合 肥 工 业 大 学 试 卷（ A ）

2021～2022 学年第 一 学期 课程代码 1400211B 课程名称 高等数学 A(上) 学分 6 课程性质:必修☑、选修☐、限修☐ 考试形式:开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）＿＿＿＿＿ 考试日期 2022.1.18 命题教师 高等数学课程组 系（所或教研室）主任审批签名＿＿＿＿＿

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2+n+1}+\dfrac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\dfrac{n}{n^2+n+n}\right)=$＿＿＿＿＿.

2. 已知函数 $y=y(x)$ 由方程 $\ln(x^2+y)=x^3y+\sin x$ 确定，则 $\mathrm{d}y\big|_{x=0}=$＿＿＿＿.

3. 曲线 $\begin{cases} x=\int_0^{1-t}e^{-u^2}\mathrm{d}u, \\ y=t^2\ln(2-t^2) \end{cases}$ 在 $t=1$ 处的切线方程为 $y=$＿＿＿＿＿.

4. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$，则 $f^{(2022)}(0)=$＿＿＿＿＿.

5. 若 $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)$（$C_1$ 和 C_2 为任意常数）是某二阶常系数齐次线性微分方程的通解，则该方程为＿＿＿＿＿＿＿＿＿＿.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 当 $x\to 0$ 时 $\alpha(x),\beta(x)$ 是非零无穷小量，$o(x)$ 表示 x 的高阶无穷小，给出以下四个命题：

① 若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，则 $\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$；

② 若 $\alpha^2(x)\sim\beta^2(x)$，则 $\alpha(x)\sim\beta(x)$；

③ 若 $\alpha(x)\sim\beta(x)$，则 $\alpha(x)-\beta(x)\sim o(\alpha(x))$；

④ 若 $\alpha(x)-\beta(x)\sim o(\alpha(x))$，则 $\alpha(x)\sim\beta(x)$.

其中所有真命题的序号是（　　）.

（A）①②　（B）①④　（C）①③④　（D）②③④

2. 设函数 $f(x)$ 满足 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{f(x)}{x-1}=1$，则（　　）.

（A）$f(1)=0$　（B）$\lim\limits_{x\to1}f(x)=0$　（C）$f'(1)=1$　（D）$\lim\limits_{x\to1}f'(x)=1$

3. 设函数 $f(x)$ 在 $x=x_0$ 处二阶导数存在，则（　　）.

（A）当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加时，$f'(x_0)>0$

（B）当 $f'(x_0)>0$ 时，$f(x)$ 在 x_0 的某邻域内单调增加

（C）当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凹函数时，$f''(x_0)>0$

（D）当 $f(x)$ 在 x_0 的某邻域内是凸函数时，$f''(x_0)<0$

4. 已知 $I_1=\int_0^1\dfrac{x\mathrm{d}x}{1+\cos x}$，$I_2=\int_0^1\dfrac{\ln(1+x)\mathrm{d}x}{1+\cos x}$，$I_3=\int_0^1\dfrac{\tan x\mathrm{d}x}{1+\cos x}$，则（　　）.

（A）$I_2<I_1<I_3$　（B）$I_1<I_2<I_3$　（C）$I_1<I_3<I_2$　（D）$I_3<I_2<I_1$

5. 下列反常积分中收敛的是（　　）.

（A）$\int_2^{+\infty}\dfrac{x}{e^x}\mathrm{d}x$　（B）$\int_2^{+\infty}\dfrac{\ln x}{x}\mathrm{d}x$　（C）$\int_2^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$　（D）$\int_2^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$

三、解答题（每小题 8 分，共 64 分）

1. 求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}$.

2. 已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(e^{x^2})-3f(1+\sin^2 x)}{x^2}=2$，求 $f'(1)$.

3. 设 $f(x^2-1)=\ln\dfrac{x^2}{x^2-2}$，且 $f[\varphi(x)]=\ln x$，求 $\int_2^3\varphi(x)\mathrm{d}x$.

4. 求函数 $f(x)=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}$ 的极值.

5. 计算积分 $\int_1^{e^2}\dfrac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

6. 已知双纽线 L 的极坐标方程为 $r^2=\cos2\theta$，求 L 围成的有界区域的面积.

7. 设函数 $f(x)=\begin{cases} x\arctan\dfrac{1}{x^2}, & x\neq0, \\ 0, & x=0, \end{cases}$ 讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

8. 设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y'+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}y=2+\sqrt{x}$ 满足条件 $y(1)=3$ 的解，求曲线 $y=y(x)$ 的渐近线.

四、证明题（本题满分 6 分）

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导，且 $f''(x)\geq0$. 证明：对不同实数 a,b，有

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

命题教师注意事项:1、主考教师必须于考试一周前将“试卷 A”、“试卷 B”经教研室主任审批签字后送教务科印刷。 2、请命题教师用黑色水笔工整地书写题目或用 A4 纸横式打印贴在试卷版芯中。