Mathematica在数理学习中的应用

张静宁 PB14203209 2016-8-14

前言

我们知道，合理运用 Mathematica 能给我们的学习提供很大帮助，比如验算作业、绘制函数图形建立直观感受、处理大学物理实验数据等等。无论是从实用的角度，还是为了加深对数学理论的理解，Mathematica 都非常值得我们学习。以下是本人近期初学时做的一些笔记。

微积分

求极限

```
Limit[Sin[x] / x, x -> 0]
```
极限 正弦

1

```
Limit[(1 + x / n) ^n, n -> Infinity]
```
极限 无穷大

e^x

求导数

```
D[x^2, x] (*求一阶导 *)
```
偏导

$2 x$

```
D[Sin[x], {x, 2}] (* 求二阶导 *)
```
·· 正弦

$-\sin(x)$

```
D[x^3 y + y^2, {{x, y}}] (* 分别求x,y偏导 *)
```
偏导

$\{3 x^2 y, x^3 + 2 y\}$

```
D[x^3 y + y^2, x, y] (* 对x求导完，在对y求导 *)
```
偏导

$3 x^2$

```
D[x^3 y + y^2, {{x, y}, 2}] (* 求海森矩阵 *)
```
偏导

$$\begin{pmatrix} 6xy & 3x^2 \\ 3x^2 & 2 \end{pmatrix}$$

自定义函数

```
f1[x_] := x^2 + x + 1 (* 自定义单变量函数 *)
```

```
D[f1[a], a] (* 求导 *)
```
偏导

$2a + 1$

```
f2[x_, y_] := Sin[x y] / (x^2 + y^2) (* 自定义多变量函数 *)
```
正弦

```
D[f2[x, y], x] (* 再求导 *)
```
偏导

$$\frac{y\cos(xy)}{x^2+y^2} - \frac{2x\sin(xy)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

求积分

```
Integrate[1/(1 - x^3), x] (* 不定积分 *)
```
积分

$$\frac{1}{6}\log\left(x^2+x+1\right) - \frac{1}{3}\log(1-x) + \frac{\tan^{-1}\left(\frac{2x+1}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}}$$

```
Integrate[x^2, {x, 4, 1}] (* 定积分 *)
```
积分

-21

```
Integrate[x^2 + y^2, {x, 0, a}, {y, 0, b}] (* 重积分 *)
```
积分

$$\frac{1}{3}ab\left(a^2+b^2\right)$$

级数展开

```
Series[Exp[x], {x, 0, 10}] (* 在零点展开到10次 *)
```
级数　指数形式

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720} + \frac{x^7}{5040} + \frac{x^8}{40\,320} + \frac{x^9}{362\,880} + \frac{x^{10}}{3\,628\,800} + O\left(x^{11}\right)$$

```
Series[Cos[x]/x, {x, Pi, 3}] (* 在x=π点展开到3次*)
```
级数 圆周率

$$-\frac{1}{\pi}+\frac{x-\pi}{\pi^2}+\frac{(\pi^2-2)(x-\pi)^2}{2\pi^3}+\left(\frac{1}{\pi^4}-\frac{1}{2\pi^2}\right)(x-\pi)^3+O\left((x-\pi)^4\right)$$

微分方程

```
Solve[x^2 + a x + 1 == 0, x] (* 解方程 *)
```
解方程

$$\left\{\left\{x\to\frac{1}{2}\left(-\sqrt{a^2-4}-a\right)\right\},\left\{x\to\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2-4}-a\right)\right\}\right\}$$

```
Solve[x + y == 2 && x - y == 1] (* 解方程组 *)
```
解方程

$$\left\{\left\{x\to\frac{3}{2},\ y\to\frac{1}{2}\right\}\right\}$$

求解微分方程

```
DSolve[y'[x] + y[x] == a Sin[x], y[x], x] (* 解一阶常微分方程 *)
```
求解微分方程 正弦

$$\left\{\left\{y(x)\to\frac{1}{2}a(\sin(x)-\cos(x))+c_1 e^{-x}\right\}\right\}$$

```
DSolve[{y'[x] + y[x] == a Sin[x], y[0] == 0}, y, x] (* 代入一个边界条件 *)
```
求解微分方程 正弦

$$\left\{\left\{y\to\left(\{x\}\longmapsto-\frac{1}{2}a e^{-x}\left(-e^x\sin(x)+e^x\cos(x)-1\right)\right)\right\}\right\}$$

```
FullSimplify[y''[x] + y[x]^2 /. %107] (* 用/.将解带入一个表达式 *)
```
完全简化

$$\left\{\frac{1}{4}a e^{-2x}\left(-2e^x(-a\sin(x)+a\cos(x)-1)+e^{2x}(a(-\sin(2x))+a-2\sin(x)+2\cos(x))+a\right)\right\}$$

求解波动方程的定解问题

```
weqn = D[u[x, t], {t, 2}] == D[u[x, t], {x, 2}] (* 波动方程 *)
```
偏导 偏导

$$u^{(0,2)}(x,t)=u^{(2,0)}(x,t)$$

```
ic = {u[x, 0] == E^(-x^2), Derivative[0, 1][u][x, 0] == 1}(* 初始条件 *)
```
自然常数 导数

$$\left\{u(x,0)=e^{-x^2},\ u^{(0,1)}(x,0)=1\right\}$$

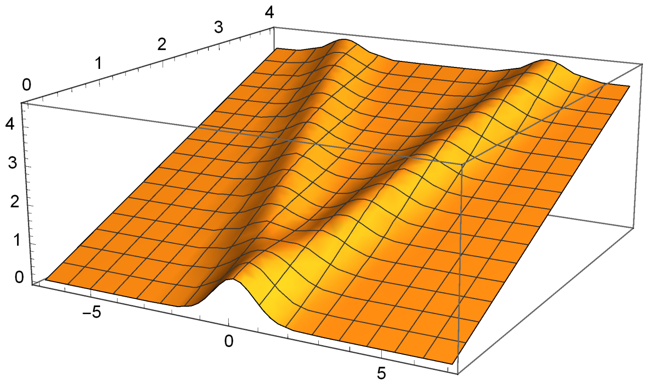
```
DSolve[{weqn, ic}, u, {x, t}] (* 求解波动方程的初值问题 *)
```
求解微分方程

$$\left\{\left\{u\to\left(\{x,t\}\longmapsto\frac{1}{2}\left(e^{-(x-t)^2}+e^{-(t+x)^2}\right)+t\right)\right\}\right\}$$

绘图

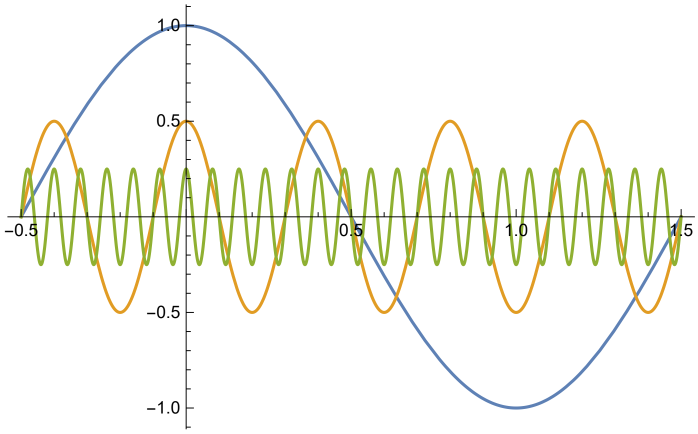
函数可视化

```
Plot3D[Evaluate[u[x, t] /. %114], {x, -7, 7}, {t, 0, 4}, PlotRange → All]
绘制…  计算                                     绘制范围   全部
(* 前面波动方程初值问题的图解 *)
```




```
Plot[Tooltip[{Cos[Pi x], 1/2 Cos[5 Pi x], 1/4 Cos[25 Pi x]}], {x, -1/2, 3/2}]
绘图  提示条   余弦 圆周率   余弦  圆周率    余弦   圆周率

(* 同时绘制多个函数 *)
```

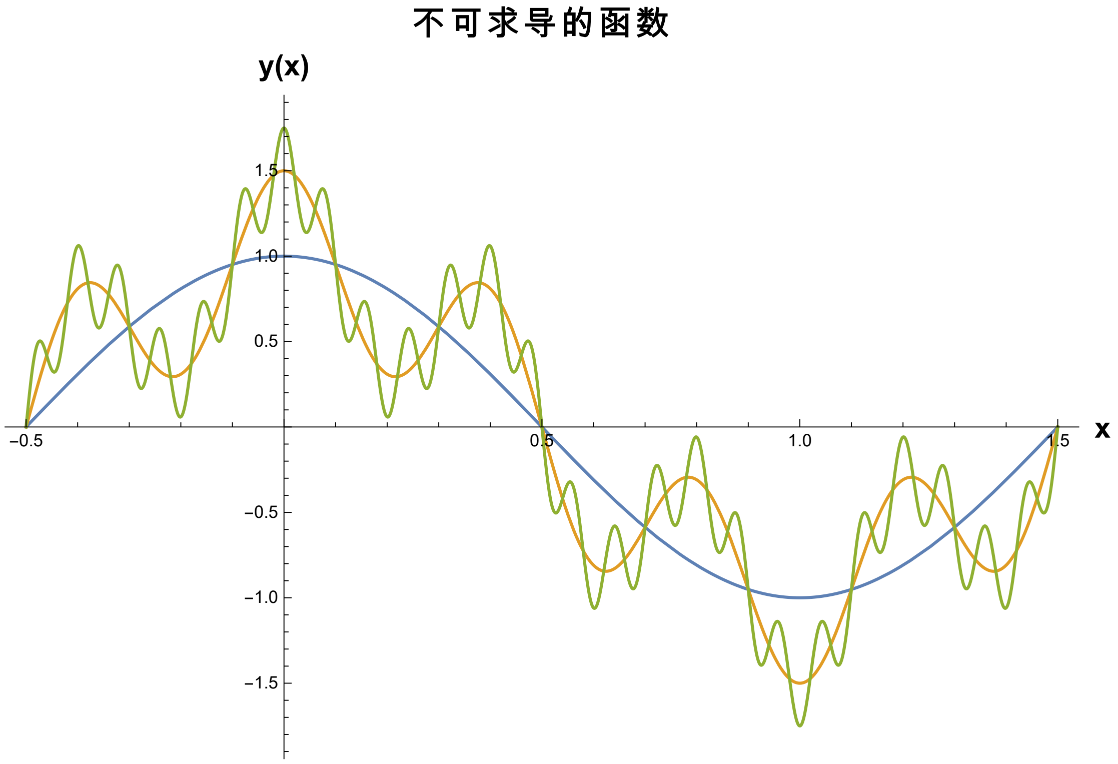


图像的美化

```
vofPlot0 = Plot[Tooltip[{Cos[Pi x], Cos[Pi x] + 1/2 Cos[5 Pi x],
           绘图  提示条   余弦 圆周率 余弦 圆周率    余弦  圆周率

    Cos[Pi x] + 1/2 Cos[5 Pi x] + 1/4 Cos[25 Pi x]}], {x, -1/2, 3/2}];
    余弦 圆周率    余弦  圆周率    余弦   圆周率
```

```
Show[vofPlot0,
显示
 AxesLabel → {Style["x", 15, Bold], Style["y(x)", 15, Bold]},
 坐标轴标签     样式              粗体    样式                  粗体
 PlotLabel →
 绘图标签
  Style["不可求导的函数", 18, FontFamily → "Adobe Fan Heiti Std", Bold],
  样式                    字体系列                                粗体
 ImageSize → Large]
 图像尺寸    大
```



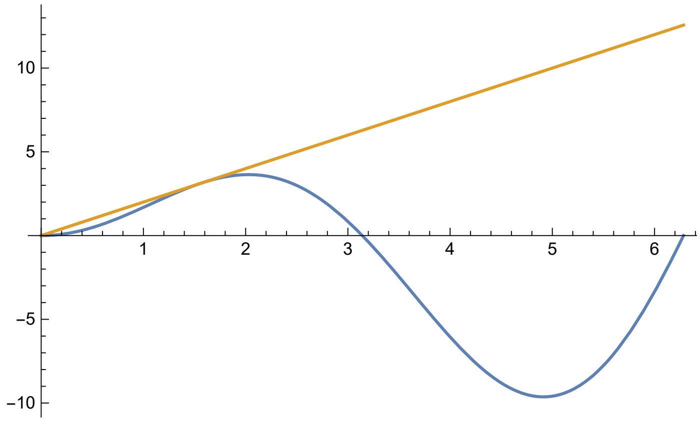
函数的切线

```
y[x_] := 2 x Sin[x];  (* 这里以一个函数为例*)
               正弦
y[x] == y'[x] x + b /. x → Pi / 2;
                          圆周率
bRule = Solve[%, b][[1]]; (* 求出截距b *)
        解方程
tangentY[x_] := y'[a] x + b /. bRule /. a → Pi / 2;  (* 求出切线方程 *)
                                            圆周率

tangentY[x]
```

$2x$

```
Plot[{y[x], tangentY[x]}, {x, 0, 2 Pi}] (* 画出原函数图像和切线 *)
绘图                                    圆周率
```



处理实验数据

输入数据

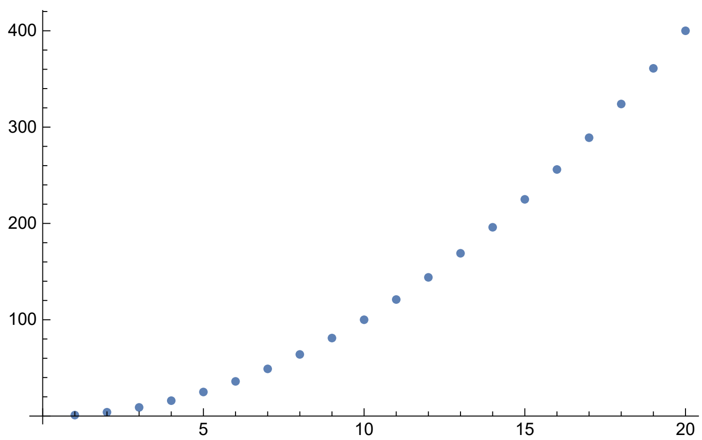
```
data0 = Table[x^2, {x, 1, 20}]
        表格
```

{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225, 256, 289, 324, 361, 400}

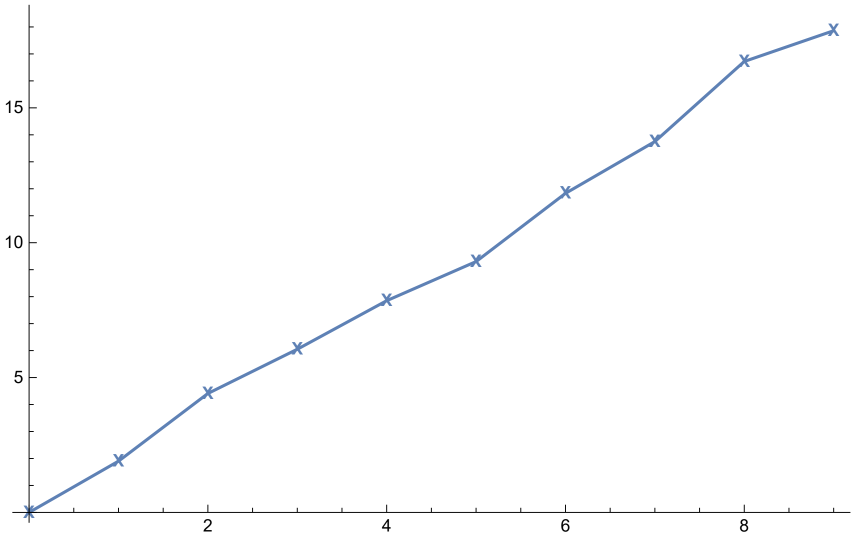
```
data1 = {{0.00, 0.00}, {1.00, 1.90}, {2.00, 4.41}, {3.00, 6.05}, {4.00, 7.85},
   {5.00, 9.30}, {6.00, 11.83}, {7.00, 13.75}, {8.00, 16.72}, {9.00, 17.86}};
```

绘制曲线

```
lpdata0 = ListPlot[data0]
          绘制点集
```



```
lpdata1 = ListPlot[data1, Joined -> True, PlotMarkers → {Style["X", Bold]}]
               绘制点集            连接点    真     绘制点的标记        样式          粗体
  (* 把数据点连起来 *)
```

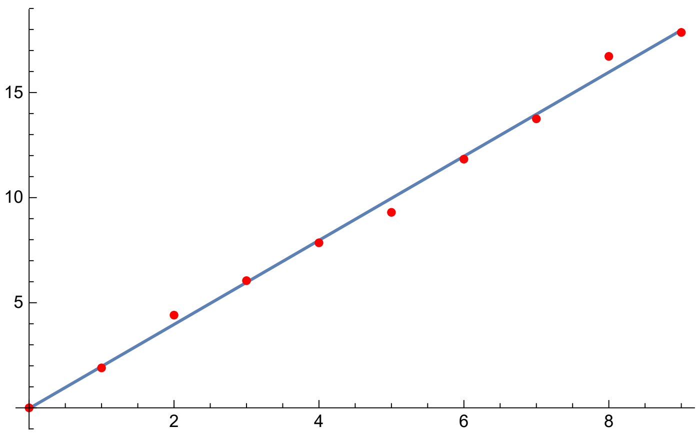


拟合曲线

```
fitdata1 = Fit[data1, {1, x}, x]
                拟合
```

$1.99982\,x - 0.0321818$

```
Show[Plot[fitdata1, {x, 0, 9}], ListPlot[data1, PlotStyle → Red]]
显示  绘图                       绘制点集         绘图样式      红色
```




```
fitting = LinearModelFit[data1, {1, x, x^2}, x]
               线性拟合模型
```

FittedModel[$0.0151515\,x^2 + 1.86345\,x + 0.149636$]

```
fitting["BestFit"]
```

$0.0151515\,x^2 + 1.86345\,x + 0.149636$

```
fitting[{"RSquared", "FitResiduals", "ANOVATable"}]
```

{0.996406, {−0.149636, −0.128242, 0.472848, 0.173636, 0.00412121, −0.545697, −0.0458182, −0.186242, 0.69303, −0.288},

	DF	SS	MS	F-Statistic	P-Value
x	1	329.94	329.94	1940.18	8.11825×10^{-10}
x^2	1	0.121212	0.121212	0.712776	0.426432
Error	7	1.1904	0.170056		
Total	9	331.252			

}

导入数据及完整示例

In[78]:=
```
epdata =
 Import["D:\\Mathematica\\Mathematica在数理学习中的应用示例\\ImportData.xlsx"]
 导入      偏导
 (* 导入一次实验的所有数据 *)
```

Out[78]=
```
{{{Hg光谱测量值与标准值关系拟合图, }, {测量值(nm), 标准值(nm)}, {364.97, 365.02},
  {365.44, 365.48}, {366.29, 366.3}, {404.59, 404.66}, {407.75, 407.78},
  {435.84, 435.84}, {545.97, 546.07}, {576.85, 576.96}, {578.92, 579.07}}}
```

In[79]:=
```
epdata1 = data[[1]][[3 ;;]] (* 提取出第一组数据 *)
```

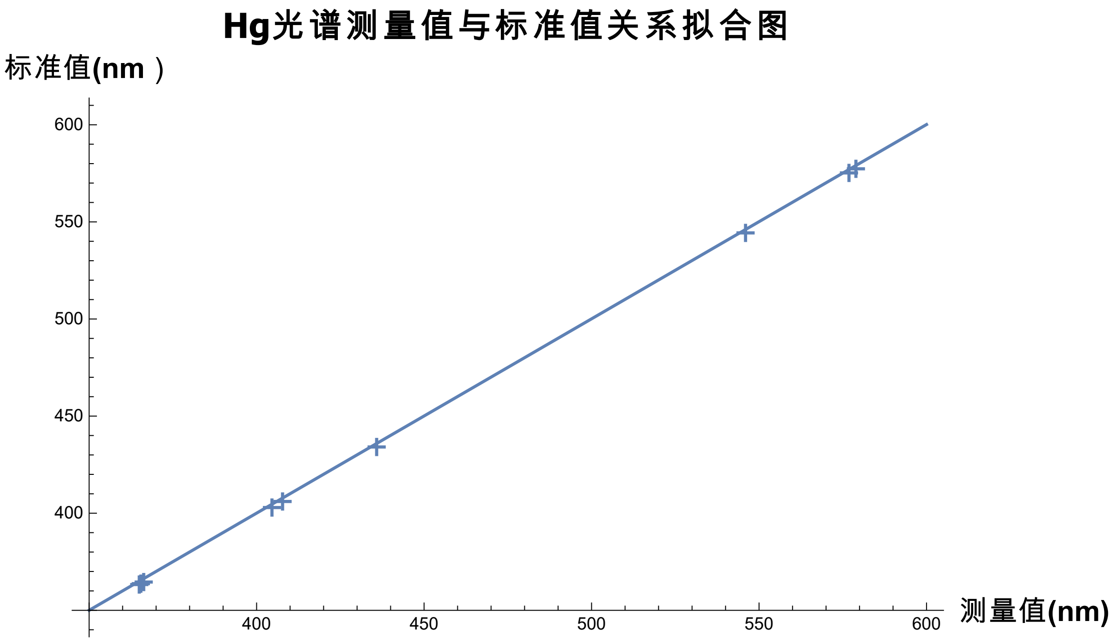
Out[79]=
```
{{364.97, 365.02}, {365.44, 365.48}, {366.29, 366.3},
 {404.59, 404.66}, {407.75, 407.78}, {435.84, 435.84},
 {545.97, 546.07}, {576.85, 576.96}, {578.92, 579.07}}
```

In[81]:=
```
fitepdata1 = Fit[data1, {1, x}, x] (* 拟合曲线 *)
                  拟合
```

Out[81]= $-0.139251 + 1.00045\,x$

```
Show[Plot[fitepdata1, {x, 350, 600}],
显示  绘图
 ListPlot[data1, PlotMarkers → {Style["+", 20]}],
 绘制点集          绘制点的标记      样式
 AxesLabel → {Style[epdata[[1]][[2]][[1]], 15, Bold],
 坐标轴标签      样式                                  粗体
    Style[epdata[[1]][[2]][[2]], 15, Bold]},
    样式                                  粗体
 PlotLabel → Style[epdata[[1]][[1]][[1]], 18,
 绘图标签      样式
    FontFamily → "Adobe Fan Heiti Std", Bold],
    字体系列                               粗体
 ImageSize → Large] (* 作图 *)
 图像尺寸      大
```

Out[82]=



总结

Mathematica 在数理学习中的应用远远不止这些，这篇笔记中只初步讨论了微积分、绘图、数据处理三个部分。我们可以在今后的学习中进一步探索，我将会在github上面分享我的学习笔记与代码（链接）。

参考资料

1、中文视频：Mathematica 实用入门
2、中文教程：WhyMathematicaCH.nb
3、官方教程：Wolfram 参考资料