

导弹飞行力学

易鹏

中山大学

内部版本号：V0.06.011 (内测版)

2021 年 12 月 1 日

目录

第 1 章	课程简介	1
1.1	研究对象与内容	1
1.1.1	研究对象	1
1.1.2	研究内容	1
1.2	课程组织及要求	1
1.3	导弹概述	1
1.3.1	导弹概念	1
1.3.2	战技性能	2
第 2 章	飞行动力学的基础知识	3
2.1	地球的运动及形状	3
2.1.1	地球的运动	3
2.1.2	地球的形状	3
2.2	地球大气	3
2.2.1	地球大气分层	4
2.2.2	标准大气	5
2.3	坐标系间的方向余弦阵及矢量导数的关系	5
2.3.1	坐标系之间的方向余弦阵	5
2.3.2	坐标系转换阵的欧拉角表示方法	6
2.3.3	坐标间矢量导数的关系	7
2.4	常用坐标系及其相互转换	7
2.4.1	常用坐标系	7
2.4.2	各坐标系间的转换关系	8
2.4.3	常用欧拉角的联系方程	10
2.5	变质量力学基本原理	10
2.5.1	变质量质点基本方程	10
2.5.2	变质量质点系的运动方程	11

第 3 章 远程火箭飞行的力学环境	15
3.1 附加力、附加力矩及火箭发动机特性	15
3.1.1 附加力和附加力矩	15
3.1.2 发动机推力特性	20
3.2 引力与重力	22
3.2.1 引力	22
3.2.2 引力加速度	23
3.2.3 重力的概念	24
3.2.4 重力加速度	24
3.3 空气动力及气动力矩	25
3.3.1 空气动力	25
第 4 章 自由飞行段弹道特性分析	31
4.1 自由飞行段弹道方程	31
4.1.1 自由飞行段假设	31
4.1.2 轨道方程	31
4.2 弹道方程的分析	32
4.2.1 符号 e, P 的意义及其确定	32
4.2.2 轨道根数	33
4.2.3 轨道形状与关机点参数	34
4.3 射程与主动段终点参数的关系	37
4.3.1 被动段射程的计算	37
4.3.2 自由段射程的计算	39
4.3.3 最佳倾角确定	40
4.3.4 最小能量的最佳倾角确定	41
附录	43
a. 索引	43

第 1 章 课程简介

1.1 研究对象与内容

1.1.1 研究对象

火箭和弹道导弹

1.1.2 研究内容

以**运载火箭**、**弹道导弹**为背景，在**理论力学**、**空气动力学**、**自动控制原理**等基础上，以**计算机**为仿真建模工具，研究**飞行器质心运动**和**绕质心运动**特性及其伴随现象的一门课程。

1.2 课程组织及要求

- 总学时数：46 学时 +18 学时
- 教学与考核：讲授 + 实验，闭卷考试（60%）+ 实验报告评价（40%）
- 参考书：陈克俊等编著，远程火箭飞行动力学与制导，2014.
- 课程要求：掌握飞行动力学建模、弹道设计、弹道计算、弹道分析的理论和方法。

1.3 导弹概述

1.3.1 导弹概念

定义 1.1 导弹

导弹是一种包含制导控制系统，将战斗部导向目标飞行器，以实现既定导作战目的。

定义 1.2 弹道导弹

弹道导弹是关机后按惯性椭圆弹道飞向目标导导弹，分为固—液；战术—战役—战略；地地—潜地—空地。

定义 1.3 助推滑翔导弹

助推滑翔导弹是主要在临近空间^a飞行，助推关机后采用无动力滑翔命中目标的导弹。

^a临近空间：距离地面 20 ~ 100 公里的空域

1.3.2 战技性能

- 火力性能：战斗部数量、战斗部总威力、最大最小射程、精确度或 CEP 等
- 使用性能：部署方式、可靠性、反应时间、保质期、维护操作等

第 2 章 飞行动力学的基础知识

2.1 地球的运动及形状

2.1.1 地球的运动

定义 2.1 地球运动

地球运动分为质心运动（公转）和绕心运动（自转）

- 公转：以近圆轨道绕太阳公转，周期为 1 年。
- 自转：地球自转轴成为地轴，地球绕地轴自西向东匀速转动。

地球运动的基本参数：

- 地球公转周期： $T = 365.25636$ 个平日
- 地球自转周期： $t = 86164.099 \text{ s} = 23 \text{ h } 56 \text{ m } 4.099 \text{ s}$
- 地球自转角速度： $\omega_e = \frac{2\pi}{86164.1} = 7.292115 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$

定理 2.1 地球运动的假设

在导弹飞行时间内（飞行时间短），可认为地轴在惯性空间指向不变，且地球作匀速直线运动。但实际上地轴的指向是变化的，存在极移（物质变化）、进动（太阳引力）和章动（月球引力），地球本身也存在加速度。

其中，进动是指在太阳引力作用下，地轴会绕一个轴作周期约为 27500 年的圆周运动，类似于不平衡的陀螺，如图所示。而章动是指在月球引力的作用下，地轴并不是做完美的圆周运动，会上下浮动，浮动的周期约为 18.6 年，如图所示。

2.1.2 地球的形状

定义 2.2 地球形状

实际应用中采用简单形状描述地球：

- 均质圆球： $R = 6371004 \text{ m}$
- 总地球椭球体： $a_e = 6378149 \text{ m}$, $b_e = 6356775 \text{ m}$, 地球扁率（离心率） $\alpha_e = \frac{(a_e - b_e)}{a_e} = \frac{1}{298.257}$

2.2 地球大气

2.2.1 地球大气分层

定义 2.3 地球大气分层

地球大气分层是按大气温度分层：

- **对流层**：0 ~ 18 km/8 km, 75% 大气质量, 95% 水汽；
- **平流层**：~ 50 km, 同温层 + 臭氧层, 温度升高, 大气密度和压强降低, 只有地表的 0.08%.
- **中间层**：50 km ~ 90 km, 温度降低
- **热成层**：90 km ~ 500 km, 温度升高
- **外逸层**：> 500 km.

对于运载火箭, 一般只考虑 90km 以下的大气影响。

大气的物理性质分布如下：

1. 温度分布

温度随高度的变化曲线在 0 ~ 80 km 内可以由一系统的折线表示：

$$T(h) = T_0 + Gh \quad (2.1)$$

对于不同的层, 相应的参数 G 取值不同。

2. 压强分布

大气的实际压强与气温一样变化一场复杂, 为了得到一般意义的标准分布, 常采用“大气垂直平衡”假设, 即认为大气在铅锤方向是静止的, 处于力的平衡状态。由 $p = Rg_0\rho T$ 得：

$$p(h) = p_0 e^{-\frac{1}{R} \int_0^h \frac{dh}{T}} \quad (2.2)$$

证 由“大气垂直平衡”假设, 可以得到

$$(p + dp)dS + \rho g_0 dS dh = p dS$$

化简得到

$$dp + \rho g_0 dh = 0$$

代入 $p = Rg_0\rho T$ 可得

$$\frac{dp}{p} = -\frac{g}{Rg_0 T} dh$$

积分可得

$$\frac{\ln p}{\ln p_0} = \int_{h_0}^h -\frac{g}{Rg_0 T} dh \Rightarrow \frac{p}{p_0} = e^{-\frac{1}{R} \int_{h_0}^h \frac{g}{g_0 T} dh} \quad (2.3)$$

3. 密度分布

由气体状态方程, 已知温度 T 和气压 p , 可得

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{pT_0}{p_0 T} = \frac{T_0}{T} e^{-\frac{1}{R} \int_0^H \frac{dH}{T}}, H = \frac{1}{g_0} \int_0^h g dh \quad (2.4)$$

其中, H 为**地势高度**, 相当于具有同等势能的均匀重力场中的高度, 其总小于几何高度 h , 但在高度不大时二者差别较小。若认为在某一高度范围内为等温过程, 则：

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = e^{-\frac{H_2-H_1}{H_{M_1}}}, H_{M_1} = RT_1 \quad (2.5)$$

其中, H_{M_1} 称为**基准高或标高**。

如果假设在 $0 \sim 80 \text{ km}$ 内为恒温过程, 则有

$$\frac{p}{p_0} = \frac{\rho}{\rho_0} = e^{-\beta h}, \quad \beta = \frac{1}{H_{\text{MCP}}} = \frac{1}{7.11 \text{ km}} \quad (2.6)$$

这个模型称为**指数大气模型**。

2.2.2 标准大气

导弹飞行状态随与随高度变化的大气参数有密切关系 (压强、密度、温度及音速等)。

2.3 坐标系间的方向余弦阵及矢量导数的关系

由于不同坐标系对同一物理量的描述形式或者坐标投影不同, 为了在统一坐标系中描述飞行器的运动, 存在不同物理量到基准坐标系的转换需求。

定义 2.4 坐标转换

同一矢量在不同坐标系下的坐标不同, 将矢量 S_a 坐标系中的坐标转换到 S_b 坐标系称为**坐标系转换**。

2.3.1 坐标系之间的方向余弦阵

定义 2.5 坐标系

笛卡尔坐标系: 由原点及过原点的两 (三) 条具有方向的坐标轴组成, 坐标轴上的度量单位通常相等。

球坐标系: 球坐标系由原点、方位角、仰角和距离构成。

极坐标系: 极坐标系由极点、极径及极角构成。

考虑两个直角坐标系: $P: O_p - x_p y_p z_p$, $Q: O_q - x_q y_q z_q$, 定义 P_Q 为 Q 系中单位矢量 E_q 变换到 P 系中单位矢量 E_p 的转换矩阵, 由

$$E_p = P_Q E_q, \quad E_p = \begin{bmatrix} x_p^0 & y_p^0 & z_p^0 \end{bmatrix}^T, \quad E_q = \begin{bmatrix} x_q^0 & y_q^0 & z_q^0 \end{bmatrix}^T \quad (2.7)$$

由于

$$E_q \cdot E_q^T = \begin{bmatrix} x_q^0 \\ y_q^0 \\ z_q^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_q^0 & y_q^0 & z_q^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_q^0 \cdot x_q^0 & x_q^0 \cdot y_q^0 & x_q^0 \cdot z_q^0 \\ y_q^0 \cdot x_q^0 & y_q^0 \cdot y_q^0 & y_q^0 \cdot z_q^0 \\ z_q^0 \cdot x_q^0 & z_q^0 \cdot y_q^0 & z_q^0 \cdot z_q^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E$$

那么

$$P_Q = E_p \cdot E_q^T = \begin{bmatrix} x_p^0 \cdot x_q^0 & x_p^0 \cdot y_q^0 & x_p^0 \cdot z_q^0 \\ y_p^0 \cdot x_q^0 & y_p^0 \cdot y_q^0 & y_p^0 \cdot z_q^0 \\ z_p^0 \cdot x_q^0 & z_p^0 \cdot y_q^0 & z_p^0 \cdot z_q^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x_p, x_q) & \cos(x_p, y_q) & \cos(x_p, z_q) \\ \cos(y_p, x_q) & \cos(y_p, y_q) & \cos(y_p, z_q) \\ \cos(z_p, x_q) & \cos(z_p, y_q) & \cos(z_p, z_q) \end{bmatrix} \triangleq [a_{ij}] \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (2.8)$$

公式(2.8)称为**方向余弦阵**, 同理可以得到

$$Q_P = E_q \cdot E_p^T = \begin{bmatrix} x_q^0 \cdot x_p^0 & x_q^0 \cdot y_p^0 & x_q^0 \cdot z_p^0 \\ y_q^0 \cdot x_p^0 & y_q^0 \cdot y_p^0 & y_q^0 \cdot z_p^0 \\ z_q^0 \cdot x_p^0 & z_q^0 \cdot y_p^0 & z_q^0 \cdot z_p^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x_q, x_p) & \cos(x_q, y_p) & \cos(x_q, z_p) \\ \cos(y_q, x_p) & \cos(y_q, y_p) & \cos(y_q, z_p) \\ \cos(z_q, x_p) & \cos(z_q, y_p) & \cos(z_q, z_p) \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

又

$$P_q^{-1} = Q_p = E_q \cdot E_p^T = (E_p \cdot E_q^T)^T = P_q^T$$

这说明：**方向余弦阵是正交矩阵**，那么方向余弦阵只有**三个独立变量**。

定义 2.6 初等转换矩阵

当两个坐标系之间存在平行轴的时候，此时的方向余弦矩阵称为**初等转换矩阵**。分别绕 x, y, z 轴旋转的初等转换矩阵为

$$M_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \quad M_y(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & -\sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix} \quad M_z(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

定理 2.2 转换矩阵的传递性

对于直角坐标系 P, Q, S ，它们相互之间的转换矩阵为 P_Q, S_Q, S_P ，则

$$S_Q = S_P \cdot P_Q, \quad P_Q = P_S \cdot S_Q, \quad P_S = P_Q \cdot Q_S \quad (2.11)$$

2.3.2 坐标系转换阵的欧拉角表示方法

定义 2.7 转换矩阵的欧拉角表示

将坐标系视作刚体，则经过三次旋转后可以与另一个坐标系重合，因此可以用这三个旋转角（**欧拉角**）作为独立变量，来描述方向余弦阵。

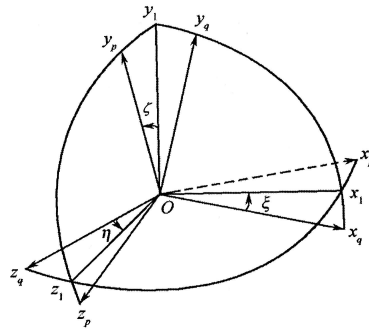


图 2.1: 坐标系旋转转换

例如，如图2.1所示， $o-x_qy_qz_q$ 分别绕 z, y, x 轴旋转三次，得到

$$o-x_qy_qz_q \xrightarrow{M_z[\xi]} o-x_1y_1z_1 \xrightarrow{M_y[\eta]} o-x_p y_p z_p \xrightarrow{M_x[\zeta]} o-x_p y_p z_p$$

即

$$P_Q = M_x[\xi] \cdot M_y[\eta] \cdot M_z[\zeta] \quad (2.12)$$

进一步代入，得

$$P_Q = \begin{bmatrix} \cos \xi \cos \eta & \sin \xi \cos \eta & -\sin \eta \\ \cos \xi \sin \eta \sin \zeta - \sin \xi \cos \zeta & \sin \xi \sin \eta \sin \zeta + \cos \xi \cos \zeta & \cos \eta \sin \zeta \\ \cos \xi \sin \eta \cos \zeta + \sin \xi \sin \zeta & \sin \zeta \sin \eta \cos \zeta - \cos \xi \sin \zeta & \cos \eta \cos \zeta \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

2.3.3 坐标间矢量导数的关系

定义 2.8 矢量导数

矢量导数：同一矢量在不同坐标系有不同的投影，其导数的数值不同。

设坐标系 $O: o-xyz$ 相对于坐标系 $P: o_p-x_py_pz_p$ 有角速率 ω 。矢量 \mathbf{a} 在坐标系 O 的投影为

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{x}^0 + a_y \mathbf{y}^0 + a_z \mathbf{z}^0 \quad (2.14)$$

取微分，得

$$\frac{d\mathbf{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt} \mathbf{x}^0 + \frac{da_y}{dt} \mathbf{y}^0 + \frac{da_z}{dt} \mathbf{z}^0 + a_x \frac{d\mathbf{x}^0}{dt} + \quad (2.15)$$

2.4 常用坐标系及其相互转换

2.4.1 常用坐标系

常用的坐标系分类

- 取地心为原点：地心惯性坐标系，地心固连坐标系
- 取发射点为原点：发射坐标系，发射惯性坐标系
- 取对象质心为原点：体坐标系，速度坐标系，半速度坐标系

1. 地心惯性坐标系 $I: O_E - X_I Y_I Z_I$ (静系)

原点	地心 O_E
X 轴	X_I : 平春分点
Y 轴	Y_I : 右手法则
Z 轴	Z_I : 地球自转轴

2. 地心坐标系 $E: O_E - X_E Y_E Z_E$ (动系)

原点	地心 O_E
X 轴	X_E : 给定子午线
Y 轴	Y_E : 右手法则
Z 轴	Z_E : 地球自转轴

3. 发射坐标系 $G: O - xyz$ (动系)

原点	发射点 O
X 轴	x : 发射水平面内指向瞄准方向
Y 轴	y : 发射水平面指向上方
Z 轴	z : 右手法则

对于球模型: φ_0 : 地心纬度, α_0 : 发射方位角。

对于椭球模型: φ_0 : 地心纬度, α_0 : 发射方位角。

4. 发射惯性坐标系 A : $O_A - x_A y_A z_A$ (静系)

原点	发射点 O_A , 起飞瞬间与发射点 O 重合
X 轴	x_A : 起飞瞬间的发射水平面内指向瞄准方向
Y 轴	y_A : 起飞瞬间的发射水平面指向上方
Z 轴	z_A : 右手法则

5. 平移坐标系 A : $o_T - x_T y_T z_T$ (动系)

原点	发射点 O_A , 起飞瞬间与发射点 O 重合
X 轴	x_A : 起飞瞬间的发射水平面内指向瞄准方向
Y 轴	y_A : 起飞瞬间的发射水平面指向上方
Z 轴	z_A : 右手法则

6. 弹体坐标系 B : $o_1 - x_1 y_1 z_1$ (动系)

原点	弹体质心 O_1
X 轴	x_1 : 沿弹体对称轴指向头部
Y 轴	y_1 : 位于主对称面内, 垂直于 X 轴
Z 轴	z_1 : 右手法则, 顺着发射方向看向右为正

7. 速度坐标系 V : $o_1 - x_v y_v z_v$ (动系)

原点	弹体质心 O_1
X 轴	x_v : 弹体的速度方向
Y 轴	y_v : 位于主对称面内, 垂直于 X 轴
Z 轴	z_v : 右手法则

8. 半速度坐标系 H : $o_1 - x_h y_h z_h$ (动系)

原点	弹体质心 O_1
X 轴	x_h : 弹体的速度方向
Y 轴	y_h : 包含速度矢量的铅锤面内垂直于 x_h , 向上为正
Z 轴	z_h : 右手法则

2.4.2 各坐标系间的转换关系

1. $I \rightarrow E$: Z 轴重合, X 轴处于赤道面内相差角 $\Omega_G = \omega_e \cdot t$ (时角), 则转换矩阵为

$$E_I = M_z[\Omega_G] \quad (2.16)$$

2. $E \rightarrow G$: 设地球为圆球, 发射点可用经纬度 (λ_0, φ_0) 来描述, 即

$$G_E = M_y[-(90^\circ + \alpha_0)] \cdot M_x[\varphi_0] \cdot M_z[-(90^\circ - \lambda_0)] \quad (2.17)$$

3. $G \rightarrow B$: 设 $G \rightarrow B$ 转序为 321, 旋转角为 φ, ψ, γ , 则

$$B_G = M_x[\gamma] \cdot M_y[\psi] \cdot M_z[\varphi] \quad (2.18)$$

定义 2.9 新的欧拉角 I

俯仰角 φ : 轴 ox_1 在发射面 xoy 上的投影与 x 的夹角, 投影在 x 的上方为正。

偏航角 ψ : 轴 ox_1 与发射面 xoy 的夹角, ox_1 在发射面左边为正。

滚动角 γ : 旋转角速度矢量与 ox_1 轴方向一致时为正。

4. $G \rightarrow V$: 设 $G \rightarrow V$ 转序为 321, 旋转角为 θ, σ, ν , 则

$$V_G = M_x[\nu] \cdot M_y[\sigma] \cdot M_z[\theta] \quad (2.19)$$

定义 2.10 新的欧拉角 II

速度倾角 θ : 轴 ox_v 在发射面 xoy 上的投影与 x 的夹角, 投影在 x 的上方为正。

航迹偏航角 σ : 轴 ox_v 与发射面 xoy 的夹角, ox_v 在发射面左边为正。

倾侧角 ν : 旋转角速度矢量与 ox_v 轴方向一致时为正。

5. $V \rightarrow B$: 由于速度系 y_v 轴位于主对称面内, 因此 $V \rightarrow B$ 只有两个欧拉角, 设为 α, β , 设定 $V \rightarrow B$ 的转序为 23, 则

$$B_V = M_z[\alpha] \cdot M_y[\beta] \quad (2.20)$$

定义 2.11 新的欧拉角 III

测滑角 β : 速度轴 x_v 与弹体主对称面的夹角, 右方为正。

攻角 α : 速度轴 x_v 与在主对称面投影与弹体纵轴的夹角, 下方为正。

6. $A \rightarrow G$: 由于在发射时刻 A, G 坐标系重合, 因此其转换角与飞行时间 t 相关, 发射系统地轴旋转角为 $\omega_e t$, 则

$$G_A = M_y[-\alpha_0] \cdot M_z[-\phi_0] \cdot M_x[\omega_e t] \cdot M_z[\phi_0] \cdot M_y[\alpha_0] \quad (2.21)$$

如果火箭飞行时间较短, 认为 $\omega_e t$ 为小量, 在转换矩阵中取其一次项, 则

$$G_A = \begin{bmatrix} 1 & \omega_{ez}t & -\omega_{ey}t \\ -\omega_{ez}t & 1 & \omega_{ex}t \\ \omega_{ey}t & -\omega_{ex}t & 1 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

其中,

$$\begin{cases} \omega_{ex} = \omega_e \cos \phi_0 \cos \alpha_0 \\ \omega_{ey} = \omega_e \sin \phi_0 \\ \omega_{ez} = -\omega_e \cos \phi_0 \sin \alpha_0 \end{cases} \quad (2.23)$$

2.4.3 常用欧拉角的联系方程

由于各坐标系之间定义有欧拉角，必然存在一定的联系。

1. B, G, V 之间的联系

$$V_G[\theta, \sigma, \nu] = V_B[\alpha, \beta] \cdot B_G[\varphi, \psi, \gamma] \quad (2.24)$$

利用姿态角 φ, ψ, γ 和攻角侧滑角 α, β 来确定速度角 θ, σ, ν 。如果侧向角为小量，则

$$\begin{cases} \sigma = \psi \cos \alpha + \gamma \sin \alpha - \beta \\ \nu = -\psi \sin \alpha + \gamma \cos \alpha \\ \theta = \varphi - \alpha \end{cases} \quad (2.25)$$

若攻角 α 也为小量，则

$$\begin{cases} \theta = \varphi - \alpha \\ \sigma = \psi - \beta \\ \nu = \gamma \end{cases} \quad (2.26)$$

2. B, G, V 之间的联系

弹体相对发射系姿态角为 φ, ψ, γ ，相对平移系姿态角为 $\varphi_T, \psi_T, \gamma_T$ ，相对系与发射惯性系矩阵 G_T ，有

$$B_T[\varphi_T, \psi_T, \gamma_T] = B_G[\varphi, \psi, \gamma] \cdot G_T[\alpha_0, \phi_0, \omega_e t] \quad (2.27)$$

由此可利用姿态角 φ, ψ, γ 和飞行时间 t 来确定惯性姿态角 $\varphi_T, \psi_T, \gamma_T$ 。如果认为侧向角及时间为小量，则

$$\begin{cases} \varphi_T = \varphi + \omega_{ez} t \\ \psi_T = \psi + (\omega_{ey} \cos \varphi - \omega_{ex} \sin \varphi) \cdot t \\ \gamma_T = \gamma + (\omega_{ey} \sin \varphi + \omega_{ex} \cos \varphi) \cdot t \end{cases} \quad (2.28)$$

2.5 变质量力学基本原理

2.5.1 变质量质点基本方程

1. 火箭质量

由于发动机工作，飞行中有大量质点从发动机中喷出，因此必须规定一个表面，以此表面内质量作为火箭的总质量。通常此表面取为火箭外表面和发动机喷口断面。因此火箭是一个存在质点流动的变质量物体。

2. 变质量质点基本方程

设当前质量为 $m(t)$ ，当前绝对速度为 V ，则其动量为

$$Q(t) = m(t) \cdot V \quad (2.29)$$

质点在 dt 时间内，有外界作用力 F ，且向外以相对速度 V_r 喷射质量元 $-dm$ 。设质点速度变化为 dV ，则有

$$\begin{aligned} Q(t+dt) &= (m - (-dm)) \cdot (V + dV) + (-dm) \cdot (V + V_r) \\ &= m(t)(V + dV) - dmV_r \end{aligned} \quad (2.30)$$

则

$$\begin{aligned} dQ &= Q(t+dt) - Q(t) \\ &= m(V+dV) - dmV_r - m \cdot V \\ &= mdV - dmV_r \end{aligned} \quad (2.31)$$

对常质量质点有动量定律

$$dQ = Fdt \quad (2.32)$$

所以

$$Fdt = mdV - dmV_r \quad (2.33)$$

由此可以得到

定理 2.3 变质量质点基本方程（密歇尔斯基方程）

$$m \frac{dV}{dt} = F + \frac{dm}{dt} V_r = F + P_r \quad (2.34)$$

其中， F 为牛顿第二定律的外力； P_r 为喷射反作用力，加速力。

假设质点不受外力作用，且假设有 V_r 与 V 反向，则

$$m \frac{dv}{dt} = -\frac{dm}{dt} v_r \Rightarrow dv = -dv_r \frac{dm}{m} \quad (2.35)$$

再假设质量元喷射速度为常值，则有质点速度为

$$v = v_0 + v_r \ln \frac{m_0}{m} \quad (2.36)$$

设初始速度为 0，则可以得到

定理 2.4 齐奥尔科夫斯基公式

$$v_k = v_r \ln \frac{m_0}{m_k} \quad (2.37)$$

设结构比为 $\mu_k = \frac{m_k}{m_0}$ ，则

$$v_k = -v_r \ln \mu_k \quad (2.38)$$

其中， v_k 为理想速度。

2.5.2 变质量质点系的运动方程

对于变质量质点系，除了质点随物体作牵连运动外，在物体内部还有相对运动，会对物体运动有影响，应用密歇尔斯基方程存在近似性。

在惯性参考系内，质点系总外力为 F_s ，总力矩为 M_s ，则运动方程为

$$F_s = \sum_{i=1}^N m_i \frac{d^2 r_i}{dt^2} \quad (2.39)$$

$$M_s = \sum_{i=1}^N m_i r_i \times \frac{d^2 r_i}{dt^2} \quad (2.40)$$

对于连续质点系（物体）的运动方程，则有

$$\mathbf{F}_s = \int_m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} dm \quad (2.41)$$

$$\mathbf{M}_s = \int_m \mathbf{r} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} dm \quad (2.42)$$

1. 质心运动方程

任一质点在惯性系中的矢径为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_{c.m} + \boldsymbol{\rho} \quad (2.43)$$

其中 $\mathbf{r}_{c.m}$ 为质心的矢径， $\boldsymbol{\rho}$ 是相对位置矢径，则有绝对加速度为

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2 \mathbf{r}_{c.m}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\omega}_T \times \frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t} + \frac{\delta^2 \boldsymbol{\rho}}{\delta t^2} + \frac{d\boldsymbol{\omega}_T}{dt} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}_T \times (\boldsymbol{\omega}_T \times \boldsymbol{\rho}) \quad (2.44)$$

将(2.44)代入(2.41)，可以得到

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_s &= \int_m \left[\frac{d^2 \mathbf{r}_{c.m}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\omega}_T \times \frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t} + \frac{\delta^2 \boldsymbol{\rho}}{\delta t^2} + \frac{d\boldsymbol{\omega}_T}{dt} \times \boldsymbol{\rho} + \boldsymbol{\omega}_T \times (\boldsymbol{\omega}_T \times \boldsymbol{\rho}) \right] dm \\ &= m \frac{d^2 \mathbf{r}_{c.m}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\omega}_T \times \int_m \frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t} dm + \int_m \frac{\delta^2 \boldsymbol{\rho}}{\delta t^2} dm + \frac{d\boldsymbol{\omega}_T}{dt} \times \int_m \boldsymbol{\rho} dm + \boldsymbol{\omega}_T \times \left(\boldsymbol{\omega}_T \times \int_m \boldsymbol{\rho} dm \right) \end{aligned}$$

由质心的定义，有 $\int_m \boldsymbol{\rho} dm = 0$ ，则可以得到

定理 2.5 任意变质量物体的一般运动方程

$$\mathbf{F}_s = m \frac{d^2 \mathbf{r}_{c.m}}{dt^2} + 2\boldsymbol{\omega}_T \times \int_m \frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t} dm + \int_m \frac{\delta^2 \boldsymbol{\rho}}{\delta t^2} dm \quad (2.45)$$

相应地可以得到

定理 2.6 任意变质量物体的质心运动方程

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}_{c.m}}{dt^2} = \mathbf{F}_s + \mathbf{F}'_k + \mathbf{F}'_{rel} \quad (2.46)$$

其中，

$$\text{附加哥氏力} \quad \mathbf{F}'_k = -2\boldsymbol{\omega}_T \times \int_m \frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t} dm$$

$$\text{附加相对力} \quad \mathbf{F}'_{rel} = - \int_m \frac{\delta^2 \boldsymbol{\rho}}{\delta t^2} dm$$

2. 绕质心运动方程

系统 S 绕质心的力矩方程为

$$\mathbf{M}_{c.m} = \int_m \boldsymbol{\rho} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} dm \quad (2.47)$$

将加速度的表达式(2.44)代入，可以得到

$$\mathbf{M}_{c.m} = \int_m \boldsymbol{\rho} \times \frac{d^2 \mathbf{r}_{c.m}}{dt^2} dm + 2 \int_m \boldsymbol{\rho} \times \left(\boldsymbol{\omega}_T \times \frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t} \right) dm + \int_m \boldsymbol{\rho} \times \frac{\delta^2 \boldsymbol{\rho}}{\delta t^2} dm + \int_m \boldsymbol{\rho} \times \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}_T}{dt} \times \boldsymbol{\rho} \right) dm + \int_m \boldsymbol{\rho} \times [\boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega}_T \times \boldsymbol{\rho})] dm$$

由于质心的定义， $\int_m \boldsymbol{\rho} dm = 0$ 且 $\frac{d^2 \mathbf{r}_{c.m}}{dt^2}$ 与质量无关，所以 $\int_m \boldsymbol{\rho} \times \frac{d^2 \mathbf{r}_{c.m}}{dt^2} dm = 0$ ，即化简为

$$\mathbf{M}_{c.m} = 2 \int_m \boldsymbol{\rho} \times \left(\boldsymbol{\omega}_T \times \frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t} \right) dm + \int_m \boldsymbol{\rho} \times \frac{\delta^2 \boldsymbol{\rho}}{\delta t^2} dm + \int_m \boldsymbol{\rho} \times \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}_T}{dt} \times \boldsymbol{\rho} \right) dm + \int_m \boldsymbol{\rho} \times [\boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega}_T \times \boldsymbol{\rho})] dm \quad (2.48)$$

记

$$\begin{aligned} \mathbf{M}'_k &= -2 \int_m \boldsymbol{\rho} \times \left(\boldsymbol{\omega}_T \times \frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t} \right) dm \\ \mathbf{M}'_{rel} &= - \int_m \boldsymbol{\rho} \times \frac{\delta^2 \boldsymbol{\rho}}{\delta t^2} dm \end{aligned}$$

则(2.48)可以写为

$$\int_m \boldsymbol{\rho} \times \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}_T}{dt} \times \boldsymbol{\rho} \right) dm + \int_m \boldsymbol{\rho} \times [\boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega}_T \times \boldsymbol{\rho})] dm = \mathbf{M}_{c.m} + \mathbf{M}'_k + \mathbf{M}'_{rel} \quad (2.49)$$

公式(2.49)左端第二项可以处理为

$$\int_m \boldsymbol{\rho} \times [\boldsymbol{\omega}_T \times (\boldsymbol{\omega}_T \times \boldsymbol{\rho})] dm = \boldsymbol{\omega}_T \times \int_m \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega}_T \times \boldsymbol{\rho}) dm \stackrel{\Delta}{=} \boldsymbol{\omega}_T \times \mathbf{H}_{c.m} \quad (2.50)$$

其中 $\mathbf{H}_{c.m}$ 为将系统视为刚体后, 刚体对质心的角动量。

建立与物体固连的坐标系 $o_1 - xyz$, 有

$$\boldsymbol{\omega}_T = \begin{bmatrix} \omega_{Tx} & \omega_{Ty} & \omega_{Tz} \end{bmatrix}^T \quad \boldsymbol{\rho} = \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix}^T$$

则角动量为

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{c.m} &= \int_m [\boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega}_T \times \boldsymbol{\rho})] dm = \int_m [(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\omega}_T - (\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\omega}_T)\boldsymbol{\rho}] dm \\ &= \int_m [(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho})\boldsymbol{\omega}_T - (\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\rho}^T)\boldsymbol{\omega}_T] dm \\ &= \int_m \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & z^2 + x^2 & -yz \\ -xz & -zy & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \omega_{Tx} \\ \omega_{Ty} \\ \omega_{Tz} \end{bmatrix} dm \\ &= \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}_T \end{aligned}$$

其中, \mathbf{I} 为惯性张量

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

定义转动惯量 I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} 和惯量积

$$\begin{cases} I_{xx} = \int_m (y^2 + z^2) dm \\ I_{yy} = \int_m (x^2 + z^2) dm \\ I_{zz} = \int_m (y^2 + x^2) dm \\ I_{xy} = I_{yx} = \int_m xy dm \\ I_{xz} = I_{zx} = \int_m xz dm \\ I_{xy} = I_{yx} = \int_m yz dm \end{cases} \quad (2.52)$$

则

$$\mathbf{H}_{c.m} = \int_m \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega}_T \times \boldsymbol{\rho}) dm = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}_T \quad (2.53)$$

同理可以对方程(2.49)左边第一项处理得到

$$\int_m \rho \times \left(\frac{d\omega_T}{dt} \times \rho \right) = \int_m \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & z^2 + x^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d\omega_{Tx}}{dt} \\ \frac{d\omega_{Ty}}{dt} \\ \frac{d\omega_{Tz}}{dt} \end{bmatrix} dm = I \cdot \frac{d\omega_T}{dt} \quad (2.54)$$

则最终的转动方程为

定理 2.7 任意变质量物体的绕质心运动方程

$$I \cdot \frac{d\omega_T}{dt} + \omega_T \times (I \cdot \omega_T) = M_{c.m} + M'_k + M'_{rel} \quad (2.55)$$

其中,

附加哥氏力矩 $M'_k = -2 \int_m \rho \times \left(\omega_T \times \frac{\delta \rho}{\delta t} \right) dm$

附加相对力矩 $F'_{rel} = - \int_m \rho \times \frac{\delta^2 \rho}{\delta t^2} dm$

惯量张量 $I = \int_m \begin{bmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & z^2 + x^2 & -yz \\ -zx & -zy & x^2 + y^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{xy} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{xz} & -I_{yz} & I_{zz} \end{bmatrix}$

3. 钢化原理

定理 2.8 钢化原理

一般情况下, 任意变质量系统的运动方程, 可用一个刚体的运动方程表示。这个刚体的质量等于系统瞬时质量, 其受力除真实的外力与外力矩外, 还要加上两个附加力和两个附加力矩。

第 3 章 远程火箭飞行的力学环境

3.1 附加力、附加力矩及火箭发动机特性

3.1.1 附加力和附加力矩

定理 3.1 雷诺迁移定理

连续运动的流体场中同一部分的流体质点上，标量或矢量点函数的体积分的全导数和该点函数局部导数的体积分之间有如下的关系：

$$\frac{d}{dt} \int_V A dV = \int_V \frac{\partial A}{\partial t} dV + \int_S A (\mathbf{V} \cdot \mathbf{n}) dS \quad (3.1)$$

其中，

- A 标量场或矢量场
- V 所研究部分流体的体积
- S 所研究部分流体的表面积
- \mathbf{V} 表面 S 上流体质点的运动速度矢量
- \mathbf{n} 表面 S 外法向上的单位矢量

设火箭为一轴对称体，定义新物理量如下

- S_e 发动机喷管出口截面积
- o_1 火箭的质心
- V_{rc} 燃料燃烧过程中 t 时刻质心 o_1 相对于箭体的运动速度
- V_{rb} 燃料燃烧过程中 t 时刻某一质点相对于箭体的运动速度

则质点相对于质心的速度为

$$\frac{\delta \mathbf{p}}{\delta t} = \mathbf{V}_{rb} - \mathbf{V}_{rc} \quad (3.2)$$

令 $A = \rho_m \mathbf{H}$ ，则代入雷诺迁移定理(3.1)可得

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho_m \mathbf{H} dV = \int_V \frac{\partial \rho_m \mathbf{H}}{\partial t} dV + \int_S \rho_m \mathbf{H} (\mathbf{V}_{rb} \cdot \mathbf{n}) dS$$

由于 $dV = \frac{dm}{\rho_m}$ ，则可以得到

$$\int_m \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} dm = \frac{\partial}{\partial t} \int_m \mathbf{H} dm + \int_{S_e} \mathbf{H} (\rho_m \mathbf{V}_{rb} \cdot \mathbf{n}) dS_e \quad (3.3)$$

其中, ρ_m 为流体质量密度, \mathbf{n} 为喷管截面 S_e 外法向矢量, \mathbf{H} 为任意的矢量点函数。

利用这个式子, 可以得到作用于火箭上的附加力和附加力矩。

1. 附加相对力

由附加相对力的定义,

$$\mathbf{F}'_{rel} = - \int_m \frac{\delta^2 \rho}{\delta t^2} dm$$

在雷诺传输定理中令 $\mathbf{H} = \frac{\delta \rho}{\delta t}$, 可以得到

$$\mathbf{F}'_{rel} = - \frac{\delta}{\delta t} \int_m \frac{\delta \rho}{\delta t} dm - \int_{S_e} \frac{\delta \rho}{\delta t} (\rho_m V_{rb} \cdot \mathbf{n}) dS_e \quad (3.4)$$

由 $\frac{\delta \rho}{\delta t} = V_{rb} - V_{rc}$ 对公式(3.4)右端第二项处理得到

$$\int_{S_e} \frac{\delta \rho}{\delta t} (\rho_m V_{rb} \cdot \mathbf{n}) dm = \int_{S_e} (V_{rb} - V_{rc}) (\rho_m V_{rb} \cdot \mathbf{n}) dS_e$$

而质心速度 V_{rc} 与面积无关, 且假设面 S_e 上的质点的速度相同, 定义 $V_{rb} = \mu_e$, 那么

$$\int_{S_e} \frac{\delta \rho}{\delta t} (\rho_m V_{rb} \cdot \mathbf{n}) dm = \int_{S_e} (\rho_m V_{rb} \cdot \mathbf{n}) dS_e (\mu_e - V_{rc})$$

而

$$\int_{S_e} (\rho_m V_{rb} \cdot \mathbf{n}) dS_e = \dot{m}$$

其中, \dot{m} 为质量秒耗量, 则最终简化为

$$\int_{S_e} \frac{\delta \rho}{\delta t} (\rho_m V_{rb} \cdot \mathbf{n}) dm = \dot{m} \mu_e - \dot{m} V_{rb} \quad (3.5)$$

若截面上每个点的速度不相等, 可以重新定义 μ_e 为

$$\mu_e = \frac{1}{\dot{m}} \int_{S_e} V_{rb} (\rho_m V_{rb} \cdot \mathbf{n}) dS_e \quad (3.6)$$

对于公式(3.4)右端第一项, 在雷诺运输方程中令 $\mathbf{H} = \rho$, 可以得到

$$\int_m \frac{\delta \rho}{\delta t} dm = \frac{\delta}{\delta t} \int_m \rho dm + \int_{S_e} \rho (\rho_m V_{rb} \cdot \mathbf{n}) dS_e = \int_{S_e} \rho (\rho_m V_{rb} \cdot \mathbf{n}) dS_e$$

喷口截面上任意一点矢量 ρ 为火箭质心 o_1 到截面中心矢量 ρ_e 与截面中心到该点到矢量 ν 之和, 如图所示。即

$$\rho = \rho_e + \nu \quad (3.7)$$

如果喷口处质点速度相同, 且喷口对称, 则

$$\int_{S_e} \nu (\rho_m V_{rb} \cdot \mathbf{n}) dS_e$$

则公式(3.4)右端第一项最终简化为

$$\int_m \frac{\delta \rho}{\delta t} dm = \int_{S_e} \rho_e (\rho_m V_{rb} \cdot \mathbf{n}) dS_e = \dot{m} \rho_e \quad (3.8)$$

若截面上每个点的速度不相等, 可以重新定义 ρ_e 为 (平均中心)

$$\rho_e = \frac{1}{\dot{m}} \int_{S_e} \rho (\rho_m V_{rb} \cdot \mathbf{n}) dS_e \quad (3.9)$$

所以可以得到

定理 3.2 附加相对力

$$\mathbf{F}'_{rel} = -\dot{m}\boldsymbol{\rho}_e - \dot{m}\dot{\boldsymbol{\rho}}_e - \dot{m}\boldsymbol{\mu}_e + \dot{m}\mathbf{V}_{rc} \quad (3.10)$$

考虑到火箭质点流动的非定常性很小，且质心变化速度 \mathbf{V}_{rc} 及喷口中心矢径 $\boldsymbol{\rho}_e$ 的变化很小，因此有附加相对力为：

$$\mathbf{F}'_{rel} = -\dot{m}\boldsymbol{\mu}_e \quad (3.11)$$

其中，

\dot{m} 质量秒耗量

$\boldsymbol{\mu}_e$ 喷口截面平均速度

2. 附加哥氏力

由第12页的公式(2.46)可以得到附加哥氏力的表达式为

$$\mathbf{F}'_k = -2\boldsymbol{\omega}_T \times \int_m \frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t} dm$$

将 $\int_m \frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t} dm = \dot{m}\boldsymbol{\rho}_e$ 代入可以得到

定理 3.3 附加哥氏力

$$\mathbf{F}'_k = -2\dot{m}\boldsymbol{\omega}_T \times \boldsymbol{\rho}_e \quad (3.12)$$

3. 附加哥氏力矩

由第14页的公式(2.55)可以得到附加哥氏力矩的表达式为

$$\mathbf{M}'_k = -2 \int_m \boldsymbol{\rho} \times \left(\boldsymbol{\omega}_T \times \frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t} \right) dm \quad (3.13)$$

由复合求导法则及向量叉乘的运算律，可以得到

$$\begin{cases} \frac{\delta}{\delta t} [\boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega}_T \times \boldsymbol{\rho})] = \frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t} \times (\boldsymbol{\omega}_T \times \boldsymbol{\rho}) + \boldsymbol{\rho} \times \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}_T}{dt} \times \boldsymbol{\rho} \right) + \boldsymbol{\rho} \times \left(\boldsymbol{\omega}_T \times \frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t} \right) \\ \frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t} \times (\boldsymbol{\omega}_T \times \boldsymbol{\rho}) = \boldsymbol{\omega}_T \times \left(\frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t} \times \boldsymbol{\rho} \right) + \boldsymbol{\rho} \times \left(\boldsymbol{\omega}_T \times \frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t} \right) \end{cases}$$

相加可以得到

$$2\boldsymbol{\rho} \times \left(\boldsymbol{\omega}_T \times \frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t} \right) = \frac{\delta}{\delta t} [\boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega}_T \times \boldsymbol{\rho})] - \boldsymbol{\rho} \times \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}_T}{dt} \times \boldsymbol{\rho} \right) + \boldsymbol{\omega}_T \times \left(\frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t} \times \boldsymbol{\rho} \right) \quad (3.14)$$

代入附加哥氏力矩的定义式，可以得到

$$\mathbf{M}'_k = - \int_m \frac{\delta}{\delta t} [\boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega}_T \times \boldsymbol{\rho})] dm + \int_m \boldsymbol{\rho} \times \left(\frac{d\boldsymbol{\omega}_T}{dt} \times \boldsymbol{\rho} \right) dm - \int_m \boldsymbol{\omega}_T \times \left(\frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t} \times \boldsymbol{\rho} \right) dm \quad (3.15)$$

对于公式(3.15)右端第一项，利用雷诺迁移定理，令 $\mathbf{H} = \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega}_T \times \boldsymbol{\rho})$ 可以得到

$$\int_m \frac{\delta}{\delta t} [\boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega}_T \times \boldsymbol{\rho})] dm = \frac{\delta}{\delta t} \int_m \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega}_T \times \boldsymbol{\rho}) dm + \int_{S_e} [\boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega}_T \times \boldsymbol{\rho})] (\rho_m \mathbf{V}_{rb} \cdot \mathbf{n}) dS_e \quad (3.16)$$

又由第13页的公式(2.53)，可以得到

$$\int_m \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega}_T \times \boldsymbol{\rho}) dm = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\omega}_T \Rightarrow \frac{\delta}{\delta t} \int_m \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega}_T \times \boldsymbol{\rho}) dm = \frac{\delta \mathbf{I}}{\delta t} \cdot \boldsymbol{\omega}_T + \mathbf{I} \cdot \frac{d\boldsymbol{\omega}_T}{dt} \quad (3.17)$$

所以

$$\int_m \frac{\delta}{\delta t} [\rho \times (\omega_T \times \rho)] dm = \frac{\delta I}{\delta t} \cdot \omega_T + I \cdot \frac{d\omega_T}{dt} + \int_{S_e} [\rho \times (\omega_T \times \rho)] (\rho_m V_{rb} \cdot n) dS_e \quad (3.18)$$

由第14页的公式(2.54), 可以得到

$$\int_m \rho \times \left(\frac{d\omega_T}{dt} \times \rho \right) = I \cdot \frac{d\omega_T}{dt} \quad (3.19)$$

代入(3.18), 可得

$$\int_m \rho \times \left(\frac{d\omega_T}{dt} \times \rho \right) - \int_m \frac{\delta}{\delta t} [\rho \times (\omega_T \times \rho)] dm = -\frac{\delta I}{\delta t} \cdot \omega_T - \int_{S_e} [\rho \times (\omega_T \times \rho)] (\rho_m V_{rb} \cdot n) dS_e \quad (3.20)$$

代入附加哥氏力矩的定义式(3.15), 得到

$$M'_k = -\frac{\delta I}{\delta t} \cdot \omega_T - \int_{S_e} [\rho \times (\omega_T \times \rho)] (\rho_m V_{rb} \cdot n) dS_e - \int_m \omega_T \times \left(\frac{\delta \rho}{\delta t} \times \rho \right) dm \quad (3.21)$$

利用 $\rho = \rho_e + v$, 且 S_e 为对称面, 过 S_e 的各个质点的速度 V_{rb} 相同, 则进一步化简得到

定理 3.4 附加哥氏力矩

$$M'_k = -\frac{\delta I}{\delta t} \cdot \omega_T - \dot{m} \rho_e \times (\omega_T \times \rho_e) - \int_{S_e} [v \times (\omega_T \times v)] (\rho_m V_{rb} \cdot n) dS_e - \int_m \omega_T \times \left(\frac{\delta \rho}{\delta t} \times \rho \right) dm \quad (3.22)$$

考虑到火箭喷嘴截面尺寸比火箭的纵向尺寸要小得多, 因此忽略掉 S_e 的积分项。而最后一个积分项表示火箭内部由质量对质心相对运动所造成的角动量。由于火箭中液体介质的相对速度很小, 燃烧产物的气体质量也很小, 且可将燃烧室的平均气流近似看成与纵轴平行。因此这个积分项也可以忽略不计。最后化简得到的附加哥氏力矩为

$$M'_k = -\frac{\delta I}{\delta t} \cdot \omega_T - \dot{m} \rho_e \times (\omega_T \times \rho_e) \quad (3.23)$$

其中, 第二项为喷出气流造成的力矩, 起到阻尼作用, 称为**喷气阻尼力矩**。第一项为转动惯量变化引起的力矩, 由于转动惯量是减小的, 因此此项会减小阻尼, 其量值约为喷气阻尼力矩的 30%。

4. 附加相对力矩

由第14页的公式(2.55), 可以得到附加相对力矩的定义式

$$M'_{rel} = - \int_m \rho \times \frac{\delta^2 \rho}{\delta t^2} dm \quad (3.24)$$

可改写为

$$M'_{rel} = - \int_m \frac{\delta}{\delta t} \left(\rho \times \frac{\delta \rho}{\delta t} \right) \quad (3.25)$$

由雷诺迁移定理, 令 $H = \rho \times \frac{\delta \rho}{\delta t}$, 则

$$M'_{rel} = -\frac{\delta}{\delta t} \int_m \rho \times \frac{\delta \rho}{\delta t} dm - \int_{S_e} \rho \times \frac{\delta \rho}{\delta t} (\rho_m V_{rb} \cdot n) dS_e \quad (3.26)$$

由第15页的公式(3.2)及第16页的公式(3.8)可以得到

$$\begin{cases} \frac{\delta \rho}{\delta t} = V_{rb} - V_{rc} \\ \int_m \frac{\delta \rho}{\delta t} dm = \dot{m} \rho_e \end{cases}$$

代入得

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}'_{rel} &= -\frac{\delta}{\delta t} \int_m \boldsymbol{\rho} \times \frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t} dm - \int_{S_e} \boldsymbol{\rho} \times (\mathbf{V}_{rb} - \mathbf{V}_{rc})(\rho_m \mathbf{V}_{rb} \cdot \mathbf{n}) dS_e \\
 &= -\frac{\delta}{\delta t} \int_m \boldsymbol{\rho} \times \frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t} dm - \int_{S_e} \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{V}_{rb}(\rho_m \mathbf{V}_{rb} \cdot \mathbf{n}) dS_e + \int_{S_e} \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{V}_{rc}(\rho_m \mathbf{V}_{rb} \cdot \mathbf{n}) dS_e \\
 &= -\frac{\delta}{\delta t} \int_m \boldsymbol{\rho} \times \frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t} dm - \int_{S_e} \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{V}_{rb}(\rho_m \mathbf{V}_{rb} \cdot \mathbf{n}) dS_e + \int_{S_e} \boldsymbol{\rho}_e \times \mathbf{V}_{rc}(\rho_m \mathbf{V}_{rb} \cdot \mathbf{n}) dS_e \\
 &= -\frac{\delta}{\delta t} \int_m \boldsymbol{\rho} \times \frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t} dm - \int_{S_e} \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{V}_{rb}(\rho_m \mathbf{V}_{rb} \cdot \mathbf{n}) dS_e + \int_{S_e} (\rho_m \mathbf{V}_{rb} \cdot \mathbf{n}) dS_e \cdot \boldsymbol{\rho}_e \times \mathbf{V}_{rc} \\
 &= -\frac{\delta}{\delta t} \int_m \boldsymbol{\rho} \times \frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t} dm - \int_{S_e} \boldsymbol{\rho} \times \mathbf{V}_{rb}(\rho_m \mathbf{V}_{rb} \cdot \mathbf{n}) dS_e + \dot{m} \boldsymbol{\rho}_e \times \mathbf{V}_{rc}
 \end{aligned}$$

截面 S_e 上的速度可以分解为平均排气速度矢量 $\boldsymbol{\mu}_e$ 与截面上的速度矢量 \mathbf{V}_η ，即

$$\mathbf{V}_{rb} = \boldsymbol{\mu}_e + \mathbf{V}_\eta \quad (3.27)$$

由于 \mathbf{V}_η 在截面 S_e 上具有对称性，则有

$$\int_{S_e} \mathbf{V}_\eta (\rho_m \mathbf{V}_{rb} \cdot \mathbf{n}) dS_e = 0 \quad (3.28)$$

代入得

$$\begin{aligned}
 \mathbf{M}'_{rel} &= -\frac{\delta}{\delta t} \int_m \boldsymbol{\rho} \times \frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t} dm - \int_{S_e} (\boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}) \times (\boldsymbol{\mu}_e + \mathbf{V}_\eta)(\rho_m \mathbf{V}_{rb} \cdot \mathbf{n}) dS_e + \dot{m} \boldsymbol{\rho}_e \times \mathbf{V}_{rc} \\
 &= -\frac{\delta}{\delta t} \int_m \boldsymbol{\rho} \times \frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t} dm - \int_{S_e} (\boldsymbol{\rho}_e \times \boldsymbol{\mu}_e + \mathbf{v} \times \mathbf{V}_\eta)(\rho_m \mathbf{V}_{rb} \cdot \mathbf{n}) dS_e + \dot{m} \boldsymbol{\rho}_e \times \mathbf{V}_{rc} \\
 &= -\frac{\delta}{\delta t} \int_m \boldsymbol{\rho} \times \frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t} dm - \int_{S_e} (\mathbf{v} \times \mathbf{V}_\eta)(\rho_m \mathbf{V}_{rb} \cdot \mathbf{n}) dS_e - \int_{S_e} (\boldsymbol{\rho}_e \times \boldsymbol{\mu}_e)(\rho_m \mathbf{V}_{rb} \cdot \mathbf{n}) dS_e + \dot{m} \boldsymbol{\rho}_e \times \mathbf{V}_{rc} \\
 &= -\frac{\delta}{\delta t} \int_m \boldsymbol{\rho} \times \frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t} dm - \int_{S_e} (\mathbf{v} \times \mathbf{V}_\eta)(\rho_m \mathbf{V}_{rb} \cdot \mathbf{n}) dS_e - \dot{m} \boldsymbol{\rho}_e \times \boldsymbol{\mu}_e + \dot{m} \boldsymbol{\rho}_e \times \mathbf{V}_{rc}
 \end{aligned}$$

最终得到

定理 3.5 附加相对力矩

$$\mathbf{M}'_{rel} = -\frac{\delta}{\delta t} \int_m \boldsymbol{\rho} \times \frac{\delta \boldsymbol{\rho}}{\delta t} dm - \int_{S_e} (\mathbf{v} \times \mathbf{V}_\eta)(\rho_m \mathbf{V}_{rb} \cdot \mathbf{n}) dS_e - \dot{m} \boldsymbol{\rho}_e \times (\boldsymbol{\mu}_e - \mathbf{V}_{rc}) \quad (3.29)$$

考虑到侧向量相对纵向量为小量，并略去含有 S_e 的体积分项，简化后有：

$$\mathbf{M}'_{rel} = -\dot{m} \boldsymbol{\rho}_e \times \boldsymbol{\mu}_e \quad (3.30)$$

5. 小结

小结

$ \begin{cases} \mathbf{F}'_{rel} = -\dot{m} \boldsymbol{\mu}_e \\ \mathbf{F}'_k = -2\dot{m} \boldsymbol{\omega}_T \times \boldsymbol{\rho}_e \\ \mathbf{M}'_{rel} = -\dot{m} \boldsymbol{\rho}_e \times \boldsymbol{\mu}_e \\ \mathbf{M}'_k = -\frac{\delta I}{\delta t} \cdot \boldsymbol{\omega}_T - \dot{m} \boldsymbol{\rho}_e \times (\boldsymbol{\omega}_T \times \boldsymbol{\rho}_e) \end{cases} $	<p>附加相对力</p> <p>附加哥氏力</p> <p>附加相对力矩</p> <p>附加哥氏力矩</p>	\rightarrow	$ \begin{cases} \boldsymbol{\mu}_e, \dot{m} & \text{发动机设计确定参数} \\ \mathbf{I}, \boldsymbol{\rho}_e & \text{总体设计确定参数} \\ \boldsymbol{\omega}_T & \text{飞行状态参数} \end{cases} $	(3.31)
--	---	---------------	--	----------

3.1.2 发动机推力特性

【**推力产生机理**】 火箭发动机是将火箭自身携带的化学燃料（燃烧剂和氧化剂）在燃烧室内进行化学反应，反应过程中会产生**高温高压燃气**，由于燃料室非常小，燃气会被压缩这些被压缩的燃气通过喷管膨胀而加速，产生作用于火箭的**反作用力**。

【**推力实验方法**】 为了计算发动机产生的准确推力，均需将发动机装在试车台上进行热试车。热试车有两种方式：水平试车和垂直试车。大型火箭通常采用垂直试车，以防止点火延滞是注入燃烧室内的推进剂未燃烧而留在燃烧室内从而引发的爆炸。这里仅以水平安装试车来给出发动机的特征量。

对于变质量飞行器而言，存在由于质量损耗而产生的力，结合发动机的工作特点，可知发动机推力即为工质损耗而产生的相对力。除了相对力以外，由于大气压力的存在，作用在弹体上还存在一个静推力。

1. 相对力

$$\mathbf{F}'_{rel} = -\dot{m}\mathbf{u}_e \quad (3.32)$$

其中，

F_{rel} **相对力**
 \dot{m} 质量秒耗量
 \mathbf{u}_e 燃气速度

2. 静推力

$$P_{st} = \int_{S_e} p \, ds + \int_{S_b} p_H \, ds \quad (3.33)$$

其中，

P_{st} **静推力**：火箭表面大气静压力和喷管出口截面上燃气静压力所形成的轴向力之和
 S_e 喷管出口截面积
 S_b 箭体表面积（不含喷口）
 p_H 在高度 H 的大气压。方向：垂直于表面
 p 喷口截面燃气静压，可取平均值 p_e 。方向：与火箭对称轴重合

3. 总推力

综合考虑上面两个部分，考虑火箭外形具有对称性，可得发动机的总推力为

$$\mathbf{P} = -\dot{m}\mathbf{u}_e + S_e(p_e - p_H)\mathbf{x}_1^0 \quad (3.34)$$

其中， \mathbf{x}_1^0 为火箭纵轴方向的单位矢量。因为燃气速度方向与体轴正向方向相反，则有

$$P = \dot{m}u_e + S_e(p_e - p_H) \quad (3.35)$$

考虑到发动机在实际应用中满足：

- (1) 排气速度 u_e 在一定范围内可认为不变，或者变化不大；
- (2) 排气端面压力正比于消耗量，即 $\frac{P_e}{\dot{m}}$ 变化不大

因此，可以将总推力写成如下形式

$$P = \dot{m}u'_e - S_e p_H, \quad u'_e = u_e + S_e \frac{P_e}{\dot{m}} \quad (3.36)$$

其中， u'_e 称为**有效排气速度**。特别地，

(1) 真空条件下:

$$P = \dot{m}u'_e \quad (3.37)$$

(2) 地面试车条件下:

$$P_0 = \dot{m}_0 u'_e - S_e p_0 \Rightarrow u'_e = \frac{P_0 + S_e p_0}{\dot{m}_0} \quad (3.38)$$

由地面试车实验可以得到(3.38), 代入总推力表达式(3.36)可得

$$P = \frac{\dot{m}}{\dot{m}_0} (P_0 + S_e p_0) - S_e p_H \quad (3.39)$$

通常可以认为 $\dot{m} = \dot{m}_0$, 则

$$P = P_0 + S_e (p_0 - p_H) \quad (3.40)$$

4. 比推力

定义 3.1 比推力

比推力: 单位时间内发动机产生的冲量与消耗的推进剂重量之比。

$$P_{sp} = \frac{P \delta t}{\dot{m} g_0 \delta t} = \frac{P}{\dot{m} g_0} \Rightarrow P_{sp} = \frac{u'_e}{g_0} - \frac{S_e p_H}{\dot{m} g_0} \quad (3.41)$$

比推力的单位是 s。固体发动机比推力在 200 ~ 300 秒之间, 液体发动机在 250 ~ 460 秒之间, 而固液混合发动机处于两者之间。且真空比推力与地面比推力相比, 通常可增加 10 ~ 15%。

注: 比推力的单位如果是 m/s, 那么数值相应的乘以 g_0 可以得到。

5. 发动机推力曲线

由推力曲线变化特点可以将发动机分为点火段、稳态段和关机段。

- **点火段**: 开始燃烧, 推力急剧增加
- **稳态段**: 燃烧稳定, 推力达到额定值, 推力随高度增加而增加;
- **关机段**: 发动机关闭, 推力迅速下降, 存在后效冲量。后效冲量是随机变量, 变化范围约为均值的 15%, 直接影响到火箭精度, 对分离过程也有影响。

$$I = \int_{t_2}^{t_p=0} P(t) dt \quad (3.42)$$

- 二次关机: 预备关机——正式关机
- 修正飞行: 主机关机——游机关机

6. 推力的表示

发动机推力通常在体坐标系中表示, 若推力只作用于 x_1^0 正向, 则有

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} P \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{m}u_e + S_e(p_e - p_H) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

3.2 引力与重力

3.2.1 引力

1. 引力的概念

定义 3.2 场强与势函数

对于一个保守力场，场外一单位质点所收到该力场的作用力称为**场强**，记作 F ，它是矢量场。场强 F 与该质点在此力场中所具有的**势函数** U ，有

$$F = \text{grad } U \quad (3.44)$$

其中，势函数 U 为标量函数，又称为**引力位**。

设地球为一个均质圆球，则地球对球外距地心 r 对一单位质点对势函数为

$$U = \frac{fM}{r} \quad (3.45)$$

其中， f 为**万有引力常数**，记 $\mu = fM$ 称为**地球引力系数**。则距球心 r 处的单位质点的场强¹为

$$g = -\frac{fM}{r^2} r^0 \quad (3.46)$$

所以，地球对地球外质量为 m 的一点的引力为

$$F = mg \quad (3.47)$$

2. 实际地球引力位函数

实际地球为形状复杂的非均质的物体，所以为了得到实际地球势函数，采用单位质点的引力位

$$U = f \int_M \frac{dm}{r} \quad (3.48)$$

其中， r 为 dm 到空间一点的距离。而精确求引力位很困难，目前常采用球函数展开式：

$$U = \frac{fM}{r} \left[1 + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{a_e}{r} \right)^n (C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda) P_{nm}(\sin \phi) \right] \quad (3.49)$$

其中，

a_e 地球赤道平均半径

$P_{nm}(\sin \phi)$ 缔合勒让德函数

λ, ϕ 地心经度和地心纬度

C_{nm}, S_{nm} 地球谐函数

- $m = 0$ 带谐函数
- $n = m$ 扇斜函数
- $n \neq m$ 田谐函数

¹这里的场强可以理解为单位质点在地球引力场中所具有的引力加速度矢量。

3. 正常引力位

定理 3.6 正常引力位

两轴旋转椭球体且质量分布相对于对称轴均匀的模型，可以得到

$$U = \frac{fM}{r} \left[1 - \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n} \left(\frac{a_e}{r} \right)^{2n} P_{2n}(\sin \phi) \right] \quad (3.50)$$

在弹道设计和计算中，为了简化计算，近似取正常引力位函数到 J_2 项，即

$$U = \frac{fM}{r} \left[1 + \frac{J_2}{2} \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \phi) \right] \quad (3.51)$$

【说明】

- (1) 两轴旋转椭球体且质量分布对于地轴及赤道面对称性，工程上常用正常引力位。
- (2) 与实际引力位的差别称之为引力异常，若要进行高精度的弹道计算，则需要考虑引力异常。
- (3) 不特别说明，这门课程仅讨论正常引力位情况。

3.2.2 引力加速度

1. 引力加速度在 r, ϕ 上的分解

由正常引力位函数，可以得到在 r, ϕ 方向上的投影分量

$$\begin{cases} g_r = \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{fM}{r^2} \left[1 + \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \phi) \right] \\ g_\phi = \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \phi} = -\frac{fM}{r^2} \frac{3}{2} J_2 \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 \sin 2\phi \end{cases} \quad (3.52)$$

令 $J = \frac{3}{2} J_2$ ，则

$$\begin{cases} g_r = -\frac{fM}{r^2} \left[1 + J \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \phi) \right] \\ g_\phi = -\frac{fM}{r^2} J \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 \sin 2\phi \end{cases} \quad (3.53)$$

忽略 J 项后，可以得到

$$\begin{cases} g_r = -\frac{fM}{r^2} \\ g_\phi = 0 \end{cases} \quad (3.54)$$

因此，含 J 的项是考虑了地球扁率后，对作为均质圆球地球对引力加速度的修正。这是由于赤道部分隆起，赤道质量偏大，引起偏向赤道的引力分量。

2. 引力加速度在 r, ω_e 上的分解

为了计算方便，常常把引力加速度投影在矢量 r 和地球自转 ω_e 方向：

$$\mathbf{g}_\phi = g_{\phi r} \mathbf{r}^0 + g_{\phi \omega_e} \boldsymbol{\omega}^0 = -g_\phi \tan \phi \mathbf{r}^0 + \frac{g_\phi}{\cos \phi} \boldsymbol{\omega}_e^0 \quad (3.55)$$

将 g_ϕ 代入得

$$\mathbf{g}_\phi = 2 \frac{fM}{r^2} J \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 \sin^2 \phi \mathbf{r}^0 - 2 \frac{fM}{r^2} J \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 \sin \phi \boldsymbol{\omega}^0 \quad (3.56)$$

可以得到

$$\begin{cases} g_{r\phi r} = g_r + g_{\phi r} = -\frac{fM}{r^2} \left[1 + J \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 (1 - 5 \sin^2 \phi) \right] \\ g_{\omega_e} = g_{\phi \omega_e} = -2 \frac{fM}{r^2} \cdot J \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 \sin \phi \end{cases} \quad (3.57)$$

3. 引力与地心矢径夹角

由图几何特征, 可以得到引力加速度矢量 g 与该点的矢量 r 的夹角 μ_1 , 考虑到 μ_1 很小, 则

$$\tan \mu_1 = \frac{g_\phi}{g_r} = \frac{J \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 \sin 2\phi}{1 + J \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \phi)} \approx J \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 \sin 2\phi \approx \mu_1 \quad (3.58)$$

若地球为椭球, 则对于地球表面上的点, 考虑扁率 α_e 为小量, 则简化有:

$$\begin{aligned} \mu_{10} &= J(1 + \alpha_e \sin^2 \phi) \sin 2\phi \approx J \sin 2\phi \\ \mu_{10, \max} &= J = 1.62395 \times 10^{-3} \text{ rad} = 5.6' \end{aligned} \quad (3.59)$$

则总引力为

$$g = \frac{g_r}{\cos \mu_1} \approx g_r = -\frac{fM}{r^2} \left[1 + J \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \phi) \right] \quad (3.60)$$

当 $\phi = 35^\circ 15' 52''$ 时, $1 - 3 \sin^2 \phi = 0$, 此时

$$g = -\frac{fM}{r^2} \quad (3.61)$$

此时对应的地心矢径为 $r_0 = 6371.11 \text{ km}$, 通常称为球形引力场地球平均半径 R 。

3.2.3 重力的概念

若地球外一点 m 相对于地球静止, 该质点受地球的引力为 mg , 由于地球本身的自转, 则该质点还受到一个离心惯性力的作用。

定义 3.3 重力

重力: 质点受到的引力和因地球旋转而引起的离心惯性力之和。

$$m\mathbf{g} = m\mathbf{g} + m\mathbf{a}'_e \quad (3.62)$$

其中 $\mathbf{a}'_e = -\boldsymbol{\omega}_r \times (\boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{r})$ 称为离心加速度。

3.2.4 重力加速度

1. 重力加速度的分解

将离心惯性加速度

$$\mathbf{a}'_e = -\boldsymbol{\omega}_r \times (\boldsymbol{\omega}_r \times \mathbf{r}) \quad (3.63)$$

投影到 r, ϕ 方向, 则有

$$\begin{cases} a'_{er} = r\omega_e^2 \cos^2 \phi \\ a'_{e\phi} = -r\omega_e^2 \sin \phi \cos \phi = -\frac{r\omega_e^2}{2} \sin 2\phi \end{cases} \quad (3.64)$$

又由第23页的公式(3.53),

$$\begin{cases} g_r = -\frac{fM}{r^2} \left[1 + J \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \phi) \right] \\ g_\phi = -\frac{fM}{r^2} J \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 \sin 2\phi \end{cases}$$

则惯性力在 r, ϕ 上的投影为

$$\begin{cases} \mathcal{G}_r = g_r + a'_{er} = -\frac{fM}{r^2} \left[1 + J \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \phi) - q \left(\frac{r}{a_e} \right)^3 \cos^2 \phi \right] \\ \mathcal{G}_\phi = g_\phi + a'_{e\phi} = -\frac{fM}{r^2} \left[J \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 \sin 2\phi + \frac{q}{2} \left(\frac{r}{a_e} \right)^3 \sin 2\phi \right] \end{cases} \quad (3.65)$$

其中, $q = \frac{a_e \omega_e^2}{fM/a_e^2} = 3.4614 \times 10^{-3} = 1.0324 \alpha_e$ 为赤道上离心加速度与引力加速度之比, 其与 α_e 是同量级的参数。

2. 重力与地心矢径夹角

由图几何特征, 可以得到重力加速度矢量 \mathcal{g} 与该点的矢量 r 的夹角 μ , 考虑到 μ 很小, 则

$$\tan \mu \approx \mu = \frac{\mathcal{G}_\phi}{\mathcal{G}_r} \approx J \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 \sin 2\phi + \frac{q}{2} \left(\frac{r}{a_e} \right)^3 \sin 2\phi = \mu_1 + \mu_2 \quad (3.66)$$

当考虑地球为椭球模型时, 则椭球上任一点的重力垂线即为椭球面上该点的法线, 此法线与地轴交于 M , 其中 OM 称为卯酉半径, 记作 N , 对应地理纬度为 B_0 , 由椭圆方程

$$\frac{x^2}{a_e^2} + \frac{y^2}{b_e^2} = 1 \quad (3.67)$$

则过发射点 O 的椭圆法线的斜率为

$$\tan B_0 = -\frac{dx}{dy} = \frac{y}{x} \frac{a_e^2}{b_e^2} = \tan \phi_0 \frac{a_e^2}{b_e^2} \quad (3.68)$$

则已知 B_0, ϕ_0 的任意一个值可以求得另外一个值, 从而求得

$$\mu_0 = B_0 - \phi_0 \quad (3.69)$$

可以求得过发射点的法线与地轴交点 M 的长度 $OM = N$ (卯酉半径) 为

$$N = a_e (1 + a_e \sin^2 B_0) \quad (3.70)$$

所以, 在赤道上, $N = a_e$; 在非赤道面上任意点的卯酉半径均大于赤道半径, 最大的卯酉半径是两极点处的值, 为 $a_e (1 + a_e)$ 。

在准确到 μ 量级的时候, 可以取 $\cos \mu = 1$, 则空间任一点的重力加速度大小为

$$\mathcal{g} = \frac{\mathcal{G}_r}{\cos \mu} \approx \mathcal{G}_r = -\frac{fM}{r^2} \left[1 + J \left(\frac{a_e}{r} \right)^2 (1 - 3 \sin^2 \phi) - q \left(\frac{r}{a_e} \right)^3 \cos^2 \phi \right] \quad (3.71)$$

3.3 空气动力及气动力矩

3.3.1 空气动力

1. 气动力的表示

当火箭相对于大气运动的时候, 大气则会在导弹的表面形成作用力。火箭的空气动力是作用在其表面的分布力系, 如图3.1所示。

将火箭表面分成喷口截面积 S_e 及除 S_e 以外的弹体表面 S_b 两部分。记空气作用在火箭体表面上单位面积法向力和切向力 σ, τ , 则在 S_b 的每一个微小面积 dS 上作用有法向力 σdS 记切向力 τdS , 因而空气作用在 S_b 上合力为

$$\mathbf{R}_b = \int_{S_b} \sigma d\mathbf{S} + \int_{S_b} \tau d\mathbf{S} \quad (3.72)$$

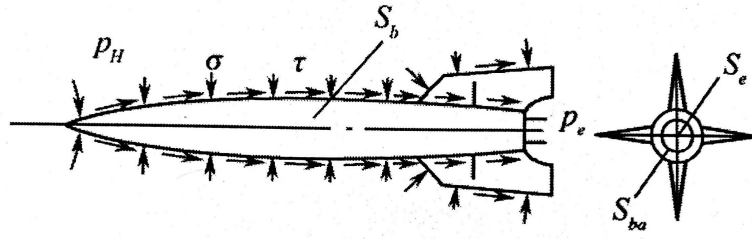


图 3.1: 火箭空气动力

同样, 当发动机不工作时, 空气作用于喷口截面 S_e 上的合力为

$$\mathbf{R}_e = \int_{S_e} \sigma \, dS + \int_{S_e} \tau \, dS \quad (3.73)$$

由于法向力 σ 可以写成未扰动空气的静压 p_H 与法向剩余压力 σ' 之和, 即

$$\sigma = p_H + \sigma' \quad (3.74)$$

故空气作用在火箭上的总的合力可写为

$$\mathbf{R} = \int_{S_b} p_H \, dS + \int_{S_e} p_H \, dS + \int_{S_b} \sigma' \, dS + \int_{S_e} \sigma' \, dS + \int_{S_b} \tau \, dS + \int_{S_e} \tau \, dS \quad (3.75)$$

其中前两项为作用在火箭上的空气静压力, 在发动机不工作时为 0, 最后一项为喷口截面上的切应力, 一般可忽略。即简化为

$$\mathbf{R} = \int_{S_b} \sigma' \, dS + \int_{S_e} \sigma' \, dS + \int_{S_b} \tau \, dS \quad (3.76)$$

即火箭底部面积 S_{ba} 与截面积之差为 S_r , 则

$$S_e = S_{ba} - S_r \quad (3.77)$$

则可以得到

定理 3.7 火箭空气动力

$$\mathbf{R} = \int_{S_b - S_r} \sigma' \, dS + \int_{S_b} \tau \, dS + \int_{S_{ba}} \sigma' \, dS \quad (3.78)$$

其中,

$\int_{S_{ba}} \sigma' \, dS$ 火箭底阻, 其合力作用线与火箭纵轴 x_1 重合, 记为 X_{1ba}

$\int_{S_b} \tau \, dS$ 摩擦阻力, 其合力作用线与 x_1 重合, 记为 X_{1f}

将 $\int_{S_b - S_r} \sigma' \, dS$ 分解为火箭箭体坐标轴的三个方向, 分别为压差阻力 X_{1b} 、法向力 Y_1 及横向力 Z_1

则火箭空气动力方程进一步可以写为

$$\mathbf{R} = X_{1ba} + X_{1f} + X_{1b} + Y_1 + Z_1 \quad (3.79)$$

记总的轴向力

$$X_1 = X_{1ba} + X_{1f} + X_{1b} \quad (3.80)$$

则

$$\mathbf{R} = X_1 + Y_1 + Z_1 \quad (3.81)$$

当发动机工作时，在计算发动机推力中，已经将大气静压力 $\int_{S_b} p_H dS$ 与发动机喷口截面上的燃气压力 $\int_{S_e} p dS$ 合成为推力静分量（见第20页的公式(3.33)），计入发动机推力之中。而此时火箭的底阻仅为底部圆环部分的面积 S_r 的法向剩余压力造成。所以，发动机工作与否，总气动力表达式相同。

2. 气动力的工程计算方法

火箭相对大气运动时，确定气动力是非常复杂的，很难直接通过理论准确确定，目前主要是用空气动力学理论进行计算结合空气动力实验校正的方法。

实际研制过程中，利用上面的方法，通常给出火箭空气动力计算所需的图表与曲线，利用这些曲线即可确定气动力与气动力矩。

3. 气动力在体系内的分解

实际应用中，气动力的计算采用如下公式：

$$\begin{cases} X_1 = C_{x1} \frac{1}{2} \rho v^2 S_M = C_{x1} q S_M \\ Y_1 = C_{y1} \frac{1}{2} \rho v^2 S_M = C_{y1} q S_M \\ Z_1 = C_{z1} \frac{1}{2} \rho v^2 S_M = C_{z1} q S_M \end{cases} \quad (3.82)$$

其中，

v	火箭相对于大气的速度	C_{x1}	轴向力系数
ρ	大气密度	C_{y1}	法向力系数
S_M	火箭最大横截面积，也称为特征面积	C_{z1}	横向力系数
q	速度头（动压头） $q = \frac{1}{2} \rho v^2$		

在研究火箭运动规律时，也常常在速度坐标系中讨论，所以空气动力也可以分解为

$$R = X + Y + Z \quad (3.83)$$

各个分量为

$$\begin{cases} X = C_x \frac{1}{2} \rho v^2 S_M = C_x q S_M \\ Y = C_y \frac{1}{2} \rho v^2 S_M = C_y q S_M \\ Z = C_z \frac{1}{2} \rho v^2 S_M = C_z q S_M \end{cases} \quad (3.84)$$

其中，

X	阻力	C_x	阻力系数
Y	升力	C_y	升力系数
Z	侧力	C_z	侧力系数

利用公式(3.82),(3.84)求得的 X, X_1 均为正值，而实际合力投影到相应坐标轴是负值，所以需要加上负号，根据速度坐标系与箭体坐标系之间的转换关系，可以得到

$$\begin{bmatrix} -X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = V_B \begin{bmatrix} -X_1 \\ Y_1 \\ Z_1 \end{bmatrix} \quad (3.85)$$

其中,

$$\mathbf{V}_B = \begin{bmatrix} \cos \beta \cos \alpha & -\cos \beta \sin \alpha & \sin \beta \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -\sin \beta \cos \alpha & \sin \beta \sin \alpha & \cos \beta \end{bmatrix} \quad (3.86)$$

【阻力和阻力系数】

由公式(3.85), 可以得到

$$X = X_1 \cos \beta \cos \alpha + Y_1 \cos \beta \sin \alpha - Z_1 \sin \alpha \quad (3.87)$$

第 4 章 自由飞行段弹道特性分析

4.1 自由飞行段弹道方程

4.1.1 自由飞行段假设

火箭经过动力飞行段在关机点具有一定的位置和速度后，转入无动力、无控制的自由飞行状态。通常作如下假设：

- (1) 载荷在自由段处于真空飞行状态，不受空气动力作用、不必考虑姿态，将火箭看成质点；
- (2) 认为载荷只受均质圆球 J 的引力作用，不考虑其他星体的引力影响。

4.1.2 轨道方程

圆形均值地球段引力为

$$\mathbf{F}_T = -\frac{\mu m}{r^3} \mathbf{r} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \quad (4.1)$$

引力始终指向 \mathbf{r} 反方向， \mathbf{r} 是由地球中心 O_s 至载荷质心的矢径，所以引力 \mathbf{F}_T 为一个有心矢量场。

用 \mathbf{v} 点乘公式(4.1)，可以得到

$$\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{\mu}{r^3} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{r}) \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} = -\frac{\mu}{r^3} \left(\frac{1}{2} \frac{dr^2}{dt} \right) \Rightarrow \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt} = -\frac{\mu}{r^2} \frac{dr}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\mu}{r} \right)$$

积分后得

定理 4.1 机械能守恒定律

$$\frac{1}{2} v^2 = \frac{\mu}{r} + E \Rightarrow E = \frac{1}{2} v^2 - \frac{\mu}{r} \quad (4.2)$$

进一步，用地心矢叉乘动力学方程(4.1)，有

$$\frac{d\mathbf{r}^2}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \Rightarrow \mathbf{r} \times \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt} \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) = 0$$

即得到

定理 4.2 动量矩守恒

$$\mathbf{r} \times \mathbf{v} = \mathbf{h} \quad (4.3)$$

由于火箭动量矩守恒，因此自由段运动为平面运动，由关机点参数 $\mathbf{r}_k, \mathbf{v}_k$ 决定。

动力学方程两边叉乘动量矩，则有

左式

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} \times \mathbf{h} = \frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{h} \right)$$

右式

$$\begin{aligned}
 -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \times \mathbf{h} &= -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{r} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \\
 &= -\frac{\mu}{r^3} [\mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{v}) - \mathbf{v} \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})] \\
 &= -\frac{\mu}{r^3} [r \dot{r} \mathbf{r} - r^2 \mathbf{v}] \\
 &= -\mu \left[\frac{\mathbf{r}}{r^2} \frac{dr}{dt} - \frac{1}{r} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right] \\
 &= \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right)
 \end{aligned}$$

即

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{h} \right) = \mu \frac{d}{dt} \left(\frac{\mathbf{r}}{r} \right) \quad (4.4)$$

积分可得

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{h} = \mu \left(\frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{e} \right) \quad (4.5)$$

为了获得标量方程, 可以点乘 \mathbf{r} , 有

$$\begin{cases} \mu \mathbf{r} \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{e} \right) = \mu [r + r e \cos \angle \mathbf{r}, \mathbf{e}] \\ \mathbf{r} \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{h} \right) = \mathbf{h} \cdot \left(\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right) = h^2 \end{cases}$$

即

定理 4.3 自由飞行段的轨道方程式

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{h} = \mu \left(\frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{e} \right) \quad (4.6)$$

$$r = \frac{h^2/\mu}{1 + e \cos \angle \mathbf{r}, \mathbf{e}} \triangleq \frac{P}{1 + e \cos \angle \mathbf{r}, \mathbf{e}} \quad (4.7)$$

4.2 弹道方程的分析

4.2.1 符号 e, P 的意义及其确定

轨道方程式对应为圆锥截线方程式, e 为偏心率, 决定圆锥截线形状, P 为半通径, 和 e 共同决定截线尺寸。建立关机点当地坐标系 $K - ijk$, 显然 k 与动量矩 \mathbf{h} 方向一致。

$$\frac{\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{h} = \mu \left(\frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{e} \right) \Rightarrow \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{h}}{\mu} = \frac{\mathbf{r}}{r} + \mathbf{e} \quad (4.8)$$

其中,

$$h = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = r v \cos \theta \quad (4.9)$$

其中 θ 为当地速度倾角, 则

$$\mathbf{v} \times \frac{\mathbf{h}}{\mu} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_k \sin \theta & v_k \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & r_k v_k \cos \theta / \mu \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} r_k v_k^2 \cos^2 \theta / \mu \\ -r_k v_k^2 \sin \theta \cos \theta / \mu \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

定义能量参数 (表示动能与势能之比) 为

$$v_k = \frac{v_k^2}{\mu/r_k} \quad (4.11)$$

进一步，可以计算得到

$$\mathbf{e} = \mathbf{v} \times \frac{\mathbf{h}}{\mu} - \frac{\mathbf{r}}{r} = \begin{bmatrix} v \cos^2 \Theta - 1 \\ -v \cos \Theta \cos \Theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

则

定理 4.4 e, P 的计算值

$$e = \sqrt{1 + v_k(v_k - 2) \cos^2 \Theta_k} \quad (4.13)$$

$$P = \frac{h^2}{\mu} = \frac{r_k^2 v_k^2 \cos^2 \Theta_k}{\mu} = r_k v_k \cos^2 \Theta_k \quad (4.14)$$

在 e, P 已知的情况下，轨道上任意一点的地心矢径大小 r 仅与夹角 $\langle \mathbf{r}, \mathbf{e} \rangle$ 有关，记

- $f = \langle \mathbf{r}, \mathbf{e} \rangle$ 定义由 \mathbf{e} 矢量顺飞行方向到 \mathbf{r} 矢量为正角，称为真近点角
- $\cos f = \frac{P - r}{re}$ 由关机点 \mathbf{r}_k 矢量反向转 f 角即可确定 \mathbf{e} 矢量方向

当 $f = 0$ 时，轨道地心矢径 r_p 最小，称点 p 为近地点，因此 \mathbf{e} 矢量与 \mathbf{r}_p 矢径方向一致。

则各个物理量可以表示为

1. 地心距（轨道方程）

$$r = \frac{P}{1 + e \cos f} \quad (4.15)$$

2. 径向速度

$$\begin{cases} v_r = \dot{r} = \frac{P}{(1 + e \cos f)^2} e \sin f \cdot \dot{f} \\ \dot{f} = \frac{h}{r^2} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\mu}{P}} (1 + e \cos f) \end{cases} \Rightarrow v_r = \sqrt{\frac{\mu}{P}} e \sin f \quad (4.16)$$

3. 周向速度

$$v_f = r \dot{f} = \sqrt{\frac{\mu}{P}} (1 + e \cos f) \quad (4.17)$$

4. 速度及其倾角

$$v = \sqrt{\frac{\mu}{P} (1 + 2e \cos f + e^2)} \quad (4.18)$$

$$\tan \Theta = \frac{v_r}{v_f} = \frac{e \sin f}{1 + e \cos f} \quad (4.19)$$

4.2.2 轨道根数

对于导弹而言，关机点参数用于确定被动段参数，从而获取落点参数。但对于运载火箭，其有效载荷为入轨的人造卫星，因此需要给出其轨道根数。

定义 4.1 轨道根数

- 升交点** 卫星从南向北穿越赤道点
春分点 2000 年 1 月 1.5 日的平春分点
长半轴 a 圆锥截线轨道大小参数
偏心率 e 圆锥截线轨道形状参数
轨道倾角 i 轨道面与赤道面的夹角
近地点角距 w 升交点与近地点夹角
升交点角距 Ω 升交点与春分点夹角
近地点时刻 t_p 飞越近地点的时刻

4.2.3 轨道形状与关机点参数

轨道所对应的圆锥截线形状由偏心率 e 决定。由第31页的公式(4.2)和第32页的公式(4.9), 注意到有

$$E = \frac{1}{2}v_k^2 - \frac{\mu}{r_k} \Rightarrow v_k = \frac{r_k v_k^2}{\mu} = 2 \left(1 + \frac{r_k E}{\mu} \right), \quad \cos^2 \Theta_k = \frac{h^2}{r_k^2 v_k^2} \quad (4.20)$$

则偏心率可改写为

$$e = \sqrt{1 + v_k(v_k - 2) \cos^2 \Theta_k} = \sqrt{1 + 2 \frac{h^2}{\mu^2} E} = \sqrt{1 + 2 \frac{P}{\mu} E} \quad (4.21)$$

1. $e = 0$ 时轨道为圆

轨道参数如下:

(1) 地心距

$$r = \frac{P}{1 + e \cos f} = P = r_k \quad (4.22)$$

(2) 速度倾角

$$\Theta = \Theta_k = 0 \quad (4.23)$$

(3) 偏心率

$$e = \sqrt{1 + v_k(v_k - 2) \cos^2 \Theta_k} = 0 \quad (4.24)$$

(4) 能量参数

$$v = v_k = 1 \quad (4.25)$$

(5) 速度

$$v = v_k = \sqrt{\frac{\mu}{r_k}} \triangleq v_1 (\text{第一宇宙速度}) \quad (4.26)$$

2. $e = 1$ 时轨道为抛物线

轨道参数如下:

(1) 能量参数

$$e = \sqrt{1 + v_k(v_k - 2) \cos^2 \Theta_k} = 1 \Rightarrow v_k = 2 \quad (4.27)$$

(2) 能量

$$e = \sqrt{1 + 2 \frac{P}{\mu} E} = 1 \Rightarrow E = 0 \quad (4.28)$$

(3) 速度

$$v = v_k = \sqrt{2\frac{\mu}{r_k}} \triangleq v_{\text{II}} (\text{第二宇宙速度}) \quad (4.29)$$

3. $e > 1$ 时轨道为双曲线

轨道参数如下:

(1) 能量参数

$$e = \sqrt{1 + v_k(v_k - 2) \cos^2 \Theta_k} > 1 \quad \Rightarrow \quad v_k > 2 \quad (4.30)$$

(2) 双曲线剩余速度

$$E > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{v_k^2}{2} - \frac{\mu}{r_k} = \frac{v_{\infty}^2}{2} \quad (4.31)$$

4. $e < 1$ 时轨道为椭圆

轨道参数如下:

(1) 能量参数

$$e = \sqrt{1 + v_k(v_k - 2) \cos^2 \Theta_k} \in (0, 1) \quad \Rightarrow \quad 1 < v_k < 2 \quad (4.32)$$

(2) 速度

$$E < 0 \quad \Rightarrow \quad v_k < v_{\text{II}} \quad (4.33)$$

质点动能不足以将质点移动到无穷远处, 地心矢径有限。

5. 总结

(1) **弹道** 运载火箭及其载荷的飞行轨迹, 不闭合。

(2) **轨道** 人造卫星等绕地球闭合飞行轨迹活动。

(3) **星际航行** 能量参数 $v_k \geq 2$ 。

(4) **绕地飞行** 能量参数 $v_k < 2$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{圆形轨道} & \Theta_k = 0 \quad v_k = v_{\text{I}} \\ \text{椭圆轨道} & \left\{ \begin{array}{l} \text{闭合轨道} \\ \text{不闭合轨道} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

6. 椭圆轨道的进一步分析

椭圆直角坐标方程为

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (4.34)$$

其中, a, b, c 分别为椭圆的长半轴、短半轴、半焦距。根据轨道方程的近地点和远地点, 可得

$$\left\{ \begin{array}{ll} f = 0 & r_p = r_{\min} = \frac{P}{1+e} \\ f = \pi & r_a = r_{\max} = \frac{P}{1-e} \end{array} \right. \quad (4.35)$$

可以求得椭圆轨道的参数

$$a = \frac{r_a + r_p}{2} = \frac{P}{1 - e^2} \quad (4.36)$$

$$c = \frac{r_a - r_p}{2} = \frac{eP}{1 - e^2} = ea \quad (4.37)$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{P}{\sqrt{1 - e^2}} \quad (4.38)$$

$$e = \frac{a}{c} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2} \quad (4.39)$$

$$P = \frac{b^2}{a} \quad (4.40)$$

且

$$e = \sqrt{1 + 2\frac{P}{\mu}E} = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}, \quad P = \frac{b^2}{a} \Rightarrow a = -\frac{\mu}{2E} = -\frac{\mu r_k}{r_k v_k^2 - 2\mu} \quad (4.41)$$

则

定理 4.5 活力公式

椭圆的长半轴只与主动段关机点的机械能 E 有关, 且 $E < 0$ 。 E 越大, a 也越大, 同时有

$$v^2 = \mu \left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \quad (4.42)$$

7. 人造卫星条件

根据轨道形状与关机点参数的关系可知, 在基本假设条件下, 满足以下条件可使轨道不与地球相交:

$$\begin{cases} \text{圆形轨道} & \theta_k = 0, v_k = 1 \\ \text{椭圆轨道} & 1 < v_k < 2, r_{\min} > R_e \end{cases} \quad (4.43)$$

但考虑到地球外的大气层, 即使 100km 处大气密度十分稀薄, 但卫星速度很高, 大气会显著地阻碍卫星运动, 使其速度降低, 从而使轨道近地点高度下降, 最终卫星失去功能。因此必须使卫星运行在离地面的一定高度上, 称此高度为**生存高度**, 记为 h_L , 该高度与卫星轨道停留时间相关。所以有

$$r_p \geq r_L = R_e + h_L \quad (4.44)$$

那么, 各个参数满足以下关系:

(1) 地心距

$$r_k \geq r_p \geq r_L$$

(2) 速度倾角 (由第33页的公式(4.13)及第33页的公式(4.14))

$$r_p = \frac{P}{1 + e} \geq r_L \Rightarrow \cos \theta_k \geq \frac{r_L}{r_k} \sqrt{1 + \frac{2\mu}{v_k^2} \left(\frac{1}{r_L} - \frac{1}{r_k} \right)} \Rightarrow \cos \theta_k \geq \frac{r_L}{r_k} \sqrt{1 + \frac{2}{v_k} \left(\frac{r_k}{r_L} - 1 \right)}$$

(3) 速度

$$\frac{r_L}{r_k} \sqrt{1 + \frac{2\mu}{v_k^2} \left(\frac{1}{r_L} - \frac{1}{r_k} \right)} \leq \cos \theta_k \leq 1 \Rightarrow v_k^2 \geq \frac{2\mu r_L}{r_k(r_k + r_L)} \Rightarrow v_k \geq \frac{2}{1 + r_k/r_L}$$

因此只有关机点参数满足上述 (1) 和 (2) 或 (3) 项条件, 才能使其载荷称为人造卫星。

4.3 射程与主动段终点参数的关系

需要解决的问题：

- 已知关机点的状态参数，计算导弹的射程。
- 已知导弹的射程，反求导弹的关机条件。

4.3.1 被动段射程的计算

定义 4.2 导弹射程

考虑地球为均质圆球，自由段弹道处于关机点平面内，弹道平面与地球表面的截痕为大圆弧，则有射程

$$L_{kc} = L_{ke} + L_{ec} \quad (4.45)$$

$$L_{ke} = R\beta_e \quad (4.46)$$

由上式则射程可用相应的地心角描述，称为角射程。导弹在再入段受到气动力作用，其弹道不是椭圆的一部分，但其射程所占比例很小，可近似看成椭圆弹道的延续，则整个被动段弹道用椭圆来描述。

$$L_{kc} \approx R\beta_c \quad \beta_c = \beta_e + \beta_{ec} \quad (4.47)$$

若能找到射程角与关机点状态关系即找到了射程与关机点状态的关系。

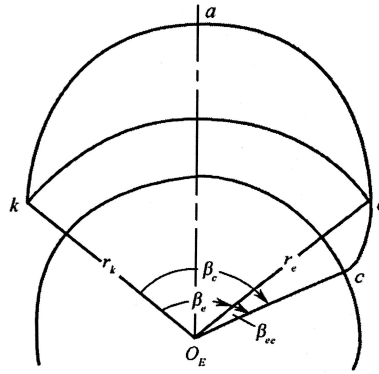


图 4.1: 自由段、被动段的射程角

如图 4.1 所示，已知 K, C 是椭圆弹道上的两点，他们的矢径与近地点极轴之间的夹角（真近点角）记为 f_k, f_c ，结合椭圆方程的轨道表达式，可以得到

$$\beta_c = f_c - f_k, \quad \cos f = \frac{P - r}{er} \quad (4.48)$$

当主动段终点参数给定，那么 f 仅仅是 r 的函数，即

$$\begin{cases} \cos f_k = \frac{P - r_k}{er_k} \\ \cos f_c = \frac{P - r_c}{er_c} \approx \frac{P - R}{eR} \end{cases} \quad (4.49)$$

考虑到椭圆弹道的对称性, 有: $\angle KO_E a = \angle aO_E e = \frac{\beta_e}{2}$, 则

$$\begin{cases} \cos f_k = \cos\left(\pi - \frac{\beta_e}{2}\right) = \frac{P - r_k}{er_k} \\ \cos f_c = \cos(f_k + \beta_c) = \cos\left(\pi + \beta_c - \frac{\beta_e}{2}\right) = -\cos\left(\beta_c - \frac{\beta_e}{2}\right) = \frac{P - R}{eR} \end{cases} \quad (4.50)$$

化简, 得

$$\cos \frac{\beta_e}{2} = \frac{r_k - P}{er_k} \Rightarrow \sin \frac{\beta_e}{2} = \frac{1}{e} \sqrt{e^2 - \left(1 - \frac{P}{r_k}\right)^2}$$

将 e, P 的表达式代入, 得

$$\begin{cases} e = \sqrt{1 + v_k(v_k - 2) \cos^2 \Theta_k} \\ P = \frac{r_k^2 v_k^2 \cos^2 \Theta_k}{\mu} = r_k v_k \cos^2 \Theta_k \end{cases} \Rightarrow \sin \frac{\beta_e}{2} = \frac{1}{e} \sqrt{e^2 - \left(1 - \frac{P}{r_k}\right)^2} = \frac{P}{er_k} \tan \Theta_k \quad (4.51)$$

将 β_e 的表达式代入

$$\begin{cases} \cos \frac{\beta_e}{2} = \frac{r_k - P}{er_k} \\ \sin \frac{\beta_e}{2} = \frac{P}{er_k} \tan \Theta_k \end{cases} \xrightarrow{\text{代入}} \cos\left(\beta_c - \frac{\beta_e}{2}\right) = \cos \beta_c \cos \frac{\beta_e}{2} + \sin \beta_c \sin \frac{\beta_e}{2} = \frac{R - P}{eR}$$

可以得到

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{P}{r_k}\right) \cos \beta_c + \frac{P}{r_k} \tan \Theta_k \sin \beta_c &= 1 - \frac{P}{R} \\ \xrightarrow{P = r_k v_k \cos^2 \Theta_k} (1 - v_k \cos^2 \Theta_k) \cos \beta_c + v_k \cos^2 \Theta_k \tan \Theta_k \sin \beta_c &= 1 - \frac{r_k v_k \cos^2 \Theta_k}{R} \\ \Rightarrow \frac{r_k}{R} &= \frac{1 - (1 - v_k \cos^2 \Theta_k) \cos \beta_c + v_k \cos^2 \Theta_k \tan \Theta_k \sin \beta_c}{v_k \cos^2 \Theta_k} \end{aligned}$$

最终, 我们可以得到

定理 4.6 命中方程

$$\frac{r_k}{R} = \frac{1 - \cos \beta_c}{v_k \cos^2 \Theta_k} + \frac{\cos(\beta_c + \Theta_k)}{\cos \Theta_k} \quad (4.52)$$

三角函数转换为半角形式有

$$\cos \beta_c = \frac{1 - \tan^2 \frac{\beta_c}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\beta_c}{2}} \quad \sin \beta_c = \frac{2 \tan \frac{\beta_c}{2}}{1 + \tan^2 \frac{\beta_c}{2}}$$

代入命中方程, 得到

$$\left[2R(1 + \tan^2 \Theta_k) - v_k(R + r_k)\right] \tan^2 \frac{\beta_c}{2} - 2v_k R \tan \Theta_k \tan \frac{\beta_c}{2} + v_k(R - r_k) = 0 \quad (4.53)$$

由于轨道参数已知, 则方程可以简化为

$$A \cdot \tan^2 \frac{\beta_c}{2} - B \cdot \tan \frac{\beta_c}{2} + C = 0 \quad (4.54)$$

其中,

$$\begin{aligned}
 A &= 2r_c (1 + \tan^2 \Theta_k) - v_k(r_c + r_k) \\
 &\geq 2r_c (1 + \tan^2 \Theta_k) - 2v_k r_k \\
 &= 2r_c (1 + \tan^2 \Theta_k) - 2P/\cos^2 \Theta_k \\
 &= 2r_c (1 + \tan^2 \Theta_k) \left(1 - \frac{P}{r_c}\right) \\
 &= 2r_c (1 + \tan^2 \Theta_k) - [1 - (1 + e \cos f_c)] \\
 &= -2r_c (1 + \tan^2 \Theta_k) e \cos f_c \\
 &\geq 0 \\
 C &= v_k(r_c - r_k) \leq 0
 \end{aligned}$$

定理 4.7 被动段射程计算公式

射程通常小于 180° , 因此被动段射程计算公式为

$$\tan \frac{\beta_c}{2} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A}, \quad L_{kc} = R\beta_c \quad (4.55)$$

其中,

$$\begin{cases} A = 2R(1 + \tan^2 \Theta_k) - v_k(R + r_k) \\ B = 2v_k R \tan \Theta_k \\ C = v_k(R - r_k) \end{cases} \quad (4.56)$$

4.3.2 自由段射程的计算

由被动段射程公式, 只需要把 $r_e = r_k$ 替换掉 R 即可, 即

定理 4.8 自由段射程计算公式

$$\tan \frac{\beta_e}{2} = \frac{B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (4.57)$$

其中,

$$\begin{cases} A = 2r_k(1 + \tan^2 \Theta_k) - 2v_k r_k \\ B = 2r_k v_k \tan \Theta_k \\ C = v_k(r_k - r_k) = 0 \end{cases} \quad (4.58)$$

简化为

$$\tan \frac{\beta_c}{2} \approx \tan \frac{\beta_e}{2} = \frac{B}{A} = \frac{v_k \sin \Theta_k \cos \Theta_k}{1 - v_k \cos^2 \Theta_k} \quad (4.59)$$

实际上, 将第33页的公式(4.14) $P = r_k v_k \cos^2 \Theta_k$ 代入第38页的公式(4.51), 可以得到

$$\sin \frac{\beta_c}{2} \approx \sin \frac{\beta_e}{2} = \frac{v_k}{2e} \sin 2\Theta_k \quad (4.60)$$

工程上常用这个形式进行计算, 其比较简单。自由段射程为

$$L_{ke} = R \cdot \beta_e \quad (4.61)$$

观察自由段射程公式(4.60), 可以发现

(1) 能量系数给定

存在**最佳速度倾角使射程最大**。也就是说, 在给定关机点矢径及速度下, 亦即给定机械能 E 下, 最佳速度倾角使射程最大。

$$\theta_{k,\text{opt}} \Rightarrow \beta_{c,\text{max}}$$

(2) 射程给定

存在**最佳速度倾角使能量系数最小**, 当关机点位置定, 即使关机点速度最小, 也就是说导弹的机械能 E 最小。称为**最小能量弹道**。

4.3.3 最佳倾角确定

已知 r_k, v_k , 确定 $\theta_{k,\text{opt}}, \beta_{c,\text{max}}$ 。

被动段射程可以描述为 $\beta_c = \beta_c(r_k, v_k, \theta_k)$, 由于 r_k, v_k 确定, 则 $\beta_c = \beta_c(\theta_k)$, 极值点(最佳倾角)处导数为 0, 即

$$\frac{\partial \beta_c}{\partial \theta_k} = 0 \quad (4.62)$$

对方程(4.59)求导可得

$$\frac{\partial A}{\partial \theta_k} \tan^2 \frac{\beta_c}{2} - \frac{\partial B}{\partial \theta_k} \tan \frac{\beta_c}{2} + \left(2A \tan \frac{\beta_c}{2} - B \right) \frac{\partial \tan \frac{\beta_c}{2}}{\partial \theta_k} = 0 \quad (4.63)$$

对自由段方程的系数(4.56)求导, 可以得到

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial \theta_k} = 4R \tan \theta_k \sec^2 \theta_k \\ \frac{\partial B}{\partial \theta_k} = 2Rv_k \sec^2 \theta_k \end{cases} \quad (4.64)$$

且

$$\frac{\partial \tan \frac{\beta_c}{2}}{\partial \theta_k} = \frac{1}{2} \sec^2 \frac{\beta_c}{2} \frac{\partial \beta_c}{\partial \theta_k} = 0 (\theta_k = \theta_{k,\text{opt}}, \beta_c = \beta_{c,\text{max}}) \quad (4.65)$$

取 $\theta_k = \theta_{k,\text{opt}}, \beta_c = \beta_{c,\text{max}}$, 则

$$\begin{aligned} & 4R \tan \theta_{k,\text{opt}} \sec^2 \theta_{k,\text{opt}} \tan^2 \frac{\beta_{c,\text{max}}}{2} - 2Rv_k \sec^2 \theta_{k,\text{opt}} \tan \frac{\beta_{c,\text{max}}}{2} = 0 \\ \Rightarrow & 2R \sec^2 \theta_{k,\text{opt}} \tan \frac{\beta_{c,\text{max}}}{2} \left(2 \tan \theta_{k,\text{opt}} \tan \frac{\beta_{c,\text{max}}}{2} - v_k \right) = 0 \\ \xrightarrow{2R \sec^2 \theta_{k,\text{opt}} \tan \frac{\beta_{c,\text{max}}}{2} \neq 0} & 2 \tan \theta_{k,\text{opt}} \tan \frac{\beta_{c,\text{max}}}{2} - v_k = 0 \end{aligned}$$

即

$$\tan \frac{\beta_{c,\text{max}}}{2} = \frac{v_k}{2 \tan \theta_{k,\text{opt}}} \quad (4.66)$$

将计算结果代入到第38页的公式(4.53), 化简后可以得到

$$[4(R - r_k) - 2Rv_k] \tan^2 \theta_{k,\text{opt}} = v_k^2 (R + r_k) - 2Rv_k \quad (4.67)$$

定理 4.9 被动段最佳速度倾角

$$\tan \theta_{k,\text{opt}} = \sqrt{\frac{v_k [2R - v_k (R + r_k)]}{2Rv_k - 4(R - r_k)}}, \quad \tan \frac{\beta_{c,\text{max}}}{2} = \sqrt{\frac{v_k [Rv_k - 2(R - r_k)]}{2[2R - v_k (R + r_k)]}} \quad (4.68)$$

自由段的最佳速度倾角，只需要在公式(4.68)中令 $R = r_e = r_k$ ，即

定理 4.10 自由段最佳速度倾角

$$\tan \theta_{ek,opt} = \sqrt{1 - v_k}, \quad \tan \frac{\beta_{e,max}}{2} = \frac{1}{2} \frac{v_k}{\sqrt{1 - v_k}} \quad (4.69)$$

将 $\tan \theta_{ek,opt}$ 的表达式代入 $\tan \frac{\beta_{e,max}}{2}$ 的表达式中，可以得到 $\beta_{e,max}$ 和 $\theta_{ek,opt}$ 之间的关系

$$\theta_{ek,opt} = \frac{1}{4}(\pi - \beta_{e,max}) \quad (4.70)$$

可以看出：当被动段射程越大，再入段射程比例就越小，被动段最佳倾角越接近自由段最佳倾角。

对于 $h_k = 0$ 的自由段，当射程很小时，最佳倾角接近于 45° ，与炮兵选用的最佳射击角一致。

4.3.4 最小能量的最佳倾角确定

已知 r_k, β_c 求 $\theta_{k,opt}, v_{k,min}$ 。用图解法来寻找在 r_k, β_c 条件下的 $\theta_{k,opt}, v_{k,min}$ 。

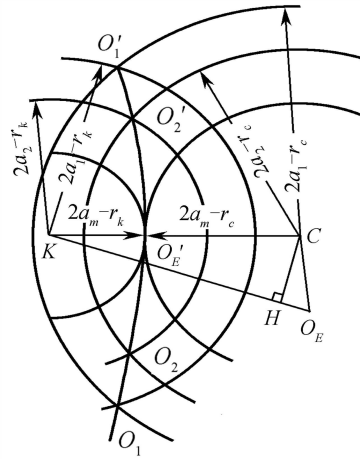


图 4.2: 最小能量弹道图解法示意图

将再入段看成自由段的延续，被动段弹道为平面弹道。给定射程时，点 O_E, K, C 相对位置确定。设与地心 O_E 对应的椭圆虚焦点为 O ，满足

$$\begin{cases} r_k + OK = 2a_k \\ r_c + OC = 2a_c \end{cases} \quad \begin{cases} OK = 2a_k - r_k \\ OC = 2a_c - r_c \end{cases} \quad (4.71)$$

给定椭圆长半轴 a ，以 K, C 为圆心，分别以 OK 与 OC 为半径画圆，则有两个交点 O, O' ，即为椭圆虚焦点，对应椭圆的焦距、偏心率不同，如图4.2所示。可以得到

- (1) 两个虚焦点 O, O' 对称于 KC 连线。
- (2) 随着长半轴 a 减小，虚焦点逐渐靠近 KC 线，最终重合于 OE' 点。此时有

$$a_{min} = \frac{1}{4}(KC + r_k + r_c) \quad (4.72)$$

长半轴最小，即能量最小，对应于最小能量弹道。

(3) 对于给定的 a 所画的椭圆上任意一点的法线必平分该点至该椭圆两焦点连线的夹角，如图4.3所示。而对于最小能量弹道，如图4.4所示，由速度倾角的定义

$$\angle xKv = \theta_k \quad (4.73)$$

而由于 $Kx \perp KP$, $K \perp O_E$, 那么

$$\angle O_E KP = \angle xKv = \Theta_{k,\min} \quad (4.74)$$

由速度 v 的方向沿椭圆切线方向, 那么

$$\angle CKO_E = 2\angle PKO_E = 2\angle PKC = 2\Theta_{k,\min} \quad (4.75)$$

由几何关系

$$\tan \angle CKO_E = \tan 2\Theta_k = \frac{CQ}{KQ} = \frac{CQ}{KO_E + O_EQ} = \frac{O_EC \sin \beta_c}{KO_E - O_EC \cos \beta_c} = \frac{r_c \sin \beta_c}{r_k - r_c \cos \beta_c} \quad (4.76)$$

对 $\triangle KCO_E$ 应用余弦定理, 得

$$KC = \sqrt{|O_E K|^2 + |O_EC|^2 - 2|O_E K||O_EC| \cos \beta_c} = \sqrt{r_k^2 + r_c^2 - 2r_k r_c \cos \beta_c} \quad (4.77)$$

又

$$KC = OK + OC = 2a - r_k + 2a - r_c = 4a - r_k - r_c \quad (4.78)$$

可以解得最小能量弹道对应半长轴为

$$a_{\min} = \frac{\sqrt{r_k^2 + r_c^2 - 2r_k r_c \cos \beta_c} + r_k + r_c}{4} \quad (4.79)$$

由第36页的公式(4.42), 可以计算得到所需要的最小速度为

$$v_{k,\min} = \sqrt{\mu \left(\frac{2}{r_k} - \frac{1}{a_{\min}} \right)} = \sqrt{\mu \left(\frac{1}{r_k} - \frac{4}{\sqrt{r_k^2 + r_c^2 - 2r_k r_c \cos \beta_c} + r_k + r_c} \right)} = 2 \tan \Theta_{k,\min} \cdot \tan \frac{\beta_c}{2} \quad (4.80)$$

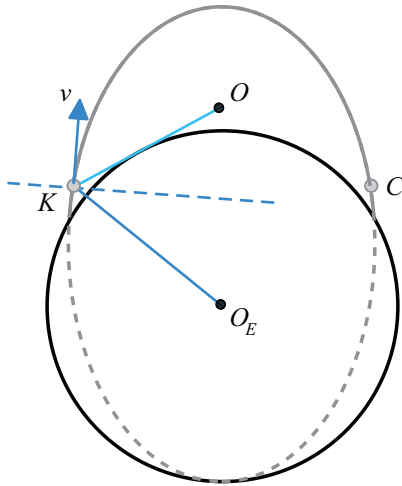


图 4.3: 给定射程的飞行轨迹

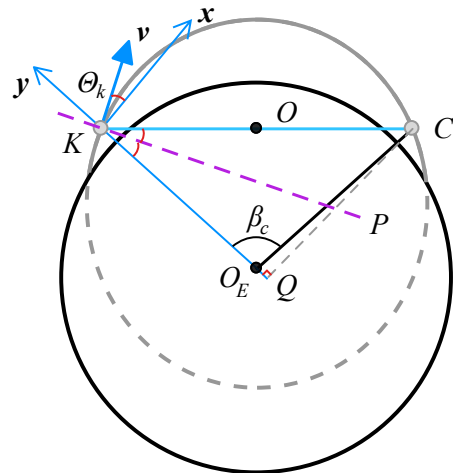


图 4.4: 最小能量的飞行轨迹

定理 4.11 自由段最小能量

自由段最小能量的最优倾角和最小速度分别为

$$\begin{cases} \Theta_{k,\min} = \frac{1}{2} \arctan \left(\frac{r_c \sin \beta_c}{r_k - r_c \cos \beta_c} \right) \\ v_{k,\min} = \sqrt{\mu \left(\frac{1}{r_k} - \frac{4}{\sqrt{r_k^2 + r_c^2 - 2r_k r_c \cos \beta_c} + r_k + r_c} \right)} = 2 \tan \Theta_{k,\min} \cdot \tan \frac{\beta_c}{2} \end{cases} \quad (4.81)$$

索引

B

标高, 5
半速度坐标系 H , 8
比推力, 21
变质量质点基本方程, 11

C

长半轴 a , 34
初等转换矩阵, 6
春分点, 34
测滑角 β , 9
侧力, 28
场强, 22

D

导弹, 1, 35
弹道导弹, 1
当地速度倾角, 32
第二宇宙速度, 35
点火段, 21
笛卡尔坐标系, 5
对流层, 4
地球大气分层, 4
地球平均半径 R , 24
地球运动, 3
地球引力系数, 22
地势高度, 4
弹体坐标系 B , 8
地心惯性坐标系 I , 7
地心坐标系 E , 7
动压头, 28
第一宇宙速度, 34
地轴, 3

F

附加哥氏力, 12
附加哥氏力矩, 14
附加相对力, 12
附加相对力矩, 14
发射惯性坐标系 A , 8
发射坐标系 G , 7
法向力系数, 28
方向余弦阵, 5
俯仰角 φ , 9

G

轨道, 35
滚动角 γ , 9
轨道倾角 i , 34
攻角 α , 9
关机段, 21
惯量积, 13
惯性张量, 13, 14
公转, 3

H

火箭底阻, 26
航迹偏航角 σ , 9
横向力系数, 28

J

近地点角距 w , 34
近地点时刻 t_p , 34
结构比, 11
角射程, 37
相对力, 20
极坐标系, 5
基准高, 5

L

离心惯性力, 24
离心加速度, 24

M

密歇尔斯基方程, 11
卯酉半径, 25
命中方程, 38

N

能量参数, 32

O

欧拉角, 6

P

偏航角 ψ , 9
平流层, 4
喷气阻尼力矩, 18
偏心率 e , 34
平移坐标系 A , 8

Q

齐奥尔科夫斯基公式, 11
倾侧角 ν , 9
球坐标系, 5

R

热成层, 4
绕地飞行, 35
绕心运动, 3

S

射程, 37
生存高度, 36
速度倾角 θ , 9
速度坐标系 V , 8
势函数, 22
升交点, 34
升交点角距 Ω , 34
升力, 28
矢量导数, 7
剩余速度, 35

导弹飞行力学

T

特征面积, 28

W

稳态段, 21
外逸层, 4
万有引力常数, 22

X

星际航行, 35

Y

引力位, 22
有效排气速度, 20
有心矢量场, 31

Z

坐标系转换, 5
转动惯量, 13
中间层, 4
真近点角, 33
重力, 24, 28
质量秒耗量, 16
指数大气模型, 5
助推滑翔导弹, 1
轴向力系数, 28
最小能量弹道, 40
质心运动, 3
自转, 3