合 肥 工 业 大 学 试 卷 （A）

2023~2024 学年第 一 学期 课程代码 1400071B 课程名称 线性代数 学分 2.5 课程性质：必修☑选修☐限修☐ 考试形式：开卷☐闭卷☑

专业班级（教学班）________ 考试日期 2023 年 12 月 10 日 10:20-12:20 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名 田可雷

一、填空题（每题 3 分，共 18 分）

1. $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 3 阶实方阵, $|\boldsymbol{A}|=-1, |\boldsymbol{B}|=2, |\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}|=1$. 则 $|\boldsymbol{A}^*-\boldsymbol{B}^{-1}|=$________________.

2. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0\\2&3\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}2&0\\2&4\end{pmatrix}$, 则 $(\boldsymbol{AB})^*=$________________.

3. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关. 则向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$ 的秩为________________.

4. $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶非零实方阵, 满足 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{O}$. 若非齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解, 则 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 线性无关解向量的最大个数为________________.

5. 若 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\x&4&y\\-3&-3&5\end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&6\end{pmatrix}$ 相似, 则 $x-y=$________________.

6. 二次型 $f(x_1,x_2,x_3)={x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2+4x_1x_3$ 的正惯性指数为________________.

二、单项选择题（每题 3 分，共 18 分）

1. $\boldsymbol{A}$ 为 3 阶实方阵, 若 $|\boldsymbol{A}|=0$, 下列说法正确的是（ ）

A. $\boldsymbol{A}$ 的任两行必成比例　　B. $\boldsymbol{A}^*$ 的任两行必成比例
C. 必有 $\boldsymbol{A}^*=\boldsymbol{O}$　　D. $\boldsymbol{A}$ 的任两列必成比例

2. $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 是 3 阶可逆实方阵, 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$, $\boldsymbol{E}$ 是 3 阶单位矩阵. 下列说法**错误**的是（ ）

A. 必有 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{E})=(\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{E})\boldsymbol{A}$　　B. 必有 $\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^*$
C. 必有 $(\boldsymbol{AB})^{-1}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}$　　D. 必有 $|\boldsymbol{A}|=|\boldsymbol{B}|$

3. $\boldsymbol{A}$ 是 3×4 的实矩阵, 且 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关. 下列说法正确的是（ ）

A. $\boldsymbol{A}$ 必有一列全为零　　B. $\boldsymbol{A}$ 必有三列线性相关
C. $\boldsymbol{A}$ 的任意两列必线性无关　　D. $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^T$ 可逆

4. $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 的实矩阵, $\boldsymbol{b}$ 是 m 维实列向量, 线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 有解的充分必要条件是（ ）

A. $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性无关　　B. $\boldsymbol{A}$ 的行向量组线性无关
C. $\boldsymbol{b}$ 可由 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组线性表示　　D. $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$

5. 3 阶实方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 均为正交矩阵, 下列选项**错误**的是（ ）

A. $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 必为正交矩阵　　B. $\boldsymbol{AB}^{-1}$ 必为正交矩阵
C. $\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{B}$ 必为正交矩阵　　D. $\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}^*$ 必为正交矩阵

6. $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 均为 3 阶实方阵, 且 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 相似, $\boldsymbol{C}$ 与 $\boldsymbol{A}$ 合同. 下述说法**错误**的是（ ）

A. $\boldsymbol{A}^3$ 与 $\boldsymbol{B}^5$ 相似　　B. 必有 $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}^T$　　C. 必有 $\boldsymbol{C}^T=\boldsymbol{C}$　　D. $\boldsymbol{A}^2$ 与 $\boldsymbol{C}^4$ 合同

三、（本题 12 分）

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&2&3\\0&1&0&0\\2&0&1&0\\4&0&0&1\end{pmatrix}$. (1) 求 $|\boldsymbol{A}|$; (2) 求 $\boldsymbol{A}_{21}+\boldsymbol{A}_{22}+\boldsymbol{A}_{23}+\boldsymbol{A}_{24}$, 其中 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 (i,j) 位置元的代数余子式.

四、（本题 12 分）

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2\\1&1\end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}, \boldsymbol{AY}=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}$. (1) 求 $\boldsymbol{Y}$; (2) 求 $\boldsymbol{X}^2$.

五、（本题 12 分）

已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,a,-1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(a,1,2)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(4,a^2,-4)^T$, 满足 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示且表示方法不唯一. (1) 求 a; (2) 求上述向量组的秩以及一个极大线性无关组, 并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

六、（本题 10 分）

已知 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\2&1&2\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

七、（本题 12 分）

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2{x_1}^2+2ax_2x_3(a>0)$ 经过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 变为 $b{y_1}^2+{y_2}^2-{y_3}^2$. (1) 求 a,b; (2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$.

八、（本题 6 分）

$\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 是 3 阶实方阵. 若齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $k(1,1,1)^T$, 其中 k 是任意常数. 证明: 对任意的 $1\leqslant i<j\leqslant 3$, $\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的极大线性无关组.

命题教师注意事项: 1. 主考教师必须于考试一周前将“试卷 A”、“试卷 B”经教研室主任审批签字后送教务科印刷。 2. 请命题教师用黑色水笔工整地书写题目或用 A4 纸横式打印贴在试卷版芯中。