弹性力学基础笔记

19320125 易鹏

2021 年 11 月 2 日

第 1 章 引言

1.1 研究内容

弹性力学是固体力学的分支，其研究对象为

- 材料力学研究杆状弹性体在拉伸、压缩、剪切、弯曲和扭转作用下的变形和内力。
- 弹性力学研究的对象为连续体，没有形状限制。

研究方法为：

- 材料力学除了采用一些基本假设外，还引进一些关于变形状态或应力分布的补充假设。
- 弹性力学并不需要引进这样的补充假设。

弹性力学的研究方法更为严瑾，所得的结果也比材料力学精确，也常常用弹性力学的方法来评估材料力学方法的精度和适用范围。

1.2 弹性力学的基本假设

定理 1.1 连续性假设（continuous）假设

构成物体的材料是密实无间隙的连续介质，并在变形过程中保持连续性。物体中的应力、应变、位移等物理量可以看成是连续的，在数学上可以用空间位置的连续函数表示。

定理 1.2 均匀性（homogeneous）假设

物体内各处材料的力学性质都相同，与各点的空间位置无关。

定理 1.3 各向同性（isotropic）假设

在物体内任一点处材料在各个方向的物理性质都相同。反映这些物理性质的弹性系数不随坐标位置和方向而改变。

定理 1.4　完全线弹性（linear elasticity）假设

假设材料是完全弹性的，且服从虎克定律，物体在外力作用下变形，除去外力后，物体完全恢复原状，没有任何剩余变形。应力与应变关系是线性的。

定理 1.5　小变形（small deformation / small deflection）假设

假设物体在外力作用下引起变形是微小的，与物体最小特征尺寸相比可以忽略不计。在研究物体受力后的平衡状态时，可不考虑物体尺寸的变化，而应用变形前的尺寸；研究变形时，变形的二次幂和乘积项都是高阶小量，可略去。这样就使得弹性力学的微分方程成为线性的。

1.3　弹性力学中的基本概念

定义 1.1　外力

外力：作用在物体上的力，可以分为体力和面力。

- 体力：分布在物体整个体积的力，如重力、惯性力等。用体力沿坐标轴的投影表示。量纲为 [力][长度]$^{-3}$，用 X, Y, Z 表示。
- 面力：作用于物体表面上的力，如流体压力、接触力等。用面力沿坐标轴的投影表示。量纲为 [力][长度]$^{-3}$，用 $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$ 表示。

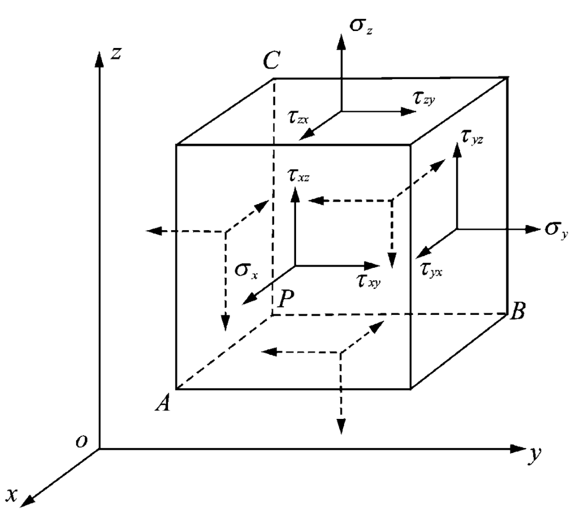

图 1: 微元体示意图

定义 1.2　微元体

微元体：宏观上足够小，微观上足够大。（如图1所示）

定义 1.3　应力（stress）

应力：物体收到外力作用会在其内部引起应力。

- 每个面上有一个正应力和剪应力
- 正面上的应力沿坐标轴正向为正
- 负面上的应力沿坐标轴沿坐标轴负向为正
- 6 个独立应力变量（剪应变互等定理）

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz} \tag{1.1}$$

定义 1.4　应变（strain）

应变：弹性体受力后，他的形状和尺寸都要改变，这种改变可以归结为长度的改变和角度的改变。

- 各线段没单位长度的伸缩称为正应变，用 ε 表示。
- 每两线段之间支教的改变称为剪应变，用 γ 表示。(注：直角 $\rightarrow$ 锐角，$\gamma > 0$)

定义 1.5　位移

位移：物体受力后，它内部各点将发生位置的移动。物体内任一点的位移用它在 x, y, z 三坐标轴上的投影 u, v, w 来表示，沿坐标轴正方向为正，反之为负。这三个投影称为该点的位移分量。

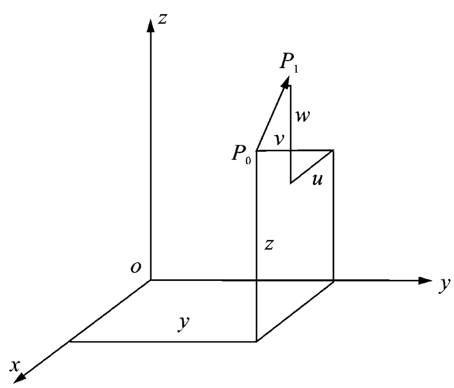

图 2: 位移示意图

1.4　弹性力学的研究内容

一般而言，弹性体内任意点的体力分量、面力分量、应力分量、应变分量和位移分量都是随点的位置不同而改变的，因而，都是点位置坐标的连续函数（场函数）。

弹性力学寻求建立连续体中体力、面力、应力场、应变场和位移场之间的关系。

1.5　弹性力学的基本方法

采用微元体法，建立微分方程。

- **平衡方程**：外力—应力
- **几何方程**：位移—形变
- **物理方程**：应力—应变

第 2 章 基本方程

建立微元体模型如图3所示。

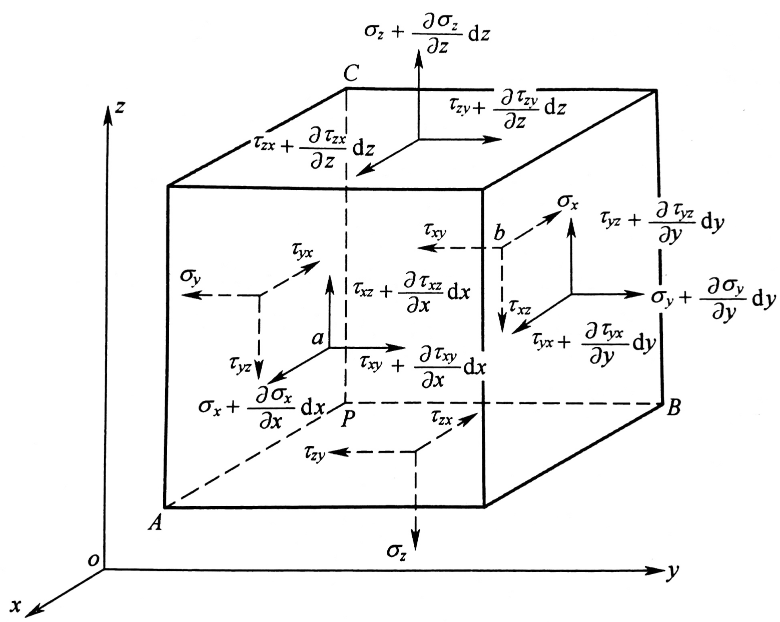

图 3: 微元体应力模型

2.1 力平衡微分方程

如图3所示，由力平衡，对 x 方向分析可得 $\sum F_x = 0$，即

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \sigma_x \mathrm{d}y\mathrm{d}z + \left(\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z - \tau_{yx}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z + \left(\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \tau_{zx}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + X\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0 \tag{2.1}$$

化简得

$$\begin{gathered}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y + X\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0 \\ \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0\end{gathered} \tag{2.2}$$

同理可以得到 y, z 方向上的力平衡方程，从而确定微元体的力平衡方程。

定理 2.1 力平衡方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \dfrac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \dfrac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0\end{cases} \tag{2.3}$$

2.2 力矩平衡方程

如图3所示，由力矩平衡，对 x 轴力矩有 $\sum M_x = 0$，即

$$\left(\tau_{yz}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}y}{2}+\tau_{yz}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}y}{2}-\left(\tau_{zy}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}z}{2}-\tau_{zy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}z}{2}=0 \tag{2.4}$$

化简得

$$\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial y}\mathrm{d}y\mathrm{d}x\mathrm{d}z\frac{\mathrm{d}y}{2}+\tau_{yz}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}z\mathrm{d}y-\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\frac{\mathrm{d}z}{2}-\tau_{zy}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0 \tag{2.5}$$

略去无穷小量，可得

$$\tau_{yz}=\tau_{zy} \tag{2.6}$$

同理可以得到 y, z 方向上的力矩平衡方程，得到剪应力互等定律。

定理 2.2 剪应力互等定律

$$\tau_{yz}=\tau_{zy}\qquad\tau_{zx}=\tau_{xz}\qquad\tau_{xy}=\tau_{yx} \tag{2.7}$$

2.3 几何方程

变形前，微元体在 xoy 面上的投影如图4所示。变形后，微元体在 xoy 面上的投影如图5。需要注意的是 $u(x,y), v(x,y)$ 是双变量函数，不要看它们只是单方向的位移而忽视了这点。对于图中的量，设 $P'(x,y)$，则 $A''(x+\mathrm{d}x,y)$, $B''(x,y+\mathrm{d}y)$，取泰勒一阶展开式：

$$PA'|_x=u(x,y)+u_x(x+\mathrm{d}x-x)=u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\qquad PA'|_y=v(x,y)+v_x(x+\mathrm{d}x-x)=v+\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x$$

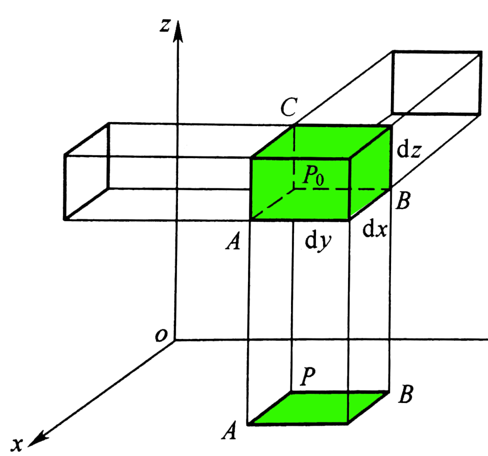

图 4: 变形前微元体投影示意图

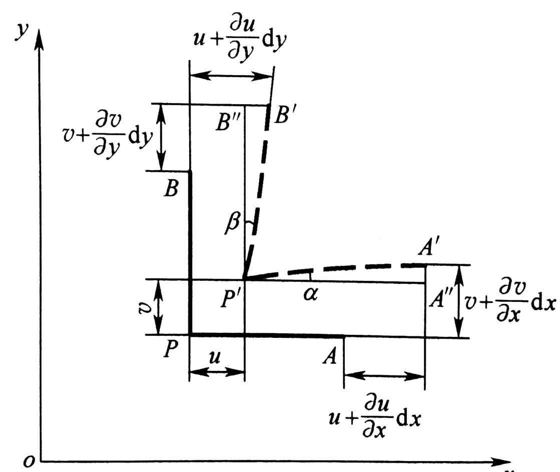

图 5: 变形后微元体投影示意图

则线段 PA 的正应变为

$$\varepsilon_x=\frac{P'A'-PA}{PA}\approx\frac{P'A''-PA}{PA}=\frac{u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x-u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.8}$$

同理可得

$$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z} \tag{2.9}$$

而点 P_0 处的剪应变为线段 PA 和线段 PB 之间直角的改变，其包括 PA 向 y 轴方向的转角 α，另一部分是 PB 向 x 轴方向的转角 β。在小变形情况下，有

$$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{A'A''}{P'A''} = \frac{\dfrac{\partial v}{\partial x}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x + \dfrac{\partial u}{\partial x}\,\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\partial v}{\partial x}}{1 + \dfrac{\partial u}{\partial x}} \tag{2.10}$$

而由于 $\dfrac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x \ll 1$，可以略去。则进一步化简为

$$\alpha = \frac{\partial v}{\partial x} \tag{2.11}$$

同理，可以得到

$$\beta \approx \tan\beta = \frac{B'B''}{P'B''} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial y}\,\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y + \dfrac{\partial v}{\partial y}\,\mathrm{d}y} = \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.12}$$

从而得到切应变为

$$\tau_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{2.13}$$

同理分析 xoz, yoz 平面上的投影变化，可以得到相应的切应变为

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \qquad \gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \tag{2.14}$$

综合分析结果，可以得到几何方程。

定理 2.3 几何方程（应变—位移关系式）

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x}, & \gamma_{yz} = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y}, & \gamma_{zx} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x} \\ \varepsilon_z = \dfrac{\partial w}{\partial z}, & \gamma_{xy} = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \tag{2.15}$$

注意

当物体对位移分量给定时，应变分量就完全确定了。但是反过来，当应变分量给定时，位移分量却不能完全确定，需要给定边界条件。

2.4 刚体位移

1. **平面刚体位移**

   对于平面刚体，结合几何方程(2.15)有

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

对前面两个式子进行积分，得到

$$u = f_1(y), \qquad v = f_2(x)$$

代入第三个式子，得

$$-\frac{\mathrm{d}f_1(y)}{\mathrm{d}y}=\frac{\mathrm{d}f_2(x)}{\mathrm{d}x}$$

上式对左边是 y 的函数，右边是 x 的函数，所以只可能是常数，设这个常数为 ω_z 即

$$-\frac{\mathrm{d}f_1(y)}{\mathrm{d}y}=\omega_z,\qquad \frac{\mathrm{d}f_2(x)}{\mathrm{d}x}=\omega_z$$

积分后可得

$$\begin{cases} u=f_1(y)=u_0-\omega_z y \\ v=f_2(x)=v_0+\omega_z x \end{cases} \tag{2.16}$$

其中，u_0 和 v_0 是积分常量。对于结果里面的各参数，都有其物理意义。u_0, v_0 分别代表 x, y 方向的平动；ω_z 代表刚体绕 z 轴的转动。

2. **空间刚体位移**

对于空间刚体，和平面刚体类似，可以得到

定理 2.4　空间刚体位移

$$\begin{cases} u=u_0+\omega_y z-\omega_z y \\ v=v_0+\omega_z x-\omega_x z \\ w=w_0+\omega_x y-\omega_y x \end{cases} \tag{2.17}$$

其中，u_0, v_0, w_0 分别代表 x, y, z 方向的平动；$\omega_x, \omega_y, \omega_z$ 代表刚体绕 x, y, z 轴的转动。

由此可知，应变为 0 时，弹性体仍可能存在刚体位移，为此引入位移边界条件的概念。

定义 2.1　位移边界条件

当物体发生一定的形变时，由于约束条件的不同，它可能具有不同的位移，为了确定物体的位移，消除物体的刚体位移，必须有足够的约束条件，这些条件称为位移边界条件，即

$$\begin{cases} u=\overline{u} \\ v=\overline{v} \\ w=\overline{w} \end{cases} \tag{2.18}$$

2.5　变形协调方程

由几何方程可见，六个应变分量完全由三个位移分量对坐标对偏导数所确定。因此这六个变量不是相互独立的，它们之间一定存在关系。由于关系式均有轮换对称性，在推导时只列举一种情况。

- 第一组关系

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}$$

- 第二组关系

$$\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)=2\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}$$

对上式对 z 求导数，得到

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\frac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y}-\frac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)=2\frac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y}$$

两组关系汇集，得到变形协调方程。

定理 2.5　变形协调方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}, & \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}+\dfrac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}-\dfrac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}\right)=2\dfrac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y\partial z}\\ \dfrac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z^2}+\dfrac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial y^2}=\dfrac{\partial^2\gamma_{yz}}{\partial y\partial z}, & \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}+\dfrac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}-\dfrac{\partial\gamma_{zx}}{\partial y}\right)=2\dfrac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial z\partial x}\\ \dfrac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial z^2}=\dfrac{\partial^2\gamma_{zx}}{\partial z\partial x}, & \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial\gamma_{yz}}{\partial x}+\dfrac{\partial\gamma_{xz}}{\partial y}-\dfrac{\partial\gamma_{xy}}{\partial z}\right)=2\dfrac{\partial^2\varepsilon_z}{\partial x\partial y}\end{cases}\tag{2.19}$$

第 3 章　物理方程

平衡微分方程和几何方程，适用于任何弹性体，与物体的物理性质无关。但仅有这两组方程还不能求解，还必须考虑物理学方面。

定义 3.1　物理方程（Physical Equations）

建立起应变分量与应力分量之间的关系，这些关系式称为物理方程。

$$\begin{cases}\sigma_x=C_{11}\varepsilon_x+C_{12}\varepsilon_y+C_{13}\varepsilon_z+C_{14}\gamma_{yz}+C_{15}\gamma_{zx}+C_{16}\gamma_{xy}\\ \sigma_y=C_{21}\varepsilon_x+C_{22}\varepsilon_y+C_{23}\varepsilon_z+C_{24}\gamma_{yz}+C_{25}\gamma_{zx}+C_{26}\gamma_{xy}\\ \sigma_z=C_{31}\varepsilon_x+C_{32}\varepsilon_y+C_{33}\varepsilon_z+C_{34}\gamma_{yz}+C_{35}\gamma_{zx}+C_{36}\gamma_{xy}\\ \tau_{yz}=C_{41}\varepsilon_x+C_{42}\varepsilon_y+C_{43}\varepsilon_z+C_{44}\gamma_{yz}+C_{45}\gamma_{zx}+C_{46}\gamma_{xy}\\ \tau_{zx}=C_{51}\varepsilon_x+C_{52}\varepsilon_y+C_{53}\varepsilon_z+C_{54}\gamma_{yz}+C_{55}\gamma_{zx}+C_{56}\gamma_{xy}\\ \tau_{xy}=C_{61}\varepsilon_x+C_{62}\varepsilon_y+C_{63}\varepsilon_z+C_{64}\gamma_{yz}+C_{65}\gamma_{zx}+C_{66}\gamma_{xy}\end{cases}\tag{3.1}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix}\sigma_x\\ \sigma_y\\ \sigma_z\\ \tau_{yz}\\ \tau_{zx}\\ \tau_{xy}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}C_{11}&C_{12}&C_{13}&C_{14}&C_{15}&C_{16}\\ C_{21}&C_{22}&C_{23}&C_{24}&C_{25}&C_{26}\\ C_{31}&C_{32}&C_{33}&C_{34}&C_{35}&C_{36}\\ C_{41}&C_{42}&C_{43}&C_{44}&C_{45}&C_{46}\\ C_{51}&C_{52}&C_{53}&C_{54}&C_{55}&C_{56}\\ C_{61}&C_{62}&C_{63}&C_{64}&C_{65}&C_{66}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\varepsilon_x&\varepsilon_y&\varepsilon_z&\tau_{yz}&\tau_{zx}&\tau_{xy}\end{bmatrix}\tag{3.2}$$

对于各向同性弹性体，仅有两个独立的弹性常数，其应变分量与应力分量之间的关系如下：

定理 3.1 广义胡克定律

$$
\begin{cases}
\varepsilon_x = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right], & \gamma_{yz} = \dfrac{\tau_{yz}}{G} \\
\varepsilon_y = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)\right], & \gamma_{zx} = \dfrac{\tau_{zx}}{G} \\
\varepsilon_z = \dfrac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right], & \gamma_{xy} = \dfrac{\tau_{xy}}{G}
\end{cases}
\tag{3.3}
$$

其中，E 为材料拉压弹性模量，μ 为泊松比，G 为剪切弹性模量，而且三者之间的关系为

$$
G = \frac{E}{2(1+\mu)} \tag{3.4}
$$

若用应变分量来表示应力分量，其物理方程为

$$
\begin{cases}
\sigma_x = \lambda e + 2G\varepsilon_x, & \tau_{yz} = G\gamma_{yz} \\
\sigma_y = \lambda e + 2G\varepsilon_y, & \tau_{zx} = G\gamma_{zx} \\
\sigma_z = \lambda e + 2G\varepsilon_z, & \tau_{xy} = G\gamma_{xy}
\end{cases}
\tag{3.5}
$$

$$
e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \qquad \lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}, \qquad G = \frac{E}{2(1+\mu)}
$$

第 4 章 应力边界条件和圣维南原理

4.1 应力边界条件

物体处于平衡状态时，除了满足平衡方程(2.3)，在物体边界上还受到外部载荷的作用，借此可以得到应力分量和面力分量的关系。

取一个正六面微元体，到了物体边界上，就变成来正四面体 $P-ABC$，其体积为 $\mathrm{d}V = \dfrac{1}{3}\mathrm{d}A \cdot \mathrm{d}h$. 记斜微分面 ABC 的外法线方向为 $\boldsymbol{N}$，其与各坐标轴夹角的方向余弦分别为

$$
l = \cos(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{x}), \qquad m = \cos(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{y}), \qquad n = \cos(\boldsymbol{N}, \boldsymbol{z})
$$

斜微分面 ABC 上的面力沿三个坐标轴上的投影分别为 $\overline{X}, \overline{Y}, \overline{Z}$. 由于微分面很小，其面上作用的应力和面力可看作均匀分布的。考虑 x 方向上的受力，由受力平衡，有

$$
\overline{X}\mathrm{d}A - \sigma_x l\mathrm{d}A - \tau_{yx} m\mathrm{d}A - \tau_{zx} n\mathrm{d}A + X\mathrm{d}V = 0 \tag{4.1}
$$

消去高阶小量 $X\mathrm{d}V$ 并化简得到

$$
l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} = \overline{X} \tag{4.2}
$$

类似地，y, z 方向受力平衡综合得到

定理 4.1 应力边界条件

$$
\begin{cases}
l\sigma_x + m\tau_{yx} + n\tau_{zx} = \overline{X} \\
l\tau_{xy} + m\sigma_y + n\tau_{zy} = \overline{Y} \\
l\tau_{xz} + m\tau_{yz} + n\sigma_z = \overline{Z}
\end{cases}
\tag{4.3}
$$

第 5 章 平面应力和平面应变问题

	平面应力问题	平面应变问题
几何特点	等厚度板，厚度远小于板的长度	纵向尺寸远大于横向尺寸
受力特点	面力、体力平行于板平面 且沿板厚均匀分布	面力、体力垂直纵向且沿长度不变， 约束条件沿长度也不变
应力、应变特点	只有面内应力 $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ 存在， 应变 ε_z 和位移 w 不为 0	只有面内应变分量 $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ 存在， 应力 σ_z 不为 0

5.1 平面问题的基本方程

1. 平衡方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \dfrac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + X = 0 \\ \dfrac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \dfrac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y = 0 \end{cases} \tag{5.1}$$

2. 力边界条件

$$\begin{cases} l\sigma_x + m\tau_{yx} = \overline{X} \\ l\tau_{xy} + m\sigma_y = \overline{Y} \end{cases} \tag{5.2}$$

3. 几何方程

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{xy} = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \tag{5.3}$$

4. 变形协调方程

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{5.4}$$

5.2 平面问题的物理方程

1. 平面应力问题的物理方程

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y) \\ \varepsilon_y = \dfrac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x) \\ \gamma_{xy} = \dfrac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_x = \dfrac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y) \\ \sigma_y = \dfrac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x) \\ \tau_{xy} = \dfrac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy} \end{cases} \tag{5.5}$$

2. 平面应变问题的物理方程

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_x - \dfrac{\mu}{1-\mu}\sigma_y\right) \\ \varepsilon_y = \dfrac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_y - \dfrac{\mu}{1-\mu}\sigma_x\right) \\ \gamma_{xy} = \dfrac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \end{cases} \qquad \begin{cases} \sigma_x = \dfrac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left(\varepsilon_x + \dfrac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_y\right) \\ \sigma_y = \dfrac{E(1-\mu)}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left(\varepsilon_y + \dfrac{\mu}{1-\mu}\varepsilon_x\right) \\ \tau_{xy} = \dfrac{E}{2(1+\mu)}\gamma_{xy} \end{cases} \tag{5.6}$$

5.3 平面问题的解法

方法 1 位移法

以位移分量 u 和 v 作为基本未知函数，利用几何方程和物理方程，将应力分量用位移分量来表示，代入平衡微分方程、应力边界条件，就得到以位移分量为未知函数的定解方程、以及力边界条件。工程上应用较少。

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \varepsilon_y = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \tau_{xy} = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \xrightarrow{\text{代入平面应力问题的物理方程}} \begin{cases} \sigma_x = \dfrac{E}{1-\mu^2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \mu\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) \\ \sigma_y = \dfrac{E}{1-\mu^2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial y} + \mu\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) \\ \tau_{xy} = \dfrac{E}{2(1+\mu)}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \mu\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) \end{cases} \tag{5.7}$$

再代入力平衡方程，得到

$$\begin{cases} \dfrac{E}{1-\mu^2}\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{1-\mu}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{1+\mu}{2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}\right) + X = 0 \\ \dfrac{E}{1-\mu^2}\left(\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \dfrac{1-\mu}{2}\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{1+\mu}{2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right) + Y = 0 \end{cases} \tag{5.8}$$

同样地，可以得到应力边界条件和位移边界条件：

$$\begin{cases} \dfrac{E}{1-\mu^2}\left[l\left(\dfrac{\partial u}{\partial x} + \mu\dfrac{\partial v}{\partial y}\right) + m\dfrac{1-\mu}{2}\left(\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial x}\right)\right] = \overline{X} \\ \dfrac{E}{1-\mu^2}\left[m\left(\dfrac{\partial v}{\partial y} + \mu\dfrac{\partial u}{\partial x}\right) + l\dfrac{1-\mu}{2}\left(\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\right)\right] = \overline{Y} \end{cases} \tag{5.9}$$

方法 2 应力法

以应力分量作为基本未知量，利用平衡微分方程和变形协调方程可共同确定这三个未知函数。在这三个方程中，两个平衡方程本来就是用应力分量表示的，尚需将应变分量表示的变形协调方程改为用应力分量表示，得到所需的第三个方程。

将物理方程(5.5)代入变形协调方程(5.4)可以得到

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x - \mu\sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y - \mu\sigma_x) = 2(1+\mu)\frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} \tag{5.10}$$

由平衡微分方程(5.1)消去上式中的 τ_{xy}，即

索引