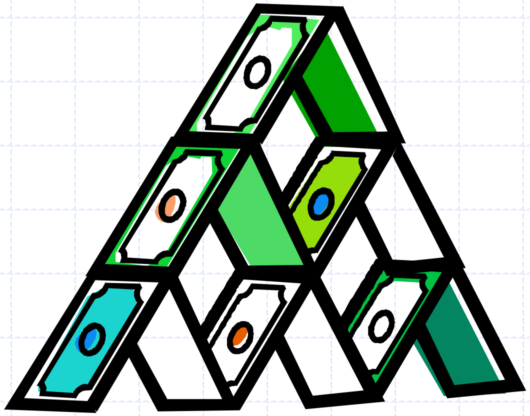
힙과 힙 정렬

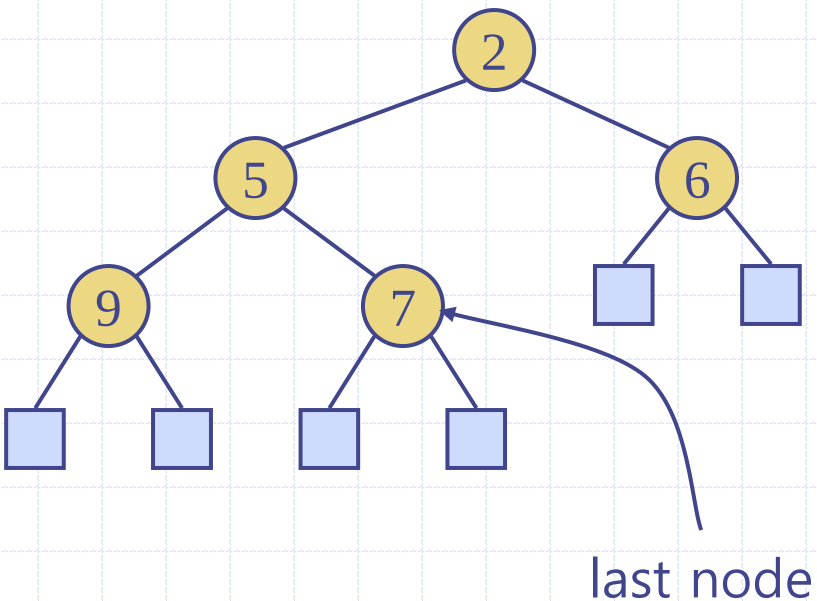


Outline

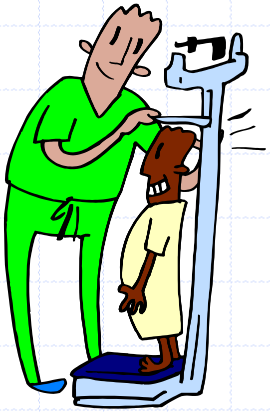
- 6.1 힙
- 6.2 힙을 이용한 우선순위 큐 구현
- 6.3 힙 구현과 성능
- 6.4 힙 정렬
- 6.5 제자리 힙 정렬
- 6.6 상향식 힙생성
- 6.7 응용문제

힙

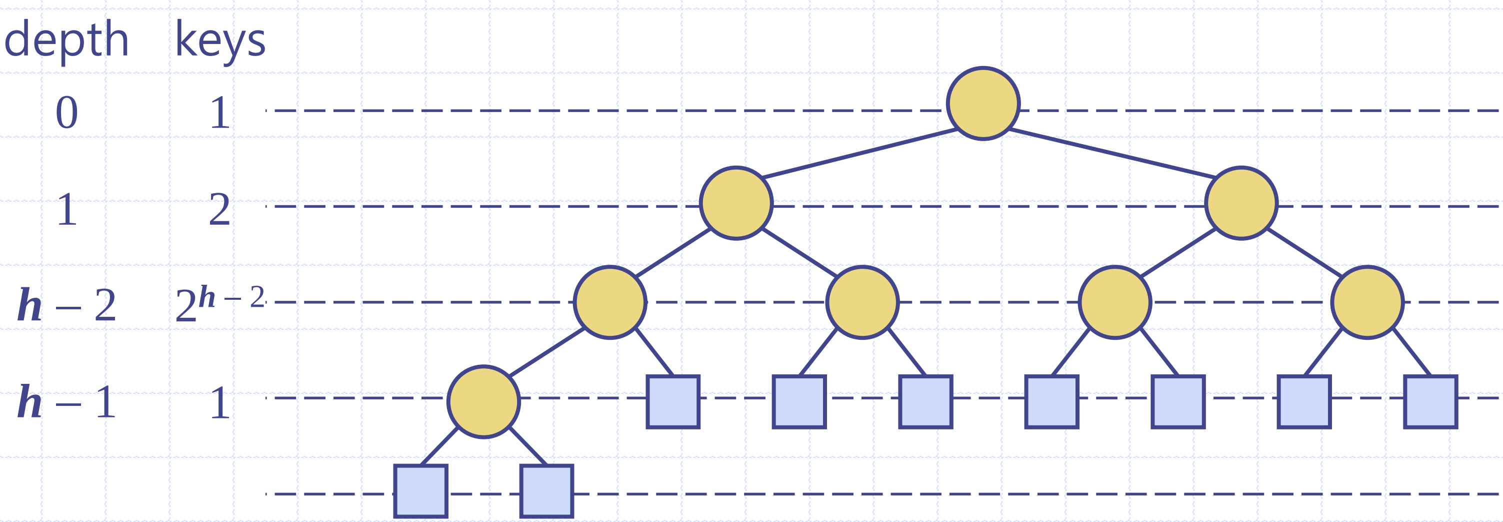
- **힙**(heap): 내부노드에 키를 저장하며 다음 두 가지 속성을 만족하는 이진트리
  - **힙순서**(heap-order): 루트를 제외한 모든 내부노드 v에 대해, $key(v) \geq key(parent(v))$
  - **완전이진트리**(complete binary tree): 힙의 높이를 h라 하면
    - $i = 0, \ldots, h-1$에 대해, 깊이 i인 노드가 2^i개 존재
    - 깊이 $h-1$에서, 내부노드들은 외부노드들의 왼쪽에 존재
- 힙의 **마지막 노드**(last node): 깊이 $h-1$의 가장 오른쪽 내부노드



힙의 높이

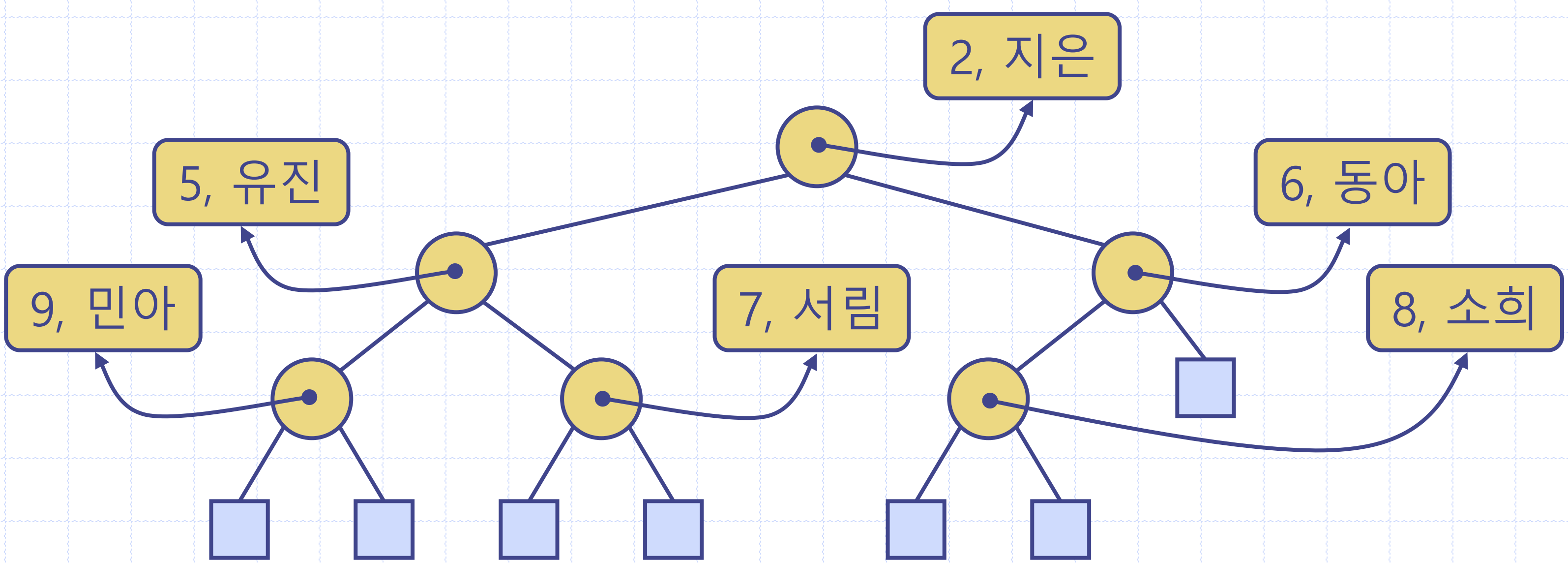


- **정리:** n개의 키를 저장한 힙의 높이는 $\mathbf{O}(\log n)$이다
  증명: (**완전이진트리**의 성질을 이용)
  - n개의 키를 저장한 힙의 높이를 h라 하자
  - 깊이 $i = 0, \dots, h-2$ 에 2^i개의 키, 그리고 깊이 $h-1$ 에 적어도 한 개의 키가 존재하므로, $n \geq 1 + 2 + 4 + \dots + 2^{h-2} + 1$
  - 따라서, $n \geq 2^{h-1}$, 즉 $h \leq \log n + 1$



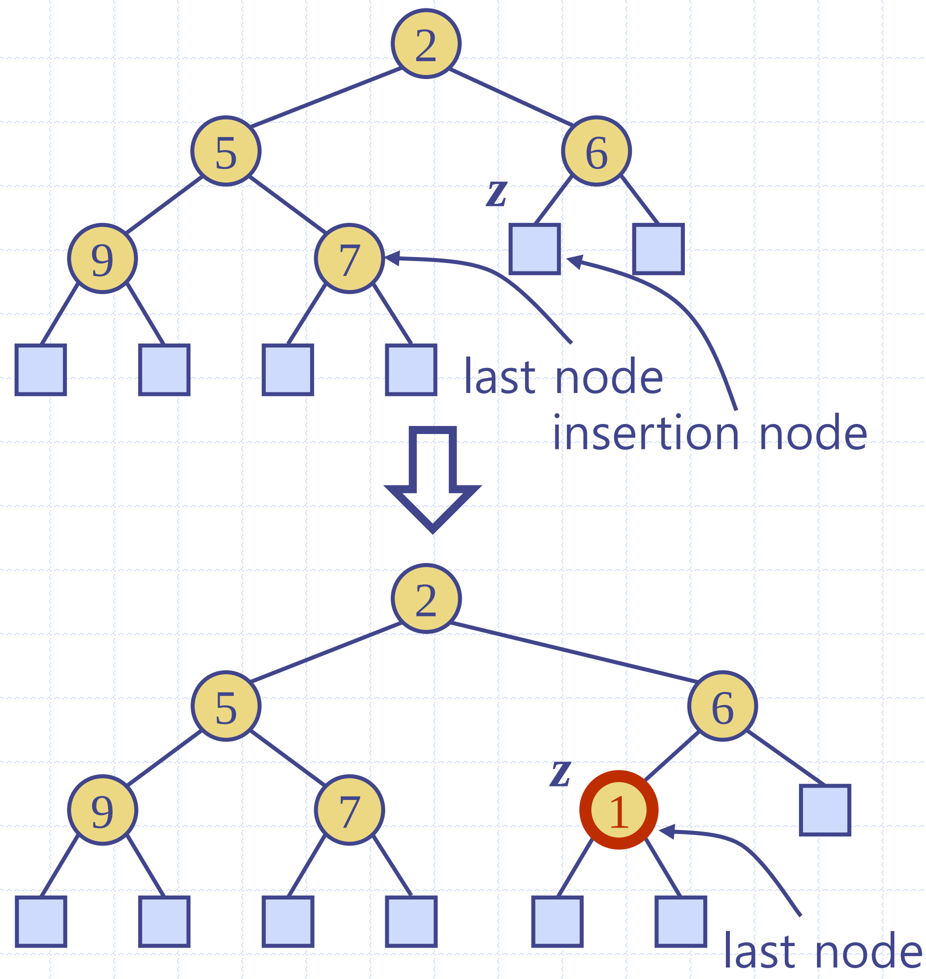
힙과 우선순위 큐

- 힙을 사용하여 **우선순위 큐**(priority queue) 구현 가능
- **전제: 적정이진트리**로 구현
- **마지막 노드**의 위치를 관리
- **그림 표기:** 내부노드 내에 간단히 키만 표시

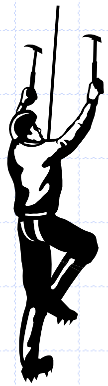


힙에 삽입

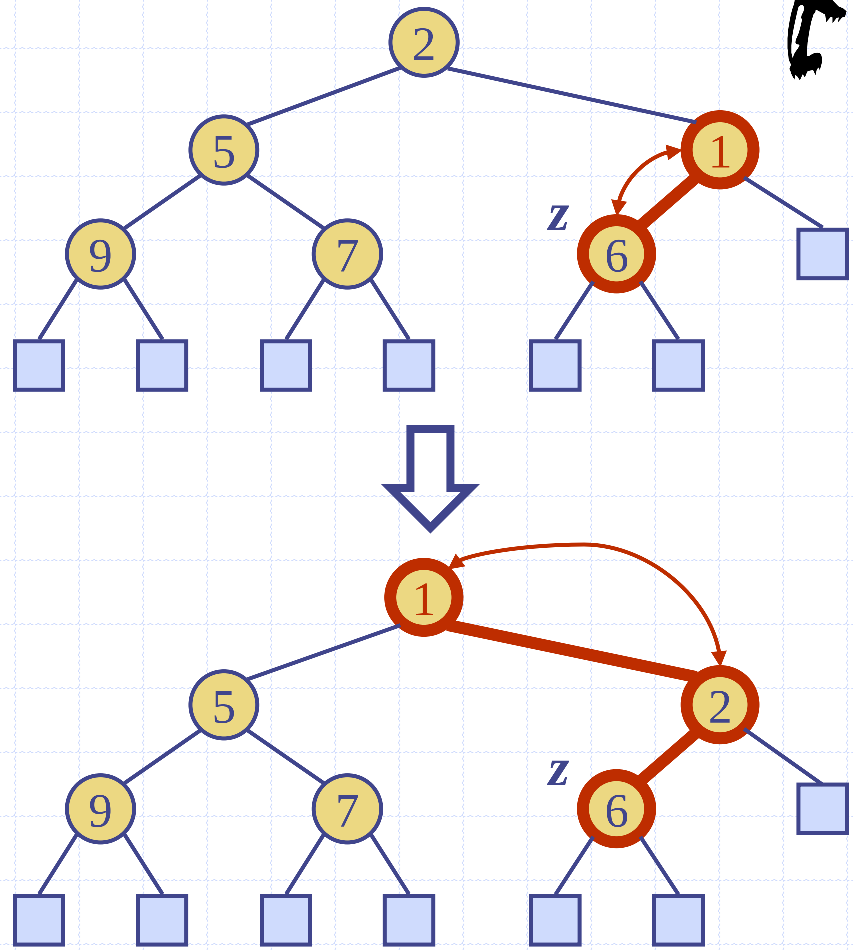
- 우선순위 큐 ADT의 메쏘드 insertItem은 힙에 키 k를 **삽입**하는 것에 해당
- 삽입 알고리즘의 세 단계
  1. 삽입 노드 z, 즉 새로운 마지막 노드를 찾는다
  2. k를 z에 저장한 후 expandExternal(z) 작업을 사용하여 z을 내부노드로 확장
  3. **힙순서 속성**을 복구



Upheap



- 새로운 키 ***k***가 삽입된 후, **힙순서 속성**이 위배될 수 있다
- 알고리즘 upheap은 삽입노드로부터 상향 경로를 따라가며 키 ***k***를 교환함으로써 힙순서 속성을 복구
- upheap은 키 ***k***가 루트에, 또는 부모의 키가 ***k***보다 작거나 같은 노드에 도달하면 정지
- 힙의 높이는 **O**(log ***n***)이므로 upheap은 **O**(log ***n***) 시간에 수행



힙 삽입 알고리즘

Alg ***insertItem(k)*** **input** key ***k***, node ***last*** **output** none 1. ***advanceLast***() 2. ***z*** ← ***last*** 3. *Set node* ***z*** *to* ***k*** 4. ***expandExternal***(***z***) 5. ***upHeap***(***z***) 6. **return**	**Alg** ***upHeap(v)*** **input** node ***v*** **output** none 1. **if** (***isRoot***(***v***)) **return** 2. **if** (***key***(***v***) ≥ ***key***(***parent***(***v***))) **return** 3. ***swapElements***(***v***, ***parent***(***v***)) 4. ***upHeap***(***parent***(***v***))

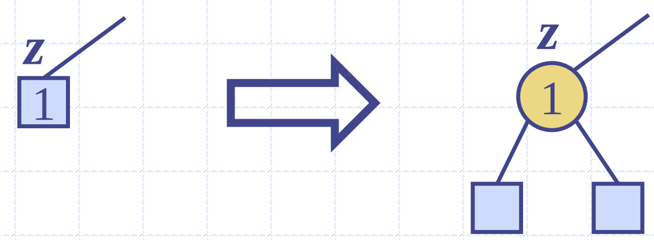
- 알고리즘 insertItem과 upHeap의 작업 대상 힙은 **일반**(generic) 힙

삽입 (conti.)

Alg ***expandExternal(z)*** {linked}
  input external node ***z***
  output none

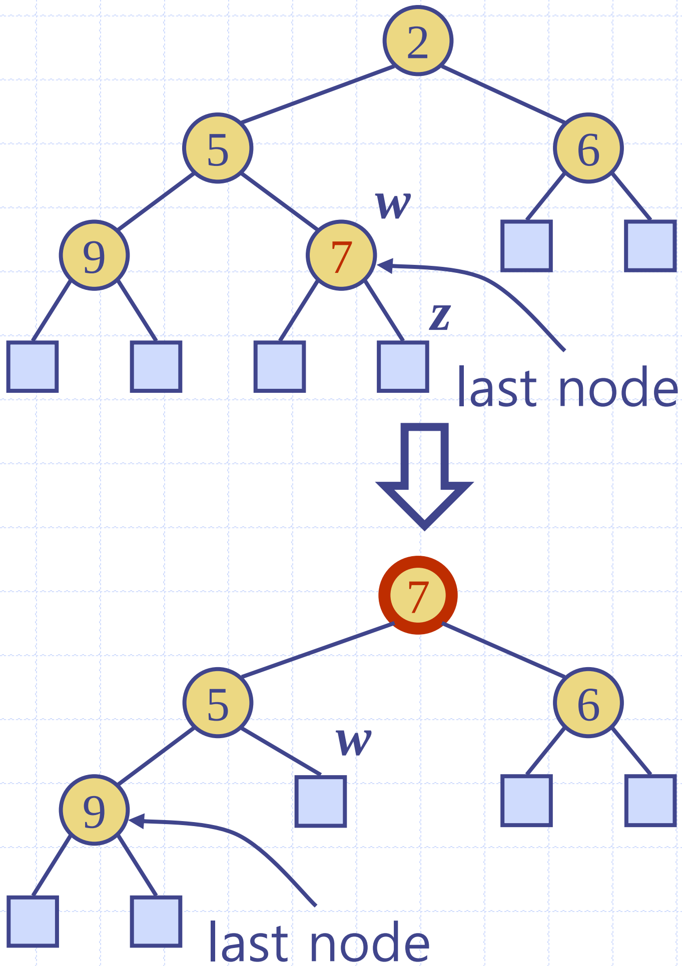
1. ***l*** ← ***getnode***()
2. ***r*** ← ***getnode***()
3. ***l*.left** ← ∅
4. ***l*.right** ← ∅
5. ***l*.parent** ← ***z***
6. ***r*.left** ← ∅
7. ***r*.right** ← ∅
8. ***r*.parent** ← ***z***
9. ***z*.left** ← ***l***
10. ***z*.right** ← ***r***
11. **return**

- **예:** expandExternal(z)



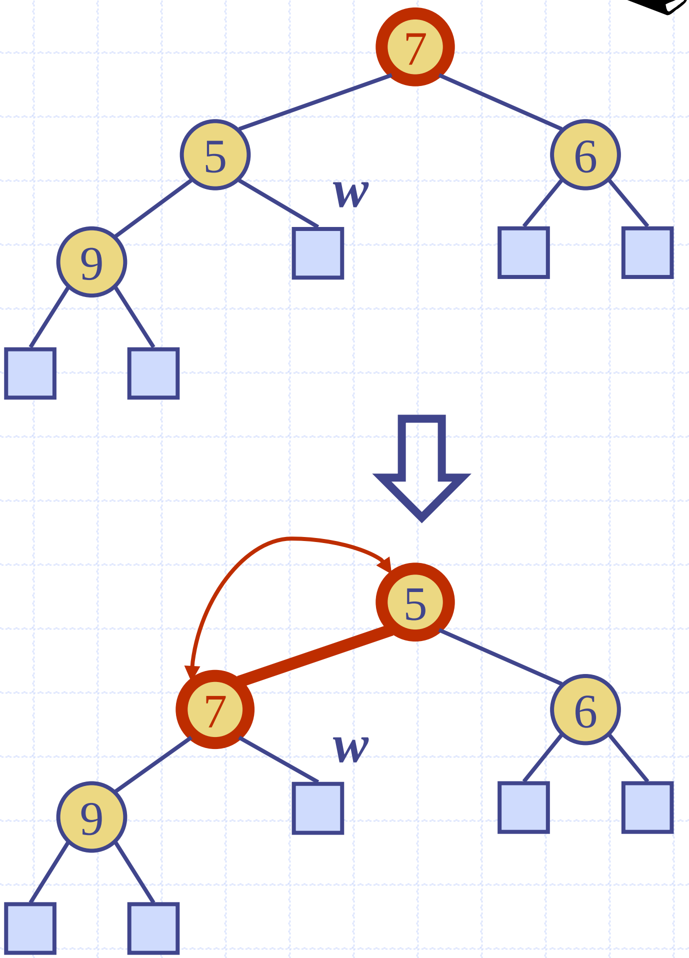
힙으로부터 삭제

- 우선순위 큐 ADT의 메쏘드 removeMin은 힙으로부터 루트 키를 **삭제**하는 것에 해당
- 삭제 알고리즘의 세 단계
  1. 루트 키를 마지막 노드 *w*의 키로 대체
  2. reduceExternal(z) 작업을 사용하여 *w*와 그의 자식들을 외부노드로 축소
  3. **힙순서 속성**을 복구



Downheap

- 루트 키를 마지막 노드의 키로 대체한 후, **힙순서 속성**이 위배될 수 있다
- 알고리즘 downheap은 루트로부터 하향 경로를 따라가며 키 k를 교환함으로써 힙순서 속성을 복구
- downheap은 키 k가 잎에, 또는 자식의 키가 k보다 크거나 같은 노드에 도달하면 정지
- 힙의 높이는 $O(\log n)$이므로 downheap은 $O(\log n)$ 시간에 수행



힙 삭제 알고리즘

Alg ***removeMin***()
input node ***last***
output key

1. ***k*** ← ***key***(***root***())
2. ***w*** ← ***last***
3. *Set root to* ***key***(***w***)
4. ***retreatLast***()
5. ***z*** ← ***rightChild***(***w***)
6. ***reduceExternal***(***z***)
7. ***downHeap***(***root***())
8. **return** ***k***

Alg ***downHeap***(***v***)
input node ***v*** whose left and right subtrees are heaps
output a heap with root ***v***

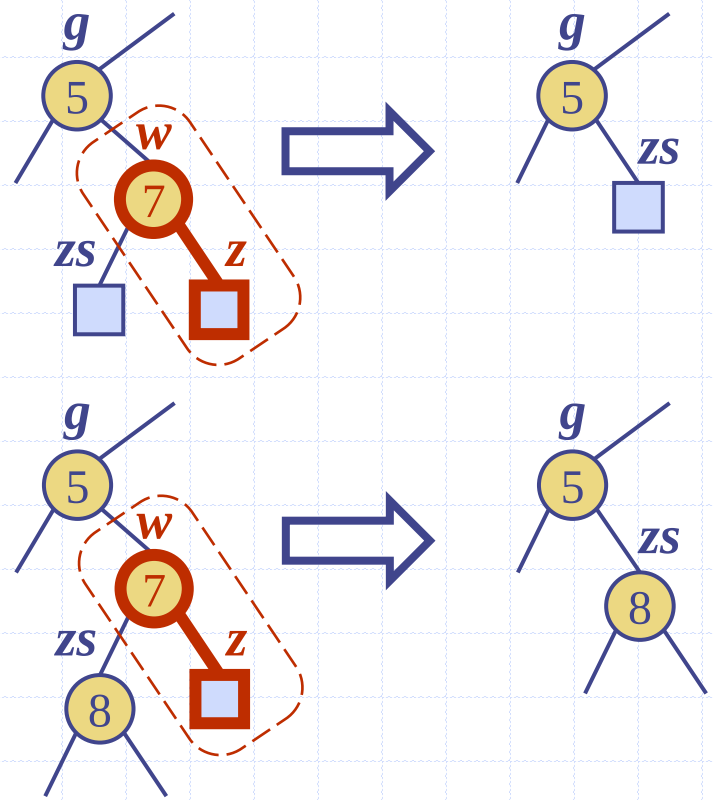
1. **if** (***isExternal***(***leftChild***(***v***)) & ***isExternal***(***rightChild***(***v***)))
   return
2. ***smaller*** ← ***leftChild***(***v***) {internal node}
3. **if** (***isInternal***(***rightChild***(***v***)))
   if (***key***(***rightChild***(***v***)) < ***key***(***smaller***))
      smaller ← ***rightChild***(***v***)
4. **if** (***key***(***v***) ≤ ***key***(***smaller***))
   return
5. ***swapElements***(***v***, ***smaller***)
6. ***downHeap***(***smaller***)

삭제 (conti.)

Alg ***reduceExternal(z)*** {linked}
    input external node ***z***
    output the node replacing the parent
        node of the removed node ***z***

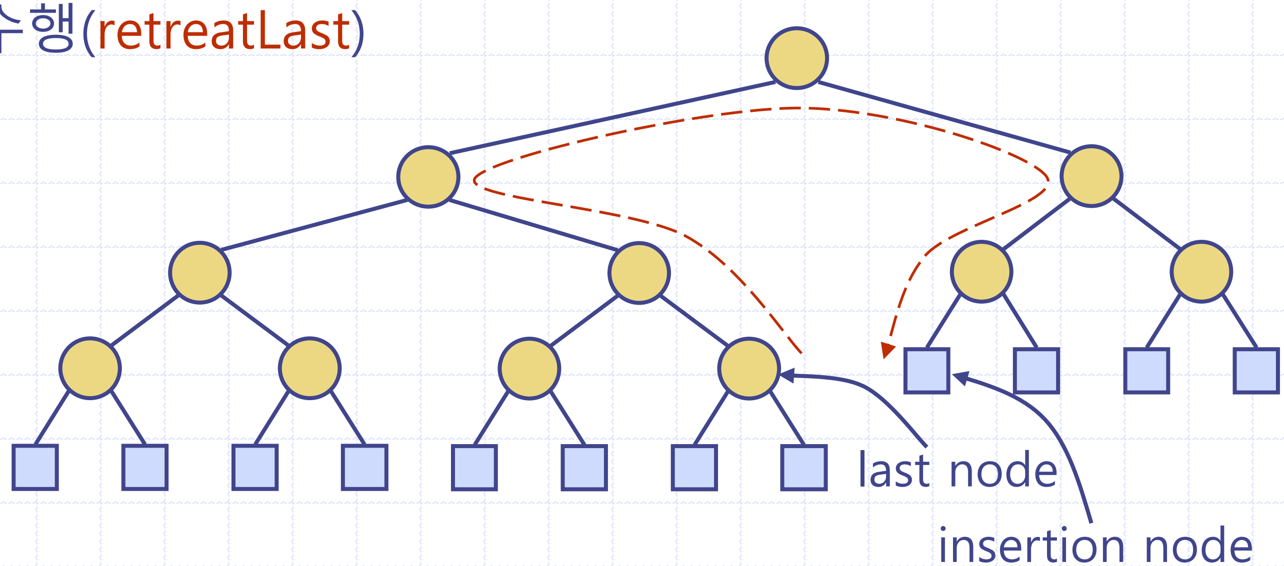
1. ***w*** ← ***z*.parent**
2. ***zs*** ← ***sibling*(*z*)**
3. **if (*isRoot*(*w*))**
        root ← ***zs*** {renew root}
        ***zs*.parent** ← ∅
    else
        g ← ***w*.parent**
        zs*.parent** ← ***g
        if (*w* = *g*.left)
            g*.left** ← ***zs
        else {*w* = *g*.right}
            g*.right** ← ***zs
4. ***putnode*(*z*)** {deallocate node *z*}
5. ***putnode*(*w*)** {deallocate node *w*}
6. **return *zs***

◆ **예:** reduceExternal(z)



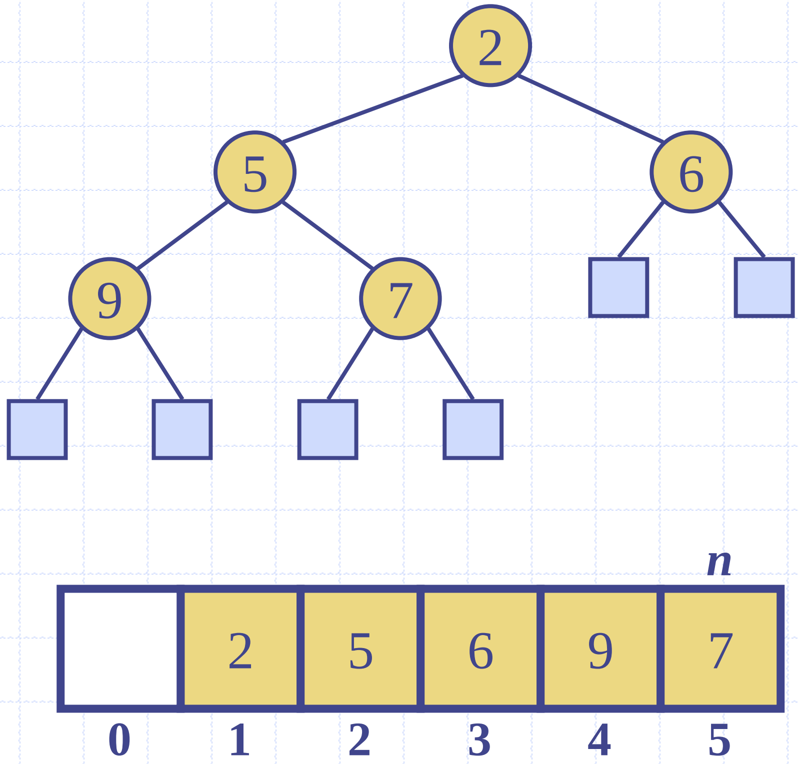
마지막 노드 갱신

- **O**(log ***n***)개의 노드를 순회함으로써 **삽입** 노드를 찾을 수 있다(advanceLast)
  - 현재 노드가 오른쪽 자식인 동안, 부모 노드로 이동
  - 현재 노드가 왼쪽 자식이면, 형제 노드로 이동
  - 현재 노드가 내부노드인 동안, 왼쪽 자식으로 이동
- **삭제** 후 마지막 노드를 갱신하는 작업은 위와 반대 방향으로 수행(retreatLast)



배열에 기초한 힙 구현

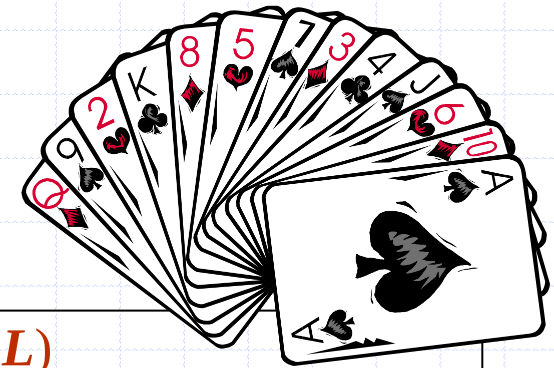
- n개의 키를 가진 힙을 크기 n의 **배열**을 사용하여 표현 가능
- 첨자 i에 존재하는 노드에 대해
  - **왼쪽 자식**은 첨자 $2i$에 존재
  - **오른쪽 자식**은 첨자 $2i + 1$에 존재
  - **부모**는 첨자 $i/2$에 존재
- 노드 사이의 **링크**는 명시적으로 저장할 필요가 없다
- **외부노드**들은 표현할 필요 없다
- 첨자 0 셀은 사용하지 않는다
- **마지막 노드**의 첨자: 항상 n
  - insertItem 작업은 첨자 $n + 1$ 위치에 삽입하는 것에 해당
  - removeMin 작업은 첨자 n 위치에서 삭제하는 것에 해당



성능 요약

힙 구현	작업				공간 소요
	size, isEmpty	insertItem, removeMin	minKey, minElement	advanceLast, retreatLast	
연결	$\mathbf{O}(1)$	$\mathbf{O}(\log \boldsymbol{n})$	$\mathbf{O}(1)$	$\mathbf{O}(\log \boldsymbol{n})$	$\mathbf{O}(\boldsymbol{n})$
순차	$\mathbf{O}(1)$	$\mathbf{O}(\log \boldsymbol{n})$	$\mathbf{O}(1)$	$\mathbf{O}(1)$	$\mathbf{O}(\boldsymbol{n})$

힙 정렬



- 힙을 사용하여 구현된 n-항목 **우선순위 큐**를 고려하면,
  - 공간 사용량은 $O(n)$
  - insertItem 메쏘드와 removeMin 메쏘드는 $O(\log n)$ 시간에 수행
  - size, isEmpty, minKey, minElement 메쏘드는 $O(1)$ 시간에 수행
- 힙에 기초한 우선순위 큐를 사용함으로써, n개의 원소로 이루어진 리스트를 $O(n \log n)$ 시간에 정렬할 수 있다
  - **선택 정렬**이나 **삽입 정렬**과 같은 2차 정렬 알고리즘보다 훨씬 빠르다

Alg ***heapSort(L)***
  input list ***L***
  output sorted list ***L***

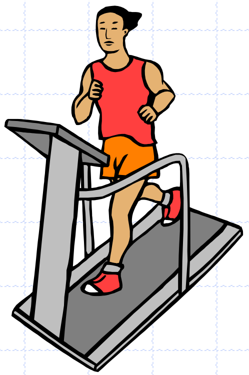
1. ***H*** ← *empty heap*
2. **while** (!***L***.***isEmpty***()) {phase 1}
   k ← ***L***.***removeFirst***()
   H.***insertItem***(***k***)
3. **while** (!***H***.***isEmpty***()) {phase 2}
   k ← ***H***.***removeMin***()
   L.***addLast***(***k***)
4. **return**

- 이 알고리즘을 **힙 정렬**(heap sort) 알고리즘이라고 부른다

힙 정렬 개선

- Heap sort의 성능 향상을 위한 두 가지 개선점
  - **제자리 힙 정렬**은 heap sort의 공간 사용을 줄인다
  - **상향식 힙생성**은 heap sort의 속도를 높힌다

제자리 힙 정렬



- 이 방식은 정렬되어야 할 리스트가 **배열**로 주어진 경우에만 적용
- 힙을 저장하는데 리스트 L의 일부를 사용함으로써 외부 힙 사용을 피한다
- 지금까지 사용했던 **최소힙**(min-heap) 대신, 최대 원소가 맨위에 오게 되는 **최대힙**(max-heap)을 사용

제자리 힙 정렬 알고리즘

Alg *inPlaceHeapSort*(*A*)
  input array ***A*** of ***n*** keys
  output sorted array ***A***

1. ***buildHeap***(***A***) {phase 1}
2. **for** ***i*** $\leftarrow$ ***n*** **downto** 2 {phase 2}
    A[1] $\leftrightarrow$ ***A***[***i***]
    downHeap(1, ***i*** – 1)
3. **return**

Alg *buildHeap*(*A*)
  input array ***A*** of ***n*** keys
  output heap ***A*** of size ***n***

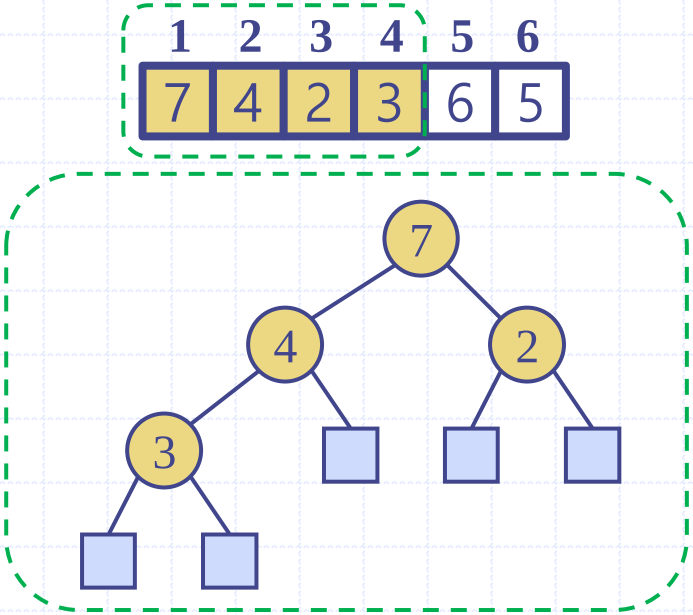
1. **for** ***i*** $\leftarrow$ 1 **to** ***n***
    insertItem(***A***[***i***])
2. **return**

Alg *downHeap*(*i*, *last*)
  input index ***i*** of array ***A*** representing a *maxheap* of size ***last***
  output none

1. ***left*** $\leftarrow$ 2***i***
2. ***right*** $\leftarrow$ 2***i*** + 1
3. **if** (***left*** > ***last***) {external node}
    return
4. ***greater*** $\leftarrow$ ***left***
5. **if** (***right*** $\leq$ ***last***)
    if (***key***(***A***[***right***]) > ***key***(***A***[***greater***]))
      greater $\leftarrow$ ***right***
6. **if** (***key***(***A***[***i***]) $\geq$ ***key***(***A***[***greater***]))
    return
7. ***A***[***i***] $\leftrightarrow$ ***A***[***greater***]
8. ***downHeap***(***greater***, ***last***)

제자리 힙 정렬 (conti.)

- 알고리즘 수행의 어떤 시점에서든,
  - *L*의 첨자 1부터 *i*까지의 왼쪽 부분은 힙의 원소들을 저장하는데 사용
  - 그리고 첨자 $i + 1$부터 *n*까지의 오른쪽 부분은 리스트의 원소들을 저장하는데 사용
- 그러므로, *L*의 (첨자 1, … , *i*에 있는) 첫 *i*개의 원소들은 힙의 **배열** 표현 – 즉, 첨자 *k*의 원소는 첨자 $2k$ 및 $2k + 1$의 자식들보다 크거나 같다
- **예**: $i = 4$

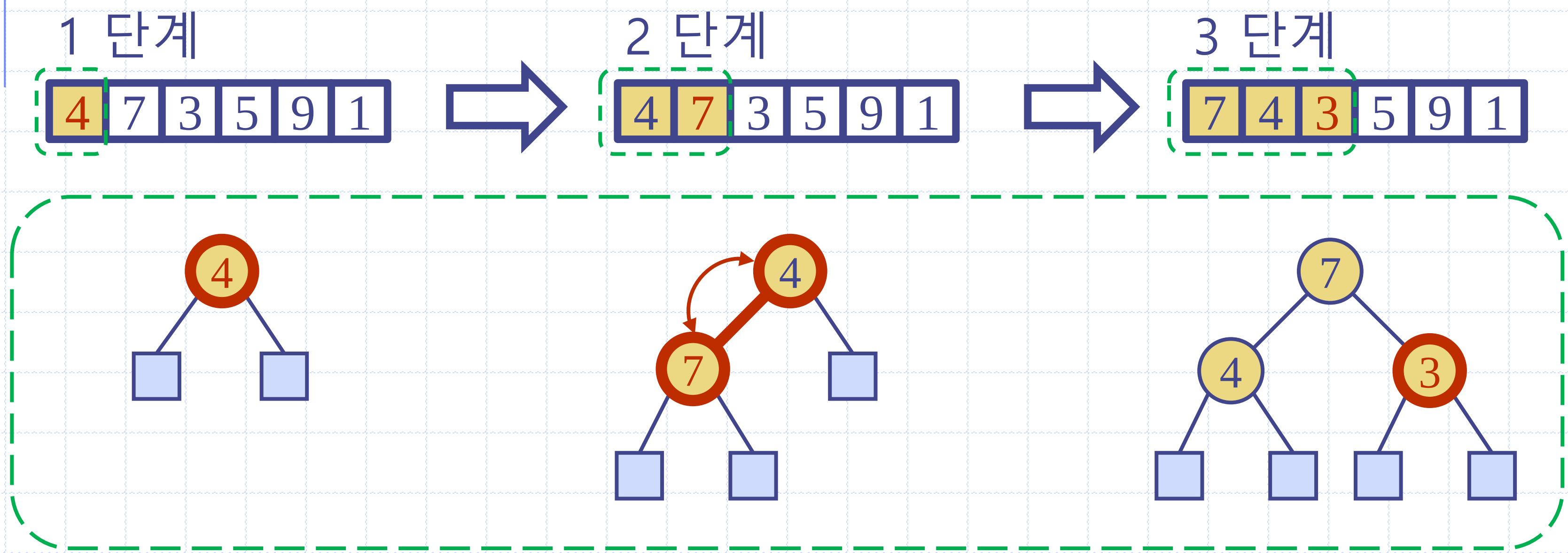


제자리 힙 정렬 (conti.)

- 1기
  - 비어 있는 힙으로부터 출발하여 힙과 리스트의 경계를 **왼쪽에서 오른쪽으로** 한 번에 한 칸씩 이동
  - 단계 $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{i} = 1, \ldots, \boldsymbol{n})$에서, 첨자 $\boldsymbol{i}$에 있는 원소를 힙에 추가함으로써 힙을 확장
- 2기
  - 비어 있는 리스트로부터 출발하여 힙과 리스트의 경계를 **오른쪽에서 왼쪽으로** 한 번에 한 칸씩 이동
  - 단계 $\boldsymbol{i}(\boldsymbol{i} = \boldsymbol{n}, \ldots, 2)$에서, 힙의 최대 원소를 삭제하여 리스트의 첨자 $\boldsymbol{i}$에 저장함으로써 리스트를 확장

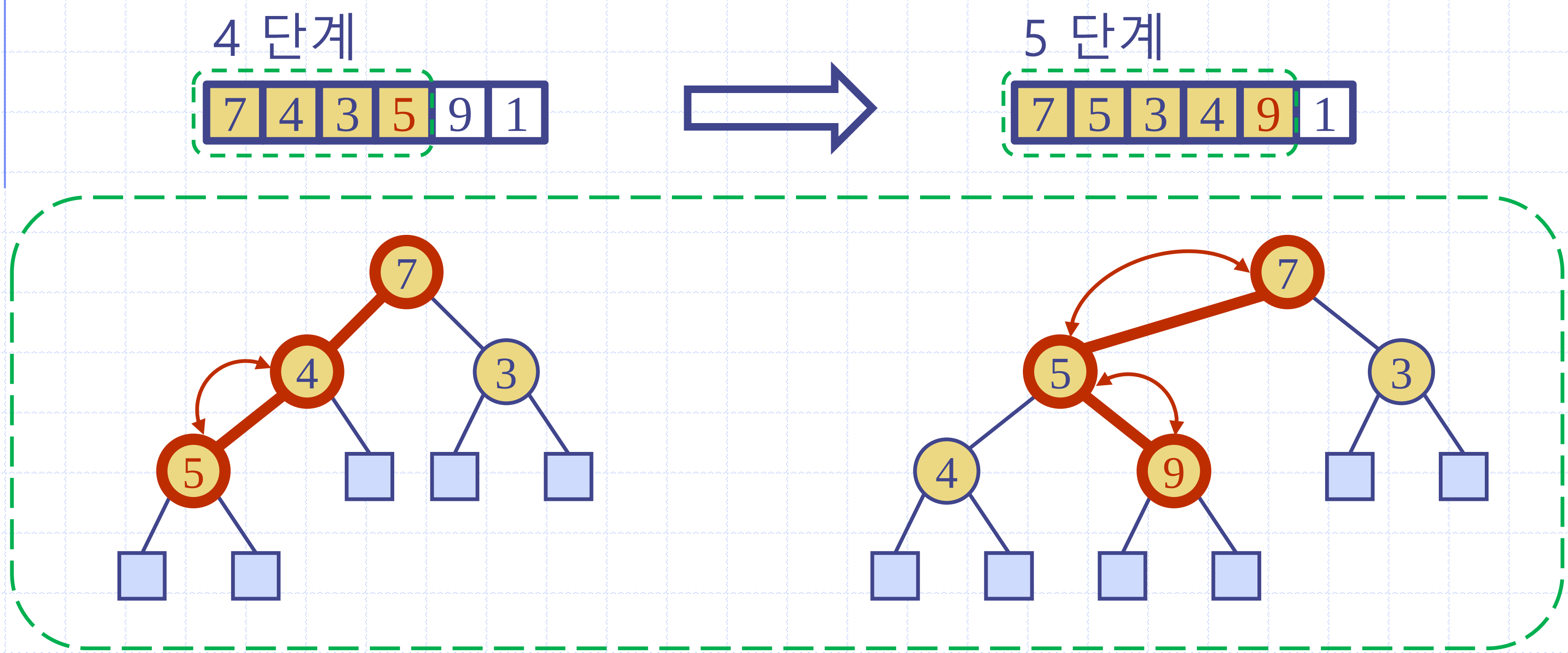
제자리 힙 정렬 예

- 1기와 2기의 **각 단계**에서, 배열 가운데 **힙**에 쓰인 부분을 파란색 원소로 표시
- 아래 점선 내에 보인 **이진트리** 관점의 **힙**은 가상적일 뿐, 제자리 알고리즘에 의해 실제 생성되지는 않음에 유의
- 1기 작업 시작



제자리 힙 정렬 예 (conti.)

- 1기 작업 계속

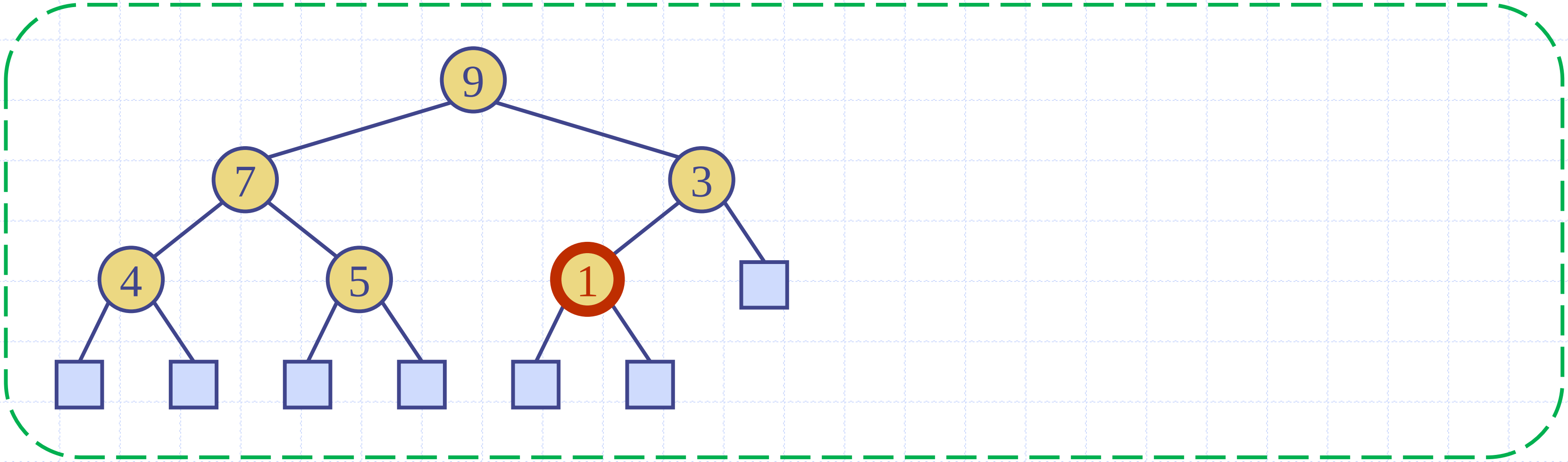


제자리 힙 정렬 예 (conti.)

- 1기 작업 완료
- 리스트가 **최대힙**으로 변환됨

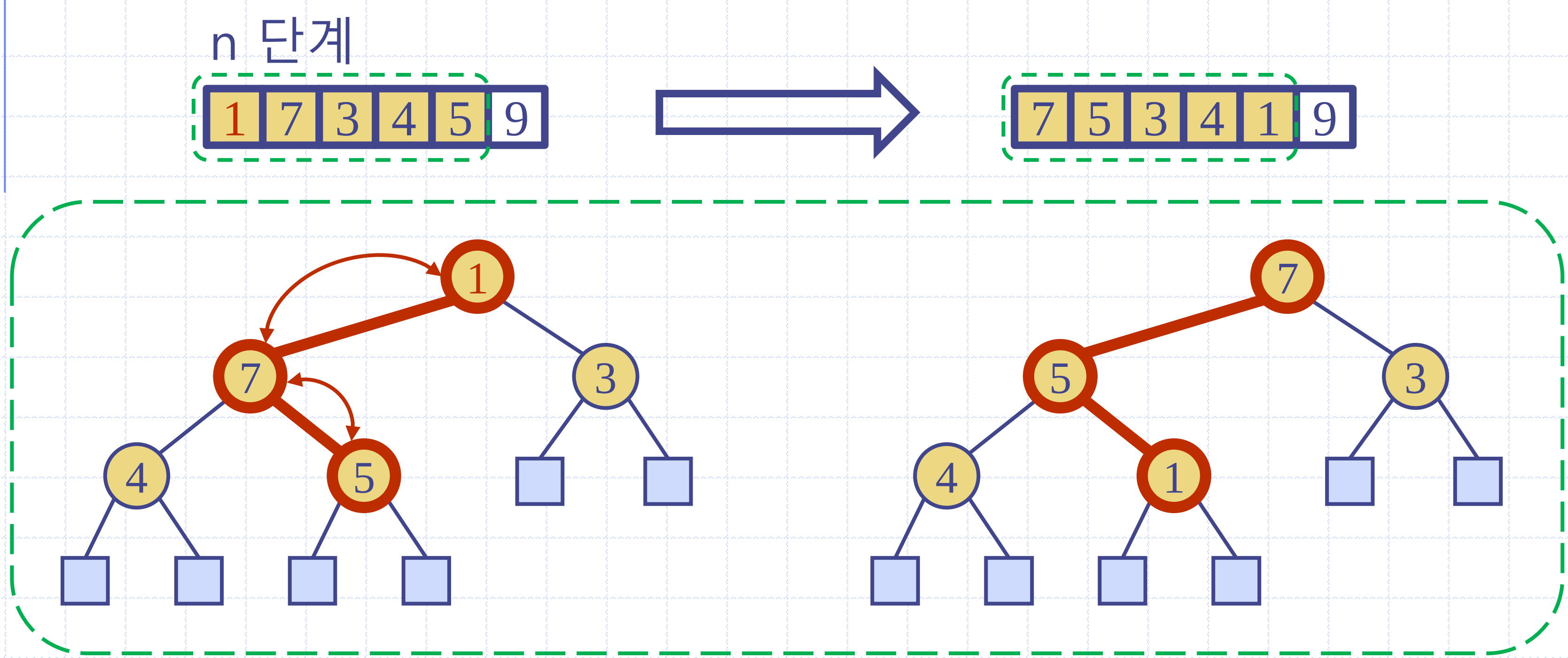
6 단계

9	7	3	4	5	1



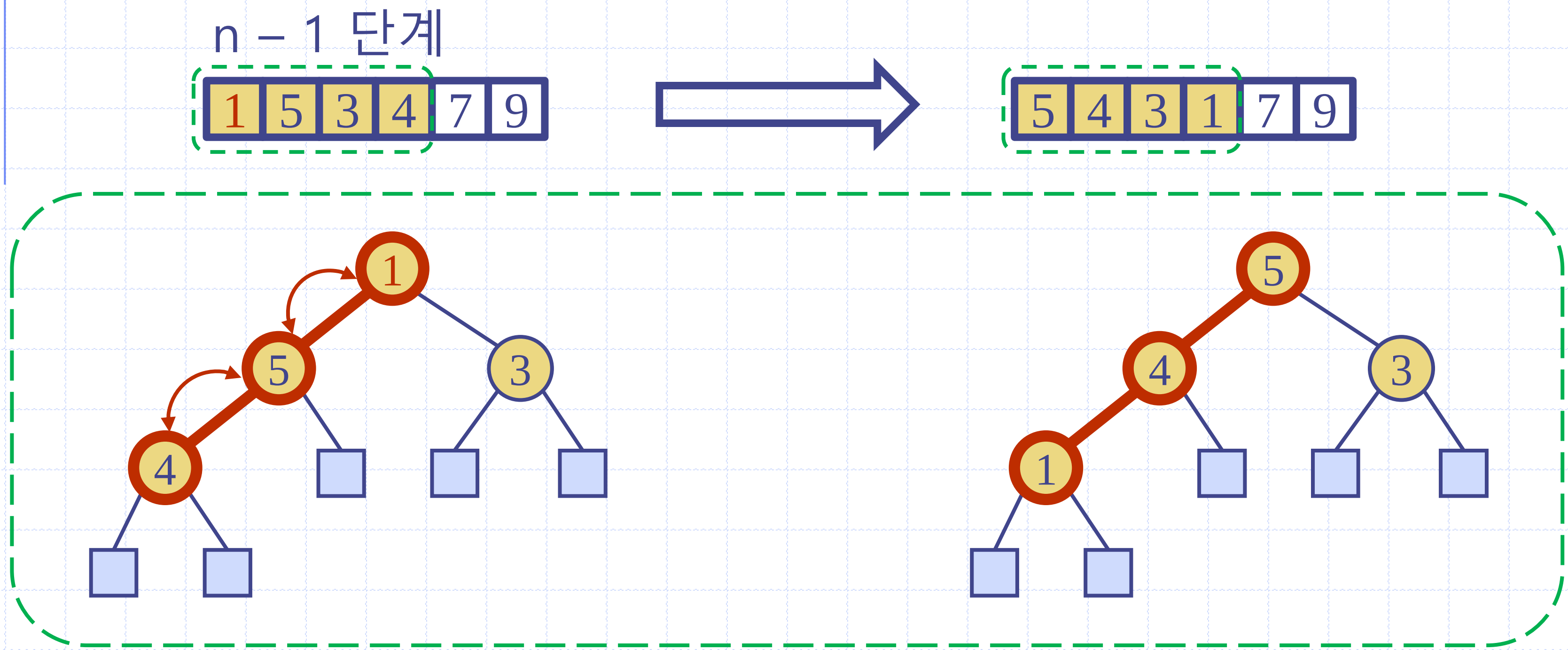
제자리 힙 정렬 예 (conti.)

- 2기 작업 시작



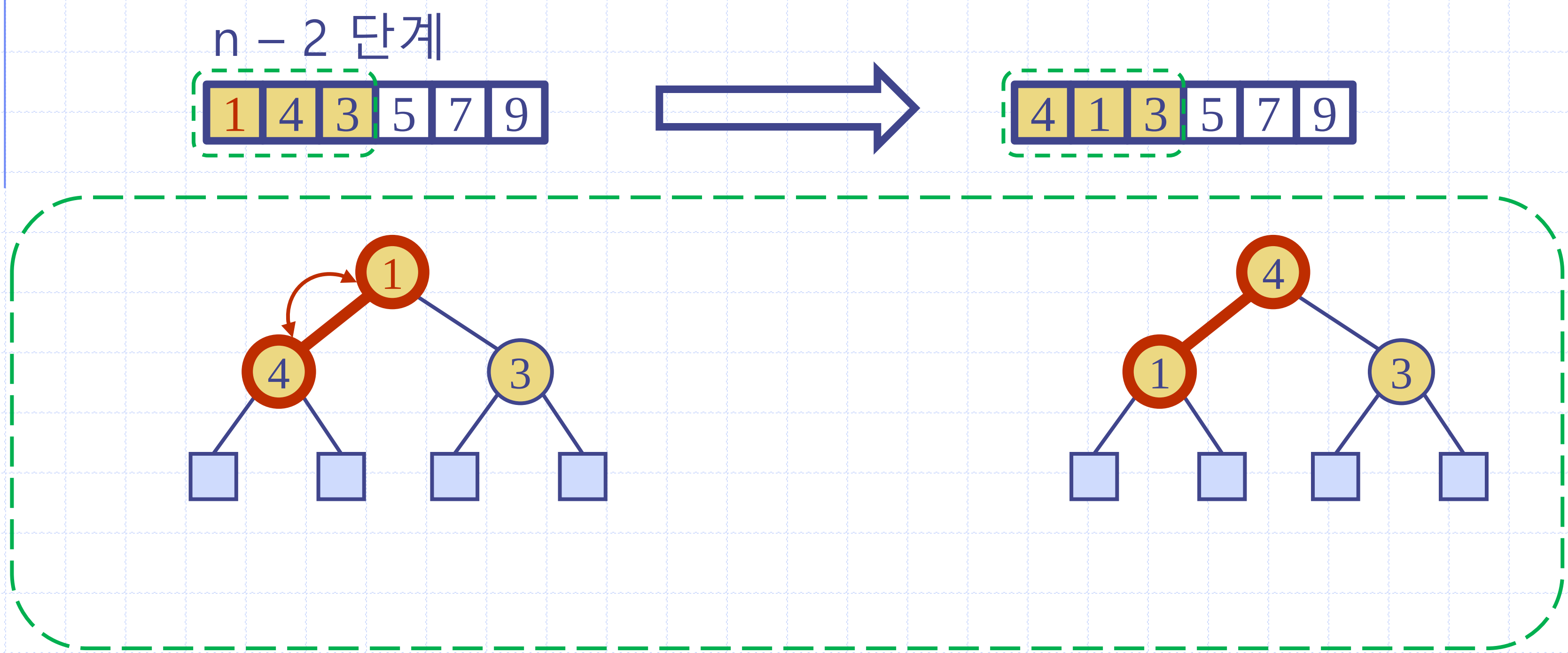
제자리 힙 정렬 예 (conti.)

- 2기 작업 계속



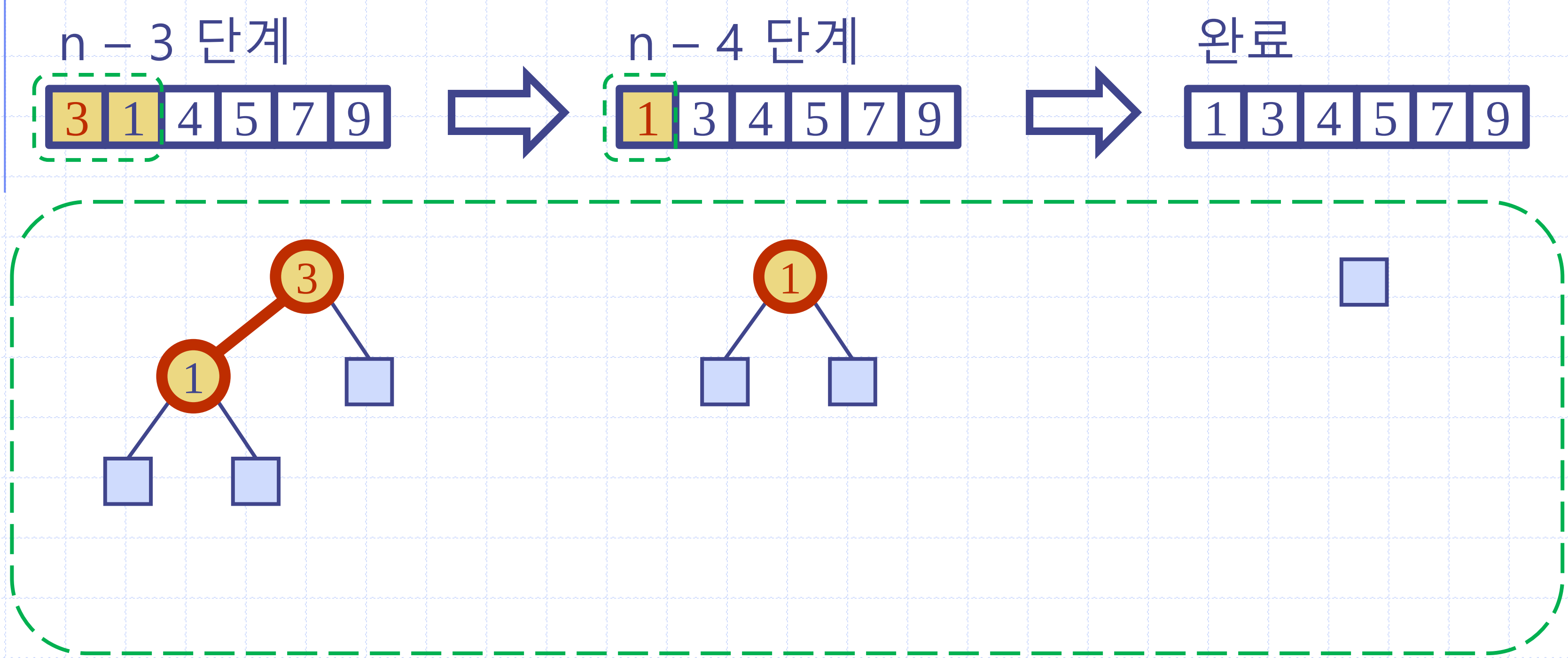
제자리 힙 정렬 예 (conti.)

- 2기 작업 계속

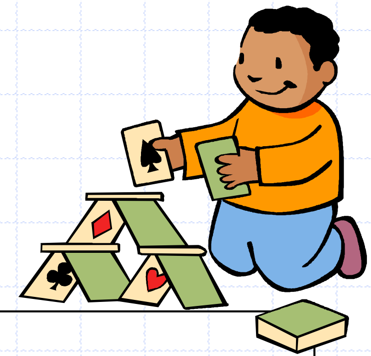


제자리 힙 정렬 예 (conti.)

- 2기 작업 계속
- 리스트 정렬 완료



상향식 힙생성



- heap-sort의 1기에서, *n*회의 연속적인 insertItem 작업을 사용하여 **O**(n log n) 시간에 힙을 생성했다
- 대안으로, 만약 힙에 저장되어야 할 모든 키들이 **미리** 주어진다면, **O**(n) 시간에 수행하는 **상향식 생성** 방식이 있다

Alg ***buildHeap(L)***
  input list ***L*** storing ***n*** keys
  output heap ***T*** storing the keys in ***L***

1. ***T*** ← ***convertToCompleteBinaryTree***(***L***)
2. ***rBuildHeap***(***T.root***())
3. **return *T***

Alg ***rBuildHeap(v)*** {recursive}
  input node ***v***
  output a heap with root ***v***

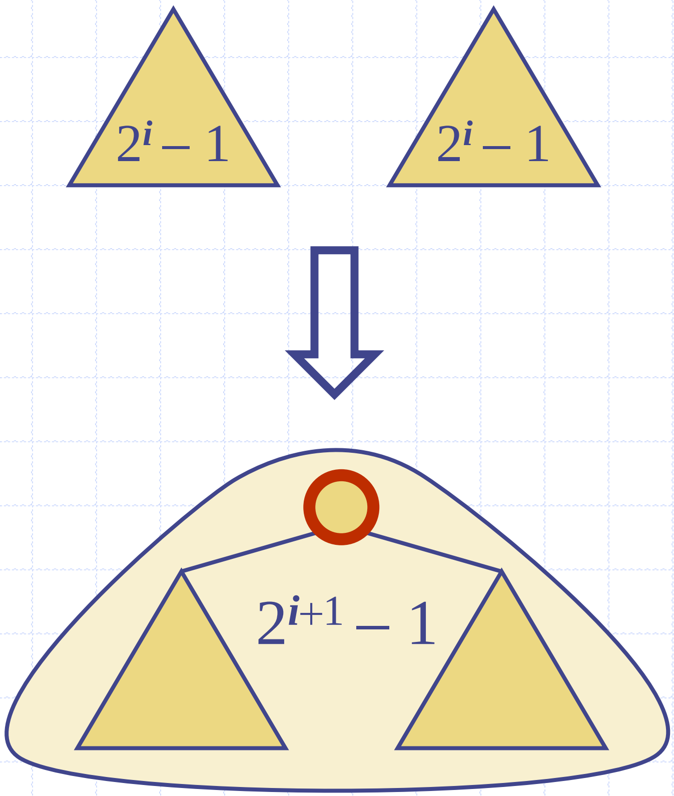
1. **if** (***isInternal***(***v***))
    rBuildHeap(***leftChild***(***v***))
    rBuildHeap(***rightChild***(***v***))
    downHeap(***v***)
2. **return**

convertToCompleteBinaryTree

- 리스트 L을 **완전이진트리** T로 전환
  - L이 **배열**로 주어졌다면, 첫번째 셀을 비운 배열에 복사
  - L이 **연결리스트**로 주어졌다면, 전환 작업에 선형시간 소요

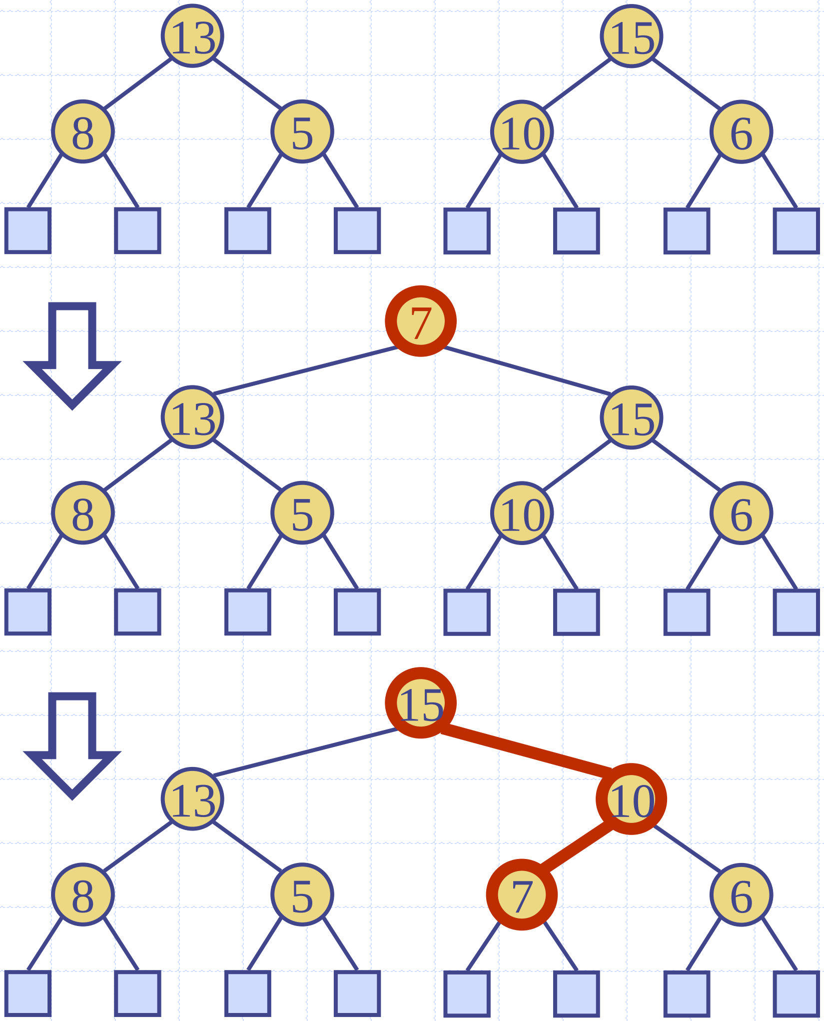
상향식 힙생성 (conti.)

- $\log n$ 단계만을 사용하여 주어진 n개의 키를 저장하는 힙 생성 가능
- 단계 i에서, 각각 $2^i - 1$개의 키를 가진 두 개의 힙을 $2^{i+1} - 1$개의 키를 가진 힙으로 **합병**



두 개의 힙을 합병

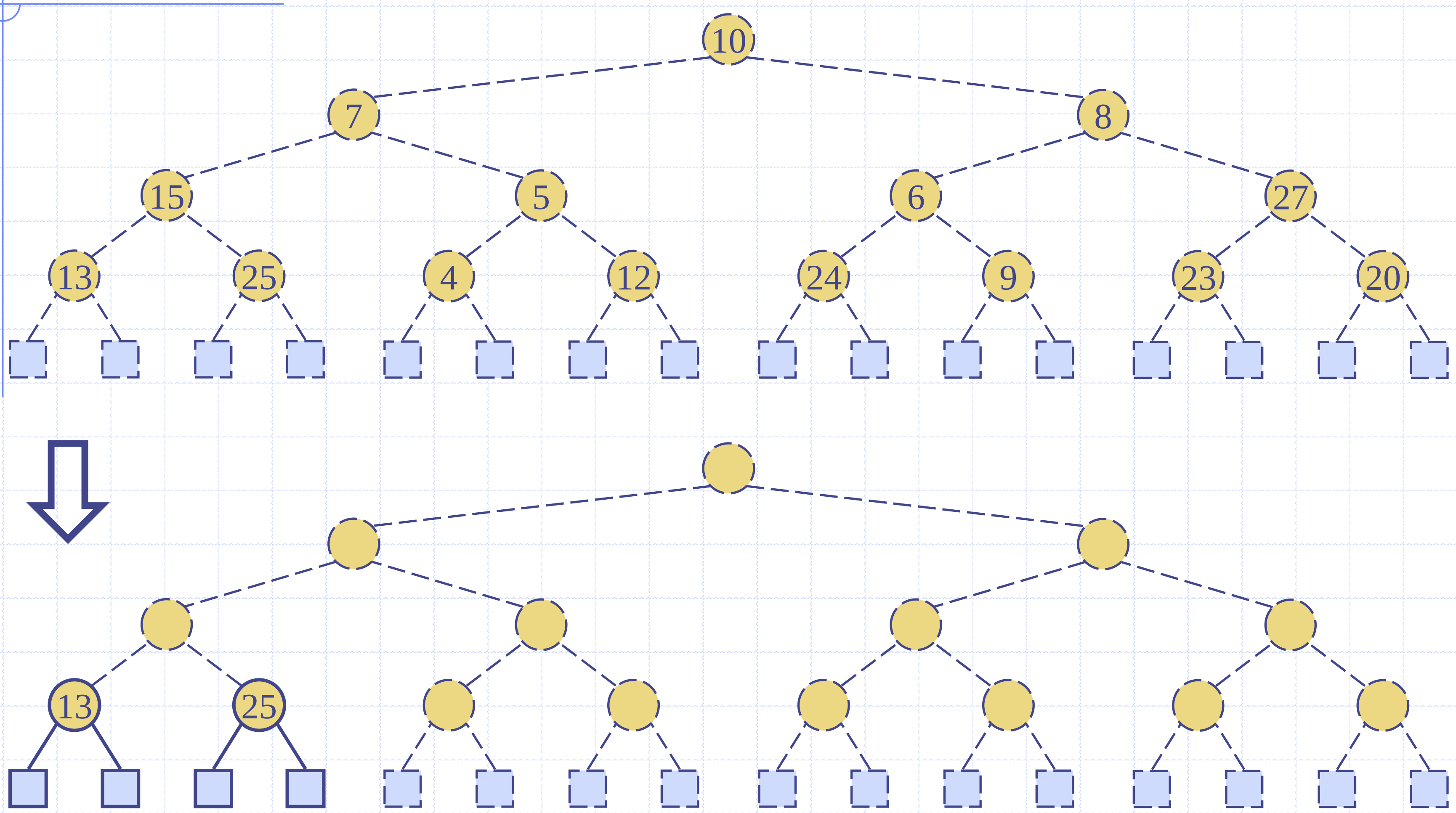
- 두 개의 힙과 키 ***k***가 주어졌을 때,
- ***k***를 저장한 노드를 루트로, 두 개의 힙을 부트리로 하는 새 힙을 생성
- **힙순서 속성**을 복구하기 위해 downheap을 수행



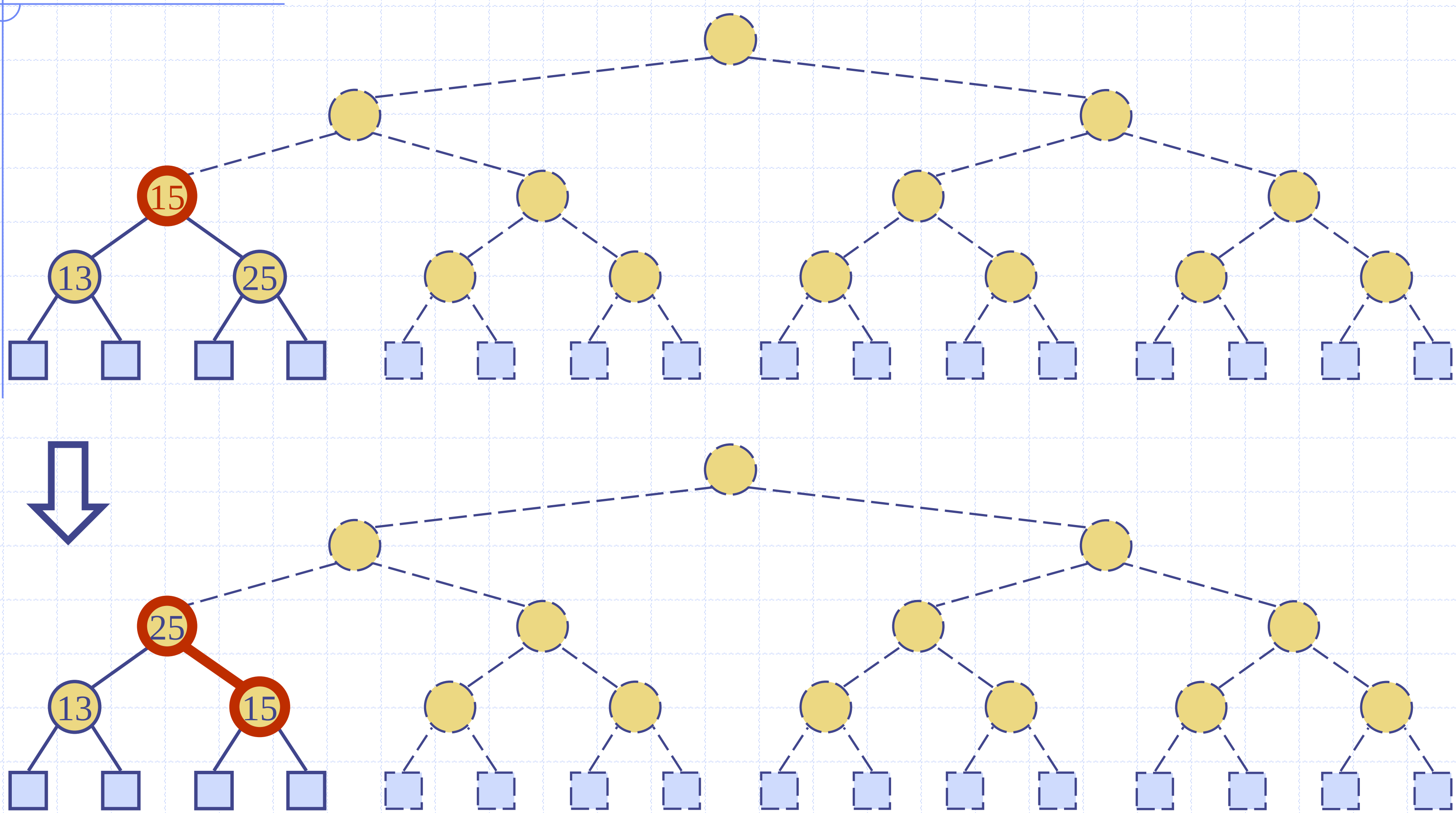
"상향식"이라 불리는 이유?

- 이 버전은 각 재귀호출이 힙인 부트리를 반환하는 방식 때문에 **상향식**이라 불린다
- 다시 말해, T의 **힙화**(heapification)는 외부노드에서 시작하여, 각 재귀호출이 반환함에 따라 트리 위쪽으로 진행
- 이 때문에 종종 **힙화한다**(heapify)고 말하기도 한다

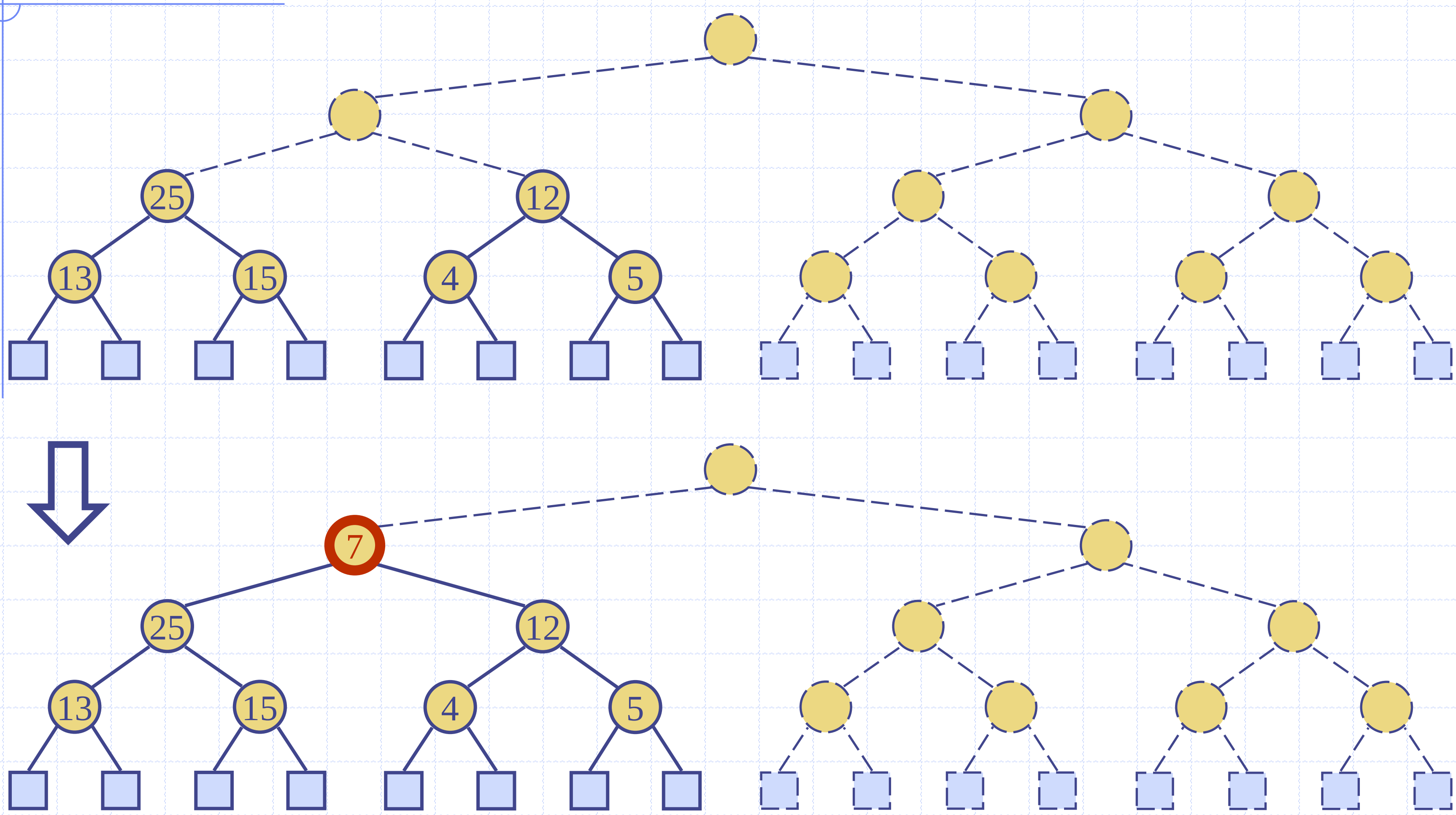
상향식 힙생성 예



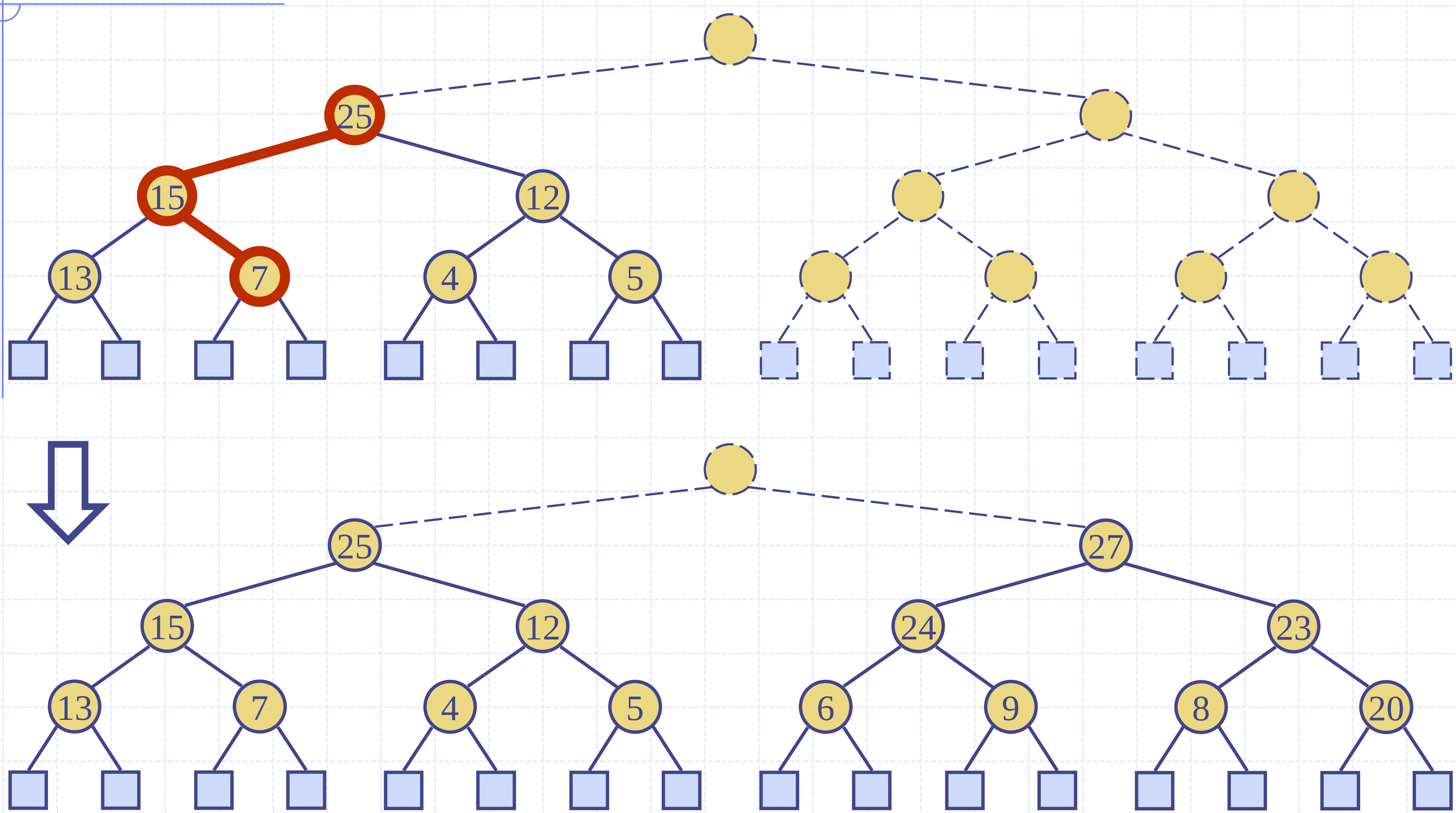
상향식 힙생성 예 (conti.)



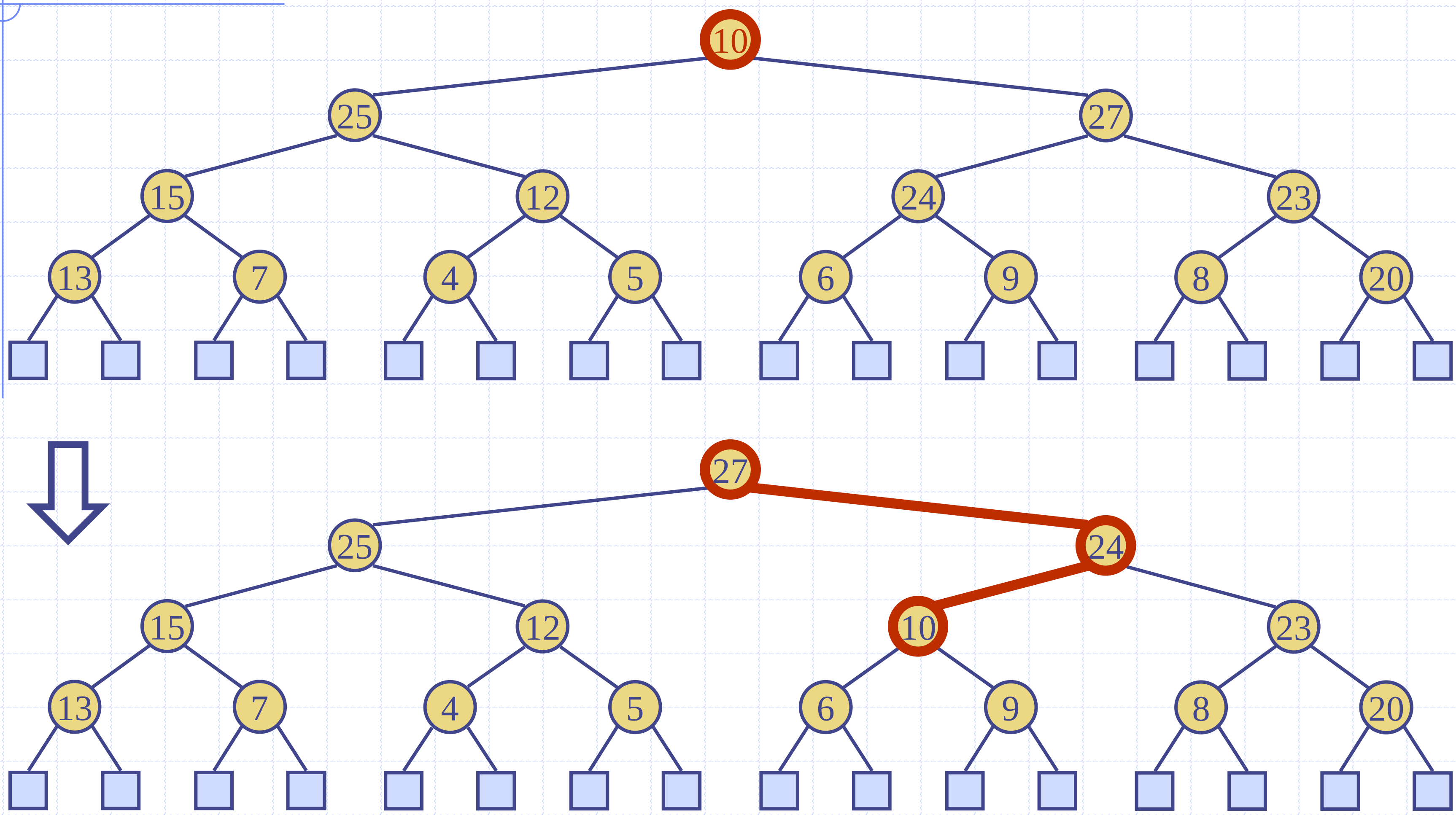
상향식 힙생성 예 (conti.)



상향식 힙생성 예 (conti.)



상향식 힙생성 예 (conti.)

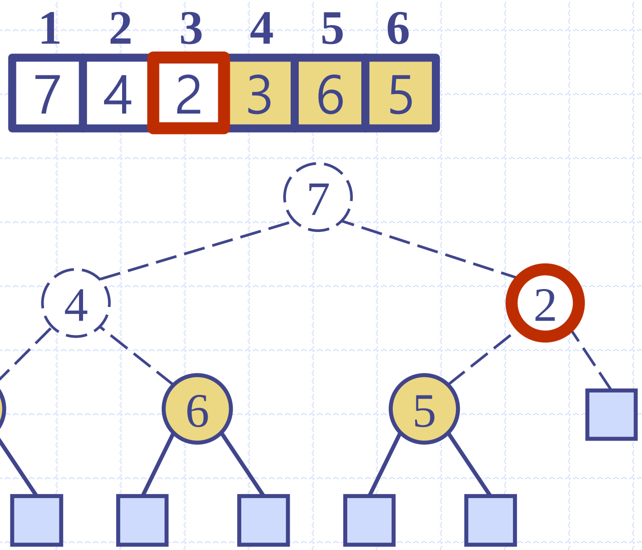


비재귀적 상향식 힙생성

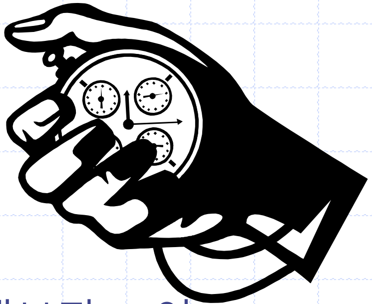
- 상향식 힙생성의 **비재귀** 버전
- 정렬되어야 할 리스트가 **배열**로 주어진 경우에만 적용
- 이 방식은 힙생성 절차가 "내부노드를 왼쪽 자식으로 가지는 가장 깊은 내부노드 가운데 가장 오른쪽 노드"에서 **시작**하여 루트로 향하는 후진방향으로 반복 수행
- **시작 노드**: 첨자 $\lfloor n/2 \rfloor$인 노드
- **예:** $n = 6$

Alg *buildHeap*(*A*)
    input array ***A*** of ***n*** keys
    output heap ***A*** of size ***n***

1. **for** ***i*** $\leftarrow \lfloor n/2 \rfloor$ **downto** 1
        downHeap(***i***, ***n***)
2. **return**



분석



- downheap의 최악의 경우 시간을 **대리경로**를 사용하여 시각화해보자 – 이 대리경로는 먼저 오른쪽 자식노드로 이동한 후 힙의 바닥까지 반복적으로 왼쪽 자식노드를 따라 이동 – 이 경로는 대리경로일 뿐 실제의 downheap 경로와는 다를 수 있다
- 각 노드는 최대 두 개의 대리경로에 의해 순회되므로, 대리경로들의 전체 노드 수는 $\mathbf{O}(n)$
- 따라서, 상향식 힙생성은 $\mathbf{O}(n)$ 시간에 수행
- 하지만, heap-sort 2기의 최악실행시간은 $\mathbf{\Omega}(n \log n)$
- 그래도, 상향식 힙생성은 n회의 연속적인 삽입보다 빠르므로 heap-sort 1기의 속도를 향상시킨다