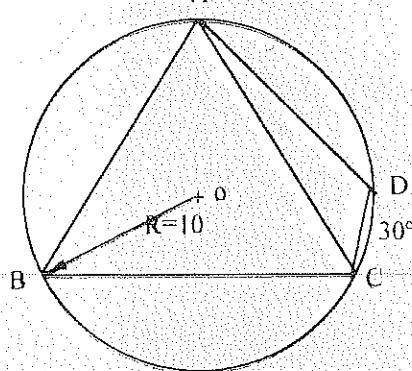
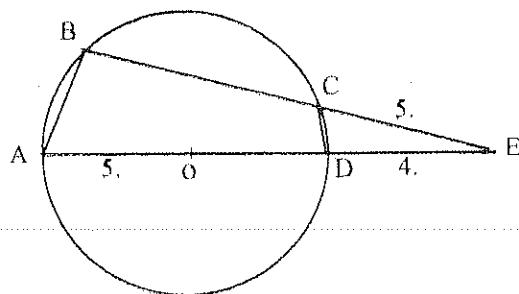
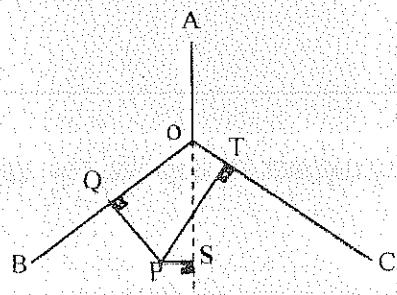
T) $\hat{DBH} = ?$

Resp. 60°

3.- Dados los cuatro lados de un cuadrilátero y una de las diagonales, calcular la otra diagonal: $a = 5 \text{ cm.}$, $b = 7 \text{ cm.}$, $c = 6 \text{ cm.}$, $d = 8 \text{ cm.}$ y la diagonal 8 cm. Resp. 10.41 cm.

4.- En un cuadrilátero ABCD: $\hat{DAB} = 90^\circ$, $\hat{DBC} = 90^\circ$, $DB = a$ y $DC = b$. Hallar la distancia entre los centros de los círculos, si uno pasa por D, A, B y otro por B, C y D.

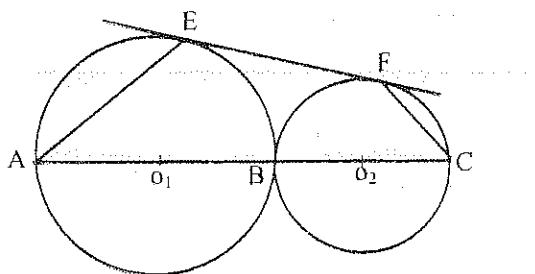
Resp. $\frac{1}{2}\sqrt{b^2 - a^2}$

5.- H) $\triangle ABC$ EquiláteroT) $S_{ABCD} = ?$ Resp. 161.15 u^2 6.- T) $S_{ABCD} = ?$ Resp. 29.85 u^2 7.- H) $\hat{AOB} = \hat{BOC} = \hat{AOC}$ T) $PQ = PT - PS$ 

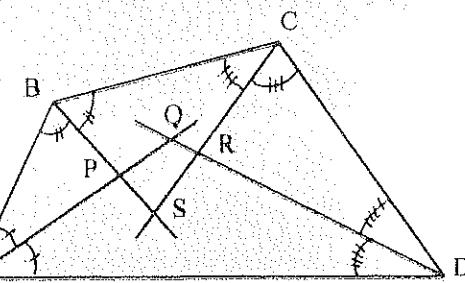
8.-

H) \overline{EF} Tang. Común

T) AEFC Inscriptible

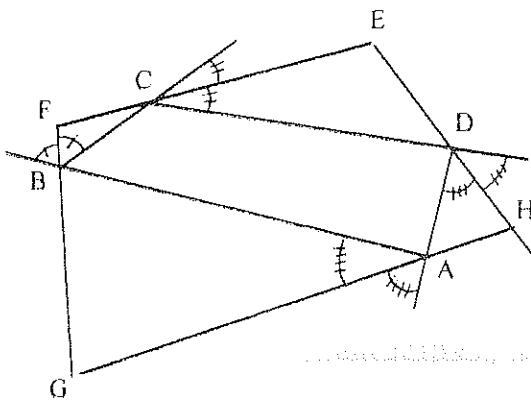


9.-

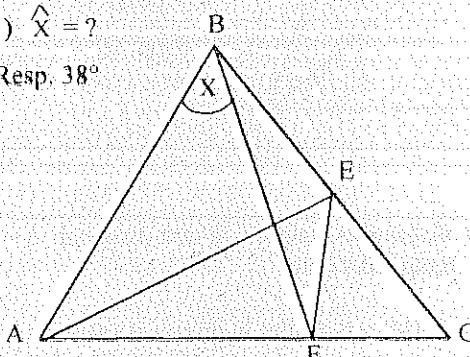


T) PQRS Cuadrilátero Inscriptible

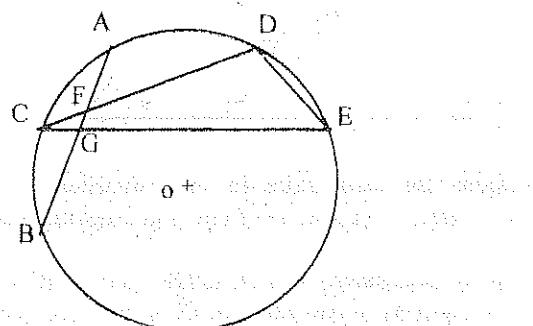
10.-



T) FEHG Cuadrilátero Inscriptible

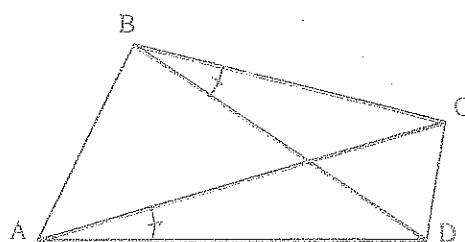
11.- H) $\hat{ABC} = \hat{CFE} = 70^\circ$ $\hat{FAE} = 32^\circ$ T) $\hat{X} = ?$ Resp. 38° 12.- H) $\hat{AC} = \hat{CB}$

T) GFDE Cuadrilátero Inscriptible

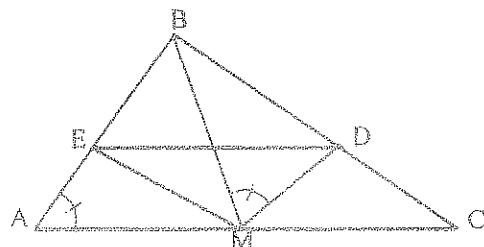
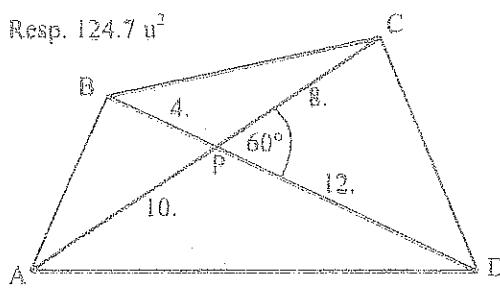


13.-

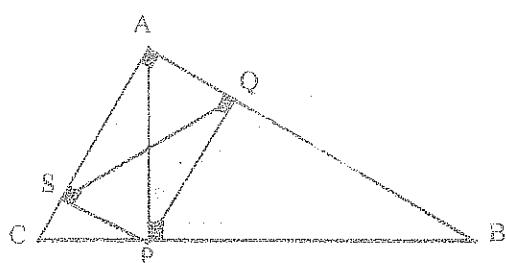
T) ABCD Cuadrilátero Inscriptible

14.- H) $\overline{DE} \parallel \overline{AC}$

T) BDME Cuadrilátero Inscriptible

15.- T) $S_{ABCD} = ?$ Resp. 124.7 u^2 

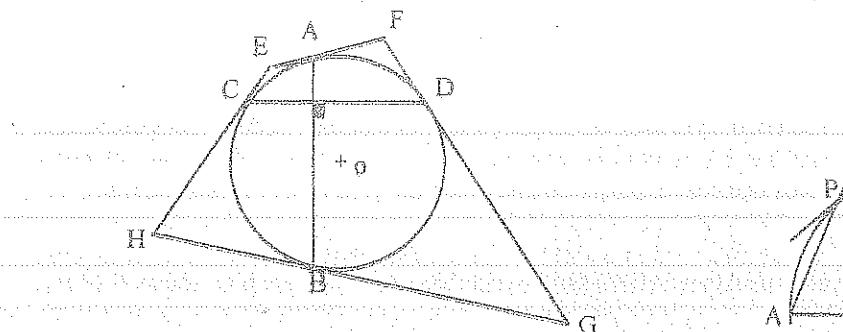
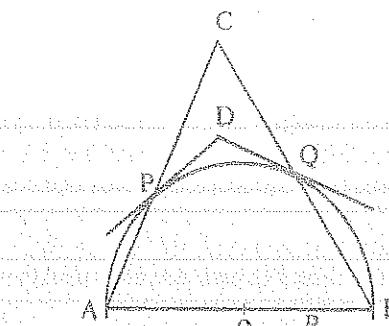
16.- T) CSQB Cuadrilátero Inscriptible

17.- Dados $\hat{A} = 70^\circ$, $\hat{B} = 32^\circ$, $R = 62.43 \text{ m.}$ y $AB = 85.91 \text{ m.}$ Hallar los otros tres lados del cuadrilátero inscriptible.
Resp. 120.33 m. ; 11.92 m. ; 104.14 m. 18.- Encontrar el valor de los ángulos internos del triángulo formado al unir los pies de las tres alturas del triángulo ABC: $\hat{A} = 70^\circ$; $\hat{B} = 85^\circ$.
Resp. 40° , 130° , 10°

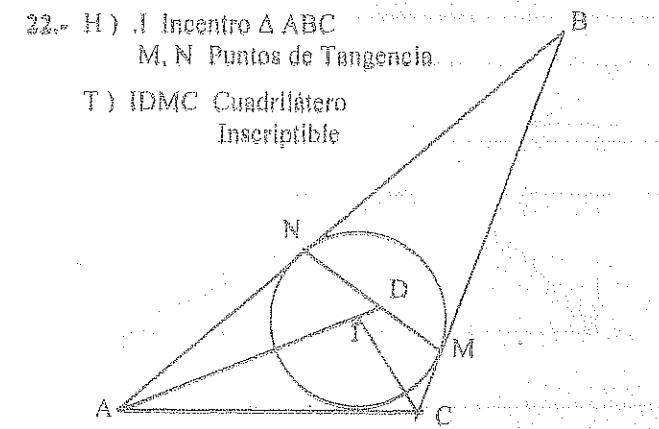
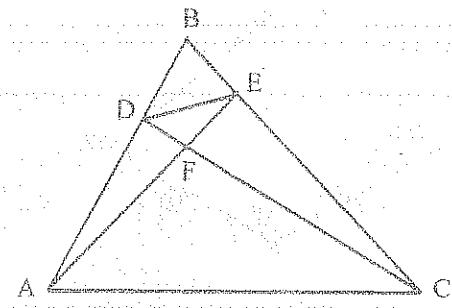
19.- Demostrar que el producto de las distancias de un punto cualquiera M de un círculo a dos lados opuestos de un cuadrilátero inscrito ABCD, es igual al producto de las distancias de este mismo punto a los otros dos lados.

20.- H) A, B, C y D Puntos de Tangencia

T) EFGH Cuadrilátero Inscriptible

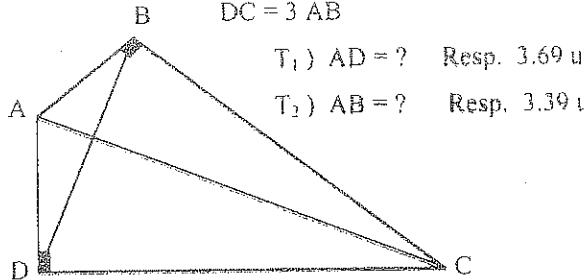
21.- H) $\overline{PD} \sim \overline{QD}$ Tang. $\odot(O, R)$ T) $\hat{P} \hat{D} \hat{Q} = 2 \hat{C}$ 22.- H) I Incentro $\triangle ABC$
M, N Puntos de Tangencia

T) IDMC Cuadrilátero Inscriptible

23.- H) F OrtoCentro $\triangle ABC$
T) ADEC Cuadrilátero Inscriptible

24.-

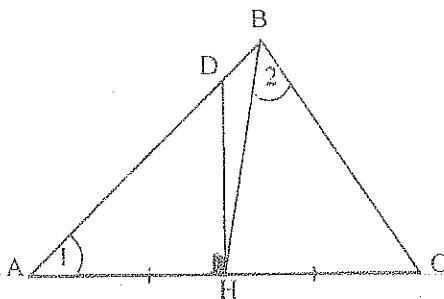
- H) $BD = 7 \text{ u.}$
 $AC = 8 \text{ u.}$
 $DC = 3 AB$



- T₁) $AD = ?$ Resp. 3.69 u.
T₂) $AB = ?$ Resp. 3.39 u

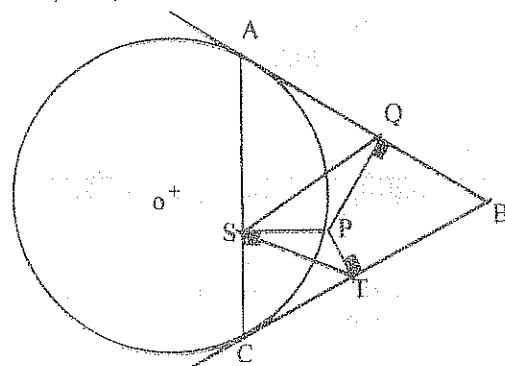
- 25.- H) $\hat{1} + \hat{2} = 90^\circ$

- T) DHCB Cuadrilátero Inscriptible



- 26.- H) AB y BC Tang. $\odot(O, R)$

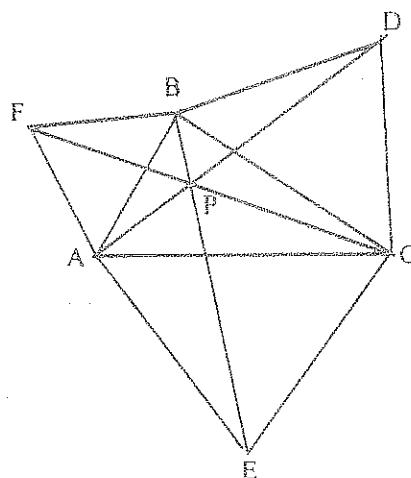
- T) $\Delta QPS \approx \Delta PTS$



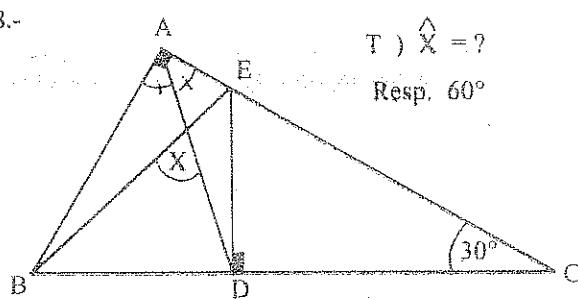
- 27.- H) ΔABC Escaleno

- $\Delta s AFB, BCD$ y AEC Equiláteros

- T) APCE Cuadrilátero Inscriptible.



28.-



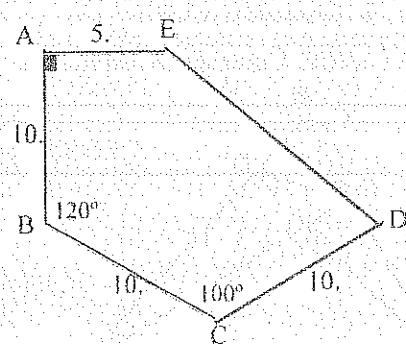
- T) $\hat{X} = ?$

Resp. 60°

- 29.- Desde un punto exterior a un círculo se trazan dos secantes cuyas porciones externas miden 2 m. Determinar el área del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos de intersección de las secantes y el círculo, sabiendo que las longitudes de sus lados opuestos respectivo al punto externo son 6 m. y 2.4 m. Resp. 10.4 m^2

- 30.- En un triángulo ABC de lados: $AC = 14 \text{ m.}$, $BC = 12 \text{ m.}$ y $AB = 10 \text{ m.}$; Q pertenece al lado AC y P pertenece al lado BC. Calcular PQ para que el cuadrilátero ABPQ sea Inscriptible y Circunscriptible. Resp. 4.44 m.

- 31.- T) $S_{ABCDE} = ?$ Resp. 144.73 u^2

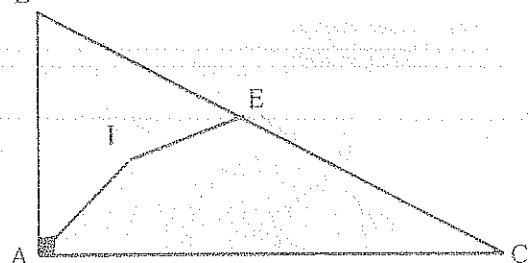


32.-

- H) I Incentro ΔABC

$BA = BE$

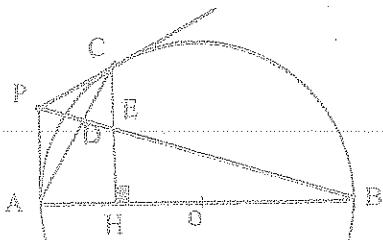
- T) AIEC Cuadrilátero Inscriptible



33.-

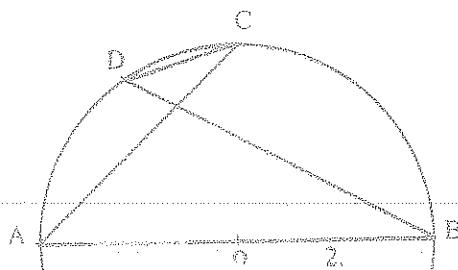
- H) \overline{AP} y \overline{CP} Tang. $\odot(O, R)$
 $AP = R/2$

- T₁) $AD = ? f(R)$ Resp. $0.5R$
T₂) $DE = ? f(R)$ Resp. $0.18R$



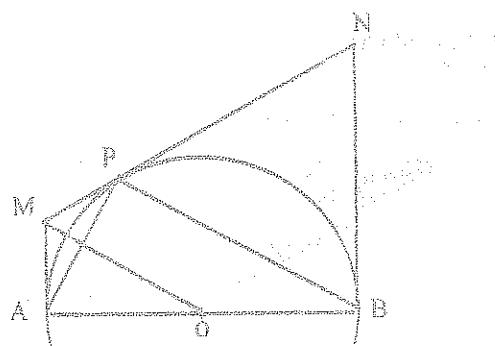
- 34.- H) $BD = l_3$
 $AC = l_4$

- T) DC = ? Resp. 1.14 u.



- 35.- H) \overline{AM} , \overline{MN} y \overline{NA} Tang. $\odot(O, R)$
 $MA = R/2$

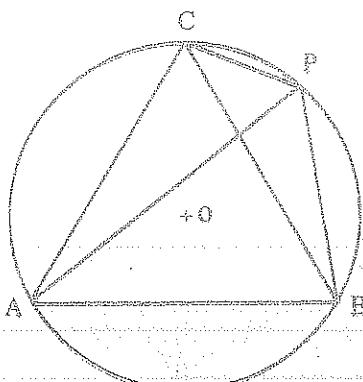
- T₁) $MO = ?$ Resp. $1.118R$
T₂) $AP = ?$ Resp. $0.89R$
T₃) $ON = ?$ Resp. $2.236R$
T₄) $PB = ?$ Resp. $1.78R$



- 36.- H) $\triangle ABC$ Equilátero

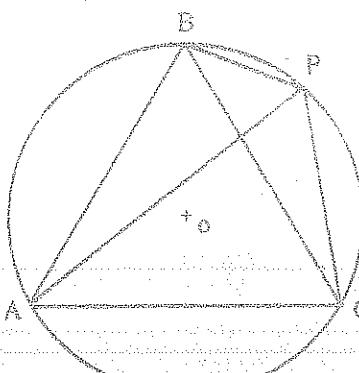
$$BP \neq PC$$

$$T) PA^2 + PB^2 + PC^2 = 2AB^2$$



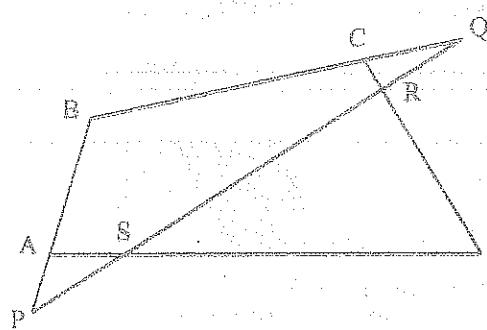
- 37.- H) $\triangle ABC$ Equilátero

$$T) AP = BP + CP$$



- 38.- H) $AP \cdot BQ \cdot CR \cdot DS = ?$

$$T) \frac{AP \cdot BQ \cdot CR \cdot DS}{PB \cdot QC \cdot RD \cdot SA} = 1$$

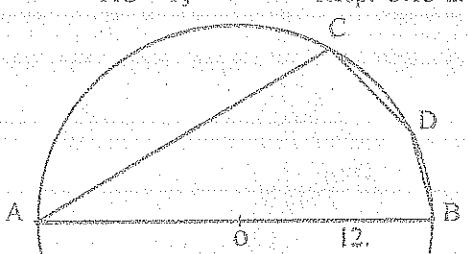


- 39.- H) $CD = l_8$

$$AC = l_3$$

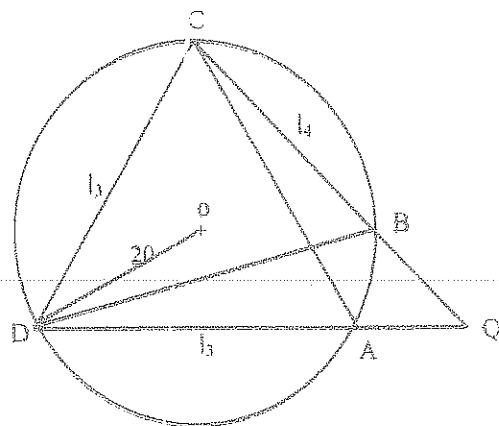
- T) $DB = ?$

Resp. 3.13 u.

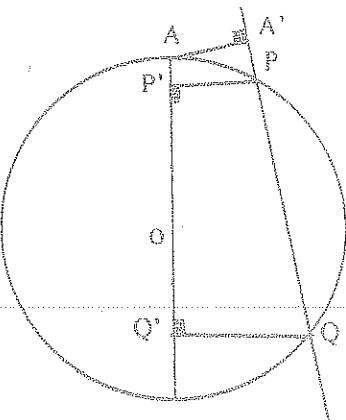


40.- T) $AC; AB; BD; AQ; QB = ?$

Resp. 34.6; 10.36; 38.6; 12.68; 14.15 u.

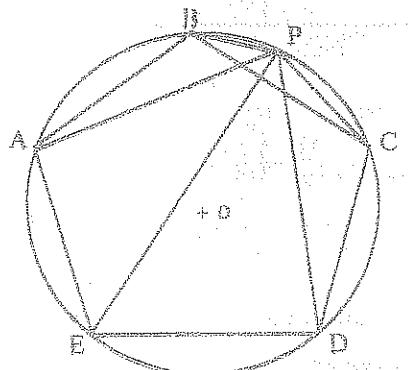


41.- T) $AA'^2 = AP \times AQ'$



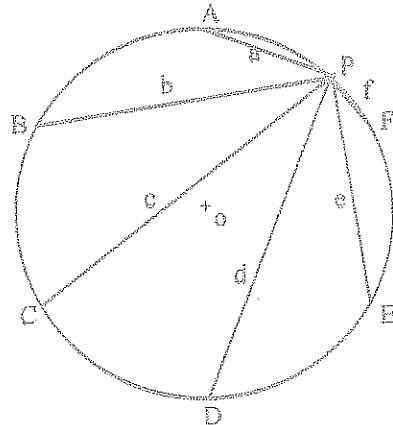
42.- H) ABCDE Regular
 $\widehat{BP} \neq \widehat{PC}$

T) $PB + PE + PC = PA + PD$

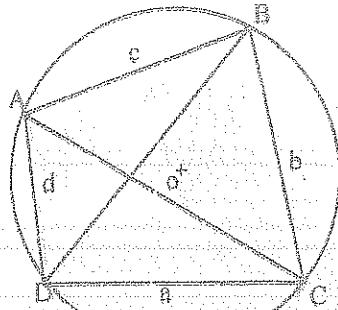


43.- H) $\widehat{AB} = \widehat{BC} = \widehat{CD} = \widehat{DE} = \widehat{EF} = \widehat{FA}$
 $\widehat{AP} \neq \widehat{PF}$

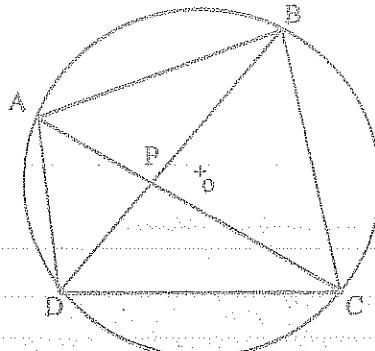
T) $a + b + e + f = c + d$



44.- T) $\frac{BD}{AC} = \frac{a.d + b.c}{d.e + a.b}$



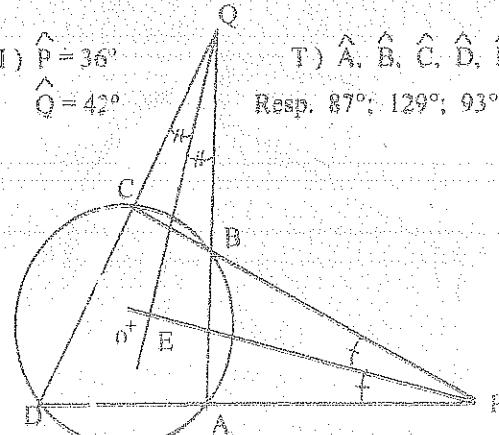
45.- T) $AB \times BC \times PD = AD \times CD \times BP$



46.- H) $\widehat{P} = 36^\circ$
 $\widehat{Q} = 42^\circ$

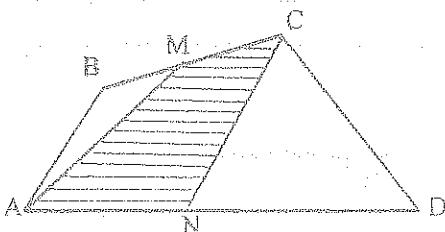
T) $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}, \widehat{D}, \widehat{E} = ?$

Resp. $87^\circ; 129^\circ; 93^\circ; 51^\circ; 90^\circ$

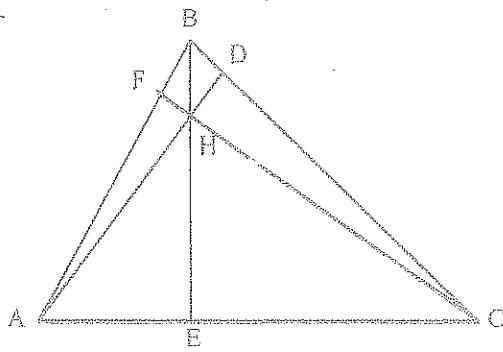


47.- H) $AN = ND$
 $BM = MC$

T) $S_{\text{III}} = \frac{S_{ABCD}}{2}$

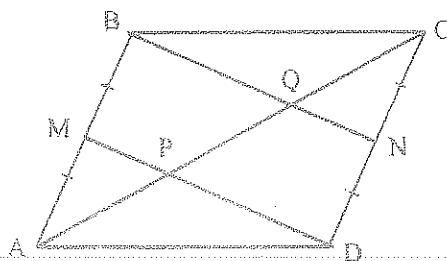


48.-



49.- H) ABCD Paralelogramo

T) $AP = PQ = QC$

H) H Ortocentro $\triangle ABC$

T) $2(AD_xAH + BE_xBH + CF_xCH) = AB^2 + BC^2 + AC^2$

50.- Calcular los lados de un cuadrilátero circunscriptible en un círculo, dados el perímetro $2p$ y la suma de los cuadrados de los lados, siendo las diagonales rectangulares.

Resp. $\frac{p \pm \sqrt{m^2 - p^2}}{2}$

51.- Calcular la superficie de un cuadrilátero inscriptible de lados $a = 54.2$ m., $b = 63$ m., $c = 26$ m., $d = 18.2$ m.

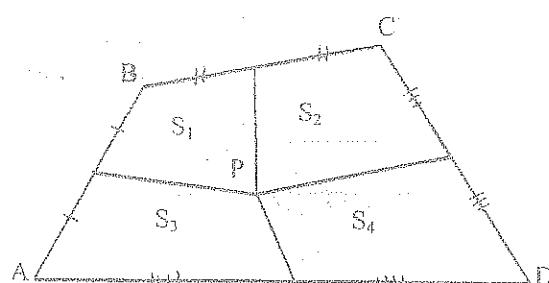
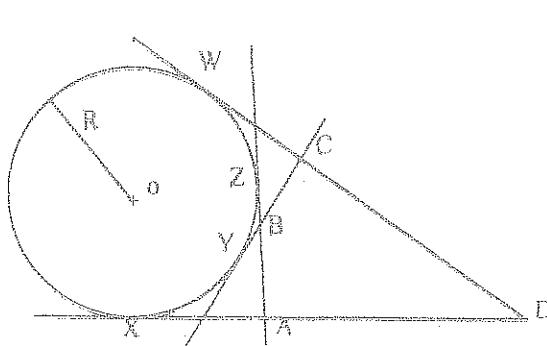
Resp. 1266.32 m^2

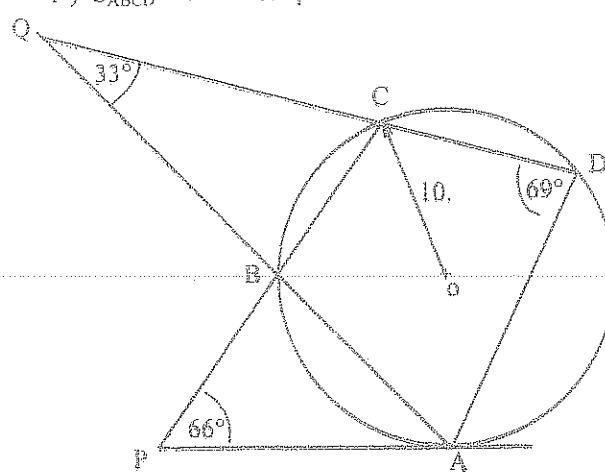
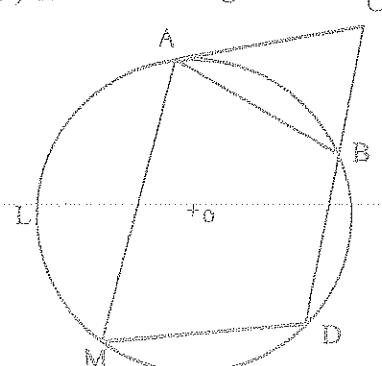
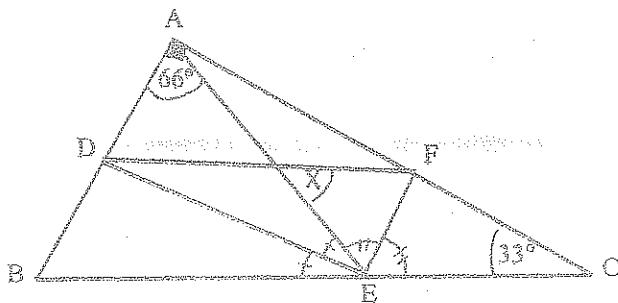
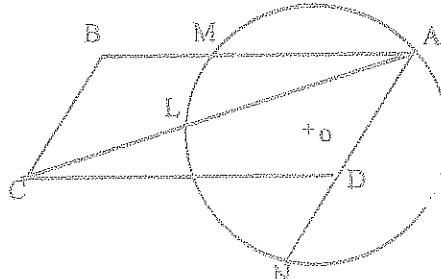
52.- Dados los lados $a = 12$ u ; $b = 16$ u ; $c = 25$ u se construyen ha y hb. Calcular la superficie del cuadrilátero formado al unir A y B los pies de ha y hb. Resp. 199.34 u^2 53.- En un círculo de radio 10, está inscrito un triángulo equilátero ABC, en el arco BC se toma un punto P tal que : $BP = \frac{2}{3} R$. Hallar el área del cuadrilátero ABPC. Resp. 167.42 u^2 54.- Dos ángulos opuestos de un cuadrilátero circunscriptible a un círculo de radio 12 m. son de 90° y otro de los ángulos mide 120° . Calcular el área del cuadrilátero. Resp. 620.5 m^2 55.- Calcular las longitudes de los lados de un cuadrilátero de 20 m^2 de superficie y circunscripto a un círculo de 2 m de radio siendo rectos dos de sus ángulos opuestos. Resp. 7.23 m.; 7.23 m.; 2.76 m.; 2.76 m.56.- En un triángulo de lados $a = 91$ m., $b = 125$ m., y $c = 204$ m., se prolonga c en sentido AB y en una longitud de 40 m y se toma sobre b un punto distante 50 m. de C. Se traza la recta que determina este punto y el extremo de la citada prolongación, y se desea saber cuál es el área del cuadrilátero convexo que se forma. Resp. 2423.85 m^2

57.- Si por los vértices de un cuadrilátero se trazan paralelas a sus diagonales, resulta un cuadrilátero de área doble del dado.

58.- H) $\overline{DX}, \overline{CY}, \overline{AZ}$ y \overline{DW} . Tangs. $\odot(O, R)$ 59.- T) $S_1 + S_4 = S_3 + S_2$

T) $AD - BC = CD - AB$



60.- H) \overline{PA} Tang. $\odot(O, 10)$ T) $S_{ABCD} = ?$ Resp. 180.34 m^2 61.- H) \overline{AC} Tang. $\odot(O, R)$ $AC = AB$ $\widehat{ALM} = \widehat{MDB}$ T) $ACDM$ Paralelogramo62.- T) $\hat{X} = ?$ Resp. 52.5° 63.- H) $ABCD$ ParalelogramoT) $AC \times AL = AB \times AM + AD \times AN$ 

64.- En un triángulo isósceles de base 4 cm y la altura 6 cm se ha construido un semicírculo con uno de los lados como diámetro. Los puntos que el semicírculo corta a la base y al otro lado se une mediante una recta. Determine el área del cuadrilátero así obtenido que está inscrito en el semicírculo. Resp. 10.88 cm^2

65.- De un cuadrilátero ABCD inscrito en un círculo, se conocen $AB = 7 \text{ m.}$, $BC = 15 \text{ m.}$, $AD = 4.5 \text{ m.}$. La tangente trazada al círculo desde el punto de encuentro de los lados BC y \overline{AD} prolongados miden 10 m. Calcular el área. Resp. 90.93 m^2

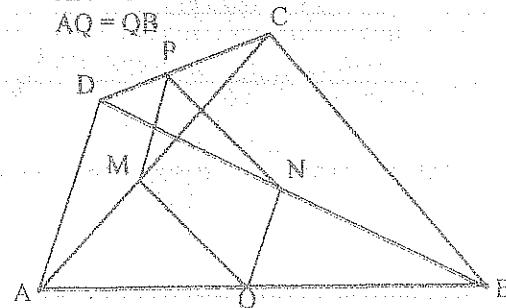
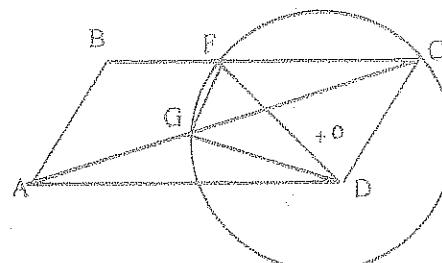
66.- Desde un punto exterior a un círculo se trazan dos secantes cuyas porciones externas miden 2 m. Determinar el área del cuadrilátero cuyos vértices son los puntos de intersección de las secantes y el círculo, sabiendo que las longitudes de sus lados opuestos respecto al punto externo son 6 m. y 2.4 m.. Resp. 10.08 m^2

67.- En un paralelogramo ABCD se da un lado $AB = 4 \text{ m.}$, $\hat{B} = 30^\circ$ y el ángulo que forman las diagonales es de 143° . Hallar los demás elementos. Resp. 4.46 m. ; 7.46 m. ; 11.10 m.

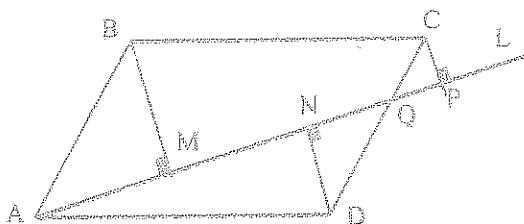
68.- H y O son el ortocentro y el circuncentro de un triángulo ABC escaleno. P y L son los puntos medios de \overline{AH} y \overline{BC} . Demostrar que \overline{PO} y \overline{AL} se bisecan.

69.- H) $DP = PC$
 $DN = NB$
 $AM = MC$
 $AQ = QB$

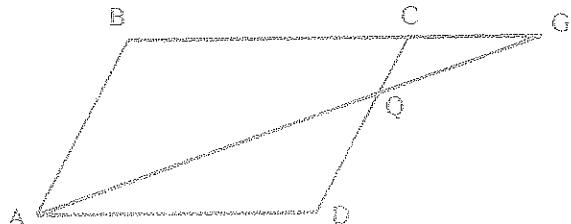
T) $PMQN$ es un
Paralelogramo

70.- H) $ABCD$ ParalelogramoT) $AC \times GE = EF \times AD$ 

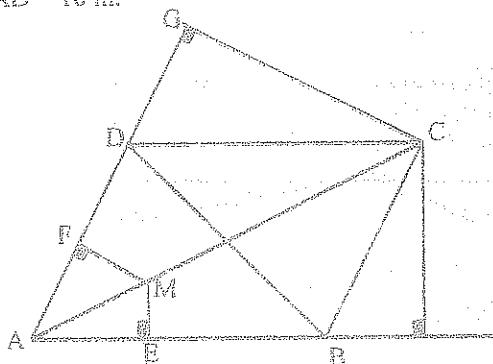
- 71.- H) ABCD Paralelogramo
T) $ND = BM - CP$



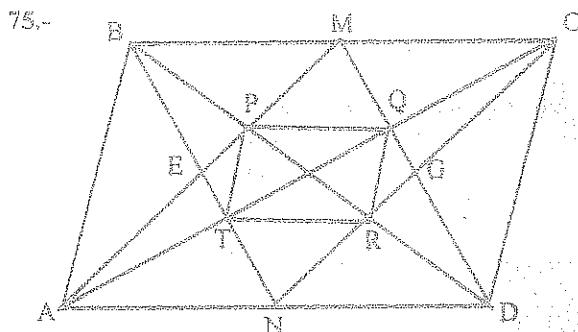
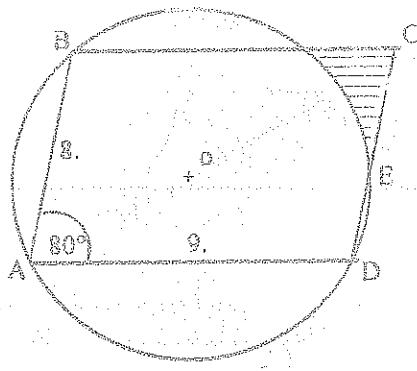
- 72.- H) ABCD Paralelogramo
T) $CG = AD/2$
 $CQ = DQ/2$



- 73.- H) ABCD Paralelogramo
ME = 3 m
MF = 6 m.
AD = 10 m.
- T) $AB = ?$
Resp. 20 m.



- 74.- H) ABCD Paralelogramo
T) $S_{III} = ?$
Resp. 1.47 u^2



H) ABCD Paralelogramo

$$AN = ND$$

$$BM = MC$$

$$S_{ABCD} = a^2$$

$$T_1) S_{EMON} = a^2/4$$

$$T_2) S_{PQRT} = a^2/9$$

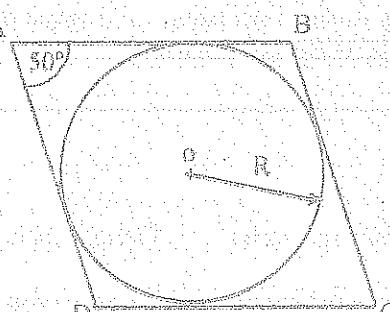
- 76.- Los lados de un paralelogramo son 10 u. y 6 u. el ángulo que forman las dos diagonales 40° . Determinar el área de paralelogramo.
Resp. 26.85 u^2

- 77.- La superficie de un rombo es 100 cm^2 y su ángulo interno es 50° . Calcular el radio del círculo inscrito.
Resp. 4.37 cm

- 78.- H) ABCD Paralelogramo

$$S \odot = 314.14 \text{ u}^2$$

$$T) S_{ABCD} = ? \quad \text{Resp. } 522.20 \text{ u}^2$$

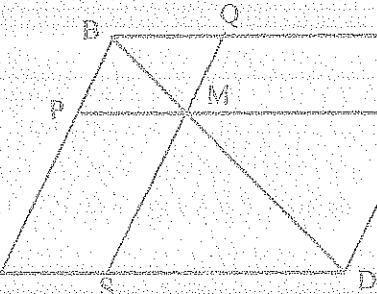


- 79.- H) ABCD Paralelogramo

$$PR \parallel AD$$

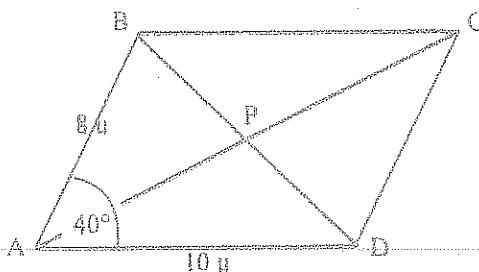
$$QS \parallel AB$$

$$T) S_{APMS} = S_{CRMQ}$$



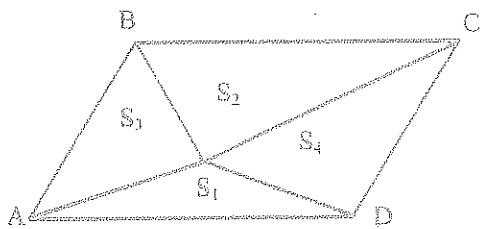
80.- H) ABCD Paralelogramo

T) $S_{\triangle BPC} = ?$ Resp. 12.85 u^2



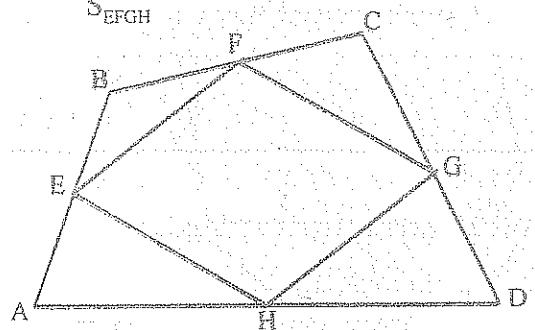
81.- H) ABCD Paralelogramo

T) $S_1 + S_2 = S_3 + S_4$



82.- H) E, F, G, H Puntos Medios

T) $\frac{S_{ABCD}}{S_{EFGH}} = ?$ Resp. 2



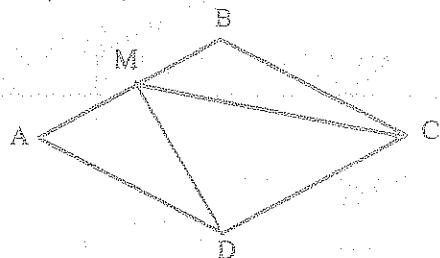
83.- H) ABCD Rombo

AM = MB

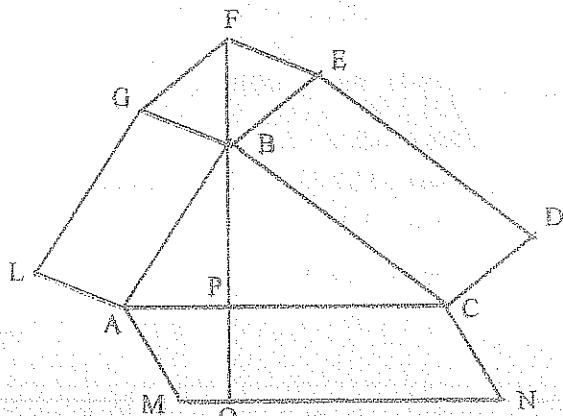
MC = 9 m.

MD = 13 m.

T) $S_{ABCD} = ?$ Resp. 89.8 m^2



84.-



H) Paralelogramos : BEDC

CNMA

BGLA

BP = PQ

T) $S_{ACNM} = S_{BEDC} + S_{BGLA}$

85.- El área de un paralelogramo es de 168 m^2 y los lados contiguos miden 10 m y 17 m . Si el área del paralelogramo semejante es 27 m^2 , cuánto mide la diagonal mayor? Resp. 8.4 m .86.- En un paralelogramo se dan : el ángulo agudo \hat{a} y las distancias m y n entre el punto de intersección de las diagonales y los lados desiguales. Determinar el área del paralelogramo.

Resp. $\left(\frac{4mn}{\operatorname{Sen} a} \right)$

87.- Se trazan perpendiculares desde el vértice del ángulo obtuso de un rombo a sus lados. La longitud de cada perpendicular es igual a a siendo la distancia entre sus pies b . Hallar el área del rombo.

Resp.
$$\frac{2a^4}{b\sqrt{4a^2 - b^2}}$$

88.- Dado un rombo de lado 15 u . y ángulo de 75° . Hallar el radio del círculo inscrito. Resp. 7.24 u .89.- El lado de un rombo mide 20 u . y la suma de sus diagonales es 56 u . Calcular el lado del triángulo equilátero equivalente al rombo. Resp. 29.78 u

90.- Si la superficie de un rombo es 200 u^2 , el radio del círculo inscrito 5 u. Calcular un ángulo interno.

Resp. 30°

91.- Calcular el área común de dos rombos, en el primero de los cuales las diagonales son de 2 m. y de 3 m, mientras que el segundo se obtiene al girar el primero 90° alrededor de su centro. Resp. 2.4 m^2

92.- El perímetro y las diagonales de un rombo suman 34 m. y la relación entre el lado y una diagonal es igual a $\frac{5}{6}$. Hallar el área del rombo. Resp. 24 m^2

93.- El área de un rombo es S y la suma de sus diagonales es m . Hallar el lado del rombo.

$$\text{Resp. } \frac{1}{2} \sqrt{m^2 - 4S}$$

94.- El perímetro de un rombo es igual a 140 y la suma de sus diagonales es 100. Hallar el área del rombo.

$$\text{Resp. } 1275 \text{ u}^2$$

95.- Hallar el área de un rombo sabiendo que las proyecciones de las diagonales sobre uno de sus lados miden 1.5 y 6.4. Resp. 12.25 u^2

96.- Las proyecciones de las diagonales de un rombo sobre una recta que forma un ángulo de 30° con la diagonal mayor, miden 40 m. y 12 m. Calcular el área del rombo. Resp. 554.26 m^2

97.- La superficie de un rombo es de 96 m^2 y su lado de 10 m. Calcular el área de otro rombo semejante al anterior, cuya diagonal menor es de 15 m. Resp. 150 m^2

98.- H) Área del Rombo = Q

Área del Círculo = S

T) Hallar los ángulos del Rombo

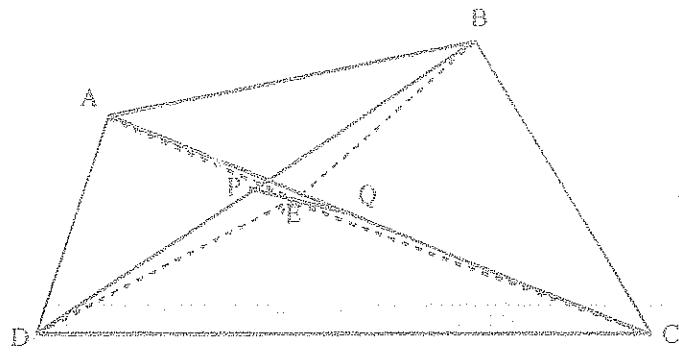
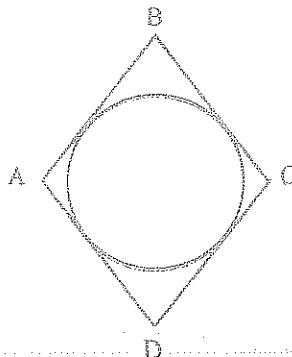
$$\text{Resp. } \text{arc } \text{Sen} \frac{45}{\pi Q}$$

99.- H) BP = PD

AQ = QC

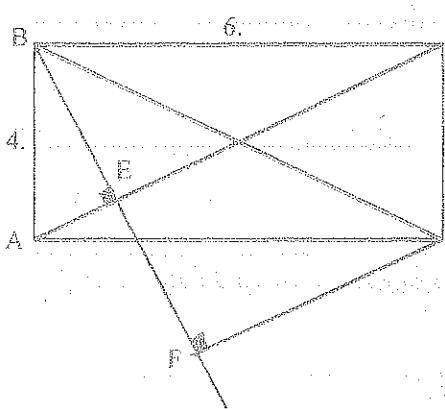
E ∈ PQ

$$T) S_{AED} + S_{BEC} = S_{AEB} + S_{DEC}$$



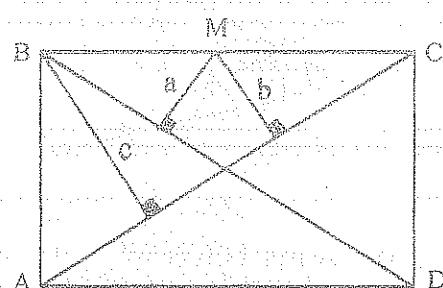
100.- H) ABCD Rectángulo

T) FD = ? Resp. 2.75 u.

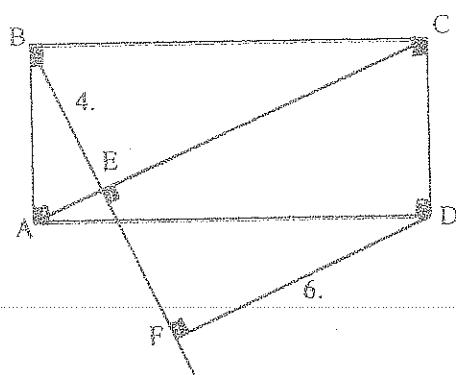


101.- H) ABCD Rectángulo

T) $c = a + b$

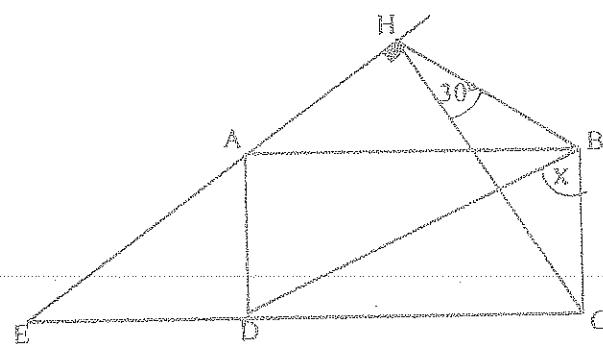


102.- T) $S_{ABCD} = ?$ Resp. 40 u^2



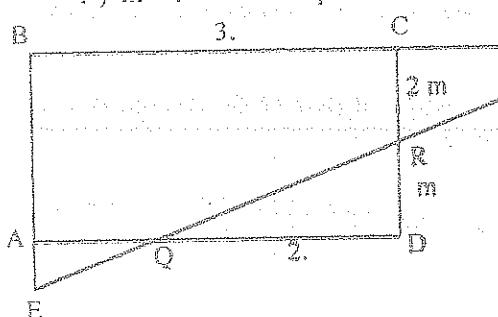
H) ABCD Rectángulo

T) $\hat{x} = ?$ Resp. 60°

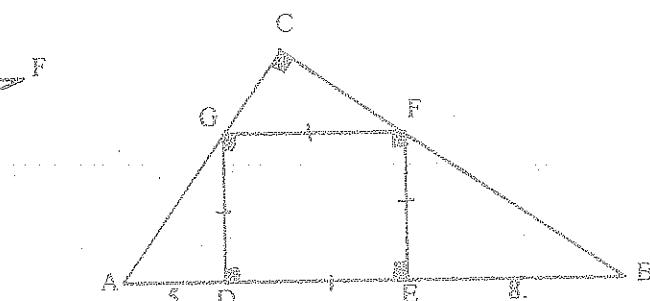


104.- H) ABCD Rectángulo

T) $m = ?$ Resp. 1.15



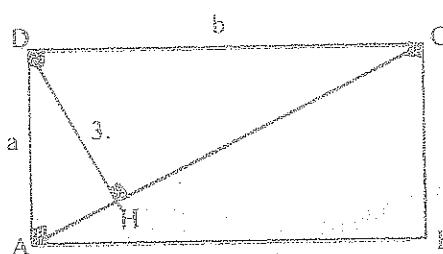
105.- T) $S_{DGFE} = ?$ Resp. 40 u^2



106.- H) ABCD Rectángulo

$$a + b = 50 \text{ u}$$

T) $S_{ABCD} = ?$ Resp. 141.27 u^2

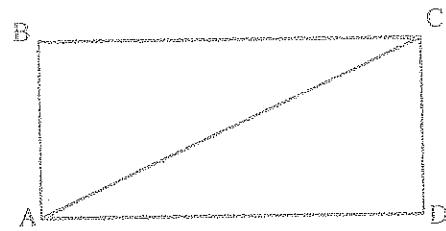


107.- H) ABCD Rectángulo

$$AC - AD = 2 \text{ m.}$$

$$AB + BC = 84 \text{ m.}$$

T) $S_{ABCD} = ?$ Resp. 1116.3 m^2



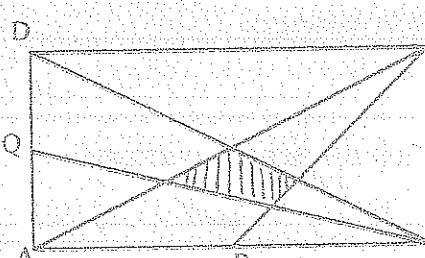
108.- H) ABCD Rectángulo

$$AP = PB = 8 \text{ m.}$$

$$AQ = QD = 6 \text{ m.}$$

T) $S_{\text{shaded}} = ?$

Resp. 9.6 m^2



109.- H) $S_{\triangle ADE} = S_{\square DBFG}$

T) $S_{\triangle ABC} = ?$

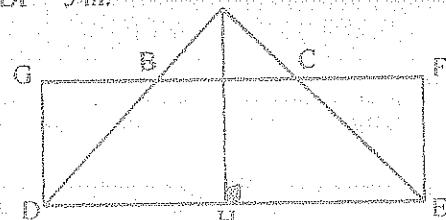
$\triangle ABC$ Isósceles

$\square DBFG$ Rectángulo

Resp. 0.62 m^2

$$HA = 1 \text{ m.}$$

$$DF = 5 \text{ m.}$$



110.- En un paralelogramo ABCD: $AB = 10 \text{ u}$; $BC = 4 \text{ u}$; $A = 60^\circ$; se trazan las bisectrices de los cuatro ángulos internos formando el cuadrilátero PQST. Encontrar la superficie del cuadrilátero PQST.

$$\text{Resp. } 15.58 \text{ u}^2$$

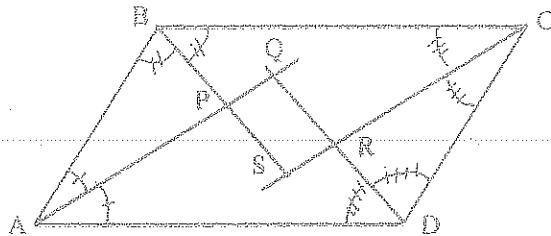
111.- El perímetro de un triángulo rectángulo es 132 m. y la suma de los cuadrados de los lados 6050 m^2 . Hallar los lados.

$$\text{Resp. } 55 \text{ m}; 33 \text{ m}; 44 \text{ m.}$$

- 112.- En un rectángulo ABCD, por el centro O del círculo inscrito al triángulo ABC se trazan las perpendiculares OM al lado AD y ON al lado DC. Calcular el área del cuadrilátero OMDN, sabiendo que el área del rectángulo dado es de 100 m^2 .
Resp. 50 m^2

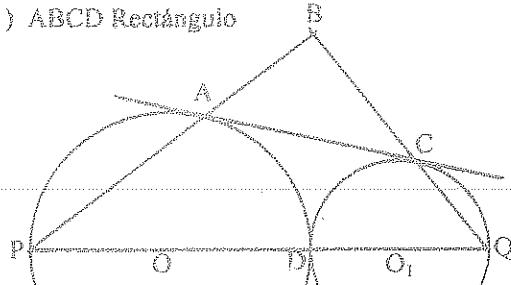
113.- H) ABCD Paralelogramo

T) PQRS Rectángulo



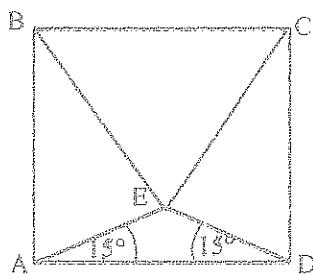
114.- H) AC Tang. Común

T) ABCD Rectángulo



115.- H) ABCD Cuadrado

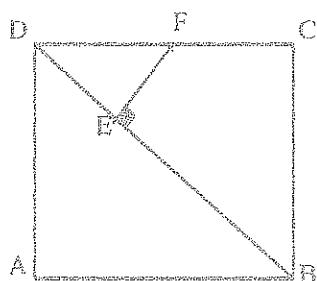
T) $\triangle EBC$ Equilátero



116.- H) ABCD Cuadrado

$$BE = BC$$

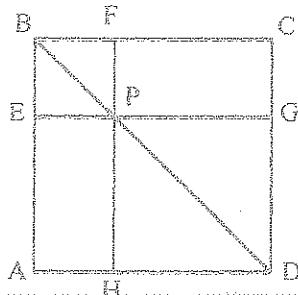
T) $DE = EF = FC$



117 H) ABCD Cuadrado

$$\begin{aligned} EG &\parallel AD \\ FH &\parallel AB \end{aligned}$$

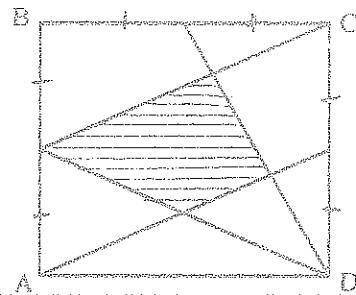
T) EFGH Inscriptible



118.- H) ABCD Cuadrado

$$S_{III} = 360 \text{ u}^2$$

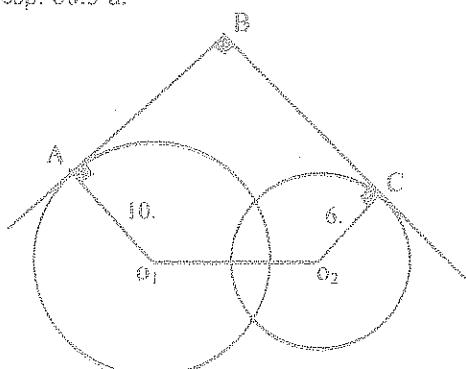
T) $AB = ?$ Resp. 40 u.



119.- H) $O_1O_2 = 12 \text{ u.}$

T) Perímetro del Polígono O_1ABCO_2

Resp. 60.5 u.



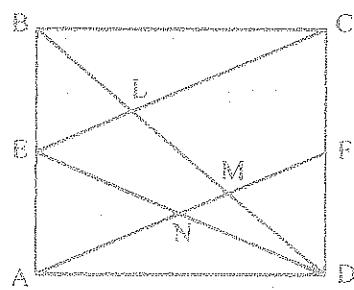
120.- H) ABCD Cuadrado

E y F Puntos Medios

$$S_{ELMN} = 8 \text{ u}^2$$

T) $AB = ?$

Resp. 6.5 u.



121.- Si en un paralelogramo se trazan las bisectrices interiores y exteriores, demostrar que se verifica :

1) Las bisectrices interiores forman un rectángulo y las exteriores otro rectángulo.

2) El área del rectángulo exterior es igual al doble del paralelogramo más el rectángulo interior.

122.- Se inscribe un círculo en un rombo de lado 10 y ángulo agudo 60° , determinar el área de un rectángulo cuyos vértices son los puntos de tangencia del círculo y los lados del rombo. Resp. 32 u^2

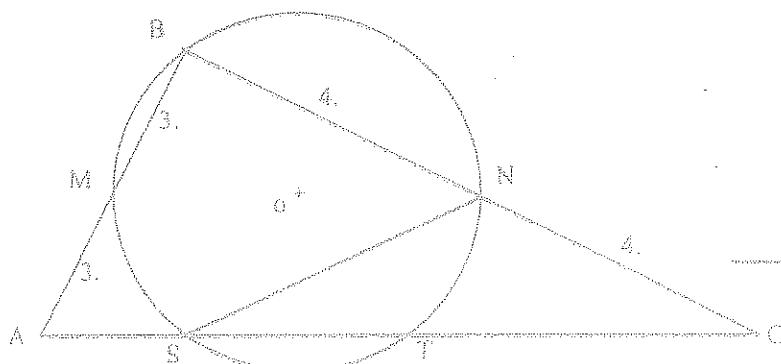
123.- Si la superficie de un rectángulo es 120 u^2 y su perímetro es 46 u ; hallar su diagonal. Resp. 17 u

124.- En un cuadrado de lado 10 u. se inscribe otro cuyo vértices están sobre los lados del primero. Determinar los segmentos en que los vértices del segundo cuadrado dividen a los lados del primero, sabiendo que el área del segundo vale $25/49$ del área del primero. Resp. 4.29 u. ; 5.71 u.

125.- El lado de un triángulo equilátero es a . Hallar el área del triángulo equilátero que está inscrito en el cuadrado inscrito en el triángulo original. Resp. $0.1 a^2$

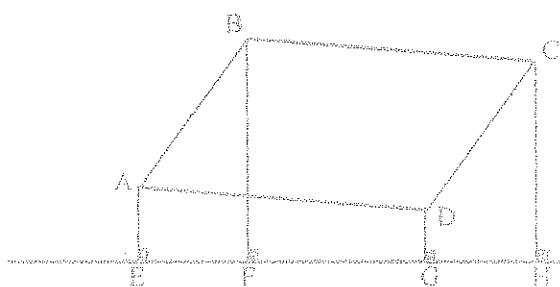
126.- H) $AT = TC$

T) $SN = ?$ Resp. 4.



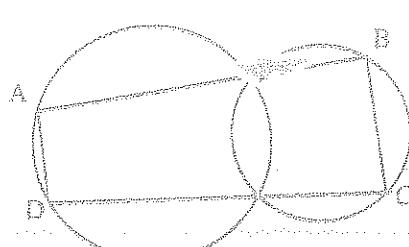
127.- H) ABCD Paralelogramo

T) $BF + DG = AE + CH$



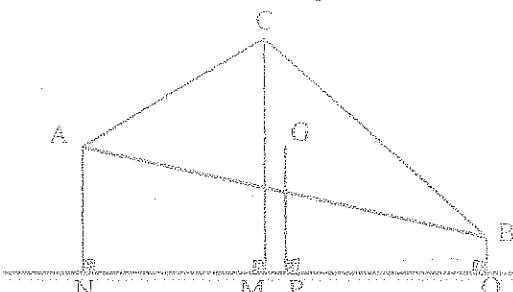
128.- H) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

T) ABCD Paralelogramo



129.- H) G Baricentro $\triangle ABC$

T) $GP = \frac{AN + BQ + CM}{3}$

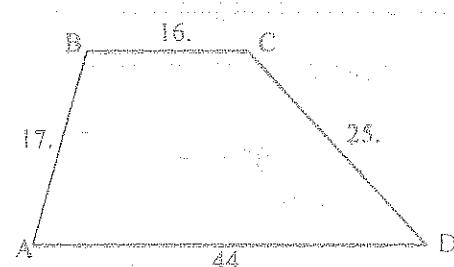


130.- H) ABCD Trapecio

T₁) $AC = ?$ Resp. 28.3 m.

T₂) $DB = ?$ Resp. 39 m.

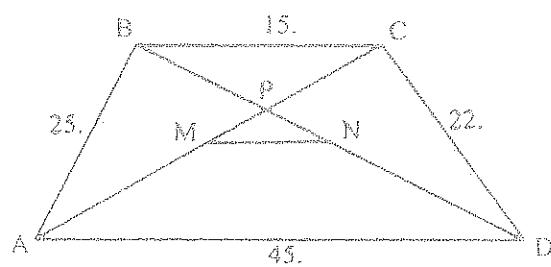
T₃) $S_{ABCD} = ?$ Resp. 450 m^2



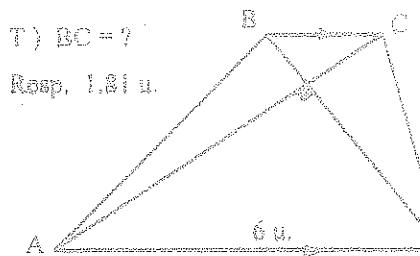
131.- H) ABCD Trapecio

M y N Puntos Medios de las Diagonales

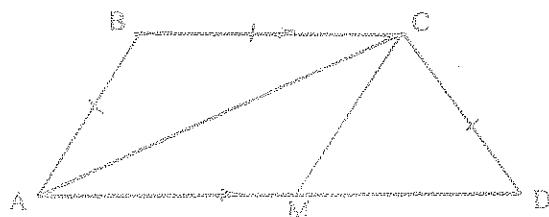
T) $PM = ?$ Resp. 9.25



- 132.- H) $AC = 6 \text{ u.}$
 $BD = 5 \text{ u.}$

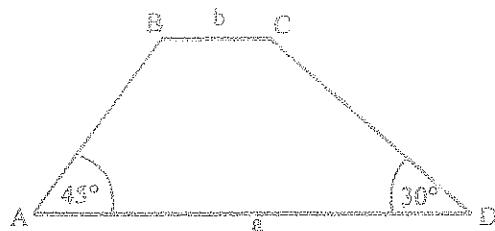


- 133.- H) $AM = MC = MD = 16 \text{ u.}$
T) $S_{ABCD} = ?$ Resp. 332.4 u^2



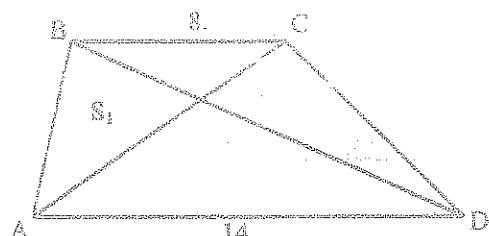
- 134.- H) ABCD Trapecio

T) $S_{ABCD} = ?$ Resp. $\frac{a^2 - b^2}{4} (\sqrt{3} - 1)$



- 135.- H) ABCD Trapecio

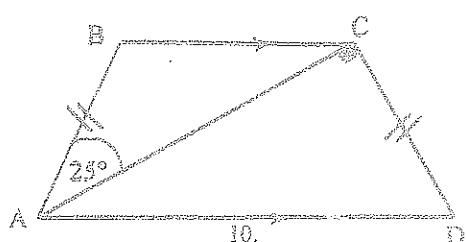
T) $\frac{S_1}{S_T} = ?$ Resp. 0.23



- 136.- T) $S_{ABCD} = ?$

Resp. 32.24 u^2

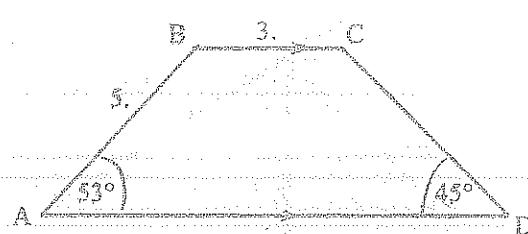
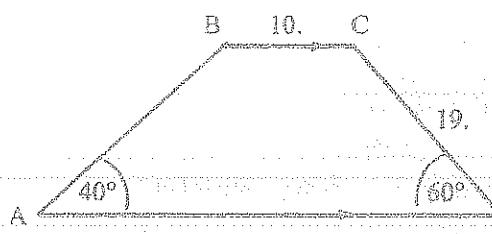
- 137.- T) $S_{\text{TRAPECIO}} = ?$ Resp. 36.4 u^2



- 138.- T) $S_{ABCD} = ?$ Resp. 403.43 u^2

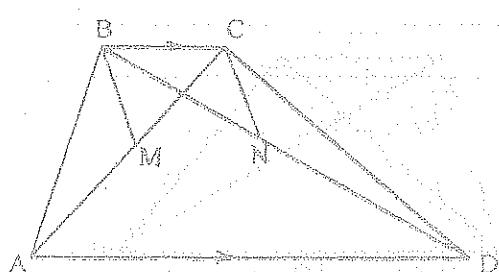
- 139.- T) $S_{ABCD} = ?$

Resp. 26 u^2



- 140.- H) ABCD Trapecio
M y N Puntos Medios de las Diagonales
 $AD = 3 BC$

- T) $\triangle BMP \cong \triangle CNP$

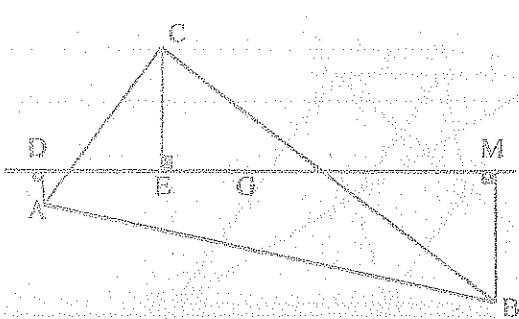


- 141.-

- H) G Baricentro $\triangle ABC$

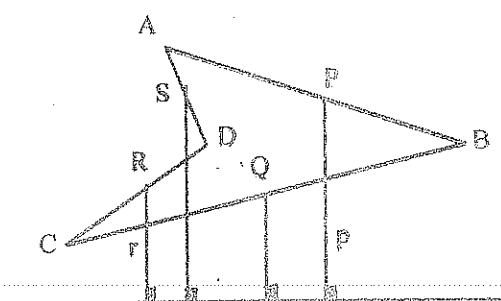
$G \in DM$

- T) $AD + BM = CE$



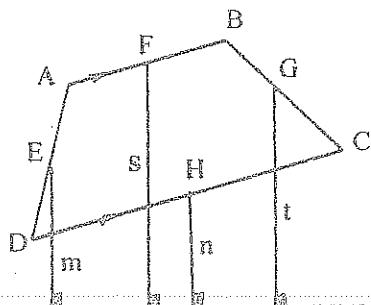
142.- H) P, Q, R, S Puntos Medios

T) $r + p = q + s$

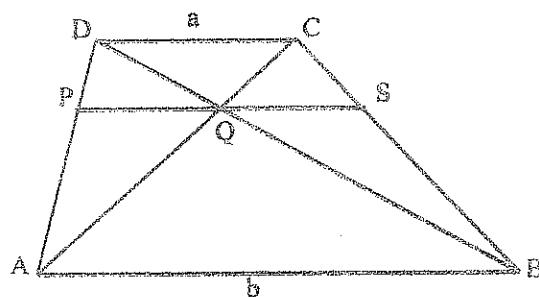


143.- H) E, F, G, H Puntos Medios

T) $n + s = m + t$

144.- H) $\overline{DC} \parallel \overline{AB} \parallel \overline{PS}$

T) $MN = \frac{ab}{a+b}$

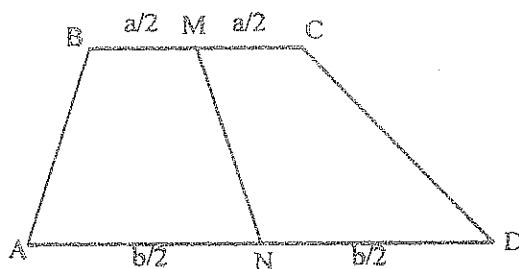


145.-

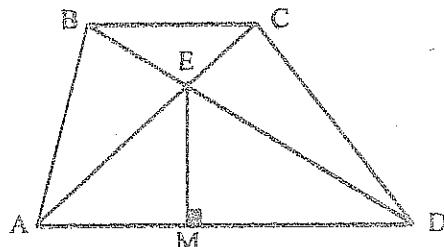
H) $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$

$\hat{A} + \hat{D} = \pi / 2$

T) $MN = \frac{b-a}{2}$



146.-



H) ABCD Trapecio

BC = 4 u.

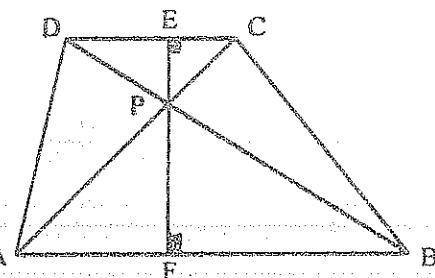
AD = 8 u.

BD = 9 u.

AC = 6 u.

T) EM = ? Resp. 2.9 u.

147.-



H) ABCD Trapecio

AB = 327 m.

DC = 153 m.

AC = 305 m.

BD = 226 m.

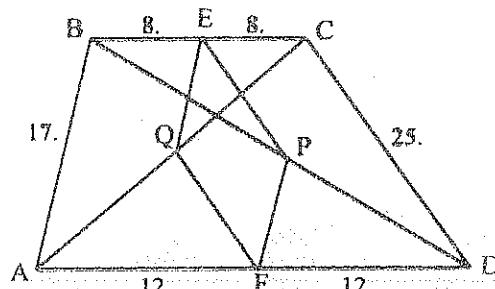
T) $S_{ECBF} = ?$ Resp. 12550.8 m^2

148.-

H) ABCD Trapecio

AQ = QC

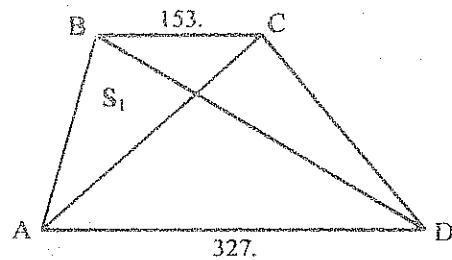
BP = PD

T) $S_{QEPF} = ?$ Resp. 105 m^2 

149.- H) ABCD Trapecio

BD = 305 m.

AC = 226 m.

T) $S_1 = ?$ Resp. 5830.92 m^2 

150.- En un trapecio las bases miden 7 m. y 21 m. y su altura es 10 m. Hallar el área de cada una de las partes formadas, al trazar la base media del trapecio. Resp. 52.5 u^2 ; 87.5 u^2

151.- Una recta perpendicular a dos lados de un paralelogramo divide a este en dos trapecios en cada uno de los cuales se puede inscribir un círculo. Hallar el ángulo agudo del paralelogramo si sus lados son de 10 u. y de 8 u. Resp. 14.5°

152.- Se inscribe un triángulo ABC en un círculo; por el vértice A se traza una tangente que corta a la prolongación del lado BC en el punto D. Por los vértices B y C se trazan perpendiculares a la tangente, midiendo 6 cm la menor de estas perpendiculares. Determinar el área del trapecio formado por las perpendiculares, el lado BC y el segmento de la tangente, sabiendo que $BC = 5 \text{ cm.}$, $AD = 5\sqrt{6} \text{ cm.}$ Resp. 31.88 cm^2

153.- Las bases de un trapecio son 6 m. y 10 m. y su altura es de 4 m. Determinar la longitud del segmento EF paralelo a las bases, trazado a 1 m. de distancia de la base mayor y limitado por los lados no paralelos. Resp. 9 m.

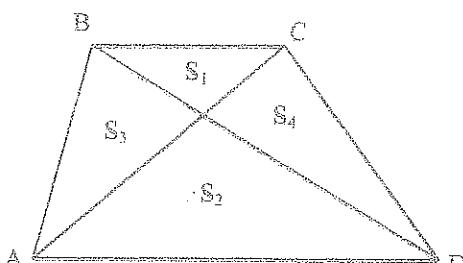
154.- Calcular las bases y la altura de un trapecio de 75 m^2 de área, sabiendo que la base menor es la mitad de la mayor y la altura la sexta parte de la suma de las dos bases. Resp. 20 m., 10 m., 5 m.

155.- Dado un trapecio de bases 10 u. y 6 u. Hallar la longitud del segmento paralelo a las bases tal que divida al trapecio en dos partes proporcionales a 3 y 5. Resp. 11.03 u.

156.- Se da un terreno rectangular ABCD de 72 m^2 tal que un lado AB es doble del AD, se divide por EF en dos partes iguales quedando reducido a dos terrenos rectangulares, siendo el precio del metro cuadrado en el terreno AEFD de \$ 300,00 y en el EFCB de \$ 200,00. Calcular la distancia EG para que la recta GF divida el terreno en dos trapecios que tengan igual valor. Resp. $GF = 2 \text{ m.}$

157.- Las bases de un trapecio son iguales a 10 u. y 6 u. Hallar la longitud del segmento paralelo a las bases que divide el área del trapecio en dos partes equivalentes. Resp. 8.25 u.

157.a.-



H) ABCD Trapecio

$$S_1 = 3 \text{ u}^2$$

$$S_2 = 12 \text{ u}^2$$

$$T_1) S_3 = ?$$

$$\text{Resp. } 6 \text{ u}^2$$

$$T_2) S_{ABCD} = ?$$

$$\text{Resp. } 27 \text{ u}^2$$

157.b.- H) ABCD Trapecio .

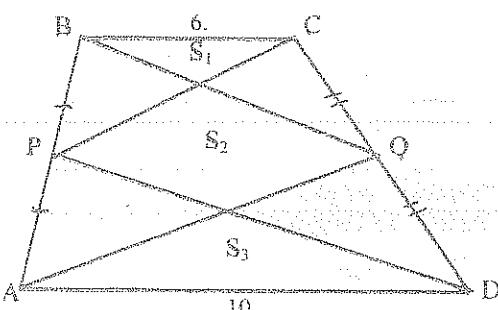
$$S_1 = 3 \text{ u}^2$$

$$S_2 = 12 \text{ u}^2$$

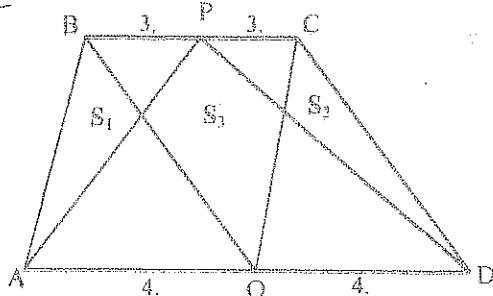
$$T_1) S_2 = S_1 + S_3$$

$$T_2) S_{\Delta ABQ} + S_{\Delta CPD} = S_T$$

$$T_3) \frac{S_1}{S_T} = ? \quad \text{Resp. } 0.38$$



157.c.-



H) ABCD Trapecio

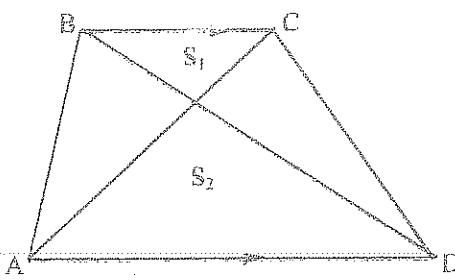
$$T_1) S_1 = S_2$$

$$T_2) S_3 = 4 S_2 S_1$$

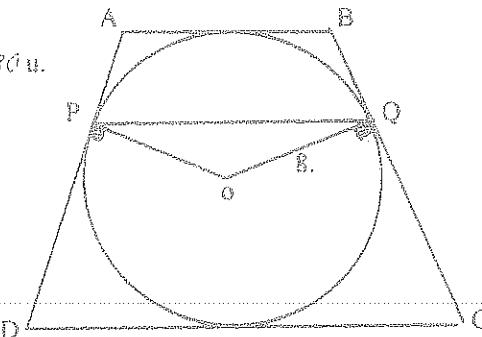
$$T_3) \frac{S_3}{S_T} = ? \quad \text{Resp. } 0.25$$

- 157.- H) $S_1 = 9 \text{ u}^2$
 $S_2 = 25 \text{ u}^2$

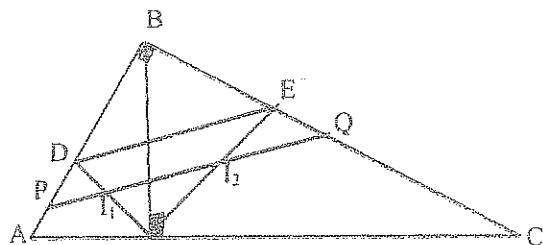
T) $S_r = ?$ Resp. 64 u^2



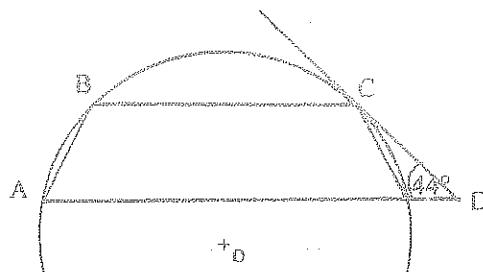
- 158.- H) ABCD Trapecio Isósceles
P y Q Puntos de Tangencia, $S_{ABCD} = 320$
- T) PQ = ?
Resp. 12.80 u



- 159.- H) I₁ Incentro $\triangle ABH$
I₂ Incentro $\triangle BHC$
- T₁) $\overline{DE} \parallel \overline{PQ}$
- T₂) $PB = BQ = BH$



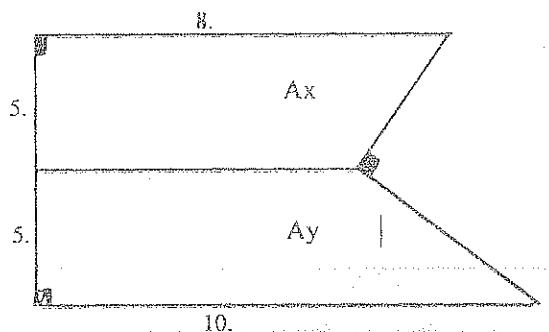
160.-



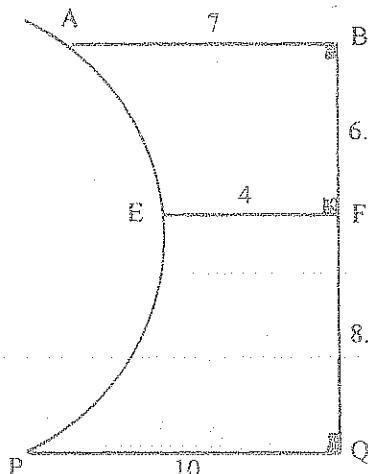
- H) ABCD Trapecio
DC Tang. $\odot(O, R)$
AB = 6 u.
BC = 9 u.

T) $S_{ABCD} = ?$ Resp. 76.56 u^2

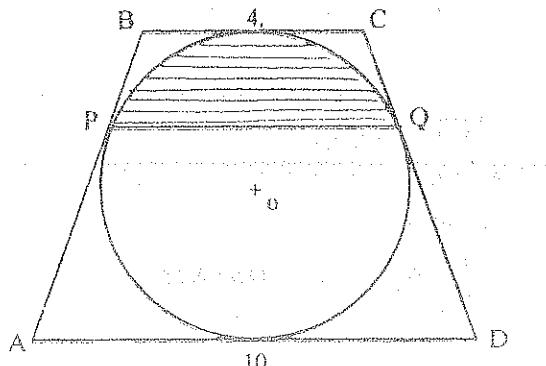
- 161.- T₁) $A_x = ?$ Resp. 29.75 u^2
T₂) $A_y = ?$ Resp. 34.75 u^2



- 162.- H) AEP Arco de Circunferencia
T) $S_{ABQPE} = ?$ Resp. 77.04 u^2

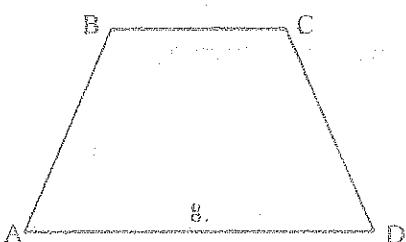


- 163.- H) ABCD Trapecio Isósceles
P y Q Puntos de Tangencia
- T) $S_{min} = ?$ Resp. 7.4 u^2



- 164.- H) ABCD Trapecio Isósceles Circunscriptible
r = 2.82 u.

T) BC = ? Resp. 4 u.



165.- En un trapecio isósceles sus diagonales se cortan perpendicularmente y el segmento que une los puntos medios de los lados no paralelos es igual a 10 u. Hallar el área del trapecio. Resp. 100 u^2 .

166.- Calcular los lados de un trapecio isósceles, si los lados no paralelos y la base menor tienen igual medida, su altura es 12 u y la superficie 288 u^2 . Resp. 15 u; 33 u.

167.- Dado un cuadrilátero cualquiera, demostrar que si por los puntos medios de cada diagonal se trazan paralelas a la otra diagonal y si se une el punto de intersección de las dos paralelas con los puntos medios de cada lado, el cuadrilátero queda dividido en cuatro partes equivalentes.

168.- Una recta paralela a la base de un triángulo de área 36 u, separa en él un triángulo de área 9 u. Determinar el área del cuadrilátero cuyos vértices coinciden en los del triángulo menor y el cuarto este en la base del triángulo mayor. Resp. 18 u^2

169.- En un terreno en forma de trapecio isósceles, las bases miden 100 m y 140 m y la altura 90 m, es atravesado por una carretera cuyo ancho es de 7 m., teniendo por eje una de las diagonales del trapecio. Hallar el área de la carretera. Resp. $1.023.53 \text{ m}^2$

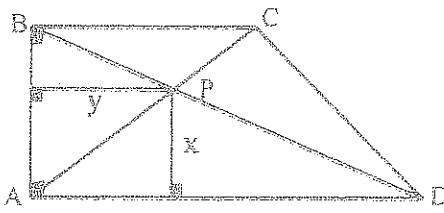
170.- En un triángulo rectángulo, los catetos miden 108 m. y 144 m. Si a la distancia de 5.6 m. de la hipotenusa se traza una paralela para obtener un trapecio. Cuál es el área del trapecio? Resp. 975 m^2

171.- En un trapecio ABCD, en el cual la base menor AB = 12 m.; la base mayor DC = 18 m. y la altura AH = 10 m. Calcular la longitud del segmento MN paralelo a las bases de modo que lo divida en dos partes equivalentes. Resp. 15.29 m.

H) $AB = 8 \text{ u}$
 $BC = 6 \text{ u}$
 $AD = 12 \text{ u}$

T₁) $x = ?$ Resp. 5.33 u

T₂) $y = ?$ Resp. 2.67 u

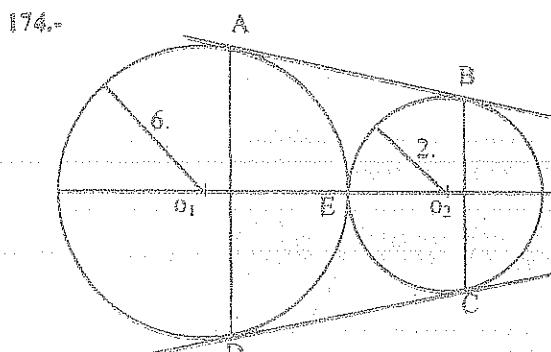
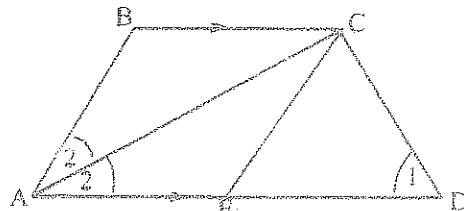


H) $AE = DE = EC = 40 \text{ u}$
 $\hat{1} = 2 \hat{2}$

T₁) ABCD Inscriptible

T₂) Hallar los Lados del Trapecio

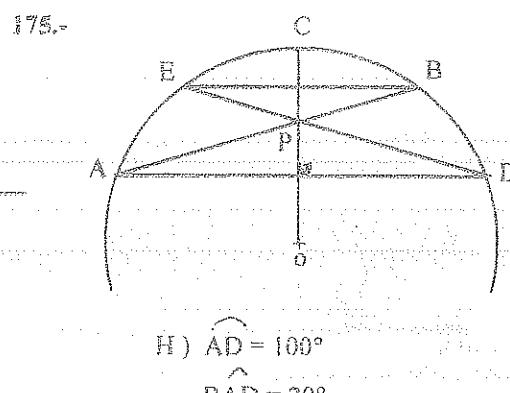
Resp. $80 \text{ u}; 40 \text{ u}; 40 \text{ u}; 40 \text{ u}$



H) O_1 y O_2 Círculos Tangentes
 AB y CD Tang. Comunes

T₁) Altura del Trapecio ABCD

T₂) $S_{ABCD} = ?$ Resp. 41.58 u^2



H) $AD = 100^\circ$

BAD = 20°

T₁) AEBD Trapecio Isósceles

T₂) ECBP Rombo

176.- En un círculo están inscritos un triángulo isósceles y un trapecio. Los lados laterales del triángulo son paralelos a los lados laterales del trapecio. Una de las bases del trapecio es el diámetro del círculo. Calcular la altura del trapecio siendo su base media igual a 10 u y el área del triángulo igual a 50 u^2 .

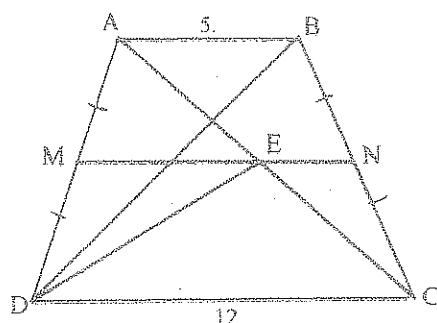
Resp. 5 u.

177.- Un propietario tenía una finca de forma rectangular, y de 20000 m^2 , cuya anchura era los $\frac{3}{4}$ de largo. Se construyó una carretera que ocupó en el terreno una franja de 10 m de ancho, siendo el eje de la carretera una de las diagonales del rectángulo. Se ofreció al propietario la compra de todo el terreno a razón de \$ 600,00 el m^2 , pero él quiso que se le expropiara más que el terreno ocupado por la carretera, por el que se le pagó a razón de \$ 300,00 el metro cuadrado. Una vez construido el carretero, el propietario vendió el terreno sobrante a razón de \$ 250,00 m^2 , con el convencimiento de que había hecho un magnífico negocio. Cuánto ganó? Resp. Perdió \$ 690.531,5

178.- Si el área de un trapecio es 20 m^2 cuyos lados son el $\frac{1}{3}$ de los lados de otro trapecio semejante. Calcular su área
Resp. 180 m^2

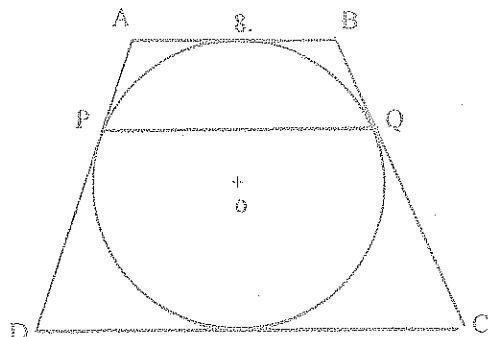
179.- H) ABCD Trapecio Isósceles
 $AC = BD = 7 \text{ u.}$

$$T) S_{\triangle ADE} = ? \quad \text{Resp. } 15.6 \text{ u}^2$$



180.- H) ABCD Trapecio Isósceles
 $BC = 10.$

$$T) PQ = ? \quad \text{Resp. } 9.60 \text{ u.}$$



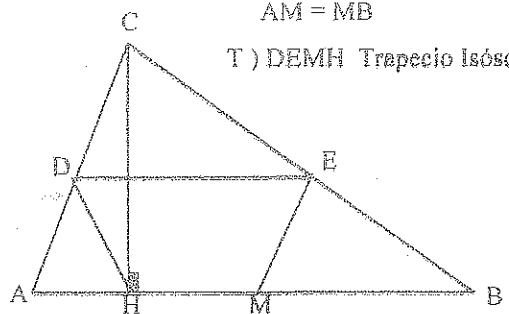
181.-

H) $AD = DC$

$$CE = EB$$

$$AM = MB$$

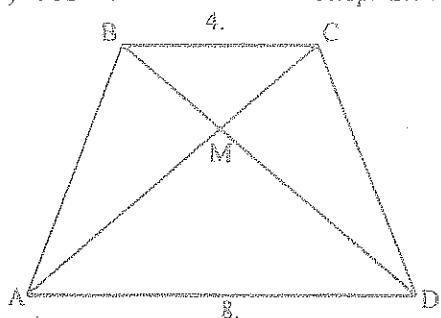
T) DEMH Trapecio Isósceles



182.- H) ABCD Trapecio Isósceles Circunscriptible

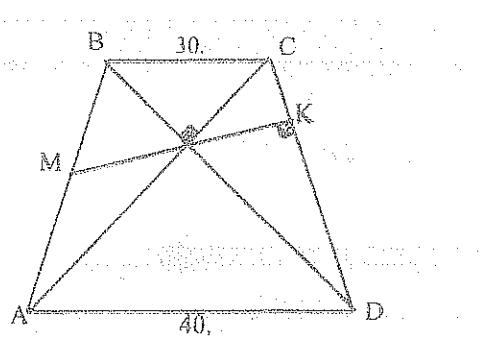
$$T) MC = ?$$

Resp. 2.748 u.



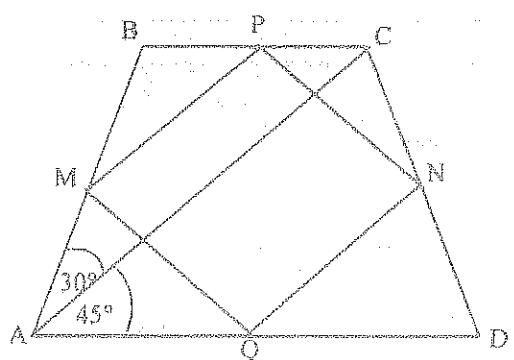
183.- H) ABCD Trapecio Isósceles

$$T) MK = ? \quad \text{Resp. } 34.65 \text{ u.}$$



184.- H) ABCD Trapecio Isósceles

T) MPNQ Cuadrado



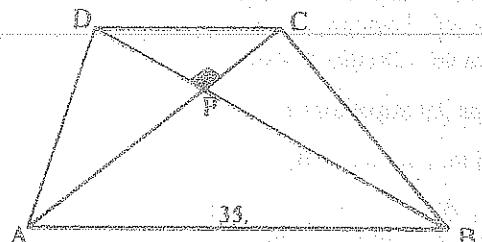
185.- Calcular las longitudes de los lados de un trapecio isósceles circunscrito a un círculo siendo, la diagonal $d = 2\sqrt{17} \text{ u.}$ y el área $S = 24\sqrt{2} \text{ u}^2$
Resp. 6 u.; 6 u.; 4 u.; 8 u.

186.- Demostrar que en un trapecio isósceles el producto de las bases es igual a la diferencia de los cuadrados de una de las diagonales y el lado no paralelo.

187.- En un trapecio ABCD, la base mayor AB = 22 u. y la base menor es CD, las diagonales son bisectrices de los ángulos DAD y ABC. Si el área del trapecio es de 128 u^2 ; Calcular CD. Resp. 10 u.

188.- H) ABCD Trapecio
AC = 30 u.
BD = 40 u.

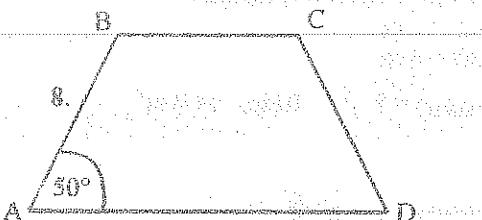
$$T) S_{\Delta DBC} = ? \quad \text{Resp. } 54 \text{ u}^2$$



189.- H) ABCD Trapecio Isósceles
Circunscriptible

$$T) S_{ABCD} = ? \quad \text{Resp. } 49.04 \text{ u}^2$$

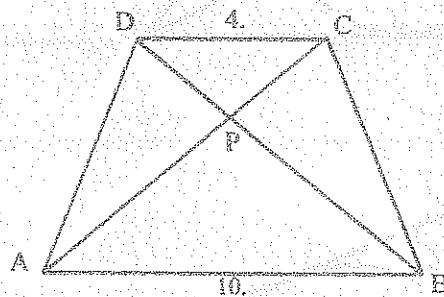
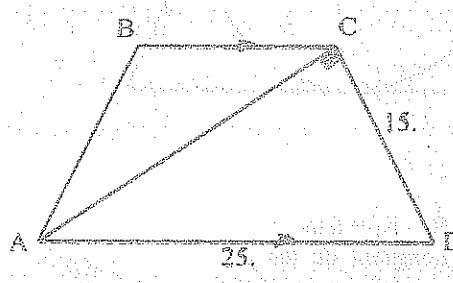
(Diagrama de un trapecio isósceles circunscriptible ABCD con vértices A, B, C y D. Los lados no paralelos tienen longitudes iguales. La diagonal AC es perpendicular a la diagonal BD.)



$$190.- T) S_{ABCD} = ? \quad \text{Resp. } 192 \text{ u}^2$$

191.- H) ABCD Trapecio Inscriptible y Circunscriptible

$$T) S_{\Delta DPC} = ? \quad \text{Resp. } 3.6 \text{ u}^2$$



192.- El área de un trapecio isósceles circunscriptible es de 32.5 u^2 y los ángulos en la base miden 50° . Determinar las longitudes de sus lados. Resp. 6.59 u.; 2.33 u.; 10.68 u.

193.- En un trapecio los lados no paralelos y la base menor tiene la misma longitud, si el área es 503.38 u^2 y el ángulo obtuso 130° . Calcular el lado menor. Resp. 20.31 u.

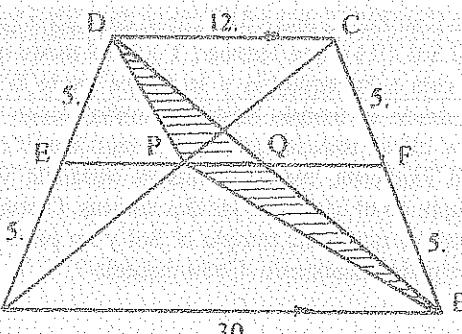
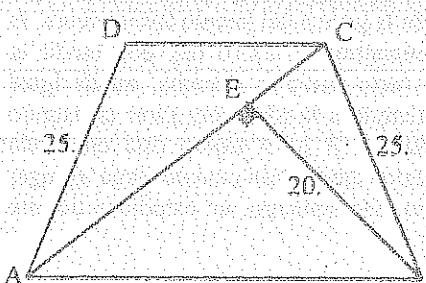
194.- En un trapecio isósceles ABCD está circunscrito a un círculo. Si uno de sus ángulos internos en la base mayor es de 60° y el perímetro de dicho trapecio es 27.71 u. Calcular el radio del círculo. Resp. 3 u.

195.- Hallar el área de un trapecio isósceles, si su altura es igual a 10 u. y su lado lateral se ve desde el centro del círculo circunscrito bajo el ángulo 60° . Resp. 173 u^2

196.- H) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$
AC = 40 m.

$$197.- T) S_{ABCD} = ? \quad \text{Resp. } 19.6 \text{ u}^2$$

$$T) S_{ABCD} = ? \quad \text{Resp. } 760 \text{ m}^2$$



198.- En un trapecio isósceles, las bases se diferencian en 2 m. el lado es 2 m. mayor que la base menor y la altura del trapecio es el doble de la base menor. Calcular el área del trapecio. Resp. 40.72 m^2

199.- El área de un trapecio isósceles circunscrito a un círculo es igual a 32. Determinar la longitud del lado del trapecio, sabiendo que el ángulo de la base es igual a $\pi/6$. Resp. 8 u

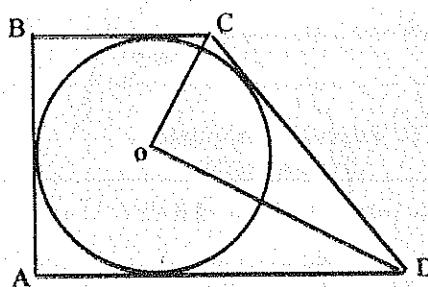
200.- A un círculo de radio r se circunscribe un trapecio rectángulo cuyo lado menor es $3r/2$. Hallar el área del trapecio. Resp. $9r^2/2$

201.- H) ABCD Trapecio Rectángulo

$$OC = 2 \text{ m.}$$

$$OD = 4 \text{ m.}$$

$$T) S_{ABCD} = ? \quad \text{Resp. } 14.4 \text{ m}^2$$



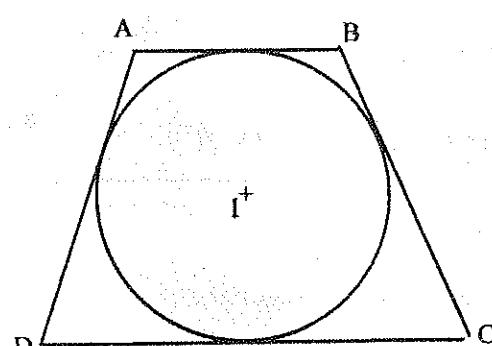
202.- H) ABCD Trapecio Isósceles

$$\text{Área del Trapecio } 20 \text{ m}^2$$

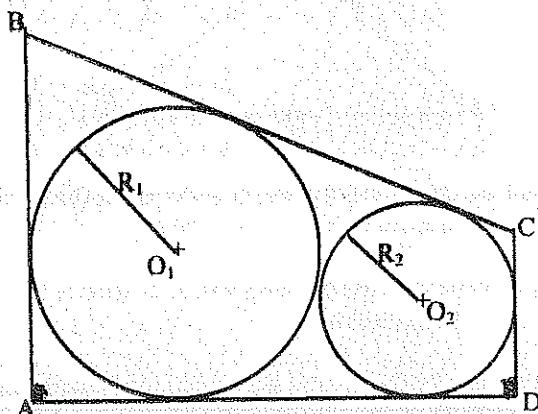
$$\text{Área del Círculo } \pi 4 \text{ m}^2$$

$$T) \text{ Lados del trapecio} = ?$$

$$\text{Resp. } 8 \text{ m. ; } 2 \text{ m. ; } 5 \text{ m.}$$



203.-



$$H) R_1 - R_2 = 6 \text{ m.}$$

$$\text{Longitud de las dos circunferencias } 62.8 \text{ m.}$$

$$T) S_{ABCD} = ? \quad \text{Resp. } 596.3 \text{ m.}$$

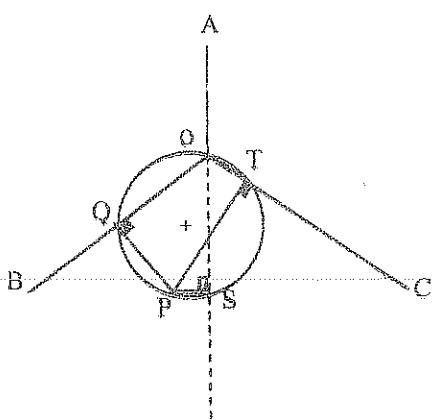
204.- La superficie del trapecio ABCD inscriptible y circunscriptible es 97.9 u^2 , su base menor es 8 u. Calcular su base mayor. Resp. 12 u.

205.- Un trapecio isósceles con los ángulos de la base iguales a 60° tienen tal forma que se puede inscribirle dos círculos tangentes uno a otro, cada uno de los cuales es tangente a su vez a las bases del trapecio y a uno de sus lados laterales. El lado lateral de trapecio es igual a 2 m. Hallar el área del trapecio. Resp. 6.46 m^2

206.- Se dice que Rumiñahui enterró el tesoro de Atahualpa en cierto lugar en que existen: una Pirámide (P), un Templo al Sol (S) y una Tumba (T) de tal modo que mirando desde la puerta del templo hacia afuera, la pirámide está a la izquierda y la tumba hacia la derecha. Para encontrar el tesoro hay que medir la distancia desde el templo hasta la tumba, luego girar el ángulo recto hacia la derecha, medir igual distancia y clavar una estaca (A). Luego medir la distancia del templo a la pirámide, girar en ángulo recto a la izquierda, medir la misma distancia y clavar otra estaca (B). El tesoro está enterrado precisamente en el centro de las dos estacas. Cierta persona, tenía estos datos, más cuando llegó al lugar no encontró ni rastro del templo al Sol y no pudo dar con el tesoro. Sin embargo, un estudioso de este libro, bien pudo encontrarlo. Como hacerlo ?

6.14.19.1.- EJERCICIOS RESUELTOS

7.-



Los cuadriláteros PQOT y PQOS

son Inscriptibles, y

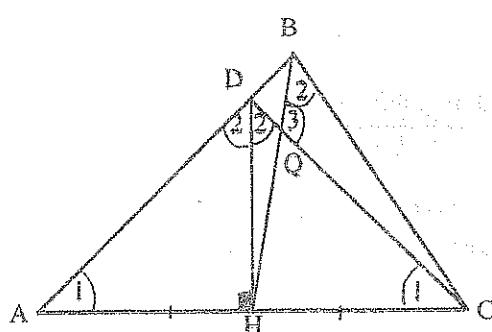
$\triangle QTS$ Equilátero

$$PT \times QS = QP \times TS + QT \times PS$$

$$PT = QP + PS$$

$$\therefore QP = PT - PS$$

25.-



$\triangle ADC$ Isósceles

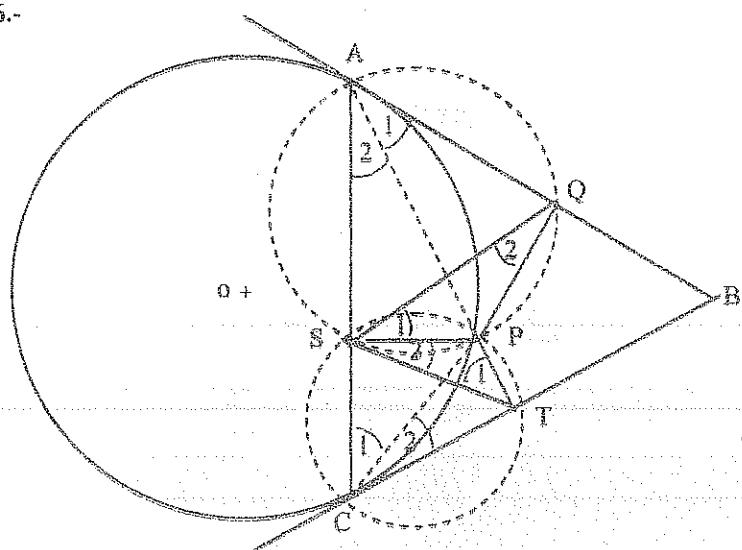
$\triangle HDQ \approx \triangle QBC$ (2 y 3)

$$\frac{DQ}{QB} = \frac{QH}{QC} = \frac{DH}{BC}$$

$$DQ \times QC = QB \times QH$$

$\therefore DHCB$ Inscriptible

26.-



Los cuadriláteros
ASPQ y CSPT
son Inscriptibles

$\therefore \triangle PSQ \approx \triangle SPT$ (1 y 2)

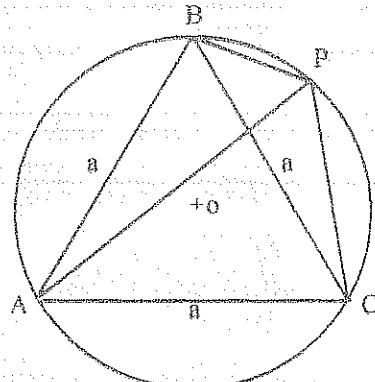
37.-

$\triangle ABC$ Equilátero

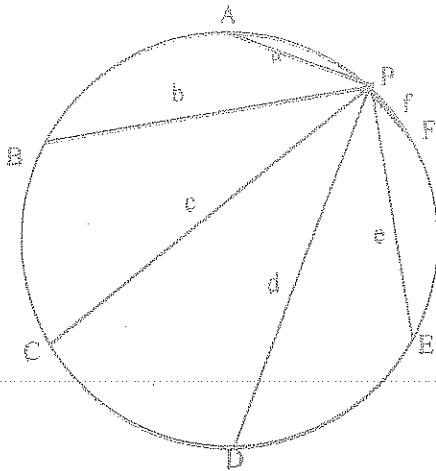
ABPC Cuadrilátero Inscrito

$$AP \times a = PB \times a + PC \times a$$

$$\therefore AP = PB + PC$$



43.-

 $\triangle ABC$ Equilátero

$AB \times c = AC \times e + CE \times a$

$\therefore c = e + a \quad (1)$

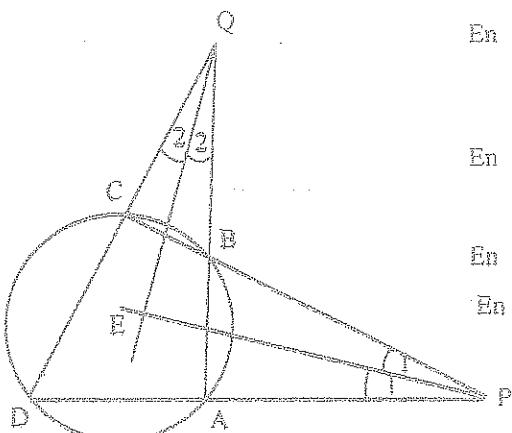
 $\triangle BDF$ Equilátero

$BP \times d = BD \times f + DF \times b$

$\therefore d = b + f \quad (2)$

$\Rightarrow d + c = b + f + e + a \quad (1) + (2)$

46.-



En $DQBP$: $\hat{B} = \frac{(D+B)}{2}$

$\hat{B} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$

En $DQEP$: $90^\circ = 21^\circ + \hat{D} + 18^\circ$

$\therefore \hat{D} = 51^\circ$

En $ABCD$: $\hat{D} + \hat{B} = 180^\circ \Rightarrow \hat{B} = 129^\circ$

En $\triangle DCP$: $\hat{C} = 180^\circ - 36^\circ - 51^\circ = 93^\circ$

$\hat{A} + \hat{C} = 180^\circ \Rightarrow \hat{A} = 87^\circ$

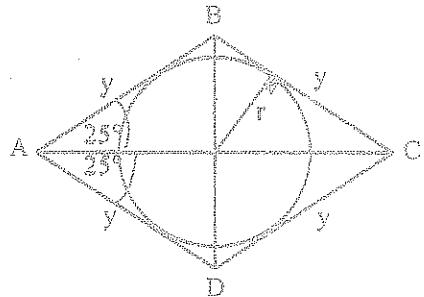
77.-

$S = 100 = y^2 \operatorname{Sen} 50^\circ$

$y = 11.43 \text{ cm.}$

$S = 100 = 2 \times 11.43 \times r$

$\therefore r = 4.37 \text{ cm.}$



87.-

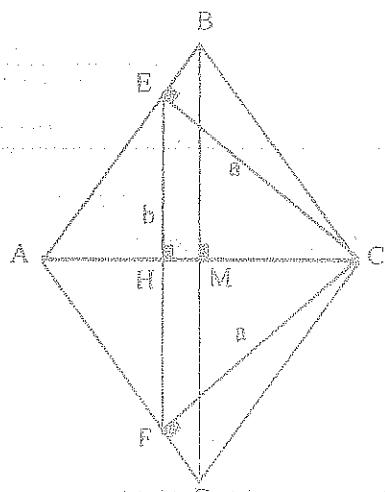
$HC = \sqrt{a^2 - \frac{b^2}{4}} = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}$

$a^2 = AC \cdot \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}$

$AC = \frac{2a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}}$

$AH = \frac{2a^2}{\sqrt{4a^2 - b^2}} - \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2} = \frac{b^2}{2\sqrt{4a^2 - b^2}}$

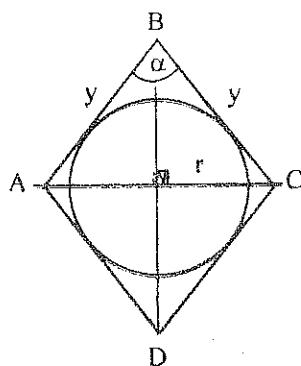
$\frac{BM}{EH} = \frac{AM}{AH} \Rightarrow \frac{BM}{b/2} = \frac{2a^2 \sqrt{4a^2 - b^2}}{b^2 \sqrt{4a^2 - b^2}}$



$BM = a^2/b \quad y \quad BD = 2a^2/b$

$\therefore S = \frac{BD \times AC}{2} = \frac{2a^4}{b\sqrt{4a^2 - b^2}}$

98.-



$$Q = 2 \times y \times r = y^2 \times \operatorname{Sen} \alpha$$

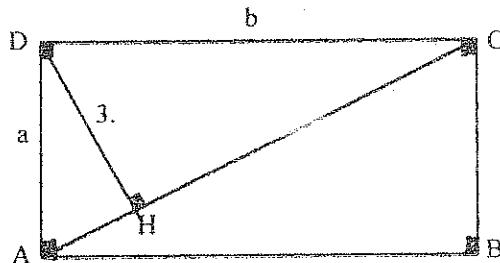
$$y = 2r / \operatorname{Sen} \alpha$$

$$S = \pi \times r^2$$

$$Q = 2(2r) / \operatorname{Sen} \alpha$$

$$\therefore \operatorname{Sen} \alpha = 4S / \pi Q$$

106.-



$$AC \times 3 = a \times b = S$$

$$a + b = 50$$

$$\therefore a^2 + 2ab + b^2 = 2500$$

$$AC^2 + 2S = 2500$$

$$S^2/9 + 2S = 2500$$

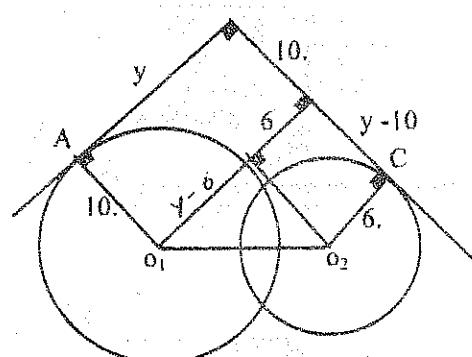
$$\Rightarrow S = 141.27 \text{ u}^2$$

$$119.- 144 = (y - 6)^2 + (y - 10)^2$$

$$\therefore y = 16.25$$

$$P = 16.25 + 16.25 + 6 + 12 + 10$$

$$\therefore P = 60.5 \text{ u.}$$



127.-

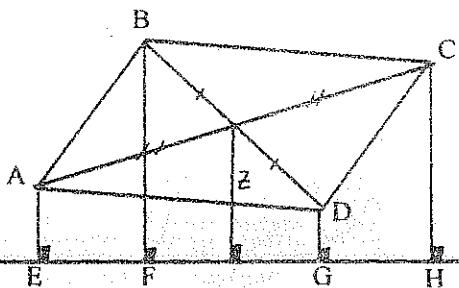
AEHC Trapecio

$$Z = \frac{(AE + CH)}{2} \quad (1)$$

BFGD Trapecio

$$Z = \frac{(BF + DG)}{2} \quad (2)$$

$$\Rightarrow AE + CH = BF + DG \quad (1) = (2)$$



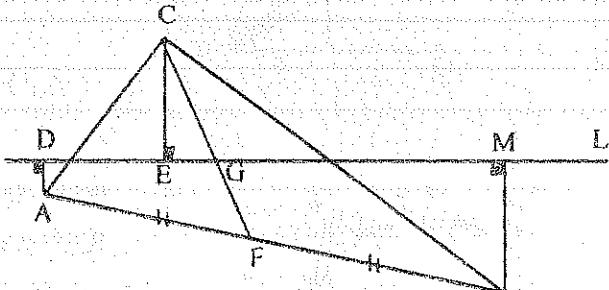
141.-

ADMB Trapecio

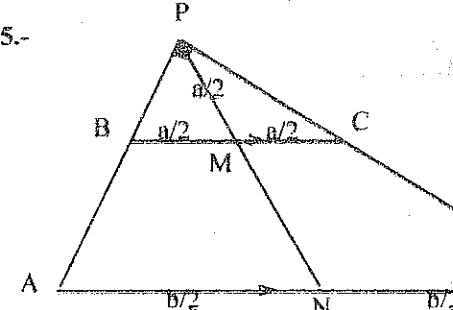
$$FQ = \frac{(AD + BM)}{2} \quad (1)$$

$$FQ = \frac{CE}{2} \quad (2)$$

$$\Rightarrow CE = AD + BM \quad (1) = (2)$$



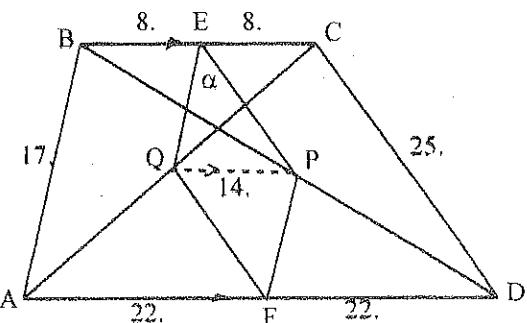
145.-



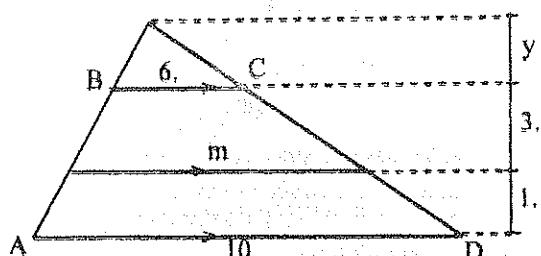
$$MN = PN - PM$$

$$MN = \frac{b}{2} - \frac{a}{2} = \frac{b-a}{2}$$

- 148.- $EQ = PF = AB / 2 = 8.5$
 $PE = QF = CD / 2 = 12.5$
 $QP = (AD - BC) / 2 = (44 - 16) / 2 = 14$
 $\Delta EQP : 14^2 = 8.5^2 + 12.5^2 - 2(8.5)(12.5) \cos \alpha$
 $\therefore \alpha = 81.20^\circ$
 $\Rightarrow S = 2S_{\triangle QEP} = (8.5)(12.5) \operatorname{Sen} 81.20^\circ = 105 \text{ m}^2$



153.-



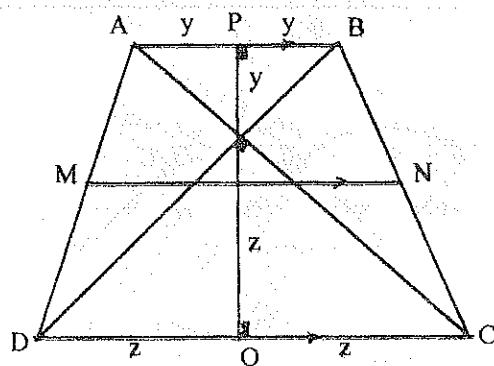
$$\frac{10}{6} = \frac{(4+y)}{y}$$

$$\therefore y = 6$$

$$\frac{m}{6} = \frac{9}{6}$$

$$\therefore m = 9$$

165.-

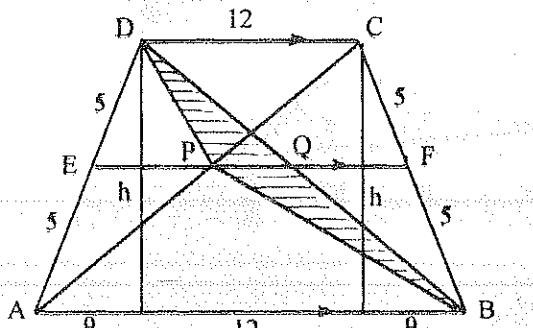


$$S = MN \times PQ$$

$$MN = 10 = \frac{(2y+2z)}{2} = y+z = PQ$$

$$\therefore S = 100 \text{ u}^2$$

197.-



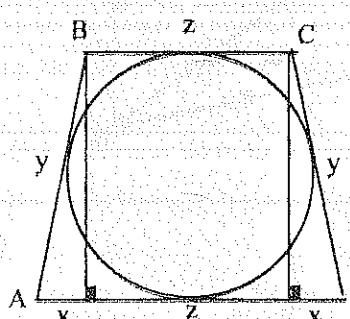
$$h = \sqrt{10^2 - 9^2}$$

$$h = 4,36$$

$$PQ = \frac{(30+12)}{2} = 9$$

$$\therefore S = \frac{PQ \times h}{2} = 19,62 \text{ m}^2$$

202.-



$$BC + AD = 2y = p$$

$$S = p \times r = 20 = 2y \times 2$$

$$\therefore y = 5$$

$$x = \sqrt{y^2 - 4^2} = 3$$

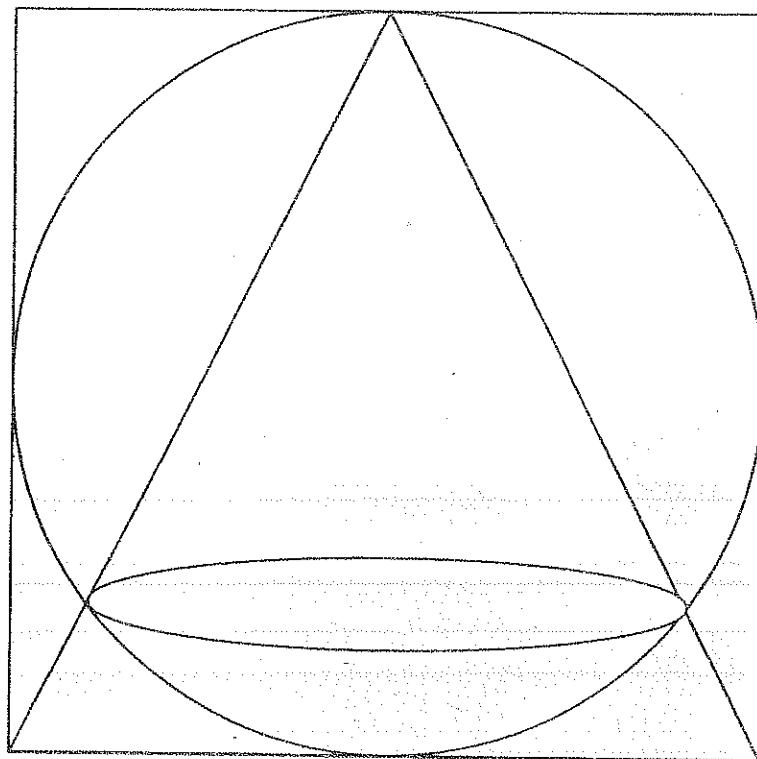
$$2y = 2z + 2x$$

$$\therefore z = 2$$

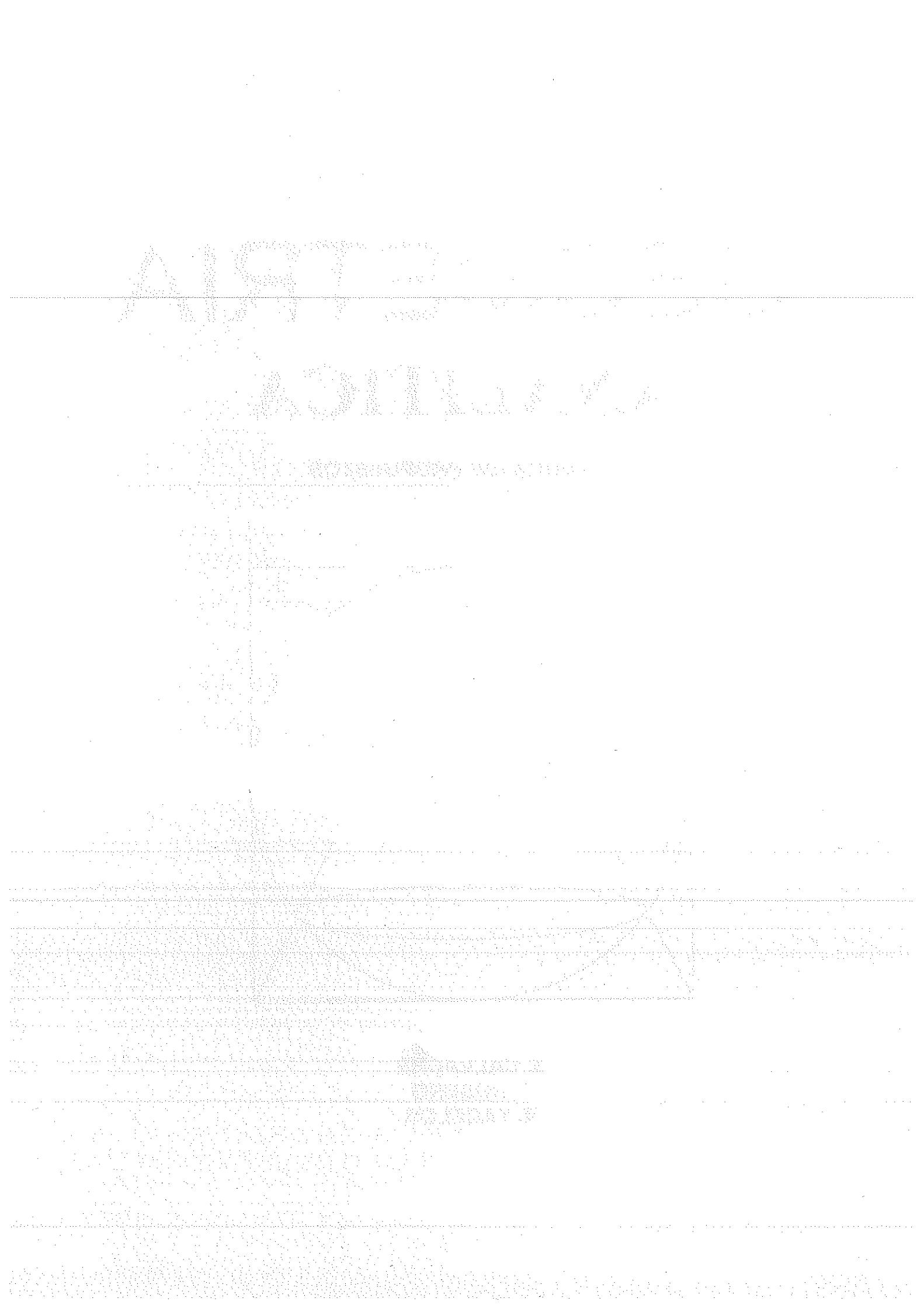
$$\Rightarrow AD = 2x + z = 8$$

GEOMETRIA ANALITICA

EJERCICIOS PROPUESTOS

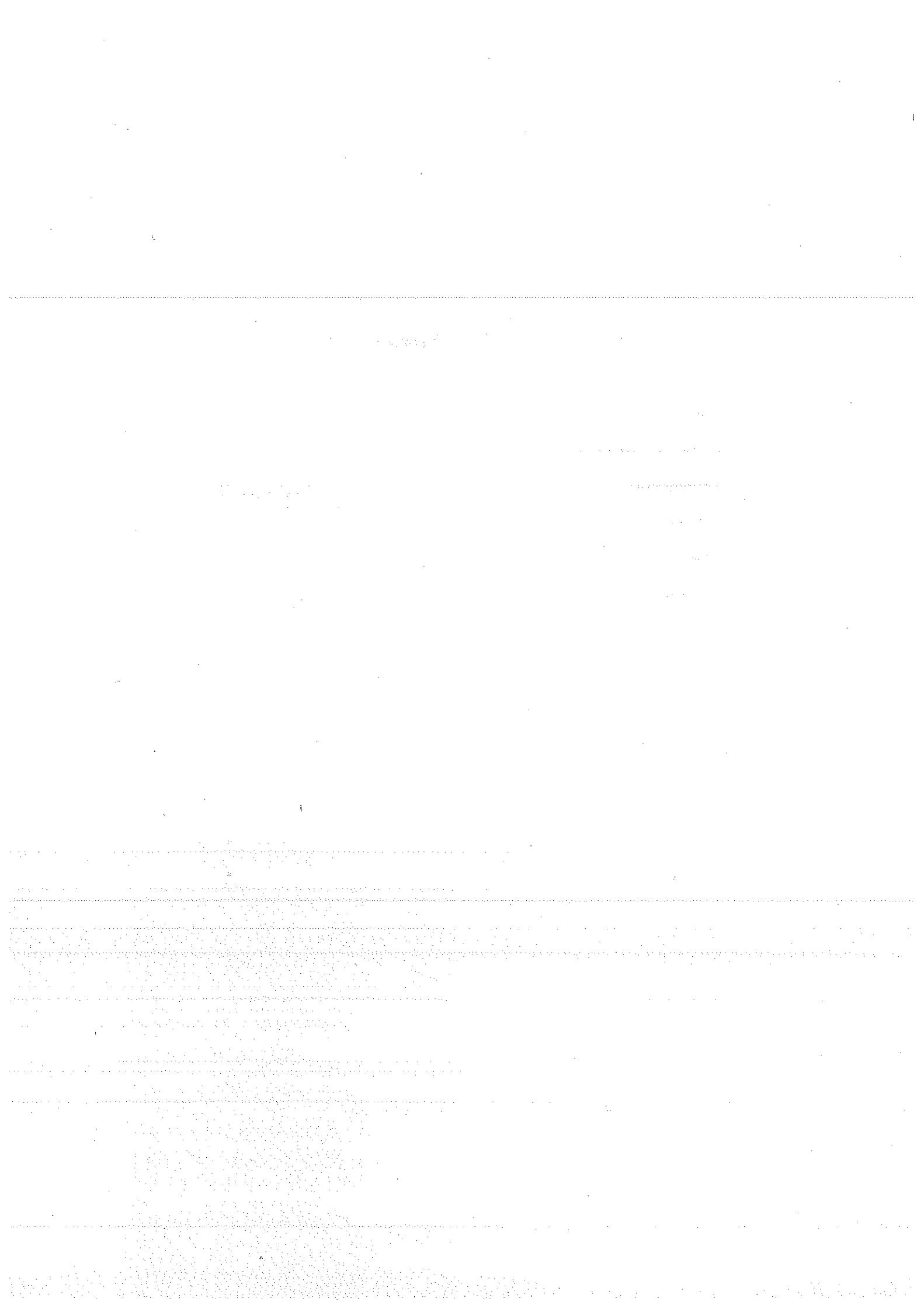


**G. CALVACHE
T. ROSERO
M. YACELGA**



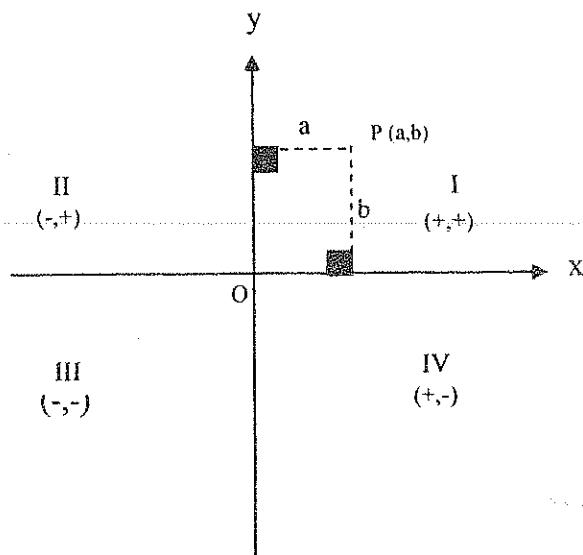
CONTENIDOS

Recta	1
Gráficas de Ecuaciones	24
Circunferencia	25
Parábola.....	28
Elipse.....	35
Hipérbola.....	43
Ecuación general de segundo grado.....	.50



RECTA

SISTEMA DE COORDENADAS RECTANGULARES



ELEMENTOS DE LOS EJES DE COORDENADAS:

Eje X ; Eje de las abscisas

Eje Y; Eje de las ordenadas

Coordenada o abscisa de P = a

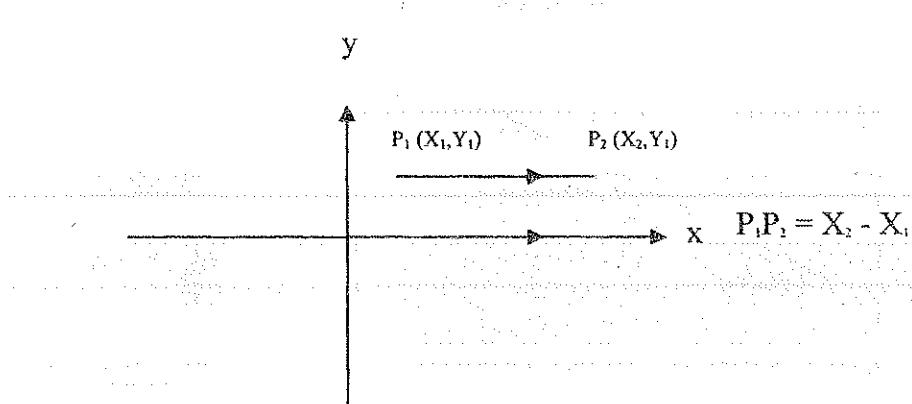
Coordenada u ordenada de P = b

Origen: O

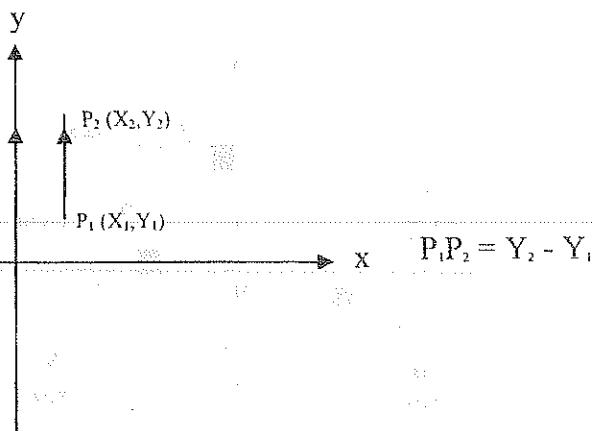
Cuadrantes: I, II, III, IV

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS- LONGITUD DE UN SEGMENTO

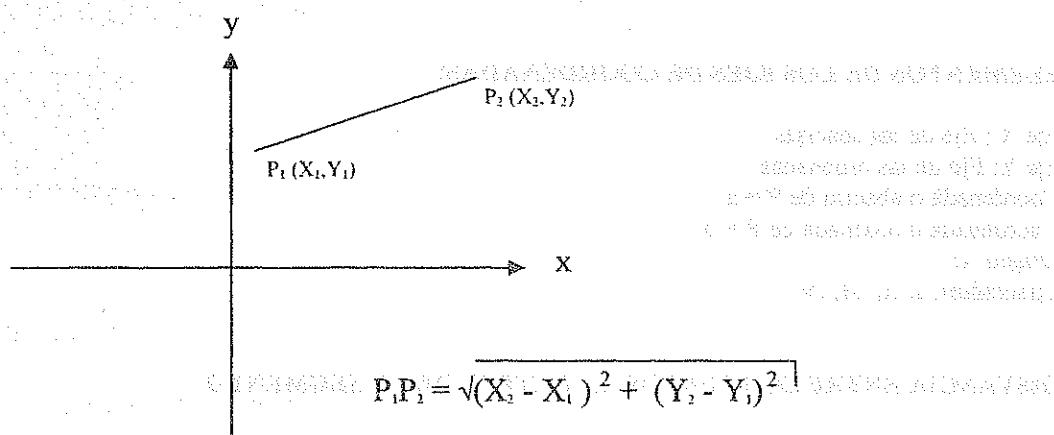
a) SEGMENTO HORIZONTAL



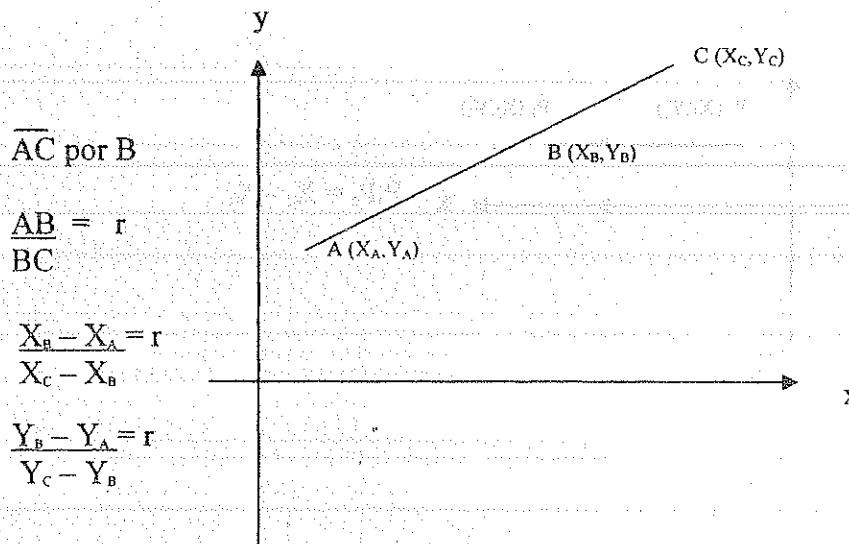
b) SEGMENTO VERTICAL



c) SEGMENTO OBLICUO



DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN UNA RAZÓN DADA (r)

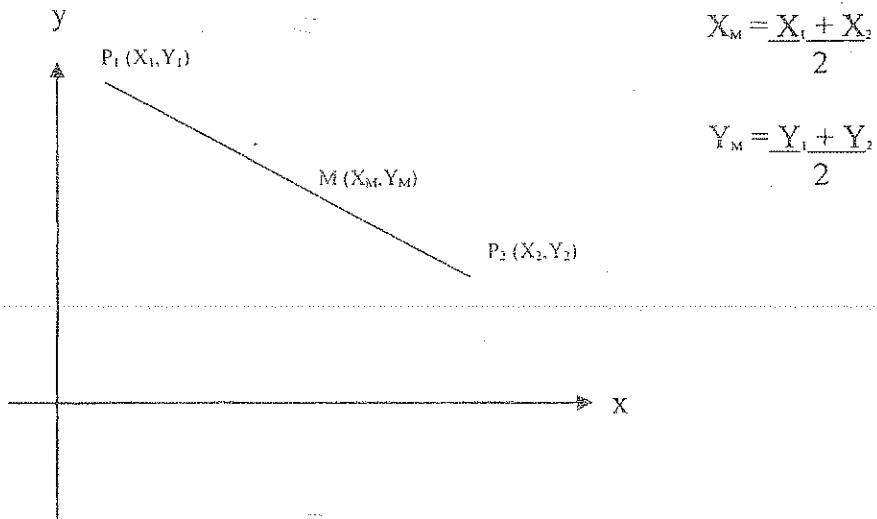


\overline{AB} por C

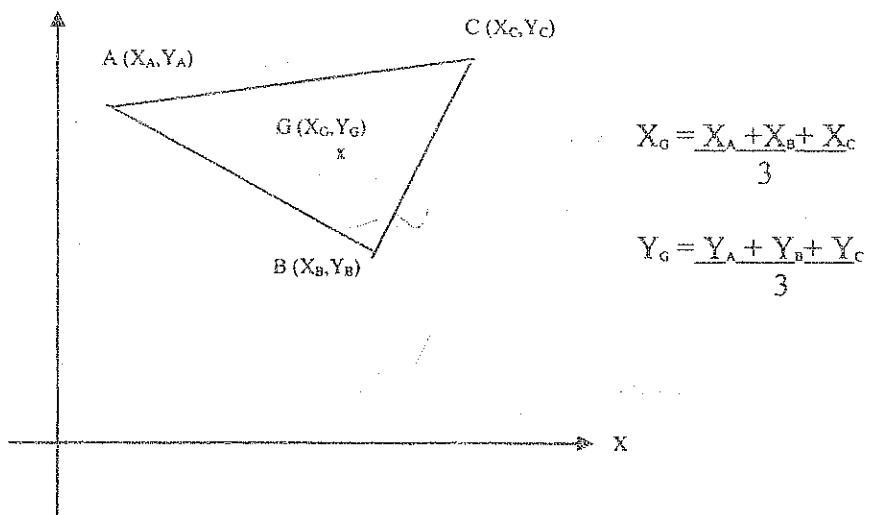
$$\frac{AC}{CB} = r$$

$$\begin{aligned}\frac{X_c - X_a}{X_b - X_c} &= -r \\ \frac{Y_c - Y_a}{Y_b - Y_c} &= -r\end{aligned}$$

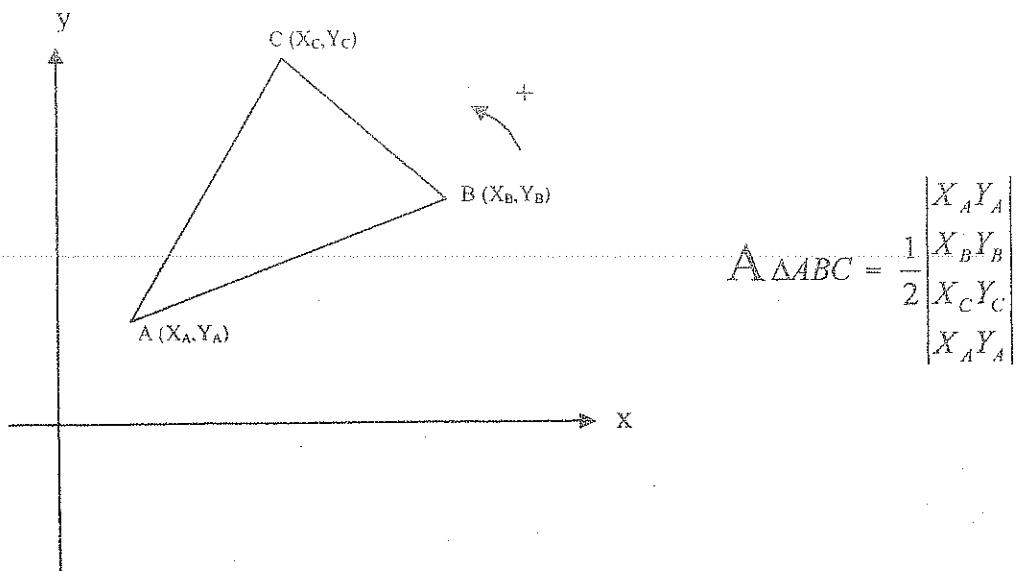
PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO



BARICENTRO DE UN TRIÁNGULO

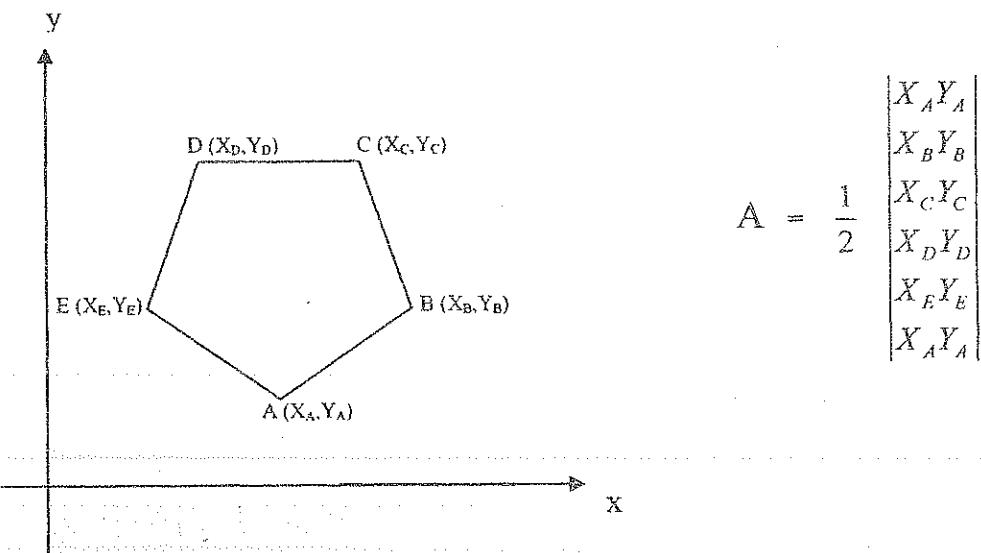


ÁREA DE UN TRIÁNGULO



$$A_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} X_A Y_A \\ X_B Y_B \\ X_C Y_C \\ X_A Y_A \end{vmatrix}$$

ÁREA DE UN POLÍGONO CONVEXO



$$A = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} X_A Y_A \\ X_B Y_B \\ X_C Y_C \\ X_D Y_D \\ X_E Y_E \\ X_A Y_A \end{vmatrix}$$

EJERCICIOS

1. Demostrar que los puntos A (7; 5); B (3; 1); C (-1; -3) son colineales.
2. H) A (7; 8) T) A, B, C, colineales
B (3; -1)
C (-1; -6)
3. H) ABCD cuadrado T) B =? Resp. (2; 3); (11; 4)
A (6; 8) D =?
C (7; -1) S_T =? Resp. (11; 4); (2; 3)
Resp. 41 μ²
4. H) ABCD cuadrado T) C =? Resp. (7; -1); (-3; 7)
A (6; 8) D =?
B (2; 3) S_T =? Resp. (1; 12); (11; 4)
Resp. 41 μ²
5. H) Δ ABC equilátero T) C =? Resp. (-3,33; -1,7); (5,33; 8,7)
A (-2; 6) S =?
B (4; 1) Resp. 26,35 μ²
6. H) P ∈ X T) P =? Resp. (11,65; 0); (0,34; 0)
Q (6; 7)
PQ = 9 u
7. H) P ∈ Y T) P =? Resp. (0; 1,49); (0; -15,49)
Q (-3; -7)
PQ = 9 u
8. H) Δ ABC T) C =? Resp. (0; 6,30); (0; -20,31)
AB = BC
A (-3; 5)
B (4; -7)
C ∈ Y
9. H) ∠ A = 90° T) A =? Resp. (-2; 4); (3; -5)
AB = AC
B (-4; -3)
C (5; 2)
10. H) ABCD paralelogramo T) D =? Resp. (8; 1)
A (-2; 8) S =?
B (-6; 4) Resp. 68 μ²
C (4; -3)
11. H) ABCD paralelogramo T) C =? Resp. (0; 1)
A (6; 3) D =?
B (-2; 1)
AC ∩ BD = P (3; 2) Resp. (8; 3)
12. H) ABCD Rombo T) B =? Resp. (2,06; -4,96)
A (6; 2) D =?
C (10; -4)
BC = 8 Resp. (13,94; -2,96)
13. H) ABCD Rombo T) A =? Resp. (±138; ±133)
B (4; 5)
AC ∩ BD = P (-1; -2) D =?
S_T = 8 Resp. (-6; -9)

14. H) ABCD rectángulo

$$A(-2; -4)$$

$$AC \cap BD = P(2; 1)$$

$$CD = 4$$

T)

$$C = ?$$

$$D = ?$$

Resp. (6; 6)

Resp. (2,24; 7,41)

15. H) A (6; 0)

$$B(0; 3)$$

$$\frac{AB}{BP} = -2$$

$$P \in AB$$

T) $P = ?$

Resp. (3; 3/2)

16. H) A (10; 0)

$$P(-3; -6)$$

$$\frac{AB}{BP} = \frac{5}{3}$$

T) $B = ?$

Resp. (15/8; -15/4)

17. H) A (10; -8)

$$B(8; 8)$$

$$AP = PQ = QB$$

T) $P = ?$

$$Q = ?$$

Resp. (-4; -8/3)

Resp. (2; 8/3)

18. H) \overline{APQB}

$$P(-3; 4) \quad Q(2; -5)$$

$$AP = PQ = QB$$

T) $B = ?$

$$A = ?$$

Resp. (7; -14)

Resp. (-8; 13)

19. H) APQB.

$$A(10; 2)$$

$$B(2; 14)$$

$$C(-4; 1)$$

$$AP = PB = PC$$

T) $P = ?$

Resp. (2,69; 5,8)

20. H) A (2; 6)

$$B(-4; -2)$$

$$C(-2; 8)$$

T) Longitud bisectriz

interna de A

Resp. 4,73

21. H) ΔABC

$$AB = BC$$

$$A(2; -4)$$

$$B(-5; 1)$$

$$\text{Baricentro } \in Y$$

T) $C = ?$

$$G = ?$$

Resp. (3; -2,16); (3; 4,16)

Resp. (0; -1,72); (0; 0,39)

22. H) ΔABC

$$\text{Baricentro } G \in X$$

$$A \in Y$$

$$B(-4; -3)$$

$$C(1; 4)$$

T) $A = ?$

$$G = ?$$

Resp. (0; -1)

Resp. (-1; 0)

23. H) ΔABC

$$A(4; -7)$$

$$B(8; 3)$$

$$C(-2; 5)$$

T) $ha = ?$

Resp. 10,6 u

24. H) A (-6; 5)

$$B(8; 3)$$

$$C \in Y$$

$$S \Delta ABC = 10 \mu^2$$

T) $C = ?$

Resp. (0; 2,71)

25. H) ABCD Paralelogramo
 A (6; 4)
 B (-7; 2)
 $AC \cap BD = P \in X$
 $S_{ABCD} = 100 \mu^2$

- T) C =?
 D =?

Resp. (4; -4)
 Resp. (17; -2)

26. H) ABCD Rectángulo
 A (6; -4)
 B (2; -2)
 $S_{ABCD} = 8 \mu^2$
 $AC \cap BD = P$

- T) Centro de Gravedad del
 $\triangle CDP = ?$

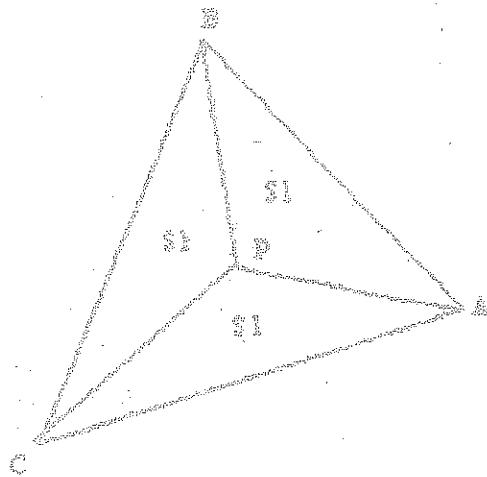
Resp. (2/3; -5/3)

27. H) ABCD Rectángulo
 B (5; -9) A (-1; 5)
 $S_{ABCD} = 90 \mu^2$

- T) Centro de Gravedad
 del $\triangle BDC = ?$

Resp. (1/11, -4/9)

28.



- H) A (6; 2)

B (-1; 8)

C (-8; -4)

- T) P =?

Resp. (-1; 2)

29. H) A (7; 4)
 B (3; 6)
 C (-4; 3)
 D (-3; -3)
 E (6; -3)

- T) $S_{ABCDE} = ?$

Resp. $78 \mu^2$

30. H) A (2; 2)
 B (-6; 0)
 C (2; -2)
 D (-5; 6)
 E (-6; 4)
 F (-2; 4)
 G (0; -8)

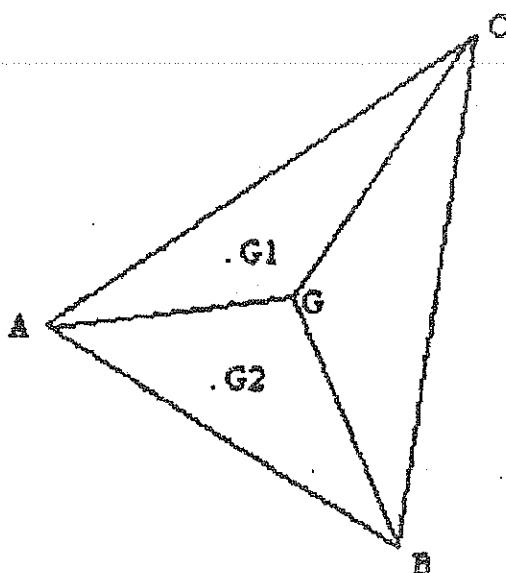
- T) $S_{\text{polígono}} = ?$

Resp. $78 \mu^2$

31. H) A (19/2; 8)
 B (-9/2; 16)
 C (-20/3; -4/3)
 D (12; -12)

T) ABCD Circumscribable

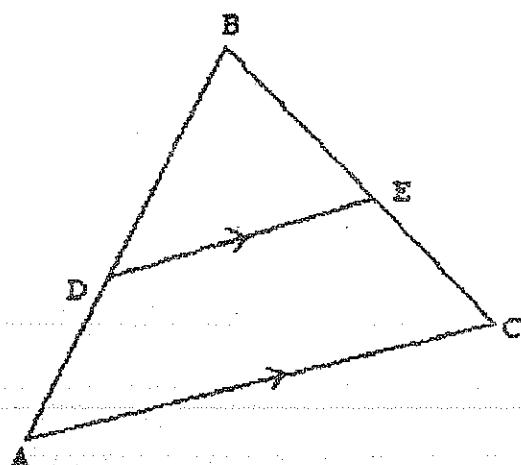
32.



- H) G1 Baricentro Δ AGC
 G2 Baricentro Δ AGB
 G1 (4; 6)
 G2 (3; -1)
 G (2; 3)

- T) A=? Resp. (11; 0)
 C=? Resp. (-1; 15)
 B=? Resp. (-4; -6)

33.



- H) A (-4; -3)
 B (6; 12)
 C (8; 0)
 D \in eje Y

- T) E=? Resp. (36/5; 24/5)

34. H) Δ ABC

- AB = BC
 A (-2; 4)
 B (3; 5)
 G \in X

T) C=?

Resp. (12,4/3; 1); (-6,4/3; 1)

35. H) Δ ABC

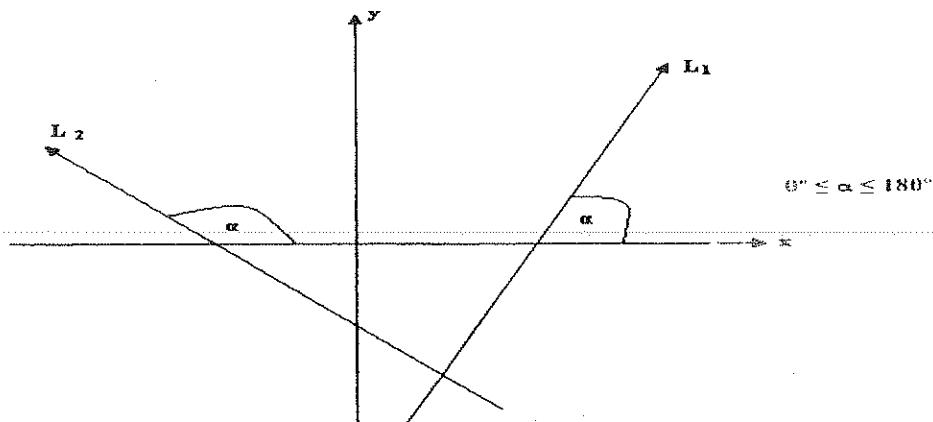
- A \in X
 G \in Y
 B (-4; -3)
 C (1; 4)

T) A=?

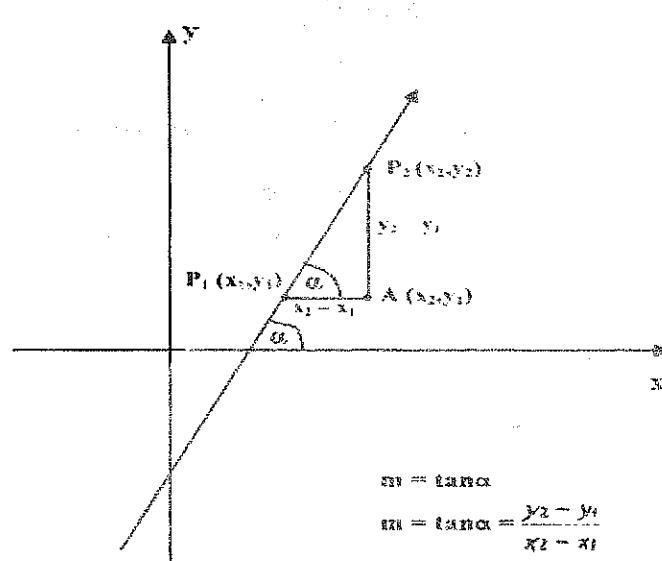
- Resp. (3; 0)
 G=? Resp. (0; 1/3)

LA RECTA

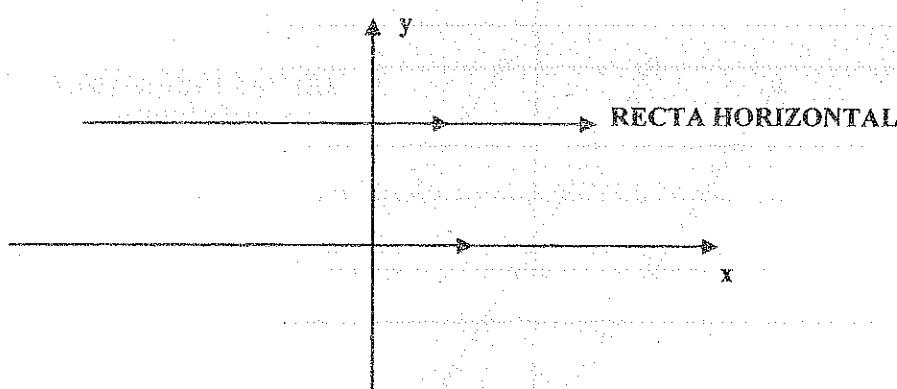
ANGULO DE INCLINACION



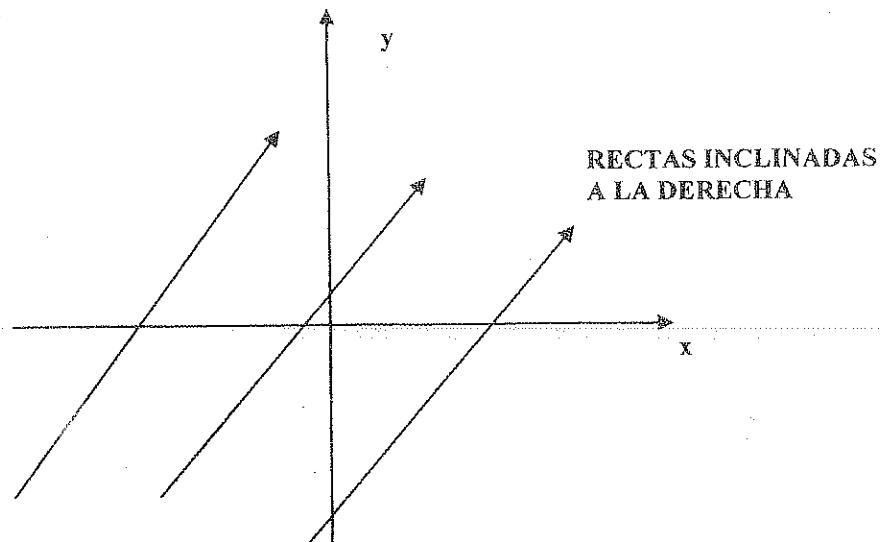
PENDIENTE DE UNA RECTA O COEFICIENTE ANGULAR



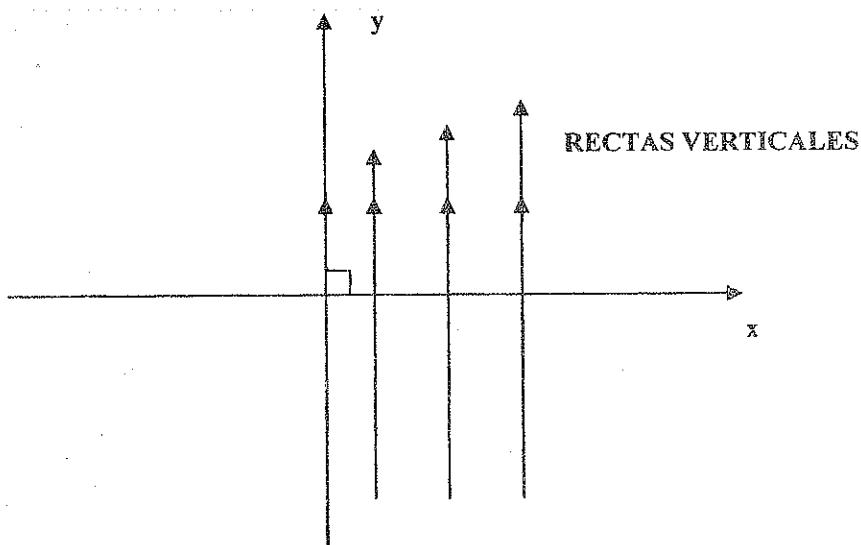
- Si $\alpha = 0$; $m = 0$:



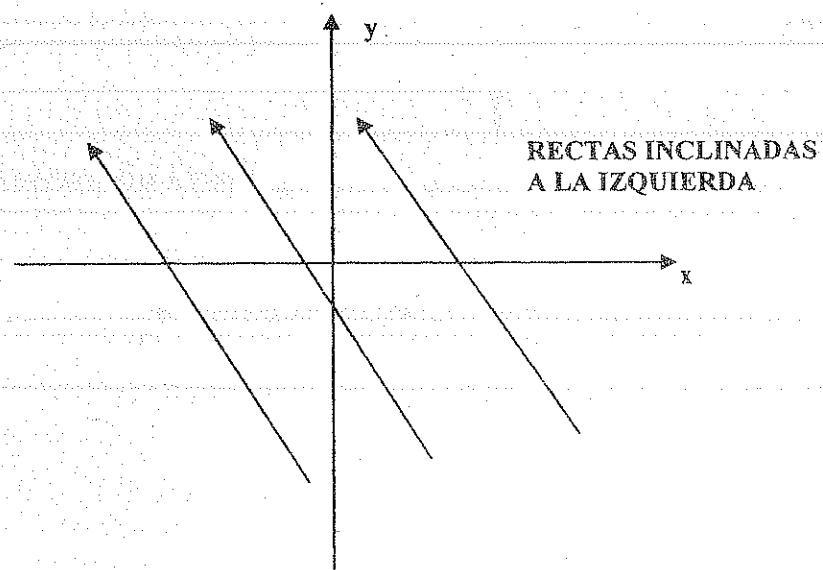
- Si $0^\circ < \alpha < 90^\circ$; m es positiva:



- Si $\alpha = 90^\circ$; m no se puede determinar:

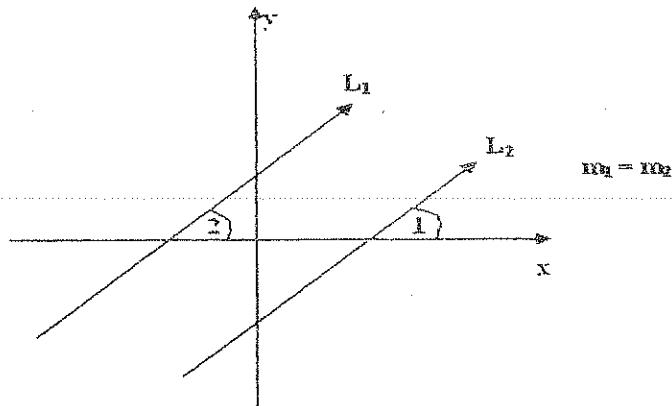


- Si $90^\circ < \alpha < 180^\circ$; m es negativa:

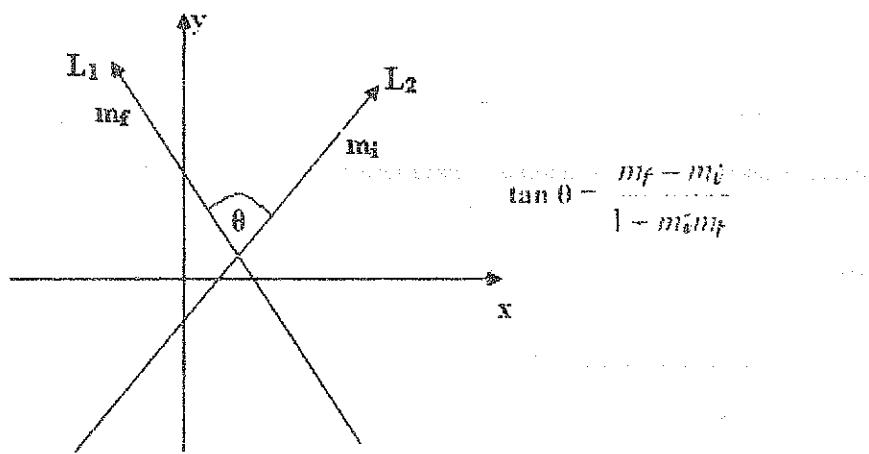


POSICIÓN RELATIVA DE DOS RECTAS

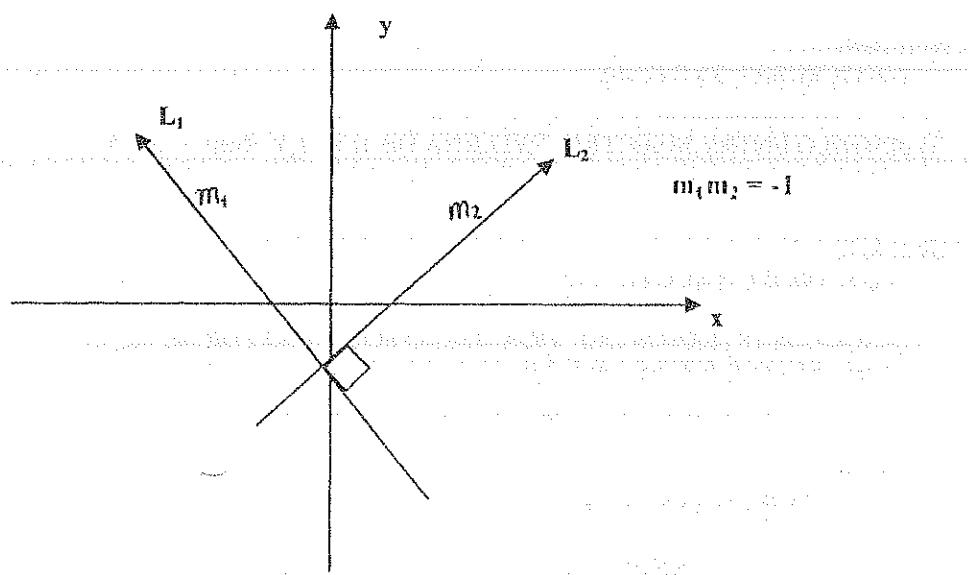
1. PARALELAS:



2. SECANTES:



3. PERPENDICULARES



EJERCICIOS

1. H) ABCD CUADRILÁTERO

A (-1; 12), B (13; 13), C (7; -8), D (-3; -5)

E, F, G, H PUNTOS MEDIOS DE LOS LADOS

T) $s_{EFGH} = ?$; EFGH PARALELOGRAMO. Resp. = $116 \mu^2$

2. H) A (-5; 7), B (-6; 2), C (-2; -4), D (10; 2)

T) ABCD INSCRIPTIBLE

3. H) ΔABC

A (-7; 8), B (5; 10), C (1; -14)

T) ANGULO DE INCLINACION DE BC, ANGULO ENTRE hc y ha? Resp. $80,54^\circ$; $71,07^\circ$; $108,93^\circ$ 4. H) ΔABC

A (4; 8), B (-6; 2), C (2; -5)

T) ANGULO ENTRE ha y mb? Resp. 52° 5. H) ΔABC

A (-3; -7), B (-8; -2), C (2; 5)

T) ANGULO ENTRE mc y Va (interna)? Resp. $49,71^\circ$ 6. H) ΔABC

A (-3; -7), B (-8; -2), C (2; 5)

T) ANGULO ENTRE LA MEDIALTRIZ DE AB Y BISECTRIZ EXTERNA DE C? Resp. $83,66^\circ$ 7. H) ΔABC

A (-6; 3), B (-1; 3), C (2; -6)

T) ANGULO ENTRE m_a y MEDIALTRIZ DE AB? Resp. = $55,39^\circ$ 8. H) ΔABC

A (-12; 3), B (7; 3), C (2; -6)

T) ANGULO ENTRE BISECTRIZ EXTERNA DE A Y h_b ? Resp. = $16,35^\circ$ 9. H) ΔABC

A (11; 10), B (-7; 6), C (1; -11)

T) ANGULOS INTERNOS DEL TRIANGULO FORMADO POR hb, ha, mc

Resp. $59,09^\circ$; $53,36^\circ$; $67,55^\circ$ 10. H) ΔABC

A (10; 8), B (-4; 2), C (4; 12)

T) ANGULOS INTERNOS DEL TRIANGULO FORMADO POR h_c , V_A , MEDIALTRIZ DE AC?Resp. $61,60^\circ$; $61,62^\circ$; $56,78^\circ$.

LA RECTA

RECTA-ECUACIONES

-PUNTO-PENDIENTE.

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

-PENDIENTE ORDENADA EN EL ORIGEN

$$y = mx + b$$

-SIMETRICA

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

-GENERAL

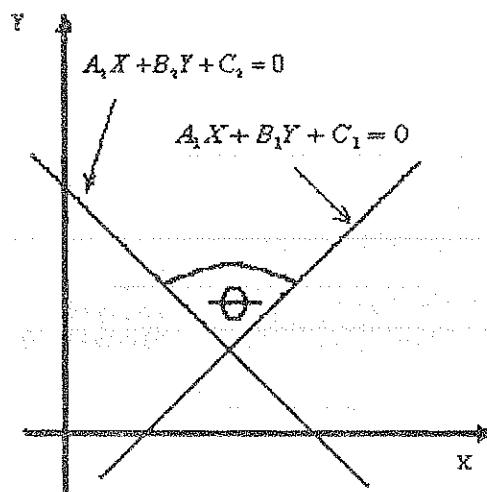
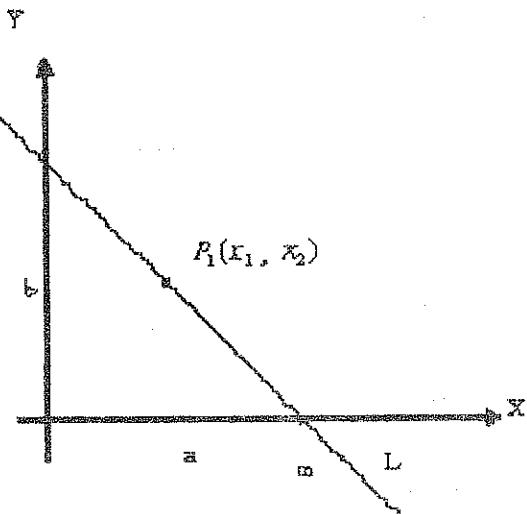
$$Ax + By + C = 0$$

$$m = -\frac{A}{B}$$

$$\text{VERTICALES: } X + \frac{C}{A} = 0$$

$$\text{HORizontALES: } Y + \frac{C}{B} = 0$$

PASAN POR EL ORIGEN: $AX + BY = 0$



$$\text{ANGULO ENTRE DOS RECTAS: } \operatorname{tg} \theta = \frac{A_1 B_2 - A_2 B_1}{A_1 A_2 + B_1 B_2}$$

RECTAS COINCIDENTES: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = K$

EJERCICIOS

1. H) Triángulo ABC
A (7; 3)
B (8; -9)
C (-4; -7)
T) Ecuación de los lados

Resp.
 $10x - 11y - 37 = 0$
 $12x + y - 87 = 0$
 $x + 6y + 46 = 0$
2. H) Triángulo ABC
A (2; 6)
B (4; -4)
C (6; -1)
T) Ecuaciones de las alturas, Ortocentro

Resp.
 $2x + 3y - 22 = 0$
 $4x - 7y - 44 = 0$
 $x - 5y - 11 = 0$
H (11; 0)
3. H) Triángulo ABC
A (2; 9)
B (-1; 0)
C (14; 5)
T) Ecuaciones de bisectrices, Incetro

Resp.
 $2x + y - 13 = 0$
 $x - y + 1 = 0$
 $y - 5 = 0$
I (4; 5)
4. H) Triángulo ABC
A (2; 2)
B (-3; 0)
C (16; -3)
T) Ecuaciones de las medianas, baricentro

Resp.
 $7x + 9y - 32 = 0$
 $x + 24y + 3 = 0$
 $8x + 33y - 29 = 0$
G (5; -1/3)
5. H) Triángulo ABC
A (8; 1)
B (0; 5)
C (3; 11)
T) Ecuaciones, Bisectrices Externas,
Excentro de B

Resp.
 $x - y - 7 = 0$
 $y - 11 = 0$
 $x - 3y + 15 = 0$
Ob (18; 11)
6. H) Triángulo ABC
A (2; -3)
C (-4; 5)
L. $4x - 7y - 12 = 0$
S $\Delta ABC = 9$
B $\in L$
T) Baricentro ΔABC

Resp.
(1/10; 8/15)
7. H) Triángulo ABC
AB=BC
A (-3; -2)
C (2; 5)
S $\Delta ABC = 18,5$
$$\frac{BE}{BC} = \frac{1}{2}$$

T) Ecuación de GE

Resp.
 $8x - 11y + 2 = 0$
 $13x - 4y + 31 = 0$
8. H) Cuadrado ABCD
A (-8; 3)
B (3; 10)
T) Ecuaciones de lados y diagonales

Resp.
 $7x - 11y + 89 = 0; 9x - 2y - 7 = 0$
 $7x - 11y - 81 = 0; 2x + 9y - 11 = 0$
 $11x + 7y + 67 = 0$
 $11x + 7y - 103 = 0$

9. H) Cuadrado ABCD

$$\begin{aligned} A &(-1; 3) \\ C &(6; 2) \end{aligned}$$

T) Ecuaciones de Lados y Diagonales

Resp.

$$\begin{aligned} x+7y-20=0 \\ 3x-4y+15=0 \\ 4x+3y-5=0 \\ 4x+3y-30=0 \\ 7x-y-15=0 \\ 3x-4y-10=0 \end{aligned}$$

10. H) A (5; -4)

Centro del cuadrado O (-2; -1)

T) Ecuaciones de lados y diagonales

Resp.

$$\begin{aligned} 5x-11y-74=0 \\ 5x-11y+72=0 \\ 11x+5y-46=0 \\ 11x+5y+100=0 \\ 8x-3y+13=0 \\ 3x+8y+14=0 \end{aligned}$$

11. H) Cuadrado ABCD

Un lado: $3x+2y-6=0$

Centro del cuadrado: O (6; 4)

T) Ecuaciones de los lados y diagonales

Resp.

$$\begin{aligned} x+5y-26=0 \\ 5x-y-26=0 \\ 3x+2y-46=0 \\ 2x-3y-20=0 \\ 2x-3y+20=0 \end{aligned}$$

12. H) rectángulo ABCD

AB: $2x-3y+4=0$

AD: $3x+2y+2=0$

AC \cap BD = P (-1; 2)

T) Ecuaciones de lados y diagonales

Resp.

$$\begin{aligned} 2x-3y+12=0 \\ 3x+2y-4=0 \\ 6x+17y-28=0 \\ 18x-y+20=0 \end{aligned}$$

13. H) Rectángulo ABCD

AB: $x+y-5=0$

AD: $x-y+3=0$

C (-2; -5)

T) Ecuaciones de lados y diagonales

Resp.

$$\begin{aligned} x-y-3=0 \\ x+y+7=0 \\ x-3y-1=0 \\ 3x-y+1=0 \end{aligned}$$

14. H) Rectángulo ABCD

A (1; 4)

B (13; 8)

AC \cap BD = P (8; 2)

T) Ecuaciones de lados y diagonales

Resp.

$$\begin{aligned} x-3y+11=0 \\ 2x+7y-30=0 \\ 4x+y-60=0 \\ 6x-5y-38=0 \\ x-3y-15=0 \\ 4x+y-8=0 \end{aligned}$$

15. H) Rectángulo ABCD

A (1; 2)

B (2; 5)

SABCD = 40

T) Ecuaciones de lados y diagonales

Resp.

$$\begin{aligned} x+3y-17=0 \\ 3x-y-79=0 \\ 3x-y-1=0 \\ x+3y-7=0 \\ x+5y-27=0 \\ 14x+23y-57=0 \end{aligned}$$

16. H) Paralelogramo ABCD

AB: $x-7y+39=0$

AD: $5x-y-9=0$

AC \cap BD = P (6; 4)

T) Ecuaciones de lados y diagonales

Resp.

$$\begin{aligned} 2x+3y-24=0 \\ x-7y+5=0 \\ 3x-4y-2=0 \\ 5x-y-43=0 \end{aligned}$$

17. H) Paralelogramo ABCD

AB: $3x+2y+5=0$

AD: $x+3y+4=0$

C: $(-6; 4)$

T) Ecuaciones de lados y diagonales

Resp.

$x+y+2=0$

$x+3y-6=0$

$3x+2y+10=0$

$5x+y+16=0$

18. H) Paralelogramo ABCD

A $(-1; 1)$

B $(1; 3)$

S_{ABCD} = $15 \mu^2$

Resp.

$x-y+2=0$

$2x-2y-11=0$

$y-3=0$

$y-1=0$

$4x+11y-37=0$

$4x-19y+23=0$

19. H) Rombo ABCD

AC: $x+y-12=0$

BD: $x-y-2=0$

AB: $x-4y+28=0$

T) Ecuaciones de lados, S_{ABCD}

Resp.

$x-4y-2=0$

$4x-y-38=0$

$4x-y-8=0$

$S = 60 \mu^2$

20. H) Rombo ABCD

AB: $3x-4y=0$

BD: $x-3=0$

C $(6; 0)$

T) Ecuaciones de lados y diagonales, S_{ABCD}

Resp.

$3x+4y-24=0$

$3x-4y-24=0$

$S = 24$

$3x+4y=0$

$y=0$

21. H) ABCD Trapecio isósceles

AD: $3x-5y-13=0$

AC: $7x-6y-19=0$

B $(2; 2)$

T) Ecuaciones de lados y diagonales, S_{ABCD}

Resp.

$3x-5y+4=0$

$4x-y-6=0$

$2x-9y+14=0$

$S = 25,5 \mu^2$

22. H) ABCD Trapecio isósceles

AD: $5x+6y+14=0$

AB: $3x-5y+17=0$

C $\left(4; \frac{3}{2}\right)$

T) Ecuaciones de lados y diagonales

Resp.

$5x+6y-29=0$

$x-16y+20=0$

$5,32x-2y-18,28=0$

$8,38x+y-12,38=0$

23. H) Triángulo ABC

A $(2; 2)$

hb: $14x-5y+42=0$

Mb: $6x+y+18=0$

T) Ecuaciones de lados

Resp.

$5x+14y-38=0$

$2x-5y+6=0$

$0,95x+y+2,85=0$

24. H) Triángulo ABC

C $(3; 11)$

Ma: $14x+13y-125=0$

Bisectriz externa de A: $x-y-7=0$

T) Ecuaciones Lados

G Triángulo ABC

Resp.

$2x+y-17=0$

$x+2y-10=0$

$2x-y+5=0$

$G\left(\frac{11}{3}; \frac{17}{3}\right)$

25. H) Triángulo ABC

$$\begin{aligned} A & (8; 1) \\ Mb: & 2x-11y+55=0 \\ Hc: & 2x-y+5=0 \end{aligned}$$

Resp.

$$\begin{aligned} x+2y-10=0 \\ 2x-y+5=0 \\ 2x+y-17=0 \\ G\left(\frac{11}{3}, \frac{17}{3}\right) \end{aligned}$$

T) Ecuaciones Lados; G Triángulo ABC

26. H) Triángulo ABC

$$\begin{aligned} B & (3; 5) \\ Vc: & 3x-2y-1=0 \text{ (interna)} \\ Ha: & 2x-y+5=0 \\ T) & \text{Ecuaciones de Lados} \end{aligned}$$

Resp.

$$\begin{aligned} x+2y-13=0 \\ 5x-4y+5=0 \\ 29x+2y+155=0 \end{aligned}$$

27. H) Triángulo ABC

$$\begin{aligned} C & (9; -2) \\ Mb: & x-3y-7=0 \\ VextA: & y-2=0 \end{aligned}$$

Resp.

$$\begin{aligned} x+y-7=0 \\ x-y-3=0 \\ y+2=0 \\ S\Delta = 16 \mu^2 \end{aligned}$$

T) Ecuaciones Lados; $S\Delta=?$

28. H) P (2; 2)

$P \in L$
L forma con los ejes un
Triángulo de área= 1
T) Ecuación Recta L

Resp.

$$\begin{aligned} 2x-y-2=0 \\ x-2y+2=0 \end{aligned}$$

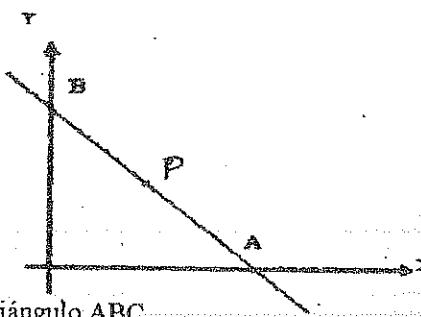
29. H) L1: $ax+9y+(a-3)=0$

$$\begin{aligned} L2: & 4x+ay+b=0 \\ L1 \wedge L2 & \text{coincidentes} \\ T) & a=?; b=? \end{aligned}$$

Resp.

$$\begin{aligned} a &= \pm 6 \\ b &= 2 \circ 6 \end{aligned}$$

30.



H) P (8; 9)

$$\frac{PA}{PB} = -\frac{3}{2}$$

T) AB=?

$$3x+4y-60=0$$

Resp.

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{23}{7}, \frac{48}{7}\right) \\ &\left(-\frac{71}{7}, \frac{48}{7}\right) \\ &\left(-\frac{71}{7}, 0\right) \\ &\left(-\frac{23}{7}, 0\right) \end{aligned}$$

31. H) Triángulo ABC

$$A (-5; 12)$$

$$B (-17; 0)$$

$$C (-1, 0)$$

DEFG cuadrado inscrito

en el triángulo

T) D=?; E=?; F=?; G=?

32. H) Triángulo ABC

$$AB = BC$$

$$AB: 2x+9y-6=0$$

$$BC: 7x-6y+10=0$$

$$P: (5; 2) \in AC$$

T) Ecuación AC

Resp.

$$x-3y+1=0$$

$$3x+y-17=0$$

33. H) L forma con los ejes de

coordenadas un Δ de

perímetro 12

$$P\left(2; \frac{4}{3}\right) \in L$$

T) Ecuación de la recta L

Resp.

$$4x+3y-12=0$$

$$8x+15y-36=0$$

34. H) L1: $3x+y-2=0$

$$L2: x-5y+10=0$$

$$A \in L1; B \in L2$$

$$P(2; -3) \in AB$$

$$AP = PB$$

T) Ecuación AB= ?

Resp.

$$4x-y-11=0$$

$$41x+11y-49=0$$

35. H) Oa (-11; 4)

$$Ob (5; -8)$$

$$Oc (10; 7)$$

$$T) A=?$$

$$B=?$$

$$C=?$$

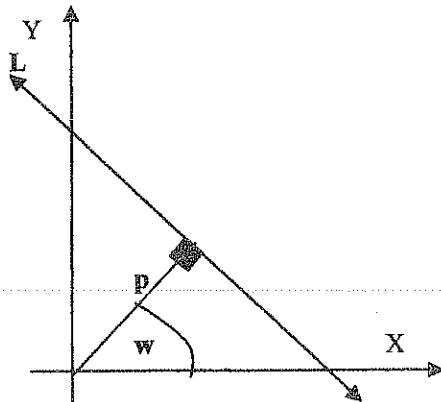
Resp.

$$(7; -2)$$

$$(3; 6)$$

$$(1; -5)$$

LA RECTA: FORMA NORMAL



$$x \cdot \cos(w) + y \cdot \sin(w) - p = 0$$

$$0 \leq w \leq 360$$

RELACIÓN ENTRE LA ECUACIÓN GENERAL Y NORMAL

$$L: Ax + By + C = 0$$

$$x \cdot \cos(w) + y \cdot \sin(w) - p = 0$$

$$\cos(w) = \frac{A}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$\sin(w) = \frac{B}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$p = -\left(\frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}\right)$$

$$\frac{Ax}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{By}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} + \frac{C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = 0$$

Signos del Radical

- | | | |
|-----|-------------------------|-------------------------|
| Si, | $c \neq 0$ | Signo Contrario al de c |
| Si, | $c = 0 \wedge B \neq 0$ | Signo igual al de B |

DISTANCIA DE LA RECTA L A UN PUNTO P

$$L: Ax + By + C = 0 ; P(X_1, Y_1)$$

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}}$$

$$d = \frac{mx_1 - y_1 + b}{\pm \sqrt{m^2 + 1}}$$

Signo de d

1. Recta no pasa por el Origen

Positiva, Si el punto y el origen
distinto lado de L

Negativa, Si punto y origen
mismo lado de L

2. Recta pasa por el origen.

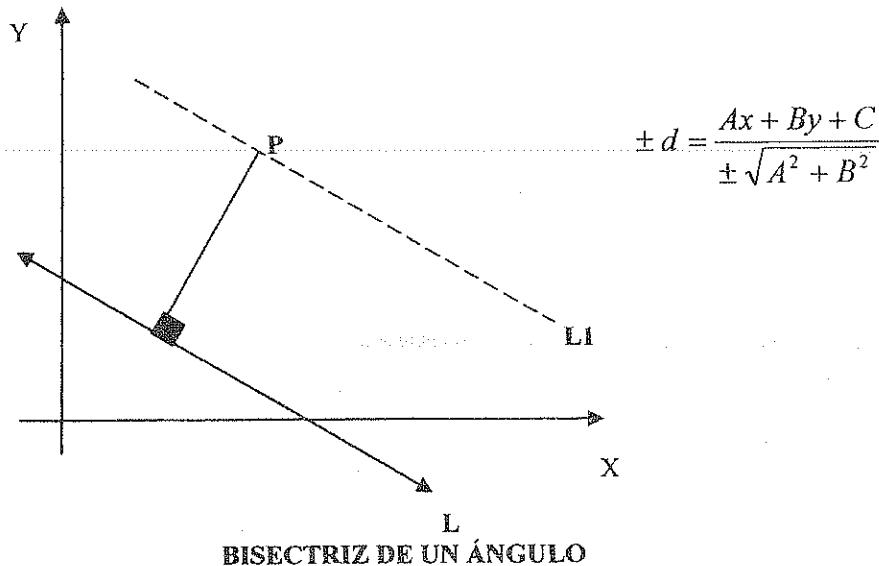
Positiva: El punto arriba de L

Negativa: El punto debajo de L

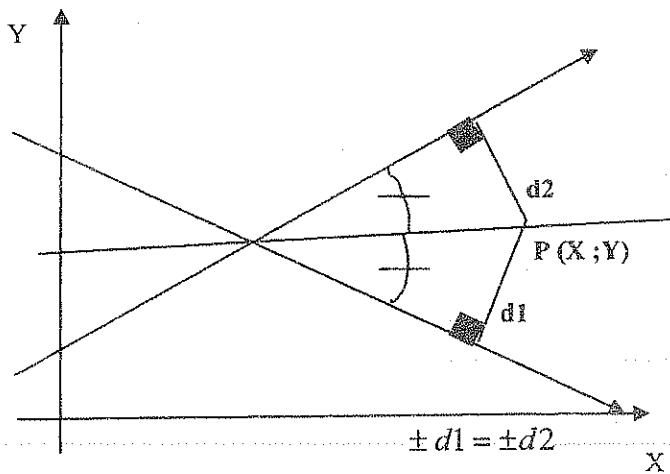
$$p = \frac{c}{\pm \sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{b}{\pm \sqrt{m^2 + 1}}$$

PARALELA A UNA RECTA L A UNA DISTANCIA DADA d

$$L: Ax + By + C = 0 \quad P(X; Y)$$



$$\begin{aligned} L_1: & A_1x + B_1y + C_1 = 0 \\ L_2: & A_2x + B_2y + C_2 = 0 \end{aligned}$$



$$\pm \left(\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\pm \sqrt{A_1^2 + B_1^2}} \right) = \pm \left(\frac{A_2x + B_2y + C_2}{\pm \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \right)$$

EJERCICIOS

1) H) L1: $7x - 6y - 7 = 0$
 L2: $4x + 3y + 2 = 0$
 L3: $5x + 3y = 0$
 L4: $6x - 7y - 3 = 0$
 L5: $3x + 7y - 6 = 0$

T) $p=?$
 $\omega=?$
 Resp. $\frac{7}{\sqrt{85}}, \frac{2}{5}; 0; \frac{3}{\sqrt{85}}, \frac{6}{\sqrt{58}}$
 $319,4^\circ; 216,86^\circ; 30,96^\circ; 310,6^\circ; 66,8^\circ$

2) H) L1: $3x + 2y - 3 = 0$; P1 (-4; 2)
 L2: $2x - 5y + 4 = 0$; P1 (-3; -4)
 L3: $3x - 6y + 15 = 0$; P1 (1; 5)

T) Distancia punto-recta.
 Resp. $-\frac{11}{\sqrt{13}}, -\frac{18}{\sqrt{29}}, \frac{4}{\sqrt{5}}$

3) H) L1: $3x + 2y + 5 = 0$
 L2: $3x + 2y + 10 = 0$

T) Distancia entre L1 \wedge L2
 Resp. $\frac{5}{\sqrt{13}}$

4) H) $\begin{cases} L1: 50x + 23y - 50 = 0 \\ L2: 50x + 109y - 50 = 0 \end{cases}$

T) Ecuaciones de las bisectrices
 de los: Ángulos agudos, y Ángulos obtusos.

$L3: x + 2y - 4 = 0$
 $L4: x + y - 4 = 0$

Resp. $\begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$

$L5: 4x - 3y + 8 = 0$
 $L6: 3x - 10y + 10 = 0$

$0,83x - 0,58y - 3,32 = 0$
 $0,69x + y - 2,76 = 0$

$56,76x - 81,32y + 133,52 = 0$
 $26,76x + 18,68y + 33,52 = 0$

5) H) L1: $4X + 3Y - 5 = 0$
 L1 \parallel L2
 $d = -4$ entre L1 \wedge L2

T) Ecuación de L2 =?
 Resp. $4X + 3Y + 15 = 0$

6) H) L1: $4X + 3Y - 5 = 0$
 L2: $4X + 3Y + 10 = 0$
 L1 \parallel L2 \parallel L3
 L3 pasa por la mitad de L1 \wedge L2.

T) Ecuación de L3 =?
 Resp. $8X + 6Y + 5 = 0$

7) H) $p = 2$
 A (3; 1)
 A \in L

T) Ecuación de L =?
 Resp. $1,57X - Y - 3,73 = 0$
 $0,38X + Y - 2,14 = 0$

8) H) A (5; 5)
 B (2; 4) \in L
 $d = 3$ distancia de A a L

T) Ecuación de L =?
 Resp. $4X + 3Y - 20 = 0$
 $X = 2$

9) H) A (2; 2)
 $d_1 = 4$ distancia de A a L
 B (-2; 4)
 $d_2 = 5$ distancia de B a L

T) Ecuación de L =?
 Resp. $0,24X + Y + 1,08 = 0$
 $0,82X + Y - 8,76 = 0$

10) H) $p = 12/\sqrt{13}$
 L forma con los ejes un Δ de
 $\text{Área} = 12 \mu^2$

T) Ecuación de L =?
 Resp. $0,67X + Y - 4 = 0$
 $1,5X + Y - 6 = 0$

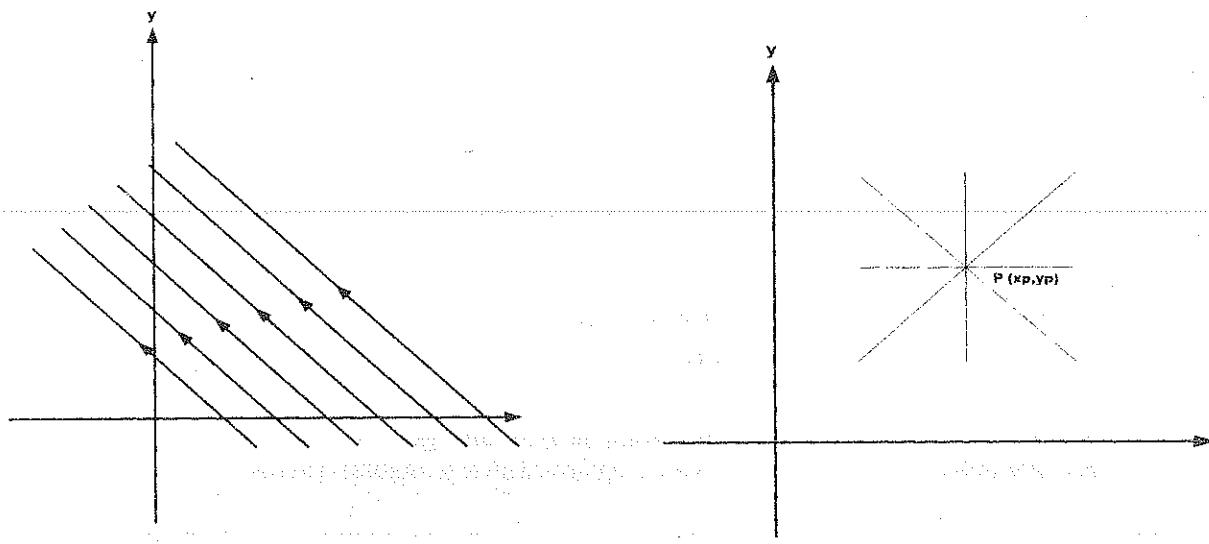
11) H) A (3; 2)
 $d = 1,87$ de A a L
 L forma con los ejes un Δ de $S = 2,5 \mu^2$

T) Ecuación de L =?
 Resp. $2X + 2,5Y - 5 = 0$
 $0,14X + 3,43Y - 5 = 0$

FAMILIA O HAZ DE RECTAS

Para que una recta esté determinada, se necesitan dos condiciones.

Si se conoce una condición, puede existir un infinito número de rectas que cumplan con esta condición, a éste infinito número de rectas se les denomina familia o haz de rectas.



Ecuación de la familia de rectas que pasan por un mismo punto

Procedimiento:

1. Se escribe la primera recta, y se le suma la otra multiplicada por k que se conoce como parámetro.

$$A_1x + B_1y + C_1 + k(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$
2. Se escribe la ecuación anterior como ecuación general de la recta.

$$x(A_1 + A_2k) + y(B_1 + B_2k) + (C_1 + C_2k) = 0$$
3. Se determina k (parámetro de la familia de rectas) aplicando las condiciones dadas.
4. Se reemplaza el valor de k en la ecuación 2 y se obtiene la recta.

Ejercicios

1) H) L1: $3x+2y+5=0$

L2: $4x+7y+12=0$

L pasa por la intersección
de L1 \wedge L2

A (2; 3) \in L

T) Ecuación de L=? sin determinar el

el punto de intersección

Resp. $55x-37y+1=0$

2) H) L1: $3x-2y+12=0$

L2: $x+4y-8=0$

L pasa por la intersección
de L1 \wedge L2

L paralela eje x

T) Ecuación de L=? sin determinar el

el punto de intersección

Resp. $7y-18=0$

3) H) L1: $3x+5y-4=0$

L2: $4x+3y-7=0$

L pasa por la intersección

de L1 \wedge L2 y tiene $m = \frac{1}{3}$

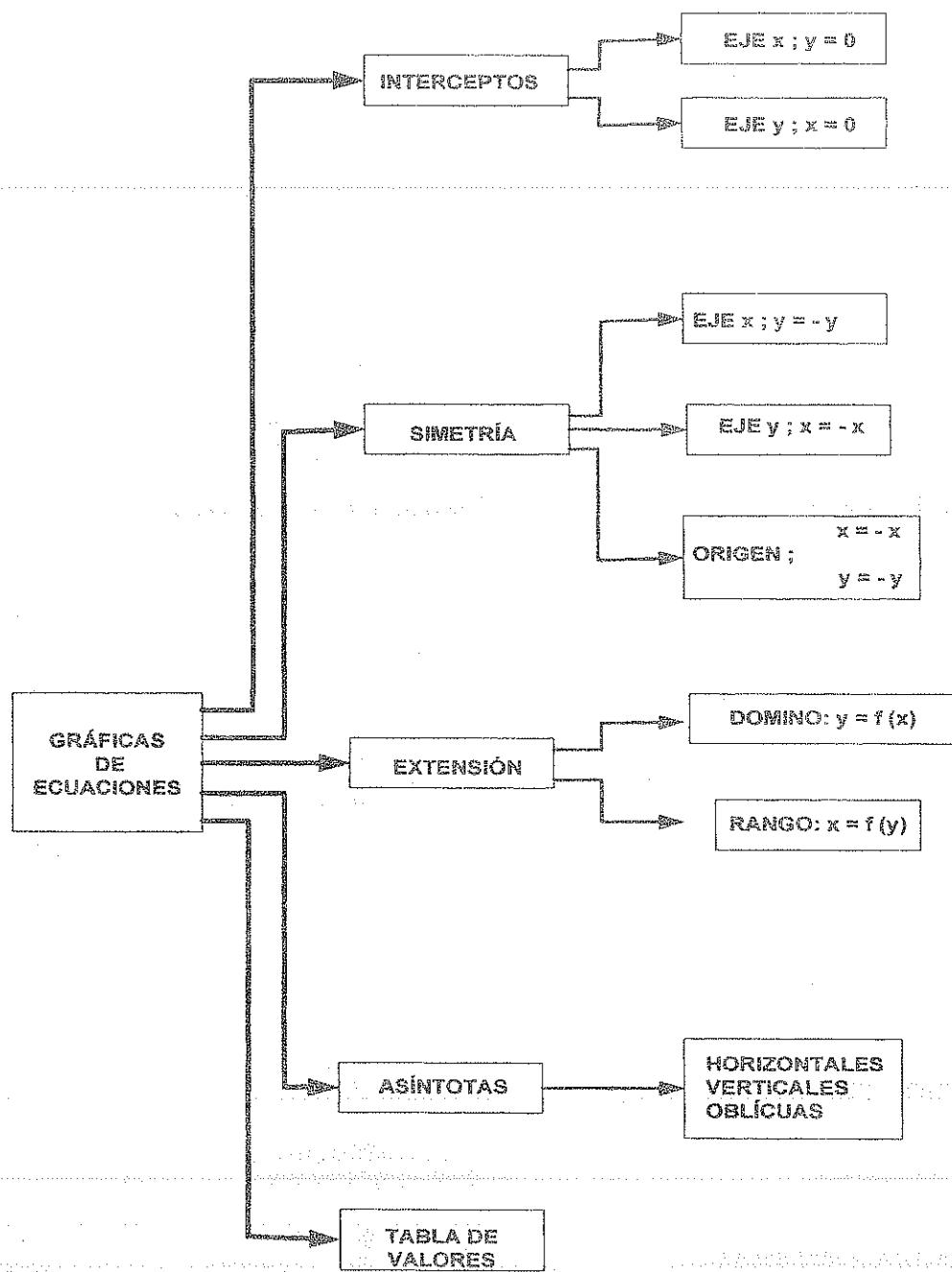
T) Ecuación de L=? sin determinar el

el punto de intersección

Resp. $11x-33y-38=0$

- 4) H) L₁: 2x-y+2=0
 L₂: x-y+1=0
 $L_1 \cap L_2 = P$
 $P \in L$
 L forma con los ejes un triángulo de S=4
- T) Ecuación de L=? sin determinar el punto de intersección
 Resp. 8x+y+8=0
- 5) H) Δ ABC
 A(5; 2)
 hb: 3x+2y-2=0
 Vb: 3x-y-4=0
- T) Ecuaciones de los lados sin determinar B A.C.
 Resp. 2x-3y-4=0
 $24x-35y-50=0$
 $4,44x+1,51y-3,96=0$
- 6) H) Δ ABC
 C(-5; -3)
 ha: 10x-3y-15=0
 Vb: 28x+25y+10=0
- T) Ecuaciones de los lados sin determinar A B
 Resp. 3x+10y+45=0
 $10,16x+1,75y-40,3=0$
 $7x-6,9y+14,3=0$
- 7) H) ABCD Rectángulo
 AB: 3x+y-4=0
 AD: x-3y+2=0
 $AC \cap BD = P\left(\frac{7}{2}; \frac{7}{2}\right)$
- T) Ecuaciones lados y diagonales sin encontrar los vértices
 Resp. x-y=0
 $x+7y-28=0$
 $x-3y+12=0$
 $3x+y-24=0$
- 8) H) ABCD Rombo
 AC: x+3y-8=0
 BD: 3x-y-14=0
 AB: x-y=0
- T) Ecuaciones de los lados sin determinar los vértices
 Resp. 7x+y-56=0
 $7x+y-16=0$
 $x-y-8=0$
- 9) H) L₁: x+2y-1=0
 L₂: 2x-y+3=0
 Distancia de P(0; 1) a L $\frac{\sqrt{5}}{5}$
 L pasa por intersección de L₁ A L₂
- T) Ecuaciones de L=? sin determinar el punto de intersección
 Resp. x+2y-1=0
 $x-2y+3=0$
- 10) H) L₁: 3x-y+C=0
 L₂: 3x-4y+6=0
 L₃: x-5=0
 L₁ pasa por la intersección de L₂ A L₃
- T) C=? sin determinar el punto de intersección
 Resp. $C = \frac{39}{4}$
- 11) H) L₁: 4x-5y-12=0
 L₂: 3x+2y-16=0
 L pasa por la intersección de L₁ A L₂ y las intersecciones con los ejes de coordenadas son iguales
- T) Ecuación de L=? sin determinar el punto de intersección
 Resp. 7x-26y=0
 $23x-23y-76=0$
- 12) H) L₁: x-3y-12=0
 L₂: 5x-2y-1=0
 $L_1 \cap L_2 = P$
 L₃: x+y-6=0
 L₄: 4x-5y-3=0
 $L_3 \cap L_4 = Q$
- T) Encontrar la ecuación de PQ sin determinar P A Q
 Resp. 1,3x-y-2,43=0

GRÁFICAS DE ECUACIONES



GRAFICAR:

1) $xy - 2y - x + 1 = 0$

7) $y^2x^2 - 2xy^2 - y^2 - x = 0$

13) $y = \frac{(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-2)}$

2) $x^2y - 4y + x = 0$

8) $3x^2y - 30yx - 2x^2 + 5x + 3y - 2 = 0$

14) $y = \frac{3x+2}{(x-1)^2}$

3) $x^2y - x^2 - y = 0$

9) $y + 2xy + yx^2 - x = 0$

15) $2xy - x^2 + 6x - 4y - 10 = 0$

4) $2x^2y - 3xy - 5y - 1 = 0$

10) $y^3 + x^3 - 30xy = 0$

16) $x^2 - xy + 2x - 1 = 0$

5) $yx^2 - 3x^2 + 8x - 4 = 0$

11) $x^2 - xy - y - 25 = 0$

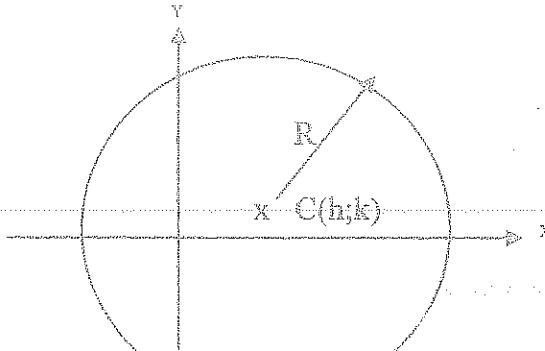
6) $2x^2y - 5xy + 2y - x^2 - 1 = 0$

12) $x^2y - 4y - 8 = 0$

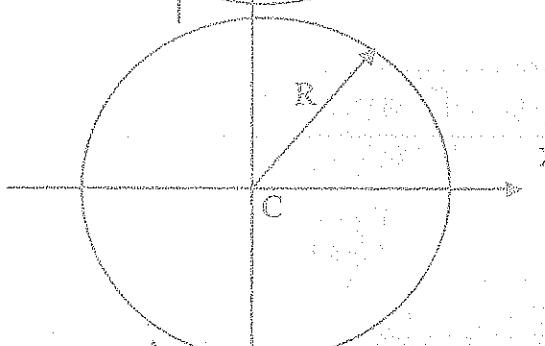
CIRCUNFERENCIA

ECUACIONES

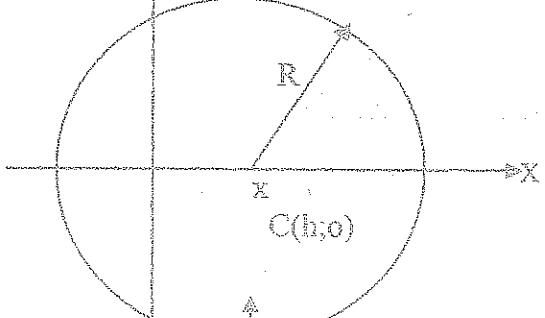
$$(x - h)^2 + (y - k)^2 = R^2$$



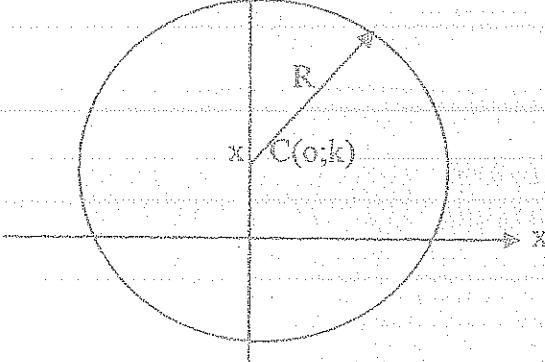
$$x^2 + y^2 = R^2$$



$$(x - h)^2 + y^2 = R^2$$



$$x^2 + (y - k)^2 = R^2$$



Ecuación General de segundo grado

$$AX^2 + BXY + CY^2 + DX + EY + F = 0$$

Ecuación General Circunferencia

$$\text{Si: } B = 0; A = C; \quad X^2 + Y^2 + DX + EY + F = 0$$

$$C(-D/2; -E/2) \quad R=1/2\sqrt{D^2+E^2-4F}$$

$D^2+E^2-4F > 0$	Circunferencia real.
$D^2+E^2-4F < 0$	Circunferencia imaginaria
$D^2+E^2-4F = 0$	punto $(-D/2; -E/2)$

EJERCICIOS

1. H) ΔABC
 A (8; 4)
 B (-1; 7)
 C (4; -8)

T) Ecuación círculo inscrito

$$\text{Resp. } (x-4)^2 + (y-2)^2 = 10$$

2. H) ΔABC
 A (-1; 1)
 B (3; 5)
 C (-4; 3)

T) Ecuación círculo circunscrito

$$\text{Resp. } x^2 + y^2 - 5x - 3y - 4 = 0$$

$$x^2 + y^2 + 15x + 11y + 2 = 0$$

3. H) ΔABC
 A (-1; -3)
 B (7; 1)
 C (-4; 3)

T) Ecuaciones circunferencias exinscritas

$$\text{Resp. } (x-5)^2 + (y-15)^2 = 180$$

$$(x+7)^2 + (y+1)^2 = 20$$

$$(x+2)^2 + (y+6)^2 = 45$$

4. H) A (15; 2)
 B (7; 6)
 A $\in \odot$
 B $\in \odot$
 C $\in L$
 L: $x+2y-4=0$

T) Ecuación de la circunferencia=?

$$\text{Resp. } (x-8)^2 + (y+2)^2 = 65$$

$$(x-10)^2 + (y-2)^2 = 25$$

5. H) L1: $4x-3y+16=0$
 L2: $4x-3y-20=0$
 A (2; 6) $\in \odot$

T) Ecuación circunferencia tg a L1 \wedge L2

$$\text{Resp. } 25x^2 + 25y^2 - 100x - 300y + 676/25 = 0$$

6. H) L1: $x+y+4=0$
 L2: $7x-y+4=0$
 L3: $4x+3y-2=0$
 C $\in L_3$

T) Ecuación circunferencia tg a L1 \wedge L2

$$\text{Resp. } (x-2)^2 + (y+2)^2 = 8$$

$$(x+4)^2 + (y-6)^2 = 18$$

7. H) A (3; 1) $\in \odot$
 L1: $4x-3y-14=0$
 C \in L2: $2x+y+3=0$

T) Ecuación circunferencia tg a L

$$\text{Resp. } x^2 + y^2 + 4xy - 2y - 20 = 0$$

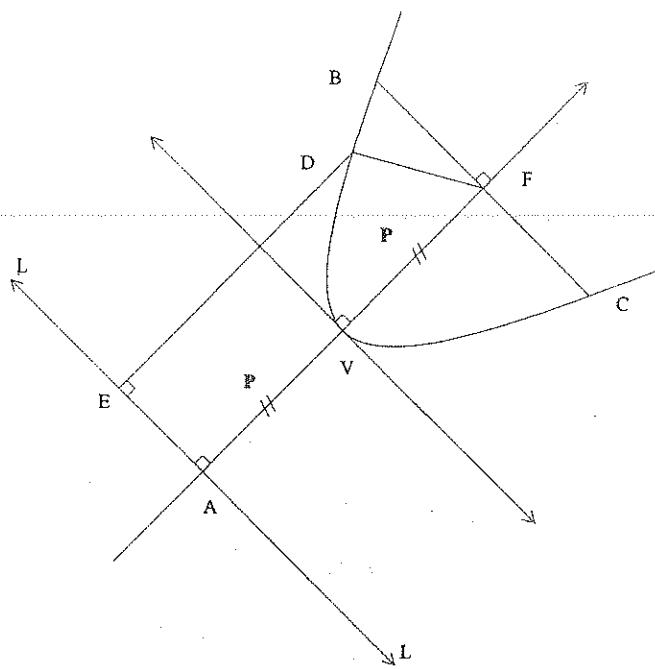
$$x^2 + y^2 + 24x - 41y - 40 = 0$$

8. T) Posición Relativa de la siguientes circunferencias

- a) $x^2 + y^2 - 5x + 7y - 10 = 0$
 $x^2 + y^2 - 5x + 7y - 50 = 0$ Resp. Concentricas
- b) $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 11 = 0$
 $x^2 + y^2 - 12x - 4y + 31 = 0$ Resp. tg externamente
- c) $x^2 + y^2 + 6x + 4y - 12 = 0$
 $x^2 + y^2 + 10x - 2y + 10 = 0$ Resp. Secantes
- d) $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$
 $x^2 + y^2 - 6x - 6y + 5 = 0$ Resp. Ortogonales

9. H) C1: $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 3 = 0$ T) Ecuación de C2
 C1 C2= 8
 C1 C2: $3x + y - 3 = 0$
 C1 \wedge C2: ORTOGONALES
 Resp. $(x - 37/100)^2 + (y - 47/25)^2 = 48$
10. H) C1: $x^2 + y^2 - 18x - 16y + 45 = 0$ T) Circunferencia de diámetro AB
 C2: $x^2 + y^2 + 6x - 2y - 20 = 0$
 C1 \cap C2= AB
 Resp. $x^2 + y^2 - 2x - 8y - 3 = 0$
 $x^2 + y^2 + 6x - 4y - 19 = 0$
11. H) A (-2; -2) \in \odot T) Ecuación de la circunferencia=?
 C \in L: $2x - y = 0$
 \odot tg a $3x - 4y - 20 = 0$
 Resp. $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 25$
 $(x + 2)^2 + (y + 4)^2 = 4$
12. H) C1: (-4; 3) T) Ecuación de C1 tg a C2
 C2: $x^2 + y^2 - 4x + 3y = 0$
 Resp. $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 25$
 $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 100$
13. H) A (5; -6) \in \odot T) ecuación de la circunferencia=?
 B (7; 2) \in \odot .
 \odot tg a $3x - 5y + 23 = 0$
 Resp. $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 34$
 $(x - 34)^2 + (y + 9)^2 = 850$
14. H) A (-1; 2) \in \odot T) Ecuación de la circunferencia Tg L
 R=5
 L: $3x - 4y + 1 = 0$
 Resp. $(x + 6)^2 + (y - 2)^2 = 25$
 $(x - 2/5)^2 + (y - 34/5)^2 = 25$
15. H) L1: $3x - 4y + 50 = 0$ T) Ecuación de la circunferencia tg a L1 \wedge L2
 L2: $4x + 3y - 50 = 0$
 R= 10
 Resp. $x^2 + y^2 = 100$
 $(x - 16)^2 + (y - 12)^2 = 100$
 $(x + 12)^2 + (y - 16)^2 = 100$
 $(x - 4)^2 + (y - 28)^2 = 100$
16. H) \odot tg a $x - 2y - 2 = 0$ en P(8; 3) T) Ecuación de la circunferencia=?
 A(12; 7) \in \odot
 Resp. $(x - 4)^2 + (y - 11)^2 = 80$
17. H) \odot Tg a los ejes T) Ecuación de la circunferencia=?
 A (3; 6) \in \odot
 Resp. $(x - 15)^2 + (y - 15)^2 = 225$
 $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 9$
18. H) Δ ABC T) A=? (4; 2); (-2/5; 19/5)
 \odot Inscrito $x^2 + y^2 + 6x - 4y + 8 = 0$
 \odot exinscrito $x^2 + y^2 - 10x + 8y - 4 = 0$
 B=? (-4; 1); (-2; -5)
 C=? (-7; -5); (-7; -5)
19. H) A (-1;2) \in L T) L=?
 L Determina en la \odot . $x^2 + y^2 - 10x - 2y + 1 = 0$
 una cuerda de longitud 8
 Resp. $0.81x + y - 1.18 = 0$
 $0.37x - y + 2.53 = 0$
20. H) M (8; -6) punto medio de AB T) Ecuación AB
 Cuerda de \odot : $x^2 + y^2 - 12x - 4y - 6 = 0$
 Resp. $x - 4y - 32 = 0$

PARABOLAS



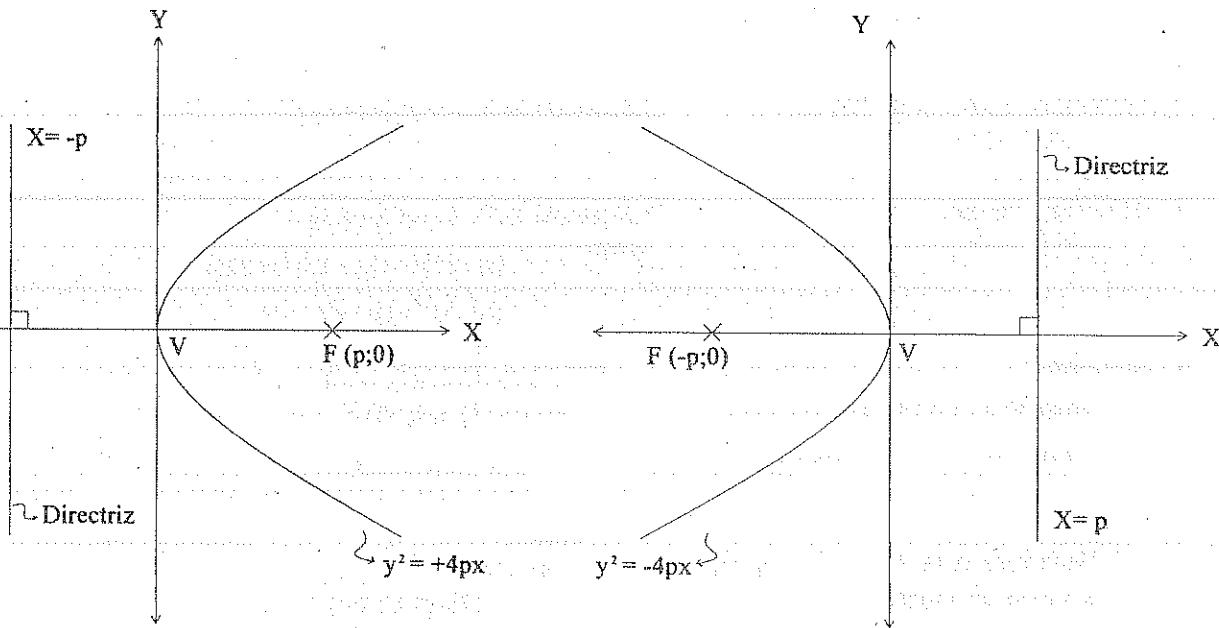
ELEMENTOS

FOCO: F
 DIRECTRIZ: L
 PARAMETRO: P=AV=VF
 LADO RECTO: BC
 VERTICE: V
 EJE FOCAL: AF
 CUERDA FOCAL: BC
 RADIO FOCAL: FD
 EXCENTRICIDAD: e=1

ECUACIONES

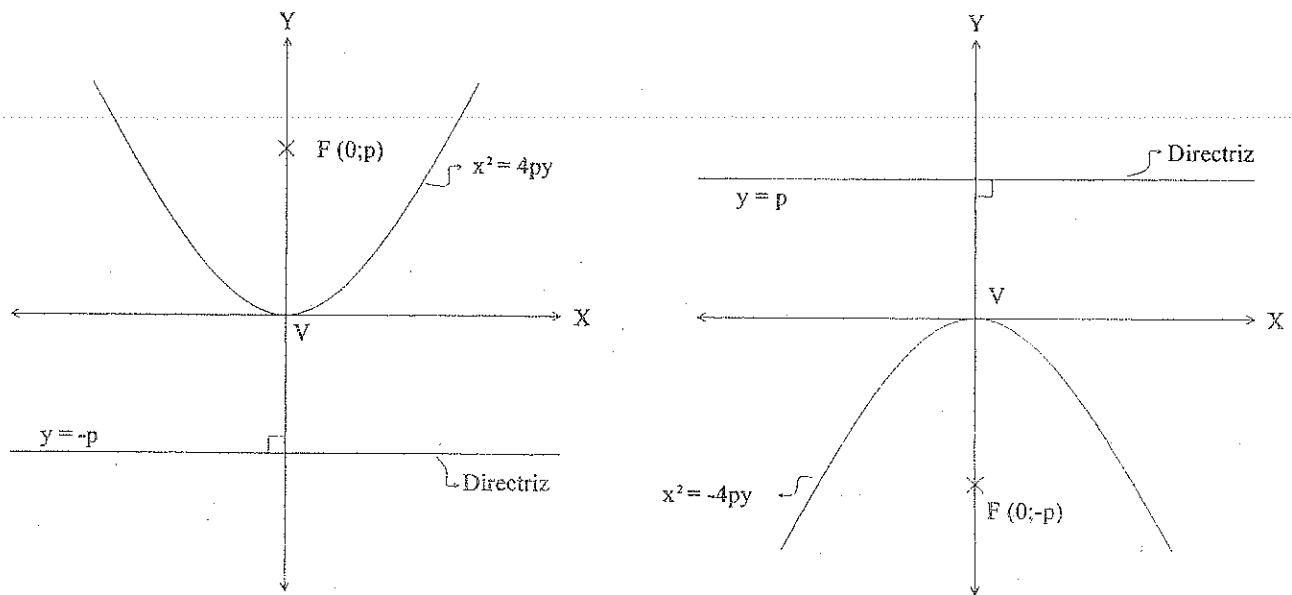
1) EJE FOCAL ES EL EJE "X"

VERTICE (0 ; 0)

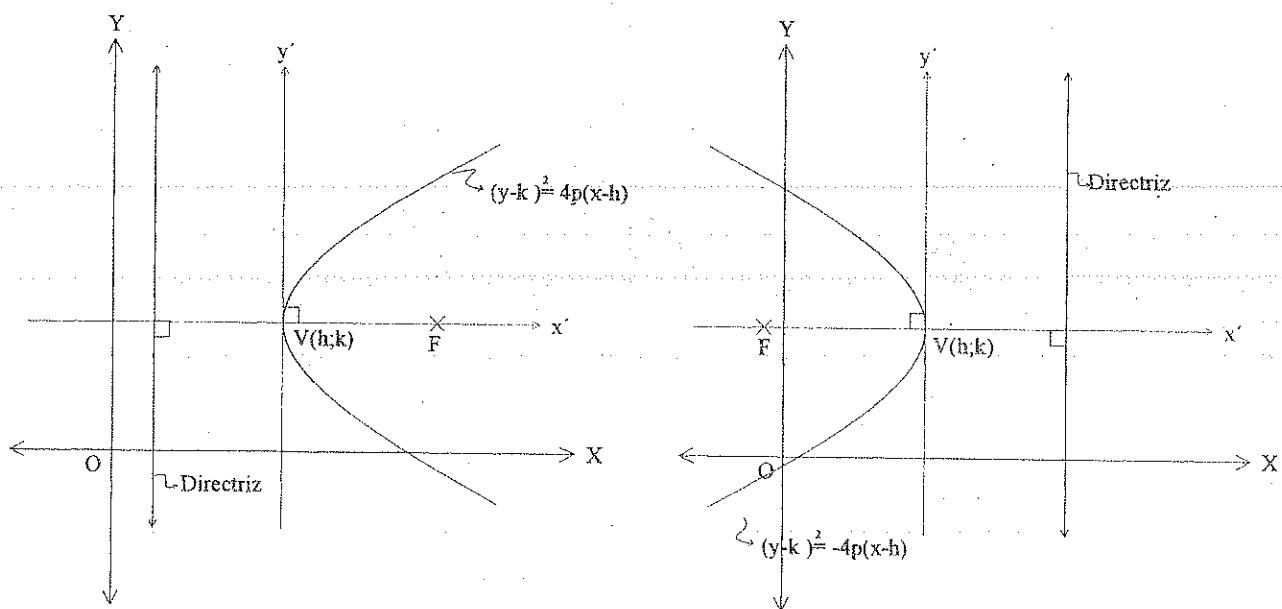


2) EJE FOCAL ES EL EJE "Y"

VERTICE (0; 0)

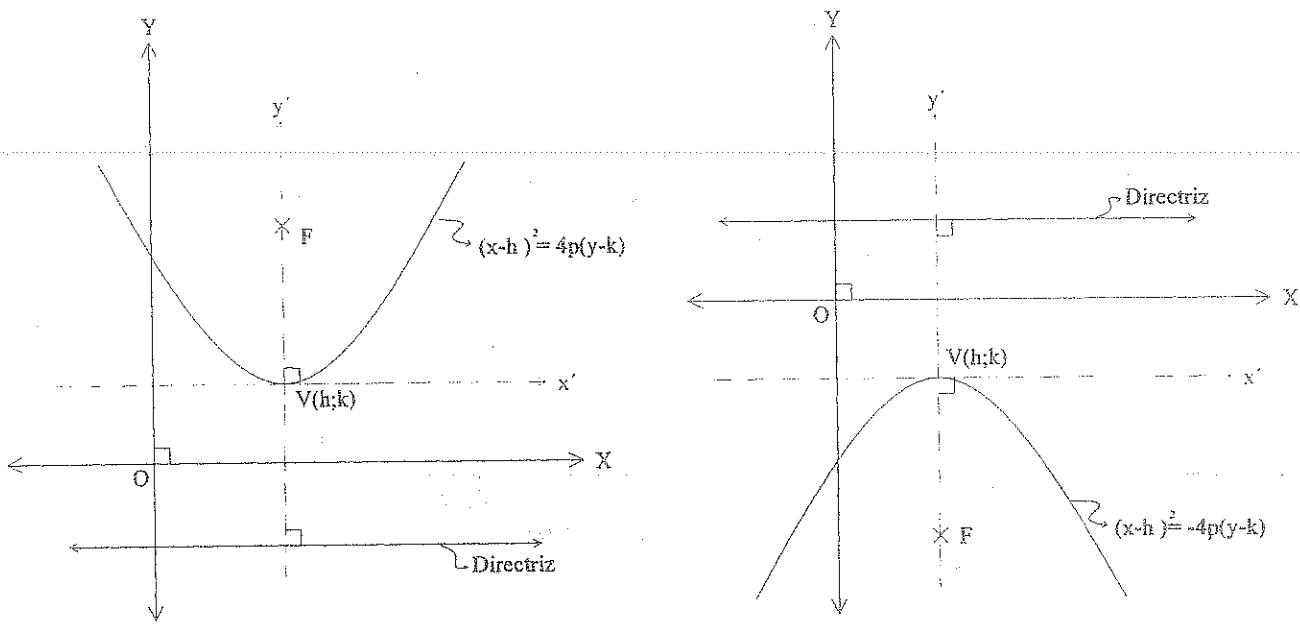


3) EJE FOCAL PARALELO EJE "X"

VERTICE $V(h; k)$ 

4) EJE FOCAL PARALELO EJE "Y"

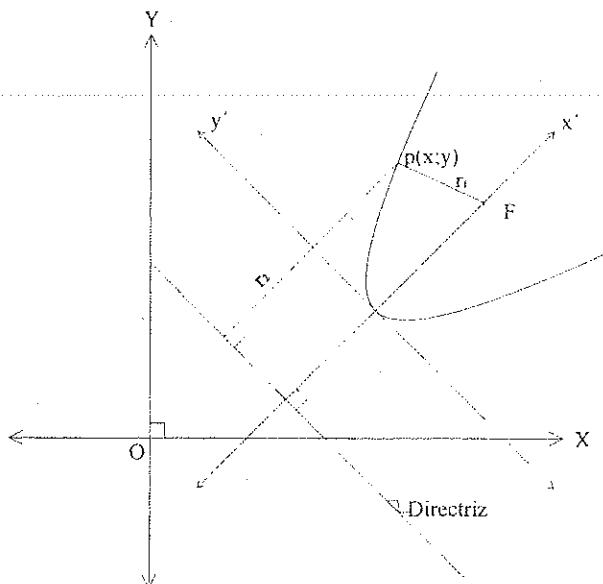
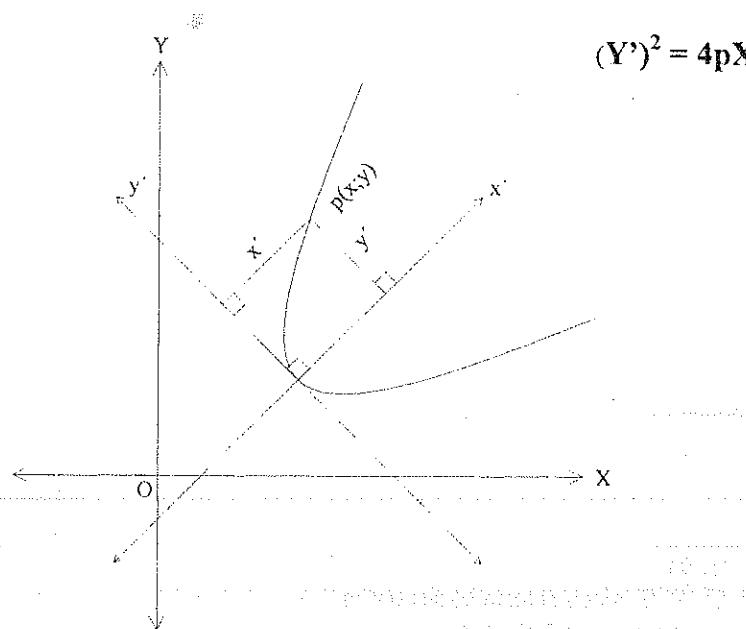
VERTICE V(h ; k)



RELACIÓN CON LA ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} B = 0 \\ A = 0 \text{ o } C = 0 \end{array} \right.$$

Si : $B^2 - 4AC = 0 \Rightarrow$ Ecuación general de la Parábola si el eje focal no es paralelo a los ejes de coordenadas.

DATOS	ECUACIONES DE LA PARABOLA
Foco Directriz	$(y')^2 = 4px'$  $r_1 = r_2$
Ecuaciones de los Ejes: $(x'; y')$ P	$(Y')^2 = 4pX'$ 

EJERCICIOS

1. H) Parábola

$$V(0; 0)$$

$$A(3; 6)$$

AB Lado recto

Eje Focal el eje X

T) Ecuación

$$\text{Resp: } y^2 = 12x$$

2. H) Parábola

$$V(0; 0)$$

A(2; -4) ∈ Parábola

Eje Focal el eje X

T) Ecuación

$$\text{Resp: } y^2 = 8x$$

3. H) Parábola

$$V(-6; 6)$$

$$F(-6; 8)$$

T) Ecuación

$$\text{Resp: } x^2 + 12x - 8y + 84 = 0$$

4. H) Parábola

$$V(7; -4)$$

Directriz: $X = -3$

T) Ecuación

$$\text{Resp: } y^2 - 40x + 8y + 296 = 0$$

5. H) Parábola

$$F(3; 5)$$

Directriz: $X = -5$

T) Ecuación

$$\text{Resp: } y^2 - 16x - 10y + 9 = 0$$

6. H) Parábola

$$F(1; 9)$$

A(7; 1) ∈ curva abierta hacia arriba

Eje focal paralelo al eje Y

T) Ecuación

$$\text{Resp: } x^2 - 2x - 36y + 1 = 0$$

7. H) Parábola

$$F(1; 9)$$

A(7; 1) ∈ curva abierta a la izquierda

Eje focal paralelo al eje X

T) Ecuación

$$\text{Resp: } y^2 + 32x - 18y - 207 = 0$$

8. H) Parábola

$$V(3; 4)$$

A(-2; 3/2) Extremo del Lado Recto

Eje focal paralelo eje Y

T) Ecuación

$$\text{Resp: } x^2 - 6x + 10y - 31 = 0$$

9. H) Parábola

$$V(4; 5)$$

$$F(-10; 5)$$

T) Ecuación

$$\text{Resp: } y^2 - 10y + 56x - 199 = 0$$

10. H) Parábola

$$V(-3; -6)$$

Directriz: $Y = 8 = 0$

T) Ecuación y Elementos

Resp:

$$\text{Ecuación: } (x+3)^2 = -56(y+6)$$

Elementos:

$$F(-3; -20); P=14; L.R: 56;$$

Eje focal: $X+3=0$

11. H) Parábola

$$F(-8; 4)$$

Directriz: $Y = 2$

T) Ecuación

$$\text{Resp: } (x+8)^2 = 4(y-3)$$

12. H) Parábola

$$A(-2; 4)$$

$$B(8; -1)$$

Directriz: $Y = -6$

T) Ecuación

$$\text{Resp: } (x-4)^2 = 4(y+5)$$

$$(x-8)^2 = 20(y+1)$$

13. H) Parábola

B(0; 6) extremo lado recto

$Y = -1$, Tangente en el vértice

T) Ecuación y Elementos

Resp:

$$\text{Ecuación: } (x-14)^2 = 28(y+1)$$

Elementos:

$$F(-11; 6); V(-11; -1)$$

$$P=7; L.R = 28; \text{Directriz: } y+8=0$$

Eje focal: $X+11=0$

14. H) Parábola
 A (6; 2)
 B (6; -8)
 Se abre a la derecha

T) Ecuación
 Resp: $(y + 3)^2 = 10(x - \frac{17}{2})$

15. H) Parábola
 F (5; 0)
 L.R. = 12
 Eje Focal: x

T) Ecuación
 Resp: $y^2 = 12(x - 2)$
 $y^2 = -12(x - 8)$

16. H) Parábola
 L.R. = 4
 A (-1; -2) ∈ Parábola
 V ∈; $x - 3 = 0$

T) Ecuación
 Resp: $y^2 - 4y + 4x - 8 = 0$
 $y^2 + 4x + 12y + 24 = 0$

17. H) Parábola
 L.R. = 1
 Eje focal || eje X
 A (-6; 4) ∈ Cónica
 B (9; 1) ∈ Cónica

T) Ecuación
 Resp: $(y - 5)^2 = x + 7$
 $y^2 = -x + 10$

18. H) Parábola
 Eje focal || eje Y
 A (1; 1) ∈ Curva
 B (3; 0) ∈ Curva
 C (4; -4) ∈ Curva

T) Ecuación
 Resp: $7x^2 - 25x + 6y + 12 = 0$

19. H) Parábola
 A (7; 3)
 B (-1; -5)
 F (11; 0)

T) Ecuación
 Resp: $y^2 + 2x - 23 = 0$
 $x^2 - 22x + 16y + 57 = 0$

20. H) Parábola
 A (4; -2)
 B (-2; 4)
 V + 4 = 0 tg en V

T) Ecuación
 Resp: $x^2 + 4x - 2y - 4 = 0$
 $x^2 - 20x - 18y + 28 = 0$

21. H) Parábola
 A (-8; -1) ∈ Curva
 F (-2; 1)
 D (2; 9) ∈ de la tg en el vértice

T) Ecuación
 Resp: $9x^2 + 6xy + y^2 - 10x + 130y - 575 = 0$
 $x^2 + 6xy + 9y^2 + 22x - 14y + 41 = 0$

22. H) Parábola
 F (-5; -1)
 Directriz: $x + y - 2 = 0$

T) Ecuación
 Resp: $x^2 - 2xy + y^2 + 24x + 8y + 48 = 0$

23. H) Parábola
 F (5; 1)
 V (3; 2)

T) Ecuación
 Resp: $x^2 + 4xy + 4y^2 - 54x - 8y + 129 = 0$
 Directriz: $2x - y + 1 = 0$
 $p = \sqrt{5}$; L.R. = $4\sqrt{5}$
 Extremos lado Recto: L (7; 5)
 R (3; -3)

24. H) Parábola
 Eje focal: $4x + 5y - 20 = 0$
 Tg en el vértice: $5x - 4y + 12 = 0$
 $p = 4$

T) Ecuación
 Resp:
 $16x^2 + 40xy + 25y^2 + 352,25x - 609,8y + 1625,4 = 0$

25. H) Parábola

$F(-6; 8)$

$\text{Directriz: } 4x - 3y + 12 = 0$

T) Ecuación

$\text{Resp: } 9x^2 + 24xy + 16y^2 + 204x - 328y + 2356 = 0$

26. H) Parábola

$A(-9; 3)$

$B(-1; -5)$

} extremo
} lado recto

T) Ecuación

$\text{Resp: } x^2 - 2xy + y^2 + 24x + 8y + 48 = 0$

$x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 24y - 144 = 0$

27. H) Parábola

$V(3; 4)$

$A(-2; 3/2)$ extremo lado recto

Eje focal coincide con Y'

T) Ecuación

$\text{Resp: } 9x^2 + 24xy + 16y^2 + 50x - 350y + 625 = 0$

28. H) Parábola

$A(7; 5) \in \text{Cónica}$

$\text{Directriz: } 2x - y + 1 = 0$

$Tg \text{ en el vértice: } 2x - y - 4 = 0$

T) Ecuación

$\text{Resp: } x^2 + 4xy + 4y^2 - 54x - 8y + 129 = 0$

$x^2 + 4xy + 4y^2 - 94x - 88y + 809 = 0$

29. H) Parábola

$A(-5; 5) \in \text{Cónica}$

$F(-9; 5)$

$B(-2; -1) \in \text{tg vértice}$

T) Ecuación

$\text{Resp: } 4x^2 - 4xy + y^2 + 72x - 86y + 449 = 0$

$x^2 - 4xy + 4y^2 + 102x - 44y + 521 = 0$

30. H) Parábola

$A(-6; 9) \in \text{Directriz}$

$F(2; 5)$

$B(4; -1) \in \text{Curva}$

T) Ecuación

$\text{Resp: } x^2 - 6xy + 9y^2 - 94x - 118y + 209 = 0$

$x^2 - 6xy + y^2 + 2x + 26y - 151 = 0$

31. H) Parábola

$V(3; 7)$

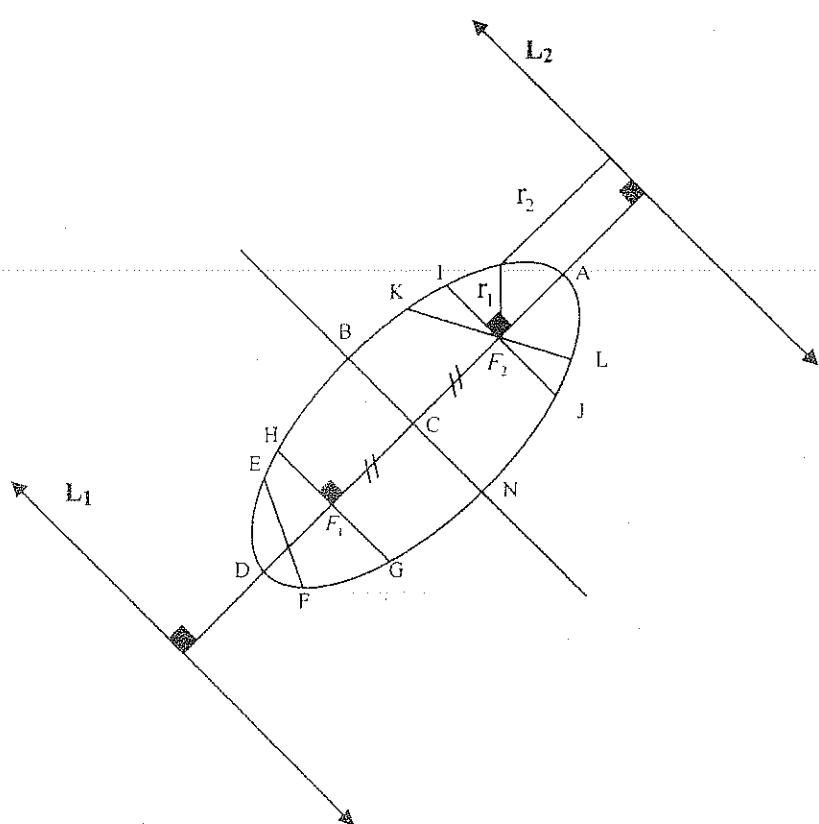
$A(5; 11) \in \text{Curva}$

$Eje focal: 4x - 3y + 9 = 0$

T) Ecuación

$\text{Resp: } 176x^2 - 264xy + 99y^2 + 768x - 626y + 1187 = 0$

ELIPSE



ELEMENTOS

Focos: $F_1 \wedge F_2$ Eje Focal: $\overline{F_1 F_2}$ Eje Mayor: \overline{AD} Eje Menor: \overline{BN}

Vértices: A, B, D, N

Cuerda: \overline{EF} Cuerda Focal: \overline{KL} Lado Recto: $\overline{HG} \wedge \overline{IJ} = \text{L.R.}$ Radio Focal: $\overline{F_1 K}$ Excentricidad: $\frac{r_1}{r_2} = e$ Directriz: $\overline{L_1} \wedge \overline{L_2}$

ECUACIONES

1) C (0;0)

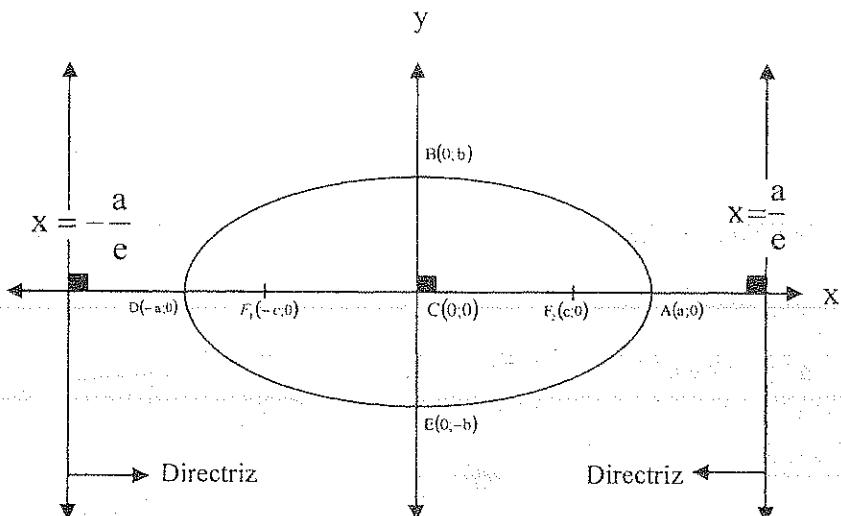
Eje Mayor: Eje x

Eje Menor: Eje y

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$e = \frac{c}{a}$$

$$\text{L.R.} = \frac{2b^2}{a}$$



$$\text{ECUACION} \implies \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

2) C(0;0)

Eje Mayor: Eje y

Eje Menor: Eje x

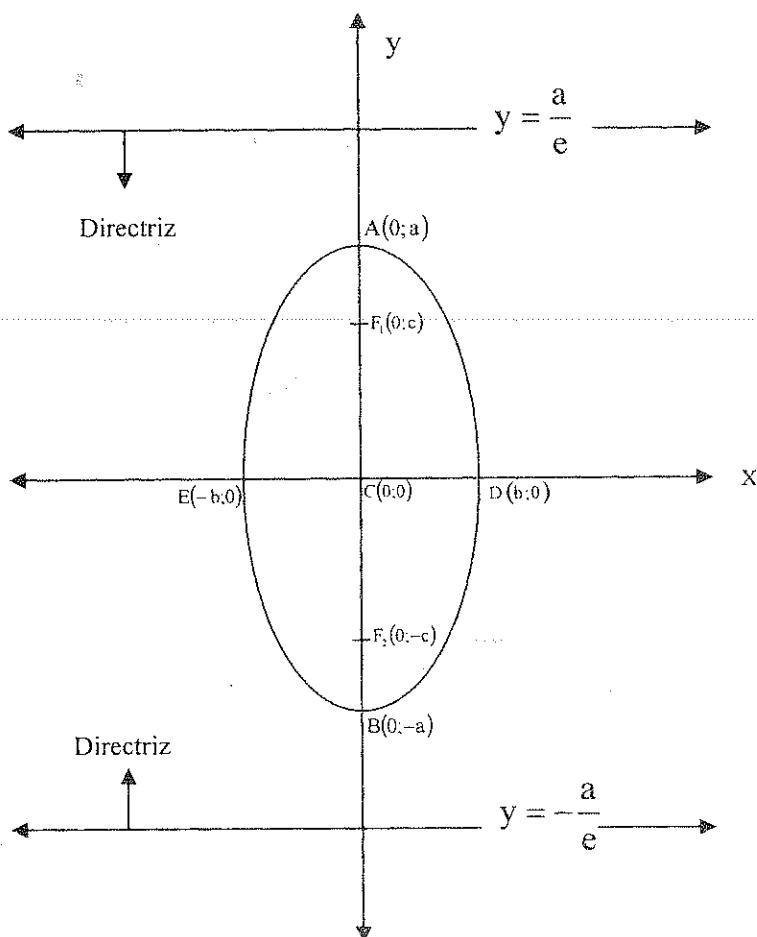
$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$e = \frac{c}{a}$$

$$L.R. = \frac{2b^2}{a}$$

ECUACIÓN

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$



3) C(h;k)

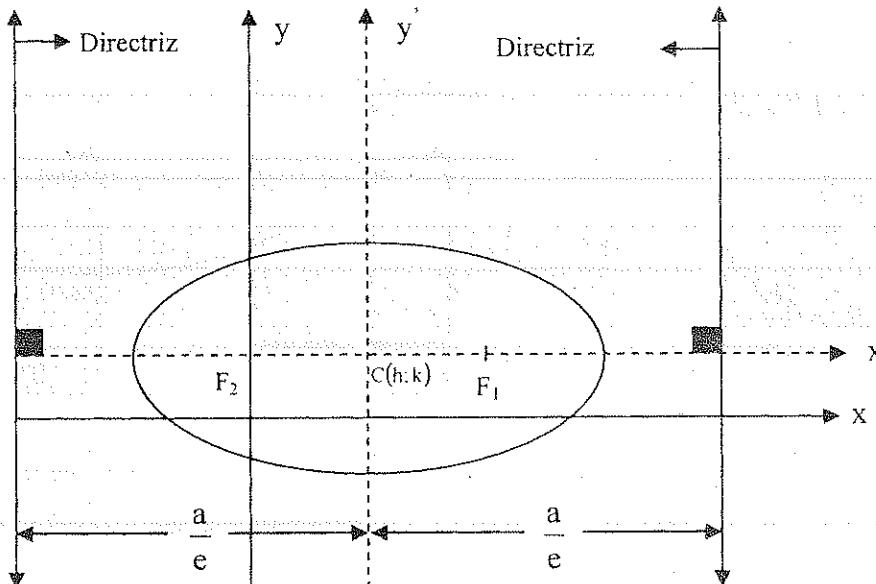
Eje Mayor // Eje x

Eje Menor // Eje y

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$e = \frac{c}{a}$$

$$L.R. = \frac{2b^2}{a}$$



ECUACION

$$\Rightarrow \frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

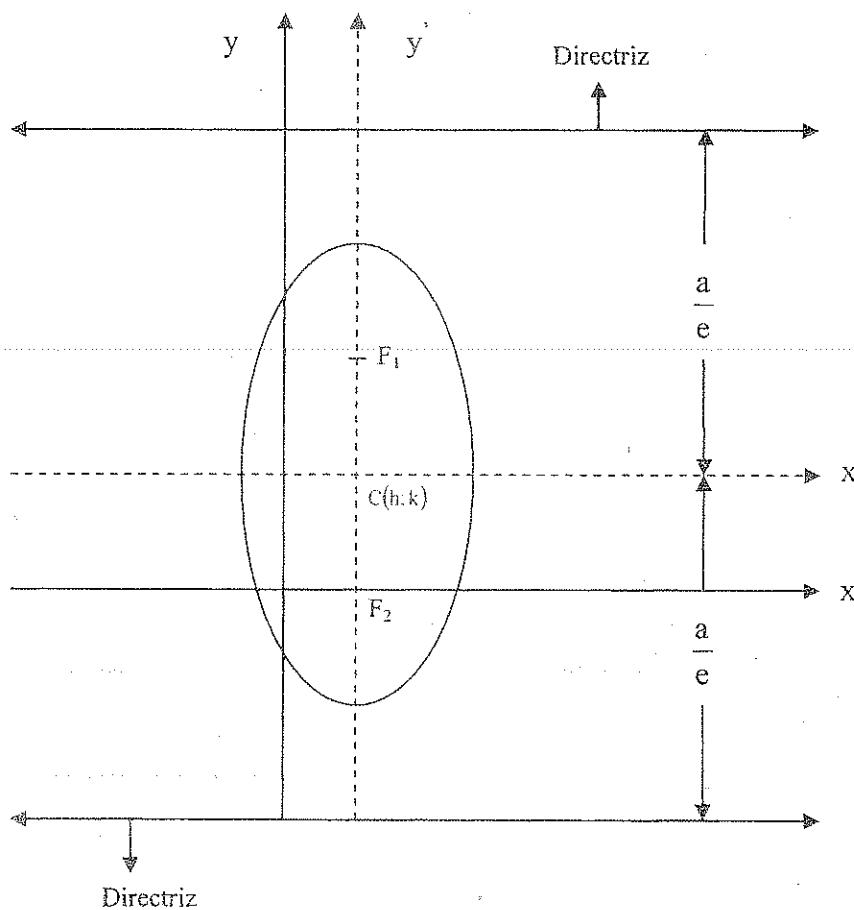
4) C(h;k)

Eje Mayor \parallel Eje yEje Menor \parallel Eje x

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$e = \frac{c}{a}$$

$$\text{L.R.} = \frac{2b^2}{a}$$



ECUACION $\implies \frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$

RELACION CON LA ECUACION GENERAL DE SEGUNDO GRADO

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

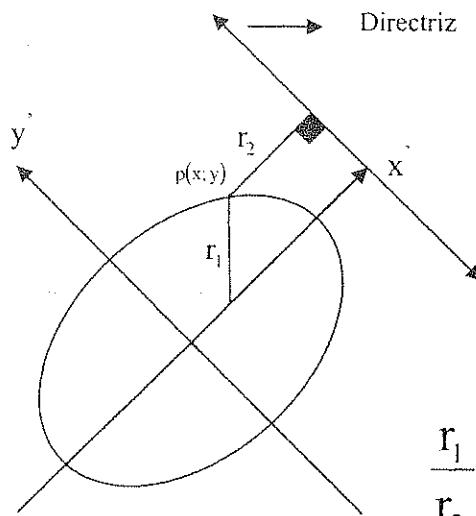
$$\text{Si } B^2 - 4AC < 0$$

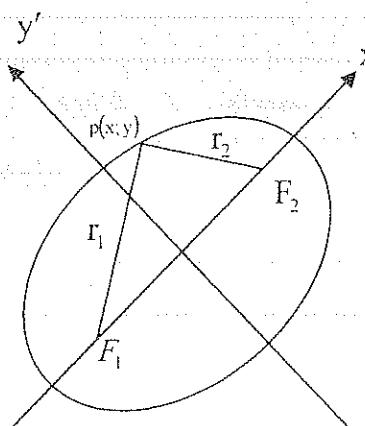
$$\implies$$

Elipse con los ejes no paralelos a los ejes de

Coordenadas.

PROCEDIMIENTOS PARA ENCONTRAR ECUACIONES DE ELÍPSES

DATOS	PROCEDIMIENTO
<ul style="list-style-type: none"> • FOCO • DIRECTRIZ CORRESPONDIENTE • EXCENTRICIDAD 	 $\frac{r_1}{r_2} = e$

DATOS	PROCEDIMIENTO
<ul style="list-style-type: none"> • FOCOS • EJE MAYOR 	 $r_1 + r_2 = 2a$

<ul style="list-style-type: none"> • ECUACIÓN EJE x' • ECUACIÓN EJE y' • EJE MAYOR • EJE MENOR 	$\frac{(x')^2}{a^2} + \frac{(y')^2}{b^2} = 1$
--	---

EJERCICIOS

1. H) Elipse

Distancia entre las directrices = $\frac{25}{4}$

Eje Focal X

$$e = \frac{4}{5}$$

C (0; 0)

T) Ecuación

$$\text{Resp. } \frac{x^2}{25/4} + \frac{y^2}{9/4} = 1$$

2. H) Elipse

Distancia entre directrices = 54

Eje Focal Y

L.R=16

C (0; 0)

T) Ecuación

$$\text{Resp. } \frac{x^2}{72} + \frac{y^2}{81} = 1$$

3. H) Elipse

Eje Mayor Y

Eje menor X

$a = 5$

$$e = \frac{2}{3}$$

T) Ecuación

$$\text{Resp. } \frac{x^2}{13.89} + \frac{y^2}{25} = 1$$

4. H) Elipse
Eje mayor Y
Eje menor X

$$e = \frac{\sqrt{12}}{4}$$

$$L.R = 2$$

T) Ecuación

$$\text{Resp. } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = 1$$

5. H) Elipse

$$e = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$F_1(0; -2)$$

C (0; 0)

T) Ecuación

$$\text{Resp. } \frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{5} = 1$$

6. H) Elipse

$$e = \frac{3}{5}$$

$$D_1 \Rightarrow X = \frac{50}{3}$$

C (0; 0)

T) Ecuación

$$\text{Resp. } \frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

7. H) Elipse

$$A(\sqrt{5}; 6.25) \in \text{Elipse}$$

T) Ecuación

$$D_1 \Rightarrow Y = 10$$

C (0; 0)

$$\text{Resp. } \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{49} = 1$$

8. H) Elipse

$$A(0; 2\sqrt{10}) \in \text{Elipse}$$

T) Ecuación

$$D_1 \Rightarrow Y = \frac{49\sqrt{10}}{20}$$

C (0; 0)

$$\text{Resp. } \frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{9} = 1$$

9. H) Elipse

$$X^1: x = -4$$

$$Y^1: y = 1$$

Eje focal II Eje X

a = 3

b = 2

T) Ecuación

$$\text{Resp. } \frac{(x+4)^2}{9} + \frac{(y-1)^2}{4} = 1$$

10. H) Elipse

$$\begin{aligned} X^1 &= 10 \\ Y^1 &= 4 \end{aligned}$$

Eje focal II Eje Y

$a = 8$

$b = \sqrt{28}$

T) Ecuación

$$\text{Resp. } \frac{(x-10)^2}{28} + \frac{(y-4)^2}{64} = 1$$

11. H) Elipse

$$\begin{aligned} F_1 &(1; 3) \\ F_2 &(-3; 3) \end{aligned}$$

$D_1 \Rightarrow X = 3$

$D_2 \Rightarrow X = -5$

T) Ecuación

$$\text{Resp. } \frac{(x+1)^2}{8} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1$$

12. H) Elipse

$$\begin{aligned} F_1 &(1; 6) \\ F_2 &(1; -4) \end{aligned}$$

$D_1 \Rightarrow Y = 16$

$D_2 \Rightarrow Y = -8$

T) Ecuación

$$\text{Resp. } \frac{(x-1)^2}{20} + \frac{(y-1)^2}{45} = 1$$

13. H) $F_1(1; -3)$

$V_1(10; -3)$

$e = \frac{4}{5}$

T) Ecuación

$$\text{Resp. } \frac{(x+35)^2}{2025} + \frac{(y+3)^2}{729} = 1$$

14. H) $F_1(-2; 3)$

$V_1(-2; 6) \in$ a la curva

$e = \frac{3}{4}$

T) Ecuación

$$\text{Resp. } \frac{(x+2)^2}{63} + \frac{(y+6)^2}{144} = 1$$

15. H) Elipse

$F_1(4; -5)$

Directriz $x = 1$

$e = \frac{2}{3}$

T) Ecuación

$$\text{Resp. } \frac{(x-6,4)^2}{12,96} + \frac{(y+3)^2}{7,2} = 1$$

16. H) Elipse

$F_1(4; 6)$

$D_1: Y = \frac{25}{3}$

 $P(1; 6,7) \in$ Curva

T) Ecuación

$\text{Resp. } 16x^2 + 7y^2 - 128x - 42y + 207 = 0$

17. H) Elipse

$F_1(2; 3)$

$F_2(-2; 1)$

Eje mayor = 8

T) Ecuación elipse

$\text{Resp. } 5x^2 + 16xy + 15y^2 + 8x - 60y - 116 = 0$

18. H) Elipse

$$F_1(12; 5)$$

$$F_2(-8; 15)$$

A(0; 0) ∈ curva

T) Ecuación elipse

$$\text{Resp. } 5x^2 + 4xy + 8y^2 - 60x - 168y = 0$$

segundo (H) 01
01 = X
1 = Y

$$1 = \frac{x^2(1-y)}{16} + \frac{(y-1)^2}{8}$$

19. H) Elipse

$$\text{Ejes: } x+y-2=0$$

$$x-y+2=0$$

Longitud eje menor = 2

Longitud eje mayor = 8

Eje focal coincide con X'

T) Ecuación elipse

$$\text{Resp. } 17x^2 - 30xy + 17y^2 + 60x - 68y + 36 = 0$$

segundo (H) 01
(C, D) 01
(L, C) 01

20. H) Elipse

$$e = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$F_1(2; 3)$$

$$D: x+y-9=0$$

T) Ecuación elipse

$$\text{Resp. } 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 6y - 29 = 0$$

segundo (H) 01
01 = Y, 00 = X

segundo (H) 01
(E, A) 01
(B, C) 01

21. H) Elipse

$$F_1(1; 0) \text{ pasa por } P(2; -1)$$

$$D: 2x - y - 10 = 0$$

T) Ecuación elipse

$$\text{Resp. } 17x^2 + 8xy + 23y^2 + 30x - 40y - 175 = 0$$

segundo (H) 01
00 = Y, 01 = X

22. H) Elipse

$$F_1(2; 3)$$

$$F_2(-2; -1)$$

$$D_1: x+y-9=0$$

$$D_2: x+y+7=0$$

T) Ecuación elipse

$$\text{Resp. } 3x^2 - 2xy + 3y^2 + 2x - 6y - 29 = 0$$

segundo (H) 01
01 = Y, 00 = X

23. H) Elipse

$$F_1(3; -1)$$

$$V_1(5; -2)$$

$$e = \frac{4}{5}$$

T) Ecuación elipse

$$\text{Resp. } 61x^2 + 64xy + 109y^2 + 418x - 334y - 4079 = 0$$

segundo (H) 01
01 = Y, 00 = X

segundo (H) 01
(C, D) 01

$$0 = 109x^2 + 64xy + 61y^2 + 418x - 334y - 4079$$

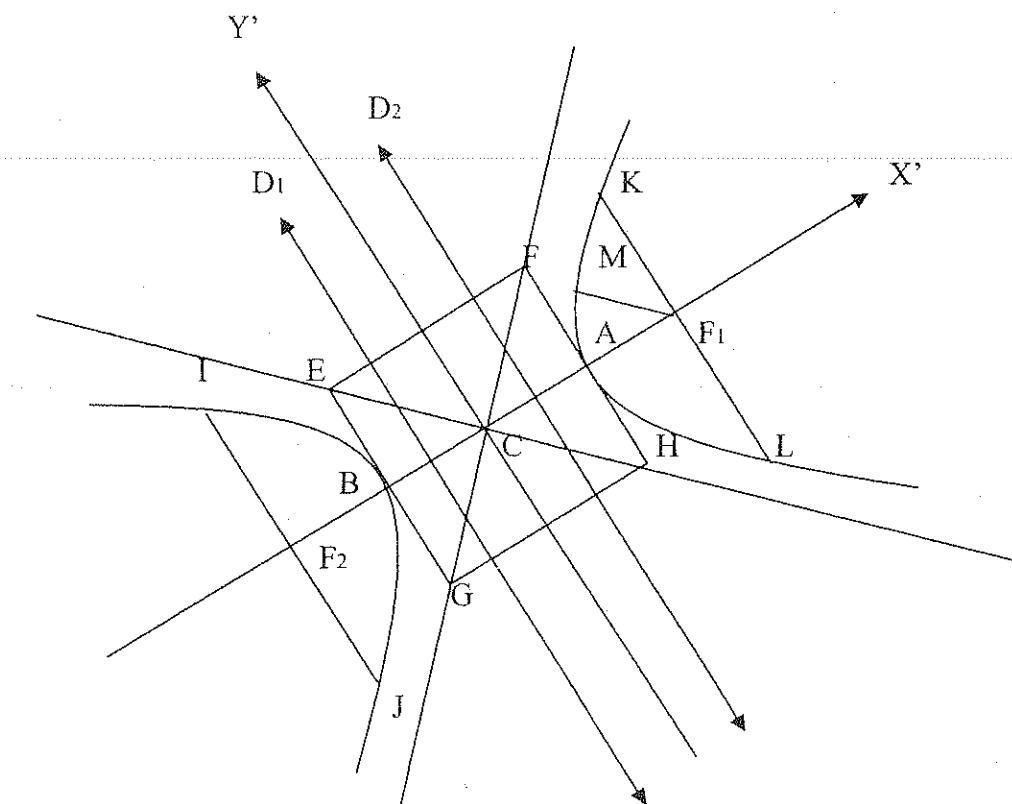
$$\text{Resp. } 109x^2 + 64xy + 61y^2 + 418x - 334y - 4079 = 0$$

segundo (H) 01
01 = Y, 00 = X

segundo (H) 01
00 = Y, 01 = X

Segundo (H) 01

HIPÉRBOLA



ELEMENTOS

FOCOS: $F_1; F_2$

EJE FOCAL: $\overline{F_1 F_2}$

VÉRTICES A, B

RECTÁNGULO PRINCIPAL: E, F, G, H

CUERDAS: K, L

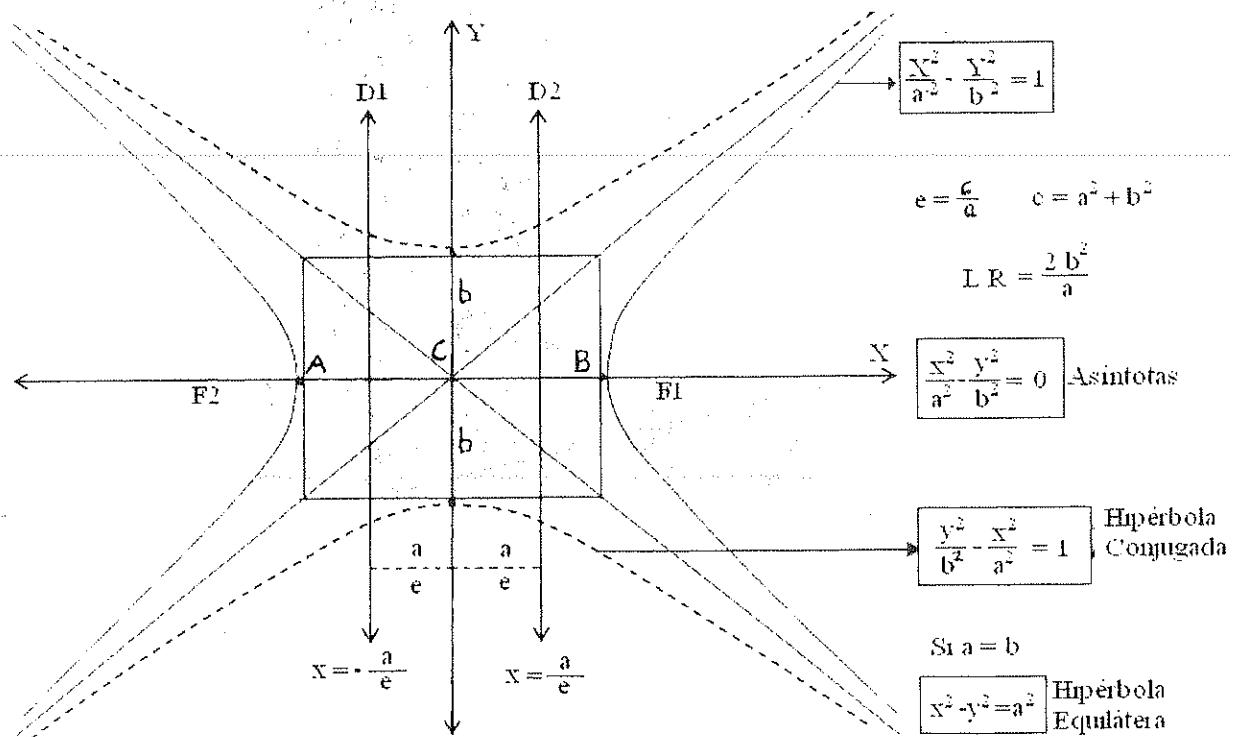
RADIO FOCAL: F, M

ASÍNTOTAS: FG, EG

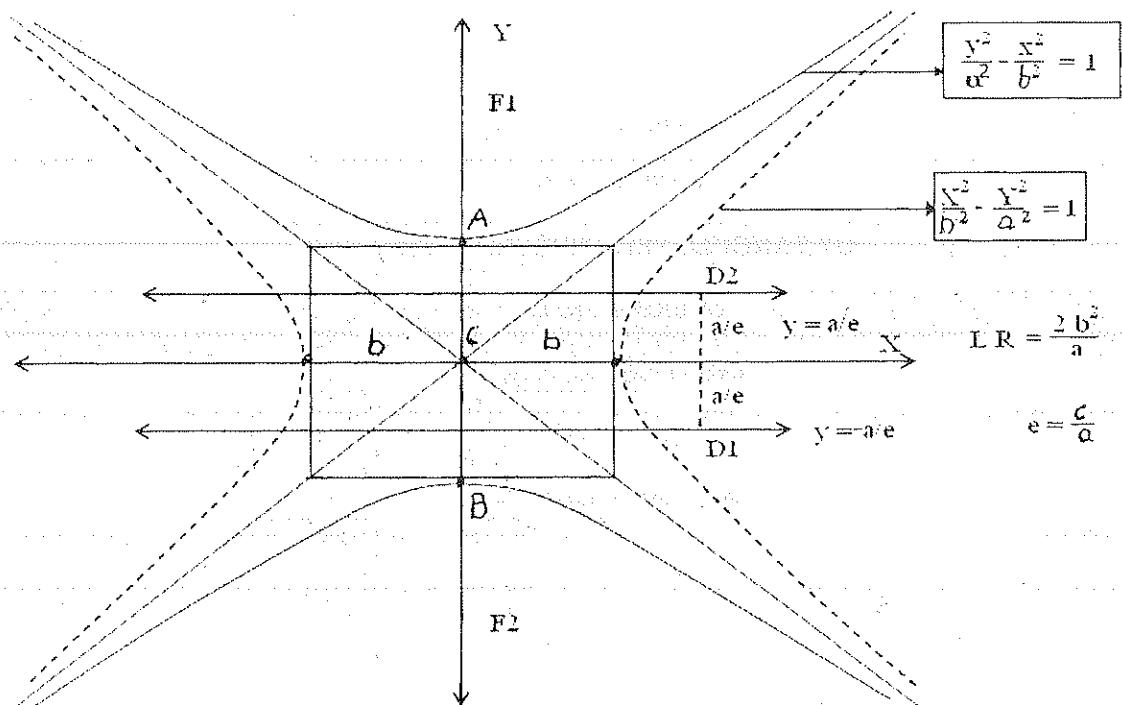
DIRECTRICES: D_1, D_2

ECUACIONES

1.- DATOS: C (0,0)
EJE FOCAL: EJE X



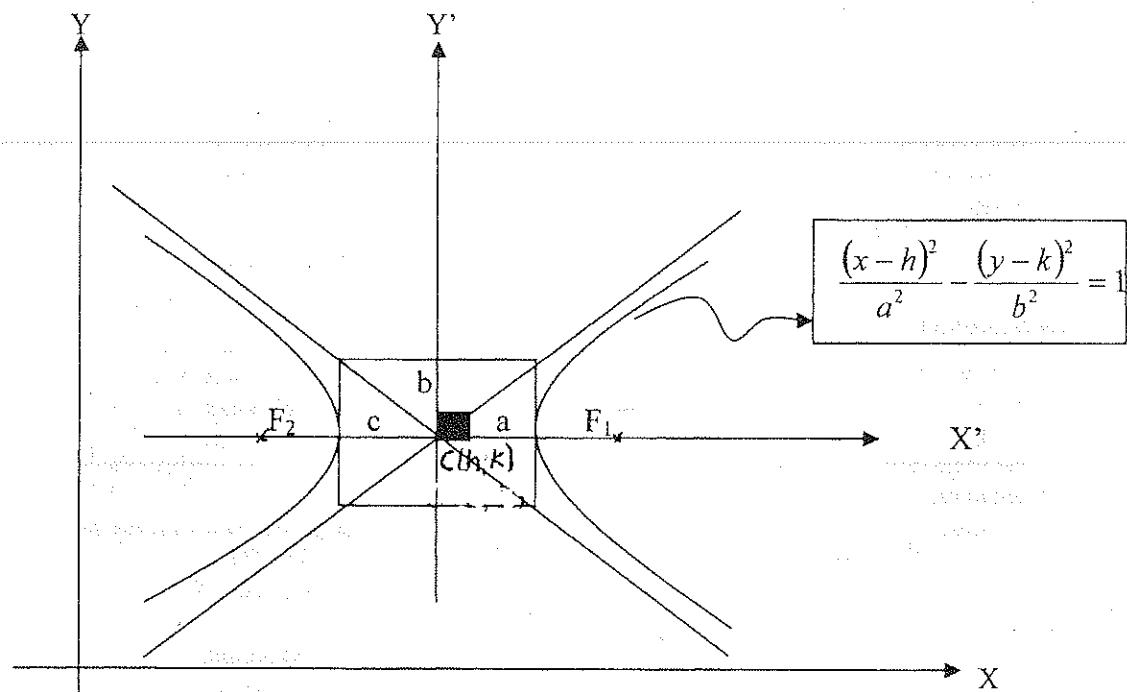
2.- DATOS: C (0,0)
EJE FOCAL: EJE Y



HIPÉRBOLAS TRASLADADAS

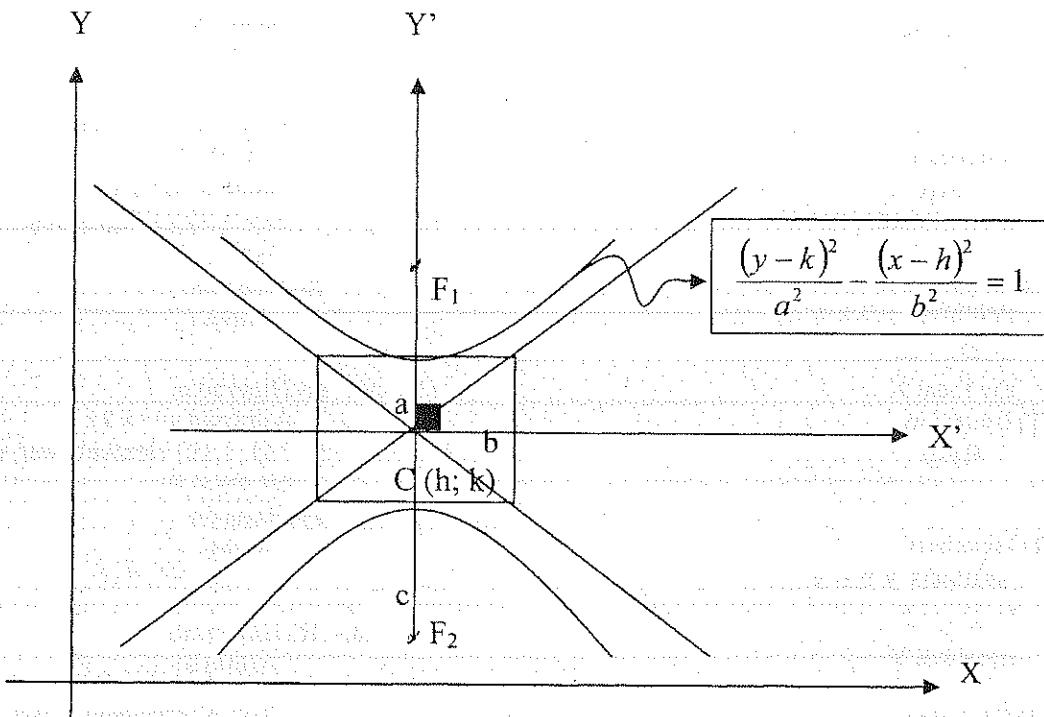
1. DATOS: $C(h; k)$

EJE FOCAL // EJE X



2. DATOS: $C(h; k)$

EJE FOCAL // EJE Y



3. DATOS: EJE FOCAL NO PARALELO EJES DE COORDENADAS

$$x^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$B^2 - 4AC > 0$$

EJERCICIOS

1.- H) $D_1 D_2 = 4$

$$e = \frac{4}{3}$$

 $C(0; 0)$

Eje focal X

T) Ecuación

Resp. $\frac{x^2}{64} - \frac{y^2}{448} = 1$
 $\frac{64}{9} - \frac{448}{81} = 1$

2.- H) Hipérbola

$D_1 D_2 = 6$

$a = 4$

 $C(0; 0)$

Eje focal Y

T) Ecuación

Resp. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{12,44} = 1$

3.- H) Asíntotas $y = \pm \frac{4}{3}x$

$$\text{L.R.} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

$$e = \frac{5}{3}$$

Eje focal X

T) Ecuación

Resp. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$

4.- H) Hipérbola

Asíntotas $y = \pm 2x$

$\text{L.R.} = 2$

Eje focal Y

T) Ecuación

Resp. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$

5.- H) Hipérbola

Asíntotas $y = \pm x$

$D_1 D_2 = 2$

Eje focal X

T) Ecuación

Resp. $\frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$

6.- H) Hipérbola

Asíntotas $y = \pm x$

$D_1 D_2 = 2$

Eje focal Y

T) Ecuación

Resp. $\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} = 1$

7.- H) Hipérbola

Asíntotas $y = \pm \frac{2}{3}x$ $D_1: x = 2$ $D_2: x = -2$

T) Ecuación

Resp. $\frac{x^2}{5,76} - \frac{y^2}{2,56} = 1$

8.- H) Hipérbola

Asíntotas $y = \pm \frac{3}{2}x$ $D_1: y = 2$ $D_2: y = -2$

T) Ecuación

Resp. $\frac{y^2}{5,76} - \frac{x^2}{4,32} = 1$

9.- H) Hipérbola equilátera

 $C(0; 0)$

Eje focal X

$\text{L.R.} = 4$

T) Ecuación

Resp. $x^2 - y^2 = 4$

10.- H) Hipérbola equilátera

 $C(0; 0)$

Eje focal Y

$a = 4$

T) Ecuación

Resp. $y^2 - x^2 = 16$

11.- H) Hipérbola equilátera

 $C(0; 0)$ Asíntota: $x - y = 0$

P(2; 1) elemento curva

Eje focal X

T) Ecuación

Resp. $x^2 - y^2 = 3$

12.- H) Hipérbola

Asíntotas $y = \pm 2x$

P(3; 1,12) elemento curva

Eje focal X

T) Ecuación

Resp. $\frac{x^2}{9,69} - \frac{y^2}{3,435} = 1$

13.- H) Hipérbola

Asíntotas $y = \pm \frac{4}{3}x$

P(0; 4) elemento curva

Eje focal Y

T) Ecuación

Resp. $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

14.- H) $F_1(0; 3)$

$D_1: x = \frac{4}{3}$

 $C(0; 0)$

$e = \frac{3}{2}$

T) Ecuación

$\text{Resp. } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

15.- H) $F_1(0; 5)$

$D_1: y = \frac{9}{5}$

 $C(0; 0)$

$L.R. = \frac{32}{2}$

T) Ecuación

$\text{Resp. } \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1$

16.- H) Hipérbola

$D_1 D_2 = 2$

 $P(4; 6)$ elemento curva $C(0; 0)$

T) Ecuación

$\text{Resp. } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1$

17.- H) Hipérbolas conjugadas

$T) e^2 * e_1^2 = e^2 + e_1^2$

18.- H) Una elipse tiene por eje menor los focos de la hipérbola $9x^2 - 16y^2 + 144 = 0$ y su excentricidad es recíproca a la excentricidad de la hipérbola.

T) Calcular la ecuación de la elipse

$\text{Resp. } \frac{x^2}{625} - \frac{y^2}{25} = 1$

19.- H) $D_1: x = -1$ $F_1(6; 0)$ $C(0; 0)$

$e = 3$

T) Ecuación

$\text{Resp. } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{32} = 1$

20.- H) Hipérbola

$D_1: y = 1$

 $F_1(0; 4)$ $C(0; 0)$

T) Ecuación

$\text{Resp. } \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{12} = 1$

21.- H) Hipérbola

$D_1 D_2 = 2$

 $C(2; 1)$

$a = 3$

Eje focal paralelo al eje X

T) Ecuación

$\text{Resp. } \frac{(x-2)^2}{9} - \frac{(y-1)^2}{72} = 1$

22.- H) $D_1 D_2 = 4$ $C(4; 3)$

$e = \frac{3}{2}$

Eje focal paralelo al eje Y

T) Ecuación

$\text{Resp. } \frac{(y-3)^2}{9} - \frac{(x-4)^2}{45} = 1$

23.- H) Hipérbola

Asintota 1: $3x - 2y - 8 = 0$ Asintota 2: $3x + 2y - 16 = 0$

$L.R. = \frac{3}{2}$

Eje focal // eje X

T) Ecuación

$\text{Resp. } \frac{(x-4)^2}{\frac{1}{9}} - \frac{(y-2)^2}{\frac{1}{2}} = 1$

24.- H) Asintota 1: $4x - 3y - 24 = 0$ Asintota 2: $4x + 3y = 0$

$e = \frac{5}{4}$

$L.R. = \frac{9}{2}$

Eje focal // eje Y

T) Ecuación

$\text{Resp. } \frac{(y+4)^2}{16} - \frac{(x-3)^2}{9} = 1$

25.- H) Hipérbola

Asintota 1: $4x - 3y - 12 = 0$ Asintota 2: $3x + 4y - 12 = 0$

$D_1 D_2 = 4$

Eje focal // eje Y

T) Ecuación

$\text{Resp. } \frac{(y-0.48)^2}{16} - \frac{(x-3.36)^2}{9} = 1$

26.- H) Hipérbola

Asintota 1: $\sqrt{3}x - y + 2(3 - \sqrt{3}) = 0$ Asintota 2: $\sqrt{3}x + y - 2(3 + \sqrt{3}) = 0$

$D_1 D_2 = 6$

Eje focal // eje Y

T) Ecuación

$\text{Resp. } \frac{(y-6)^2}{12} - \frac{(x-2)^2}{4} = 1$

27.- H) Hipérbola

$$\text{Asintota 1: } 2x + 3y + 2 = 0$$

$$\text{Asintota 2: } 2x - 3y + 14 = 0$$

$$D_1: x = -6$$

$$D_2: x = -2$$

T) Ecuación

$$\text{Resp. } \frac{(x+4)^2}{5,76} - \frac{(y-2)^2}{2,56} = 1$$

28.- H) Hipérbola

$$\text{Asintota 1: } 2x - 3y + 5 = 0$$

$$\text{Asintota 2: } 2x + 3y - 25 = 0$$

$$D_1: y = 6$$

$$D_2: y = -4$$

T) Ecuación

$$\text{Resp. } \frac{(y-5)^2}{\frac{25}{4}} - \frac{(x-5)^2}{\frac{125}{16}} = 1$$

29.- H) Hipérbola equilátera

$$C(3; 2)$$

$$\text{Asintota 1: } x + y - 6 = 0$$

$$P(1; 2) \text{ elemento curva}$$

T) Ecuación

$$\text{Resp. } (x-4)^2 - (y-2)^2 = 9$$

30.- H) Hipérbola equilátera

$$C\left(3; \frac{4}{5}\right)$$

$$\text{Asintota 1: } 4x + 5y - 22 = 0$$

$$P(3; 5) \text{ elemento curva}$$

T) Ecuación

$$\text{Resp. } 20x^2 - 25y^2 + 178xy + 738x + 63y + 334 = 0$$

31.- H) Hipérbola

$$\text{Asintota 1: } 2x + y - 3 = 0$$

$$\text{Asintota 2: } 2x - y - 1 = 0$$

$$P(4; 6) \text{ elemento curva}$$

T) Ecuación

$$\text{Resp. } \frac{(x-1)^2}{\frac{11}{4}} - \frac{(y-1)^2}{\frac{11}{4}} = 1$$

32.- H) Hipérbola

$$\text{Asintota 1: } x - y - 5 = 0$$

$$\text{Asintota 2: } x + y + 1 = 0$$

$$P(-3; 1) \text{ elemento curva}$$

T) Ecuación

$$\text{Resp. } (x-2)^2 - (y+3)^2 = 9$$

33.- H) Hipérbola

$$F_1(1; -5)$$

$$D_1: x = -5$$

L.R. = 8

T) Ecuación

$$\text{Resp. } \frac{(x+3)^2}{7,4} - \frac{(y+5)^2}{10,88} = 1$$

34.- H) $F_1(3; 4)$

$$D_1: y = 2$$

$$e = \frac{5}{4}$$

T) Ecuación

$$\text{Resp. } \frac{(y-1,53)^2}{19,7} - \frac{(x-3)^2}{11,1} = 1$$

35.- H) Hipérbola

$$\text{Asintota 1: } x + 2y - 4 = 0$$

$$\text{Asintota 2: } x - 2y = 0$$

$$F_1(2; 5)$$

T) Ecuación

$$\text{Resp. } \frac{(y-1)^2}{3,16} - \frac{(x-2)^2}{12,8} = 1$$

36.- H) Hipérbola

$$F_1(3; 2)$$

$$F_2(-2; -1)$$

$$e = \frac{3}{2}$$

T) Ecuación

$$\text{Resp. } x^2 + 3,3xy - 0,62y^2 - 2,52x - 0,89y - 6,36 = 0$$

37.- H) Hipérbola

$$F_1(-2; 4)$$

$$F_2(2; -4)$$

$$L.R. = 3$$

T) Ecuación

$$\text{Resp. } x^2 + 1,54xy - 0,16y^2 + 7,87 = 0$$

38.- H) Hipérbola

$$C(3; 1)$$

$$F_2(7; 3)$$

$$\text{Vértice }(5; 2)$$

T) Ecuación

$$\text{Resp. } 11x^2 + 16xy - y^2 - 82x - 46y + 71 = 0$$

39.- H) Hipérbola

$$D_1 D_2 = \frac{5}{2}$$

$$C(3,5)$$

$$a = \frac{29}{5}$$

$$\text{Eje focal } x - 2y + 7 = 0$$

T) Ecuación

$$\text{Resp. } x^2 + 8xy + 0,2y^2, 11x - 5,2y - 12,37 = 0$$

40.- H) Hipérbola

$$\text{Asintota 1: } 25x - 20y + 41 = 0$$

$$\text{Asintota 2: } 27x + 50y - 13 = 0$$

$$L.R. = 4$$

$$\text{Eje focal } x - 5y + 5 = 0$$

T) Ecuación

Resp.

$$15225x^2 + 10657xy - 10395y^2 + 71484x + 27406y + 24841 = 0$$

41.- H) Hipérbola

$$\text{Asintota 1: } 5x + 4y - 5 = 0$$

$$\text{Asintota 2: } 4x - 5y + 5 = 0$$

$$D_1 D_2 = 20$$

$$\text{Eje focal } Y'$$

T) Ecuación

$$\text{Resp. } x^2 - 0,45xy - y^2 + 0,5x + 2,25y + 706,2 = 0$$

42.- H) Hipérbola

$$\text{Asintota 1: } 3x + y - 3 = 0$$

$$\text{Asintota 2: } x + 3y = 0$$

$$D_1: 2x - 2y - 1 = 0$$

$$D_2: 2x - 2y - 5 = 0$$

T) Ecuación

$$\text{Resp. } 48x^2 - 160xy + 48y^2 - 168x + 216y + 155 = 0$$

43.- H) Hipérbola

$$C(2; 7)$$

$$\text{Asintota 1: } x - 2 = 0$$

$$P(0; 3) \text{ Elemento curva}$$

T) Ecuación

$$\text{Resp. } xy - 2y - 7x + 6 = 0$$

44.- H) Hipérbola

$$\text{Asintota 1: } y = 3x$$

$$\text{Asintota 2: } y = \frac{x}{3}$$

$$P(2; 2) \text{ Elemento curva}$$

T) Ecuación

$$\text{Resp. } 3x^2 - 10xy + 3y^2 + 16 = 0$$

45.- H) Hipérbola

$$F_1(4; 3)$$

$$D_1: 2x + y - 3 = 0$$

$$L.R. = 8$$

T) Ecuación

$$\text{Resp. } 15y^2 - 20xy + 0x - 90y + 455 = 0$$

46.- H) Hipérbola

$$X: x - 3y + 3 = 0$$

$$Y: 3x + y - 11 = 0$$

$$e = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$L.R. = 2$$

Eje focal coincide con X'

T) Ecuación

$$\text{Resp. } 7x^2 + 18xy - 17y^2 - 78x + 14y + 108 = 0$$

47.- H) Hipérbola

$$F_1(5; 7)$$

$$F_2(-3, -5)$$

$$D_1 D_2 = 12$$

T) Ecuación

$$\text{Resp. } x^2 - 1,76xy + 0,26y^2 - 0,23x + 1,24y + 13,53 = 0$$

48.- H) Hipérbola

$$F_1(5; -2)$$

$$D_1: 2x - y - 3 = 0$$

$$P(3; -2) \text{ Elemento curva}$$

T) Ecuación

$$\text{Resp. } 496x^2 + 4xy + 496y^2 - 4988x + 1994y + 14491 = 0$$

49.- H) Hipérbola

$$C(3; 1)$$

$$F_1(7; 3)$$

$$A(2; 3) \text{ extremo eje imaginario}$$

T) Ecuación

$$\text{Resp. } x^2 + 16xy - 11y^2 - 22x - 26y - 29 = 0$$

50.- H) Hipérbola equilátera

$$F_1(-1; 2)$$

$$D_1: 2x + y - 5 = 0$$

T) Ecuación

$$\text{Resp. } 3x^2 + 8xy - 3y^2 - 50x + 25 = 0$$

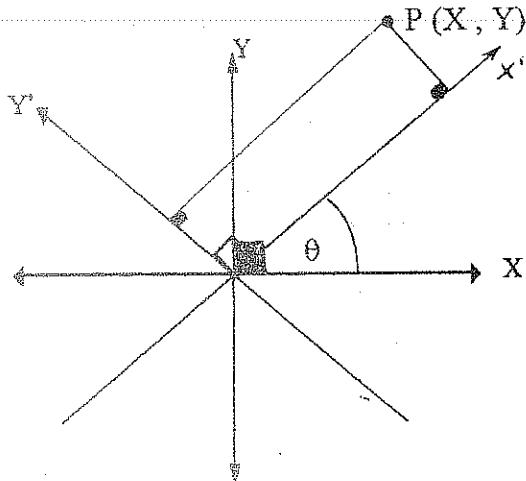
ECUACIÓN GENERAL DE SEGUNDO GRADO

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

$$\text{Si: } B = 0 \Rightarrow Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

- 1) $AC = 0$ Si $A \neq 0$ ó $C \neq 0$ PARÁBOLA
- 2) $AC > 0$ Si $A \neq C$ ELÍPSE
Si $A = C$ CIRCUNFERENCIA
- 3) $AC < 0$ Si $A \neq C$ Si $A \neq 0$ ó $C \neq 0$ HIPÉRBOLA

ROTACIÓN DE EJES



$$\begin{aligned} X &= X' \cos \theta - Y' \sin \theta \\ Y &= X' \sin \theta + Y' \cos \theta \end{aligned}$$

$$\cot 2\theta = \frac{A - C}{B}$$

EJERCICIOS

IDENTIFICAR QUE FIGURA REPRESENTA LA SIGUIENTE ECUACIÓN Y ENCONTRAR SUS ELEMENTOS

$$1) 5X^2 + 2Y^2 - 10X + 4Y + 7 = 0$$

$$2) 3X^2 + 5Y^2 - 6X - 10Y + 50 = 0$$

$$3) 4X^2 - 9Y^2 + 24X + 36Y = 0$$

$$4) 4X^2 + 4XY + Y^2 - 16X - 8Y + 14 = 0$$

$$5) 4X^2 + 4XY + Y^2 - 16X - 8Y + 18 = 0$$

$$6) 3X^2 + 4Y^2 - 24X + 40Y + 100 = 0$$

$$7) X^2 + 4XY + Y^2 - 3 = 0$$

$$8) 13X^2 - 6\sqrt{3}XY + 7Y^2 - 16 = 0$$

$$9) 16X^2 + 24XY + 9Y^2 - 130X + 90Y = 0$$

$$10) X^2 - 2XY + 4Y^2 + 2Y - 14X + 13 = 0$$

$$11) 5X^2 + 4XY + Y^2 - 10X - 2Y + 10 = 0$$

$$12) 2X^2 - XY - 3Y^2 = 0$$

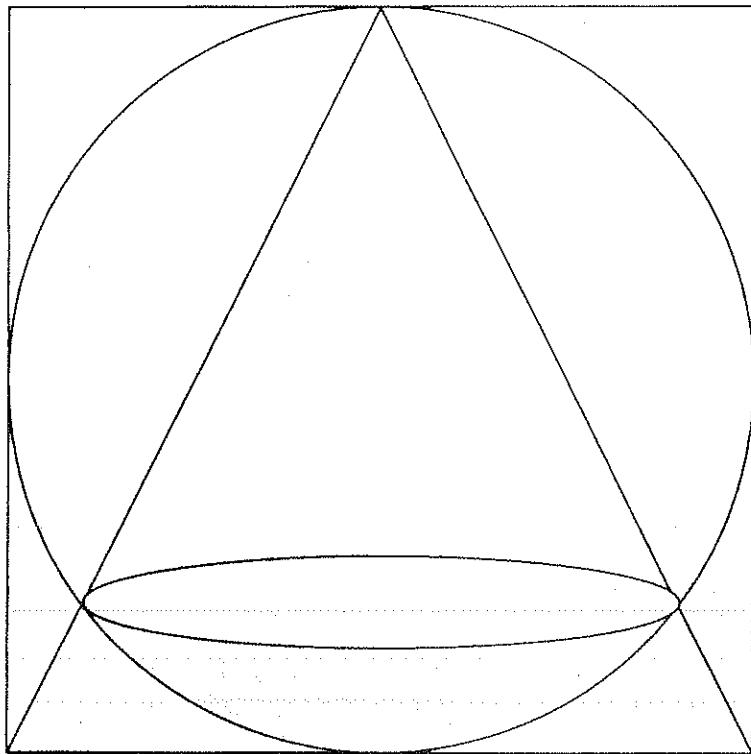
$$13) X^2 - XY - 4Y = 0$$

$$14) X^2 + Y^2 + 4X - 6Y + 14 = 0$$

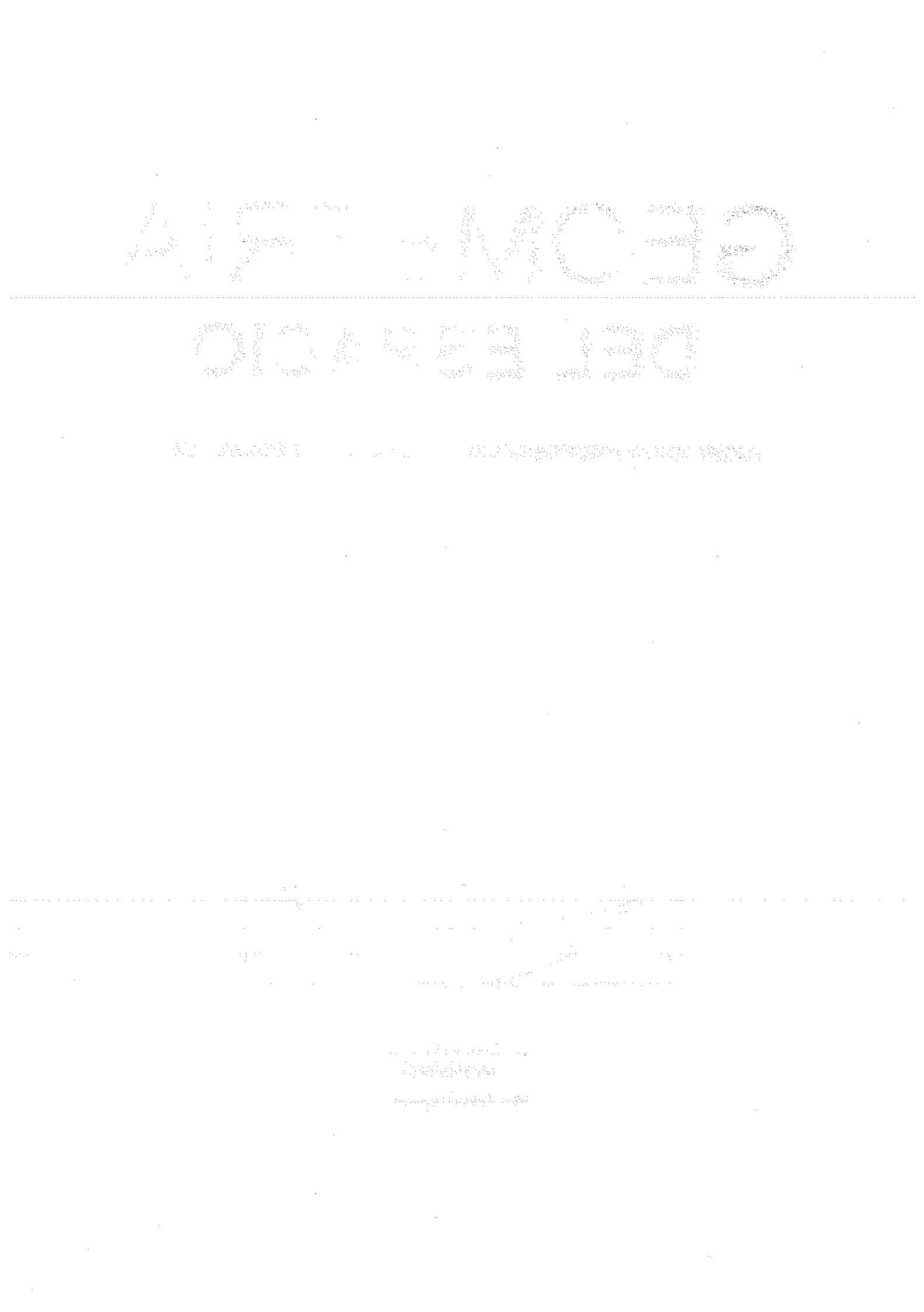
$$15) 3X^2 + 3Y^2 - 4X + 2Y + 6 = 0$$

GEOMETRIA DEL ESPACIO

EJERCICIOS PROPUESTOS Y EJERCICIOS RESUELTOS



G. CALVACHE
T. ROSERO
M. YACELGA



CONTENIDOS

UNIDAD 1

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

Plano	1
Posición relativa Punto – Plano	2
Posición relativa Plano – Plano.....	2
Posición relativa Recta –Plano.....	3
Posición relativa Recta – Recta	5
Angulo Recta – Plano.....	5
Angulo Recta- Recta.....	7
Distancia Mínima entre Dos Rectas.....	8
Angulo Diedro.....	8
Angulo Poliedro.....	9
Ejercicios.....	13

UNIDAD 2

POLIEDROS

Elementos, Clasificación.....	21
Ejercicios	22

UNIDAD 3

PRISMAS

Definición, Representación grafica, Elementos.....	26
Paralelepípedos.....	26
Ejercicios	30

UNIDAD 4

CILINDROS

Definiciones Básicas	45
Ejercicios	48

UNIDAD 5 PIRAMIDES

Definiciones Básicas	50
Ejercicios	60

UNIDAD 6 CONOS

Definiciones Básicas	72
Ejercicios	74

UNIDAD 7 ESFERAS

Definiciones Básicas	80
Ejercicios	89

UNIDAD I

I. CONCEPTOS FUNDAMENTALES

1.1. - ESPACIO

Es el ambiente que nos rodea, es continuo y homogéneo, divisible, ilimitado y accesible en su totalidad.
Es el conjunto de todos los puntos.

1.2. - CUERPO GEOMÉTRICO

Es una porción del espacio totalmente limitado.

1.3. - SUPERFICIE

Es lo que limita al cuerpo geométrico del resto del espacio.

1.4. - PLANO

Es un término no definido. La superficie de una mesa, la superficie de un espejo, etc. dan la idea de un plano.

Las propiedades que caracterizan a un plano son:

- En todo plano existen infinitos puntos y rectas.
- Fuera de todo plano existen infinitos puntos y rectas que no pertenecen a él.
- Si dos puntos de una recta están en un plano, todos los puntos de esta recta pertenecen al plano.

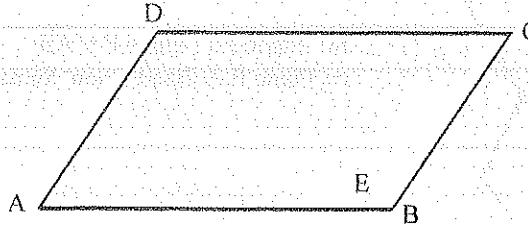
1.4.1.- DETERMINACIÓN

Es la propiedad fundamental que sirve para conocer cuando hay un plano y solo uno, que satisface ciertas condiciones.

- Tres puntos no colineales.
- Una recta y un punto externo a ella.
- Dos rectas secantes.
- Dos rectas paralelas

1.4.2. - REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Puede representarse por un triángulo, un círculo, o cualquier figura geométrica cerrada, pero generalmente se representa por un paralelogramo.



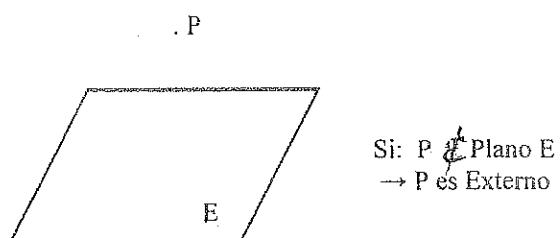
1.4.3. - DENOMINACIÓN

- Con una letra mayúscula localizada en el interior de su representación. **Plano E.**
- Por las letras de los vértices de su representación. **Plano ABCD.**
- Por las letras de dos vértices opuestos. **Plano A - C; Plano B - D.**

1.5.- POSICIÓN RELATIVA PUNTO - PLANO

1.5.1.- PUNTO EXTERNO

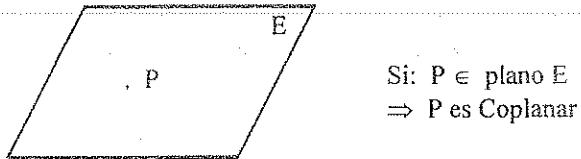
Si el punto no es elemento del plano.



Si: $P \notin \text{Plano } E$
 $\Rightarrow P$ es Externo

1.5.2.- COPLANAR

Si el punto es elemento del plano.



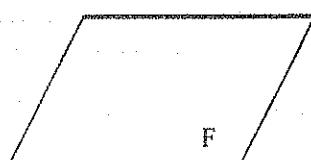
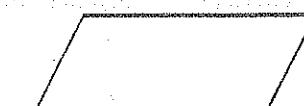
Si: $P \in \text{plano } E$
 $\Rightarrow P$ es Coplanar

1.6.- POSICIÓN RELATIVA PLANO - PLANO

1.6.1.- PARALELOS

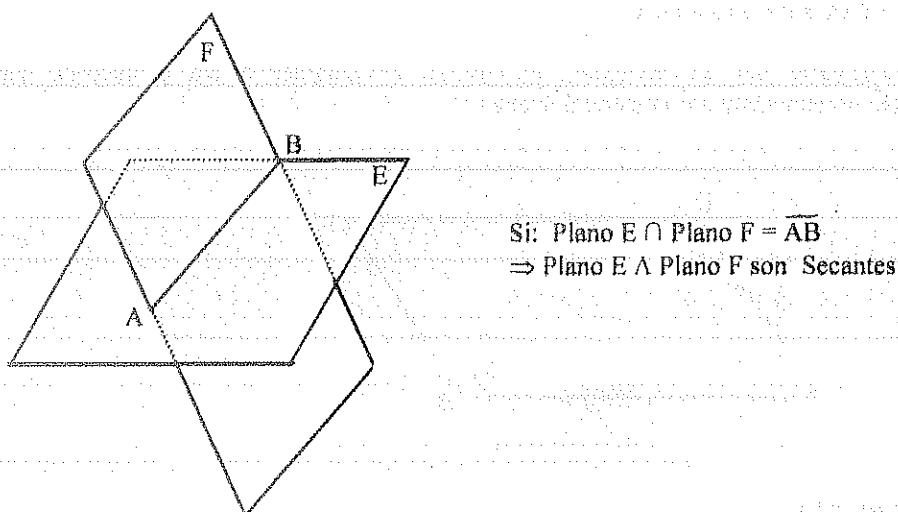
Si no tienen ningún punto en común.

Si: $\text{Plano } E \cap \text{Plano } F = \emptyset$
 $\Rightarrow \text{Plano } E \parallel \text{Plano } F$



1.6.2.- SECANTES

Si tienen en común una recta. La intersección entre dos planos es una recta.



Si: $\text{Plano } E \cap \text{Plano } F = \overline{AB}$
 $\Rightarrow \text{Plano } E \wedge \text{Plano } F$ son Secantes

PROPIEDAD. - Si dos planos distintos tienen común un punto, tienen en común una recta.

1.6.3. - COINCIDENTES

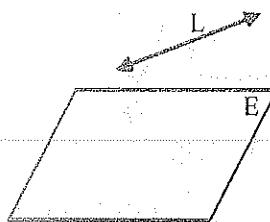
Si tienen tres puntos no colineales comunes.

1.7. - POSICIÓN RELATIVA RECTA - PLANO

1.7.1. - PARALELOS

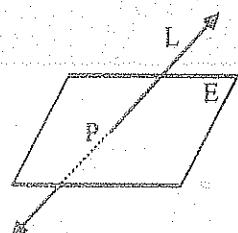
Si no tienen ningún punto común.

$$\text{Si: } \overrightarrow{L} \cap \text{Plano E} = \emptyset \\ \Rightarrow \overrightarrow{L} \parallel \text{Plano E}$$



1.7.2. - SECANTES

Si tienen un punto común. La intersección entre una recta y un plano es un punto.

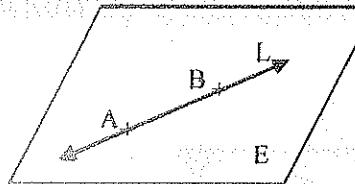


$$\text{Si: } \overrightarrow{L} \cap \text{Plano E} = \text{Punto P} \\ \Rightarrow \overrightarrow{L} \wedge \text{Plano E, son Secantes}$$

1.7.3. - COPLANARES

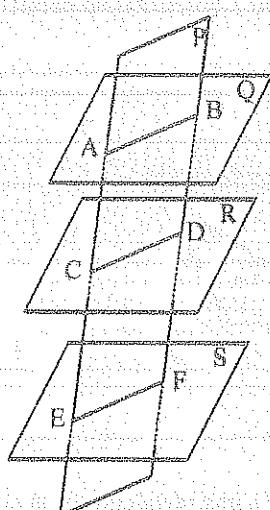
Si tienen dos puntos comunes.

$$\text{Si: } A \in \text{Plano E} \wedge B \in \text{Plano E} \\ \Rightarrow \overrightarrow{L} \in \text{Plano E}$$



1.8. - RECTAS Y PLANOS PARALELOS

- Las intersecciones de dos o más planos paralelos con un tercero son paralelos.
- Los segmentos de rectas que intersecan a tres o más planos, son proporcionales.

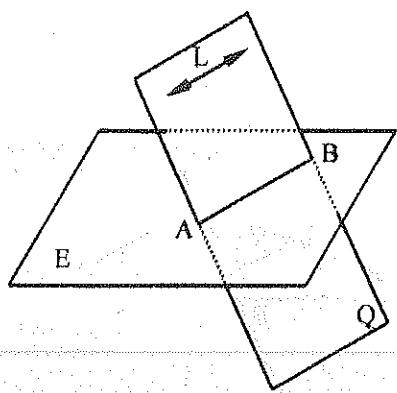


$$\text{Si: Plano Q} \parallel \text{Plano R} \parallel \text{Plano S}$$

$$\overline{AB} \parallel \overline{CD} \parallel \overline{EF}$$

$$\text{y } \frac{AC}{CE} = \frac{BD}{DF}$$

- Si una recta es paralela a un plano, todo plano que pasa por esa recta y corta al primero, determina que la intersección entre los planos y la recta son paralelas.

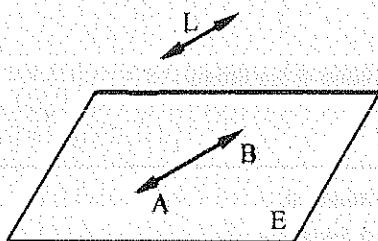


Si: $\overleftrightarrow{L} \parallel \text{Plano } E$

$\wedge \overleftrightarrow{L} \in \text{Plano } Q$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

- Si una recta es paralela a una recta contenida en un plano, la recta es paralela al plano.



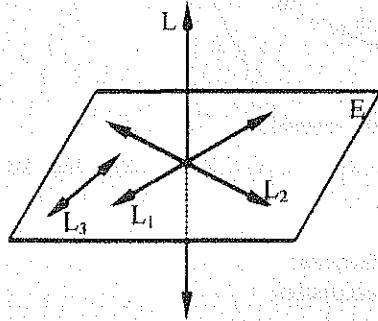
Si: $\overleftrightarrow{AB} \in \text{Plano } E$

$\wedge \overleftrightarrow{L} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{L} \parallel \text{Plano } E$

1.9. - RECTAS Y PLANOS PERPENDICULARES

- Si una recta es perpendicular a un plano, es perpendicular a todas las rectas contenidas en el plano.



Si: $\overleftrightarrow{L} \perp \text{Plano } E$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{L_1}$

$\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{L_2}$

$\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{L_3}$

- Para que una recta sea perpendicular a un plano, basta que sea perpendicular a dos rectas no paralelas situadas en el plano.

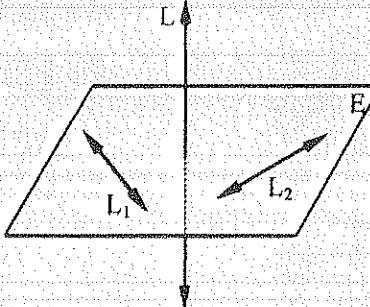
Si: $\overleftrightarrow{L_1} \in \text{Plano } E$

$\overleftrightarrow{L_2} \in \text{Plano } E$

$\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{L_1}$

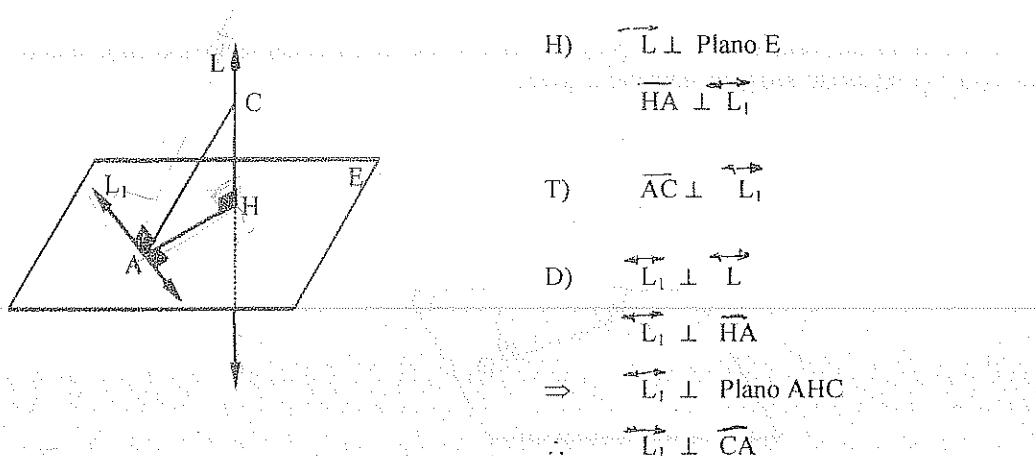
$\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{L_2}$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{L} \perp \text{Plano } E$



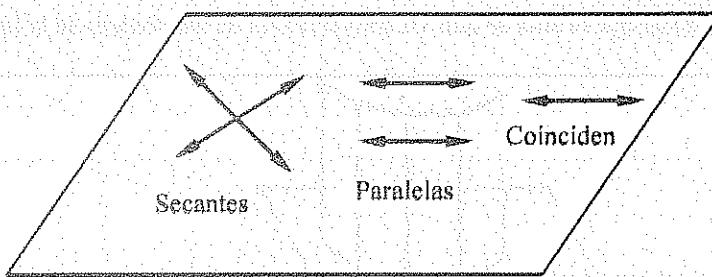
TEOREMA DE LAS TRES PERPENDICULARES

Si desde el pie de una perpendicular a un plano se traza una perpendicular a una recta contenida en el plano, toda recta que une un punto cualquiera de la primera con el pie de la segunda perpendicular es perpendicular a la recta contenida en el plano.



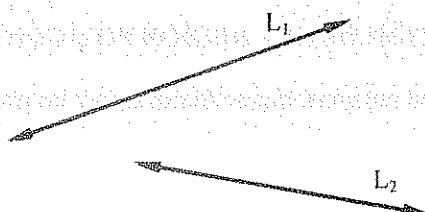
1.10.- POSICIÓN RELATIVA RECTA - RECTA

1.10.1.- COPLANARES



1.10.2.- NO COPLANARES

Se cruzan. No tienen un punto común.



1.11.- PROYECCIONES

Para representar un objeto por medio de un dibujo en un plano, se construyen rectas imaginarias que proceden de varios puntos del objeto y que llegan al plano. El plano en el cual se va a representar el objeto se denomina **Plano de Proyección**. Las rectas imaginarias se denominan **Proyectantes**.

La representación del cuerpo en el plano de proyección se denomina **Proyección**.

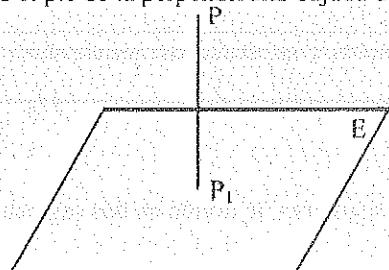
PROYECCIONES PARALELAS ORTOGONALES.

Cuando las proyectantes son perpendiculares al plano de proyección.

En el presente estudio se utilizará únicamente las proyecciones paralelas ortogonales.

1.11.1.- PROYECCIÓN DE UN PUNTO EN UN PLANO

Es el pie de la perpendicular bajada desde el punto al plano.



Objeto: El punto P

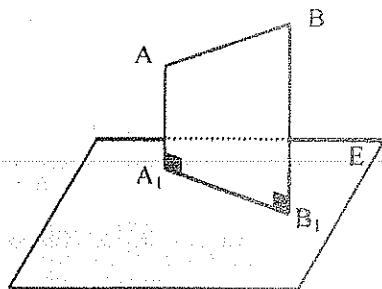
Proyectante: $\overline{PP_1}$

Plano de Proyección: Plano E

Proyección: P_1

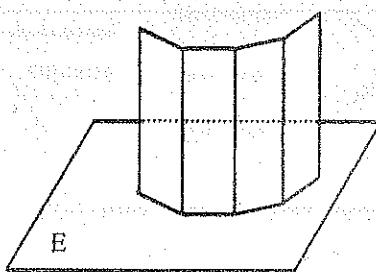
1.11.2. - PROYECCIÓN DE UN SEGMENTO EN UN PLANO

Es otro segmento que resulta de unir las proyecciones de los extremos del segmento dado, excepto en el caso de que el segmento sea perpendicular al plano.



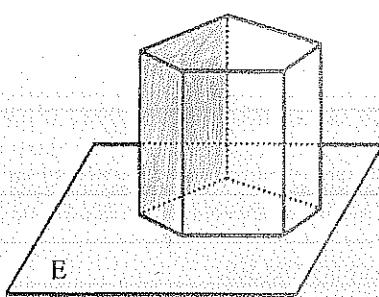
1.11.3. - PROYECCIÓN DE UNA LÍNEA POLIGONAL EN UN PLANO

Es otra poligonal que resulta de unir las proyecciones de los vértices de la línea poligonal dada.



1.11.4. - PROYECCIÓN DE UNA REGIÓN POLIGONAL EN UN PLANO

Es otra región poligonal que se forma al unir las proyecciones de los vértices de la región poligonal dada.



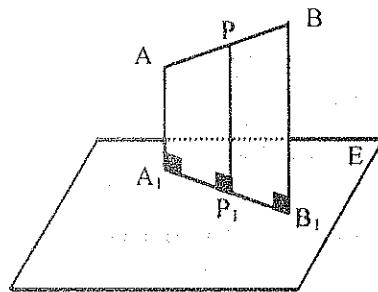
1.11.5. - PROPIEDADES.

Las proyecciones de dos rectas paralelas sobre un plano, son paralelas.

Si dos rectas son perpendiculares entre sí, y una de ellas es paralela a un plano, sus proyecciones en este plano son también perpendiculares entre sí.

Cada punto y recta en el espacio tienen una sola proyección.

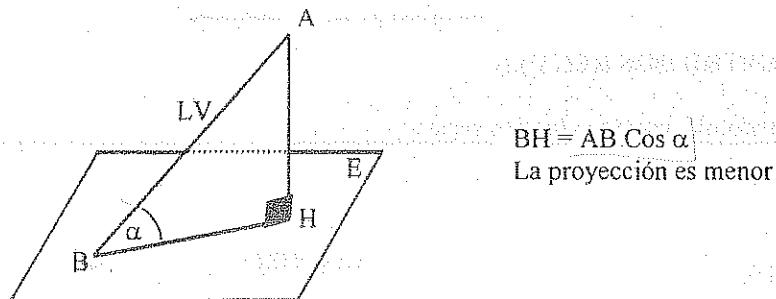
Regla de Proporcionalidad : Un punto cualquiera situado en un segmento, le divide en dos segmentos cuya razón es la misma en todas las proyecciones del segmento.



$$\frac{AP}{PB} = \frac{A_1P_1}{P_1B_1}$$

1.12.- ÁNGULO RECTA – PLANO

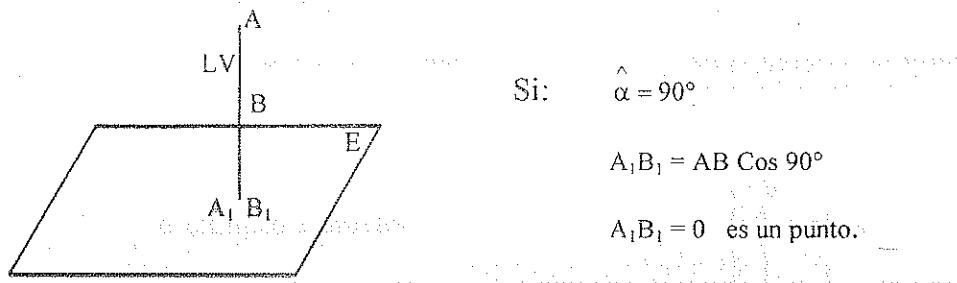
Es el ángulo formado entre la recta y su proyección en el plano.



$$BH = AB \cos \alpha$$

La proyección es menor

- Si la recta es perpendicular al plano, su proyección es un punto.

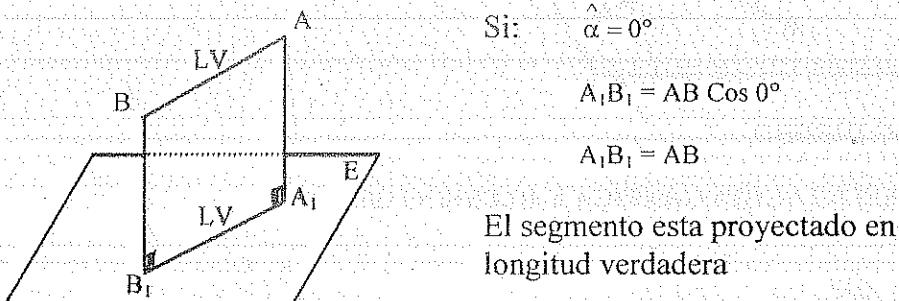


$$\text{Si: } \hat{\alpha} = 90^\circ$$

$$A_1B_1 = AB \cos 90^\circ$$

$A_1B_1 = 0$ es un punto.

- Si un segmento es paralelo al plano, su proyección tiene la misma longitud que el segmento.



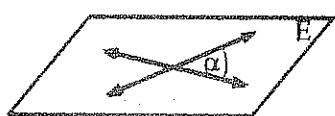
El segmento esta proyectado en
longitud verdadera

1.13.- ÁNGULO RECTA – RECTA

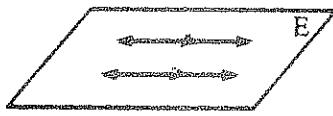
Es el ángulo agudo formado entre las dos rectas, medido cuando las dos rectas están en longitud verdadera.

1.13.1.- COPLANARES

a) Secantes

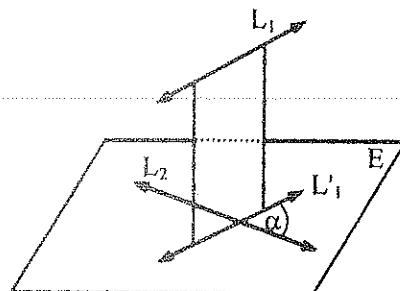


b) Paralelas



$$\hat{\alpha} = 0^\circ$$

1.13.2.- NO COPLANARES (SE CRUZAN)

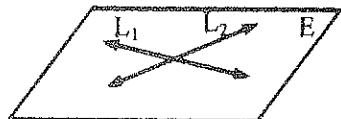


1.14.- DISTANCIA MÍNIMA ENTRE DOS RECTAS

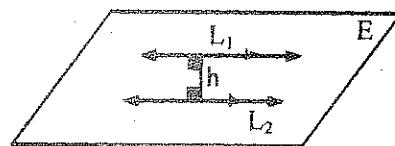
Es la longitud de la perpendicular común a las dos rectas.

COPLANARES

a) Secantes

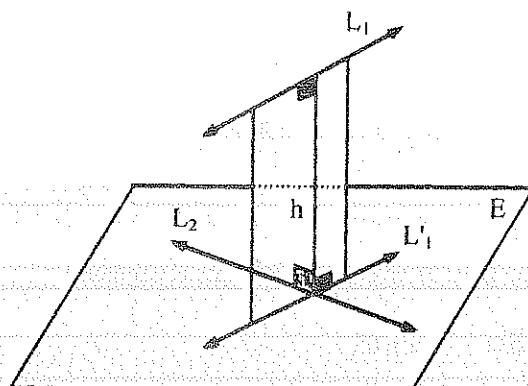


b) Paralelas



Distancia mínima cero.

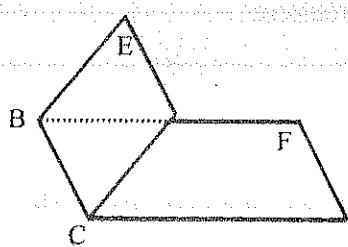
Distancia mínima h.



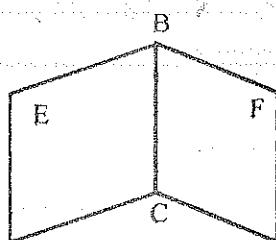
Distancia mínima h.

1.15.- ÁNGULO DIEDRO

1.15.1.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y ELEMENTOS



La arista es la recta común BC



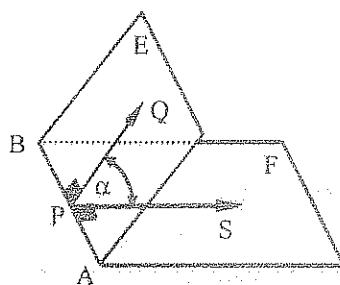
Las caras son los Planos E y F

1.15.2. - DENOMINACIÓN

- a) Por las letras de la arista: Diedro B – C
- b) Por las letras de las caras y la arista: Diedro E - BC - F

1.15.3. - ÁNGULO PLANO DE UN ÁNGULO DIEDRO . MEDIDA

Es el ángulo formado por dos perpendiculares a la arista en un mismo punto y una en cada cara. La medida de un ángulo diedro es igual a la medida de su ángulo plano.



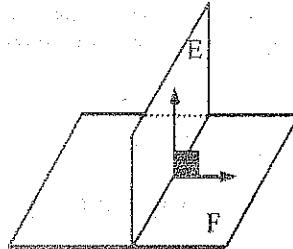
Si: $\overline{PQ} \perp \overline{AB}$
 $\overline{PQ} \in \text{Plano E}$
 $\overline{PS} \perp \overline{AB}$
 $\overline{PS} \in \text{Plano F}$
 $\widehat{\alpha} = \text{Ángulo Diedro}$

1.15.4. - CLASIFICACIÓN

- Por su Medida; Recto, Agudo, Obtuso, Llano, Complementarios, Suplementarios.
- Por su Posición; consecutivos, Adyacentes, Opuestos por la Arista.

1.15.5. - PLANOS PERPENDICULARES

Si la medida del ángulo diedro es igual a 90° .



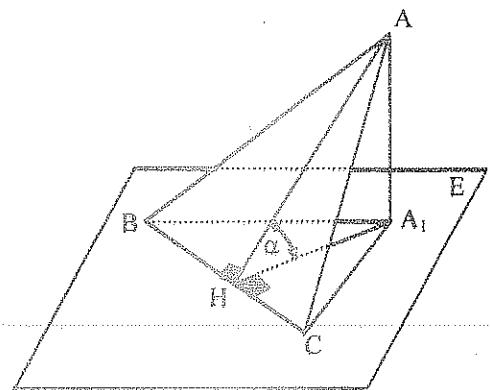
1.15.6. - PROPIEDADES

- Si dos planos son perpendiculares, toda perpendicular a su intersección trazada en uno de ellos es perpendicular al otro plano.
- Si una recta es perpendicular a un plano, todo plano que pase por dicha recta o sea paralelo a ella, es perpendicular al mismo plano.
- Un plano y una recta perpendiculares a un mismo plano son paralelas.

1.15.7. - PROYECCIÓN DE UN REGIÓN POLIGONAL

La proyección de una región poligonal sobre un plano tiene por medida el área proyectada multiplicada por el coseno del ángulo entre los dos planos.

- a) Un lado es Paralelo al Plano de Proyección.

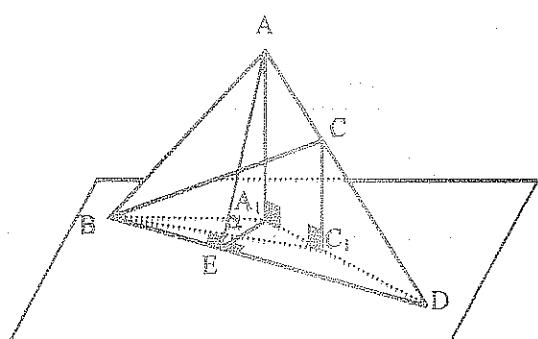


$$T) \quad S_{\Delta ABC} \times \cos \alpha = S_{\Delta BA_1C}$$

$$D) \quad \frac{S_{\Delta ABC}}{S_{\Delta BA_1C}} = \frac{AH}{A_1H} = \frac{1}{\cos \alpha}$$

$$S_{\Delta ABC} \times \cos \alpha = S_{\Delta BA_1C}$$

- b) Ninguno de los lados es Paralelo al Plano de Proyección.



$$T) \quad S_{\Delta ABC} \times \cos \alpha = S_{\Delta BA_1C_1}$$

$$D) \quad S_{\Delta ABD} \times \cos \alpha = S_{\Delta BA_1D}$$

$$S_{\Delta BCD} \times \cos \alpha = S_{\Delta BC_1D}$$

$$\cos \alpha (S_{\Delta ABD} - S_{\Delta BCD}) = S_{\Delta BA_1C_1}$$

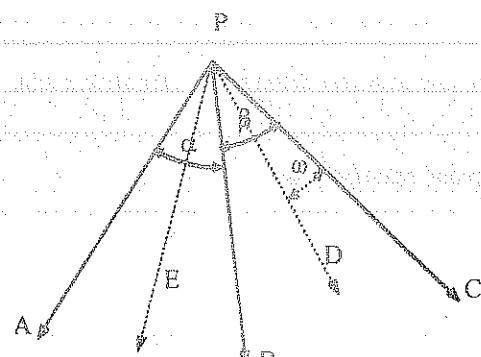
$$S_{\Delta ABC} \times \cos \alpha = S_{\Delta BA_1C_1}$$

Si se tiene un polígono cualquiera, se descompone en triángulos, y como la relación es la misma para los triángulos proyectados y para sus respectivas proyecciones, lo será para el polígono entero y su proyección.

1.16. - ÁNGULOS POLIEDROS

Es la figura formada por varios planos que pasan por un mismo punto, y limitado por sus intersecciones sucesivas.

1.16.1. - REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y ELEMENTOS



Vértice: P

Aristas: PA, PB, PC,...

Caras: PAB, PBC, PCD,...

Ángulos caras: $\hat{\alpha}, \hat{\beta}, \hat{\omega}, \dots$

1.16.2. - DENOMINACIÓN

Por la letra del vértice y por las letras de las aristas.

Angulo Poliedro P - ABCDE...

1.16.3. - CONGRUENCIA

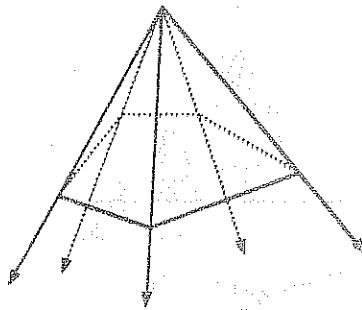
Dos ángulos poliedros son congruentes cuando tienen respectivamente congruentes sus ángulos caras y sus ángulos diedros.

1.16.4. - CLASIFICACIÓN

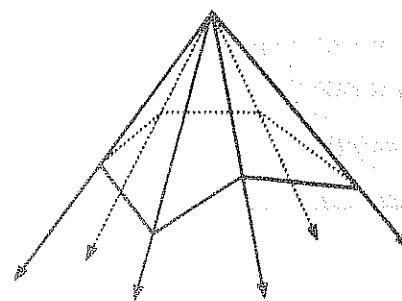
a) Por su Posición en el Espacio:

- * Cóncavo y convexo.

Si todos los puntos están situados en el mismo semiespacio con relación al plano de cada una de sus caras, el ángulo poliedro es convexo, caso contrario es cónico.



CONVEXO



CONCAVO

b) Por el número de caras.

Número de Caras	Nombre
3 caras	Ángulo Triédrico
4 caras	Ángulo Tetraédrico
5 caras	Ángulo Pentaédrico
6 caras	Ángulo Hexaédrico
7 caras	Ángulo Heptaédrico

c) Ángulos Poliedros Regulares.

Si todos los ángulos diedros y los ángulos caras son respectivamente congruentes.

d) Triédrico Trirrectángulo.

Si los ángulos cara y los ángulos diedros miden 90°

1.16.5. - PROPIEDADES

a) En un ángulo triédrico, la suma de los ángulos cara es mayor que el tercero.

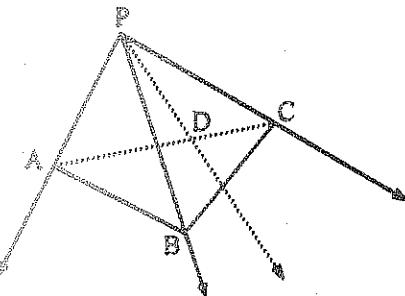
$$\text{T) } m \hat{APB} + m \hat{BPC} > m \hat{APC}$$

- D) $m \hat{APB} = m \hat{APD}$ (construcción)
 $PA = PB = PD$ (construcción)
 $\Delta APB \cong \Delta APD$
 $AB = AD$
 $AB + BC > AC$
 $AB + BC > AD + DC$
 $BC > DC$

$\therefore m \hat{BPC} > m \hat{DPC}$

$m \hat{APB} + m \hat{BPC} > m \hat{APD} + m \hat{DPC}$

$m \hat{APB} + m \hat{BPC} > m \hat{APC}$



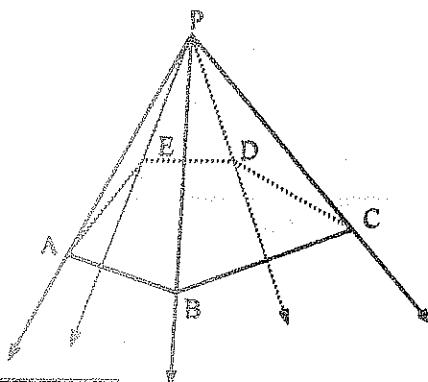
b) La suma de los ángulos caras de un ángulo poliedro es menor a 360°

$$T) \hat{mAPB} + \hat{mBPC} + \hat{mCPD} + \hat{mDPE} + \dots < 360^\circ$$

$$D) \hat{mEAB} < \hat{mEAP} + \hat{mBAP}$$

$$m\hat{ABC} < m\hat{ABP} + m\hat{CBP}$$

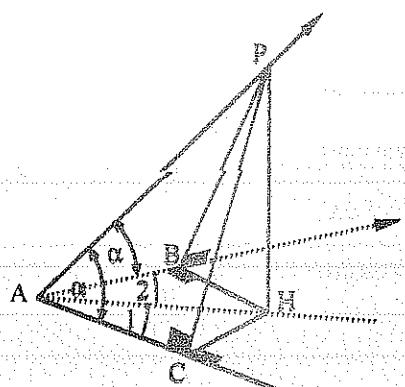
$$m\hat{BCD} < m\hat{BCP} + m\hat{DCP}$$



$$180^\circ(n-2) < 180^\circ n - \left(m\hat{APB} + m\hat{BPC} + m\hat{CPD} + \dots \right)$$

$$m\hat{APB} + m\hat{BPC} + m\hat{CPD} + m\hat{DPE} + \dots < 360^\circ$$

c) Si dos ángulos planos de un ángulo triédrico son iguales, la proyección de un punto de la arista que determinan estos dos ángulos es elemento de la bisectriz del tercer ángulo plano.



T) $\hat{1} = \hat{2}$

D) $\triangle APB \cong \triangle APC$ (Rectángulos, AP, g)

$$\therefore AB = AC$$

$\Delta ABH \cong \Delta AHC$ (Rectángulos, $AB = AC$, AH)

$$1 = 2$$

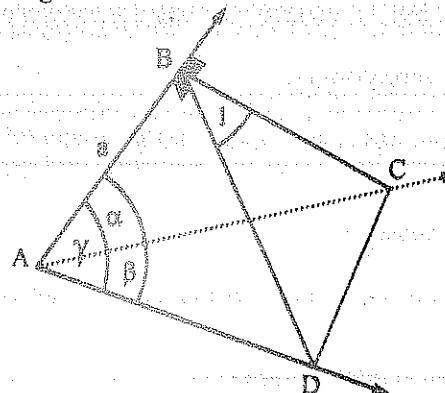
d) Ángulo diedro en función de los ángulos planos de un ángulo Triédrico.

4 ABC

$$BC = aTag, \alpha$$

$$AC = \frac{a}{\cos \alpha}$$

△ ABD



$$BD = a \operatorname{Tag} \hat{\gamma}$$

$$AD = \frac{a}{\operatorname{Cos} \hat{\gamma}}$$

ΔACD

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2 \times AC \times AD \times \operatorname{Cos} \hat{\beta}$$

$$CD^2 = \frac{a^2}{\operatorname{Cos}^2 \hat{\alpha}} + \frac{a^2}{\operatorname{Cos}^2 \hat{\gamma}} - \frac{2 \times a^2 \times \operatorname{Cos} \hat{\beta}}{\operatorname{Cos} \hat{\alpha} \operatorname{Cos} \hat{\gamma}}$$

ΔABC

$$CD^2 = BD^2 + BC^2 - 2 \times BD \times BC \times \operatorname{Cos} \hat{1}$$

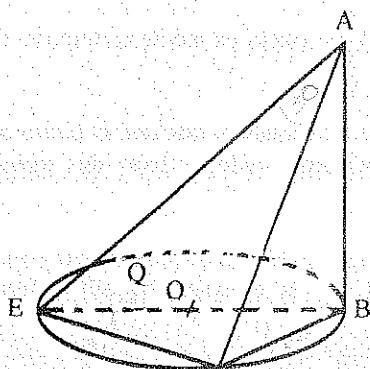
$$CD^2 = a^2 \operatorname{Tag}^2 \hat{\gamma} + a^2 \operatorname{Tag}^2 \hat{\alpha} - 2 \times a \operatorname{Tag} \hat{\gamma} \times a \operatorname{Tag} \hat{\alpha} \times \operatorname{Cos} \hat{1}$$

$$\frac{a^2}{\operatorname{Cos}^2 \hat{\alpha}} + \frac{a^2}{\operatorname{Cos}^2 \hat{\gamma}} - \frac{2 \times a^2 \times \operatorname{Cos} \hat{\beta}}{\operatorname{Cos} \hat{\alpha} \operatorname{Cos} \hat{\gamma}} = a^2 \operatorname{Tag}^2 \hat{\gamma} + a^2 \operatorname{Tag}^2 \hat{\alpha} - 2 \times a \operatorname{Tag} \hat{\gamma} \times a \operatorname{Tag} \hat{\alpha} \times \operatorname{Cos} \hat{1}$$

$$\therefore \operatorname{Cos} \hat{1} = \frac{\operatorname{Cos} \hat{\beta} - \operatorname{Cos} \hat{\alpha} \operatorname{Cos} \hat{\gamma}}{\operatorname{Sen} \hat{\alpha} \operatorname{Sen} \hat{\gamma}}$$

1.17.- EJERCICIOS

1. -



H) $\overline{AB} \perp$ Plano Q

$$\widehat{EAC} = 30^\circ$$

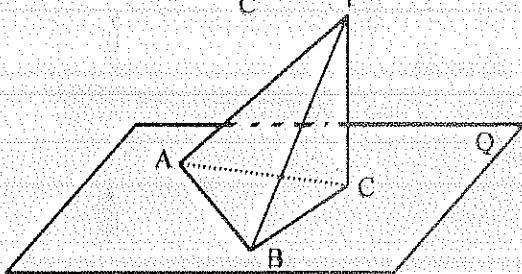
$$EO = OB = 7 \text{ m}$$

$$CB = 10 \text{ m}$$

T) $S_{\Delta EAC} = ?$

Resp. 83.13 m^2

2. -



H) $\overline{PC} \perp$ Q

$$AB = 8 \text{ cm}$$

$$PA = PB = 13 \text{ cm}$$

$$PC = 12 \text{ cm}$$

T) Distancia de C a $\overline{AB} = ?$

Resp. 3 cm

H) $AB = 6 \text{ u}$

$$BC = 8 \text{ u}$$

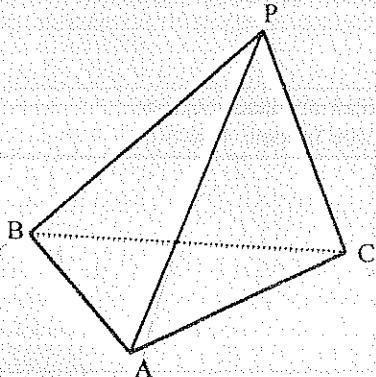
$$AC = 10 \text{ u}$$

Los ángulos entre \overline{PA} , \overline{PB} y \overline{PC} con el Plano del ΔABC es 40°

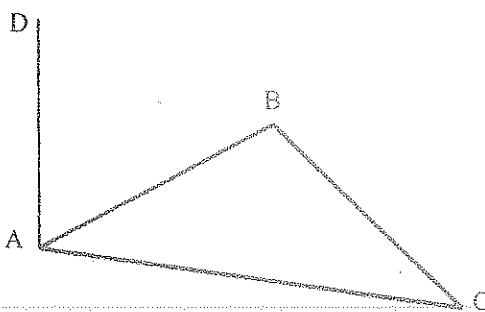
T) Distancia de P al Plano del ΔABC

Resp. 4.19 u

3. -



4.-

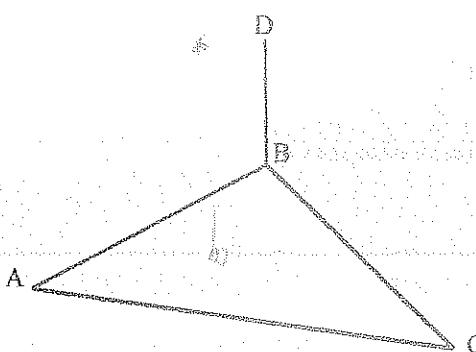


- H) $\triangle ABC$ rectángulo en A
 $BA = AC = 10 \text{ u}$
 $AD = 15 \text{ u}$ y \perp Plano ΔABC

T) Distancia del punto D a \overline{BC}

Resp: 16.58 u

5.-



- H) $\angle A = 90^\circ$
 $BD \perp$ Plano ΔABC
 $AC = 8 \text{ u}$
 $DC = 10 \text{ u}$

T) Distancia del punto D a AC

Resp: 6u

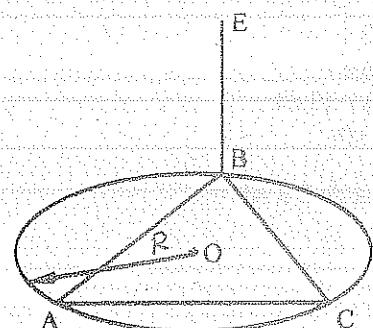
- 6.- En un plano P se tiene un ángulo, $\widehat{BAC} = 60^\circ$. Un punto S en el espacio dista 25 m. del vértice del ángulo A, 7 m. del lado \overline{AB} y 20 m. del lado \overline{AC} . Hallar la distancia del punto S al plano P.
 Resp: 6.04 m

- 7.- Demostrar que la distancia del centro de gravedad de un triángulo a un plano es media aritmética de las distancias de los tres vértices del mismo triángulo al plano dado.

- 8.- Un triángulo equilátero ABC es perpendicular a un cuadrado ABDE. El segmento que une el punto medio del lado \overline{AC} con el punto medio del lado \overline{BD} mide 10 m. ¿Cuánto mide el lado del triángulo?
 Resp: 10 m

- 9.- La proyección del triángulo ABC sobre un plano P resulta un triángulo $AB'C'$ equilátero de lado 8 m. Las proyectantes $CC' = 4 \text{ m}$ y $BB' = 8 \text{ m}$. Hallar el valor de la proyectante del ortocentro.
 Resp: 4 m.

10.-



H) $R = \sqrt{3}$

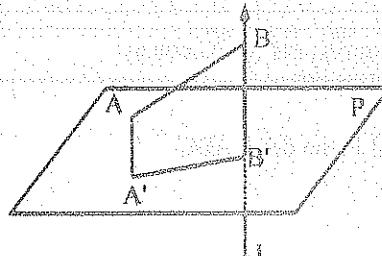
$BE \perp$ Plano ΔABC (EQUILÁTERO)

$BE = 1 \text{ u}$

T) $S_{AAEC} = ?$

Resp: 4.17 u^2

11.-



- H) Proyección de \overline{AB} sobre el Plano P es 8 u
 Proyección de \overline{AB} sobre la recta L es 6 u

T \perp Plano P

T) $AB = ?$

Resp: 10u

12. - Un triángulo rectángulo ABC, tiene: $\hat{A} = 90^\circ$; $\hat{B} = 30^\circ$ se proyecta en un plano P obteniéndose el $\Delta A'B'C'$, si $\hat{B}' = 45^\circ$; $AC = A'C'$ y $AB = 6u$. Hallar el ángulo entre el plano P y el ΔABC .
Resp: $54,76^\circ$

13. - Dos puntos A y B situados a distinto lado de un plano P distan de este plano $6u$ y $2u$ respectivamente. Si la proyección del AB en el plano P es $15u$. Encontrar la distancia entre los puntos A y B. Resp: $17u$

14. - Tres segmentos miden $13u$, $14u$ y $15u$ y están contenidos en tres planos paralelos respectivamente. Si la proyección de los segmentos en un cuarto plano paralelo es un triángulo. Calcular el área de este triángulo.
Resp: $84 u^2$

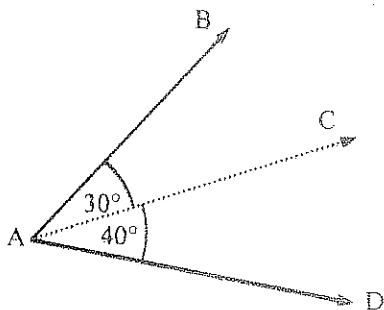
15. - Un plano A forma un ángulo de 60° con un plano B. A qué distancia del plano B se debe trazar otro plano C que interseque al plano A, tal que sus intersecciones disten $42u$.

$$\text{Resp: } 21\sqrt{3}$$

16. - Se tiene un triángulo rectángulo ABC; $AB = AC = 4m$. Por el vértice A se levanta la perpendicular $AD = 2\sqrt{6} m$ luego D se une con los vértices B y C. Calcular el ángulo diedro formado por los planos ABC y BDC.
Resp: 60°

17. - Se tiene un ΔABC ; $b = 12u$; $c = 10u$ y un plano P. El lado \overline{AC} pertenece al Plano P, el lado \overline{AB} forma 40° con el Plano P, el \overline{BC} forma 30° con el plano P. Hallar el ángulo diedro entre los planos ABC y P.
Resp: $54,55^\circ$

18. -



H) Diedro A - C = 50°

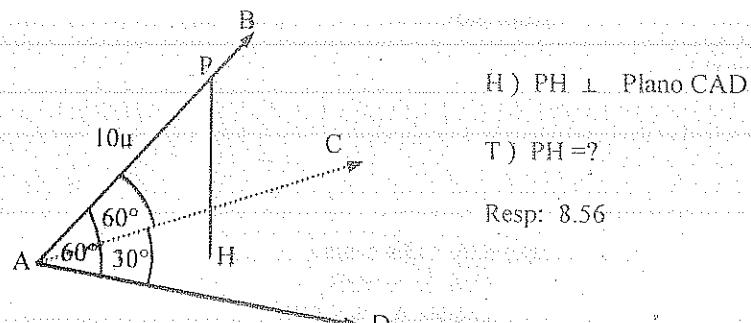
T) Diedro A - D = ?

$$\text{Resp: } 50,97^\circ$$

19. - Un ΔABC se encuentra en un plano que forma un ángulo de 45° con otro plano P. Si la proyección del triángulo en el plano P es de 20cm^2 . Calcular el área del triángulo.

$$\text{Resp: } 20\sqrt{2} \text{ cm}^2$$

20. -

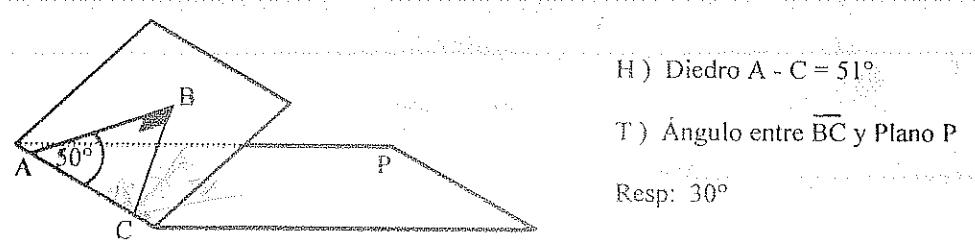


H) $PH \perp \text{Plano CAD}$

T) $PH = ?$

$$\text{Resp: } 8,56$$

21. -

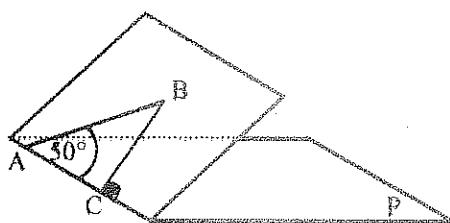


H) Diedro A - C = 51°

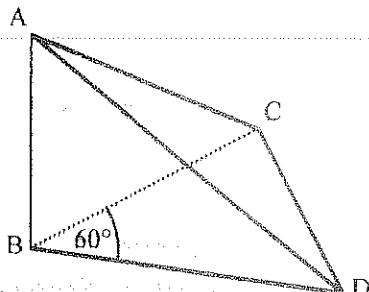
T) Ángulo entre \overline{BC} y Plano P

$$\text{Resp: } 30^\circ$$

22.-

H) Ángulo Diedro A - C = 57° T) Ángulo entre \overline{AB} y el Plano PResp: 40°

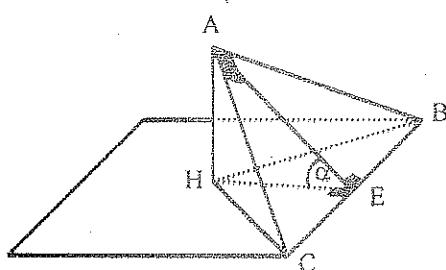
23.-

H) $\overline{AB} \perp \triangle BCD$ $AB = BC = BD = 20u$

T) Diedro D - C = ?

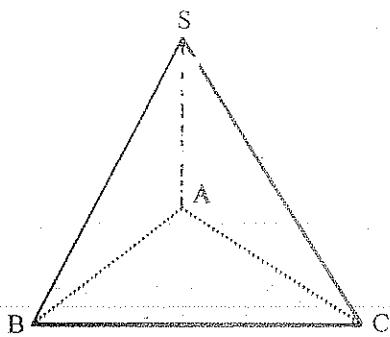
Resp: 49.1°

24.-

H) $AH \perp \text{Plano } P$ $AC = AB$ $BC = 15m$ $\hat{\alpha} = 30^\circ$ T) $HB = ?$ $HC = ?$

Resp: 9.91 ; 9.91

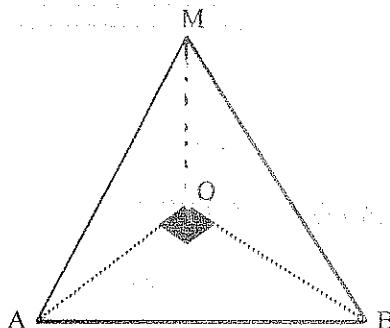
25.-

H) $SA = 120m$ $\hat{ASB} = \hat{ASC} = 45^\circ$ $\hat{BSC} = 60^\circ$

T) Diedro S - A = ?

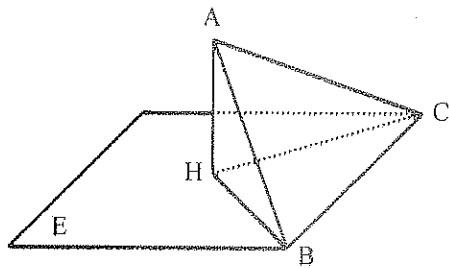
Resp: 90°

26.-

H) $OA = OB = 6m$ $\overline{OM} \perp \triangle AOB$ Diedro A - B = 60° T) $OM = ?$

Resp: 7.35m

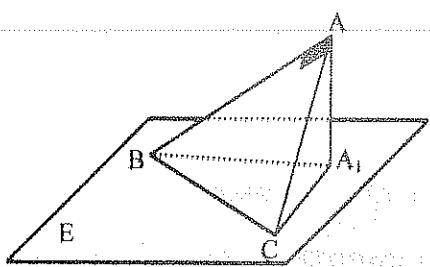
27.-



H) $AB = BC = CA = 13,84 \text{ m}$
 $\widehat{B-C} = 60^\circ$
 $AH \perp \text{Plano } E$

T) $S_{AHCB} = ?$ Resp: 41.52 m^2

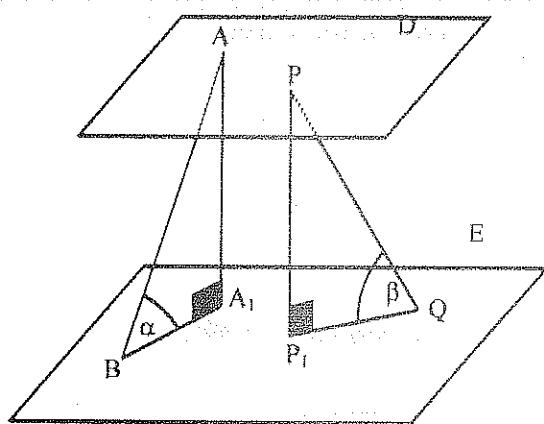
28.-



H) $\widehat{AA_1} \perp \text{Plano } E$
 $\widehat{ACA_1} = 45^\circ$
 $\widehat{ABA_1} = 22.2^\circ$

T) $\text{Diedro } B-C = ?$ Resp: $53,27^\circ$

29.-



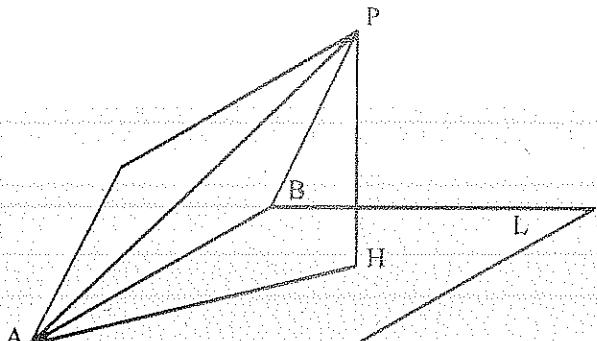
H) $\frac{AB}{PQ} = \frac{3}{2}$
 $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{1}{2}$

Plano D || Plano E

T) $\alpha = ?$
 $\beta = ?$

Resp: $\alpha = 41,41^\circ$
 $\beta = 82,82^\circ$

30.-

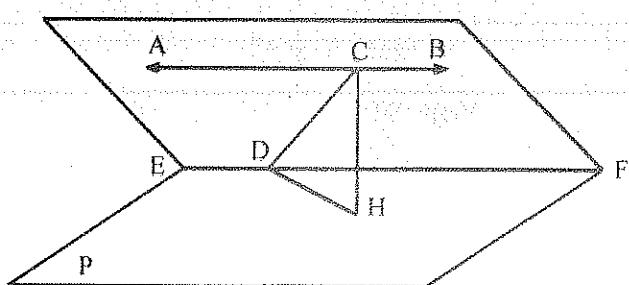


H) $\widehat{BAP} = 35^\circ$
 $PB \perp AB$
 $PH \perp \text{Plano } L$

$\widehat{PAH} = 25^\circ$

T) $\text{Diedro } A-B = ?$ Resp: $47,46^\circ$

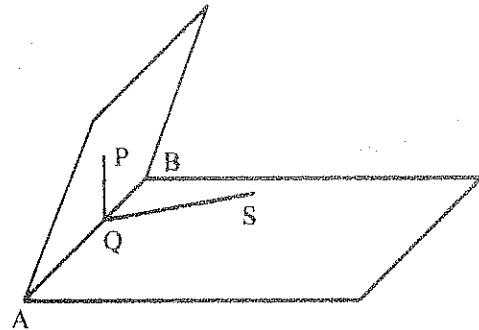
31.-



H) $AB \parallel \text{Plano } P$
 $\widehat{ACD} = 30^\circ$
 $\widehat{CH} \perp \text{Plano } P$
 $\widehat{CDH} = 40^\circ$

T) $\text{Diedro } E-F = ?$ Resp: 52°

32.-



H) $\text{Diedro } \overline{A-B} = 70^\circ$

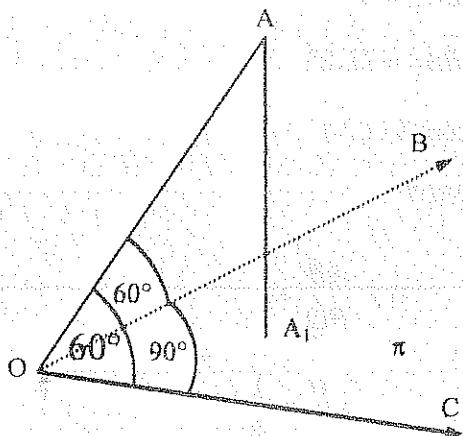
$PQ \perp AB$

$\hat{BQS} = 50^\circ$

T) $\hat{PQS} = ?$

Resp: 74.81°

33.-



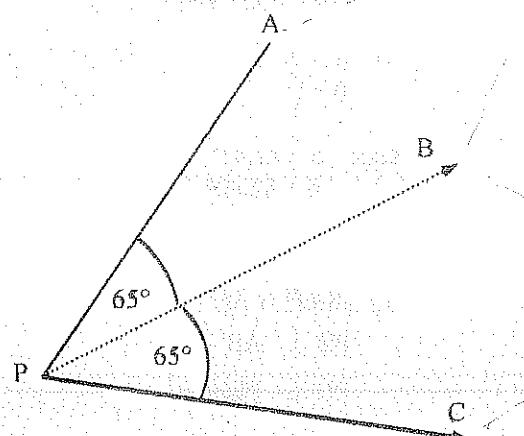
H) $\overline{AA_1} \perp \text{Plano } \pi$

T) $\text{Diedro } O-C = ?$

$\hat{AOA_1} = ?$

Resp: 54.73° y 45°

34.-

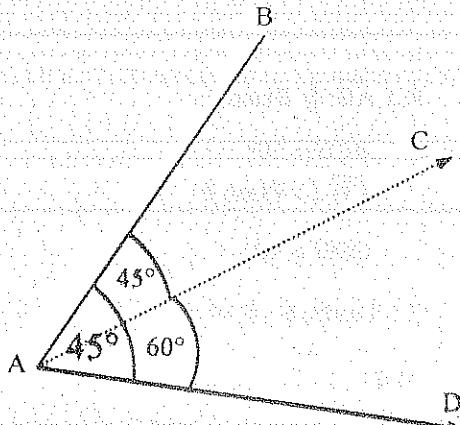


H) $\text{Diedro } P-B = 80^\circ$

T) $\hat{APC} = ?$

Resp: 71.26°

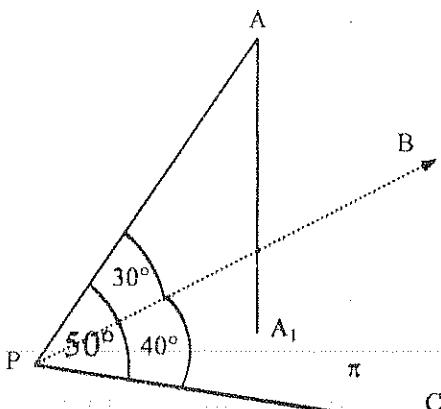
35.-



T) $\text{Diedro } A-B = ?$

Resp: 90°

36.-



H) $\overline{PA} = 15\text{m}$
 $\overline{AA_1} \perp \text{Plano } \pi$

T) $AA_1 = ?$

Resp: 7,48 m

37.- Por la bisectriz del ángulo recto de un triángulo rectángulo se traza un plano que forma un ángulo de 30° con el plano del triángulo rectángulo. Calcular los ángulos formados entre los catetos y el plano construido.
 Resp:

38.- Un triángulo ABC de lados $a = 8u$, $b = 10u$, $c = 6u$. Tiene el vértice A en el plano E, las distancias de los puntos B y C al plano E son $2u$ y $5u$ respectivamente. Calcular el ángulo formado entre el Plano E y el ΔABC .
 Resp: 30.31°

39.- Dado el ángulo triédrico O-ABC en el cual: $AOB = 50^\circ$, $BOC = 70^\circ$ y el ángulo diedro en la arista \overline{OC} mide 40° . Calcular el ángulo entre la arista \overline{OA} y el plano BOC. Resp 21.65.

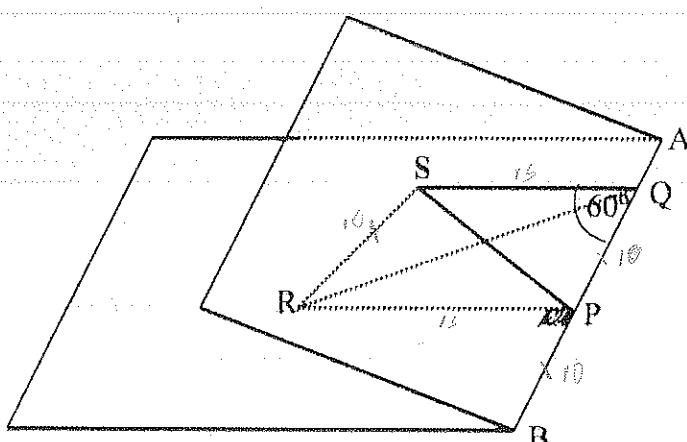
40.- Dados los rectángulos ABCD y ABEF perpendiculares entre sí: $AB = 5$, $BC = 4$, $BE = 3$, calcular el ángulo formado por la recta DE con cada uno de los rectángulos. Resp. 55.91; 54.84

41.- Se tiene el ángulo diedro P-AC-Q. Si B pertenece al plano P y \overline{AB} forma con \overline{AC} un ángulo de 50° y con el plano Q un ángulo de 40° , hallar la medida del ángulo diedro.
 Resp. 57.04°

42.- Dado el ángulo triédrico O-ABC en el cual: $BOC = 50^\circ$, $AOC = 70^\circ$ y el ángulo diedro en la arista \overline{OA} mide 40° . Calcular el ángulo entre la arista \overline{OB} y el plano AOC. Resp. 21.63

43.- Un triángulo ABC y un cuadrado CEFB son perpendiculares entre sí. $AB = BC = 10u$, $AC = 8u$. Hallar el ángulo entre el cuadrado CEFB y el plano ABE. Resp. 56.70°

44.-



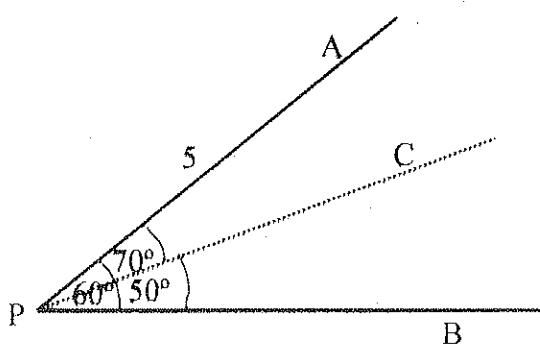
H) $PQ = QS = SR = 10$

$PR = 15$

T) Diedro de arista AB = ?

Resp. 33.48

45.-



T) Hallar la distancia desde A al plano PBC

Resp. 4,32

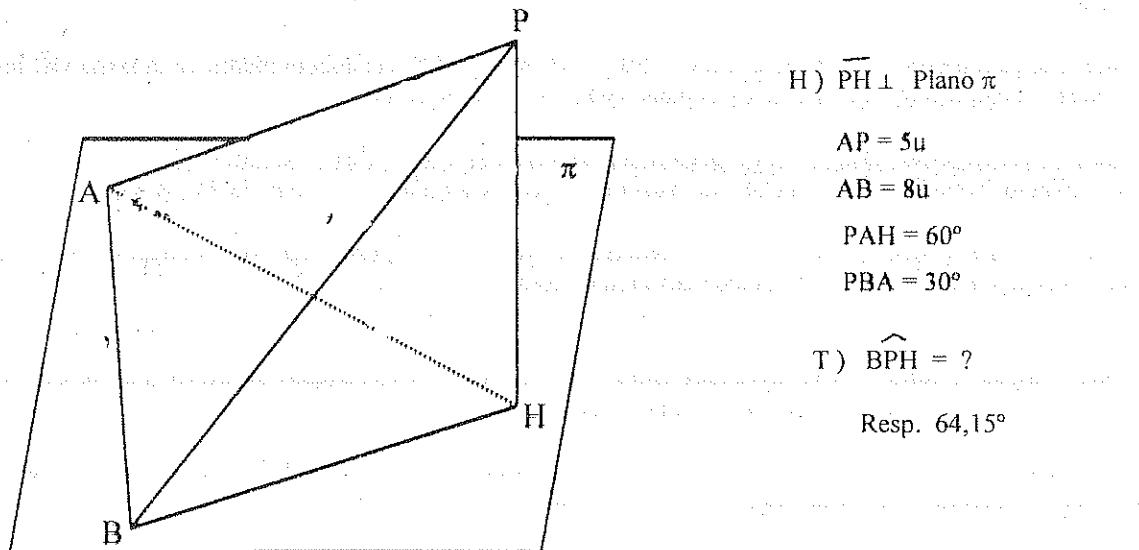
46.- Un triángulo ABC de lados $AB = 10u$, $BC = 12u$, tiene \overline{BC} perteneciendo a un plano P . El lado \overline{AB} forma un ángulo de 40° con el plano P y el lado \overline{AC} forma un ángulo de 30° con el mismo plano P . Hallar la medida del ángulo diedro entre los planos ABC y P .

Resp. $53,36^\circ$

47.- En la arista de un ángulo diedro se tiene un segmento \overline{AB} ; en una de las caras se da un punto P , tal que \overline{AP} forma un ángulo de 70° con \overline{AB} y \overline{BP} es perpendicular a \overline{AB} . Determinar el valor del ángulo diedro, sabiendo que \overline{AP} forma con la otra cara del diedro un ángulo de 40° .

Resp. $43,16^\circ$

48.-

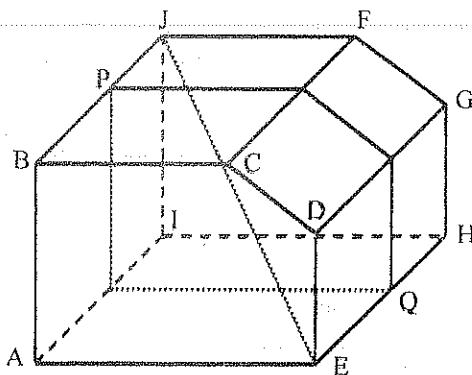


UNIDAD 2

2.- POLIEDROS

Es un cuerpo geométrico limitado por polígonos.

2.1.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y ELEMENTOS



CARAS: Son los polígonos, ABCDE, BJFC, CFGD...

ARISTAS: Son las aristas de los ángulos diedros, \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CD} , \overline{FG} , \overline{EH} , ...

VERTICES: Son los vértices de los ángulos poliedros, A, B, E, G, I,

DIAGONAL: Es el segmento cuyos extremos son dos vértices no coplanares, JE...

SECCION: Es la intersección entre un plano y el poliedro. P - Q

2.2.- DENOMINACIÓN

Por las letras de una diagonal. Poliedro J – E

Por todos los vértices. Poliedro AEHI - BCDGFJ

2.3.- CLASIFICACIÓN

2.3.1.- Por el número de Caras

Tetraedro	4 caras
Pentaedro	5 caras
Exaedro	6 caras
Heptaedro	7 caras
.....	n caras

2.3.2.- Poliedros Regulares

Si sus caras son polígonos regulares congruentes y sus ángulos diedros y poliedros son respectivamente congruentes.

Existen solo cinco poliedros regulares.

POLIEDRO REGULAR	CARAS	ARISTAS	VÉRTICES
Tetraedro	4 Triángulos Equiláteros	6	4
Exaedro o Cubo	6 Cuadrados	12	8
Octaedro	8 Triángulos Equiláteros	12	6
Dodecaedro	12 Pentágonos Regulares	30	20
Icosaedro	20 Triángulos Equiláteros	30	12

PROPIEDAD 1. - En todo Poliedro el número de caras (c) más el número de vértices (v) es igual al número de aristas (a) más dos: $c + v = a + 2$.

PROPIEDAD 2. - En todo poliedro la suma de los ángulos (S) de todas las caras es igual a 360° multiplicado por el número de vértices menos dos. $S = 360^\circ(v - 2)$.

2.3.4. - EJERCICIOS

1. - Calcular la suma de todos los ángulos de un Octaedro. Resp: 1440°

2. - ¿Cuántas caras tiene un poliedro de 18 vértices y 24 aristas?. Resp: 8

3. - Calcular la proyección de una cara de un tetraedro regular en otra si su arista es $6u$.

$$\text{Resp: } 3\sqrt{3} u^2$$

4. - Calcular la distancia desde un vértice de un cubo al centro de la cara lateral opuesta, si la arista del cubo es $10u$. Resp: $5\sqrt{6} u$

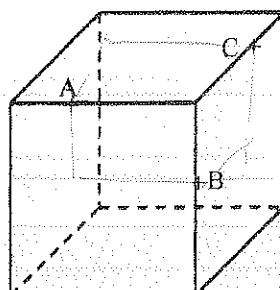
5. - Encontrar la distancia desde el vértice de un cubo de arista "a" a la diagonal que no contiene ese vértice.

$$\text{Resp: } \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

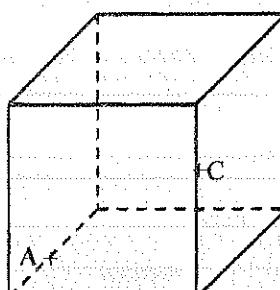
6. - Calcular el ángulo formado por dos diagonales de un Octaedro regular. Resp: 90° .

7. - Construir las secciones que pasan por los puntos A, B y C en los siguientes Poliedros.

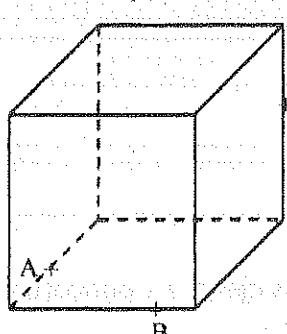
a)



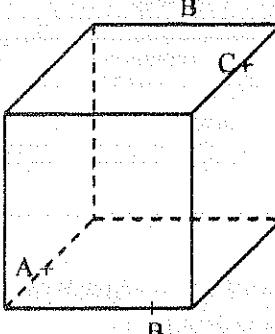
b)

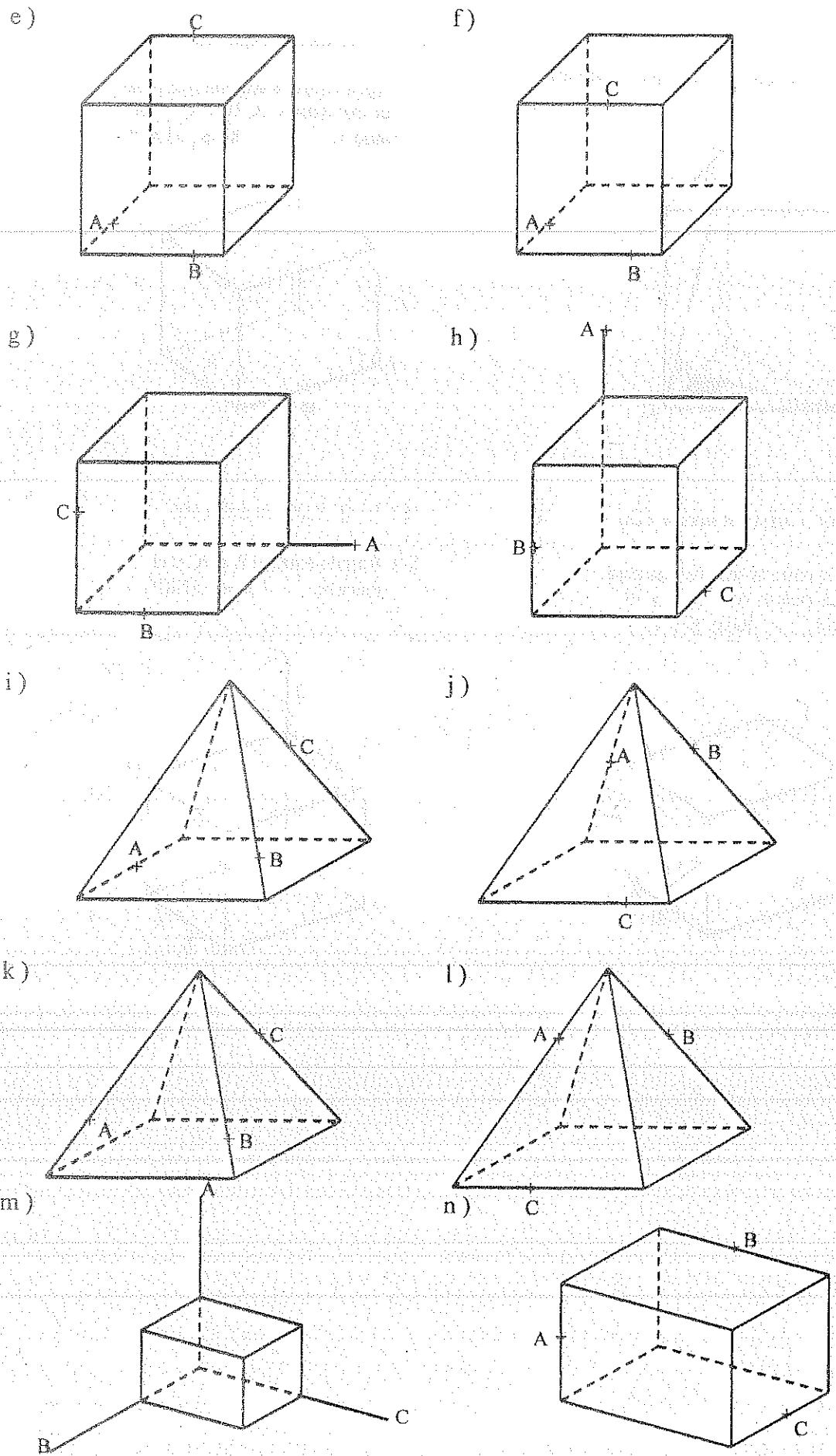


c)



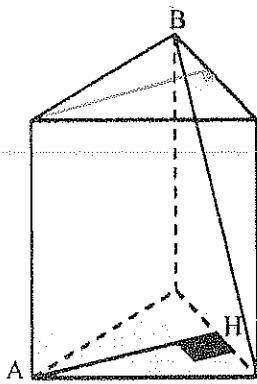
d)





8.-

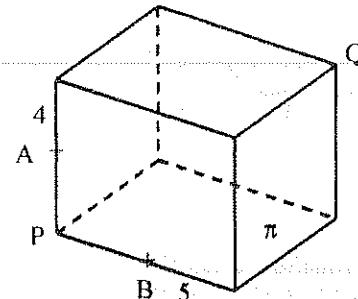
Trazar la sección que pase por BC y paralela a AH



9.-

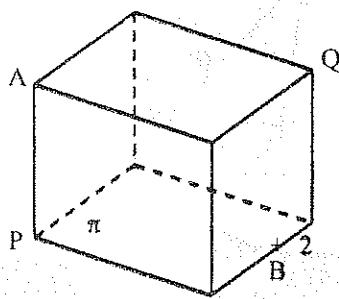
H) P - Q Cubo de arista 10u.

T) Ángulo entre la sección que pasa por los puntos A, B y Q y el plano π .
Resp. $63,43^\circ$



10.- H) P - Q Cubo de arista 12u

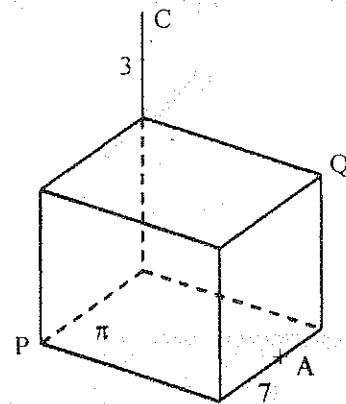
T) Ángulo entre la sección que pasa por los puntos A, B y Q y el plano π .
Resp. $33,3^\circ$



11.-

H) P - Q Cubo de arista 10u.

T) Ángulo entre el ΔAPC y el plano π .
Resp. $57,87^\circ$



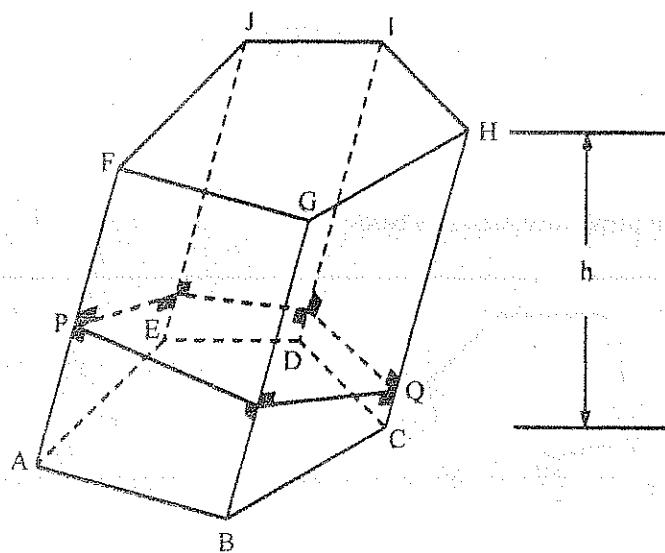
UNIDAD 3

3.- PRISMAS

3.1.- DEFINICIÓN

Es un Poliedro que tiene dos caras congruentes y paralelas, llamadas bases, y las demás caras son paralelogramos.

3.2.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y ELEMENTOS



BASES : ABCDE..... \cong FGHJ.....

CARAS LATERALES : Son los Paralelogramos AFGB, BGHC, CDIH,

ARISTAS LATERALES : AF = BG = CH = DI = = a_L

ALTURA : Es la perpendicular común a las dos bases, h

SECCION RECTA : Es la sección que corta perpendicular a todas las aristas laterales, P - Q.

AREA LATERAL (S_L) : Es la suma de las áreas de todas las caras laterales.

AREA TOTAL (S_T) : Es la suma del área lateral y las áreas de las Bases.

3.3.- CLASIFICACION

3.3.1.- Por la Forma de su Base

Triangular

Si la Base es un Triángulo

Cuadrangular

Si la base es un Cuadrilátero

Pentagonal

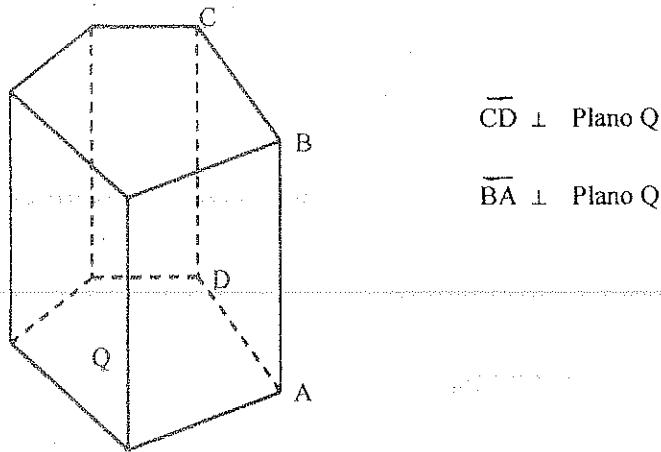
Si la Base es un Pentágono

Hexagonal

Si la Base es un Hexágono

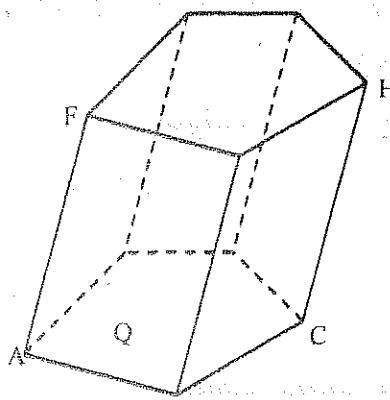
3.3.2.- Recto

Si las aristas laterales son perpendiculares a las bases.



3.3.3. - Oblicuo

Si las aristas laterales no son perpendiculares a las bases.



3.3.4. - Regular

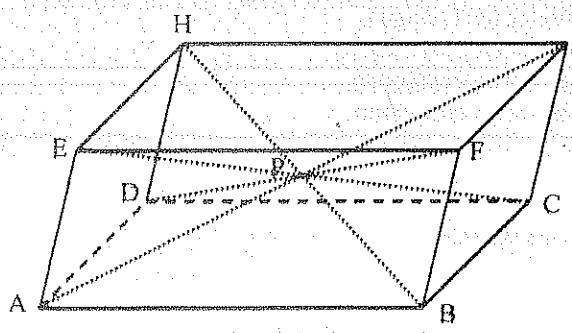
Es el prisma recto cuyas bases son polígonos regulares.

3.3.5. - Tronco de Prisma

Es la parte de un prisma formada al construir una sección que corta a las aristas laterales.

3.4. - PARALELEPIPEDOS

Es un prisma cuyas bases son paralelogramos.



- Las caras opuestas son congruentes y paralelas

$$ABCD \cong EFGH$$

$$AEHD \cong BFGC$$

$$ABFE \cong DCGH$$

$$ABCD \parallel EFGH$$

$$AEHD \parallel BFGC$$

$$ABFE \parallel DCGH$$

- Las Diagonales son concurrentes y se bisecan mutuamente.

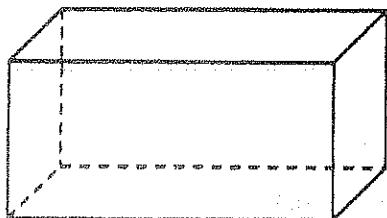
$$DP = PF \quad AP = PG$$

$$HP = PB \quad EP = PC$$

3.4.1. - CLASIFICACION

3.4.1.1. - Recto

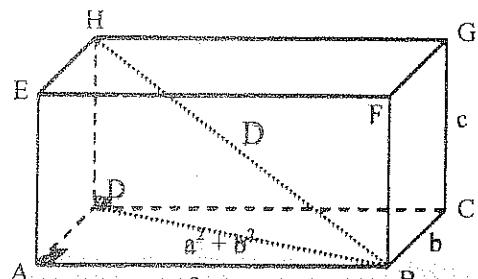
Las aristas laterales son perpendiculares a las bases.



Las bases son paralelogramos

3.4.1.2. - Rectángulo

Es un paralelepípedo recto que tiene por bases rectángulos.



Las bases son rectángulos

DIMENSIONES. Son las longitudes de tres aristas concurrentes, a , b y c .
Todas las diagonales son congruentes.

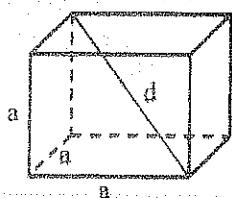
$$EC = HB = DF = AG = D$$

- El cuadrado de una diagonal es igual a la suma de los cuadrados de sus tres dimensiones.

$$D^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

3.4.1.3. - Cubo

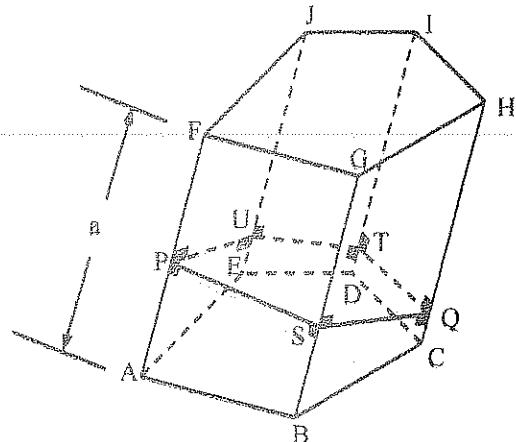
Es un paralelepípedo cuyas caras son cuadrados.



$$d = a\sqrt{3}$$

3.5. - AREA LATERAL

El área lateral de un prisma es igual al producto de la arista lateral por el perímetro de una sección recta.



$$S_L = S_{ABGF} + S_{BCHG} + S_{CHID} + \dots$$

$$S_L = a \times PS + a \times SQ + a \times QT + \dots$$

$$S_L = a \times (PS + SQ + QT + \dots)$$

$$S_L = a \times P_{S.R.}$$

3.6. - VOLUMEN

3.6.1. - Unidad de Volumen

Es un cubo cuyas aristas tienen por medida una unidad de longitud.

3.6.2. - Volumen de un Sólido

Es un número que indica cuantas veces está contenida la unidad de volumen en dicho sólido.

3.6.3. - Sólidos Equivalentes

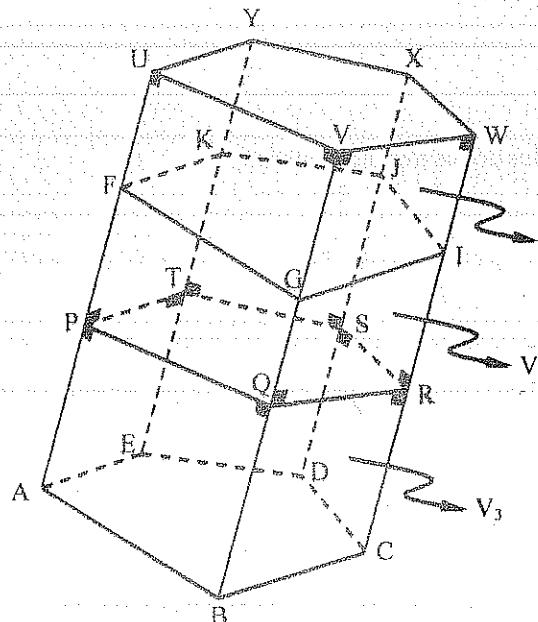
Dos sólidos son equivalentes si tienen el mismo volumen.

3.6.4. - Volumen de un Paralelepípedo Rectángulo

Es igual al producto de sus tres dimensiones.

3.6.5. - Equivalencia

Todo prisma oblicuo es equivalente a un recto que tenga por base la sección recta y por altura la arista lateral.



$$H) AF = PU = BG = QV = RW = CI = \dots$$

$$T) V_3 + V_1 = V_1 + V_2$$

$$D) AF = PU \quad \vee \quad AP = FU \\ BG = QV \quad \vee \quad QB = VG \\ CI = RW \quad \vee \quad CR = WI$$

$$ABCDE \cong FGHIK \dots$$

$$PQRST \cong UVWXY \dots$$

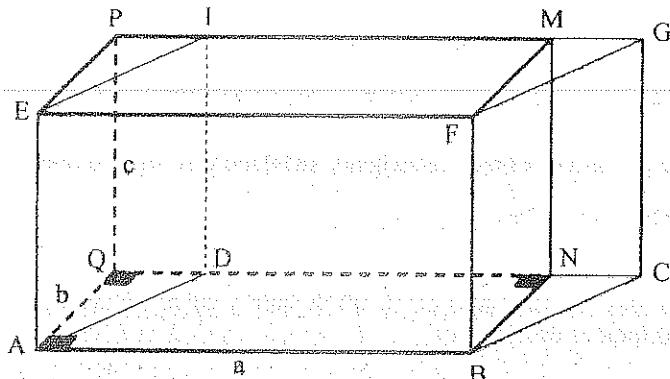
$$\therefore V_3 = V_2$$

$$\therefore V_1 + V_3 = V_2 + V_1$$

- Dos prismas rectos de igual base e igual altura son iguales

3.6.7. - El volumen de un Paralelepípedo recto

Es igual al producto de la base por la altura.



A - G Paralelepípedo Oblicuo.

P - B Paralelepípedo Rectángulo

$$V_{A-G} = V_{P-B}$$

$$V_{A-G} = a \times b \times c = S_{ABCD} \times c$$

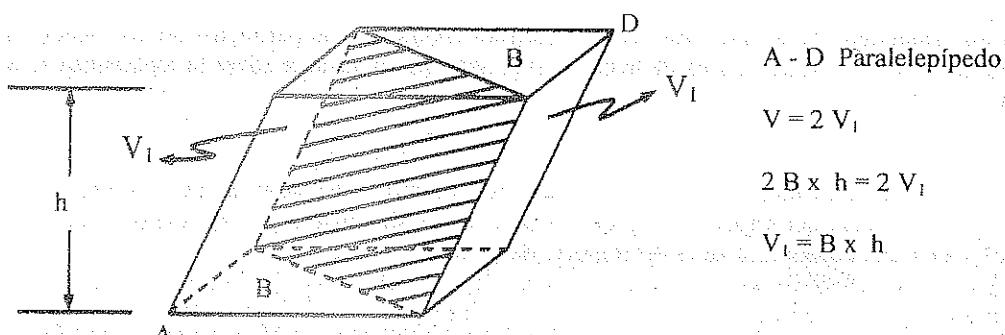
$$V_{A-G} = B \times h$$

3.6.8. - El volumen de un Paralelepípedo

Es igual al producto de su base por su altura.

3.6.9. - El volumen de un prisma triangular

Es igual al producto de su base por su altura.



A - D Paralelepípedo

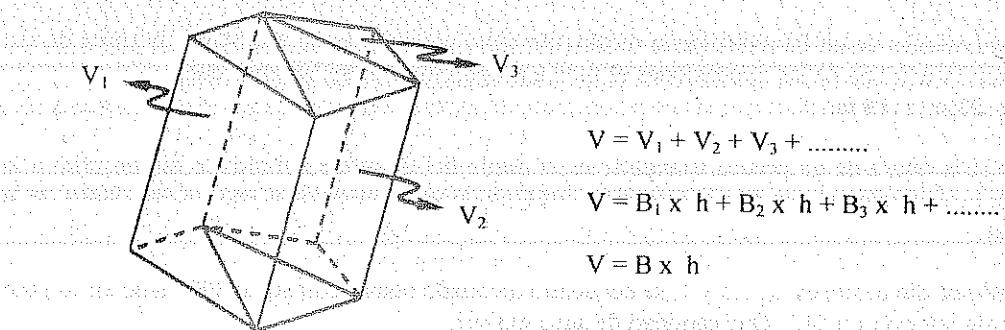
$$V = 2 V_1$$

$$2 B \times h = 2 V_1$$

$$V_1 = B \times h$$

3.6.10. - El volumen de un prisma

Es igual a la superficie de la base por su altura.



$$V = V_1 + V_2 + V_3 + \dots$$

$$V = B_1 \times h + B_2 \times h + B_3 \times h + \dots$$

$$V = B \times h$$

3.6.11. - El volumen de un prisma oblicuo

Es igual al producto de su sección recta por su arista lateral.

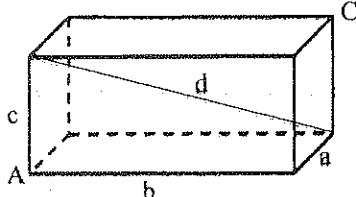
3.7. - EJERCICIOS

- Calcular las dimensiones de un paralelepípedo rectángulo cuya diagonal mide $3\sqrt{14}$, el largo es el doble del ancho y la altura es el triple del ancho.
Resp: 3; 6; 9.
- Calcular las aristas que concurren a un vértice de un paralelepípedo rectángulo, sabiendo que sus medidas son tres números enteros consecutivos y su diagonal es de $5\sqrt{2}$.
Resp: 4; 3; 5.
- ¿Cuánto mide la altura de un prisma recto?. Si la base es un rombo de 10 cm de lado y cuyas diagonales están en la relación de 3 : 4 y sabiendo que su área total es de 800 cm^2 .
Resp: 15.2 cm.
- El área total de un Cubo es de 216 m^2 . Calcular el área total de un prisma recto que tiene la misma base del Cubo y cuya altura es igual a la diagonal del Cubo.
Resp: 321.12 m^2 .
- El número que mide en metros la diagonal de un Cubo es igual al número que representa el área, en metros cuadrados, de un triángulo que tiene un vértice en el centro de una de las caras del cubo y por lado opuesto la diagonal de la cara opuesta. Hallar el área total del cubo.
Resp: 36 m^2 .
- Se tiene un prisma triangular recto cuya base es un triángulo rectángulo de perímetro 36 m, siendo la superficie de esta base 54 m^2 . Hallar el área de la cara del prisma que se levanta sobre la hipotenusa si la altura es de 10m.
Resp: 150 m^2 .
- Hallar el volumen de un prisma recto, cuya base es un trapecio isósceles y los lados iguales forman con el mayor ángulos de 45° , la altura del trapecio es igual a la base menor del mismo y el perímetro mide 68.2 cm. La altura del prisma es el cuádruplo de la del trapecio de la base.
Resp: 8000 cm^3 .
- Un prisma tiene por base un rombo de 10 cm de lado y cuyas diagonales están en la relación de 3 : 4. Su área total es de 800 cm^2 . Calcular su volumen. (PRISMA RECTO)
Resp: 1459.2 cm^3 .
- El volumen de un prisma hexagonal regular es de 2076 cm^3 y su área lateral 480 cm^2 . Calcular el lado de la base y la altura del prisma.
Resp: 10 cm ; 8 cm.
- Calcular las dimensiones de un Paralelepípedo rectángulo cuyo volumen es de 13824 m^3 , la suma de sus tres dimensiones 74 m y una de las dimensiones es media proporcional entre las otras dos.
Resp: 24 m ; 32 m ; 18 m.
- Demostrar que si la altura de un prisma triangular es el duplo del diámetro del círculo circunscrito a la base, el prisma es equivalente a un paralelepípedo rectángulo cuyas dimensiones son los tres lados de la base del prisma.
- Un paralelepípedo de dimensiones; 2, 1.5 y 1, se encuentra inclinado respecto al suelo 30° , tiene un orificio de salida al borde inferior a 0.58. ¿Qué cantidad de agua existe?
Resp: 0.29
- La base de un prisma oblicuo es un triángulo cuyos lados son 15, 16 y 17; la sección recta es un triángulo de lados 13, 14 y 15. Hallar el área lateral, área total y volumen si su arista lateral es de 50.
Resp: 2100 ; 2319.96 ; 4200.

14. - Calcular el área total de un paralelepípedo rectángulo si el área de la base es de 80, las sumas de las aristas laterales 20 y el cuadrado de la diagonal del paralelepípedo 189.
Resp: 340.
15. - Calcular el área total de un paralelepípedo rectángulo cuya área de la base es 60 m^2 , la de una cara lateral 20 m^2 y la de un plano diagonal 50 m^2 .
Resp: 256 m^2 .
16. - El área total de un paralelepípedo rectángulo es de 180 m^2 , la diagonal de la base es de 10 m y la suma de sus tres dimensiones 17 m . Calcular el valor de sus aristas.
Resp: 8m ; 6m ; 3m .
17. - El área total de un prisma recto es de $180\sqrt{3}$ y su altura de $9\sqrt{3}$. ¿Cuánto medirá el apotema de la base que es un triángulo equilátero.
Resp: $3\sqrt{3}$.
18. - Un paralelepípedo tiene por dimensiones 1.2, 0.8 y 0.45. Si en el aire pesa 500 Kg. ¿Cuánto pesará sumergido en el agua?
Resp: 68 Kg.
19. - El volumen de un prisma es de 1812 cm^3 y su altura 15 cm. ¿Cuántas caras tiene el prisma sabiendo que la base es un polígono regular que mide 5 cm de lado y 6.04 cm de apotema?
Resp: 8
20. - Un prisma recto de 40 cm de altura tiene por base un cuadrilátero inscrito que se descompone por una de sus diagonales en un triángulo equilátero de 12 cm de lado y otro isósceles. Calcular el volumen del prisma.
Resp: 3326 cm^3 .
21. - Un paralelepípedo rectángulo tiene un volumen de 60 m^3 , la suma de todas sus aristas es de 48 m y su área lateral de 70 m^2 . Determinar sus tres dimensiones.
Resp: 3 m ; 4 m ; 5 m .
22. - El área lateral de un prisma regular es de 450 m^2 y el apotema de la base mide 7m. Calcular su volumen.
Resp: 1575 m^3 .
23. - El área lateral de un prisma recto excede en 119 cm^2 al área lateral de otro prisma semejante. Si un par de aristas homólogas de la base están en la razón 3 : 4. Hallar el área lateral del primer prisma.
Resp: 272 cm^2 .
24. - Calcular el volumen de un prisma recto, cuya base es un rombo de 10 cm de lado y cuyas diagonales están en la razón 3 : 4 y la altura del prisma es igual a la semisuma de estas diagonales.
Resp: 1344 cm^3 .
25. - Un cubo de madera de 12 cm de arista flota en el agua por una de sus caras ($\delta=0.25$). Calcular la superficie mojada, la superficie seca y la cantidad de agua que desaloja.
Resp: 288 cm^2 ; 576 cm^2 ; 432 cm^3 .
26. - Se tiene un estanque de forma prismática hexagonal regular lleno de agua. Este se comunica con otro estanque de mayor capacidad, más bajo que aquel y de forma prismática cuadrangular regular. El conducto que los une da un caudal de 2.5 lt/s. Hallar el tiempo que tardará en vaciarse el primer estanque. La altura que alcanzará el agua en el segundo estanque, suponiéndolo vacío al principio. Lado del hexágono 7.5m, la altura del prisma 2.1 m, lado del cuadrado 26 m.
Resp: 34.1 s ; 0.454 m.
27. - Hallar en decímetros cuadrados, el área lateral de un prisma hexagonal de 70 cm de altura, cuyas aristas laterales forman ángulos de 60° con la base y siendo la sección recta un hexágono regular de $216\sqrt{3} \text{ cm}^2$ de superficie.
Resp: 581.96 cm^2 .

32

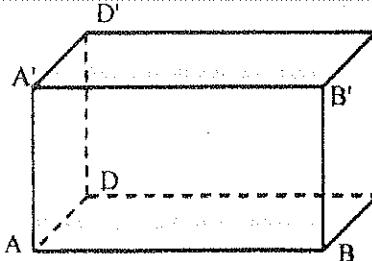
28.-



H) A - C Paralelepípedo rectángulo

$$T) d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

29.-



H) A - C' Paralelepípedo rectángulo

$$S_{ABCD} = 48 \text{ m}^2$$

$$S_{DD'C'C} = 42 \text{ m}^2$$

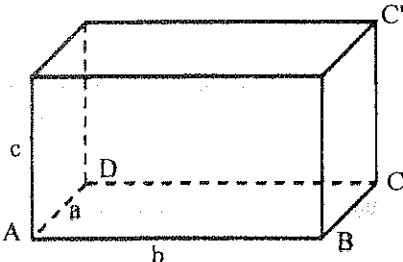
$$S_{AA'C'C} = 70 \text{ m}^2$$

$$T) S_L = ? \quad \text{Resp: } 196 \text{ m}^2$$

- 30.- Calcular el área total de un cubo cuya arista es igual a la diagonal de un paralelepípedo rectángulo de 1660 m² de área total y cuya suma de sus tres dimensiones es igual a 51 m.

Resp: 5646 m².

31.-



H) A - C' Paralelepípedo rectángulo

$$a + b + c = 12 \text{ cm}$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = 50 \text{ m}^2$$

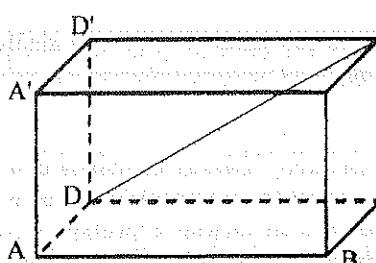
$$S_{ABCD} = 12 \text{ m}^2$$

$$T) S_T = ? \quad \text{Resp: } 94 \text{ m}^2$$

- 32.- Todas las caras de un paralelepípedo son rombos de lado 4 cm y ángulo agudo 60°. Determinar el volumen del Paralelepípedo.

Resp: 52.25 cm³.

33.-



H) A - C' Paralelepípedo recto

$$AC' = \sqrt{33} \text{ cm}$$

$$BD' = 9 \text{ cm}$$

$$AA' = 4 \text{ cm}$$

$$\text{Perímetro de la base} = 18 \text{ cm.}$$

$$T) S_T = ? ; V = ? \quad \text{Resp: } 32 \text{ cm}^2 ; 88 \text{ cm}^3$$

- 34.- Demostrar que en todo paralelepípedo la suma de los cuadrados de las cuatro diagonales es igual a la suma de los cuadrados de las doce aristas.

- 35.- En un prisma hexagonal regular la diagonal mayor de longitud 5 cm forma un ángulo de 30° con la arista lateral del prisma. Determinar el volumen del prisma.

Resp: 142.61 cm³.

36. - La altura de un prisma recto es de 1 m, su base es un rombo de lado 2 m y ángulo agudo 30° . Por un lado de la base se ha trazado un plano que corta al prisma y esta inclinado 60° respecto de la base. Hallar el área de la sección.

Resp: $\frac{4}{\sqrt{3}} \text{ m}^2$.

37. - Calcular el área total de un prisma hexagonal regular de $10\sqrt{3}$ m de lado en la base, si la base tiene un círculo circunscrito de radio igual a la altura del prisma.

Resp: 3358.84 m^2 .

38. - El área total de un paralelepípedo rectángulo de 4 m de altura es cuatro veces el área de una de las superficies diagonales correspondientes a una de las aristas laterales y el área de esta superficie diagonal es los $5/6$ de la suma de las áreas de las bases. Calcular el área del paralelepípedo.

Resp: 80 m^2 .

39. - Se tiene un recipiente lleno de agua, de forma de paralelepípedo rectángulo de 48 dm^2 de base y 15 cm de altura. Se introduce un prisma cuadrangular regular de hierro, de manera que se apoya por su base sobre el fondo del recipiente y se riegan 24 lt de agua. Después se saca y se vuelve a introducir el mismo prisma apoyándose en una de sus caras laterales, y se riegan 6 lt de agua que quedaba en el recipiente. Calcular en decímetros cúbicos el volumen del prisma de hierro.

Resp: 80 dm^3 .

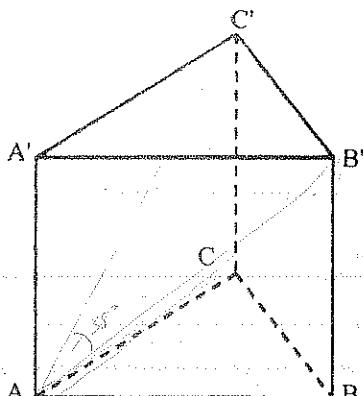
40. - La superficie total de un cubo es de 486 m^2 . Calcular en metros cuadrados el área total del prisma cuadrangular que resulta de cortar el cubo por un plano que pasa por un lado de la base y forma con esta un ángulo de 30° .

Resp: 405 m^2 .

41. - Por un punto tomado sobre la arista lateral de un prisma triangular regular con el lado de la base 10 cm se trazan dos planos. Uno de ellos pasa por un lado de la base inferior del prisma y forma un ángulo de 40° con la base; el otro pasa por el lado paralelo de la base superior y forma con ella un ángulo de 50° . Determinar el volumen del prisma y la suma de las áreas de las secciones así obtenidas.

Resp: 761.57 cm^3 ;

42. -



H) A - C' Prisma regular

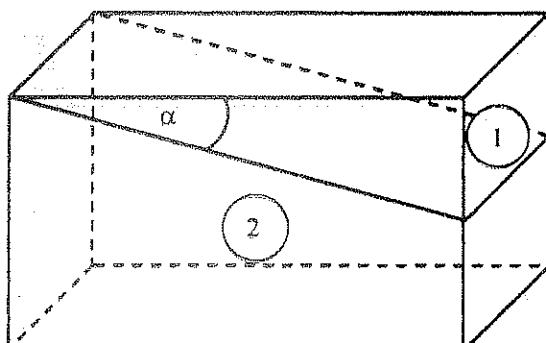
$V_{A-C'} = 200 \text{ m}^3$

$B'AC' = 38^\circ$

T) $AC = ?$

Resp: 7.34 m

43. -



T) a) Hallar α , tal que:

$S_l = S_T / 2$

Resp: 29.3°

b) Hallar α , tal que;

$V_l = V_T / 2$

Resp: 33.69°

44. - Hallar el área total de un tronco de prisma regular, cuya base es un cuadrado de lado 3 m. Las bases forman un ángulo de 45° y dos aristas laterales opuestas son de igual longitud, 8 m.
Resp: 117.73 m^2 .

45. - En un paralelepípedo rectángulo, la base mide 60 m^2 , la suma de todas sus aristas es 96 m y la suma de los cuadrados de sus tres dimensiones es de 200 m^2 . Calcular la altura del paralelepípedo.
Resp: 8 m.

46. - Se da un prisma recto en el cual un triángulo regular sirve de base. Por uno de los lados de la base inferior y por el vértice opuesto de la base superior se ha trazado un plano. El ángulo entre este plano y la base del prisma es igual a 70° y el plano de la sección del prisma es 333. Determinar el volumen del prisma.
Resp: 13.19 u^3 .

47. - Dado un paralelepípedo rectángulo ABCD - A'B'C'D', AB = 5; BC = 3; AA' = 4. Calcular la distancia mínima entre AB y B'D.

Resp: 3 u

48. - En un cubo de arista 2 m, se forma un triángulo prolongando las rectas que unen los puntos medios de seis aristas consecutivas y no situadas tres a tres en un plano. Determinar que dichas rectas están en un plano y hallar el área del triángulo.

$$\text{Resp: } \frac{9\sqrt{3}}{2} \text{ m}^2.$$

49. - Dado un prisma recto ABCD - A'B'C'D'

H) B'-D Prisma recto

$$AA' = 4 \text{ m}$$

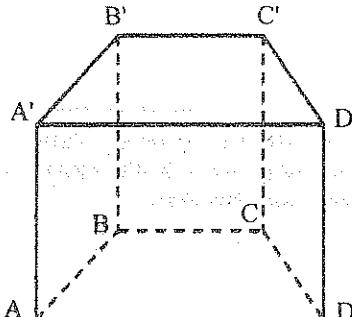
ABCD Trapecio Isósceles

Altura de ABCD = 3 m

$$AB = 6 \text{ m}; BC = 3 \text{ m}.$$

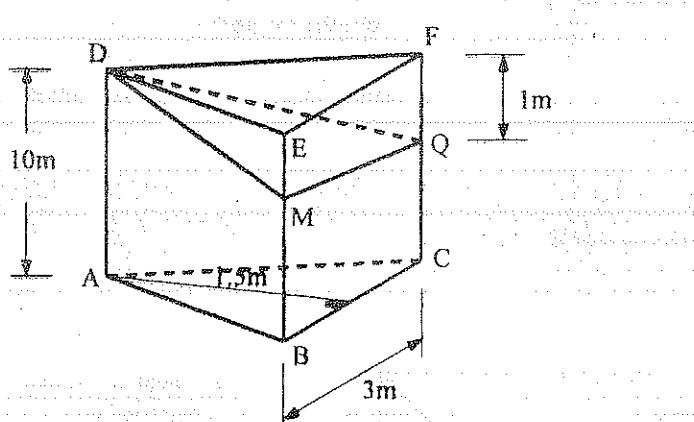
T) Determinar el ángulo y la distancia entre AA' y B'D

$$\text{Resp: } 65.37^\circ; 4.59 \text{ m}$$



50. - El volumen del tronco de prisma triangular recto de la figura es igual a 25 m^3 . Por el punto D se traza un plano paralelo a la base. Calcular la superficie del plano DMQF y el segmento EM.

Resp:



51. - Demostrar geométricamente la fórmula:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

52. - El área total de un prisma recto de base rectangular es de 144 m^2 , uno de los lados de la base es el doble del contiguo e igual a la altura. Hallar la diagonal del prisma.

Resp: 9 m.

53. - Calcular el volumen y aristas de un paralelepípedo rectángulo cuya área total es de 62 m^2 y cuyas dimensiones son proporcionales a 1, 1.5 y 2.5.

Resp: 30 m^3 ; 2 m ; 3 m ; 5 m.

54. - Calcular las dimensiones de un paralelepípedo rectángulo sabiendo que están en progresión aritmética, cuya suma es de 24 m y el área total es de 366 m^2 .

Resp: 5 m ; 8 m ; 11 m.

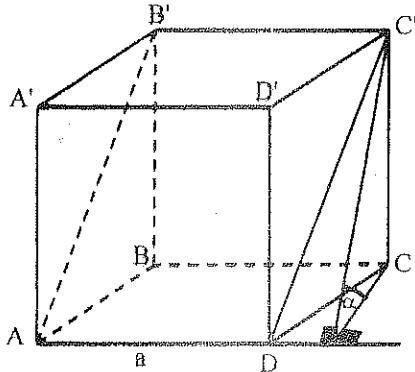
55. - En un cubo se da la distancia de una diagonal y arista no contigua que mide 4 m. Hallar el volumen del cuerpo.

Resp: 181.02 m^3

56. - Se corta un cubo de 125 cm de arista por un plano que pase por los puntos medios de las aristas no contiguas ni paralelas. Calcular el área de la sección resultante.

Resp: $(20297.5)/2 \text{ cm}^2$.

57. -



H) ABCD Rombo

ABCD - A'B'C'D' Prisma recto

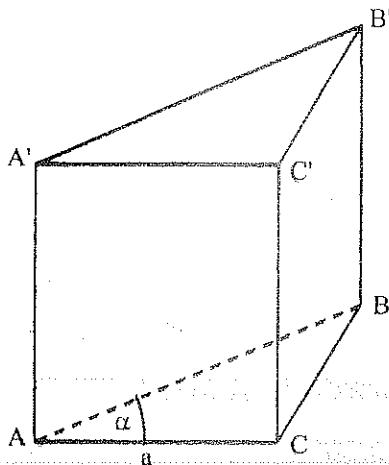
$$S_{\triangle ABCD} = 150 \text{ u}^2$$

$$\alpha = 70^\circ$$

T) Área lateral del paralelepípedo =?

Resp: 564.8 u^2

58. -



H) ABC - A'B'C' Prisma recto

$$AB = BC$$

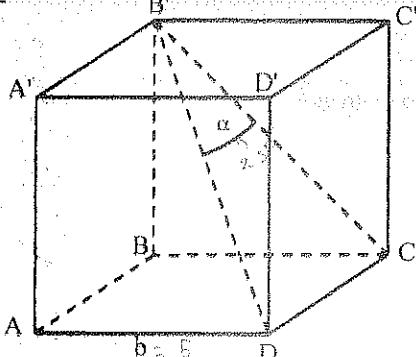
$$a = 10 \text{ u} ; \alpha = 70^\circ$$

Área lateral = Área de las dos bases.

T) V =?

Resp: 240.47 u^3

59. -



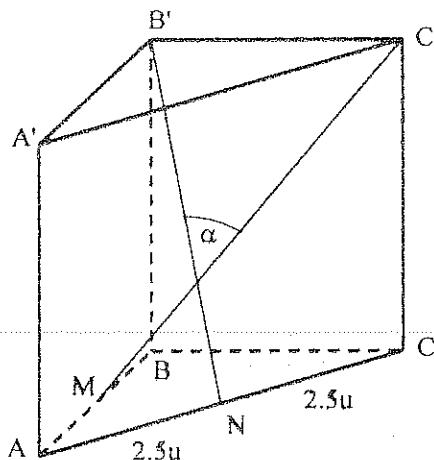
H) ABCD - A'B'C'D' Prisma cuadrangular regular

$$b = 5 \text{ u} ; \alpha = 25^\circ$$

T) V_{Prisma} =?

Resp: 237.13 u^3

60.-



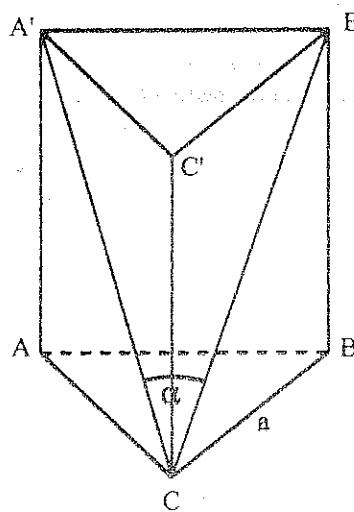
H) ABC - A'B'C' Prisma regular

$$AM = MB$$

$$\hat{\alpha} = 30^\circ$$

T) $V_{\text{Prisma}} = ?$ Resp: 149.64 u^3

61.-



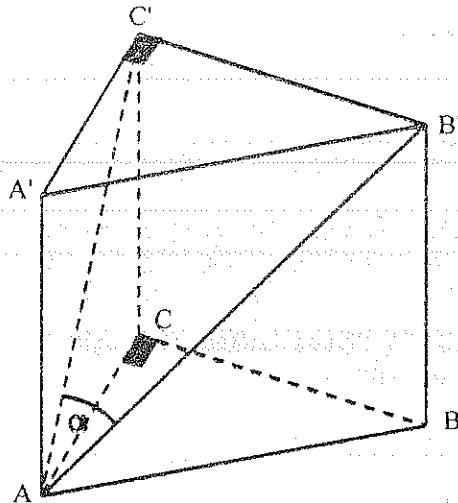
H) ABC - A'B'C' Prisma regular

$$a = 5 \text{ u} ; \hat{\alpha} = 30^\circ$$

T) Área Lateral =?

Resp: 123.9 u^2

62.-



H) ABC - A'B'C' Prisma recto

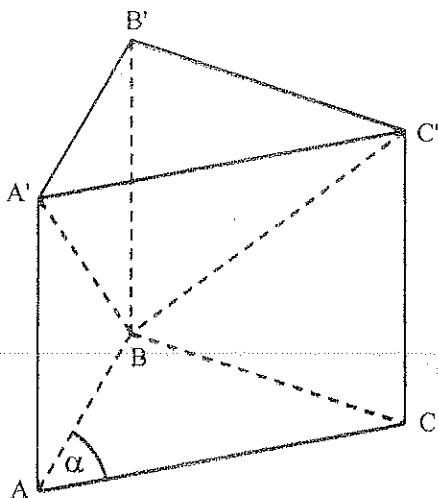
$$\hat{CAB} = 30^\circ$$

$$AC = 5 \text{ u}$$

$$\hat{\alpha} = 20^\circ$$

T) $V_{\text{Prisma}} = ?$ Resp: 44.136 u^3

63.-

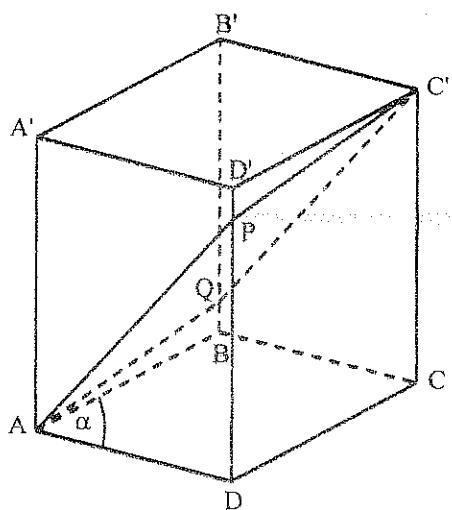


- H) ABC - A'B'C' Prisma recto
 $AB = BC = 10 \text{ u}$
 $\hat{\alpha} = 70^\circ$
 Ángulo entre ABC y A'BC' = 40°

T) Área Lateral del Prisma =?
 $V_{B-ACCA'} = ?$

Resp: 211.63 u^2 ; 163.26 u^3

64.-



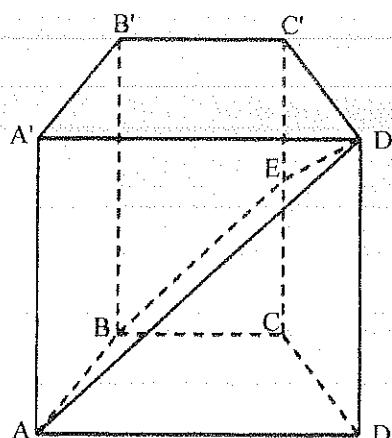
- H) ABCD - A'B'C'D' Prisma recto
 $\square ABCD$ es rombo
 $\square APC'Q$ es rombo
 $\hat{\alpha} = 60^\circ$

$$\hat{PAQ} = \frac{\hat{\alpha}}{2}$$

T) $S_{\square APC'Q} = ?$

Resp: 10 u^2

65.-

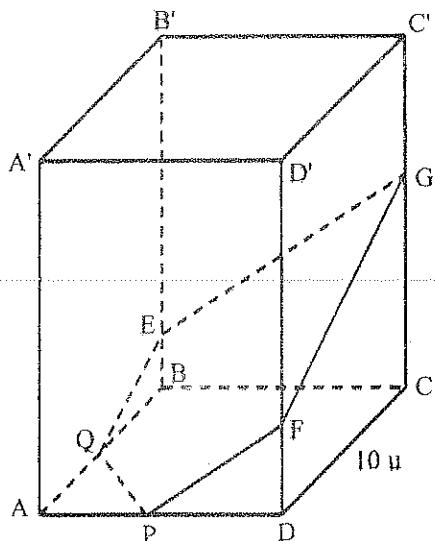


- H) ABCD - A'B'C'D' Prisma recto
 Ángulo entre ABCD y ABED' = 70°
 $r = 10 \text{ u}$ de ABCD

T) Área de la sección =?
 Área lateral = ?

Resp: 1520.38 u^2 ; 9360 u^3

66.-

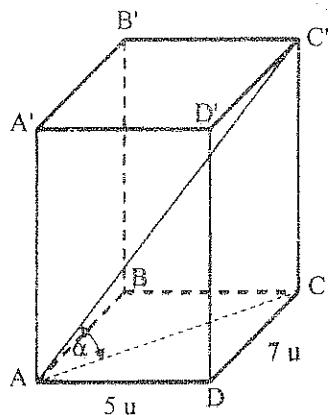


- H) ABCD - A'B'C'D' Prisma regular
 $AP = PD$
 $AQ = AB/3$
 Angulo entre PFGEQ y ABCD = 50°

T) Area de la sección =?

Resp: **142.61 u²**

67.-

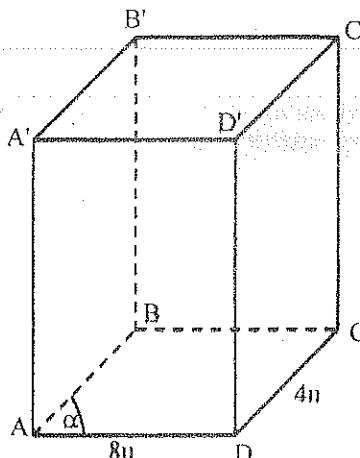


- H) A - C' Paralelepípedo rectángulo
 $\hat{\alpha} = 40^\circ$

T) $S_L = ?$

Resp: **173.23 u**

68.-

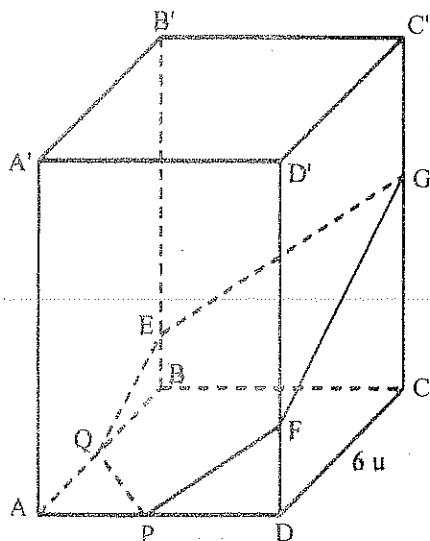


- H) A - C' Paralelepípedo recto
 $AC = B'D$
 $\hat{\alpha} = 40^\circ$

T) $V_{A-C} = ?$

Resp: **203.68 u³**

69.-

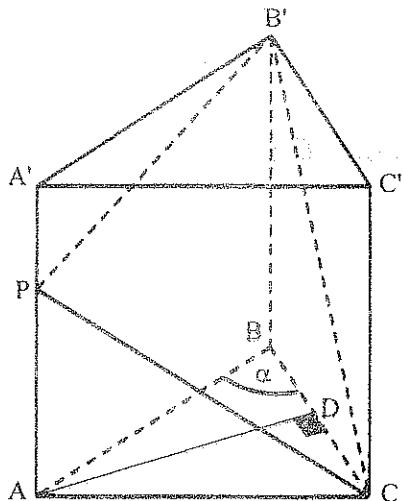


- H) A - C' Prisma regular
 P punto medio de AD
 Q punto medio de AB
 Angulo entre PQEGF y ABCD = 60°

T) Area de la sección =?

Resp: 53.13 u^2

70.-

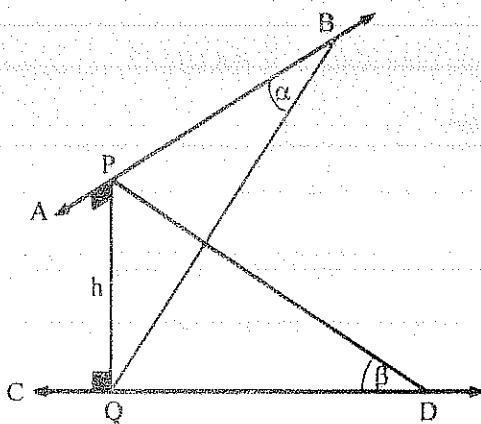


- H) ABC - A'B'C' Prisma recto
 AB = AC
 Angulo entre PB'C y ABC = 40°
 $\hat{\alpha} = 70^\circ$
 Plano PB'C ψ AD
 $S_L = 430 \text{ u}^2$

T) Area de la sección =?

Resp: 117.1 u^2

71.-

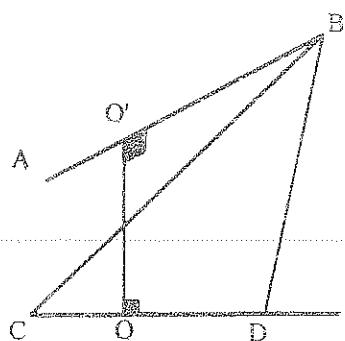


- H) AB y CD se cruzan formando un ángulo de 70°
 $h = 10 \text{ u}$
 $\hat{\alpha} = \hat{\beta} = 45^\circ$

T) BD =?

Resp: 14.1 u

72.-

H) \overline{AB} y \overline{CD} se cruzan y forman un ángulo de 35°

$$AB = 10 \text{ u}$$

$$CD = 8 \text{ u}$$

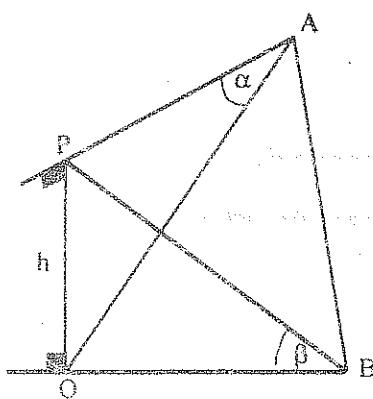
$$OO' = 5 \text{ u}$$

$$\frac{AO}{OB} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{CO'}{O'D} = \frac{3}{2}$$

T) $BD = ?$ $BC = ?$ Resp: 31.53 u ; 57.27 u .

73.-



H) AP y QB se cruzan

$$h = 7 \text{ u}$$

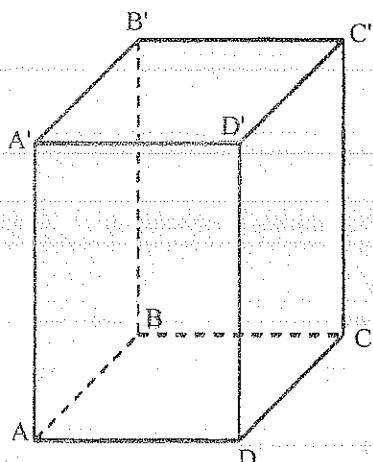
$$\hat{\alpha} = 30^\circ$$

$$\hat{\beta} = 50^\circ$$

T) Angulo entre PQ y AB =?

Resp: 62.54°

74.-



H) A - C' Paralelepípedo recto

$$AD' = A'D = 9 \text{ u}$$

$$AB = 7 \text{ u}$$

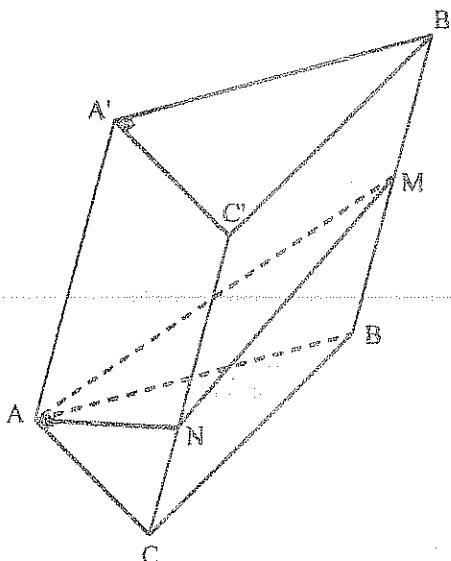
$$AC = 13 \text{ u}$$

$$BD = 11 \text{ u}$$

T) Angulo entre AA'B'B y AA'D'D =?

Resp: 90°

75.-



H) ABC - A'B'C' Prisma oblicuo

$$\text{Altura} = 7 \text{ u}$$

$$AM = AN = 5 \text{ u}$$

$$BM + NC = 7.5 \text{ u}$$

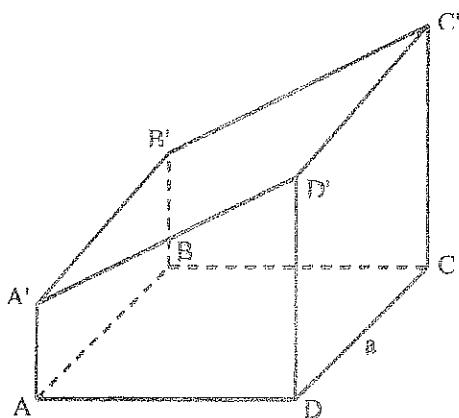
T) a) $BM = ? ; CN = ?$

$$b) V_{ABC-A'B'C'} = ?$$

$$c) AA' = ?$$

Resp: 2.5 u ; 5 u ; 138.34 u³ ; 12.78 u.

76.-



H) A - C' Tronco de prisma regular

$$a = 3 \text{ u}$$

Ángulo entre las bases = 40°

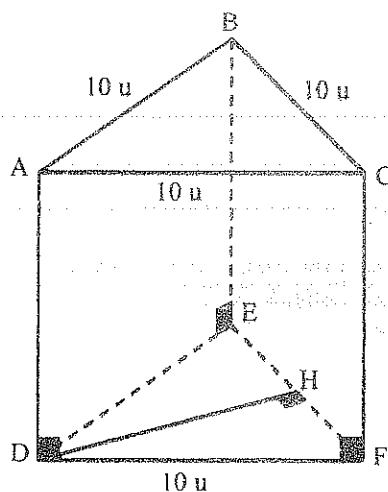
$$BB' = DD' = 8 \text{ u}$$

T) $AA' = ?$

$$CC' = ?$$

Resp: 5.49 u; 10.51 u.

77.-

T) Distancia mínima entre \overline{DH} y \overline{BF}

Resp:

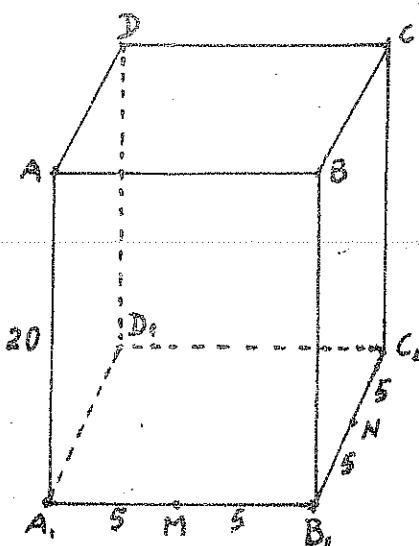
78.- En un prisma triangular regular la arista de la base es 10 u, la diagonal de una cara lateral forma un ángulo de 35° con la otra cara lateral. Calcular; S_L , S_T , y V .

Resp: 339,3 ; 425,9 ; 484,12

79.- Calcular el volumen de un prisma pentagonal regular si: $S_L = 300u^2$ y $S_B = 100u^2$.

Resp: $784,3u^3$

80.-



H) $A_1 - C$ paralelepípedo recto
 $A_1 B_1 C_1 D_1$ cuadrado de lado 10u

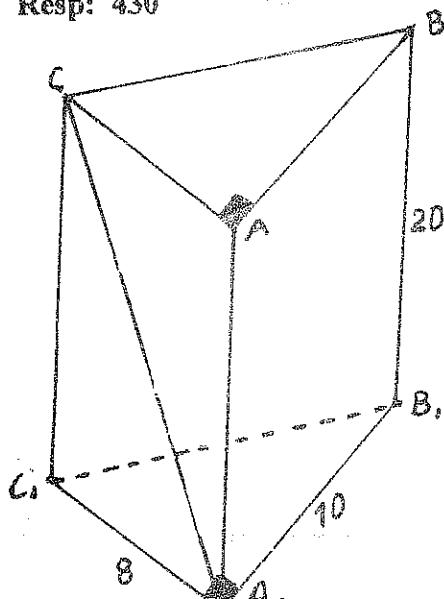
- T) a) Dibujar la sección que determina el plano DMN
 b) Hallar el ángulo diedro entre la sección y la base del paralelepípedo
 c) Hallar el volumen de cada una de las partes determinadas por la sección

Resp: 62.02°

81.- Un prisma pentagonal regular tiene de área lateral 250 m^2 y de área total 336 m^2 . Hallar su volumen.

Resp: 430

82.-

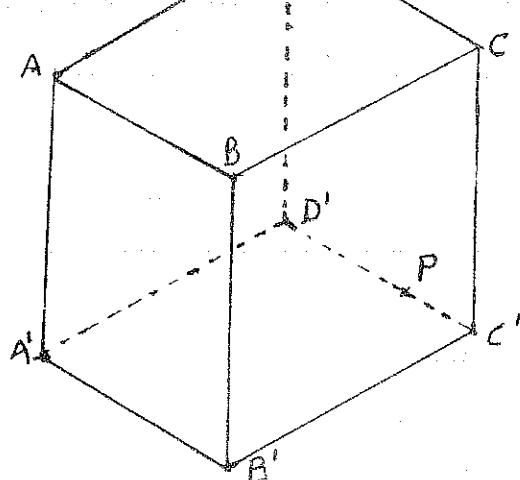


H) ABC - $A_1 B_1 C_1$ Prisma recto

- T) Hallar la medida del ángulo entre la recta CA_1 y la cara CBB_1C_1

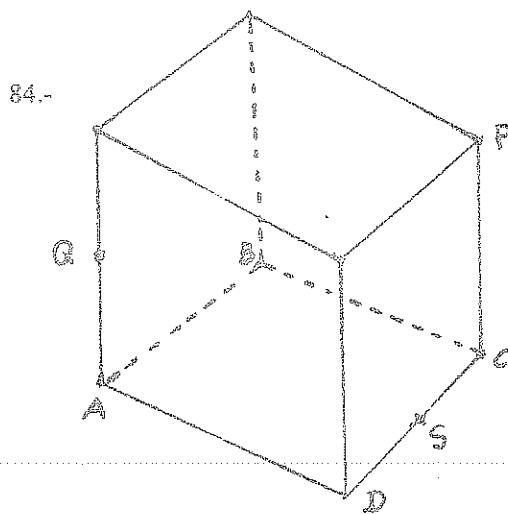
Resp: 16.79°

83.-



En el cubo de arista 10m. $D_1P = 1,5 PC_1$.
 Hallar el ángulo entre el triángulo APC y el cuadrado $A_1 B_1 C_1 D_1$.

Resp: 81.9°

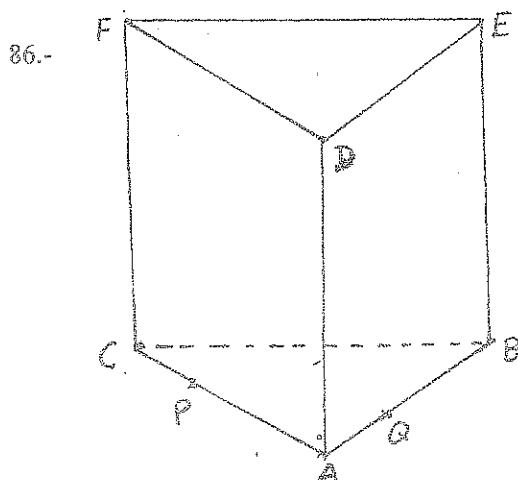


- H) Q y S son puntos medios
A - P cubo de arista 10u.

- T) - Dibujar la sección que pasa por PQS
- Hallar el ángulo entre la sección y la base ABCD.

Resp:

- 85.- En un prisma octogonal regular, su área total mide $500\sqrt{2} \text{ m}^2$, y su área lateral mide $428\sqrt{2} \text{ m}^2$. Hallar su volumen. Resp. 1185.67

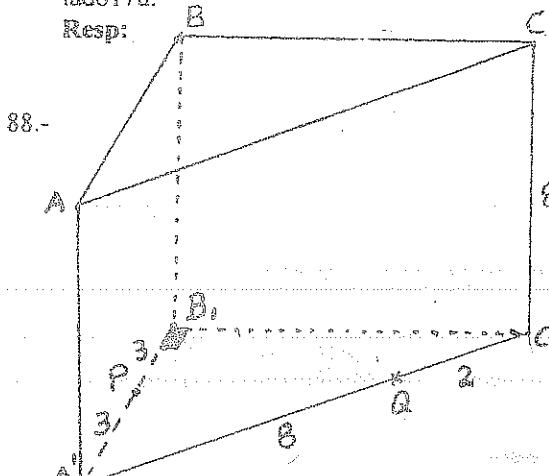


- H) ABC - DEF prisma regular
CP = 3u; QB = 7u; BC = 10u
CF = 12u

- T) a) Trazar la sección que pase por P, Q, E.
b) Encontrar el ángulo entre la sección y el plano ABC.

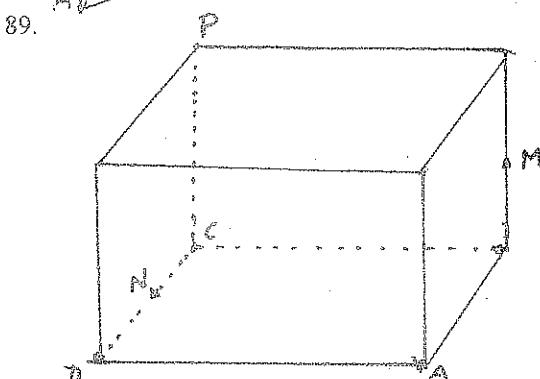
Resp: 59.83

- 87.- Calcular el volumen de un paralelepípedo oblicuo si la base es un rombo de lado 10u, y superficie $96u^2$; una de las caras laterales es un paralelogramo de superficie $168 u^2$ y lado 17u.



- 8) Hallar el área de la sección que determina el plano PQR en el prisma recto y el ángulo que forma la sección la sección y la base del prisma.

Resp: 42.39,70.14



- H) M y N puntos medios
A-P cubo de arista 10u

- T) Dibujar la sección que pasa por MPN
Hallar el ángulo entre la sección y el plano ABCD

Resp: 64.12

90. Se tiene un prisma pentagonal regular, cuya área lateral es $50u^2$, el área total es $60u^2$.

Encontrar su volumen.

Resp.: 29.33

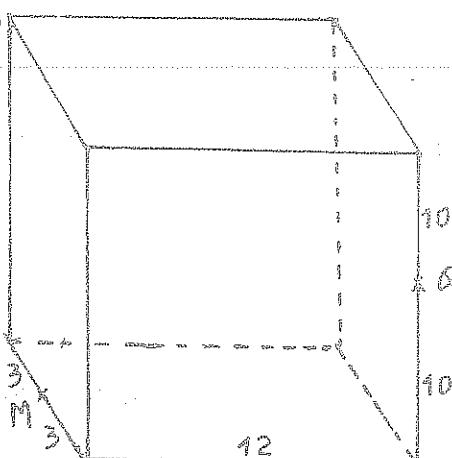
91. En un prisma triangular regular, la arista de la base es $15u$, la diagonal de una cara lateral forma un ángulo de 30° con otra cara lateral. Calcular el volumen.

Resp.: $2066.8 u^3$

92. La diagonal de un paralelepípedo rectangular es de $10u$ y forma con una cara lateral un ángulo de 35° y con la otra cara lateral un ángulo de 45° . Calcular el área lateral del paralelepípedo.

Resp.: $105.73 u^2$

93.



H) El sólido es un paralelepípedo rectángulo.

T) Dibujar la sección que pasa por PMQ y calcular el valor del ángulo entre la sección y la cara ABCD

Resp: 63.7°

94. El área total de un prisma octogonal regular es de $400m^2$ y el área lateral es de $300 m^2$.

Hallar el volumen.

Resp: $582.67 m^3$

95. Por la arista $BC = 10 u$. de la base inferior de un prisma triangular regular se traza un plano que forma un ángulo de 77° con la base del prisma y pasa por el vértice opuesto de la base superior. Hallar el área de la sección y el volumen del prisma.

Resp: $1624.26 u^2; 142.42 u^3$

96. Calcular el volumen de un prisma octogonal regular de apotema $5m$ y área lateral $500m^2$

Resp: $1250.10 u^3$

97. En un prisma triangular regular de arista en la base $5m$ y de altura $10m$, se traza un plano que pasa por una arista de la base y forma un ángulo de 50° con la base. Hallar el área de la sección, el área total y el volumen del prisma.

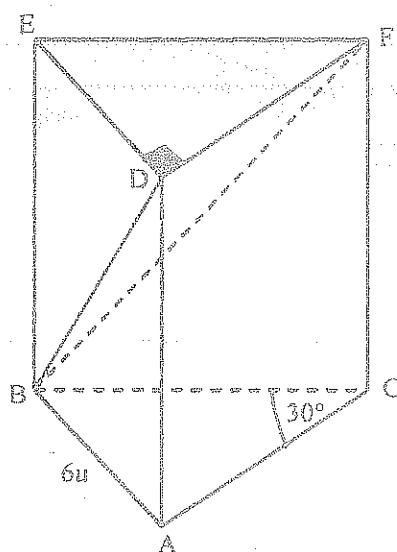
Resp: $16.8; 171.6; 108 u^3$

98. En un prisma triangular regular ABC-DEF de volumen $90m^3$, se construye un plano que pasa por el vértice D, por M, punto medio de BE y por L, punto medio de CF. Hallar el volumen del sólido ABC-DML.

H) ABC - DEF Prisma recto
 $DBP = 40^\circ$

T) $V_{PRISMA} = ?$

Resp: $291.10 u^3$

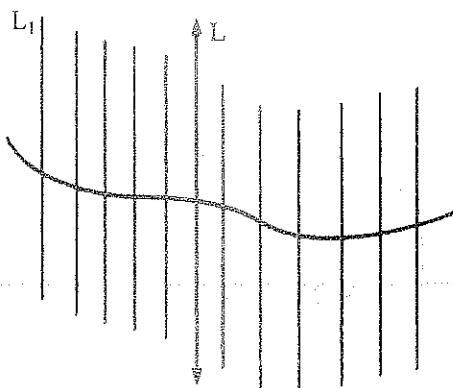


UNDAD 4

4. - CILINDROS

4.1. - SUPERFICIE CILINDRICA

Es la superficie engendrada por una recta, que se mueve paralelamente a una dirección dada apoyándose sobre una línea curva.



EJE: Dirección dada L

DIRECTRIZ: Línea curva

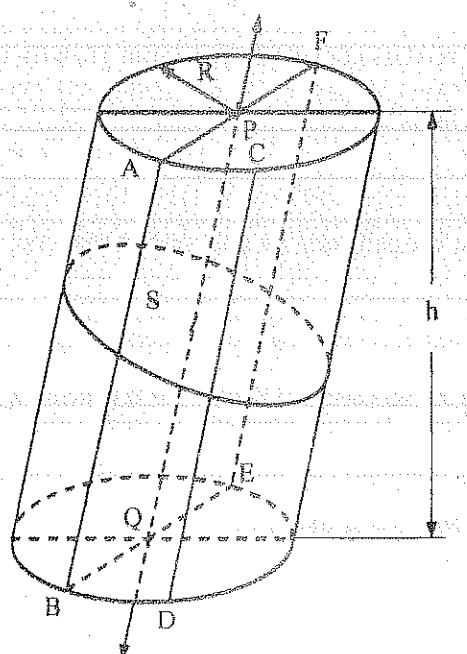
GENERATRIZ: L_1

4.2. - CILINDRO CIRCULAR

4.2.1. - DEFINICIÓN

Es el sólido geométrico limitado por una superficie cilíndrica y dos superficies circulares localizadas en planos paralelos.

4.3. - ELEMENTOS



卷之三

GENERATRIZ: AB, CD, g

DIRECTRIZ: O(O, R)

BASES: $\Theta(P \cdot R) \vee \Theta(O \cdot R)$

ALTIURA: h. perpendicular común a las bases.

AREA LATERAL: Es el área de la superficie cilíndrica.

AREA TOTAL: Área Lateral más el área de las bases.

SECCIÓN RECTA: Es la sección

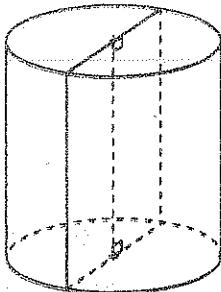
perpendicular a todas las generatrices.

SECCION AXIAL: Es la sección que

4.4.- CLASIFICACION

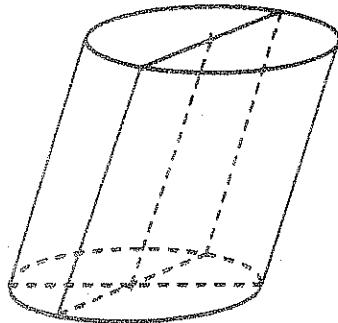
4.4.1.- CILINDRO CIRCULAR RECTO O DE REVOLUCION

Si el eje es perpendicular a las bases.



4.4.2.- CILINDRO CIRCULAR OBCLICO

Si el eje no es perpendicular a las bases.



4.5.- PROPIEDADES

4.5.1.- En todo cilindro circular se puede inscribir y circunscribir prismas que tengan por aristas laterales las generatrices del cilindro y por bases, polígonos inscritos y circunscritos a las bases. Por consiguiente se puede considerar al cilindro circular como un prisma de infinito número de caras.

4.5.2.- El área lateral de un cilindro circular es igual al producto del perímetro de una sección recta por la generatriz.

$$S_L = P_{S.R.} \cdot g$$

4.5.3.- El área lateral del cilindro de revolución es igual al producto del perímetro de la base por la generatriz.

$$S_L = P_B \cdot g = 2\pi R g.$$

4.5.4.- El volumen de un cilindro circular es igual al producto de su base por su altura.

$$V = S_B \cdot h = \pi R^2 h$$

4.5.5. - Dos cilindros circulares rectos son semejantes si son engendrados por rectángulos semejantes.

4.5.6. - Las áreas laterales o totales de dos cilindros circulares rectos semejantes son, entre sí, como los cuadrados de sus lados homólogos, y sus volúmenes como el cubo de sus lados homólogos.

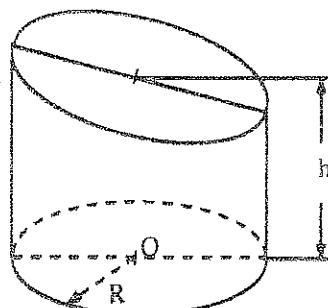
$$\frac{S_{L_1}}{S_{L_2}} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{g_1^2}{g_2^2} = \dots$$

$$\frac{S_{T_1}}{S_{T_2}} = \frac{R_1^2}{R_2^2} = \frac{g_1^2}{g_2^2} = \dots$$

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{R_1^3}{R_2^3} = \frac{g_1^3}{g_2^3} = \dots$$

4.6. - TRONCO DE CILINDRO CIRCULAR RECTO

Es la parte de un cilindro de revolución obtenida al construir una sección oblicua al eje del cilindro.



4.6.1. - AREA LATERAL

El área lateral es igual al perímetro del círculo de la base por el eje.

$$S_L = 2\pi R \cdot h$$

4.6.2. - VOLUMEN

Es igual a la superficie de la base por el eje.

$$V = \pi R^2 \cdot h$$

4.7. - RELACION PRISMA - CILINDRO CIRCULAR

4.7.1. - CILINDRO DE REVOLUCION INSCRITO EN UN PRISMA

La superficie lateral es tangente a las caras laterales.

Las bases son círculos inscritos en las bases del prisma.

Son de la misma altura.

4.7.1. - CILINDRO DE REVOLUCION CIRCUNSCRITO A UN PRISMA RECTO

Las bases del prisma son polígonos inscritos en las bases del cilindro.

Son de la misma altura.

4.8. - EJERCICIOS.

1. - En un cilindro de revolución, demostrar que el volumen cumple:

$$V = \sqrt{\frac{S_L^2(S_T - S_L)}{8\pi}}$$

2. - La altura h de un cilindro de revolución es igual al diámetro del círculo de la base. Un punto del círculo superior está unido con otro del círculo inferior; la recta que une estos puntos forma con el plano de la base del cilindro el ángulo α . Determinar la distancia más corta entre dicha recta y el eje del cilindro.

Resp: $\frac{h}{2} \operatorname{Cosec} \alpha \sqrt{1 - \operatorname{Cos}^2 \alpha}$

3. - Si S es el área lateral de un cilindro de revolución cuyo radio de la base es R , demostrar que su volumen es igual a:

$$V = \frac{S \times R}{2}$$

4. - Dos cilindros de revolución semejantes tienen áreas totales de $18\pi \text{ cm}^2$ y $50\pi \text{ cm}^2$ respectivamente. ¿En qué relación están sus volúmenes?. Resp: 27/125.

5. - El desarrollo de la superficie curva de un cilindro de revolución es un rectángulo de diagonal d y forma un ángulo α con la base. Determinar el volumen del cilindro.

Resp: $\frac{d^3 \operatorname{Cos}^2 \alpha \times \operatorname{Sen} \alpha}{4\pi}$

6. - Calcular la superficie mojada de un cilindro de revolución de peso específico 0.6, $R = 10$ y $h = 20$, que flota horizontalmente en un recipiente que contiene agua. Resp: 1078.6 cm^2

7. - El desarrollo de la superficie lateral de un cilindro de revolución es un cuadrado de lado 10 cm. Hallar el volumen del cilindro. Resp: 79.58 cm^3 .

8. - En un cilindro oblicuo se tiene que la generatriz forma un ángulo de 60° con la base, y la altura del cilindro es el doble del radio r de la sección recta.

Hallar el volumen en función de r . Resp: $\frac{8\sqrt{3} \pi r^3}{3}$.

9. - Tres recipientes A, B y C de forma cilíndrica de revolución y semejantes entre sí, contenían vino. La altura de A es de 6 dm, y su radio de 3 dm. Las alturas de los tres recipientes son proporcionales a los números 2, 3 y 5, los volúmenes de vino que contenían eran también proporcionales a dichos números. Se hizo un trasiego para que el vino alcanzara la misma altura en A, B y C y después de efectuado se pasaron 10 lt. de C a A; con lo que resultó que B tenía doble cantidad de vino que A. Se desea saber:

¿Qué cantidad de vino contenían A, B y C primitivamente?

¿Qué alturas?, en el caso anterior, alcanzaba el vino en los tres recipientes, expresadas en decímetros.

¿Qué cantidades de vino contenían A, B y C cuando se igualaron en sus alturas?

¿Qué longitud en decímetros, tenía esa altura única?

¿De qué manera se hizo el trasiego para conseguir la misma altura en los tres recipientes?

Resp: A 125 lt 0.54 m 80 lt

B 228 lt 0.36 m 180 lt.

C 380 lt 0.22 m 500 lt.

0.24 m.

72 lt de A a C

48 lt de B a C.

10. - Un recipiente de forma cilíndrica de revolución de dimensiones $R=10 \text{ m}$, $h = 20 \text{ m}$, contiene agua en una cantidad igual a los $3/5$ de su volumen total. ¿Qué nivel alcanza el agua si se encuentra dispuesto horizontalmente?. Resp: 11.8 m.

11. - En un cilindro de revolución de radio R y altura h, se inscribe un prisma hexagonal regular. Encontrar el valor de K, tal que; $K = \frac{V_{Cilindro}}{V_{Prisma}}$. Resp: 1.21

12. - En un cilindro de revolución está inscrito un prisma triangular regular. Hallar la relación de sus volúmenes. Resp: 2.42

13. - Se dispone de dos recipientes, un paralelepípedo rectangular y un cilindro de revolución abiertos en su parte superior. El paralelepípedo tiene por dimensiones 11 u, 11 u y 25 u, y contiene agua hasta una altura de 15 u. El cilindro tiene por dimensiones $R = 5$ u, $h = 20$ u. Se introduce progresivamente el cilindro en el paralelepípedo hasta que sus bases coincidan. Si el espesor es despreciable. Calcular:

- a) Se derramará agua hacia el exterior. ¿Cuánto?.
b) ¿Qué cantidad de agua se introduce en el cilindro?. Resp: $3.61 u^3$; $6.05 u^3$.

14. - Un cilindro de revolución contiene agua hasta la mitad de su altura, si se suelta una piedra, el agua sube 3.5 u. Si el radio del cilindro es 4 u. ¿Cuál es el volumen de la piedra?.
Resp: $176 u^3$.

15. - Al aumentar el radio de un cilindro de revolución de 2 m de altura, en 6 m, el volumen aumenta en x. Si la altura aumenta en 6 m el volumen aumenta en x. Calcular el radio de la base del cilindro.

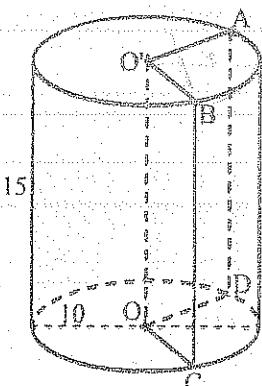
Resp: 6 m

16. - En un tronco de cilindro de revolución, el radio de la base es 15 u, las generatrices mayor y menor se diferencian en 12 u. Si el eje es 40 u. Calcular las generatrices mayor y menor, el Área lateral y el volumen.
Resp: $46 u$; $34 u$; $3768 u^2$; $28260 u^3$

17. - En un prisma pentagonal regular está circunscrito un cilindro de revolución. Calcular la relación entre sus volúmenes.
Resp: 1.32

18. - En un cilindro de revolución de dimensiones $R = 9$ u, $h = 18$ u, contiene agua hasta una altura de 10 u. Se introduce otro cilindro de revolución de dimensiones $R_1 = 7$ u y altura 15 u, abierto en su parte superior. Se derramará el agua, ¿Cuánto?. ¿Qué cantidad de agua se introduce en el cilindro?. Resp: $273.32 u^3$; $16341 u^3$.

19. -



H) $AO'B = 100^\circ$

T) $S(O'AB - ODC) = ?$ 229.8

V) $(O'AB - ODC) = ?$ 1309

S) $(O'AB - ODC) = ?$ 404.33

20. - El área lateral de un prisma regular es S, y el apotema de la base es a. Hallar el volumen del cilindro inscrito en el prisma. Resp:

21. - Calcular El volumen de un cilindro de revolución si el área total es de $140 u^2$ y la superficie de la base es de $20 u^2$.
Resp: $126 u^3$

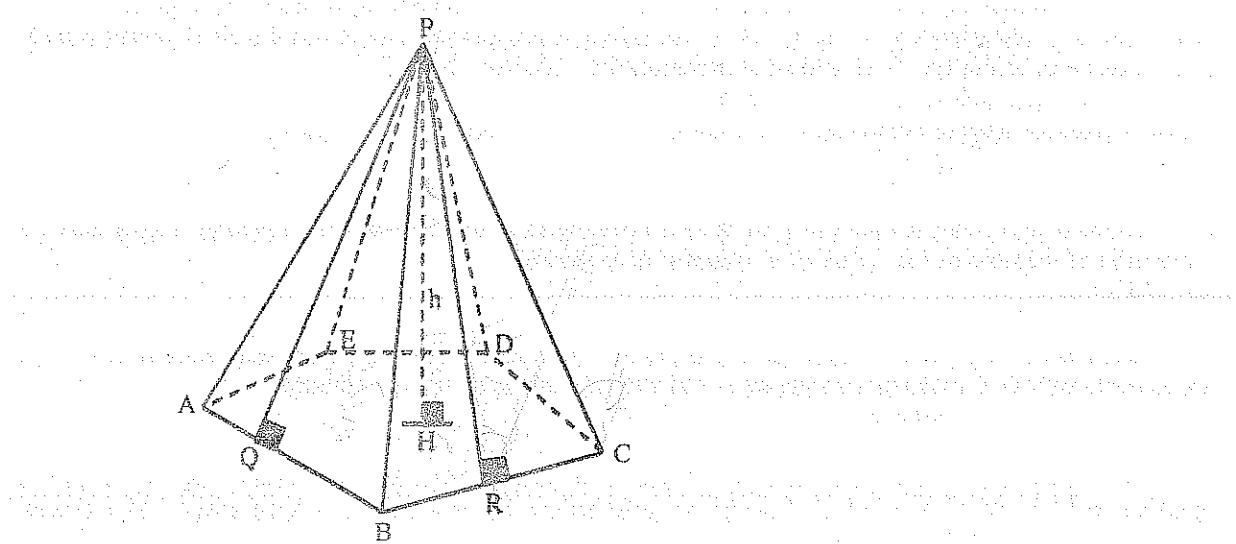
22. - En un cilindro de revolución de $R = 10$ u. y altura 50 u. está circunscrito un prisma pentagonal regular. Calcular el volumen comprendido entre el cilindro y el prisma. Resp: $2453.61 u^3$

5. - PIRAMIDES

5.1. - DEFINICIÓN

Es un sólido que se obtiene al cortar un ángulo poliedro con un plano que interseque a todas las aristas en puntos distintos del vértice.

5.2. - REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y ELEMENTOS



BASE: El Polígono ABCDE.....

VERTICE: El Punto P

CARAS LATERALES: Son los triángulos PAB, PBC, PCD,

ARISTAS LATERALES: Son los segmentos \overline{PA} , \overline{PB} , \overline{PC} ,

ALTURA: Es la longitud de la perpendicular trazada desde el vértice a la base: h

APOTEMA: Es la altura de una cara lateral: \overline{PQ} , \overline{PR} ,

AREA LATERAL: Es igual a la suma de las áreas de las caras laterales.

AREA TOTAL: Es igual al área lateral más el área de la base.

5.3. - DENOMINACIÓN

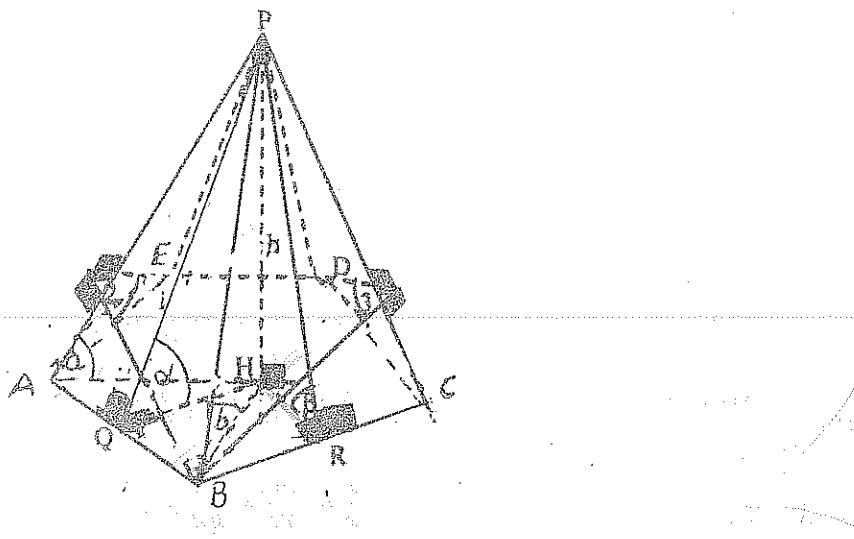
Por las letras del vértice y de la base. Pirámide P - ABCDE.....

5.4. - CLASIFICACIÓN

5.4.1. - Por la Forma de su Base

Triangular	La base es un triángulo
Cuadrangular	La base un cuadrilátero
Pentagonal	La base un Pentágono
Hexagonal	La base un Hexágono

5.4.2. - Regulares



- a) Base ABCDE..... polígono regular
 b) Las aristas laterales son congruentes
 $PA = PB = PC = \dots$
 c) Las apotemas son congruentes
 $PQ = PR = \dots$
 d) El pie de la altura h coincide con el centro de la base
 e) Los ángulos diedros en la base son congruentes

$$\hat{\alpha} = \hat{\beta} = \dots = \text{arcCos}\left(\frac{S_B}{S_L}\right), \text{ donde: } S_B = \text{Superficie de la base}, S_L = \text{Superficie lateral}$$

$$\begin{aligned} S_{\Delta APB} \cdot \text{Cos}\alpha &= S_{\Delta AHB} \\ S_{\Delta PBC} \cdot \text{Cos}\beta &= S_{\Delta BHG} \\ S_{\Delta CPD} \cdot \text{Cos}\omega &= S_{\Delta CHD} \end{aligned}$$

$$S_L \cdot \text{Cos}\alpha = S_B$$

- f) Los ángulos diedros entre las caras laterales son congruentes
 $\hat{2} = \hat{3} = \dots$
 g) Los ángulos formados entre las aristas laterales y la base son congruentes
 $\hat{a} = \hat{b} = \dots$

- h) El área lateral es igual al semiperímetro de la base por la apotema.

$$S_L = S_{\Delta APB} + S_{\Delta PBC} + S_{\Delta CPD} + \dots$$

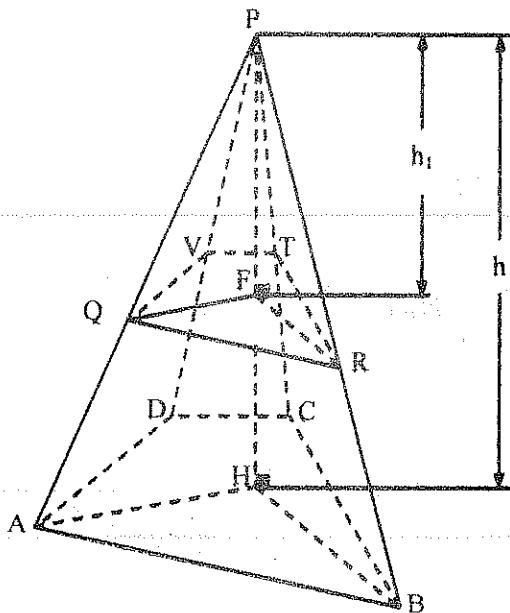
$$S_L = \frac{AB \times ap}{2} + \frac{BC \times ap}{2} + \frac{CD \times ap}{2} + \dots$$

$$S_L = a_p \cdot p \text{ donde : } ap = \text{apotema} \text{ y } p = \text{semiperímetro.}$$

5.5. - PROPIEDADES

- 5.5.1.- Si en una pirámide se construye una sección paralela a la base; entonces :

- a) Las aristas, las apotemas y alturas de las dos pirámides son proporcionales.
 b) Las bases son dos polígonos semejantes
 c) Las bases están en la misma razón que el cuadrado de la razón de sus partes homólogas.



$$\Delta PAH \cong \Delta P'QF; \Delta PHB \cong \Delta P'RF; \dots$$

$$\frac{PA}{PQ} = \frac{h}{h_1} = \frac{PB}{PR} = \frac{PC}{PT} = \dots$$

$$\Delta PAB \cong \Delta PQR; \Delta PBC \cong \Delta PRT; \dots$$

$$\frac{AB}{QR} = \frac{BC}{RT} = \frac{PA}{PQ} = \frac{PB}{PR} = \dots$$

$$\frac{AB}{QR} = \frac{h}{h_1} = \frac{PA}{PQ} = \frac{PB}{PR} = \dots$$

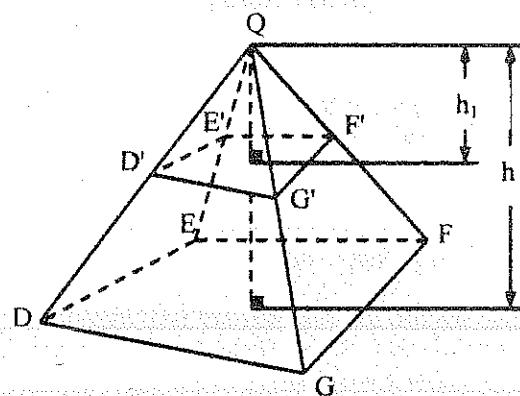
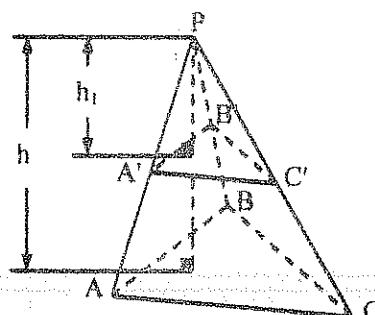
$$\frac{AB}{QR} = \frac{AH}{QF} = \frac{BH}{RF} = \dots$$

$$\Rightarrow \Delta AHB \cong \Delta QFR$$

$$\Rightarrow ABCDE\dots \cong QRTV\dots$$

$$\Rightarrow \frac{S_{ABCDE\dots}}{S_{QRTV\dots}} = \frac{AB^2}{QR^2} = \frac{h^2}{h_1^2} = \dots$$

5.5.2. - Si dos pirámides tienen alturas iguales, las áreas iguales distancias de sus respectivos vértices son iguales.



$$\frac{S_{\Delta B'C'}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{h^2}{h_1^2} = \frac{S_{DEFG}}{S_{DEFG}}$$

5.5.3. - Si dos pirámides de igual altura tienen sus bases equivalentes, las secciones trazadas paralelamente a las bases y a iguales distancias de sus respectivos vértices son también equivalentes.

5.5.4. - Si una pirámide tiene las aristas laterales congruentes:

- a) Los ángulos formados entre las aristas laterales y la base son congruentes.
 b) La base es un polígono inscriptible.
 c) El pie de la altura coincide con el circuncentro de la base.

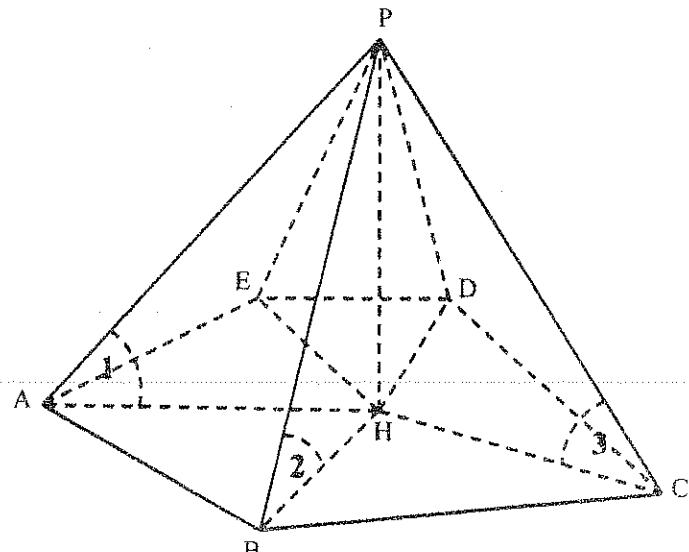
$\Delta PAH \cong \Delta PBH \cong \Delta PCH \cong \dots$

PH común, $PA = PB = PC = \dots$

$\Rightarrow \hat{1} \cong \hat{2} \cong \hat{3} \cong \dots$

$\Rightarrow HA = HB = HC = \dots$

$\Rightarrow H$ es Circuncentro del polígono



5.5.5.- Si una pirámide tiene todas sus apotemas congruentes:

- Los ángulos diedros formados entre las caras laterales y la base son congruentes.
- La base es un Polígono circunscribible.
- El pie de la altura coincide con el incentro de la base.
- El ángulo diedro formado entre una cara lateral y la base es igual a:

$$\hat{\alpha} = \cos^{-1} \left(\frac{S_B}{S_L} \right)$$

$\Delta PMH \cong \Delta PNH \cong \Delta PQH \cong \dots$

Rectángulos, PH común, $PM = PN = PQ = \dots$

$\Rightarrow \hat{\alpha} = \hat{\beta} = \hat{\gamma} = \dots$

$\Rightarrow MH = NH = QH = \dots$

$\Rightarrow H$ incentro del polígono

$$S_{\Delta PAB} \cdot \cos \alpha = S_{\Delta AHB}$$

$$S_{\Delta PBC} \cdot \cos \alpha = S_{\Delta BHC}$$

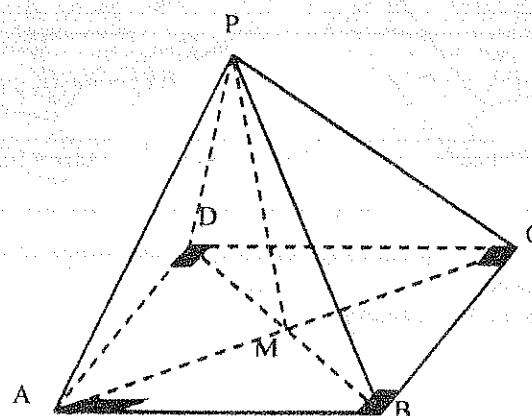
$$S_{\Delta PCD} \cdot \cos \alpha = S_{\Delta CHD}$$

$$S_L \cdot \cos \alpha = S_B$$

$$\hat{\alpha} = \cos^{-1} \left(\frac{S_B}{S_L} \right)$$

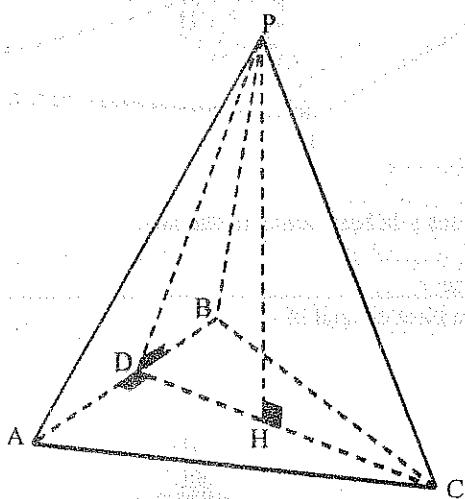
donde: S_B = Superficie de la base, y S_L = Superficie lateral

5.5.6.- Si la base de una pirámide es un rectángulo, la suma de los cuadrados de dos aristas laterales opuestas es igual a la suma de los cuadrados de las otras dos.



$$\begin{aligned} \Delta PAC \quad PM^2 &= \frac{1}{4}(2PA^2 + 2PC^2 - AC^2) \\ \Delta PBD \quad PM^2 &= \frac{1}{4}(2PB^2 + 2PD^2 - BD^2) \\ \Rightarrow \quad PA^2 + PC^2 &= PB^2 + PD^2 \end{aligned}$$

5.5.7. - Si el pie de la altura de una pirámide triangular está en la altura de la base, la arista de la base relativa a esta altura se cruza perpendicularmente con la arista lateral opuesta.



$$H) \overline{PH} \perp \triangle ABC$$

$$\overline{CD} \perp \overline{AB}$$

$$T) \overline{AB} \perp \overline{PC}$$

$$D) \overline{AB} \perp \overline{DC}$$

$$\overline{AB} \perp \overline{PH}$$

$$\Rightarrow \overline{AB} \perp \triangle PDC$$

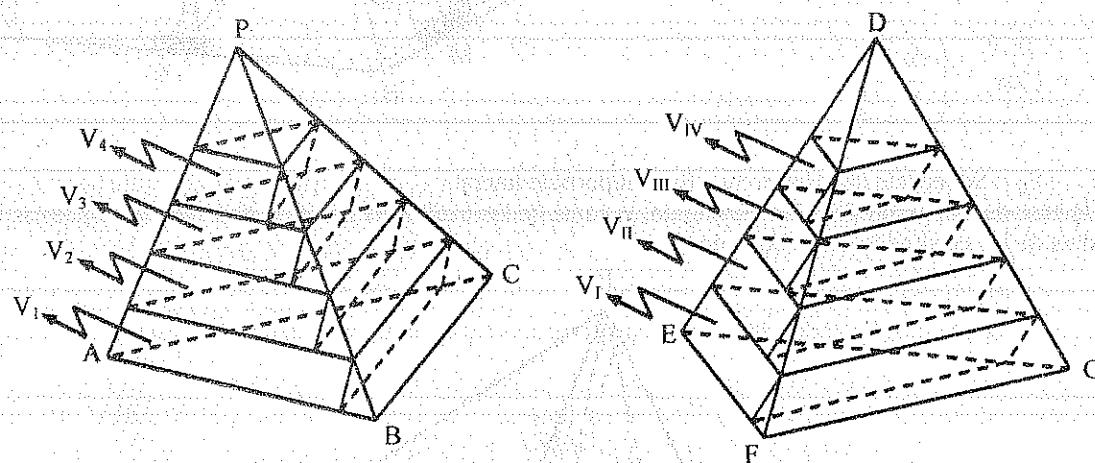
$$\Rightarrow \overline{AB} \perp \overline{PC}$$

5.5.8. - Las perpendiculares trazadas desde los vértices de una pirámide triangular regular pasan por los ortocentros de las caras opuestas.

5.5.9. - Si el vértice de una pirámide es un triángulo trirectángulo, el pie de la altura de la pirámide coincide con el ortocentro de la base.

5.6. - VOLUMEN

5.6.1. - Dos tetraedros de bases equivalentes y de alturas iguales son equivalentes.



Dividimos la altura en "n" partes congruentes y por los puntos de división trazamos planos paralelos a las bases respectivamente.

Inscribimos prismas en los tetraedros.

$$V_{P-ABC} = V_1 + V_2 + V_3 + \dots$$

$$V_{D-EFG} = V_I + V_{II} + V_{III} + \dots$$

$$\begin{aligned} V_1 &= V_1 \\ V_2 &= V_{II} \\ V_3 &= V_{III} \end{aligned}$$

.....

$$V_{P-ABC} = V_{D-EFG}$$

Si $n \rightarrow \infty$

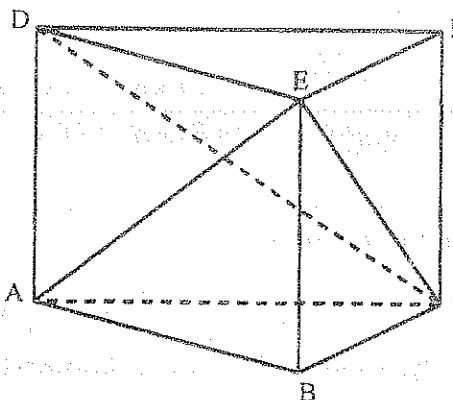
$$\frac{V_{P-ABC}}{V_{D-EFG}} \xrightarrow{\substack{\longrightarrow \\ \dots}} \frac{V_{P-ABC}}{V_{D-EFG}} \Rightarrow V_{P-ABC} = V_{D-EFG}$$

5.6.2. - El volumen de una pirámide triangular es igual a un tercio del producto de su base por su altura.

$$V_T = V_{E-ABC} + V_{E-ADC} + V_{E-OFC}$$

$$S_{\Delta ABC} \cdot h = 3 V_{E-ABC}$$

$$V_{E-ABC} = \frac{S_{\Delta ABC} \times h}{3} = 0$$

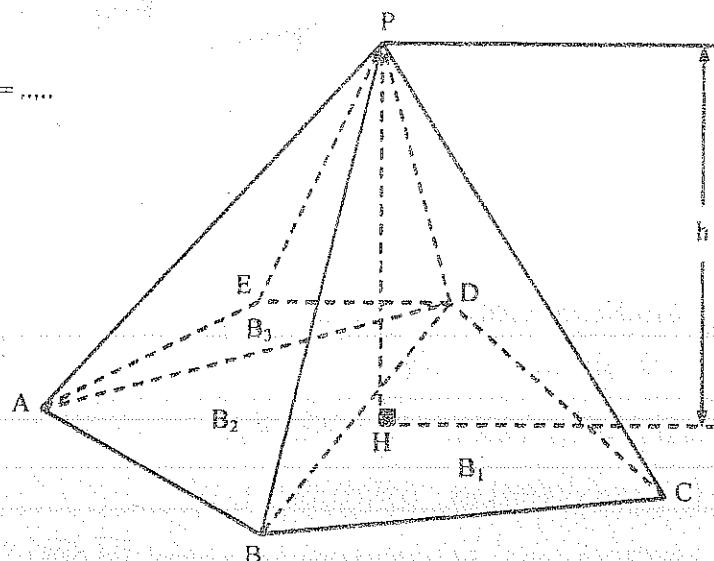


5.6.3. - El volumen de una pirámide es igual a un tercio del producto de la superficie de la base por su altura.

$$V_T = V_1 + V_2 + V_3 + \dots$$

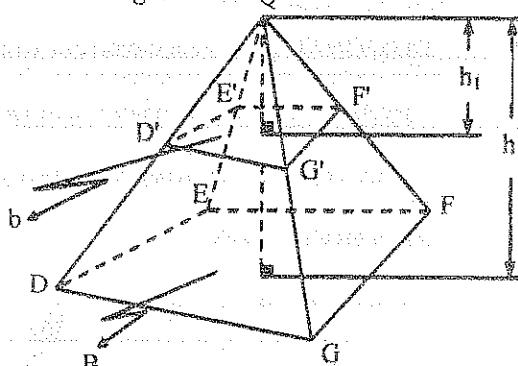
$$V_T = \frac{B_1 \times h}{3} + \frac{B_2 \times h}{3} + \frac{B_3 \times h}{3} + \dots$$

$$V_T = \frac{B \times h}{3}$$



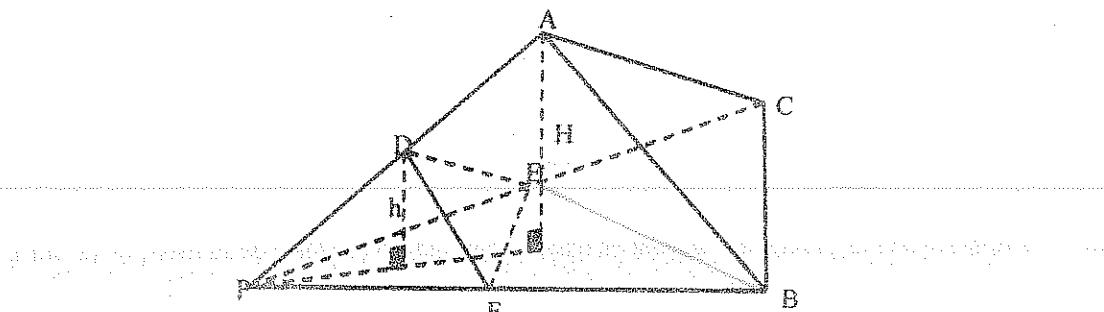
5.6.4. - Si se construye una sección paralela a la base de una pirámide, los volúmenes de las dos pirámides están en la misma razón que el cubo de la relación de dos lados homólogos.

$$\frac{V_{Q-DEFG}}{V_{Q-DEFG..}} = \frac{\frac{b \times h}{3}}{\frac{B \times h}{3}}$$



$$\frac{V_{Q-D'E'F'G'}}{V_{Q-DEFG...}} = \frac{h^3}{h^3} = \frac{(D'G')^3}{(DG)^3} = \frac{(QD')^3}{(QD)^3} = \dots$$

5.6.5.- Si los vértices de dos pirámides son triédros congruentes, sus volúmenes están en la misma relación que los productos de sus aristas laterales.

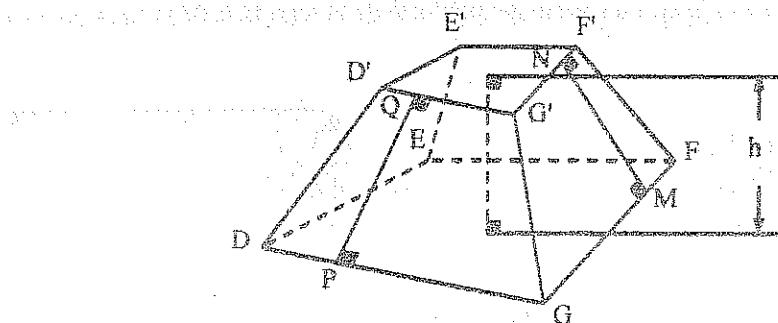


$$\frac{V_{P-DEF}}{V_{P-ABC}} = \frac{\frac{S_{\Delta PEF} \times h}{3}}{\frac{S_{\Delta PCB} \times H}{3}} = \frac{PE \times PF \times h}{PC \times PB \times H} = \frac{PE \times PF \times PD}{PC \times PB \times PA}$$

5.7.- TRONCO DE PIRÁMIDE

Es la parte de una pirámide comprendida entre la base y una sección paralela a la base.

5.7.1.- REPRESENTACIÓN GRÁFICA Y ELEMENTOS



BASE MAYOR (B) : DEFG...

BASE MENOR (b) : D'E'F'G'....

ARISTAS LATERALES : DD', EE', FF',

CARAS LATERALES : DD'G'G, GG'FF,

APOTEMA (ap) : Es la altura de una cara lateral, PQ, MN, ...

ALTURA (h) : Es la perpendicular común a las dos bases

DIAGONAL : Es el segmento que une dos vértices no coplanares, DF, E'G, ...

AREA LATERAL : Es igual a la suma de las áreas de todas las caras laterales

AREA TOTAL : Es la suma del área lateral más las áreas de las bases.

5.7.2.- DENOMINACIÓN

Por las letras de una diagonal. Tronco de pirámide D - F'

5.7.3. - El volumen de un tronco de pirámide es : $V = \frac{h}{3} (B + b + \sqrt{B \times b})$

$$V_{A-K} = V_{P-ABCD...} - V_{P-IJKL...}$$

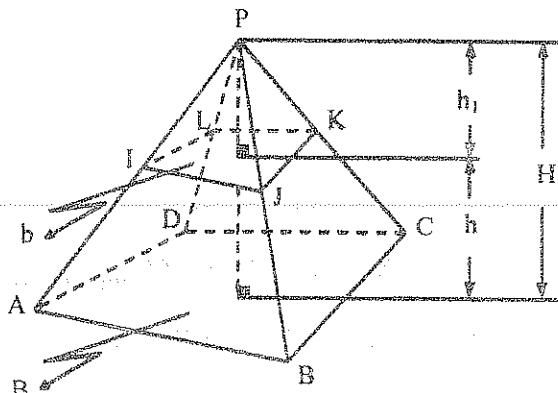
$$V_{A-K} = \frac{B \times H}{3} - \frac{b \times h}{3}$$

$$\frac{B}{b} = \frac{H^2}{h^2}$$

$$h_1 = \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} \quad y \quad H = \frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$$

$$V_{A-K} = \frac{B}{3} \times \frac{h\sqrt{B}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}} - \frac{b}{3} \times \frac{h\sqrt{b}}{\sqrt{B} - \sqrt{b}}$$

$$V = \frac{h}{3} (B + b + \sqrt{B \times b})$$



5.8. - TRONCO DE PIRÁMIDE REGULAR

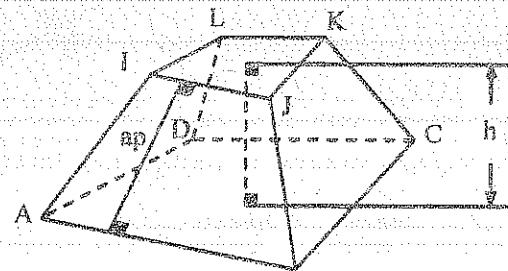
5.8.1. - PROPIEDADES

- a) Las bases son polígonos regulares semejantes.
- b) El segmento que une los centros de las bases es la altura del tronco.
- c) Todas las aristas laterales son congruentes.
- d) Todas las apotemas son congruentes.
- e) Los ángulos diedros en las bases son respectivamente congruentes.
- f) Los ángulos diedros entre las caras laterales son congruentes.
- g) El área lateral es igual al producto de la semisuma de los perímetros de las bases por el apotema.

$$S_L = S_{AUB} + S_{BVKC} + S_{CKLD} + \dots$$

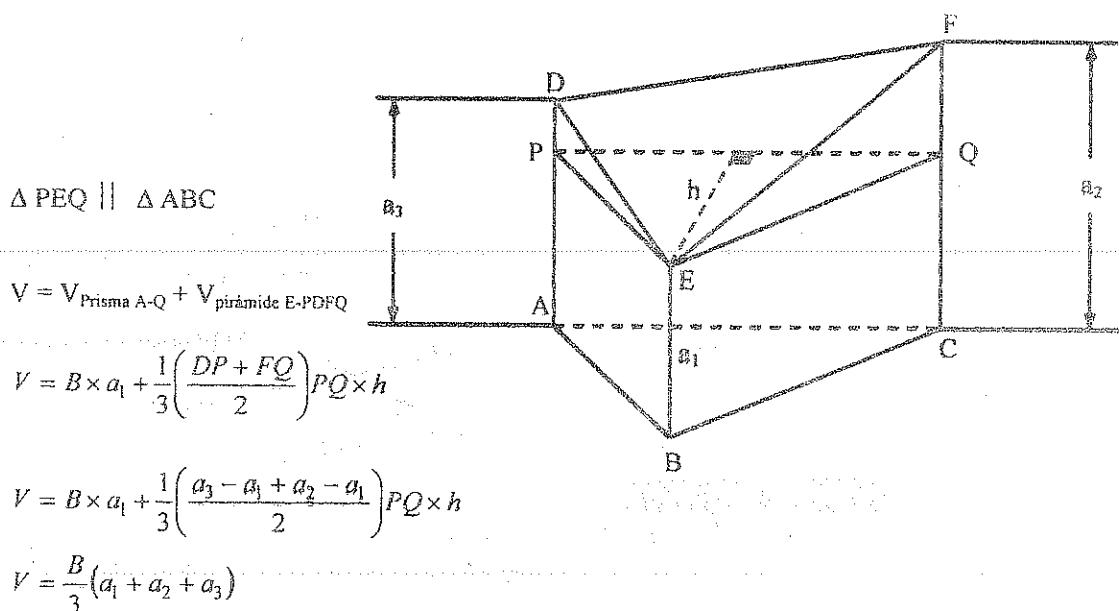
$$S_L = \left(\frac{AB + IJ}{2} \right) ap + \left(\frac{BC + JK}{2} \right) ap + \left(\frac{CD + LK}{2} \right) ap + \dots$$

$$S_L = \left(\frac{P_B + P_b}{2} \right) ap = (p_B + p_b) ap$$



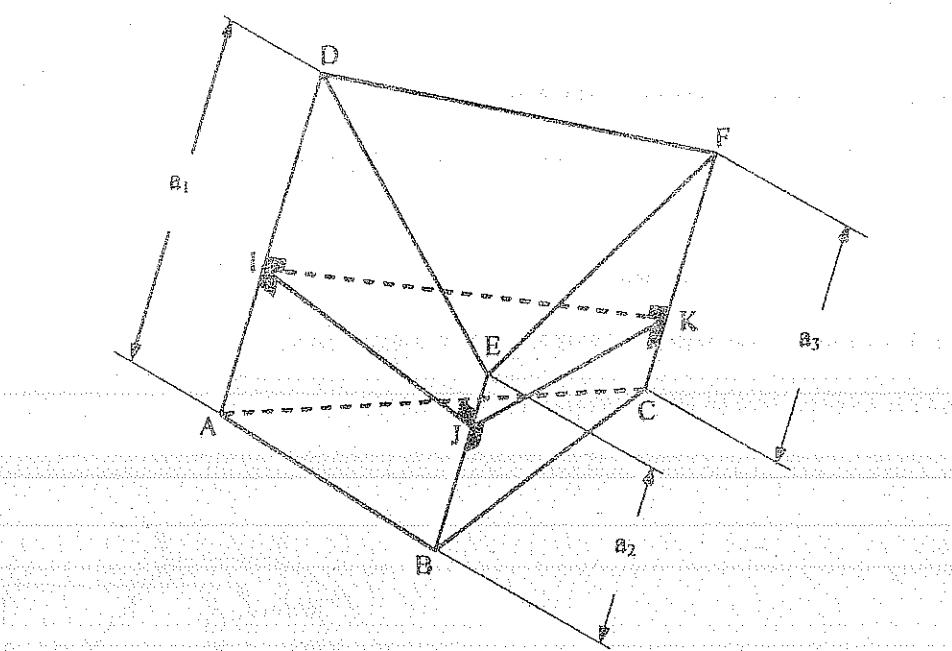
5.8.2. - El volumen de un tronco de prisma triangular recto es : $V = \frac{B}{3}(a_1 + a_2 + a_3)$

y en donde B = Superficie de la base, a_1, a_2, a_3 son las aristas laterales.



5.8.3. - El volumen de un tronco de prisma triangular oblicuo es : $V = \frac{A_{S.R.}}{3}(a_1 + a_2 + a_3)$

siendo $A_{S.R.}$ el área de la sección recta y a_1, a_2, a_3 son las aristas laterales.



$$V = V_{\text{Tronco } A-k} + V_{\text{Tronco } I-F}$$

$$V = \frac{A_{IJK}}{3}(AI + BJ + CK) + \frac{A_{IJK}}{3}(ID + JE + FK)$$

$$V = \frac{A_{S.R.}}{3}(a_1 + a_2 + a_3)$$

5.8.4.- El volumen de un tronco de paralelepípedo recto es : $V = B \left(\frac{a_1 + a_3}{2} \right)$

donde B es la superficie de la base y a_1, a_3 son dos aristas laterales opuestas.

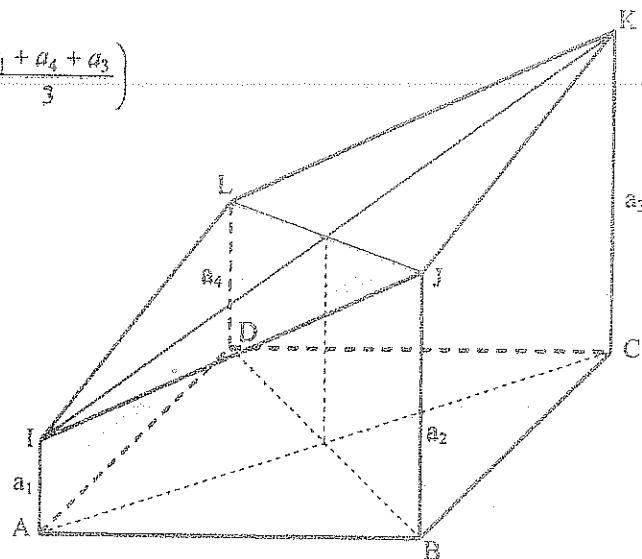
$$V = V_{ABC-IJK} + V_{ADC-ILK}$$

$$V = \frac{A_{ABCD}}{2} \left(\frac{a_1 + a_2 + a_3}{3} \right) + \frac{A_{ABCD}}{2} \left(\frac{a_1 + a_4 + a_3}{3} \right)$$

$$V = \frac{A_{ABCD}}{6} (2a_1 + 2a_3 + a_2 + a_4)$$

$$a_1 + a_3 = a_2 + a_4$$

$$V = B \left(\frac{a_1 + a_3}{2} \right)$$



5.8.5. - El volumen de un tronco de paralelepípedo oblicuo es : $V = A_{S.R.} \left(\frac{a_1 + a_3}{2} \right)$

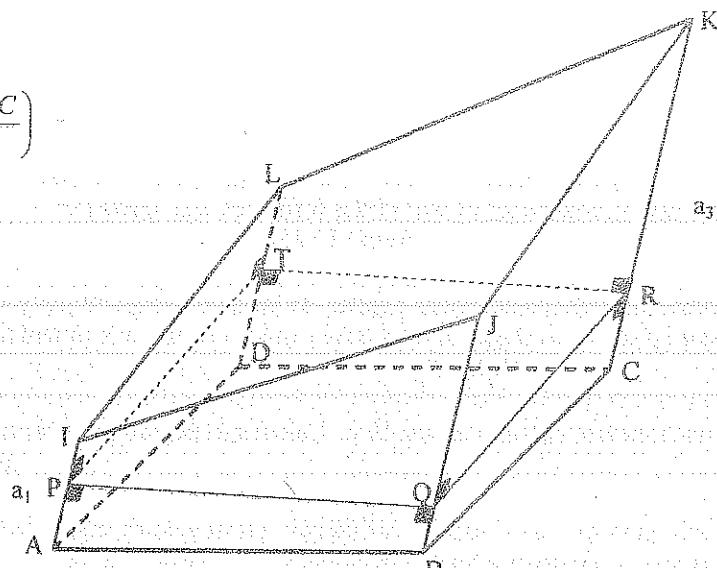
donde $A_{S.R.}$ es el área de la sección recta y a_1, a_3 son dos aristas opuestas.

$$V = V_{P-C} + V_{P-K}$$

$$V = A_{S.R.} \left(\frac{PI + RK}{2} \right) + A_{S.R.} \left(\frac{PA + RC}{2} \right)$$

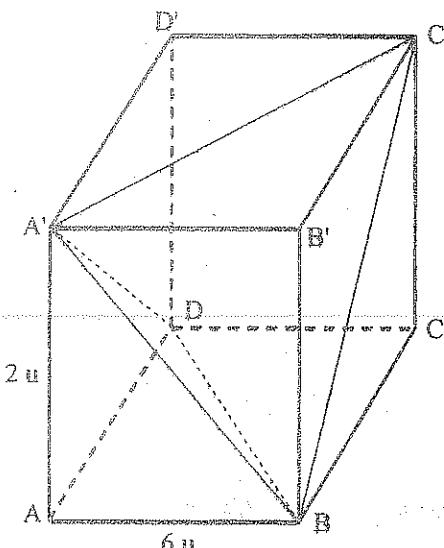
$$V = A_{S.R.} \left(\frac{AI + KC}{2} \right)$$

$$V = A_{S.R.} \left(\frac{a_1 + a_3}{2} \right)$$



5.9. - EJERCICIOS

1. -



H) A - C' Prisma regular

T) $V_{C-ABD} = ?$ Resp: 144 u^3

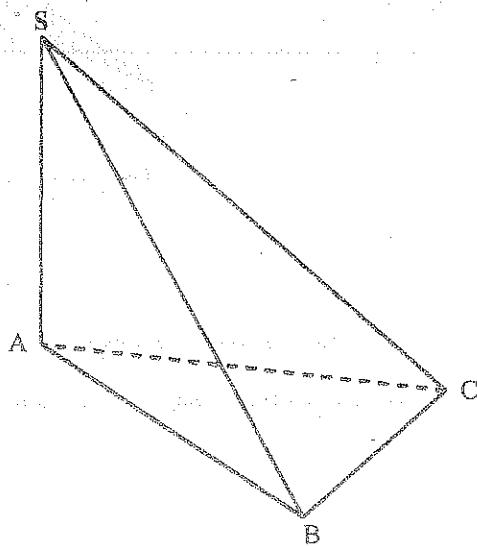
2. -

H) $SA \perp \Delta ABC$

$$BC = 6 \text{ u}$$

$$\hat{A}CB = 30^\circ$$

$$\text{Diedro } BC = 45^\circ$$

T) $V_{S-ABC} = ?$ Resp: 6.76 u^3 

3. - En un tetraedro regular de arista 15 u, ¿A qué altura de la base se debe trazar una sección paralela a ella, para que los volúmenes de los sólidos formados sean iguales?

Resp: 12.25 u.

4. - En una pirámide cuadrangular regular, de lado de la base 10 cm y altura 20 cm. Determinar el ángulo y la distancia entre una diagonal de la base y una apotema de la pirámide.

Resp:

5. - En un tetraedro regular de arista 10 u. Calcular el ángulo entre las caras laterales.

Resp: 70.53° .

6. - En una pirámide cuya base es un triángulo rectángulo de catetos 6 u y 8 u, las aristas laterales miden 10 u cada una. Calcular la altura de la pirámide. Resp: 8.67 u

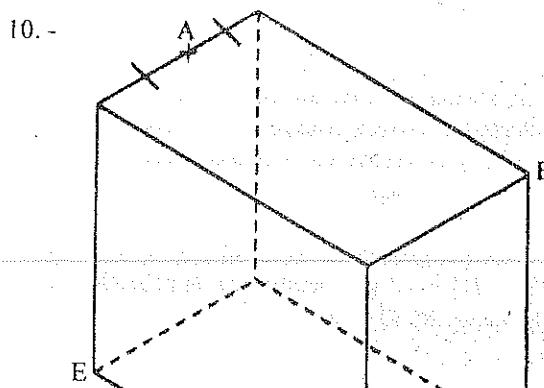
7. - La base de un prisma recto es un triángulo isósceles, los lados iguales miden 10 u, ángulo en la base 55° . Por la base del triángulo y el vértice opuesto del triángulo de la base superior se traza un plano que forma un ángulo de 40° . Determinar el volumen de la pirámide cuadrangular formada.

Resp: 107.5 u^3

8. - La superficie lateral de una pirámide triangular regular es 100 u^2 . Determinar el lado de la base si el ángulo entre la cara lateral y la base es 50° . Resp: 52.05 u^3

- 9.- En un tetraedro regular de arista 10 u. Se divide la altura en tres partes iguales y se traza, por los puntos de división, planos paralelos a la base. Hallar el volumen del sólido intermedio.

Resp: 3046 u^3



H) E - F Cu

T) Relación de los volúmenes de los sólidos formados al construir la sección que pasa por A, B, C.

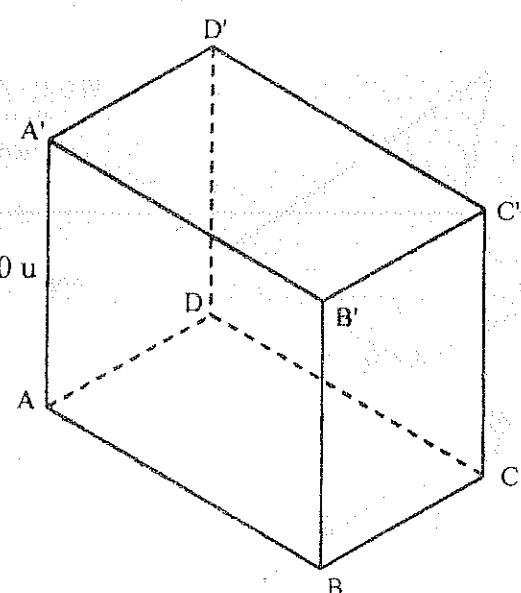
Resp: 1 u

11.-

H) A - C' Cu

T) $V_{A-C'DB} = ?$

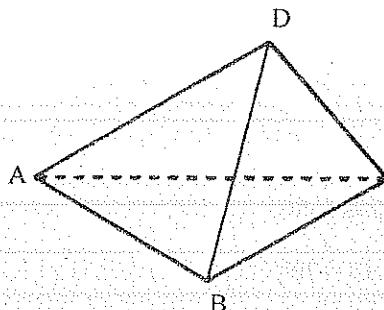
Resp: $333,33 \text{ u}^3$



- 12.- En una pirámide cuadrangular regular el área lateral es de 300 u^2 . Calcular el ángulo diedro entre la cara lateral y la base.

Resp: $78.46^\circ; 30\text{u}^2$

13.-



H) $AC = 4 \text{ u}$

$AB = AD = 4\sqrt{2} \text{ u}$

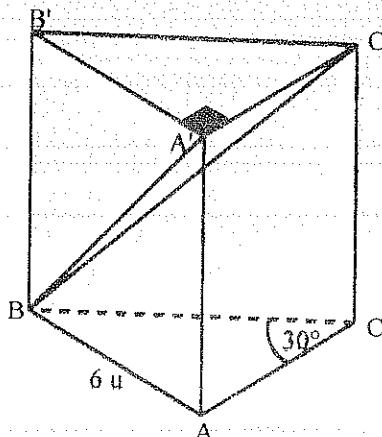
$BC = CD = 6 \text{ u}$

$BD = 8 \text{ u}$

T) $V_{D-ABC} = ?$

Resp: 19.73 u^3

14.-



H) $ABC - A'B'C'$ Prisma recto

$A'BC' = 40^\circ$

T) $V_{B-A'CCA} = ?$

Resp: 145 u^3

15. - Un tetraedro regular de arista 20 u contiene agua hasta una altura de 5 u. Calcular el volumen de agua.
Resp: 627.8 u^3

16. - En una pirámide triangular regular las aristas laterales están inclinadas un ángulo de 50° con la base. Hallar el ángulo de inclinación de las caras laterales con la base. Resp: 67.23°

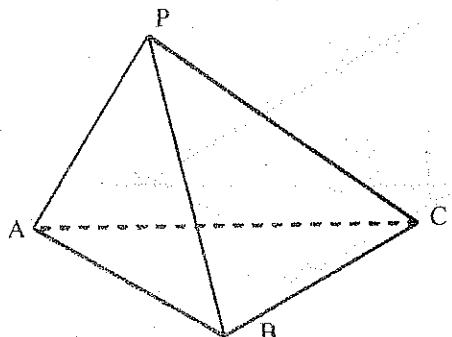
17. - Por un punto tomado sobre la arista lateral de un prisma triangular regular, lado de la base 15 u, se traza dos planos, uno de ellos pasa por un lado de la base inferior del prisma y forma un ángulo de 45° con la base. El otro pasa por el lado paralelo a la base superior. Determinar el área lateral y el volumen de la pirámide que tiene por base el plano que pasa por los lados dados y el vértice es el punto dado. Arista lateral del prisma 20 u.

Resp:

18. - En un tetraedro regular $P-ABC$, con las aristas \overline{PC} , \overline{PB} y en la prolongación de la arista \overline{PB} , se dan los puntos D, M y Q tal que; $CD = 4 \text{ u}$; $AM = MB = 5 \text{ u}$; $PB = BQ = 10 \text{ u}$. Determinar la relación de volúmenes que se forman al construir un plano que pasa por los puntos M, Q y D.

Resp:

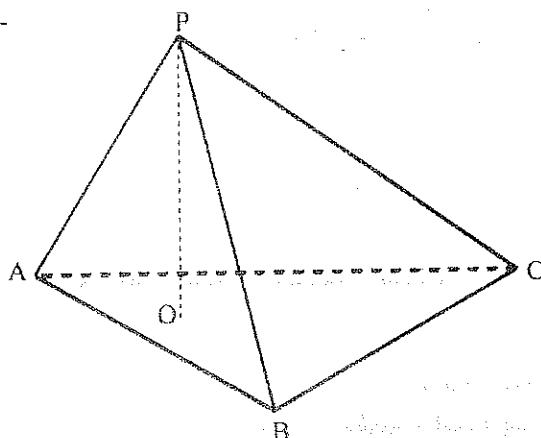
19. -

H) $P-ABC$ Pirámide triangular regular

$S_T = 750 \text{ u}^2$

Diedro $B-C = 65^\circ$ T) $AB = ?$ Resp: 22.68 u

20. -

H) $P-ABC$ Pirámide triangular regular

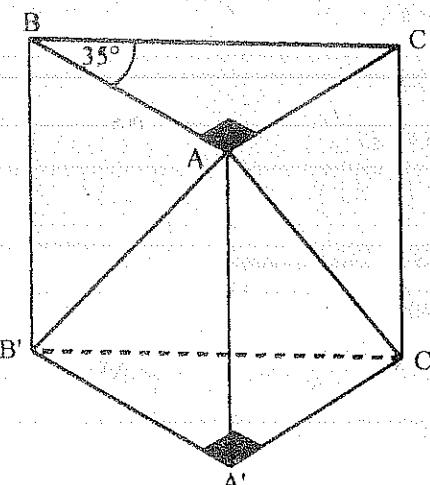
$PA = 9 \text{ u}$

$PO = h = 6 \text{ u}$

T) Diedro $B-C = ?$

Resp:

21. -

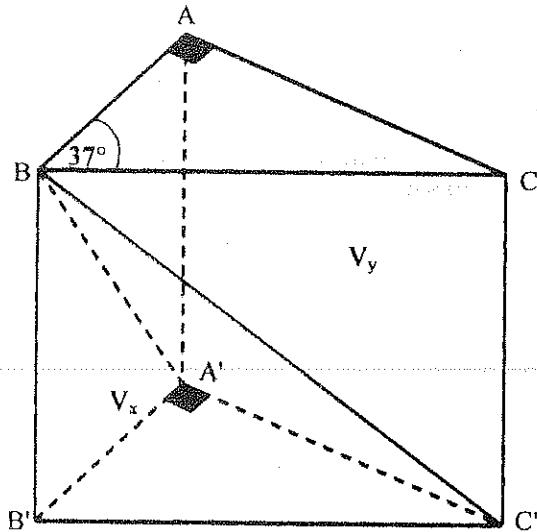
H) $A-A'B'C'$ Prisma recto

$BC = 10 \text{ u}$

Diedro $B'-C'-C = 70^\circ$ T) $V_{A-A'B'C'} = ?$

Resp:

22.-

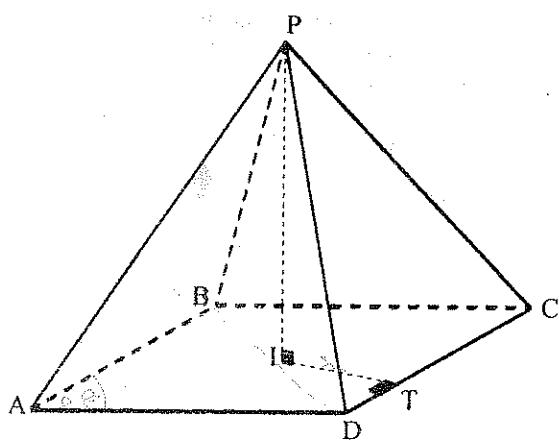


- H) A - C' Prisma recto
 $AB + BC = 15 \text{ u}$
 Diedro $A' - C' = 65^\circ$

- T) $V_x = ?$
 $V_y = ?$

Resp:

23.-

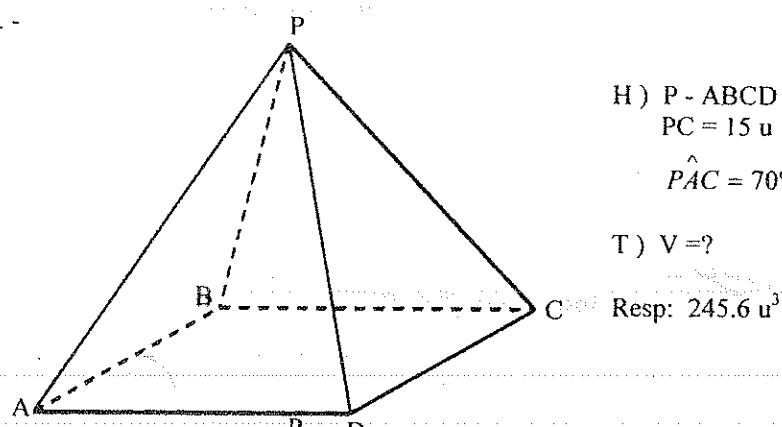


- H) □ABCD Rombo de centro I
 $\hat{B}AD = 30^\circ$
 $IT = r = 5 \text{ m}$
 Diedro $A - B = 60^\circ$

- T) $S_T = ?$
 $V = ?$

Resp: $346.4 \text{ u}^2 ; 333.33 \text{ u}^3$

24.-

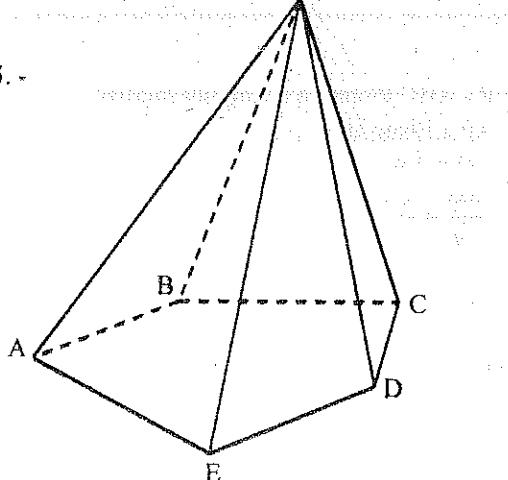


- H) P - ABCD Pirámide cuadrangular regular
 $PC = 15 \text{ u}$
 $\hat{P}AC = 70^\circ$

- T) $V = ?$

Resp: 245.6 u^3

25.-

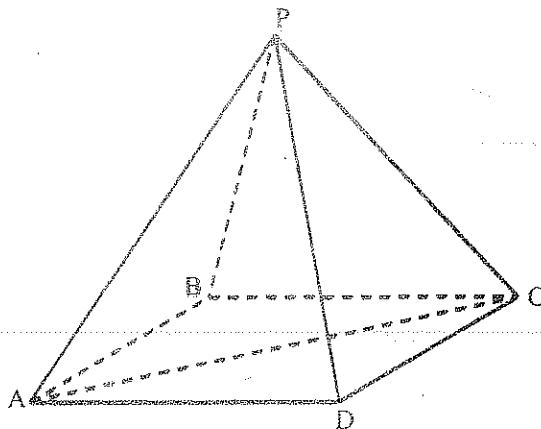


- H) P - ABCDE Pirámide pentagonal regular
 $S_B = 500 \text{ u}^2$
 $S_L = 800 \text{ u}^2$

- T) Dihedro $D - C = ?$

Resp: 51.31°

26.-



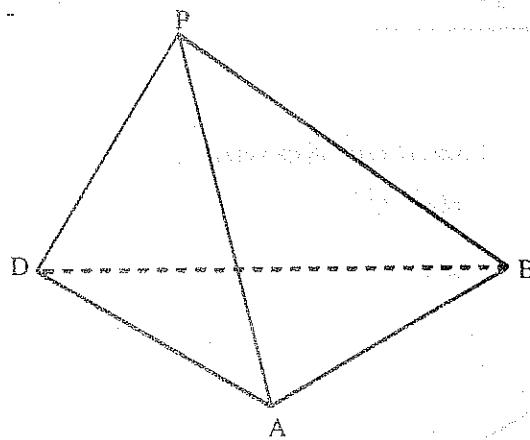
H) P - ABCD Pirámide cuadrangular regular
 $V = 70.4 \text{ u}^3$

$$\hat{PCA} = 68^\circ$$

T) PA =?

Resp: 9,4 u

27.-



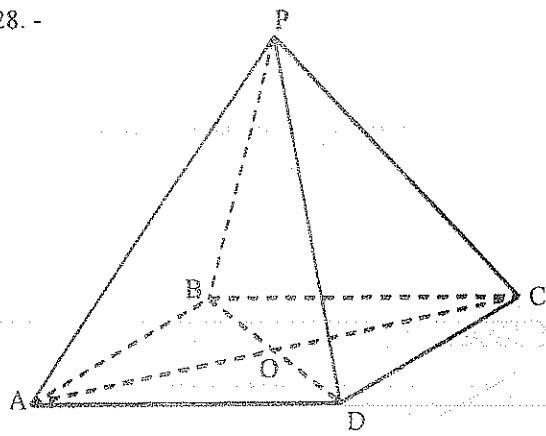
H) P - ABD Pirámide regular
 $V = 2000 \text{ u}^3$
 $AB = 10 \text{ u}$

T) Diedro A - B =?

$$\hat{PBD} = ?$$

Resp: 78.23° ; 70.54°

28.-



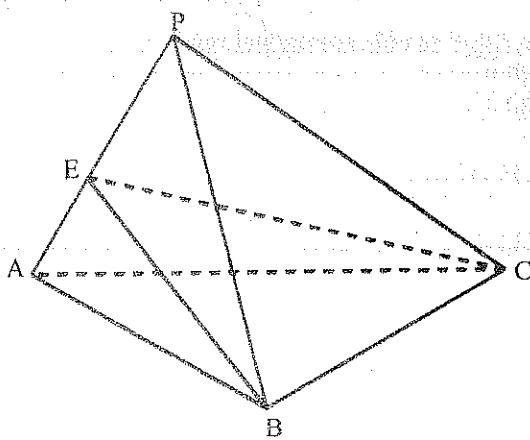
H) P - ABCD Pirámide cuadrangular
 $\square ABCD$ Rectángulo
 $AC = 6 \text{ u}$

$$\hat{PAO} = \hat{PCO} = 70^\circ, \hat{CDO} = 60^\circ$$

T) V =?

Resp: 42.82 u^3

29.-



H) P - ABC Pirámide triangular regular

$AP \perp$ Plano BEC

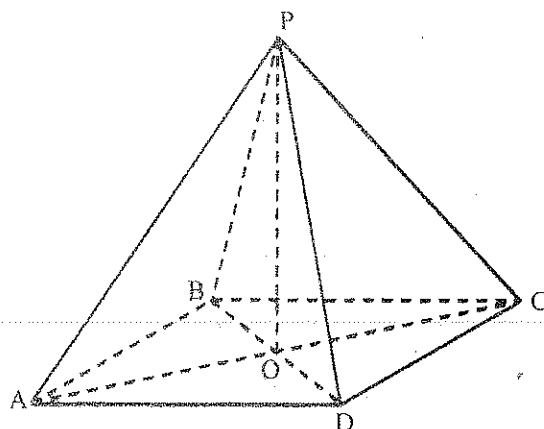
$$AB = 5 \text{ u}$$

$$\frac{PE}{EA} = \frac{7}{2}$$

T) $S_T = ?$

Resp: 25.68 u^2

30.-



H) P - ABCD Pirámide cuadrangular regular

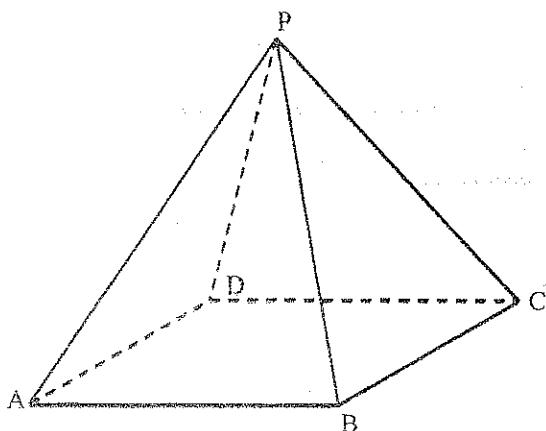
$$\hat{BPC} = 40^\circ$$

$$S_T = 20 \text{ u}^2$$

T) PO = ?

Resp: 2.93 u

31.-



H) P - ABCD Pirámide cuadrangular regular

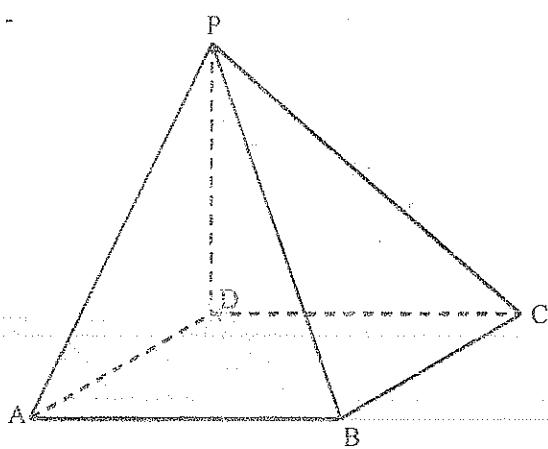
$$PA = 6.5 \text{ u}$$

$$\text{Diedro } P - A = 60^\circ$$

T) V = ?

Resp: 44.86 u^3

32.-



H) P - ABCD Pirámide cuadrangular

$$PD \perp \text{Plano ABCD}$$

$$PD = 5 \text{ u}$$

 $\square ABCD$ Rectángulo

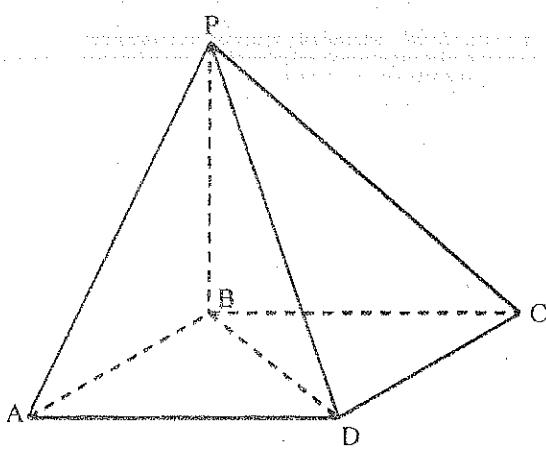
$$\hat{PAD} = 75^\circ$$

$$\hat{PCD} = 65^\circ$$

T) V = ?

Resp: 5.27 u^3

33.-



H) P - ABCD Pirámide cuadrangular

$$PB \perp \text{Plano ABCD}$$

$$AB = 5 \text{ u}$$

$$PD = 14.14 \text{ u}$$

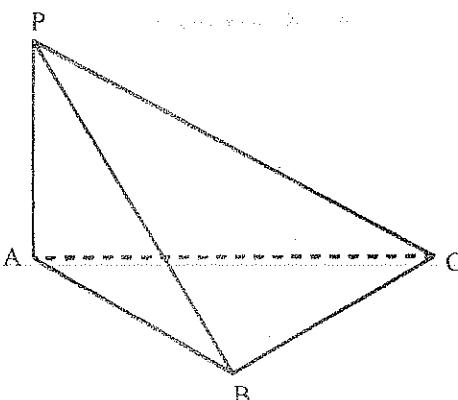
$$\hat{PDB} = 60^\circ$$

T) PA = ?

$$\hat{PAB} = ?$$

Resp: $13.22 \text{ u}; 67.8^\circ$

34.-



H) P - ABC Pirámide triangular

$$AB = BC = CA = 5 \text{ u}$$

 $\overline{PA} \perp$ Piano ABC

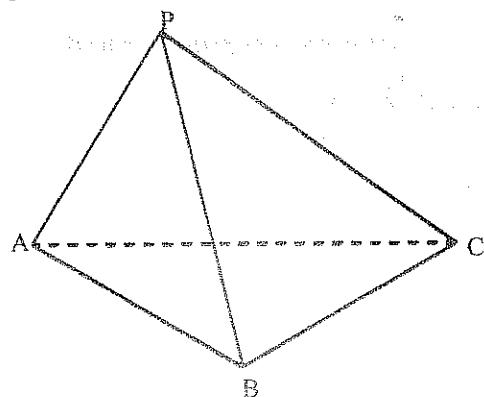
$$\hat{PBA} = \hat{PCA} = 55^\circ$$

T) $S_{\Delta PBC} = ?$

Diedro B - C = ?

$$\text{Resp: } 20.87 \text{ u}^2; 58.77^\circ$$

35.-



H) P - ABC Pirámide triangular regular

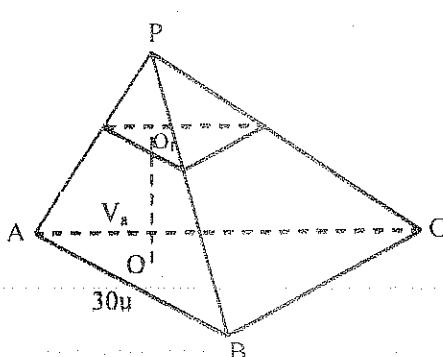
$$AB = 12 \text{ u}$$

Diedro B - C = 70° T) $S_T = ?$

$$V = ?$$

$$\text{Resp: } 214.65 \text{ u}^2; 329.5 \text{ u}^3$$

36.-



H) P - ABC Tetraedro regular

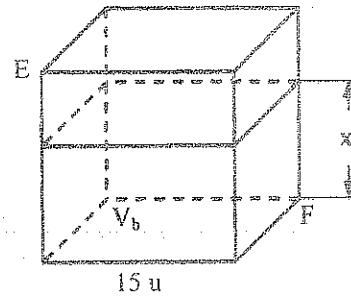
E - F Cubo

$$O_1O = 22.5 \text{ u}$$

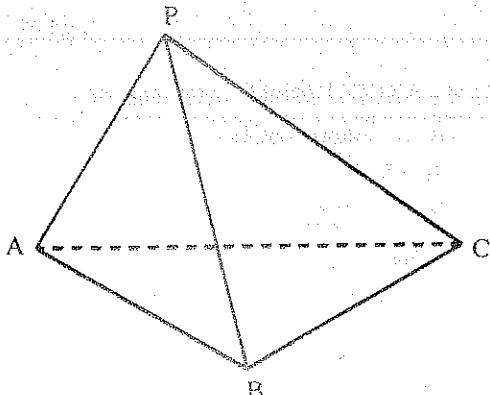
$$V_a = V_b$$

T) $x = ?$

$$\text{Resp: } 14.13 \text{ u}$$



37.-



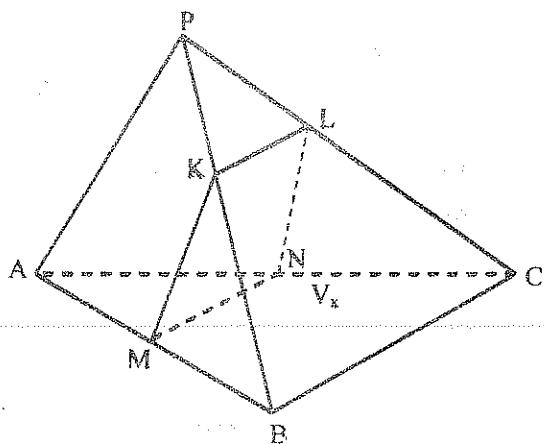
H) P - ABC Pirámide triangular regular

Diedro B - C = 45°

T) Diedro P - C = ?

Resp:

38.-



H) P - ABC Pirámide triangular regular

$$AB = 3.8 \text{ u}$$

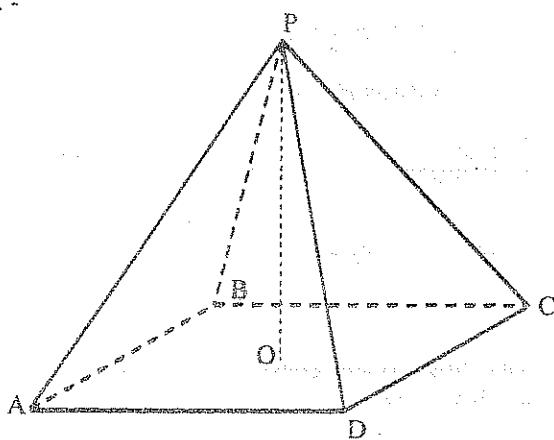
Diedro A - B = 80°

□ KLMN ⊥ Plano ABC

M y N puntos medios

T) $V_x = ?$ Resp: 2.45 u^3

39.-



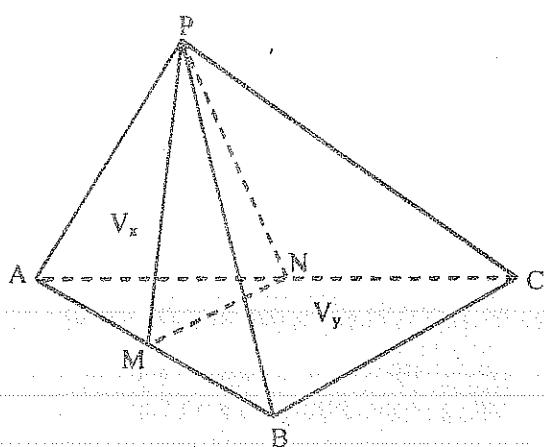
H) P - ABCD Pirámide cuadrangular regular

$$S_L = 400 \text{ u}^2$$

$$PO = h = 10 \text{ u}$$

T) $AB = ?$ Resp: 15.72 u

40.-



H) P - ABC Pirámide triangular regular

$$AB = 9 \text{ u}$$

M y N puntos medios

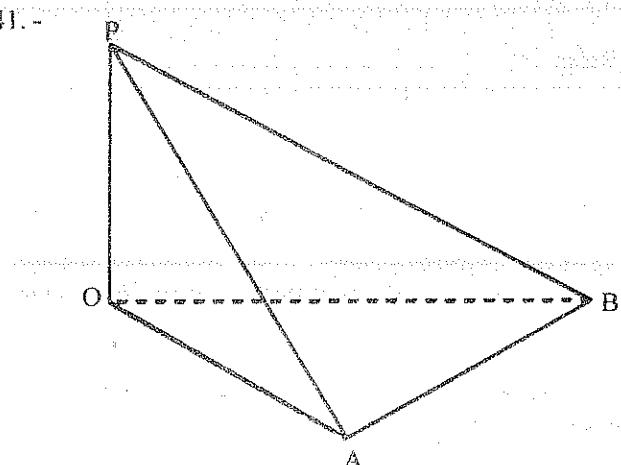
Diedro M - N = 60° T) $S_{\Delta PMN} = ?$

$$V_x = ?$$

$$V_y = ?$$

Resp:

41.-



H) PO ⊥ △OAB (ES TRIÁNGULO)

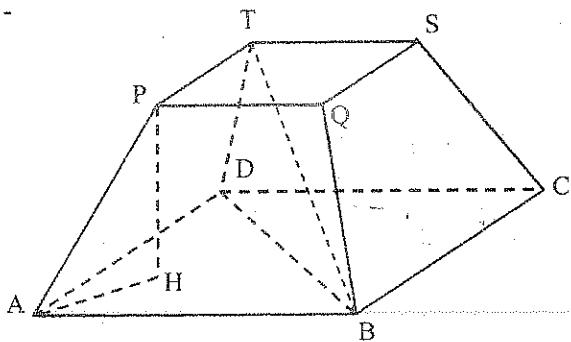
Diedro A - B = 60°

$$S_L = 40 \text{ u}^2$$

T) $V = ?$

Resp:

42.-



- H) T - B Tronco de pirámide cuadrangular regular

$$PH = h = 9 \text{ m}$$

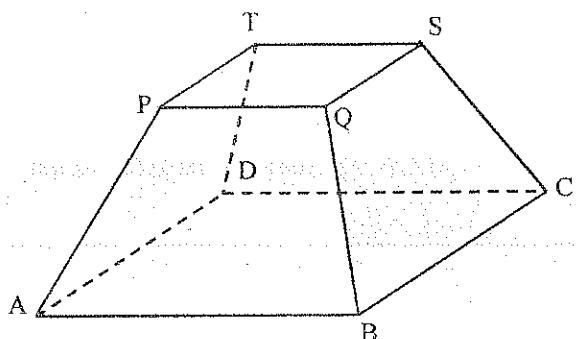
$$\hat{PAH} = 75^\circ$$

$$\hat{TBD} = 42^\circ$$

T) $S_L = ?$

Resp: 258.86 u^2

43.-



- H) T - B Tronco de pirámide cuadrangular regular

$$AB = 3\sqrt{3} \text{ u}$$

$$PQ = 3 \text{ u}$$

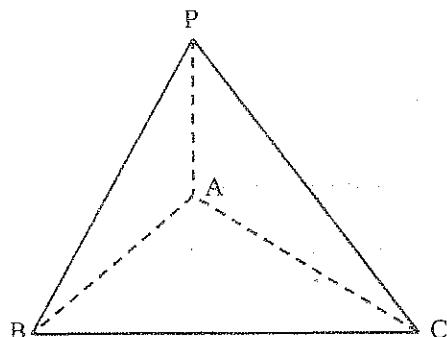
Diedro de arista B - C = 70°

T) $S_L = ?$

V = ?

Resp: $53.34 \text{ u}^2; 51.41 \text{ u}^3$

44.-



- H) P - ABC Pirámide triangular

$PA \perp$ Plano ABC

$$AB = 4.2 \text{ u}$$

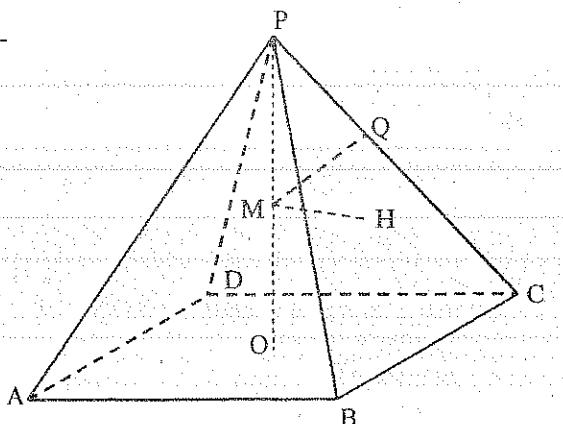
$$\hat{PBA} = \hat{PCA} = 60^\circ$$

$$\hat{BAC} = 90^\circ$$

T) V = ?

Resp:

45.-



- H) P - ABCD Pirámide cuadrangular regular

$$PM = MO$$

$$MO \perp PC; \quad MQ = 1.8 \text{ u}$$

$$MH \perp \text{Plano } PBC; \quad MH = 1.2 \text{ u}$$

T) V = ?

Resp:

46.- La proyección de un tetraedro P - ABC, en un plano Q, es un cuadrado de lado 1 cm. Si las proyectantes de los vértices del tetraedro en el plano Q, son; 1 cm, 2 cm, 3 cm y 5 cm respectivamente. Determinar el volumen del tetraedro. Resp:

47.- Se tiene un tronco de pirámide cuadrangular regular, el lado de la base mayor mide 20 u, el lado de la base menor 15 u, apoyado en su base mayor, contiene agua hasta una altura de 10 u. Calcular el volumen de agua. ($\text{h}_{\text{tronco}} = 25.4$) Resp: 3613.33 u^3

48. - Se tiene un tronco de pirámide triangular regular de dimensiones, lado de la base mayor 10 u, lado de la base menor 5 u, y de altura 9 u. ¿A qué distancia de la base mayor habrá que trazar un plano paralelo a las bases para que lo divida en dos sólidos equivalentes?

Resp: 3.12 u

49. - En un tronco de prisma cuadrangular regular, el lado de la base es e u, el ángulo entre las bases es 40° , dos aristas laterales opuestas miden 8 u. Calcular la longitud de las otras dos aristas laterales.

Resp:

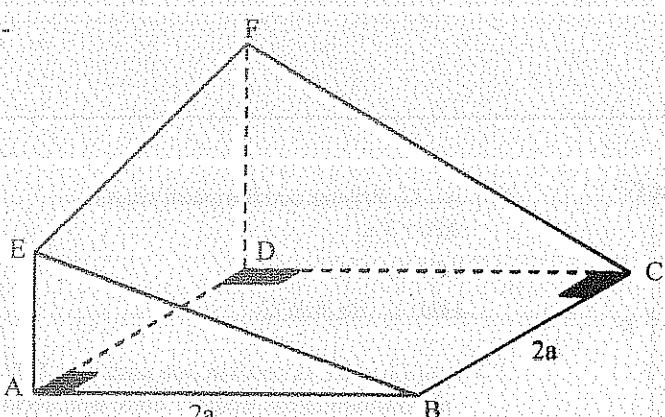
50. - Las bases de un tronco de pirámide regular son 4 m^2 y 2 m^2 . Calcular el área de la sección paralela a las bases construida a una distancia igual a la tercera parte de su altura, a partir de la base mayor.

Resp: 3.25 m.

51. - Una de las aristas de un tetraedro mide 5 m. Si el tetraedro se proyecta en un plano perpendicular a esta arista, el área de la proyección es 5 m^2 . Calcular el volumen del tetraedro.

Resp:

52. -



H) $\overline{FD} \perp \text{Plano } A - C$

$FD = 14 \text{ u}$

$\overline{EA} \perp \text{Plano } A - C$

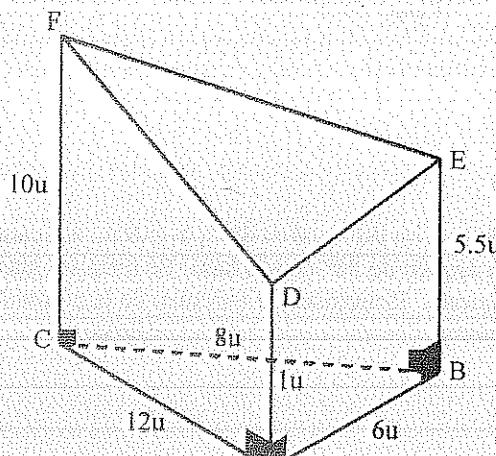
$EA = 7 \text{ u}$

$a = 7 \text{ u}$

T) $V=?$

Resp: 1143.33 u^3

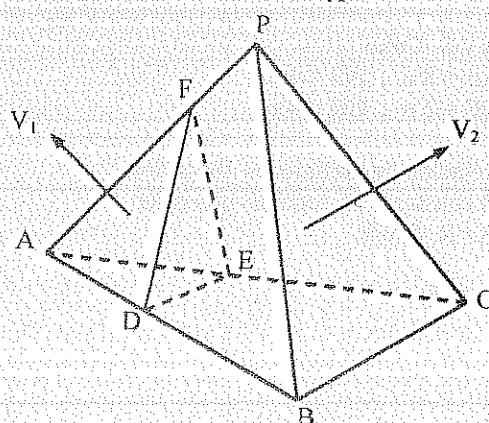
53. -



T) Hallar el volumen de la siguiente figura.

Resp: 117.32 u^3

54. -



H) $BD = 2DA$

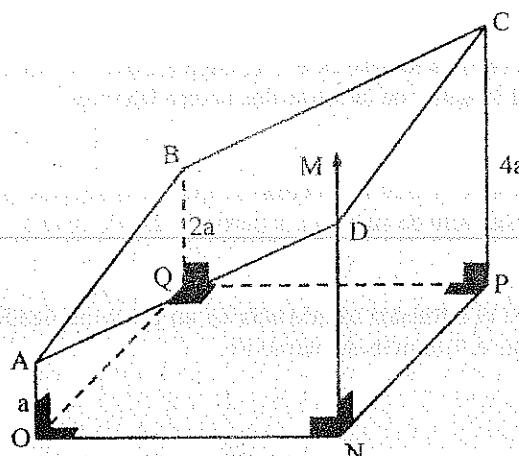
$CE = 2AE$

$AF = 2FP$

T) $\frac{V_2}{V_1} = ?$

Resp: $\frac{25}{2}$

55.-

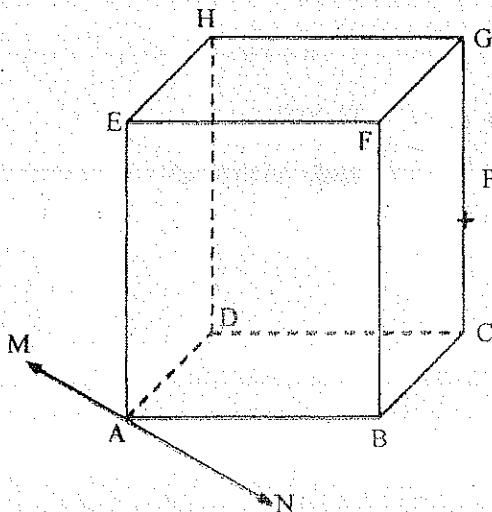


- H) Se traza un plano por los puntos A, B y C el cual corta a la recta MN en D.

- T) Calcular la arista ND y el volumen del sólido.

Resp: $3a$; $10a^3$

56.-



- H) A - G Prisma cuadrangular regular
 $AB = 3 \text{ u}$

$$MN \perp AC$$

$$MN \in \text{ de } ABCD$$

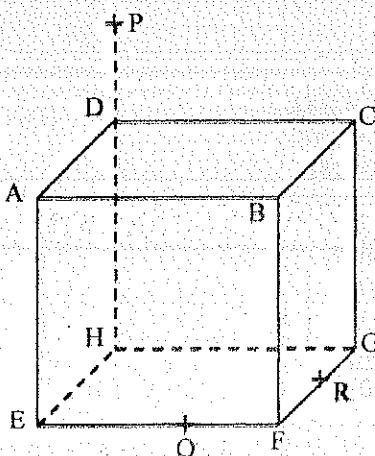
- T) Ángulo entre la sección que pasa por MN y P si el volumen comprendido entre esta sección y ABCD es 6.75 cm^3 .

Resp: 19.5°

- 57.- La base de un prisma oblicuo es un triángulo ABC, $\hat{C} = 90^\circ$, $\hat{A} = 40^\circ$, $b = 8 \text{ u}$. La cara lateral del prisma que pasa por el lado AC está inclinada un ángulo de 50° con la base. Se traza un plano que pasa por la hipotenusa AB y el vértice C' del triángulo opuesto. Determinar el volumen de la pirámide triangular obtenida sabiendo que sus aristas laterales son iguales.

Resp:

58.-

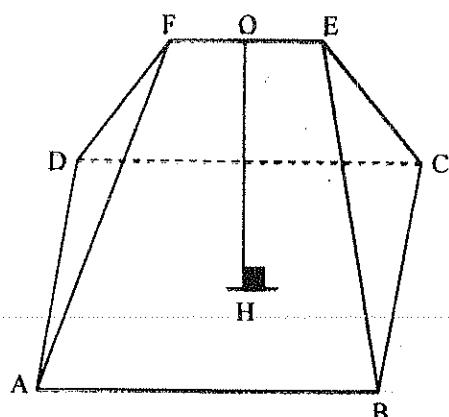


- H) A - G Cubo
 $AE = 8 \text{ u}$; $PD = 4 \text{ u}$
 $QF = 2 \text{ u}$; $GR = 4 \text{ u}$

- T) Relación de volúmenes formados al construir la sección que pasa por R, Q y P.

Resp: 0.7

59.-



H) ABCD rectángulo

$$AB = 8 \text{ m}$$

$$BC = 10 \text{ m}$$

OH \perp Plano A - C

$$OH = 5\sqrt{3} \text{ m}$$

FE \parallel Plano A - C

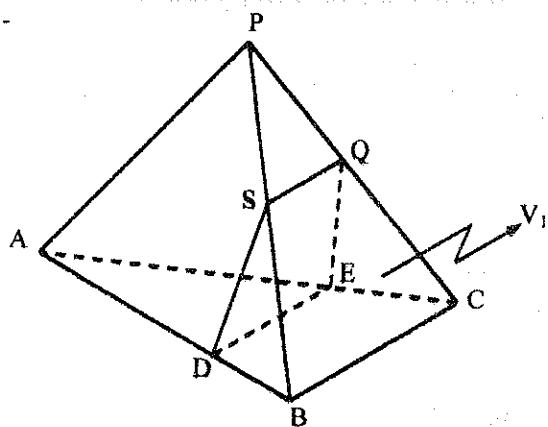
$$FE = 2 \text{ m}$$

$$FA = FD = EB = EC$$

T) V=?

Resp: $150\sqrt{3} \text{ m}^3$

60.-



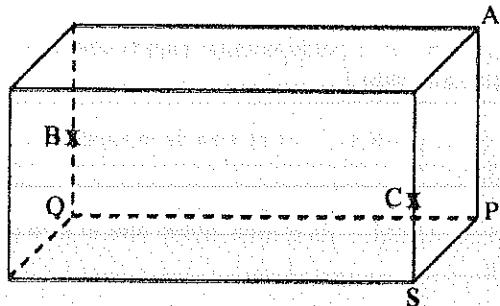
H) P - ABC Tetraedro regular.

$$SB = QC = a/3$$

$$DB = EC = a/3$$

T) V₁?=?Resp: $\frac{7a^3\sqrt{2}}{324}$

61.-



H) AP = 20 m

$$BQ = 4 \text{ m}$$

$$CS = 3 \text{ m}$$

$$SP = 8 \text{ m}$$

$$PQ = 10 \text{ m}$$

T) Determinar la relación de volúmenes

en que queda dividido el paralelepípedo rectangular, por la sección que pasa por los puntos A, B y C.

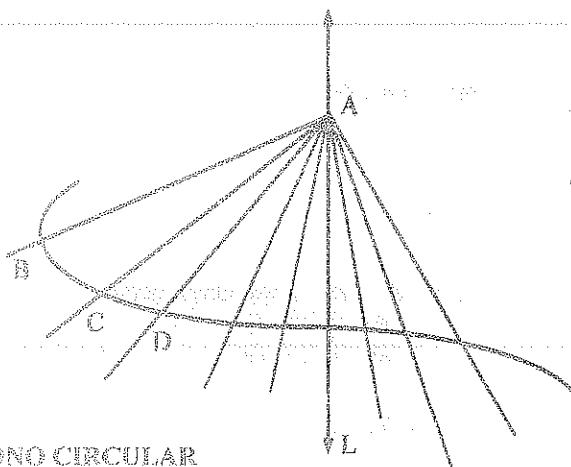
Resp: 0.51

UNIDAD 6

6.- CONOS

6.1.- SUPERFICIE CÓNICA

Es la superficie engendrada por una recta que se mueve pasando por un punto fijo y apoyándose constantemente sobre una línea curva.



EJE: L

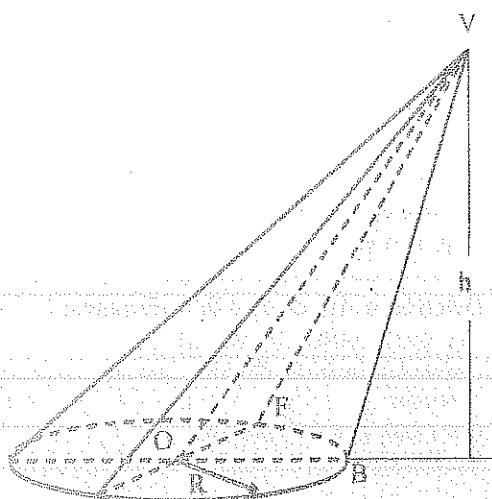
GENERATRIZ: AB, AC, AD, \dots

DIRECTRIZ: Línea curva $BCD \dots$

6.2.- CONO CIRCULAR

Es el sólido geométrico limitado por una superficie cónica.

6.3.- ELEMENTOS



EJE: VO

GENERATRIZ: $\overline{VA}, \overline{VB}, \dots$

DIRECTRIZ: $\odot(O, R)$

BASE: $\odot(O, R)$

ALTURA: h (perpendicular bajada desde el vértice a la base)

AREA LATERAL: Es el área de la superficie cónica.

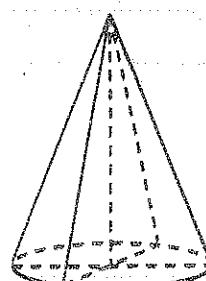
AREA TOTAL: Es el área lateral más el área de la base

SECCION AXIAL: Es la sección que contiene el eje del cono. VAF.

6.4.- CLASIFICACIÓN

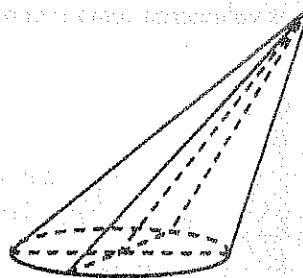
6.4.1.- CONO CIRCULAR RECTO O DE REVOLUCIÓN

El eje es perpendicular a la base.



6.4.2. - CONO CIRCULAR OBLICUO

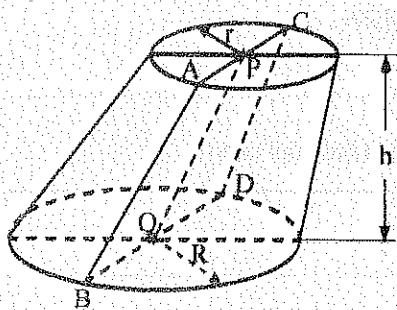
El eje no es perpendicular a la base.



6.5. - TRONCO DE CONO

Es la parte de un cono comprendida entre la base y una sección paralela a la base.

6.5.1. - ELEMENTOS



EJE : \overline{PQ}

BASE MAYOR : $\odot(Q, R)$

BASE MENOR : $\odot(P, r)$

GENERATRIZ : $\overline{AB}, \overline{CD}, \dots, g$

ALTURA : h_T . Perpendicular común a las bases.

6.6. - En todo cono circular se puede inscribir y circunscribir pirámides que tengan por aristas laterales las generatrices del cono, y por base, polígonos inscritos y circunscritos a la base. Por consiguiente se puede considerar al cono circular como una pirámide de infinito número de caras.

6.7. - El área lateral de un cono de revolución es igual al producto del semiperímetro de la base por su generatriz.

$$S_L = \frac{P_B \times g}{2} = \pi R g$$

6.8. - El volumen de un cono circular es igual a un tercio del producto de su base por su altura.

$$V = \frac{S_R \times h}{3} = \frac{\pi R^2 h}{3}$$

6.9. - En todo tronco de cono circular se puede inscribir y circunscribir troncos de pirámides, que tengan por aristas las generatrices, y por bases polígonos inscritos y circunscritos a las bases del cono. Por consiguiente se puede considerar al tronco del cono circular como un tronco de pirámide de infinito número de caras.

6.10. - El área lateral de un tronco de cono de revolución es igual al producto de la semisuma de los perímetros de las bases por su generatriz.

$$S_L = \left(\frac{P_B + P_b}{2} \right) g = \pi(R + r)g$$

6.11. - El volumen de un tronco de cono de revolución es igual a :

$$V = \frac{h}{3}(B + b + \sqrt{B \times b}) = \frac{h}{3}(\pi R^2 + \pi r^2 + \pi Rr)$$

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + R \times r)$$

6.12. - Dos conos circulares rectos son semejantes, si son engendrados por triángulos semejantes.

- 6.13. - Las áreas laterales o totales de dos conos circulares semejantes son entre sí como los cuadrados de sus lados homólogos y sus volúmenes como el cubo de dos lados homólogos.

$$\frac{S_L}{S_{L1}} = \frac{R^2}{R_1^2} = \frac{g^2}{g_1^2} = \dots$$

$$\frac{S_T}{S_{T1}} = \frac{R^2}{R_1^2} = \frac{g^2}{g_1^2} = \dots$$

$$\frac{V}{V_1} = \frac{R^3}{R_1^3} = \frac{g^3}{g_1^3} = \dots$$

6.14. - RELACIÓN PIRÁMIDE - CONO DE REVOLUCIÓN

6.14.1. - PIRÁMIDE INSCRITA EN UN CONO

- ◆ La base de la pirámide es un polígono inscrito en la base del cono
- ◆ Los vértices coiciden
- ◆ Tienen la misma altura

6.14.2. - PIRÁMIDE CIRCUNSCRITA A UN CONO

- ◆ La base de la pirámide es un polígono circunscrito a la base del cono
- ◆ Los vértices coiciden
- ◆ Tienen la misma altura

6.15. - EJERCICIOS

1. - Dado un cono de revolución de 12m de altura, dividir ésta en tres partes de suerte que los planos paralelos a la base trazados por los puntos obtenidos dividan la superficie lateral del cono en tres partes equivalentes.

Resp: 6.93m ; 9.8m

2. - La generatriz de un cono de revolución es igual al desarrollo del círculo de la base, y su área lateral es de 4m². Determinar la altura del cono. Resp: 2.79m

3. - Se da un cono de revolución de 3m de radio en la base y de 4m de altura. Determinar a qué distancia a partir del vértice debe trazarse un plano paralelo al de la base, para que el área del círculo de intersección sea igual al área lateral del tronco de cono resultante y calcular el volumen de dicho tronco.

Resp: 3.16m ; 19.11m³

4. - Hallar la relación de los radios de las bases de un tronco de cono de revolución para que el volumen del tronco V y el volumen del cono de base la menor y el vértice el centro de la mayor verifiquen la igualdad; V = 21v. Resp: 4

5. - Calcular los radios de las bases de un tronco de cono de revolución, dados la altura h, generatriz a y su

volumen $\frac{\pi b^2 h}{3}$. Aplicación para; h = 3m, a = 5m, V = 31πm³.

Resp: 1m ; 5m

6. - La generatriz de un cono de revolución mide 6u y forma un ángulo de 60° con el plano de la base. Determinar el volumen del cono. Resp: 48.97u³.

7. - A través del vértice de un cono de revolución se ha trazado un plano que forma con la base del cono un ángulo de 35°. Este plano corta a la base por la cuerda AB de longitud 5u que une los extremos del arco de la base del cono, correspondiente al ángulo central 40°. Hallar el volumen del cono. Resp: 269.09u³.

8. - La longitud de la generatriz de un cono de revolución mide u , la circunferencia de la base mide $20u$. Determinar su volumen. Resp: $25.45u^3$
9. - El ángulo en el vértice de una sección axial de un cono de revolución es igual a 40° y la suma de las longitudes de la altura y la generatriz es igual a $15u$. Hallar el volumen y el área total del cono. Resp: $53.23u^3 ; 86.42u^2$
10. - El volumen de un cono de revolución es V . Su altura se divide en tres partes iguales y por los puntos de división se trazan dos planos paralelos a la base. Hallar el volumen de la porción central. Resp: $\frac{7}{27}V$
11. - Determinar el volumen de un cono de revolución, sabiendo que una cuerda de longitud $4u$ trazada en el círculo de la base subtende un arco de 50° y la altura del cono forma un ángulo de 30° con la generatriz. Resp: $31.3 \cdot 4 \cdot 7 \cdot 4^3$
12. - La superficie lateral de un cono de revolución es igual a $100u^2$ y el área total igual a $140u^2$. Determinar el ángulo que forman la generatriz y la altura. Resp: 24°
13. - Cuando se desarrolla en un plano, la superficie lateral de un cono de revolución representa un sector circular de ángulo 40° y cuerda $6u$. Determinar el volumen del cono. Resp: $8.58u^3$
14. - Un plano trazado por el vértice de un cono de revolución y que forma un ángulo de 50° con la base, corta en el círculo de la base un arco de 60° , la distancia entre el plano y el centro de la base es $10u$. Hallar el volumen del cono. Resp: $3701.62u^3$
15. - Un cuadrado de lado $8u$, está inscrito en la base de un cono de revolución. Un plano trazado por el vértice del cono y un lado del cuadrado corta a la superficie del cono a lo largo de un triángulo cuyo ángulo en el vértice es 60° . Determinar el volumen y el área del cono. Resp: $189.56u^3 ; 402.28u^2$
16. - El volumen de un cono de revolución es $150u^3$, y la generatriz está inclinada un ángulo de 60° respecto de la base. ¿A qué altura se debe trazar un plano perpendicular al eje del cono para que divida la superficie lateral del cono en dos partes de áreas iguales? Resp: $10.65u$
17. - Calcular x en función de a para que se cumpla que el peso del aluminio sea igual al de la plata.
Si $\frac{\delta_{Al}}{\delta_{Ag}} = \frac{3}{7}$. Resp: $0.2a$
-
18. - ¿A qué distancia del vértice de un cono de revolución hay que trazar un plano paralelo a la base para que el área de la sección sea igual al área lateral del tronco de cono resultante? Si la altura del cono es $6m$ y el radio de la base $2m$. Resp: $5.22m$
19. - El área de una sección paralela a la base, resultante de cortar un cono de revolución de $3m$ de altura, distante del vértice $1m$, es de $2.6m^2$. Calcular el volumen del cono. Resp: $23.4m^3$
20. - La base de un cono de revolución es un círculo de $4m$ de radio y la altura mide $6m$. Calcular los volúmenes de los cuerpos que resultan al cortar dicho cono por un plano que pasa por el vértice y uno de los lados del hexágono regular inscrito en la base. Resp: $2.9m^3 ; 97.63m^3$
21. - Si un triángulo rectángulo gira sucesivamente alrededor de sus catetos, los volúmenes de los conos generados están en razón inversa de sus alturas.
22. - Se dispone de un sólido (peso específico relativo 0.3) de forma tronco cónica de revolución de las siguientes dimensiones; $R = 4m$, $r = 2m$, $h = 6m$, que flota en un recipiente que contiene agua con su base menor sumergida. Calcular el área mojada. Resp: $56.99m^2$

23. - Un cono tiene 3m de altura, la suma de la generatriz y el radio de la base es de 9m. Calcular el ángulo formado en el desarrollo de la superficie lateral del cono *de revolución*.

Resp: 288°

24. - Los radios de dos conos de revolución semejantes miden 4m y 6m respectivamente. ¿En qué relación están sus áreas laterales, las áreas totales y los volúmenes?

Resp: $\frac{4}{9} ; \frac{4}{9} ; \frac{8}{27}$

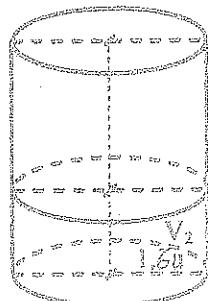
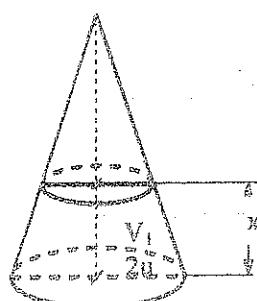
25. - La generatriz de un cono de revolución es de 8m. Calcular la generatriz de un cono de revolución semejante, sabiendo que su área total es el cuádruplo que la del primero.

Resp: 16m

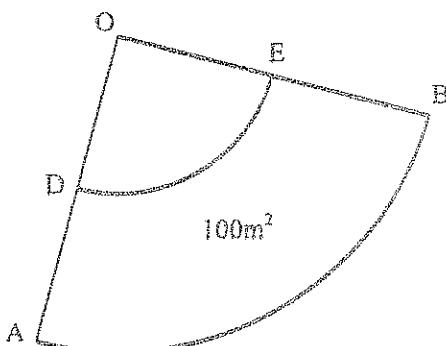
26. - En un cono de revolución demostrar que: $9\pi V^2 = S_T \sqrt{(S_T - S_L)(2S_L - S_T)}$

27. - Se tiene un cono de revolución y un cilindro de revolución de altura 3u. Hallar x para que $V_1 = V_2$.

Resp: 1.28u



28. -



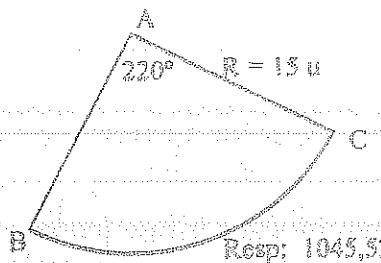
H) $\hat{DE} = 8m$

$AB = 20m$

- T) Volumen del Tronco de cono de revolución formado al doblar la superficie ABB'D.

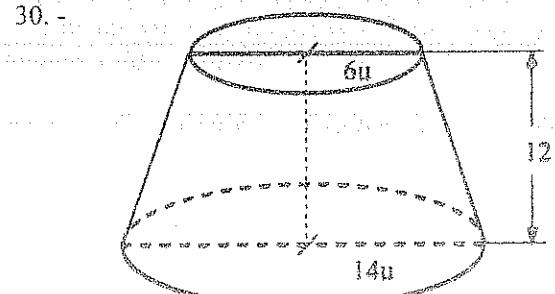
Resp: $113.88m^3$

29. - Hallar el volumen del cono de revolución que se puede construir con el sector circular de la figura.



Resp: $1045.52 u^3$

30. -

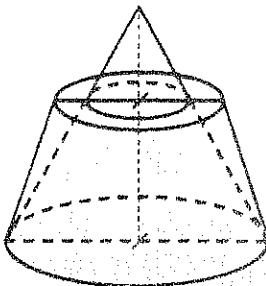


- T) Calcular la superficie húmeda si el tronco de cono de revolución contiene agua hasta una altura de 9u.

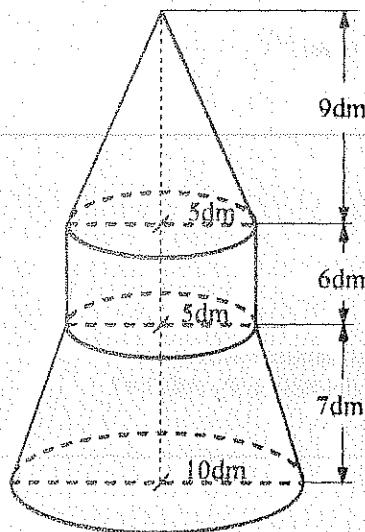
Resp: $1363.34 u^2$

- 31.- Calcular el volumen común entre el tronco de cono de revolución de dimensiones :
 $R = 20 \text{ u}$; $r = 12 \text{ u}$; $h = 15 \text{ u}$
y el cono de revolución de dimensiones :
 $R' = 12 \text{ u}$ y $h' = 20 \text{ u}$.

Resp:



- 32.-

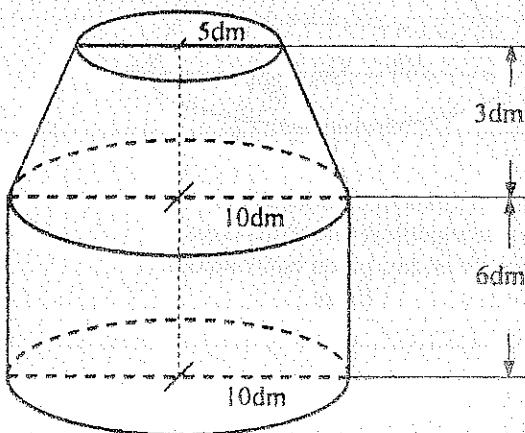


El recipiente contiene 1629,1 lts.
Calcular el nivel del líquido.

Resp: 14.09dm

- 33.- Calcular el volumen del recipiente.
Si el recipiente contiene agua en una cantidad igual a los $\frac{5}{6}$ del volumen total, calcular la altura del nivel del líquido.

Resp: 2028.57 u^3 , 6.5u

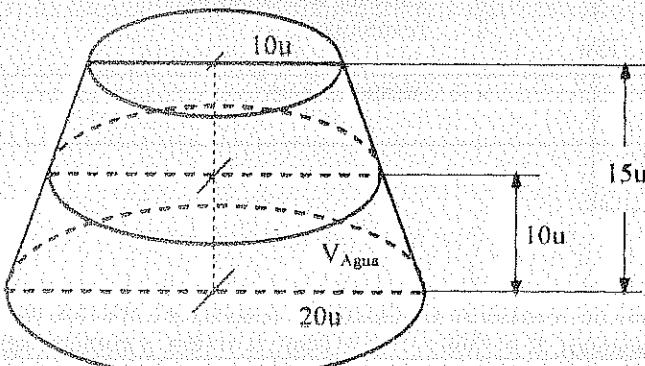


- 34.- Un tronco de cono de revolución de dimensiones $R = 10\text{u}$; $r = 5\text{u}$; $h = 15\text{u}$, apoyado en su base mayor contiene un volumen de agua igual a los $\frac{3}{5}$ del volumen total. Calcular la altura del nivel del líquido.
Resp:

- 35.- En un tronco de cono de revolución de 9cm de altura y radios de las bases; $R = 12\text{cm}$; $r = 4\text{cm}$, se trazan planos paralelos a las bases por los puntos de trisección de la altura. Calcular la superficie lateral del tronco de cono intermedio. Resp:

- 36.- Dado un cono de revolución de dimensiones; $R = 10\text{u}$ y $h = 15\text{u}$, está completamente lleno de agua. Calcular el volumen de agua que se derramará si se introduce un tronco de cono de revolución de dimensiones, $R = 16\text{u}$; $r = 5\text{u}$ y $h = 12\text{u}$. Resp:

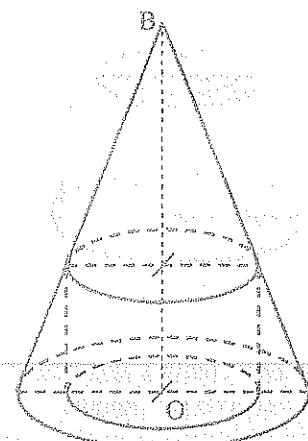
- 37.-



T) Calcular la altura del líquido y la superficie húmeda si se invierte el tronco de cono de revolución.

Resp: 13.18u ; 1746.94 u^2

38.-



$$\text{H) } OA = 5 \text{ u}$$

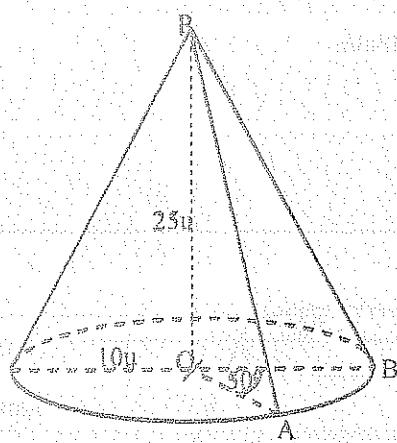
$$OB = 10 \text{ u}$$

$$S_{\text{LCilindro}} = \frac{1}{5} S_{\text{Lcono}}$$

$$\text{T) } V_{\text{Cilindro}} = ?$$

Resp:

39.-



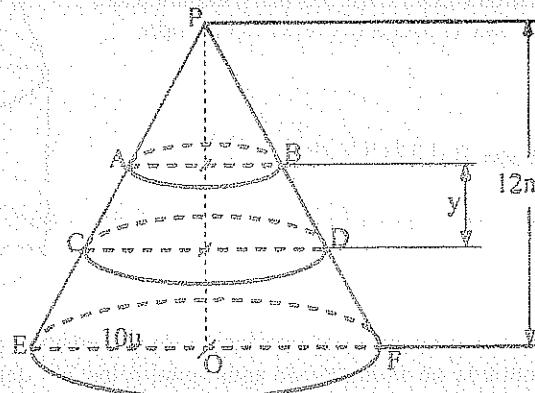
$$\text{T) } S_{\text{Lateral}} \text{ del Sólido P - OAB} = ?$$

$$\text{Volumen del Sólido P - AOB} = ?$$

Resp:

- 40.- Calcular "y", para que las secciones dividan a la superficie lateral del cono de revolución en tres partes equivalentes.

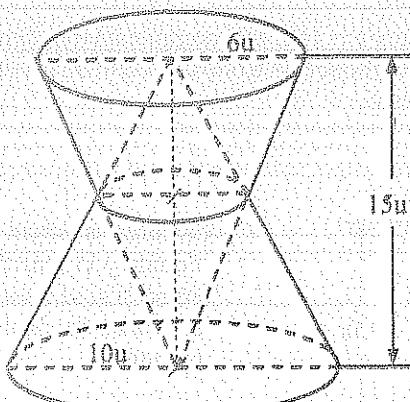
Resp:



- 41.- En un cono de revolución de dimensiones; $h = 10\text{cm}$ y $R = 7.5\text{cm}$, contiene agua hasta una altura de 4cm . ¿Cuánto subirá el nivel del líquido si se introducen dos cubos de hielo de arista 2cm ?

Resp: 0.66 cm

42.-



- T) Calcular el volumen común entre los dos conos de revolución.

Resp: 212 u^3

- 43.- Se tiene dos recipientes(tronco de cono de revolución y cilindro de revolución) abiertos en su parte superior. El tronco de cono tiene dimensiones; $R = 15\text{m}$; $r = 10\text{m}$; $h = 10\text{m}$. y contiene agua hasta

una altura de 10m. El cilindro tiene dimensiones $R = 9\text{m}$; $h = 8\text{m}$. Se introduce progresivamente el cilindro en el tronco de cono hasta que las bases coinciden. Si el espesor es despreciable calcular:

a) ¿Se derramará agua hacia el exterior del tronco de cono? ¿Cuánto?

b) ¿Qué cantidad de agua se introducirá en el cilindro? si no, ¿Qué nivel alcanza el agua?

$$\text{Resp: } 714.17\text{m}^3 ; 1321.56\text{m}^3$$

44. - Un cono está inscrito en una pirámide triangular regular. Hallar su volumen, sabiendo que la arista lateral de la pirámide es igual a $10u$ y el ángulo que forman dos aristas laterales adyacentes es 80° .

Resp:

45. - Una pirámide de base pentagonal está circunscrita a un cono circular recto, cuya altura es igual al radio de la base. La superficie total de la pirámide es dos veces mayor que la del cono. Hallar el volumen de la

pirámide si la superficie lateral del cono es igual a $\pi\sqrt{2}u^2$.

$$\text{Resp: } \frac{2\pi}{3}u^3.$$

46. - La base de una pirámide es un triángulo rectángulo, las caras laterales que pasan por los catetos forman con la base los ángulos de 30° y 60° . A la pirámide está circunscrito un cono circular recto. Determinar el volumen del cono si la altura de la pirámide es igual a $9u$.

$$310\pi u^3$$

Resp:

47. - La superficie lateral de una pirámide regular de base triangular con el lado de la base $6u$ es cinco veces mayor que la superficie de la base. Hallar el volumen del cono inscrito en la pirámide.

$$\text{Resp: } 6\pi\sqrt{2}u^3.$$

48. - Un cono y un cilindro tienen una base común, y el vértice del cono se encuentra en el centro de la otra base del cilindro. Hallar el valor del ángulo formado por el eje del cono y su generatriz, si se conoce que las superficies totales del cilindro y del cono son entre sí como 7 es a 4.

$$\text{Resp: } 36.8^\circ.$$

49. - El radio del círculo de la base de un cono mide $10u$ y el ángulo en el vértice de su sección axial es 60° . Hallar el volumen de una pirámide triangular circunscrita en el cono.

Resp:

50. - Las caras laterales de una pirámide cuadrangular regular están inclinadas respecto de la base un ángulo de 50° . La altura de las caras de la pirámide es $10u$. Hallar el área total del cono inscrito en la pirámide y el ángulo de inclinación de la arista lateral con la base.

Resp:

51. - Se tiene un tronco de cono de revolución y un cilindro de la misma base y altura. El volumen del tronco de cono es $2/3$ del volumen del cilindro. Hallar la razón de los radios de las bases del cono truncado.

$$\text{Resp: } \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

52. - Se tiene un cono de revolución y un cilindro de la misma base y altura. ¿A qué distancia de la base común hay que trazar un plano paralelo a la base para que el volumen del tronco sea igual al comprendido entre dicho tronco y el cilindro?

$$\text{Resp: } \left(\frac{3-\sqrt{3}}{2} \right) h$$

UNIDAD 7

7.- ESFERAS

7.1.- SUPERFICIES DE REVOLUCIÓN

7.1.1.- El área engendrada por una recta que gira alrededor de un eje que no lo atraviesa, y está situada con el en el mismo plano, tiene por medida la proyección de la recta en el eje multiplicada por el perímetro del círculo cuyo radio es la perpendicular a dicha recta en un punto medio hasta su encuentro con el eje.

- a) El segmento no tiene ningún punto común con el eje, ni le es paralelo.

$$T) S_{AB(360^\circ yy')} = DC \times 2\pi \times PQ$$

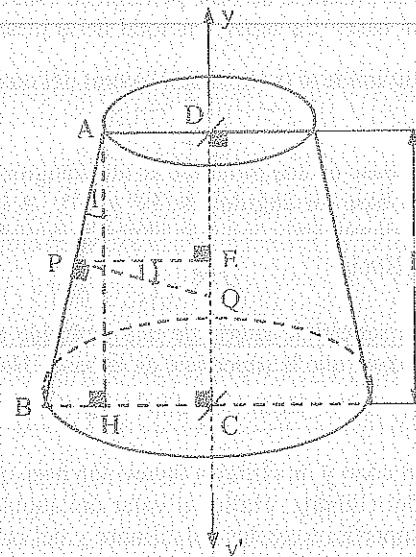
El área engendrada es el área lateral de un tronco de cono de revolución.

$$S_{AB(360^\circ yy')} = \pi \times AB (BC + AD)$$

$$S_{AB(360^\circ yy')} = \pi \times AB \times 2PE$$

$$\begin{aligned} &\Delta ABH \cdot \Delta PQE \\ &AB \times PE = AH \times PQ = DC \times PQ \end{aligned}$$

$$S_{AB(360^\circ yy')} = 2\pi \times DC \times PQ$$



- b) El segmento tiene un extremo con el eje.

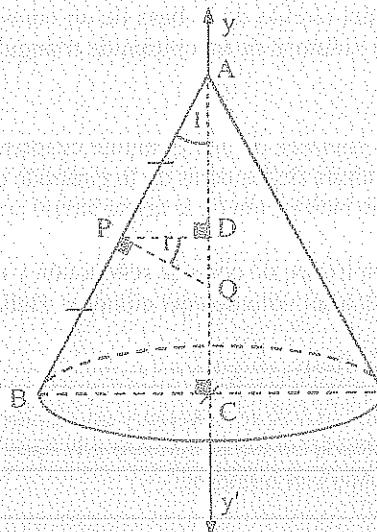
$$T) S_{AB(360^\circ yy')} = AC \times 2\pi \times PQ$$

El área engendrada es el área lateral de un cono de revolución.

$$S_{AB(360^\circ yy')} = \pi \times BC \times AB$$

$$S_{AB(360^\circ yy')} = \pi \times AB \times 2PD$$

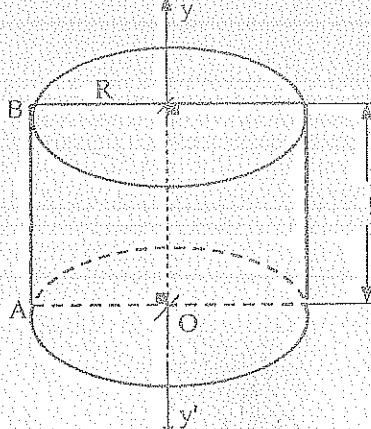
$$\begin{aligned} &\Delta ABC \cdot \Delta PDQ \\ &PD \times AB = AC \times PQ \end{aligned}$$



- c) El segmento es paralelo al eje.

$$T) S_{AB(360^\circ yy')} = 2\pi \times R \times h$$

El área engendrada es el área lateral de un cilindro de revolución.



7.1.2.- El área engendrada por una línea poligonal regular que gira alrededor de un eje situado en su plano y que pasa por su centro, sin atravesarla, es igual al producto del perímetro del círculo inscrito por la proyección de la poligonal en el eje.

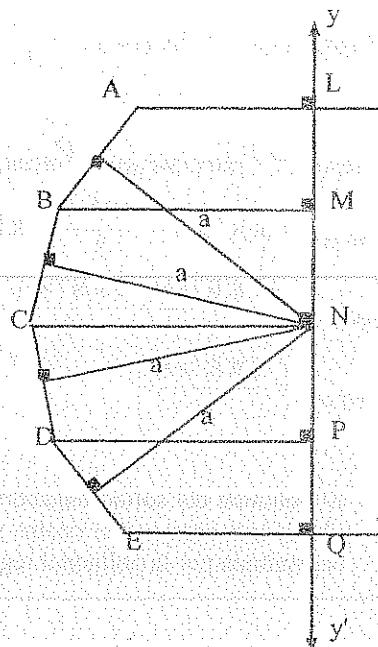
$$\text{T) } S_{ABCD \dots (360^\circ yy')} = h \times 2\pi \times a$$

$$S_{ABCD \dots (360^\circ yy')} = S_{AB(360^\circ yy')} + S_{BC(360^\circ yy')} + S_{CD(360^\circ yy')} + \dots$$

$$S_{ARCD \dots (360^\circ yy')} = LM \times 2\pi \times a + MN \times 2\pi \times a + NP \times 2\pi \times a + \dots$$

$$S_{ABCD \dots (360^\circ yy')} = 2\pi \times a + (LM + MN + NP + \dots)$$

$$S_{ABCD \dots (360^\circ yy')} = 2\pi \times a \times h$$



7.2.- VOLUMENES DE REVOLUCIÓN

7.2.1.- El volumen engendrado por un triángulo que gira alrededor de un eje situado en su plano, y que pasa por uno de sus vértices sin atravesarlo, tiene por medida el producto del área descrita por el lado opuesto al vértice situado en el eje por el tercio de la altura correspondiente.

a) El eje coincide con un lado del triángulo.

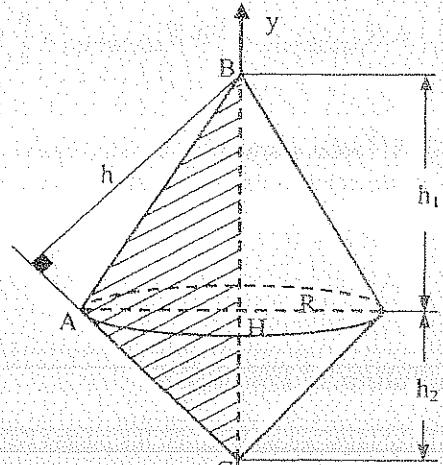
$$\text{T) } V_{\Delta ABC(360^\circ yy')} = S_{AC(360^\circ yy')} \times \frac{h}{3} = \pi R \times AC \times \frac{h}{3}$$

$$V_{\Delta ABC(360^\circ yy')} = V_{\Delta ABH(360^\circ yy')} + V_{\Delta AHC(360^\circ yy')}$$

$$V_{\Delta ABC(360^\circ yy')} = \pi R^2 \times \frac{h_1}{3} + \pi R^2 \times \frac{h_2}{3} = \pi R^2 \times \frac{BC}{3}$$

$$S_{\Delta ABC} = \frac{R \times BC}{2} = \frac{AC \times h}{2}$$

$$V_{\Delta ABC(360^\circ yy')} = \pi R \times AC \times \frac{h}{3}$$



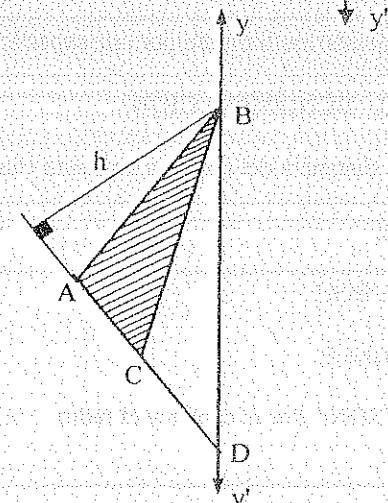
b) Un vértice del triángulo está en el eje.

$$\text{T) } V_{\Delta ABC(360^\circ yy')} = S_{AC(360^\circ yy')} \times \frac{h}{3}$$

$$V_{\Delta ABC(360^\circ yy')} = V_{\Delta ABD(360^\circ yy')} - V_{\Delta BCD(360^\circ yy')}$$

$$V_{\Delta ABC(360^\circ yy')} = S_{AD(360^\circ yy')} \times \frac{h}{3} - S_{CD(360^\circ yy')} \times \frac{h}{3}$$

$$V_{\Delta ABC(360^\circ yy')} = S_{AC(360^\circ yy')} \times \frac{h}{3}$$



c) Un vértice del triángulo está en el eje y el lado opuesto es paralelo al eje.

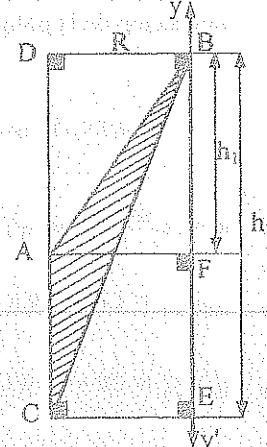
$$T) V_{\Delta ABC(360^\circ yy')} = S_{AC(360^\circ yy')} \times \frac{R}{3} = \frac{2}{3} \pi AC \times R^2$$

$$V_{\Delta ABC(360^\circ yy')} = V_{DBEC(360^\circ yy')} - V_{ACBE(360^\circ yy')} - (V_{ADBF(360^\circ yy')} - V_{AAFB(360^\circ yy')})$$

$$V_{\Delta ABC(360^\circ yy')} = \pi R^2 \times h - \frac{\pi R^2 \times h}{3} - \pi R^2 \times h_1 + \frac{\pi R^2 \times h_1}{3}$$

$$V_{\Delta ABC(360^\circ yy')} = \frac{2\pi R^2 \times h}{3} - \frac{2\pi R^2 \times h_1}{3}$$

$$V_{\Delta ABC(360^\circ yy')} = \frac{2\pi R^2 \times AC}{3}$$



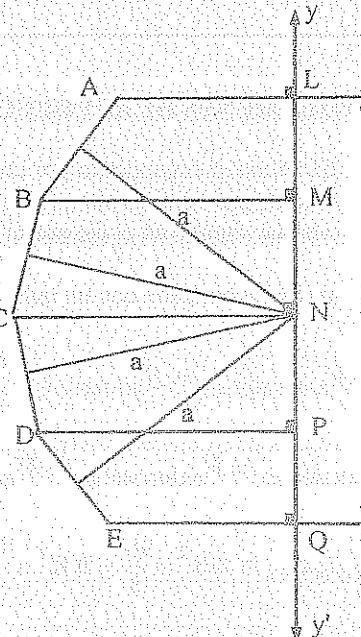
7.2.2.- El volumen del sólido engendrado por un sector poligonal regular que gira alrededor de un eje de su plano, que pasa por el centro y no le corta, es igual al tercio del producto del área de la superficie engendrada por la poligonal regular por la apotema.

$$T) V_{III(360^\circ yy')} = S_{ABCD..(360^\circ yy')} \times \frac{a}{3}$$

$$V_{III(360^\circ yy')} = V_{\Delta AOB(360^\circ yy')} + V_{\Delta BOC(360^\circ yy')} + V_{\Delta COD(360^\circ yy')} + \dots$$

$$V_{III(360^\circ yy')} = S_{AB(360^\circ yy')} \times \frac{a}{3} + S_{BC(360^\circ yy')} \times \frac{a}{3} + S_{CD(360^\circ yy')} \times \frac{a}{3} + \dots$$

$$V_{III(360^\circ yy')} = S_{ABCD..(360^\circ yy')} \times \frac{a}{3}$$



7.3. - SUPERFICIE ESFÉRICA

Es el lugar geométrico de los puntos del espacio que equidistan de otro punto llamado centro.

7.4. - ESFERA

Es un sólido geométrico limitado por una superficie esférica.

7.4.1. - ELEMENTOS - DENOMINACIÓN

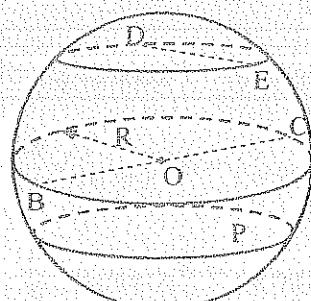
RADIO: Es la distancia del centro a un punto cualquiera de la superficie esférica.

CUERDA: DE

DIÁMETRO: BOC

SECCIÓN: Plano P

DENOMINACIÓN: Por el centro y el radio $\square(O, R)$



7.4.2.- DETERMINACIÓN

Cuatro puntos que no están en el mismo plano determinan una esfera y solo una.

7.4.3.- INTERSECCIÓN PLANO - ESFERA

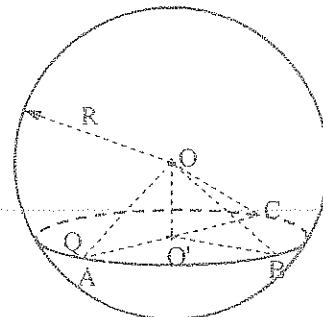
Toda sección plana de una esfera es un círculo.

$$\text{~} \Rightarrow \text{~} T) \text{ Sección } Q = \square(O', O'A)$$

$$D) \triangle OAO' \cong \triangle OO'B \cong \triangle OO'C \cong \dots$$

$$\Rightarrow O'A = O'B = O'C = \dots$$

$$\Rightarrow \text{Sección } Q = \square(O', O'A)$$



7.4.4.- CÍRCULO MÁXIMO

Es toda sección plana que contiene el centro de la esfera.

7.4.5.- CÍRCULO MENOR

Es toda sección plana que no contiene al centro de la esfera.

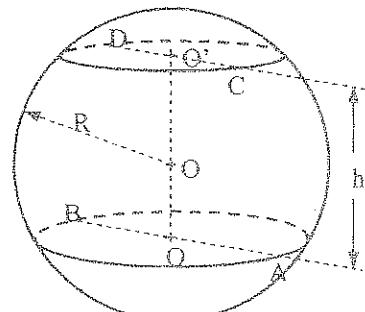
7.5.- ZONA ESFÉRICA O SEGMENTO ESFÉRICO DE DOS BASES

Es la parte de la superficie esférica limitada por dos planos paralelos.

7.5.1.- ELEMENTOS

ALTURA : La distancia entre los dos planos paralelos : h

BASES: Las secciones paralelas A-B y C-D



7.5.2.- ÁREA LATERAL

$$S_{ABCD\dots(360^\circ\text{ y y}')} = h \times 2\pi \times a$$

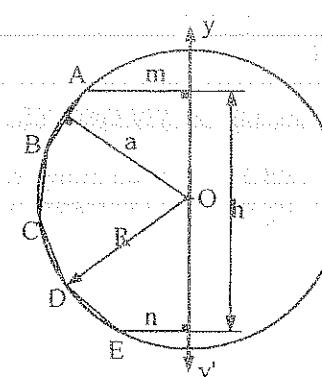
Si el número de lados de la línea poligonal regular se duplica indefinidamente.

$$n \rightarrow \infty$$

$$a \rightarrow R$$

$$\Rightarrow S_{ABCD\dots(360^\circ\text{ y y}')} \rightarrow S_{\text{Zona}}$$

$$\Rightarrow S_{\text{Zona}} = 2\pi \times R \times h$$



7.5.3. AREA TOTAL

Es igual al área lateral más las áreas de las bases

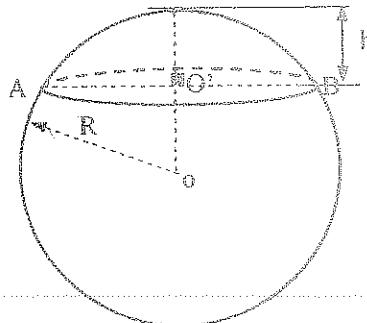
$$A_T = 2\pi R h + \pi m^2 + \pi n^2$$

7.6.- CASQUETE ESFÉRICO O SEGMENTO ESFÉRICO DE UNA BASE

Es la parte de la superficie esférica limitada por un plano secante y otro tangente paralelos.

7.6.1.- ELEMENTOS

ALTURA : La distancia entre los planos paralelos : h



7.6.2.- ÁREA LATERAL

El área lateral de un casquete es igual al producto de la longitud del círculo máximo por su altura.

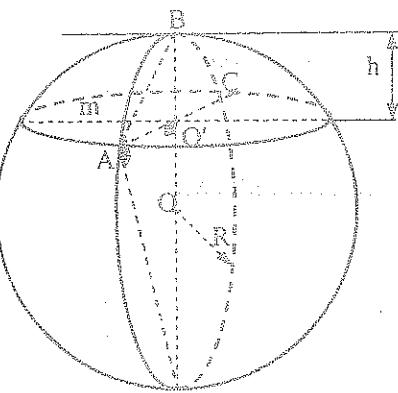
Siendo el casquete esférico una zona:

$$S_{\text{Casquete}} = 2 \pi \times R \times h$$

$$AB^2 = 2 R h \quad \Rightarrow \quad S_{\text{Casquete}} = \pi \times AB^2$$

7.6.3.- ÁREA TOTAL

$$A_T = 2 \pi r h + \pi m^2$$



7.6.4.- ÁREA DE UNA ESFERA

El área de una esfera es igual al producto del círculo máximo por su diámetro.

La Esfera es una Zona cuya altura es igual al diámetro.

$$S_{\text{Esfera}} = 2 \pi \times R \times h$$

$$h = 2 R \quad \Rightarrow \quad S_{\text{Esfera}} = 4 \pi \times R^2$$

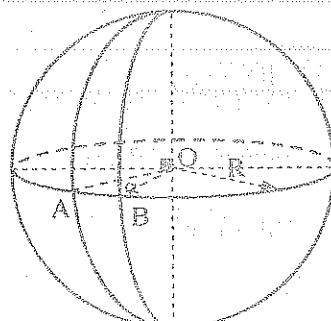
7.7.- HUSO ESFÉRICO

Es la parte de la superficie esférica comprendida entre dos semicírculos máximos.

7.7.1.- ELEMENTOS

LADOS : Son los semicírculos máximos

ÁNGULO DEL HUSO : El ángulo formado por los dos semicírculos máximos.



7.7.2.- ÁREA

Es igual al área de la esfera multiplicada por la relación entre el ángulo del huso y 360° .

$$S_{\text{Huso}} = \frac{4 \pi \times R^2 \times \alpha^\circ}{360^\circ}$$

(ángulo α en grados)

$$S_{\text{Huso}} = \frac{\pi \times R^2 \times \alpha}{90^\circ}$$

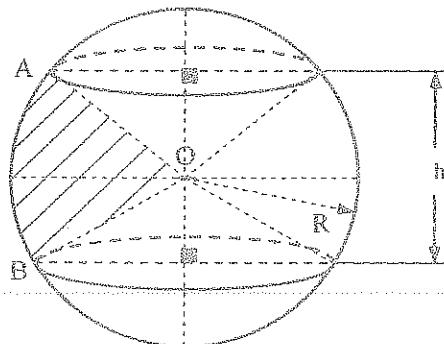
(ángulo α en radianes)

7.8.- SECTOR ESFÉRICO

Es la parte de la esfera formada por un sector circular que gira alrededor de un diámetro situado en su plano.

7.8.1.- ELEMENTOS

ALTURA : Proyección del arco AB en el diámetro : h



7.8.2.- VOLUMEN

El volumen de un sector esférico es igual al producto del área de la zona o casquete que le sirve de base por el tercio del radio de la esfera.

$$V_{\text{Sector}} = S_{ABCD \dots (360^\circ \text{ y y'})} \times \frac{a}{3}$$

$$V_{\text{Sector}} = h \times 2\pi \times a \times \frac{a}{3}$$

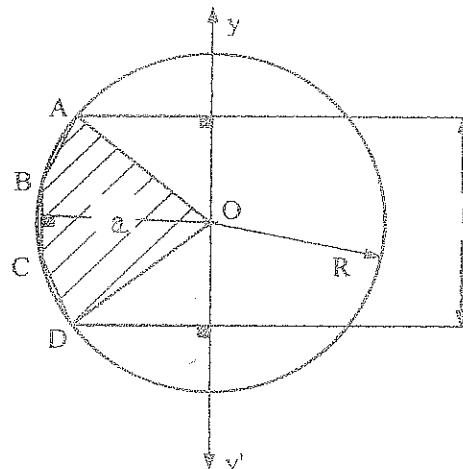
Si el número de lados de la línea poligonal regular se duplica indefinidamente, se tiene;

$$n \rightarrow \infty$$

$$a \rightarrow R$$

$$V_{\text{Sector}} \rightarrow V_{\text{Sector Esférico}}$$

$$V_{\text{Sector Esférico}} = \frac{2}{3}\pi \times R^2 \times h$$



7.8.3.- VOLUMEN DE UNA ESFERA

El volumen de una esfera es igual al producto del área esférica por el tercio del radio.

El volumen de una esfera puede ser considerado como el de un sector esférico engendrado por la revolución de la mitad de una región circular alrededor de un diámetro.

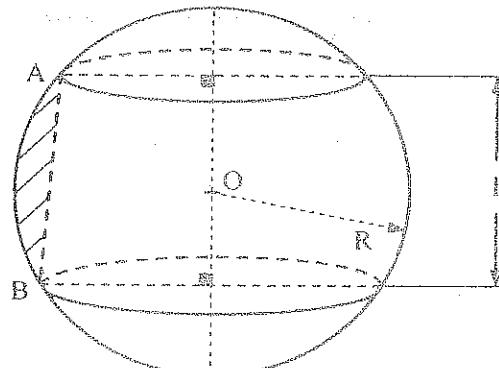
$$h = 2R \quad \Rightarrow \quad V_{\text{Esfera}} = \frac{4}{3}\pi \times R^3$$

7.9.- ANILLO ESFÉRICO

Es la parte de una esfera formada por un segmento circular que gira alrededor de un diámetro situado en su plano exterior a dicho segmento.

7.9.1.- ELEMENTOS

ALTURA : Proyección del arco AB en el diámetro : h



7.9.2.- VOLUMEN

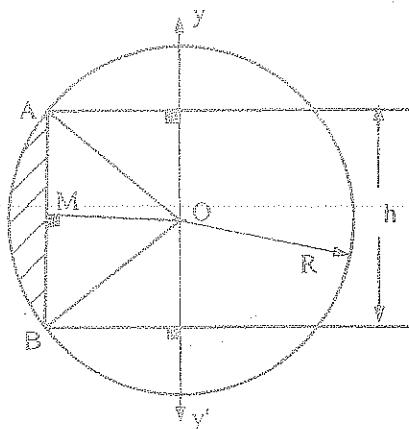
El volumen del anillo esférico es igual a la sexta parte del volumen del cilindro cuya base tiene por radio la cuerda del segmento circular y por altura la altura del anillo esférico.

$$V_{\text{Anillo Esférico}} = V_{\text{Sector Esférico}} - V_{\Delta DAB(360^\circ \text{ pp})}$$

$$V_{\text{Anillo Esférico}} = \frac{2}{3}\pi \times R^2 \times h - \frac{2}{3}\pi \times OM \times h \times OM$$

$$OM^2 = R^2 - \frac{AB^2}{4}$$

$$V_{\text{Anillo Esférico}} = \frac{1}{6}\pi \times AB^2 \times h$$



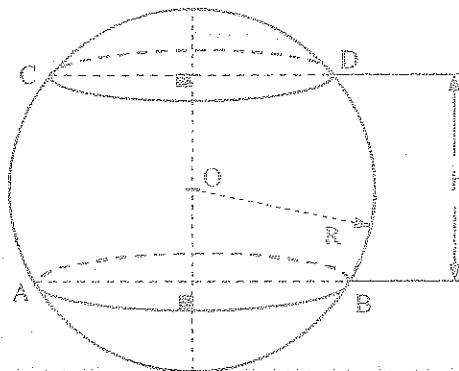
7.10. - SEGMENTO ESFÉRICO DE DOS BASES O ZONA ESFERICA

Es la parte de la esfera comprendida entre dos planos paralelos secantes.

7.10.1. - ELEMENTOS

BASE S: Las secciones paralelas
A-B; C-D

ALTURA : La distancia entre las bases



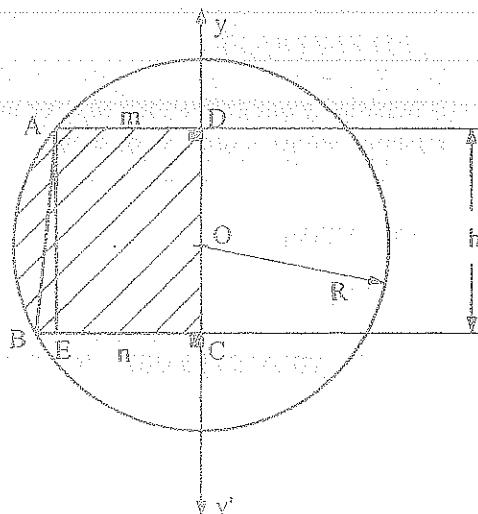
7.10.2. - VOLUMEN

$$V_{\text{Segmento}} = V_{\text{Tronco de Cono}} + V_{\text{Anillo}}$$

$$V_{\text{Segmento}} = \frac{\pi h}{3} (m^2 + mn + n^2) + \frac{\pi h \times AB^2}{6}$$

$$AB^2 = h^2 + BE^2 = h^2 + (n-m)^2$$

$$V_{\text{Segmento}} = \frac{\pi h}{6} (3m^2 + 3n^2 + h^2)$$



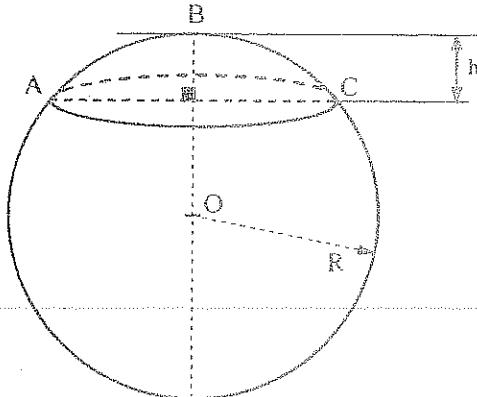
7.11. - SEGMENTO ESFÉRICO DE UNA BASE O CASQUETE ESFÉRICO

Es la parte de la esfera comprendida entre dos planos paralelos el uno secante y el otro tangente.

7.11. - ELEMENTOS

BASE : Sección A-C

ALTURA : h



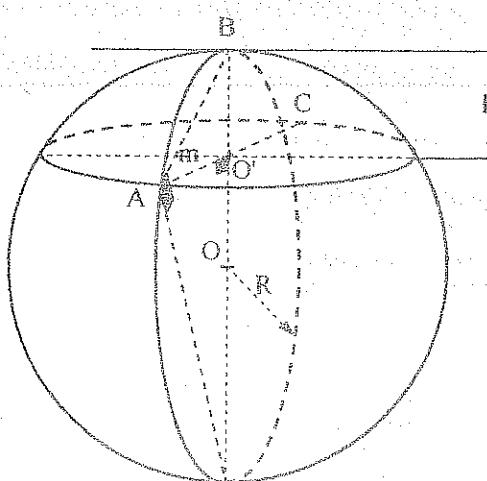
7.11.2. - VOLUMEN

Si uno de los planos es tangente a la esfera, la sección se reduce a un punto.

$$V_{\text{Segmento}} = \frac{\pi h}{6} (3m^2 + h^2)$$

$$m^2 = h(2R - h)$$

$$V_{\text{Segmento}} = \frac{\pi h^2}{3} (3R - h)$$



7.12. - RELACIÓN ESFERA SÓLIDO

El volumen de un sólido geométrico, es igual al producto de la superficie total por un tercio del radio de la esfera inscrita.

$$\text{T.) } V = \frac{S_T \times r}{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 \times h \quad (1)$$

$$\frac{S_T \times r}{3} = \frac{(S_L + S_B) \times r}{3}$$

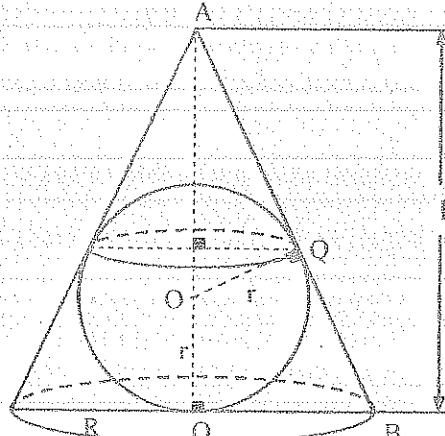
$$\frac{S_T \times r}{3} = \frac{(\pi R \times AB + \pi R^2) \times r}{3}$$

$$\frac{S_T \times r}{3} = \frac{\pi R \times r(AB + R)}{3} \quad (2)$$

$\Delta AOB \sim \Delta AO_1Q$

$$\frac{R}{AB} = \frac{r}{h-r} \Rightarrow \frac{R}{AB+r} = \frac{r}{h} \quad (3)$$

$$(3) \text{ en } (2) \frac{S_T \times r}{3} = \frac{\pi R \times r \times R \times h}{3 \times r} = \frac{\pi R^2 \times h}{3} \quad (4) \Rightarrow (1) \text{ en } (4) \quad V = \frac{S_T \times r}{3} \quad ////$$



7.13. - RELACIÓN ESFERA - PRISMA

7.13.1. - ESFERA INSCRITA EN UN PRISMA RECTO

- Es tangente a todas las caras del prisma.
- El radio del círculo inscrito en la base es igual al radio de la esfera.
- La altura del prisma es igual al diámetro de la esfera.

7.13.2. - ESFERA CIRCUNSCRITA A UN PRISMA

- Los vértices del prisma están en la superficie de la esfera.

7.14. - RELACIÓN ESFERA - CILINDRO CIRCULAR

7.14.1. - ESFERA INSCRITA EN UN CILINDRO CIRCULAR RECTO

- La esfera es tangente tanto a las bases del cilindro como a su superficie lateral.
- Los centros de las bases son los puntos de tangencia de la esfera con el cilindro de revolución.
- Los puntos de tangencia con la superficie lateral es un círculo máximo paralelo a las bases.
- El radio del círculo inscrito en la base es igual al radio de la esfera.
- La altura del prisma es igual al diámetro de la esfera.

7.14.2. - ESFERA CIRCUNSCRITA A UN CILINDRO CIRCULAR RECTO

- Las bases del cilindro de revolución son secciones planas paralelas iguales de la esfera.

7.15. - RELACIÓN ESFERA - PIRÁMIDE

7.15.1. - ESFERA INSCRITA EN UNA PIRÁMIDE

- La esfera es tangente a todas las caras laterales como a la base.
- El centro de la esfera inscrita equidista de todas las caras de la pirámide.
- Una esfera siempre se puede inscribir en una pirámide regular.
- Una esfera puede inscribirse en cualquier pirámide de base triangular.

7.15.2. - ESFERA CIRCUNSCRITA A UNA PIRÁMIDE

- Todos los vértices de la pirámide se encuentran en la superficie de la esfera.
- El centro de la esfera es el punto de intersección de todos los planos bisectrales de todos los ángulos diédricos de la pirámide. Es el punto de intersección de todos los planos trazados por los puntos medios de las aristas de la pirámide perpendicularmente a dichas aristas.
- Una esfera puede circunscribirse a una pirámide si es posible circunscribir un círculo al polígono que sirve de base a la pirámide.
- Una esfera puede circunscribirse a una pirámide triangular.
- Una esfera puede circunscribirse a una pirámide regular.

7.16. - RELACIÓN ESFERA - CONO CIRCULAR

7.16.1. - ESFERA INSCRITA EN UN CONO DE REVOLUCIÓN

- Es tangente a la base del cono y a su superficie lateral.
- El centro de la base es el punto de tangencia.
- La tangencia con la superficie lateral es un círculo situado en un plano paralelo a la base.
- El centro de la esfera se halla en la altura del cono.

7.16.2. - ESFERA CIRCUNSCRITA A UN CONO DE REVOLUCIÓN

- El vértice del cono se halla en la superficie de la esfera.
- La base del cono es una sección plana de la esfera.
- El centro de la esfera está en la altura del cono.

7.17. - RELACIÓN ESFERA - TRONCO DE PIRÁMIDE

7.17.1. - ESFERA INSCRITA EN UN TRONCO DE PIRÁMIDE

- Es tangente a las bases y a todas las caras laterales
- El diámetro de la esfera es igual a la altura del tronco de pirámide

7.17.2. - ESFERA CIRCUNSCRITA A UN TRONCO DE PIRÁMIDE

- Las bases del tronco de pirámide son polígonos inscritos en dos secciones planas de la esfera.

7.18. - RELACIÓN ESFERA - TRONCO DE CONO DE REVOLUCIÓN

7.18.1. - ESFERA INSCRITA EN UN TRONCO DE CONO DE REVOLUCIÓN

- La esfera es tangente a las bases y a la superficie lateral
- Los puntos de tangencia son los centros de las bases
- La tangencia con la superficie lateral es un círculo
- La altura es igual al diámetro de la esfera

7.18.2. - ESFERA CIRCUNSCRITA A UN TRONCO DE CONO DE REVOLUCIÓN

- Las bases del tronco de cono de revolución son dos secciones planas paralelas.

7.19. - EJERCICIOS

1. - Dos esferas de radios 15 m y 13 m tienen sus centros a 14 m de distancia. Calcular el volumen común de las dos esferas. Resp: 3547.9 m^3

2. - Desde qué altura podría verse el $1/6$ de la superficie de la tierra. Resp: $R/2$

3. - Dados los radios de dos esferas que se cortan y la distancia de sus centros, calcular el espesor, diámetro, superficie y volumen de la lente que determinan.

Aplicación : $R = 10 \text{ m}$, $r = 8 \text{ m}$, $d = 15 \text{ m}$. Resp: 3 m ; 14.91 m^2 ; 192.68 m^3

4. - Desde un punto situado sobre la superficie de una esfera de radio igual a 6 u, se trazan tres cuerdas iguales que forman un 30° entre sí. Determinar sus longitudes. Resp: 11.45 u

5. - Cuatro esferas iguales de radio 8 u son tangentes exteriormente una a otra, de manera que cada una es tangente a las otras tres. Hallar el radio de la esfera que es tangente a las cuatro esferas primeras y que las contienen en su inferior. Resp: 19.59 u

6. - Hallar el volumen de un segmento esférico de altura 7 u cuya sección equidistante de las bases es 58 u^2 . Resp: 1185.68 u^3

7. - En una esfera hueca, cuyo radio interior es de 12 cm, se vierte una cierta cantidad de agua de suerte que la relación entre las áreas de la superficies mojada y sin mojar es de $3/5$. Hallar el área de la superficie húmeda. Resp: 678.58 cm^2

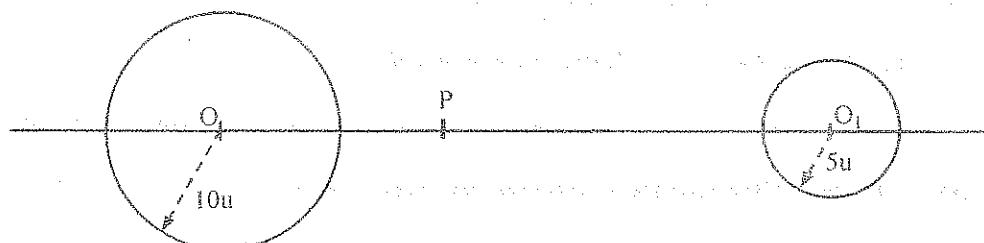
8. - Se tiene una esfera de radio 10 m y densidad relativa 0.6 que flota en un recipiente que contiene agua. Calcular la superficie mojada de la esfera. Resp: 712.58 m^2

9. - Se tiene una semiesfera de densidad 1.5 g/cm^3 , el radio exterior de 10 dm, y el radio interior de 9 dm, que flota en un recipiente que contiene agua. Hallar cuántos litros de aceite se deben adicionar a la semiesfera para que ésta se sumerja los $2/3$ de su radio exterior. Densidad del aceite 0.8 g/cm^3 . Resp: 293.26 lt .

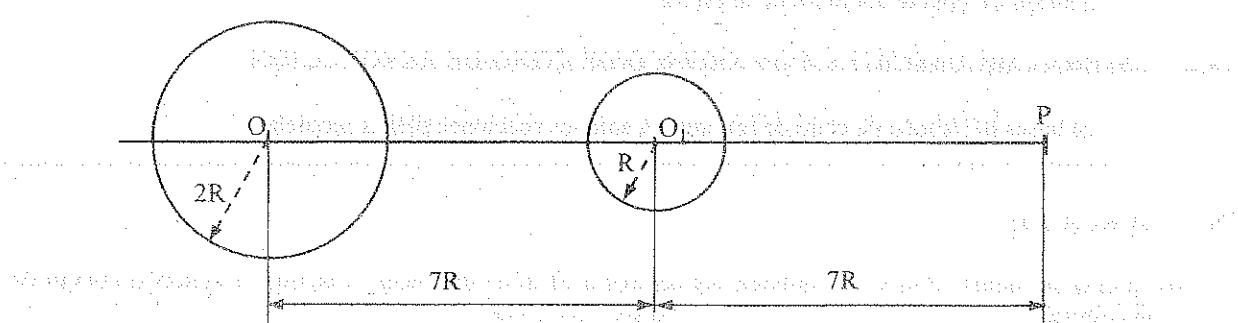
10. - De un extremo del diámetro de una esfera se ha trazado una cuerda de tal modo que la superficie formada por la rotación de la cuerda alrededor del diámetro divide el volumen de la esfera en dos partes equivalentes. Determinar el ángulo entre la cuerda y el diámetro. Resp: $\text{Arc Cos}\left(\frac{1}{4\sqrt{2}}\right)$

11. - Cortar una esfera de radio 10 u con un plano tal que las áreas de los casquitos formados estén en la relación de $2/3$. Hallar la distancia desde el centro de la esfera a la sección. Resp: 2 u.

12. - En que punto de la línea de centros deberá situarse un observador P para mirar áreas iguales en las dos esferas, si la distancia entre los centros es de 50 u. Resp: 12.75 u

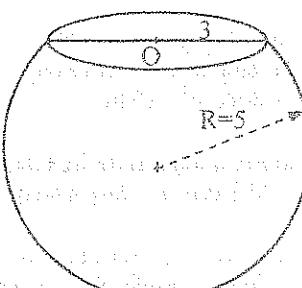


13. - Calcular en la esfera O, el área que observa una persona P ubicada en la línea de centros como indica la figura. Resp: $35 R^2$

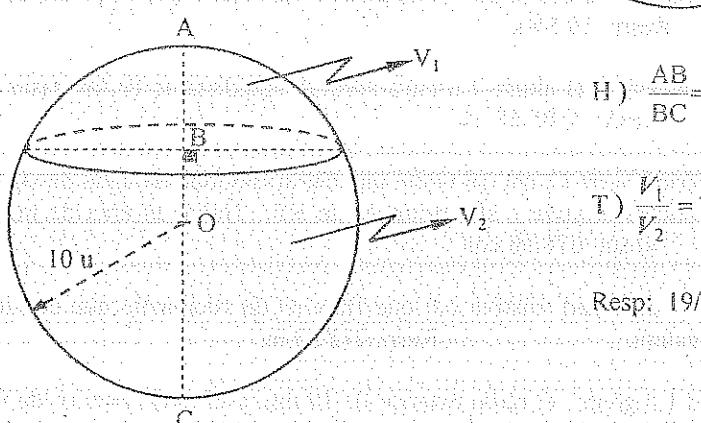


14. - El recipiente de la figura (segmento esférico de una base) se tapa con una esfera de radio 4 u. Calcular el volumen disponible en el recipiente.

Resp: 512.39 u^3



15. -



$$\text{T) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{H) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{I) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{J) } \frac{AB}{AC} = ?$$

$$\text{K) } \frac{BC}{AC} = ?$$

$$\text{L) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{M) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{N) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{O) } \frac{AB}{AC} = ?$$

$$\text{P) } \frac{BC}{AC} = ?$$

$$\text{Q) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{R) } \frac{AB}{AC} = ?$$

$$\text{S) } \frac{BC}{AC} = ?$$

$$\text{T) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{U) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{V) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{W) } \frac{AB}{AC} = ?$$

$$\text{X) } \frac{BC}{AC} = ?$$

$$\text{Y) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{Z) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{AA) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{AB) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{BB) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{CC) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{DD) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{EE) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{FF) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{GG) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{HH) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{II) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{JJ) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{KK) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{LL) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{MM) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{NN) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{OO) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{PP) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{QQ) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{RR) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{SS) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{TT) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{UU) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{VV) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{WW) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{XX) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{YY) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{ZZ) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{AA) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{BB) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{CC) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{DD) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{EE) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{FF) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{GG) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{HH) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{II) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{JJ) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{KK) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{LL) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{MM) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{NN) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{OO) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{PP) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{QQ) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{RR) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{SS) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{TT) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{UU) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{VV) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{WW) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{XX) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{YY) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{ZZ) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{AA) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{BB) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{CC) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{DD) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{EE) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{FF) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{GG) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{HH) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{II) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{JJ) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{KK) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{LL) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{MM) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{NN) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{OO) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{PP) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{QQ) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{RR) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{SS) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{TT) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{UU) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{VV) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{WW) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{XX) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{YY) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{ZZ) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{AA) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{BB) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{CC) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{DD) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{EE) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{FF) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{GG) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{HH) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{II) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{JJ) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{KK) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{LL) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{MM) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{NN) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{OO) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{PP) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{QQ) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{RR) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{SS) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{TT) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{UU) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{VV) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{WW) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{XX) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{YY) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{ZZ) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{AA) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{BB) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{CC) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{DD) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{EE) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{FF) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{GG) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{HH) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{II) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{JJ) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{KK) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{LL) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{MM) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{NN) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{OO) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{PP) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{QQ) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{RR) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{SS) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{TT) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{UU) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{VV) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

$$\text{WW) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{XX) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

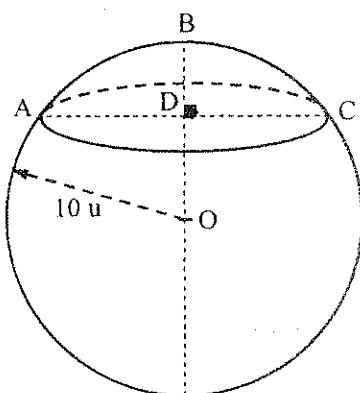
$$\text{YY) } \frac{AB}{BC} = ?$$

$$\text{ZZ) } \frac{V_1}{V_2} = ?$$

16. - Si la superficie de la zona esférica es la tercera parte de la superficie de la esfera. Determinar el volumen del segmento esférico de dos bases.

Resp: 2034.84 u^3

17.-



H) $AD = 3 \text{ u}$
 $DB = 2 \text{ u}$

T) Área y volumen del casquete esférico menor.

Resp:

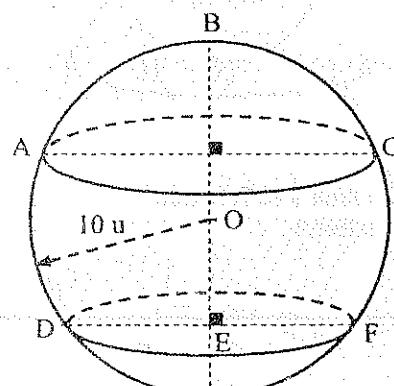
18.-

H) $S_{\text{Zona-ACFD}} = \frac{7}{16} S_{\text{Esfera}}$

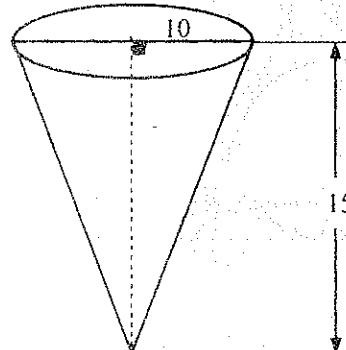
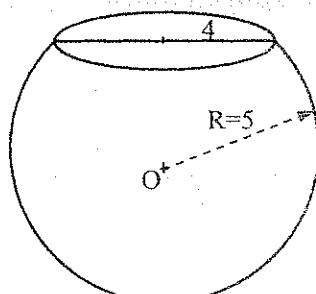
$$\frac{BD}{DE} = \frac{3}{4}$$

T) $V_{\text{ACFD}} = ?$

Resp: 2562.65 u^3



19.- El recipiente de la figura (segmento esférico de una base) se tapa con el cono de revolución. Calcular el volumen disponible. Resp: 368.61 u^3

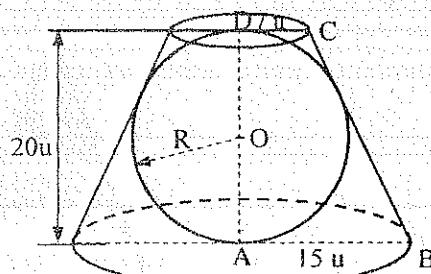


20.- Se tiene un cono de helado de diámetro 5 cm y altura 12 cm, se depositan en él tres cucharadas semiesféricas de helado de 5 cm de diámetro. Cuando el helado se derrita dentro del cono, lo rebosará?. Cuánto? Si no lo hace, qué altura alcanzará en el cono? Resp: 19.63 u^3

21.- Las áreas de dos secciones paralelas ubicadas a lados distintos del centro de una esfera son de 283.69 m^2 y 204.06 m^2 . Si la distancia entre las dos secciones es de 10 m. Calcular el área de la zona esférica formada. Resp: 628.3 m^2

22.- El recipiente tronco cónico de revolución esta lleno de agua y contiene una esfera sólida inscrita. Calcular el nivel del agua cuando se retira la esfera.

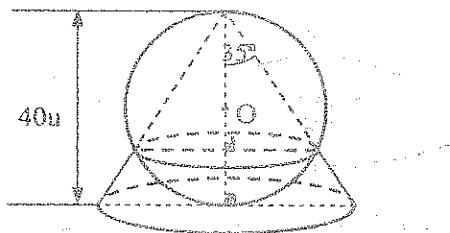
Resp: 5.96 u



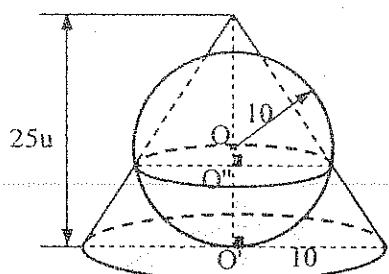
23.- Se tiene una esfera inscrita en un cono de revolución de 15 cm de radio y 32 cm de altura. Calcular el volumen comprendido entre la base del cono y la superficie de la esfera. Resp:

24.- Determinar el volumen común entre la esfera y el cono.

Resp: 18418.77 u^3



25.-

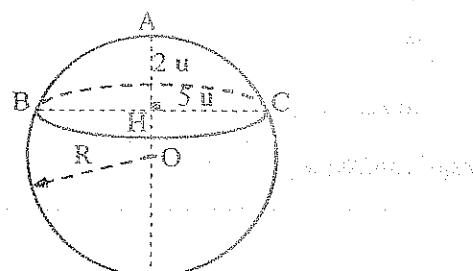


Determinar el volumen común entre la esfera y el cono

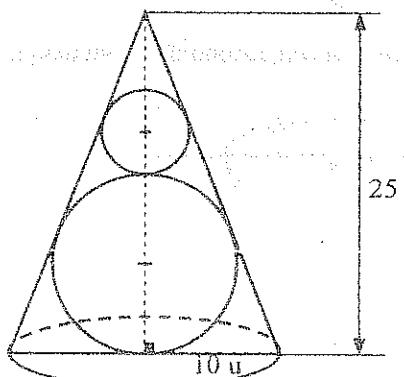
Resp: 1961.27 u^3

26.- Determinar el área y el volumen del casquete esférico.

Resp: $91.10 \text{ u}^2; 82.72 \text{ u}^3$



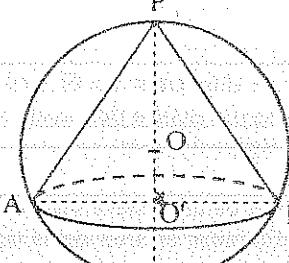
27.-



Calcular el volumen de aire de la siguiente figura.

Resp:

28.-



H) $V_{P-AB} = \frac{1}{4} V_{\text{Esfera}}$

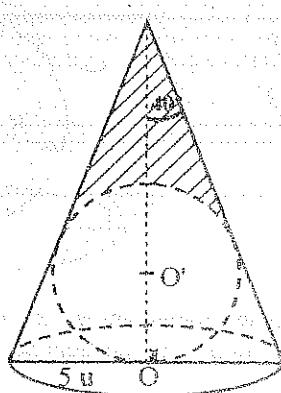
$PO' = 7 \text{ u}$

T) $V_{\text{Esfera}} = ?$ Resp: 1436.75 u^3

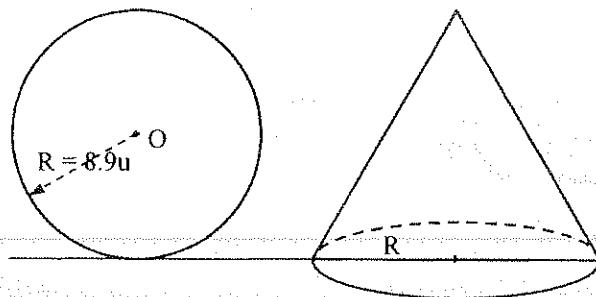
29.-

T) $V_{hhh} = ?$

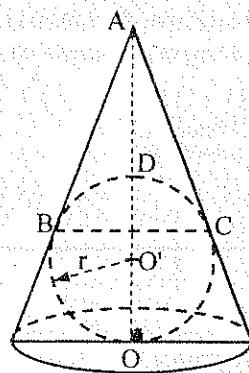
Resp: 2.63 u^3



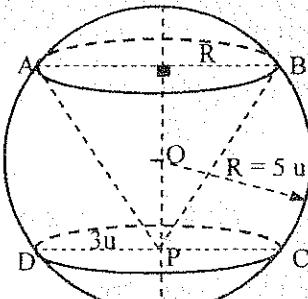
- 30.- Si la altura del cono es igual al diámetro de la esfera y el radio de la base igual al radio de la esfera.
 ¿A qué distancia del vértice del cono se debe trazar un plano paralelo a la base para que las secciones determinadas en los dos objetos sean de igual área.
 Resp: 14.28 u



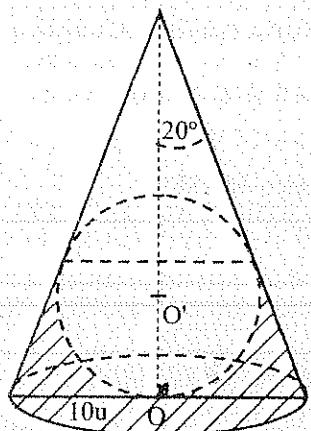
31.
 H) $AB = 4 \text{ u}$
 $\frac{1}{4} S_{\text{Esfera}} = S_{\text{Lateral-cono-ABC}}$
 T) $r = ?$ Resp: 6.47 u



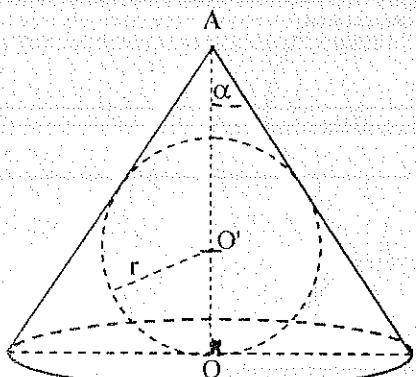
32.
 H) $V_{ABCD} = \frac{1}{3} V_{P-AB}$
 T) $R_1 = ?$ Resp: 3 u



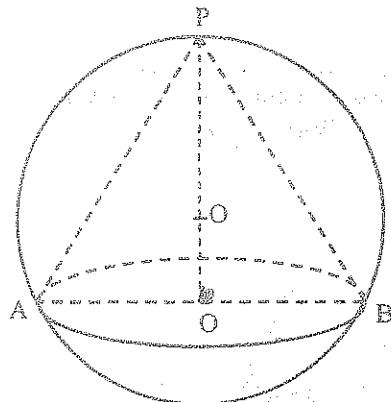
33. -
 T) Volumen entre la superficie de la esfera y la base del cono
 Resp: 982.55 u^3



34. -
 H₁) $\frac{S_{\text{Esfera}}}{S_{\text{Cono}}} = \frac{4}{3}$ H₂) $\frac{V_{\text{Cono}}}{V_{\text{Esfera}}} = 2$
 T₁) $\alpha = ?$ T₂) $\frac{S_{\text{Tot.Cono}}}{S_{\text{Esfera}}} = ?$
 Resp: 60° Resp: 2



35.-



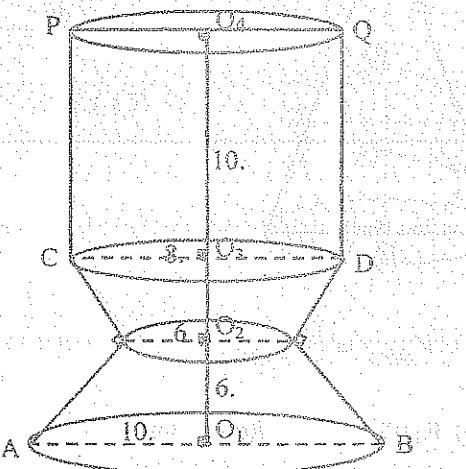
$$H) S_{\text{lateral } P-AB} = \frac{1}{2} S_{\text{Zona } P-AB}$$

$$T) PO_1 = ?$$

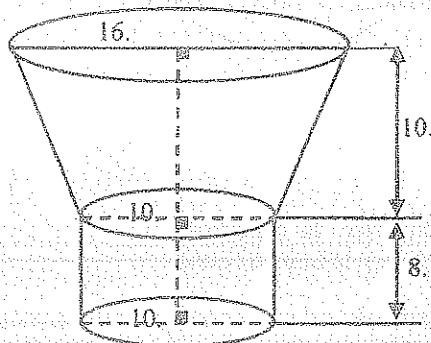
Resp: $3/2 R$

- 36.- Se tiene un casquete esférico de las siguientes dimensiones: radio de la esfera = 10 u., radio de la base = 6 u. Está lleno de agua, si por la base se introduce un tronco de cono de revolución de dimensiones $R = 8$ u., $r = 4$ u., $h = 9$ u., en forma tal que los ejes coincida. Calcular la cantidad de agua que queda en el recipiente.

37. El recipiente de la figura contiene un volumen de agua igual a los $\frac{3}{5}$ del volumen total del recipiente. Hallar la altura del nivel del agua a partir de la base A-B y hallar el área total del recipiente.



38.-

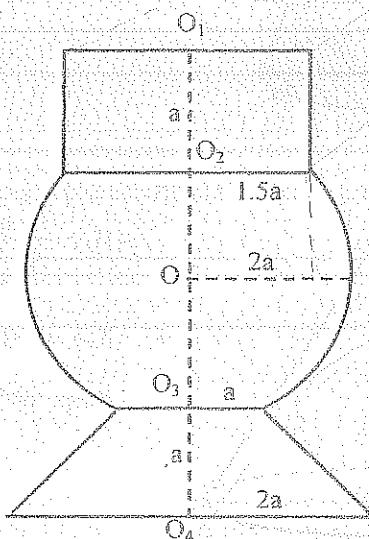


- El recipiente de la figura contiene un volumen de agua igual a los $\frac{7}{8}$ de su volumen total. Calcular la altura del nivel del agua en el recipiente.

Resp: 982.55 u^3

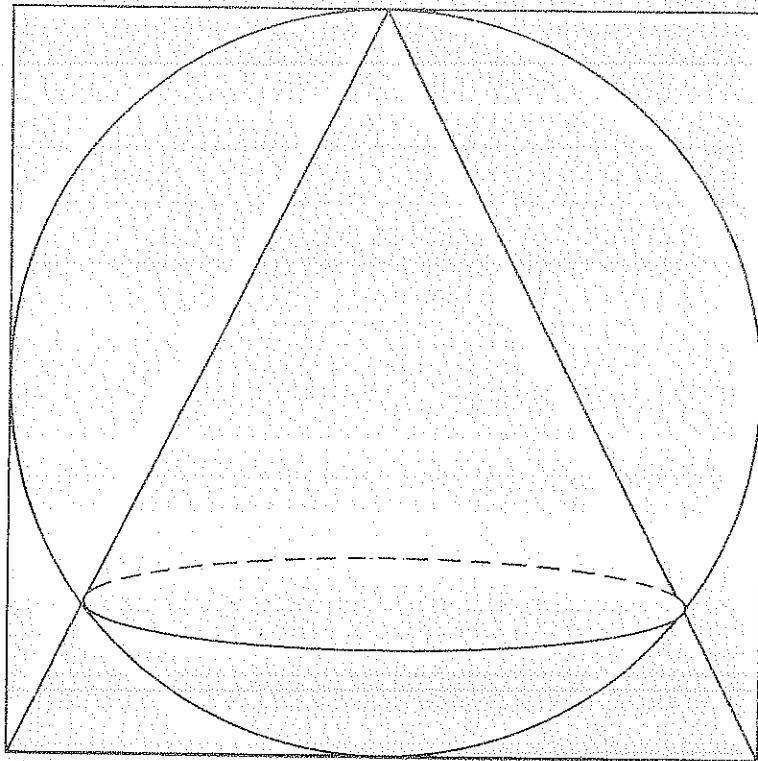
- 39.- Si en el recipiente se vierte un volumen de agua igual a los $\frac{9}{10}$ del volumen total del recipiente. Hallar la altura que alcanza el nivel del agua en el recipiente.

Resp. 4.41 a



DIBUJO

EJERCICIOS PROPUESTOS Y EJERCICIOS RESUELTOS

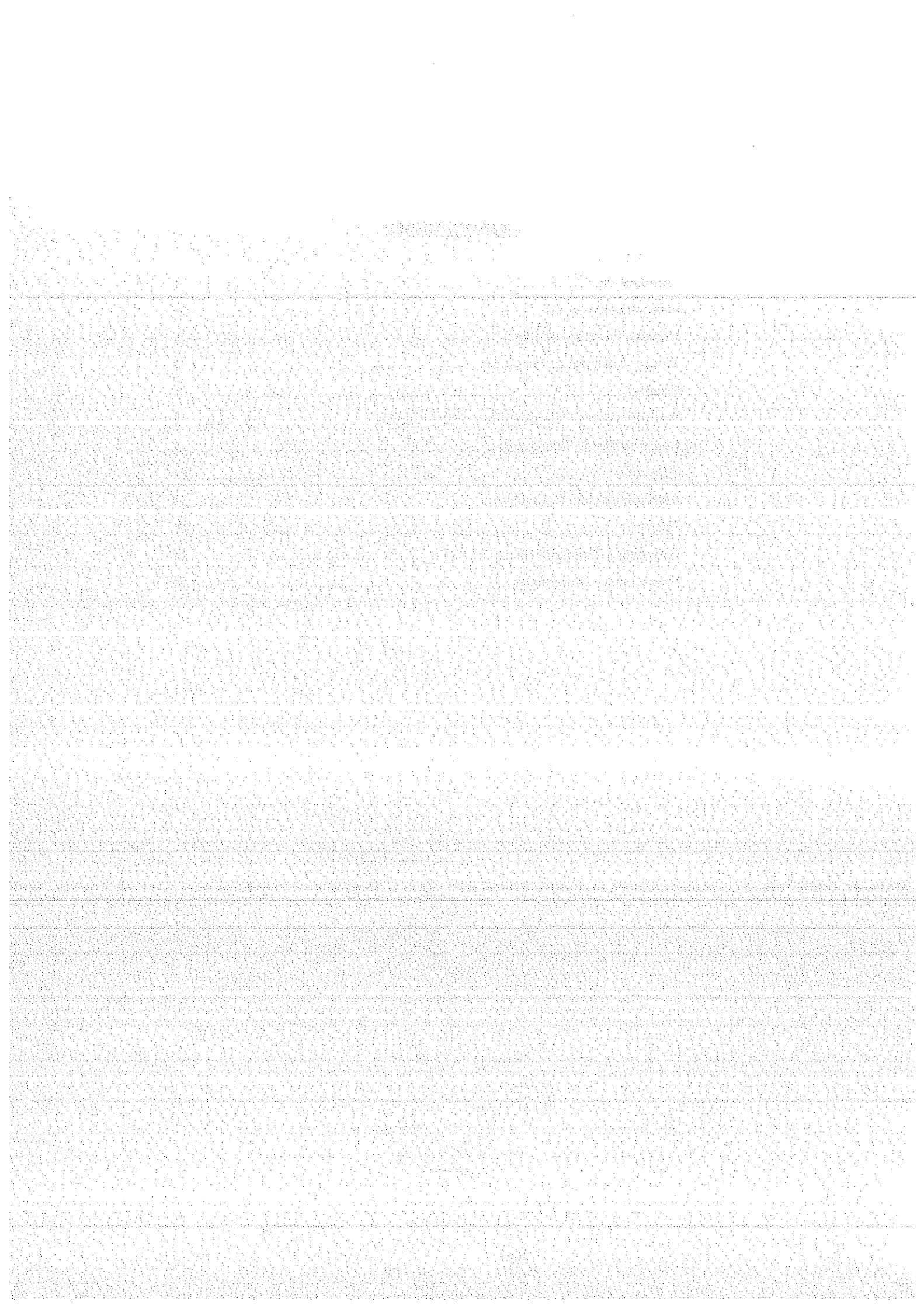


G. CALVACHE
T. ROSERO
M. YACELGA

Q U A D R A

CONTENIDO

Introducción.....	1
Instrumentos y su uso.....	2
Normas, Formatos de Papel.....	2
Tipos y Anchuras de las Líneas.....	3
Escalas.....	4
Perpendiculares, Paralelas, Bisectrices, Ángulos.....	4
Construcción de Triángulos.....	8
Tangentes.....	12
Relación Círculo Triángulo.....	14
Enlaces.....	15
Polígonos y Cuadriláteros.....	26
Proyecciones Ortogonales.....	30



1. INTRODUCCIÓN

EL dibujo surgió debido a las exigencias prácticas del hombre, quien en los albores de la cultura humana sintió la necesidad de representar los objetos que lo rodean y los creados por él. Las pinturas rupestres, halladas en cavernas, fueron los primeros dibujos realizados por el hombre. A finales del siglo XVIII, los métodos para representar los objetos, edificaciones, etc., tenían ya una historia de muchos siglos. Sin embargo, no se había elaborado aún un método para representar los cuerpos volumétricos sobre el plano.

Con el desarrollo de la industria, y ligada a ella la división del trabajo, maduró históricamente la tarea de hacer una generalización científica del material conocido hasta el momento, elaborar una teoría única de representación y realizar una sistematización severa de las reglas para ejecutar los dibujos, para de esta forma proporcionar la transmisión exacta de las ideas de los ingenieros y proyectistas al realizador.

El conjunto de asignaturas matemáticas que cursan los estudiantes de especialidades técnicas, tiene como objetivo poner en manos de los futuros ingenieros el instrumento con ayuda del cual pueden ser resueltos los diferentes problemas de ingeniería. El Dibujo constituye una de estas asignaturas y tiene por finalidad el estudio de la forma y medida de los objetos del mundo real que nos rodea, las relaciones que existen entre estos objetos, la formulación de las correspondientes leyes y sus aplicación a la solución de los problemas prácticos.

El Dibujo permite representar no solo los objetos existentes en la realidad, sino también los que son producto de nuestra imaginación.

Por tal razón el estudio de esta ciencia contribuye al desarrollo de la imaginación espacial, es decir, la capacidad del hombre de representar mentalmente la forma, las dimensiones y otras cualidades de diferentes objetos.

El Dibujo se distingue porque para la solución de los problemas geométricos generales, se emplea el método gráfico en el cual las cualidades geométricas de las figuras se estudian directamente sobre el propio dibujo.

El dibujo es la representación de objetos de diferente naturaleza, construcción en el plano según determinadas reglas, que permite reproducir la forma y las dimensiones de los objetos. En el dibujo se resuelven diferentes cuestiones métricas y posicionales relacionadas con el diseño de máquinas, edificaciones, estructuras, etc., siempre que las construcciones hechas sobre el plano de dibujo reflejen las operaciones correspondientes en el espacio.

En nuestros tiempos es difícil señalar alguna actividad del hombre, en la cual, en mayor o menor medida, no sea necesario recurrir a la ayuda de los dibujos, si se considera que el dibujo es el lenguaje de la técnica.

Con el desarrollo de la industria, y ligada a ella la división del trabajo, maduró históricamente la tarea de hacer una generalización científica del material conocido hasta el momento, elaborar una teoría única de representación y realizar una sistematización severa de las reglas para ejecutar los dibujos, para de esta forma proporcionar la transmisión exacta de las ideas de los ingenieros y proyectistas al realizador.

2. INSTRUMENTOS Y SU USO

Para la realización de cualquier tipo de dibujo, se necesitan instrumentos indispensables como: escuadras de 45° y 60° , regla T, tablero, escalímetro, lápices suaves y duros, compases, sacapuntas, borrador, cinta adhesiva, papel y normógrafos; entre el material opcional se puede tener: plantillas, rapidógrafos, curvígrafos, etc.

Los lápices se los escoge según su dureza. Se utilizará especialmente los lápices HB y 2H. Las escuadras y las reglas T sirven para trazar perpendiculares y paralelas; también pueden trazarse ángulos de 30° , 45° , 60° y 75° con respecto a una línea base. El escalímetro sirve y se usa para medir en varias escalas.

Es necesario que se tenga un juego de compases entre los que se tengan un corriente, uno de puntas fijas y bigoteras. El compás de puntas fijas sirve para transportar medidas, y las bigoteras para trazar circunferencias de radio pequeño y éstas se regulan en base a un tornillo.

3. NORMAS, FORMATOS DE PAPEL

Las normas a utilizarse están de acuerdo al sistema Internacional. Los formatos normalizados en mm. Son los siguientes:

Designación	Hojas recortadas		Hojas sin recortar	
	a	b	a _l	b _l
A0	841	1189	880	1230
A1	594	841	625	880
A2	420	594	450	625
A3	297	420	330	450
A4	210	297	240	330
A5	148	210	165	240
A6	105	148	120	165

4. TIPOS Y ANCHURAS DE LAS LÍNEAS.

Si se utilizan seis tipos diferentes de líneas, que se indican así: A, B, C, D, E, F. Cada una tiene su anchura determinada, que se indica con un número que representa aproximadamente la anchura en décimas de mm.

Tipos de líneas y denominación	Relaciones de anchuras recomendadas respecto a las usada para la línea A	Empleos típicos
A	1	Perfiles y aristas vistas
Continua gruesa		
B	1 4	Contornos y aristas ficticios, líneas de medida y de referencia, rayados, representaciones de piezas indicadas o títulos de referencia, contornos de secciones rebatidas anexas.
Continua fina		
C	1 4	Límite de la vista o corte parcial, cuando este límite no sea un eje de simetría.
Continua fina irregular		
D	1 2	Contorno y aristas ocultos
De trazos medios		
E	1 4	Ejes, posiciones extremas de partes móviles, partes puestas anteriormente en un plano de sección
Mixta fina (trazos largos y cortos)		
F	1 - $\frac{1}{4}$ - 1	Trazas de planos de sección
Mixtas finas y gruesas (trazos largos y cortos)		

En dibujo se deben emplear solo líneas del mismo grupo: líneas finas, líneas medias, líneas gruesas, líneas muy gruesas.

5. ESCALAS

Siempre se debe indicar con claridad la “escala de representación”, es decir, la relación entre las dimensiones del objeto en el dibujo y las relaciones reales de éste.

Si el dibujo tiene las mismas dimensiones que el objeto, la escala es “al natural”, cuando el dibujo tiene dimensiones mayores a la del objeto, la escala es de “ampliación”, y si el dibujo tiene menores dimensiones que el objeto, la escala es de “reducción”.

Las escalas más usuales están indicadas en el cuadro.

Ampliación	50 : 1	Reducción	1 : 2.5
	20 : 1		1 : 5
	10 : 1		1 : 10
	5 : 1		1 : 20
	2 : 1		1 : 25
			1 : 50
Al natural	1 : 1		

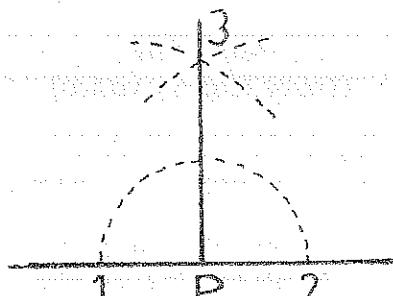
6. PERPENDICULARES, PARALELAS, BISECTRICES, ÁNGULOS

PERPENDICULAR EN UN PUNTO

DATOS

P

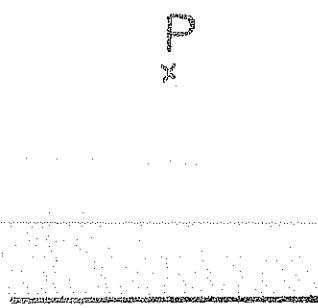
CONSTRUCCIÓN



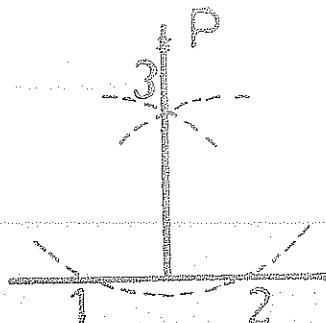
ALGORITMO: 1.- $\odot(P; R \text{ cualquiera})$; 2.- $\therefore 1 \text{ y } 2$; 3.- $\odot(1; R_1 \text{ cualquiera}), \odot(2; R_1)$
 $\therefore 3$; 4.- $\overline{3P}$

PERPENDICULAR DESDE UN PUNTO

DATOS



CONSTRUCCIÓN



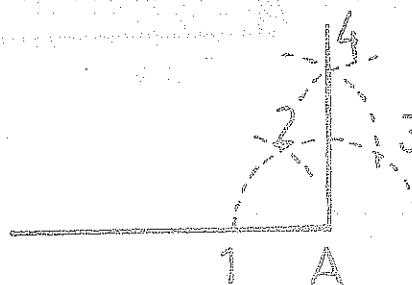
ALGORITMO: 1.- $\odot(P; R \text{ cualquiera}) \therefore 1 \text{ y } 2$; 2.- $\odot(1; R_1 \text{ cualquiera}) \text{ y } \odot(2; R_1) \therefore 3$;
3.- $\overline{P3}$

PERPENDICULAR EN UN EXTREMO

DATOS



CONSTRUCCIÓN



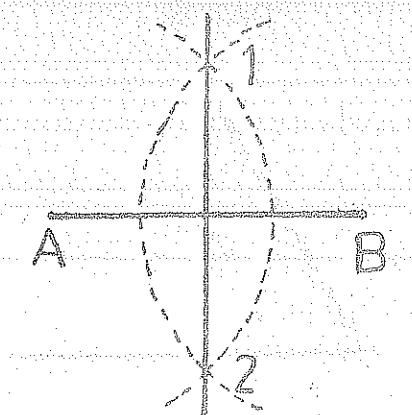
ALGORITMO: 1.- $\odot(A; R \text{ cualquiera}) \therefore 1$; 2.- $\odot(1; R) \therefore 2$; 3.- $\odot(2; R) \therefore 3$. 4.- $\odot(3; R) \therefore 4$; 5.- $\overline{A4}$

MEDIATRIZ

DATOS



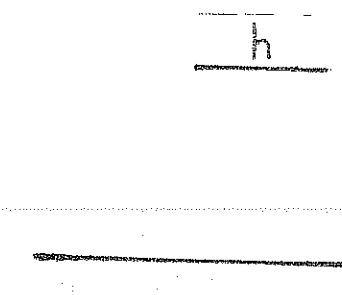
CONSTRUCCIÓN



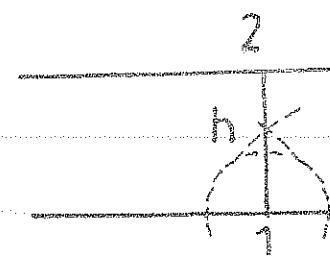
ALGORITMO: 1.- $\odot(A; R \text{ más de la } \frac{1}{2} \text{ de } \overline{AB})$; 2.- $\odot(B; R) \therefore 1 \text{ y } 2$; 3.- $\overline{12}$

PARALELA A UNA DISTANCIA "h"

DATOS



CONSTRUCCIÓN



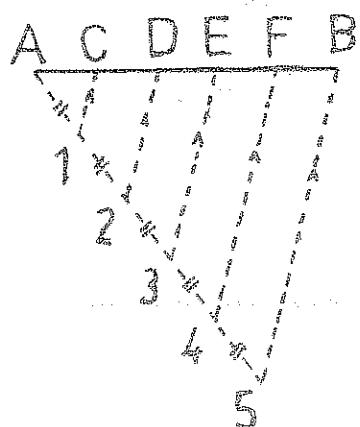
ALGORITMO: 1. Perpendicular en 1; 2. $\odot(1; h) \therefore 2$; 3. Paralela por 2 (usando escuadras)

DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN PARTES IGUALES

DATOS



CONSTRUCCIÓN



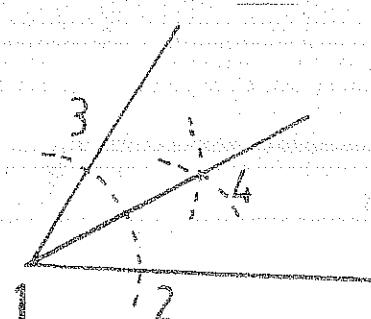
ALGORITMO: 1. Recta cualquiera desde A; 2. $\odot(A; R \text{ cualquier}) \therefore 1$; 3. $\odot(1; R) \therefore 2$ 4. $\odot(2; R) \therefore 3$; $\odot(3; R) \therefore 4$; $\odot(4; R) \therefore 5$; 5. Trazar \overline{BS} ; 6. Paralelas a \overline{BS} por 4,3,2,1; 7. $\therefore F.E.D.C.$

BISECTRIZ

DATOS



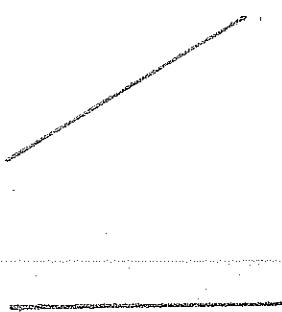
CONSTRUCCIÓN



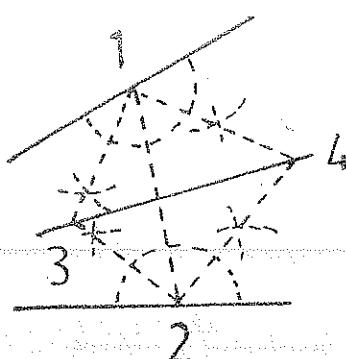
ALGORITMO: 1. $\odot(1; R \text{ cualquier}) \therefore 2,3$; 2. $\odot(2; R_1 \text{ cualquier}) \text{ y } \odot(3; R_1) \therefore 4$; 3. 14

BISECTRIZ DE UN ÁNGULO VÉRTICE DESCONOCIDO

DATOS



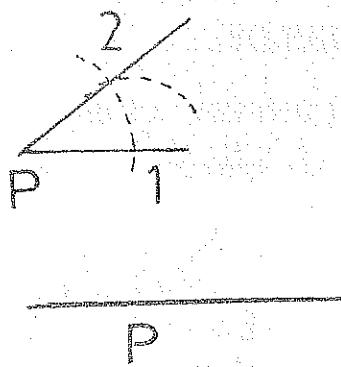
CONSTRUCCIÓN



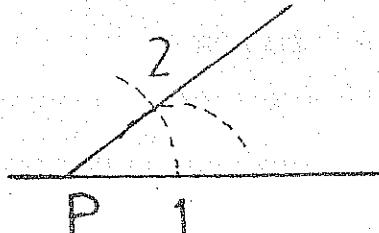
ALGORITMO: 1. 12 cualquiera; 2. Bisectrices de los cuatro ángulos formados $\therefore 3, 3, \overline{34}$

ÁNGULO IGUAL A OTRO

DATOS



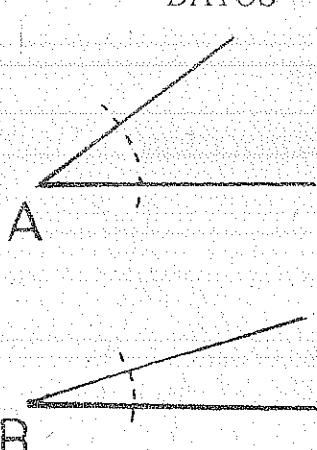
CONSTRUCCIÓN



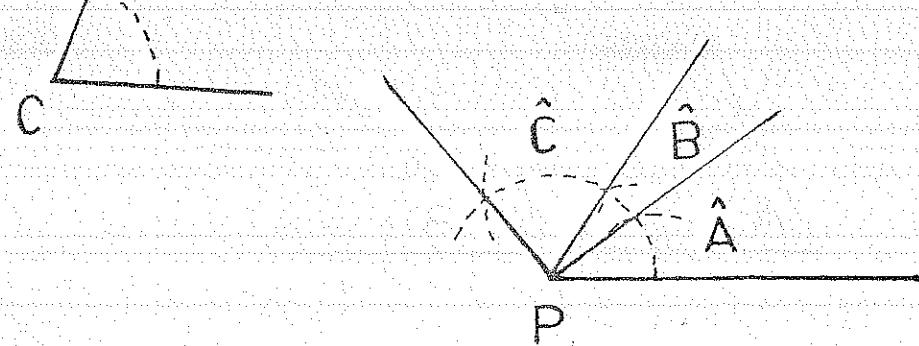
ALGORITMO: 1. $\Theta(A; R$ cualquiera) $\therefore 1, 2$; 2. $\Theta(P; R)$ $\therefore 1$; 3. $\Theta(1; \overline{12})$ Y $\Theta(1; \overline{12}) \therefore 2$; 4. $A\overline{2}$; 5. \hat{P}

$$\text{SUMA DE ÁNGULOS } \hat{P} = \hat{A} + \hat{B} + \hat{C}$$

DATOS



CONSTRUCCIÓN



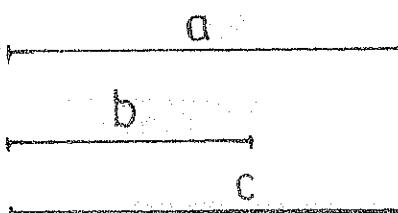
ALGORITMO: 1. $\Theta(A; R$ cualquiera), $\Theta(B; R)$, $\Theta(C; R)$ y $\Theta(P; R)$; 2. Pasar las medida de los ángulos A, B, y C; 3. \hat{P} .

7. CONSTRUCCIÓN DE TRIÁNGULOS

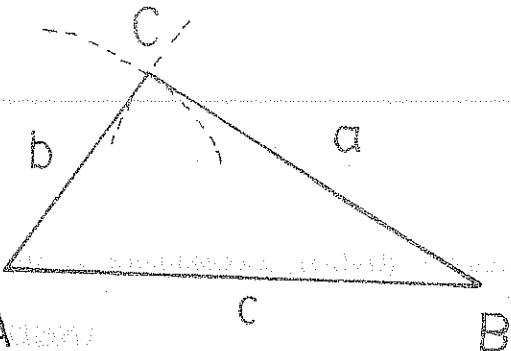
7.1 TRIÁNGULOS ESCALENOS

DADOS LOS TRES LADOS

DATOS



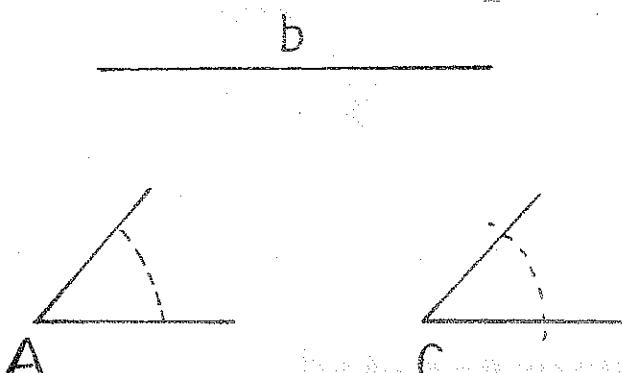
CONSTRUCCIÓN



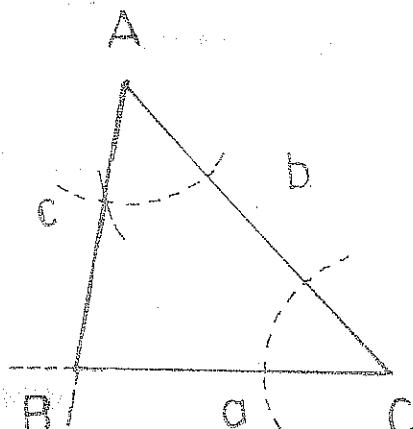
ALGORITMO: 1. $\overline{AB} = c$; 2. En B , \hat{a} y en A , \hat{b} $\therefore C$; 3. $\triangle ABC$

DADOS UN LADO Y DOS ÁNGULOS

DATOS



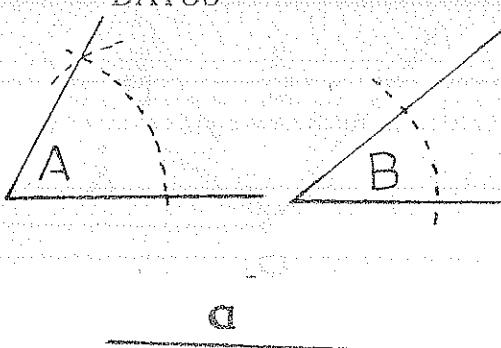
CONSTRUCCIÓN



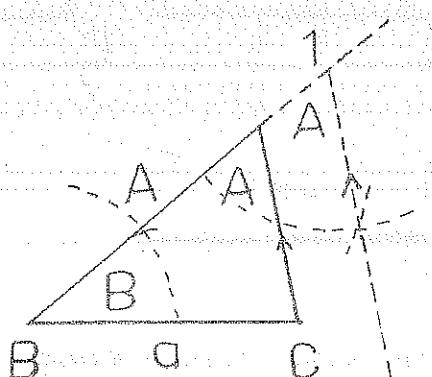
ALGORITMO: 1. $\overline{AC} = b$; 2. En A , \hat{A} y en C , \hat{C} $\therefore B$; 3. $\triangle ABC$

DADOS UN LADO Y DOS ÁNGULOS

DATOS



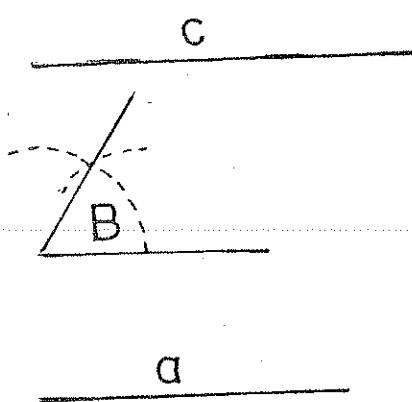
CONSTRUCCIÓN



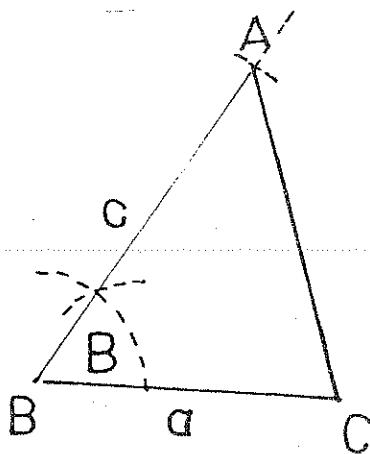
ALGORITMO: 1. $\overline{BC} = a$; 2. En B , \hat{B} ; 3. En A , \hat{A} ; 4. Paralela a \overline{ID} por C $\therefore A$; 5. $\triangle ABC$

DADOS DOS LADOS Y UN ÁNGULO

DATOS



CONSTRUCCIÓN

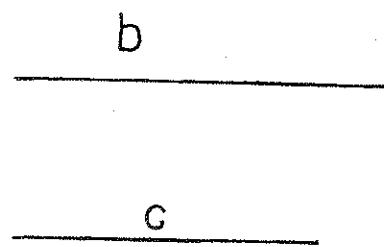


ALGORITMO: 1. $\overline{BC} = a$; 2. En B, \hat{B} ; 3. $\Theta(B; c) \therefore A$; 4. ΔABC

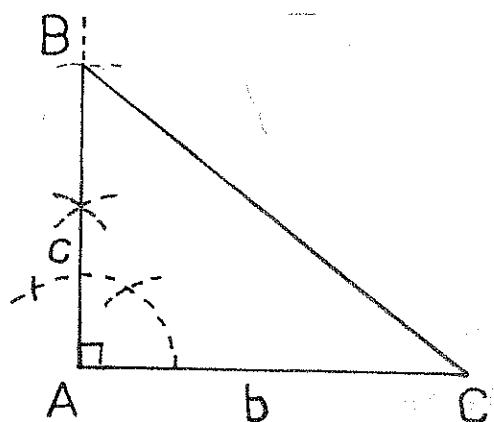
7.2 TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

DADOS LOS DOS CATETOS

DATOS



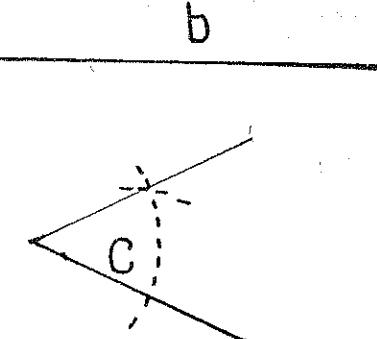
CONSTRUCCIÓN



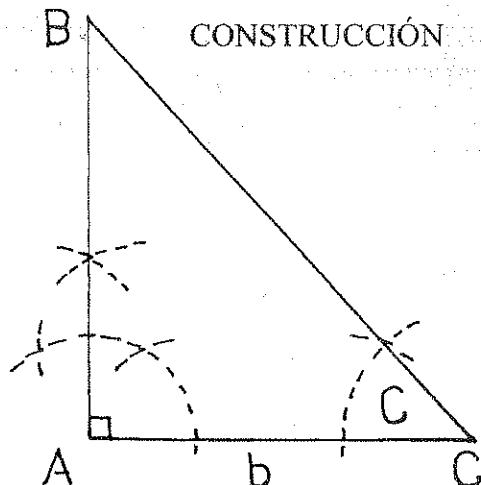
ALGORITMO: 1. \hat{A} de 90° ; 2. $\Theta(A; b) \therefore C$; 3. $\Theta(A; c) \therefore B$; 4. \overline{BC} ; 5. ΔABC

DADOS UN CATETO Y UN ÁNGULO AGUDO

DATOS

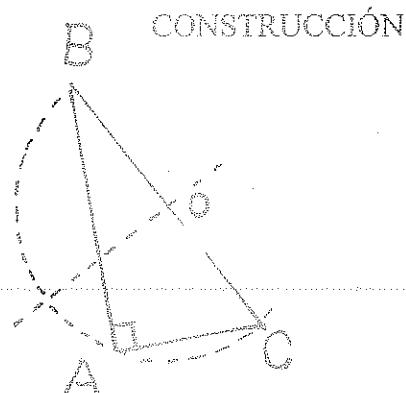
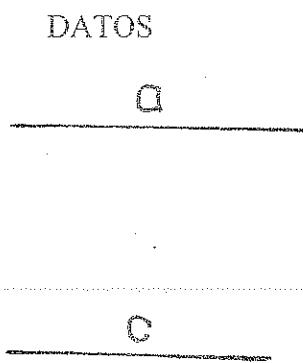


CONSTRUCCIÓN



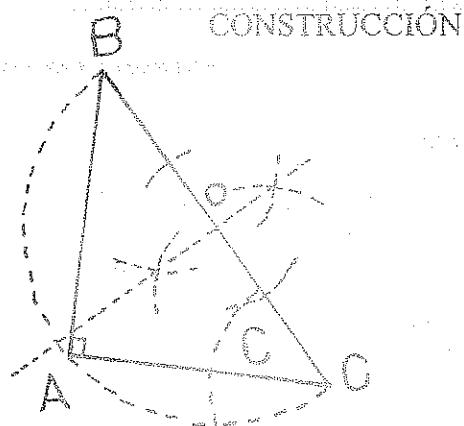
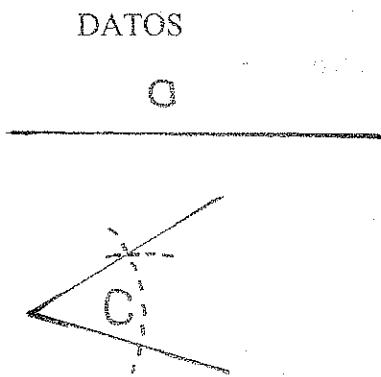
ALGORITMO: 1. \hat{A} de 90° ; 2. $\Theta(A; b) \therefore C$; 3. En C, $\hat{C} \therefore B$; 4. ΔABC

DADOS LA HIPOTENUSA Y UN CATETO



ALGORITMO: 1. $\overline{BC} = a$; 2. Mediatriz de $\overline{BC} \therefore O$; 3. $\odot(O; \overline{OB})$; 4. $\odot(R; c) \therefore A$; 5. $\triangle ABC$

DADOS LA HIPOTENUSA Y UN ÁNGULO AGUDO

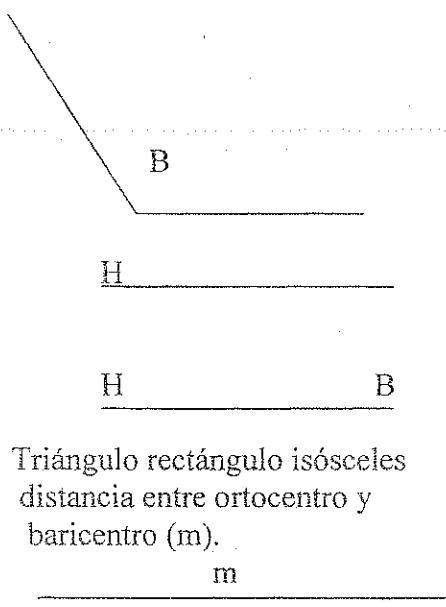


ALGORITMO: 1. $\overline{BC} = a$; 2. Mediatriz de $\overline{BC} \therefore O$; 3. En C, $\hat{C} \therefore A$; 4. $\triangle ABC$

7.3 EJERCICIOS

1. a, hb, hc
2. a, mb, mc
3. b, c, ha
4. b, c, ma
5. a, b, ma
6. hb, \hat{A}, \hat{C}
7. ma, \hat{C}, \hat{B}
8. ha, mb, b
9. ha, ma, c
10. ma, mc, mb
11. a, hb, ha
12. a, mb, \hat{C}
13. a, \hat{C} , mc
14. a, $\hat{B} - \hat{C}$, $\hat{A} = 90^\circ$
15. ha, ma, $\hat{A} = 90^\circ$
16. a, R, hb
17. ha, Va, $\hat{B} + \hat{C}$
18. ha, Va, b
19. r, ha, $\hat{B} - \hat{C}$
20. mb, mc, c
21. ha, Va, \hat{C}
22. $\hat{B} = 45^\circ$
HM = 2.0, lado a
HF = 1.5, lado b
H ortocentro
23. ma, hb, ho
24. b, hb, ma
25. ha, hc, \hat{C}
26. hb, Vc, a
27. $\hat{A} = 90^\circ$, Va, $\hat{B} - \hat{C}$
28. hb, Va, c
29. hb, Vb, \hat{B}
30. r, Va, A
31. ha, mb, $\hat{A} = 90^\circ$

32. $IA = 3$, $IC = 4$, $\hat{B} = 80^\circ$
I incentro
33. si $a = c$ (condición)
 $r = 2$; $AC = 5$
34. AOa , b , \hat{B} ; Oa excentro
35. DE pies de ha y hc , \hat{A} , B
36. r , hb , \hat{C}
37. $a = c$, $A\hat{C}$
38. \hat{A} , hc , DE antiparalela lado b
(pies alturas)
39. $\hat{A} = 90^\circ$, HG
40. ha , \hat{A} , DE antiparalela lado b
(pies alturas)
41. H ortocentro



42. Triángulo rectángulo isósceles
distancia entre ortocentro y
baricentro (m)

 m

43. Construir el triángulo DEF, que sea semejante al triángulo ABC y que tenga una superficie de 4 veces la del triángulo ABC, si se conoce: $\hat{A} = 90^\circ$, ma , c ; datos del triángulo ABC.

44. $\hat{A} = 90^\circ$, triángulo isósceles; m ; distancia entre el circuncentro y el baricentro.
45. b , hc , ha
46. $\hat{A} = 90^\circ$, HG distancia ortocentro baricentro, \hat{C}
47. ha , R , \hat{B}
48. c , AOa , \hat{C} ; Oa excentro
49. Triángulo isósceles, r , la base
50. hc , ha , \hat{B}
51. AH , HC , \hat{B} ; H es ortocentro, A y B , vértices del triángulo ABC
52. hb , c , \hat{C}
53. BOa , COa , \hat{A} , Oa es excentro
54. BOb , c , \hat{C} , Ob es excentro
55. R , hb , \hat{A}
56. hc , a , \hat{A}
57. ma , ha , $a = 2b$
58. BI , $A\hat{C}$, I es el incentro del triángulo ABC.
59. R ; $\hat{B} - \hat{C}$, $\hat{A} = 90^\circ$
60. $A\hat{C}$, COb , \hat{B}
61. mc , ha , hb
62. \hat{A} , $\hat{B} - \hat{C}$, a
63. ma , mb , hc
64. BD (bisección interna); BE (bisección externa); C
65. IC ; r ; B
66. B ; DE (antiparalela del lado AC);
 DH ($DH \parallel AB$, H ortocentro);
 r ; Vc ; C
67. $B > 90^\circ$; AD (altura de A); N (punto medio de AB); M (punto medio de AC); dadas: DN ; NM ; AM
68. C ; m (perpendicular de G a BC); c
69. a ; mb ; ha
70. ha ; Va , R
71. A ; r ; ra

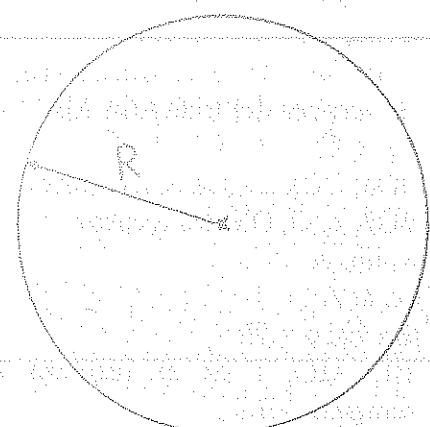
PUNTOS Y LINEAS FUNDAMENTALES

1. Dados: $A = 90^\circ$; a , b ; Determinar HO
2. Dados: $A > 90^\circ$; $b = c$; Determinar Hoa
3. Dados: a ; b ; c ; Determinar GO
4. Dados: $C = 120^\circ$; $b = a$; Determinar IOOa

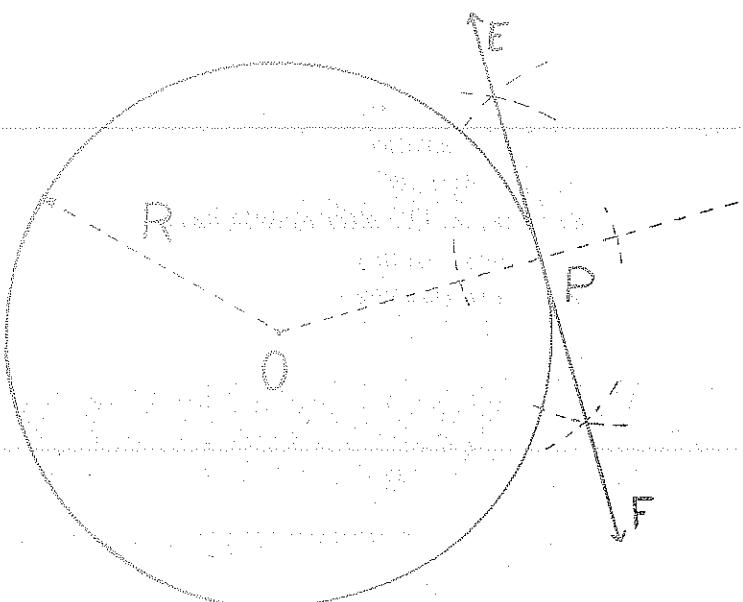
8. TANGENTES

EN UN PUNTO

DATOS



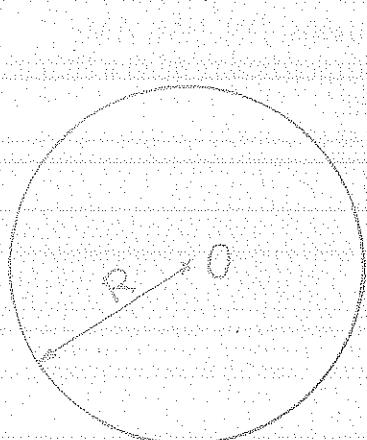
CONSTRUCCIÓN



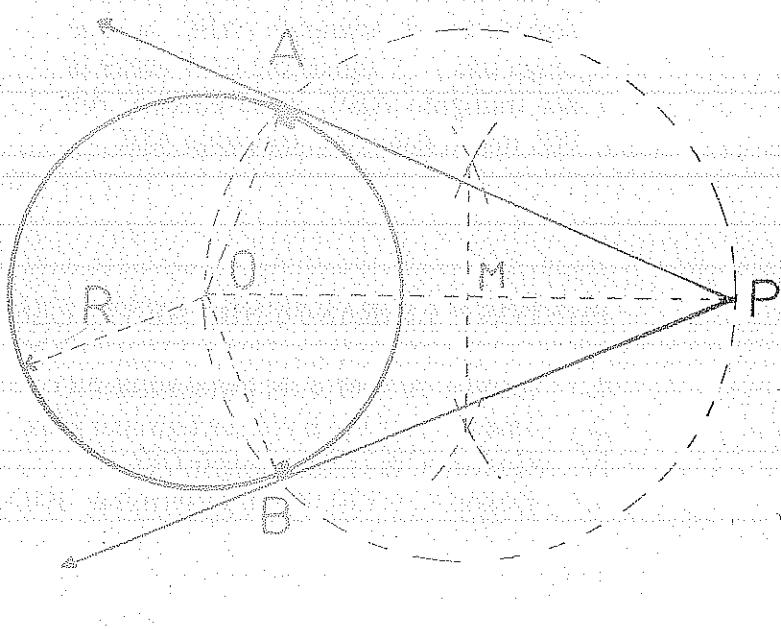
Algoritmo: 1. \overline{OP} ; 2. Perpendicular en P 3. \overline{EF}

DESDE UN PUNTO

DATOS

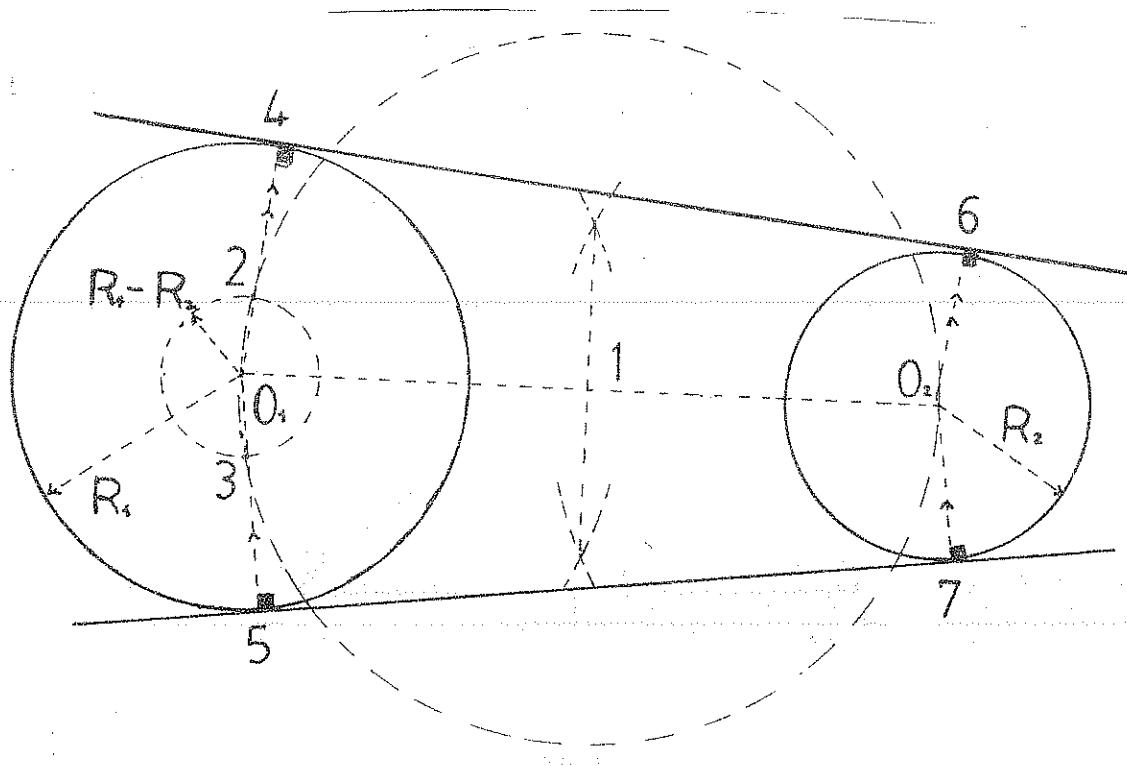


CONSTRUCCIÓN



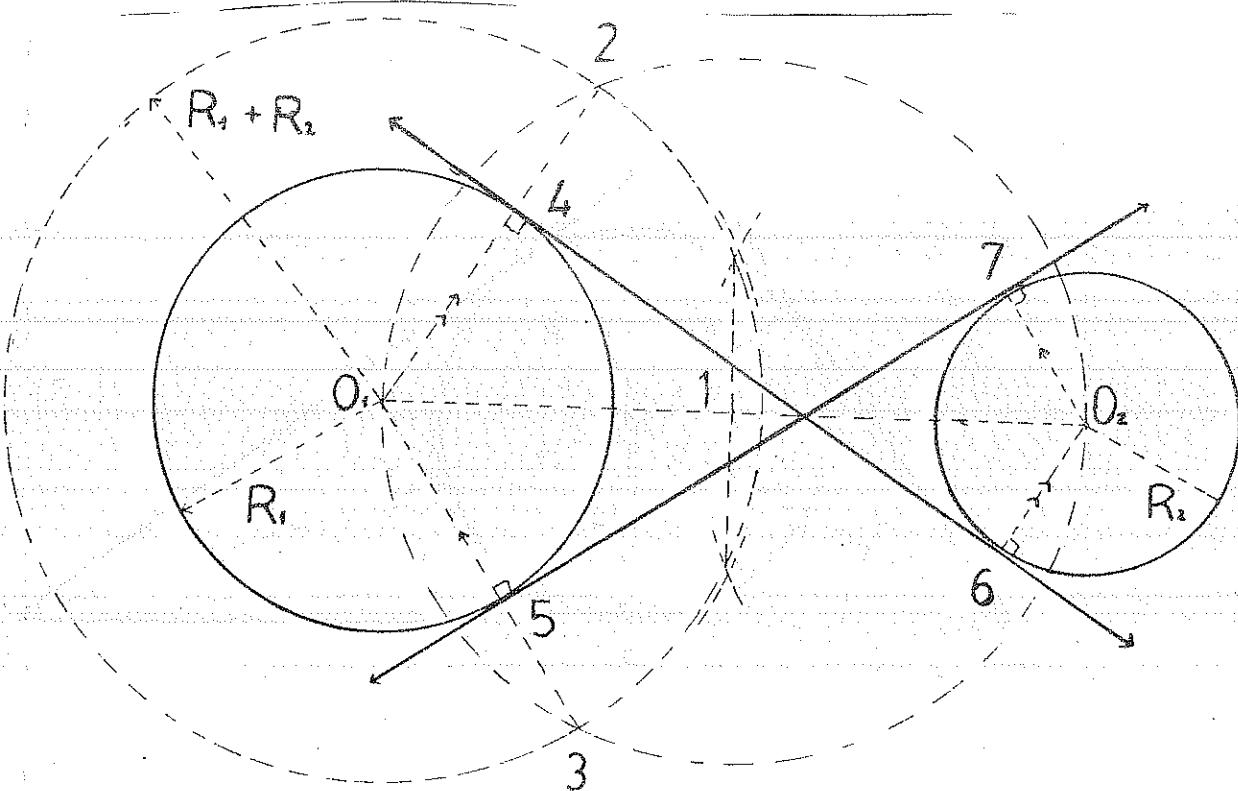
ALGORITMO: 1. \overline{OP} ; 2. Mediatrix de $\overline{OP} \therefore M$; 3. $\odot(M, MP) \therefore A \text{ y } B$; 4. $\overline{PA}; \overline{PB}$

EXTERNAS COMUNES



ALGORITMO: 1. $\overline{O_1O_2}$; 2. Mediatrix $\overline{O_1O_2} \therefore 1$; 3. $\odot(1; \overline{O_1})$; 4. $\odot(O_1; R_1 - R_2) \therefore 2 \text{ y } 3$;
 5. O_1-2 y $O_1-3 \therefore 5 \text{ y } 4$; 6. $O_2-6 \parallel O_1-4$ y $O_2-7 \parallel O_1-5$; 7. $4-6$ y $7-5$

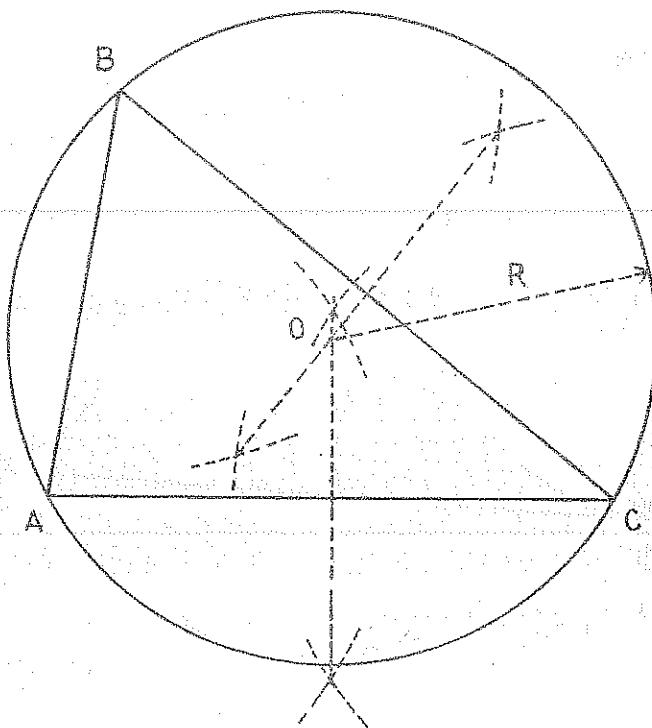
INTERNAS COMUNES



ALGORITMO: 1. $\overline{O_1O_2}$; 2. Mediatrix $\overline{O_1O_2} \therefore 1$; 3. $\odot(1; \overline{O_1})$; $\odot(O_1; R_1 + R_2) \therefore 2 \text{ y } 3$; 4.
 O_1-2 y $O_1-3 \therefore 3 \text{ y } 4$; 5. $O_2-6 \parallel O_1-4$ y $O_2-7 \parallel O_1-5$; 6. $4-6$ y $7-5$

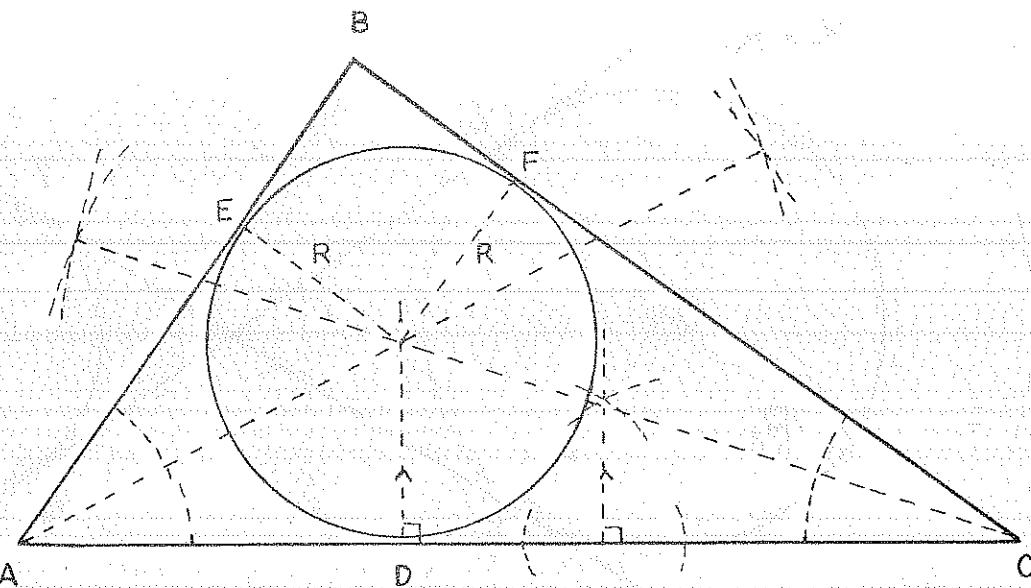
9. RELACIÓN CÍRCULO TRIÁNGULO

CÍRCULO CIRCUNSCRITO



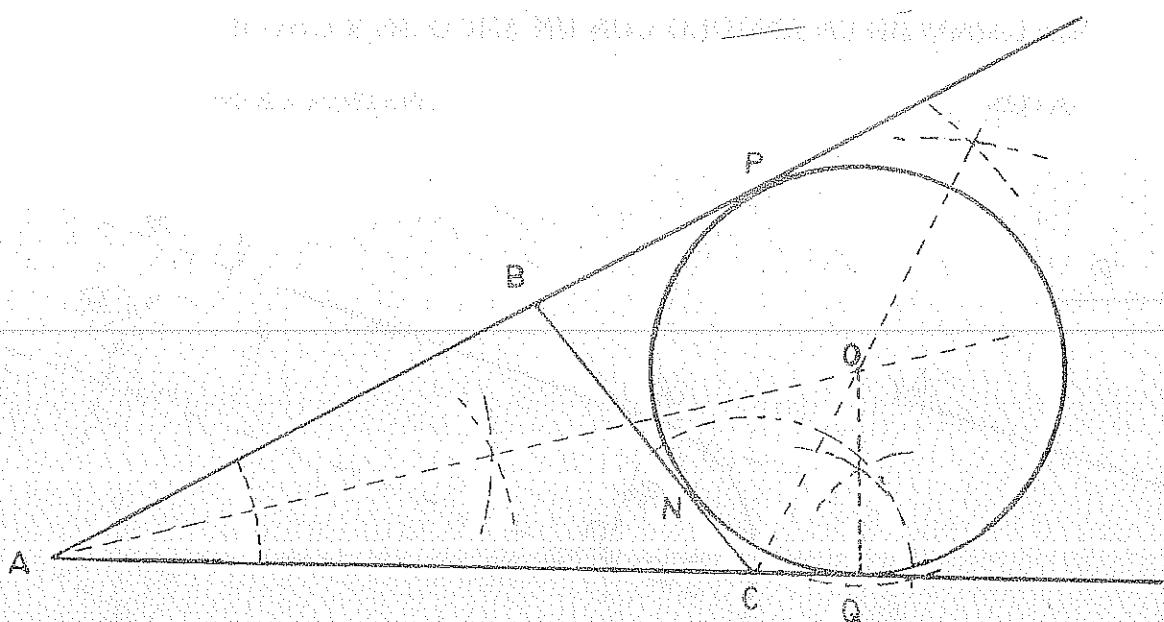
ALGORITMO: 1. ABC cualesquiera ; 2. Mediatriz de \overline{AC} , \overline{AB} , \overline{BC} ; ∴ O (Circuncentro);
3. $\odot(O;OB)$

CÍRCULO INSCRITO



ALGORITMO: 1. ABC cualesquiera ; 2. Bisectriz de \hat{A} y \hat{C} ; ∴ I; 3. $\overline{ID} \perp \overline{AC}$; 4. $\overline{AD} = \overline{AE}$; 5. $\overline{CD} = \overline{CF}$; 6. $\odot(I; IF)$

CÍRCULO EXINSCRITO



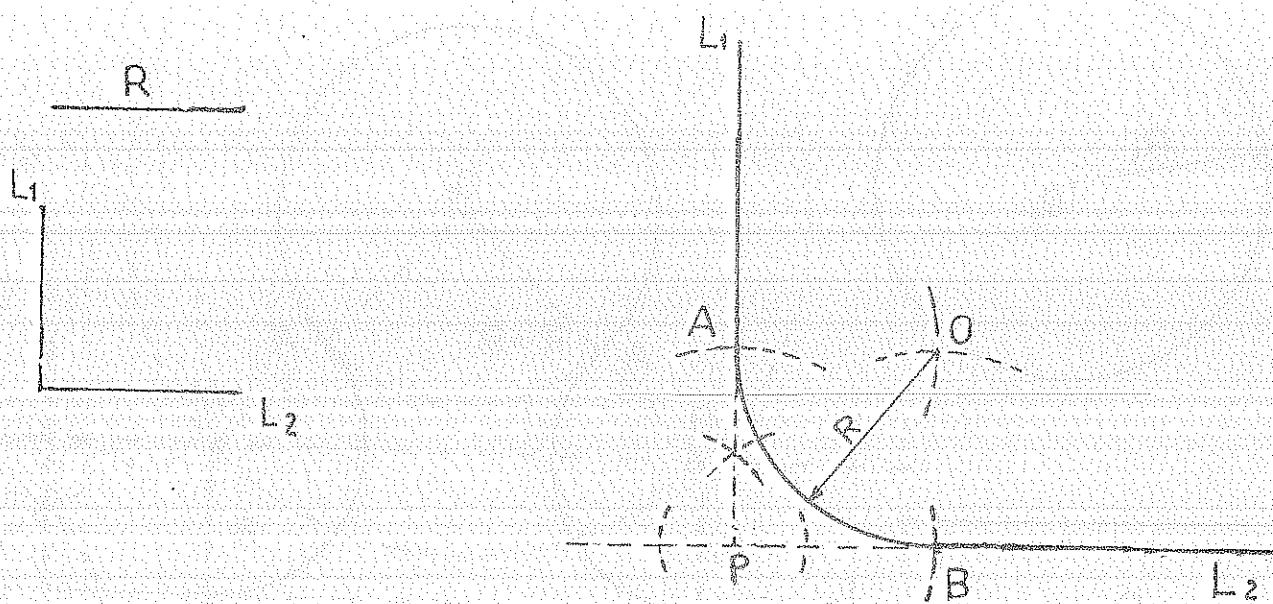
ALGORITMO: 1. ABC cualesquiera ; 2. Bisectriz de \hat{A} y $\hat{C} \therefore O$; 3. $\overline{OQ} \perp \overline{AC}$; 4. $\overline{CQ} = \overline{CN}$; 5. $\overline{BN} = \overline{BP}$; 6. O (O; OQ)

10. ENLACES

DOS LADOS DE UN ÁNGULO RECTO CON UN ARCO DE RADIO R

DATOS

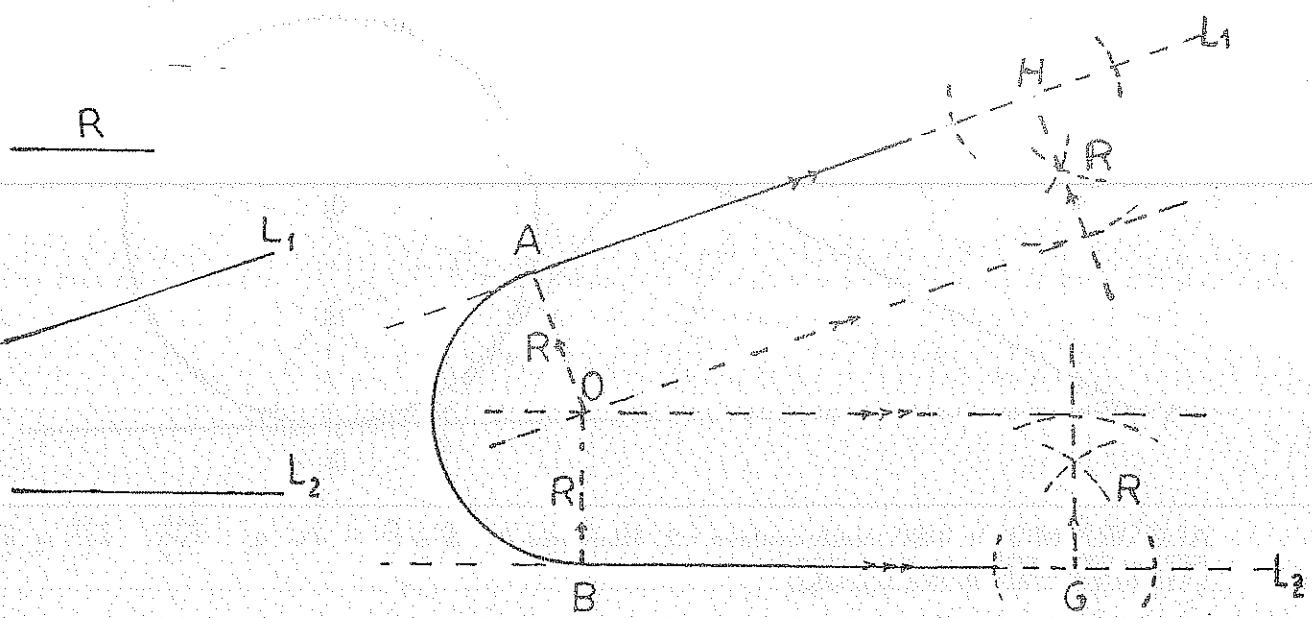
CONSTRUCCIÓN



ALGORITMO: 1. O (P; R) $\therefore A \text{ Y } B$; 2. O(A; R) y O(B; R) $\therefore O$; 3. O (O; R)

DOS LADOS DE UN ÁNGULO CON UN ARCO DE RADIO R

DATOS



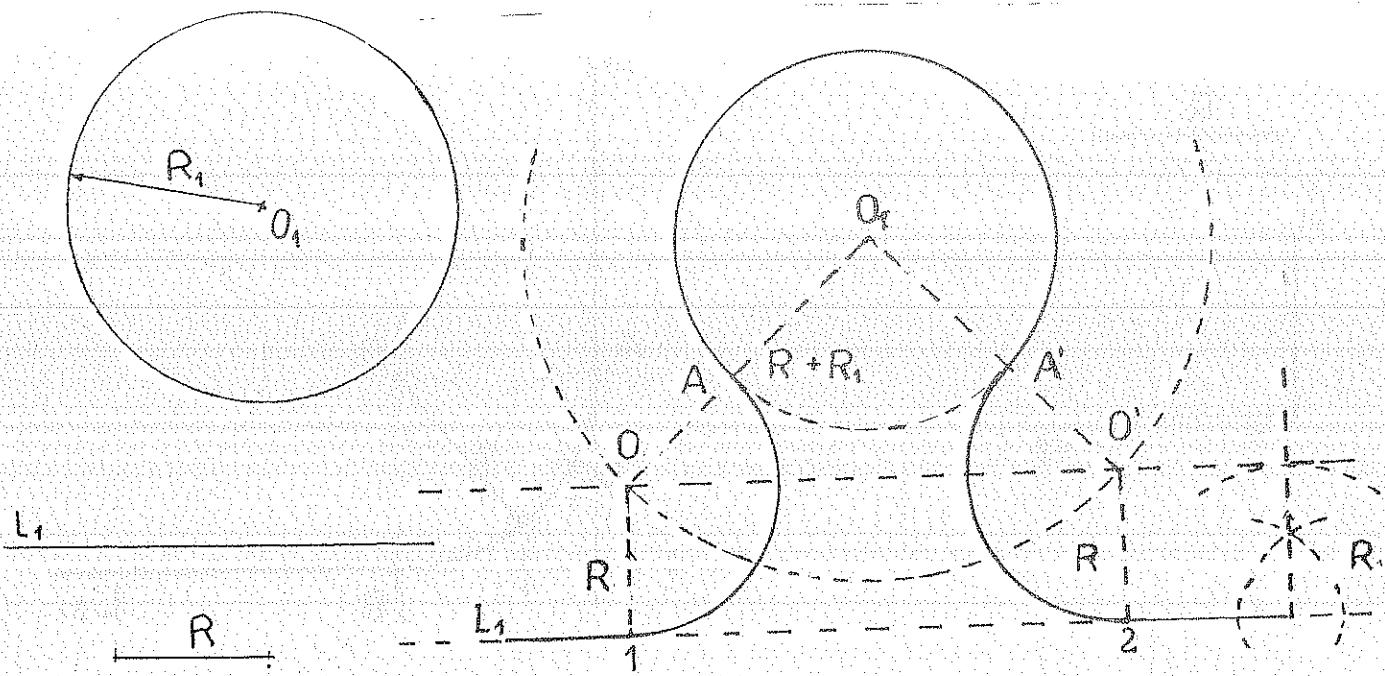
CONSTRUCCIÓN

ALGORITMO: 1. En H y G perpendiculares a $\overline{L_1}$ y $\overline{L_2}$; 2. Paralelas a $\overline{L_1}$ y a $\overline{L_2} \therefore O$; 3. Desde O perpendiculares a $\overline{L_1}$ y $\overline{L_2} \therefore A$ y B 4. $\odot(O; \overline{AB})$

RECTA - CÍRCULO CON R (EXTERNAMENTE)

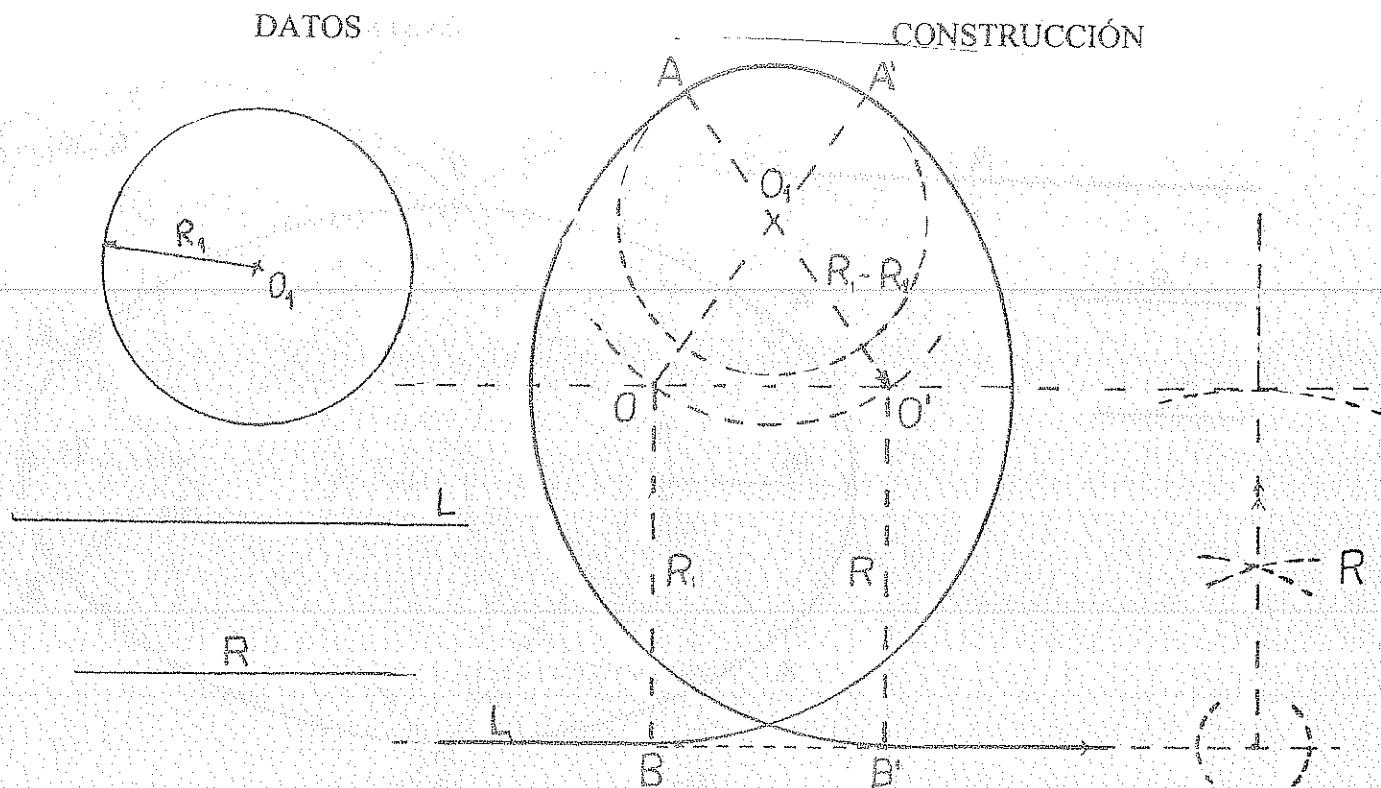
DATOS

CONSTRUCCIÓN



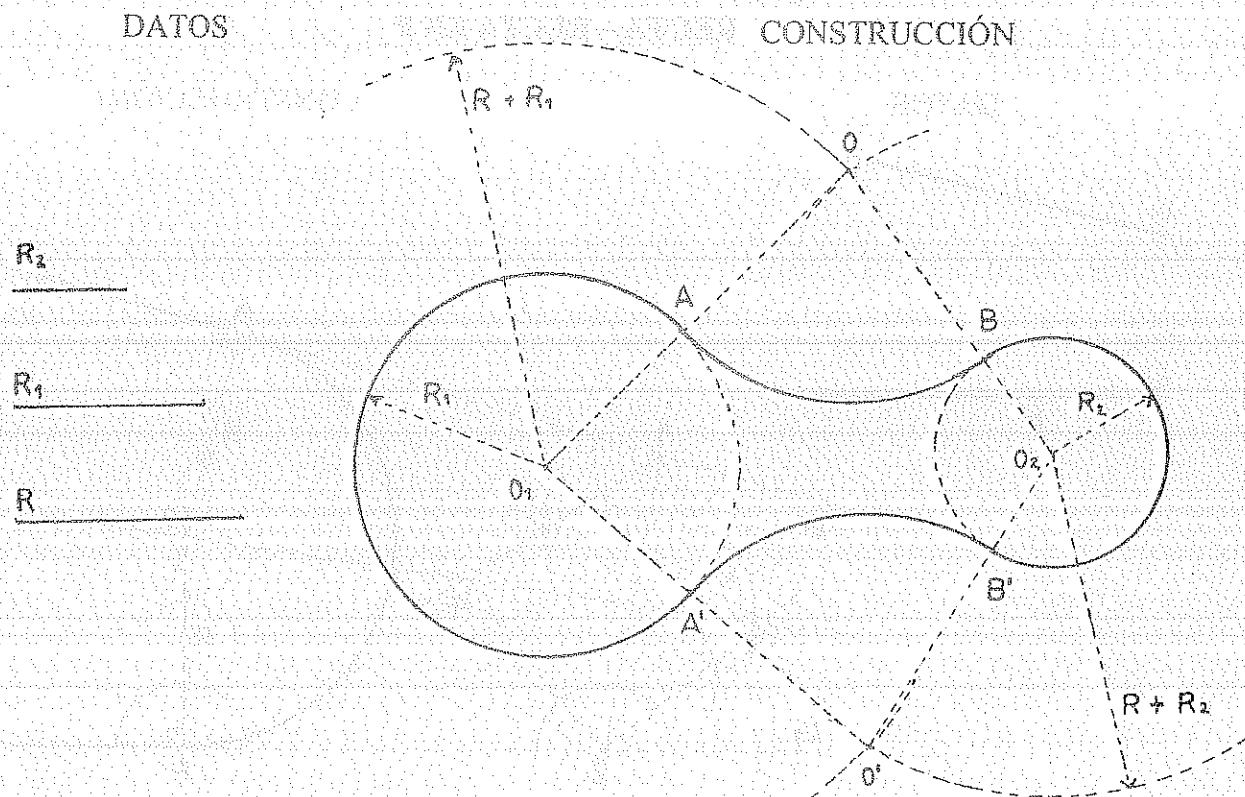
ALGORITMO: 1. Paralela a $\overline{L_1}$ a la distancia R ; 2. $\odot(O_1; R_1 + R) \therefore O$ y O' ; 3. Perpendiculares desde O y O' a $\overline{L_1} \therefore 1$ y 2 4. $\overline{O_1O}$ y $\overline{O_1O'} \therefore A$ y A' ; 5. $\odot(O; R)$ y $\odot(O'; R)$

RECTA - CÍRCULO CON R (INTERNAMENTE)



ALGORITMO: 1. Paralela a $\overline{L_1}$ a la distancia R ; 2. $\odot(O_1; R - R_1) \therefore O$ y O' ; 3. Perpendiculares desde O y O' a $\overline{L_1} \therefore B$ y B' ; 4. O, O y O_1, O' ; A y A' ; 5. $\odot(O; R)$ y $\odot(O'; R)$

CÍRCULO - CÍRCULO CON R (EXTERNAMENTE)

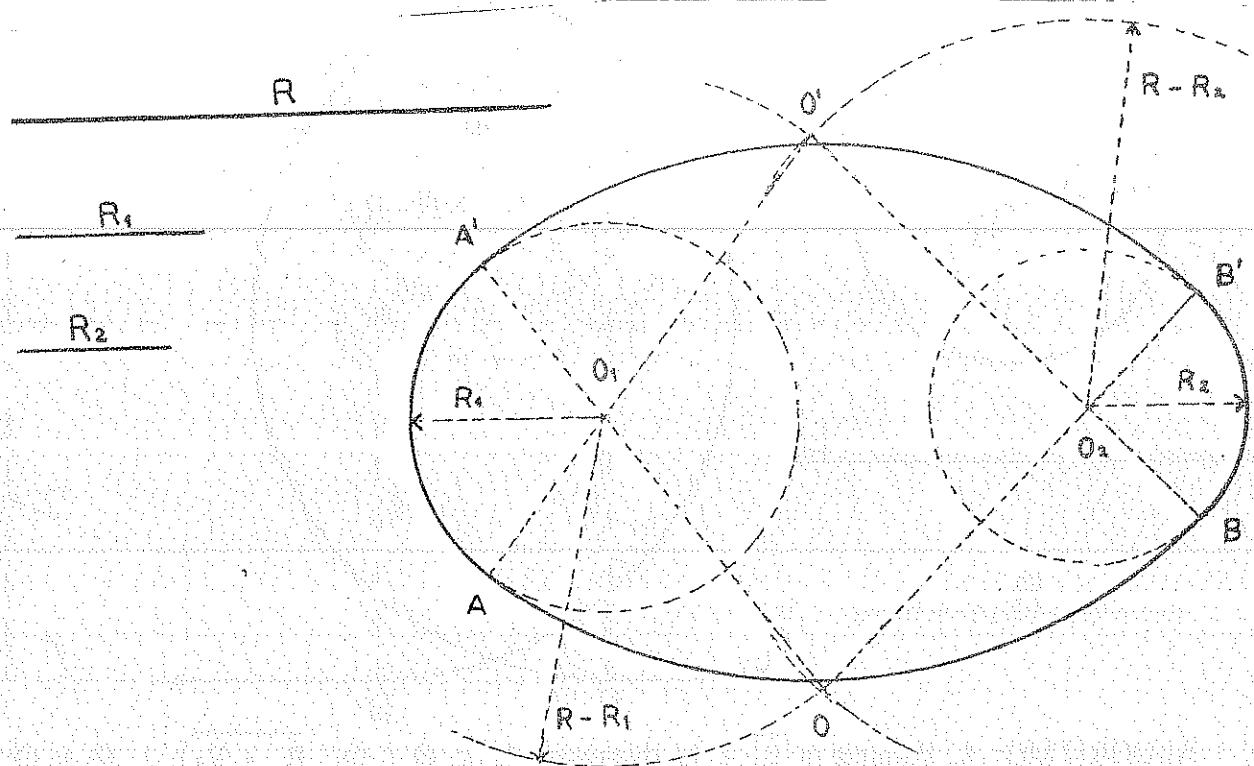


ALGORITMO: 1. $\odot(O_1, (R_1 + R))$; 2. $\odot(O_2, (R + R_2)) \therefore O$ y O' ; 3. $\overline{O_1O_1}$ y $\overline{O_2O_2} \therefore A$ y B ; 4. $\overline{O_1O_2}$ y $\overline{O_2O_1} \therefore A'$ y B' ; 5. $\odot(O, R)$ y $\odot(O', R)$

CÍRCULO - CÍRCULO CON R INTERNAMENTE

DATOS

CONSTRUCCIÓN

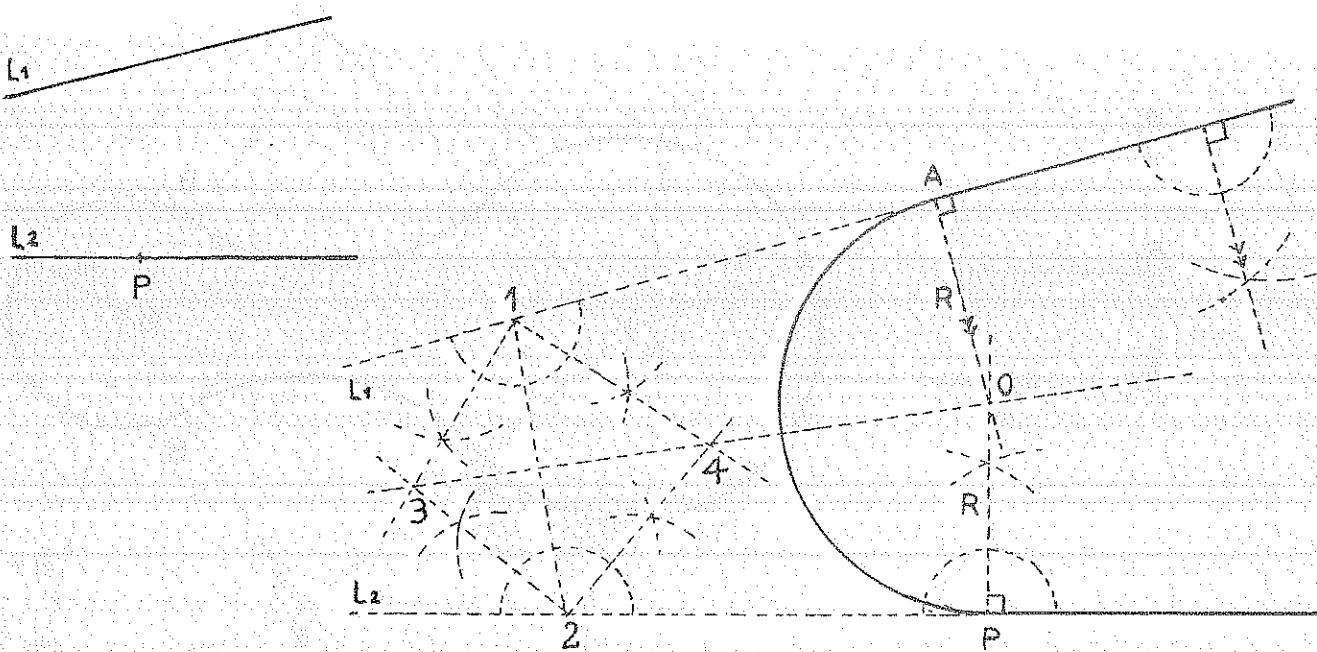


ALGORITMO: 1. $\odot [O_1, (R - R_1)]$; 2. $\odot [O_2, (R - R_2)] \therefore O_1 \text{ y } O_2$; 3. $\overline{OO_1} \text{ y } \overline{OO_2} \therefore A \text{ y } B$; 4. $\overline{O_1O_2} \text{ y } \overline{O_1O_2} \therefore A' \text{ y } B'$; 5. $\odot (O, R)$ y (O, R)

RECTA - RECTA EN P

DATOS

CONSTRUCCIÓN



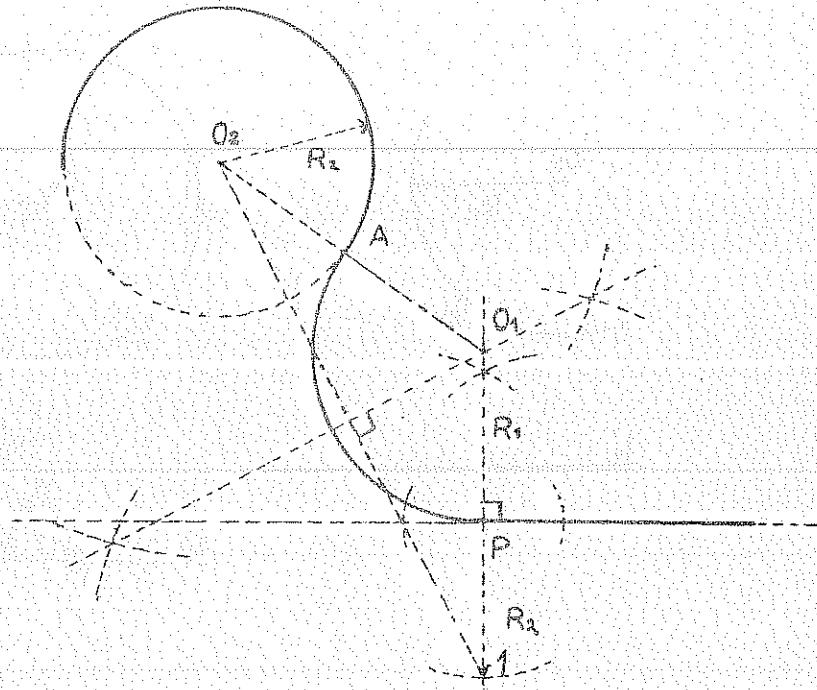
ALGORITMO: 1. $\overline{L_1}$; 2. Bisectrices de los cuatro ángulos formados $\therefore 3$ y 4 ; 3. Perpendicular en $P \therefore O$; 4. Perpendicular desde O a $L_1 \therefore A$; 5. $\odot (O; R)$

CÍRCULO – RECTA EN P^E (EXTERNAMENTE)

DATOS

۲۷۶

CONSTRUCCIÓN



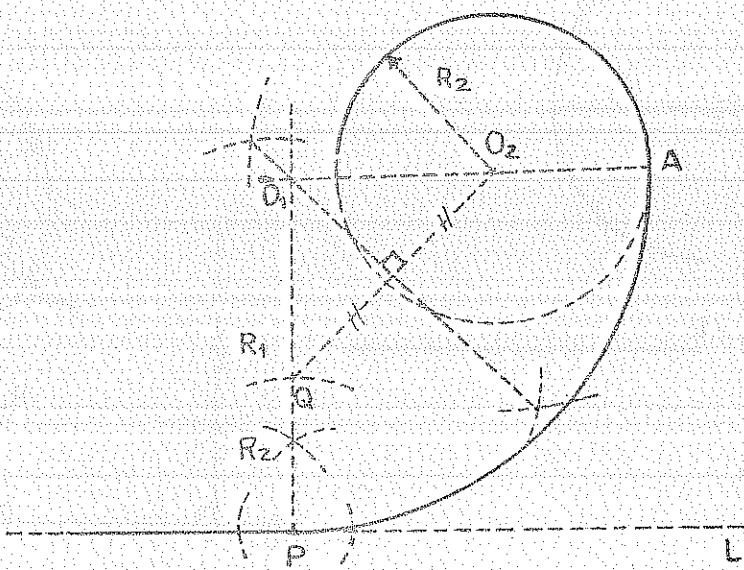
ALGORITMO: 1. En P perpendicular; 2. $\overline{P_1} = R_2$; 3. 4. Mediatriz de $\overline{O_1I}$: O_p ; 5. $\overline{O_2O_1} \perp A$; 6. $\odot(O; OP)$

CÍRCULO - RECTA EN P (INTERNAMENTE)

DATOS

82

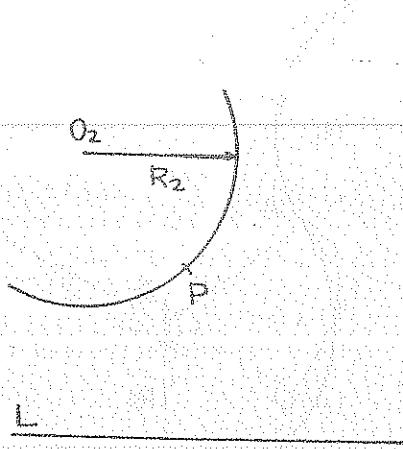
CONSTRUCCIÓN



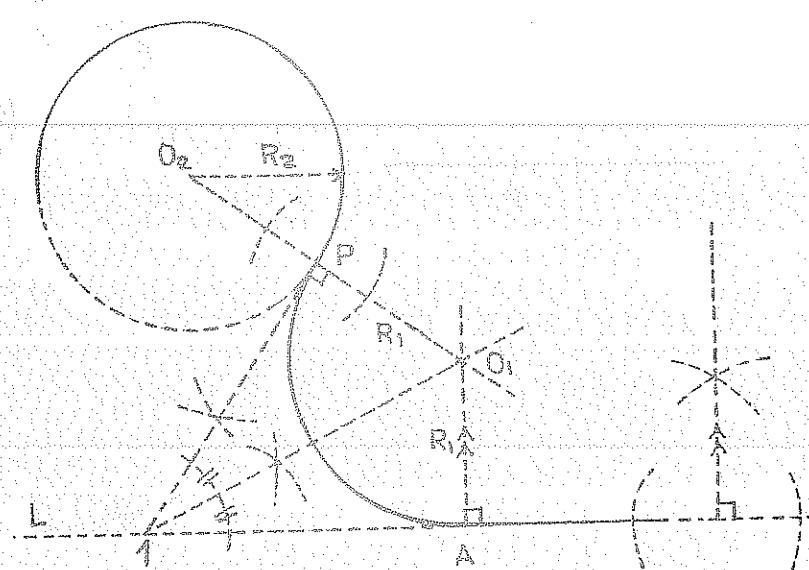
ALGORITMO: 1. En P perpendicular; 2. $\overline{PQ} = R_1$; 3. $\overline{O_1Q}$; 4. Mediatrix de $\overline{O_2Q}$; O_2 ; 5. $\overline{OQ_2}$; $\therefore A$; 6. $O(O; OP)$

RECTA - CÍRCULO EN P (EXTERNAMENTE)

DATOS



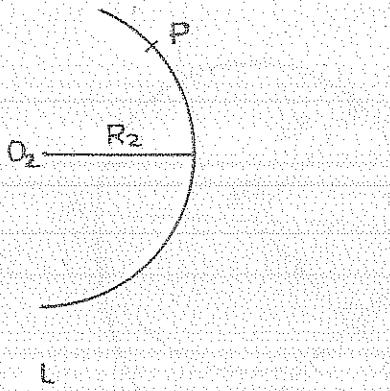
CONSTRUCCIÓN



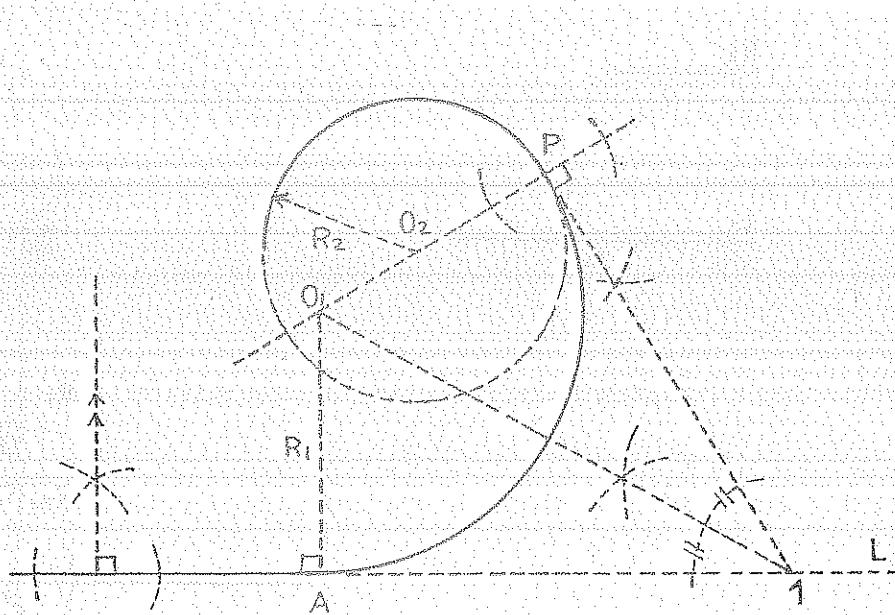
ALGORITMO: 1. $\overline{O_2P}$; 2. Tangente en $P \therefore l$; 3. Bisectriz del $\widehat{1} \therefore Q$; 4. Desde O_1 perpendicular a $\overline{l} \therefore A$; 5. $\odot(O; \overline{OP})$

RECTA - CÍRCULO EN P (INTERNAMENTE)

DATOS



CONSTRUCCIÓN



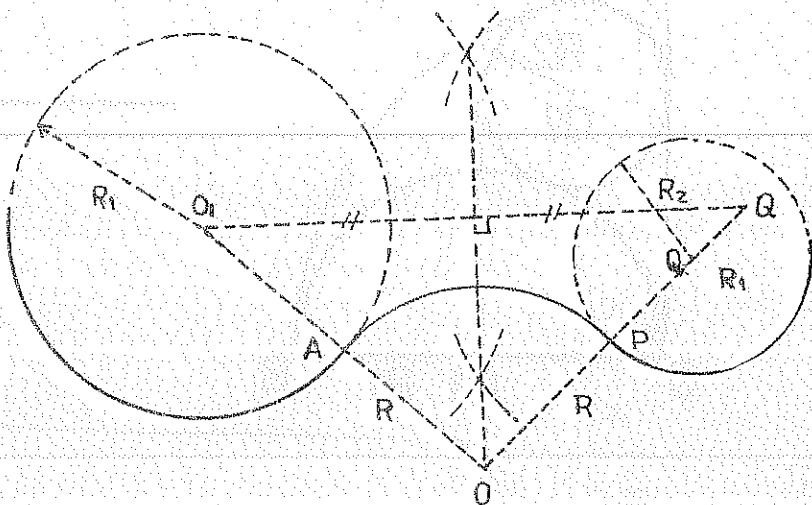
ALGORITMO: 1. $\overline{O_2P}$; 2. Tangente en $P \therefore l$; 3. Bisectriz del $\widehat{1} \therefore Q$; 4. Desde O_1 perpendicular a $\overline{l} \therefore A$; 5. $\odot(O; \overline{OP})$

CÍRCULO - CÍRCULO EN P (EXTERNAMENTE)

DATOS



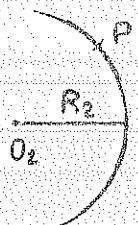
CONSTRUCCIÓN



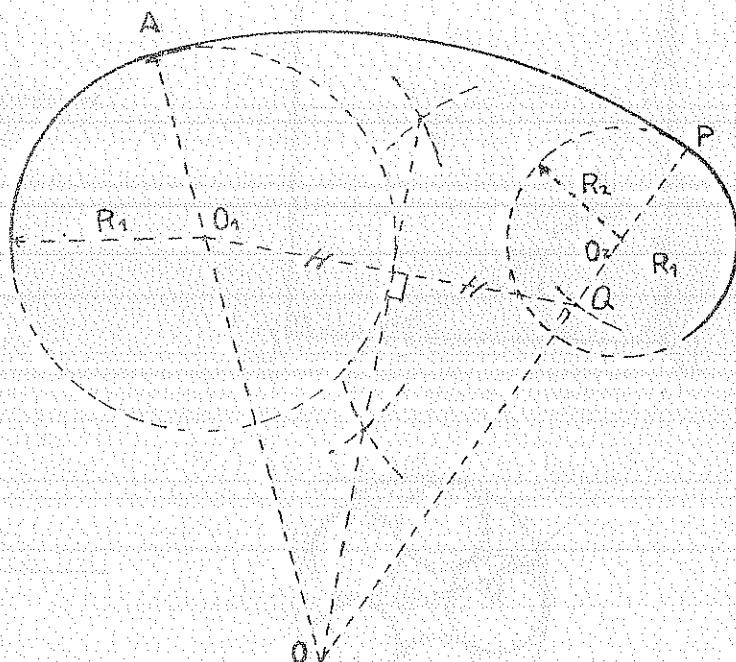
ALGORITMO: 1. $\overline{PQ} = R_1$; 2. $\overline{QO_1}$; 3. Mediatrix de $\overline{QO_1} :: O$; 4. $\overline{OO_1} :: A$; 5. $O(O, \overline{OP})$

CÍRCULO - CÍRCULO EN P (INTERNAMENTE)

DATOS

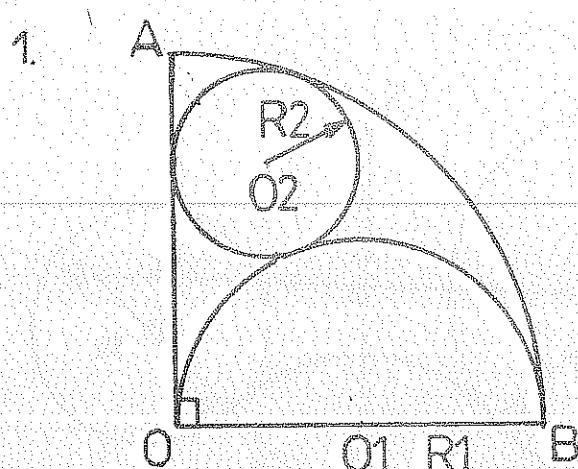


CONSTRUCCIÓN



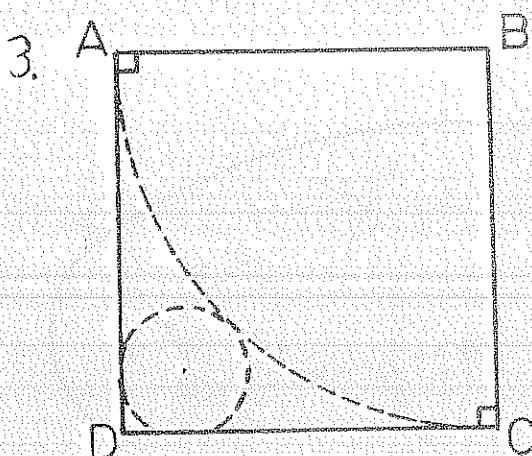
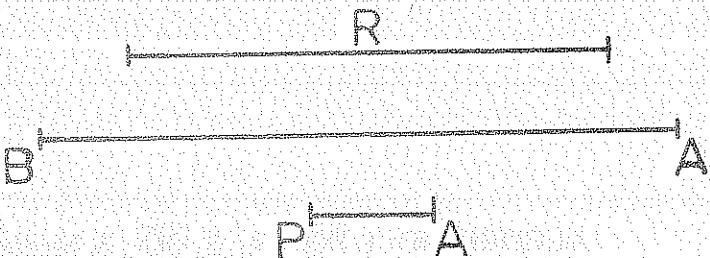
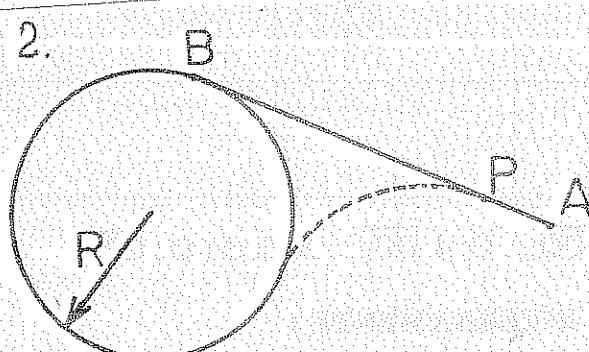
ALGORITMO: 1. $\overline{PQ} = R_1$; 2. $\overline{QO_1}$; 3. Mediatrix de $\overline{QO_1} :: O$; 4. $\overline{OO_1} :: A$; 5. $O(O, \overline{OP})$

10.11. REPRODUCIR LOS SIGUIENTES GRÁFICOS



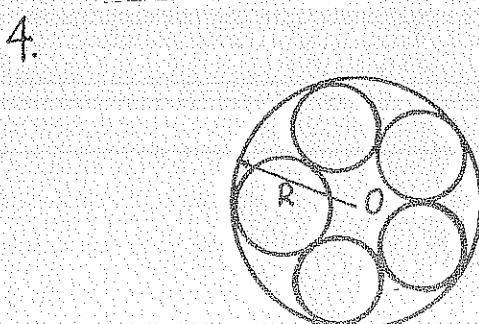
$$OA = OB = a$$

a



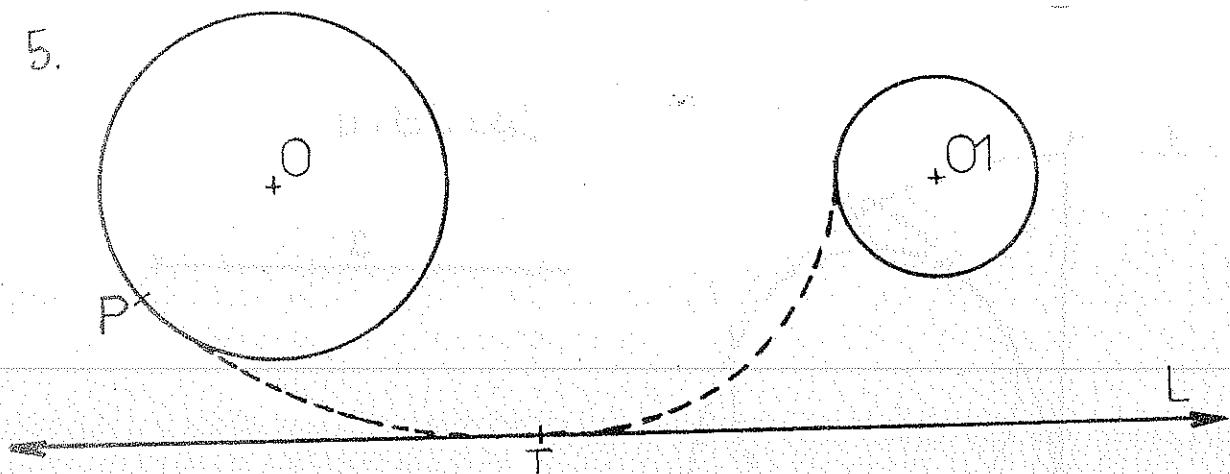
$$AB = BC = CD = DA = m$$

m

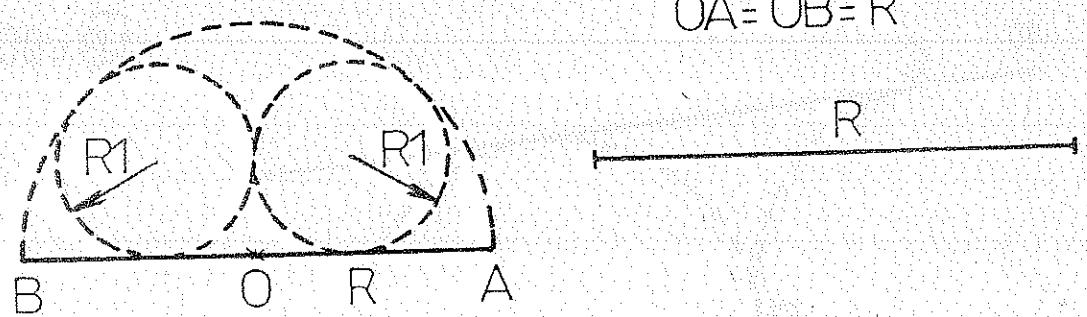


R

5.



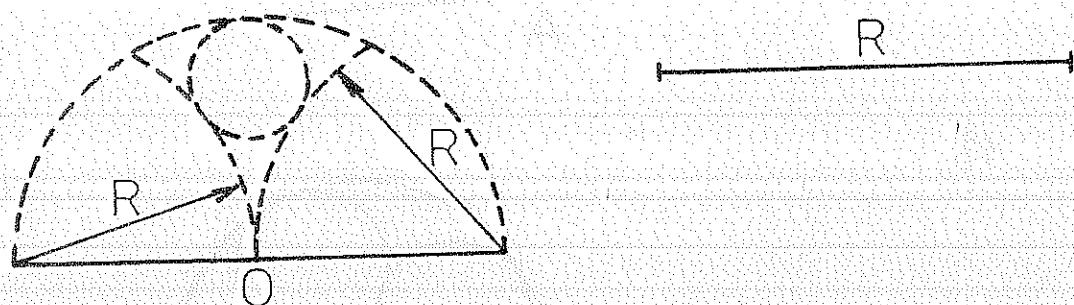
6.



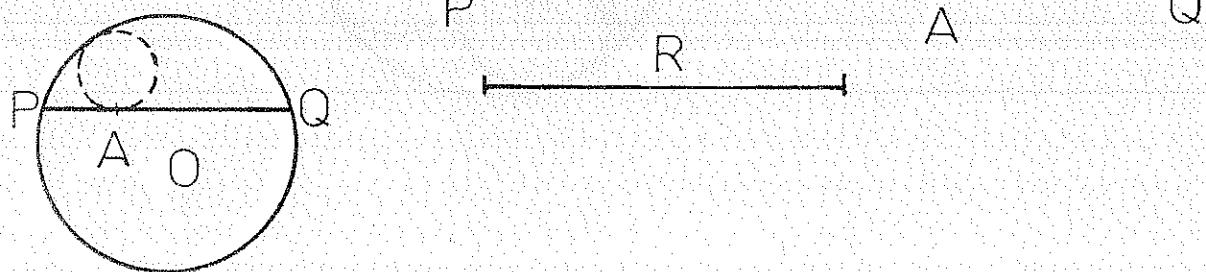
$$OA = OB = R$$

 R

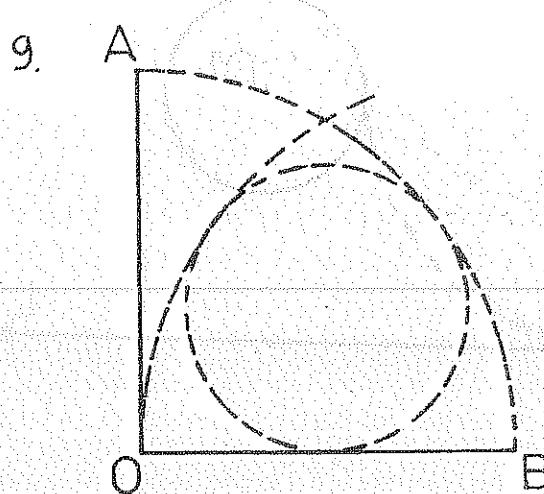
7.

 R

8.

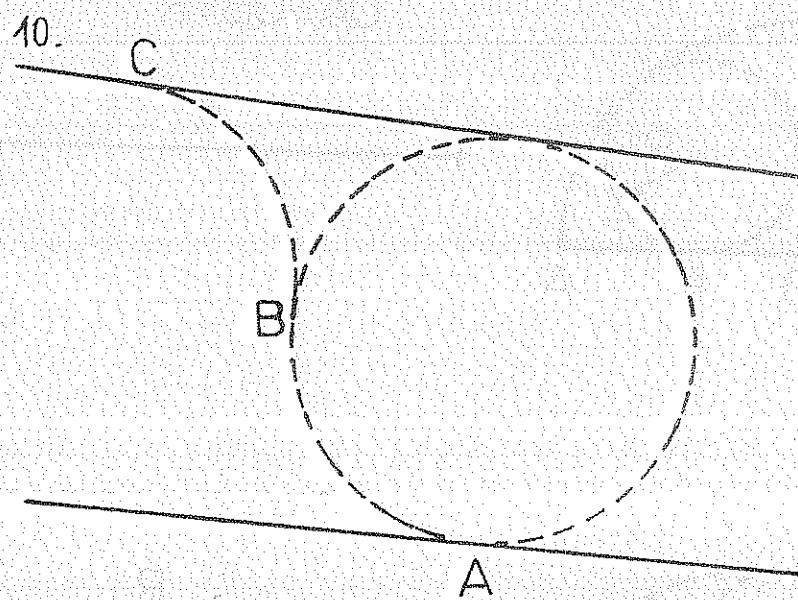


$$P \quad R \quad Q$$



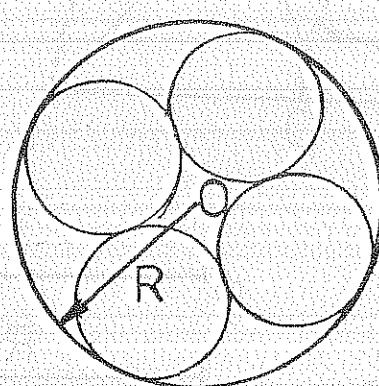
$$OA = OB = a$$

$$a$$



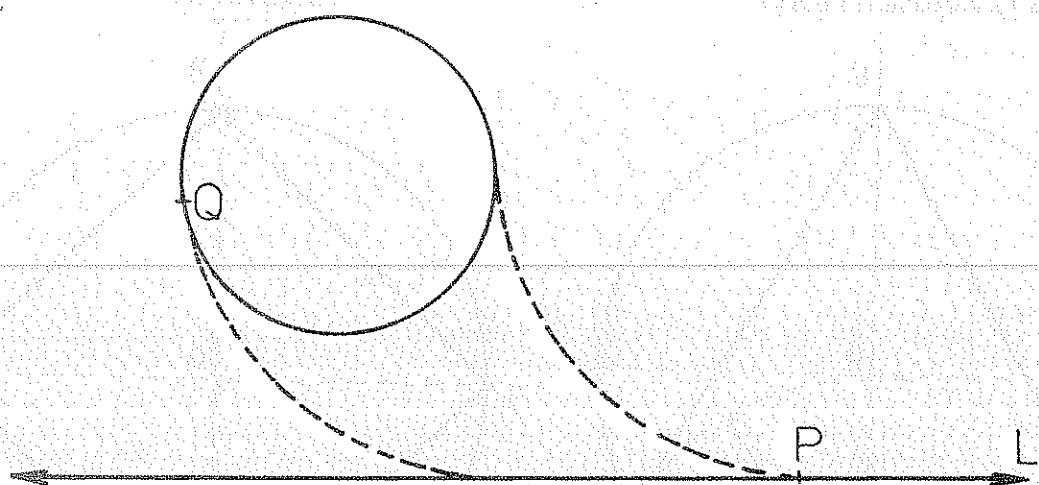
$$\widehat{AB} = 90^\circ$$

11.

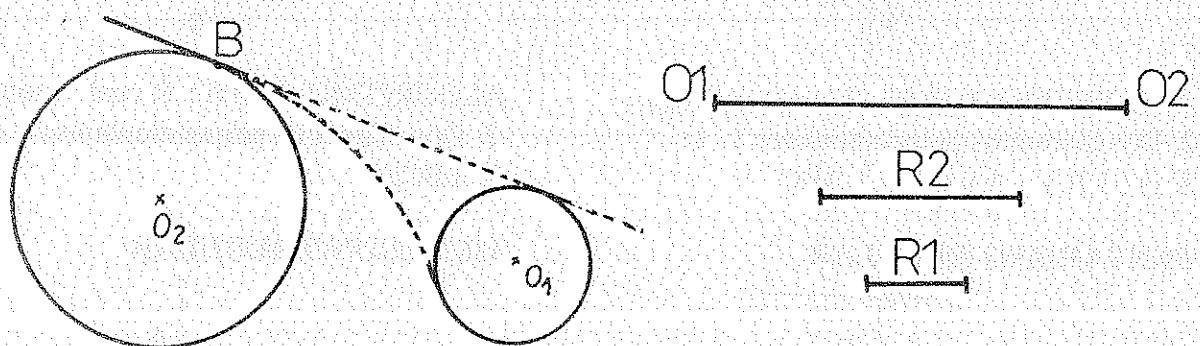


$$R$$

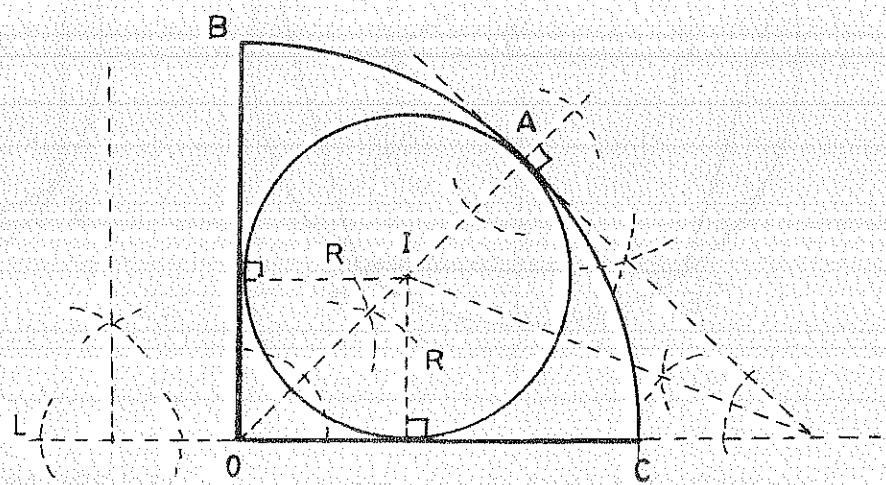
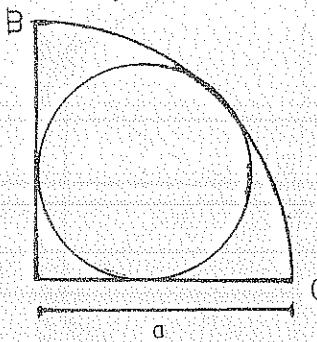
2



13

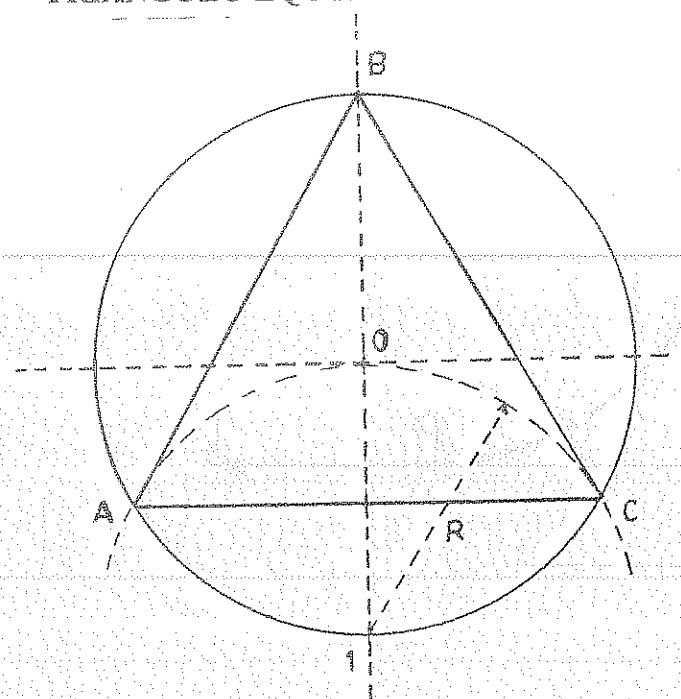


9



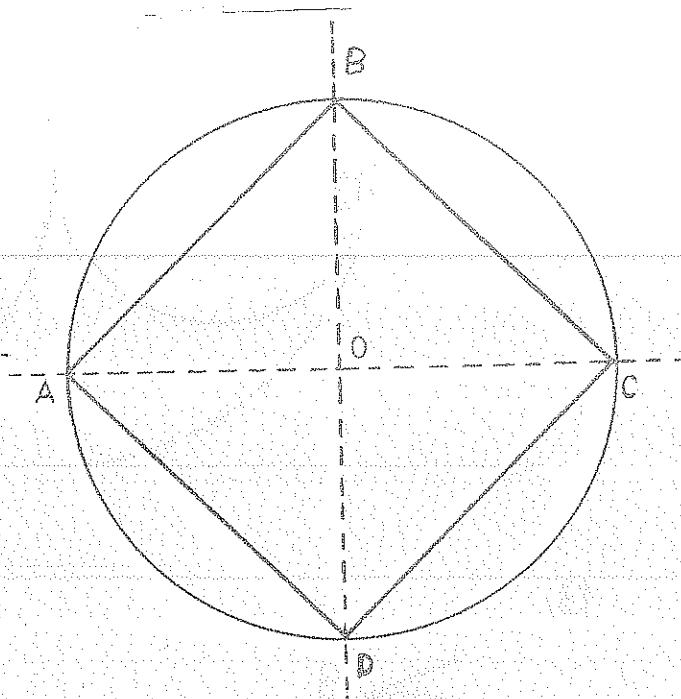
11. POLÍGONOS Y CUADRILÁTEROS

TRIÁNGULO EQUILÁTERO



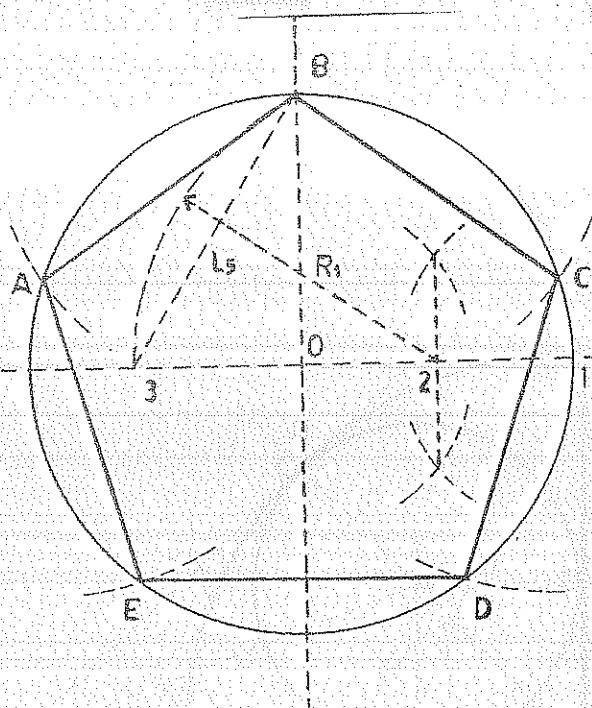
ALGORITMO: 1. O (O, R cual quiera);
2. Dos diámetros perpendiculares $\therefore 1$;
3. $\odot (1, R) \therefore A$ y C; 4. ABC

CUADRADO



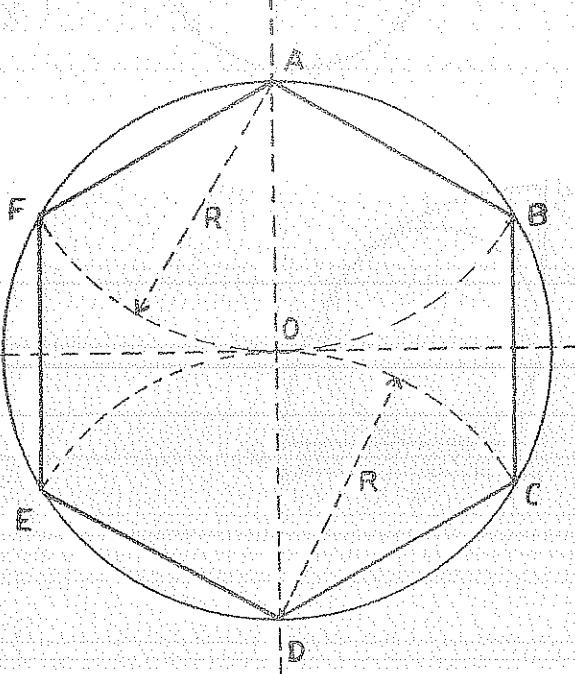
ALGORITMO: 1. O (O, R cual quiera);
2. Dos diámetros perpendiculares; A, B, C, D;
3. ABCD

PENTÁGONO REGULAR



ALGORITMO: 1. O (O, R cual quiera);
2. Dos diámetros perpendiculares $\therefore 1$;
3. Mediatriz de $\overline{O1} \therefore 2$; 4. $\odot (2, 2B) \therefore 3$;
5. $B3 = L_5$; 6. ABCDE

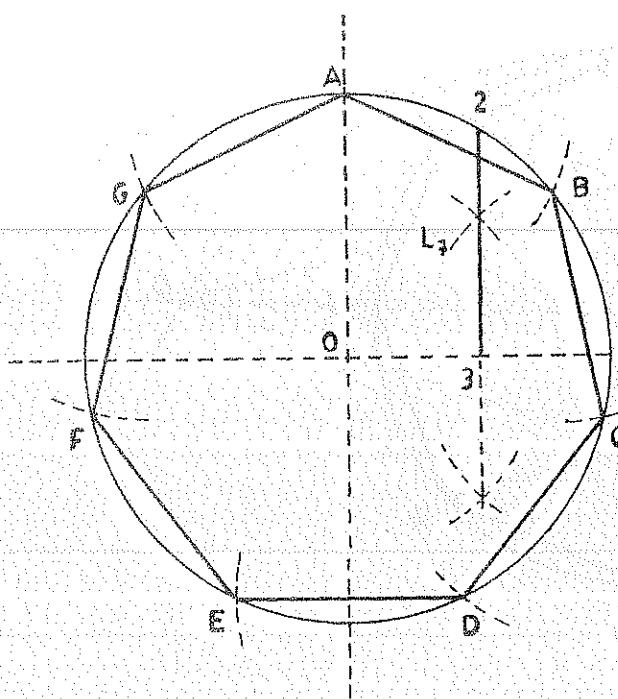
HEXÁGONO REGULAR



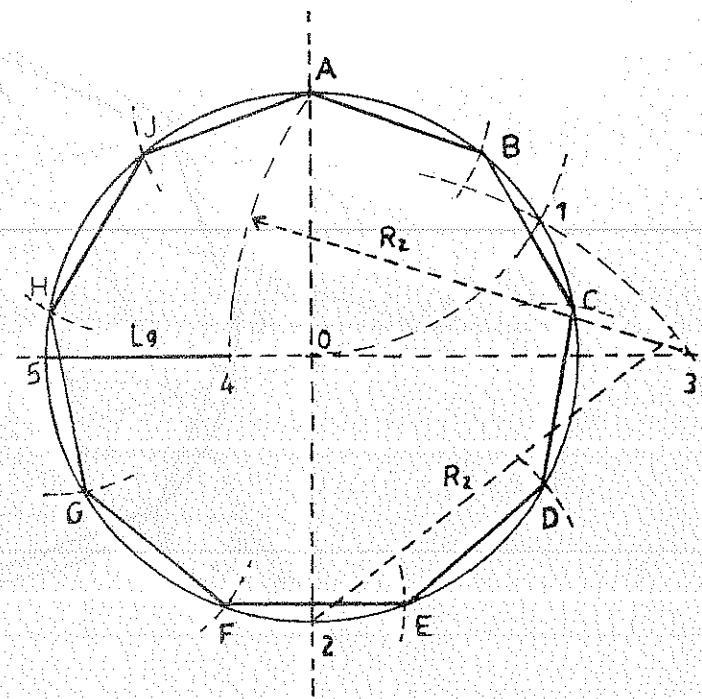
ALGORITMO: 1. O (O, R cual quiera);
2. Dos diámetros perpendiculares $\therefore A$ y D;
3. $\odot (A, R) \therefore F$ y B; 4. $\odot (D, R) \therefore E$ y C;
5. ABCDEF

HEPTÁGONO REGULAR

NONÁGONO REGULAR

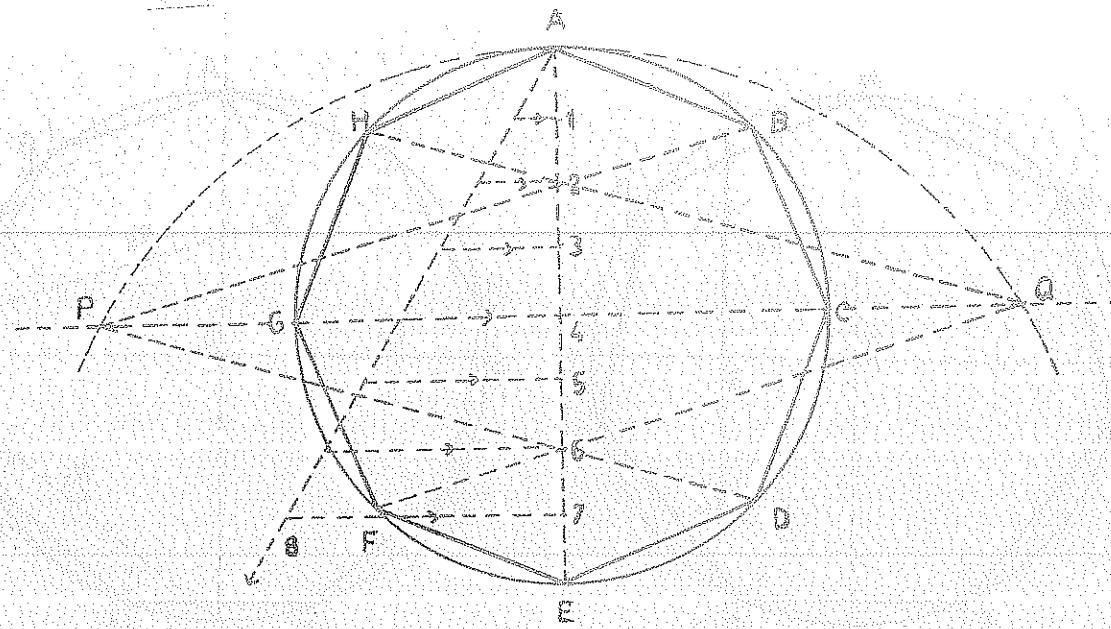


ALGORITMO: 1. $\odot(O, R)$ cual quiera;
 2. Dos diámetros perpendiculares $\therefore 1$ y A ;
 3. Mediatriz de $\overline{O1} \therefore 3$ y 2 ; 4. $\overline{23} = L_7$;
 5. ABCDEFG



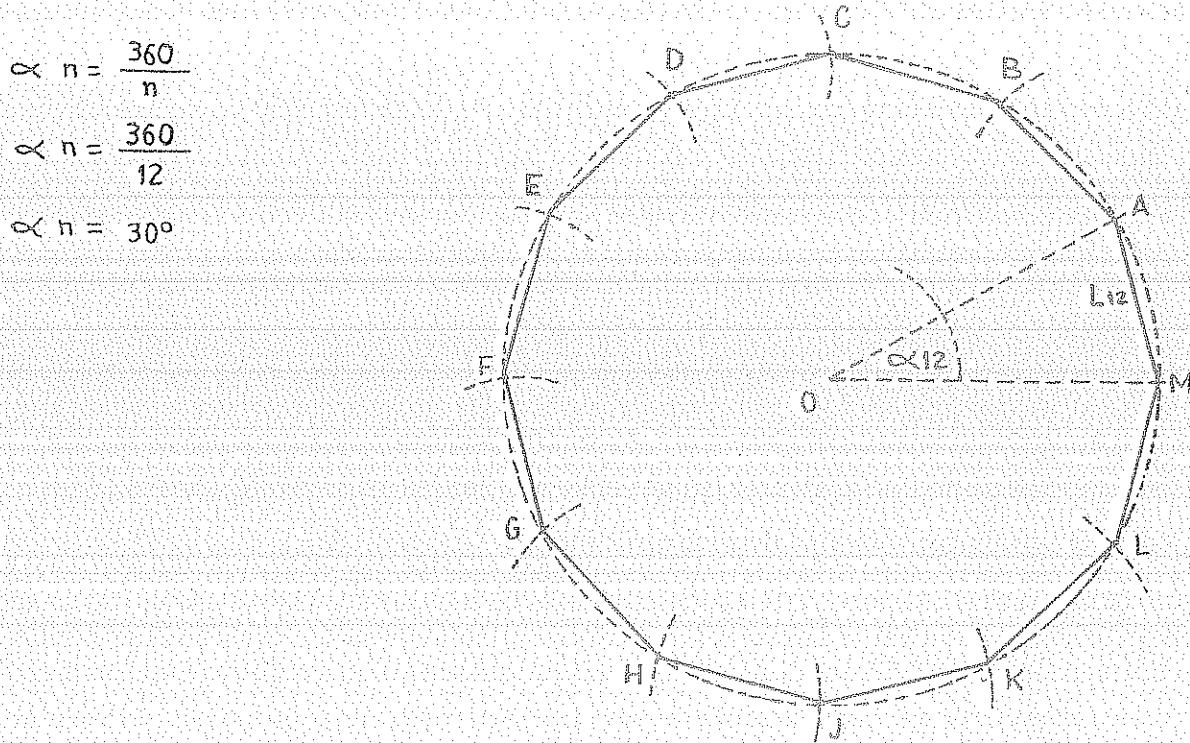
ALGORITMO: 1. $\odot(O, R)$ cual quiera;
 2. Dos diámetros perpendiculares $\therefore 2$ y A ;
 3. $\odot(A, R) \therefore 1$; 4. $\odot(2,21) \therefore 3$
 5. $\odot(3,3A) \therefore 4$; 6. $\overline{54} = L_9$
 7. ABCDEFGHJ

POLÍGONO REGULAR DE "n" LADOS



ALGORITMO: 1. O (O; R cual quiera); 2. Dos diámetros perpendiculares \therefore E y A; 3. (E; AE) \therefore P y Q; 4. Dividir AE en "n" (8) partes iguales; 5. P y Q con 2,4,6 \therefore B, C, D, F, G, H; 6. ABCDEFGH

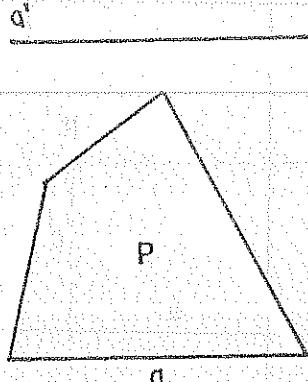
POLÍGONO REGULAR DE "n" LADOS



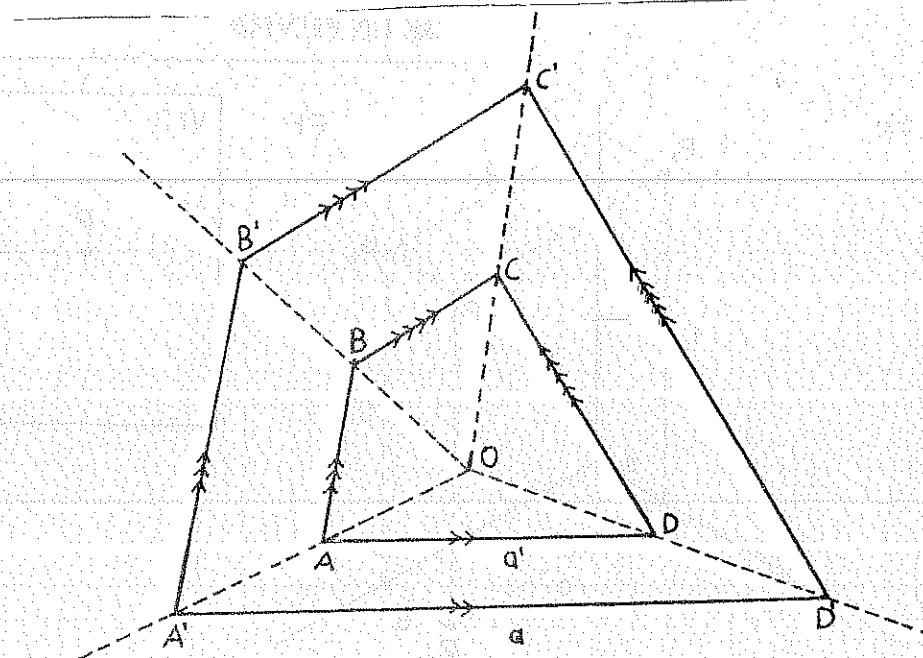
ALGORITMO: 1. O (O, R cual quiera); 2. $\alpha_n = 360^\circ / n = 30^\circ \therefore \overline{AM} = L_{12}$ 3. ABCDEFGHIJKLMNOP

POLÍGONO SEMEJANTE A OTRO DADO EL LADO HOMÓLOGO

DATOS



CONSTRUCCIÓN



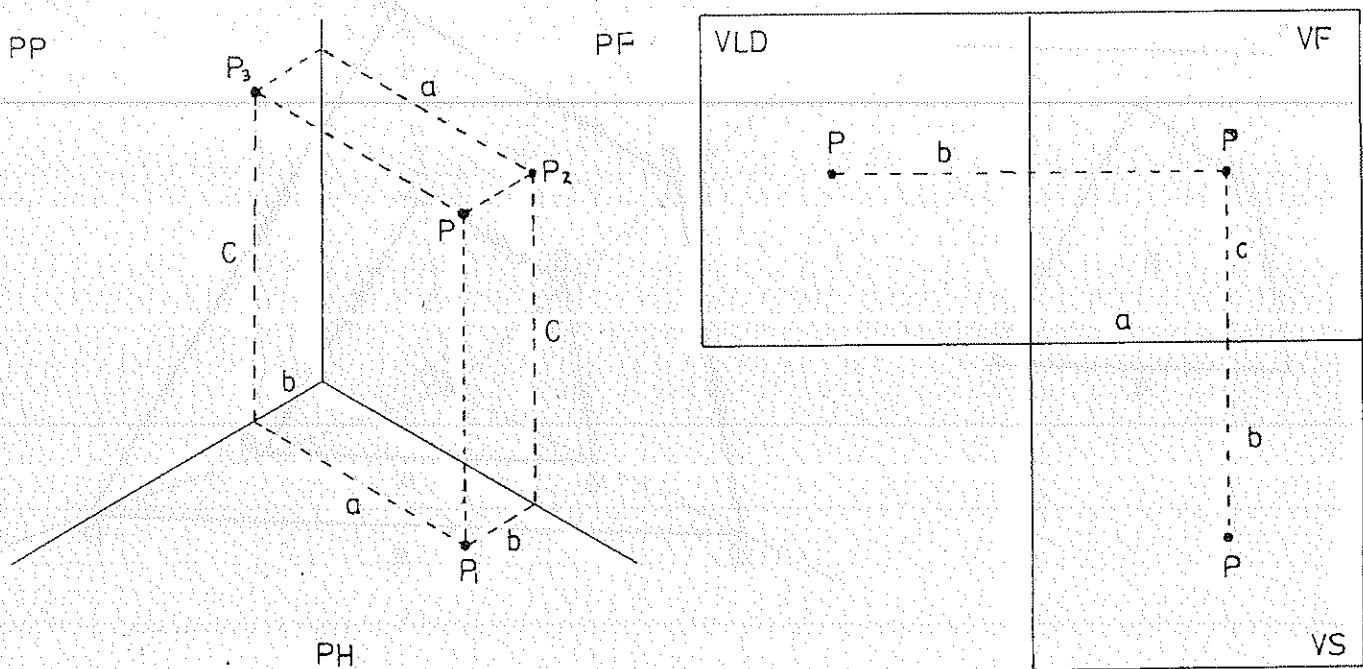
ALGORITMO: 1. \overline{ABCD} ; 2. Punto O cualquiera; 3. $\overline{OB}, \overline{OC}, \overline{OD}, \overline{OA}$; 4. $\overline{A'D'} \parallel \overline{AD}, \overline{A'B'} \parallel \overline{AB}, \overline{B'C'} \parallel \overline{BC}, \overline{C'D'} \parallel \overline{CD}$; 5. $\overline{A'B'} \overline{C'D'}$

11.1. EJERCICIOS

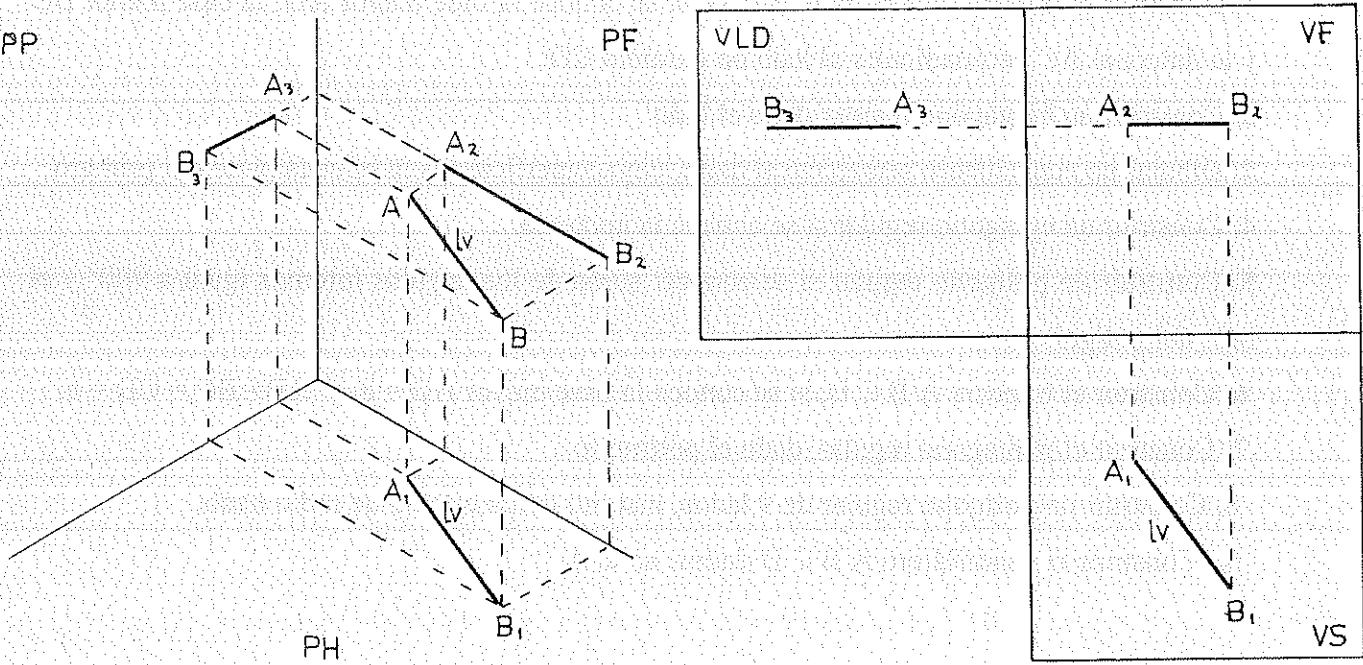
1. Construir el trapecio isósceles $A B C D$, si se conoce la base mayor AD , la base menor BC y la diagonal AC perpendicular al lado no paralelo CD .
2. Construir un heptágono regular dado el lado
3. Dibujar un cuadrilátero semejante al dado, cuya superficie sea la novena parte del primero.
4. Construir un eptágono regular si se conoce la apotema.
5. Construir un polígono regular si se conoce: suma de los ángulos internos igual a 900° y el lado del polígono.
6. Construir el trapecio $A B C D$, si se conoce la base mayor $AD = b$ y $AB = BC = CD = a$.
7. Construir el pentágono regular, dado el perímetro.
8. Construir un polígono regular de 9 lados, inscrito en un círculo de radio dado.
9. Construir el cuadrilátero $A B C D$ dados: a, c, d .

12. PROYECCIONES ORTOGONALES

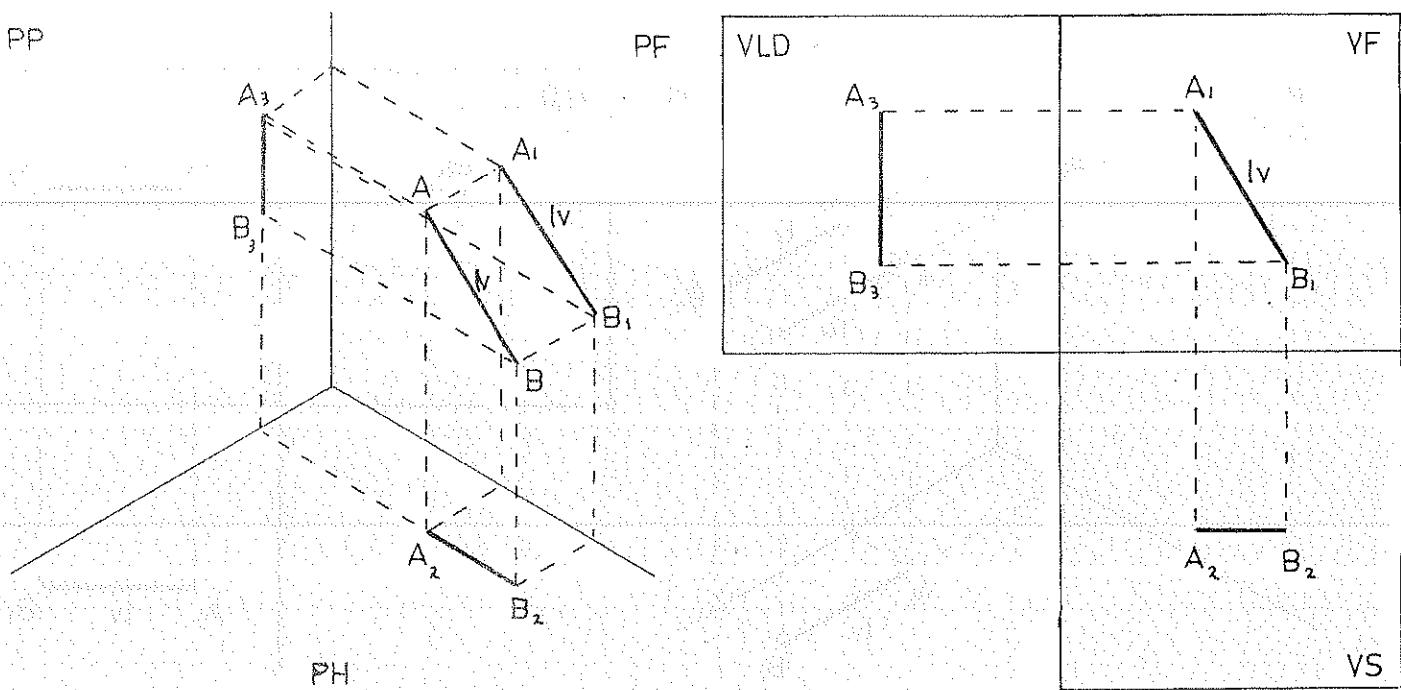
DE UN PUNTO



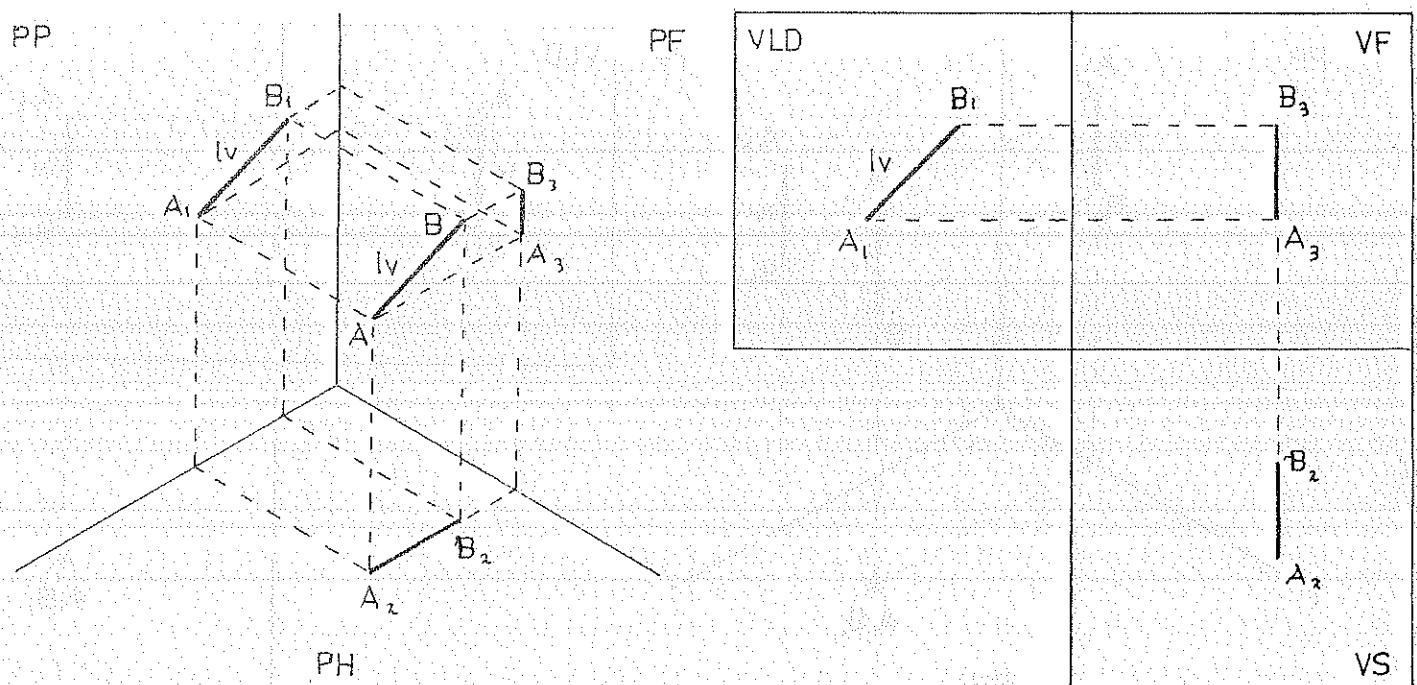
SEGMENTO HORIZONTAL



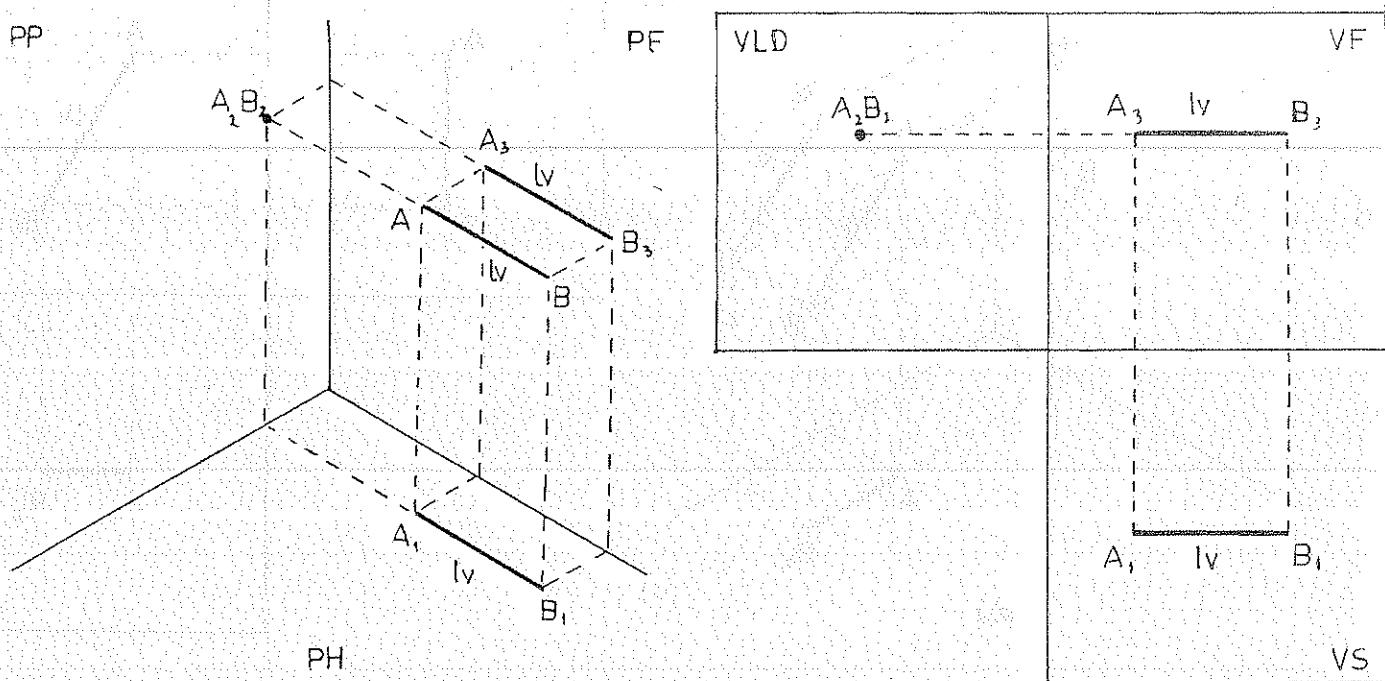
SEGMENTO FRONTAL



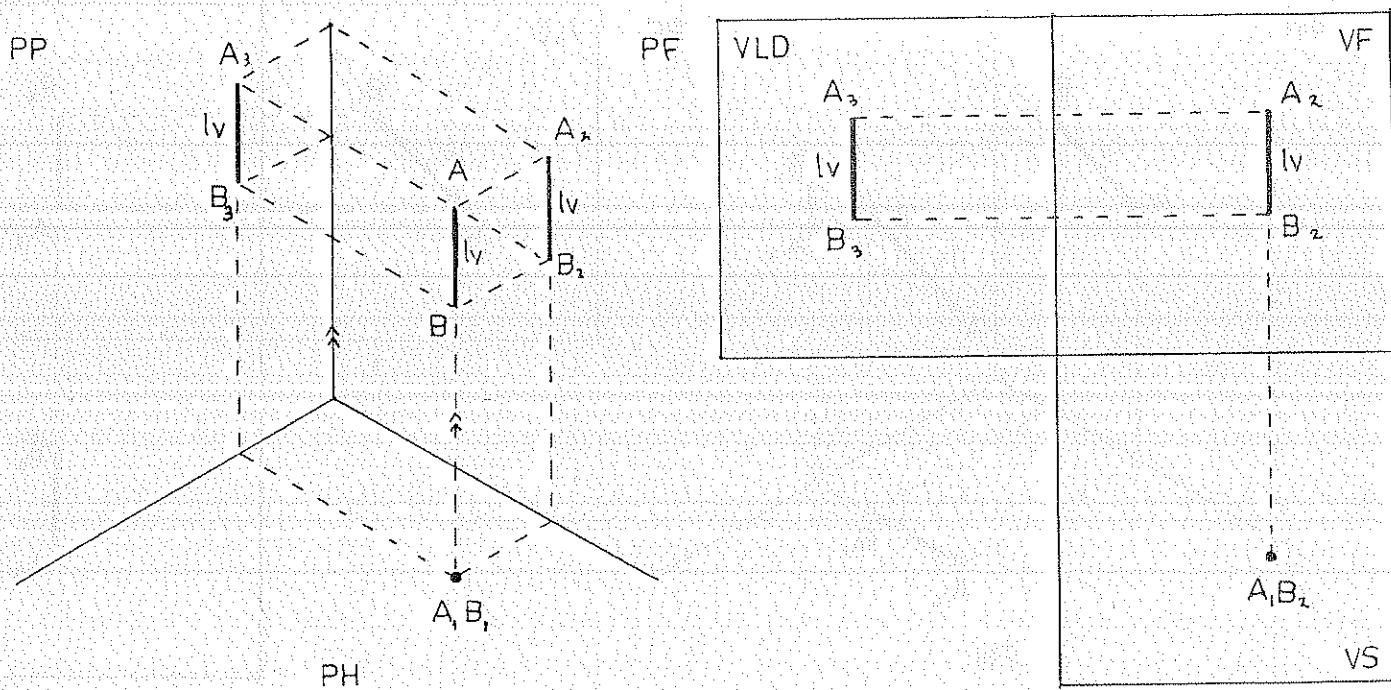
SEGMENTO DE PERFIL



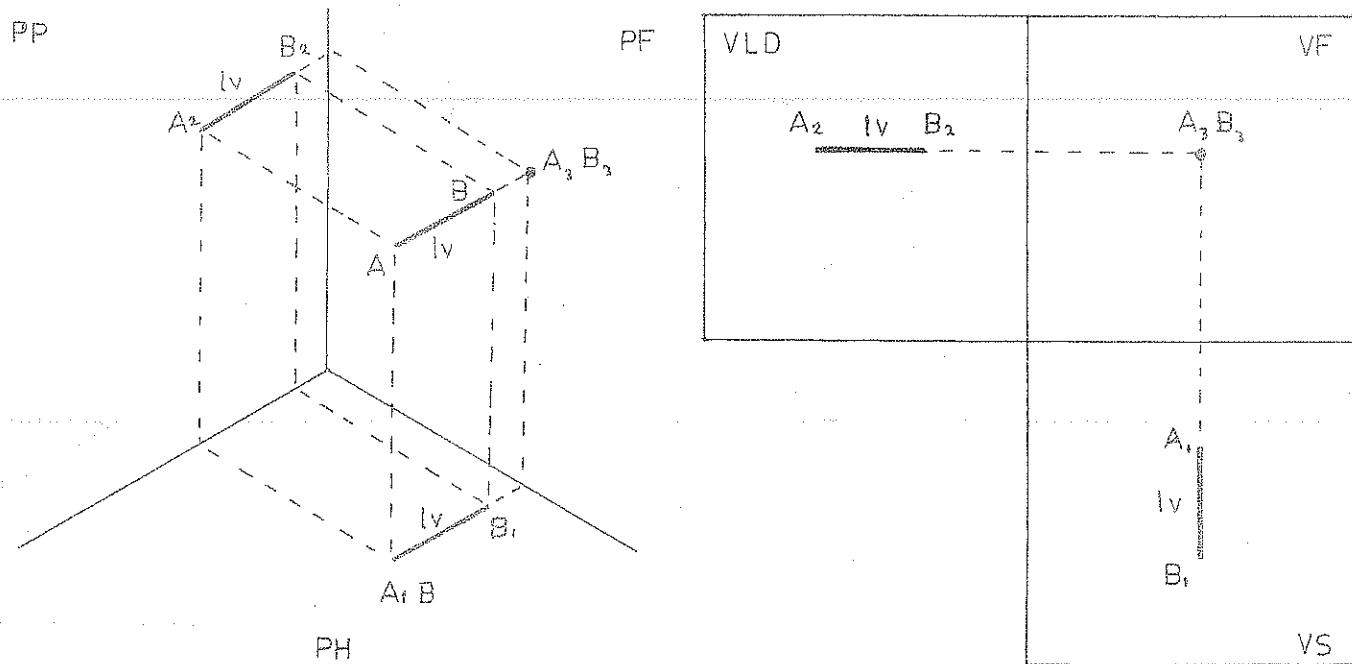
SEGMENTO FRONTAL HORIZONTAL



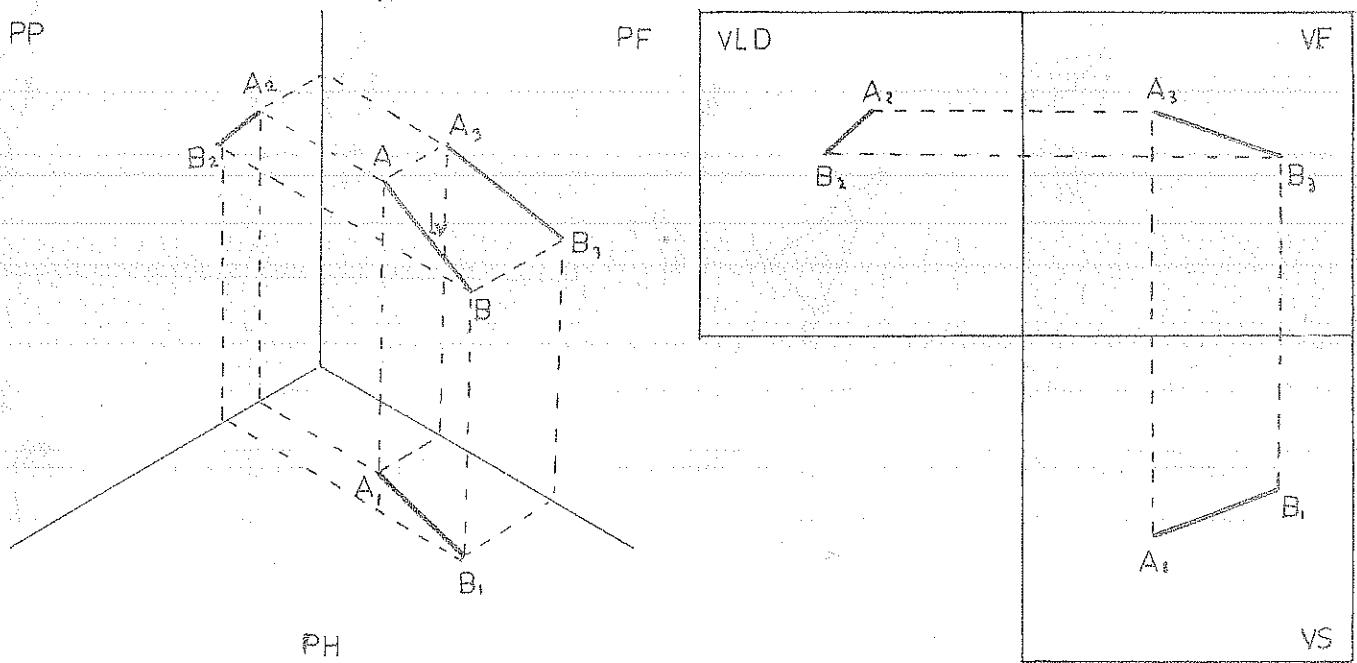
SEGMENTO FRONTAL DE PERFIL



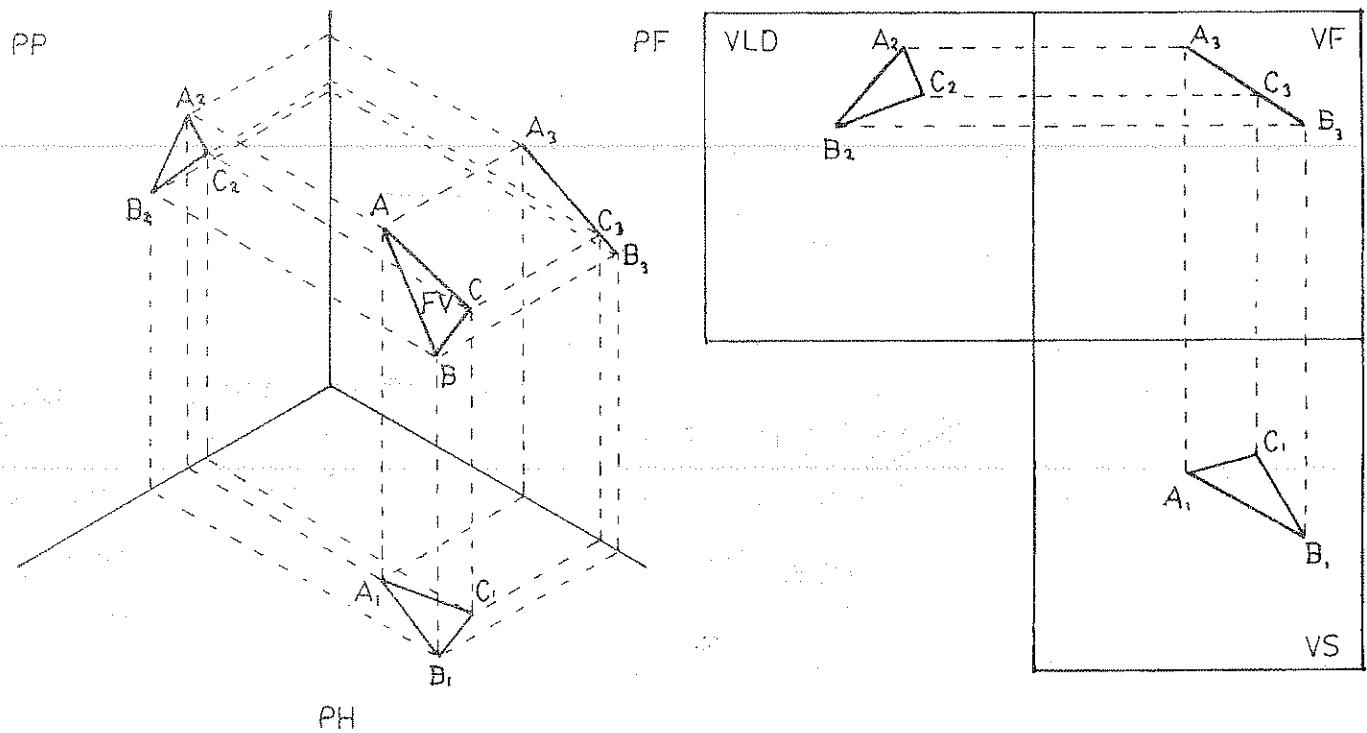
SEGMENTO HORIZONTAL DE PERFIL



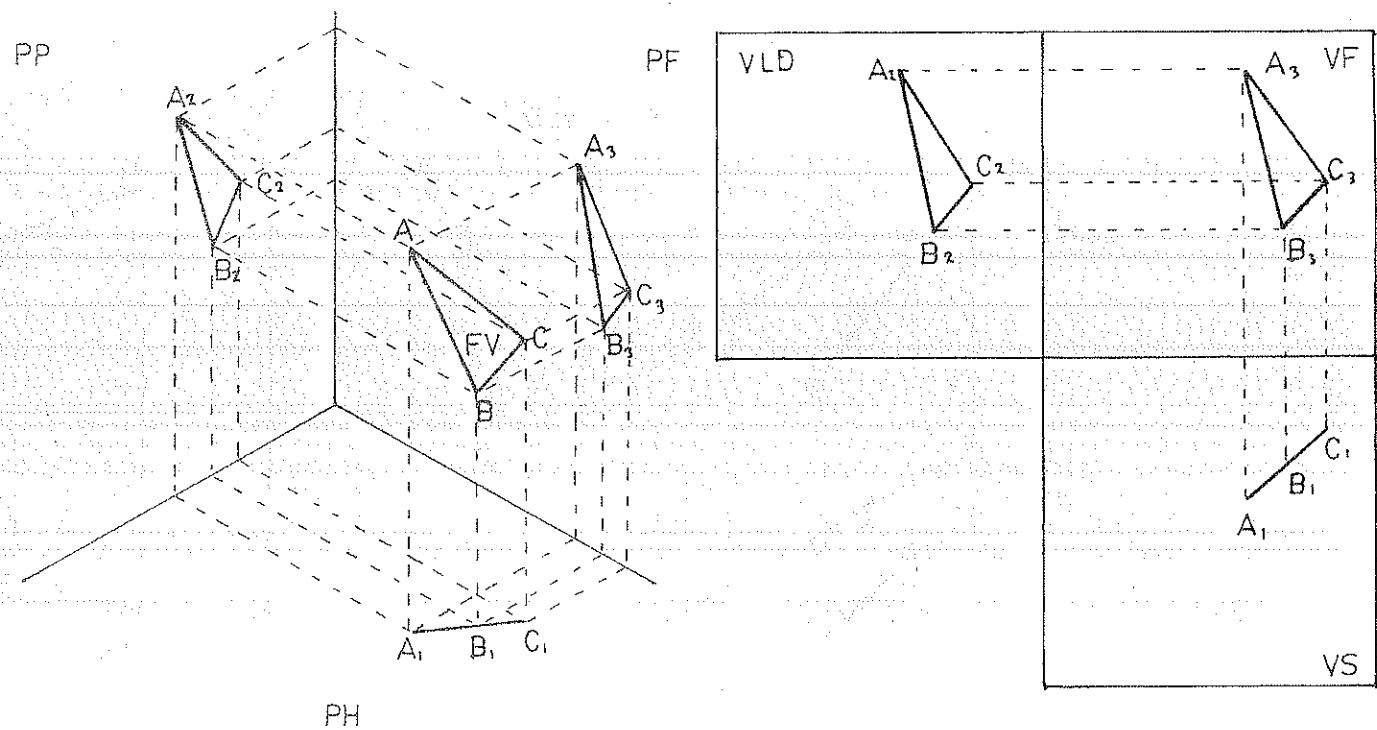
SEGMENTO OBLICUO



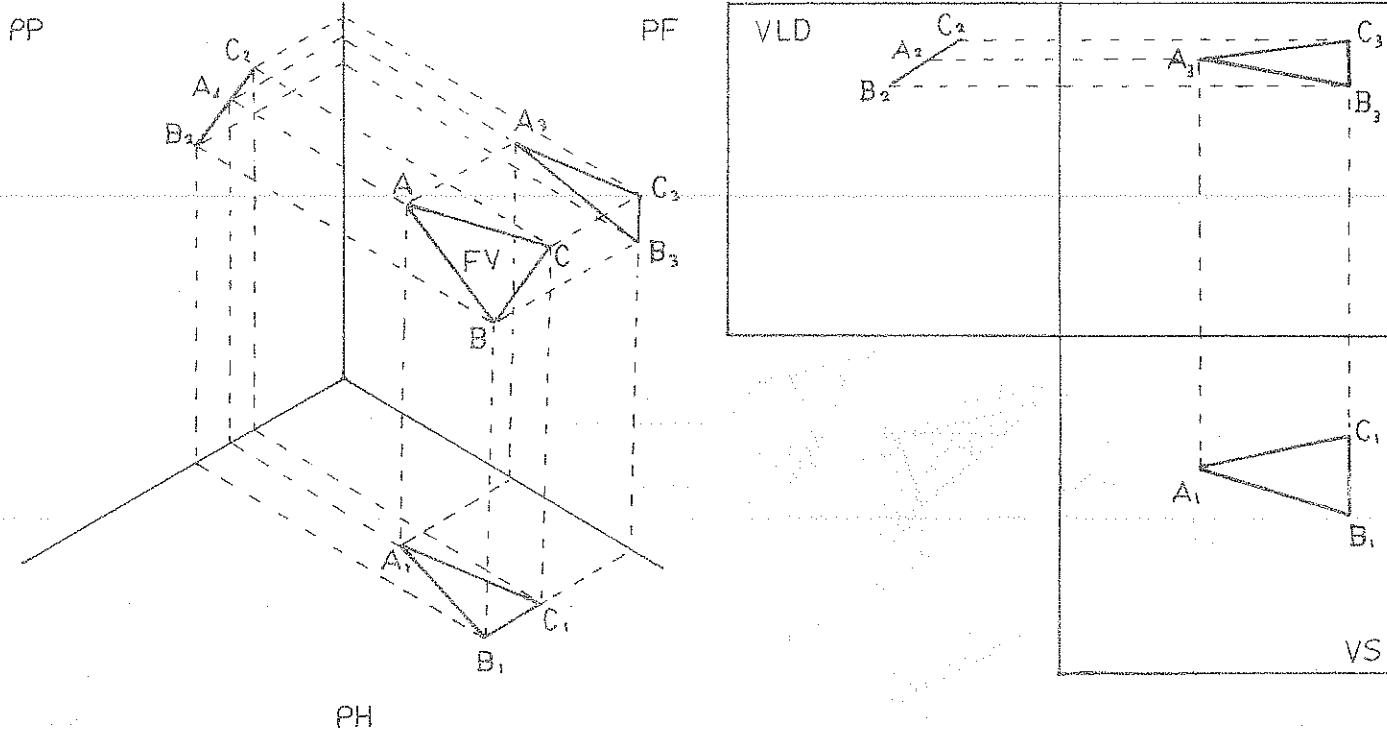
PLANO PERPENDICULAR AL PLANO FRONTAL



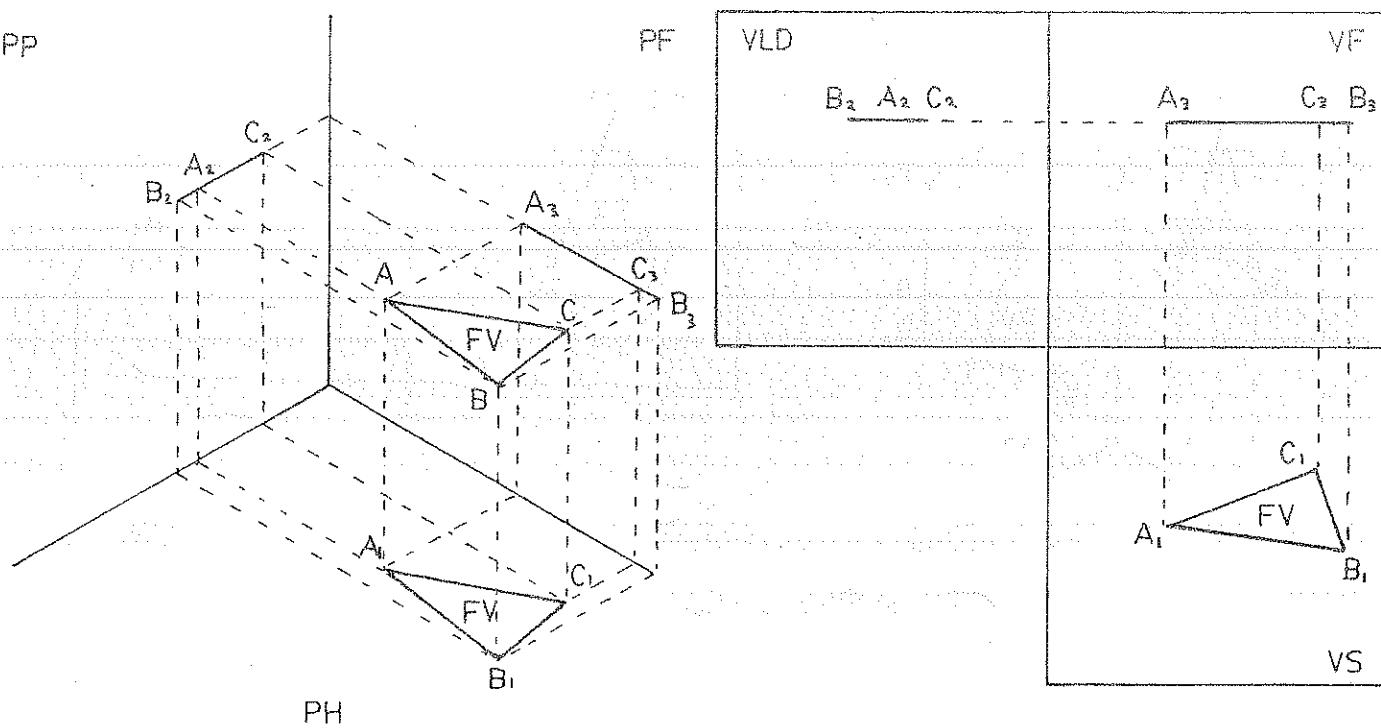
PLANO PERPENDICULAR AL PLANO HORIZONTAL



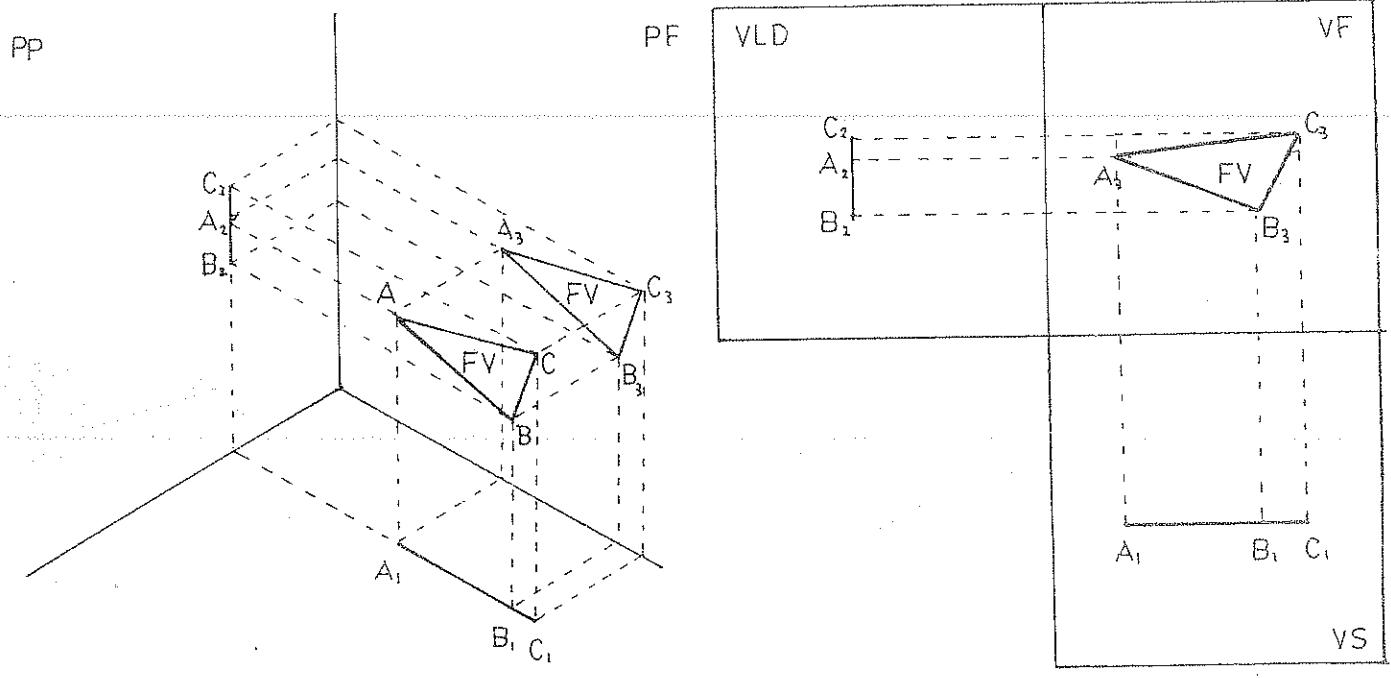
PLANO PERPENDICULAR AL PLANO DE PERFIL



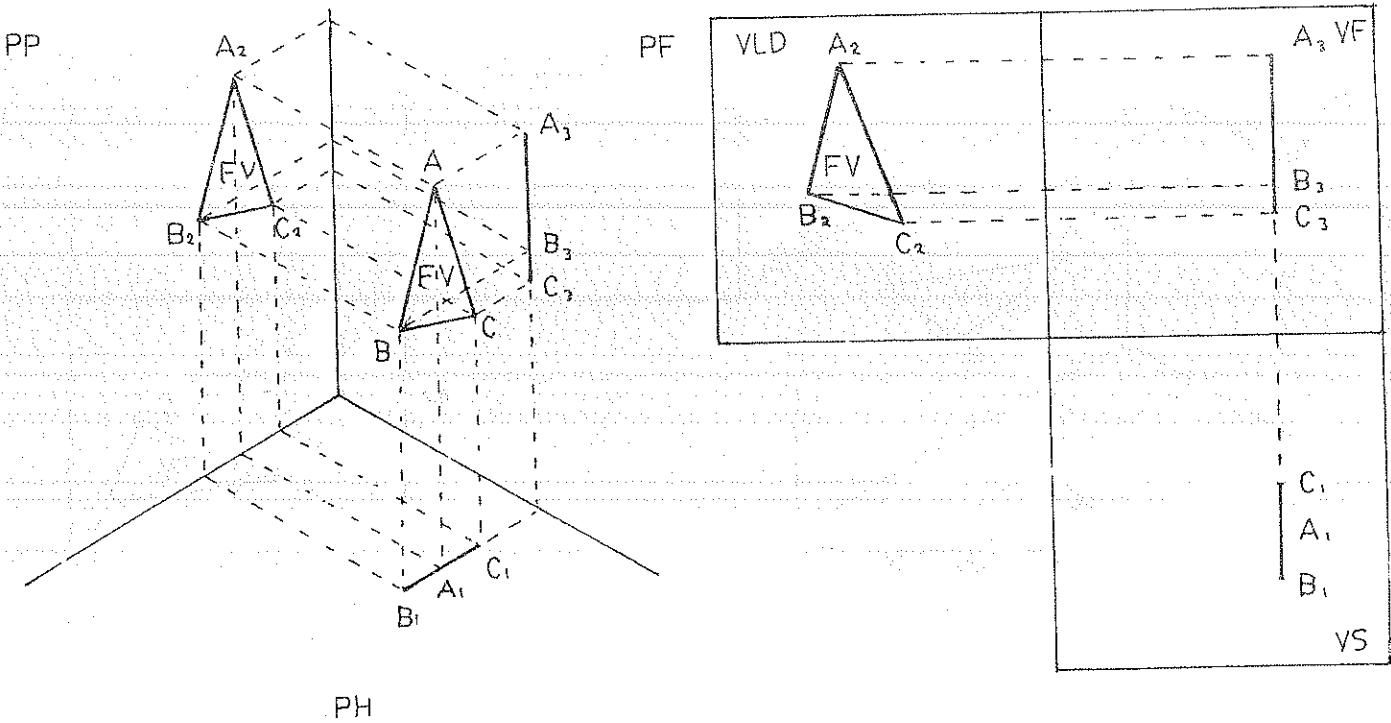
PLANO PARALELO AL PLANO HORIZONTAL



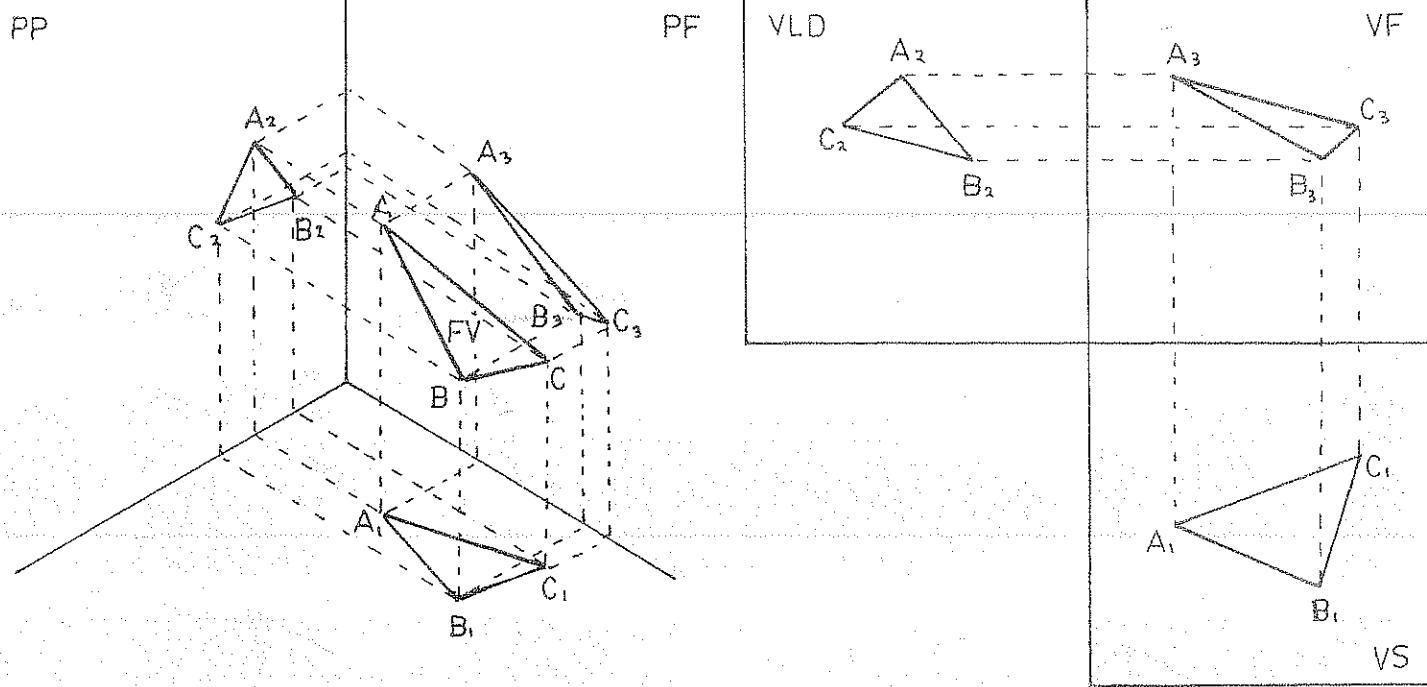
PLANO PARALELO AL PLANO FRONTAL

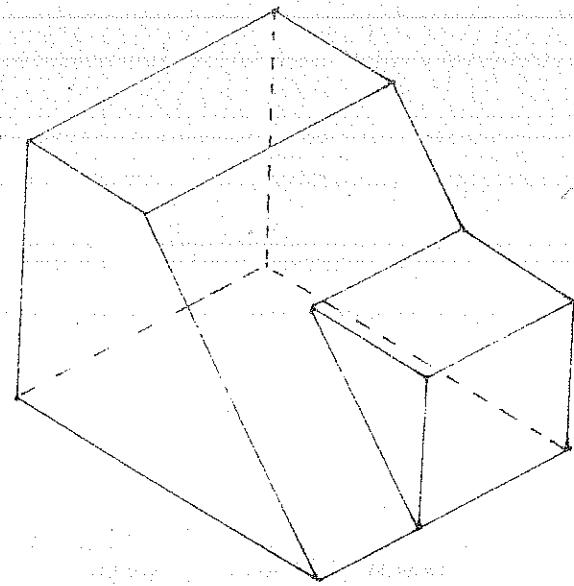
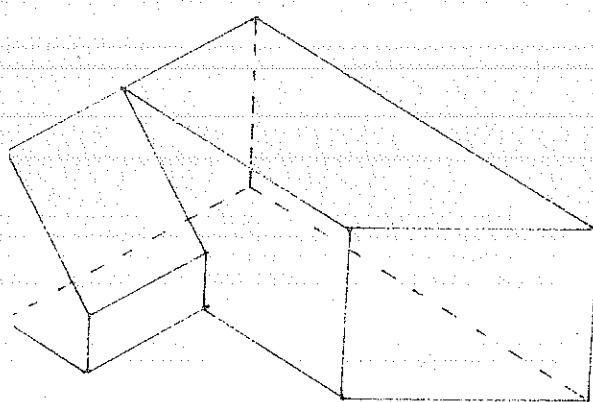
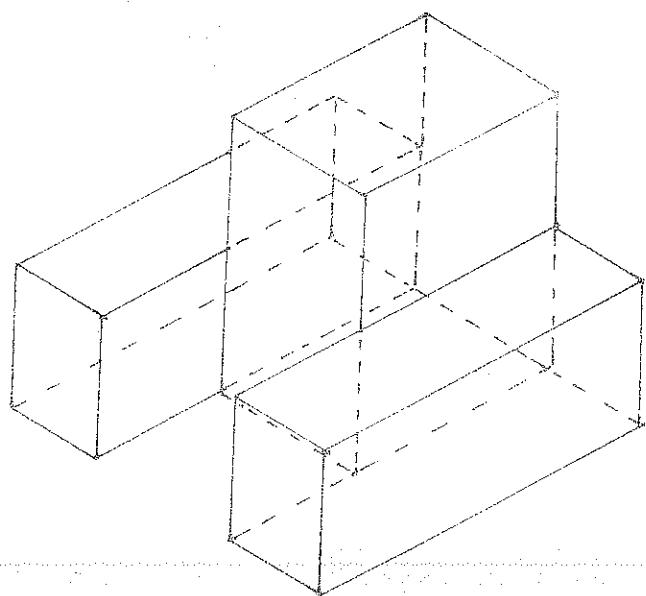
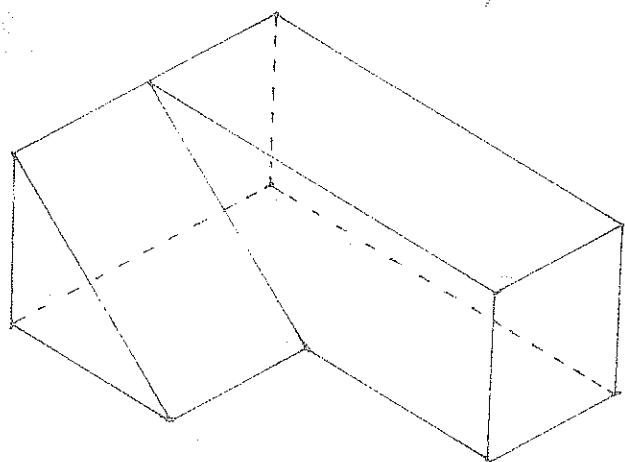
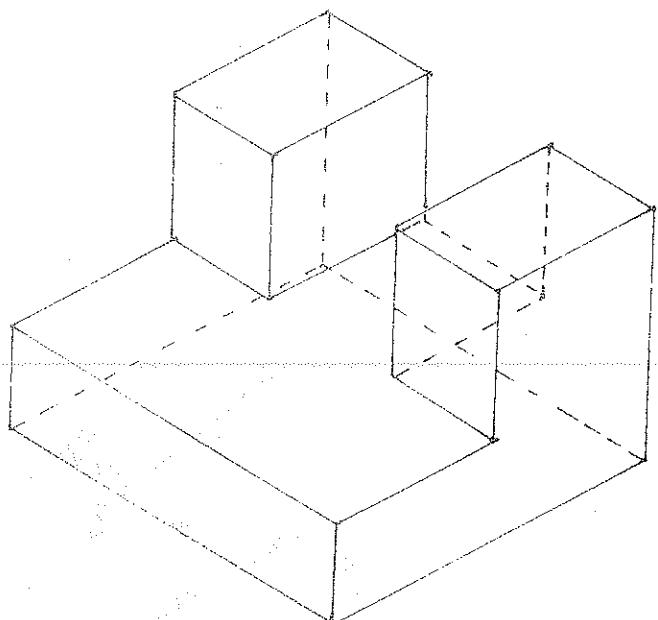
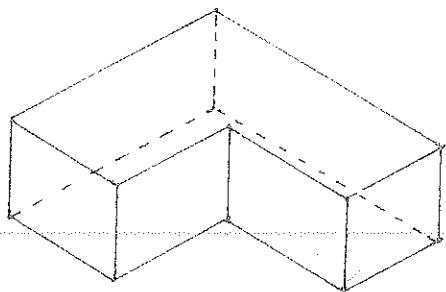


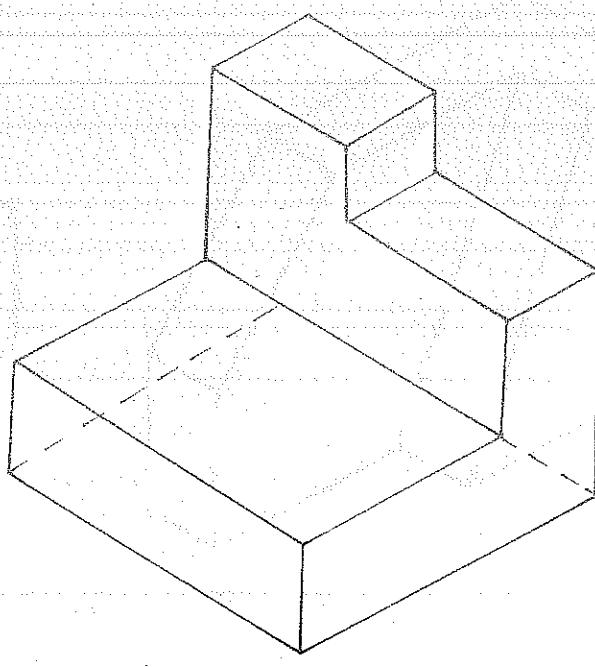
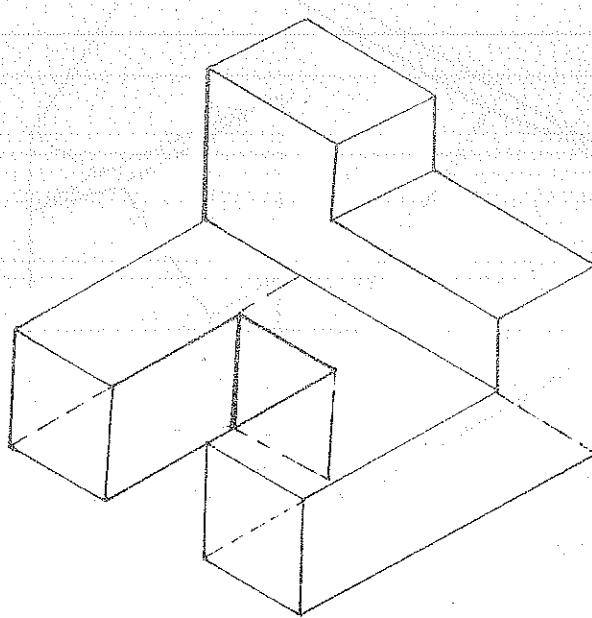
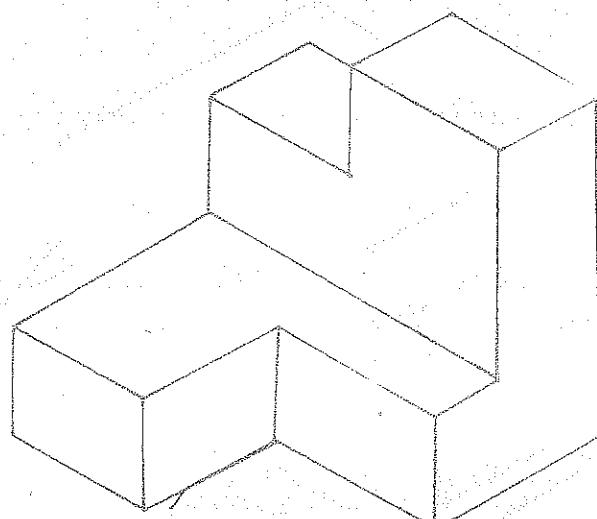
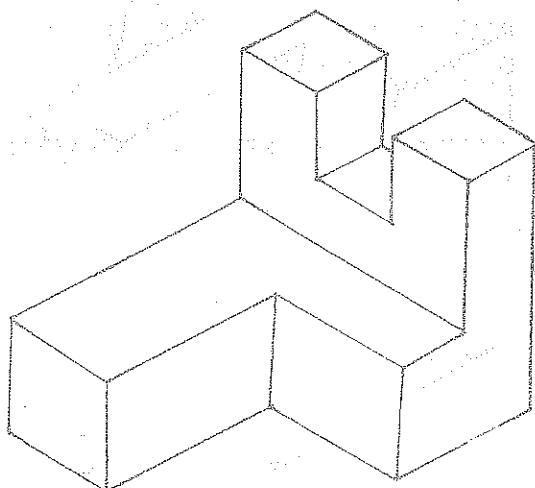
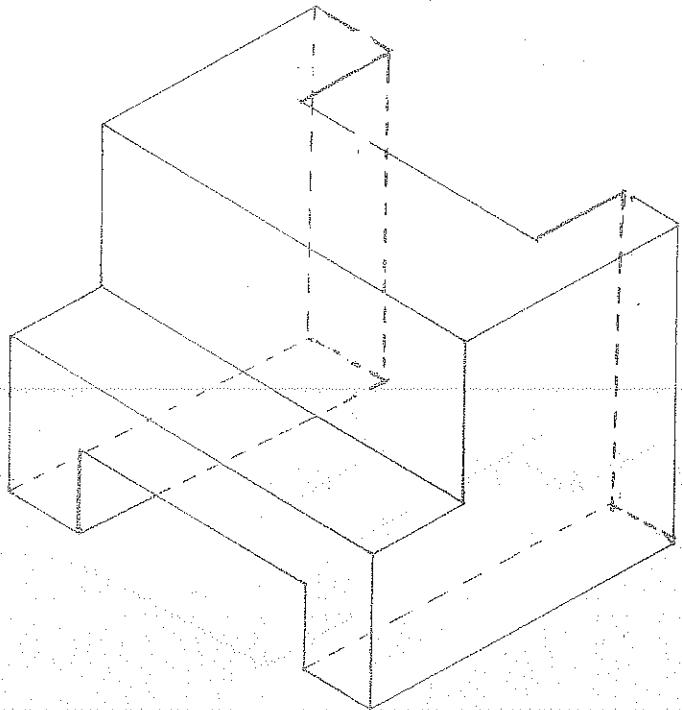
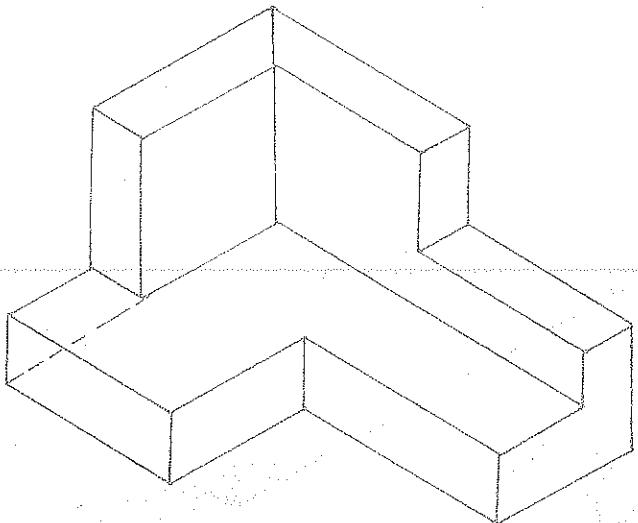
PLANO PARALELO AL PLANO DE PERFIL

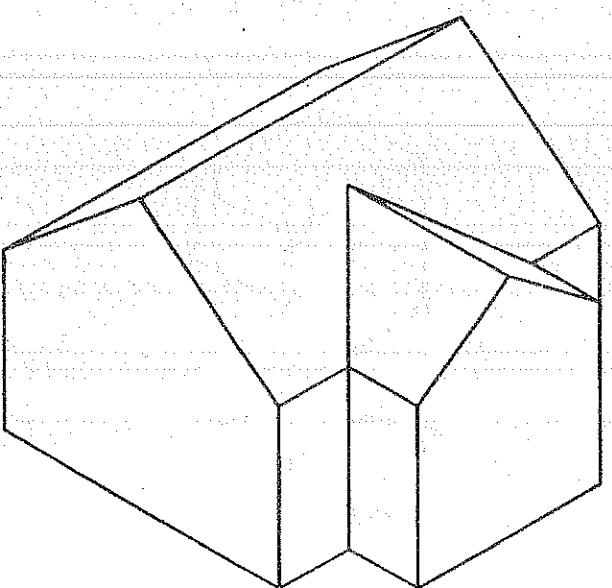
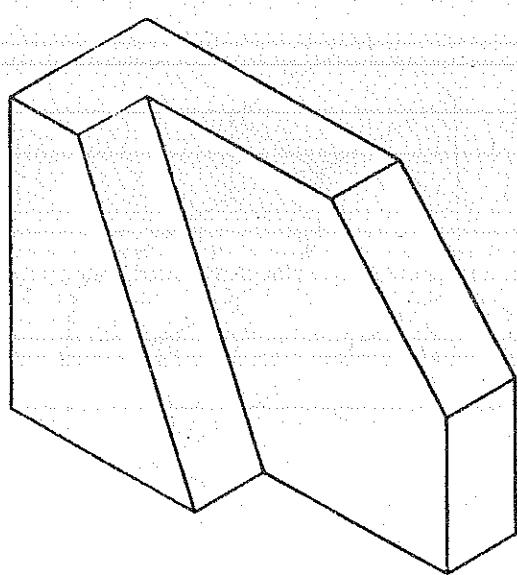
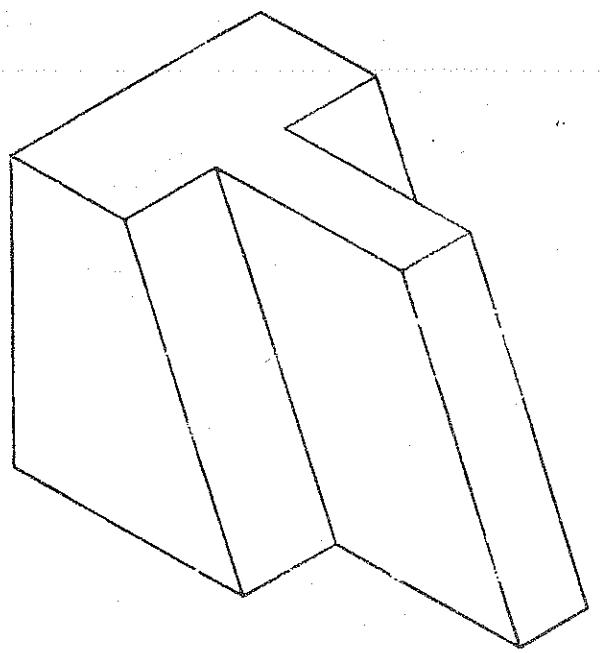
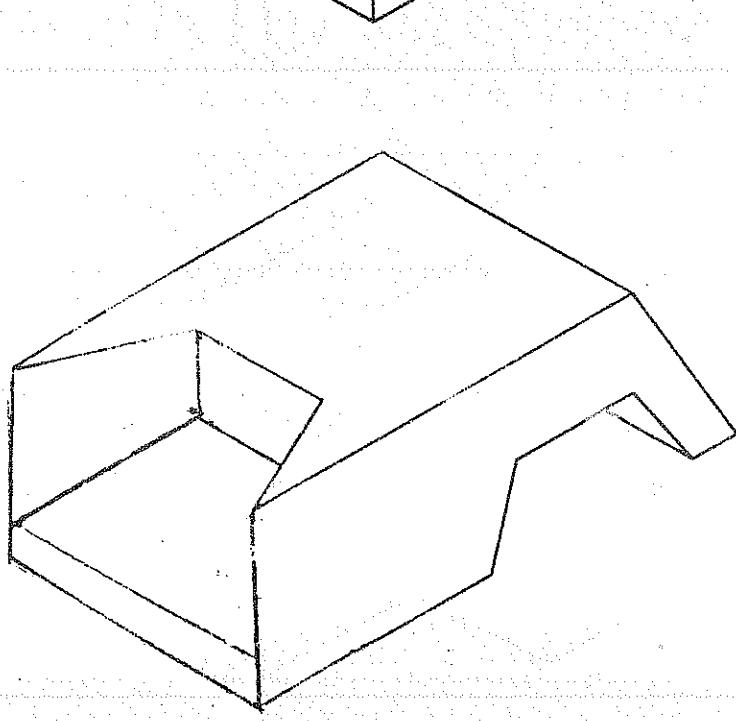
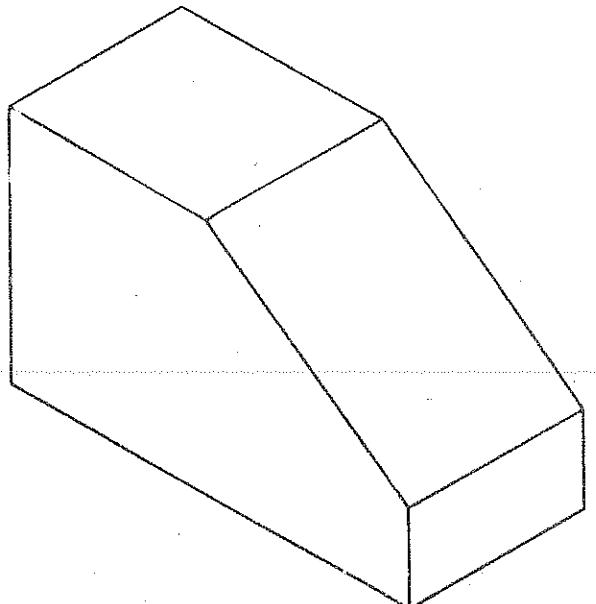
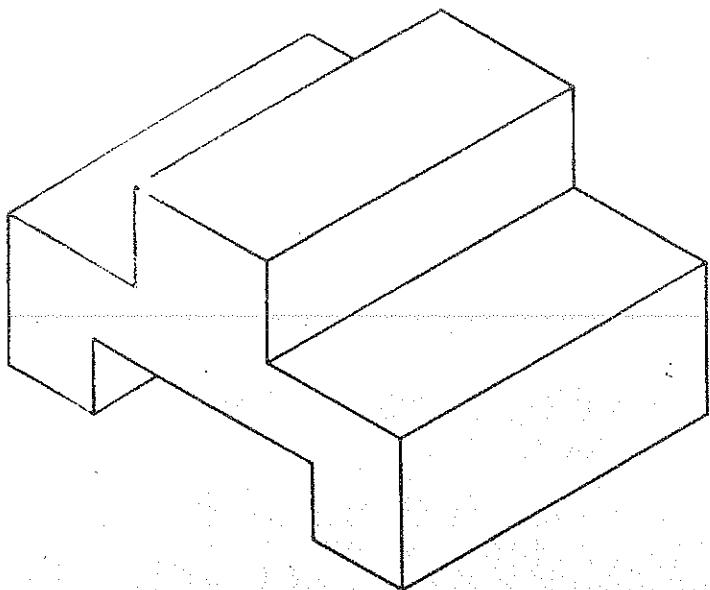


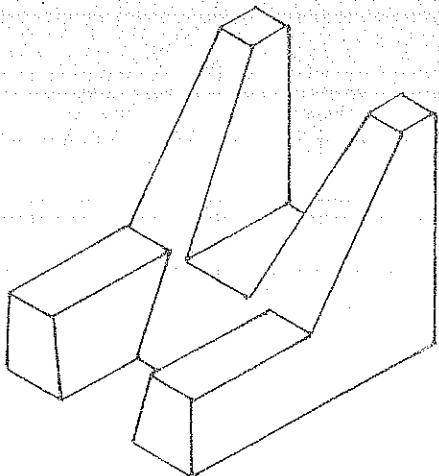
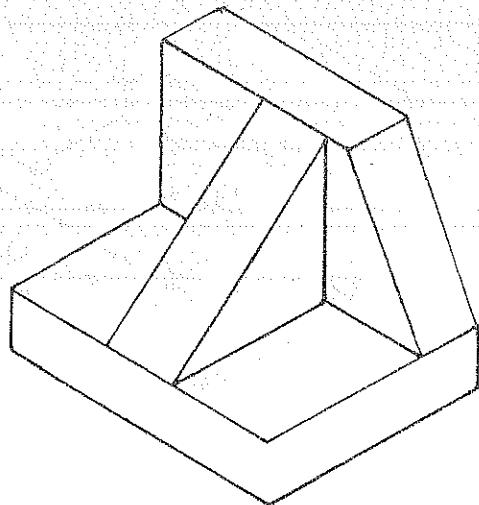
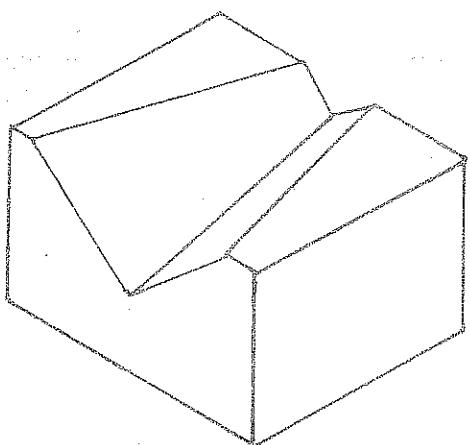
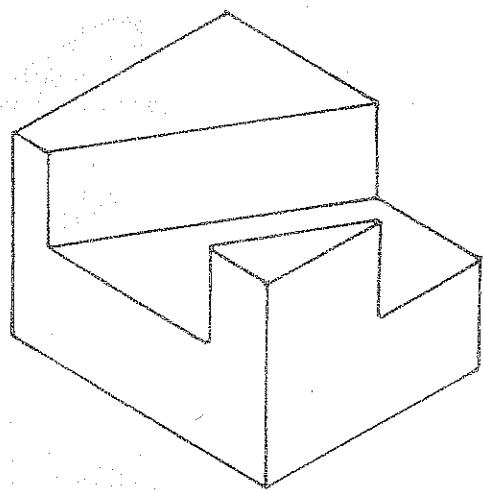
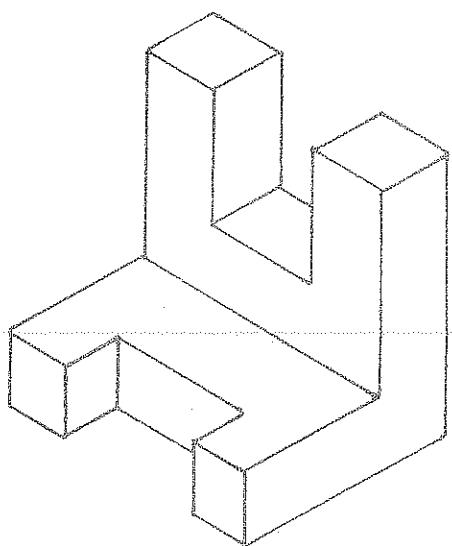
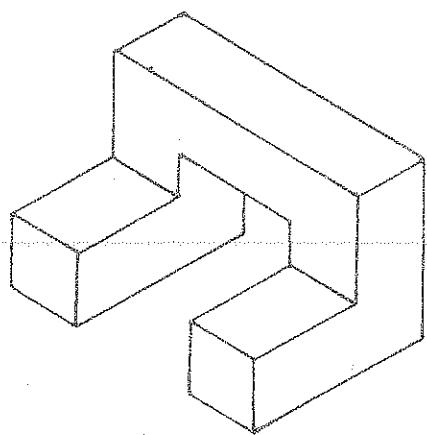
PLANO OBLICUO

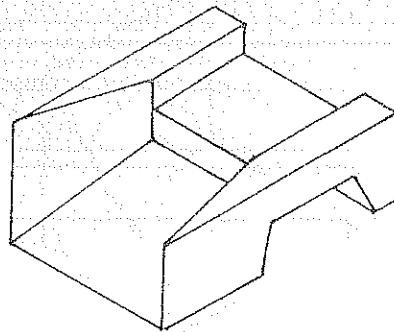
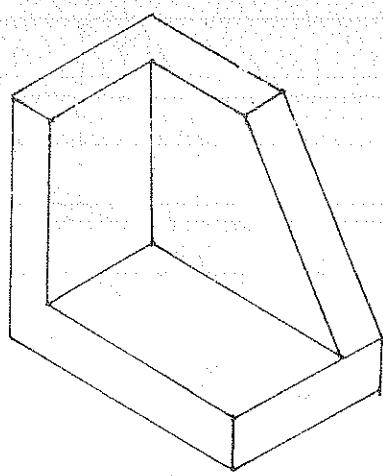
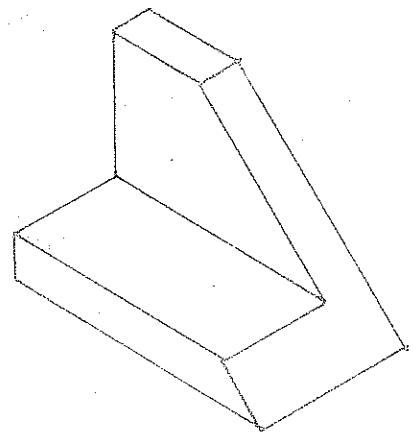
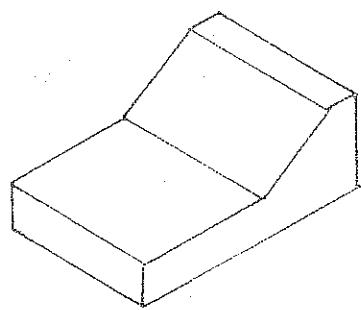
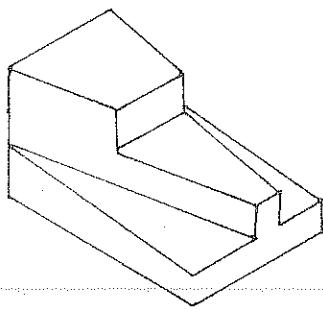
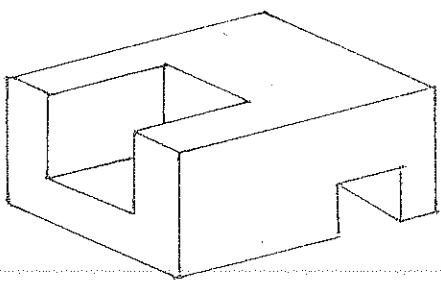


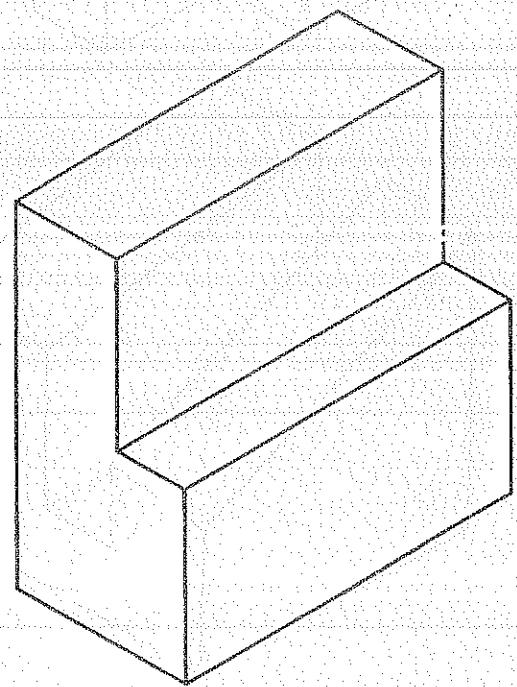
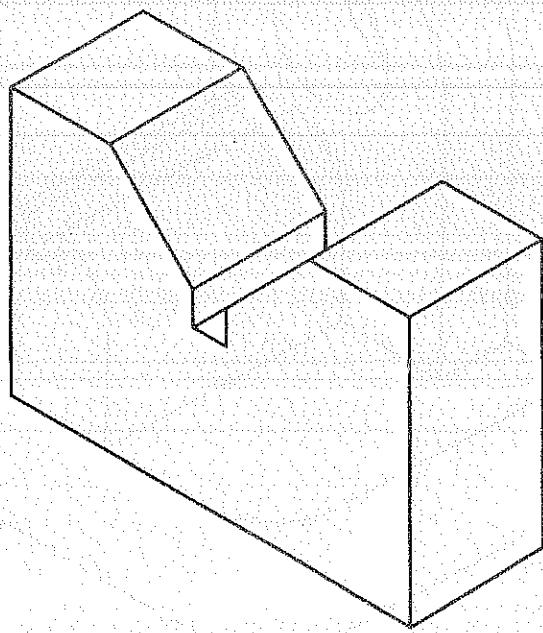
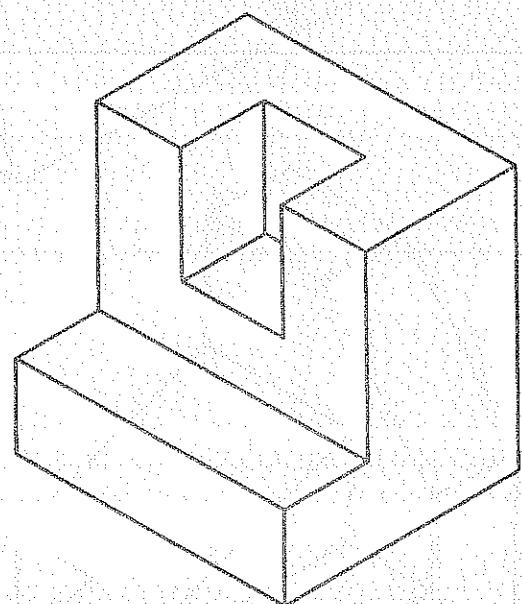
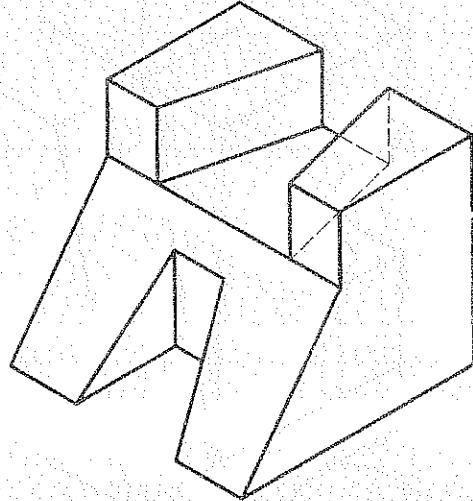
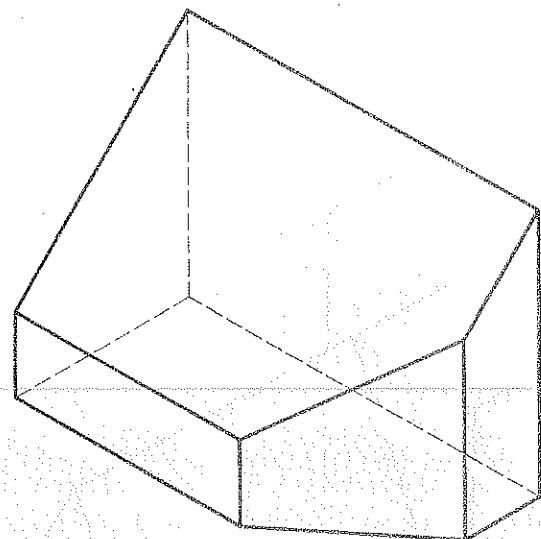
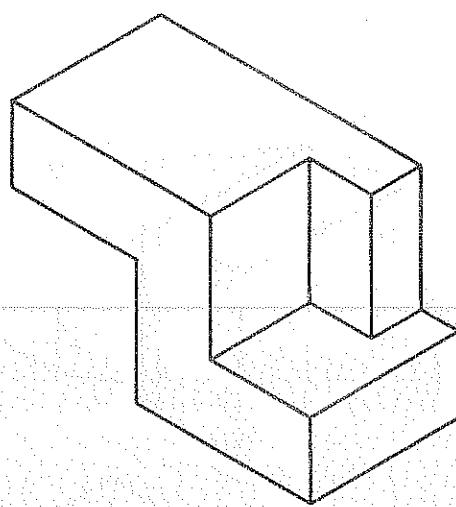


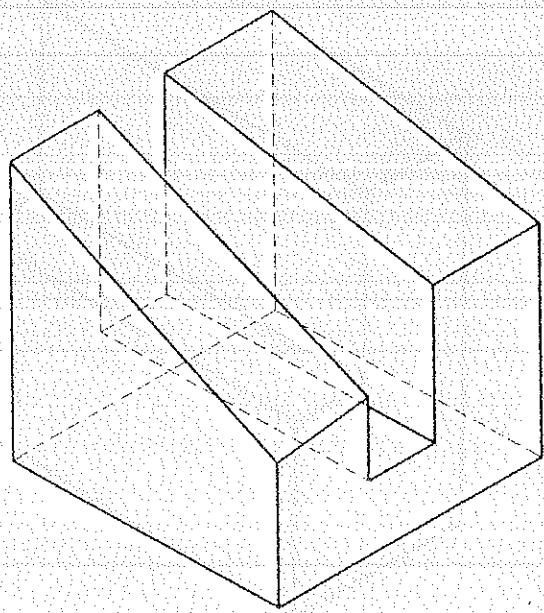
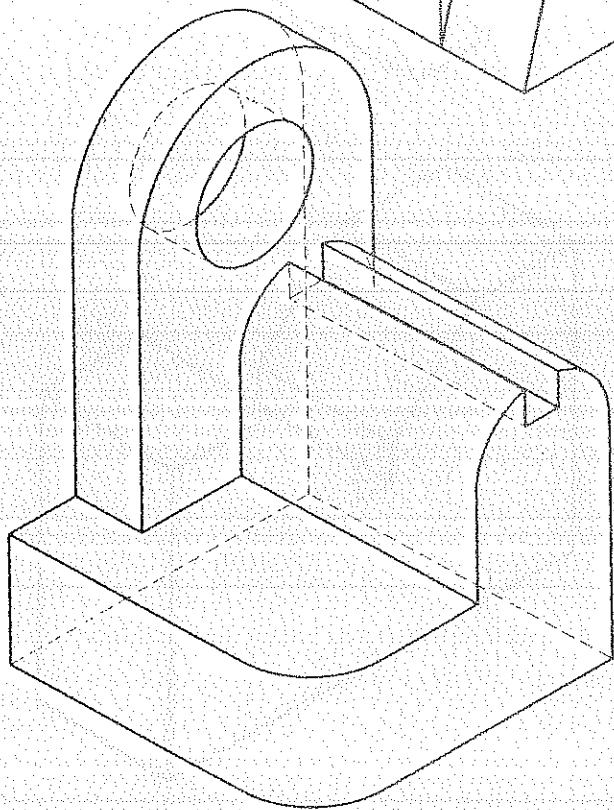
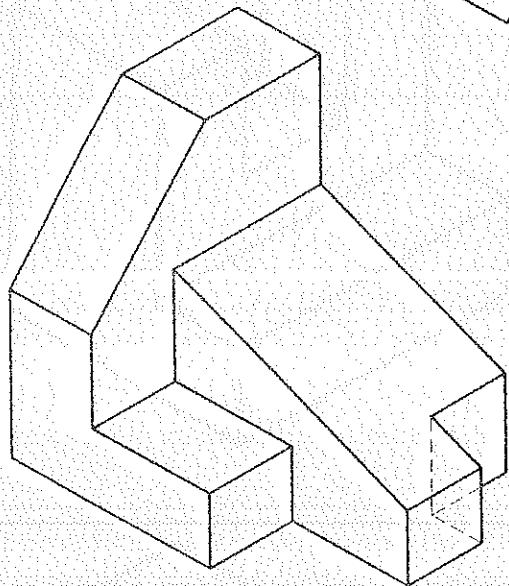
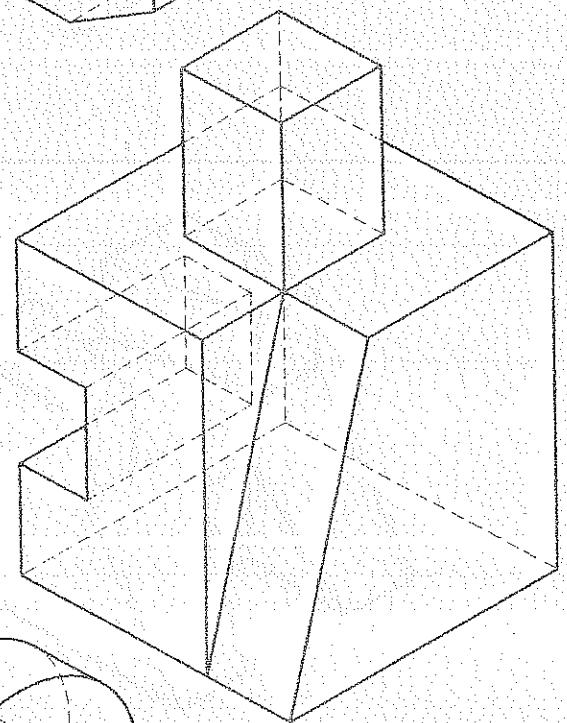
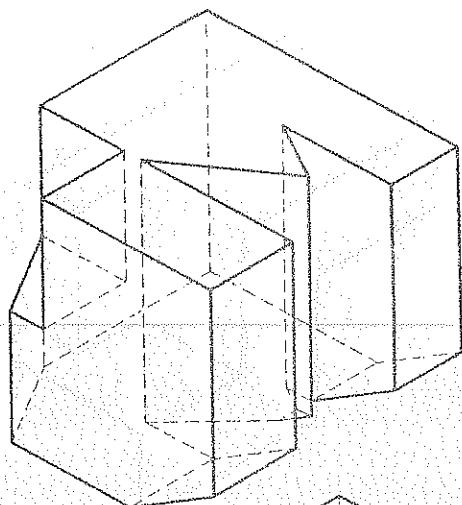
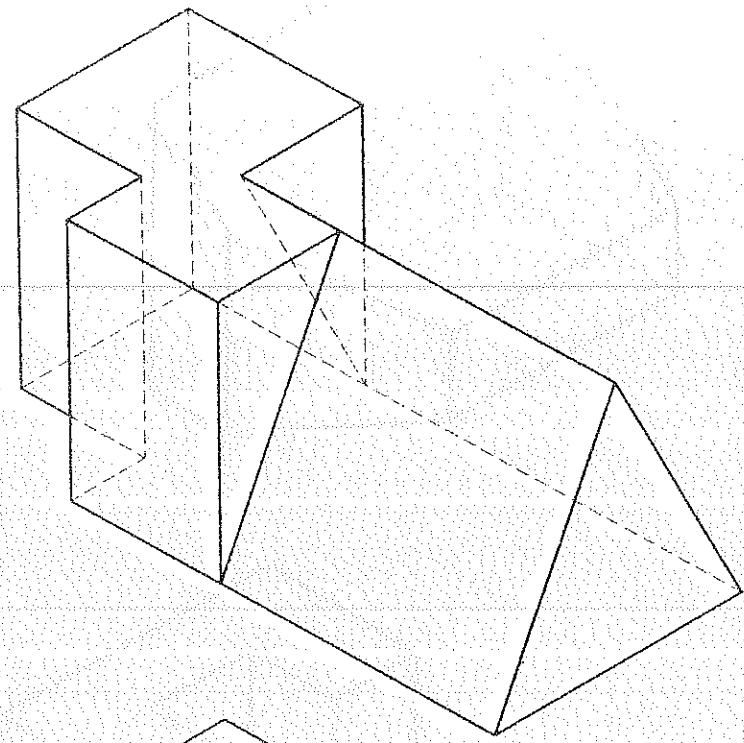


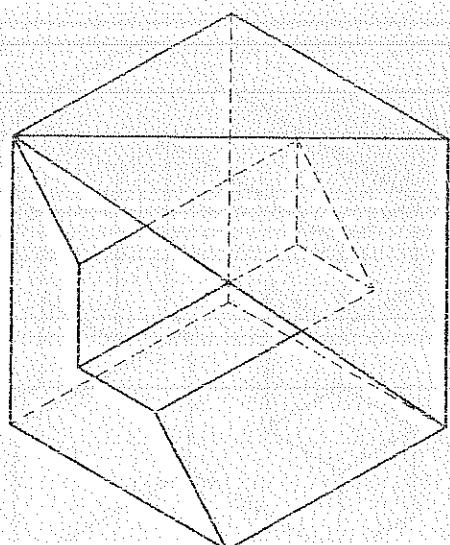
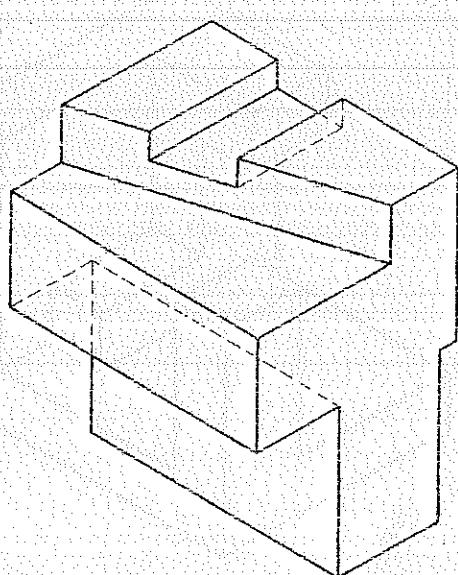
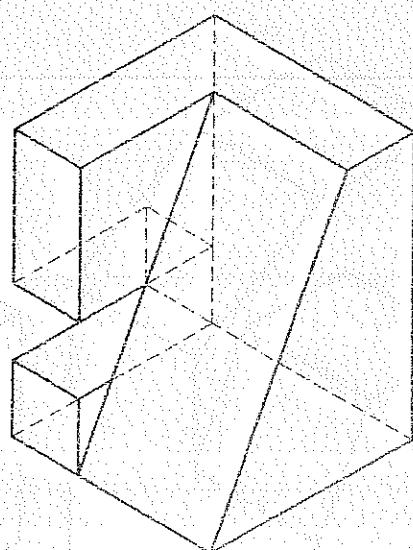
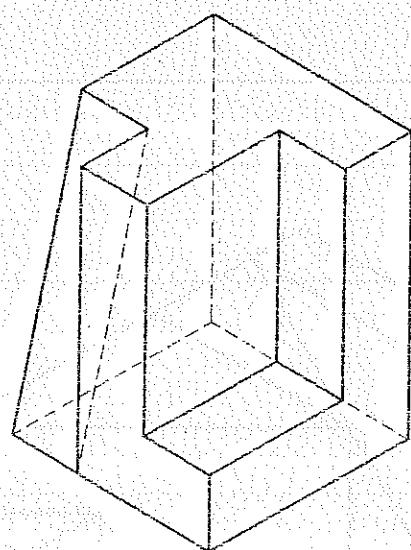
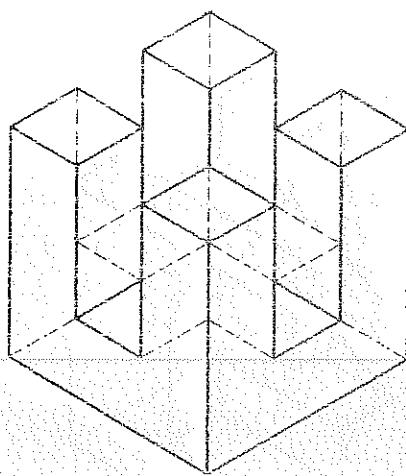
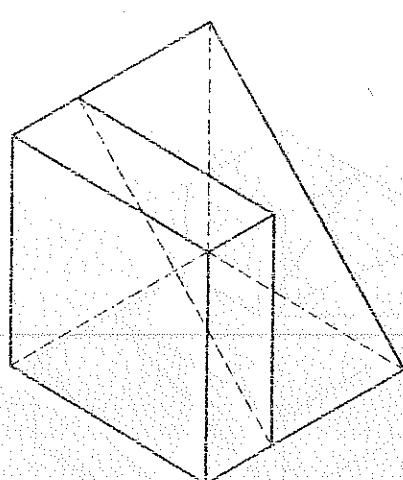


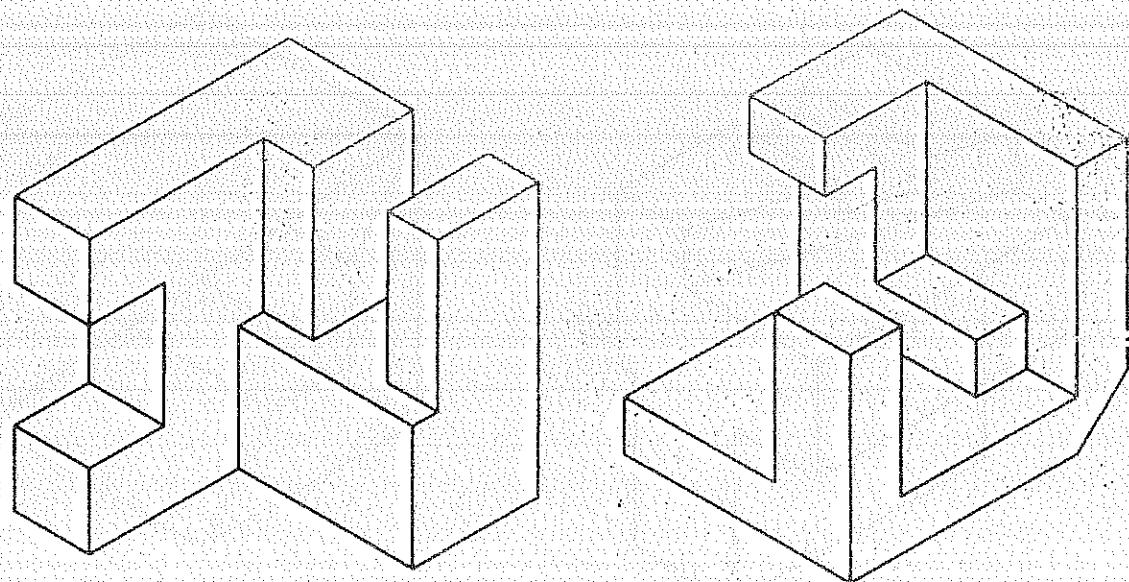
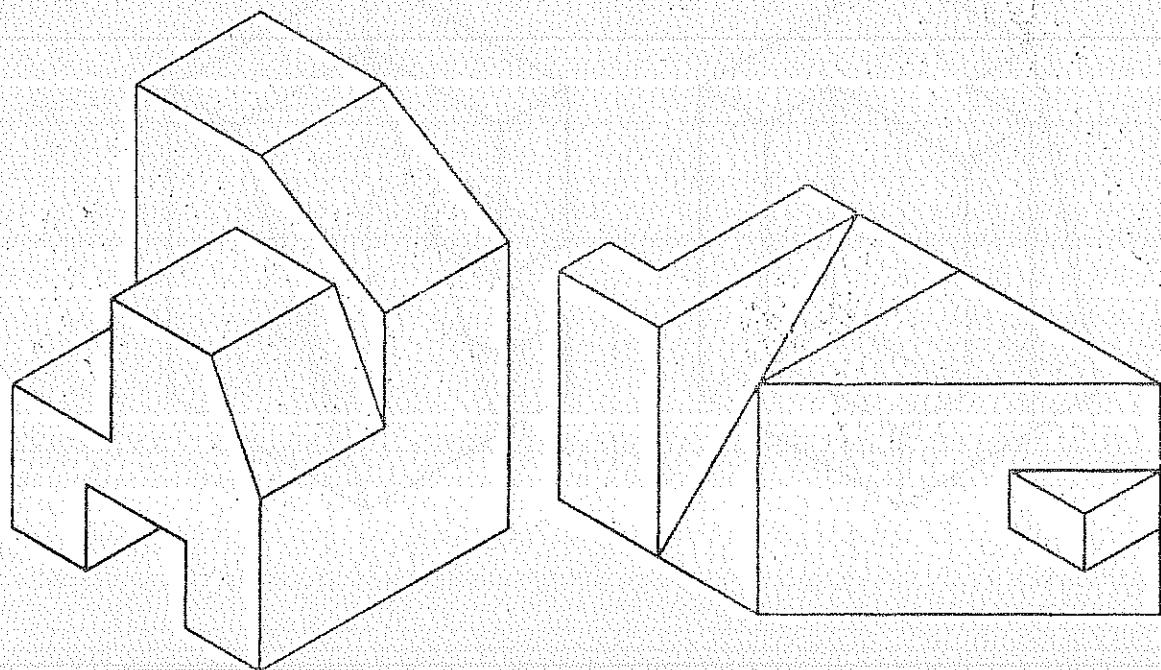
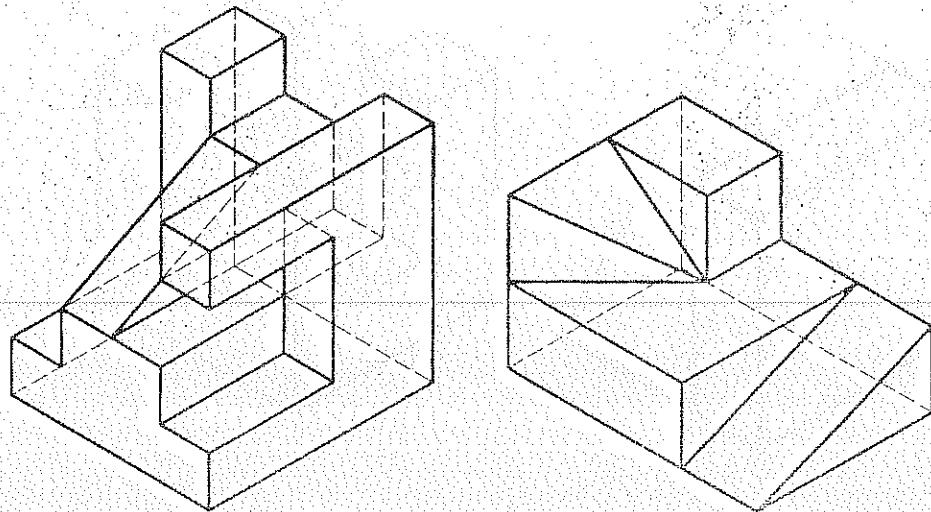


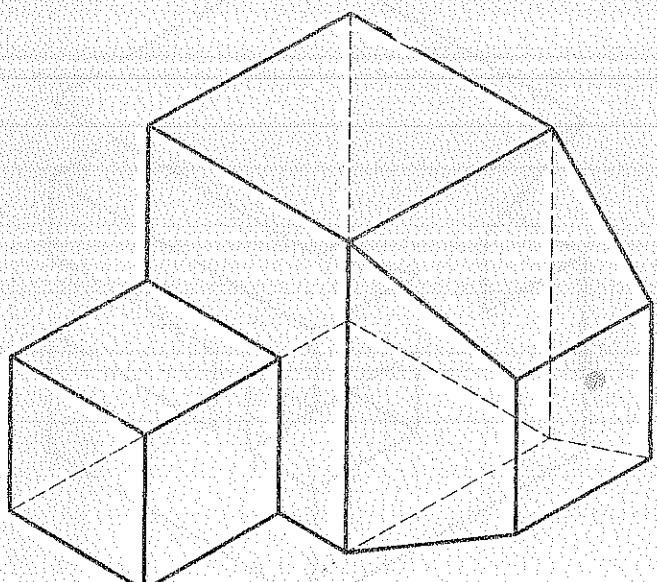
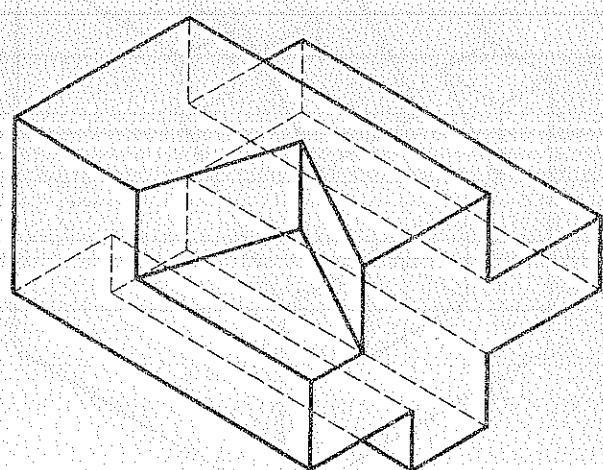
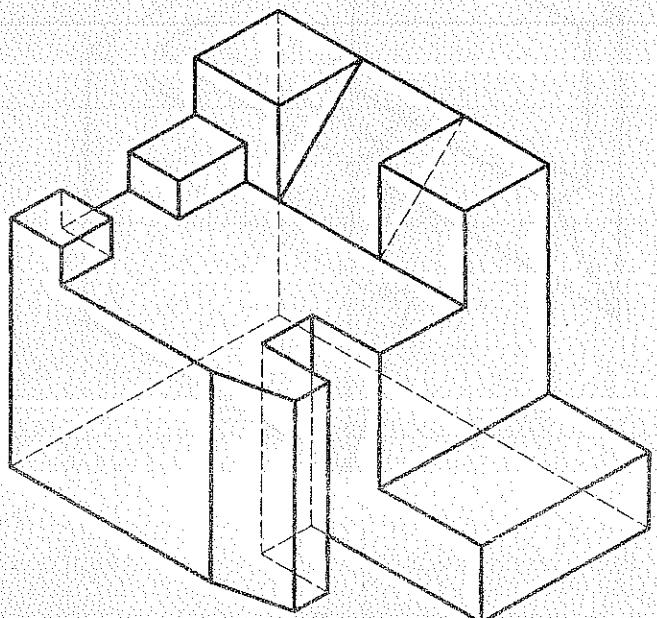
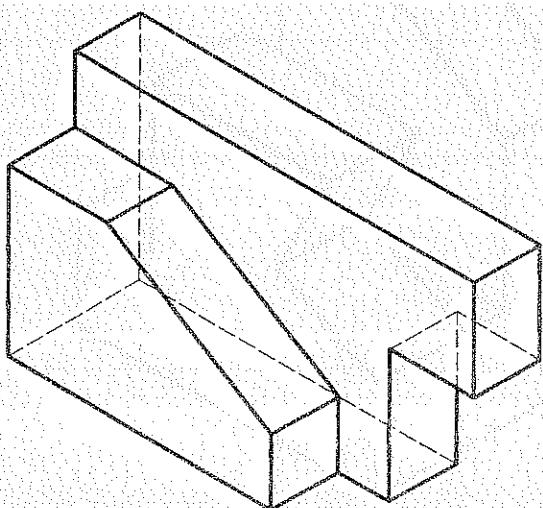
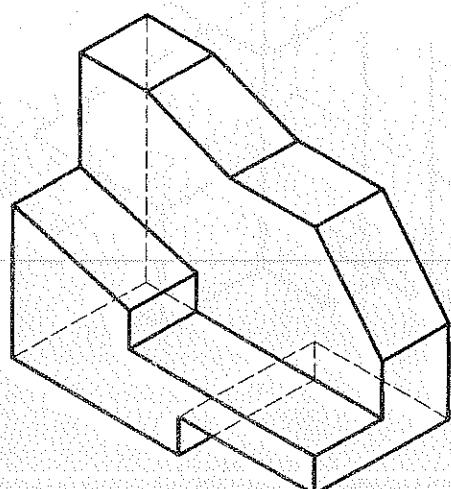
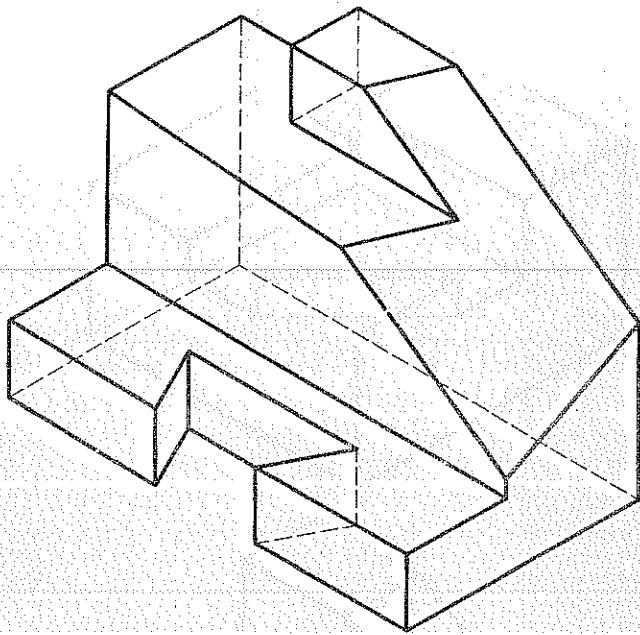


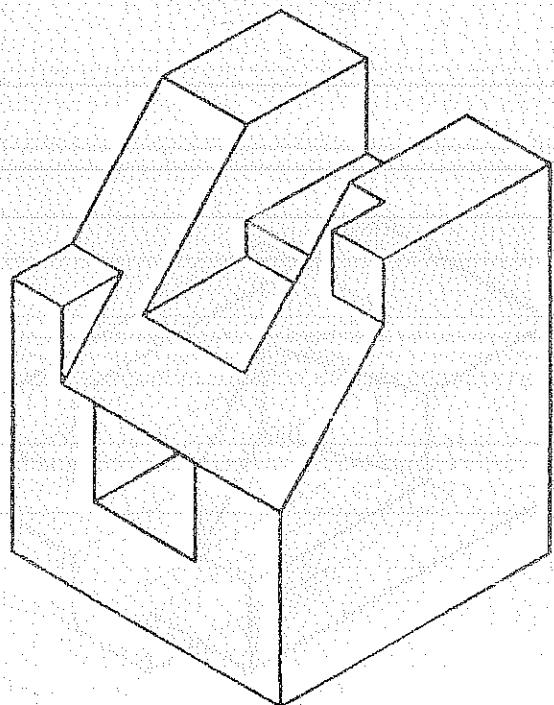
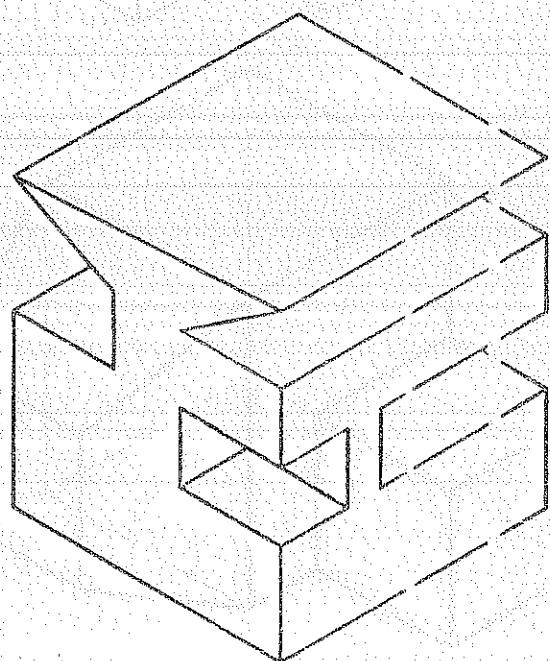
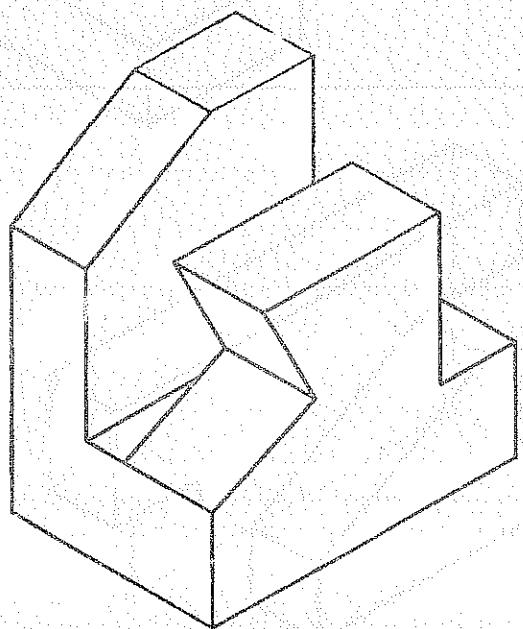
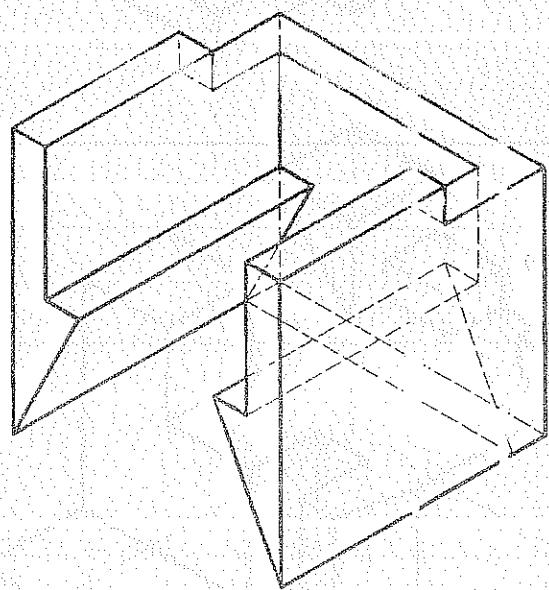
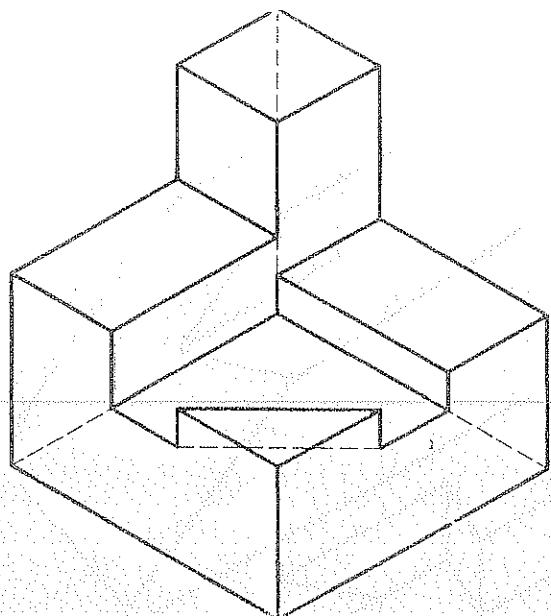
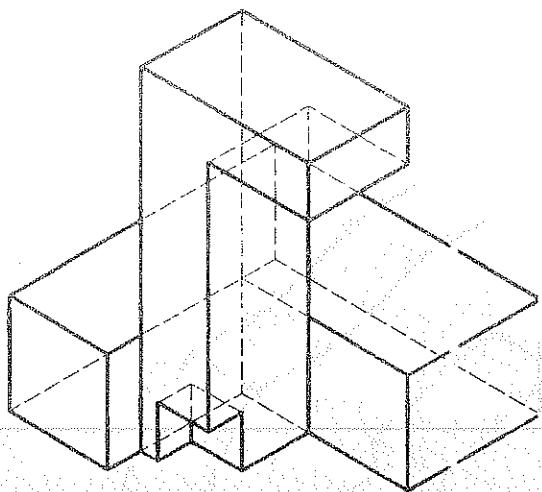


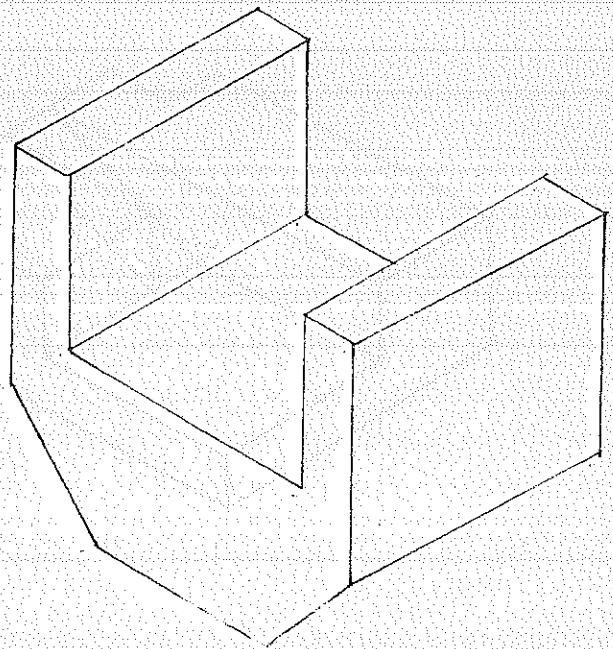
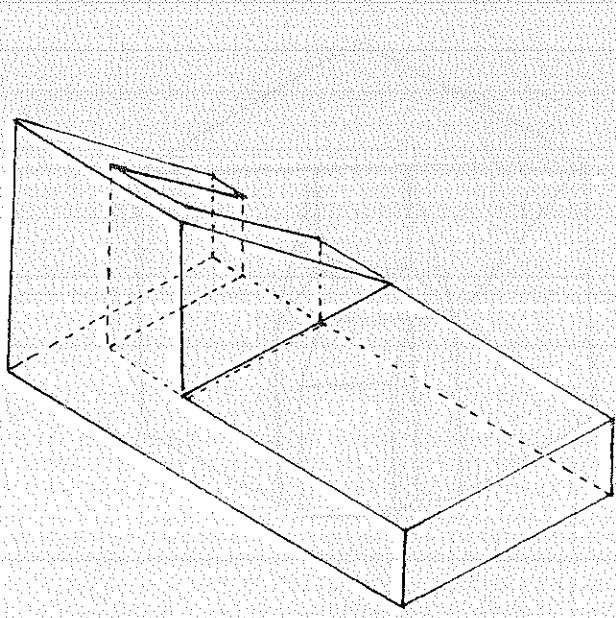
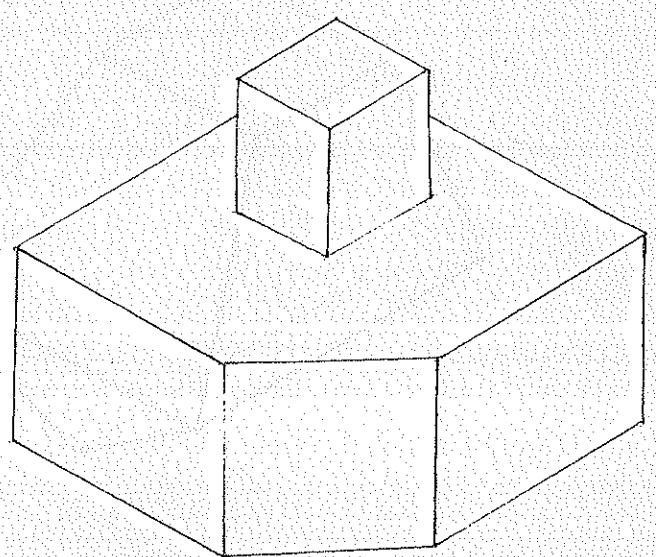
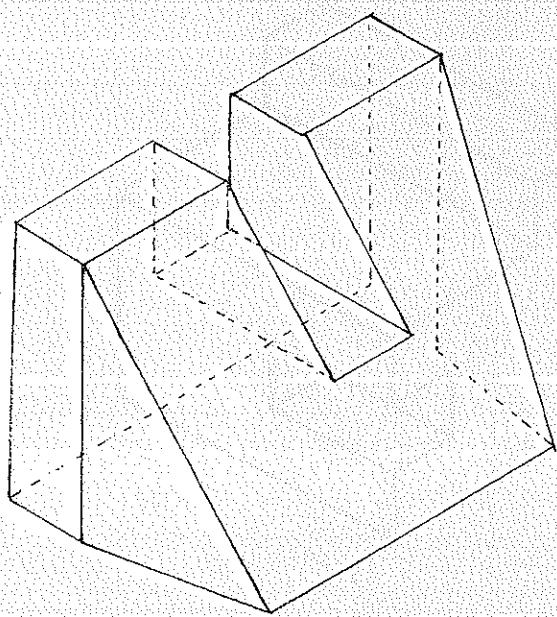
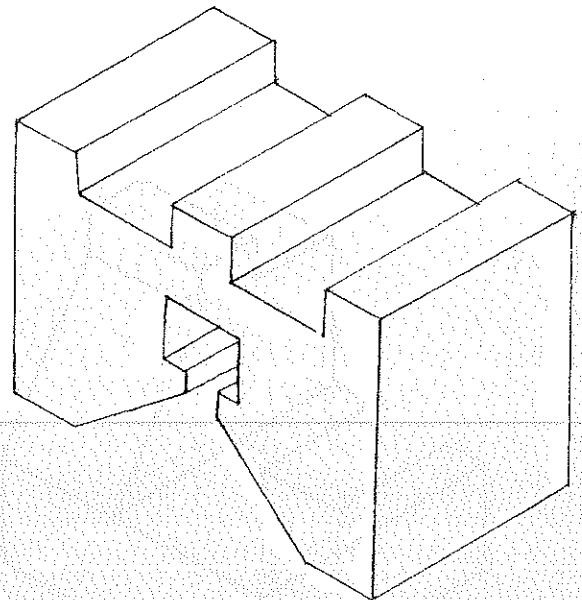
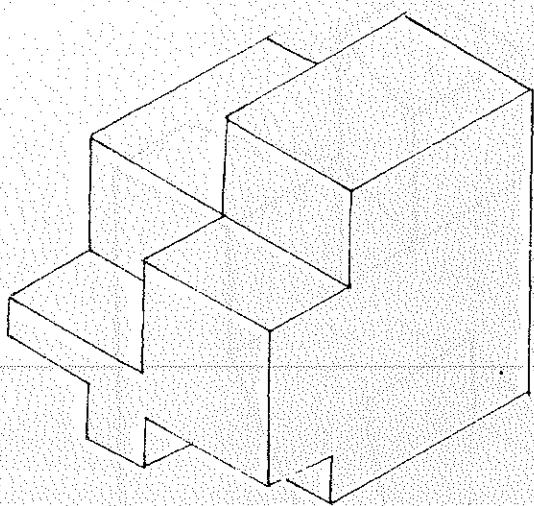


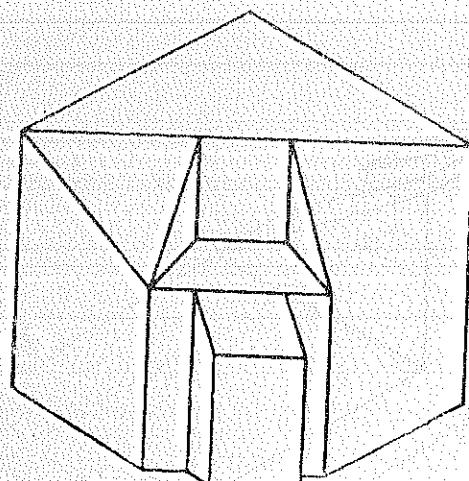
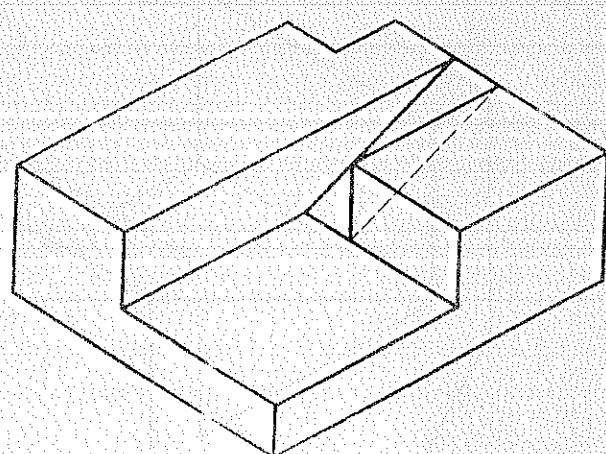
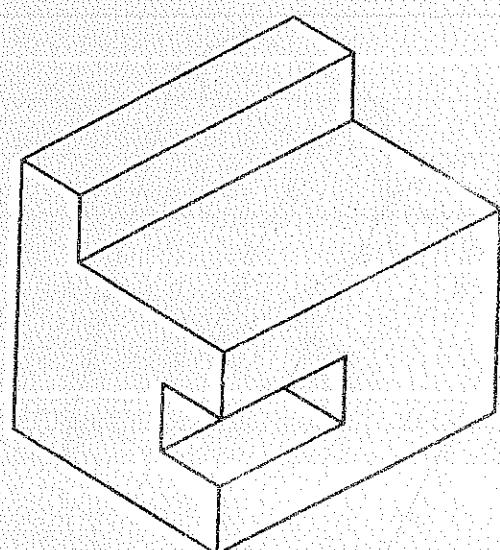
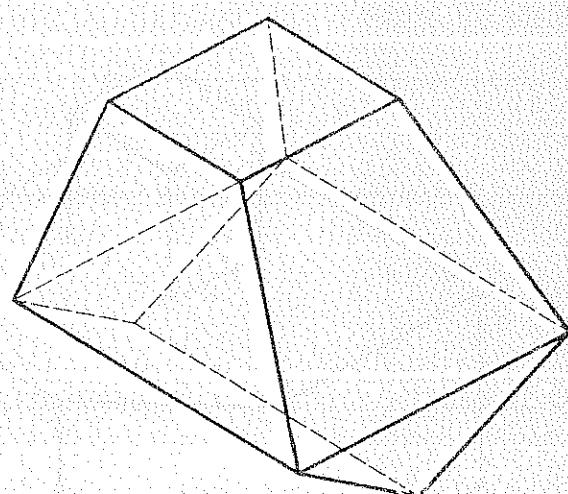
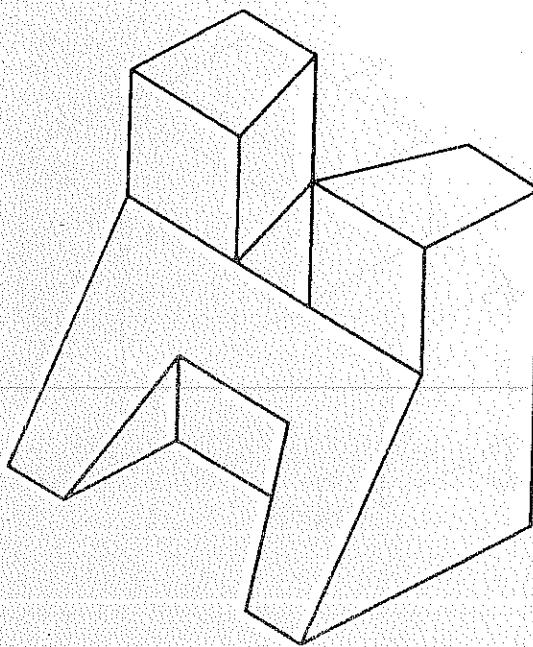
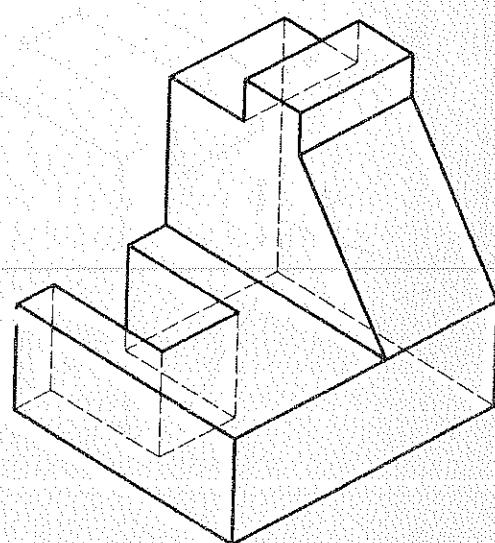


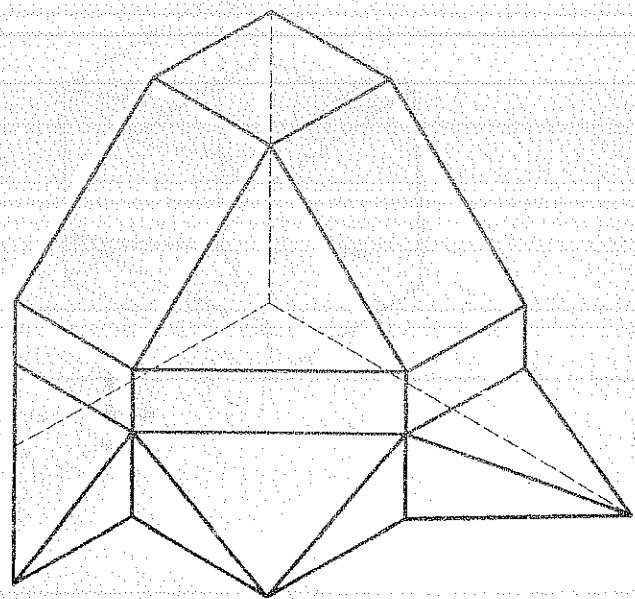
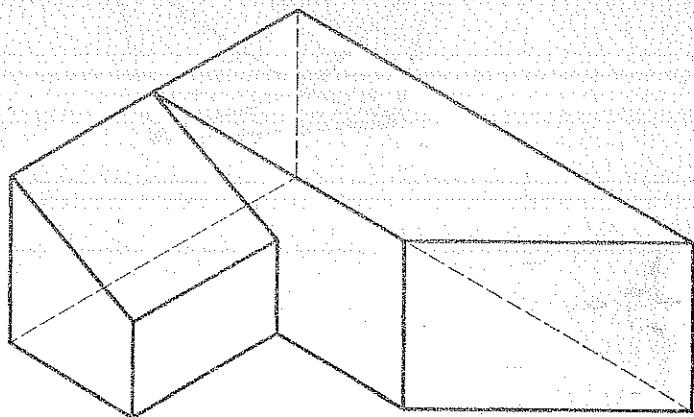
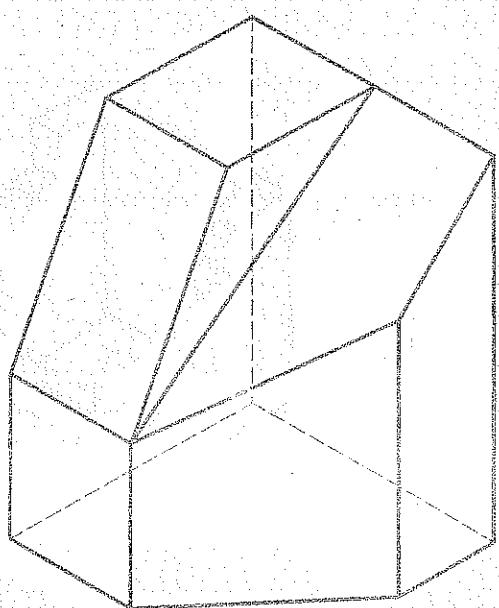
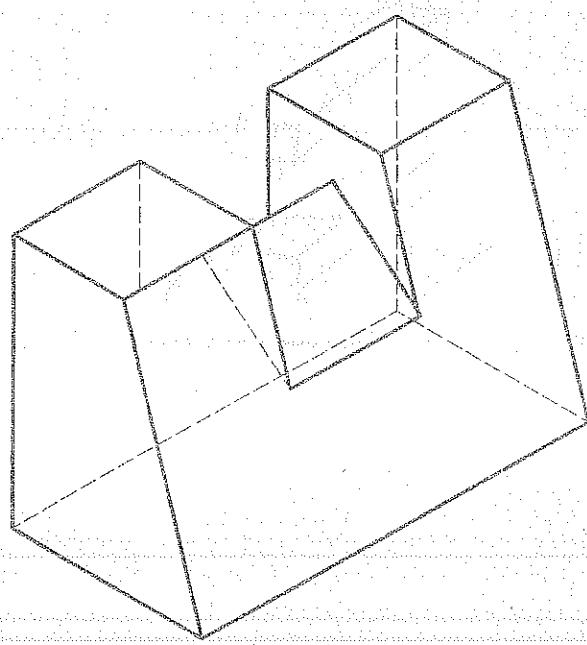
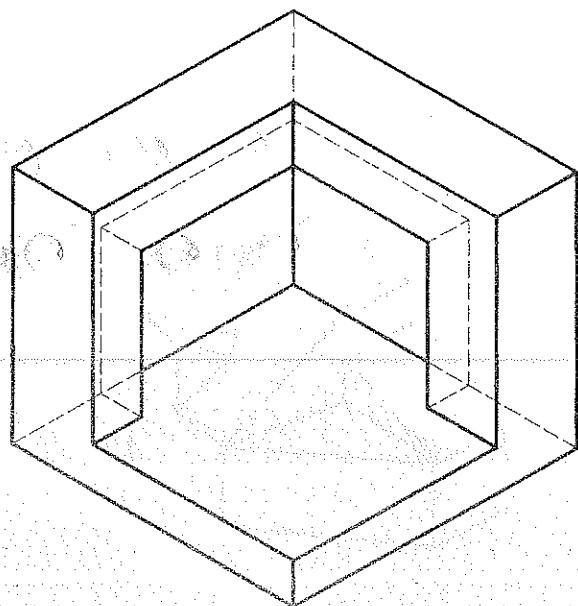
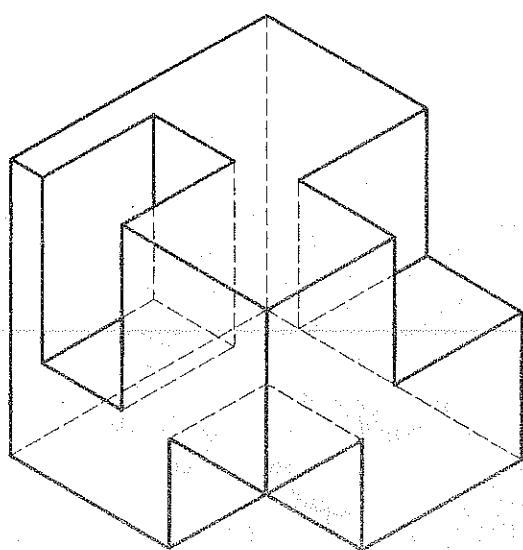


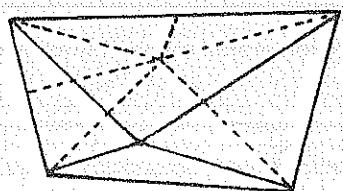
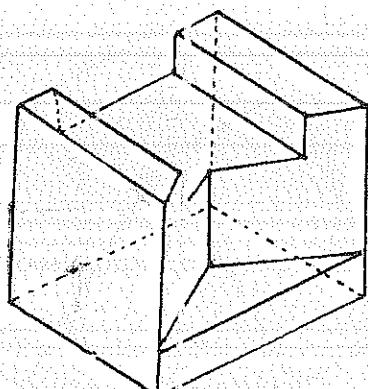
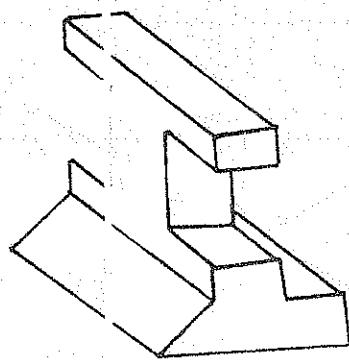
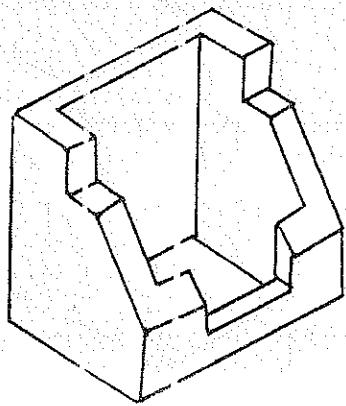
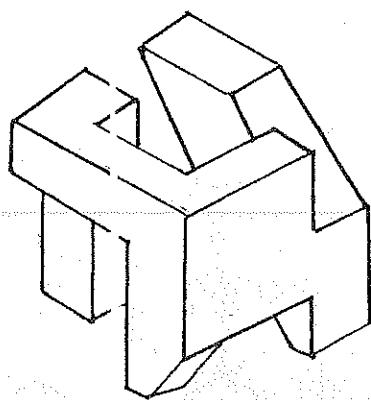
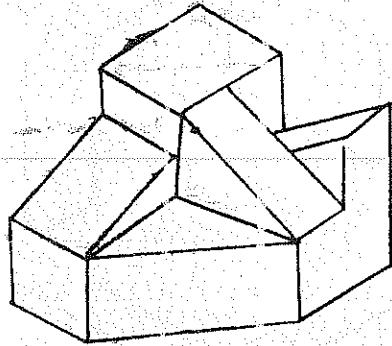


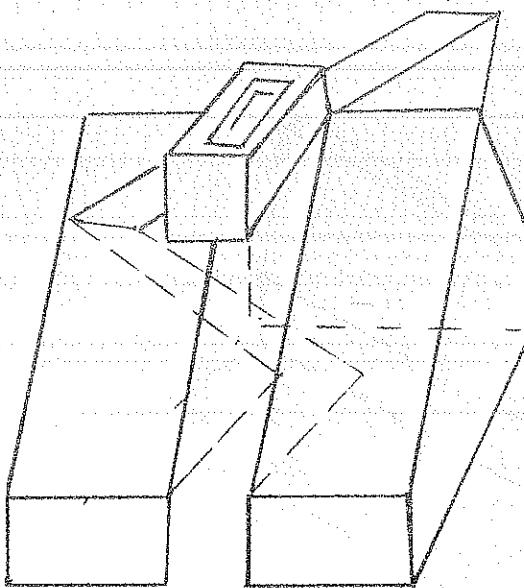
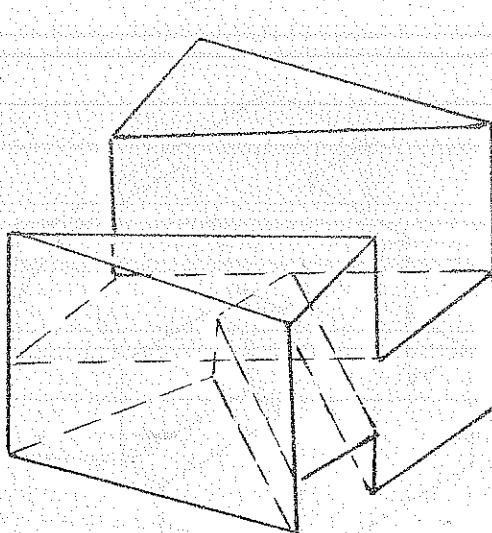
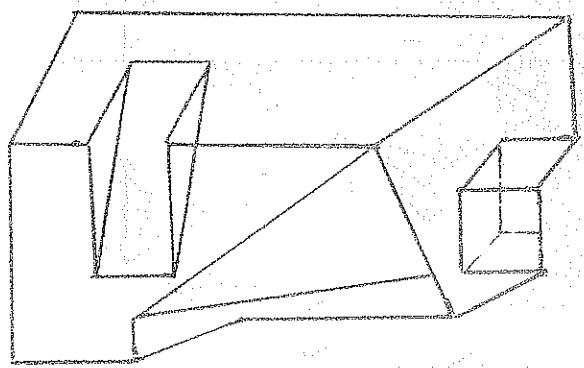
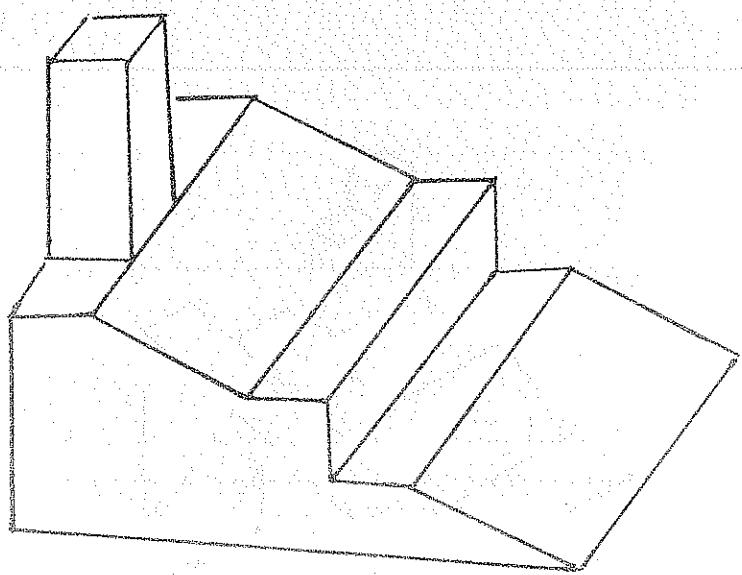
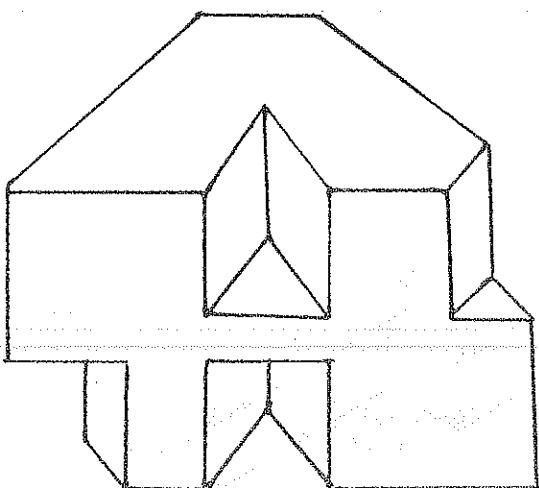
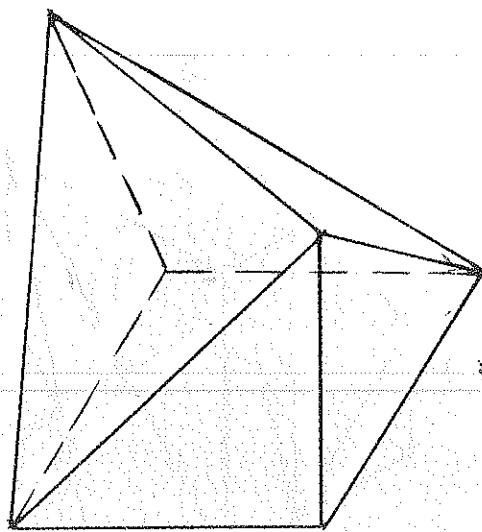


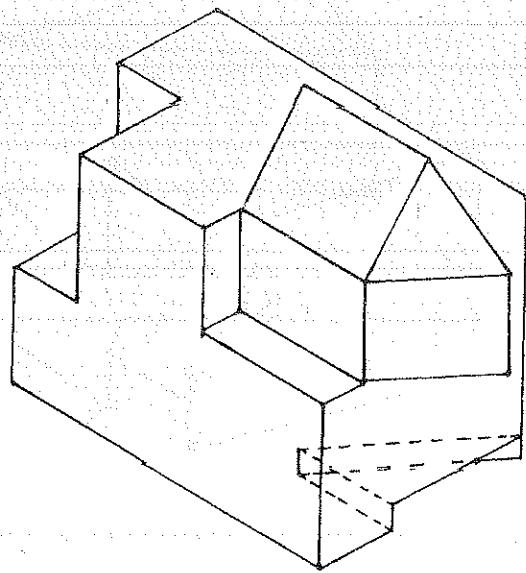
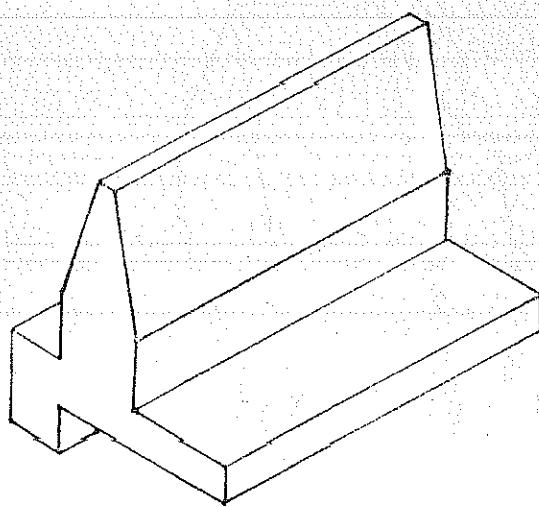
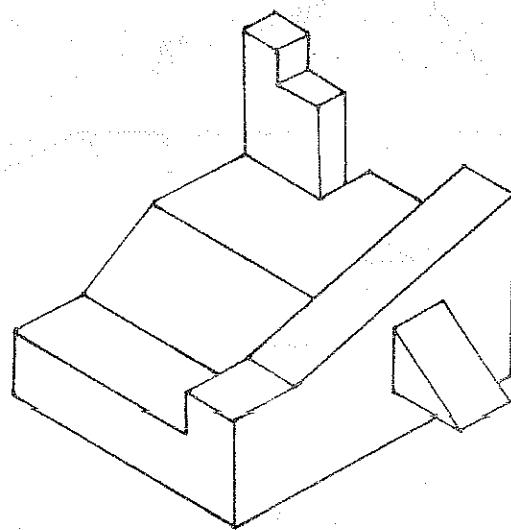
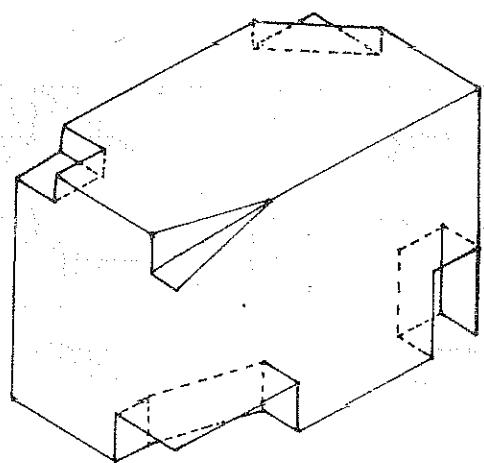
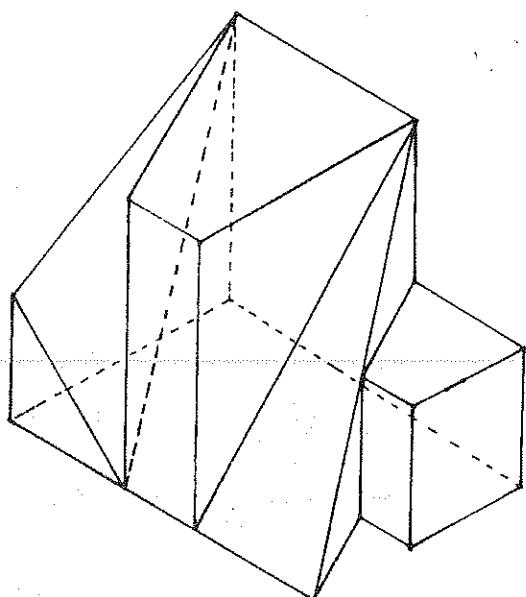
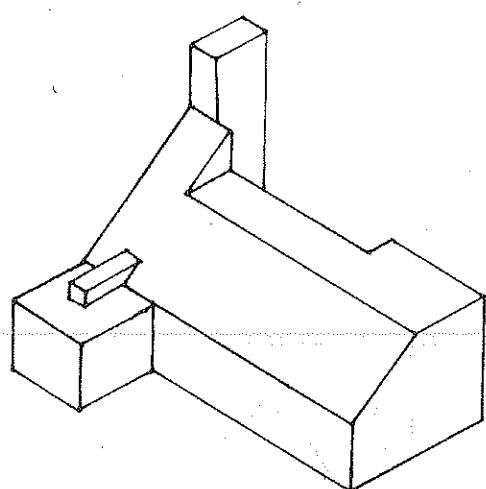


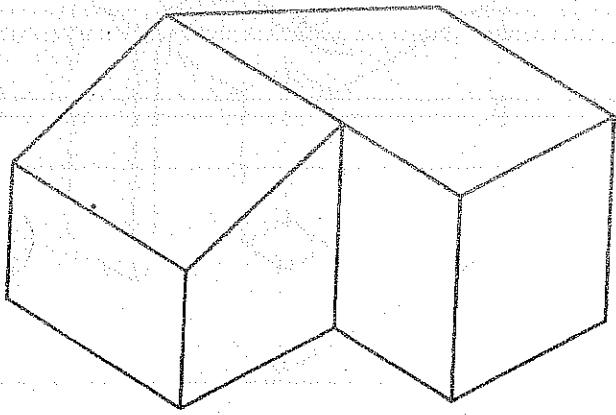
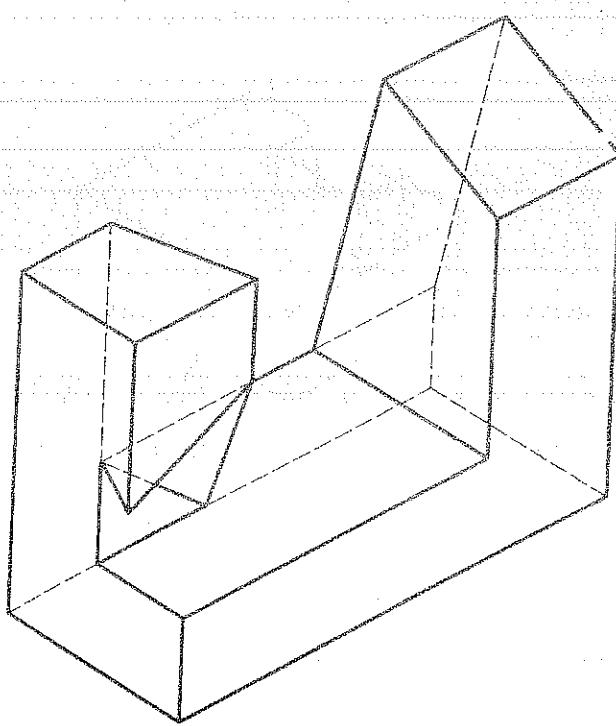
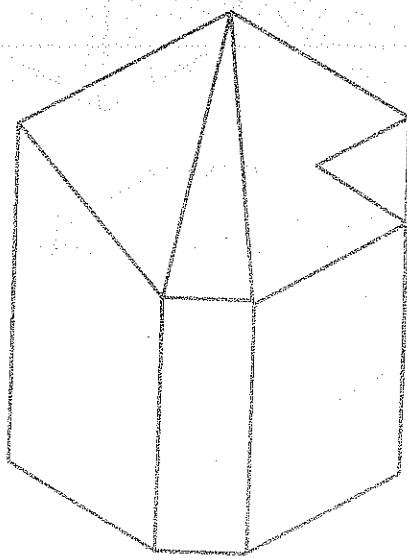
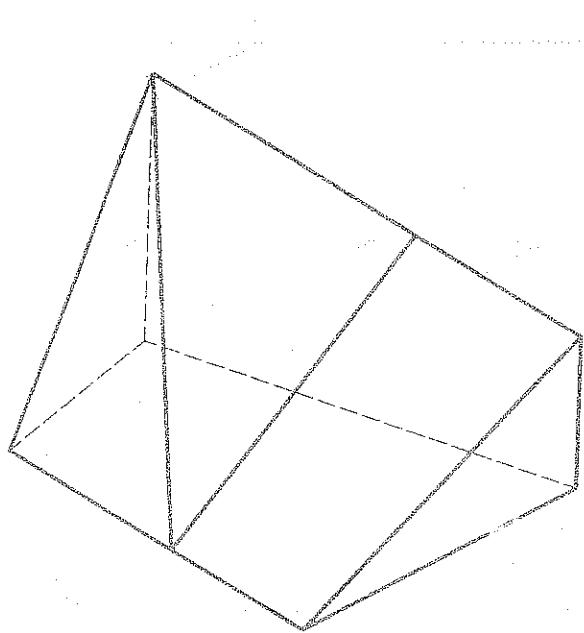
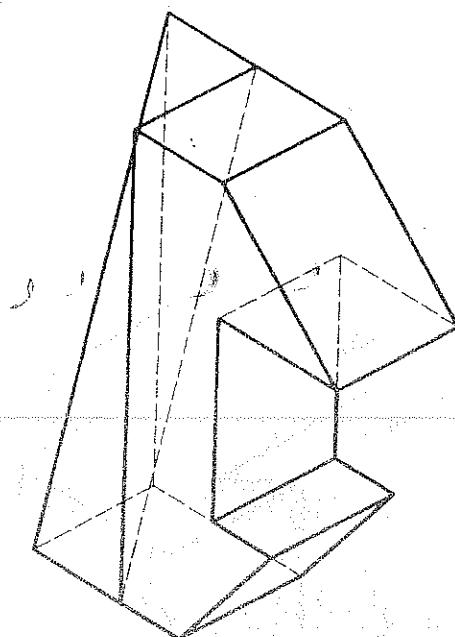
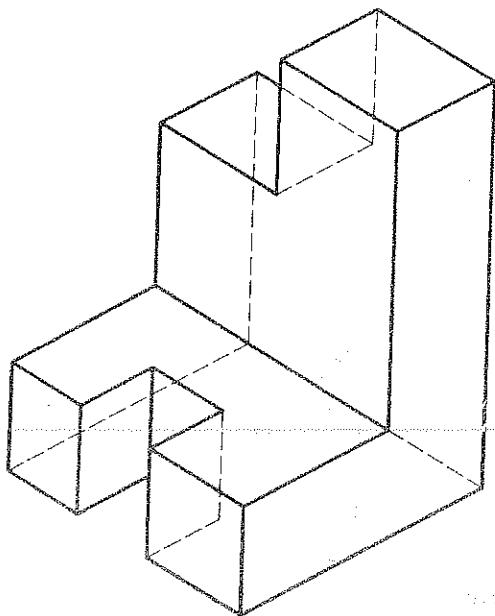


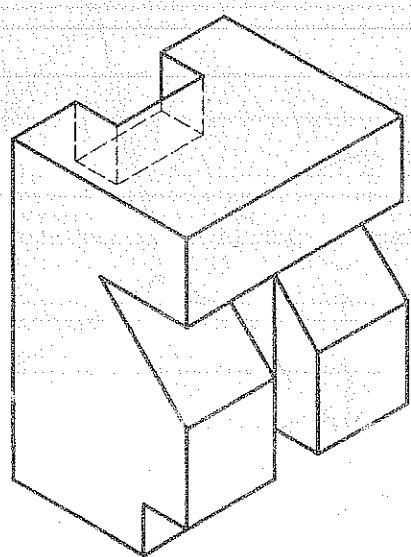
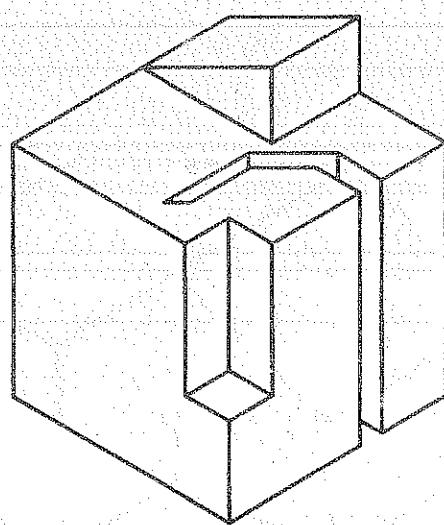
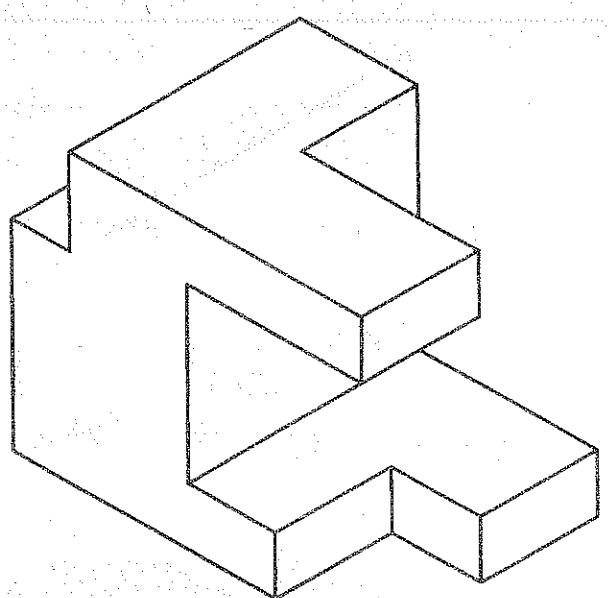
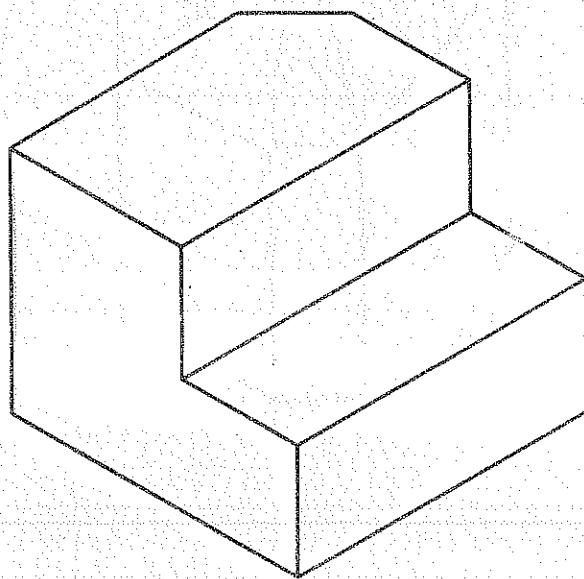
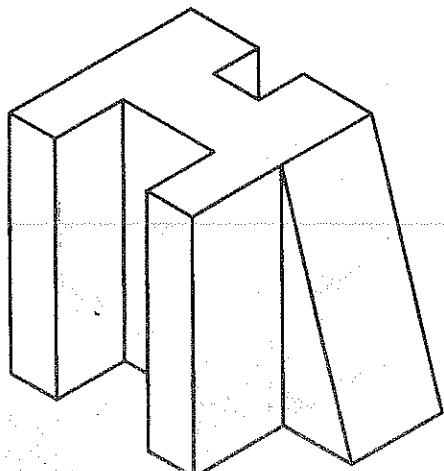
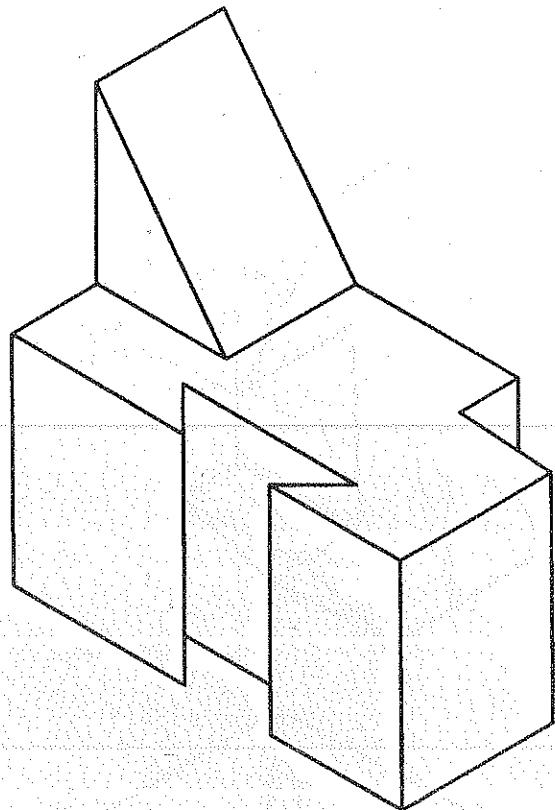


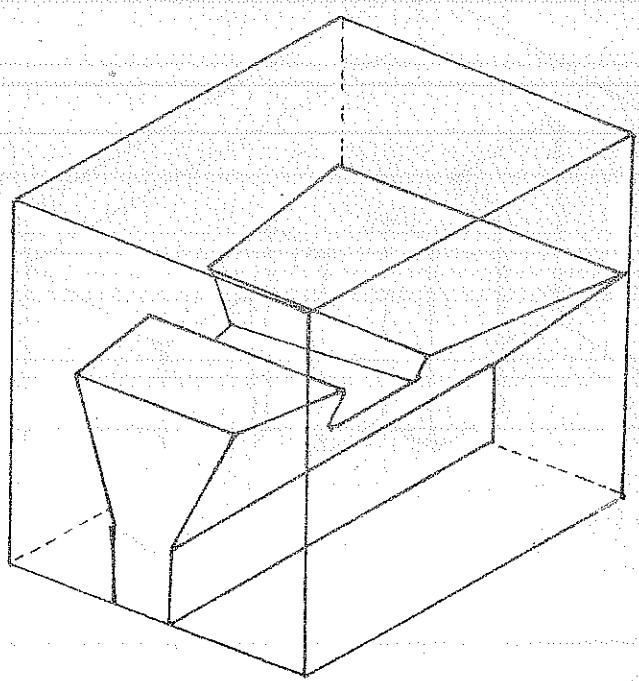
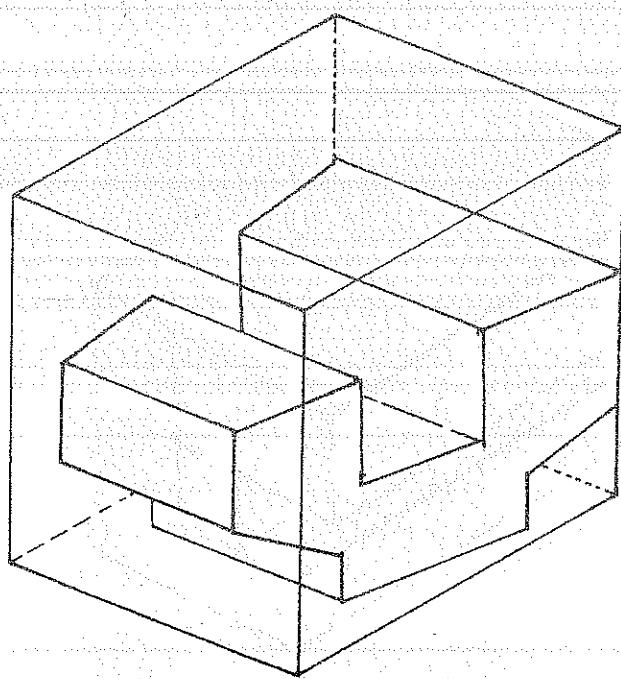
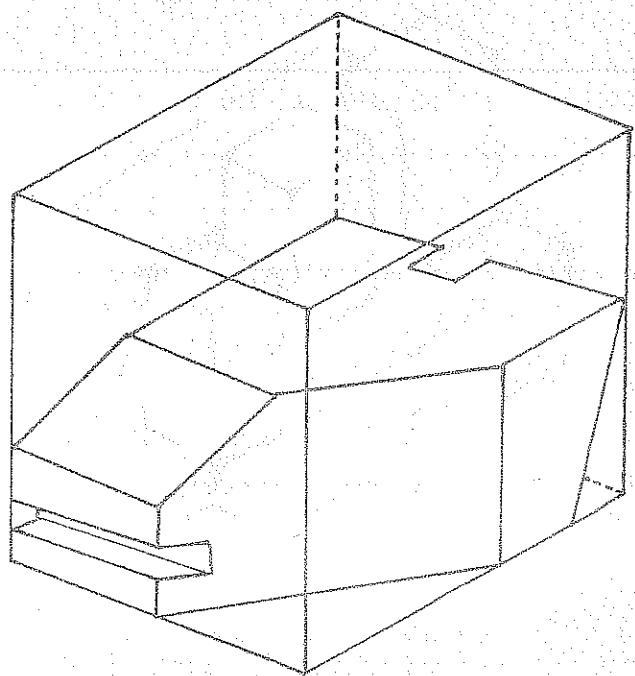
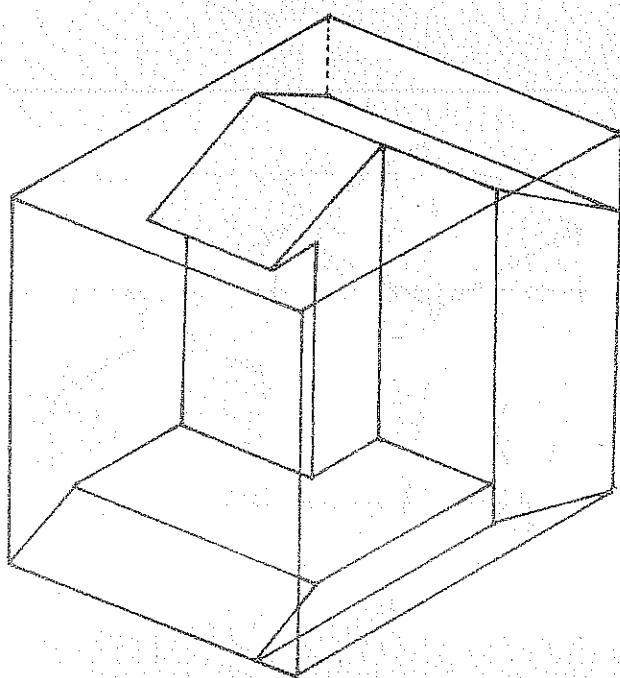
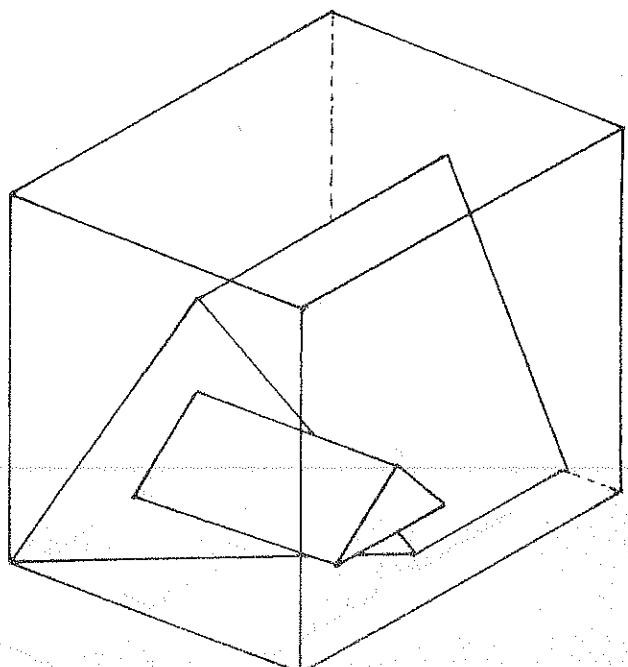
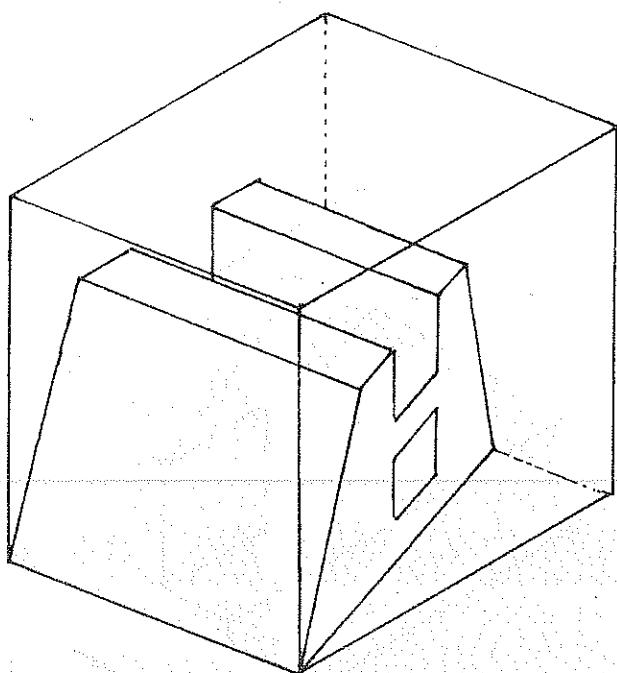


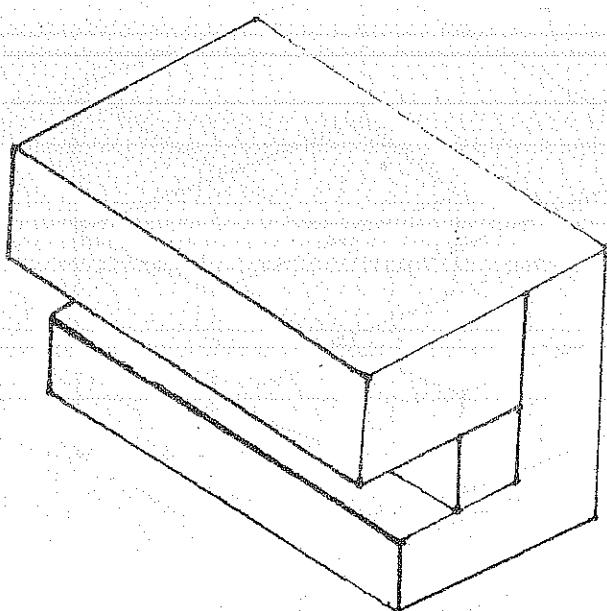
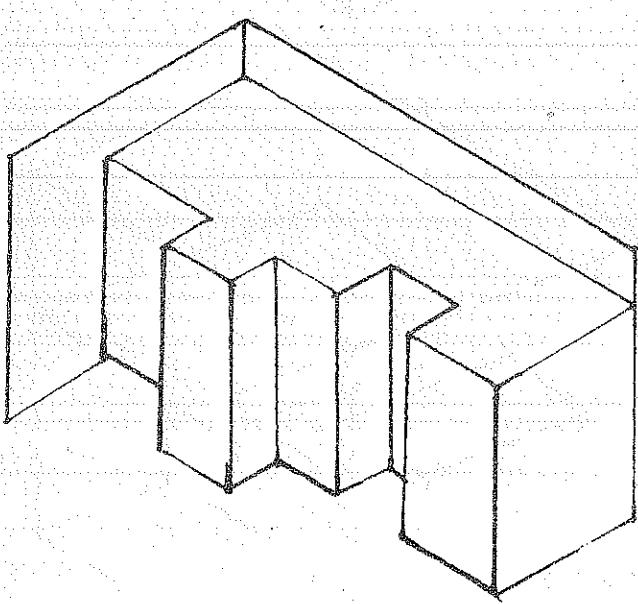
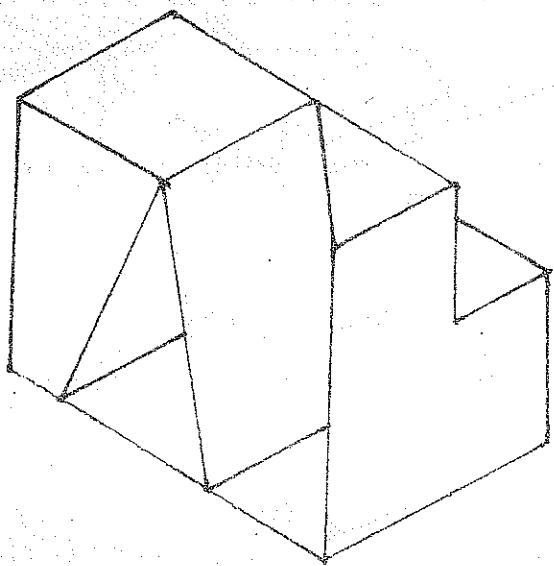
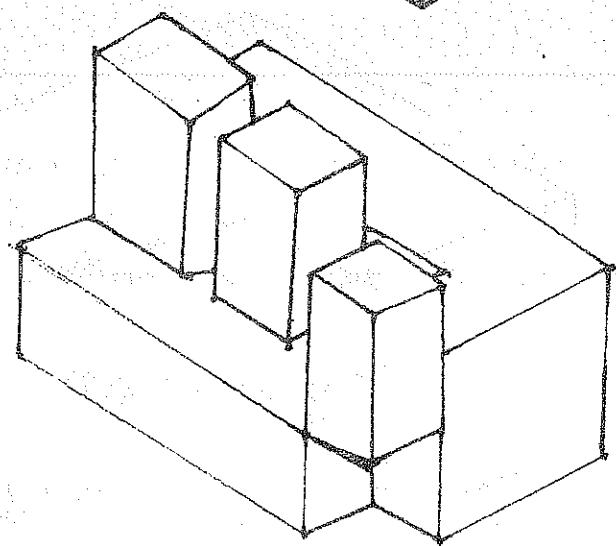
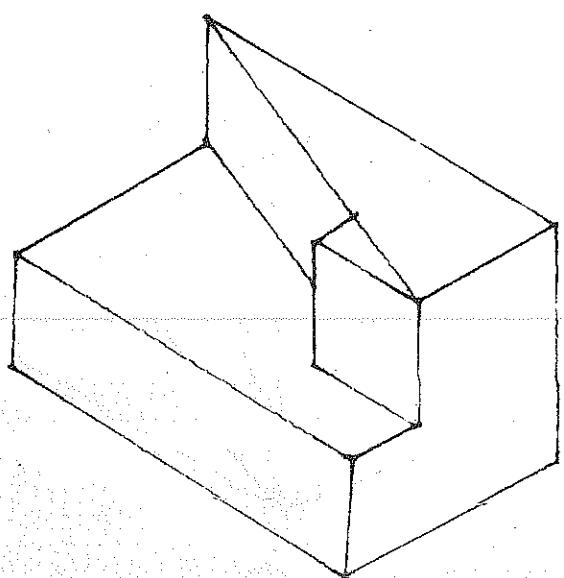
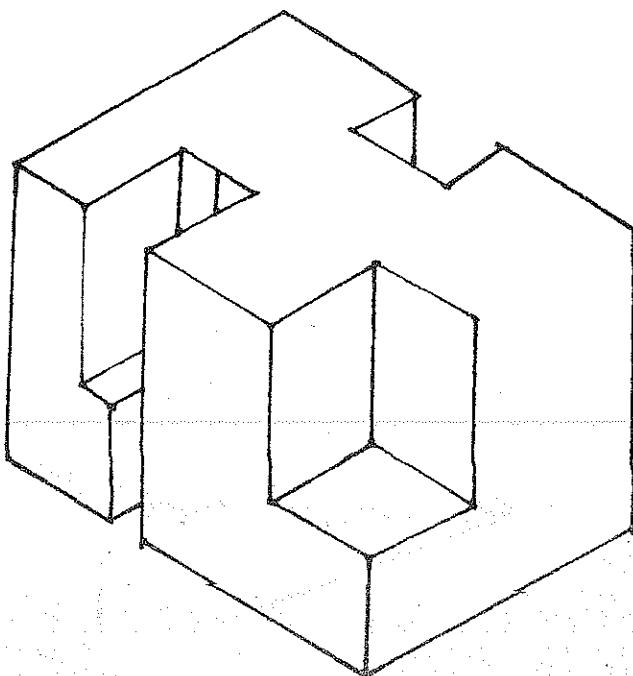


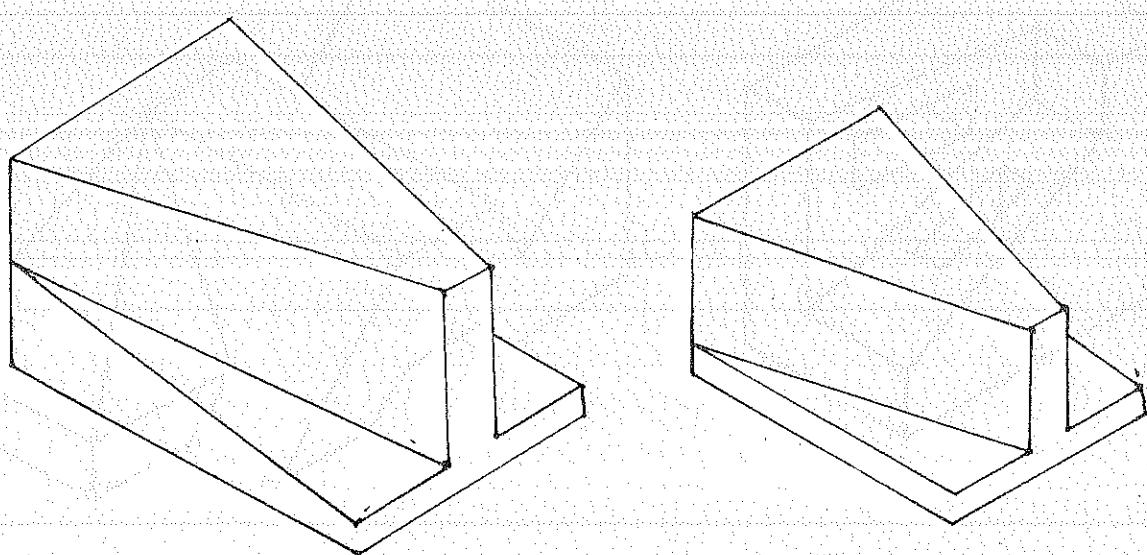
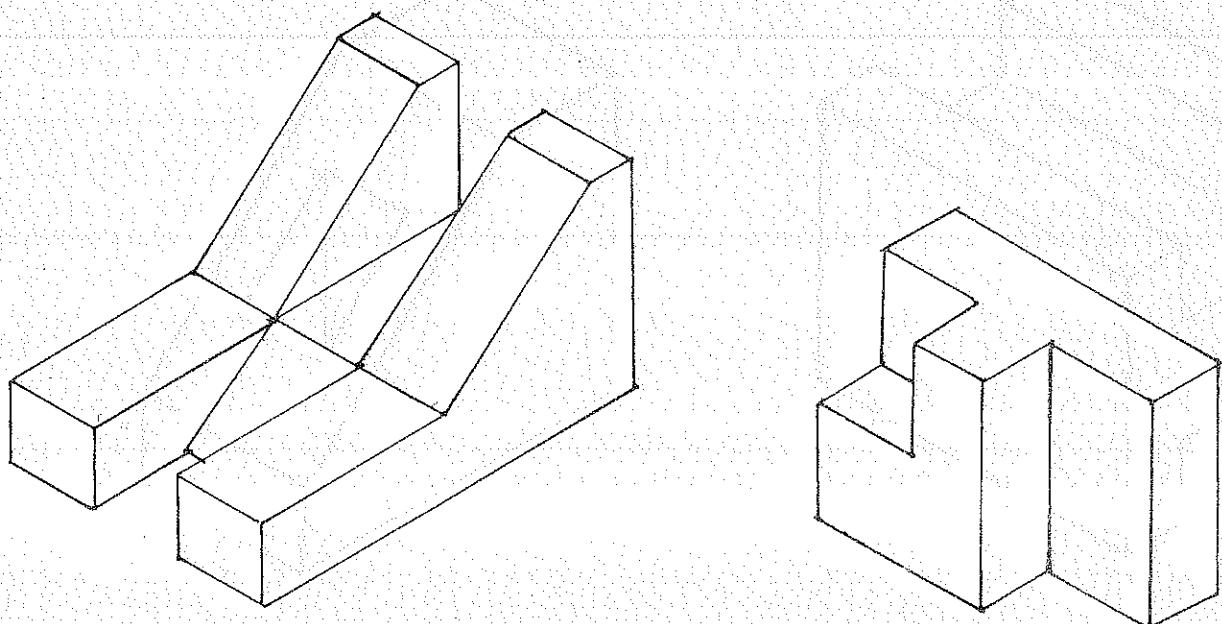
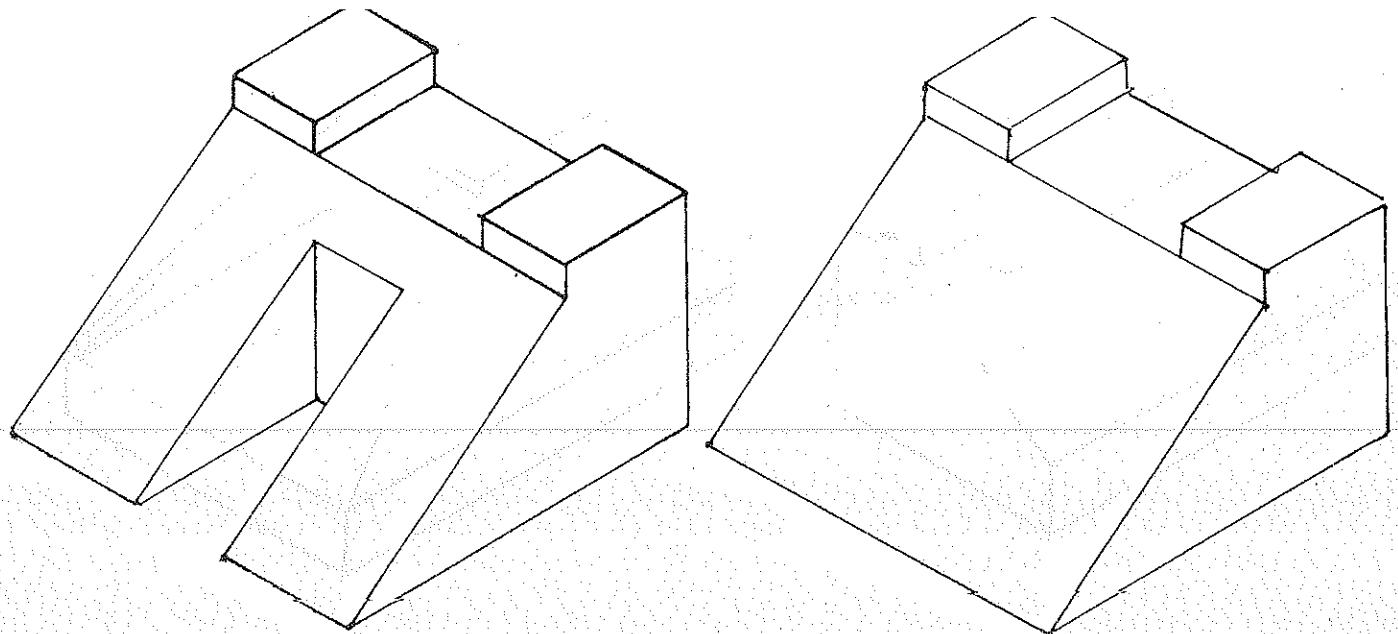


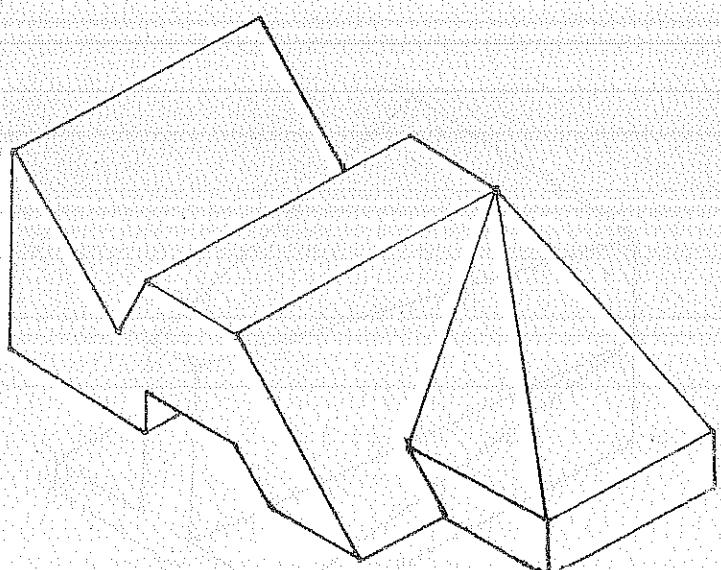
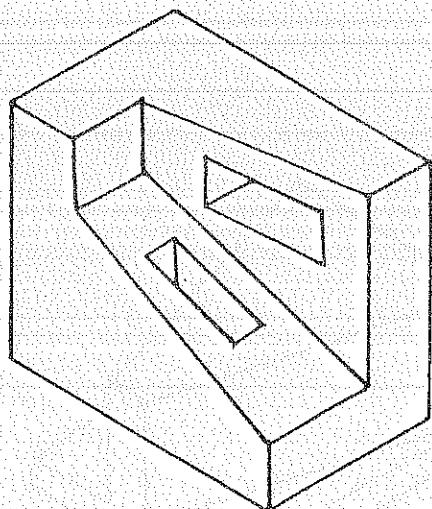
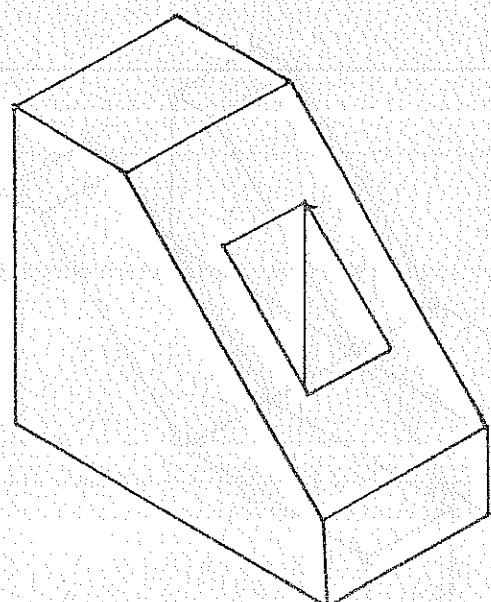
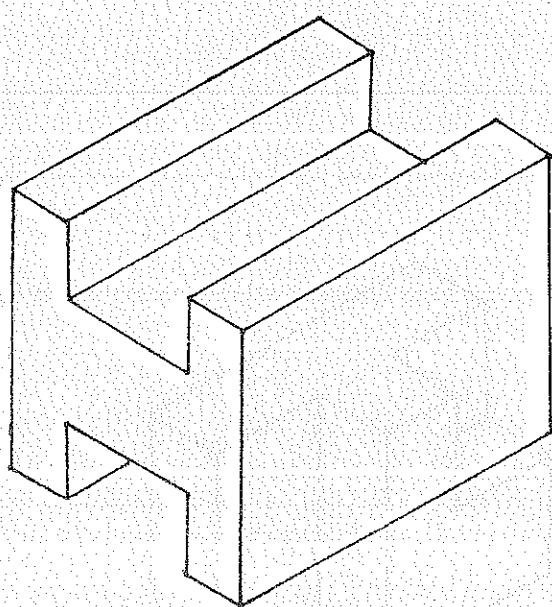
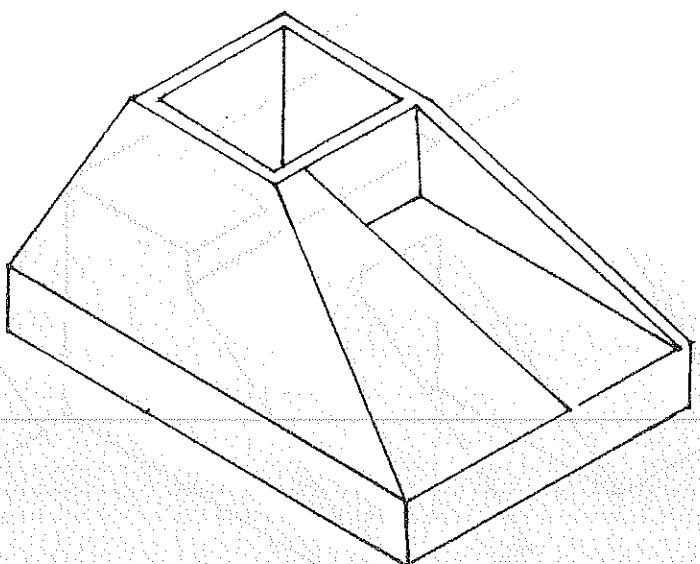
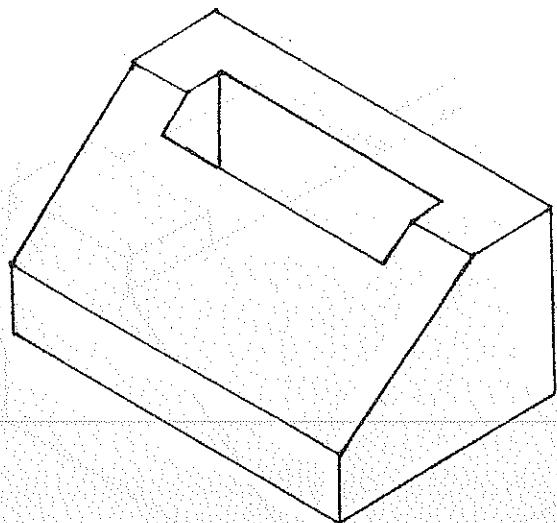


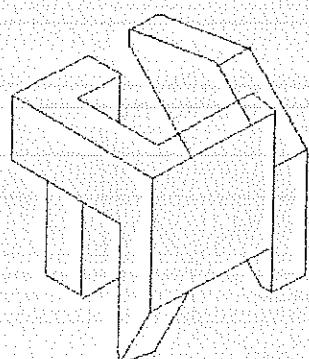
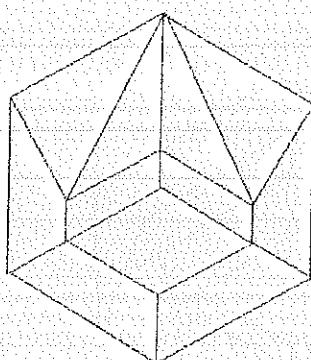
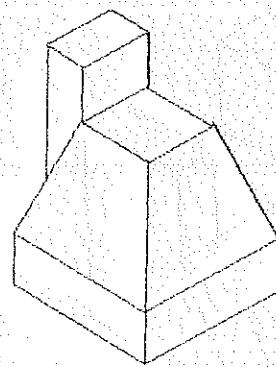
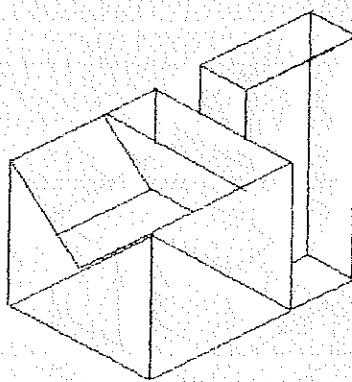
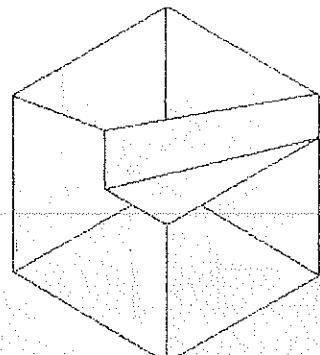
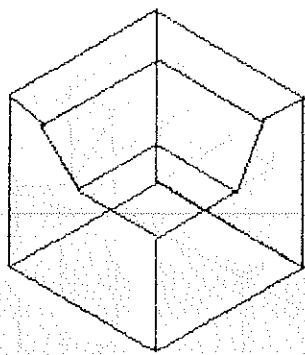


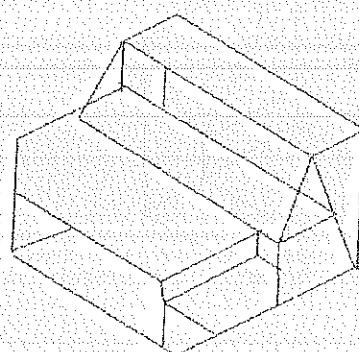
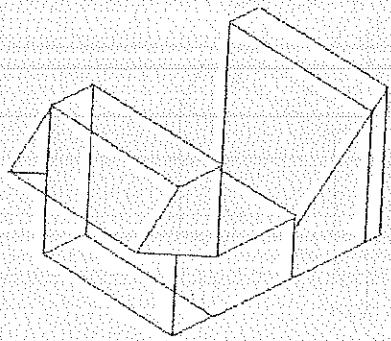
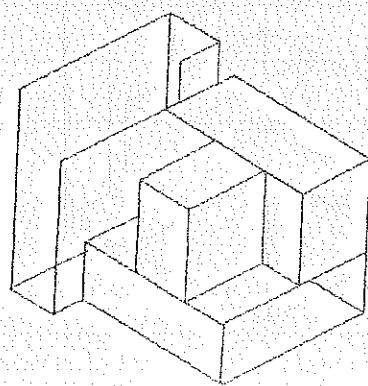
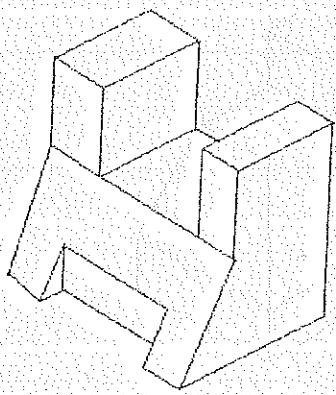
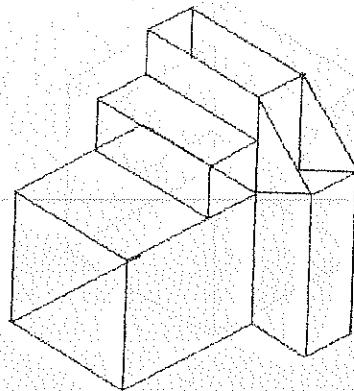
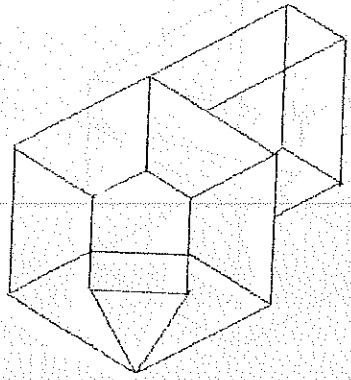


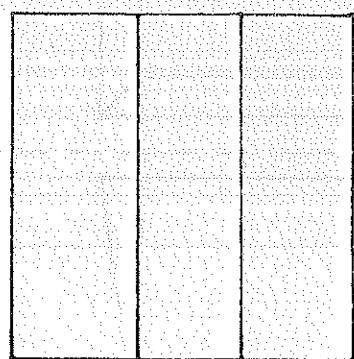
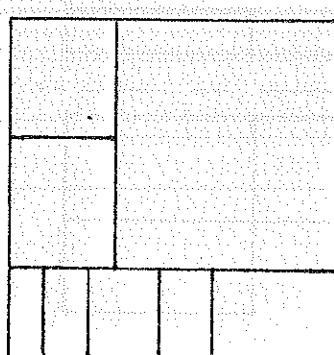
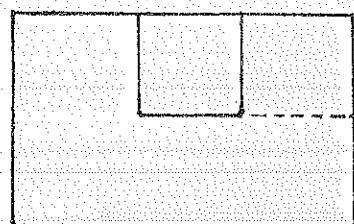
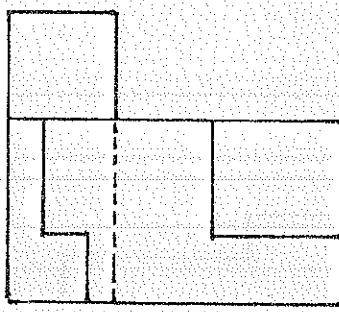
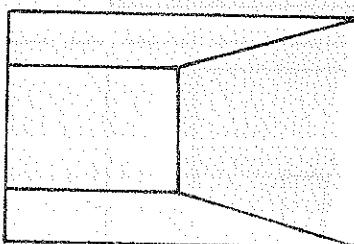
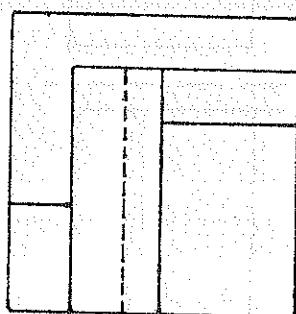
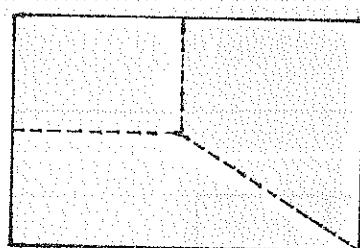
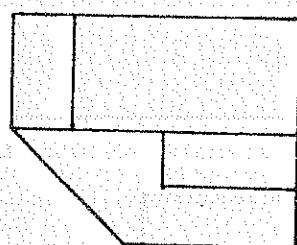
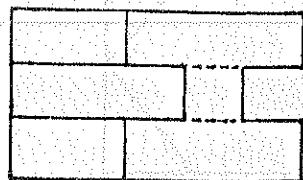
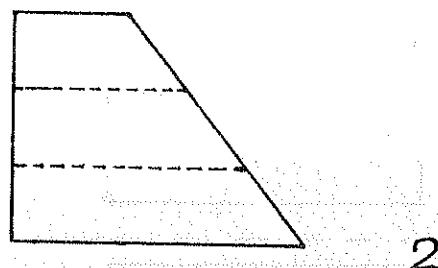
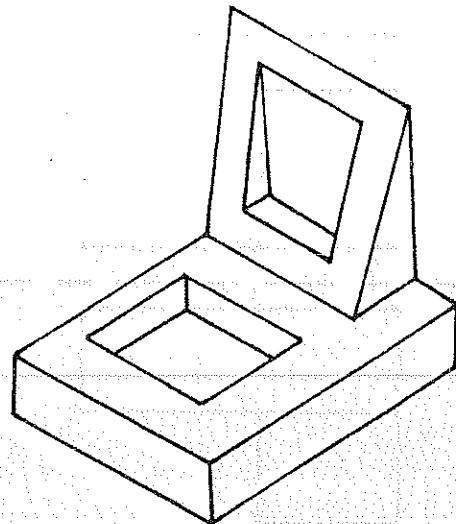


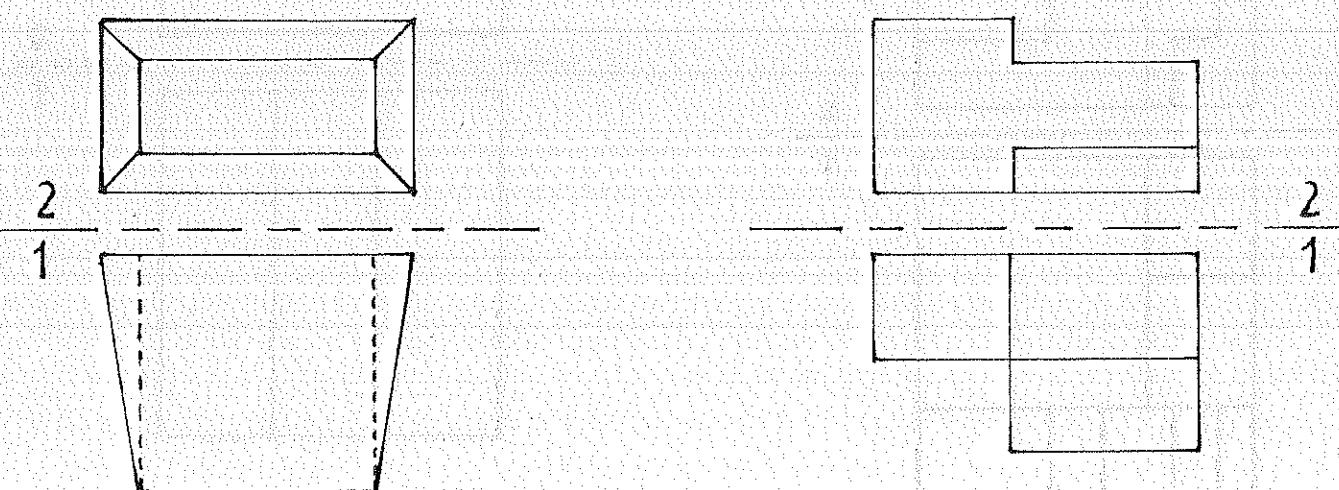
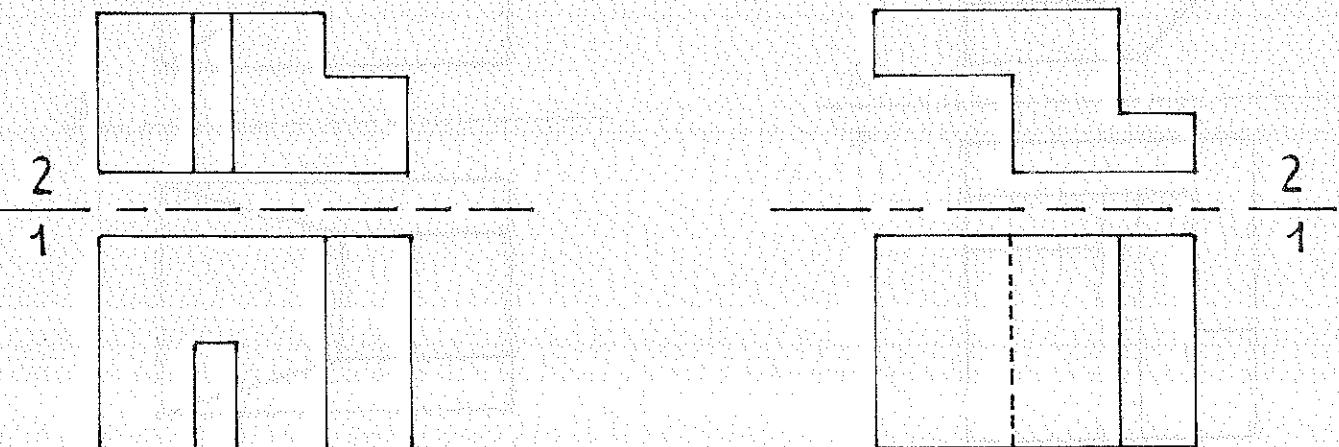
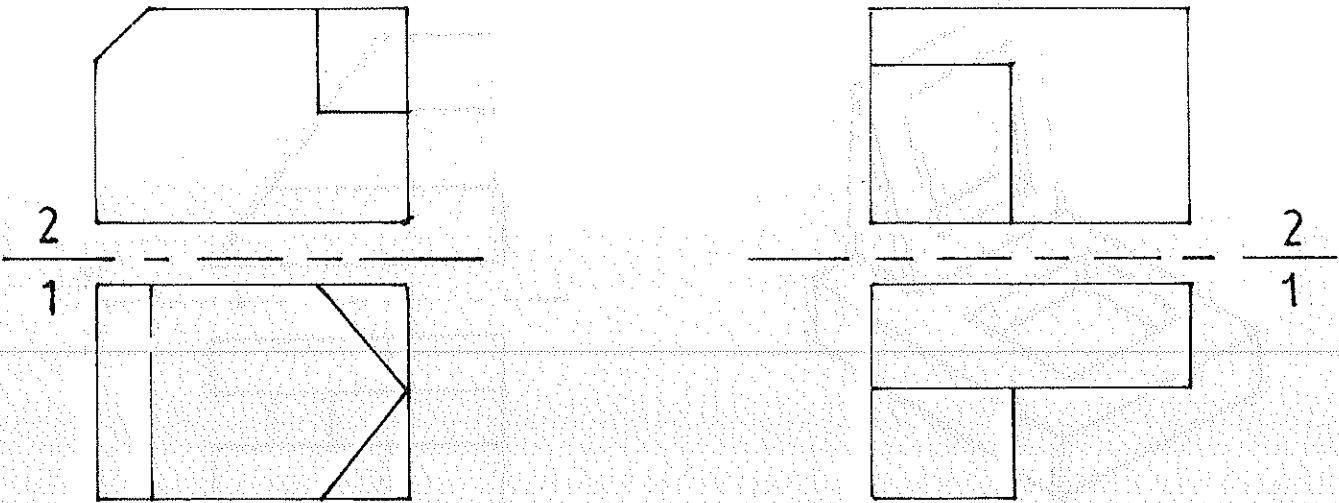


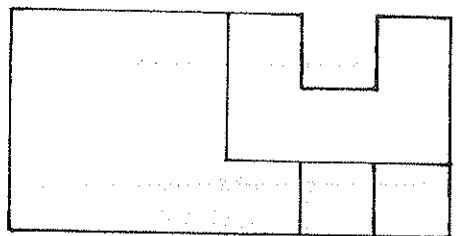




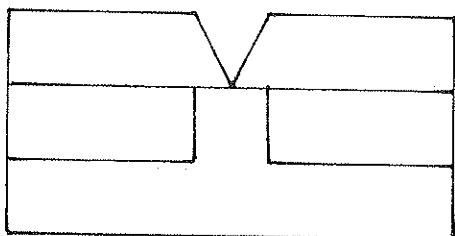




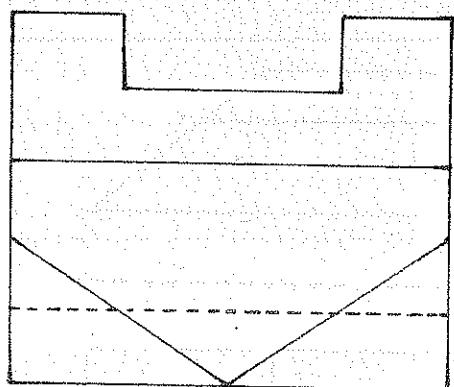
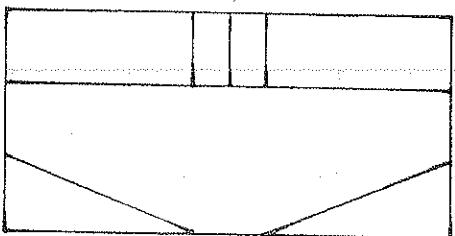




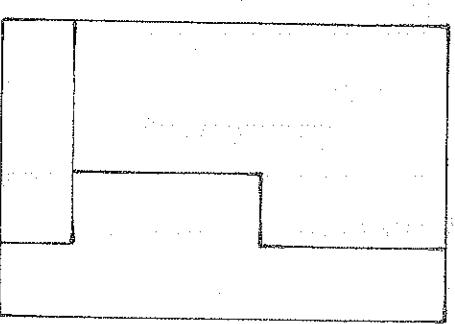
2
—
1



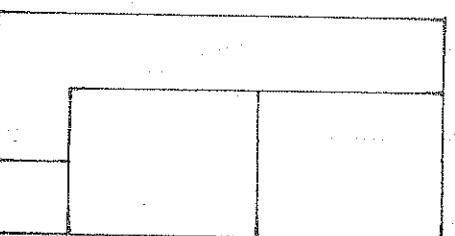
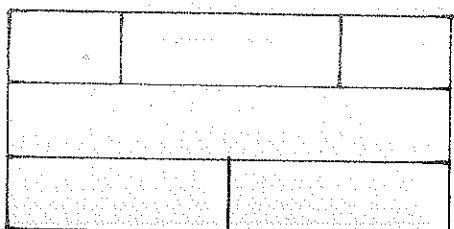
2
—
1



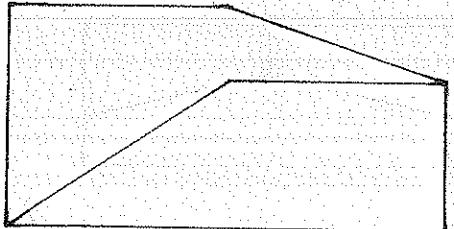
2
—
1



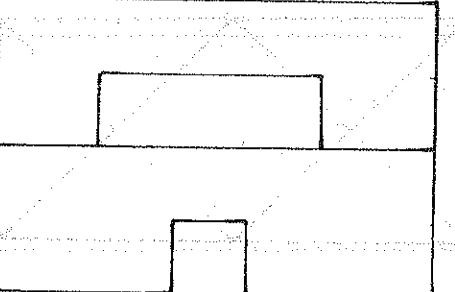
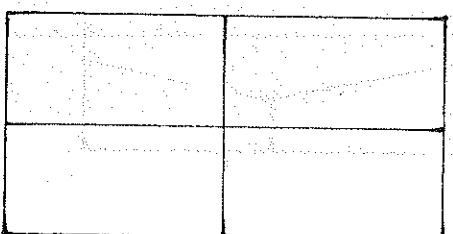
2
—
1



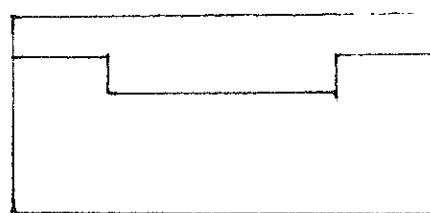
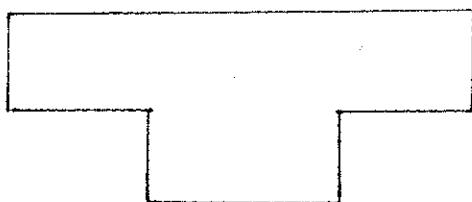
2
—
1



2
—
1

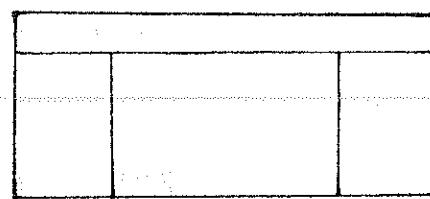
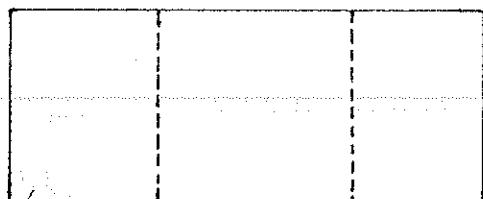


2
—
1



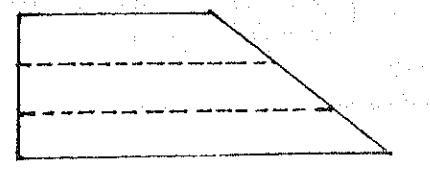
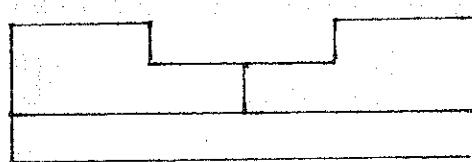
2
1

2
1



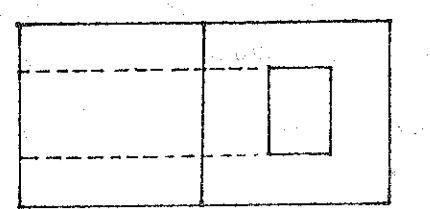
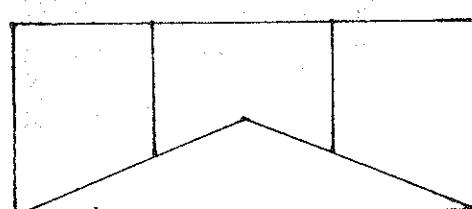
2
1

2
1



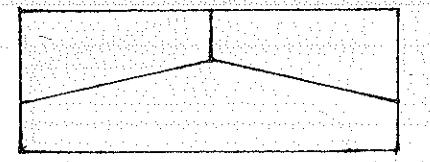
2
1

2
1



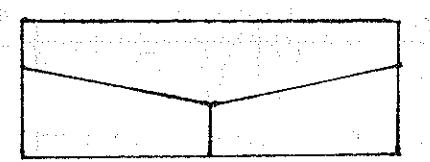
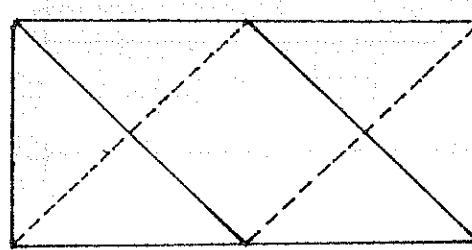
2
1

2
1



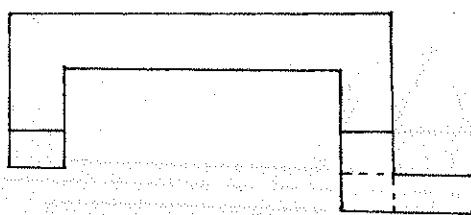
2
1

2
1

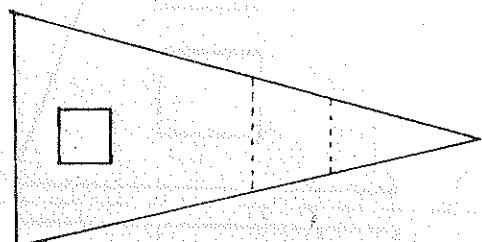


2
1

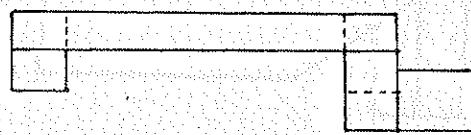
2
1



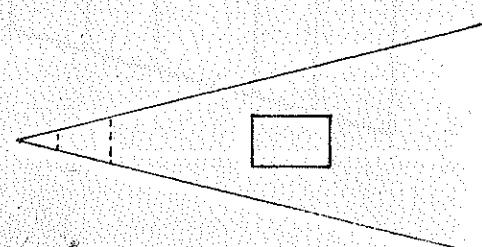
2



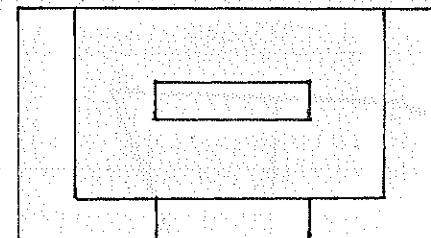
2



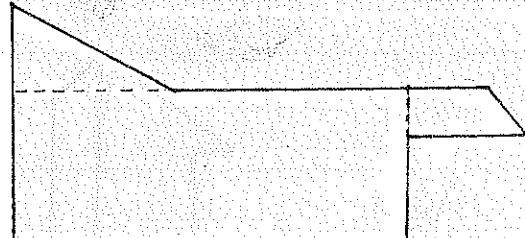
1



1



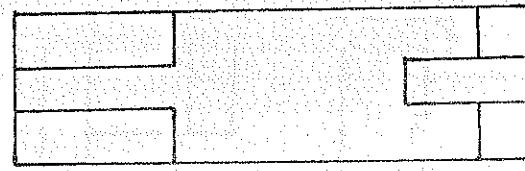
2



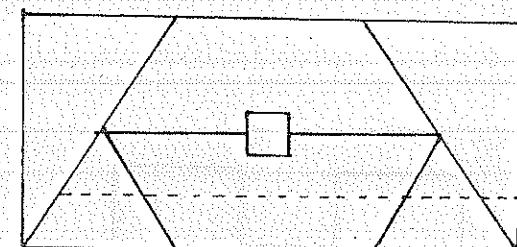
2



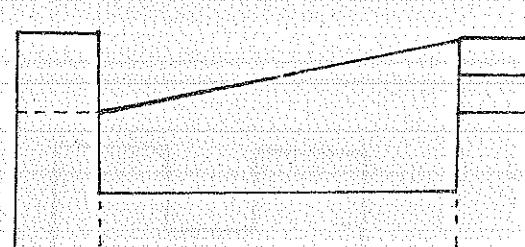
1



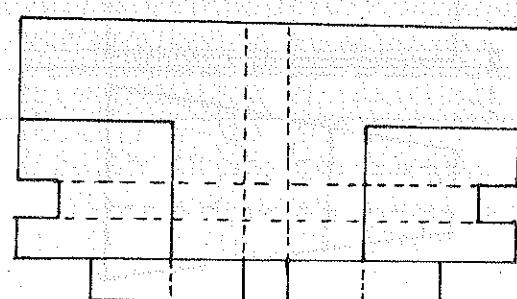
1



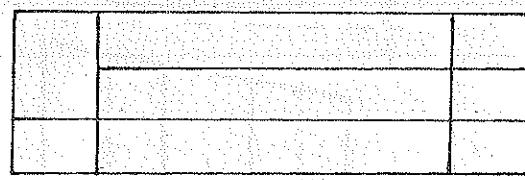
2

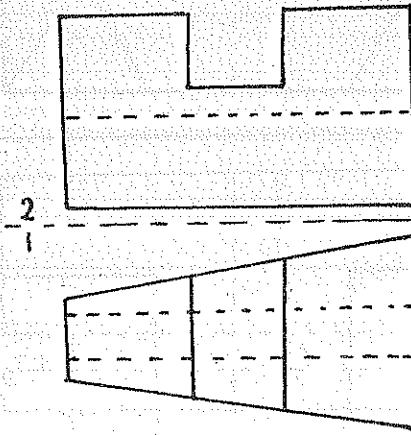
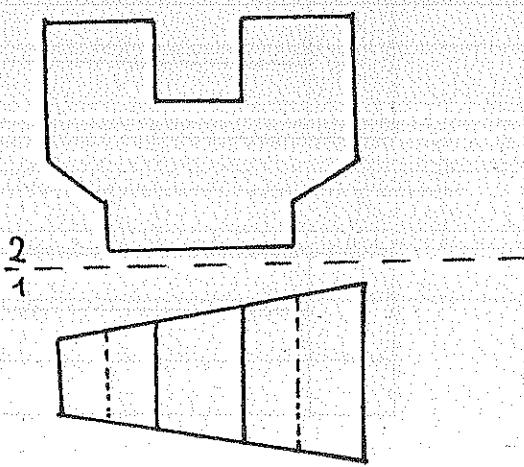
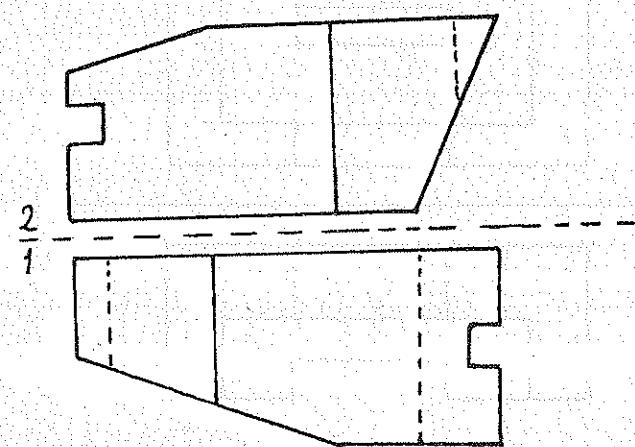
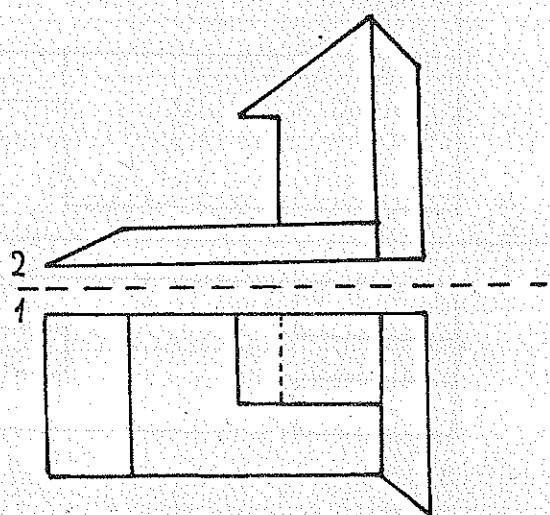
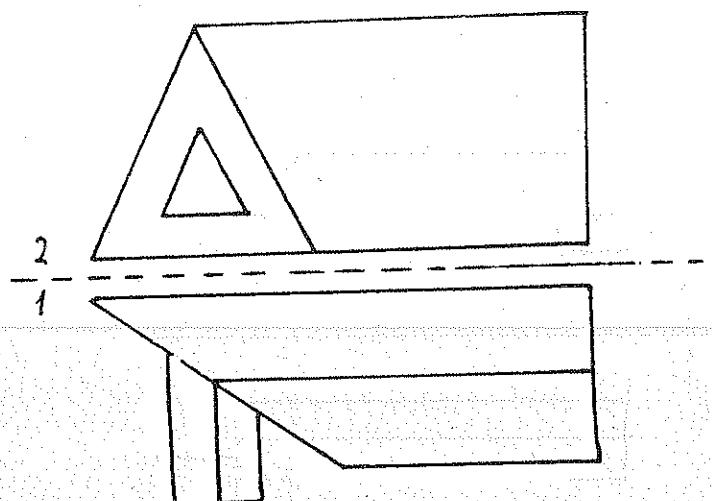
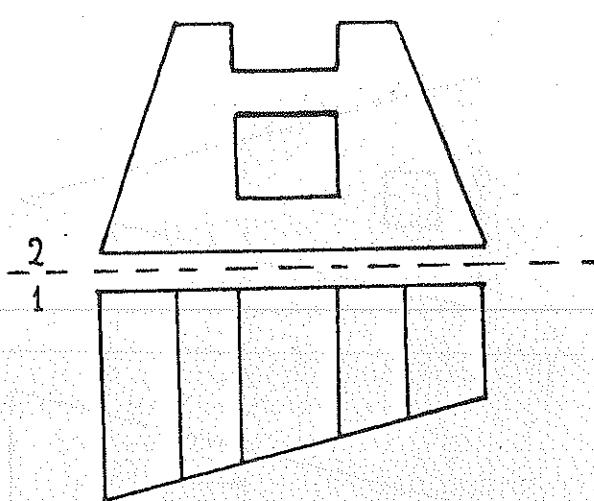


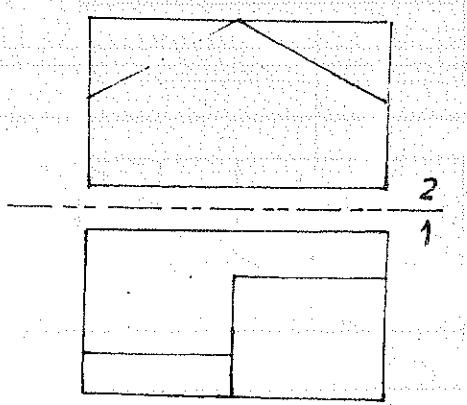
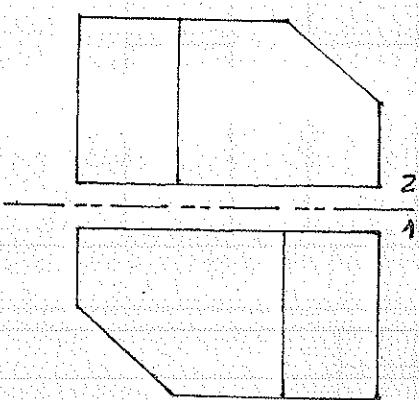
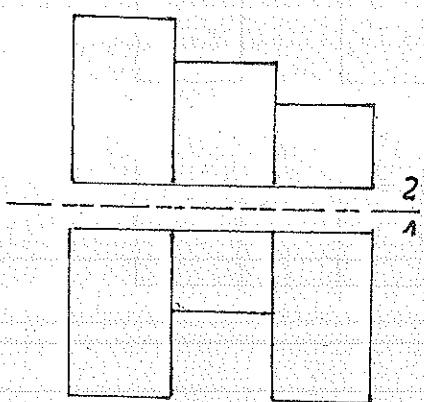
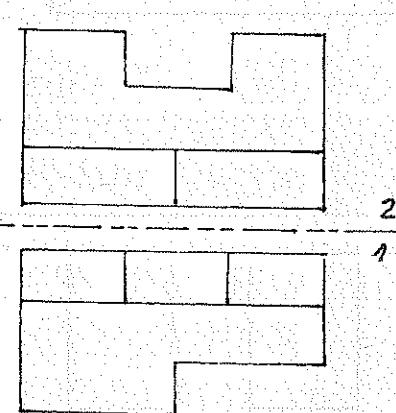
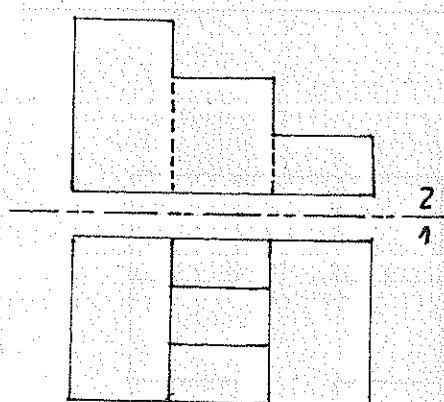
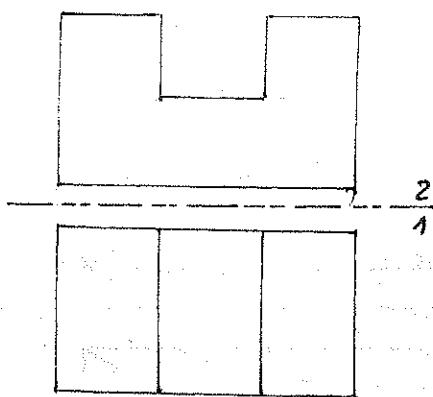
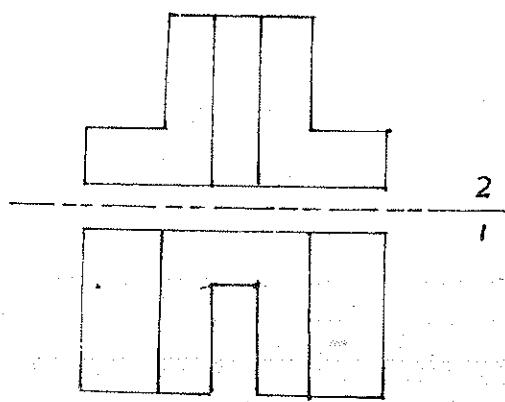
2

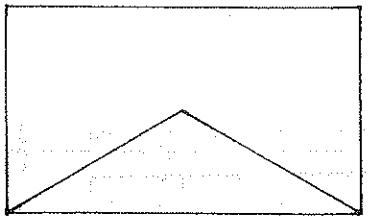


1

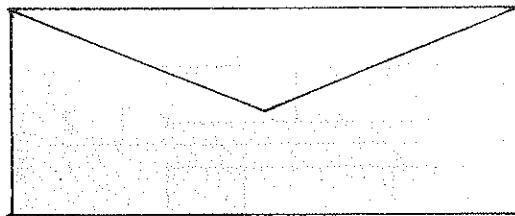




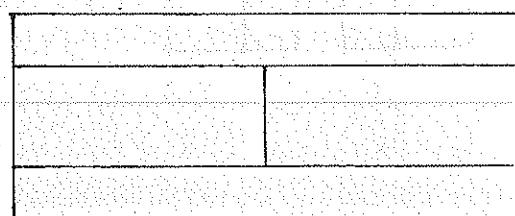
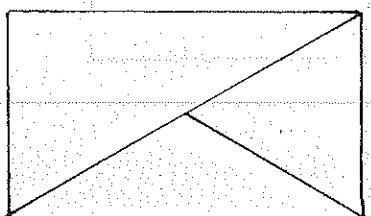




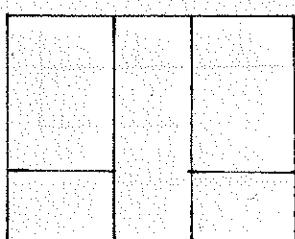
$\frac{2}{4}$



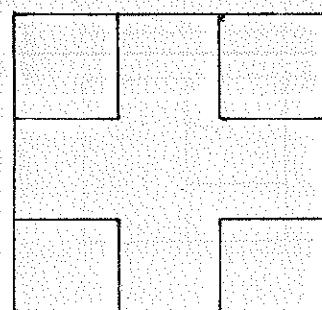
$\frac{2}{4}$



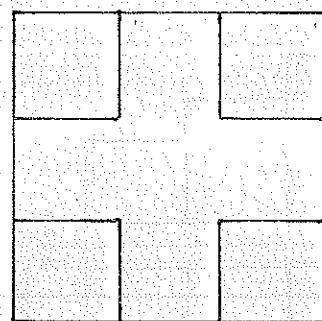
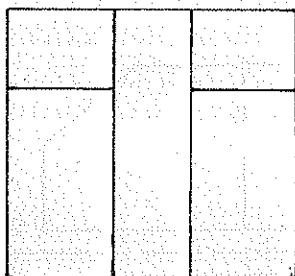
$\frac{2}{4}$



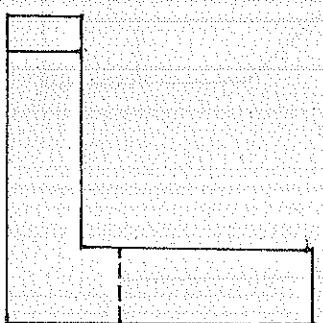
$\frac{2}{4}$



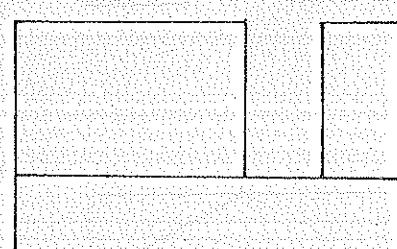
$\frac{2}{4}$



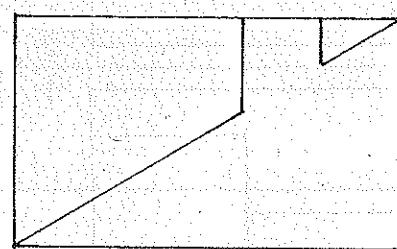
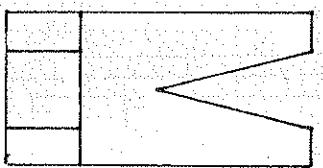
$\frac{2}{4}$



$\frac{2}{4}$



$\frac{2}{4}$

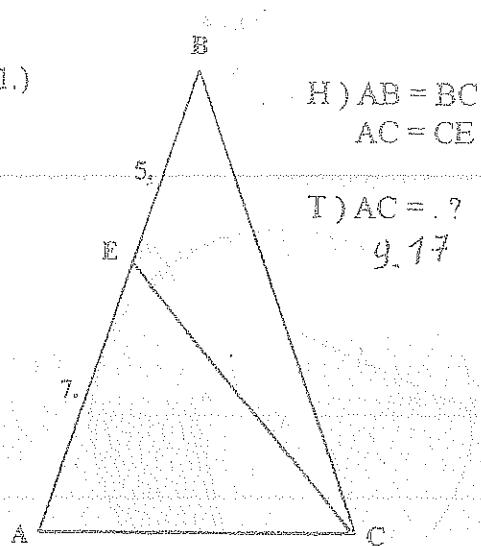


ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

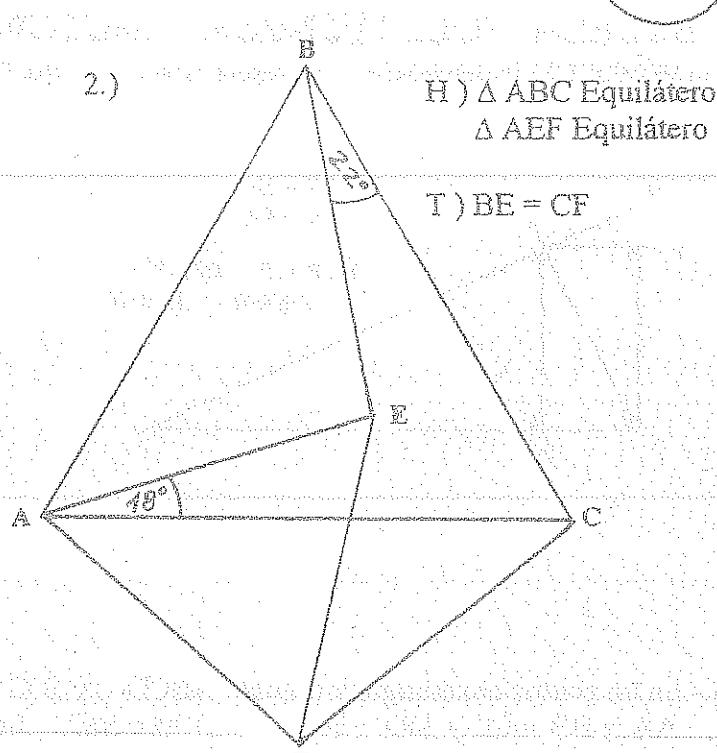
FILA
A

PROPEDÉUTICO INGENIERÍA * PRIMER EXAMEN DE GEOMETRÍA * 09 - 06 - 2004

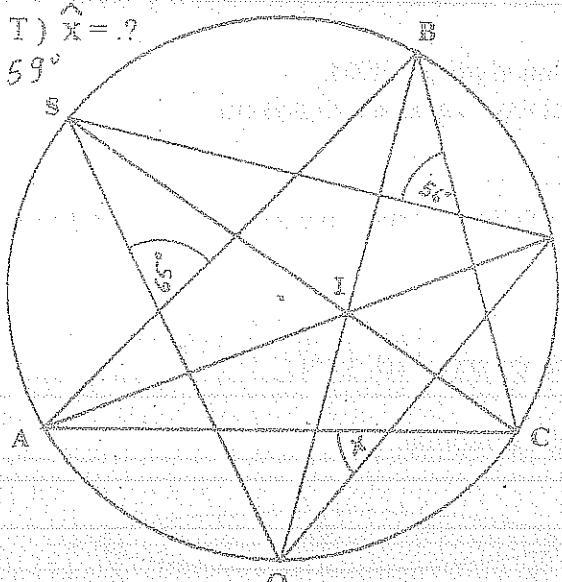
1.)



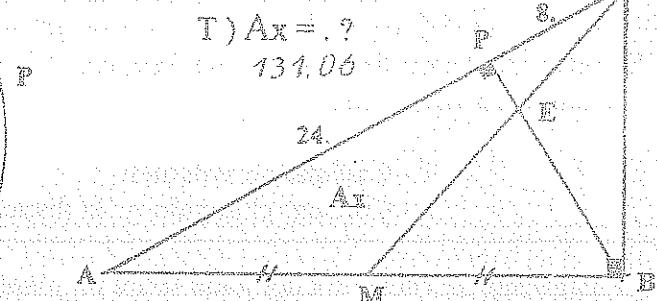
2.)



3.) H). I Incentro ΔABC

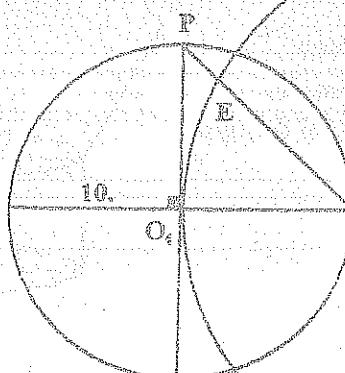


4.)



5.) T) EB = ?

11.43

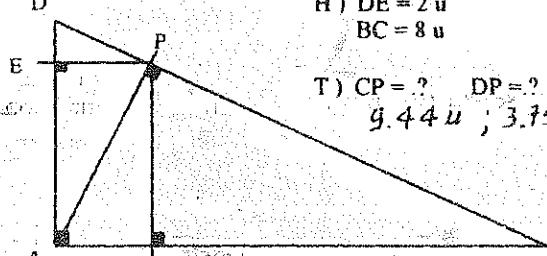


ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

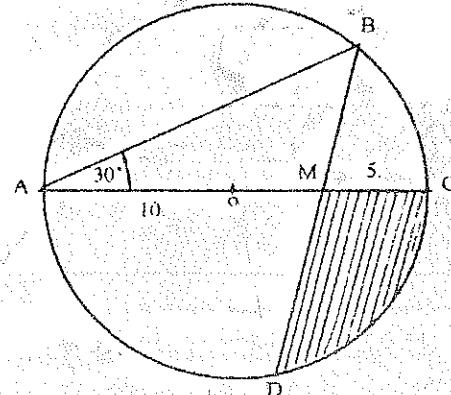
PROPEDÉUTICO INGENIERÍA * EXAMEN FINAL - GEOMETRÍA *

FILA
A

1.-



2.- T) $A // // / = . ?$



- 3.- En un prisma cuadrangular regular $ABCD - A'B'C'D'$: $AB = BC = CD = DA = 10 \text{ u.}$, $AA' = BB' = CC' = DD' = 20 \text{ u.}$ y $D'M = MC'$. Se traza un plano por B, D y M .

- 1.- Dibujar la sección que determina el plano BDM .
- 2.- Calcular el ángulo entre la sección y la base del prisma.
- 3.- Calcular el área de la sección.

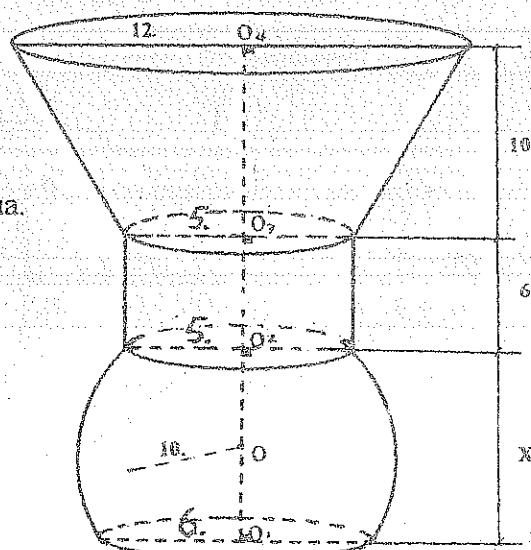
- 4.- Se tiene una pirámide cuadrangular regular $P - ABCD$ de arista lateral 15 m. , y ángulo diedro en una arista lateral de 123° .

- 1.- Calcular su volumen.
- 2.- Calcular el ángulo y la distancia entre \overline{AB} y \overline{PC} .

- 5.- El recipiente se encuentra apoyado sobre un plano horizontal.

Calcular

- 1.- El valor de x
- 2.- El volumen del recipiente
- 3.- Si el recipiente contiene un volumen de agua igual a los $3/5$ del volumen del recipiente, calcular la altura del nivel de agua.



EXAMEN SUSPENSION * GEOMETRÍA *

FILA
A

- 1º) Se tienen los puntos colineales consecutivos A, B, C, D y E que cumplen

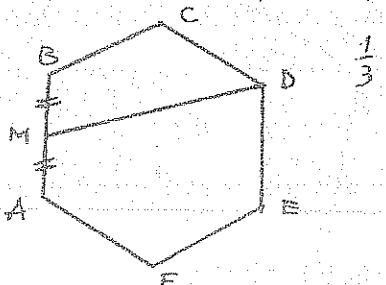
$$2BE + 5BC = 7u.$$

$$2AE + 5AC = 7AD$$

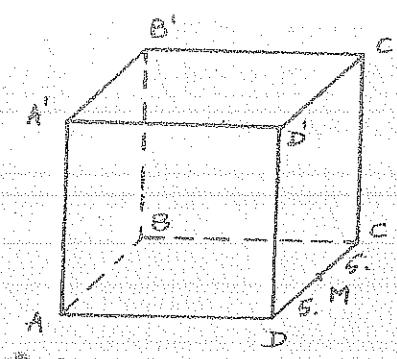
Hallar la medida de \overline{BD} .

1.0 u.

- 3º) Que fracción del área del hexágono regular ABCDEF es el cuadrilátero MBCD.

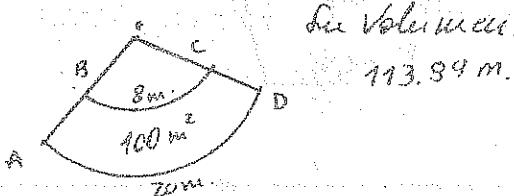


- 5º) En el cubo de arista 10 m., calcular la distancia entre las rectas \overline{BD} y $\overline{B'M}$



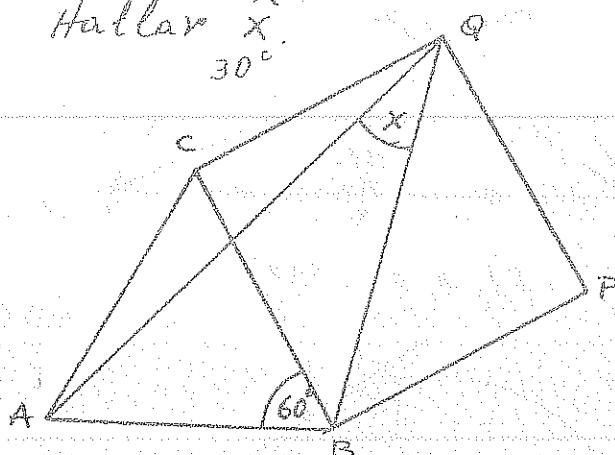
- 7º) La figura ABCD representa el área lateral de un tronco de cono de revolución. Hallar su volumen.

$$113.84 \text{ m}^2$$



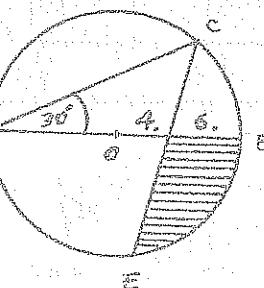
- 2º) En la figura $AC = BC$ y $BPAQ$ es cuadrado.

Hallar x .



- 4º) Hallar el A_{tri} del gráfico.

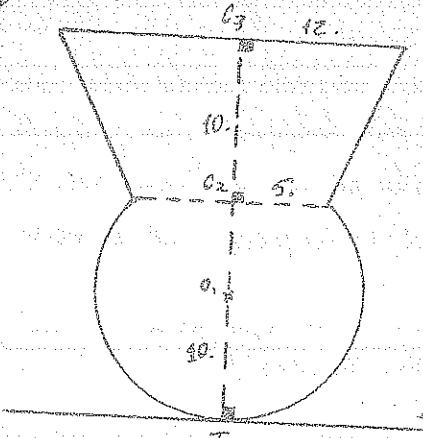
44.70



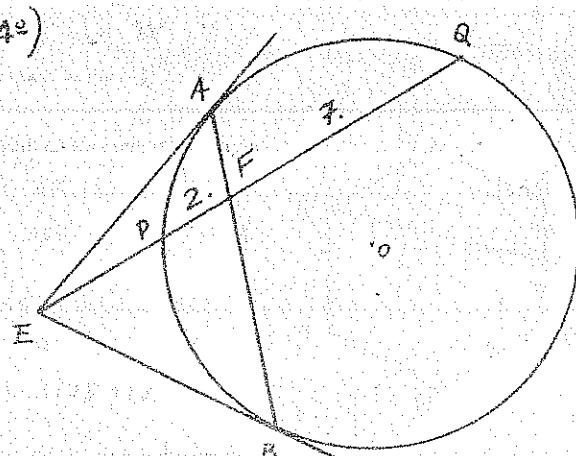
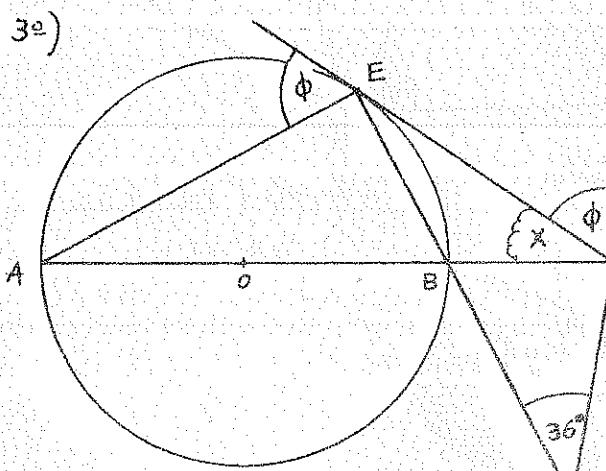
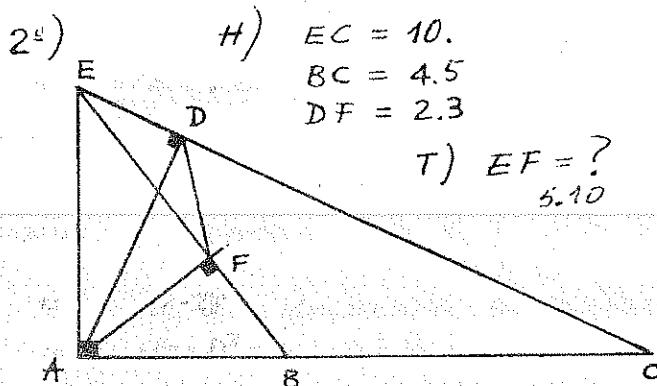
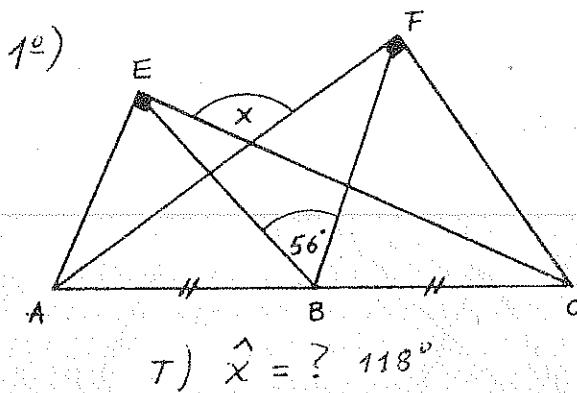
- 6º) En un paralelepípedo rectangular los lados de la base miden 5 m y 6 m y la diagonal menor del paralelepípedo forma con el plano de la base un ángulo de 56° . Calcular su área total y su Volumen.

- 8º) El recipiente contiene un volumen de agua igual a los $\frac{2}{3}$ del volumen del recipiente. Calcular la altura del nivel de agua a partir de T .

20.77



EXAMEN DE UBICACIÓN * GEOMETRÍA * 27-08-2024



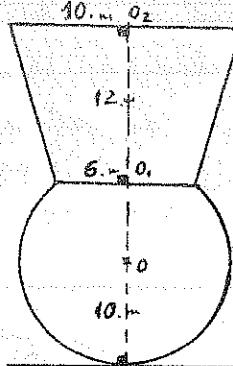
5º) En un paralelepípedo recto su arista lateral mide 16m. La base es un rombo ABCD tal que: $AM = MB$ ($M \in \overline{AB}$) $MC = 9\text{ m.}$ y $MD = 13\text{ m.}$ Calcular el área total y volumen.

6º) Calcular el volumen de un prisma pentagonal regular si su área lateral es de 300 m^2 y su área total 500 m^2 .

7º) Un recipiente de forma tronco de pirámide cuadrangular regular de dimensiones: arista de la base mayor 10m, arista de la base menor 6m y arista lateral 8m., contiene agua hasta una altura de 5m. Calcular el volumen de agua.

(El recipiente está apoyado en su base menor)

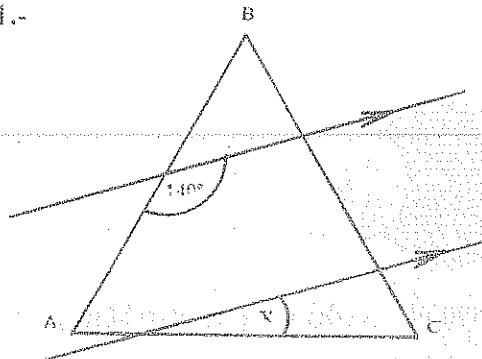
8º) El recipiente de la figura contiene 4500 m^3 de agua. Hallar la altura del nivel de agua a partir de L.



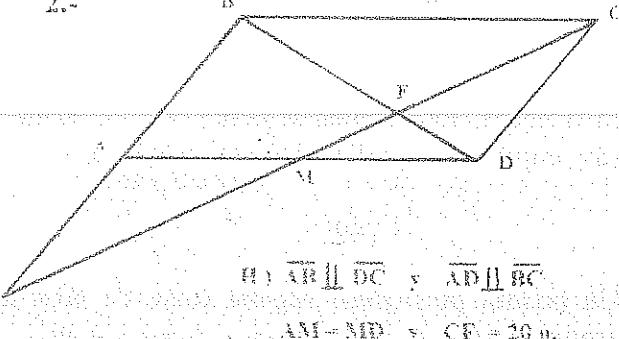
ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
PROPEDÉUTICO INGENIERIA * PRIMER EXAMEN - GEOMETRÍA *

FILA
A

1.-



2.-



B) $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ y $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$

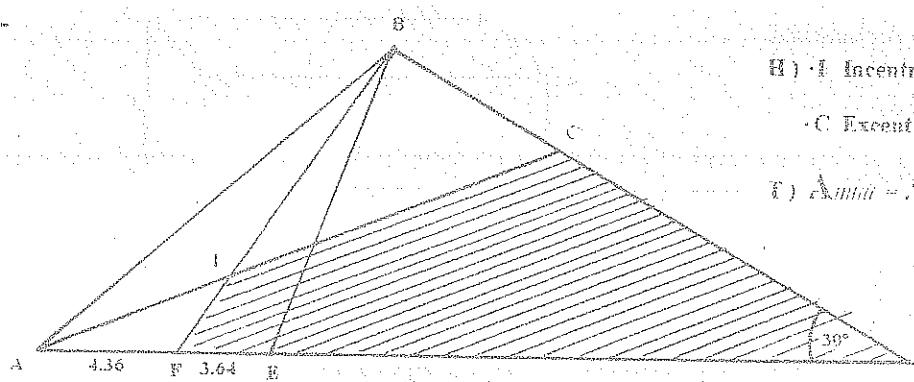
AM = MD y CF = 20 m.

C) $MN = ? 30^\circ$

H) A ABC Equilátero

T) $x = ? 20^\circ$

3.-



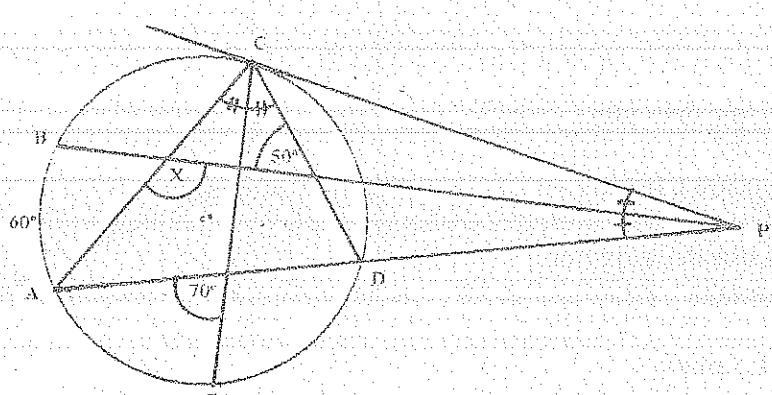
B) I Incentro A ABC

C) Excentro A ABC

D) $A_{\text{min}} = ? 303.25$

4.- En el gráfico \overline{PC} es tangente á la circunferencia. Determinar la medida del angulo x.

130°

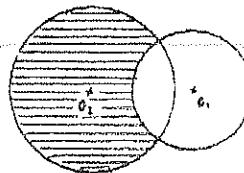


5.- Se tienen dos circunferencias secantes ortogonales de radios 4 m. y 3 m.
Calcular la longitud de una tangente común. 4.89 m.

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
PROPEDEUTICO INGENIERÍA * EXAMEN FINAL - GEOMETRÍA *

FILA
A

- 1.- En la figura, los círculos de radios 9 m. y 12 m. son ortogonales. Hallar el área sombreada.
 392.63 m^2
 1 punto.

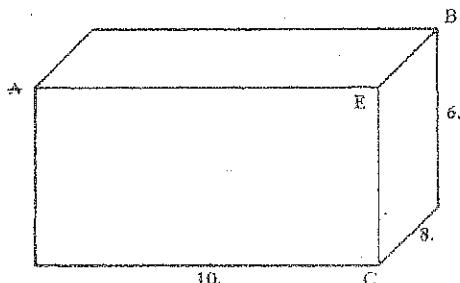


- 2.- Un prisma pentagonal regular tiene de área lateral 500 m^2 , y de área total 672 m^2 . Hallar el valor de su volumen. 1216.40 m^3

0.5 punto

- 3.- En el paralelepípedo rectangular, calcular la distancia del punto E al plano ABC. 4.33

1 punto



- 4.- En el prisma triangular regular,

Calcular:

- a.- El área de la sección que determina el plano DEF. 24.77

- b.- El ángulo entre la sección y la base del prisma. 81.51°

- c.- El volumen de cada una de las partes en que se divide el prisma. $46.47, 27.51$

1.5 punto

- 5.- Se tiene un tronco de cono de revolución de radios en las bases $R = 10 \text{ cm}$; $r = 5 \text{ cm}$, y de altura $h = 15 \text{ cm}$, asentado sobre su base mayor. Trazar un plano paralelo a las bases y que lo divide en dos sólidos de volúmenes iguales. Determinar la razón de las áreas laterales de los sólidos resultantes. 1.35

1 punto

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

PROPEDÉUTICO INGENIERÍA * EXAMEN SUSP - GEOMETRÍA *

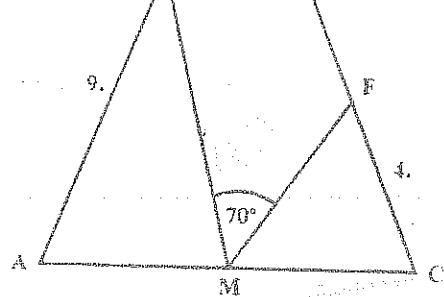
FILA
A

- 1.- H) $AB = BC$
 $AM = MC$

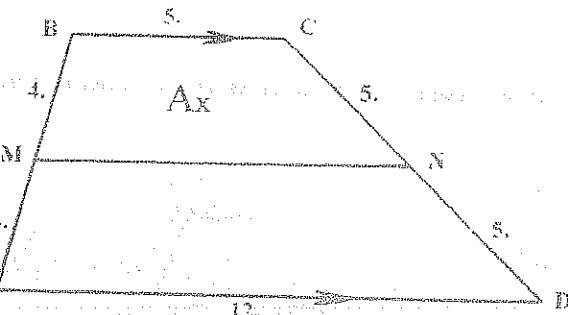
T) $A \triangle AEM = ?$

25.34

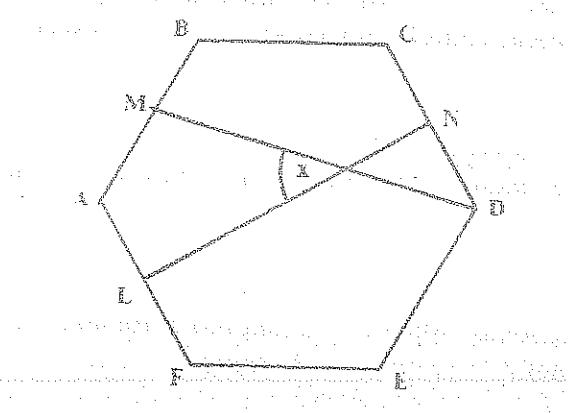
mm²



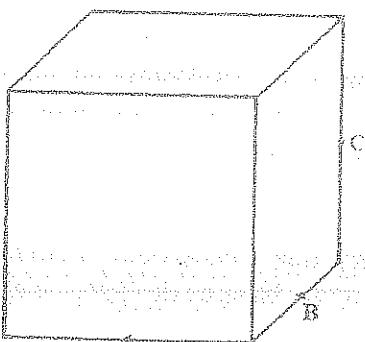
- 2.- T) $A_x = ?$ 26.79



- 3.- L, M y N son puntos medios de los lados del hexágono regular. Hallar x . 43.90°



- 4.- A, B y C son puntos medios de las aristas del cubo. Hallar el ángulo entre la sección que determina el plano ABC y la base del cubo. 54.73°



- 5.- Un cilindro de revolución de radio 10 m. y altura 20 m. con su eje dispuesto horizontal. contiene un volumen de agua tal que la superficie húmeda es de 1068 m². Calcular dicho volumen de agua. 3769.90 m³

- 6.- Un paralelogramo ABCD de lados 8 m. y 6 m. y ángulo que forman las diagonales 36° es la base de una pirámide P - ABCD de altura PH = 20 m., siendo H el punto de corte de las diagonales de la base. Hallar el área total de la pirámide. 290.37 m²

- 7.- Un vaso de forma tronco de cono de revolución asentado en su base menor de radio 5 cm. contiene agua hasta una altura de 5 cm.. La superficie superior del agua tiene un radio de 3.5 cm.. Cuánto subirá el nivel del agua si se introduce un cubo de hierro de arista $\sqrt{2}$ cm.. 0.073 cm.

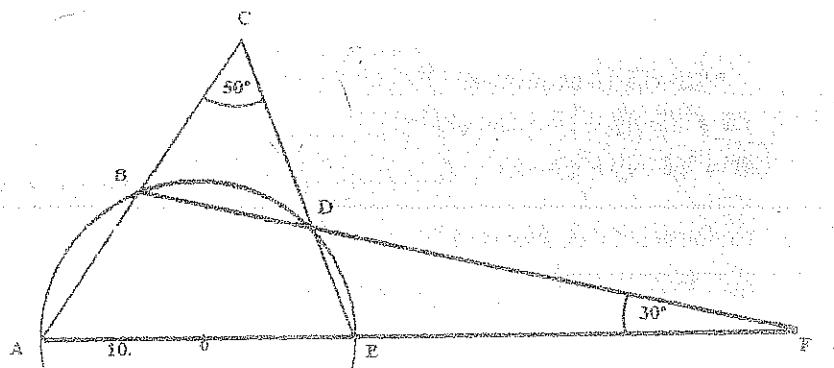
8

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

PROPEDEUTICO INGENIERIA * EXAMEN DE UBICACIÓN - GEOMETRÍA *

- 1.- En un triángulo acutángulo ABC, se trazan las alturas \overline{BE} y \overline{CF} . Demostrar que se cumple:
 $a^2 = c \times BF + b \times CE$ 2 puntos.

- 2.- En la figura, calcular el área del cuadrilátero ABDE. 115.59 3 puntos.



- 3.- En un rombo ABCD, M es punto medio de su lado BC y AM se corta con la diagonal BD en E. Si: $\angle CAM = 34^\circ$ y $EM = 34\text{ cm.}$ calcular el área del rombo. 3 puntos.

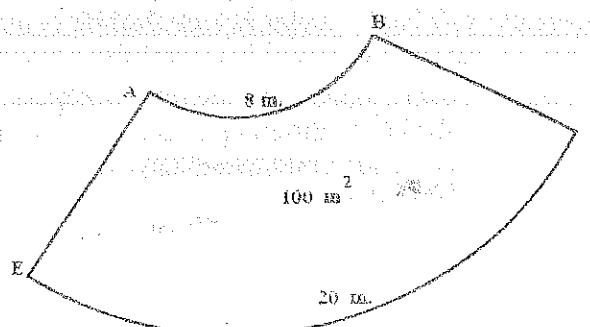
- 4.- Los planos L y M forman un ángulo de 35° y su arista es \overline{AB} . Un punto P del plano L dista de A y de B 7 m. Si el área proyectada por el plano \overline{APB} en el plano M es de 13.1 m^2 , calcular el ángulo que la recta \overline{PA} forma con el plano M. 3 puntos.

- 5.- Una pirámide pentagonal regular tiene de área lateral 800 m^2 y el ángulo entre una cara lateral y la base es de 80° . Calcular su volumen. 3 puntos.

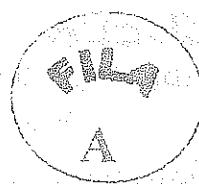
- 6.- Se tiene un tronco de pirámide cuadrangular regular de aristas en las bases $L_1 = 10\text{ cm.}$, $L_2 = 5\text{ cm.}$ y de altura $h = 15\text{ cm.}$ asentado sobre su base mayor. Trazar un plano paralelo a las bases y que lo divida en dos sólidos de volúmenes iguales. Determinar la relación de las áreas laterales de los sólidos resultantes. 3 puntos.

- 7.- La figura representa el área lateral de un tronco de cono de revolución. Calcular su volumen.

3 puntos.



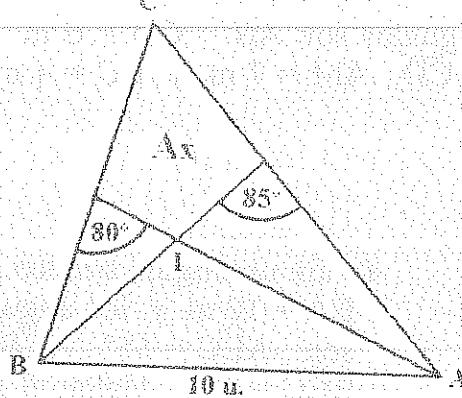
9
 ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
 PROFEDETICO INGENIERIA * PRIMER EXAMEN DE GEOMETRÍA *



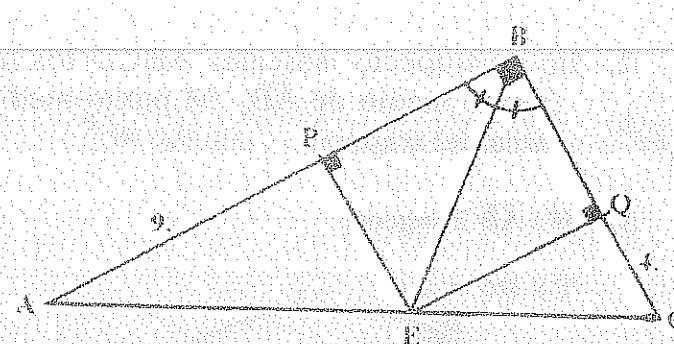
1.- H) I Incentro $\triangle ABC$

$$\Gamma: AI = ?$$

20.11.11

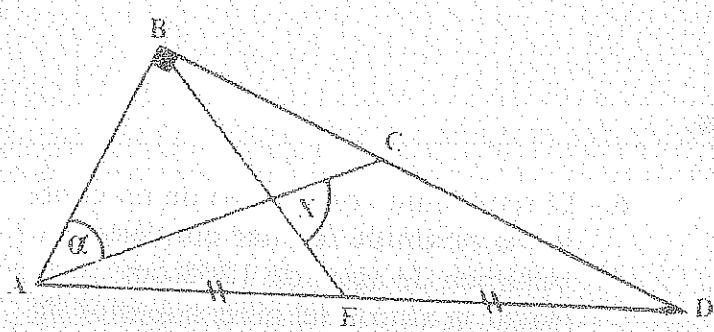


2.- T) BE = ? 8.4 B



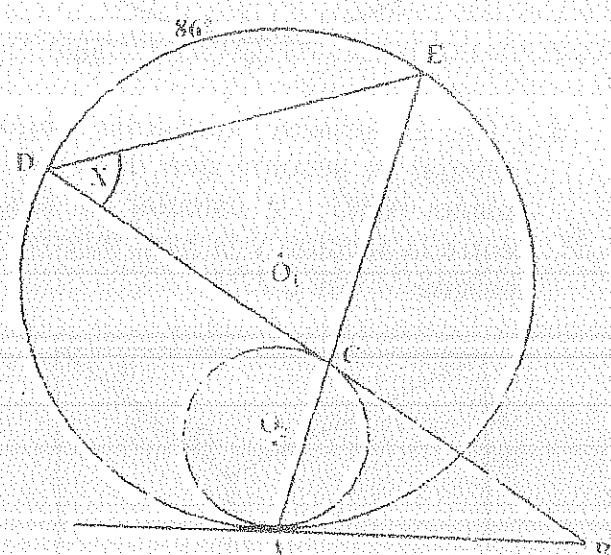
3.- H) AC = CD

$$T: \hat{X} = 135^\circ - \frac{3}{2}\hat{\alpha}$$



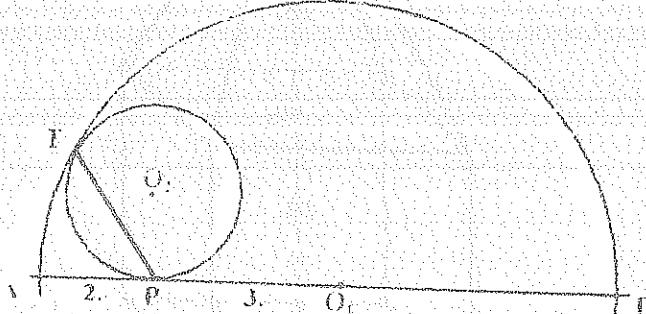
4.- H) O_1, O_2 Tangentes
 \overline{AB} Tangente Común
 \overline{BC} Tangente O_2

$$\Gamma: \hat{X} = ? 43^\circ$$



5.- H) O_1, O_2 Tangentes
 \overline{AB} Tangente O_1

$$\Gamma: IP = ? 2.70$$



ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
PROPEDÉUTICO INGENIERÍA * EXAMEN FINAL - GEOMETRÍA *

FILA
A

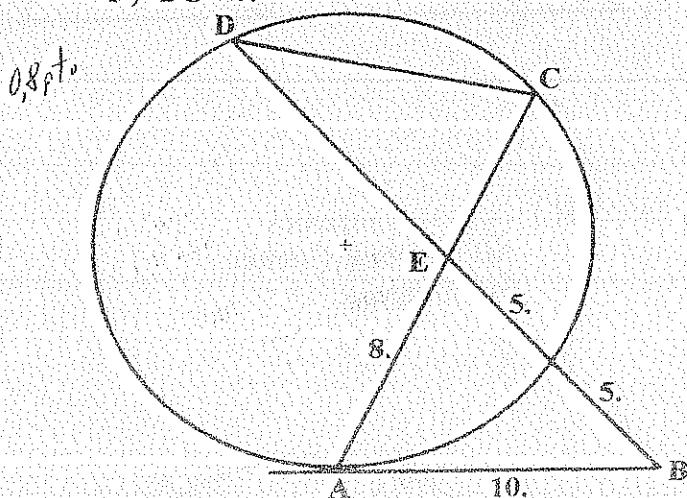
- 1.- Se tiene los triángulos rectángulos ABC, recto en A y APQ, recto en A, tales que Q pertenece a \overline{AB} , C pertenece a \overline{AP} y \overline{BC} con \overline{PQ} se cortan en E.
 $0,3 p^t$ Si: $AB = 40$, $AC = 30$, $AP = 72$ y $AQ = 30$, hallar el área de la región AQEC.

545.48

- 2.- En un trapecio isósceles ABCD los lados iguales son $AB = CD = 6$ m. Si L es el punto medio de \overline{AB} , M punto medio de \overline{CD} , $AM = 7$ m. y $LC = 4$ m., hallar el área del trapecio. 23.96 m^2
 $0,8 p^t$

- 3.- H) \overline{AB} Tangente

T) $DC = ?$

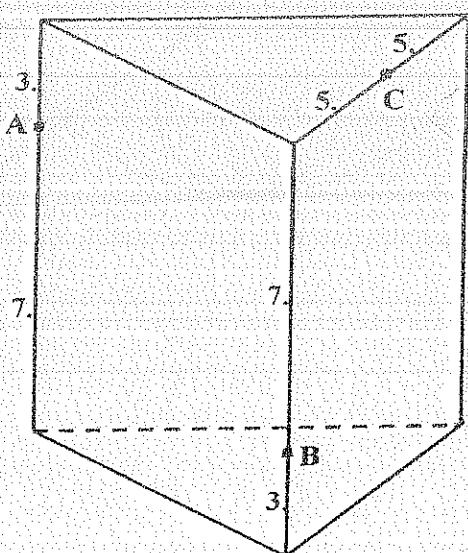


- 4.- En un ángulo triédrico E – ABC, $EA = 10$ m. y los ángulos planos son: $\widehat{AEC} = 55^\circ$, $\widehat{AEB} = 44^\circ$ y $\widehat{BEC} = 33^\circ$. Hallar el ángulo entre \overline{AE} y el plano BEC.

43.83

$0,8 p^t$

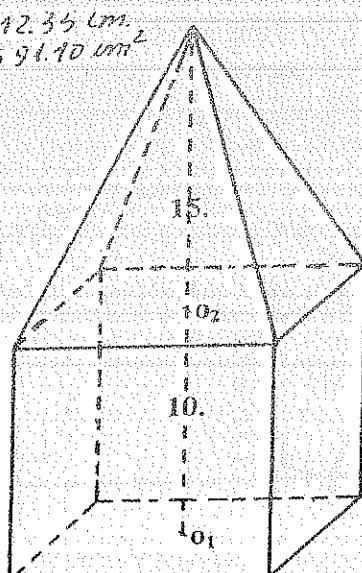
- 5.- En el prisma triangular regular, dibujar la sección que determina el plano ABC y calcular el ángulo entre la sección y la base inferior del prisma. 55.27°
 $1 p^t$



- 6.- El recipiente compuesto de un cubo y una pirámide regular contiene un volumen de agua de 1200 cm^3 . Hallar la altura del nivel superior de agua a partir de la base inferior del cubo y calcular la superficie húmeda.

12.35 cm
 591.10 cm^2

1. p^t



ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

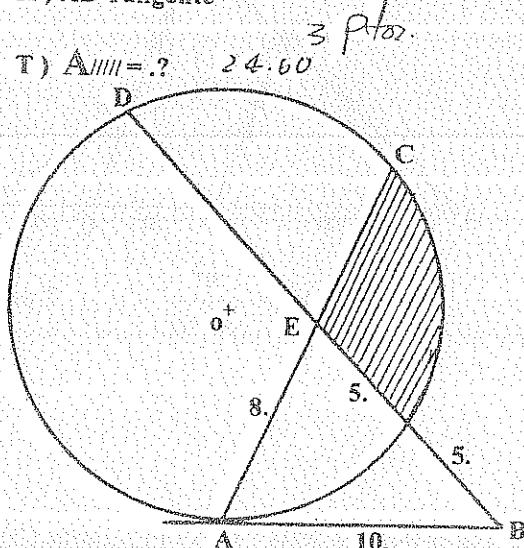
PROPEDÉUTICO INGENIERÍA * EXAMEN SUSPENSIÓN - GEOMETRÍA *

- 1.- En un triángulo ABC su ángulo A mide 50° y M es el punto medio del segmento que une el Incentro I y el Ex-centro Oa relativo al lado BC. Calcular la medida del ángulo BMC. $2 \text{ ptos. } 130^\circ$

- 2.- Se tiene los triángulos ABC y APQ, tales que Q pertenece a \overline{AB} , C pertenece a \overline{AP} y \overline{BC} con \overline{PQ} se cortan en E. Hallar la medida del ángulo A, si: $AB = 40$, $AC = 30$, $AP = 72$, $AQ = 30$ y el área de la región AQEC es de 500. $3 \text{ ptos. } 66.4^\circ$

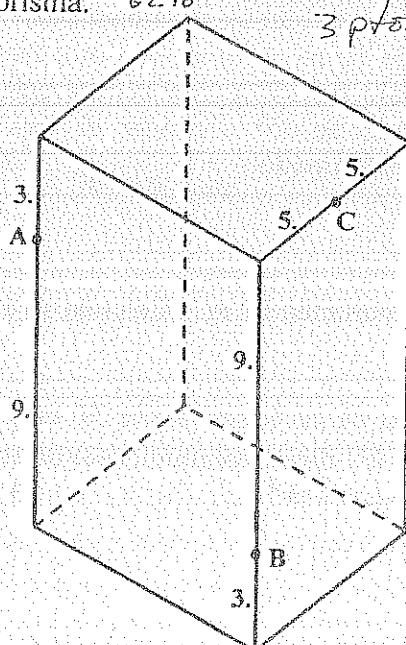
- 3.- En un trapecio isósceles circunscriptible ABCD los lados iguales son $AB = CD = 6 \text{ m.}$ y su área es de 24 m^2 . Hallar las bases del trapecio. $3 \text{ ptos. } 10.4 \text{ m}; 1.6 \text{ m.}$

- 4.- H) \overline{AB} Tangente

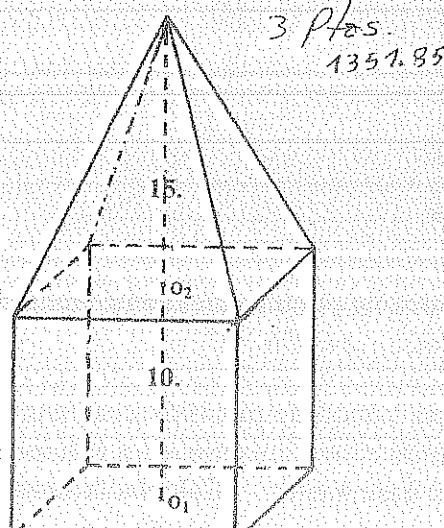


- 5.- En un ángulo triédrico E – ABC, $EB = 10 \text{ m.}$ y los ángulos planos son: $BEC = 55^\circ$, $AEB = 44^\circ$ y $AEC = 33^\circ$. Hallar la distancia de B al plano AEC. $6.92 \text{ m. } 3 \text{ ptos.}$

- 6.- En el prisma cuadrangular regular, dibujar la sección que determina el plano ABC y calcular el ángulo entre la sección y la base inferior del prisma. 62.16° 3 ptos.



- 7.- El recipiente compuesto de un cubo y una pirámide regular contiene un volumen de agua hasta una altura de 15. a partir de la base inferior del cubo. Calcular el volumen de agua.



ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

PROPEDÉUTICO INGENIERÍA * EXAMEN DE UBICACIÓN - GEOMETRÍA *

1.- A M B C N D

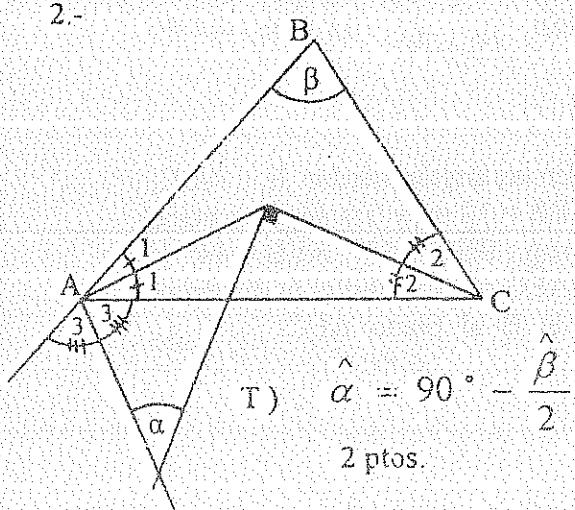
2 ptos.

$$H) AM = MC$$

$$BN = ND$$

$$T) MN = \frac{AB + CD}{2}$$

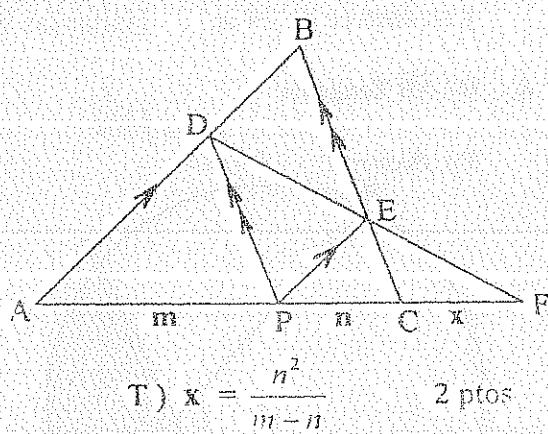
2.-



$$T) \hat{\alpha} = 90^\circ - \frac{\beta}{2}$$

2 ptos.

3.-

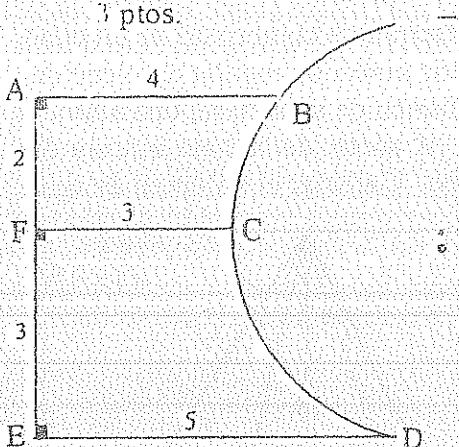


$$T) x = \frac{n^2}{m+n}$$

2 ptos.

4.- T) Área de la figura EFCD

3 ptos.



5.- Un triángulo ABC y un cuadrado CEFB son perpendiculares tales que $AB = BC = 10$. y $AC = 8$. Hallar el ángulo entre el cuadrado CEFB y el plano ABE. 3 ptos

$$56.74^\circ$$

6.- La diagonal de un paralelepípedo rectangular es de 10 m. y forma con una cara lateral un ángulo de 35° y con la otra cara lateral un ángulo de 45° . Calcular el área lateral del paralelepípedo. 3 ptos.

$$105.85 \text{ m}^2$$

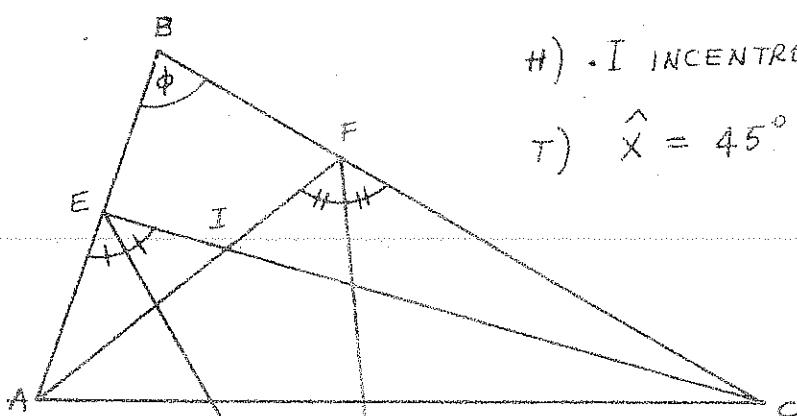
7.- Se tiene un prisma pentagonal regular de altura 5 m. y de volumen 10 m^3 . Calcular su área lateral. 2 ptos 26.95 m^2

8.- En un tronco de pirámide cuadrangular regular las aristas de las bases miden 50 m. y 30 m. y su altura mide 20 m., y contiene un volumen de agua igual a los $\frac{4}{7}$ de su volumen, cuando está apoyado sobre su base menor. Calcular la superficie húmeda. 3142.46 m^2 3 ptos.

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
PROFESIONAL INGENIERIA * PRIMER EXAMEN - GEOMETRÍA *

FILA
A

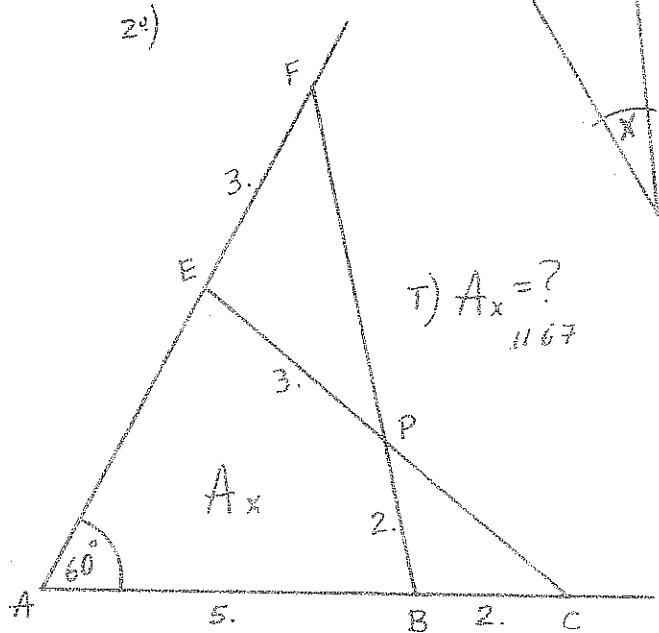
1^{o)}



H) • I INCENTRO $\triangle ABC$

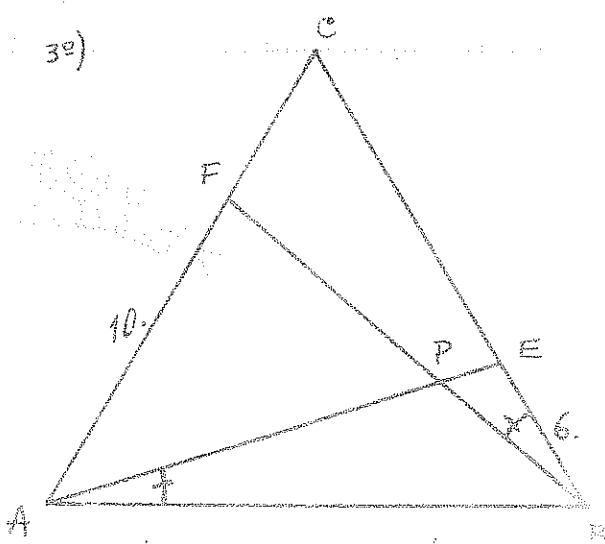
$$T) \hat{x} = 45^\circ - \frac{\phi}{4}$$

2^{o)}



$$T) A_x = ? \quad 116.7$$

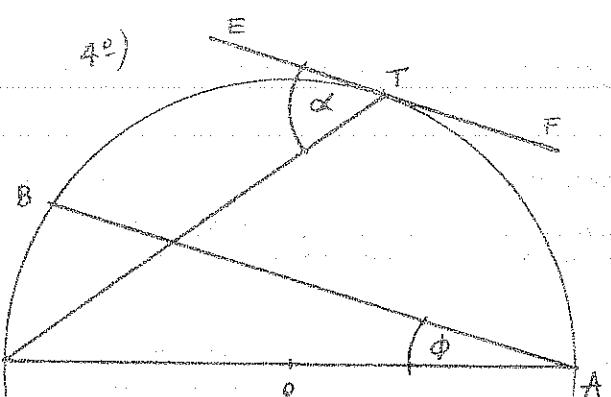
3^{o)}



H) $\triangle ABC$ EQUILÁTERO

$$T) A_{\triangle ABC} = ? \quad 110.85$$

4^{o)}

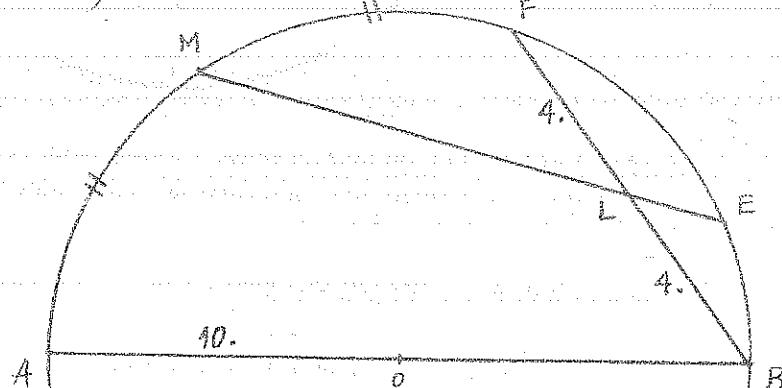


H) EF TANGENTE

$$EF \parallel AB$$

$$T) \phi = 2\alpha - 90^\circ$$

5^{o)}



10.

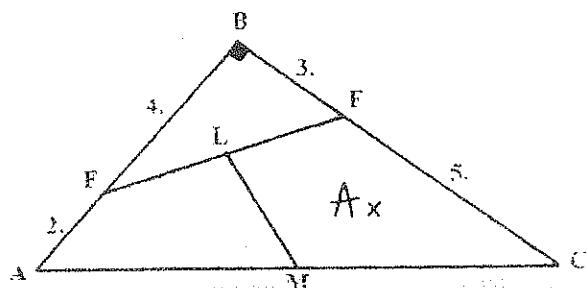
$$T) \angle E = ? \quad 119$$

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

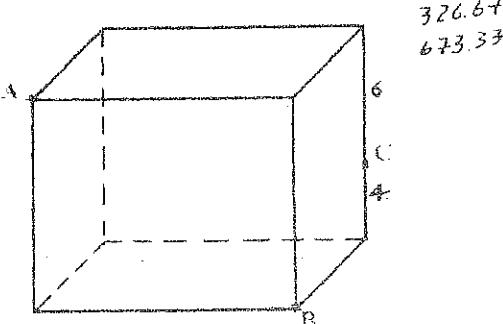
PROPEDÉUTICO INGENIERÍA * EXAMEN FINAL DE GEOMETRÍA * 17 - 02 - 2006

FILA
A

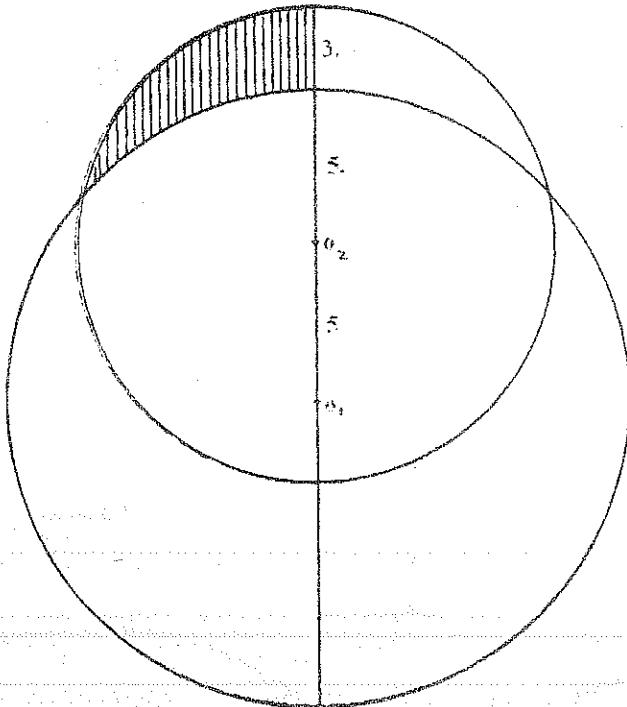
- 1.- En la figura, L y M son puntos medios
Hallar $A_x = 10.75$



- 2.- En el Cubo, calcular el volumen de cada una de las partes en que lo divide el plano ABC. (Sección del cubo).



- 3.- Calcular A_{anillo}
19.92



- 4.- Calcular el volumen de una pirámide cuadrangular regular si sus aristas laterales miden 15 m., y el ángulo que forman dos caras laterales adyacentes es de 123° . 812.07 m^3

- 5.- En un cono de revolución de radio 20 m. y generatriz 36 m. y por un punto ubicado en la generatriz v a los $\frac{2}{3}$ de la misma a partir del vértice, se traza un plano paralelo a la base del cono. Determinar el área lateral, el área total y el volumen del tronco de cono resultante.
 $1256.51 \text{ m}^2; 3071.37 \text{ m}^2; 8841.34 \text{ m}^3$

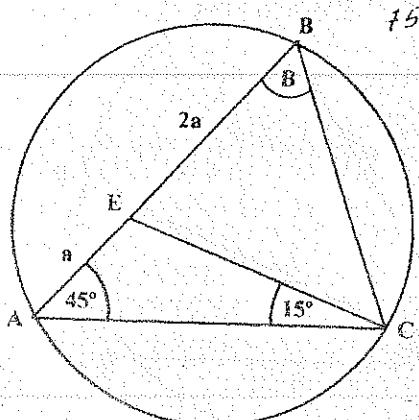
ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

PROPEDÉUTICO INGENIERÍA * EXAMEN SUSPENSOS - GEOMETRÍA *

FILA
A

- 1.- Calcular el valor del ángulo \hat{B} .

2 pts.



- 2.- Calcular el valor del segmento \overline{MF} .

3 pts.

2 pts.

3.30

2 pts.

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

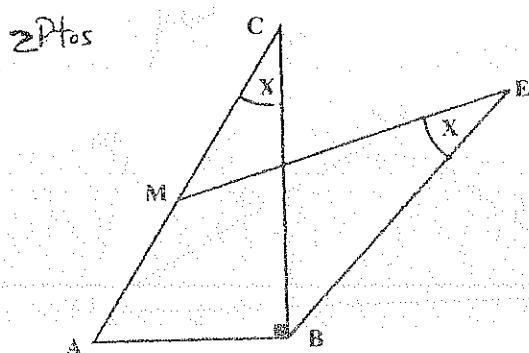
PROPEDÉUTICO INGENIERÍA * EXAMEN UBICACIÓN - GEOMETRÍA *

- 1.- H) .E es el ex-centro del $\triangle ABC$

$$AM = MC$$

- T) Calcular el valor de los ángulos X .

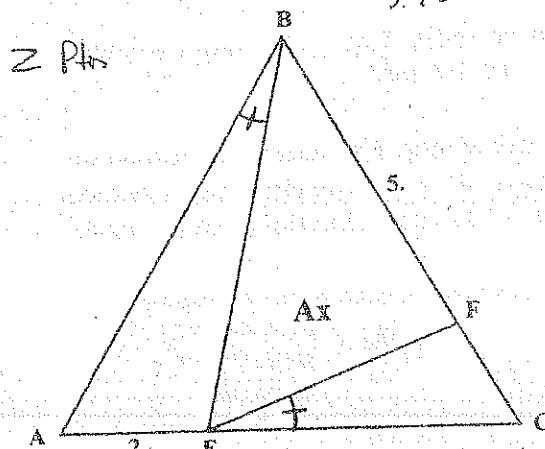
45°



- 3.- H) $\triangle ABC$ es Equilátero

- T) Calcular el valor del área A_{AX}

9.46



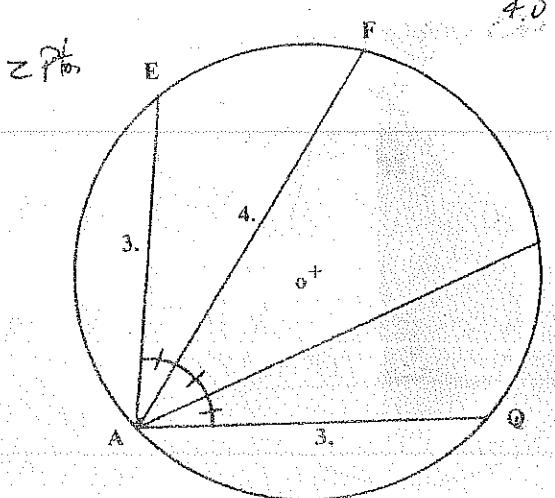
- 6.- En una pirámide regular de volumen 600 m^3 , su altura se divide en tres partes iguales, y por los puntos de división se trazan planos paralelos a su base. Calcular el volumen del sólido intermedio resultante.

155.56 m^3

3 Ptos.

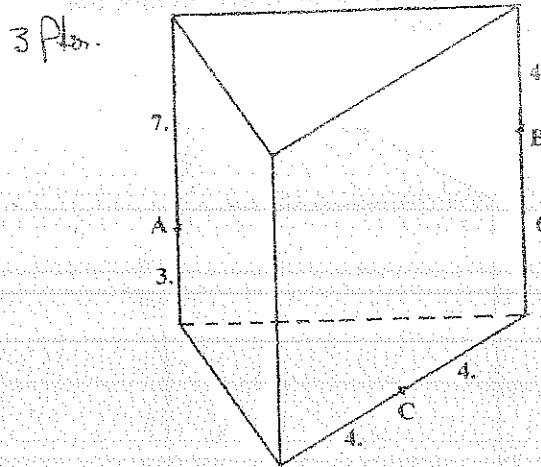
- 2.- Calcular el valor del segmento \overline{AP} .

4.0



- 4.- Dos círculos de radios 9 m. y 12 m. son ortogonales. Calcular la medida de su tangente común exterior.

- 5.- En el prisma triangular regular, calcular el volumen de cada una de las partes en que lo divide la sección que determina el plano ABC.



- 7.- Un cilindro de revolución de radio 10 m. y altura 20 m. con su eje dispuesto horizontal, contiene un volumen de agua igual a los $3/5$ del volumen del cilindro. Calcular el valor de la superficie húmeda en el cilindro.

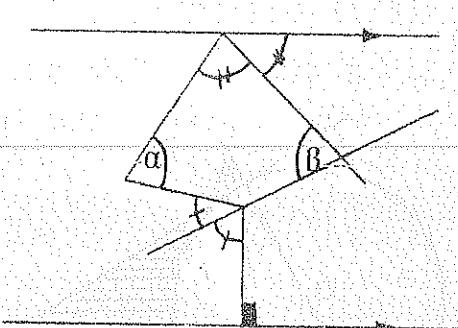
3 Pts.

- 8.- En un cono de revolución $R = 10 \text{ m.}$ y $h = 25 \text{ m.}$ se traza una sección paralela a la base por el punto medio de su altura. Calcular la relación en que se divide la superficie lateral.

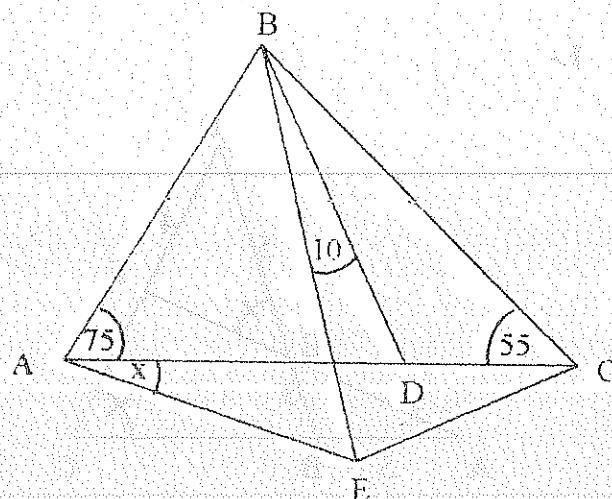
3 Pts.

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
GEOMETRÍA: PRIMER EXAMEN 2006-05-30

1.-



2.-



T) $\hat{\alpha} = 270 - 2\hat{\beta}$

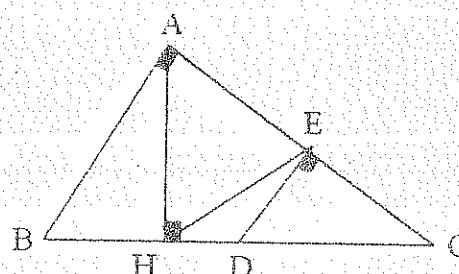
H) $AB=BD$

$BE=BC$

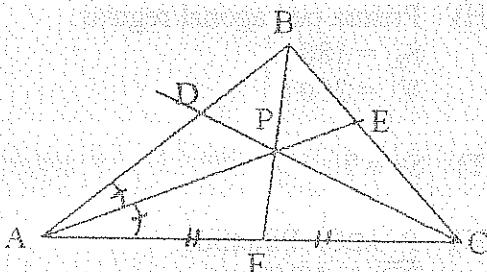
T) $\hat{x} = ?$

30°

3.-



4.-



H) $AB = 17u$

H) $AB = 6u$

$BD = 20.8u$

$AC = 8u$

$DC = 3 HD$

$EP = 1.5u$

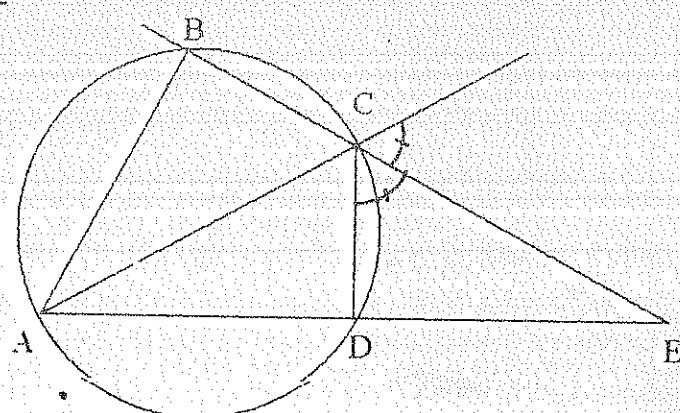
T) $HE = ?$

T) $A_{\Delta PEC} = ?$

$4.11 u^2$

$16.02 u$

5.-



H) $AB = 10u$

$BC = 5u$

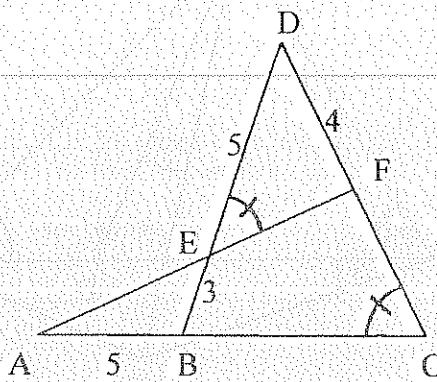
T) $CE = ?$

$15u$

NOTA: Todos los ejercicios tienen igual valor.

**ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
GEOMETRÍA: EXAMEN FINAL 2006-08-04**

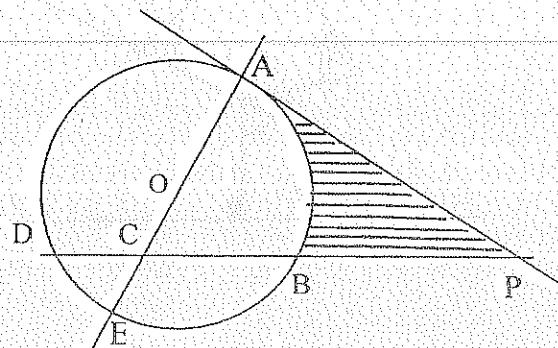
1.-



T) $A_{\Delta AEB} = ?$

7.39

2.-



H) \overline{AP} tangente ; $DC = 3 \text{ u.};$

$CB = 4 \text{ u.}; BC = 2,4 \text{ u.}$

T) $A_{\text{shaded}} = ?$ *11.29 u.*

- 3.- H) Prisma pentagonal regular.
 $S_L = 180 \text{ u}^2$
 $V = 250 \text{ u}^3$

T) $S_T = ?$

- 4.- H) P- ABCD Pirámide.
 $\overline{PD} \perp ABCD$
ABCD cuadrado
 $AF = FB = BG = GC = 12 \text{ u.}$
 $PE = ED = 20 \text{ u.}$

- T) Superficie de la sección que pasa por E, F y G
Relación de los volúmenes formados al construir la sección.

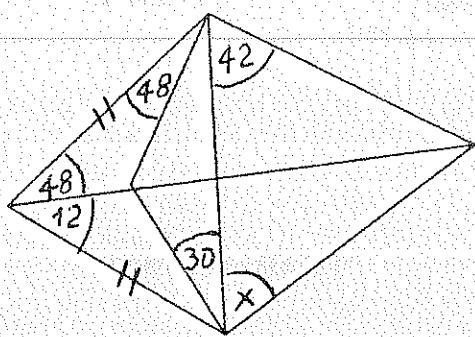
- 5.- H) Tronco de cono de revolución
Generatriz = 17 u.
 $S_L = 544\pi \text{ u}^2$
 $S_T = 1088\pi \text{ u}^2$

T) $V = ?$

NOTA: Todos los ejercicios tienen igual valor

**ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
GEOMETRÍA: EXAMEN SUPLETORIO 2006-08-14**

1.-



T) $\angle X = ?$ (3 puntos)

96°

2.- H) ΔABC rectángulo

$$\angle A = 90^\circ$$

 \overline{AD} bisectriz $\angle A$

$$A_{\Delta ADC} = 12 \text{ u}^2$$

$$AB = 4 \text{ u.}$$

T) $A_{\Delta ABD} = ?$ (3.5 puntos)

$$5.49 \text{ u}^2$$

3.- Por el vértice A de un triángulo escaleno ABC y los pies de la mediana y la bisectriz relativas al vértice A, se hace pasar un círculo que corte a \overline{AB} y \overline{AC} en P y Q.
Demostrar que $BP = CQ$ (3.5 puntos)

4.- Los planos P y Q de arista AB forman un diedro de 35° . Un punto M situado en el plano P dista de A y de B 7u. Si el ángulo entre \overline{MA} y el plano Q es 32° . Calcular la proyección del ΔAMB en el plano Q. (3.5 puntos) 14.16 u^2

5.- Un recipiente está compuesto de un cilindro de revolución de dimensiones $R = 15 \text{ u.}$, $h = 10 \text{ u.}$ y un cono de revolución de dimensiones $R = 15 \text{ u.}$ y $h = 20 \text{ u.}$ contiene agua en un volumen igual a los $5/7$ del volumen del recipiente. Calcular la altura del líquido si está apoyado en la base del cilindro. (3.5 puntos) 12.12 u

6.- H) Tronco de pirámide pentagonal regular

$$\text{Apotema} = 17 \text{ u.}$$

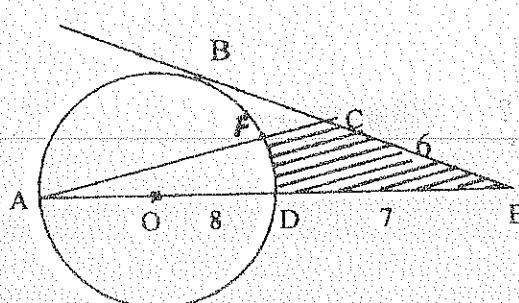
$$S_L = 1632 \text{ u}^2$$

$$S_T = 3264 \text{ u}^2$$

T) $V = ?$ 6557.46 u^3 (3.0 puntos)

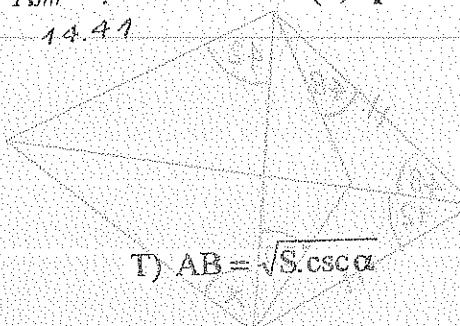
**ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL
GEOMETRÍA: EXAMEN DE UBICACIÓN AL 2006-08-22**

1.-

H) \overline{BE} TangenteT) $A_{III} = ?$

(2,5 puntos)

14.4.1

T) $AB = \sqrt{S \csc \alpha}$

2.- H) ABCD Trapecio isósceles circunscriptible

AD base mayor

BC base menor

 $\angle B = \alpha$ $A_{ABCD} = S$

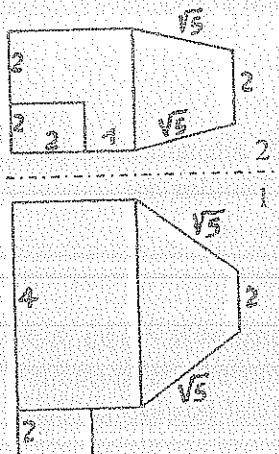
(2,5 puntos)

3.- Un cilindro de revolución de $R = 6$ u. y $h = 20$ u. está dispuesto horizontalmente y contiene agua, si la superficie húmeda es $554,58$ u². Calcular el volumen de agua.
(2,5 puntos)

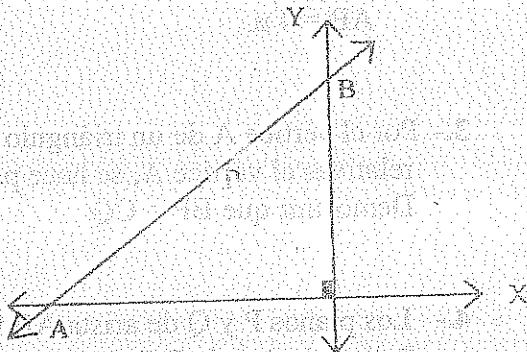
4.- Dadas las vistas: frontal 2 y superior 1.

a) Dibujar el objeto; (2,0 puntos)

b) Calcular su volumen (3,0 puntos)



5.-



$$H) \frac{PB}{BA} = \frac{1}{2}; P(-3; 1)$$

T) Ecuación de AB

$$x - 3y + 6 = 0$$

(2,5 puntos)

6.- H) ΔABC

$$AB: 3X - Y - 3 = 0$$

$$BC: X - 3Y - 25 = 0$$

$$CA: 3X + Y - 15 = 0$$

T) Ecuación de la circunferencia ex inscrita al triángulo ABC. (Tangente al lado AB)

$$(2,5 \text{ puntos}) \quad (x+17)^2 + (y-6)^2 = 360$$

7.- H) Cónica

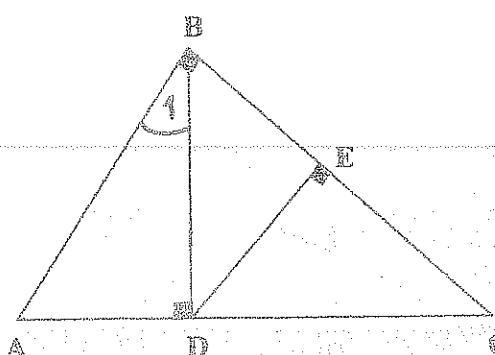
P (1, -2) elemento de la cónica

Foco F (-2; 2), Directriz: $2X - Y - 1 = 0$

T) Ecuación de la cónica

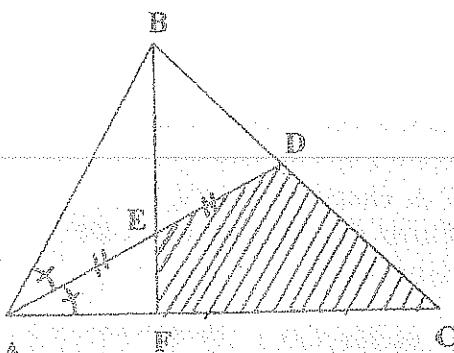
(2,5 puntos)

1)



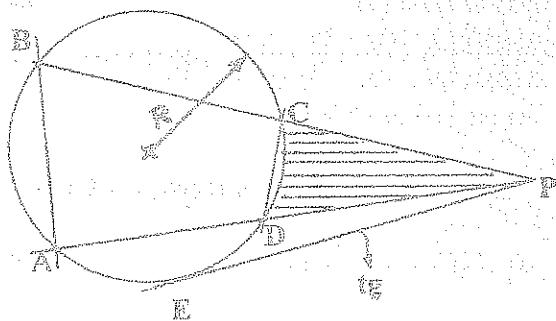
- H) $AD = 14,40 \text{ u.}$ T) $\angle 1 = ?$ 34°
 $DE = 15,36 \text{ u.}$ S) $\triangle ABC = ?$ $382,63 \text{ u.}$

2)



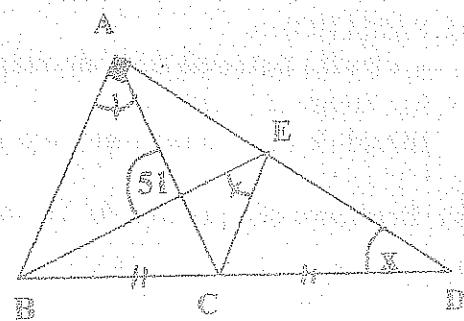
- H) $AB = 6 \text{ u.}$ T) $AF = ?$ $2,4 \text{ u.}$
 $AC = 8 \text{ u.}$ S) $\text{Simm} = ?$ $10,32 \text{ u.}$
 $EF = 1,52 \text{ u.}$

3)



- H) $PE = 29,93 \text{ u.}$ T) $R = ?$ $25,32 \text{ u.}$
 $AD = 40 \text{ u.}$ S) $\text{Simm} = ?$ $44,72 \text{ u.}$
 $BA = 30 \text{ u.}$
 $CD = 7,5 \text{ u.}$

4)

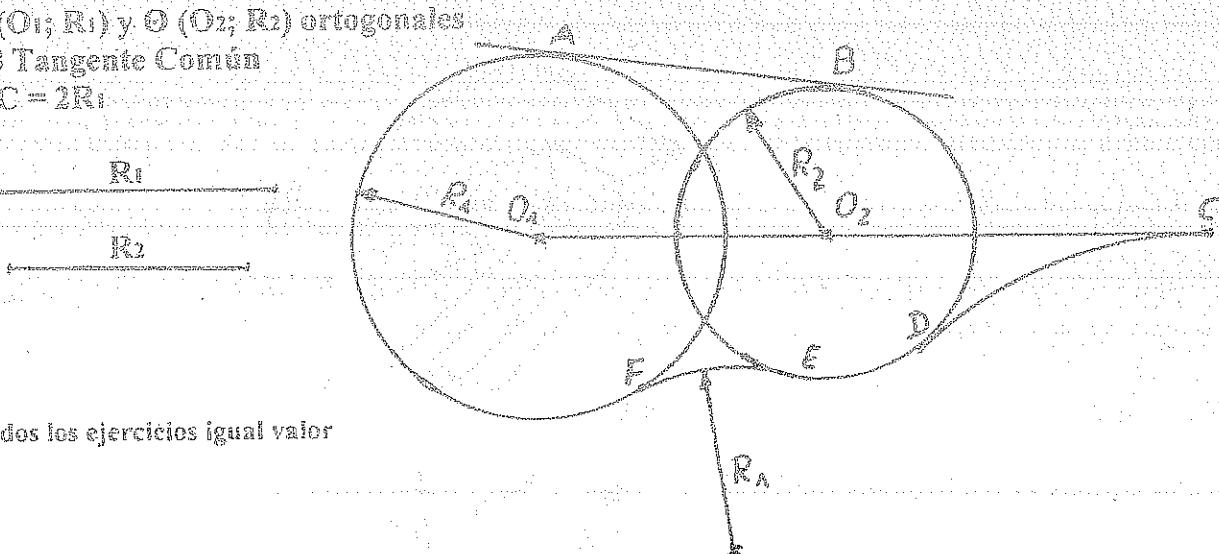


- T) $\triangle ABC$ inscriptible
 $\angle X = ?$ 17°

5) Reproducir el siguiente gráfico

- H) $O(O_1; R_1)$ y $O(O_2; R_2)$ ortogonales
 AB Tangente Común

$$O_2C = 2R_1$$



Nota: Todos los ejercicios igual valor

GEOMETRÍA Y DIBUJO

EXAMEN FINAL

02-2007

1)

H) ABCD RECTÁNGULO

$$A(-6; 6); B(-3; -3)$$

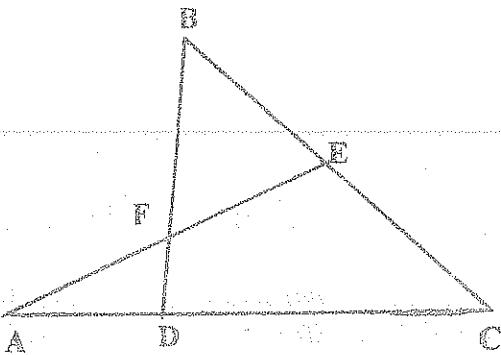
P es elemento del eje Y, y

Punto de intersección de las diagonales

$$T) \text{ Ecuación } CB \quad 3x + y - 18 = 0$$

(1.0)

2)



$$H) BE = EC = 4 \text{ u.} \quad T) \text{ SA } BFE = ?$$

$$DA = 3 \text{ u.}; AF = FE$$

$$BF = 6 \text{ u.}$$

(0.5)

$$9.344$$

3)

H) PARÁBOLA

$$A(2; 8) \text{ Extremo del lado recto}$$

$$\text{Eje focal: } 2x - 3y + 7 = 0$$

Directriz a la derecha del lado recto

$$T) \text{ Ecuación de la parábola} \quad (1.0)$$

$$4x^2 - 12xy + 9y^2 - 50x - 94y + 452 = 0$$

5)

H) ABCDE - A'B'C'D'E' PRISMA REGULAR

$$BE' = 13 \text{ u.}$$

La proyección de BE' en la base es 5 u.

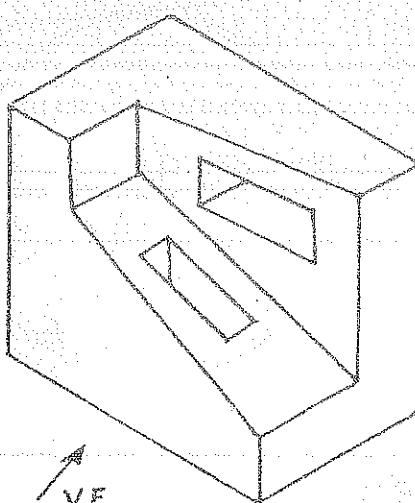
T) Ecuación de la Hipérbola (1.0)

$$\frac{(y-5)^2}{16} - \frac{(x-4)^2}{9} = 1$$

(1.0)

6) Dibujar la vista frontal, la vista superior y la vista lateral derecha del siguiente sólido.

(0.5)



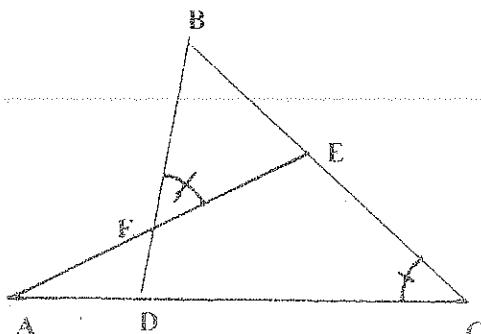
ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

GEOMETRÍA Y DIBUJO

EXAMEN SUPLETORIO

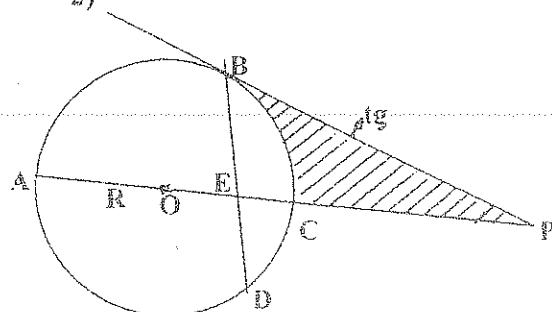
02-2007

1)



- H) $AD = 5 \text{ u.}$ T) $S \triangle FBE = ?$
 $DF = 3 \text{ u.}$ 4.39 u^2
 $FE = 3,75 \text{ u.}$
 $EC = 6 \text{ u.}$

2)



- H) $EB = 7 \text{ u.}$ T) $S \triangle BCP = ?$
 $ED = 4 \text{ u.}$ 25.44
 $R = 8 \text{ u.}$
 $PC = 9 \text{ u.}$

- 3) La distancia del origen de coordenadas a una recta es 3 u., si esta recta forma con los ejes de coordenadas un triángulo de área $75/8$. Determinar la ecuación de la recta.

$$4x + 3y + 15 = 0 ; 3x + 4y + 15 = 0$$

- 4) H) $\odot(O_1; R_1) \text{ Y } \odot(O_2; R_2) \text{ ORTOGONALES}$ T) Ecuación del $\odot(O_2; R_2)$
 $O_1O_2 = 17 \text{ u.}$
 $O_1O_2: 8X - 15Y = 0$
 $\odot(O_1; R_1): X^2 + Y^2 = 64$

- 5) H) $F_1(4; 13)$

A (4; -19) extremo eje mayor
 Excentricidad = $15/17$
 Eje menor entre A y F_1

- T) Ecuación de la elipse

$$\frac{(x-4)^2}{64} + \frac{(y+2)^2}{289} = 1$$

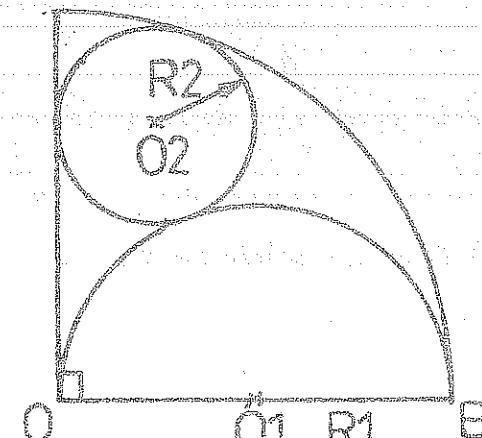
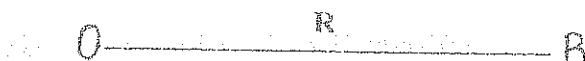
- 6) H) ABCDE - A'B'C'D'E' TRONCO DE PIRÁMIDE REGULAR

Apotema base mayor = 20 u.; Apotema base menor = 12 u.

Apotema del tronco de pirámide = 10 u.

- T) Volumen del tronco 5696.10 u^3

- 7) Reproducir el siguiente gráfico si se conoce el radio R .



Nota: Los ejercicios 1, 2, 3, 4, 5, 6, tienen el valor 3.0 ; el ejercicio 7 tiene el valor de 2.0 puntos.

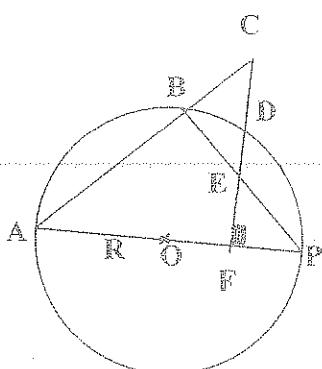
ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

GEOMETRÍA Y DIBUJO

EXAMEN DE UBICACIÓN

02-2007

1)



D) $DF^2 = CF \times EF$

- 2) Calcular los lados de un trapezio isósceles, si los lados no paralelos y la base menor tienen igual longitud, su altura es 12 u. y la superficie 288 u². 16 u ; 33 u

3) H) A (5 ; 3)

T) ABCD Inscriptible

B (2 ; 6)

C (-6 ; 6)

D (-1 ; -9)

4) H) PARÁBOLA

T) Ecuación de la parábola

Vértice (-3 ; 1)

$$x^2 - 2xy + y^2 + 24x + 8y + 48 = 0$$

Extremo del lado recto A (-9 ; 3)

Directriz a la derecha del lado recto

5) H) Asintota: 13X - 9Y - 38 = 0

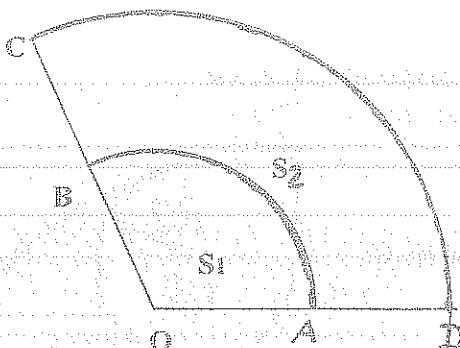
T) Ecuación de la Hipérbola

Asintota: X + 3Y - 14 = 0

$$13x^2 + 30xy - 27y^2 - 228x + 12y - 352 = 0$$

Directriz: 3X + Y - 26 = 0

6)



H) $\widehat{CD} = 10\pi u$

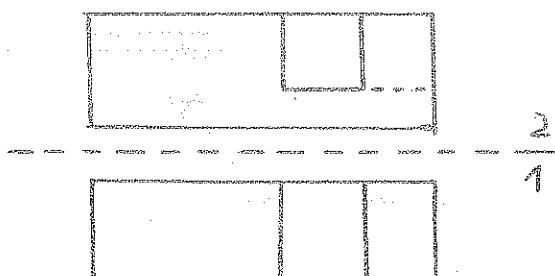
S1 = 15π u²

AD = 6 u

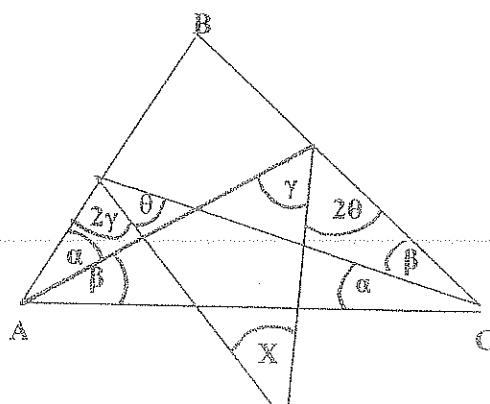
T) Volumen del tronco de cono que

Se puede construir con S2

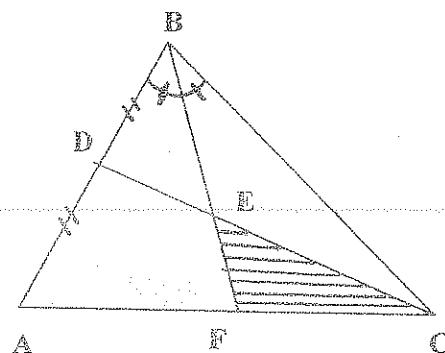
- 7) Dibujar el sólido correspondiente si se conoce: la vista frontal (2), y la vista superior (1)



Nota: Los ejercicios 1, 2, 3, 4, 5, 6, tienen el valor 3.0 ; el ejercicio 7, el valor de 2.0 puntos.

2) $\triangle ABC$ 

$$\angle X = ? \quad 60^\circ$$



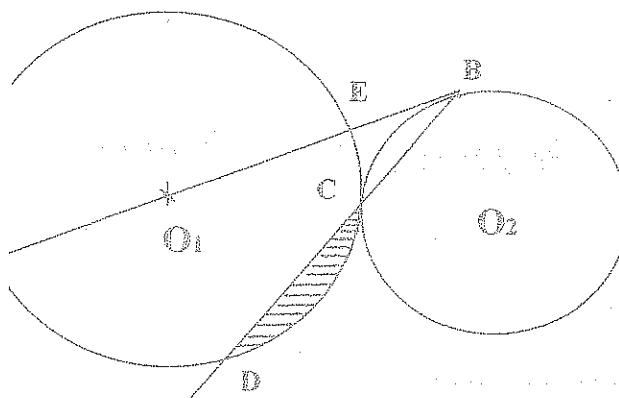
H) $AB = BF = 6 \text{ u.}$ T) $S_{\square\!/\!\!/} = ? \quad 4.22$
 $BC = 8 \text{ u.}$

H) O(O₁, R₁) tang a O(O₂, R₂) en C.AB tangente a O(O₂, R₂) en B

$$R_1 = 11 \text{ u.}$$

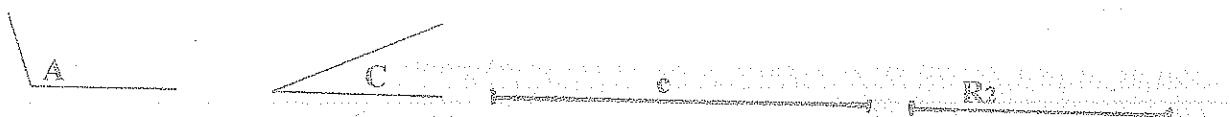
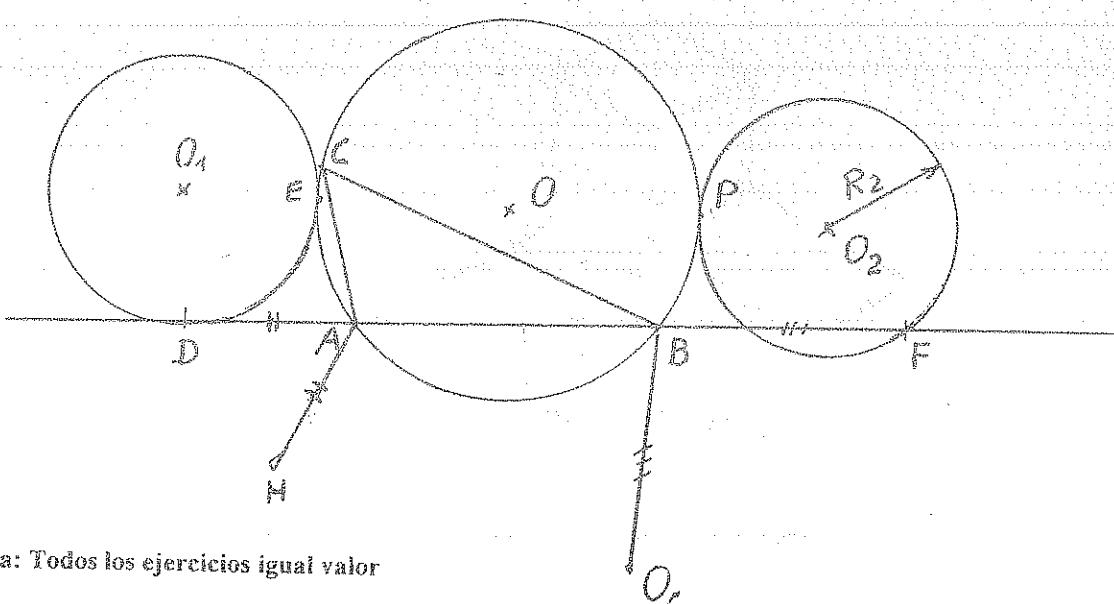
$$R_2 = 5 \text{ u.}$$

T) Área $\square\!/\!\!/ = ? \quad 18.43 \text{ u}^2$



4) Calcular la longitud del segmento que une los puntos de tangencia, del círculo inscrito en un trapezoide isósceles con los lados no paralelos, si las bases miden: 6 y 15 u. 8.57 u.

Reproducir el siguiente gráfico

H) ORTOCENTRO $\triangle ABC$; $AD = AH$; $\overline{BO_c} = \overline{BF}$; O_c EXCENTRO $\triangle ABC$ 

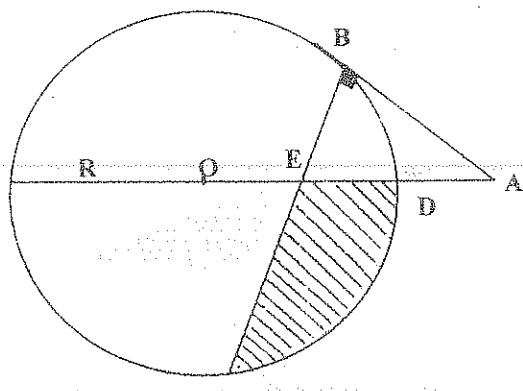
ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

GEOMETRÍA Y DIBUJO

EXAMEN FINAL

JULIO / 2007

1.-



H) $ED = DA$
 $R = 9 \text{ u.}$
 $OE = 4 \text{ u.}$
T) $S_{\text{III}} = ?$ 54.77 u^2

(1.0)

2.- H) ABCD TRAPECIO ISÓSCELES

$$AD: 5X + 6Y + 14 = 0 \text{ (BASE MAYOR)}$$

$$C(4; 3/2)$$

$$AB: 3X - 5Y + 17 = 0$$

T) ECUACIÓN DE CD

(1.0)

$$666X - 25Y - 2259 = 0$$

3.- H) HIPÉRBOLA

$$e = 5/4$$

$$\text{DIRECTRIZ: } 3X + Y - 26 = 0$$

$$\text{VÉRTICE A (8; 4)}$$

CENTRO A LA IZQUIERDA DIRECTRIZ

T) ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA

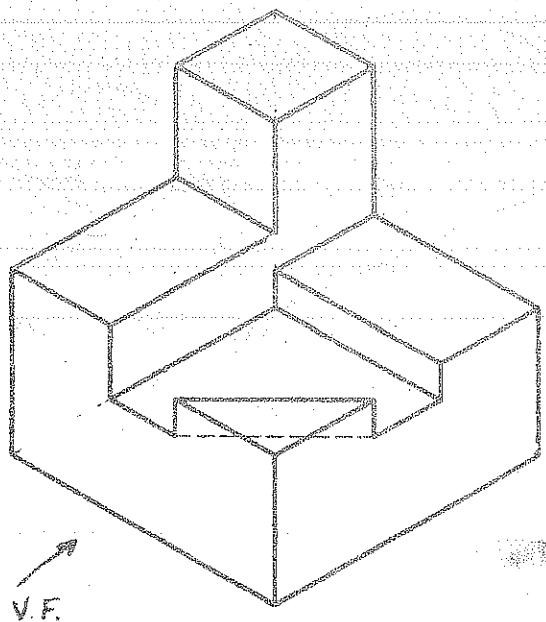
(1.0)

$$7X^2 + 18XY - 17Y^2 - 124X + 12Y + 192 = 0$$

4.- En un tronco de pirámide pentagonal regular de dimensiones: arista de la base mayor 10 u., arista de la base menor 6 u., altura 12 u., apoyado en su base mayor, se construye una sección paralela a las bases formando dos sólidos equivalentes. Calcular las áreas laterales de los dos sólidos formados. (1.0)

5. Dibujar la proyección en el espacio y las vistas principales de un trapecio rectángulo paralelo al plano de perfil. (0.5)

6.- Dibujar las vistas: frontal, superior y lateral derecha del siguiente sólido. (0.5)

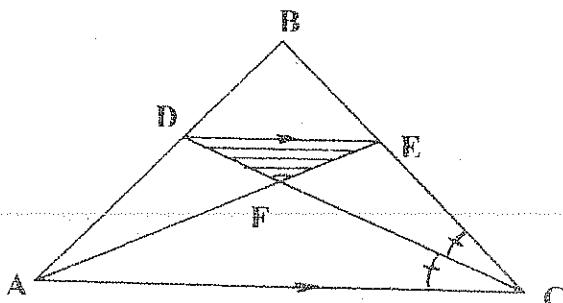


ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

GEOMETRÍA Y DIBUJO

EXAMEN SUPLETORIO

AGOSTO / 2007



H) $BC = 6 \text{ u.}$

AC = 4 u.

AF = 2 u.

T) $S_{\text{III}} = ? \quad 0.86 \text{ u}^2$

(4.0)

2.- H) ABCD RECTÁNGULO

A (4 ; 2); B(1 ; 8)

S_{ABCD} = 15

T) ECUACIÓN DE CD = ?

2x + y - 6 = 0

(4.0) 2x + y - 15 = 0

3.- H) ELIPSE

VÉRTICE A (8/3 ; -1/3) EJE MAYOR

c = 1/2; DIRECTRIZ: X + Y - 1 = 0

(Eje menor a la derecha del vértice)

T) ECUACIÓN ELIPSE = ?

7x^2 - 2xy + 7y^2 - 4x + 2y + 71 = 0

(4.0)

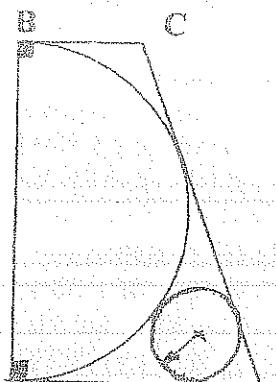
4.- En un tronco de pirámide pentagonal regular se construye una sección paralela a las bases, formando dos sólidos de áreas laterales iguales. Calcular los volúmenes de los dos sólidos formados. Dimensiones: lado de la base mayor 10 u.; lado de la base menor 6u.; altura del tronco 5u. (4.0)

5.- Reproducir el siguiente gráfico, utilizando los siguientes datos:

BC: _____

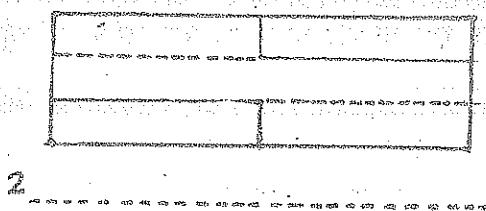
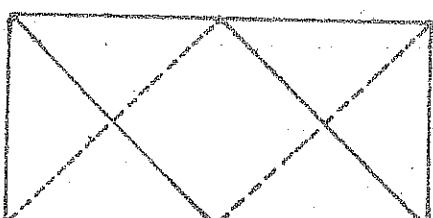
AB: _____

(2.0)



6.- Dadas las vistas: Frontal 2; Superior 1. Dibujar el sólido correspondiente

(2.0)

2
1

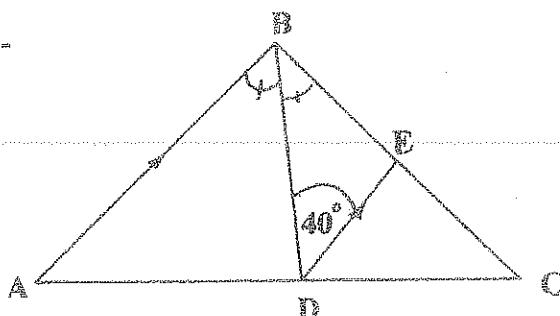
ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

GEOMETRÍA Y DIBUJO

EXAMEN DE UBICACIÓN

AGOSTO / 2007

1.-



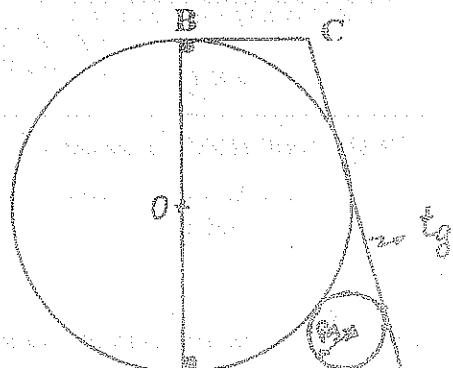
D) $BA = 9 \text{ u.}$

B) $BC = 10 \text{ u.}$

T) $\text{S} \triangle DEC = ? \quad 12,28 \text{ u}^2$

(3.0)

2.-



D) $AB = 12 \text{ u.}$

C) $CD = 13 \text{ u.}$

T) $R_1 = ? \quad 2,47 \text{ u.}$

(3.0)

3.-D) ABCD ROMBO

A(1; 3); B(10; 5)

S_{ABCD} = 40 u²

T) ECUACIÓN DE LA CIRCUNFERENCIA
INSCRITA EN EL ROMBO

(3.0) $(x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{400}{35}$

4.-D) PARÁBOLA

A(1; 1) ELEMENTO DIRECTRIZ

B(-9; 3) ELEMENTO DE LA PARÁBOLA

F(-3; -1) FOCO

T) ECUACIÓN PARÁBOLA

$x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 8y + 48 = 0$

(3.0)

5.-D) HIPÉRBOLA

$13x - 9y - 38 = 0$ ASINTOTA

$x + 3y - 14 = 0$ ASÍNTOTA

A(2; 2) VÉRTICE

T) FOCOS DE LA HIPÉRBOLA

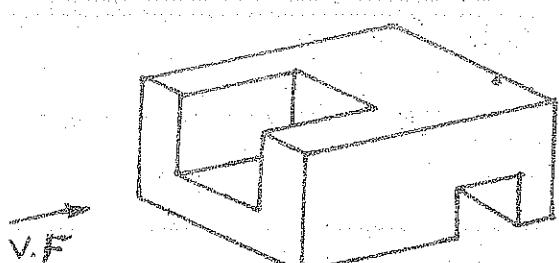
$F_1\left(\frac{35}{4}; \frac{11}{4}\right)$

(3.0)

$F_2\left(\frac{5}{4}; \frac{7}{4}\right)$

6.- Un tronco de cono de revolución apoyado en su base mayor contiene agua, si la superficie húmeda es 1113.76 u² calcular la altura del líquido. Dimensiones del tronco de cono: R = 12 u., r = 4 u., h = 14 u. 11,56 u. (3.0)

7.- Dibujar las viñetas: Frontal, Superior y Lateral Derecha del siguiente objeto (2.0)

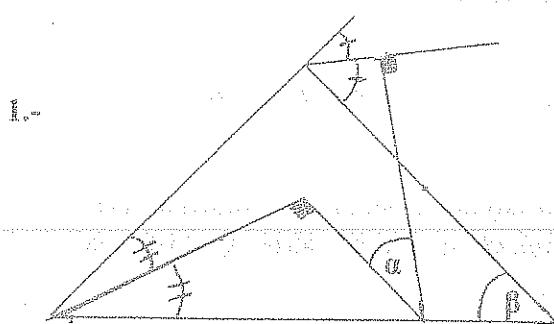


ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

GEOMETRÍA Y DIBUJO

PRIMER EXAMEN

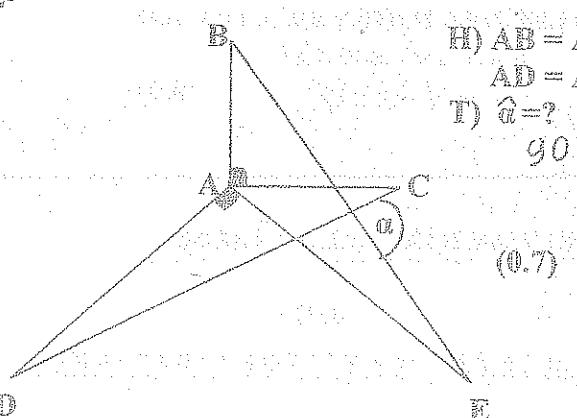
NOVIEMBRE / 2007



T) $\hat{\beta} = 2\hat{\alpha}$

(0.7)

2.-



H) $AB = AC$

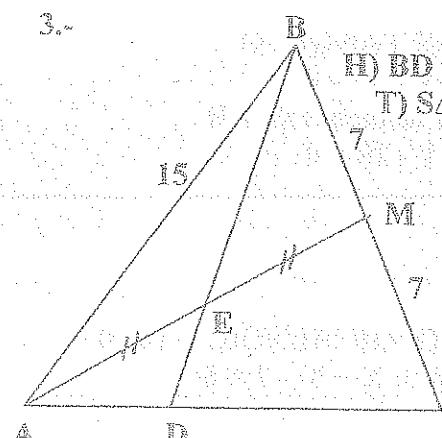
A) $AD = AE$

T) $\hat{\alpha} = ?$

90°

(0.7)

3.-



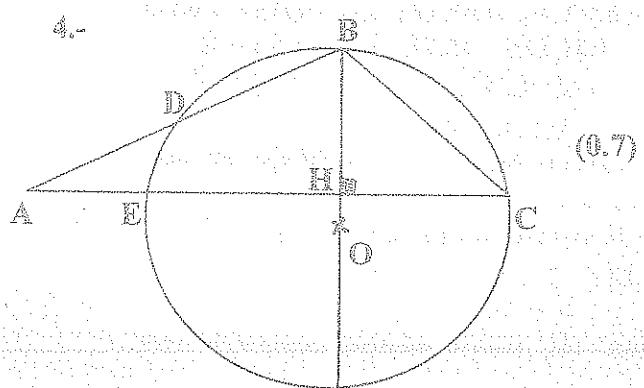
H) $BD = 13.76u.$

T) $S_{\triangle ABD} = ?$

24,18 u^2

(0.7)

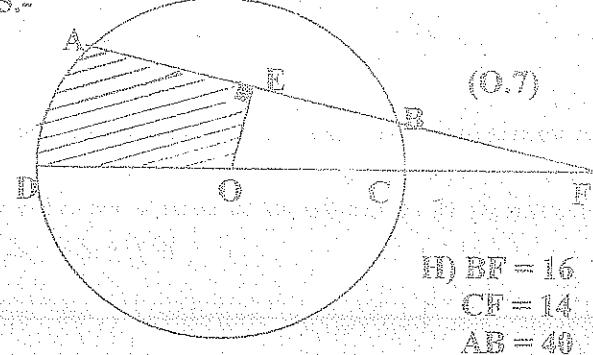
4.-



T) $BC^2 = AB \times DB$

(0.7)

5.-

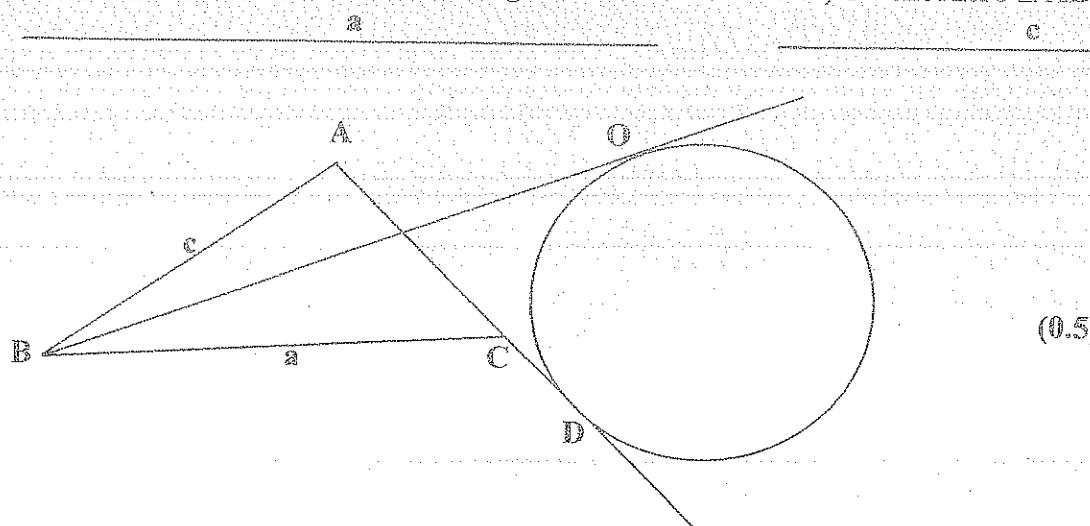


H) $BF = 16$

C) $CF = 14$

A) $AB = 40$

T) $S_{\square} = ?$

274,47 u^2 6.- Reproducir el siguiente gráfico con los siguientes datos: $\hat{A} = 90^\circ$, O ex centro $\triangle ABC$ 

(0.5)

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

GEOMETRÍA Y DIBUJO

EXAMEN FINAL

ENERO / 2008

- 1.- Desde un punto interior de un polígono regular de n lados, se trazan perpendiculares a todos sus lados, si la suma de estas perpendiculares es a , cuánto mide su apotema.
 (0.7) a/n

2.- II) ABCD RECTÁNGULO

AC: $X + 4Y - 10 = 0$

P (1; 1) es elemento de AD

DB: $4X + Y - 25 = 0$

T) ECUACIONES DE CD Y AD

3X - 3Y - 40 = 0

X + Y - 2 = 0 (0.7)

3.- II) ELIPSE

$e = 1/2$

EXTREMO EJE MENOR: A (4, 4)

EJE FOCAL: $X + Y - 2 = 0$

T) ECUACIÓN DE LA ELIPSE

(0.7)

7X² + 2XY + 7Y² - 16X - 16Y - 128 = 0

4.- II) $16X^2 - 9Y^2 + 96X + 72Y + 144 = 0$

T) ECUACIÓN DE LA DIRECTRIZ

FOCOS (0.7) $5Y - 36 = 0$

$F_1(-3, 9)$ $5Y - 4 = 0$

$F_2(-3, -1)$

- 5.- Por traslación de ejes, el nuevo origen de una cónica es (2; 4) y luego de una rotación con un ángulo de 45° su ecuación se transformó en $(X')^2 - (Y')^2 = 16$. Determinar la ecuación de la cónica en el sistema de coordenadas XY. (0.7)

$XY - 2X - 2Y = 0$

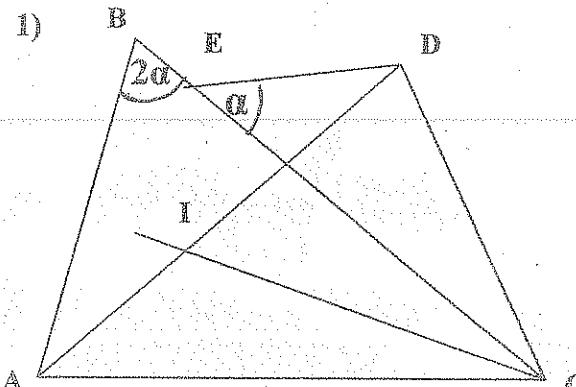
6. Dibujar un heptágono regular si su apotema es: _____
 (0.5)

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

GEOMETRIA Y DIBUJO

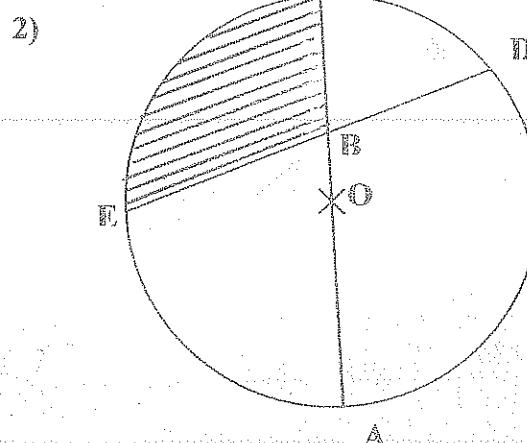
EXAMEN SUPLETORIO

02-2008

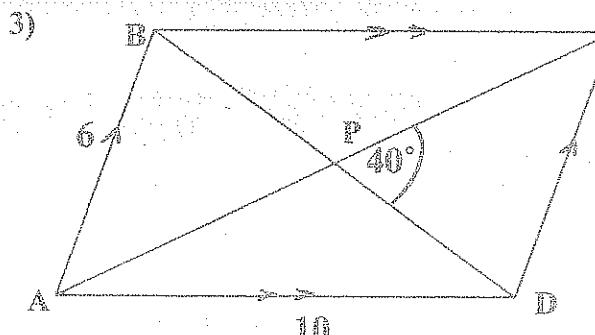


- H) INCENTRO $\triangle ABC$ (3)
E EXCENTRO $\triangle IDC$

T) $\angle \alpha = ?$ 30°



- H) $OB = 8 \text{ u.}$ (3)
 $BD = 4,5 \text{ u.}$
ARCO $\widehat{AD} = 3$ ARCO \widehat{EC}
T) $A//I = ?$ $13,56 \text{ u}^2$



T) $S_{ABCD} = ?$ (3) $26,85$

- 5) ID PARABOLA

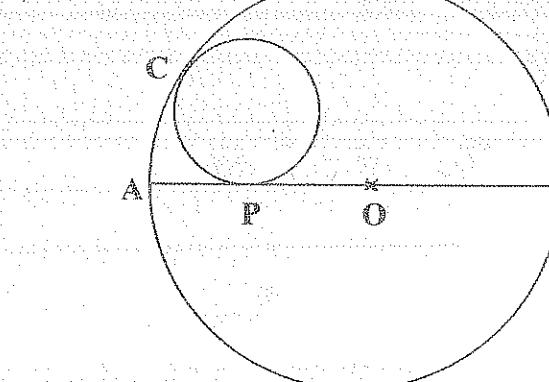
F(5; 1)

V(3; 2) (3)

- T) ECUACION PARABOLA

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 54x - 8y + 129 = 0$$

7)



- H) ABCD ROMBO

CF = FD

AF \cap BD = E (2; -5)

F(7; -14)

$\angle DEF = 45^\circ$

- T) ECUACIONES AC Y BD

(3)

$$7x - 2y - 24 = 0$$

$$2x + 7y - 15 = 0$$

- 6) ID CONICA: $XY - 2Y - 4X = 0$

- T) FOCOS = ? (3)

$$(6; 8), (-2; 0)$$

- H) $AP = \frac{2}{5} AB$ (2)

A _____ B

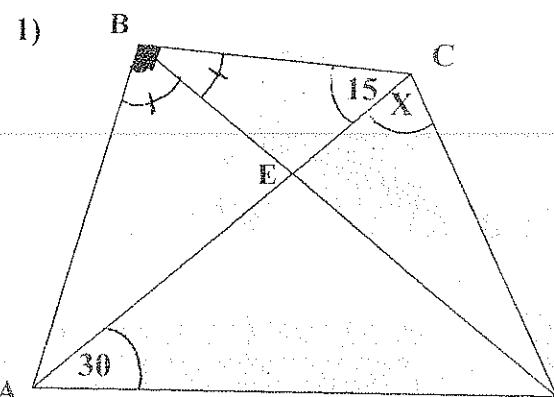
- T) REPRODUCIR EL GRAFICO

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

GEOMETRIA Y DIBUJO

EXAMEN DE UBICACION

02-2008



T) $\hat{x} = ?$ (3)
 15°

- 3) H) ABCD ROMBO
 $CF = FD$
 $AF \cap BD = E$
 $FE = 3 \text{ u.}$
 $\hat{DEF} = 40^\circ$

T) $AABCD = ?$ (3)

5) $106,37 \text{ u}^2$

H) $e = 1/2$

EXTREMO EJE MAYOR A (4;4)

EJE FOCAL: $x+y-2=0$

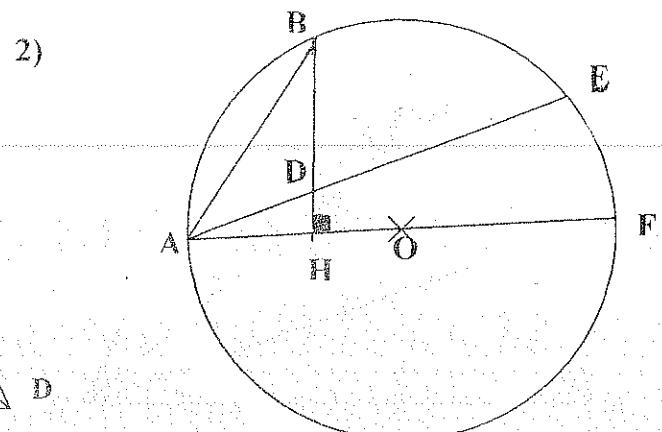
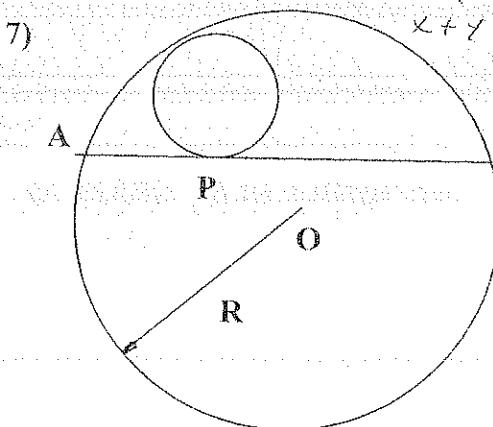
T) ECUACION DE LA CONICA (3)

$$\begin{aligned} 7x^2 + 14xy + 7y^2 - 12x - 12y - 96 &= 0 \\ 7x^2 - 2xy + 7y^2 - 12x - 12y - 96 &= 0 \end{aligned}$$

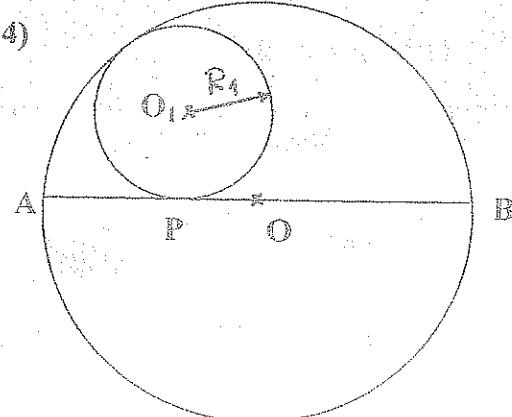
6) H) CONICA: $xy - 4 = 0$

T) ECUACIONES DE LAS DIRECTRICES (3)

$$\begin{aligned} x + y + 2\sqrt{2} &= 0 \\ x + y - 2\sqrt{2} &= 0 \end{aligned}$$



T) $AB^2 = AE \cdot AD$ (3)



H) $AP = \frac{1}{4} AB$

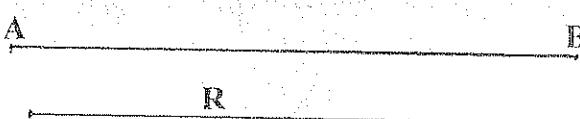
A(-2; -10); B(10; 6) (3)

T) ECUACION O(O₁; R₁)

$$\left(x + \frac{15}{4}\right)^2 + (y + 2)^2 = \frac{225}{16}$$

$$(x+2)^2 + (y+\frac{15}{4})^2 = \frac{225}{16}$$

H) $AP = \frac{2}{5} AB$



T) REPRODUCIR EL GRÁFICO (2)

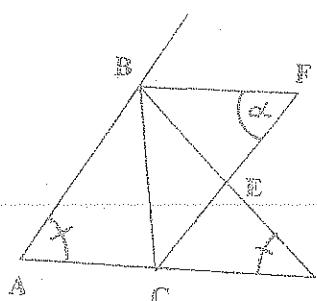
ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

GEOMETRÍA Y DIBUJO

PRIMER EXAMEN

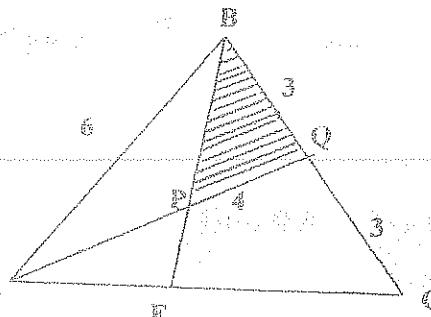
14-05-2008

1)



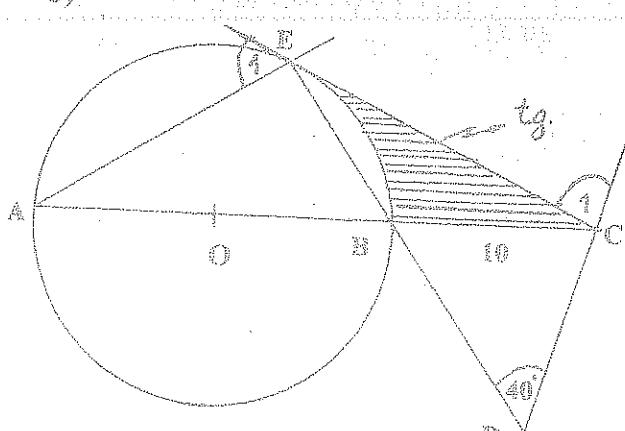
- D) F ex centro $\triangle ABC$
 E circuncentro $\triangle BCF$
 T) $\hat{a} = ? \quad 54^\circ$

2)



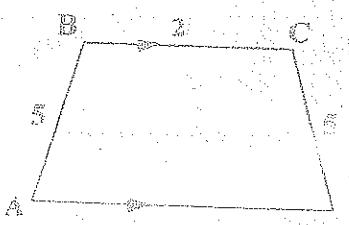
- H) $EC = 2 AE$
 T) $AH = ? \quad 3.82$

3)



- T) $AH = ? \quad 54.59$

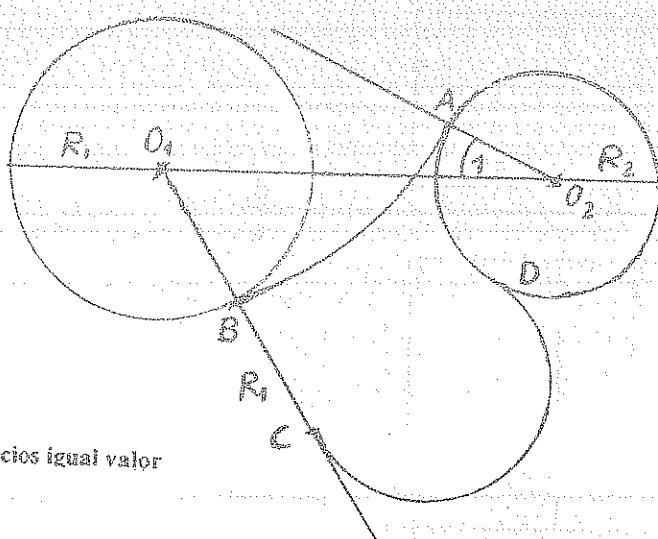
4)



- H) $AABCD = 20 \text{ u}^2$
 T) $AD = ? \quad 8 \text{ u}$

5) REPRODUCIR EL SIGUIENTE GRÁFICO

H)



Nota: Todos los ejercicios igual valor

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

GEOMETRIA Y DIBUJO

EXAMEN FINAL

07-2008

1)

H) A (-4 ; -3); B(6 ; 12)

C (8; 0)

D es elemento de \overline{AB}

E es elemento de \overline{BC}

$DE \parallel AC$

$$\frac{S_{\Delta BDE}}{S_{\Delta ABC}} = \frac{9}{25}$$

T) Ecuación \overline{DE}

$$x - 4y + 12 = 0$$

2)

H) Centro C $(\frac{10}{3}; \frac{1}{3})$

Directriz: $x + y - 1 = 0$

$$e = \frac{1}{2}$$

T) Ecuación de la cónica
en el sistema x - y

$$7x^2 - 2xy + 7y^2 - 46x + 2y + 71 = 0$$

3)

H) $17x^2 + 3xy - 7y^2 - 75 = 0$

T) Focos en el sistema x - y (0.7)

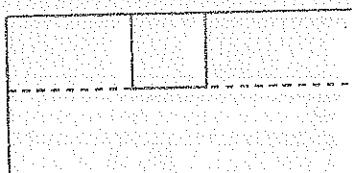
$$(3,86; 0,24), (-3,86; -0,24)$$

4)

En una pirámide pentagonal regular, apotema de la base es 18u, apotema de la pirámide 30u. Calcular el ángulo entre dos caras laterales. (0.7) $123,91^\circ$

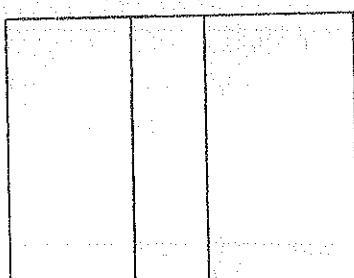
5) Dado un tronco de cono de revolución de dimensiones; R = 20u, h = 18u, r = 12u, apoyado en su base mayor. Se traza un plano paralelo a las bases dividiendo al tronco de cono en dos sólidos que tienen superficies laterales iguales. Determinar en qué relación están sus volúmenes. (0.7)

6) Dadas las vistas: Frontal 2, Superior 1 Dibujar el sólido correspondiente (0.5)



2

1



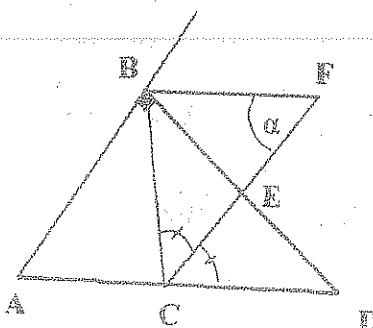
ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

GEOMETRIA Y DIBUJO

EXAMEN SUPLETORIO

08-2008

1)



- H) E circuncentro $\triangle BCF$
 $AB = BD$

T) $\alpha = ?$ (3,5)

2)

H) Centro C $(\frac{10}{3}; \frac{1}{3})$

Directriz: $x + y - 1 = 0$
 $e = 2$

- T) Ecuación de la cónica en el sistema $x - y$ (3,5)

(3,5)

- 3) Despues de hacer una rotación de $3,56^\circ$ se obtuvo la siguiente ecuación

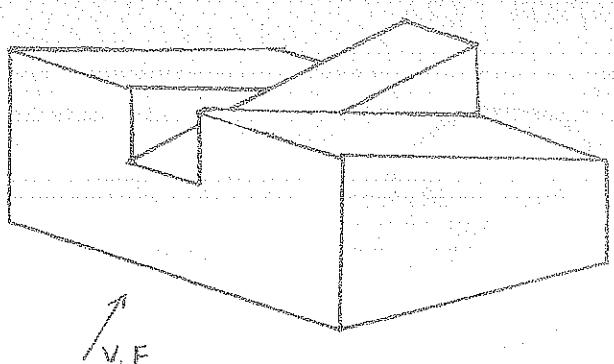
$$\frac{(x-1)^2}{4,36} - \frac{(y+1)^2}{10,58} = 1$$

Encontrar la ecuación de la cónica en el sistema $x - y$ (3,5)

- 4) En una pirámide pentagonal regular, apotema de la pirámide 30u, el ángulo entre dos caras laterales es $123,9^\circ$. Calcular el volumen de la pirámide (3,5)

- 5) Dado un tronco de cono de revolución de dimensiones; $R = 20u$, $h = 18u$, $r = 12u$, apoyado en su base mayor. Se traza un plano paralelo a las bases dividiendo al tronco de cono en dos sólidos equivalentes. Determinar en qué relación están sus áreas laterales. (3,5)

- 6) Dibujar la vista Frontal (0,5), la vista superior (0,5) y la vista lateral derecha (1,5). Del siguiente sólido.

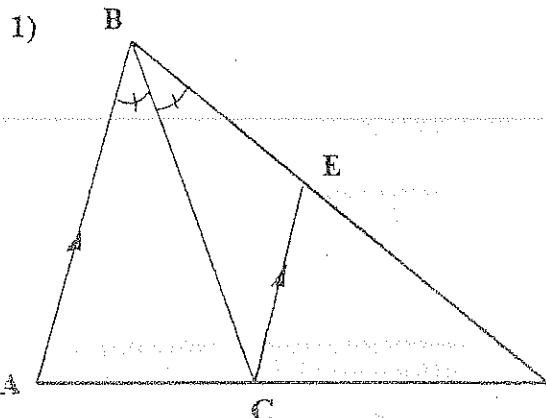


ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

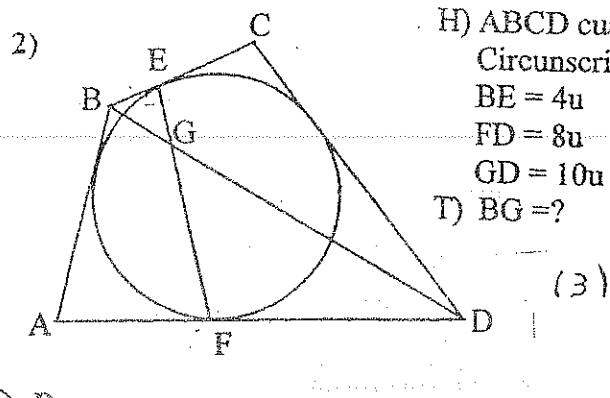
GEOMETRIA Y DIBUJO

EXAMEN DE UBICACION

08-2008



- H) $AB = 12 \text{ u.}$
 BD = 18 u.
 $S \triangle BCE = 25.53 \text{ u}^2$
 T) $S \triangle BCA = ?$ (3)



- H) ABCD cuadrilátero Circunscriptible
 $BE = 4\text{u}$
 $FD = 8\text{u}$
 $GD = 10\text{u}$
 T) $BG = ?$

(3)

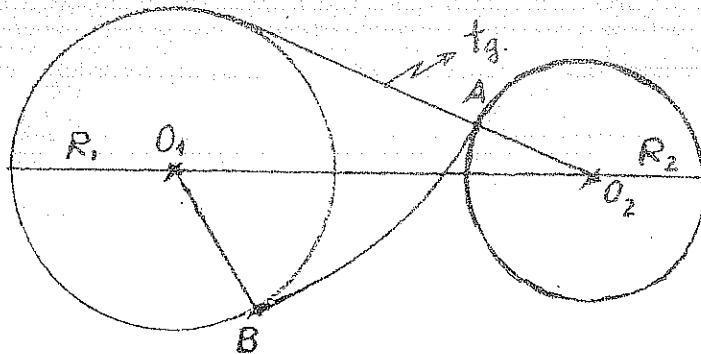
- 3) H) ABCD PARALELOGRAMO
 $\bar{AB}: X - 7Y + 39 = 0$
 $\bar{AD}: 5X - Y - 9 = 0$
 $\bar{AC} \cap \bar{BD} = P(6; 4)$
 T) ECUACIÓN DE BD (3)

- 4) H) PARÁBOLA
 $A(-6; 9) \in \text{DIRECTRIZ}$
 $F(2; 5)$
 $B(4; -1) \in \text{CURVA}$
 T) ECUACIÓN PARABOLA (3)

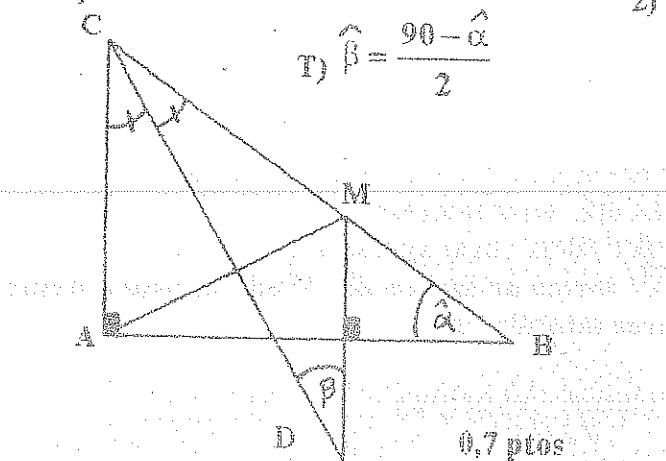
- 5) Per uno de los lados de la base inferior y por el vértice opuesto de la base superior de un prisma triangular regular, se traza una sección. El ángulo entre esta sección y la base inferior es 70° , el área de la sección 30 u^2 . Calcular el volumen del prisma. (3)
- 6.- Dado un tronco de pirámide cuadrangular regular, apoyado en su base mayor, de dimensiones: lado de la base mayor 20u , lado de la base menor 8u , apotema 10 u , contiene agua hasta una altura de 6u . Calcular el volumen de agua. (3)

7.- H)

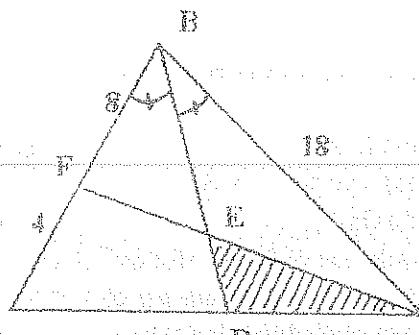
- T) REPRODUCIR EL SIGUIENTE GRÁFICO (2)



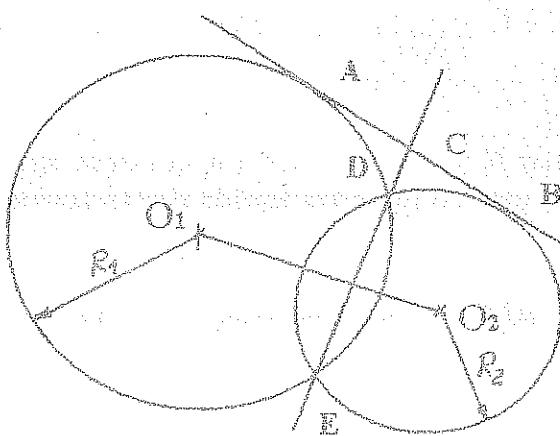
1)



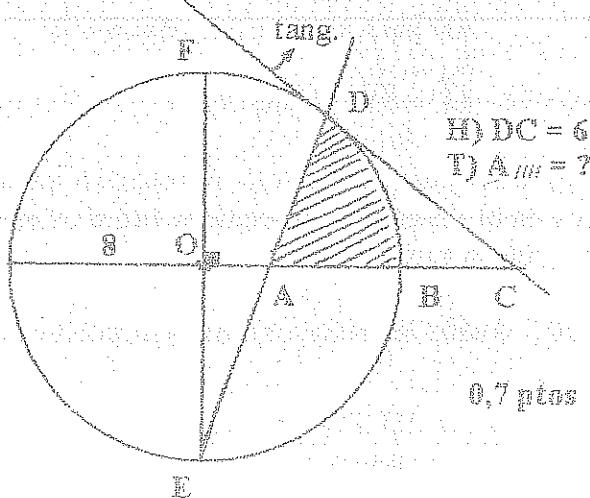
2)



3)



4)

H) $O(O_1, R_1)$ y $O(O_2, R_2)$

Ortogonales

$$\overline{O_1O_2} = 15$$

$$R_1 = 12 \text{ u.}$$

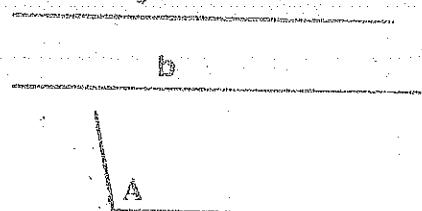
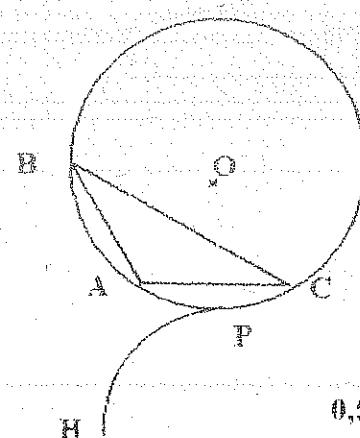
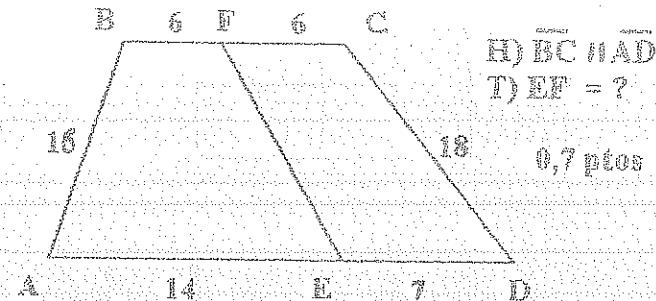
AB tangente externa común

T) CD = ?

0,7 ptos

5) Reproducir el siguiente gráfico

H)

H ORTOCENTRO $\triangle ABC$ 

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

GEOMETRIA Y DIBUJO

EXAMEN FINAL

01-2009

1) H) $12y^2 - 4x^2 + 72y + 16x + 44 = 0$

T) Ecuaciones de las directrices

$$(0,7) \quad \begin{aligned} y+2=0 \\ y+4=0 \end{aligned}$$

2) H) PARÁBOLA

Directriz: $x + y - 2 = 0$ Vértice: $(-3; 1)$

$$x^2 - 2xy + y^2 + 24x + 8y + 48 = 0$$

T) Ecuación de la parábola en el sistema de coordenadas x-y

3) H) PRISMA PENTAGONAL REGULAR

ABCDE base inferior

A'B'C'D'E' base superior

AC' forma un ángulo de 70° con la base inferiorÁrea lateral: 100 u^2

T) Volumen del prisma (0,7)

$$72,72$$

4) H) ABCD Trapecio isósceles circunscriptible

 \overline{AD} base mayor: $3x - 5y - 6 = 0$

B (-4; 4)

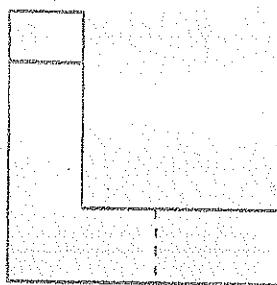
 $\overline{AE} = \overline{EB}$; E (-6; -1)

$$70,19$$

5) Un tronco de cono de revolución de dimensiones: $R = 6 \text{ u}$, $r = 2 \text{ u}$, $h = 8 \text{ u}$, contiene agua, si la superficie húmeda es 140 u^2 . Calcular la altura del nivel del líquido si está apoyado en su base menor.

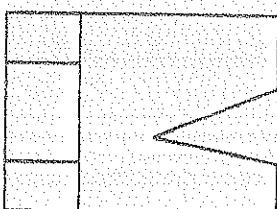
$$5,40 \quad (0,7)$$

6) Dadas las vistas frontal y superior, dibujar el sólido correspondiente. (0,5)

Vista
frontal

2

1

Vista
superior

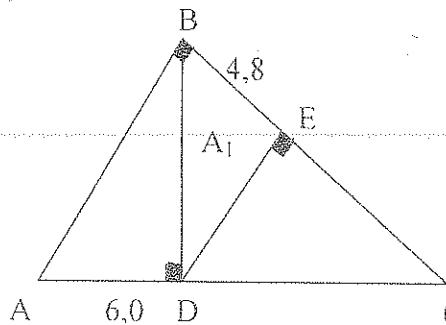
ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

GEOMETRÍA Y DIBUJO

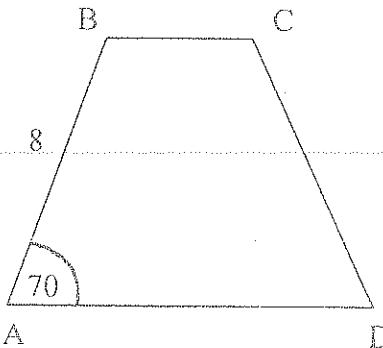
EXAMEN SUPLETORIO

2009-02

1)



2)

T) $A_1 = ?$ (3.0 ptos)

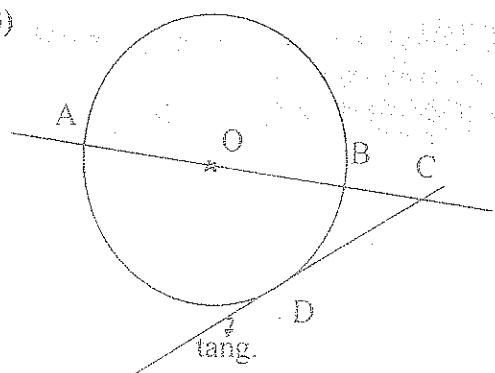
15,36

H) ABCD trapezio isósceles circunscriptible

T) $A_{ABCD} = ?$ (3.0 ptos)

60,16

3)

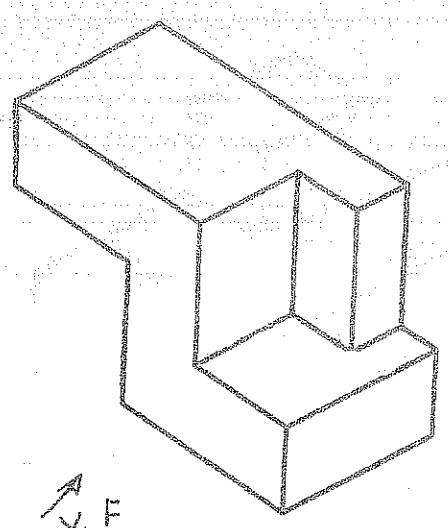
H) Ecuación CD: $X - 2Y - 2 = 0$ Ecuación AC: $X + 2Y - 26 = 0$

A (-4; 15)

T) Ecuación de la circunferencia (3.0 ptos)

 $(X-4)^2 + (Y-11)^2 = 80$

7) Dibujar las vistas: Frontal, Superior y Lateral Derecha del siguiente sólido (2.0 ptos)



T) Área total (3.0 ptos)

580

6) H) P- ABCD Pirámide cuadrangular regular

Ángulo entre la arista lateral y la base = 25,12°

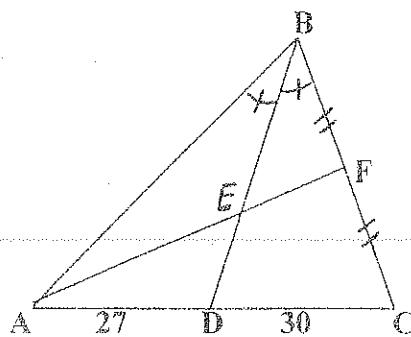
Volumen P- ABCD = 884 u³

GEOMETRÍA Y DIBUJO

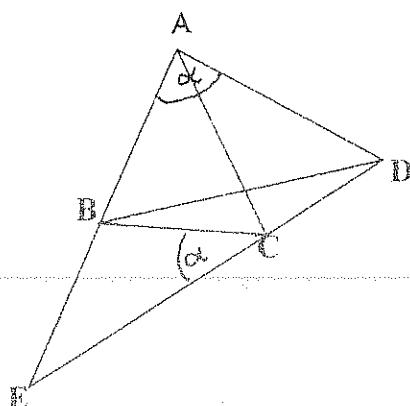
EXAMEN DE UBICACIÓN

2009-02

1)



2)



H) $ED = 23$

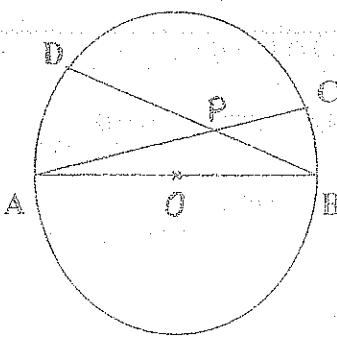
T) SAADE (3.0 ptos)

H) $A(-5; 7); \operatorname{Tg} \alpha = 8; ED: X-2Y-6=0$

BD: $Y-2=0$

T) ECUACIÓN AC (3.0 ptos)

3)



4) H) ELIPSE

F(2;3)

DIRECTRIZ: $X+Y+7=0$ (a la izquierda del foco); lado recto = 4

T) ECUACIÓN ELIPSE (3.0 ptos)

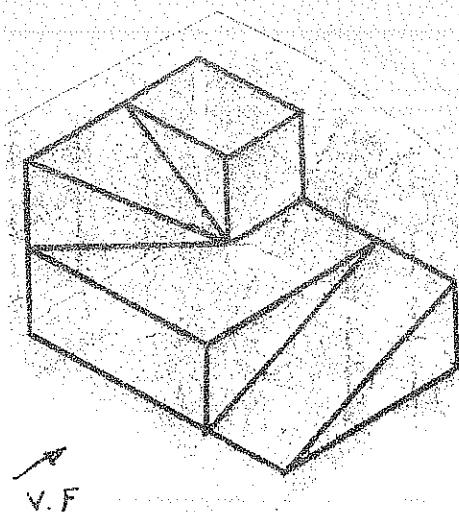
T) $AB^2 = AC \cdot AP + BD \cdot BP$ (3.0 ptos)

5) Un hojalatero quiere construir un recipiente de forma prisma pentagonal regular de altura 35 cm., dispone de una lámina rectangular de aluminio de dimensiones 36 cm. x 135 cm.

Hallar el volumen del máximo recipiente que puede construir. (3.0 ptos)

6) Una hoja de papel ABCD tamaño A4, se dobla por los puntos medios de AB y BC (E punto medio de AB y F punto medio de BC), el ángulo diedro E-F formado es de 72° . Calcular el volumen de la pirámide B-EFCDA (3.0 ptos)

7) Dibujar las vistas: Frontal, Superior y Lateral Derecha del siguiente sólido (2.0 ptos)

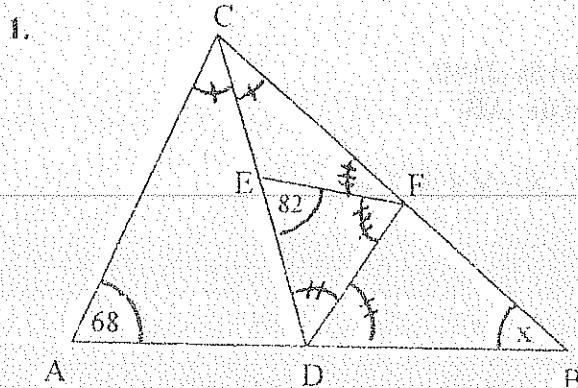


ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

GEOMETRÍA Y DIBUJO

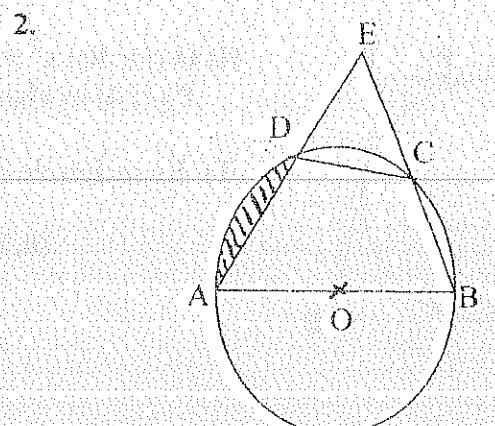
PRIMER EXAMEN

05-2009



T) $\hat{x} = ?$ (0.7)

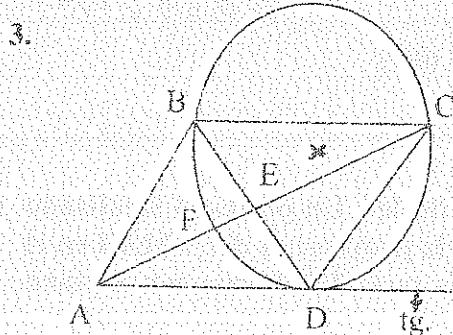
40°



H) $CD = DE = 10\text{u}$

$EB = 20\text{u}$

T) $A//I = ?$ (0.7) 9,05



H) ABCD paralelogramo

$AC = 10\text{u}$

$BD = 5,4\text{ u}$

T) $A_{ABCD} = ?$ (0.7) 26,86

4. H) ABCD INSCRIPTIBLE

$AB = 54,2 \text{ u}$

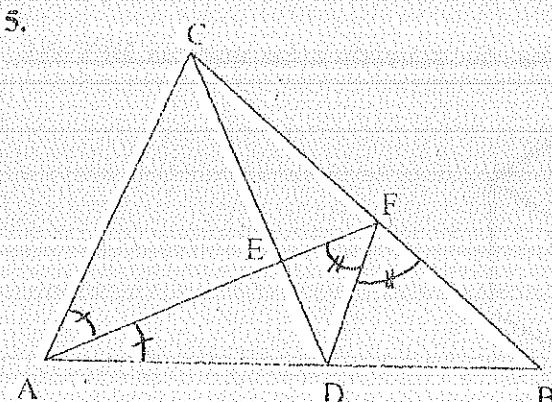
$BC = 63 \text{ u}$

$CD = 26 \text{ u}$

$AD = 18,2 \text{ u}$

T) $BD = ?$ (0.7)

52,45



H) $AC = 12 \text{ u}$

$EF = 2,5 \text{ u}$

$DF = 3,0 \text{ u}$

$AD = 10 \text{ u}$

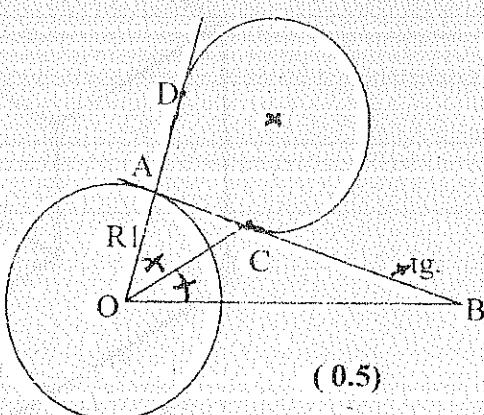
T) $A_{ADE} = ?$ (0.7) 3,55

6. H) R1

O

B

T) Reproducir el siguiente gráfico



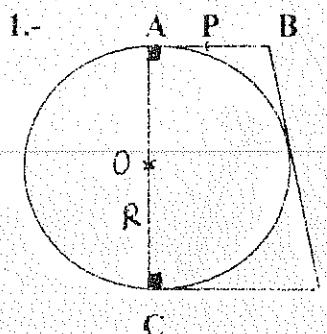
(0.5)

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

GEOMETRIA Y DIBUJO

EXAMEN FINAL

07-2009



- 1.- H) $\Theta(O; R): x^2 + y^2 - 6x + 8y - 25 = 0$
 $P(1; 4)$ es elemento de \overline{AB}

T) Ec. ecuación de \overline{AB} $x - y + 3 = 0$

(0,7)

2) II) ELIPSE

Directriz: $x - 2y + 10 = 0$ Vértice: $V_1(0; 8)$ extremo eje mayor
Centro $(2; -4)$

- T) Ecuación de la elipse en el Sistema de coordenadas x-y (0,7)

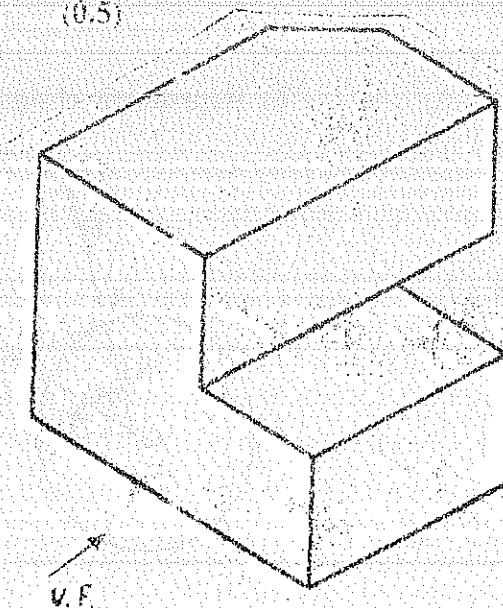
$$19x^2 + 4xy + 16y^2 - 60x + 120y = 0$$

- 4) Los planos P y Q de arista \overline{AB} , forman un ángulo diedro de 40° . Un punto M localizado en el plano P forma el $\triangle MAB$; $MA = MB$; $S_{\triangle MAB} = 17 \text{ u}^2$, si la proyección del $\triangle MAB$ en el plano Q es el $\triangle ABB'$, $AH = HB = 7\text{u}$. Calcular el ángulo que la recta \overline{MB} forma con el plano Q. (0,7) $38,87^\circ$

- 5) Un tronco de cono de revolución de dimensiones: $R = 14 \text{ u}$, $r = 12 \text{ u}$, $h = 16 \text{ u}$, contiene agua, hasta la mitad de su altura. Se suelta una piedra en el tronco de cono y se sumerge totalmente. Si el nivel del líquido se be 5u. Calcular el volumen de la piedra. (0,7)

$$2530,75$$

- 6) Dibujar las vistas: frontal, superior y lateral derecha, de acuerdo a las normas DIN del siguiente sólido. (0,5)



ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

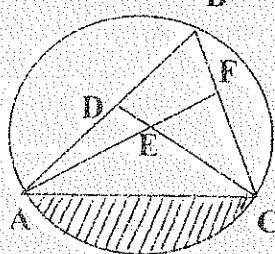
GEOMETRIA Y DIBUJO

EXAMEN SUPLETORIO

07-2009

- I.- En un ΔABC , $\angle A > 90^\circ$, D es el pie de la altura trazada desde B, E es el pie de la altura trazada desde C, H es el ortocentro del ΔABC , $\angle HBE = \angle EBC$, $EF \perp BC$, F $\in BC$.
 Demostrar que $DC = 2 FE$ (3.5 puntos)

2



- $$\text{H)} AD = 4 \cup$$

$$DB = 6 \mu$$

DE = 2.5 u

$$EC = 11.26 \text{ eV}$$

$$FC = 94$$

T) $S_{\parallel\parallel} = ?$ (3.5 puntos)

3.- H) HIPERBOLA

$$\text{Directrix: } 3\sqrt{3}x + 3y - 2\sqrt{3} = 0$$

Vértice: V₁(1; $\sqrt{3}/3$)

Centro (0; 0)

T) Ecuación de la parábola en forma general

Sistema de coordenadas x-y (3,5 puntos)

63.43° se obtuvo la siguiente ecuación

$$(y^2 - 1)^2 = x^3. \text{ Determinar la ecuación}$$

la cónica en el sistema $x-y$

(3.5 puntos)

5) Dado un tronco de pirámide cuadrangular regular: arista de la base mayor 12 u., arista de la base menor 8 u., apotema del tronco de pirámide 14 u. Contiene agua hasta una altura 6 u. Calcular el volumen del agua si está apoyado en su base mayor. (3.5 puntos)

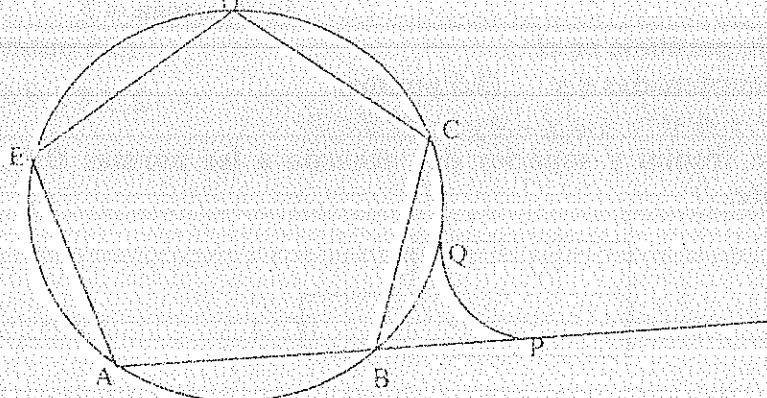
6) H) ABCDE Poligono regular

Radio der Jugend

$$BP = 2/3 AB$$

References

1970-1971 - 1971-1972 - 1972-1973 - 1973-1974 - 1974-1975 - 1975-1976



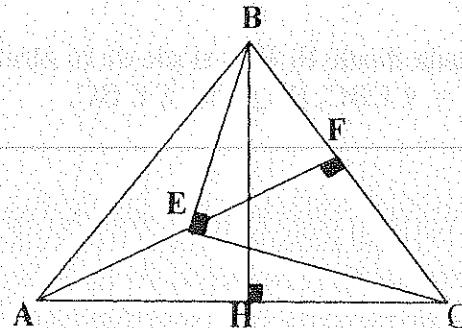
ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

GEOMETRIA Y DIBUJO

EXAMEN DE UBICACION

07-2009

1.-

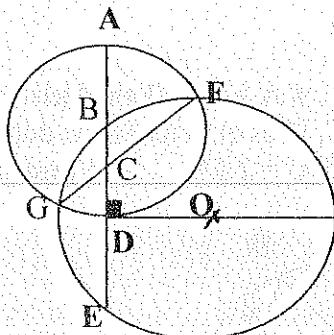


H) $AB = BC$

(3.5 puntos)

T) $EC = \sqrt{2}/2 AC$

2.-

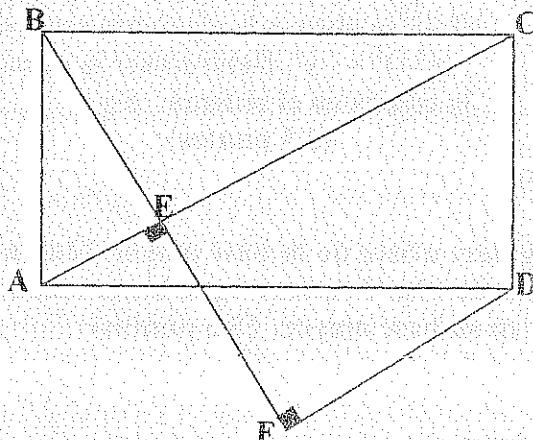


H) $BC = 2u.$

O (B; BA) (3.5 puntos)

T) $AE = ?$ 12

3.-



H) ABCD RECTÁNGULO

D(-5; -2)

BF: $x+3y-7=0$

AC: $3x-y+1=0$

T) $S_{ABCD} = ?$ 36,00

(3.5 puntos)

4.- H) PARÁBOLA

Tangente en el vértice: $2x-y-4=0$

A(7;5) extremo del lado recto sobre el eje focal

T) Ecuación de la parábola en el

Sistema de coordenadas x-y (3.5 puntos)

$$x^2 + 4xy + 4y^2 - 54x - 8y + 129 = 0$$

6) Dadas las vistas: frontal y superior de acuerdo a las normas DIN, dibuje el sólido correspondiente.

5) H) P-ABCDE Pirámide regular

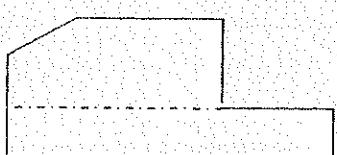
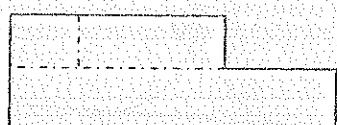
Diedro P-A = 120°

Área lateral = 900 u^2

T) Volumen = ?

(3.5 puntos)

2911,76

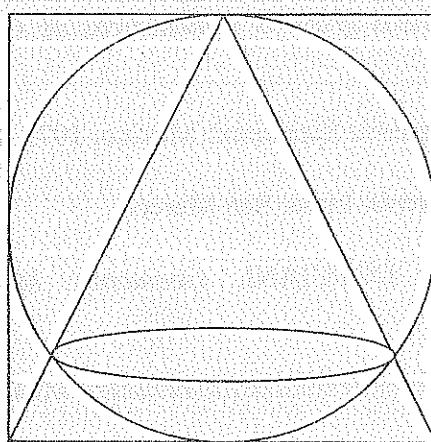


(2.5 puntos)

BIBLIOGRAFÍA

- ANTONOV, N. VIGODSKY, M. NIKITIN, V y SANKIN, A. *1000 Problemas de Aritmética, Álgebra, Geometría y trigonometría*. Madrid. 1975. Paraninfo S. A.
- BACHMANN, A y FORBERG, R. *Dibujo Técnico*. Barcelona. 1975. Labor S.A.
- BRUÑO, G. M. *Geometría, Curso Superior*. Bilbao. 1964. Grijalva S.A. 12va. Edición.
- CABALLERO, Luis Ubaldo. *Geometría*. Lima. San Marcos.
- COXETER, H.S.M. *Fundamentos de la Geometría*. México. 1971. Limusa-Wiley S.A.
- GALLEGOS, Alva Fernando. *Geometría*. Lima. 2000. San Marcos.
- GARCÍA ARDURA, M. *Problemas gráficos y numéricos de Geometría*. Madrid. 1960. Tipografía Artística.
- HEMMERLING, Edwin M. *Geometría Elemental*. México. 1975. Limusa.
- HUIZA de la CRUZ, José. *Geometría*. Lima. San Marcos.
- JURGENSEN, DONNEILY y DOLCIANI. *Geometría Moderna*. México. 1973. Publicaciones Culturales S. A.
- LIDSKI, V y otros. *Problemas de Matemáticas Elementales*. Moscú. 1978. Edit. MIR. 2da. Edición.
- MASÍN, A. ANTON, R. DOMENECH, J. *Geometría Descriptiva*. La Habana. 1986. Pueblo y Educación.
- MOISE, Edwin E. FLOYD, L. DOWNS, Jr. *Serie Matemática Moderna*. Bogotá. 1972. Norma. Tomo 4.
- POKROVSKAIA, A. *Dibujo Industrial*. Moscú. 1972. Edit. MIR.
- SANTIBAÑEZ, J. *Geometría*. Lima. 1980. Offsam W & C Jaime. 2da. Edición.
- SHNEIDER, W y SAPPERT, D. *Manual Práctico de Dibujo Técnico*. Barcelona. 1975. Reverte S. A.

GEOMETRIA PLANA Y DEL ESPACIO
DIBUJO



G. CALVACHE
T. ROSERO
M. YACELGA

Pedidos a los telf. : 2599576 -- 099212012