大学物理上册

概念 & 公式集

关舒文
华南理工大学

易鹏
中山大学

版本号：V10.04.43（正式版）

2020 年 7 月 17 日

目录

第 1 章　质点运动学

1.1　参考系

描述质点运动时用的，固定在参考物上面的空间坐标系（如笛卡尔直角坐标系）和配置在各处的一套同步的钟构成一个参考系，通常就以选定的参考系命名，如太阳坐标系、地心坐标系、地面参考系等。

1.2　运动函数

相对于一定参数表示的质点位置随时间的变化的函数，即

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\,\boldsymbol{i}+y(t)\,\boldsymbol{j}+z(t)\,\boldsymbol{k} \tag{1.1}$$

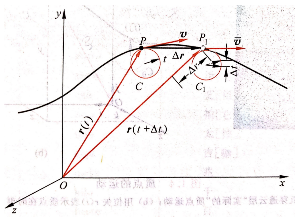
其中 $\boldsymbol{r}(t)$ 为质点在时刻 t 的径矢，即从坐标系原点指到时刻 t 质点所在位置的长度矢量。$x(t), y(t), z(t)$ 分别为径矢沿 x, y, z 轴的分量，也表示沿三个轴的分运动。左式表示运动的合成。

1.3　位移和速度

质点在时间 Δt 内的位移为 $\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$.

一般地

$$|\Delta\boldsymbol{r}|\neq\Delta r \tag{1.2}$$



$\mathrm{d}r=0$ 说明作圆周运动

$\mathrm{d}\boldsymbol{r}=0$ 说明作匀速运动

质点在时刻 t 的速度为

$$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{k} \tag{1.3}$$

其中 $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k}$ 为代数量, 其正负表示该分量与相应的坐标的方向相同或相反. 速度方向沿质点运动轨迹的切线方向且指向运动的前方.

1.4　加速度和匀加速运动

质点在时刻 t 的加速度

$$\boldsymbol{a}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t}\,\boldsymbol{k} \tag{1.4}$$

匀加速运动:

$$\begin{cases}\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v_0}+\boldsymbol{a}t\\ \boldsymbol{r}=\boldsymbol{r_0}+\boldsymbol{v_0}t+\frac{1}{2}at^2\end{cases} \tag{1.5}$$

式中 $(\boldsymbol{r_0}, \boldsymbol{v_0})$ 是初值.

匀加速直线运动: 即在式(1.5)中取运动轨道为 x 轴, 初始条件为 (x_0, v_0), 则

$$\begin{cases} v = v_0 + at \\ x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 \\ v^2 - v_0^2 = 2ax \end{cases} \tag{1.6}$$

1.5 抛体运动

抛体运动

抛体运动可以看成是沿竖直方向的匀加速运动和水平方向的匀速运动的合成

抛体运动为平面运动,设运动平面为 xOy 平面, y 轴竖直向上,则有 $a_x = 0, a_y = -g$,以抛出点为原点，则

$$\begin{aligned} v_x &= v_0 \cos\theta, & v_y &= v_0 \sin\theta - gt \\ x &= v_0 \cos\theta \cdot t, & y &= v_0 \sin\theta \cdot t - \frac{1}{2}gt^2 \end{aligned} \tag{1.7}$$

1.6 圆周运动

圆周运动

线速度

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} \tag{1.8}$$

角速度

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{R} \tag{1.9}$$

角加速度

$$\alpha = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \tag{1.10}$$

加速度

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}_n + \boldsymbol{a}_t \tag{1.11}$$

法向加速度

$$a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2 \quad \text{指向圆心} \tag{1.12}$$

切向加速度

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = R\alpha \quad \text{沿切线方向} \tag{1.13}$$

1.7 相对运动

伽利略变换

运动的描述随所用的参考系的不同而不同, 对于相对速度为 $\boldsymbol{u}$ 的两个参考系 (S, S'), 同一质点 A

伽利略变换仅适用于 $\boldsymbol{u}$ 远小于光速的情况.

位移变换

$$\Delta \boldsymbol{r}_{AE} = \Delta \boldsymbol{r}_{AS} + \Delta \boldsymbol{r}_{SE} \tag{1.14}$$

在这三个位移下标中, 前一个字母表示运动的物体, 后一个字母表示参考系.

速度变换

$$\boldsymbol{v_a} = \boldsymbol{v_r} + \boldsymbol{u} \tag{1.15}$$

v_a 为绝对速度
v_r 为相对速度
u 为牵连速度

加速度变换

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}' + \boldsymbol{a}_0, \quad \boldsymbol{a}_0 = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{u}}{\mathrm{d}t} \tag{1.16}$$

特别地, 当 $a_0 = 0$ 时,

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}'$$

第 2 章　运动与力

2.1　牛顿运动定律

牛顿第一定律　任何物体都保持静止的或沿一条直线 作匀速运动的状态, 除非作用在它上面的例迫使它改改变这种状态.

牛顿第一定律引出了惯性和力的概念以及惯性参考系的定义

惯性　物体保本身要保持运动状态不变的性质, 或物体抵抗运动变化的性质.

惯性参考系　在一个参考系中观测, 如果一个不受力作用的物体保持不变, 这一参考系就叫做惯性参考系.

牛顿第二定律　运动的变化与所加的动力成正比, 并且发生在这力所沿的直线上.

$$\boldsymbol{F}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\boldsymbol{v}) \tag{2.1}$$

其中 $\boldsymbol{p}=m\boldsymbol{v}$ 为质点的动量, 当质点速度 $\boldsymbol{v}$ 远小于光速 c 时, 质点的质量近似与速度无关, 即

$$\boldsymbol{F}=m\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=m\boldsymbol{a} \tag{2.2}$$

力的叠加原理

$$\boldsymbol{F}=\sum\boldsymbol{F}_i \tag{2.3}$$

上述牛顿第二定律公式中的 $\boldsymbol{F}$ 是作用在质点上所有力的合力.

牛顿第三定律　两个物体之间的相互作用力同时存在, 分别作用, 方向相反, 大小相等

$$\boldsymbol{F}_{12}=-\boldsymbol{F}_{21} \tag{2.4}$$

牛顿定律仅在惯性系中成立.

2.2　常见的几种力

重力

$$\boldsymbol{P}=m\boldsymbol{g} \tag{2.5}$$

弹力 发生形变而要恢复原状所产生的力, 主要有以下三种:

支持力 与垂直于接触面的作用力相等 (压力).

张力 拉紧的绳或线对被拉的物体有拉力.

胡克定律 在弹性限度内, 弹簧的弹力和形变成正比

k 称为弹簧的劲度系数.

$$f = -kx \tag{2.6}$$

摩擦力

滑动摩擦力

μ_k 是滑动摩擦系数.

$$f_k = \mu_k N \tag{2.7}$$

静摩擦力

μ_s 是静摩擦系数.

$$f_s \leq f_{s\,\max} = \mu_s N \tag{2.8}$$

流体阻力 与流体中的物体相对与流体的速度方向相反, 当二者的相对速度较小时,

$$f_d = kv \tag{2.9}$$

当二者的相对速度较大以致于后方出现漩涡时,

C 为曳引系数.
ρ 为空气密度.
A 为有效横截面积.

$$f_d = \frac{1}{2} C\rho A v^2 \tag{2.10}$$

表面张力 液体表面总处于一种绷紧状态. 这是由于液面各部分之间存在着相互拉紧的力.

γ 为表面张力系数.
l 为边界线长度.

$$F = \gamma l \tag{2.11}$$

2.3 惯性力

惯性力 在非惯性系中引入的和参考系本身的加速运动相联系的力.

潮汐就是地球上观察到的一种惯性力作用的表现.

平动加速参考系

$$\boldsymbol{F}_i = -m\boldsymbol{a}_0 \tag{2.12}$$

转动参考系

$$\boldsymbol{F}_i = m\omega^2 \boldsymbol{r} \tag{2.13}$$

科里奥利力

$$\boldsymbol{F}_C = 2m\boldsymbol{v}' \times \boldsymbol{\omega} \tag{2.14}$$

第 3 章　动量与角动量

3.1　对质点的动量定理

质点所受的和外力的冲量等于该质点动量的增量, 即

$$\boldsymbol{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{p} = \mathrm{d}(m\boldsymbol{v}) \tag{3.1}$$

动量定理说明力对质点作用的时间积累效果表现为质点动量的改变. 它是牛顿第二定律的直接变形, 故也只适用于惯性系.

或

$$\int_0^t \boldsymbol{F}\mathrm{d}t = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{p}_0 = m\boldsymbol{v} - \boldsymbol{v}_0 \tag{3.2}$$

3.2　对质点系的总动量

质点系的总动量

$$\boldsymbol{p} = \sum \boldsymbol{p}_i = \sum m_i \boldsymbol{p}_i \tag{3.3}$$

作用于质点系的外力的矢量和为合外力

$$\boldsymbol{F} = \sum \boldsymbol{F}_i \tag{3.4}$$

质点系的动量定理

$$\boldsymbol{F}\mathrm{d}t = \mathrm{d}\boldsymbol{p} \qquad \left(\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t}\right) \tag{3.5}$$

动量守恒定律

当系统所受的合外力为 0 时, 系统的总动量不随时间改变.

在外力远小于内力的情况下, 外力对质点系的总动量变化影响很小, 这时近似满足动量守恒的条件. 例如, 两个物体的碰撞和爆炸过程.

孤立系统　一个不受外界影响的系统. 一个孤立系统在运动过程中, 其动量一定保持不变.

3.3　火箭飞行原理

假设火箭在自由空间飞行, 即不受引力或空气阻力等任何外力的影响. 质量为 M, 此时速度为 v 的火箭经过 $\mathrm{d}t$ 时间喷出 $\mathrm{d}m$ 质量的气体, 喷出速率相对与火箭为定值 u. 则由动量守恒定律,

$$\mathrm{d}m \cdot (v-u) + (M-\mathrm{d}m)(v+\mathrm{d}v) = -\mathrm{d}M \cdot (v-u) + (M+\mathrm{d}M)(v+\mathrm{d}v) = Mv$$

注意到 $\mathrm{d}m = -\mathrm{d}M$

忽略二阶无穷小量 $\mathrm{d}M \cdot \mathrm{d}v$ 可得

$$u\mathrm{d}M + M\mathrm{d}v = 0$$

M_i 为点火时的质量,
v_i 为初速度.
v_f 为末速度.
M_f 为燃料耗尽时质量.

即

$$v_f - v_i = u \ln \frac{M_i}{M_f}$$

如果只以火箭本身为研究的系统, 以 F 表示在时间间隔 t 到 $t + \Delta t$ 内喷出气体对火箭体 (质量为 $(M - \mathrm{d}m)$) 的推力, 由动量定理, 有

$$F\mathrm{d}t = (M - \mathrm{d}m)[(v + \mathrm{d}v) - v] = M\mathrm{d}v$$

由 $M\mathrm{d}v = -u\mathrm{d}M = u\mathrm{d}m$ 代入, 得

$$F = u\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}$$

说明火箭发动机的推力与燃料的燃烧速率 $\mathrm{d}m/\mathrm{d}t$ 以及喷出气体的相对速率 u 成正比.

3.4 质心

质心 质心是相对于质点系各质点位置分布的一个特殊点

$m = \sum m_i$,
$\boldsymbol{r_i}$ 为 m_i 质点的位矢.

$$\boldsymbol{r}_C = \frac{\sum m_i \boldsymbol{r}_i}{m} \quad \text{或} \quad \boldsymbol{r}_C = \frac{\int \boldsymbol{r}\mathrm{d}m}{m} \tag{3.6}$$

其坐标分量为

均质几何体的质心就在其几何中心.

$$\begin{cases} x_C = \dfrac{\sum m_i x_i}{m} \\ y_C = \dfrac{\sum m_i y_i}{m} \\ z_C = \dfrac{\sum m_i z_i}{m} \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x_C = \dfrac{\int x\mathrm{d}m}{m} \\ y_C = \dfrac{\int y\mathrm{d}m}{m} \\ z_C = \dfrac{\int z\mathrm{d}m}{m} \end{cases} \tag{3.7}$$

质心的速度

$$\boldsymbol{v}_C = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\sum m_i \boldsymbol{v}_i}{m} \tag{3.8}$$

质心的加速度

$$\boldsymbol{a}_C = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}_C}{\mathrm{d}t} = \frac{\sum m_i \boldsymbol{a}_i}{m} \tag{3.9}$$

质心运动定理

质点系所受合外力等于质心系的总质量和其质心的加速度的乘积

$$\boldsymbol{F} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{p}}{\mathrm{d}t} = m\boldsymbol{a}_C \tag{3.10}$$

3.5 对质点的角动量定理

质点的角动量

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L} &= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times (m\boldsymbol{v}) \\ L &= mrv \sin(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}) \end{aligned} \tag{3.11}$$

角动量的大小表示质点对一固定点的转动状态.

$\boldsymbol{r}$ 为质点相对于定点的位矢

力矩

$$\begin{aligned} \boldsymbol{M} &= \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \\ M &= rF \sin(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{F}) \end{aligned} \tag{3.12}$$

力矩表示力对质点的转动作用.

$\boldsymbol{r}$ 为质点相对于定点的位矢

质点的角动量定理

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} \tag{3.13}$$

特别地, 如果 $\boldsymbol{M} = 0$, 那么 $\boldsymbol{L}$ 为常矢量, 则质点对该定点角动量守恒.

3.6 对质点系的角动量定理

质点系的角动量

$$\boldsymbol{L} = \sum \boldsymbol{L}_i = \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{p}_i \tag{3.14}$$

质点系的力矩

$$\boldsymbol{M} = \sum \boldsymbol{M}_i = \sum \boldsymbol{r}_i \times \boldsymbol{F}_i \tag{3.15}$$

质点系的角动量定理

$$\boldsymbol{M} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{L}}{\mathrm{d}t} \tag{3.16}$$

特别地, 当 $\boldsymbol{M} = 0$ 时, 那么 $\boldsymbol{L}$ 为常矢量, 则质点系角动量守恒. 也说明内力矩不能改变系统的总角动量.

第 4 章　功和能

4.1　功

功

$$dA = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r}, \quad A_{AB} = \int_{L A}^{B} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} \tag{4.1}$$

在数学上, 功是力沿着质点运动轨道的线积分.

功是力和位移的点积, 没有方向但有正负, 一个力的功是负值表示质点在反坑此力的条件下运动. 合力的功等于各分力的代数和.

4.2　对质点的动能定理

质点动能

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m} \tag{4.2}$$

质点的动能定理

$$dA = \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = d\left(\frac{1}{2}mv^2\right) \tag{4.3}$$

或积分形式

$$A_{AB} = \int_{L A}^{B} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 \; (= E_{kB} - E_{kA}) \tag{4.4}$$

动能定理说明力对质点作用的空间累积效果表现为质点动能的增加, 它是牛顿第二定律的直接推论, 所以它也只适用于惯性参考系.

4.3　对质点系的动能定理

质点系动能　柯尼希定理

$$\begin{aligned} E_k &= E_{kC} + E_{\mathrm{k,in}} \\ &= \frac{1}{2}mv_C^2 + \sum \frac{1}{2}m_i v_i'^2 \end{aligned} \tag{4.5}$$

E_{kC}　质心动能.

$E_{\mathrm{k,in}}$ 质点系相对于质心参考系的总动能.

质点系的动能定理

在以惯性系中, 所有外力对质点做的功和内力对质点做的功之和等于这个质点系总动能的增量.

$$A_{\mathrm{ex}} + A_{\mathrm{in}} = E_{kB} - E_{kA} \tag{4.6}$$

A_{ex}　外力对质点做功.

A_{in}　内力对质点做功.

一对内力的功 两个质点间一对内力 $\boldsymbol{f}_1$ 和 $\boldsymbol{f}_2$ 的功之和等于其中一个质点受的力沿着该质点相对于另一个质点所移动的路径所作的功.

$$A_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{f}_2 \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{21} \tag{4.7}$$

4.4 势能

保守力的另一个等价定义: 如果力作用在物体上, 当物体沿闭合路径移动一周时, 力的做功为零.

保守力 做功与路径无关, 只决定于系统的始末位置的力称为保守力.

势能 对保守力可以引进势能的概念. 一个系统的势能 E_p 决定于系统的位形

$$-\Delta E_p = E_{pA} - E_{pB} = A_{AB} = \int_A^B \boldsymbol{f}_2 \mathrm{d}\boldsymbol{r}_{21} \tag{4.8}$$

势能属于相互有保守力的系统, 势能的值与参考系的选择无关.

取 B 点为势能零点 $E_{pB} = 0$, 则

$$E_{pA} = A_{AB} \tag{4.9}$$

引力势能

以距离两质点无穷远作为势能零点

$$E_p = -\frac{Gm_1m_2}{r_1^2} \tag{4.10}$$

R 为地球半径,
M 为地球质量
h 为质点距地表的高度

以地球表面作为势能零点

$$E_p = \frac{GmM}{R} - \frac{GmM}{R+h} = GmM\frac{h}{R(R+h)} \tag{4.11}$$

重力势能

以地球表面作为势能零点

$$E_p = mgh \tag{4.12}$$

弹簧的弹性势能

以弹簧处于自然长度作为势能零点

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 \tag{4.13}$$

由势能求保守力

$$\boldsymbol{F}_l = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}t} \tag{4.14}$$

即保守力沿某一方向的分量等于势能沿此方向的空间变化率的负值. 在直角坐标下

$$\boldsymbol{F} = F_x\boldsymbol{i} + F_y\boldsymbol{j} + F_z\boldsymbol{k} = -\left(\frac{\partial E_p}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\boldsymbol{k}\right) \tag{4.15}$$

保守力等于势能梯度的负值.

4.5 机械能守恒定律

机械能守恒定律是普遍的能量守恒定律的力学特例.

机械能守恒定律

相对于一个惯性参考系

$$A_{\mathrm{ex}} + A_{\mathrm{in,n\text{-}cons}} = E_B - E_A \tag{4.16}$$

$A_{\mathrm{in,n\text{-}cons}}$ 非保守内力的功
$E = E_k + E_p$ 为机械能

由柯尼希定理, 得

$$E = E_k + E_p = E_{kC} + E_{\mathrm{k,in}} + E_p = E_{kC} + E_{\mathrm{in}} \tag{4.17}$$

即系统的机械能等于系统的轨道动能与系统的内能 ($E_{\mathrm{in}} = E_{\mathrm{k,in}+E_p}$) 之和. 对于一个系统, 如果只有保守内力做功, 那么系统的机械能保持不变.

系统的轨道动能指的就是质心的动能.

质心系的机械能守恒定律

对于保守系统 (内部各点间只有保守力相互作用的系统), 相对于其质心参考系, 外力对系统做的功 A'_{ex} 等于系统内能的增量,

此结论与质心的运动形式 (匀速或变速) 无关

$$A'_{\text{ex}} = E_{\text{in},B} - E_{\text{in},A} \tag{4.18}$$

4.6　守恒定律的意义

不究过程的细节而对系统的出末状态下结论；相应与自然界的每一种对称性, 都存在着一个守恒定律.

4.7　碰撞

弹性碰撞　碰撞前后系统无动能损失. 对于对心碰撞

$$\begin{cases} m_1 v_{10} + m_2 v_{20} = m_1 v_1 + m_2 v_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_{10}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{20}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \end{cases} \tag{4.19}$$

联立解得

特例 1: 当 $m_2 = m_1$ 时,$v_1 = v_{10}$, $v_2 = v_{20}$.

特例 2: 当 $m_2 \gg m_1$ 时,$v_1 = -v_{10}$, $v_2 \approx 0$.

$$\begin{aligned} v_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{10} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{20} \\ v_2 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_{20} + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_{10} \end{aligned} \tag{4.20}$$

完全非弹性碰撞　碰撞前后合在一起.

$$m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2 = (m_1 + m_2) \boldsymbol{V} \tag{4.21}$$

解得

$$\boldsymbol{V} = \frac{m_1 \boldsymbol{v}_1 + m_2 \boldsymbol{v}_2}{m_1 + m_2} \tag{4.22}$$

4.8　理想流体的稳定运动

理想流体的稳定运动　理想流体不可压缩性 (在压强的作用下体积不变) 和无黏滞性 (各部分都自由流动, 与管壁之间无相互曳拉的作用力).

连续性方程

管中的流速和管子的横截面积成反比.

S 是管的横截面积, v 是流体的流速

$$S_1 v_1 = S_2 v_2 \tag{4.23}$$

伯努利方程

p　流体压强.
v 流体流速.
h 流体距地高度.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 \tag{4.24}$$

也可以写成

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = C(\text{常量}) \tag{4.25}$$

伯努利方程实际上是理想流体流动的机械能守恒定律的特殊形式.

流体静压强公式 特别地, 伯努利方程中取 $v_1 = v_2 = 0$, 用液体深度 $D = H - h$ 代替高度 h, 则

$$p_2 - p_1 = \rho g(D_2 - D_1) \tag{4.26}$$

第 5 章　刚体的转动

5.1　刚体的转动

刚体　刚体是一种理想模型, 受力时不改变形状和体积的物体.

刚体的转动

$$\omega = \omega_0 + \alpha t, \quad \theta = \omega_0 + \frac{1}{2}\alpha t, \quad \omega^2 - \omega_0^2 = 2\alpha\theta, \tag{5.1}$$

ω_0 初角速度,
θ 角位移
α 角加速度

5.2　转动定律

刚体的角动量

$$L = J\omega \tag{5.2}$$

转动定律　质点系的角动量沿固定轴 (取 z 轴) 的分量式,

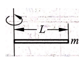
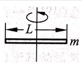
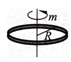
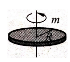
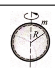
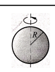
$$M_z = \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} \tag{5.3}$$

去掉下标，可以写成

$$M = J\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t} = J\alpha \tag{5.4}$$

M_z 刚体对转轴的力矩之和 (代数值)
L_z 刚体对转轴的角动量
J 刚体对转轴的转动惯量
ω 刚体绕转轴转动的角速度

表 5.1: 一些均匀转动刚体的转动惯量

刚体形状	轴的位置	图示	转动惯量
细杆	通过一端垂直于杆		$\frac{1}{3}mL^2$
细杆	通过中点垂直于杆		$\frac{1}{12}mL^2$
薄圆环 (薄圆筒)	通过环心垂直于环面 (中心轴)		mR^2
圆盘 (圆柱体)	通过盘心垂直于盘面 (中心轴)		$\frac{1}{2}mR^2$
薄球壳	直径		$\frac{2}{3}mR^2$
球体	直径		$\frac{2}{5}mR^2$

常见的刚体的转动惯量见上页表5.1.

r 为质点 $\mathrm{d}m(m_i)$ 到转轴的垂直距离

J_C 表示刚体对于通过其质心 C 的轴的转动惯量.

转动惯量 决定于刚体的质量相对于转轴的分布

$$J=\sum m_i r_i^2 \quad \text{或} \quad J=\int \boldsymbol{r}^2 \mathrm{d}m \tag{5.5}$$

平行轴定理

$$J=J_C+md^2 \tag{5.6}$$

5.3 角动量守恒

角动量守恒定律

$$M_z=\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t}=0 \quad \Longleftrightarrow \quad L_z=0. \tag{5.7}$$

对于一个质点系，如果它受的对于某个固定轴的合外力矩为 0, 则它对于这一固定轴的角动量保持不变。

5.4 刚体转动的功和能

力矩的功

$$A=\int_{\theta_1}^{\theta_2} M\mathrm{d}\theta \tag{5.8}$$

转动动能

$$E_k=\frac{1}{2}J\omega^2 \tag{5.9}$$

刚体的重力势能

$$E_p=mgh_C \tag{5.10}$$

一个不太大的刚体的重力势能和它的全部质量集中在质心时所具有的势能一样。

动能定理

$$A_{AB}=\frac{1}{2}J\omega_B^2+\frac{1}{2}J\omega_A^2 \tag{5.11}$$

机械能守恒定律 对封闭的保守系统（只有保守力做功），

$$E_k+E_p=C\ \text{常量} \tag{5.12}$$

第 6 章　振动

6.1　简谐运动

简谐运动

1. 运动学定义：运动函数为

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) \tag{6.1}$$

$\omega t + \varphi$ 是时刻 t 的相，φ 是初相.

其中 A 叫做简谐运动的振幅，它表示质点可能离开原点（平衡位置）的最大距离；ω 叫简谐运动的角频率，T 是简谐运动的周期，ν 是简谐运动的频率。

ω, T, ν 的关系如下

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\omega = 2\pi\nu$$

加速度特征：$a = -\omega^2 x$.

三个特征量：A, ω, φ，知道这三个特征量就可以确定简谐运动方程.

相量图法　质点作匀速圆周运动时，它在直径上投影的运动就是简谐运动，因此可以用一个长度等于振幅 A 的旋转径矢表示一个简谐运动。这样旋转矢量图叫相量图，旋转的角速度为 ω, 矢量的初角位置为初相 φ.

2. 动力学定义：质点受的合力 F 与质点对平衡位置的位移 x 成反比而反向，即

$$F = -kx \tag{6.2}$$

F 也称为回复力.

时，就是简谐运动。由牛顿第二定律可得

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \tag{6.3}$$

这个微分方程称为简谐运动的动力学方程.

任一物理量 x 随时间的变化遵守这一形式的微分方程时，它的变化就是简谐变化。

固定角频率

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{6.4}$$

对应固定角频率的周期称为固定周期，表达式如下：

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

知道初始条件 $t = 0$ 时的位移 x_0 和速度 v_0，可以求得

$$A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$$

$$\varphi = \arctan(-\frac{v_0}{\omega x_0})$$

6.2　简谐运动实例

弹簧振子

k 为弹簧的劲度系数.

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{k}{m}x,\quad \omega=\sqrt{\frac{k}{m}},\quad T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{6.5}$$

单摆

l 为摆长.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}=-\frac{g}{l}\theta,\quad \omega=\sqrt{\frac{g}{l}},\quad T=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{6.6}$$

微小振动

E_p 为系统势能函数.

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}=\left[\frac{1}{m}\left(\frac{d^2E_p}{dx^2}\right)_{x=0}\right]^{1/2} \tag{6.7}$$

6.3　简谐运动的能量

简谐运动的能量

利用 $\omega^2=k/m$

E 为系统总机械能.
$\overline{E}_k$ 为系统动能平均值.
$\overline{E}_p$ 为系统势能平均值.

$$\begin{aligned} E_p &= \frac{1}{2}kx^2=\frac{1}{2}kA^2\cos^2(\omega t+\varphi)\\ E_k &= \frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}m\omega^2A^2\sin^2(\omega t+\varphi)=\frac{1}{2}kA^2\sin^2(\omega t+\varphi)\\ E &= E_k+E_p=\frac{1}{2}kA^2\\ \overline{E}_k &= \overline{E}_p=\frac{1}{2}E=\frac{1}{4}kA^2 \end{aligned} \tag{6.8}$$

6.4　阻尼振动

记阻力 $f_r=-\gamma v$，A_0 为初始振幅. ω_0 为初始固有角频率. $\beta=\frac{\gamma}{2m}$ 为阻尼系数

1. 欠阻尼（阻力较小的情况下）

$$A=A_0e^{-\beta t},\quad \omega=\sqrt{\omega_0^2-\beta^2} \tag{6.9}$$

当 $\beta\le\omega_0$ 时（弱阻尼），有 $E\approx E_0\,e^{-2\beta t}$，其中 E_0 为起始能量. 时间常量又称为鸣响时间.

时间常量　能量减小到起始能量的 1/e 所经过的时间

$$\tau=\frac{1}{2\beta} \tag{6.10}$$

在阻尼不严重的情况下，T 和 ω 可以分别用振动系统的固有周期和固有角频率替代.

品质因数 Q　鸣响时间内振动次数的 2π 倍

$$Q=2\pi\frac{\tau}{T}=\omega\tau \tag{6.11}$$

2. 过阻尼（阻尼较大）的情况下，质点慢慢回到平衡位置，不再振动；

3. 临界阻尼（阻尼适当）的情况下，质点以最短的时间回到平衡位置，不再振动.

6.5 受迫振动

受迫振动 在周期性驱动力作用下的振动。稳态时的振动频率等于驱动力的频率；当驱动力的频率等于振动系统的固有频率时发生共振现象，这时系统最大限度地从外界吸收能量。

6.6 两个简谐运动的合成

1. 同一直线上的两个同频率的振动合成时，其合振决定于两个振动的相差：

二者同相时合振幅为二分振幅之和，即 $A = A_1 + A_2$;

反相时为二分振幅之差，即 $A = |A_1 - A_2|$.

2. 同一直线上的两个不同频率的振动合成时，如果者频率差较小，就会产生拍的现象。拍频等于二分振动的频率之差。

3. 相互垂直的两个同频率振动合成时，合运动轨迹一般为椭圆。

6.7 简谐运动的研究方法

1. 解析法

$$
\begin{aligned}
x &= A\cos(\omega t + \varphi) \\
v &= -\omega A\cos(\omega t + \varphi) \\
a &= -\omega^2 A\cos(\omega t + \varphi)
\end{aligned}
$$

2. 曲线法　通过给出的曲线图像找特殊点求出简谐运动方程.

3. 相量图法

注：求振动方程主要是求出三相关量 A, T, φ，初相可以用特殊点代入解析法求出，也可以用相量图法求解。

6.8 简谐运动的合成

1. 同方向、同频率的简谐运动的合成

$$
\begin{cases}
x_1 = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \\
x_2 = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)
\end{cases}
\Longrightarrow \; x = A\cos(\omega t + \varphi)
$$

其中,

$$
A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}, \quad \tan\varphi = \frac{A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2}
$$

注：求合振动方程除了利用辅助角公式，还需要利用和差化积进行化简。

2. 相互垂直、同频率的简谐运动的合成——平面运动.

3. 同方向、不同频率的简谐运动的合成——拍.

6.9 弹簧振子

弹簧串并联

当两根弹簧（劲度系数分别为 k_1, k_2）按同一条直线拼接（串联）后形成的新弹簧系统的劲度系数为 k，则

$$k = \frac{1}{\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}} \tag{6.12}$$

特别地，当 $k_1 = k_2 = k_0$，有

$$k = \frac{k_0}{2} \tag{6.13}$$

$k_1 = k_2 = k_0$ 可以认为是弹簧的两半，由此可以看出，将弹簧减成两半后，剩下的部分的劲度系数为原弹簧的 2 倍.

当两根弹簧（劲度系数分别为 k_1, k_2）并排放置（并联）后形成的新弹簧系统的劲度系数为 k，则

$$k = k_1 + k_2 \tag{6.14}$$

第 7 章　波动

7.1 行波

行波

设坐标原点处的质元的运动函数为 $y_u = f(t)$，则这一运动沿 x 轴传播时形成波的波函数为

$$y = f(t \mp \frac{x}{u}) \tag{7.1}$$

其中的负号和正号分别对应于沿 x 轴正向和 x 轴负向传播的波.

在给定时刻 t，y 为 x 的函数，其图形为叫波形曲线。波的传播表现为波形曲线以波速 u 平移。

横波　在扰动中质元的运动方向和绕动的传播方向垂直的波。横波在外形上有峰有谷。

纵波　扰动中质元的运动方向和扰动的传播在一条直线上的波。纵波形成时，介质的密度发生改变，时疏时密。

横波和纵波是弹性介质内波的两种基本形式。但是，不管是横波还是纵波，都只是扰动的传播，介质本身并没有发生沿波方向的迁移。

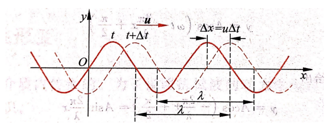
7.2 简谐波

简谐波

原点处质元作简谐运动形成的波为简谐波，其波函数为

$$\begin{aligned} y &= A\cos\left[\omega\left(t \mp \frac{x}{u}\right)\right] \\ &= A\cos\left[2\pi\left(\nu t \mp \frac{x}{\lambda}\right)\right] \\ &= A\cos(\omega t \mp kx) \end{aligned} \tag{7.2}$$

其中的负号和正号分别对应于沿 x 轴正向和 x 轴负向传播的波.



其中，k 为波速，u 为相速度，

$$k = \frac{2\pi}{\lambda},\ u = \lambda\nu = \frac{\lambda}{T} \tag{7.3}$$

7.3 弹性介质中的波速

波的形式满足以下方程（一维弹性介质中的横波）

$$G\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{7.4}$$

代入波的表达式可得波速决定于介质的弹性和密度 ρ，如

各向同性介质中横波波速

G 为剪切模量
ρ 为密度

$$u = \sqrt{\frac{G}{\rho}} \tag{7.5}$$

各向同性介质中纵波波速

E 为杨氏模量
ρ 为密度

$$u = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \tag{7.6}$$

液体、气体中纵波波速

K 为体弹模量
ρ 为密度

$$u = \sqrt{\frac{K}{\rho}} \tag{7.7}$$

拉紧的绳中的横波波速

F 为绳中张力
ρ_l 为线密度

$$u = \sqrt{\frac{F}{\rho_l}} \tag{7.8}$$

气体中声波波速

γ 为气体比热比
R 为普适气体常量

$$u = \sqrt{\frac{\gamma RT}{M}} \tag{7.9}$$

7.4 简谐波的能量

简谐波的能量 任一质元的动能和弹性势能同相变化。

$$\Delta W_k = \Delta W_p = \frac{1}{2}\Delta W = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \Delta V \sin^2\left[\omega(t - \frac{x}{u})\right] \tag{7.10}$$

能量密度

$$\omega = \frac{\Delta E}{\Delta V} = \rho\omega^2 A^2 \sin^2\left[\omega(t - \frac{x}{u})\right] \tag{7.11}$$

平均能量密度

$$\overline{\omega} = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 \tag{7.12}$$

波的强度

$$I = \frac{\overline{P}}{S} = \overline{\omega}u = \frac{1}{2}\rho\omega^2 A^2 u \tag{7.13}$$

7.5 惠更斯原理

利用惠更斯原理可以证明波的反射定律和折射定律，并说明波的速度和折射的关系.

惠更斯原理 介质中波阵面上各点都可看做子波波源，其后任一时刻这些子波的包迹就是新的波阵面。

7.6 驻波

驻波

两列频率、振动方向和振幅都相同而传播方向相反的简谐波叠加形成驻波，其表达式为

$$y = 2A\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\cos\omega t \tag{7.14}$$

驻波实际上是稳定的分段振动，有波节和波腹。

波腹 对应使 $\left|\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right| = 1$ 即 $\frac{2\pi x}{\lambda} = k\pi$ 的各点，因此波腹的位置为

$$x = k\frac{\lambda}{2} \quad k = 0, \pm1, \pm2, \cdots \tag{7.15}$$

波节 对应使 $\left|\cos\frac{2\pi x}{\lambda}\right| = 0$ 即 $\frac{2\pi x}{\lambda} = (2k+1)\frac{\pi}{2}$ 的各点，因此波节的位置为

$$x = (2k+1)\frac{\lambda}{4} \quad k = 0, \pm1, \pm2, \cdots \tag{7.16}$$

两端固定的弦的振动就是驻波。由于两个端点固定不动，所以弦的两端必为波节，故波长只可能是

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{7.17}$$

L 是弦长.

而振动的频率只可能是

$$\nu_n = \frac{nu}{2L} \quad n = 1, 2, 3, \cdots \tag{7.18}$$

u 是波速.

由上面的式子可以知道，在有限的介质中（两端固定的弦线）的驻波波长是量子化的，即只可能取一些分立的值。$n = 1$ 的频率称为基频，$n = 2, 3, \cdots$ 的频率称为二次、三次……谐频。

乐器的弦的振动是基频振动和一些振幅各异的谐频振动的叠加.

7.7 机械波实例

声波 声级

$$L = 10\lg\frac{I}{I_0}\ (\text{dB}),\quad \text{I}_0 = 10^{-12}\ \text{W/m}^2$$

地震波 有 P 波、S 波、表面波之别。里氏地震级 M 与该次地震释放的能量 E 的关系为

$$M = 0.67\lg E - 2.9$$

水面波 重力波的浅水波速 $u = gh$，深水波速 $u = \sqrt{g\lambda/2\pi}$.

7.8 多普勒效应

多普勒效应

接收器接收到的频率有赖于接收器 (R) 或波源 (S) 运动的现象。

波源静止

接收器向波源运动时 v_R 取正值

$$v_R = \frac{u+v_R}{u} v_S \tag{7.19}$$

接收器静止

波源向接收器运动时 v_S 取正值

$$v_R = \frac{u}{u-v_S} v_S \tag{7.20}$$

接收器、波源均不静止

$$v_R = \frac{u+v_R}{u-v_S} v_S \tag{7.21}$$

光学多普勒效应 决定于光源和接收器的相对运动。

v 为光源和接收器的相对运动速度，两者相互接近时 v 取正号.

$$v_R = \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} v_S \tag{7.22}$$

马赫锥半顶角 α

当波源速度超过它发出的波的速度时，在介质中会产生冲击波，最前面的波面为以波源为顶点的圆锥面。此马赫锥的半定角为

$$\alpha = \arcsin \frac{u}{v_S}$$

7.9 波动方程与振动方程

在简谐波方程

$$y = A\cos(\omega t \mp kx)$$

若 x 取固定的值 $x = x_0$，那么

$$y = A\cos(\omega t \mp kx_0) \iff y = A\cos(\omega t \mp \varphi_0) \quad (\varphi_0 = kx_0)$$

即这个是质点在 $x = x_0$ 的振动方程，画出来的曲线为振动曲线。

若 t 取固定的值 $t = t_0$，那么

$$y = A\cos(\omega t_0 \mp kx) \iff y = A\cos(\varphi_0 \mp kx) \quad (\varphi_0 = \omega t_0)$$

即这个是质点在 $t = t_0$ 的波动方程，画出来的曲线为波动曲线。

7.10 波动方程与振动方程的求法

主思想：固定某一个变量 $(x = x_0 \ / \ t = t_0)$ 后求出振动方程或波动方程，再利用题目所给条件和所学公式求出相关量和相位差即可.

例 1 一简谐波以 0.8m/s 的速度沿一长弦线传播。在 $x = 0.1$m 处，弦线质点的位移随时间的变化关系为 $y = 0.05\ \sin(1.0 - 4.0t)$. 求波函数.

解：由

$$y = 0.05\ \sin(1.0 - 4.0t), \quad u = 0.8\,\text{m/s}$$

可以求出

$$\omega = 4.0\ \mathrm{s}^{-1}, \quad \lambda = \frac{2\pi \mathrm{u}}{\omega} = 0.4\pi \mathrm{m}$$

任意 x 处的质元振动的相和 $x = x_0$ 处的相之差为

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi(x - x_0)}{\lambda} = 5x - 0.5$$

所以波函数为

$$y = 0.05\ \sin(1.0 - 4.0t + \Delta\varphi) = 0.05\ \sin(5x - 4.0t + 0.5)$$

第 8 章　温度和气体动理论

8.1　平衡态

系统　在特定问题中作为研究对象的物体或物体系称为热力学系统。

外界　系统之外的物体统称。

平衡态　是指受在不受外界影响的条件下, 一个系统的宏观性质不随时间改变的状态。处于平衡态的系统, 其状态可用少数几个宏观状态参量描写。从微观上看, 平衡态是分子运动的动平衡状态。

8.2　温度的宏观概念

温度　温度是决定一个系统能否与其他系统处于平衡的宏观性质, 处于平衡态的各系统的温度相等。温度相等的平衡态叫热平衡。

热力学第零定律　如果系统 A 和系统 B 分别都与系统 C 的同一状态处于热平衡, 那么 A 和 B 接触时, 它们也必定处于热平衡状态。

温标　温度的数值表示方法。用玻意耳定律规定理想气体的温度 $T \propto pV$, 再加上水的三相点温度规定为 $T_3 = 273.16K$, 即可得理想气体温标, 它和热学理论规定的热力学温标在理想气体温标适用的范围内数值相同, 都用 K 做单位。

日常生活中用的摄氏温度 () 和热力学温度 T(K) 的数值关系为 $t = T - 273.15$

热力学第三定律　热力学的温标的 0K（绝对零度）是不能达到的。

8.3　理想气体状态方程

在平衡态下,

$$pV = \frac{m}{M}RT = \nu RT \tag{8.1}$$

m 气体的质量
M 气体的摩尔质量
ν 气体的摩尔数

或写成

$$p = \frac{N}{V}kT = nkT \tag{8.2}$$

N 气体的分子数
n 单位体积内气体分子数 (气体分子数密度)

普适气体常量　$R = 8.31$ (J/(mol·K))

玻尔兹曼常量　$k = \dfrac{R}{N_A} = 1.38 \times 10^{-23}$ (J/K)

N_A 阿伏加德罗常量

8.4 气体分子的无规则运动

平均自由程 $\bar{\lambda}$ 分子的无规则运动中各段自由路程（连续两次碰撞间分子经过的路程）的平均值。

平均碰撞频率 $\bar{z}$ 一个气体分子单位时间内被碰撞次数的平均值。

$\bar{v}$ 气体分子平均运动速率

$$\bar{\lambda} = \frac{\bar{v}}{\bar{z}} \tag{8.3}$$

碰撞截面 σ 一个气体分子在运动中可能与其他分子发生碰撞的截面面积。

对于分子都相同的气体，其分子的平均自由程为

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma n} = \frac{kT}{\sqrt{2}\sigma p} \tag{8.4}$$

8.5 理想气体的压强

按位置均匀分布和速度按方向均匀分布的假设是一种统计性假设，适用于大量分子的集体，$\overline{v^2}, \bar{\varepsilon_t}$ 都是统计平均值.

按分子的无相互作用的本身体积可以忽略的弹性小球模型以及平衡态下气体中分子按位置均匀分布和速度按方向均匀分布的假设可导出

$$p = \frac{1}{3}nm\overline{v^2} = \frac{2}{3}n\bar{\varepsilon_t} \tag{8.5}$$

其中，$\bar{\varepsilon_t}$ 为平均平动动能.

8.6 温度的微观统计意义

由上述公式和理想气体压强公式可得

$$\bar{\varepsilon_t} = \frac{3p}{2n} = \frac{3nkT}{2n} = \frac{3}{2}kT \tag{8.6}$$

由此式可知，从微观上看，

1. 温度反映物体内分子无规则运动的激烈程度；
2. 温度是描述系统平衡态的物理量；
3. 它是一个统计概念，只适用于大量分子的集体；
4. 它所涉及的分子运动是在系统的质心系中的分子的无规则运动。

8.7 能量均分定理

能量均分定理 在温度为 T 的平衡态下，气体分子每个自由度的平均动能都相等，而且等于 $\frac{kT}{2}$.

气体分子的自由度见下表8.1.

以 i 表示分子的总自由度数，理想气体的平均总动能就是

$$\bar{\varepsilon_k} = \frac{i}{2}kT \tag{8.7}$$

内能的表达式说明理想气体的内能只是温度的函数，而且和热力学温度成正比.

ν(mol) 理想气体的内能为

$$E = \frac{i}{2}kT \cdot N = \frac{i}{2}\nu N_A kT = \frac{i}{2}\nu RT \tag{8.8}$$

表 8.1: 气体分子的自由度

分子种类	平动自由度 t	转动自由度 r	总自由度 $i=t+r$
单原子分子	3	0	3
刚性双原子分子	3	2	5
刚性多原子分子	3	3	6

8.8 速率分布律

速率分布函数

$$f(v)=\frac{\mathrm{d}N_v}{N\,\mathrm{d}v}$$

$f(v)$ 又称为分子速率分布的概率密度，满足归一化条件

$$\int_0^N \frac{\mathrm{d}N_v}{N}=\int_0^\infty f(v)\ \mathrm{d}v=1$$

速率分布函数的意义是速率在 v 附近的单位速率区间（$\mathrm{d}v$）内的分子数（$\mathrm{d}N_v$）占分子总数（N）的百分比，或者说一个分子的速率在 v 附近单位速率区间的概率。

麦克斯韦速率分布率 在平衡态下，气体分子的速率分布函数为

$$f(v)=4\pi\left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2}v^2\mathrm{e}^{-mv^2/2kT} \tag{8.9}$$

最概然速率 v_p 使上式(8.9)取得极大值的点

$$v_p=\sqrt{\frac{2kT}{m}}=\sqrt{\frac{2RT}{M}}\approx 1.41\sqrt{\frac{RT}{M}} \tag{8.10}$$

当 $v=v_p$ 时，

$$f(v_p)=\frac{1}{\mathrm{e}}\sqrt{\frac{8m}{\pi kT}}$$

平均速率 $\overline{v}$

$$\overline{v}=\sqrt{\frac{8kT}{\pi m}}=\sqrt{\frac{8RT}{\pi M}}\approx 1.60\sqrt{\frac{RT}{M}} \tag{8.11}$$

均方根速率 v_{rms}

$$v_{\mathrm{rms}}=\sqrt{\frac{3kT}{m}}=\sqrt{\frac{3RT}{M}}\approx 1.73\sqrt{\frac{RT}{M}} \tag{8.12}$$

8.9 平均值与涨落

在用统计方法从微观出发研究热现象时, 总要求微观量的统计平均值压强公式中的 $n,\overline{\varepsilon_k},\overline{v^2},p$, 速率分布函数中的 $\mathrm{d}N,\overline{v}$, 都是统计平均值, 即对大量分子求平均的结果。求平均值时涉及的区间。如 $\mathrm{d}V,\mathrm{d}A,\mathrm{d}t,\mathrm{d}v$ 等, 都必须是宏观小微观大的区间。和宏观现象相联系的统计平均值都是对足够大（理论上无限大）区间求平均的结果。正是因为这样，所以涉及的区间不够大（即分子数不够多）时，一定微观量的平均值和该微观量的统计平均值有差别这个差别叫涨落。系统包含的分子数越小，涨落越大。分子数足够小时，涨落将非常大，以致该情况下谈论平均值在物理上就没有什么意义了。

8.10 解题要点

本章主要方法：套公式

1. 确定分析的系统
2. 辨别其所处的状态
3. 将同一平衡态的相关状态参量 (p, V, T, m) 代入状态方程求解（注意单位!）

第 9 章　热力学第一定律

9.1　功　热量　热力学第一定律

从微观上看（在力学上就是把系统当分子组成的质点系处理），系统和外界交换能量的过程有两种情况：

功　系统和外界的边界发生宏观位移, 这种情况下外界对系统做宏观功, 简称功。它实质上是系统和外界交换的分子有规则运动的能量。

热量　系统和外界的分子通过碰撞对系统做微观功而交换无规则运动的能量。这种交换只有在系统和外界分子的无规则运动平均动能不同，即在系统和外界的温度不同时才能发生。这种交换方式叫热传递, 所传递的无规则透动能量的多少叫热量。

内能　系统中所有分子的无规则运动能是的总和。

热力学第一定律　从微观上应用对质心系的机械能守恒定律, 以 A 表示外界对系统做的宏观功, 以 Q 表示外界对系统做的微观功, 即输入系统的热量。以 E 表示系统的内能, 则有

$$A' + Q = \Delta E$$

常用 A 表示系统对外界做的功。由于 $A' = -A$，即

$$Q = \Delta E + A \tag{9.1}$$

热力学第一定律是普遍的能量守恒定律的“初级形式“。它适用于系统的任意过程。

9.2　准静态过程

准静态过程　过程进行中的每一时刻，系统的状态都无限接近与平衡态。‘‘无限缓慢" 的过程就是准静态过程。

在无摩擦的准静态过程中系统对外做的 ‘‘体积功" 为

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p \, \mathrm{d}V \tag{9.2}$$

准静态过程可以用状态图上的曲线表示

注：功是 ‘‘过程量"

9.3　热容 [量]

热量也是 ‘‘过程量"，和温度变化有关的热量可用热容量计算。

对于固体或液体，如果吸热仅引起温度的升高，则

$$Q = cm\Delta T \tag{9.3}$$

潜热 物体在相变时所吸收或放出的热量。

融化热 固体融化时吸收的热量。

汽化热 液体在沸点汽化时吸收的热量。

摩尔定压热容

$$C_{p,m} = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}\right)_p \tag{9.4}$$

摩尔定体热容

$$C_{V,m} = \frac{1}{\nu}\left(\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}T}\right)_V \tag{9.5}$$

i 是气体分子的自由度，可以参看表8.1. 理想气体的内能改变可以直接由定体热容求出：$\Delta E = E_2 - E_1 = \nu C_{V,m}\Delta T$

对于理想气体，

$$C_{p,m} = \frac{i+2}{2}R\,, \quad C_{V,m} = \frac{i}{2}R \tag{9.6}$$

麦耶公式

$$C_{p,m} - C_{V,m} = R \tag{9.7}$$

比热比

$$\gamma = \frac{C_{p,m}}{C_{V,m}} = \frac{i+2}{i} \tag{9.8}$$

9.4 绝热过程

特点：$Q = 0$，热力学第一定律给出 $A = \Delta E$.

泊松公式的变形方程有

$TV^{\gamma-1} = C_2$

$p^{\gamma-1}T^{-\gamma} = C_3$

理想气体的准静态绝热过程

泊松公式

$$pV^\gamma = C_1 \tag{9.9}$$

对外做的功

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = \frac{1}{\gamma-1}(p_2V_2 - p_1V_1) \tag{9.10}$$

而由泊松公式

$$p_1V_1^\gamma = p_2V_2^\gamma$$

那么上式可写为

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{\gamma-1}(p_2V_2 - p_1V_1) \\ &= \frac{p_1V_1}{\gamma-1}\left(\frac{p_2V_2}{p_1V_1} - 1\right) \\ &= \frac{p_1V_1}{\gamma-1}\left[\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} - 1\right] \end{aligned}$$

绝热线比等温线陡，即在两条曲线中前者的斜率较大。

绝热自由碰膨胀过程

气体想真空的膨胀，是一种非准静态的过程。理想气体经绝热自由膨胀后内能不变，即 $E = 0$，说明 $\Delta T = 0$。而绝热过程有 $Q = 0$，则 $A = 0$。

9.5 几个热力学过程分析

对于等温过程，由理想气体状态方程可得：

$$p = \frac{\nu RT}{V}$$

那么，

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p\,dV = \int_{V_1}^{V_2} \frac{\nu RT}{V} dV = \nu RT \frac{\ln V_2}{\ln V_1} = \nu RT \frac{\ln p_2}{\ln p_1}$$

绝热过程和自由膨胀过程的具体推导参见9.4节

对于一般过程，系统对外界做功 A 可以用 $p - V$ 图的面积计算，其内能变化为

$$\Delta E = \nu C_{V,m} \Delta T = \frac{i}{2}(p_2V_2 - p_1V_1)$$

表 9.1: 热力学过程能量分析

热力学过程	对外界做功 A	从外界吸收的能量 Q	系统内能变化 ΔE
等体过程	0	$\nu C_{V,m}\Delta T$	Q
等压过程	$p\Delta V$	$\nu C_{p,m}\Delta T$	$Q - A$
等温过程	$\nu RT \frac{\ln p_2}{\ln p_1}$	$-A$	0
自由膨胀	0	0	0
绝热过程	$\frac{p_1V_1}{\gamma - 1}\left[\left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\gamma-1} - 1\right]$	0	$-A$
循环过程	A	$-A$	0
一般过程	$\int_{V_1}^{V_2} p\,dV$	$\Delta E - A$	$\frac{i}{2}(p_2V_2 - p_1V_1)$

9.6 循环过程

工质 在热机中被利用来吸收热量并对外做功的物质.

循环 一个系统经历一系列变化后又回到初始状态的整个过程.

循环过程的特点：由于系统状态复原，所以 $\Delta E = 0$，由热力学第一定律可知 $Q = A$，即系统从外界吸收的净热量等于系统对外做的净功。

做功循环 系统从高温热库吸热 Q_1，对外做净功 A，向低温热库放热 $Q_2 = Q_1 - A$. 循环的效率为

$$\eta = \frac{A}{Q_1} = 1 - \frac{Q_2}{Q_1} \tag{9.11}$$

制冷循环 系统从低温热库吸热 Q_2，接受外界对它做的功 A，向高温热库放热 $Q_1 = A + Q_2$. 制冷系数

$$\omega = \frac{Q_2}{A} = \frac{Q_2}{Q_1 - Q_2} \tag{9.12}$$

9.7 卡诺循环

卡诺循环 系统只在两个恒温热库 ($T_2 > T_1$) 进行热交换的准静态循环过程（无摩擦），循环效率和制冷系数分别为

$$\eta_C = 1 - \frac{T_2}{T_1}, \quad \omega_C = \frac{T_2}{T_1 - T_2} \tag{9.13}$$

9.8 热力学温标

热力学温标 利用卡诺循环定义的温标：

$$\frac{T_1}{T_2} = \frac{Q_1}{Q_2} \tag{9.14}$$

定点取水的三相点温度为 $T_3 = 273.16\,\mathrm{K}$.

9.9 解题方法

1. 认系统 过程要确定题目中要作为分析对象的系统。这同时也就确定了外界。

2. 辨状态 即要辨别清楚所选定的系统的初状态和末状态以及相应的状态参量,并对同一状态参量 p, V, T 等加注同一数字下标, 如 p_1, V_1, T_1 等。对所关注的状态要弄清楚是否为平衡态。对理想气体的平衔状态的各状态参量才能应用理想气体状态方程。内能表示式也只能用于平衡态。

3. 明过程 即要明确所选定的系统经历的是什么过程。首先要分清是否是准静态过程。有很多公式, 如求体积功的积分公式和绝热过程的过程方程, 都只是准静态过程才适用的方程。其次要明确是怎样的具体过程，如等温、等压、等体、绝热等。

4. 列方程 即根据以上分析列相应的方程求解。功是过程量, 可以利用求体积功的积分公式直接计算功的大小。热量也是过程量, 可以直接利用定压或定容热容量计算热量的多少, 也可以利用热力学第一定律公式由已知热量求功或已知功求热量。要注意 $A, Q, \Delta E$ 各量的正负的物理意义。

5. 画图线 在解题过程中，最好能画出过程图线。这样对理解题目和分析求解都有帮助。

第 10 章　热力学第二定律

10.1　自然过程的方向

各种自然的宏观过程都是不可逆的，而且它们的不可逆性又是相互沟通的。

三个实例

可逆的过程有：1. 无摩擦的缓慢绝热压缩过程；2. 传热：系统和外界温差为无限小的热传导（等温热传导）。

不可逆的过程有：1. 有摩擦的缓慢绝热压缩过程；2. 快速绝热压缩过程；3. 系统和外界温差为有限大小的热传导

功热转换　热自动地转变为为功的过程是不可能发生的。即通过摩擦而使功变热的过程是不可逆转的。也可表述为：不引起其他任何变化，因而唯一效果是一定量的内能（热）全部转变成了机械能（功）的过程是不可能发生的。所以，自然界里的功热转换过程具有方向性。

热传导　两个温度不同的物体相互接触，热量总是自动地由高温物体传向低温物体。热量由高温物体传向低温物体的过程也是不可逆的。

气体的绝热自由膨胀　气体向真空中绝热自由膨胀的过程是不可逆的。

10.2　热力学第二定律的宏观表述

热力学第二定律　自然宏观过程进行的方向的规律.

第一类永动机：不需要能量输入而能继续工作的机器；第二类永动机：有能量输入但只利用一个恒温热源工作的机器（单热源热机）。

克劳休斯表述　热量不能自动地由低温物体传向高温物体.

开尔文表述　其唯一效果是热全部转变为功的过程是不可能的（第二类永动机不可能造成）.

微观意义　自然过程总是沿着使分子运动更加无序的方向进行。这是一条关于大量分子集体行为的统计规律。

10.3　热力学第二定律的微观表述

玻尔兹曼的微观—宏观关系　从微观上来看，对于一个系统状态的宏观表述是非常不完善的，系统的同一个宏观状态可能对应于非常多的微观状态，而这些微观状态是粗略的宏观描述所不能加以区别的。

热力学概率　系统的任一宏观状态所对应的微观状态数称为该宏观状态的热力学

概率，以 Ω 表示。它是分子运动无序性的种量度.

基本统计假设 对于孤立系，各个微观状态出现的概率是相同的。由此推论得

(1) 对孤立系，在一定条件下的平衡态对应于 Q 为最大的状态，即分子运动最无序的状态。对于实际的系统来说,Ω 的最大值实际上就等于该系统在给定条件下的所有微观状态总数。

(2) 系统在非平衡态 (即 Ω 不是最大值) 时将自发地向平衡态过渡。

对于孤立系，自然过程总是向着增大的方向进行的最大值对应于平衡态。这是热力学第二定律的微观表述。

10.4 卡诺定理

$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

$\eta' \le \eta = 1 - \frac{T_2}{T_1}$

卡诺定理

1. 在相同高温热源和低温热源之间工作的任意的可逆机都具有相同的效率。

2. 工作在相同的高温热源和低温热源之间的一切不可逆机的效率都不可能大于可逆机的效率。

10.5 玻尔兹曼公式与熵增加原理

玻尔兹曼熵公式 定义熵为

$$S = k \ln \Omega \tag{10.1}$$

此熵具有可加性，即对于有两个子系统的系统有

$$S = S_1 + S_2$$

对于理想气体，有

$$S = R \ln V + C_{V,m} \ln T + S_0 \tag{10.2}$$

故 ΔS 也可以表示为

$$\Delta S = S_2 - S_1 = R \ln \frac{V_2}{V_1} + C_{V,m} \ln \frac{T_2}{T_1} \tag{10.3}$$

熵增加原理是用熵概念表述的热力学第二定律.

熵增加原理 由玻尔兹曼熵公式表示的 S 和 Ω 关系可知，在孤立系中进行的自然过程总是沿着熵增大的方向进行，它是不可逆的，即

$$\Delta S > 0 \quad \text{（孤立系，自然过程）}$$

熵增加原理是一条统计规律，只适用于大量分子组成的集体。孤立系的熵减小的过程不是原则上不可能，而是概率非常小，实际上不会发生。

10.6 克劳修斯熵公式

可逆过程都是准静态过程，但是准静态过程不一定是可逆过程。

可逆过程 一个过程进行时，如果使外界改变一无穷小的量，这个过程可以反向进行（其结果是系统和外界能同时回到初态）。这样的过程叫做可逆过程。这需要系

统在过程中无内外摩擦并与外界进行等温热传导。

克劳修斯熵公式　一个系统进行一可逆过程时，

$$dS = \frac{dQ_R}{T} \tag{10.4}$$

和

$$\Delta S = S_2 - S_1 = {}_R\int_1^2 \frac{dQ}{T} \tag{10.5}$$

对于任意系统的绝热等熵过程，由于 $dQ = 0$，所以 $dS = 0$. 因此，任何系统的可逆绝热过程都是等熵过程。

克劳修斯不等式　对于任意系统的不可逆过程，

$$dS > \frac{dQ}{T}$$

和

$$S_2 - S_1 > {}_{Ir}\int_1^2 \frac{dQ}{T}$$

10.7 解题要点

主要是利用克劳修斯煸公式积分求熵变。对具体题目的分析求解要注意以下几点:

(1) 明确要计算其熵变的系统。它可以是一个特定的系统, 也可能是包括所有参与变化的几个系统组成的 ‘‘孤立系统"。

(2) 要明确过程的初态和末态。用克劳修斯嫡公式求熵变时，初末态都应是平衡态。

(3) 要明用来计算熵变的过程必须是可逆过程。遇到实际的过程不可逆时，也要选一个可逆过程。对初末态温度相同的过程，可以选一个连接初末态的等温过程进行计算。如果初末态温度不同，则必须用克修斯熵公式原形进行积分运算，这时 dQ 可用 $dE + pV$.

10.8 常见等值可逆过程的熵变计算

等体可逆过程的熵变

$$\Delta S = S_2 - S_1 = {}_R\int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\nu C_{V,m} dT}{T} = \nu C_{V,m} \ln\frac{T_2}{T_1} = \nu C_{V,m} \ln\frac{p_2}{p_1}$$

等压可逆过程的熵变

$$\Delta S = S_2 - S_1 = {}_R\int_1^2 \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{\nu C_{p,m} dT}{T} = \nu C_{p,m} \ln\frac{T_2}{T_1} = \nu C_{p,m} \ln\frac{V_2}{V_1}$$

等温可逆过程的熵变

$$\Delta S = S_2 - S_1 = {}_R\int_1^2 \frac{dQ}{T} = \frac{1}{T}\int_0^Q \frac{dQ}{T} = \frac{Q}{T} = \nu R \ln\frac{V_2}{V_1} = \nu R \ln\frac{p_2}{p_1}$$

绝热可逆过程的熵变

$$\Delta S = S_2 - S_1 = {}_R\int_1^2 \frac{\mathrm{d}Q}{T} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta S = 0$$

10.9 不可逆过程熵的计算

绝热自由膨胀 绝热容器中的理想气体是一孤立系统，气体的体积由 V_1 膨胀到 V_2, 而始末温度相同，设都是 T_0，故可以设计一个可逆等温膨胀过程，使气体与温度也是 T_0 的一恒温热库接触吸热而体积由 V_1 缓慢膨胀到 V_2，

$$\Delta S = S_2 - S_1 = {}_R\int_1^2 \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \frac{1}{T}\int_0^Q \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \frac{Q}{T} = \nu R \ln \frac{V_2}{V_1}$$

m 物质的质量

l 物质的汽化热 (J/kg)

气液相变

$$\Delta S = S_2 - S_1 = {}_R\int_1^2 \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \frac{1}{T}\int_0^Q \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \pm\frac{lm}{T}$$

λ 物质的融化热 (J/kg)

固液相变

$$\Delta S = S_2 - S_1 = {}_R\int_1^2 \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \frac{1}{T}\int_0^Q \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \pm\frac{\lambda m}{T}$$

c 物质的比热 (J/kg · K)

同相温变

$$\Delta S = S_2 - S_1 = {}_R\int_1^2 \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \int_{T_1}^{T_2} \frac{cm\mathrm{d}T}{T} = cm \ln \frac{T_2}{T_1}$$

ν 物质的摩尔数

$C_{V,m}$ 摩尔定体热容

R 普适气体常量

气体熵变（任意过程）

$$\begin{aligned}
\Delta S = S_2 - S_1 &= {}_R\int_1^2 \frac{\mathrm{d}Q}{T} = \nu\, {}_R\int_1^2 \frac{\mathrm{d}E + p\mathrm{d}V}{T} \\
&= \nu \int_1^2 \frac{C_{V,m}\mathrm{d}T + p\mathrm{d}V}{T} = \nu \int_1^2 \frac{C_{V,m}\mathrm{d}T}{T} + \nu \int_1^2 \frac{RT}{V}\cdot\frac{\mathrm{d}V}{T} \\
&= \nu C_{V,m} \int_1^2 \frac{\mathrm{d}T}{T} + \nu R \int_1^2 \frac{\mathrm{d}V}{V} \\
&= \nu \left(C_{V,m} \ln \frac{T_2}{T_1} + R \ln \frac{V_2}{V_1} \right)
\end{aligned}$$

索引