数学物理方法

易鹏
中山大学
指导老师 胡战超

内部版本号：V7.38.070 (公测版)

2021 年 7 月 9 日

目录

第 1 章　绪论

数学物理方程课程主要研究以下三个方程。

定义 1.1　泊松方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f \tag{1.1}$$

定义 1.2　波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{1.2}$$

定义 1.3　热传导方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{1.3}$$

可以发现，以上方程都是二阶线性偏微分方程.

- 二阶：导数的最高阶数为 2；
- 线性：只存在对于未知函数的线性运算[1]。

[1]线性运算：对于运算 $\mathcal{L}(u_1,u_2)$，满足：$\dfrac{\partial^n\mathcal{L}(\alpha_1u_1+\alpha_2u_2)}{\partial t^n}=\dfrac{\alpha_1\partial^n\mathcal{L}(u_1)}{\partial t^n}+\dfrac{\alpha_2\partial^n\mathcal{L}(u_2)}{\partial t^n}$

第 2 章　基本方程的建立

2.1　弦的横振动方程

有一个完全柔软的轻质均匀弦，沿水平直线绷紧，而后以某种方法激发，使弦在同一平面上作小振动，列出弦的振动方程。

以弦的平衡位置为 x 轴，弦的一端为原点，建立平面直角坐标系 $u-x$，如图。

描述弦的物理量：设 $u(x,t)$ 是坐标为 x 的弦上一点在 t 时刻的位移。

1. 假设

    - 在弦上隔离出长为 $\mathrm{d}x$ 的一小段（弧元）。弧元的长度足够小，以至于能看作质点。
    - 由于弦是完全柔软且绷紧，它在两个端点 x 及 $x+\mathrm{d}x$ 处受到张力的作用而没有法向应力。
    - 略去重力的作用（轻质）。

2. 物理方程

    由假设和受力分析，

    x 方向：

    $$T_1\cos\theta_1 = T_2\cos\theta_2 \tag{2.1}$$

    u 方向：

    $$T_2\sin\theta_2 - T_1\sin\theta_1 = \rho\mathrm{d}x\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.2}$$

    其中，ρ 是线密度 [kg/m].

3. 简化

    小振动 $\longrightarrow$ θ_1,θ_2 是小量，由 $\cos\theta$ 的泰勒展开：

    $$\cos\theta = 1-\frac{\theta^2}{2!}+\frac{\theta^4}{4!}-\cdots\approx 1 \tag{2.3}$$

    结合(2.1)，可以得到

    $$T_1\cos\theta_1\approx T_2\cos\theta_2\approx T_1\approx T_2 \tag{2.4}$$

    结合(2.2)，可以得到

    $$\frac{T_2\sin\theta_2}{T}-\frac{T_1\sin\theta_1}{T}=\frac{\rho\mathrm{d}x}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{T_2\sin\theta_2}{T_2\cos\theta_2}-\frac{T_1\sin\theta_1}{T_1\cos\theta_1}=\frac{\rho\mathrm{d}x}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\quad\Rightarrow\quad\tan\theta_2-\tan\theta_1=\frac{\rho\mathrm{d}x}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

    即：

    $$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\mathrm{d}x}-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}=\frac{\rho\mathrm{d}x}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.5}$$

经变形，得：

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+\mathrm{d}x}-\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x}}{\mathrm{d}x}=\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\rho}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

根据一阶导数的定义：

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-T\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{2.6}$$

定义 $a=\sqrt{\frac{T}{\rho}}$，则方程改写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0 \tag{2.7}$$

其中，a 是弦的振动传播速度。

4. 扩展

如果弦在位移 u 的方向上还受到外力的作用，设单位长度所受的外力为 f，则有：

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+\mathrm{d}x}-\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x}+f\mathrm{d}x=\frac{\rho\mathrm{d}x}{T}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.8}$$

因此，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{f}{\rho} \tag{2.9}$$

与未知函数 u 无关的自由项 $\frac{f}{\rho}$，称为非其次项。$\frac{f}{\rho}$ 为单位质量所受的外力。

定理 2.1 三维空间中的波动方程

更一般地，在三维空间中的波动方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right] \tag{2.10}$$

2.2 梯度与散度

2.2.1 梯度

定义 2.1 梯度

对于标量 $u(x,y,z)$，定义梯度运算

$$\mathbf{grad}u=\nabla u=\left(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right)u \tag{2.11}$$

即

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z}\right) \tag{2.12}$$

2.2.2 散度

定义 2.2 散度

对于矢量 $\boldsymbol{u}=(u,v,w)$，定义散度运算

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u}=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z} \tag{2.13}$$

2.2.3 Laplace 算子

对于标量场 $u(x,y,z)$，定义运算

$$\Delta u = \nabla^2 u = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \frac{\partial^2}{\partial z^2} \tag{2.14}$$

其中，记号 Δ 称为Laplace 算子

2.3 热传导方程

2.3.1 热传导的 Fourier 定律

定理 2.2 一维 Fourier 定律

设有一块连续介质。取一定坐标系，并用 $u(x,y,z,t)$ 表示介质内空间坐标为 (x,y,z) 的一点在 t 时刻的温度。从宏观上看，**单位时间内通过垂直 x 方向的单位面积的热量 q 与空间的温度变化率成正比。**

$$q = -k\frac{\partial u}{\partial x} \tag{2.15}$$

其中，q 称为热流密度，k 称为导热率。k 与材料的性质有关。如果温度变化的范围不大，则可以近似地将 k 看成与 u 无关。

定理 2.3 三维 Fourier 定律

在介质中三个方向上都存在温度差，则有：

$$\begin{cases} q_x = -k_x\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ q_y = -k_y\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ q_z = -k_z\dfrac{\partial u}{\partial z} \end{cases} \tag{2.16}$$

2.3.2 热传导方程的推导

1. 假设

> 材料均匀且统一
>
> 材料具有各向同性

2. 分析

- 理论基础和推论：由 Fourier 定律和材料的各向均匀性，可以得到

$$\begin{cases} q_x = -k\dfrac{\partial u}{\partial x} \\ q_y = -k\dfrac{\partial u}{\partial y} \\ q_z = -k\dfrac{\partial u}{\partial z} \end{cases} \tag{2.17}$$

  其中，k 是常数。

- 建立微元体：在介质内隔离出一个平行六面体，六个面都和坐标面重合。

- 原理：能量守恒，即六面体内无热量来源或消耗

$$\text{通过六个面的净热量流入} = \text{微元体总能量增加} \tag{2.18}$$

  - x 方向能量分析：Δt 时间内沿着 x 方向流入六面体的热量

$$\begin{aligned}
\Delta Q_x &= \Delta q_x \cdot S \cdot \Delta t \\
&= \left[(q_x)_x - (q_x)_{x+\Delta x}\right] \cdot \Delta y \Delta z \cdot \Delta t \\
&= \left[k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x\right] \cdot \Delta y \Delta z \cdot \Delta t \\
&= \frac{\left[k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x+\Delta x} - k\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_x\right]}{\Delta x} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \\
&= k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t
\end{aligned}$$

  - 各方向能量：同理可得

$$\begin{aligned}
\Delta Q_x &= k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \\
\Delta Q_y &= k\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \\
\Delta Q_z &= k\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t \\
\Delta Q &= \Delta Q_x + \Delta Q_y + \Delta Q_z = (k\nabla^2 u) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t
\end{aligned} \tag{2.19}$$

  - 微元体总能量增加：

$$\begin{aligned}
\Delta Q &= \Delta m \cdot c \cdot \Delta u \\
&= \rho \Delta V \cdot c \cdot \Delta u \\
&= \rho \Delta x \Delta y \Delta z \cdot c \cdot \Delta u
\end{aligned} \tag{2.20}$$

  - 由能量守恒，得

$$\Delta Q = (k\nabla^2 u) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \cdot c \cdot \Delta u \tag{2.21}$$

- 结论：

$$\rho c \frac{\partial u}{\partial t} - k\nabla^2 u = 0 \tag{2.22}$$

引入扩散率 $D = \dfrac{k}{\rho c}$：

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\nabla^2 u = 0 \tag{2.23}$$

- 扩展

  - 有热源的情形

    如果在介质内有热量产生，单位时间内单位体积介质中产生的热量为 $F(x, y, z, t)$：

$$(k\nabla^2 u) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t + F(s, y, z, t) \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \cdot c \cdot \Delta u \tag{2.24}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\nabla^2 u = \frac{F(x, y, z, t)}{\rho c} = f(x, y, z, t) \tag{2.25}$$

– 介质扩散

微观机理的相似性，就决定了扩散方程和热传导方程有相同的形式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\nabla^2 u = f \tag{2.26}$$

其中，

> u 代表分子浓度
>
> D 代表浓度扩散率
>
> f 代表单位时间内在单位体积中该种分子的产率

2.4 稳定问题

以热传导问题为例

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\nabla^2 u = f$$

- 在一定条件下，物体的温度达到相对稳定，即不随时间的变化而变化，则温度分布满足 Poission 方程

$$\nabla^2 u = -\frac{f}{D} \tag{2.27}$$

- 特别地，当 $f = 0$，则有 Laplace 方程

$$\nabla^2 u = 0 \tag{2.28}$$

2.5 三类方程总结

方程名称	数学表达式	物理过程
波动方程	$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\nabla^2 u$	波动过程
热传导方程	$\frac{\partial u}{\partial t} = D\nabla^2 u$	扩散过程
Poission 方程	$\nabla^2 u = f$	稳恒状态
Laplace 方程	$\nabla^2 u = 0$	

表 2.1: 建立的方程总结

2.6 方程的定解条件

2.6.1 定解条件

> 偏微分方程反映了一般的物理规律 $\longrightarrow$ 共性
>
> 定解条件 $\longrightarrow$ 个性

定解条件可以分为两类

$$\text{定解条件}\begin{cases}\text{初始条件：反映“历史状况”}\\ \text{边界条件：反映“通过表面和外界的相互作用”}\end{cases}$$

2.6.2 初始条件

定义 2.3 初始条件

物理过程的初始状况的数学表达式称为初始条件。

总原则：初始条件应该完全描写初始时刻 $t = 0$ 时介质内部及边界上任意一点的状况。

波动方程的初始条件：由于方程中出现温度对时间 t 的二阶偏微分，应该给出初始时刻的位移和速度

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x, y, z) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x, y, z) \end{cases} \qquad (x, y, z) \in \overline{V} \tag{2.29}$$

热传导方程的初始条件：由于方程中只出现温度对时间 t 的一阶偏微分，只需给出初始时刻的温度

$$u|_{t=0} = \varphi(x, y, z) \quad (x, y, z) \in \overline{V} \tag{2.30}$$

注意

- 必须是整个介质的初始状况。
- 初始条件个数与时间偏导数的阶数相等。

  波动方程 → 二阶时间偏导 → 两个初始条件

  热传导方程 → 一阶时间偏导 → 一个初始条件

  稳定问题（Poisson 方程、Laplace 方程）无初始条件

2.6.3 边界条件

物理过程的边界状况的数学表达式称为边界条件。

总原则：边界条件应该完全描写边界上各点在任意时刻 $t \geq 0$ 的状况。

定义 2.4 第一类边界条件

定义：给定所研究物理量在边界上的值，也称为Dirichlet 边界条件。

数学表达式（边界面 S）：

$$u|_S = f_1 \tag{2.31}$$

例子：

- 振动中的固定端
- 热传导中已知边界温度

定义 2.5 第二类边界条件

定义：给定所研究物理量在边界的外法向导数的值，也称为Neumann 边界条件。

数学表达式（边界面 S）：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_S = f_2 \tag{2.32}$$

例子：

- 热传导中已知热流密度

定义 2.6　第三类边界条件

定义：给定所研究物理量及其外法向导数的线性组合在边界上的值，也称为Robin 边界条件或Mixed 边界条件。

数学表达式（边界面 S）：

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma u\right)\bigg|_S = f_3 \tag{2.33}$$

例子：

- 热传导中热流密度服从牛顿冷却定律

边界条件等号右侧的函数如果为 0，则称为齐次边界条件。

2.6.4　定解问题总结

定解问题总结框架如图2.1.

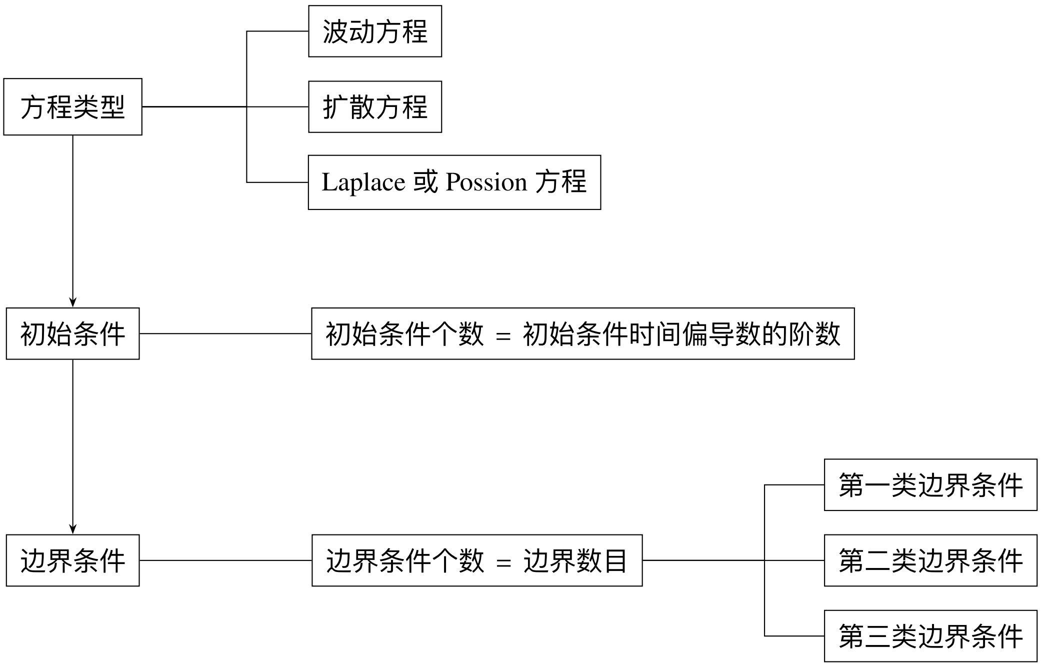

图 2.1: 定解问题总结框架图

2.7　定解问题的适定性

如果一个定解问题存在唯一且稳定的解，则这个问题是适定的。

1. 解的存在性——定解问题有解

   如果定解条件过多，或相互矛盾，则定解问题无解。

2. 解的唯一性——定解问题的解是唯一的

   如果定解条件不足，则解就不是唯一的。

3. 解的稳定性

   (a) 如果定解条件中的已知条件（例如方程和定解条件中的已知参数和函数）有微小改变时，解也只有微小改变；

   (b) 对于线性偏微分方程，解都是稳定的。

第 3 章　分离变量法

3.1　预备知识

3.1.1　二阶线性常系数齐次微分方程

定义 3.1　特征根与与特征方程

考虑方程

$$y'' + py' + qy = 0 \tag{3.1}$$

其中,p, q 是常数. 考虑这个方程解的形式为

$$y = \mathrm{e}^{\lambda x}$$

代入原方程, 消去 $\mathrm{e}^{\lambda x}$ 则得到特征方程

$$\lambda^2 + p\lambda + q = 0 \tag{3.2}$$

特征方程的根

$$\lambda = \frac{1}{2}(-p \pm \sqrt{p^2 - 4q}) \tag{3.3}$$

称为特征根.

定理 3.1　二阶线性常系数齐次微分方程的通解

特征根	通解形式
两相异实根 λ_1, λ_2	$C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$
二重根 λ_1	$(C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{\lambda_1 x}$
共轭复根 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm \beta\mathrm{i}$	$\mathrm{e}^{\alpha x}(C_1\cos\beta x + C_2\sin\beta x)$

表 3.1: 二阶线性常系数齐次微分方程的通解

3.1.2　函数的傅里叶级数展开

定理 3.2　函数的正弦级数展开

在 $[0, l]$ 上定义的函数 $f(x)$ 有正弦级数展开

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\frac{n\pi}{l}x \tag{3.4}$$

其中,

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x \tag{3.5}$$

3.1.3 特征函数的正交性

定理 3.3 特征函数的正交性

设有一般形式的特征值问题

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0$$
$$\alpha_1 X(0) + \beta_1 X'(0) = 0$$
$$\alpha_2 X(0) + \beta_2 X'(0) = 0$$

其中，$\alpha_1^2 + \beta_1^2 \neq 0, \alpha_2^2 + \beta_2^2 \neq 0.$

设 X_n 是对应特征值 λ_n 的特征函数，X_m 是对应特征值 λ_m 的特征函数，且 $m \neq n$，则特征函数的正交性的数学表达式为

$$\int_0^l X_n(x) X_m(x)\,\mathrm{d}x = 0,\ \ n \neq m \tag{3.6}$$

3.2 有界弦的自由振动

3.2.1 定解问题

方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.7}$$

边界条件

$$\begin{cases} u|_{x=0} = 0 \\ u|_{x=l} = 0 \end{cases} \quad t > 0 \tag{3.8}$$

初始条件

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \quad 0 \leq x \leq l \tag{3.9}$$

我们希望所求的解具有分离变量的形式：

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{3.10}$$

将方程(3.7)代入，可得

$$X(x)T''(t) = a^2 X''(x)T(t) \tag{3.11}$$

3.2.2 方程的处理

由于我们求的是非零解，可以得到

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} \tag{3.12}$$

方程左端与 t 无关，右端与 x 无关，所以整个方程与 t, x 均无关，即为常数

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{a^2}\frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda \tag{3.13}$$

整理后得到

$$\begin{cases} T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \\ X''(x) + \lambda X(x) = 0 \end{cases} \tag{3.14}$$

3.2.3 边界条件与初始条件的处理

对于边界条件，可以得到

$$u|_{x=0} = 0 \Rightarrow X(0)T(t) = 0 \Rightarrow X(0) = 0$$
$$u|_{x=l} = 0 \Rightarrow X(l)T(t) = 0 \Rightarrow X(l) = 0$$

而对于初始条件，由于方程非齐次，不可以分离变量得到进一步的表达式。

3.2.4 求解方程

对于 $X(x)$，我们得到二阶常微分方程

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0,\ X(l) = 0 \end{cases} \tag{3.15}$$

其特征方程为

$$r^2 + \lambda = 0 \tag{3.16}$$

其特征根为

$$r = \pm\sqrt{-\lambda} \tag{3.17}$$

根据二阶线性常系数齐次微分方程对 λ 进行分类讨论求解：

1. $\lambda = 0$
   - 特征根为
   $$r_1 = r_2 = 0$$
   - 微分方程的通解为
   $$X = Ax + B \tag{3.18}$$
   - 由定解条件（边界条件），得到 $\begin{cases} A = 0 \\ B = 0 \end{cases}$
   - 特解：$X = 0$
2. $\lambda < 0$
   - 特征根为两个实根
   $$r_1 = \sqrt{-\lambda}, \quad r_2 = -\sqrt{-\lambda}$$
   - 微分方程的通解为
   $$X = A\mathrm{e}^{r_1 x} + B\mathrm{e}^{r_2 x} = A\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}x} + B\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}x} \tag{3.19}$$
   - 由定解条件（边界条件），得到 $\begin{cases} A + B = 0 \\ A\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}l} + B\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \end{cases} \Rightarrow A = B = 0$
   - 特解：$X = 0$
3. $\lambda > 0$

- 特征根为一对共轭复数

$$r_1 = \sqrt{\lambda}\mathrm{i}, r_2 = -\sqrt{\lambda}\mathrm{i}$$

- 微分方程的通解为

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x \tag{3.20}$$

- 由定解条件（边界条件），得到 $\begin{cases} A = 0 \\ B\sin\sqrt{\lambda}l = 0 \end{cases}$. 由于 $B \neq 0$，所以 $\sin\sqrt{\lambda}l = 0$，即

$$\lambda = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 = \frac{n^2\pi^2}{l^2} \tag{3.21}$$

所以，我们得到对应的解

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 = \frac{n^2\pi^2}{l^2} \;\; (n = 1,, 2, 3, \cdots) \tag{3.22}$$

$$X_n(x) = B_n \sin\frac{n\pi}{l}x \;\; (n = 1, 2, 3, \cdots) \tag{3.23}$$

其中 λ 只能取特定的值 λ_n 称为特征值，相应的非零解称为特征函数，求解 $X(x)$ 的常微分问题称为特征值问题。

对于函数 $T(t)$ 的常微分方程

$$T''(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$$

由

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

得

$$T_n''(t) + \left(\frac{n\pi}{l}a\right)^2 T_n(t) = 0$$

由二阶线性常微分方程的解的形式可得

$$T_n = C_n\cos\frac{n\pi}{l}at + D_n\sin\frac{n\pi}{l}at \tag{3.24}$$

因此，得到无穷多个线性无关且满足偏微分方程和边界条件的特解：

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \left(C_n\cos\frac{n\pi}{l}at + D_n\sin\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{3.25}$$

为满足初始条件，一般解为所有特解之和，即

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{n\pi}{l}at + D_n\sin\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{3.26}$$

要求级数收敛，且能够对 x, t 逐项微分两次。

3.2.5 代入初始条件

由初始条件

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x) \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) \end{cases} \quad 0 \le x \le l$$

代入一般解，得到

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin\frac{n\pi}{l}x = \varphi(x) \\ \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} D_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x = \psi(x) \end{cases}$$

由 $\varphi(x),\psi(x)$ 的傅立叶级数，有

$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_{1n}\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{3.27}$$

$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{3.28}$$

即

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}b_{1n}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}D_n\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}b_{2n}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

比对系数可以得到

$$C_n=b_{1n}=\frac{2}{l}\int_0^l\left[\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\right]\,\mathrm{d}x$$
$$D_n=\frac{l}{n\pi a}b_{2n}=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\left[\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\right]\,\mathrm{d}x$$

3.2.6 求解结果

所以我们可以得到最终的方程解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n\cos\frac{n\pi}{l}at+D_n\sin\frac{n\pi}{l}at\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{3.29}$$

其中

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\left[\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\right]\,\mathrm{d}x \tag{3.30}$$

$$D_n=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l\left[\psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\right]\,\mathrm{d}x \tag{3.31}$$

3.2.7 分离变量法总结

分离变量法的大致过程如图3.1.

3.3 有限杆的传热问题

问题：设有一根长为 l 的均匀细杆，两端点为 $x=0$ 和 $x=l$；在端点 $x=0$ 处温度为零摄氏度，而在另一端 $x=l$ 处杆的热量自由散发到周围温度是零的介质中去，传热系数与杆导热系数之比为 h。已知初始温度为 $\varphi(x)$。求杆上的温度变化规律。

3.3.1 定解问题

方程

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{3.32}$$

边界条件

由牛顿冷却定律

$$x=l:-k\frac{\partial u}{\partial x}=h(u|_{x=l}-u_{\text{air}})=h\,u|_{x=l}$$

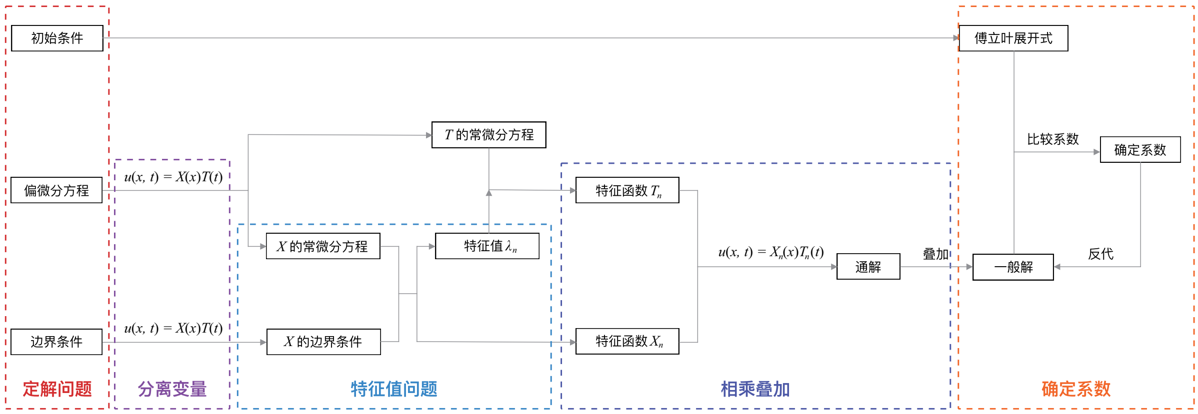

图 3.1: 分离变量法总结

即

$$u|_{x=0} = 0 \tag{3.33}$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + hu\right)\bigg|_{x=l} = 0 \tag{3.34}$$

初始条件

$$u|_{t=0} = \varphi(x),\ 0 \le x \le l \tag{3.35}$$

3.3.2 分离变量

设 $u(x,t) = X(x)T(t)$，分离方程，得

$$X(x)T'(t) = a^2T(t)X''(x) \quad \Rightarrow \frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

由于 $\frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T(t)}$ 与 x 无关，$\frac{X''(x)}{X(x)}$ 与 t 无关，所以

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \tag{3.36}$$

即

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{3.37}$$

$$T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0 \tag{3.38}$$

3.3.3 特征值问题

考虑边界条件

$$u|_{x=0} = 0 \ \Rightarrow\ X(0)T(t) = 0 \ \Rightarrow\ X(0) = 0$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} + hu\right)\bigg|_{x=l} = 0 \ \Rightarrow\ X'(l)T(t) + hX(l)T(t) = 0 \ \Rightarrow\ X'(l) + hX(l) = 0$$

那么得到常微分方程

$$\begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0 \\ X'(l) + hX(l) = 0 \end{cases} \tag{3.39}$$

其特征方程为

$$r^2 + \lambda = 0 \tag{3.40}$$

其特征根为

$$r = \pm\sqrt{-\lambda} \tag{3.41}$$

对 λ 进行分类讨论

1. $\lambda = 0$

   - 特征根为

   $$r_1 = r_2 = 0$$

   - 微分方程的通解为

   $$X = Ax + B \tag{3.42}$$

   - 由定解条件（边界条件），得到 $\begin{cases} B = 0 \\ A(1 + hl) + Bh = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B = 0 \\ A = 0 \end{cases}$
   - 总方程：$X = 0$

2. $\lambda < 0$

   - 特征根为两个实根

   $$r_1 = \sqrt{-\lambda}, \quad r_2 = -\sqrt{-\lambda}$$

   - 微分方程的通解为

   $$X = Ae^{r_1 x} + Be^{r_2 x} = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x} \tag{3.43}$$

   - 由定解条件（边界条件），得到 $\begin{cases} A + B = 0 \\ A(h + \sqrt{-\lambda})e^{\sqrt{-\lambda}l} + B(h - \sqrt{-\lambda})e^{-\sqrt{-\lambda}l} = 0 \end{cases} \Rightarrow A(h + \sqrt{-\lambda})e^{\sqrt{-\lambda}l} = A(h - \sqrt{-\lambda})e^{-\sqrt{-\lambda}l}$
     - 若 $A \neq 0$

       两边同时除以 A，得

       $$(h + \sqrt{-\lambda})e^{\sqrt{-\lambda}l} = (h - \sqrt{-\lambda})e^{-\sqrt{-\lambda}l}$$
       $$\Longrightarrow \frac{h - \sqrt{-\lambda}}{h + \sqrt{-\lambda}} = e^{2\sqrt{-\lambda}l}$$

       由于 $e^{2\sqrt{-\lambda}l} > 1$，而 $\dfrac{h - \sqrt{-\lambda}}{h + \sqrt{-\lambda}} < 1$ 因此矛盾，故 $A = 0$.

     所以 $A = B = 0$
   - 总方程：$X = 0$

3. $\lambda > 0$

- 特征根为一对共轭复数

$$r_1 = \sqrt{\lambda}\mathrm{i}, r_2 = -\sqrt{\lambda}\mathrm{i}$$

- 微分方程的通解为

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x \tag{3.44}$$

- 由定解条件(边界条件),得到 $\begin{cases} A\cos\sqrt{\lambda}l = 0 \to A = 0 \\ B\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l + Bh\sin\sqrt{\lambda}l = 0 \end{cases}$. 由于 $B \neq 0$,所以 $\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l + h\sin\sqrt{\lambda}l = 0$,即

$$\sqrt{\lambda} + h\tan\sqrt{\lambda}l = 0 \Longrightarrow \sqrt{\lambda} = h\tan\sqrt{\lambda}l \tag{3.45}$$

所以,我们得到

> 特征值为
>
> $$\sqrt{\lambda_n} = h\tan\sqrt{\lambda_n}l \tag{3.46}$$
>
> 的解,特征函数为
>
> $$X_n(x) = B_n\sin\sqrt{\lambda_n}x \tag{3.47}$$

3.3.4 相乘叠加得一般解

将 λ_n 代入 T 的方程

$$T_n'(t) + \lambda_n a^2 T_n(t) = 0$$

解得

$$T_n = C_n' \mathrm{e}^{-\lambda_n a^2 t} \tag{3.48}$$

因此,得到无穷多个线性无关且满足偏微分方程和边界条件的特解:

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = C_n\mathrm{e}^{-\lambda_n a^2 t}\sin\sqrt{\lambda_n}x \tag{3.49}$$

为满足初始条件,令一般解为所有特解之和,即

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\mathrm{e}^{-\lambda_n a^2 t}\sin\sqrt{\lambda_n}x \tag{3.50}$$

要求级数收敛,且能够对 x,t 逐项微分两次。

3.3.5 确定叠加系数

由初始条件

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n\sin\sqrt{\lambda_n}x = \varphi(x)$$

由特征函数的正交性可得

$$\int_0^l X_m(x)X_n(x)\,\mathrm{d}x = 0,\ \ n \neq m \tag{3.51}$$

$$\int_0^l \sin\sqrt{\lambda_m}x \sin\sqrt{\lambda_n}x\,\mathrm{d}x = 0,\ \ n \neq m \tag{3.52}$$

为了利用特征函数的正交性，两边同时乘以 $\sin\sqrt{\lambda_m}x$ 再做积分，即

$$\int_0^l \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\sqrt{\lambda_n}x \sin\sqrt{\lambda_m}x\right)\mathrm{d}x = \int_0^l \left[\varphi(x)\sin\sqrt{\lambda_m}x\right]\mathrm{d}x \tag{3.53}$$

逐项积分

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\int_0^l \left(\sin\sqrt{\lambda_n}x \sin\sqrt{\lambda_m}x\right)\mathrm{d}x\right] = \int_0^l \left[\varphi(x)\sin\sqrt{\lambda_m}x\right]\mathrm{d}x \tag{3.54}$$

由正交性质，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[C_n\int_0^l \left(\sin\sqrt{\lambda_n}x \sin\sqrt{\lambda_m}x\right)\mathrm{d}x\right] = C_m\int_0^l \left(\sin\sqrt{\lambda_m}x\right)^2\mathrm{d}x$$

即

$$C_n = \frac{\int_0^l \left[\varphi(x)\sin\sqrt{\lambda_n}x\right]\mathrm{d}x}{\int_0^l \left(\sin\sqrt{\lambda_n}x\right)^2\mathrm{d}x} \tag{3.55}$$

3.4 非齐次方程的解法

3.4.1 特征函数展开法

将分离变量法进行改进，得到

1. **求解特征值问题** $\begin{matrix} X''(x)+\lambda X(x)=0 \\ \text{边界条件} \end{matrix}$

   获得特征函数族 $X_1(x), X_2(x), \cdots, X_n(x)$

2. **直接将解写成特征函数族的展开式**

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x)$$

3. **代入方程，求解** $T_n(t)$.

3.4.2 两端固定弦的受迫振动

步骤 1　一分为二

将弦的振动看作**初始条件引起的振动**和**强迫力引起振动**的叠加

$$\text{弦的振动}U(x,t)\begin{cases}\text{初始条件引起的振动}W(x,t)\\ \text{强迫力引起的振动}V(x,t)\end{cases}$$

于是将解作如下展开 $U(x,t) = W(x,t) + V(x,t)$

步骤 2 求解初始条件引起的振动 $W(x,t)$

- 列出定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 W}{\partial t^2}, & 0 < x < l, t > 0 \\ W|_{x=0} = W|_{x=l} = 0, & t > 0 \\ W|_{t=0} = \varphi(x),\ \left.\dfrac{\partial W}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), & 0 \le x \le l \end{cases} \tag{3.56}$$

- 可以直接由前两节的分离变量法求得，这里不再赘述。

步骤 3 求解强迫力引起的振动 $V(x,t)$

- 列出定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f(x,t), & 0 < x < l, t > 0 \\ V|_{x=0} = V|_{x=l} = 0, & t > 0 \\ V|_{t=0} = 0,\ \left.\dfrac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, & 0 \le x \le l \end{cases} \tag{3.57}$$

- 求解相应齐次方程的特征函数 $X_n(x)$

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \tag{3.58}$$

由前面几节的结果，可以得到

$$X_n = B_n \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{3.59}$$

- 特征函数展开

$$V(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{3.60}$$

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x \tag{3.61}$$

- 用特征函数正交性质求解 $f_n(t)$

$$\begin{aligned} f(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x \\ \Rightarrow \int_0^l f(x,t) X_m(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \int_0^l X_n(x) X_m(x)\,\mathrm{d}x = f_m(t) \int_0^l X_m^2(x)\,\mathrm{d}x \\ \Rightarrow f_m(t) &= \frac{\displaystyle\int_0^l f(x,t) X_m(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^l X_m^2(x)\,\mathrm{d}x} = \frac{2}{l} \int_0^l f(x,t) \sin \frac{m\pi}{l} x\,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{3.62}$$

- 将 $V(x,t), f(x,t)$ 的展开式代入微分方程，得到关于 $v_n(t)$ 的微分方程

$$\left.\begin{aligned} V(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) \sin \frac{n\pi}{l} x \\ f(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x \end{aligned}\right. \xrightarrow{\text{代入}} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f(x,t)$$

得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[v_n''(t)+\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}v_n(t)-f_n(t)\right]\sin\frac{n\pi}{l}\equiv 0 \tag{3.63}$$

即

$$v_n''(t)+\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}v_n(t)=f_n(t)$$

- 将 $V(x,t)$ 的展开式代入初始条件，得 $v_n(t)$ 的初始条件

$$\begin{aligned}
V|_{t=0}=0 \quad &\Rightarrow \quad v_n(0)X_n(x)=0 \quad \Rightarrow \quad v_n(0)=0\\
\left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=0}=0 \quad &\Rightarrow \quad v_n'(0)X_n(x)=0 \quad \Rightarrow \quad v_n'(0)=0
\end{aligned}$$

- 求解 $v_n(t)$ 的常微分方程

$$\begin{cases} v_n''(t)+\dfrac{a^2n^2\pi^2}{l^2}v_n(t)=f_n(t)\\ v_n(0)=0,\ v_n'(0)=0 \end{cases} \tag{3.64}$$

由常数变易法或 Laplace 变换，得到

$$v_n(t)=\frac{l}{n\pi a}\int_0^l f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\,\mathrm{d}\tau \tag{3.65}$$

- 相乘叠加

将计算结果代入特征函数的展开式，得到最终的结果

$$V(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{l}{n\pi a}\int_0^l f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\,\mathrm{d}\tau\right]\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{3.66}$$

其中

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x$$

步骤 4　合二为一

两部分的结果叠加，得

$$U(x,t)=W(x,t)+V(x,t) \tag{3.67}$$

总结如图3.2.

3.5　非齐次边界条件的处理

3.5.1　非齐次边界条件的概念

前面所讨论的定解问题的解法，不论方程是齐次的还是非齐次的，边界条件都是齐次的，由于非齐次边界条件不能分离变量，所以我们要将非齐次边界条件转换为齐次边界条件。

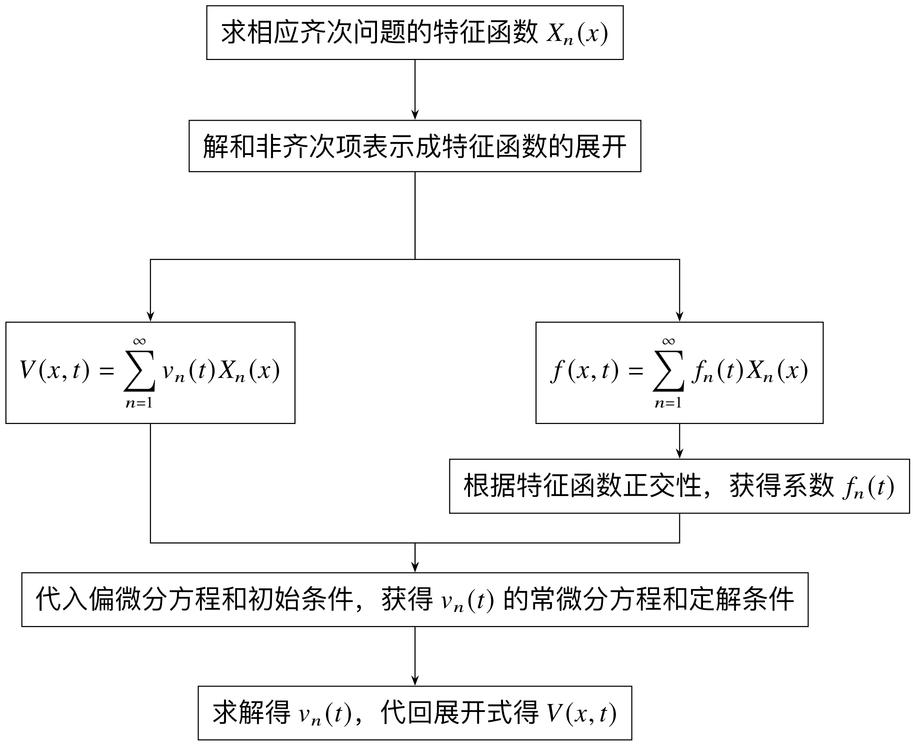

图 3.2: 非齐次方程求解总结图

3.5.2 非齐次边界条件的处理方法

- 总原则：设法将边界条件化成齐次的情况。
- 总思路：取一个适当的未知函数之间的代换，使对于新的未知函数，边界条件是齐次的。

以定解问题为例

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t), 0<x<l, t>0 \\ u|_{x=0}=u_1(t),\ u|_{x=l}=u_2(t), t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x), 0\geq x\geq l \end{cases} \tag{3.68}$$

为使边界条件齐次化，作如下分解

$$u(x,t)=V(x,t)+W(x,t) \tag{3.69}$$

其中，令函数 $W(x,t)$ 满足 $u(x,t)$ 的边界条件

$$W|_{x=0}=u_1(t),\quad W|_{x=l}=u_2(t) \tag{3.70}$$

则函数 $V(x,t)$ 的边界条件是齐次的

$$V|_{x=0},\quad V|_{x=l}=0$$

由于 $W(x,t)$ 是满足条件(3.70)的表达式，简单起见，设

$$W(x,t)=A(t)X+B(t) \tag{3.71}$$

即得到

$$\begin{cases} W(0,t) = B(t) = u_1(t) \\ W(l,t) = A(t)l + B(t) = u_2(t) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} A(t) = \dfrac{u_2(t) - u_1(t)}{l} \\ B(t) = u_1(t) \end{cases}$$

所以

$$W(x,t) = \frac{u_2(t) - u_1(t)}{l}x + u_1(t) \tag{3.72}$$

于是我们作以下变换

$$u(x,t) = V(x,t) + \frac{u_2(t) - u_1(t)}{l}x + u_1(t) \tag{3.73}$$

得到转换后的定解问题

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + F(x,t), 0 < x < l, t > 0 \\ &V|_{x=0} = 0,\ V|_{x=l} = 0, t > 0 \\ &V|_{t=0} = \Phi(x),\ \left.\frac{\partial V}{\partial t}\right|_{t=0} = \Psi(x), 0 \le x \le l \end{aligned} \tag{3.74}$$

其中

$$\begin{aligned} F(x,t) &= f(x,t) - \left[\frac{u_2''(t) - u_1''(t)}{l}x + u_1''(t)\right] \\ \Phi(x) &= \varphi(x) - \left[\frac{u_2(t) - u_1(t)}{l}x + u_1(t)\right] \\ \Psi(x) &= \psi(x) - \left[\frac{u_2(t) - u_1(t)}{l}x + u_1(t)\right] \end{aligned}$$

3.5.3 四类非齐次边界条件的齐次化函数

边界条件	齐次化函数 $W(x)$
$u\|_{x=0} = u_1(t),\ u\|_{x=l} = u_2(t)$	$W(x,t) = \dfrac{u_2(t) - u_1(t)}{l}x + u_1(t)$
$u\|_{x=0} = u_1(t),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right\|_{x=l} = u_2(t)$	$W(x,t) = u_1(t)x + u_2(t)$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right\|_{x=0} = u_1(t), u\|_{x=l} = u_2(t)$	$W(x,t) = u_2(t)x + u_2(t) - lu_1(t)$
$\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right\|_{x=0} = u_1(t),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right\|_{x=l} = u_2(t)$	$W(x,t) = \dfrac{u_2(t) - u_1(t)}{2l}x^2 + u_1(t)x$

表 3.2: 四类非齐次边界条件的齐次化函数

注意

- 选取不同的齐次化函数 $W(x,t)$，导出的 $V(x,t)$ 的定解问题也就不同，求出的 $V(x,t)$ 也就不同
- 但**定解问题的解的存在唯一性**，保证了最后解得的 $u(x,t)$ 一定是相同的，尽管表达式的形式可能有所不同
- $W(x,t)$ 的选取原则是使自己的表达式尽可能简单的同时，也尽量使 $V(x,t)$ 的定解问题尽可能简单

3.5.4 方程和边界条件同时齐次化的情形

最理想的情况是，不论原来的方程 $u(x,t)$ 是不是齐次的，最终 $V(x,t)$ 的方程是齐次的，即**方程和边界条件同时齐次化**。

所需要的条件：当 $u(x,t)$ 定解问题中的非齐次项、边界条件都与时间 t 无关。

例 3.1 齐次化下列定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x^2, 0 < x < l, t > 0, \\ u|_{x=0} = A,\ u|_{x=l} = B, t > 0, \\ u|_{t=0} = g(x), 0 \le x \le l \end{cases}$$

解 设 $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$,$w(x)$ 满足边界条件，即

$$w(0) = A \tag{3.75}$$

$$w(l) = B \tag{3.76}$$

将 $u(x,t) = v(x,t) + w(x)$ 代入偏微分方程，得

$$v_t = a^2(v_{xx} + w''(x)) + x^2 \Rightarrow v_t = a^2 v_{xx} + a^2 w''(x) + x^2$$

为了使该偏微分方程是齐次的，则满足

$$w''(x) = -\frac{x^2}{a^2} \tag{3.77}$$

则得到 $w(x)$ 的常微分方程

$$\begin{cases} w''(x) = -\dfrac{x^2}{a^2} \\ w(0) = A \\ w(l) = B \end{cases} \tag{3.78}$$

首先求得通解为

$$w(x) = -\frac{1}{12a^2}x^4 + C_1 x + C_2 \tag{3.79}$$

代入定解条件，得

$$\begin{cases} C_2 = A \\ -\dfrac{1}{12a^2}l^4 + C_1 l + C_2 = B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_2 = A \\ C_1 = \dfrac{B-A}{l} + \dfrac{l^3}{12a^2} \end{cases}$$

所以

$$w(x) = \frac{1}{12a^2}x^4 + \left(\frac{B-A}{l} + \frac{l^3}{12a^2}\right)x + A \tag{3.80}$$

初始条件变为

$$u|_{t=0} = v(x,0) + w(x) = g(x) \Rightarrow v(x,0) = g(x) - w(x) = g(x) - \frac{1}{12a^2}x^4 - \left(\frac{B-A}{l} + \frac{l^3}{12a^2}\right)x - A$$

所以齐次化后的定解问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}, 0 < x < l, t > 0, \\ u|_{x=0} = 0,\ u|_{x=l} = 0, t > 0, \\ v|_{t=0} = g(x) - \dfrac{1}{12a^2}x^4 - \left(\dfrac{B-A}{l} + \dfrac{l^3}{12a^2}\right)x - A, 0 \le x \le l \end{cases} \tag{3.81}$$

3.6 圆域内的二维 Laplace 方程的稳定问题

3.6.1 预备知识

1. 极坐标系下的 Laplace 方程

直角坐标下的 Laplace 方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{3.82}$$

极坐标与直角坐标的关系为

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases} \tag{3.83}$$

由链式求导法则，得到极坐标下的 Laplace 方程为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \tag{3.84}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \tag{3.85}$$

特点：

- 由于 $r = 0$ 处导数不存在，不满足方程，所以**需要在** $r = 0$ **处补充边界条件**；
- 周期性：$u|_\theta = u|_{\theta+2\pi}$

2. 以 2π 为周期的函数傅立叶级数展开

$$f(\theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta \tag{3.86}$$

其中

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta, \quad n = 0, 1, 2, \cdots$$

$$B_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta\,\mathrm{d}\theta, \quad n = 1, 2, \cdots$$

3.6.2 物理问题

一个半径为 r_0 的薄圆盘，上下两面绝热，圆周边缘温度已知，求达到温恒状态时圆盘内的温度分布。

步骤 1 列出定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ x^2+y^2\le r_0^2 \\ u|_{x^2+y^2=r_0^2}=f(x,y) \end{cases} \tag{3.87}$$

步骤 2 换成极坐标形式

换成极坐标的过程中，由于 $r=0$ 处导数不存在。因此，为了满足方程的适定性，需要补充 $r=0$ 处的边界条件。

由于 $r=0$ 处没有热源且绝热，所以 $r=0$ 处的温度不可能趋于无穷大，即

$$|u|_{r=0}|<+\infty$$

所以，最终形式的定解问题为

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=0,\ 0<r<r_0,-\infty<\theta<+\infty \\ u|_{r=r_0}=f(\theta), \\ |u|_{r=0}|<+\infty, \\ u|_{\theta}=u|_{\theta+2\pi} \end{cases} \tag{3.88}$$

步骤 3 分离变量

设 $u(r,\theta)=R(r)\Phi(\theta)$，代入偏微分方程，得

$$\begin{aligned} r^2R''(r)\Phi(\theta)+rR'(r)\Phi(\theta)+R(r)\Phi''(\theta)=0 \\ \Rightarrow\ \Phi(\theta)\left[r^2R''(r)+rR'(r)\right]=R(r)\Phi(\theta) \\ \Rightarrow\ -\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=\frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)} \end{aligned}$$

由于方程左边是关于 r 的函数，方程右边是关于 θ 的函数，所以

$$-\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=\frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)}=-\lambda$$

从而得到两个常微分方程

$$\begin{cases} \Phi''(\theta)+\lambda\Phi(\theta)=0 \\ r^2R''(r)+rR'(r)-\lambda R(r)=0 \end{cases}$$

对于初始条件，由于 $u|_{r=r_0}=f(\theta)$ 是非齐次的，而 $\left|u|_{r=0}\right|<+\infty$ 是有界条件，都不能分离变量。所以，我们尝试对周期性条件进行分离变量

$$R(r)\Phi(\theta)=R(r)\Phi(\theta+2\pi)\quad\Rightarrow\quad\Phi(\theta)=\Phi(\theta+2\pi)$$

步骤 4 求解特征值问题

我们得到关于 $\Phi(\theta)$ 的定解常微分方程

$$\begin{cases} \Phi''(\theta)+\lambda\Phi(\theta)=0 \\ \Phi(\theta)=\Phi(\theta+2\pi) \end{cases} \tag{3.89}$$

对 λ 进行分类讨论

- $\lambda = 0$
  - 通解 $\Phi''(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi(\theta) = A\theta + B$
  - 特解 $\Phi(\theta) = \Phi(\theta + 2\pi) \quad \Rightarrow \quad \Phi(\theta) = B$

  所以 $\lambda = 0$ 是特征值，$\Phi(\theta) = B$

- $\lambda < 0$
  - 通解 $\Phi(\theta) = A\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\theta} + B\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}\theta}$
  - 特解 由于实数域内指数函数不是周期函数，所以 $A = B = 0$，舍去

- $\lambda > 0$
  - 通解 $\Phi(\theta) = A\cos\sqrt{\lambda}\theta + B\sin\sqrt{\lambda}\theta$
  - 特解 $\Phi(\theta) = A\cos\sqrt{\lambda}\theta + B\sin\sqrt{\lambda}\theta$ 的周期为 $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$，由于 $\Phi(\theta)$ 是以 2π 为周期的函数，则

    $$\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2\pi}{n},\ n = 1, 2, 3, \cdots$$

    即

    $$\lambda_n = n^2 \tag{3.90}$$

    $$\Phi_n(\theta) = A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta \tag{3.91}$$

所以，特征值为

$$\begin{cases} \lambda_0 = 0,\ \Phi_0(\theta) = B_0 \\ \lambda_n = n^2,\ \Phi_n(\theta) = A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta,\ n = 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$$

步骤 5 解另一方程

对关于 $R(r)$ 的微分方程进行变形

$$\begin{aligned} & r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0 \\ \Rightarrow \quad & r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) - \lambda R = 0 \\ \Rightarrow \quad & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln r}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\ln r}\right) - \lambda R = 0 \end{aligned}$$

- $\lambda = 0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln r}\left(\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\ln r}\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad R_0(r) = C_0 + D_0\ln r$

- $\lambda = n^2 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln r}\left(\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\ln r}\right) - n^2R = 0 \quad \Rightarrow \quad R_n(r) = C_n\mathrm{e}^{n\ln r} + D_n\mathrm{e}^{-n\ln r} = C_nr^n + D_nr^{-n}$

步骤 6 相乘得特解

$$\begin{cases} R_0(r) = C_0 + D_0\ln r \\ \Phi(\theta) = B_0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u(r,\theta) = B_0(C_0 + D_0\ln r)$$

$$\begin{cases} R_n(r) = C_nr^n + D_nr^{-n} \\ \Phi_n(\theta) = A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad u(r,\theta) = \left(C_nr^n + D_nr^{-n}\right)\left(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)\right)$$

步骤 7 叠加得一般解

$$u(r,\theta)=B_0(C_0+D_0\ln r)+\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n r^n+D_n r^{-n}\right)\left(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta\right) \tag{3.92}$$

步骤 8 确定叠加系数

仍有两个非齐次边界条件未使用，用它们来确定叠加系数。即叠加系数的确定，是要**满足非齐次边界条件**，这与求解波动方程和热传导方程不同。

- 根据 $r=0$ 处 u 的有界性 $|u|_{r=0}|<+\infty$，结合一般解，发现两个发散量

$$\lim_{r\to 0}\ln r=-\infty$$

$$\lim_{r\to 0,\ n\to\infty} r^{-n}=+\infty$$

  所以它们所对应的系数为 0，即 $D_0, D_n=0$，一般解化简为

$$u(r,\theta)=B_0C_0+\sum_{n=1}^{\infty}C_n r^n(A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta)$$

- 将一般解写成如下形式

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\left(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta\right) \tag{3.93}$$

  利用 $r=r_0$ 处的边界条件 $u|_{r=r_0}=f(\theta)$ 进行傅立叶展开（详见本节预备知识），得

$$f(\theta)=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta \tag{3.94}$$

$r=r_0$ 代入一般式，比对(3.93)和(3.94)可得

$$a_n=\frac{A_n}{r_0^n}=\frac{1}{r_0^n\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta,\quad n=0,1,2,\cdots \tag{3.95}$$

$$b_n=\frac{B_n}{r_0^n}=\frac{1}{r_0^n\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin n\theta\,\mathrm{d}\theta,\quad n=1,2,3,\cdots \tag{3.96}$$

所以最终解为

$$u(r,\theta)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}r^n\left(a_n\cos n\theta+b_n\sin n\theta\right) \tag{3.97}$$

$$a_n=\frac{A_n}{r_0^n}=\frac{1}{r_0^n\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos n\theta\,\mathrm{d}\theta,\quad n=0,1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{B_n}{r_0^n}=\frac{1}{r_0^n\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin n\theta\,\mathrm{d}\theta,\quad n=1,2,3,\cdots$$

注意

1. 极坐标下的 Laplace 方程需要记忆
2. 坐标变换带来的附加周期条件是分离变量法成功的关键
3. 特征值问题由齐次边界条件构造，这与求解波动方程和热传导方程一样
4. 不同的是在本例中，通过非齐次边界条件确定叠加系数，而不是通过初始条件来确定。这与求解波动方程和热传导方程不同

例 3.2 一圆环形平板，内半径为 r_1，外半径为 r_2，侧面绝缘，如内圆温度保持为 0，外圆温度保持 1 摄氏度，试求稳恒状态下的温度分布规律 $u(r,\theta)$.

解

步骤 1 列出定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=0,\ r_1<r<r_2,-\infty<\theta<+\infty \\ u|_{r=r_1}=0, \\ u|_{r=r_2}=1, \\ u|_{\theta}=u|_{\theta+2\pi} \end{cases} \tag{3.98}$$

步骤 2 分离变量

设 $u(r,\theta)=R(r)\Phi(\theta)$，代入偏微分方程，得

$$\begin{aligned} & r^2R''(r)\Phi(\theta)+rR'(r)\Phi(\theta)+R(r)\Phi''(\theta)=0 \\ \Rightarrow\ & \Phi(\theta)\left[r^2R''(r)+rR'(r)\right]=R(r)\Phi(\theta) \\ \Rightarrow\ & -\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=\frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)} \end{aligned}$$

由于方程左边是关于 r 的函数，方程右边是关于 θ 的函数，所以

$$-\frac{r^2R''(r)+rR'(r)}{R(r)}=\frac{\Phi''(\theta)}{\Phi(\theta)}=-\lambda$$

从而得到两个常微分方程

$$\begin{cases} \Phi''(\theta)+\lambda\Phi(\theta)=0 \\ r^2R''(r)+rR'(r)-\lambda R(r)=0 \end{cases}$$

对于边界条件，

$$\begin{aligned} R(r)\Phi(\theta)=R(r)\Phi(\theta+2\pi) \quad &\Rightarrow \quad \Phi(\theta)=\Phi(\theta+2\pi) \\ u(r_1,\theta)=R(r_1)\Phi(\theta)=0 \quad &\Rightarrow \quad R(r_1)=0 \end{aligned}$$

步骤 3 求解特征值问题

我们得到关于 $\Phi(\theta)$ 的定解常微分方程

$$\begin{cases} \Phi''(\theta)+\lambda\Phi(\theta)=0 \\ \Phi(\theta)=\Phi(\theta+2\pi) \end{cases} \tag{3.99}$$

对 λ 进行分类讨论

- $\lambda=0$
  - 通解 $\Phi''(\theta)=0 \quad \Rightarrow \quad \Phi(\theta)=A\theta+B$
  - 特解 $\Phi(\theta)=\Phi(\theta+2\pi) \quad \Rightarrow \quad \Phi(\theta)=B$

  所以 $\lambda=0$ 是特征值，$\Phi(\theta)=B$
- $\lambda<0$

- 通解 $\Phi(\theta) = A\mathrm{e}^{\sqrt{-\lambda}\theta} + B\mathrm{e}^{-\sqrt{-\lambda}\theta}$
- 特解 由于实数域内指数函数不是周期函数，所以 $A = B = 0$，舍去

• $\lambda > 0$

- 通解 $\Phi(\theta) = A\cos\sqrt{\lambda}\theta + B\sin\sqrt{\lambda}\theta$
- 特解 $\Phi(\theta) = A\cos\sqrt{\lambda}\theta + B\sin\sqrt{\lambda}\theta$ 的周期为 $\dfrac{2\pi}{\sqrt{\lambda}}$，由于 $\Phi(\theta)$ 是以 2π 为周期的函数，则

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\lambda}} = \frac{2\pi}{n},\ n = 1, 2, 3, \cdots$$

即

$$\lambda_n = n^2 \tag{3.100}$$

$$\Phi_n(\theta) = A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta \tag{3.101}$$

所以，特征值为

$$\begin{cases} \lambda_0 = \Phi(\theta)_0 = B_0,\ \Phi_0(\theta) = B_0 \\ \lambda_n = n^2,\ \Phi_n(\theta) = A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta,\ n = 1, 2, 3, \cdots \end{cases}$$

步骤 4 解另一方程

对关于 $R(r)$ 的微分方程进行变形

$$\begin{aligned} & r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0 \\ \Rightarrow\quad & r\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) - \lambda R = 0 \\ \Rightarrow\quad & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln r}\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\ln r}\right) - \lambda R = 0 \end{aligned}$$

• $\lambda = 0 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln r}\left(\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\ln r}\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad R_0(r) = C_0 + D_0\ln r$

• $\lambda = n^2 \quad\Rightarrow\quad \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\ln r}\left(\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\ln r}\right) - n^2R = 0 \quad\Rightarrow\quad R_n(r) = C_n\mathrm{e}^{n\ln r} + D_n\mathrm{e}^{-n\ln r} = C_nr^n + D_nr^{-n}$

步骤 5 相乘得特解

$$\begin{cases} R_0(r) = C_0 + D_0\ln r \\ \Phi(\theta) = B_0 \end{cases} \quad\Rightarrow\quad u(r,\theta) = B_0(C_0 + D_0\ln r)$$

$$\begin{cases} R_n(r) = C_nr^n + D_nr^{-n} \\ \Phi_n(\theta) = A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta) \end{cases} \quad\Rightarrow\quad u(r,\theta) = \left(C_nr^n + D_nr^{-n}\right)\left(A_n\cos(n\theta) + B_n\sin(n\theta)\right)$$

步骤 6 叠加得一般解

$$u(r,\theta) = B_0(C_0 + D_0\ln r) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_nr^n + D_nr^{-n}\right)\left(A_n\cos n\theta + B_n\sin n\theta\right) \tag{3.102}$$

步骤 7 确定叠加系数

• 将一般式写成如下形式

$$u(r,\theta) = c_0 + d_0\ln r + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_nr^n + b_nr^{-n}\right)\cos n\theta + \left(c_nr^n + d_nr^{-n}\right)\sin n\theta \tag{3.103}$$

- 利用 $r=r_1$ 处的边界条件 $u|_{r=r_1}=0$ 进行傅立叶展开，得

$$0=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta \tag{3.104}$$

  其参数全为 0，比对系数可得

$$\begin{cases} c_0+d_0\ln r_1=\dfrac{A_0}{2}=0 \\ a_n r_1^n+b_n r_1^{-n}=A_n=0 \\ c_n r_2^n+b_n r_2^{-n}=B_n=0 \end{cases} \tag{3.105}$$

- 利用 $r=r_2$ 处的边界条件 $u|_{r=r_2}=1$ 进行傅立叶展开，得

$$1=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos n\theta+B_n\sin n\theta \tag{3.106}$$

  其令 $A_0=2$，其他参数全为 0，比对系数可得

$$\begin{cases} c_0+d_0\ln r_1=\dfrac{A_0}{2}=1 \\ a_n r_1^n+b_n r_1^{-n}=A_n=0 \\ c_n r_2^n+b_n r_2^{-n}=B_n=0 \end{cases} \tag{3.107}$$

联立(3.105)和(3.107)解得

$$\begin{cases} c_0=-\dfrac{\ln r_1}{\ln r_2-\ln r_1} \\ d_0=\dfrac{1}{\ln r_2-\ln r_1} \\ a_n=0 \\ b_n=0 \\ c_n=0 \\ d_n=0 \end{cases} \tag{3.108}$$

所以最终解为

$$\begin{aligned} u(r,\theta)&=-\frac{\ln r_1}{\ln r_2-\ln r_1}+\frac{1}{\ln r_2-\ln r_1}\ln r \\ &=\frac{\ln r-\ln r_1}{\ln r_2-\ln r_1} \end{aligned} \tag{3.109}$$

3.7 分离变量法总结

对于分离变量法，通过四个方程的解决思路和分离变量两个情况的方法来总结。

3.7.1 一维非齐次波动方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t), & 0<x<a, t>0 \\ u|_{x=0}=u_1(t),\ u|_{x=l}=u_2(t), & t>0 \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{t=0}=\psi(x), & 0\le x\le a \end{cases} \tag{3.110}$$

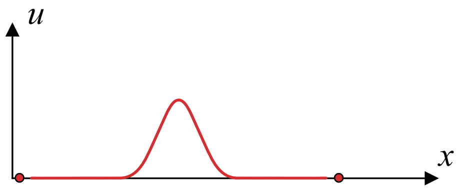

图 3.3: 一维非齐次波动方程

步骤 1 将边界条件齐次化

步骤 2 一分为二

$$\text{一分为二}\begin{cases}\text{非齐次项（强迫力）引起的波动过程}\\ \text{初始条件引起的波动过程}\end{cases}$$

步骤 3 用分离变量法求解方程

$$\text{分离变量法}\begin{cases}\text{齐次方程（非零初始条件）的定解问题} & \xrightarrow{\text{方法}} \quad \text{常规分离变量法步骤求解}\\ \text{非齐次方程（零初始条件）的定解问题} & \xrightarrow{\text{方法}} \quad \text{相应齐次问题的特征函数展开法求解}\end{cases}$$

步骤 4 合二为一

叠加即得到原问题的解。

3.7.2 一维非齐次热传导方程

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), & 0 < x < a, t > 0\\ u|_{x=0} = u_1(t),\ u|_{x=l} = u_2(t), & t > 0\\ u|_{t=0} = \varphi(x), & 0 \le x \le a\end{cases} \tag{3.111}$$

图 3.4: 一维非齐次传热方程

步骤 1 将边界条件齐次化

步骤 2 一分为二

$$\text{一分为二}\begin{cases}\text{非齐次项（热源）引起的传热过程}\\ \text{初始条件引起的传热过程}\end{cases}$$

步骤 3 用分离变量法求解方程

$$\text{分离变量法}\begin{cases}\text{齐次方程（非零初始条件）的定解问题} & \xrightarrow{\text{方法}} \quad \text{常规分离变量法步骤求解}\\ \text{非齐次方程（零初始条件）的定解问题} & \xrightarrow{\text{方法}} \quad \text{相应齐次问题的特征函数展开法求解}\end{cases}$$

步骤 4 合二为一

叠加即得到原问题的解。

3.7.3 圆域内非齐次 Laplace 方程

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial u}{\partial r}\right)+\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}=f_1(r,\theta), & 0<r<a, -\infty<\theta<+\infty \\
u|_{r=a}=f_2(\theta)\ \ |u|_{r=0}|<+\infty, & -\infty<\theta<+\infty \\
u|_{\theta}=u|_{\theta+2\pi}, & 0<r<a
\end{cases}
\tag{3.112}
$$

步骤 1 坐标变换

周期性边界条件是齐次的，因此不用边界条件齐次化

步骤 2 一分为二

$$
一分为二\begin{cases}非齐次项引起的稳态分布\\ 非齐次边界条件引起的稳态分布\end{cases}
$$

步骤 3 用分离变量法求解方程

$$
分离变量法\begin{cases}齐次方程（一组非齐次边界条件）的定解问题 \xrightarrow{方法} 常规分离变量法步骤求解\\ 非齐次方程（齐次边界条件）的定解问题 \xrightarrow{方法} 相应齐次问题的特征函数展开法求解\end{cases}
$$

步骤 4 合二为一 叠加即得到原问题的解。

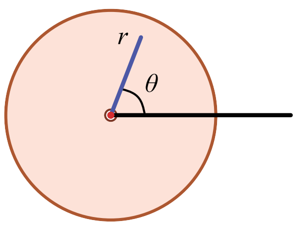

图 3.5: 圆域内非齐次 Laplace 方程

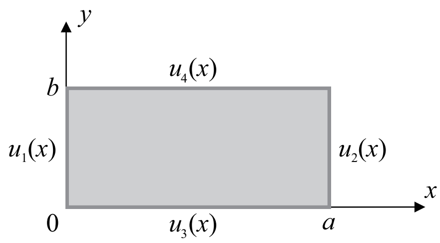

图 3.6: 矩形域内非齐次 Laplace 方程

3.7.4 矩形域内非齐次 Laplace 方程

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y), & 0\le x\le a, 0\le y\le b \\
u|_{x=0}=u_1(t),\ u|_{x=l}=u_2(t), & 0\le y\le b \\
u|_{y=0}=u_3(x),\ u|_{y=b}=u_4(x), & 0\le x\le a
\end{cases}
\tag{3.113}
$$

步骤 1 将边界条件齐次化

步骤 2 一分为二

$$
一分为二\begin{cases}非齐次项引起的稳态分布\\ 非齐次边界条件引起的稳态分布\end{cases}
$$

步骤 3 用分离变量法求解方程

$$
分离变量法\begin{cases}齐次方程（一组非齐次边界条件）的定解问题 \xrightarrow{方法} 常规分离变量法步骤求解\\ 非齐次方程（齐次边界条件）的定解问题 \xrightarrow{方法} 相应齐次问题的特征函数展开法求解\end{cases}
$$

步骤 4 合二为一 叠加即得到原问题的解。

3.7.5 分离变量法解题步骤总结

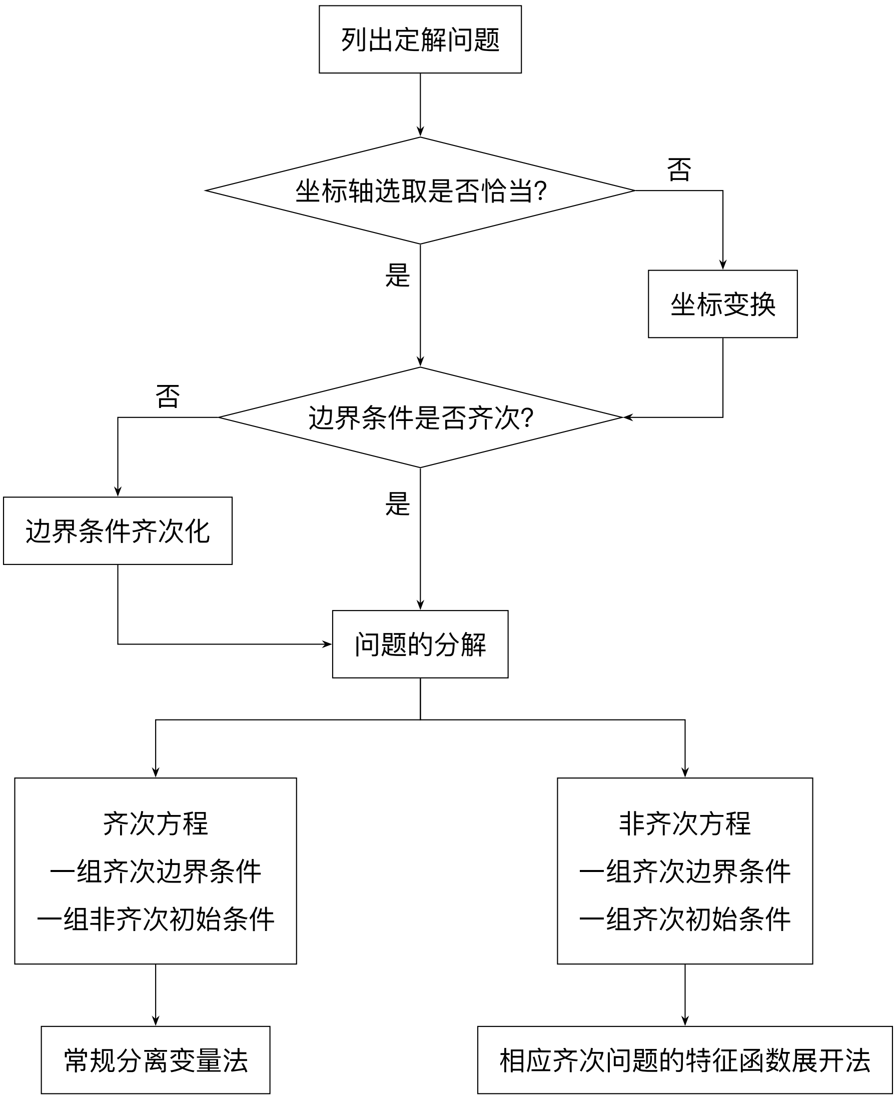

图 3.7: 一般分离变量法解题步骤

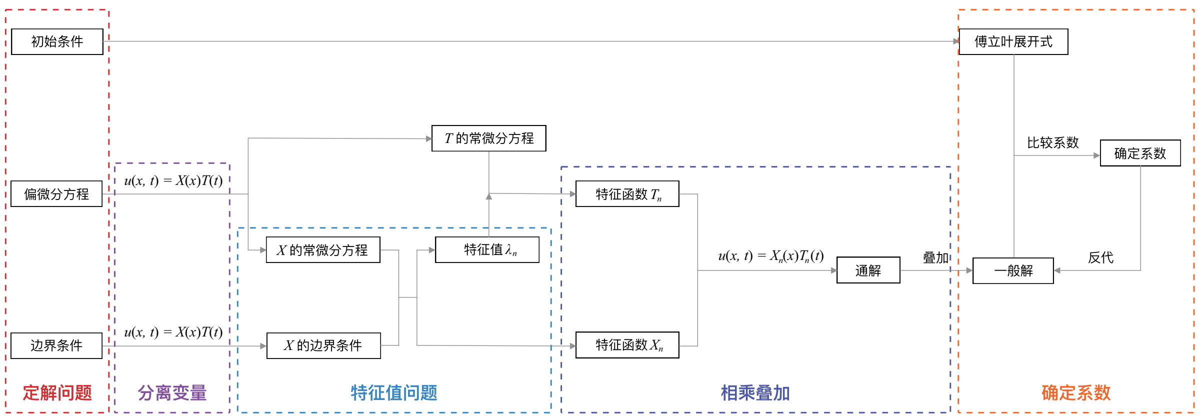

图 3.8: 常规分离变量法步骤

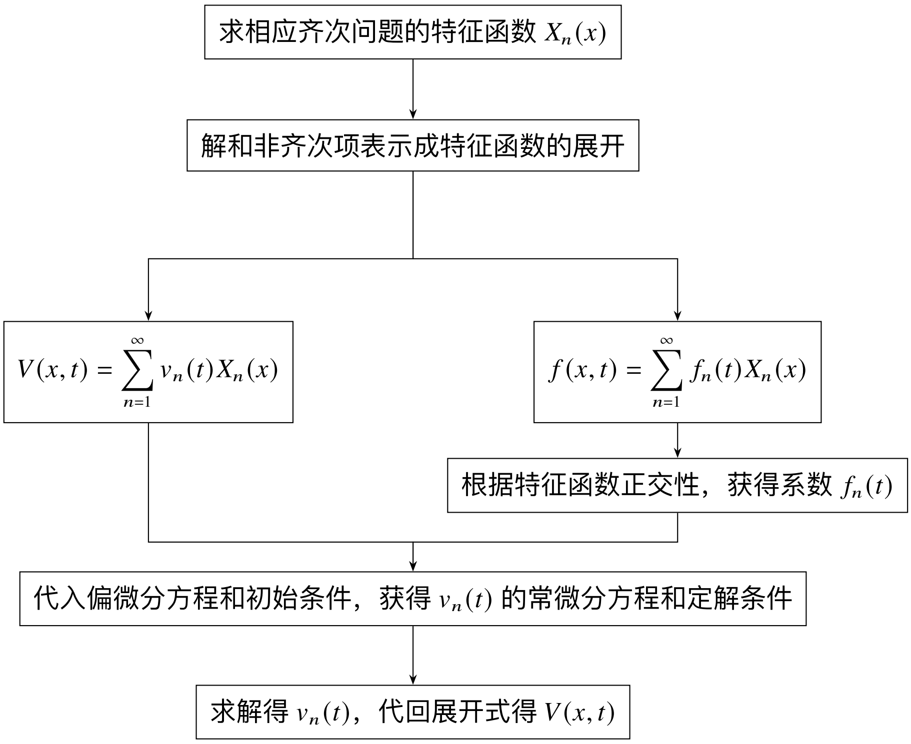

图 3.9: 相应齐次问题的特征函数展开法

例 3.3 研究均匀细杆的导热问题，其中均匀细杆中有一个与温度 u 成正比的负热源，求下列定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - b^2 u, & 0 < x < l, t > 0 \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, u|_{x=l} = 0, & t > 0 \\ u|_{t=0} = \dfrac{u_1}{l^2} x^2, & 0 < x < l \end{cases} \tag{3.114}$$

思路

- 边界形状简单，无需坐标变换
- 边界条件非齐次，需要齐次化边界条件

解

步骤 1 边界条件齐次化

将边界条件齐次化，令

$$u(x,t) = V(x,t) + u_1 \tag{3.115}$$

代入原定解问题，可得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} - b^2 V - b^2 u_1, & 0 < x < l, t > 0 \\ \left.\dfrac{\partial V}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, V|_{x=l} = 0, & t > 0 \\ V|_{t=0} = \dfrac{u_1}{l^2} x^2 - u_1, & 0 \le x \le l \end{cases} \tag{3.116}$$

步骤 2 一分为二

由于方程是非齐次的且边界条件也是非齐次的，所以需要将方程进一步分解为两个方程，引入变量拆分：

$$V(x,t) = v(x,t) + g(x,t) \tag{3.117}$$

- 边界条件不为 0 的自由传热方程（初始非 0 温度分布的贡献）

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} - b^2 v, & 0 < x < l, t > 0 \\ \left.\dfrac{\partial v}{\partial x}\right|_{x=0} = 0, v|_{x=l} = u_1, & t > 0 \\ v|_{t=0} = \dfrac{u_1}{l^2} x^2 - u_1, & 0 \le x \le l \end{cases} \tag{3.118}$$

第 1 步 分离变量

设 $v(x,t) = X(x)T(t)$，代入齐次方程，得到

$$\begin{aligned} & X'' + \beta X = 0 \\ & X'(0) = X(l) = 0 \end{aligned} \qquad T' + (b^2 + a^2\beta^2)T = 0 \tag{3.119}$$

第 2 步 解特征值问题

对 β 进行分类讨论，最后得到

$$\beta^2 = \frac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2} \quad (n = 0, 1, 2, \cdots) \tag{3.120}$$

$$X_n(x) = B_n \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2l} x\right] \tag{3.121}$$

第 3 步 解另一方程

将特征值代入关于 $T(t)$ 的微分方程，可以解得

$$T_n(t) = C_n \exp\left\{\left[-b^2 - \frac{(2n+1)^2\pi^2 a^2}{4l^2}\right] t\right\} \tag{3.122}$$

第 4 步 相乘叠加得一般解

相乘叠加，得

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \exp\left\{\left[-b^2 - \frac{(2n+1)^2\pi^2 a^2}{4l^2}\right] t\right\} \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2l} x\right] \tag{3.123}$$

第 5 步 确定叠加系数

由特征值卷积为 0 的性质，可得

$$v|_{t=0} = v(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2l} x\right] = \frac{u_1}{l^2} x^2 - u_1 \tag{3.124}$$

$$C_n = \frac{\displaystyle\int_0^l \left(\frac{u_1}{l^2} x^2 - u_1\right) \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2l} x\right] \mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^l \cos^2\left[\frac{(2n+1)\pi}{2l} x\right] \mathrm{d}x} \tag{3.125}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{2}{l} \int_0^l \left(\frac{u_1}{l^2} x^2 - u_1\right) \cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2l} x\right] \mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{l} \cdot \left[-\frac{16 u_1 l}{(2n+1)^3\pi^3} \sin\left(\frac{(2n+1)\pi}{2}\right)\right] \\ &= (-1)^{n+1} \frac{32 u_1}{(2n+1)^3\pi^3} \end{aligned} \tag{3.126}$$

所以，得到最终结果为

$$v(x,t)=\frac{32u_1}{\pi^3}\exp(-b^2t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3}\exp\left[-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{4l^2}t\right]\cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right] \tag{3.127}$$

- 含有热源初始条件为 0 的受干扰的传热方程（恒定热源 $-b^2u_1$ 的贡献）

$$\begin{cases}\dfrac{\partial g}{\partial t}=a^2\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2}-b^2g-b^2u_1, & 0<x<l,t>0\\ \left.\dfrac{\partial g}{\partial x}\right|_{x=0}=0, g|_{x=l}=0, & t>0\\ g|_{t=0}=0, & 0\le x\le l\end{cases} \tag{3.128}$$

步骤 1　按相应齐次问题的特征函数展开

将 $g(x,t)$ 及其方程中的非齐次项均按相应齐次问题的特征函数展开

$$g(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}g_n(t)\cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right] \tag{3.129}$$

$$-b^2u_1=\sum_{n=0}^{\infty}f_n\cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right] \tag{3.130}$$

步骤 2　由特征函数正交性确定非齐次项叠加系数

$$g_n=\frac{\displaystyle\int_0^l -b^2u_1\cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right]\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^l \cos^2\left[\frac{(2n+1)\pi}{2l}x\right]\mathrm{d}x}=(-1)^{n+1}\frac{4b^2u_1}{(2n+1)\pi} \tag{3.131}$$

步骤 3　将展开式代入方程和初始条件得常微分方程

$$\begin{cases}g_n'(t)+\left[\dfrac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}+b^2\right]g_n(t)=(-1)^{n+1}\dfrac{4b^2u_1}{(2n+1)\pi}\\ g_n(0)=0\end{cases} \tag{3.132}$$

步骤 4　Laplace 变换求解常微分方程

令常数 $A=\dfrac{(2n+1)^2\pi^2}{4l^2}+b^2, B=(-1)^{n+1}\dfrac{4b^2u_1}{(2n+1)\pi}$，并记 $\mathcal{L}\left[g_n(t)\right]=G_n(s)$。

对常微分方程取 Laplace 变换，得

$$sG_n(s)+AG_n(s)=\frac{B}{s}\quad\Rightarrow\quad G_n(s)=\frac{B}{s(s+A)}=\frac{B}{A-1}\left(\frac{1}{s}-\frac{1}{s+A}\right) \tag{3.133}$$

取逆变换，得

$$\begin{aligned}g_n(t)&=\mathcal{L}^{-1}\left[G_n(s)\right]=\frac{B}{A-1}\left(1-\mathrm{e}^{-At}\right)\\&=\frac{(-1)^n16b^2u_1l^2}{(2n+1)\pi\left[4b^2l^2+(2n+1)^2\pi^2a^2\right]}\left\{\exp\left[-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2+4l^2b^2}{4l^2}t\right]-1\right\}\end{aligned} \tag{3.134}$$

步骤 5　代入特征函数叠加得一般解

$$g(x,t)=\frac{16b^2u_1l^2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\left[4b^2l^2+(2n+1)^2\pi^2a^2\right]}\left\{\exp\left[-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2+4l^2b^2}{4l^2}t\right]-1\right\}\cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right] \tag{3.135}$$

步骤 3 合二为一

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= V(x,t) + u_1 = v(x,t) + g(x,t) + u_1 \\
&= \frac{16b^2u_1l^2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)\left[4b^2l^2+(2n+1)^2\pi^2a^2\right]}\left\{\exp\left[-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2+4l^2b^2}{4l^2}t\right]-1\right\}\cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right] \\
&+ \frac{32u_1}{\pi^3}\exp(-b^2t)\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)^3}\exp\left[-\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{4l^2}t\right]\cos\left[\frac{(2n+1)\pi}{2}x\right]+u_1
\end{aligned}
\tag{3.136}
$$

注意

分离变量法的适用条件

1. 方程和定解条件都是线性的
2. 边界形状规则 [1]
3. 有限域内的定解问题

[1] 边界在某种坐标系中能用若干个仅含有一个坐标变量的方程表示，即边界与坐标轴垂直

第 4 章　行波法

行波　一往无前向前传播的波

- 一维行波　抖动的绳子
- 二维行波　投石入海
- 三维行波　灯塔上发出的光

行波法　**无界域内波动方程定解问题的求解方法**

4.1　一维波动方程的达朗贝尔公式

4.1.1　达朗贝尔公式的推导

考虑无界域内波动方程的通解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < +\infty \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x) & -\infty < x < +\infty \end{cases} \tag{4.1}$$

思路

- 仿照**求解常微分方程的方法**：先求通解，再求特解
- 一般来说对偏微分这种方法不可行，但是对于**一阶波动方程来说是一个特例**

步骤 1　求通解

引入

$$\begin{cases} \xi = x + at \\ \eta = x - at \end{cases} \tag{4.2}$$

利用复合函数求导法则，得

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial t} = a\frac{\partial u}{\partial \xi} - a\frac{\partial u}{\partial \eta} = A$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial A}{\partial t} = a\frac{\partial A}{\partial \xi} - a\frac{\partial A}{\partial \eta} \\
&= a\left(a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - a\frac{\partial}{\partial \eta \partial \xi}\right) - a\left(a\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - a\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) \\
&= a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right)
\end{aligned}
$$

同理可得

$$
\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta}\frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} = B
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial \xi} + \frac{\partial B}{\partial \eta} \\
&= \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial}{\partial \eta \partial \xi}\right) + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}\right) \\
&= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}
\end{aligned} \tag{4.3}
$$

将以上求偏微分结果代入原方程，可得

$$
\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \tag{4.4}
$$

对 η 积分得到

$$
\frac{\partial u}{\partial \xi} = f(\xi)
$$

再对 ξ 积分得到

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \int f(\xi)\,\mathrm{d}\xi + f_2(\eta) \\
&= f_1(x+at) + f_2(x-at)
\end{aligned} \tag{4.5}
$$

步骤 2 用初始条件定特解

将通解 $u(x,t) = f_1(x+at) + f_2(x-at)$ 代入初始条件

$$
\begin{cases}
f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \\
a f_1'(x) - a f_2'(x) = \psi(x)
\end{cases}
$$

对导数项积分，可得

$$
a f_1'(x) - a f_2'(x) = \psi(x) \quad \Rightarrow \quad a f_1(x) - a f_2(x) = \int_0^x \psi(\tau)\,\mathrm{d}\tau + C \quad \Rightarrow \quad f_1(x) - f_2(x) = \frac{1}{a}\int_0^x \psi(\tau)\,\mathrm{d}\tau + C
$$

即

$$
\begin{cases}
f_1(x) + f_2(x) = \varphi(x) \\
f_1(x) - f_2(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^x \psi(\tau)\,\mathrm{d}\tau + C
\end{cases}
\quad \Rightarrow \quad
\begin{cases}
f_1(x) = \dfrac{\varphi(x)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^x \psi(\tau)\,\mathrm{d}\tau + \dfrac{C}{2} \\
f_2(x) = \dfrac{\varphi(x)}{2} - \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_0^x \psi(\tau)\,\mathrm{d}\tau - \dfrac{C}{2}
\end{cases} \tag{4.6}
$$

由此可以得到最终解为

$$
u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \psi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \tag{4.7}
$$

公式(4.7)被称为无限长弦自由振动的达朗贝尔公式。

4.1.2 达朗贝尔公式的物理意义

1. **$f_1(x+at), f_2(x-at)$ 的意义**

   - $u_2 = f_2(x-at)$ 的物理意义

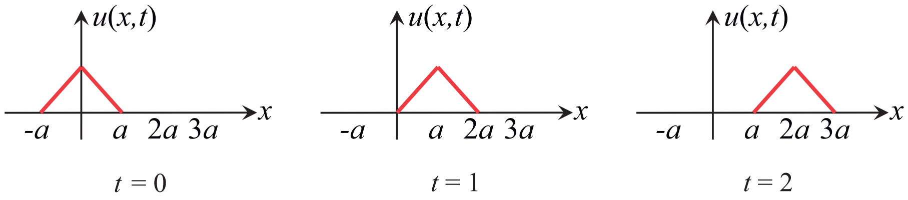

图 4.1: $u_2 = f_2$ 的物理意义

     – 如图4.1. 随着时间 t 的推移，u_2 的图形以速度 a 向 x 轴正向移动；
     – 它表示一个以速度 a 向 x 轴正方向行进的波, 称为右行波。

   - $u_1 = f_1(x+at)$ 的物理意义

     同理，u_1 表示一个以速度 a 向 x 轴负方向行进的波, 称为左行波。

2. **达朗贝尔公式的分析**

令 $\Phi(x) = \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_{x_0}^{x} \psi(\tau)\,\mathrm{d}\tau$，则达朗贝尔公式可以写成

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\tau)\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right] + \frac{1}{2}\left[\Phi(x+at)-\Phi(x-at)\right] \qquad (4.8)
\end{aligned}
$$

   - 第一项表示初位移激发的行波；

     $t > 0$ 以后分成波形相同的两部分，等速向左、向右传播。

   - 第二项表示初速度激发的行波；

     $t > 0$ 以后分成波形相反的两部分，等速向左、向右传播。

3. **达朗贝尔公式的物理意义**

   - 弦上的任意扰动（初位移和初速度）总是以行波的形式分别向两个方向传播出去；
   - 其传播速度恰恰是波动方程中出现的常数 a；
   - 基于这种原因，达朗贝尔解法又称为行波法；
   - 初位移激发的左右行波是大小相等的，初速度激发的行波与其发生干涉。

注意

行波法小总结

1. 其要领是引入坐标变换简化方程，求得通解后再求特解；
2. 一维无界域波动方程的解可以利用达朗贝尔公式直接得到解；
3. **仅适用于无界域波动方程的初值问题。**

4.2 特征线

1. **影响区域**

- 0 时刻施加在区间 $[X_1, X_2]$ 的扰动在 t 时刻波及 $[X_1 - at, X_2 + at]$。
- 梯形区域以外，波动不受区间 $[X_1, X_2]$ 上初始扰动的影响。
- 这个不断膨胀的梯形区域称为区间 $[X_1, X_2]$ 的影响区域。

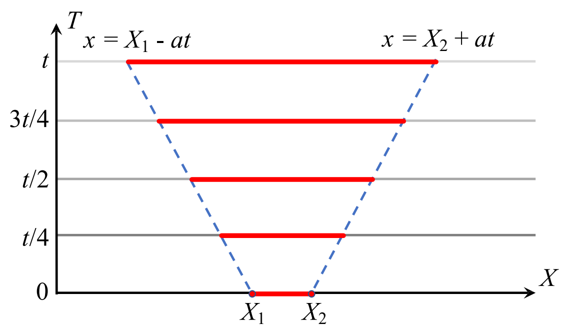

图 4.2: 影响区域

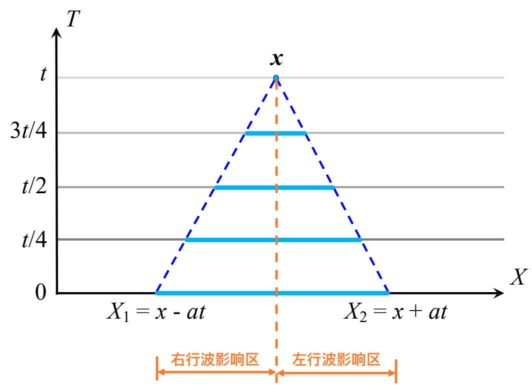

图 4.3: 决定区域

2. **依赖区间与决定区域**

- t 时刻 x 点的状况，由区间 $[X_1, X_2] = [x - at, x + at]$ 内的初始条件决定。
- 区间 $[x - at, x + at]$ 称为 (x, t) 的依赖区间。
- 对于三角形区域内的任何一点，其**依赖区间**均位于 $[x - at, x + at]$ 内部。
- 已知 $[X_1, X_2]$ 区间的初始条件，则可以完全确定三角形区域内初值问题的解，这个三角形区域称为区间 $[X_1, X_2]$ 的决定区域。

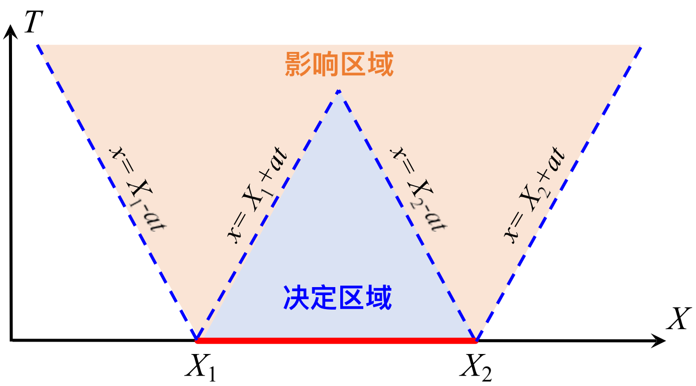

图 4.4: 决定区域和影响区域的边界

3. **决定区域和影响区域的边界**

决定区域和影响区域的边界是由左倾直线 $x + at = c_1$ 和右倾直线 $x - at = c_2$ 规定，这两条直线在 $x - t$ 平面上斜率为 $\pm\frac{1}{a}$ 的直线称为一维波动方程的特征线。

- 在左倾直线 $x + at = c_1$ 上，左行波 $f_1(x + at)$ 的位移为常数。
- 在右倾直线 $x - at = c_2$ 上，右行波 $f_2(x - at)$ 的位移为常数。
- 所以，左右行波是沿着各自的特征线传播的。

4.3 二阶线性双变量偏微分方程

1. **特征线的一般化**

对于一般的二阶线性双变量偏微分方程

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=G \tag{4.9}$$

我们将常微分方程

$$A(\mathrm{d}y)^2-2B\mathrm{d}x\mathrm{d}y+C(\mathrm{d}x)^2=0 \tag{4.10}$$

称为相应偏微分方程的特征方程，其解为偏微分方程的特征线。特征线的特点：

- 特征线仅与方程中的二阶导数项的系数有关
- 利用特征线构造坐标变换，可以实现方程的简化

2. **二阶线性双变量微分方程的分类**

对于一般的二阶线性双变量偏微分方程

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+D\frac{\partial u}{\partial x}+E\frac{\partial u}{\partial y}+Fu=G$$

其判别式与分类如表4.1.

判别式 $\Delta=B^2-AC$	
$\Delta>0$	双曲线型的二阶线性双变量微分方程
$\Delta=0$	抛物线型的二阶线性双变量微分方程
$\Delta<0$	椭圆型的二阶线性双变量微分方程

表 4.1: 二阶线性双变量微分方程的分类

4.4 三维波动方程的泊松公式

三维波动的定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), & -\infty<x,y,z<+\infty, t>0\\ u\Big|_{t=0}=\varphi_0(x,y,z), & -\infty<x,y,z<+\infty\\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\varphi_1(x,y,z), & -\infty<x,y,z<+\infty\end{cases} \tag{4.11}$$

4.4.1 三维波动方程的球对称解

1. 球坐标系

$$\begin{cases}x=x_0+r\sin\theta\cos\varphi\\ y=y_0+r\sin\theta\sin\varphi\\ z=z_0+r\cos\theta\end{cases} \tag{4.12}$$

2. 球对称解

引入球坐标系后的三维波动方程转换为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left[\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right] \tag{4.13}$$

球对称指的是 u 与 θ,ρ 无关，只是 r 的函数。此时，波动方程化简为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{a^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) \tag{4.14}$$

经过等价变形，得到

$$\frac{\partial^2(ru)}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2(ru)}{\partial r^2} \tag{4.15}$$

其为关于 ru 的一维波动方程，其通解为

$$ru=f_1(r+at)+f_2(r-at) \tag{4.16}$$

等价于

$$u(r,t)=\frac{f_1(r+at)+f_2(r-at)}{r} \tag{4.17}$$

其中，u 可以分为两个部分的叠加

- $\dfrac{f_1(r+at)}{r}$ 以速度 a 沿 r 减小的方向传播的行波
- $\dfrac{f_2(r-at)}{r}$ 以速度 a 沿 r 增加的方向传播的行波

4.4.2 三维波动方程的泊松公式

三维波动方程在球对称情形下是非常容易求解的，泊松提出了泊松球面平均法

1. 考虑空间中以点 $M(x,y,z)$ 为球心，以 r 为半径的球，建立球坐标
2. 记其球面 M' 上 u 的平均值为 $\bar{u}(r,t)$
3. 对于每一个局部的球心 M，平均值 $\bar{u}(r,t)$ 满足球对称解
4. 再求极限 $\lim\limits_{r\to0}\bar{u}(r,t)=u(M,t)$ 即得到了想要的结果

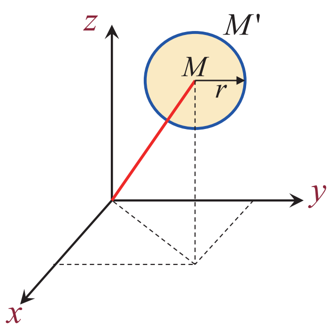

图 4.5: 泊松球面平均法

1. 求 $\bar{u}(r,t)$ 的通解

(1) 选定球心 $M(x,y,z)$，建立球坐标系

(2) 其半径为 r 的球面上的点记作 $M(\xi,\eta,\zeta)$，(ξ,η,ζ) 是在直角坐标系上的坐标

(3) 对于每一个球心 M，引入球面平均值函数 $\overline{u}(r,t)$

$$\overline{u}(r,t) = \frac{1}{4\pi r^2}\iint\limits_{S_r^M} u(\xi,\eta,\zeta,t)\,\mathrm{d}S \tag{4.18}$$

注意：积分是基于以 M 为原点的球坐标系

(4) 能够证明其满足球对称解，即其通解为

$$r\overline{u}(r,t) = f_1(r+at) + f_2(r-at) \tag{4.19}$$

2. 求 $\overline{u}(r,t)$ 的特解

(1) 由通解得到

$$\begin{cases} r\overline{u}\big|_{t=0} = f_1(r) + f_2(r) \\ r\left.\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right|_{t=0} = af_1'(r) - af_2'(r) \end{cases} \tag{4.20}$$

(2) 由定解条件可得

$$\begin{cases} \overline{u}\big|_{t=0} = \varphi_0(x,y,z) \\ \left.\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right|_{t=0} = \varphi_1(x,y,z) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} r\overline{u}\big|_{t=0} = r\overline{\varphi}_0(r) \\ r\left.\dfrac{\partial\overline{u}}{\partial t}\right|_{t=0} = r\overline{\varphi}_1(r) \end{cases} \tag{4.21}$$

(3) 对比(4.20)和(4.21)可得

$$\begin{cases} f_1(r) + f_2(r) = r\overline{\varphi}_0(r) \\ f_1'(r) - f_2'(r) = \dfrac{r}{a}\overline{\varphi}_1(r) \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} f_1(r) = \dfrac{1}{2}\left[r\overline{\varphi}_0(r) + \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^r \rho\overline{\varphi}_1(\rho)\,\mathrm{d}\rho + C\right] \\ f_2(r) = \dfrac{1}{2}\left[r\overline{\varphi}_0(r) - \dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^r \rho\overline{\varphi}_1(\rho)\,\mathrm{d}\rho - C\right] \end{cases} \tag{4.22}$$

(4) 反代，得到最终表达式

$$\overline{u}(r,t) = \frac{1}{2r}\big[(r+at)\overline{\varphi}_0(r+at) + (r-at)\overline{\varphi}_0(r-at)\big] + \frac{1}{2ar}\int_{r-at}^{r+at}\rho\overline{\varphi}_1(\rho)\,\mathrm{d}\rho \tag{4.23}$$

3. 求极限

(1) $r\to 0 \Rightarrow M'(\xi,\eta,\zeta) \to M(x,y,z)$

(2) 根据洛必达法则，对(4.23)分子分母同时求导，并将 $r=0$ 代入

$$\begin{aligned}
\lim_{r\to 0}\overline{u}(r,t) &= \lim_{r\to 0}\frac{\big[(r+at)\overline{\varphi}_0(r+at)\big]' + \big[(r-at)\overline{\varphi}_0(r-at)\big]'}{2} + \frac{(r+at)\overline{\varphi}_1(r+at) - (r-at)\overline{\varphi}_1(r-at)}{2a} \\
&= \lim_{r\to 0}\frac{\overline{\varphi}_0(r+at) + (r+at)\overline{\varphi}_0'(r+at) + \overline{\varphi}_0(r-at) + (r-at)\overline{\varphi}_0'(r-at)}{2} + \frac{at\overline{\varphi}_1(at) + at\overline{\varphi}_1(-at)}{2a} \\
&= \frac{\overline{\varphi}_0(at) + at\overline{\varphi}_0'(at) + \overline{\varphi}_0(-at) - at\overline{\varphi}_0'(-at)}{2} + \frac{at\overline{\varphi}_1(at) + at\overline{\varphi}_1(-at)}{2a} \\
&= \frac{\overline{\varphi}_0(at) + \overline{\varphi}_0(-at) + at\overline{\varphi}_0'(at) - at\overline{\varphi}_0'(-at) + t\overline{\varphi}_1(at) + t\overline{\varphi}_1(-at)}{2}
\end{aligned} \tag{4.24}$$

(3) 可以证明 $\overline{\varphi}_0, \overline{\varphi}_1$ 是偶函数，则 $\overline{\varphi}_0', \overline{\varphi}_1'$ 是奇函数，进一步化简得到

$$\begin{cases} \overline{\varphi}_0(at) = \overline{\varphi}_0(-at) \\ \overline{\varphi}_1(at) = \overline{\varphi}_1(-at) \\ \overline{\varphi}_0'(at) = -\overline{\varphi}_0'(-at) \end{cases} \implies \overline{u}(M,t) = \varphi_0(at) + at\overline{\varphi}_0'(at) + t\overline{\varphi}_1(at) \tag{4.25}$$

即

$$\begin{aligned} \overline{u}(M,t) &= \frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}\left[(at)\overline{\varphi}_0(at)\right] + t\overline{\varphi}_1(at) \\ &= \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{at}^M}\frac{\varphi_1}{at}\,\mathrm{d}S + \frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{S_{at}^M}\frac{\varphi_0}{at} \end{aligned} \tag{4.26}$$

公式(4.26)称为三维波动方程的泊松公式。

注意

使用三维波动方程的泊松公式的注意事项

1. 积分是基于以 M 为原点的球坐标系，所以

$$\mathrm{d}S = r^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = (at)^2 \sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \tag{4.27}$$

2. 计算时，要将球面 S_{at}^M 上的点变换为以 M 为原点的球坐标系上的点，即

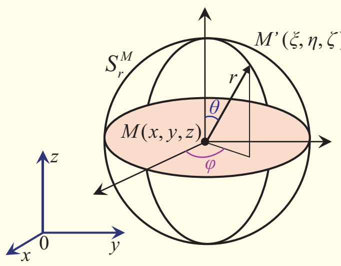

图 4.6: 以 M 为原点的球坐标系

$$\varphi_0(x,y,z) \to \varphi_0(\xi,\eta,\zeta) \qquad \varphi_1(x,y,z) \to \varphi_1(\xi,\eta,\zeta)$$

其中，

$$\begin{cases} \xi = x + at\sin\theta\cos\varphi, \\ \eta = y + at\sin\theta\sin\varphi, \\ \zeta = z + at\cos\theta. \end{cases} \tag{4.28}$$

例 4.1 设已知 $\varphi_0(x,y,z) = x+y+z$，$\varphi_1(x,y,z) = 0$，代入泊松方程求解。

解 由于 $\varphi_1 = 0$，代入泊松公式，求以 M 为原点的球面积分

$$u(M,t) = \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{at}^M}\frac{\varphi_1}{at}\,\mathrm{d}S + \frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{S_{at}^M}\frac{\varphi_0}{at} = \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{at}^M}\frac{\varphi_1}{at}\,\mathrm{d}S$$

其中，球面上的函数值为

$$\varphi_0(\xi,\eta,\zeta) = x + at\sin\theta\cos\varphi + y + at\sin\theta\sin\varphi + z + at\cos\theta$$

因此，

$$u(M,t) = \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{x + at\sin\theta\cos\varphi + y + at\sin\theta\sin\varphi + z + at\cos\theta}{at}(at)^2\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta = x+y+z$$

4.4.3 三维波动方程泊松公式的物理意义

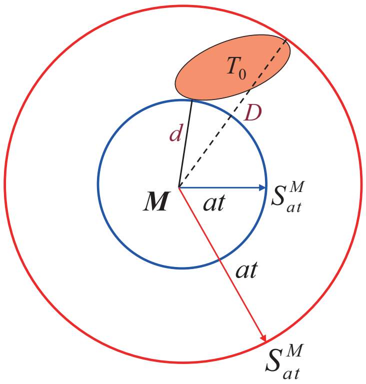

图 4.7: 三维波动方程泊松公式的物理意义

如图4.7，假定初始条件限于立体区域 T_0

- $at < d \quad \to \quad u(M,t) = 0$ 扰动前锋未到
- $at > d \quad \to \quad u(M,t) = 0$ 扰动阵尾已过
- $d \le at \le D \quad \to \quad u(M,t) \ne 0$ 扰动发生作用
- 从而可以看出扰动作用有清晰的“前锋”及“阵尾”，它称为惠更斯原理（无后效现象）。

4.4.4 二维波动方程泊松公式及其物理意义

1. 二维波动方程的泊松公式

二维波动方程的定解问题为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), & -\infty < x, y < +\infty, t > 0 \\ u\Big|_{t=0} = \varphi_0(x, y), & -\infty < x, y < +\infty \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = \varphi_1(x, y), & -\infty < x, y < +\infty \end{cases} \tag{4.29}$$

二维波动方程的泊松公式为

$$u(M,t) = \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left(\iint\limits_{\Sigma_{at}^M} \mathrm{d}S\right) + \frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{\Sigma_{at}^M} \mathrm{d}S \tag{4.30}$$

其中，

- $u(M,t)$ 是由以 M 为中心、at 为半径的圆域 Σ_{at}^M 内的初始条件决定的 (u 依赖于整个圆域内的初始条件)
- 注意：决定区域是圆域内而不是圆环上

2. 二维波动方程泊松公式的物理意义

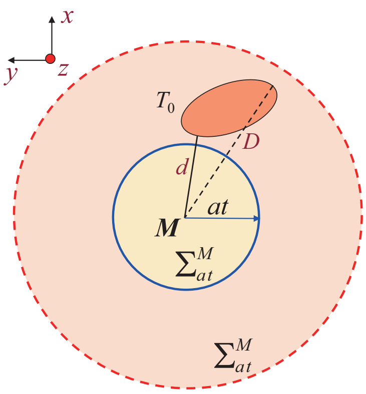

图 4.8: 二维波动方程泊松公式的物理意义

如图4.8，假定初始条件限于平面区域 T_0

- $at < d \quad \to \quad u(M,t) = 0$ 扰动前锋未到
- $at \ge d \quad \to \quad u(M,t) \ne 0$ 扰动发生作用
- 从而可以看出扰动作用有清晰的“前锋”而无“振尾”，称为波的弥漫（有后效现象）。

4.5 泊松公式物理意义总结

1. 三维泊松公式的物理意义

(1) 空间任意一点 M，在任意时刻 $t>0$ 的状态，完全由以该点为球心、at 为半径的球面上初态决定。

(2) 当初始扰动限制在空间某局部范围时，扰动有清晰的“前锋”与“阵尾”，即**惠更斯原理成立（无后效）**。

2. 二维泊松公式的物理意义

(1) 平面任意一点 M，在任意时刻 $t>0$ 的状态，完全由以该点为圆心、at 为半径的圆盘域上初态决定。

(2) 局部初始扰动对二维空间任意一点的扰动有持续后效，波的传播有清晰的“前锋”而无“阵尾”，此现象称为波的弥漫，即**惠更斯原理不再成立（有后效）**。

第 5 章　积分变换法

定义 5.1　积分变换

把函数 $f(t)$ 经过积分运算变换为另一类函数

$$F(\beta) = \int_a^b f(t)K(\beta,t)\,\mathrm{d}t \tag{5.1}$$

其中，

- β 为参变量，$K(\beta,t)$ 为一个确定的二元函数，称为积分变换的核
- 不同的核与不同的积分区域，构成不同的积分变换
- 主要包括 Fourier 变换和 Laplace 变换

5.1　Fourier 变换

定理 5.1　Fourier 变换

Fourier 变换

$$F(\omega) = \mathscr{F}\left[f(x)\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x \tag{5.2}$$

反演

$$f(x) = \mathscr{F}^{-1}\left[F(\omega)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}\omega \tag{5.3}$$

注意

Fourier 变换的重要条件：**分段光滑**[1]、**绝对可积** $\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(x)\right|\mathrm{d}x < +\infty$

推论 1　$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \text{有限值}$

推论 2　$x \to \pm\infty, f(x) \to 0$

[1] **分段光滑**：一阶导数存在，且导函数只有第一类间断点。

5.1.1　Fourier 变换的理解

Fourier 变换从几何上看是将函数分解成无数个绕原点做圆周运动的向量，得到相位/半径与频率的函数关系；本质上是分解成无数个不同频率、幅值和相位正弦函数。

物理上认为，$f(x)$ 为信号（原函数），$F(\omega)$ 为频谱（像函数），对 $f(x)$ 进行 Fourier 变换，实际上是由信号得到频谱的过程 (从时域到频域)，称为Fourier 分析。

对于 Fourier 变换的进一步理解，如图5.1.

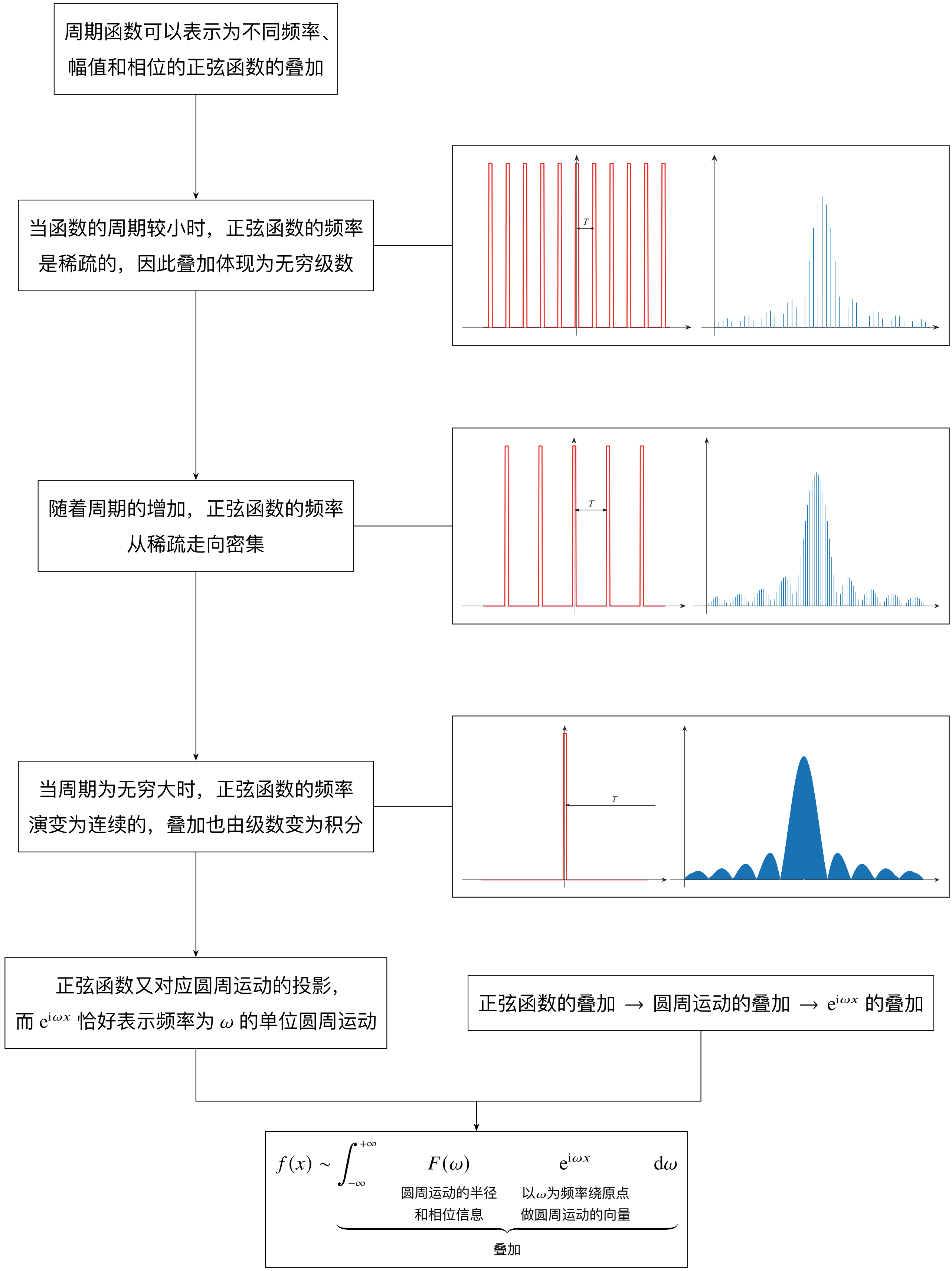

图 5.1: Fourier 变换的理解图

5.1.2 Fourier 变换的基本性质

性质 1 线性性质

$$\mathcal{F}\left[C_1 f_1 + C_2 f_2\right] = C_1 \mathcal{F}\left[f_1\right] + C_2 \mathcal{F}\left[f_2\right] \tag{5.4}$$

性质 2 微分性质

$$\mathcal{F}\left[f'(x)\right] = \mathrm{i}\omega \mathcal{F}\left[f(x)\right] \tag{5.5}$$

$$\mathcal{F}\left[f^{(m)}(x)\right] = (\mathrm{i}\omega)^m \mathcal{F}\left[f(x)\right] \tag{5.6}$$

性质 3 象函数微分性质

$$\mathcal{F}\left[x f(x)\right] = \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\mathcal{F}\left[f(x)\right] \tag{5.7}$$

$$\mathcal{F}\left[x^m f(x)\right] = \mathrm{i}^m \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\omega^m}\mathcal{F}\left[f(x)\right] \tag{5.8}$$

性质 4 卷积性质

- 卷积定义

$$f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t) f_2(x-t)\,\mathrm{d}t \tag{5.9}$$

- 卷积性质

$$\mathcal{F}\left[f_1(x) * f_2(x)\right] = \mathcal{F}\left[f_1(x)\right] \cdot \mathcal{F}\left[f_2(x)\right] \tag{5.10}$$

$$f_1(x) * f_2(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)\right] \tag{5.11}$$

5.1.3 δ 函数及其 Fourier 变换

1. δ 函数的定义

特征 1 无穷高且窄

$$\delta(x-x_0) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases} \tag{5.12}$$

特征 2 具有单位面积 $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x-x_0)\,\mathrm{d}x = 1$

2. δ 函数的性质

性质 1 筛选性质 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\delta(x-x_0)\,\mathrm{d}x = f(x_0)$

性质 2 偶函数 $\delta(x) = \delta(-x)$

性质 3 卷积表平移 $\delta(x-a) * f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\xi - a) f(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi = f(x-a)$

3. δ 函数的 Fourier 变换

$$\mathcal{F}\left[\delta(x-x_0)\right] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-x_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x = 1 \tag{5.13}$$

5.2 Laplace 变换

定理 5.2 Laplace 变换

Laplace 变换

$$F(p)=\mathcal{L}\big[f(t)\big]=\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}x \tag{5.14}$$

反演

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\big[F(p)\big]=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\beta-\mathrm{i}\infty}^{\beta+\mathrm{i}\infty} F(p)\mathrm{e}^{pt}\,\mathrm{d}p \tag{5.15}$$

5.2.1 Laplace 变换的理解

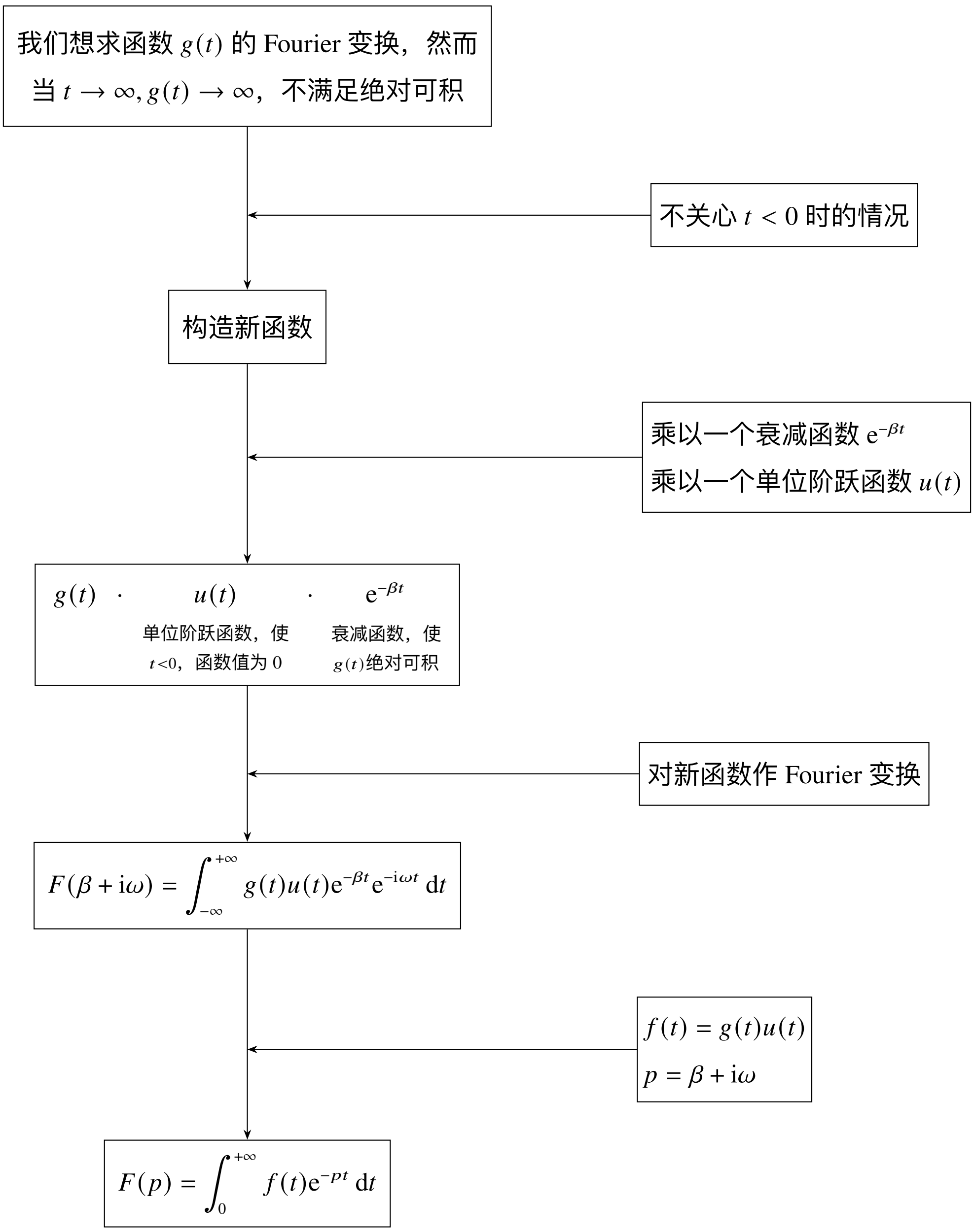

图 5.2: Laplace 变换的理解图

5.2.2 Laplace 变换的性质

性质 1 线性性质

若 α,β 是任意常实数，且 $\mathcal{L}[f_1(t)]=F_1(s),\mathcal{L}[f_2(t)]=F_2(s)$，则有

$$\mathcal{L}[\alpha f_1(t)\pm\beta f_2(t)]=\alpha F_1(s)\pm\beta F_2(s) \tag{5.16}$$

性质 2 微分性质

若 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$，则有

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)]=s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-s^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0) \tag{5.17}$$

性质 3 积分性质

若 $\mathcal{L}[f(t)]=F(s)$，则有

$$\mathcal{L}\left[\underbrace{\int\cdots\int}_{n}f(t)\,\mathrm{d}t^n\right]=\frac{1}{s^n}F(s)+\frac{1}{s^n}f^{-1}(0)+\frac{1}{s^{n-1}}f^{(-2)}(0)+\cdots+\frac{1}{s}f^{(-n)}(0) \tag{5.18}$$

其中，$f^{(-1)}(0),f^{(-2)}(0),f^{(-n)}(0)$ 分别为 $f(t)$ 的各重积分在 $t=0$ 处的值。

性质 4 卷积定理

若 $\mathcal{L}[f_1(t)]=F_1(s),\mathcal{L}[f_2(t)]=F_2(s)$，则

$$\mathcal{L}[f_1(t)*f_2(t)]=F_1(s)\cdot F_2(s) \tag{5.19}$$

注意

Laplace 变换的重要条件：

1. $t<0$ 时，$f(t)=0$；$t>0$ 时，$f(t)$ 是分段光滑的。
2. $f(t)$ 有有限的增长指数。即存在正数 M 及 $c\geq 0$，使得对于任何 t 值，$|f(t)|\leq Me^{ct}$，则 Laplace 变换在 $\mathrm{Re}(p)=\beta>c$ 时存在。

5.2.3 Laplace 反演的计算

1. 留数定理

(1) 极点的判断方法：$\dfrac{1}{f(p)}$ **的 m 重零点就是 $f(p)$ 的 m 级极点**.

(2) n 级极点的留数：设 p_0 是函数 $f(p)$ 的 n 级极点，则

$$\mathrm{Res}[f(p),p_0]=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{p\to p_0}\frac{\mathrm{d}^{n-1}[(p-p_0)^nf(p)]}{\mathrm{d}p^{n-1}} \tag{5.20}$$

2. 反演公式转换为求极点留数

设 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 是函数 $F(p)$ 的所有奇点，适当选取 $\Re(p)=\beta$ 使这些奇点落在复平面上直线 $\Re(p)=\beta$ 的左侧，且 $\boldsymbol{p\to\infty,F(p)\to 0}$，则

$$f(t)=\sum_{k=0}^{n}\mathrm{Res}[F(p)e^{pt},p_k] \tag{5.21}$$

5.2.4 Laplace 变换的应用——求解常微分方程（组）

题型 5.1 Laplace 变换求解常微分方程（组）

解题步骤

1. 对方程两边同时做拉普拉斯变换。
2. 利用拉普拉斯变换的线性性质、微分性质代替各阶的的导数，解出 $Y(s)$。
3. 做 $Y(s)$ 的拉普拉斯逆变换，得到 $y(t)$。

注意

Fourier 变换和 Laplace 变换的对比

1. 都属于积分变换，实函数变换为复函数，但积分范围不同。
2. 存在条件
   - Fourier　分段光滑，绝对可积
   - Laplace　分段光滑，$f(t)$ 增长小于指数级
3. 积分变量不同
   - Fourier　$\omega \in (-\infty, +\infty)$
   - Laplace　p 的实部满足一定条件（可自行调节）

5.3 积分变换法

5.3.1 积分变换法简述

1. 积分变换的性质

性质 1　积分变换的微分性质

$$\mathcal{F}\left[f'(x)\right] = \mathrm{i}\omega\mathcal{F}\left[f(x)\right] \tag{5.22}$$

$$\mathcal{F}\left[f''(x)\right] = -\omega^2\mathcal{F}\left[f(x)\right] \tag{5.23}$$

$$\mathcal{L}\left[f'(t)\right] = p\mathcal{L}\left[f(t)\right] - f(0) \tag{5.24}$$

$$\mathcal{L}\left[f''(t)\right] = p^2\mathcal{L}\left[f(t)\right] - pf(0) - f'(0) \tag{5.25}$$

性质 2　积分变换的卷积性质

$$f_1(x) * f_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\xi) f_2(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi = \mathcal{F}^{-1}\left[F_1(\omega)\cdot F_2(\omega)\right] \tag{5.26}$$

$$f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau = \mathcal{L}^{-1}\left[F_1(p)\cdot F_2(p)\right] \tag{5.27}$$

2. 积分变换法的基本步骤

步骤 1 变换 选适当的积分变换，对方程的两边做变换将偏微分方程变为含参量的常微分方程；对变换中未利用到的定解条件也做变换。关于积分变量的选取，与两个变换方法的积分域有关：

- Fourier 变换 积分域为 $(-\infty, +\infty)$ $\Rightarrow$ 无界空间变量
- Laplace 变换 积分域为 $(0, +\infty)$ $\Rightarrow$ 时间变量
- 如果同时存在无界空间变量和时间变量，这时可以联用两种变换，即联合变换

步骤 2 求解 解常微分方程，得到像函数的解

- 一阶齐次方程 分离变量法
- 二阶齐次方程 特征根法
- 非齐次方程 常数变易法

步骤 3 反演 对像函数反演，得到原定解问题的解，通常有以下两个解法

- 查表 + 卷积性质
- 留数定理

注意

- 在用积分变换求解定解问题时，假定所求的解及定解条件中的已知函数的变换都是存在的；
- 一个未知函数在未求出前是很难判断变换是否存在的，因此，在未做验证前，得到的只是形式解。

5.3.2 积分变换法举例

$$
\text{积分变换法}\begin{cases}\text{热传导方程}\begin{cases}\text{无界杆的热传导问题}\\ \text{半无界杆的热传导问题}\end{cases}\\ \text{波动方程}\begin{cases}\text{无界弦的自由振动}\\ \text{无界弦的受迫振动}\\ \text{有界杆的受迫振动}\end{cases}\end{cases}
$$

题型 5.2 无界杆上的热传导问题

设有一个根无限长的杆，杆上具有强度为 $F(x,t)$ 的热源，杆的初始温度为 $\varphi(x)$，试求 $t>0$ 时杆上温度的分布规律。

解 方法一：Fourier 变换

第 1 步 列出定解问题

$$
\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), & -\infty < x < +\infty, t > 0\\ u|_{t=0} = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty\end{cases} \tag{5.28}
$$

其中，$a^2\dfrac{\lambda}{\rho c}$ 表示热扩散系数，$f(x,t) = \dfrac{F(x,t)}{\rho c}$. 可以分析得到：

- 具有无界空间变量 x，可进行 Fourier 变换；
- 具有时间变量 t，可进行 Laplace 变换；
- 可以单独采用一种变换，也可以两种联用；

第 2 步 变换

- 取 x 为变换变量，对方程和定解条件进行 Fourier 变换

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x}{\partial t} = a^2 \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x + \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x \\ \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x \end{cases} \tag{5.29}$$

- 记 $U = \mathcal{F}[u], G = \mathcal{F}[f], \Phi = \mathcal{F}[\varphi]$，则

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}U(\omega,t)}{\mathrm{d}t} = -a^2\omega^2 U(\omega,t) + G(\omega,t) \\ U(\omega,t)|_{t=0} = \Phi(\omega) \end{cases} \tag{5.30}$$

第 3 步 求解

方程(5.30)是以 ω 为参变量的一阶线性非齐次常微分方程，利用常数变易法解得

$$U(\omega,t) = \Phi(\omega)\exp\left(-a^2\omega^2 t\right) + \int_0^t G(\omega,\tau)\exp\left[-a^2\omega^2(t-\tau)\right]\mathrm{d}\tau \tag{5.31}$$

第 4 步 反演

- 查表可得

$$\begin{cases} \mathcal{F}^{-1}\left[\exp\left(-a^2\omega^2 t\right)\right] = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4a^2 t}\right) \\ \mathcal{F}^{-1}\left\{\exp\left[-a^2\omega^2(t-\tau)\right]\right\} = \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left(-\dfrac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right) \end{cases}$$

- 卷积性质

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \varphi(x) * \left[\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2 t}\right)\right] \\ &\quad + \int_0^t \left\{f(x,\tau) * \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\right\}\mathrm{d}\tau \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}\right]\mathrm{d}\xi \\ &\quad + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{f(\xi,\tau)}{\sqrt{t-\tau}}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{5.32}$$

另解 方法二：联合变换求解

第 1 步 列出定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t), & -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty \end{cases} \tag{5.33}$$

第 2 步　变换

- 取 x 为变换变量，对方程和定解条件进行 Fourier 变换，记 $U=\mathcal{F}[u], G=\mathcal{F}[f], \Phi=\mathcal{F}[\varphi]$，则

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}U(\omega,t)}{\mathrm{d}t} = -a^2\omega^2 U(\omega,t) + G(\omega,t) \\ U(\omega,t)|_{t=0} = \Phi(\omega) \end{cases} \tag{5.34}$$

- 再对变量 t 作 Laplace 变换：

$$\int_0^{\infty} \frac{\mathrm{d}U(\omega,t)}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = -a^2\omega^2\int_0^{\infty} U(\omega,t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t + \int_0^{\infty} G(\omega,t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \tag{5.35}$$

引入 $\sim$ 符号表示像函数，得到代数方程

$$p\widetilde{U}(\omega,p) - \Phi(\omega) = -a^2\omega^2\widetilde{U}(\omega,p) + \widetilde{G}(\omega,p) \tag{5.36}$$

第 3 步　求解

方程(5.36)是线性方程，直接解得

$$\widetilde{U}(\omega,p) = \frac{1}{p+a^2\omega^2}\Phi(\omega) + \frac{1}{p+a^2\omega^2}\widetilde{G}(\omega,p) \tag{5.37}$$

第 4 步　反演

(1) 先对变量 p 进行反演

- 查表可得

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+a^2\omega^2}\right] = \exp\left(-a^2\omega^2 t\right)$$

- 卷积性质

$$\begin{aligned} U(\omega,p) &= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p+a^2\omega^2}\Phi(\omega) + \frac{1}{p+a^2\omega^2}\widetilde{G}(\omega,p)\right] \\ &= \Phi(\omega)\exp\left(-a^2\omega^2 t\right) + G(\omega,t) * \exp\left(-a^2\omega^2 t\right) \\ &= \Phi(\omega)\exp\left(-a^2\omega^2 t\right) + \int_0^t G(\omega,t) * \exp\left[-a^2\omega^2(t-\tau)\right]\,\mathrm{d}\tau \end{aligned} \tag{5.38}$$

(2) 再对变量 ω 进行反演，此步骤与方法一完全相同，略。

题型 5.3　半无界杆上的热传导问题

设有一根半无限长的杆，端点温度变化为已知，杆的初始温度为 $0^\circ\mathrm{C}$，求杆上的温度分布规律。

解　利用 Laplace 变换求解

第 1 步　列出定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x>0, t>0 \\ u|_{x=0} = f(t), & t>0 \\ u|_{t=0} = 0, & x>0 \end{cases} \tag{5.39}$$

可以分析得到：

- 没有无界空间变量 x，不可以进行 Fourier 变换；
- 具有时间变量 t，可进行 Laplace 变换。

第 2 步 变换

- 取 t 为变换变量，对方程和定解条件进行 Laplace 变换

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \displaystyle\int_0^{+\infty} u(x,t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t}{\partial t} = a^2 \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \\ \displaystyle\int_0^{+\infty} u(0,t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t \end{cases} \tag{5.40}$$

- 记 $U=\mathcal{L}[u], F=\mathcal{L}[f]$，则

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2U(x,p)}{\mathrm{d}x^2} - \dfrac{p}{a^2}U(\omega,t) = 0 \\ U(x,p)|_{x=0} = F(p) \end{cases} \tag{5.41}$$

第 3 步 求解

方程(5.41)是以 p 为参变量的一阶线性齐次常微分方程，利用特征根法得其通解为

$$U(x,p) = C_1 \exp\left(\frac{\sqrt{p}}{a}x\right) + C_2 \exp\left(-\frac{\sqrt{p}}{a}x\right) \tag{5.42}$$

由于 $x\to\infty, U\to C$（常数），所以为了保证 $U(x,p)$ 的有界性，无穷发散量 $\exp\left(\frac{\sqrt{p}}{a}x\right)$ 的系数 $C_1=0$. 再根据边界条件得到方程的特解

$$U(x,p) = F(p)\exp\left(-\frac{p}{a^2}x\right) \tag{5.43}$$

第 4 步 反演

- 查表可得

$$\mathcal{L}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right] = \frac{1}{p}\exp\left(-\frac{\sqrt{p}}{a}\right)$$

- 微分性质

$$\mathcal{L}\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right] = p\mathcal{L}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right] - \operatorname{erfc}(\infty) = p\cdot\frac{1}{p}\exp\left(-\frac{\sqrt{p}}{a}\right) - 0 = \exp\left(-\frac{\sqrt{p}}{a}\right)$$

所以

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\exp\left(-\frac{\sqrt{p}}{a}\right)\right] = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right) = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}t^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2t}\right) \tag{5.44}$$

- 卷积性质

$$u(x,t) = \mathcal{L}^{-1}\left[U(x,p)\right] = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}}\int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left[-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right]\mathrm{d}\tau \tag{5.45}$$

题型 5.4 无界弦的自由振动

试分析无界弦的自由振动。

解 利用 Fourier 变换求解

第 1 步 列出定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < +\infty, t > 0 \\ u|_{t=0} = \varphi(x), & -\infty < x < +\infty \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x), & -\infty < x < +\infty \end{cases} \tag{5.46}$$

可以分析得到：

- 具有无界空间变量 x，可进行 Fourier 变换；
- 具有时间变量 t，可进行 Laplace 变换；
- 可以单独采用一种变换，也可以两种联用；

第 2 步 变换

- 取 x 为变换变量，对方程和定解条件进行 Fourier 变换

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = a^2\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x \\ \left[\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x\right]_{t=0} = \int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(x)\,\mathrm{d}x \\ \left[\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x\right]_{t=0} = \int_{-\infty}^{+\infty}\psi(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x \end{cases} \tag{5.47}$$

- 记 $U = \mathcal{F}[u], \Phi = \mathcal{F}[\varphi], \Psi = \mathcal{F}[\psi]$，则

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^2 U(\omega,t)}{\mathrm{d}t^2} = -a^2\omega^2 U(\omega,t) \\ U(\omega,t)|_{t=0} = \Phi(\omega) \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}U(\omega,t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} = \Psi(\omega) \end{cases} \tag{5.48}$$

第 3 步 求解

方程(5.48)是以 ω 为参变量的二阶线性齐次常微分方程，利用特征根法解得

- 通解

$$U(\omega,t) = A\cos a\omega t + B\sin a\omega t \tag{5.49}$$

- 特解

$$U(\omega,t) = \Phi(\omega)\cos a\omega t + \Psi(\omega)\frac{\sin a\omega t}{a\omega} \tag{5.50}$$

第 4 步 反演

- 利用欧拉公式变形

$$\begin{aligned} U(\omega,t) &= \Phi(\omega)\cos a\omega t + \Psi(\omega)\frac{\sin a\omega t}{a\omega} \\ &= \frac{1}{2}\left[\Phi(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega t} + \Phi(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega t}\right] + \frac{1}{2a}\left[\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\Psi(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}a\omega t} - \frac{1}{\mathrm{i}\omega}\Psi(\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a\omega t}\right] \end{aligned}$$

- 位移性质

$$f(x+x_0)=\mathcal{F}^{-1}\left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x_0}F(\omega)\right] \tag{5.51}$$

- 积分性质

$$\int_{-\infty}^{x} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{i}\omega}F(\omega)\right] \tag{5.52}$$

- 将位移性质作用于积分性质

$$\int_{-\infty}^{x+x_0} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi=\mathcal{F}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{i}\omega}F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x_0}\right] \tag{5.53}$$

所以

$$\begin{aligned}u(x,t)&=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\left[\int_{-\infty}^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi-\int_{-\infty}^{x-at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,\mathrm{d}\xi\end{aligned} \tag{5.54}$$

题型 5.5 无界弦的受迫振动

试分析无界弦的受迫振动。

解 利用 Fourier 变换求解

第 1 步 列出定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t), & -\infty<x<+\infty, t>0\\ u|_{t=0}=0, & -\infty<x<+\infty\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0, & t-\infty<x<+\infty\end{cases} \tag{5.55}$$

可以分析得到：

- 具有无界空间变量 x，可进行 Fourier 变换；
- 具有时间变量 t，可进行 Laplace 变换；
- 可以单独采用一种变换，也可以两种联用；

第 2 步 变换

- 取 x 为变换变量，对方程和定解条件进行 Fourier 变换

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}=a^2\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x+\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x\\ \left[\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}u(x,t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x\right]_{t=0}=0\\ \left[\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega x}\,\mathrm{d}x\right]_{t=0}=0\end{cases} \tag{5.56}$$

- 记 $U=\mathcal{F}[u], F=\mathcal{F}[f]$，则

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}^2U(\omega,t)}{\mathrm{d}t^2}=-a^2\omega^2U(\omega,t)+F(\omega,t)\\ U(\omega,t)|_{t=0}=0\\ \left.\dfrac{\mathrm{d}U(\omega,t)}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0\end{cases} \tag{5.57}$$

第 3 步　求解

方程(5.57)是以 ω 为参变量的二阶线性非齐次常微分方程，利用常数变易法解得

$$U(\omega,t)=\frac{1}{a}\int_0^t F(\omega,t)\frac{\sin a\omega(t-\tau)}{\omega}\,\mathrm{d}\tau \tag{5.58}$$

第 4 步　反演

- 查表，得

$$\mathcal{F}\left[f(x)=\begin{cases}h, & -\tau<t<\tau\\ 0, & \text{others}\end{cases}\right]=2h\frac{\sin\omega\tau}{\omega}$$

经过变量替换，得到

$$\frac{\sin a\omega(t-\tau)}{\omega}=\mathcal{F}\left[g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}, & -a(t-\tau)<x<a(t-\tau)\\ 0, & \text{others}\end{cases}\right]$$

- 由卷积性质

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_0^t f(x,\tau)*g(x)\,\mathrm{d}\tau=\frac{1}{a}\int_0^t\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi,\tau)g(x-\xi)\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\tau \tag{5.59}$$

$$=\frac{1}{2a}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\xi,\tau)\,\mathrm{d}\xi \tag{5.60}$$

题型 5.6　有界杆的受迫振动

设有一根长为 l 的均匀杆，其一端固定，另一端由静止状态开始受力 $F=A\sin\omega t$ 的作用，力 F 的方向与杆的轴线一致，求杆在零初值条件下作纵振动的规律。

解　利用 Laplace 变换求解

第 1 步　列出定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0<x<l,t>0\\ u|_{t=0}=0,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0, & 0\le x\le l\\ u|_{x=0}=0,\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{x=l}=\dfrac{A}{E}\sin\omega t, & t>0\end{cases} \tag{5.61}$$

可以分析得到：

- 不具有无界空间变量 x，不可进行 Fourier 变换；
- 具有时间变量 t，可进行 Laplace 变换；

第 2 步　变换

- 取 t 为变换变量，对方程和定解条件进行 Laplace 变换

$$\begin{cases}\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=a^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_0^{+\infty}u(x,t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t,\\ \displaystyle\int_0^{+\infty}u(0,t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=0,\\ \displaystyle\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{+\infty}u(l,t)\mathrm{e}^{-pt}\,\mathrm{d}t=\frac{A}{E}\sin\omega t\end{cases} \tag{5.62}$$

- 记 $U=\mathcal{L}[u]$ 则

$$\begin{cases} p^2U(x,p)=a^2\dfrac{\mathrm{d}^2U(x,p)}{\mathrm{d}x^2} \\ U(x,p)|_{x=0}=0 \\ \left.\dfrac{\mathrm{d}U(x,p)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=l}=\dfrac{A}{E}\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2} \end{cases} \tag{5.63}$$

第 3 步 求解

方程(5.63)是以 ω 为参变量的二阶线性齐次常微分方程，利用特征根法解得

- 通解

$$U(x,p)=C_1\exp\left(\frac{p}{a}x\right)+C_2\exp\left(-\frac{p}{a}x\right) \tag{5.64}$$

- 特解

$$U(x,p)=\frac{Aa\omega}{Ep(p^2+\omega^2)}\frac{\exp\left(\frac{p}{a}x\right)-\exp\left(-\frac{p}{a}x\right)}{\exp\left(\frac{p}{a}l\right)+\exp\left(-\frac{p}{a}l\right)}=\frac{Aa\omega\sinh\left(\frac{p}{a}x\right)}{Ep(p^2+\omega^2)\cosh\left(\frac{p}{a}l\right)} \tag{5.65}$$

第 4 步 反演

用求极点留数的方法求反演

1. 求极点

$$Ep(p^2+\omega^2)\cosh\left(\frac{p}{a}l\right)=0\ \Rightarrow\ \begin{cases} p=0 \\ p^2+\omega^2=0 \\ \cosh\left(\frac{p}{a}l\right)=0 \end{cases}\ \Rightarrow\ \begin{cases} p=0 \\ p=\pm\mathrm{i}\omega \\ p=\pm\mathrm{i}\dfrac{a}{2l}(2k-1),\ k=1,2,3,\cdots \end{cases}$$

2. 求极点留数

定理 5.3 一阶极点留数计算定理

当函数 $f(z)=\dfrac{P(z)}{Q(z)}$, $P(x),Q(x)$ 均在 z_0 处解析，如果 $P(z_0)\neq 0,\ Q(z_0)=0,\ Q'(z_0)\neq 0$，则

$$\mathrm{Res}\left[f(z),z_0\right]=\frac{P(z)}{Q'(z_0)} \tag{5.66}$$

所以

$$u(x,t)=\sum_j\mathrm{Res}\left[\frac{Aa\omega\sinh\left(\frac{p}{a}x\right)}{Ep(p^2+\omega^2)\cosh\left(\frac{p}{a}l\right)}\mathrm{e}^{pt},p_j\right]=\frac{Aa\omega}{E}\sum_j\left.\frac{\sinh\left(\frac{p}{a}x\right)\mathrm{e}^{pt}}{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}p}\left[p(p^2+\omega^2)\cosh\left(\frac{p}{a}l\right)\right]}\right|_{p=p_j}$$

$$=\frac{Aa\omega}{E}\sum_j\frac{\sinh\left(\frac{p_j}{a}x\right)\mathrm{e}^{p_jt}}{(3p_j^2+\omega^2)\cosh\left(\frac{p_j}{a}l\right)+\frac{p_j(p_j^2+\omega^2)l}{a}\sinh\left(\frac{p_j}{a}l\right)} \tag{5.67}$$

代入极点计算，可得最终解

$$u(x,t)=\frac{Aa}{\omega E}\frac{1}{\cos\dfrac{\omega}{a}l}\sin\omega t\sin\frac{\omega}{a}x+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}\frac{16a\omega Al^2}{E\pi}\frac{\sin\dfrac{(2k-1)\pi x}{2l}+\sin\dfrac{(2k-1)a\pi t}{2l}}{(2k-1)\left[4l^2\omega^2-a^2(2k-1)^2\pi^2\right]} \tag{5.68}$$

第 6 章　Laplace 方程的格林函数法

6.1　Laplace 方程边值问题的提出

6.1.1　三维 Laplace 方程

$$\nabla^2 u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \tag{6.1}$$

三维 Laplace 方程的特点：

- 描述稳定问题，即不随时间变化的过程，如热传导、扩散、静电场等
- 只存在边界条件，无初始条件
- 一般有两种边值条件，构成两类边值问题

6.1.2　两类边值问题

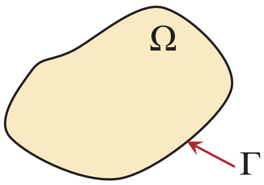

图 6.1: 空间区域

1. 第一边值问题（Dirichlet 问题）

如图6.1，在空间 (x, y, z) 中某一区域 Ω 的边界 Γ 上给定连续函数 f。

求一个函数 $u(x, y, z)$，它在闭区域 $\Omega + \Gamma$ 上等于已知函数 f，即

$$u\big|_{\Gamma} = f \tag{6.2}$$

具有二阶连续偏导数并且满足 Laplace 方程的连续函数称为调和函数。所以，Dirichlet 问题也可以描述为：

求一个函数 $u(x, y, z)$，在 $\Omega + \Gamma$ 上连续，在 Ω 中是调和函数，它在边界 Γ 上的值为给定连续函数

2. 第二边值问题（Neumann 问题）

如图6.1，在空间 (x, y, z) 中某一区域 Ω 的边界 Γ 上给定连续函数 f。

求一个函数 $u(x, y, z)$，在 $\Omega + \Gamma$ 上连续，在 Ω 中是调和函数，它在边界 Γ 上任一点处法向导数存在且等于已知函数 f，即

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Gamma} = f \tag{6.3}$$

其中，$\boldsymbol{n}$ 是 Γ 的外法向量。

6.1.3 内问题和外问题

1. 内问题

在边界 Γ 上给定边界条件，在区域内部求 Laplace 方程的解，这样的问题称为内问题。

2. 外问题

在边界 Γ 上给定边界条件，在区域外部求 Laplace 方程的解，这样的问题称为外问题。

由于外问题是在无穷区域上给出的，在求解中常常要求附加条件：$\lim\limits_{r\to\infty} u(x,y,z) = u_0 \quad (r=\sqrt{x^2+y^2+z^2})$

6.2 格林公式

6.2.1 第一格林公式

格林公式是曲面积分中高斯公式的直接推论。

定理 6.1 高斯公式

如图6.2，设 Ω 是一个足够光滑的、以曲面 Γ 为边界的有界区域，$\vec{U}$ 是在 $\Omega+\Gamma$ 上连续的、在 Ω 内有一阶连续的任意矢量函数，则有高斯公式

$$\iiint\limits_{\Omega} \nabla\cdot\vec{U}\,\mathrm{d}V = \iint\limits_{\Gamma} \vec{U}\cdot\mathrm{d}\vec{S} \tag{6.4}$$

其中，$\mathrm{d}V$ 为体积元素，$\mathrm{d}\vec{S}$ 是 Γ 上的矢量面积微元，且 $\mathrm{d}\vec{S}$ 的面元外法向为 $\boldsymbol{n}$。

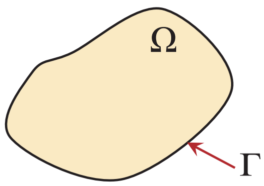

图 6.2: 空间区域

定理 6.2 第一格林公式

如图6.2，设函数 $u(x,y,z)$ 和 $v(x,y,z)$ 在 $\Omega+\Gamma$ 上具有一阶连续偏导数，在 Ω 内具有连续的所有二阶偏导数，取 $\vec{U}=u\nabla v$，代入高斯公式可得第一格林公式

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(u\nabla^2 v\right)\mathrm{d}V = \iint\limits_{\Gamma} u\frac{\partial v}{\partial n}\,\mathrm{d}S - \iiint\limits_{\Omega}\left(\nabla u\cdot\nabla v\right)\mathrm{d}V \tag{6.5}$$

其中，$\mathrm{d}V$ 为体积元素，$\mathrm{d}S$ 是 Γ 上的标量面积微元。

6.2.2 第二格林公式

由第一格林公式(6.5)，并交换 u 和 v 的位置，则有

$$\iiint\limits_{\Omega}\left(v\nabla^2 u\right)\mathrm{d}V = \iint\limits_{\Gamma} v\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}S - \iiint\limits_{\Omega}\left(\nabla v\cdot\nabla u\right)\mathrm{d}V \tag{6.6}$$

将(6.5)–(6.6)，即得第二格林公式

$$\iiint\limits_{\Omega} \left(u\nabla^2 v - v\nabla^2 u\right) \mathrm{d}V = \iint\limits_{\Gamma} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right) \mathrm{d}S \tag{6.7}$$

6.2.3 调和函数的基本性质

1. 边界平衡性质

设 $u(x, y, z)$ 是以 Γ 为边界的区域 Ω 内的调和函数，它在 $\Omega + \Gamma$ 上有一阶连续偏导数，则有

$$\iint\limits_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial n} \mathrm{d}S = 0 \tag{6.8}$$

证明：在第二格林公式中取 $v = 1$ 即可。推论：Neumann 内问题有解的充要条件为 $\iint\limits_{\Gamma} f \,\mathrm{d}S = 0$.

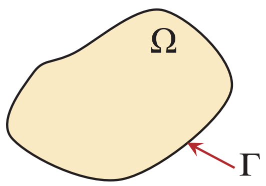

图 6.3: 空间区域

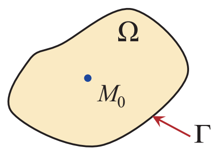

图 6.4: 空间区域内一点 M_0

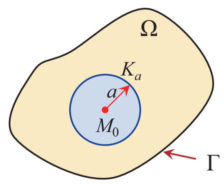

图 6.5: 调和函数的平均值

2. 调和函数的积分表达式

定理 6.3 三维 Laplace 方程的基本解

球坐标形式的三维 Laplace 方程为

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0 \tag{6.9}$$

此方程的三维球对称解 $u = V(r)$ 满足 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}\right) = 0$，其通解为

$$V(r) = \frac{c_1}{r} + c_2 \tag{6.10}$$

令 $c_1 = 1, c_2 = 0$ 得到三维 Laplace 方程的基本解

$$V_0(r) = \frac{1}{r} \tag{6.11}$$

将基本解代入三维 Laplace 方程，则可以得到调和函数的积分表达式：

若函数 u 在 $\Omega + \Gamma$ 上有一阶连续偏导数，且在 Ω 内调和，则

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Gamma}\left[u(M)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right) - \frac{1}{r_{MM_0}}\frac{\partial u(M)}{\partial n}\right]\mathrm{d}S \tag{6.12}$$

其中，$r_{MM_0} = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$.

式子的含义：用 u 在 Γ 上的值和 u 在 Γ 上法向导数的值，来表达其在 Ω 内任一点 M_0 的值，被称为调和函数的积分表达式。

3. 平均值公式

设函数 $u(M)$ 在区域内调和，M_0 是 Ω 内任何一点，K_a 表示以 M_0 为球心，以 a 为半径且完全落在区域 Ω 内部的球面，则有平均值公式（球心值和球面平均值的关系）

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi a^2} \iint\limits_{K_a} u \, \mathrm{d}S \tag{6.13}$$

证明：将积分表达式应用于球面 K_a，注意到此时 r 的方向就是表面法向，再利用边界平衡性质即可。

4. 极值原理

设函数 $u(x, y, z)$ 在区域内调和，在 $\Omega + \Gamma$ 上连续且不为常数，则它的最大值和最小值只能在边界处达到。

推论：

- Dirichlet 问题 $\begin{cases} \nabla^2 u = 0, & (x, y, z) \in \Omega \\ u|_\Gamma = f \end{cases}$ 的解是唯一的。
- Neumann 问题 $\begin{cases} \nabla^2 u = 0, & (x, y, z) \in \Omega \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_\Gamma = f \end{cases}$ 的解除了相差一个常数外也是唯一的。

6.3 格林函数

6.3.1 格林函数的引入

格林函数是为了解决 Laplace 方程的 Dirichlet 问题提出的

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, & (x, y, z) \in \Omega \\ u|_\Gamma = f \end{cases} \tag{6.14}$$

而调和函数的积分表达式

$$u(M_0) = -\frac{1}{4\pi} \iint\limits_\Gamma \left[u(M) \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) - \frac{1}{r_{MM_0}} \frac{\partial u(M)}{\partial n} \right] \mathrm{d}S$$

并不能直接提供解，因为其边界上的值虽然已知，而法向导数的值却不知道，需要想办法消去。为此，提出格林函数。

设在 Ω 内有 $\nabla^2 u = 0, \nabla^2 v = 0$；$u, v$ 在 $\Omega + \Gamma$ 上有一阶连续偏导数，则由格林第二公式有

$$\iiint\limits_\Omega \left(u\nabla^2 v - v\nabla^2 u \right) \mathrm{d}V = \iint\limits_\Gamma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) \mathrm{d}S \xrightarrow[\nabla^2 v = 0]{\nabla^2 u = 0} \iint\limits_\Gamma \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) \mathrm{d}S = 0 \tag{6.15}$$

再将这个式子与积分表达式相加得

$$u(M_0) = \iint\limits_\Gamma \left\{ u \left[\frac{\partial v}{\partial n} - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) \right] + \left(\frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_{MM_0}} - v \right) \frac{\partial u}{\partial n} \right\} \mathrm{d}S \tag{6.16}$$

为了消除 u 的法向导数，不妨选择调和函数 v 满足

$$v|_\Gamma = \left. \frac{1}{4\pi} \frac{1}{r_{MM_0}} \right|_\Gamma \tag{6.17}$$

所以

$$u(M_0) = -\iint\limits_\Gamma u \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{1}{4\pi} \left(\frac{1}{r_{MM_0}} \right) - v \right] \mathrm{d}S \tag{6.18}$$

引入格林函数

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right)-v \tag{6.19}$$

则最终解可以表示为

$$u(M_0)=-\iint\limits_{\Gamma} u\frac{\partial G}{\partial n}\,\mathrm{d}S \tag{6.20}$$

整个格林函数的获得思路如图6.6.

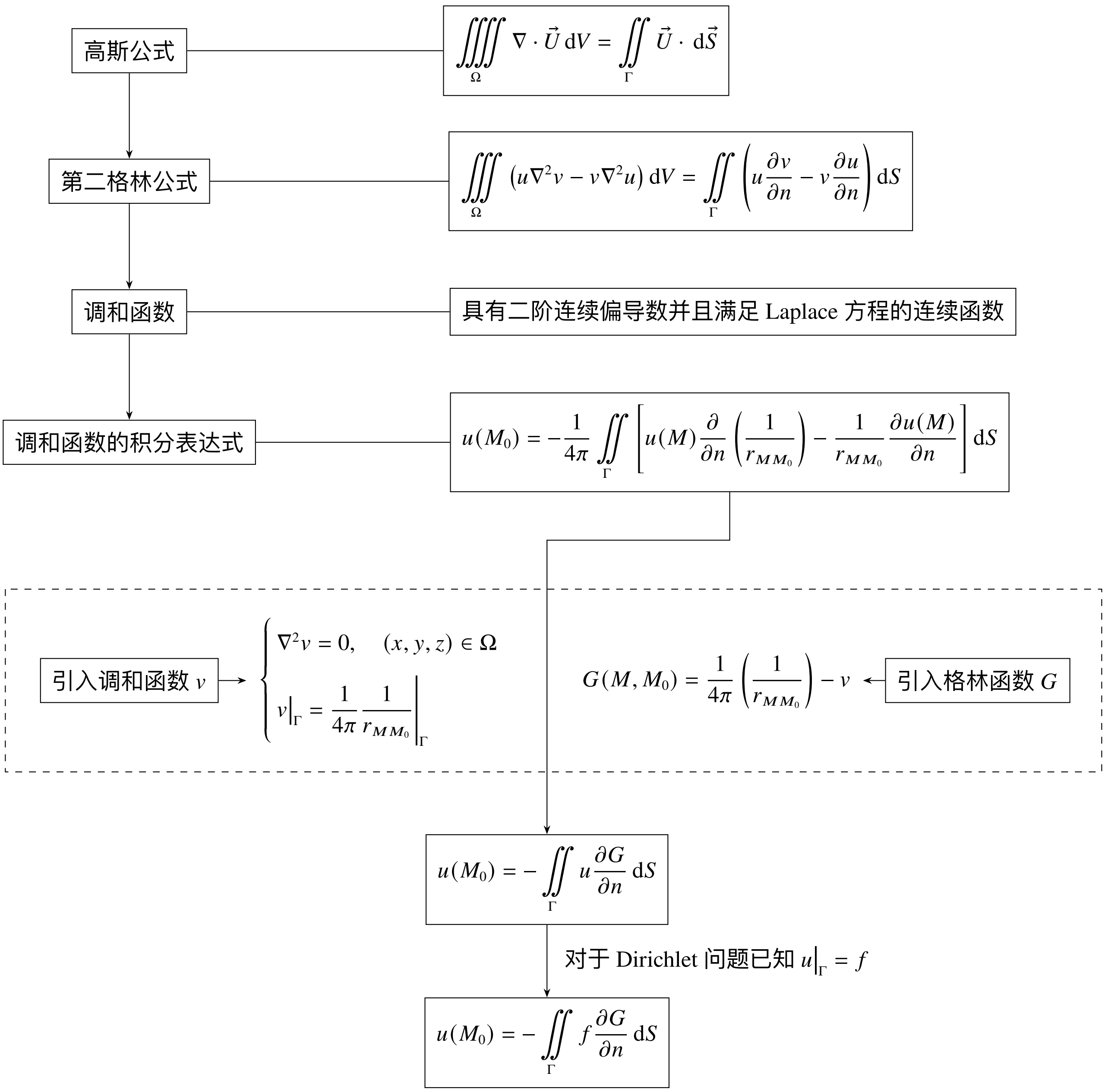

图 6.6: 格林函数获得的思路图

注意

引入格林函数的意义

1. 将 Laplace 方程或泊松方程 Dirichlet 问题的求解，转化为求此区域内的格林函数。
2. 求格林函数需要解定解问题 $\begin{cases} \nabla^2 v = 0, & (x,y,z) \in \Omega \\ v\big|_\Gamma = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{r_{MM_0}}\Big|_\Gamma \end{cases}$ 进而 $G(M,M_0) = \dfrac{1}{4\pi}\left(\dfrac{1}{r_{MM_0}}\right) - v$。
3. 此问题只与区域有关，因此格林函数也只与区域有关。所以，只要求得了某个区域的格林函数，就能一劳永逸解决此区域上的一切边界条件的 Dirichlet 问题。
4. 对于某些特殊的区域，如半空间、球等，格林函数可以用初等方法得到。

6.3.2　格林函数的性质

格林函数

$$G(M,M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}\right) - v \tag{6.21}$$

其中，函数 v 满足

$$\begin{cases} \nabla^2 v = 0, & (x,y,z) \in \Omega \\ v\big|_\Gamma = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{1}{r_{MM_0}}\Big|_\Gamma \end{cases} \tag{6.22}$$

性质 1　格林函数 $G(M,M_0)$ 在去除 $M = M_0$ 一点外处处满足 Laplace 方程，当 $M \to M_0$ 时，$G(M,M_0)$ 趋于无穷大。

性质 2　在边界 Γ 上格林函数恒等于 0，即 $G(M,M_0)\big|_\Gamma = 0$.

性质 3　在区域 Ω 内，下面不等式成立

$$0 < G(M,M_0) < \frac{1}{4\pi r_{MM_0}} \tag{6.23}$$

性质 4　格林函数 $G(M,M_0)$ 关于自变量 M 及参变量 M_0 之间具有对称性，即 $G(M,M_0) = G(M_0,M)$.

6.3.3　格林函数的静电学背景

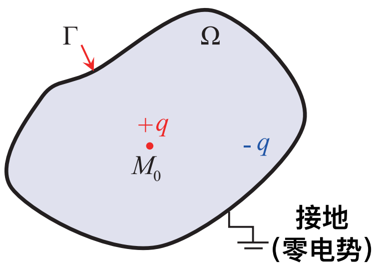

图 6.7: 格林函数的静电学背景

如图6.7，考虑空腔 Ω，容器壁 Γ 为导体，其内部一点 M_0 存在单位正电荷 $+q$。

根据静电学知识，此时内壁因静电感应出现等值异号电荷 $-q$，外壁由电荷守恒产生感应电荷 $+q$，整个壁面为等势面。

再进一步，令容器壁接地，此时外侧正电荷消失，壁面为零电势。且容器内任何一点电势，就是点电荷的电势和内表面感生电荷电势的叠加。所以，壁面为零电势是感生电荷电势抵消点电荷电势的结果。

格林函数各项的静电学意义

1. $\dfrac{1}{4\pi r_{MM_0}}$ M_0 点处的单位正电荷在无界空间中产生的电势
2. $-v$ 感生负电荷引起的电势
3. $G(M, M_0)$ 接地容器内的实际电势：单位正电荷电势 + 内壁感生负电荷电势

所以，格林函数 $G(M, M_0)$ 是在接地导电容器内 M_0 点放置单位正点电荷后的电势分布。因此，格林函数又被称为点源函数。

6.4 两种特殊区域的格林函数及 Dirichlet 问题的解

6.4.1 电像法

边界零电势，除了可以由真实情况下的内部感生电荷实现外，还可以通过引入外部虚拟点电荷的方式来满足，这是电像法的物理基础。利用真实内部感生电荷和外部虚拟点电荷的等效性，转化为虚拟点电荷问题，实现求解的方法称为电像法。

电像法的基本操作步骤

1. 在区域外找出区域内点 M_0 关于边界的像点。
2. 放置适量负点电荷，和原内壁感生电荷起到的效果完全相同，即边界零电势。
3. 叠加后在区域中形成的电势场就是所要求的格林函数。

6.4.2 半空间的格林函数法

用格林函数法解定解问题

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0, & z > 0 \\ u\big|_{z=0} = f(x, y), & -\infty < x, y < +\infty \end{cases} \tag{6.24}$$

$\boxed{\text{解}}$ 运用电像法求解。

步骤 1 求解格林函数

物理含义 上半空间 $z > 0$ 一点 M_0 放置单位正电荷，再将导电平面 $z = 0$ 接地后，上半平面的电势分布。

电像法 在下半平面镜像位置放置单位负电荷后撤去平板。

如图6.8，在上半平面一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 放置单位正电荷，在其关于平面 $z = 0$ 的镜像点 $M_1(x_0, y_0, -z_0)$ 放置单位负电荷，同时撤去 $z = 0$ 处的导体平面。

由于 $\dfrac{1}{4\pi r_{MM_0}}$ 表示点 M_0 处的单位正电荷在无界空间中产生的电势，

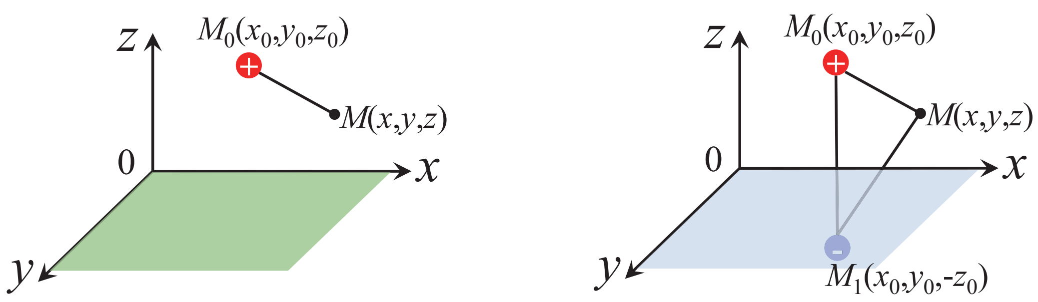

图 6.8: 半空间的格林函数及其电像法

那么 $-\dfrac{1}{4\pi r_{MM_1}}$ 就表示点 M_1 处的单位负电荷在无界空间中产生的电势，则半空间 $z>0$ 的格林函数就是：

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi r_{MM_0}}-\frac{1}{4\pi r_{MM_1}} \tag{6.25}$$

步骤 2 得到定解问题的解

已知格林函数，定解问题的解可表示为

$$u(M_0)=-\iint\limits_{\Gamma} f(M)\frac{\partial G}{\partial n}\,\mathrm{d}S \tag{6.26}$$

其中，Γ 为平面 $z=0$，外法线方向为 $-z$ 方向，则

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{z=0}=-\left.\frac{\partial G}{\partial z}\right|_{z=0}&=\left\{\frac{1}{4\pi}\frac{z-z_0}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}}-\frac{1}{4\pi}\frac{z+z_0}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z+z_0)^2\right]^{\frac{3}{2}}}\right\}\\&=-\frac{1}{2\pi}\frac{z_0}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2\right]^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

所以最终解为

$$\begin{aligned}u(M_0)&=-\iint\limits_{\Gamma} f(M)\frac{\partial G}{\partial n}\,\mathrm{d}S\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{z_0 f(x,y)}{\left[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+z_0^2\right]^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\end{aligned} \tag{6.27}$$

6.4.3 球域的格林函数法

用格林函数法解定解问题

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0, & x^2+y^2+z^2<R^2\\ u\big|_{x^2+y^2+z^2=R^2}=f(x,y,z), & x^2+y^2+z^2=R^2\end{cases} \tag{6.28}$$

$\boxed{\text{解}}$ 运用电像法求解。

步骤 1 求解格林函数

物理含义 在球内一点 M_0 放置单位正电荷，再将导电平面 $z=0$ 接地后，球内的电势分布。

电像法 在球面外部位置放置适量的负电荷后撤去球面。

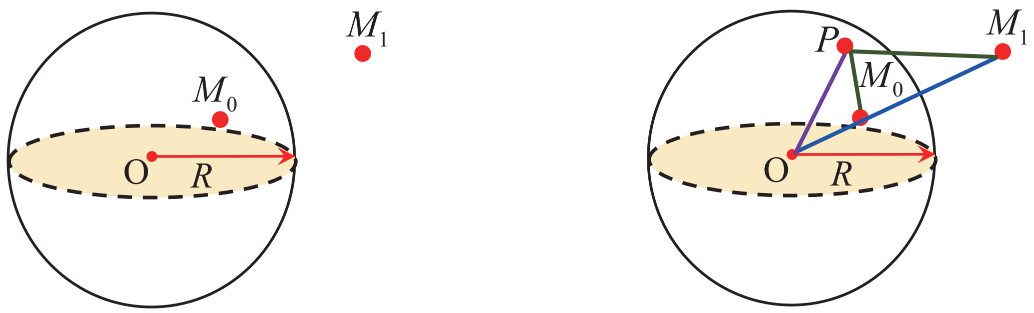

图 6.9: 球域的格林函数及其电像法

如图6.9，由于球面的复杂性，负电荷的放置位置以及电荷量 q 不能直接观测得到。由物理学的知识可知，M_1 应满足在线段 OM_0 的延长线上，且满足 $r_{OM_0}\cdot r_{OM_1}=R^2$.

而负电荷量的大小 q 需使得球面处叠加电势为 0，即 $\dfrac{1}{4\pi r_{PM_0}}=\dfrac{q}{4\pi r_{PM_1}}$，$P$ 为球面上的点，即 $q=\dfrac{r_{PM_1}}{r_{PM_0}}$.

$$\begin{cases}\dfrac{r_{OM_0}}{R}=\dfrac{R}{r_{OM_1}}\\ \angle POM_1=\angle POM_0\end{cases}\quad\Rightarrow\quad \triangle OPM_1\sim\triangle OM_0P\quad\Rightarrow\quad q=\frac{r_{PM_1}}{r_{PM_0}}=\frac{R}{r_{OM_0}}\tag{6.29}$$

由电势叠加，得到格林函数

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_{MM_0}}-\frac{R}{r_{OM_0}}\frac{1}{r_{MM_1}}\right)\tag{6.30}$$

步骤 2 得到定解问题的解

已知格林函数，定解问题的解可表示为

$$u(M_0)=-\iint\limits_{\Gamma}f(M)\frac{\partial G}{\partial n}\,\mathrm{d}S\tag{6.31}$$

其中，Γ 为半径为 R 的球面，外法线方向为球心指向外的射线方向，记为变量 r_{OM}，则

$$\begin{cases}r_{MM_0}=\sqrt{r_{OM}^2+r_{OM_0}^2-2r_{OM}r_{OM_0}\cos\gamma}\\ r_{MM_1}=\sqrt{r_{OM}^2+r_{OM_1}^2-2r_{OM}r_{OM_1}\cos\gamma}\end{cases}\qquad \gamma=\langle\overrightarrow{OM_0},\overrightarrow{OM}\rangle\tag{6.32}$$

进一步得到格林函数

$$G(M,M_0)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{\sqrt{r_{OM}^2+r_{OM_0}^2-2r_{OM}r_{OM_0}\cos\gamma}}-\frac{R}{\sqrt{r_{OM}^2+r_{OM_1}^2-2r_{OM}r_{OM_1}\cos\gamma}}\right)\tag{6.33}$$

所以，

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Gamma}&=\left.\frac{\partial G}{\partial r_{OM}}\right|_{r_{OM}=R}\\&=\frac{1}{4\pi}\frac{\partial}{\partial r_{OM}}\left(\frac{1}{\sqrt{r_{OM}^2+r_{OM_0}^2-2r_{OM}r_{OM_0}\cos\gamma}}-\frac{R}{\sqrt{r_{OM}^2+r_{OM_1}^2-2r_{OM}r_{OM_1}\cos\gamma}}\right)_{r_{OM}=R}\\&=-\frac{1}{4\pi R}\frac{R^2-r_{OM_0}^2}{(R^2+r_{OM_0}^2-2Rr_{OM_0}\cos\gamma)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

得到最终解为

$$
\begin{aligned}
u(M_0) &= -\iint\limits_{\Gamma} f(M)\frac{\partial G}{\partial n}\,\mathrm{d}S \\
&= \frac{1}{4\pi R}\iint\limits_{\Gamma} \frac{\left(R^2 - r_{OM_0}^2\right) f(x,y,z)}{\left(R^2 + r_{OM_0}^2 - 2Rr_{OM_0}\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}S \qquad (6.34)\\
&= \frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} f(R,\theta,\varphi)\frac{R^2 - r_0^2}{\left(R^2 + r_0^2 - 2Rr_0\cos\gamma\right)^{\frac{3}{2}}}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \qquad (6.35)
\end{aligned}
$$

其中，(r_0,θ_0,φ_0) 是点 M_0 的球坐标，(R,θ,φ) 是球面 γ 上任意一点 P 的坐标，γ 是 OP, OM_0 的夹角，也可以表示为

$$
\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0) \tag{6.36}
$$

第 7 章　差分法

7.1　差分格式

设函数 $u(x)$ 定义在一维有界空间上。差分求解需要先将区域离散化（类似于采样），得到由节点构成的网格系统，再利用差分格式建立离散方程。

真实的区域由无限个节点构成，因此这里是用有限个节点来近似无限的系统。

由 $u(x)$ 在点 x 处的泰勒展开

$$u(x+h) = u(x) + u'(x)h + u''(x)\frac{h^2}{2} + u'''(x)\frac{h^3}{6} + \cdots \tag{7.1}$$

$$u(x-h) = u(x) - u'(x)h + u''(x)\frac{h^2}{2} - u'''(x)\frac{h^3}{6} + \cdots \tag{7.2}$$

则

$$\frac{u(x+h)-u(x)}{h} = u'(x) + u''(x)\frac{h}{2} + u'''(x)\frac{h^2}{6} = u'(x) - O(h) \quad \Rightarrow \quad u'(x) = \frac{u(x+h)-u(x)}{h} + O(h) \tag{7.3}$$

其中，$o(h)$ 为 h 的同阶无穷小量[1]，称为截断误差。

同理可得

$$u'(x) = \frac{u(x)-u(x-h)}{h} + O(h) \tag{7.4}$$

忽略无穷小量 $o(h)$ 可得

$$u'(x) \approx \frac{u(x+h)-u(x)}{h} \tag{7.5}$$

$$\approx \frac{u(x)-u(x-h)}{h} \tag{7.6}$$

$$\approx \frac{u(x+h)-u(x-h)}{2h} \tag{7.7}$$

公式(7.5)称为前向差分，公式(7.6)称为后向差分，公式(7.7)称为中心差分。二阶导数的中心差分为

$$u''(x) \approx \frac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2} \tag{7.8}$$

由于前向和后向差分中截断误差为 $O(h)$，则前向和后向差分具有一阶精度，中心差分的阶段误差为 $O(h^2)$，具有二阶精度。精度越高，误差以越快的速度趋于零，但所需要的信息也越多。

定义截断误差的阶数为随着网格尺寸趋于零时，截断误差趋于零的速度，则 **n 阶精度格式 = 该格式的截断误差为 n 阶**。精度和节点数量是差分法近似程度的两个重要保障，在相同的近似程度下，高精度格式所需的节点数量更少。

[1]即 $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{O(h)}{h} = C$（常数）余项，$O(h^2)$ 类似

差分的形式可以总结表示为

$$\text{连续区域} \xrightarrow{\text{离散化}} \text{由节点构成的网络} \xrightarrow{\text{四种形式}} \text{离散方程}$$

具体的四种形式如表7.1.

导数	差分格式	阶段误差	差分形式
	$\dfrac{u(x)-u(x-h)}{h}$	$o(h)$	后向差分
$u'(x)$	$\dfrac{u(x+h)-u(x)}{h}$	$o(h)$	前向差分
	$\dfrac{u(x+h)-u(x-h)}{2h}$	$o(h^2)$	中心差分
$u''(x)$	$\dfrac{u(x+h)-2u(x)+u(x-h)}{h^2}$	$o(h^2)$	中心差分

表 7.1: 差分的四种表示形式

7.2 Laplace 方程的差分解法

二维 Laplace 方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0, & (x,y)\in\Omega \\ u\big|_{\Gamma}=f(x,y), & (x,y)\in\Gamma \end{cases} \tag{7.9}$$

其中，Γ 是平面上不规则有界区域 Ω 的边界。

7.2.1 区域离散化

如图7.1，离散化的目标：用一系列节点 (i,j) 代替原物理域区域，基本步骤为

步骤 1 不规则区域变为规则区域

步骤 2 将规则区域进一步划分为正方形网格

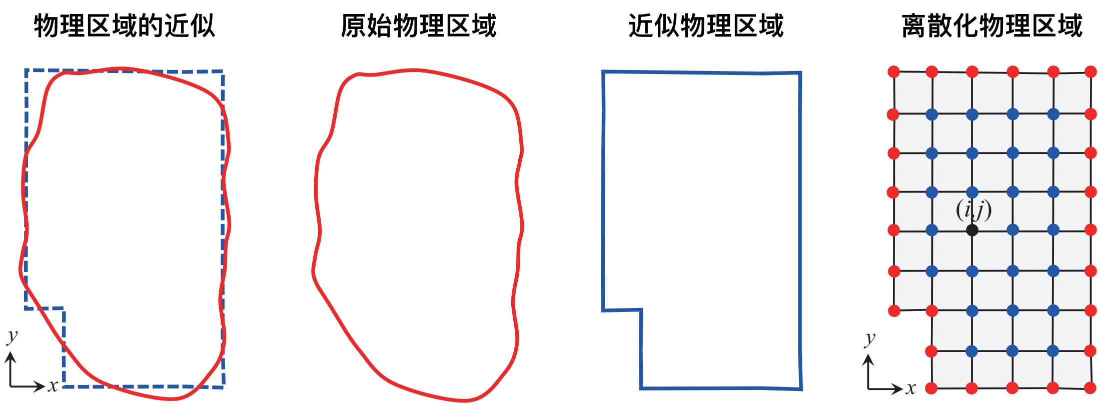

图 7.1: 区域离散化

离散化以后的区域，网格线的交点、以及网格线与边界的交点称为节点，用 (i,j) 标记其行和列的位置。红色为边界节点，蓝色为内部节点。正方形网格尺寸 h 称为节点间距。

7.2.2 建立离散方程

- 内部节点（蓝色）需要建立离散方程
- 边界节点（红色）需赋予相应的边界条件

1. 边界条件的指定

- 在原定解问题中，红色不规则边界上取值已知为 $f(x,y)$
- 利用 $f(x,y)$ 给定红色边界点上的值
- 利用最近点策略，即

任一红色边界节点的取值 = 原红色不规则区域上距离最近的点的取值

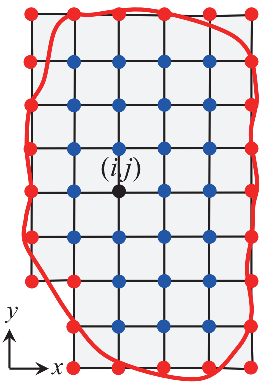

图 7.2: 边界条件的指定

2. 内部节点离散方程的建立

对于任一内部节点 (i,j)，由二维 Laplace 方程可以得到离散方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{u_{i+1,j}-2u_{i,j}+u_{i-1,j}}{h^2}+\frac{u_{i,j+1}-2u_{i,j}+u_{i,j-1}}{h^2}=0 \tag{7.10}$$

化简得到

$$u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1}-4u_{i,j}=0 \tag{7.11}$$

即“四周相加，再减四倍”。公式(7.11)对内部所有节点都成立。

将所有离散方程联立得到一个**线性方程组**

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}=\boldsymbol{B} \tag{7.12}$$

其中，$\boldsymbol{A}$ 为系数矩阵，$\boldsymbol{u}$ 为内部节点未知量组成的列向量，非齐次项 $\boldsymbol{B}$ 反映边界条件。

3. 解线性方程组

求解线性方程组有逆矩阵法和高斯消元法等成熟的算法，在 Matlab 里，求解 u 的方法为

```
u = A\B
```

例 7.1 如图7.3所示，给定矩形离散物理空间和边界条件，采用正方形网格，节点间距为 $h=1$，求满足 Laplace 方程的内部节点。

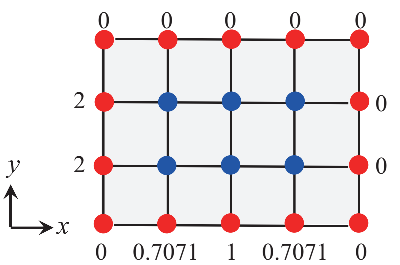

图 7.3: 例 **7.1** 题图

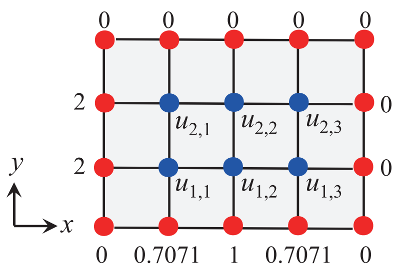

图 7.4: 例 **7.1** 编号图

解 如图7.4所示，将内部的节点编号，各个点的二阶中心差分离散方程为

$$
\begin{aligned}
&(1,1) \quad u_{2,1}+2+0.7071+u_{1,2}-4u_{1,1}=0\\
&(1,2) \quad u_{2,2}+u_{1,1}+1+u_{1,2}-4u_{1,2}=0\\
&(1,3) \quad u_{2,3}+u_{1,2}+0.7071+0-4u_{1,3}=0\\
&(2,1) \quad 0+2+u_{1,1}+u_{2,2}-4u_{2,1}=0\\
&(2,2) \quad 0+u_{2,1}+u_{1,2}+u_{2,3}-4u_{2,2}=0\\
&(2,3) \quad 0+u_{2,2}+u_{1,3}+0-4u_{2,3}=0
\end{aligned}
$$

得到线性方程组

$$
\begin{bmatrix}
-4 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
1 & -4 & 1 & 0 & 1 & 0\\
0 & 1 & -4 & 0 & 0 & 1\\
1 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0\\
0 & 1 & 0 & 1 & -4 & 1\\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -4
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
u_{1,1}\\ u_{1,2}\\ u_{1,3}\\ u_{2,1}\\ u_{2,2}\\ u_{2,3}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-2.7071\\ -1\\ -0.7071\\ -2\\ 0\\ 0
\end{bmatrix}
$$

利用 Matlab 解得

$$
\begin{bmatrix}
u_{1,1}\\ u_{1,2}\\ u_{1,3}\\ u_{2,1}\\ u_{2,2}\\ u_{2,3}
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
1.0835\\ 0.7405\\ 0.4186\\ 0.8863\\ 0.4616\\ 0.2196
\end{bmatrix}
$$

7.2.3 第三类边界条件的处理*

上一节仅考虑了第一类边界条件，对于更一般的第三类边界条件的处理如下。

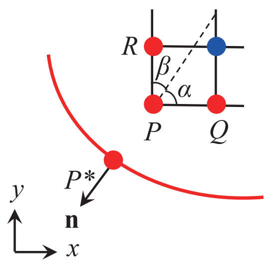

图 7.5: 第三边界条件下的边界差分方程

如图7.5，考虑边界上一点 P，其邻近点记作 Q 和 R，正方形网格尺寸为 h，P 点在真实物理区域上的最近点记作 P^*.

由第三类边界条件，在 P^* 点满足

$$
u(P^*)+\sigma\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{P^*}=f(P^*) \tag{7.13}
$$

由最近点方案，可得

$$u(P)+\sigma\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_P=f(P)=f(P^*) \tag{7.14}$$

根据几何关系

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_P=-\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P\cos\alpha+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P\sin\alpha\right) \tag{7.15}$$

综合可得

$$u(P)-\sigma\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P\cos\alpha-\sigma\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P\sin\alpha=f(P^*) \tag{7.16}$$

由前向差分的定义

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P=\frac{u(Q)-u(P)}{h},\quad\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P=\frac{u(R)-u(P)}{h} \tag{7.17}$$

最终整理得到

$$[h+\sigma\cos\alpha+\sigma\sin\alpha]u(P)-(\sigma\cos\alpha)u(Q)-(\sigma\sin\alpha)u(R)=f(P^*)h \tag{7.18}$$

公式(7.18)仅为**边界节点值的代数方程**，仍需和和内部节点公式(7.11)联合组成线性方程组，一并求解。

7.2.4 总结

Laplace 方程的差分解法总结如下

1. **用一系列离散节点 (i,j) 代替原物理域**
2. **处理边界方程，得到离散方程**
   - **第一类边界条件** 对每一内部节点，选取适当的差分格式，得到其离散方程，组成线性方程组
   - **第二、第三类边界条件** 边界条件满足的离散方程将额外给出，和内部节点的方程联立得到线性方程组，其方程数量更多
3. **求解线性方程组**，得到未知节点处的解，即为原定解问题的近似解。

注意

1. **网格的形状可以是任意的**

   网格不一定是正方形，可以是矩形、平行四边形、三角形、正六边形等等

2. **差分格式是多样的**

   对于一阶导数，本节介绍了前向、后向、中心差分，对于二阶导数，只介绍了中心差分，然而实际上还有更多更复杂的、精度更高的差分格式

3. **线性方程组的求解方法也多种多样**
4. **方程还可以含有非齐次项，差分法中称为源项**。所以，这里仅讨论了最简单、最基本的情况。

7.3 热传导方程的差分解法

考虑一维热传导方程的简单情况：分析长度为 1 的杆在 $0 \sim T$ 之间的温度变化，其初始温度为 $f(x)$，两端温度固定为 0，即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, 0 < t \le T \\ u\big|_{t=0} = f(x), & 0 \le x \le 1 \\ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0, & 0 < t \le T \end{cases} \tag{7.19}$$

7.3.1 时间变量的特殊性

1. 热传导方程与 Laplace 方程的不同之处在于，热传导方程是一个非稳态过程，即结果随时间变化的过程。
2. 非稳态过程的特点是后一时刻的状态依赖于前一状态，即不能同时知道所有时刻的状态。时间变量必须从 $0 \sim T$，每一步时间的增量称为时间步长，记作 Δt.
3. 求解的过程可以理解为“基于过去，预测未来”（随时间向前迭代），其精度与 Δt 的长度（步长）相关。

7.3.2 建立离散方程

设空间离散点在某一时刻的状态为 u_i^n，其中下标 i 表示空间信息，上标 n 表示时间信息。在这里离散成 6 个等间距节点，其中 4 个内部节点，2 个边界节点，记节点间距为 h. 如图7.6所示。

图 7.6: 一维传热计算域离散化

1. 考虑时间导数项

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t}} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

- 时间导数的差分格式必须要用到下一步的时间信息，才能实现时间推进。由第76页的表7.1可知只有前向差分和中心差分满足要求。

- 这里采用较为简单的前向差分。对目前处于第 n 个时刻的第 i 个内部节点，时间导数项差分后

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = a^2 \left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i \tag{7.20}$$

2. 考虑空间导数项

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = a^2 \boxed{\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_i}$$

(1) **显式格式**

当空间导数项采用 n 时刻的空间数据（已知的数据）时，此时可以得到显式方程

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = a^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} \tag{7.21}$$

从而得到各点的离散方程

$$
\begin{aligned}
&(n,1) \quad \frac{u_1^{n+1}-u_1^n}{\Delta t}=a^2\frac{u_2^n-2u_1^n}{h^2}\\
&(n,2) \quad \frac{u_2^{n+1}-u_2^n}{\Delta t}=a^2\frac{u_3^n-2u_2^n+u_1^n}{h^2}\\
&(n,3) \quad \frac{u_3^{n+1}-u_3^n}{\Delta t}=a^2\frac{u_4^n-2u_3^n+u_2^n}{h^2}\\
&(n,4) \quad \frac{u_1^{n+1}-u_1^n}{\Delta t}=a^2\frac{-2u_4^n+u_3^n}{h^2}
\end{aligned}
$$

整理得

$$\boldsymbol{u}^{n+1}=\boldsymbol{B}^n \tag{7.22}$$

其中,

$$\boldsymbol{u}^{n+1}=\begin{bmatrix}u_1^{n+1}\\u_2^{n+1}\\u_3^{n+1}\\u_4^{n+1}\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{B}^n=\begin{bmatrix}u_1^n+a^2\dfrac{u_2^n-2u_1^n}{h^2}\Delta t\\ u_2^n+a^2\dfrac{u_3^n-2u_2^n+u_1^n}{h^2}\Delta t\\ u_3^n+a^2\dfrac{u_4^n-2u_3^n+u_2^n}{h^2}\Delta t\\ u_4^n+a^2\dfrac{-2u_4^n+u_3^n}{h^2}\Delta t\end{bmatrix} \tag{7.23}$$

(2) **隐式格式**

当空间导数项采用 $n+1$ 时刻的空间数据（未知的数据）时，此时可以得到隐式方程

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\Delta t}=a^2\frac{u_{i+1}^{n+1}-2u_i^{n+1}+u_{i-1}^{n+1}}{h^2} \tag{7.24}$$

从而得到各点的离散方程

$$
\begin{aligned}
&(n+1,1) \quad \frac{u_1^{n+1}-u_1^n}{\Delta t}=a^2\frac{u_2^{n+1}-2u_1^{n+1}}{h^2}\\
&(n+1,2) \quad \frac{u_2^{n+1}-u_2^n}{\Delta t}=a^2\frac{u_3^{n+1}-2u_2^{n+1}+u_1^{n+1}}{h^2}\\
&(n+1,3) \quad \frac{u_3^{n+1}-u_3^n}{\Delta t}=a^2\frac{u_4^{n+1}-2u_3^{n+1}+u_2^{n+1}}{h^2}\\
&(n+1,4) \quad \frac{u_1^{n+1}-u_1^n}{\Delta t}=a^2\frac{-2u_4^{n+1}+u_3^{n+1}}{h^2}
\end{aligned}
$$

整理得

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{u}^{n+1}=\boldsymbol{B}^n \tag{7.25}$$

其中,

$$\boldsymbol{u}^{n+1}=\begin{bmatrix}u_1^{n+1}\\u_2^{n+1}\\u_3^{n+1}\\u_4^{n+1}\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{B}^n=\begin{bmatrix}u_1^n\\u_2^n\\u_3^n\\u_4^n\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1+\dfrac{2a^2}{h^2}\Delta t & -\dfrac{a^2}{h^2}\Delta t & 0 & 0\\ -\dfrac{a^2}{h^2}\Delta t & 1+\dfrac{2a^2}{h^2}\Delta t & -\dfrac{a^2}{h^2}\Delta t & 0\\ 0 & -\dfrac{a^2}{h^2}\Delta t & 1+\dfrac{2a^2}{h^2}\Delta t & -\dfrac{a^2}{h^2}\Delta t\\ 0 & 0 & -\dfrac{a^2}{h^2}\Delta t & 1+\dfrac{2a^2}{h^2}\Delta t\end{bmatrix} \tag{7.26}$$

7.3.3 时间推进

1. 显式格式的时间推进

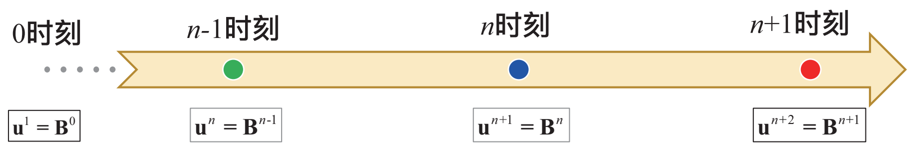

图 7.7: 显式格式的时间推进

- n 从 0 开始递增，直到 $t = T$ 为止。
- 在每一时刻，只需进行代数运算获得 $\boldsymbol{B}^n$ 便得 $\boldsymbol{u}^{n+1}$，计算量小。
- 然而，显式格式的时间步长要很小，否则很容易出现解振荡发散的现象。

2. 隐式格式的时间推进

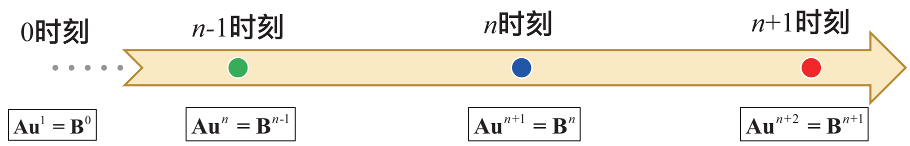

图 7.8: 隐式格式的时间推进

- n 从 0 开始递增，直到 $t = T$ 为止。
- 在每一时刻，需求解线性方程组，计算量较大。
- 与此同时，允许时间更大的时间步长。

例 7.2 考虑长为 4 的一维杆的热传导问题。已将杆离散为 5 个节点构成的网格，节点间距 $h = 1$，内节点标记为 u_1, u_2, u_3. 杆的初始温度和边界温度固定为 0，如图7.9所示。已知热扩散系数 $a_2 = 1$，取时间步长 $\Delta t = 0.1$，用显式差分法求 $t = 0.2$ 时的温度场近似解。

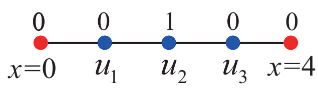

图 7.9: 例 **7.2** 题图

解 根据显式有限差分，将方程离散为

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\Delta t} = a^2 \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} \quad \Rightarrow \quad u_i^{n+1} = u_i^n + 0.1\left(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n\right)$$

然后进行时间推进，即将 $n = 0,\ i = 1, 2, 3$ 代入，得到 $t = 0.1$ 时刻的节点值满足

$$\begin{aligned} u_1^1 &= u_1^0 + 0.1\left(u_2^0 - 2u_1^0 + u_0^0\right) \\ u_2^1 &= u_2^0 + 0.1\left(u_3^0 - 2u_2^0 + u_1^0\right) \\ u_3^1 &= u_3^0 + 0.1\left(u_4^0 - 2u_3^0 + u_2^0\right) \end{aligned} \quad \xrightarrow[\text{边界条件}]{\text{代入初始条件}} \quad \begin{aligned} u_1^1 &= 0 + 0.1(1 - 0 + 0) = 0.1 \\ u_2^1 &= 1 + 0.1(0 - 2 + 0) = 0.8 \\ u_3^1 &= 0 + 0.1(0 - 0 + 1) = 0.1 \end{aligned}$$

得到 $t = 0.1$ 时刻的节点值如图7.10.

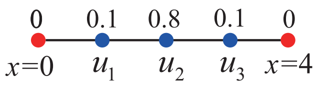

图 7.10: $t = 0.1$ 时刻的节点值

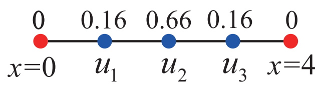

图 7.11: $t = 0.2$ 时刻的节点值

继续将 $n = 1$，$i = 1, 2, 3$ 代入，得到 $t = 0.2$ 时刻的节点值满足

$$\begin{aligned} u_1^2 &= u_1^1 + 0.1\left(u_2^1 - 2u_1^1 + u_0^1\right) \\ u_2^2 &= u_2^1 + 0.1\left(u_3^1 - 2u_2^1 + u_1^1\right) \\ u_3^2 &= u_3^1 + 0.1\left(u_4^1 - 2u_3^1 + u_2^1\right) \end{aligned} \xrightarrow[\text{边界条件}]{\text{代入新的初始条件}} \begin{aligned} u_1^2 &= 0.1 + 0.1(0.8 - 2 \times 0.1 + 0) = 0.16 \\ u_2^2 &= 0.8 + 0.1(0 - 2 \times 0.8 + 0.1) = 0.66 \\ u_3^2 &= 0.1 + 0.1(0 - 2 \times 0.1 + 0.8) = 0.16 \end{aligned}$$

得到 $t = 0.2$ 时刻的节点值如图7.11.

7.3.4 总结

总结如图7.12所示。

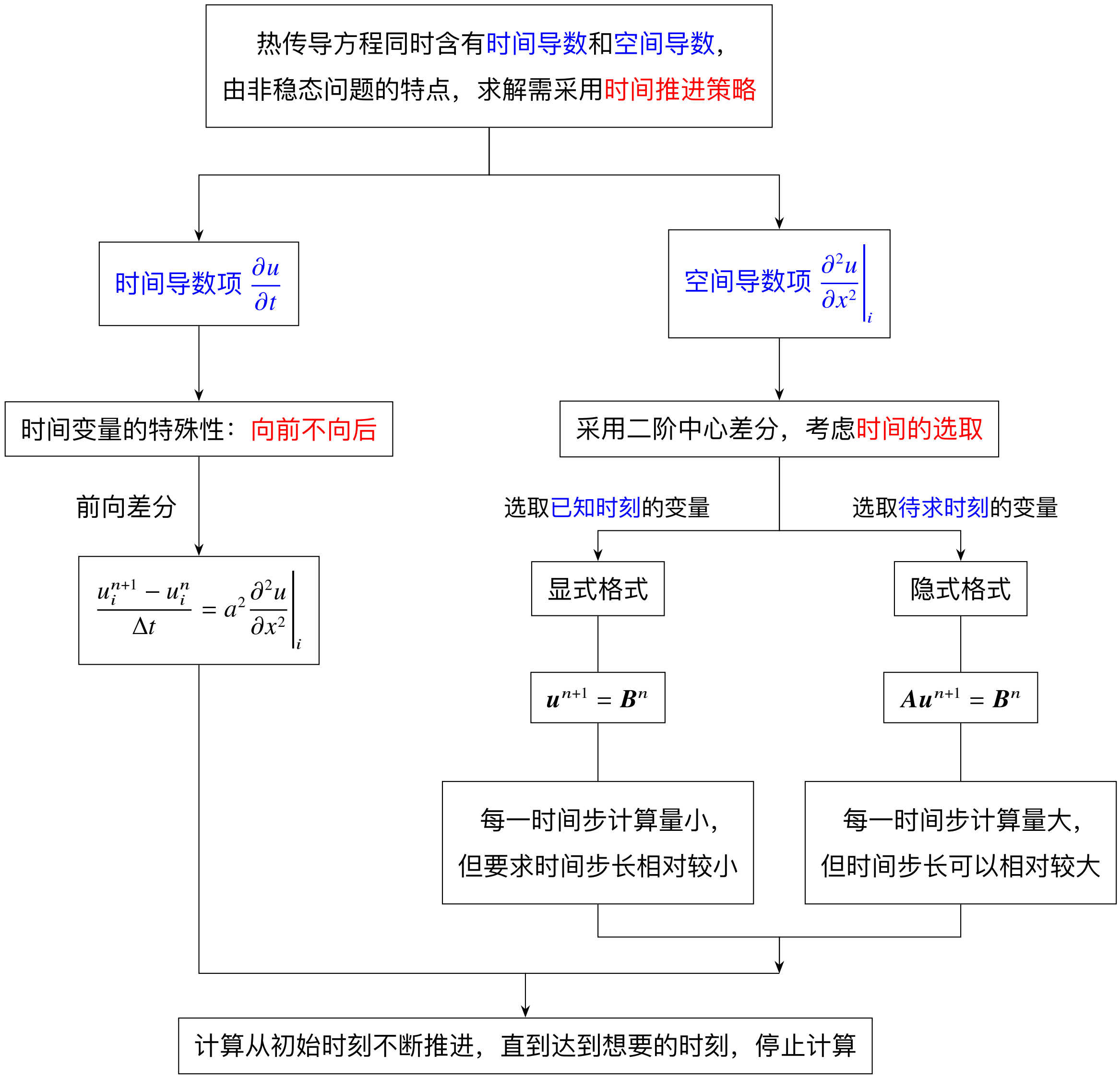

图 7.12: 非稳态热传导差分解法总结

注意

1. **时间步长和网格尺寸**越小，计算越精确，但计算量也越大

2. 对于热传导方程，当**时间推进到足够大**时，过程不再随时间变化，此时得到的是**对应的 Laplace 方程的解**。

7.4 波动方程的差分解法

考虑一维波动方程的简单情况：分析长度为 1 的两端固定弦在 $0 \sim T$ 时刻之间的振动过程，初位移为 $\varphi(x)$，初速度为 $\psi(x)$. 即

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, 0 < t \le T \\ u\big|_{t=0} = \varphi(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \psi(x), & 0 \le x \le 1 \\ u\big|_{x=0} = u\big|_{x=1} = 0, & 0 < t \le T \end{cases} \tag{7.27}$$

不难发现，波动方程与热传导方程相比，时间导数变为二阶导数，因此差分求解的思路很相似。

7.4.1 求解步骤

步骤 1 区域离散化

设空间离散点在某一时刻的状态为 u_i^n，其中下标 i 表示空间信息，上标 n 表示时间信息。在这里离散成 6 个等间距节点，其中 4 个内部节点，2 个边界节点，记节点间距为 h. 如图7.13所示。

图 7.13: 一维波动计算域离散化

步骤 2 建立离散方程

(1) 时间导数项

对目前处于第 n 个时刻的第 i 个内部节点，时间导数项二阶中心差分

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{(\Delta t)^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_i \tag{7.28}$$

显然，当 $n = 0$ 时不存在第 -1 时刻的值，所以公式(7.28)需要满足 $n \ge 1$。所以，对于第一步的时间推进 $n = 0$ 需要考虑初始条件所引入的差分，即二阶中心差分的另一种表示方式：

$$\frac{\left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)^1 - \left(\dfrac{\partial u}{\partial t}\right)^0}{\Delta t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_i \quad \Rightarrow \quad \frac{\dfrac{u_1^1 - u_1^0}{\Delta t} - \psi(x_i)}{\Delta t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_i \tag{7.29}$$

可以得到第一步时间推进最终的解

$$u_i^1 = \varphi(x_i) + \psi(x_i)\Delta t + a^2(\Delta t)^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\bigg|_i \tag{7.30}$$

(2) **空间导数项**

i. **显式格式**

选取已知的 n 时刻

$$\begin{cases} u_i^1 = \varphi(x_i) + \psi(x_i)\Delta t + a^2(\Delta t)^2 \dfrac{\varphi(x_{i+1}) - 2\varphi(x_i) + \varphi(x_{i-1})}{h^2}, & n = 0 \\ \dfrac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{(\Delta t)^2} = a^2 \dfrac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}, & n \geq 1 \end{cases} \tag{7.31}$$

整理得

$$\boldsymbol{u}^{n+1} = \boldsymbol{B}^n \tag{7.32}$$

其中，

$$\boldsymbol{u}^{n+1} = \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ u_4^{n+1} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}^0 = \begin{bmatrix} \varphi(x_1) + \psi(x_1)\Delta t + a^2(\Delta t)^2 \dfrac{\varphi(x_2) - 2\varphi(x_1)}{h^2} \\ \varphi(x_2) + \psi(x_2)\Delta t + a^2(\Delta t)^2 \dfrac{\varphi(x_3) - 2\varphi(x_2) + \varphi(x_1)}{h^2} \\ \varphi(x_3) + \psi(x_3)\Delta t + a^2(\Delta t)^2 \dfrac{\varphi(x_4) - 2\varphi(x_3) + \varphi(x_2)}{h^2} \\ \varphi(x_4) + \psi(x_4)\Delta t + a^2(\Delta t)^2 \dfrac{-2\varphi(x_4) + \varphi(x_3)}{h^2} \end{bmatrix} \tag{7.33}$$

$$\boldsymbol{B}^n(n \geq 1) = \begin{bmatrix} 2u_1^n - u_1^{n-1} + a^2(\Delta t)^2 \dfrac{u_2^n - 2u_1^n}{h^2} \\ 2u_2^n - u_2^{n-1} + a^2(\Delta t)^2 \dfrac{u_3^n - 2u_2^n + u_1^n}{h^2} \\ 2u_3^n - u_3^{n-1} + a^2(\Delta t)^2 \dfrac{u_4^n - 2u_3^n + u_2^n}{h^2} \\ 2u_4^n - u_4^{n-1} + a^2(\Delta t)^2 \dfrac{-2u_4^n + u_3^n}{h^2} \end{bmatrix} \tag{7.34}$$

ii. **隐式格式**

选取待求的 $n+1$ 时刻

$$\begin{cases} u_i^1 = \varphi(x_i) + \psi(x_i)\Delta t + a^2(\Delta t)^2 \dfrac{u_{i+1}^1 - 2u_i^1 + u_{i-1}^1}{h^2}, & n = 0 \\ \dfrac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{(\Delta t)^2} = a^2 \dfrac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2}, & n \geq 1 \end{cases} \tag{7.35}$$

其中，

$$\boldsymbol{u}^{n+1} = \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ u_4^{n+1} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 + \dfrac{2a^2}{h^2}(\Delta t)^2 & -\dfrac{a^2}{h^2}(\Delta t)^2 & 0 & 0 \\ -\dfrac{a^2}{h^2}(\Delta t)^2 & 1 + \dfrac{2a^2}{h^2}(\Delta t)^2 & -\dfrac{a^2}{h^2}(\Delta t)^2 & 0 \\ 0 & -\dfrac{a^2}{h^2}(\Delta t)^2 & 1 + \dfrac{2a^2}{h^2}(\Delta t)^2 & -\dfrac{a^2}{h^2}(\Delta t)^2 \\ 0 & 0 & -\dfrac{a^2}{h^2}(\Delta t)^2 & 1 + \dfrac{2a^2}{h^2}(\Delta t)^2 \end{bmatrix} \tag{7.36}$$

$$\boldsymbol{B}^0 = \begin{bmatrix} \varphi(x_1) + \psi(x_1)\Delta t \\ \varphi(x_2) + \psi(x_2)\Delta t \\ \varphi(x_3) + \psi(x_3)\Delta t \\ \varphi(x_4) + \psi(x_4)\Delta t \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{B}^n(n \geq 1) = \begin{bmatrix} 2u_1^n - u_1^{n-1} \\ 2u_2^n - u_2^{n-1} \\ 2u_3^n - u_3^{n-1} \\ 2u_4^n - u_4^{n-1} \end{bmatrix} \tag{7.37}$$

步骤 3　时间推进

(1)　显式格式

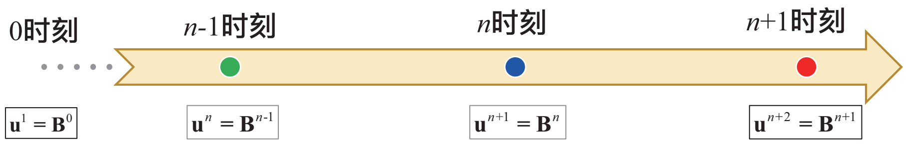

图 7.14: 显式格式的时间推进

- n 从 0 开始递增，直到 $t = T$ 为止。
- 在每一时刻，只需进行代数运算获得 $\boldsymbol{B}^n$ 便得 $\boldsymbol{u}^{n+1}$，计算量小。
- 然而，显式格式的时间步长要很小，否则很容易出现解振荡发散的现象。

(2)　隐式格式

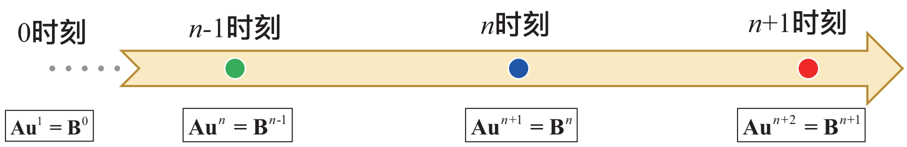

图 7.15: 隐式格式的时间推进

- n 从 0 开始递增，直到 $t = T$ 为止。
- 在每一时刻，需求解线性方程组，计算量较大。
- 与此同时，允许时间更大的时间步长。

注意

1. 整体看来，与热传导方程的差分求解方法很像。
2. 由于时间导数项变成二阶了，因此在采用二阶时间导数的中心差分时，需要单独处理第一步时间迭代 $n = 0$。
3. 在热传导方程的求解中需要注意的事项，在这里同样需要注意。

索引

R

S

T

W

X

Y

Z