2023－2024 第一学期《高等数学 A》（标准答案）

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1．0

$\beta = o(\alpha)$，则有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{cx+x^2}{3x-x^3}=\dfrac{c}{3}=0, c=0$

2.6

由题设可知 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}[f(x)+1]= f(\frac{1}{2})+1=0, f(\frac{1}{2})=-1$，

$$f'(\frac{1}{2})=\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)-f(\frac{1}{2})}{x-\frac{1}{2}}=2\lim_{x\to\frac{1}{2}}\frac{f(x)+1}{2x-1}=6 .$$

3. -4

$y'=e^x(\cos x-\sin x), y''=-2e^x\sin x, y'''=-2e^x(\cos x+\sin x)$，

$y^{(4)}=-4e^x\cos x$，所以 $y^{(4)}(0)=-4$.

4．2

解 $y'=4x^3-4x=4x(x^2-1)$，令$y'=0$,得驻点$x=0, x=-1, x=1.$

比较 $f(0)=2, f(1)=1, f(-1)=1$，所以最大值为2.

5．$\ln\dfrac{\pi}{2}$

$$s=\int_1^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2}\,\mathrm{d}t=\int_1^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{(\frac{\cos t}{t})^2+(\frac{\sin t}{t})^2}\,\mathrm{d}t=\int_1^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\ln\frac{\pi}{2}$$

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1.D

A 例如 $f(x)=1+x^2$，当 $x\to 0$ 时；

B 例如 $f(x)=-\dfrac{1}{x^2}, g(x)=1+\dfrac{1}{x^2}$，当 $x\to 0$ 时均为无穷大，但 $\lim\limits_{x\to 0}[f(x)+g(x)]=1$；

C 例如 $f(x)=x^2, g(x)=\dfrac{1}{x}$，当 $x\to 0$ 时 $g(x)$ 是无穷大，但 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)g(x)=0$；

2.D

解　当 $x \to 0$ 时，（A），（B）两项中分母的极限为 0，其分子的极限也为 0，均可推导出 $f(0)=0$，所以（A），（B）都正确.

若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$，进而 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$ 存在，可见（C）也正确. 由排除法，应选（D).

事实上，可举（D）的反例：取 $f(x)=|x|$，$f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{|x|-|-x|}{x}=0$ 存在，但 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导.

3. C

解　因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+\sin\frac{1}{x}}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}\right)=1$

$\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}=0$

4. B

特征方程为 $r^2+r-2=0$，特征根为 $r_1=1, r_2=-2$，$f(x)=2xe^x$，$r=1$ 是特征方程的单根，所以特解应设为 $y^*=x(ax+b)e^x$.

5. B.

解： $\int_{-\infty}^{0}\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=-e^{\frac{1}{x}}\Big|_{-\infty}^{0}=-\lim\limits_{x\to 0^-}e^{\frac{1}{x}}+\lim\limits_{x\to-\infty}e^{\frac{1}{x}}=1$，收敛，

$\int_{0}^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx=e^{\frac{1}{x}}\Big|_{0}^{+\infty}=-\lim\limits_{x\to+\infty}e^{\frac{1}{x}}+\lim\limits_{x\to 0^+}e^{\frac{1}{x}}=+\infty$，发散.

三、求下列函数极限（每小题 8 分，共 16 分）

1．试求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n}\right)$.

解：因为$\dfrac{n^2}{n^2+n} \le n(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n}) \le \dfrac{n^2}{n^2+1}$，

而$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2}{n^2+1}=1$，由夹逼准则可知

$$\lim_{n\to\infty} n(\frac{1}{n^2+1}+\frac{1}{n^2+2}+\cdots+\frac{1}{n^2+n})=1.$$

2. 试求极限$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos^2 x}^{1}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t}{e^{x^2}-1}$.

解：原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin x\cos x\sqrt{1+\cos^4 x}}{2x}=\sqrt{2}$.

四、求导数及其应用（每小题 8 分，共 24 分）

1．问常数a为何值时，曲线$y=ax^2$与$\ln x$相切？并且求该切线方程.

解　设两曲线的切点为(x_0, y_0)，由题设有$\begin{cases} ax_0^2=\ln x_0, \\ 2ax_0=\dfrac{1}{x_0}, \end{cases}$ 解得$x_0=\sqrt{e}, a=\dfrac{1}{2e}$.

所求切线方程为$y=\dfrac{1}{\sqrt{e}}(x-\sqrt{e})+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{e}}x-\dfrac{1}{2}$.

2．求方程$x^2-y+1=e^y$所确定的函数$y=f(x)$的二阶导数$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

由方程式$x^2-y+1=e^y$可知$x=0$时$y=0$，

对方程式$x^2-y+1=e^y$两边关于x同时求导可得$2x-y'=e^y y'$，

把$x=0$代入有$y'(0)=0$，

对等式$2x-y'=e^y y'$两边关于x再求导可得$2-y''=e^y y'^2+e^y y''$，

把$x=0, y(0)=0, y'(0)=0$代入可得$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=1$.

3．求曲线$y=x+x^{\frac{5}{2}}$的凹凸区间及拐点.

解　$y''=\dfrac{15}{4}\sqrt{x}$，$x\in(0,+\infty)$时$y''>0$，

该曲线在它的定义区间$[0,+\infty)$内是凹的，无拐点；

五、求积分及其应用（每小题 8 分，共 16 分）

1．计算定积分$\int_{-\pi}^{\pi}(\frac{x\sin^2 x}{1+\cos^2 x}+x^2\cos x)\,\mathrm{d}\,x$.

原式$=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x\sin^2 x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}\,x+\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos x\,\mathrm{d}\,x=2\int_0^{\pi}x^2\cos x\,\mathrm{d}\,x$

$=2x^2\sin x\Big|_0^{\pi}-4\int_0^{\pi}x\sin x\,\mathrm{d}\,x=4x\cos x\Big|_0^{\pi}-4\int_0^{\pi}\cos x\,\mathrm{d}\,x=-4\pi$.

2. 设抛物线$y=ax^2+bx+c$过原点，当$0\le x\le 1$时$y\ge 0$，又已知该抛物线与x轴及直线$x=1$围成的图形面积为$\frac{1}{3}$，试确定a,b,c的值使得该平面图形绕x轴旋转一周所形成的立体体积最小.

解　因为曲线过原点，所以$c=0$．由题设有

$\int_0^1(ax^2+bx)\,\mathrm{d}\,x=\frac{a}{3}+\frac{b}{2}=\frac{1}{3},b=\frac{2}{3}(1-a)$，

$V=\pi\int_0^1[ax^2+\frac{2}{3}(1-a)x]^2\,\mathrm{d}\,x=\pi[\frac{a^2}{5}+\frac{1}{3}a(1-a)+\frac{4}{27}(1-a)^2]$，

$V'=\pi(\frac{4}{135}a+\frac{1}{27})=0,a=-\frac{5}{4},V''=\frac{4\pi}{135}>0$，

因而$a=-\frac{5}{4},b=\frac{3}{2}$时，该旋转体体积最小.

六、微分方程及其应用（本题满分 8 分）求方程$y'+\frac{y}{x}=\frac{\sin x}{x},y\big|_{x=\frac{\pi}{2}}=0$的特解.

解　该方程是一阶线性微分方程，它的通解是$y=\frac{1}{x}(\int\sin x\,\mathrm{d}\,x+C)$，

即为$y=\frac{C-\cos x}{x},y(\frac{\pi}{2})=0,C=0$，

所求特解为$y=-\frac{\cos x}{x}$

七、证明题（本题满分 6 分）若$f(x)$在$\left[0,1\right]$上有三阶导数且$f(1)=0$，且设$F(x)=x^3 f(x)$．证明：在（0，1）上至少存在一点ξ，使得$F'''(\xi)=0$.

分析　此时可直接利用泰勒公式也可三次利用罗尔定理进行证明.

证　（证法一）$F(x)$ 在 $x=0$ 的二阶麦克劳林公式为

$$F(x)=F(0)+F'(0)x+\frac{1}{2!}F''(0)x^2+\frac{1}{3!}F'''(\xi)x^3 \quad (\xi 在 0，x 之间)， \tag{①}$$

而

$$F'(x)=3x^2 f(x)+x^3 f(x)，$$

$$F''(x)=6xf(x)+6x^2 f'(x)+x^3 f''(x)，$$

所以

$$F(0)=F'(0)=F''(0)=0.$$

代入①式，$F(x)=\frac{1}{3!}F'''(\xi)x^3$. 又由$F(1)=f(1)=0$, 故 $F(1)$ 展开成麦克劳林公式时相应的 ξ 存在，且满足

$$F(1)=\frac{1}{3!}F'''(\xi)=0.$$

故存在 $\xi\in(0,1)$，使 $F'''(\xi)=0$.

（证法二）由题设，$F(x),F'(x),F''(x),F'''(x)$在$[0,1]$上存在，并由证法一知道

$$F(0)=F'(0)=F''(0)=0，且F(1)=1\cdot f(1)=0.$$

由 $F(x)$在$[0,1]$ 上满足罗尔定理条件，存在 $\xi_1\in(0,1)$，使 $F'(\xi_1)=0$. 再由 $F'(x)$在$[0,\xi_1]$上$F'(0)=F'(\xi_1)=0$，由罗尔定理，存在$\xi_2\in(0,\xi_1)$, 使$F''(\xi_2)=0$，又 $F''(x)$ 在 $[0,\xi_2]$ 上 $F''(0)=F''(\xi_2)=0$，由罗尔定理，存在 $\xi_3\in(0,\xi_2)\subset(0,1)$，使得$F'''(\xi_3)=0$.