第10章　真空中的稳恒磁场

1、**掌握**毕奥—萨伐尔定律，并会用该定律计算载流导体的磁场

2、**掌握**用安培环路定理计算磁场强度的条件和方法

3、**掌握**安培定律和洛仑兹力公式，会计算简单形状截流导体的磁力

4、**理解**磁介质中的安培环路定理，**理解**磁场强度的概念

第10章　真空中的稳恒磁场

一、基本概念

1 电流（强度）I

$$\boxed{I=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}}$$

规定：电流的方向为**正**电荷运动的方向。

2 电流密度$\vec{J}$

$$\boxed{\vec{J}=\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S}\vec{e}_n}$$

大小：该点处通过**垂直**于载流子运动方向的**单位面积**的电流。

方向：**正**电荷在该点的运动方向。

导体内 $\vec{J} = nq\vec{v}$ $I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$

3、稳恒电流

I 恒定 ← J 恒定 → 电荷分布恒定.

$$\boxed{\oint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq_{in}}{dt} = \sum I_i = 0}$$ —稳恒电流的条件

稳恒电场—稳定电荷分布产生的电场；由**运动电荷**产生, 而静电场由**静止电荷**产生.

$$\boxed{\text{满足}: \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0}$$

4 电动势ε

电源的电动势：等于把单位正电荷从负极经电源内部移至正极时非静电力所做的功。

规定：电源内部电势升高的方向为电动势的方向。

$$\varepsilon = \oint_L \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \int_-^+ \vec{E}_k \cdot d\vec{l}$$

方向：$U_{低} \rightarrow U_{高}$

5 磁矩 $\vec{m} = I_0 \Delta S \vec{n}$

6 磁感应强度B

量值（大小） $B = \dfrac{M_{\max}}{m}$ 或者 $B = \dfrac{d\Phi_m}{dS_{\perp}}$

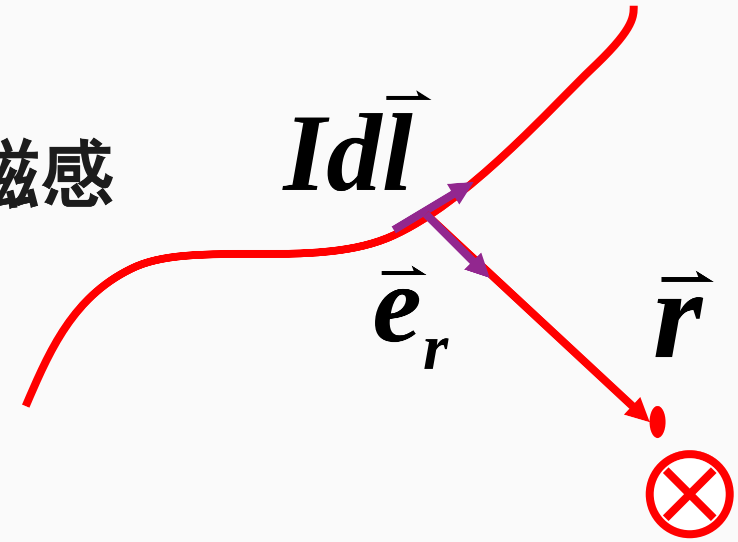
方向：实验线圈稳定平衡后，其磁矩的方向。

7 磁通量 $\Phi_m = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$

8 霍耳效应—在磁场中，截流导体上出现横向电势差的现象。

二、毕奥—萨伐尔定律

真空中电流元 $I d\vec{l}$ 在径矢 $\vec{r}$ 处的磁感应强度



$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{I d\vec{l} \times \vec{e}_r}{r^2}$$

方向的确定： $I d\vec{l} \times \vec{e}_r$

由磁场叠加原理得稳恒截流导体的磁场

$$\vec{B} = \int d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{I d\vec{l} \times e_r}{r^2}$$

运动电荷的磁场— $\vec{B}_0 = \dfrac{\mu_0}{4\pi}\dfrac{q\vec{v} \times \vec{r}_0}{r^2}$

几种典型的电流磁场大小：

1、直线电流： $B=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi a}\left(\sin\beta_2-\sin\beta_1\right)$

延长线上一点的磁场： $\boxed{B=0}$

半无限长载流直导线外的磁场： $\boxed{B=\dfrac{\mu_0 I}{4\pi a}}$

无限长载流直导线外的磁场： $\boxed{B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi a}}$

2、圆形载流导线轴线上的磁场： $B=\dfrac{\mu_0 R^2 I}{2(R^2+x^2)^{3/2}}$

若N匝线圈： $B' = NB$

圆心处的磁场： $B=\dfrac{\mu_0 I}{2R}$

圆弧电流圆心处： $B=\dfrac{\mu_0 I}{2R}\cdot\dfrac{\theta}{2\pi}=\dfrac{\mu_0 I}{2R}\cdot\dfrac{l}{2\pi R}$

3、载流长直螺线管内部的磁场： $B=\mu_0 nI$

4、载流螺绕环内部的磁场（近似）： $B=\mu_0 nI$

5、长直载流圆柱体的磁场：

$$\begin{cases} B_{内} = \dfrac{\mu_0 I r}{2\pi R^2} & （r \leq R） \\ B_{外} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & （r \geq R） \end{cases}$$

6、长直载流圆柱面的磁场：

$$\begin{cases} B_{内} = 0 & （r < R） \\ B_{外} = \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & （r > R） \end{cases}$$

三、磁力和磁力的功

1、载流导线在磁场中所受的磁力

安培力 $\boxed{\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}}$

大小：$\mathrm{d}F = I\mathrm{d}lB\sin\theta$

方向：由右手螺旋法则确定

任意形状载流导线在外磁场中受到的安培力

$$\boxed{\vec{F} = \int \mathrm{d}\vec{F} = \int I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B}}$$

注意

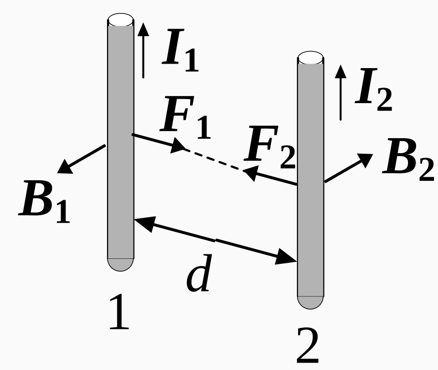
(1) 安培定律是矢量表述式 $\mathrm{d}\vec{F} \Rightarrow \mathrm{d}F_x, \mathrm{d}F_y, \mathrm{d}F_z$

(2) 若磁场为匀强场 ⟶ $\vec{F} = \left(\int I\mathrm{d}\vec{l}\right) \times \vec{B}$

在匀强磁场中的闭合电流受力 ⟶ $\vec{F} = \left(\oint I\mathrm{d}\vec{l}\right) \times \vec{B} = 0$

(3) 平行载流导线间的相互作用力

两根平行长直导线，分别通有电流I_1和I_2，二者间距为d，导线直径甚小于d，则每根导线单位长度线段受另一根电流导线的磁场作用力：



电流I_1在I_2处产生的磁场为 $$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

载有电流I_2的导线单位长度线段受力为

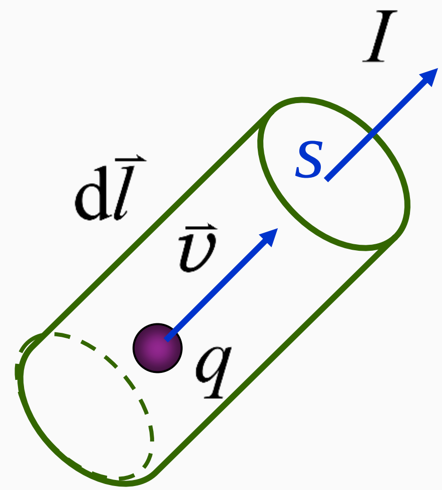
$$\boxed{F_2 = B_1 I_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}}$$

导线I_1单位长度线段受电流I_2的磁场作用力也等于这一数值

$$\boxed{F_1 = B_2 I_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}}$$

当I_1和I_2方向相同时，二者相吸；相反时，则相斥！

2、带电粒子在电磁场中的运动



$$\mathrm{d}\vec{F} = I\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} = nsqv\mathrm{d}\vec{l} \times \vec{B} = \mathrm{d}Nq\vec{v} \times \vec{B}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{F}}{\mathrm{d}N} = q\vec{v} \times \vec{B} = \vec{f}}$$ —洛伦兹力

安培力是大量带电粒子洛伦兹力的叠加

注意

(1) 洛伦兹力始终与电荷运动方向垂直，故 $\vec{f}$ 对电荷不作功

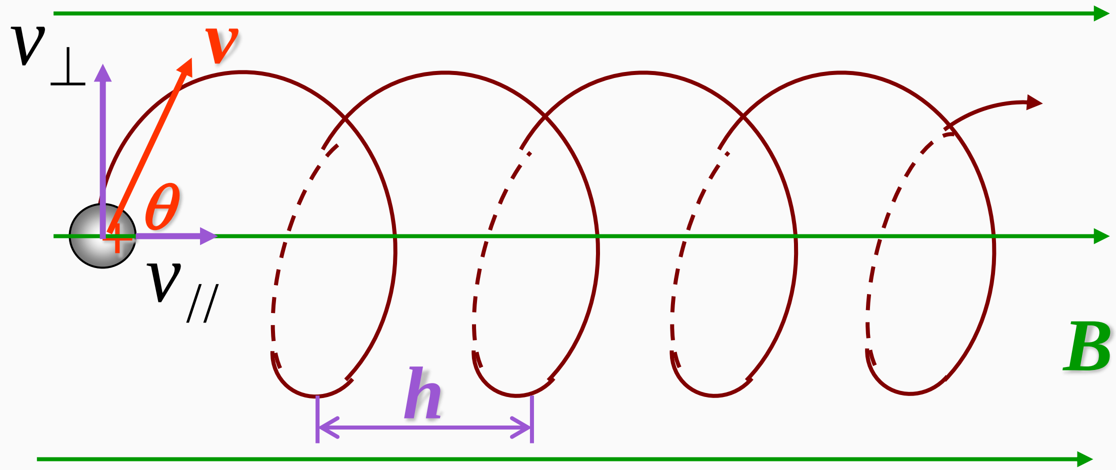
(2) 在一般情况下，空间中电场和磁场同时存在

$$\boxed{\vec{F} = \vec{f}_{\mathrm{e}} + \vec{f}_{\mathrm{m}} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} = \mathrm{d}\vec{p} / \mathrm{d}t = m\vec{a}}$$

(3) 带电粒子在均匀磁场中沿任意方向运动

$v_{//}$匀速直线运动

$v_{\perp}$匀速圆周运动



结论：等螺距螺旋运动

半径：$$R = \frac{mv_{\perp}}{qB} = \frac{mv\sin\theta}{qB}$$

周期：$$T = \frac{2\pi m}{qB}$$

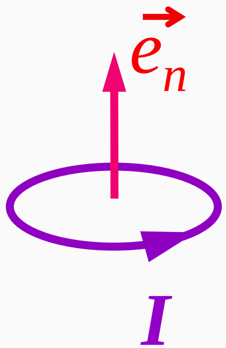
螺距：$$h = v_{//}T = \frac{2\pi m}{qB}v\cos\theta$$

3、载流线圈在均匀磁场中所受的磁力矩

对任意形状的平面载流线圈：

磁矩（磁偶极矩）：

$$\boxed{\vec{m} = I\vec{S} = IS\vec{e}_n}$$



其中$\vec{e}_n$为线圈平面的法线方向，且与线圈电流成右手螺旋关系

磁力矩总是要使线圈转到它的 $\vec{e}_n$ 的方向与磁场方向相一致的位置 $(\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} = 0)$

在均匀磁场中，载流线圈所受的磁力矩：

$$\boxed{\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}}$$

4、磁力的功 $A=\int_{\Phi_1}^{\Phi_2} I d\Phi \xrightarrow{I=\text{恒量}} A=I\Delta\Phi$

（1）对导线：切割磁力线的条数；

（2）对线圈：转动前后线圈中磁通量的改变量。

5、霍耳效应

$$U_{AA'}=R_H\frac{IB}{b} \qquad R_H=\frac{1}{nq}$$

四、描述稳恒磁场的两条基本定理

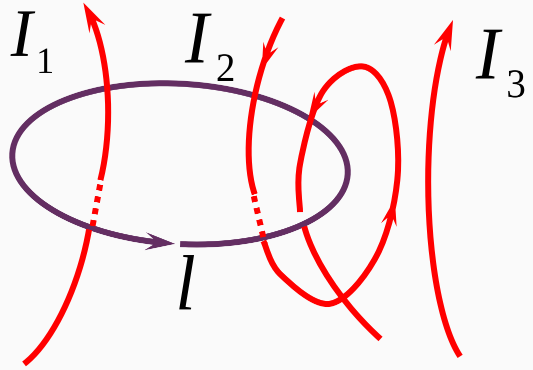
（1）磁场的高斯定理

$$\boxed{\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S}=0}$$

磁场是无源场（涡旋场）

（2）安培环路定理

$$\boxed{\oint_l \vec{B}\cdot d\vec{l}=\mu_0\sum I_i}$$



用安培环路定理计算磁场的条件和方法。

$\sum I_i$ 正负的确定：规定回路 l 绕行方向， I 与 l 满足右手螺旋法则时， I为正；反之为负。

积分路径或与磁感线垂直，或与磁感线平行。

介质中的安培环路定律

$$\oint_L \vec{H} \bullet d\vec{l} = \sum_{i=1}^{n} I_i \quad \vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} = \frac{\vec{B}}{\mu_0 \mu_r} = \frac{\vec{B}}{\mu}$$

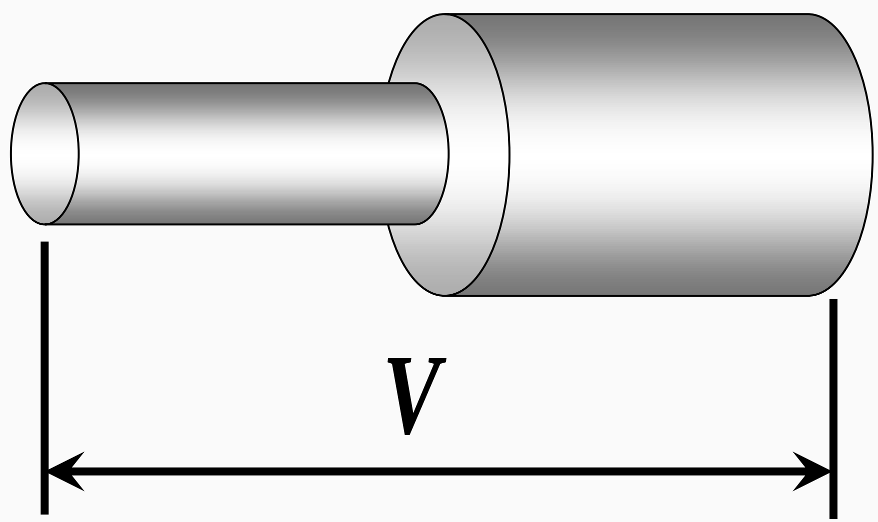
练习题（一）

1、两个粗细不同、长度相同的铜棒串联在一起，在两端加有一定的电压V，如图所示，略去分界处的边缘效应，问：（1）通过两棒的电流强度是否相同？

（2）通过两棒的电流密度是否相同？

（3）两棒中的电场强度是否相同？

（4）细棒两端和粗棒两端的电压是否相同？



解：（1）通过两棒的电流强度相同；（串联）

(2) $\delta=\dfrac{I}{S}$ —即通过两棒的电流密度不同；

$$I_1=I_2\,,\quad S_1\neq S_2\longrightarrow\quad \delta_1\neq\delta_2$$

(3) $E=\rho\delta$ —即两棒中的电场强度不同；

$$\rho_1=\rho_2\,,\quad \delta_1\neq\delta_2\longrightarrow\quad E_1\neq E_2$$

(4) $R=\rho\dfrac{l}{S}$ $\quad U_1=I_1R_1\neq I_2R_2=U_2$

$$\rho_1=\rho_2\,,\quad l_1=l_2\,,\quad S_1\neq S_2\longrightarrow\quad R_1\neq R_2$$

—即细棒两端和粗棒两端的电压不同。

2、一铜棒的横截面积为20*mm*×80*mm*，长为2*m*，两端的电势差为50*mV*。已知铜的电阻率为*ρ*＝1.75×10-8 *Ω·m*，铜内自由电子的数密度为8.5×1028/*m*3。求：

（1）棒的电阻；

（2）通过棒的电流；（3）棒内的电流密度；

（4）棒内的电场强度；（5）棒所消耗的功率；

（6）棒内电子的平均漂移速度。

解：（1）

$$R=\rho\frac{l}{S}=1.75\times10^{-8}\times\frac{2}{20\times80\times10^{-6}}=2.19\times10^{-5}\ (\Omega)$$

（2）

$$I=\frac{U}{R}=50\times10^{-3}/(2.19\times10^{-5})=2.28\times10^{3}\ (\mathrm{A})$$

（3）

$$\delta = \frac{I}{S} = 2.28\times 10^{3} /(20\times 80\times 10^{-6}) = 1.43\times 10^{6}\ (\mathrm{A/m^{2}})$$

（4）

$$E = \rho\delta = 1.75\times 10^{-8}\times 1.43\times 10^{6} = 2.50\times 10^{-2}\ (\mathrm{V/m})$$

（5）

$$P = IU = 2.28\times 10^{3}\times 50\times 10^{-3} = 114\ \ (\mathrm{W})$$

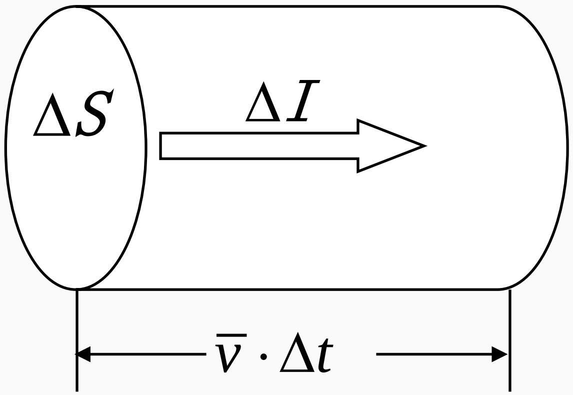
（6）

$$\overline{\upsilon} = \frac{\delta}{ne} = \frac{1.43\times 10^{6}}{8.5\times 10^{28}\times 1.60\times 10^{-16}}$$

$$= 1.05\times 10^{-4}(\mathrm{m/s})$$

3、金属导体中的传导电流是由大量的自由电子的定向漂移运动形成的，自由电子除无规则热运动外，将沿着电场强度$\vec{E}$的反方向漂移。设电子电量的绝对值为e，电子的“漂移”速度的平均值为$\bar{v}$，单位体积内自由电子数为n，求金属导体中的传导电流密度大小。

解：如图所示，Δt时间内，电子漂移的体积为 $\Delta V = \Delta S \cdot \bar{v}\Delta t$



该体积的电荷电量：

$$\Delta q = ne \cdot \Delta V = ne\Delta S \cdot \bar{v}\Delta t$$

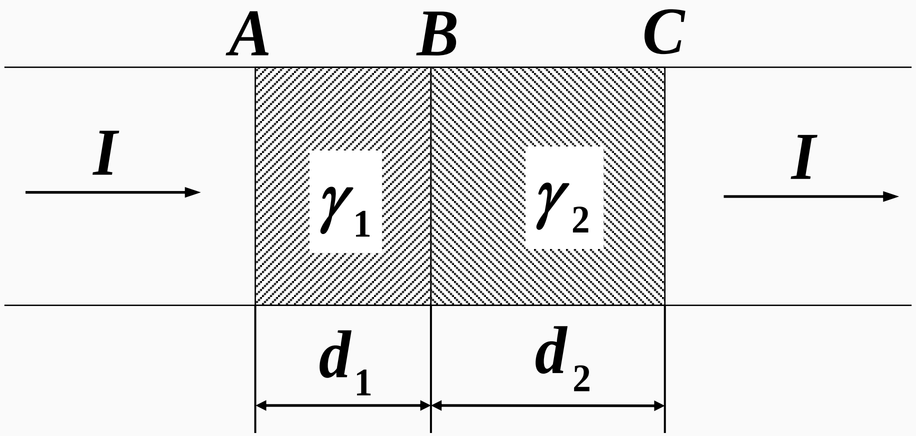
电流：$\Delta I = \dfrac{\Delta q}{\Delta t} = \dfrac{ne\Delta S \cdot \bar{v}\Delta t}{\Delta t}$

$$J = \frac{\Delta I}{\Delta S} = \frac{ne\Delta S \cdot \bar{v}\Delta t}{\Delta S \cdot \Delta t} = ne\bar{v}$$

4、在如图所示的一段电路中，两边为电导率很大的导体，中间有两层电导率分别为γ_1 和γ_2 的均匀导体，其厚度分别为d_1和d_2，导体横截面积为S，当导体中通有稳恒电流强度I时，求：

（1）两层导电体中电场强度E_1和E_2；

（2）电势差U_{AB}和U_{BC}。



解：(1) $\delta = \dfrac{I}{S} = \gamma E$

$$I = \gamma ES \quad \gamma_1 E_1 S = \gamma_2 E_2 S = I$$

$$E_1 = \frac{I}{\gamma_1 S}, \quad E_2 = \frac{I}{\gamma_2 S}$$

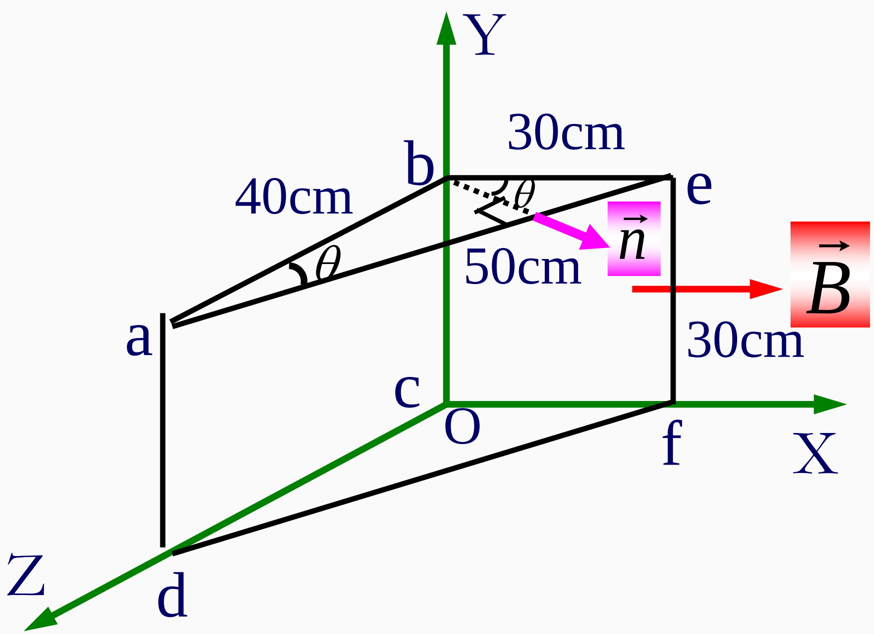
（2）$U_{AB} = E_1 d_1 = \dfrac{Id_1}{\gamma_1 S}, \quad U_{BC} = E_2 d_2 = \dfrac{Id_2}{\gamma_2 S}$

5、已知磁感应强度为 B=2.0T 的均匀磁场, 方向沿+x 轴, 如图所示. 求: (1) 通过图中abcd 面的磁通量; (2) 通过图中 befc 面的磁通量; (3)通过图中 aefd 面的磁通量；(4) 验证高斯定理.

解：$$\Phi_m^{abcd} = BS\cos\pi = -2.0\times0.4\times0.3 = -0.24\,\mathrm{Wb}$$

$$\Phi_m^{befc} = BS\cos 90^\circ = 0$$

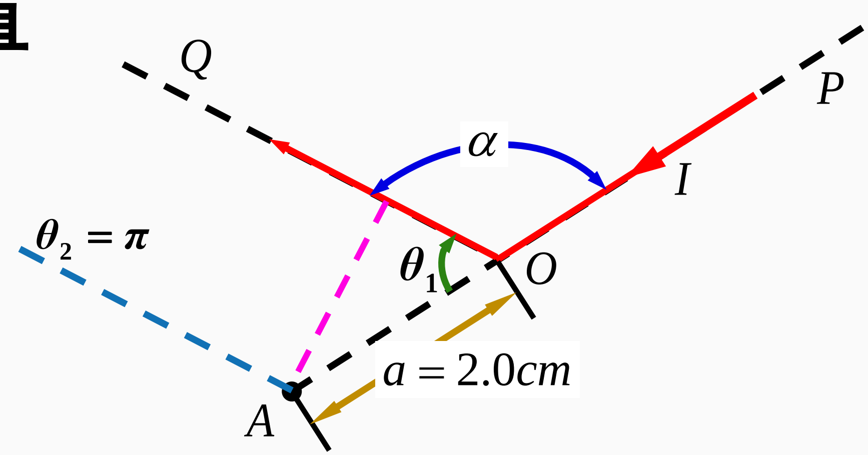
$$\Phi_m^{aefd} = BS\cos\theta = 2.0\times0.3\times0.5\times\frac{0.4}{0.5} = 0.24\,\mathrm{Wb} = -\Phi_m^{abcd}$$



验证：$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \sum_{i=1}^{5}\Phi_m^{(i)} = 0$$

练习题（二）

1、如图，在被折成钝角的长直导线通中有20安培的电流。求A点的磁感应强度。设 a=2.0cm，α＝120°.



解: $\vec{B} = \vec{B}_{OP} + \vec{B}_{OQ}$

由于A点位于$\overline{OP}$ 延长线上，所以 $B_{OP} = 0$　　$\theta_1 = \dfrac{\pi}{3}$; $\theta_2 = \pi$

$$B = B_{OQ} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a \sin\theta_1}\left[\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right]$$

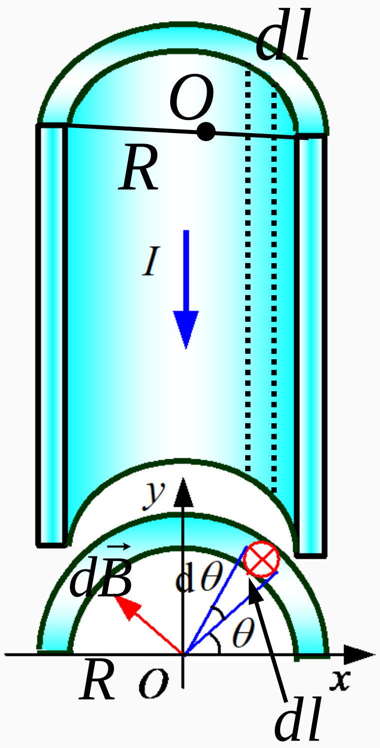
$$= \frac{10^{-7}\times 20}{2.0\times 10^{-2}\times 0.866}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)\right] = 1.73\times 10^{-4}(\mathrm{T})$$

方向：垂直于纸面向外。

2、在半径 $R = 1.0$ cm 的无限长半圆形金属薄片中, 自上而下有电流 I=5.0A 均匀通过, 如图所示. 求半圆片轴线上任一点 O 的磁感强度.

解: (1)如图建立坐标系.

(2) 分割电流元: 将无限长半圆形金属薄片分割成许多宽为 dl 的无限长载流直导线.



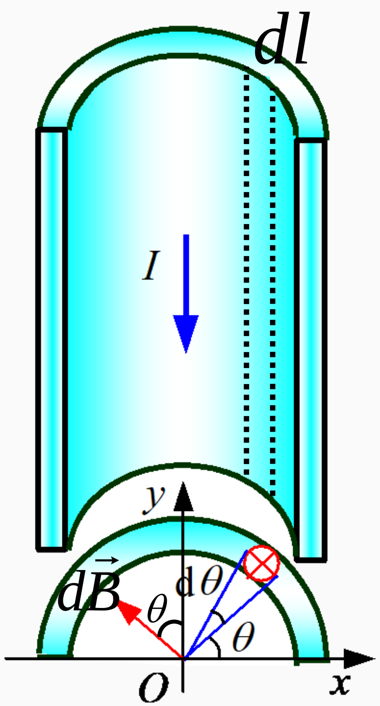
(3)电流元的电流:

$$dI = \frac{I}{\pi R} dl = \frac{I}{\pi R} R d\theta = \frac{I}{\pi} d\theta$$

(4) 电流元在 O 点产生的磁场

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} d\theta$$

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi R} = \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} d\theta$$



dB_x =-dB·sinθ， dB_y =dB·cosθ

由对称性可知： $B_y = \int \mathrm{d}B_y = 0$

直接计算得同样结果：

$$B_y = \int dB_y = \int_0^{\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} \cos\theta d\theta = 0$$

(5) 半圆形金属薄片在O点产生的总磁场

$$B = \int dB_x = -\int_0^{\pi} \frac{\mu_0 I}{2\pi^2 R} \sin\theta d\theta = -\frac{\mu_0 I}{\pi^2 R}$$

已知 R = 1.0 cm, I=5.0A, 可得

$$B = -6.37\times 10^{-5}\ (\mathrm{T})$$ **方向沿-x 轴.**

3、一载有电流I的圆线圈，半径为R，匝数为N。求轴线上离圆心x处的磁感应强度大小B，取R =12cm，I=15A，N=50，计算 x=0cm，x=5.0cm, x=15cm各点处的B值。

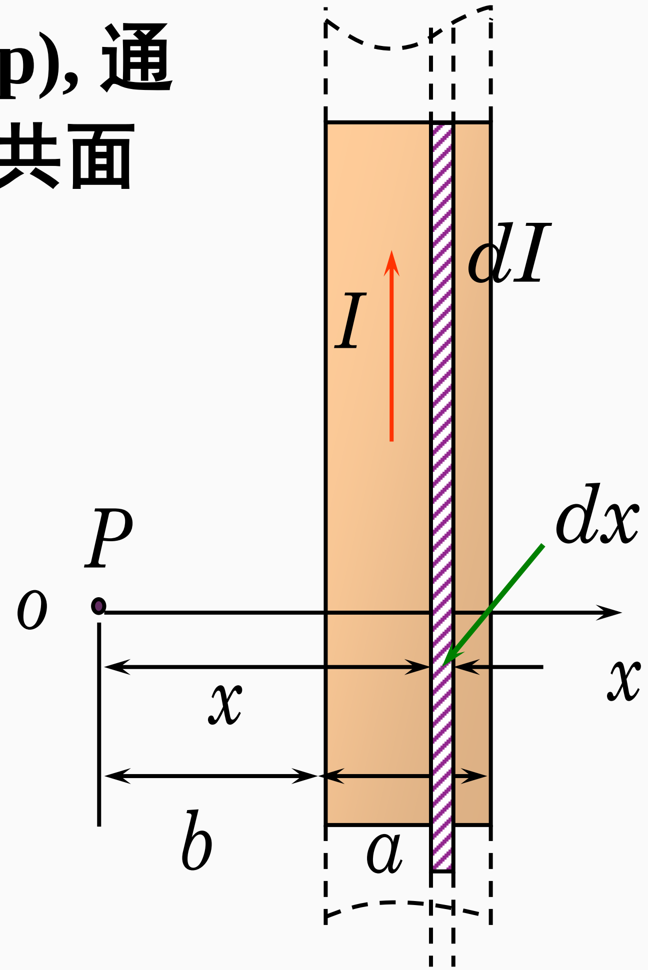
解： $B_x=\dfrac{\mu_0 NIR^2}{2\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

$$B\Big|_{x=0}=\frac{\mu_0 NIR^2}{2\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{4\pi\times10^{-7}\times50\times15\times(0.12)^2}{2\times(0.12)^3}\approx3.9\times10^{-3}(\mathrm{T})$$

$$B\Big|_{x=0.05\mathrm{m}}=\frac{\mu_0 NIR^2}{2\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{4\pi\times10^{-7}\times50\times15\times(0.12)^2}{2\times\left(0.12^2+0.05^2\right)^{\frac{3}{2}}}\approx3.0\times10^{-3}(\mathrm{T})$$

$$B\Big|_{x=0.15\mathrm{m}}=\frac{\mu_0 NIR^2}{2\left(R^2+x^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\frac{4\pi\times10^{-7}\times50\times15\times(0.12)^2}{2\times\left(0.12^2+0.15^2\right)^{\frac{3}{2}}}\approx9.6\times10^{-4}(\mathrm{T})$$

4、宽为 a 的无限长金属薄板(thin strip), 通有电流 I, 求距薄板左侧为 b 且与薄板共面的 P 点的磁感应强度 B.



解：(1)建立坐标系：以 P 点为坐标原点，向右为坐标正向；

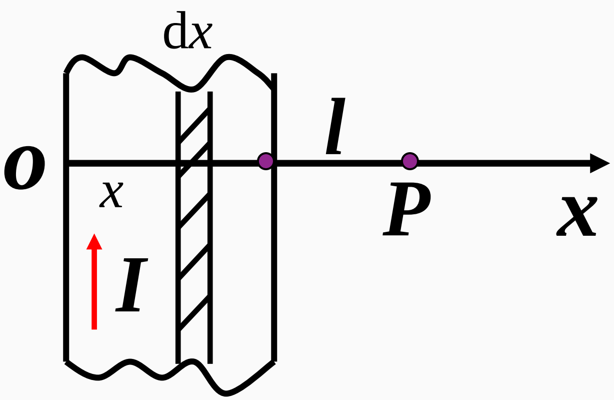
(2)分割电流元：将薄板分割为无限多宽为 dx 的无限长载流直导线；

(3)电流元的电流 $$dI=\frac{I}{a}dx$$

(4)电流元的磁场 $$dB=\frac{\mu_0 dI}{2\pi x}=\frac{\mu_0 I dx}{2\pi a x}$$

(5)薄板的总磁场 $$B=\int_L dB=\int_b^{a+b}\frac{\mu_0 I dx}{2\pi a x}=\frac{\mu_0 I}{2\pi a}\ln\frac{a+b}{b}$$

方向垂直于薄板向外



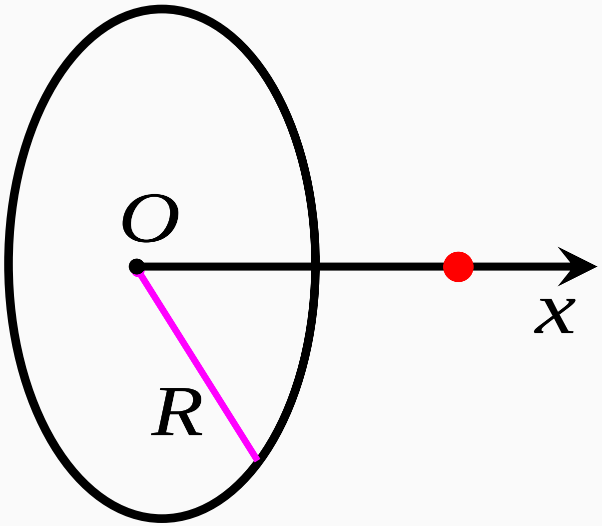
解二：把薄金属板分割成无限长载流直导线的电流元，在x处取一电流元，

$$dI = \frac{I}{a} dx \to dB = \frac{\mu_0 dI}{2\pi(l+a-x)}$$

方向垂直于薄板向内

$$B = \int dB = \int_0^a \frac{\mu_0 I dx}{2\pi a(l+a-x)} = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \ln \frac{l+a}{l}$$

5、半径为*R*的圆环，均匀带电，单位长度所带的电量为λ，以每秒*n*转绕通过环心并与环面垂直的轴作等速转动。试求：(1)环中的等效电流；(2)环的等效磁矩大小。



解:(1) $I = qn = 2\pi R\lambda n$

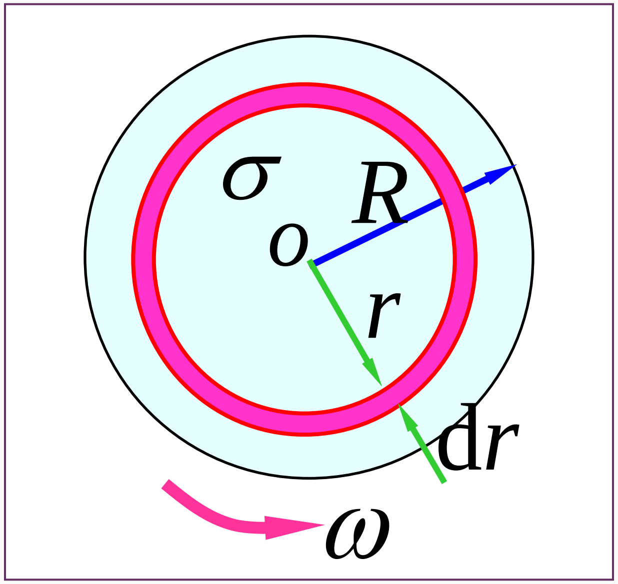
(2) $m = IS = 2\pi R\cdot\lambda\cdot n\cdot\pi R^2 = 2\pi^2 R^3\lambda n$

推广：若已知圆环带有电荷*q*，则结果又如何？

（1） $I = \dfrac{q}{T} = \dfrac{q}{\frac{1}{n}} = nq$

（2） $m = IS = nq\cdot\pi R^2$

6、半径为 R 的带电薄圆盘，电荷面密度为σ，并以角速度 ω 绕通过盘心垂直于盘面的轴转动，求：(1) 圆盘中心的磁感应强度；(2) 圆盘的等效磁矩。



$$\begin{cases} \sigma > 0, & \vec{B} \text{ 向外} \\ \sigma < 0, & \vec{B} \text{ 向内} \end{cases}$$

解法一：由圆电流的磁场求.

将圆盘分割成细圆环，其电流为

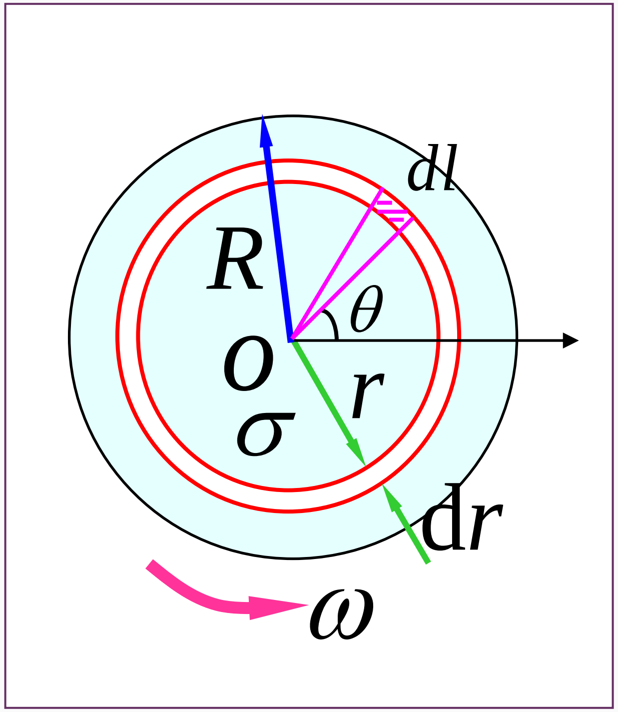
$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\upsilon}{2\pi r} dq = \frac{\omega}{2\pi} dq$$

$$= \frac{\omega}{2\pi} \sigma 2\pi r dr = \sigma \omega r dr$$

$$dB = \frac{\mu_0 dI}{2r} = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} dr$$

$$B = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{2} \int_0^R dr = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2}$$

解法二: 由匀速运动点电荷的磁场求.



在圆盘上划分出半径在 $r \sim r+dr$ 之间，角度在 $\theta \sim \theta+d\theta$ 之间的**小面元,**

其电荷为 $dq = \sigma dl dr = \sigma r d\theta dr$,

此电荷在圆盘中心产生的磁场:

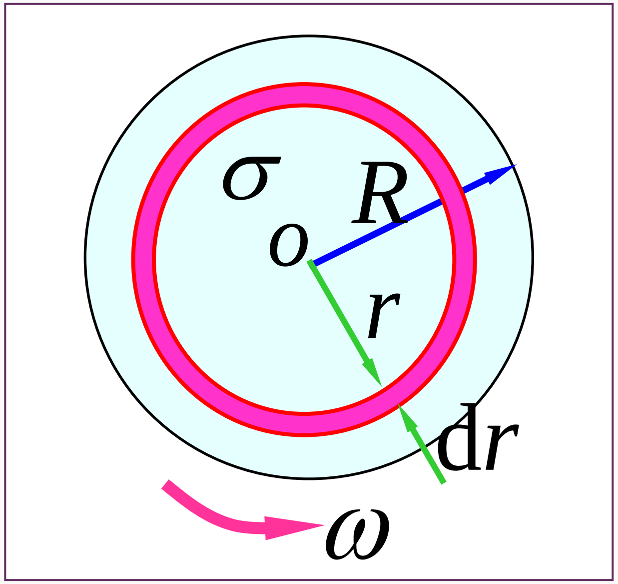
$$dB = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{dq\upsilon}{r^2}, \quad \upsilon = \omega r$$

$$\Rightarrow dB = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4\pi} dr d\theta$$

圆盘中心的磁感应强度

$$B = \frac{\mu_0 \sigma \omega}{4\pi}\int_0^R \int_0^{2\pi} dr d\theta = \frac{\mu_0 \sigma \omega R}{2}$$

(2) 圆盘的等效磁矩



$$dm = \pi r^2 \cdot \frac{\omega}{2\pi} dq = \pi\omega\sigma r^3 dr$$

$$m = \int dm = \int_0^R \pi\omega\sigma r^3 dr$$

$$= \frac{1}{4}\omega\sigma\pi R^4 = \frac{1}{4}\omega q R^2$$

方向与$\vec{\omega}$方向相同（q>0），或相反（q<0）。

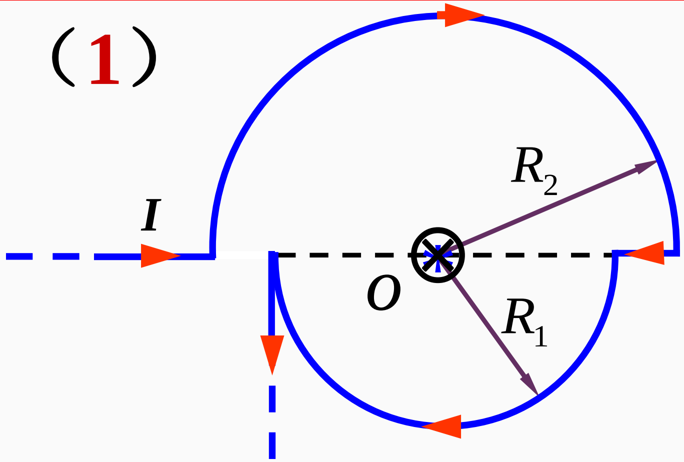
7、一根无限长直导线，在离它1cm远的地方，它产生的磁感应强度是10^{-4}T，试求：它所载有的电流。

解: 由无限长直导线在空间激发的磁场有:

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\Rightarrow\Rightarrow I=\frac{B\cdot 2\pi r}{\mu_0}=\frac{10^{-4}\times 2\pi\times 0.01}{4\pi\times 10^{-7}}=5(\mathrm{A})$$

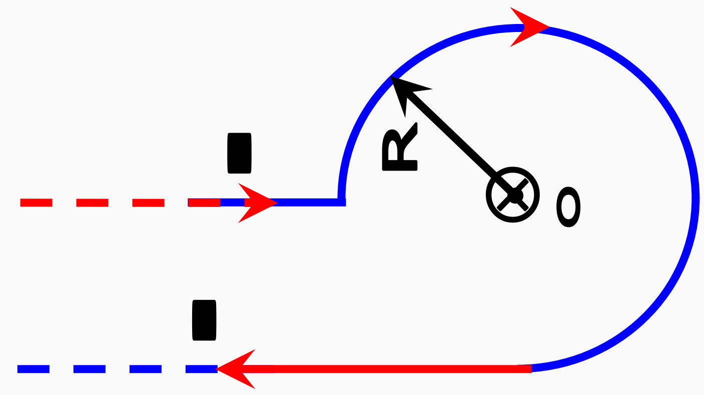
8、试求O点的磁感应强度大小和方向：

（1）



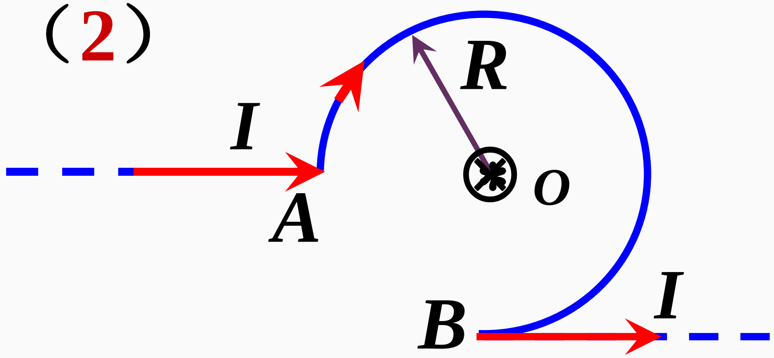
$$B_O=\frac{\mu_0 I}{4R_1}+\frac{\mu_0 I}{4R_2}-\frac{\mu_0 I}{4\pi R_2}$$

（3）



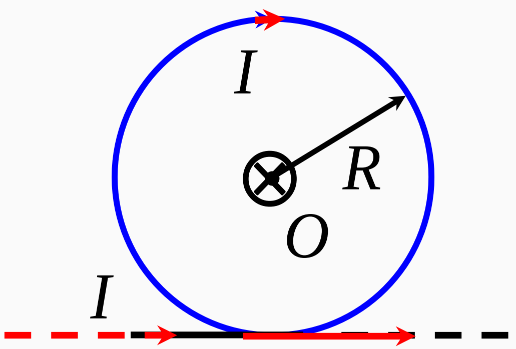
$$B_O=\frac{\mu_0 I}{2R}\cdot\frac{3}{4}+\frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

（2）



$$B_O=\frac{\mu_0 I}{2R}\cdot\frac{3}{4}-\frac{\mu_0 I}{4\pi R}$$

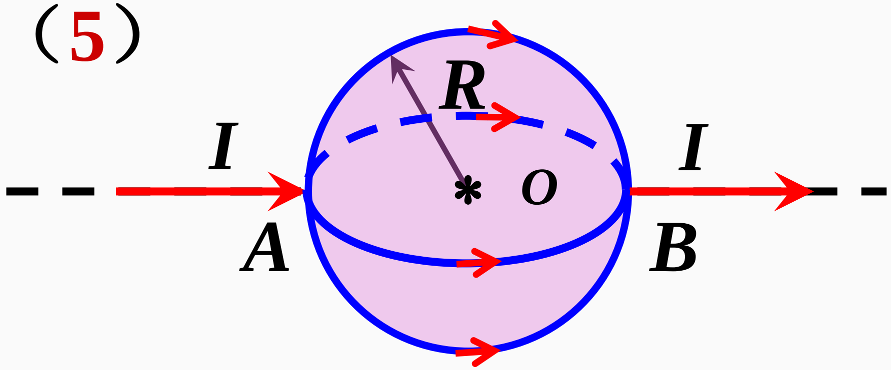
（4）



$$B_O=\frac{\mu_0 I}{2R}-\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

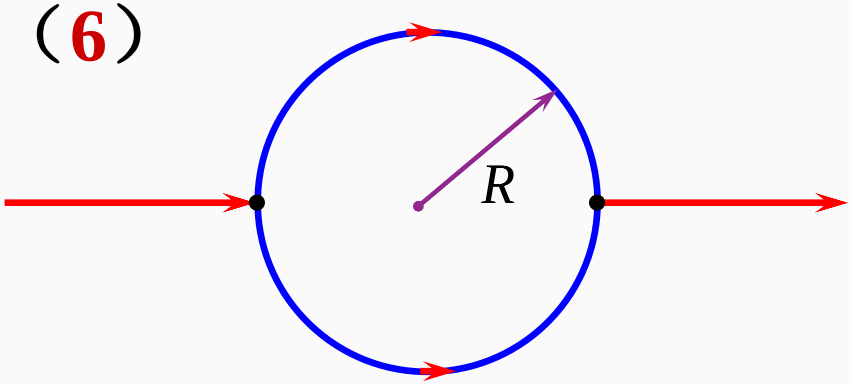
8、试求O点的磁感应强度大小和方向：

（5）



$B_O = 0$

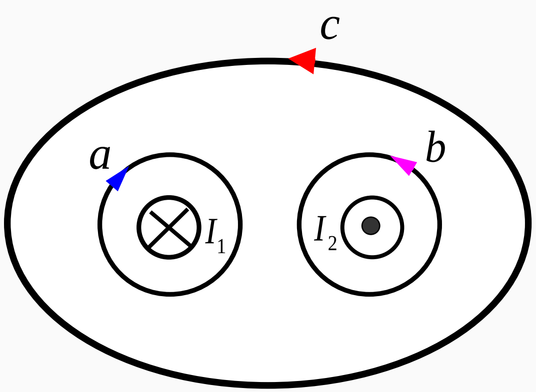
（6）



$B_O = 0$

练习题（三）

1、如图所示，两导线中的电流和均为8A，对图中所示的三条闭合曲线a、b、c，（1）分别写出安培环路定理表达式；（2）在各条闭合曲线上，各点的磁感应强度的大小是否相等？（3）在闭合曲线c上各点磁感应强度的大小是否为零？



解：(1)

$$\oint_a \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_1 = 8\mu_0$$

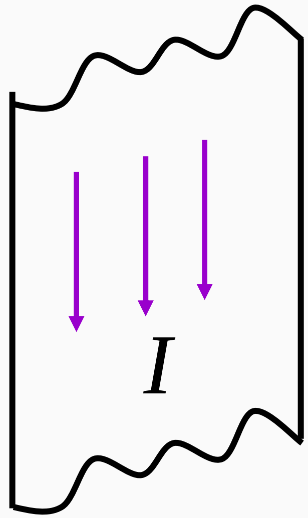
$$\oint_b \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_2 = 8\mu_0$$

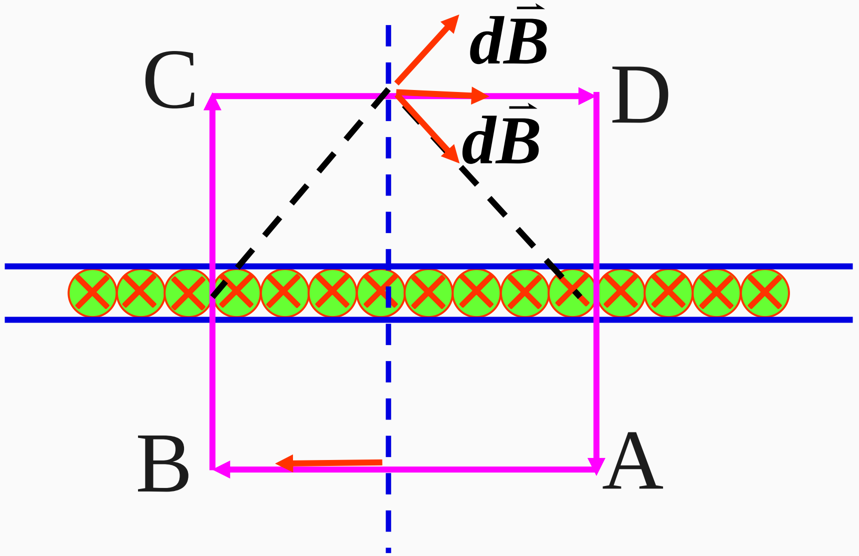
$$\oint_c \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 (I_2 - I_1) = 0$$

(2)不相等；

(3)不为零；

2、 无限大平面电流的磁场分布(单位宽度上的电流为 i)





解: 1) 对称性分析: 由俯视图发现，电流产生的磁场方向平行于平面并且在该平面两侧的磁场方向相反. 由于平面无限大, 与平面距离相等的点的磁场大小相等.

2) 选回路，规定绕向：选取闭合回路 ABCDA 顺时针方向为正.

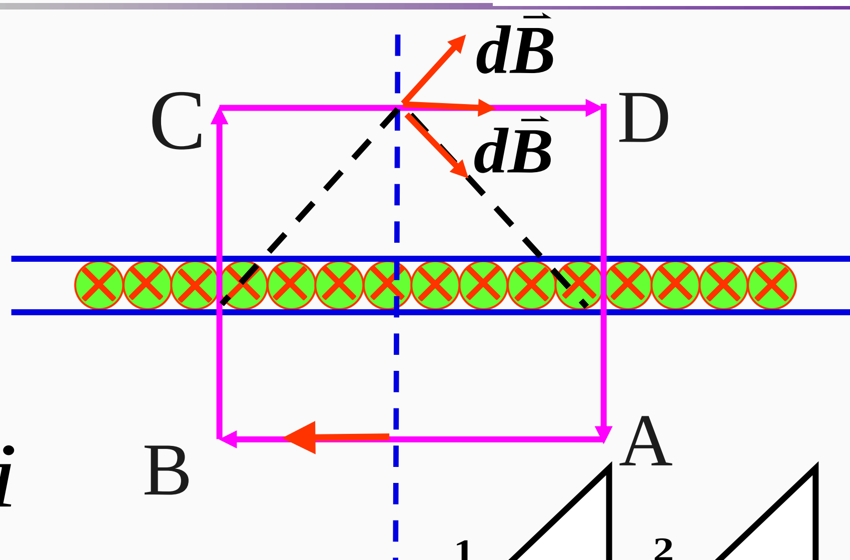
由安培环路定理

$$\oint_C \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0 \sum_{C内} I_{in}$$

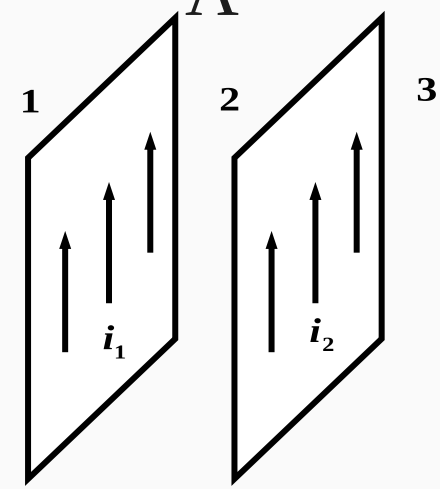
有 $\int_{AB} \vec{B}\cdot d\vec{r} + \int_{BC} \vec{B}\cdot d\vec{r}$

$+ \int_{CD} \vec{B}\cdot d\vec{r} + \int_{DA} \vec{B}\cdot d\vec{r} = \mu_0\ l_{AB} i$

即 $B\,\cancel{l_{AB}} + 0 + B\,\cancel{l_{CD}} + 0 = \mu_0\,\cancel{l_{AB}}\,i$



得到 $\boxed{B = \frac{1}{2}\mu_0 i}$



补充2、如图所示，两无限大平行平面上都有均匀分布的电流，设其单位宽度上的电流分别为i_1和i_2，且方向相同。试求：（1）两平面之间任一点的磁感应强度；（2）两平面之外任一点的磁感应强度；（3）$i_1=i_2=i$ 时，结果又如何？

解：(1)如图将空间分成三个区域1、2、3，

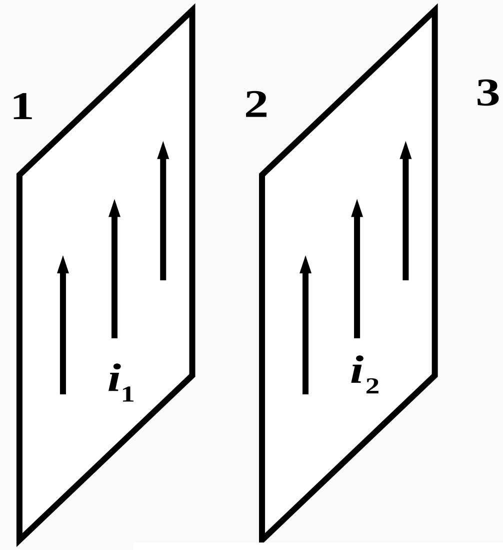
（1）两平面之间：$\vec{B}_2=\vec{B}_{i_1}+\vec{B}_{i_2}$；$\vec{B}_{i_1}$与$\vec{B}_{i_2}$方向相反

$$B_2=\frac{1}{2}\mu_0(i_1-i_2)\text{—方向：}\begin{cases}\text{若}i_1>i_2\text{；垂直纸面向里；}\\\text{若}i_1<i_2\text{；垂直纸面向外；}\end{cases}$$

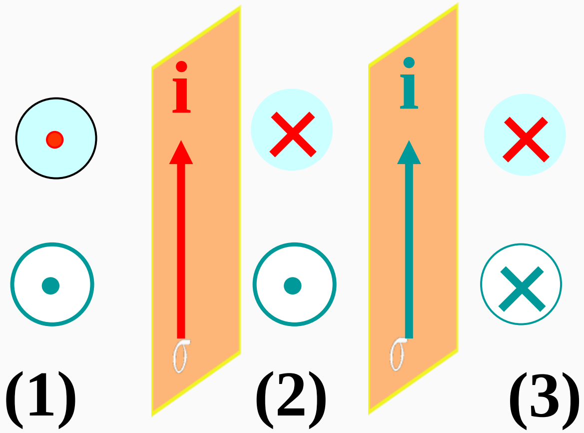
（2）两平面之外：$\vec{B}=\vec{B}_{i_1}+\vec{B}_{i_2}$；$\vec{B}_{i_1}$与$\vec{B}_{i_2}$方向相同

$$B_1=B_3=\frac{1}{2}\mu_0(i_1+i_2)$$

$$\text{方向：}\begin{cases}\vec{B}_1\text{垂直向外}\quad;\\\vec{B}_3\text{垂直向里}\quad;\end{cases}$$



（3） $i_1=i_2=i$ 时

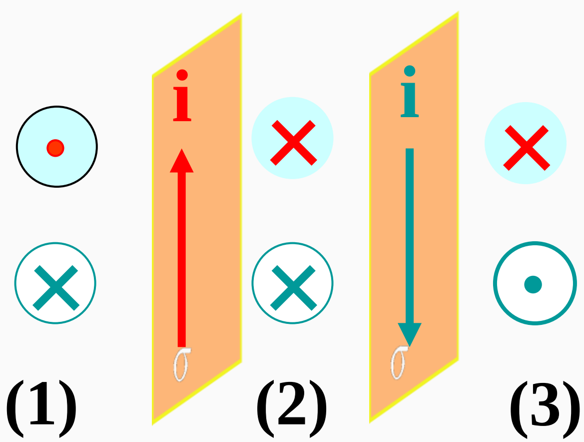


(I)平行同向载流平板

$$B_1 = 2\frac{1}{2}\mu_0 i = \mu_0 i$$

$$B_2 = 0$$

$$B_3 = \mu_0 i$$ **方向与B_1相反**



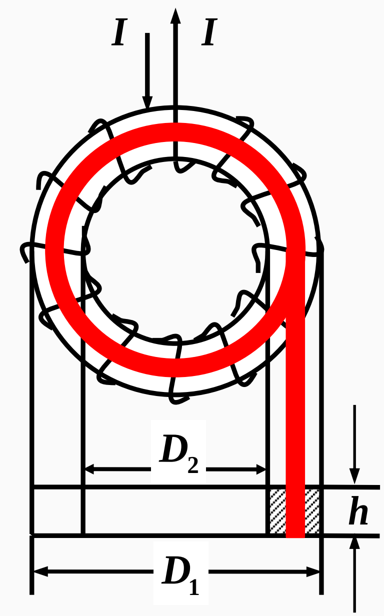
(II)平行反向载流平板: 磁屏蔽

$$B_1 = B_3 = 0$$

$$B_2 = \mu_0 i$$

磁场被限制在两平板之间——磁屏蔽

3、矩形截面的螺绕环，尺寸如图所示。(1)求环内磁感应强度的分布；(2)证明通过螺绕环截面(图中阴影区)的磁通量 $\Phi = \mu_0 \frac{NIh}{2\pi} \ln \frac{D_1}{D_2}$，式中$N$为螺绕环总匝数，$I$为其中电流强度。



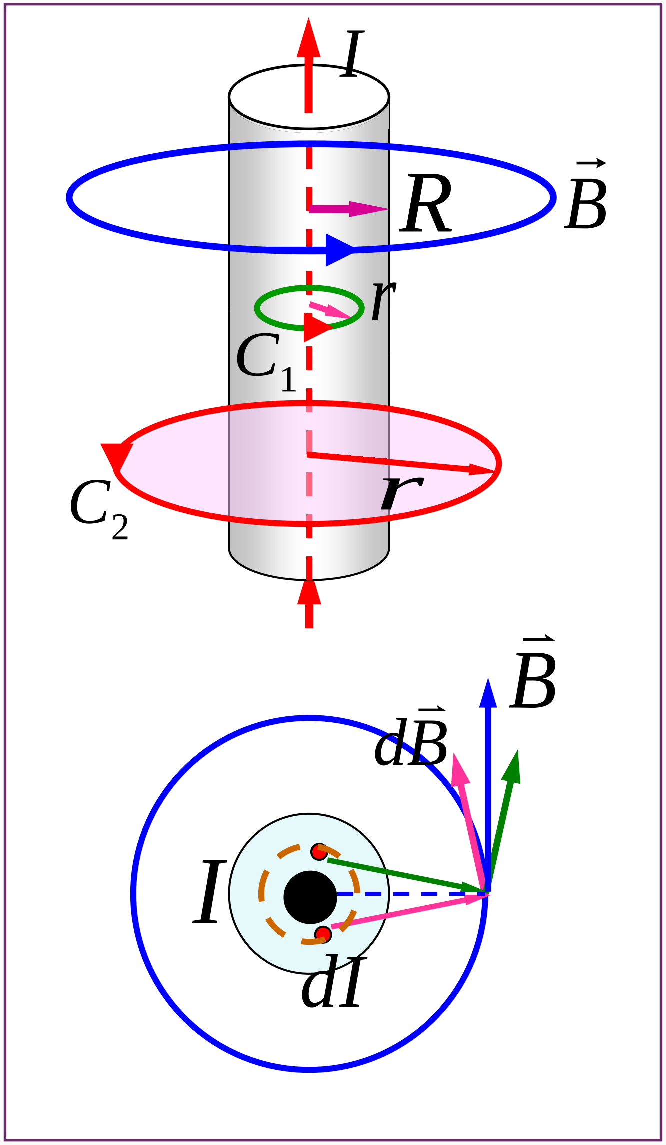
解：(1) $\oint_L \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{内}$

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 NI \Rightarrow B = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}$$

(2) $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{\frac{D_2}{2}}^{\frac{D_1}{2}} \frac{\mu_0 NI}{2\pi r} \cdot h dr = \frac{\mu_0 NIh}{2\pi} \ln \frac{D_1}{D_2}$

10 真空中的稳恒磁场

4、10A的电流均匀地流过一根截面半径为R的长直铜导线。在导线内部取一平面S，一边为轴线，另一边在导线外壁上，长度为1m，如图所示。(铜材料本身对磁场分布无影响)。求：(1)磁感应强度分布；(2)通过S面磁通量。



解: 1) 对称性分析:电流分布具有轴对称性, 其磁场是以圆柱体中心轴为对称轴同心圆.

2) 选回路, 规定绕向

$(a)\ r < R$ 选取圆形回路C_1, 绕向与电流 I 成右螺旋关系.

$$\oint_{C_1} \vec{B}\cdot d\vec{r} = 2\pi r B = \mu_0 I', \qquad I' = \delta\pi r^2$$

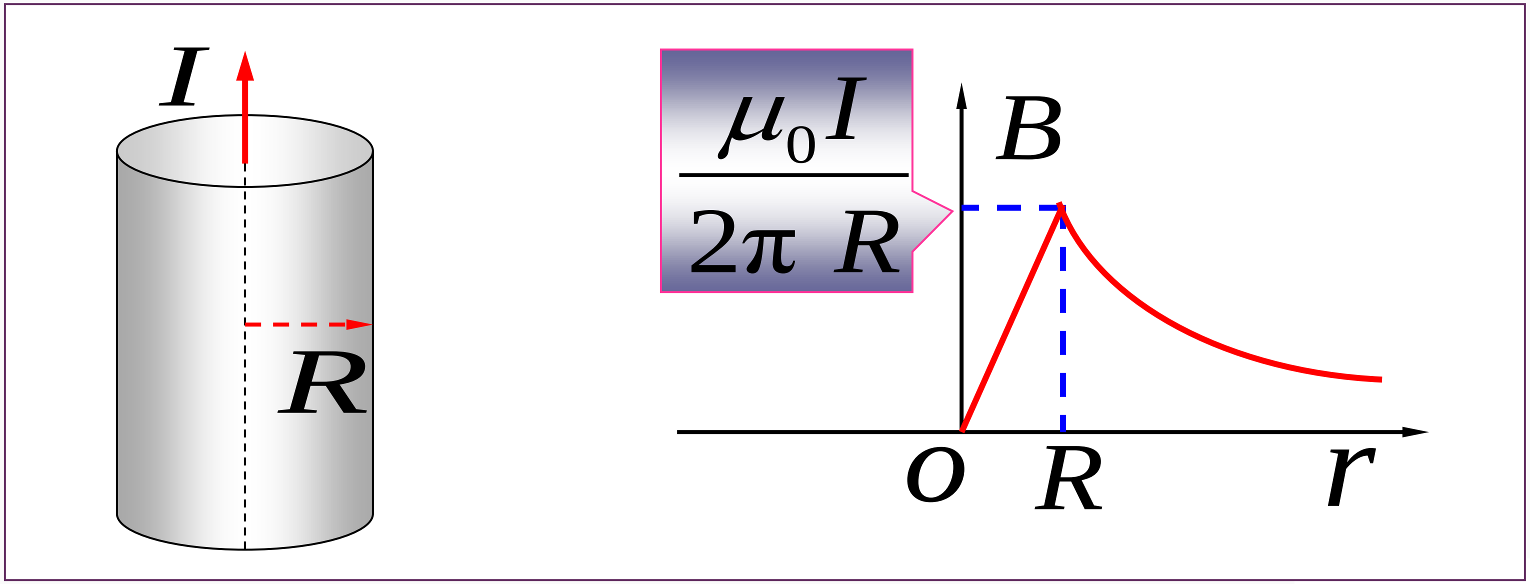
$$\delta = \frac{I}{\pi R^2} \qquad \therefore B = \frac{\mu_0 I'}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

$(b)\ r > R$ 选取圆形回路C_2, 绕向与电流成右螺旋关系.

$$\oint_{C_2} \vec{B}\cdot d\vec{r} = 2\pi r B = \mu_0 I \quad \therefore B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\therefore B=\begin{cases}\dfrac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2} & (r<R)\\[2ex] \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & (r>R)\end{cases}$$

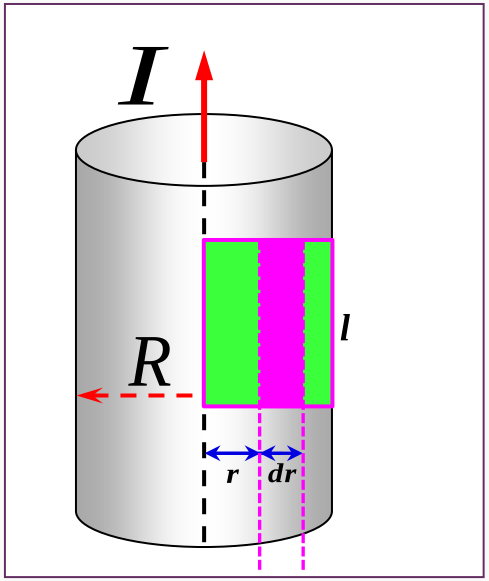
$\vec{B}$ 的方向与 I 成右螺旋关系



如图所示，距离轴线r处取一矩形小面元，面积为：ds＝ l dr，矩形小面元磁通量为：

$$d\Phi_m = \vec{B}\cdot d\vec{S} = BdS\cos 0 = \frac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}ldr$$

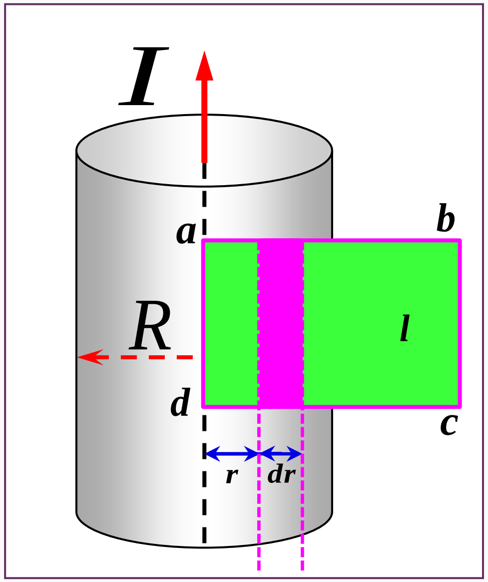
$$\Phi_m = \iint_s \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_0^R \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}rldr = \frac{\mu_0 Il}{2\pi R^2}\frac{1}{2}R^2 = \frac{\mu_0 Il}{4\pi}$$



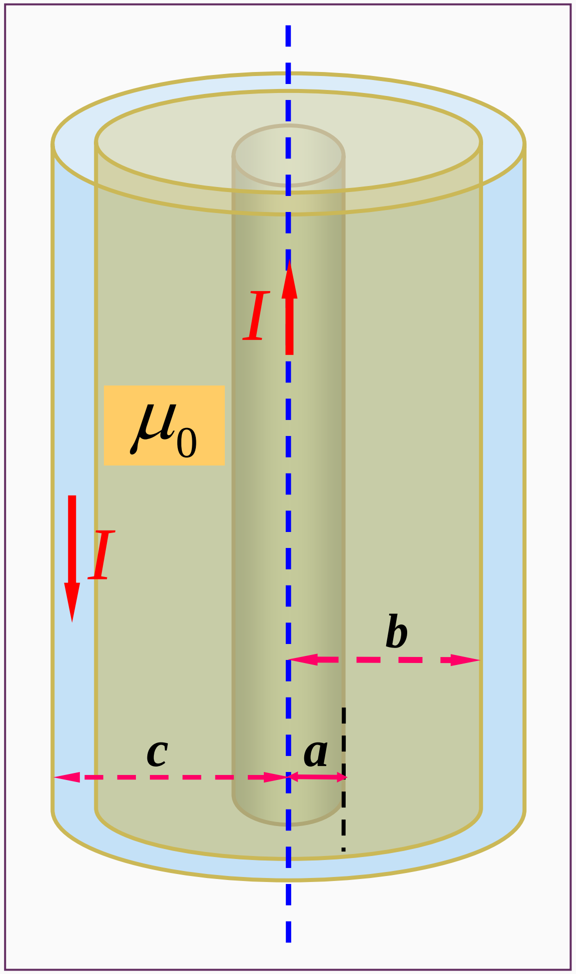
推广：若$ab = 2R$，则Φ_m＝？

$$\Phi_m = \iint_s \vec{B}\cdot d\vec{s} = \int_0^R \frac{\mu_0 I}{2\pi R^2}rldr$$

$$+\int_R^{2R}\frac{\mu_0 I}{2\pi r}ldr = \frac{\mu_0 Il}{4\pi} + \frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln 2$$



5、一根很长的同轴电缆(Coaxial Cable)，由一导体圆柱（半径为a）和一同轴导体圆管（内外半径分别为b、c）构成，使用时，电流I从一导体流出，从另一导体流回。设电流都是均匀分布在导体的横截面上，如图所示。试求：(1)导体柱内 (r < a)；(2)两导体之间 (a < r < b)；(3)导体圆管内 (b < r < c)；(4)电缆外 (r > c) 各点处磁感应强度的大小，并画出B — r曲线。



解:(1) 对称性分析:电流分布具有轴对称性, 其磁场是以圆柱体中心轴为对称轴同心圆.选回路, 规定绕向,由安培环路定理有

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{内} \qquad B\cdot 2\pi r = \mu_0 \sum I_{内}$$

解:(1) 对称性分析:电流分布具有轴对称性，其磁场是以圆柱体中心轴为对称轴同心圆.**选回路，规定绕向,由安培环路定理有**

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum I_{内} \qquad B\cdot 2\pi r = \mu_0 \sum I_{内} \qquad B = \frac{\mu_0}{2\pi r}\sum I_{内}$$

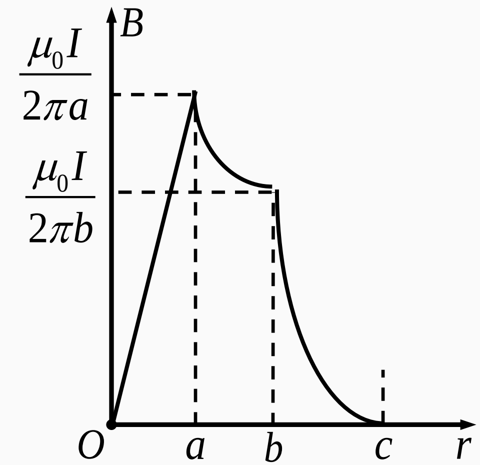
(1) $0 < r < a$, $$B = \frac{\mu_0}{2\pi r}\frac{I}{\pi a^2}\pi r^2 = \frac{\mu_0 I r}{2\pi a^2}$$

(2) $a < r < b$, $$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

(3) $b < r < c$, $$B = \frac{\mu_0}{2\pi r}\left[I - \frac{I\pi\left(r^2 - b^2\right)}{\pi\left(c^2 - b^2\right)}\right] = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\frac{\left(r^2 - b^2\right)}{\left(c^2 - b^2\right)}$$

(4) $r > c$, $$B = 0$$

$\vec{B}$的方向与内导体电流成右螺旋关系

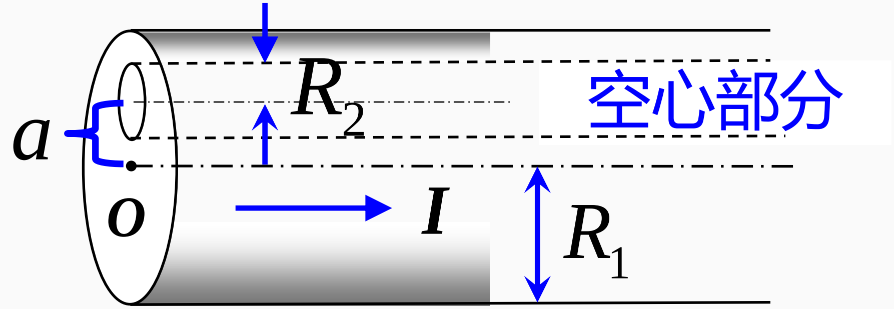


6、一根外半径为 R_1 的无限长圆柱形导体管，管内空心部分的半径为 R_2，空心部分的轴与圆柱的轴相平行但不重合，两轴间距离为a，且$a > R_2$. 现在电流 I 沿导体管流动，电流均匀分布在管的横截面上，而电流方向与管的轴线平行，如图所示，求：

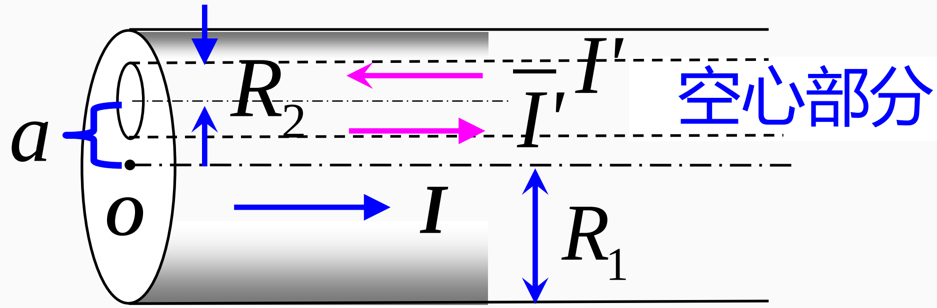
(1) 圆柱轴线上的磁感应强度的大小；

(2)空心部分轴线上的磁感应强度的大小；

设R_1=10mm, R_2=0.5mm, a =5.0mm, I =20 A.



解：采用**补偿法**，将空心部分看成是流着大小相等、方向相反的电流 $\pm I'$, 其电流密度与原来带空心的导体相同。因此，



电流为 I 的带空心的导体

= 电流为 $(I+I')$的实心导体 +电流为$-I'$ 的空心导体

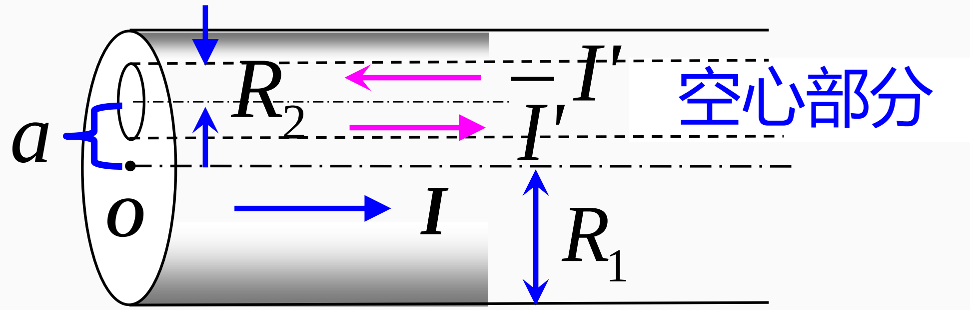
（1）圆柱轴线上的磁感应强度

$$\vec{B}_o = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \vec{B}_2$$

(实心) (空心)

$$B_O = \frac{\mu_0}{2\pi a} J\pi R_2^2 = \frac{\mu_0}{2\pi a} \cdot \frac{I}{\pi(R_1^2 - R_2^2)} \cdot \pi R_2^2$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \cdot \frac{R_2^{\ 2}}{R_1^{\ 2} - R_2^{\ 2}} = \frac{2\times10^{-7}\times20\times(0.5)^2}{5.0\times10^{-3}\times(10^2-0.5^2)} = 2.0\times10^{-6}\ (\mathrm{T})$$



(2) 空心部分轴线上的磁感应强度：

$$\vec{B}_{o'} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \vec{B}_1$$

(实心) (空心)

$$B_{O'} = \frac{\mu_0}{2\pi a} J\pi a^2 = \frac{\mu_0}{2\pi a} \cdot \frac{I}{\pi(R_1^2 - R_2^2)} \cdot \pi a^2 = \frac{\mu_0 I a}{2\pi a(R_1^2 - R_2^2)}$$

$$= \frac{2\times10^{-7}\times20\times5.0\times10^{-3}}{\left(10^2 - 0.5^2\right)\times10^{-6}} = 2.0\times10^{-4}\ (\mathrm{T})$$

练习题（四）

1、 如图所示，电流 I ＝7.0 A, 通过半径 R=5.0×10^{-2} m 的铅丝环, 铅丝的截面积, S=7.0×10^{-7} m^2 放在B＝1.0 T的均匀磁场中，求铅丝中的张力及由此引起的拉应力(即单位横截面积上的张力)。

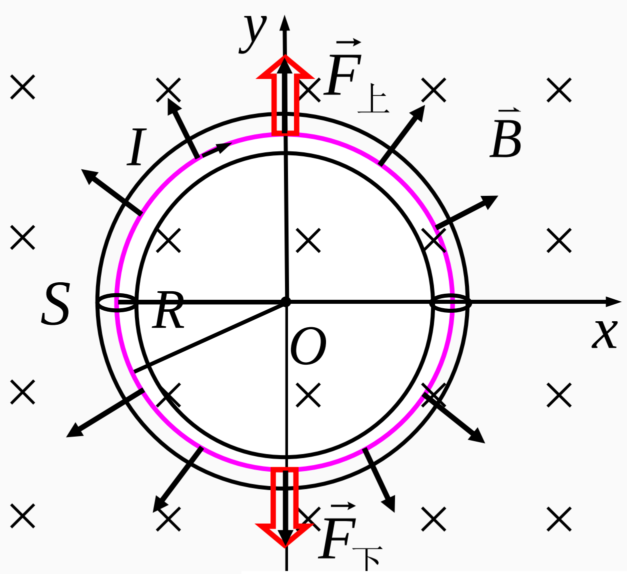
解：由前面结果知, 均匀磁场中铅丝环受到的合力为 0,但环上各处都受到沿径向向外的磁场力.

把铅丝环分成上下两半，则上半环受到向上的安培力的合力

$$F_{上} = BIL = 2BIR$$

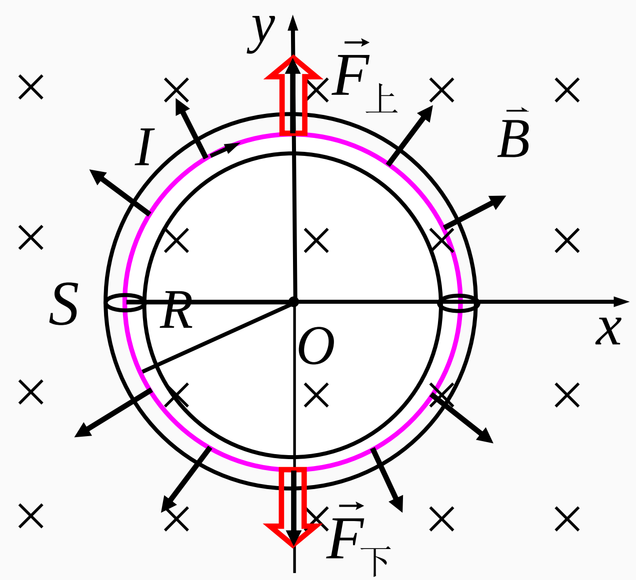
下半环受到向下的安培力的合力

$$F_{下} = ILB = 2BIR$$



$$F_{上} = BIL = 2BIR$$

$$F_{下} = BIL = 2BIR$$



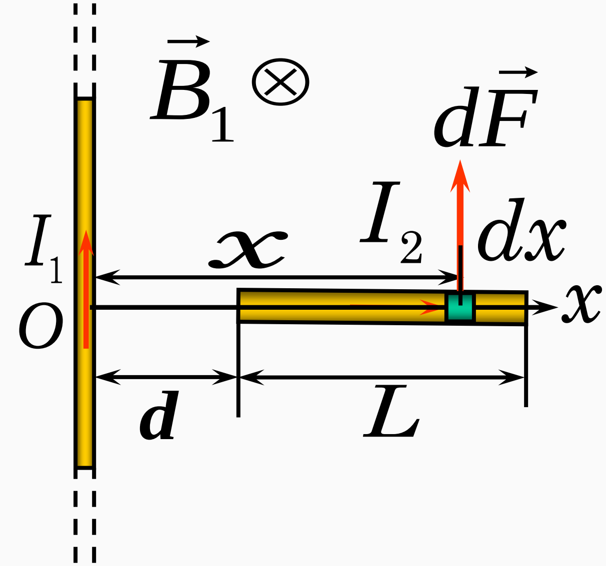
铅丝环横截面 S 受到的张力(图中上下半环交接面之一):

$$F = \frac{2BIR}{2} = 1.0\times 7.0\times 5.0\times 10^{-2} = 0.35\,(N)$$

铅丝环单位横面积上的张力 — 拉应力:

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{0.35}{7.0\times 10^{-7}} = 5.0\times 10^{5}\ (Pa)$$

2、在无限长载流直导线 I_1 旁，垂直放置另一长为 L 的载流直导线 I_2，I_2 导线左端距 I_1 为 d，求：(1) 导线 I_1 的磁场分布；(2) 导线 I_2 所受到导线 I_1 的安培力；(3)若导线 I_2 自由，它将如何运动？



解：(1) 建立坐标系，坐标原点选在 I_1 上，由安培环路定理得

$$\oint_L \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_1 \Rightarrow B\cdot 2\pi r = \mu_0 I_1 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$

(2) 在导线 I_2 上分割电流元，长度为 dx，

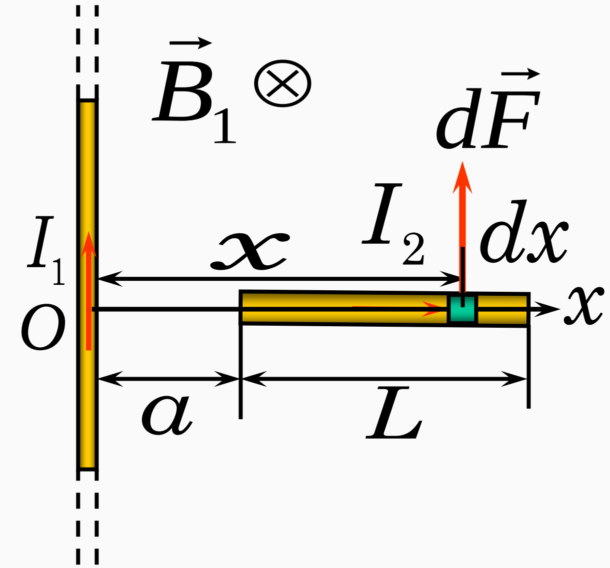
无限长直导线在电流元处的磁场 $B_1 = \dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi x}$

电流元受安培力大小为：$dF = B_1 I_2 dx = \dfrac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} dx$

$$dF = B_1 I_2 dx = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\frac{dx}{x}$$

$$\therefore F = \int dF = \int_a^{a+L} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\frac{dx}{x}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{a+L}{a}$$



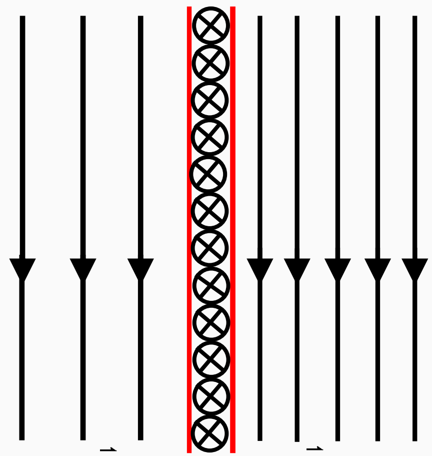
方向垂直向上.

(3)导线I_2 将如何运动?

由于导线 I_2左右两端受力大小不同, 导线将在向上加速运动的同时, 发生顺时针转动, 最终两导线将变为平行, 电流方向相反, 导线 I_2 将被导线 I_1 排斥向右运动.

$$\oint_b \vec{B}\cdot d\vec{l} = \mu_0 I_2 = 8\mu_0$$

3、将一均匀分布着电流的无限大载流平面放入均匀磁场中，电流方向与此磁场垂直。已知平面两侧的磁感应强度分别为 $\vec{B}_1$ 和 $\vec{B}_2$（如图所示），**试求：**该载流平面单位面积所受的磁场力的大小和方向。



解：载流平面在其两侧产生的磁场

$$B_{1i} = B_{2i} = \frac{\mu_0 i}{2} \text{—方向相反}$$

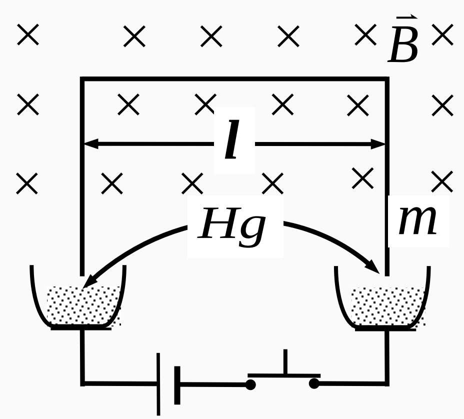
如图，设i的方向为垂直纸面向里：$B_1 = B_0 - B_{1i}, B_2 = B_0 + B_{2i}$

由此可得：$B_0 = \dfrac{B_1 + B_2}{2}, B_{1i} = B_{2i} = \dfrac{B_2 - B_1}{2}, i = \dfrac{2B_{1i}}{\mu_0} = \dfrac{B_2 - B_1}{\mu_0}$

载流平面单位面积受的力为：$F = iB_0 = \dfrac{(B_2^2 - B_1^2)}{2\mu_0}$

—方向垂直于载流平面指向$\vec{B}_1$一侧。

4、有一根质量为m的倒U形导线，两端浸没在水银槽中，导线的上段 l 处在均匀磁场 B 中，如图所示。如果使一个电流脉冲，即电量 $q=\int idt$ 通过导线，导线就会跳起来，假定电流脉冲的持续时间同导线跳起来的时间相比甚小，试由导线所达高度h，计算电流脉冲的大小。设$B=0.1\text{T}$, $m=0.01\text{kg}$, $l=0.2\text{m}$, $h=0.3\text{m}$。（提示：利用动量原理求冲量，并找出 $q=\int idt$ 与冲量 $I=\int Fdt$ 的关系）



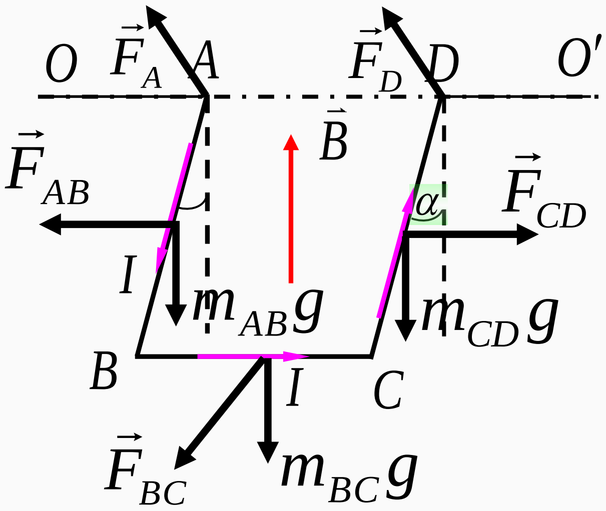
解: $mgh=\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{p^2}{2m}\Rightarrow p=m\sqrt{2gh}$

$$F=IlB=\frac{dq}{dt}lB\Rightarrow Fdt=lBdq$$

$$\Rightarrow \Delta p=\int Fdt=\int_0^q lBdq=lBq$$

$$q=\frac{p}{lB}=\frac{m}{lB}\sqrt{2gh}=\frac{10\times10^{-3}}{0.20\times0.10}\times\sqrt{2\times9.8\times0.30}=1.21(\text{C})$$

5、 横截面积 $S = 2.0\ mm^2$ 的铜线, 弯成U形，其中 OA 和 DO′两段保持水平方向不动，ABCD段是边长为 a 的正方形的三边，U 形部分可绕 OO′轴转动. 如图所示，整个导线放在匀强磁场 $\vec{B}$ 中，$\vec{B}$ 的方向竖直向上．已知铜的密度 $\rho = 8.9\times10^3\ kg/m^3$，当这铜线中的电流 $I = 10A$ 时，在平衡情况下，AB 段和 CD 段与竖直方向的夹角为$\alpha=15^o$．求磁感应强度 B 的大小.

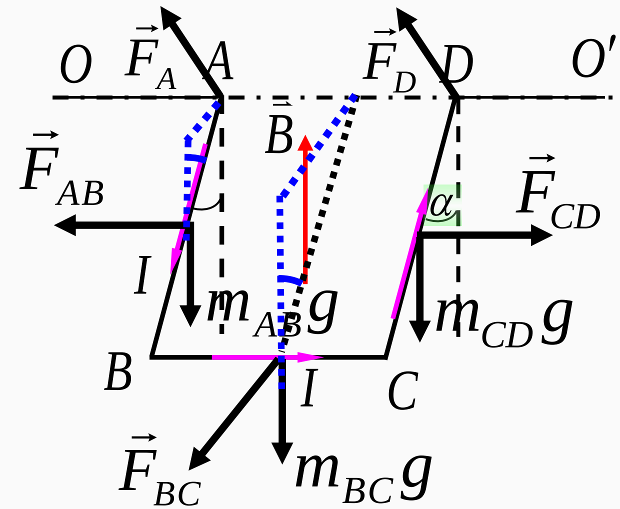


解：先对U型部分进行受力分析

(1) AB, BC, CD 段铜线受到的重力;

(2) AB, BC, CD 段铜线受到的安培力;

(3) 支撑点 A, D 处的约束力，大小与方向均待定.



在平衡情况下，**U型部分**应同时满足**两个平衡条件:**

(1) 力平衡条件: 作用在 U 型部分的**合外力应为零**. 但转轴处的力的大小和方向都是未知的.

(2) 力矩平衡条件: 作用在 U 型部分的力对任意转轴的**合外力矩应为零**. 由于转轴处的力对力矩的贡献为零, 不必考虑. 故本题可用**力矩平衡条件**求解.

重力矩:

$$M_1 = m_{AB} g \cdot \frac{a}{2} \cdot \sin\alpha + m_{CD} g \cdot \frac{a}{2} \cdot \sin\alpha + m_{BC} g \cdot a \cdot \sin\alpha$$

$$\because m_{AB} = m_{BC} = m_{CD} = \rho a S$$

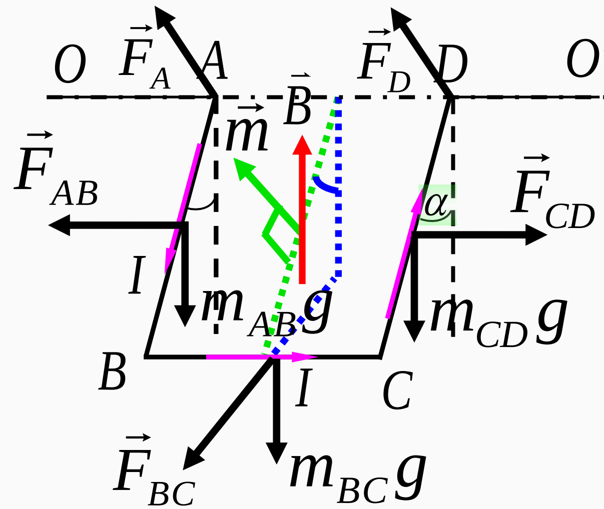
$$\therefore M_1 = m_{AB} g a \sin\alpha + m_{BC} g a \sin\alpha = 2\rho a^2 S g \sin\alpha$$

重力矩： $M_1 = 2\rho a^2 S g \sin\alpha$

磁力矩：U型部分铜线受到的磁力矩，与方形闭合线圈ABCDA受到的磁力矩相同，因此 $\vec{M}_2 = \vec{m} \times \vec{B}$

$\because m = Ia^2$ **方向垂直于U型平面向外**

$\therefore M_2 = mB\sin(90° - \alpha) = Ia^2 B\cos\alpha$



也可根据力矩定义，由安培力直接求 M_2：

$$M_2 = F_{BC} \cdot a\cos\alpha = IaB \cdot a\cos\alpha = Ia^2 B\cos\alpha$$

平衡时， $M_1 = M_2$ **(大小相等，方向相反)**

$$2\rho a^2 S g \sin\alpha = Ia^2 B\cos\alpha$$

S = 2.0 mm^2

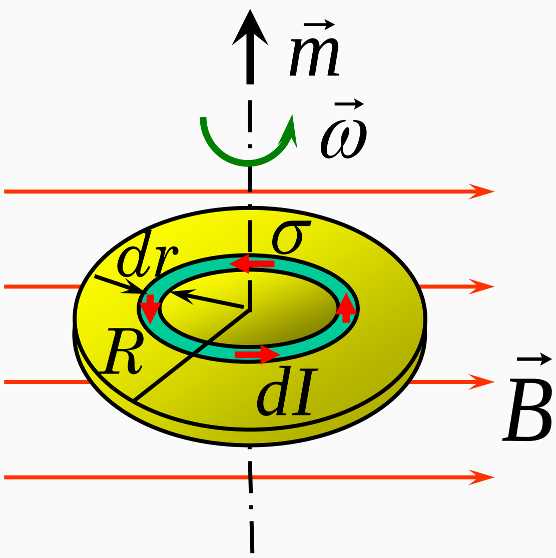
I = 10A

ρ= 8.9×10^3 kg/m^3

α=15°

$$\therefore B = \frac{2\rho S g}{I}\tan\alpha = \frac{2\times 8.9\times 10^3\times 2.0\times 10^{-6}\times 9.8}{10}\tan 15° = 9.3\times 10^{-3}(T)$$

6、一半径为 R 的薄圆盘,放在磁感应强度为 B 的均匀磁场中,B 的方向与盘面平行,如图所示,圆盘表面的电荷面密度为 σ,若圆盘以角速度 ω 绕其轴线转动,试求圆盘的磁矩和外磁场作用在圆盘上的磁力矩.



解：取半径为 r，宽为 dr 的圆环.

圆环带电量： $dq = \sigma \cdot 2\pi r dr$

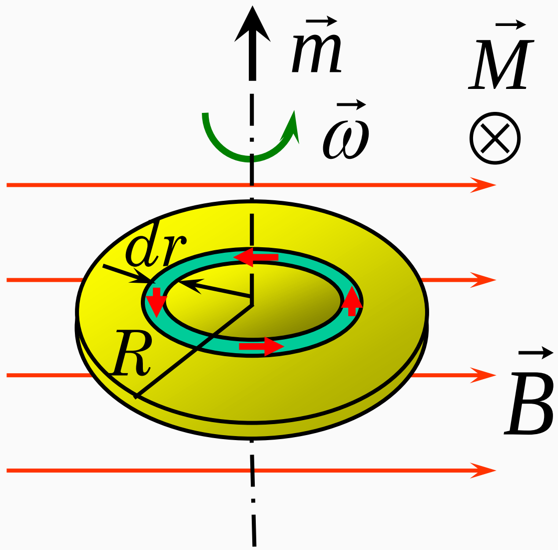
转动形成圆电流：

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\omega dq}{2\pi} = \omega\sigma r dr$$

圆环的磁矩： $dm = \pi r^2 dI = \omega\sigma\pi r^3 dr$ **方向沿轴线向上**

圆盘的总磁矩： $m = \int dm = \int_0^R \omega\sigma\pi r^3 dr = \frac{1}{4}\omega\sigma\pi R^4$ **方向向上**

$$m = \frac{1}{4}\omega\sigma\pi R^4$$



圆环所受磁力矩：

$$dM = dm \cdot B \cdot \sin 90° = \omega\sigma B\pi r^3 dr$$

圆盘所受总磁力矩：

$$M = \int dM = \int_0^R \omega\sigma B\pi r^3 dr$$

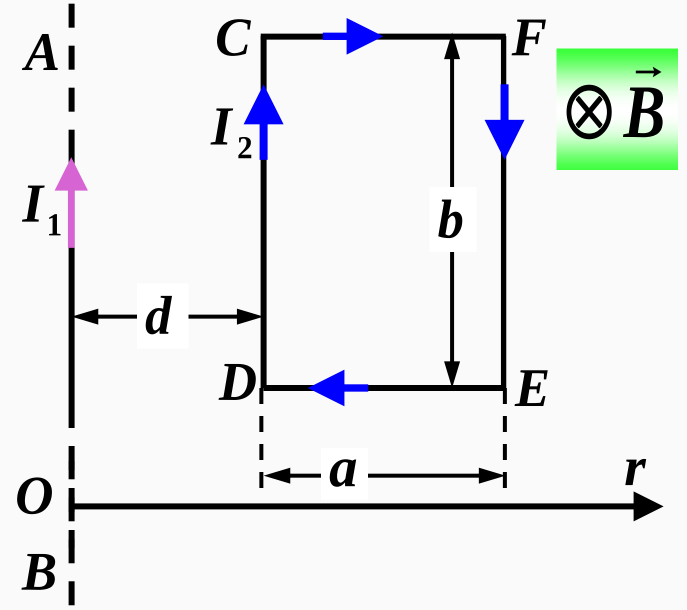
$$= \frac{\omega\sigma B\pi R^4}{4} = mB$$ **方向为⊗**

也可直接用 $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$ **计算总磁力矩**

根据 M 的方向，圆盘将沿顺时针方向旋转 (可通过圆环中左右两半电流元受到的磁力作用加以定性分析).

练习题（五）

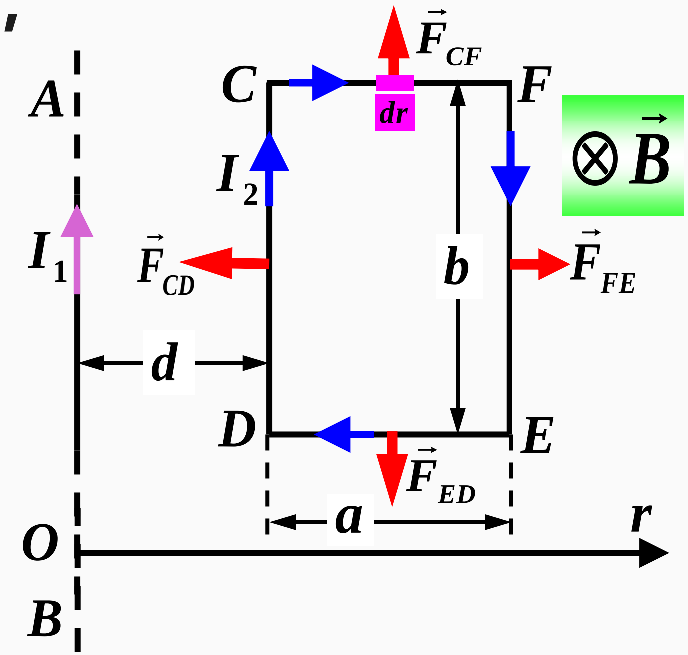
1、如图所示，在长直导线AB内通有电流I_1=20A，在矩形线圈$CDEF$中通有电流I_2=10A，无限长直导线AB与$CDEF$线圈共面。已知a= 9.0 cm，b= 20.0 cm，d=1.0 cm。试求: (1)导线I_1的磁场分布; (2)矩形线圈每边受到的导线AB磁场的作用力; (3)矩形线圈所受到的合力和以导线AB为轴的合力矩，如何运动; (4) 矩形线圈回路中的Φ_m; (5)将矩形线圈平移至左边对称位置，磁力做的功; (6)将矩形线圈以AB为轴旋转π至左边对称位置，磁力做的功。



解：(1) 建立坐标系，坐标原点选在 I_1 上，由安培环路定理得

$$\oint_L \vec{B}_1 \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_1 \Rightarrow B_1 \cdot 2\pi r = \mu_0 I_1$$

$$\Rightarrow B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}$$



(2) 在导线CD和EF上分割电流元，长度为dr，电流元受安培力大小为：

$$dF = B_1 I_2 dx = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} dx$$

则：矩形线圈每边所受的力为：

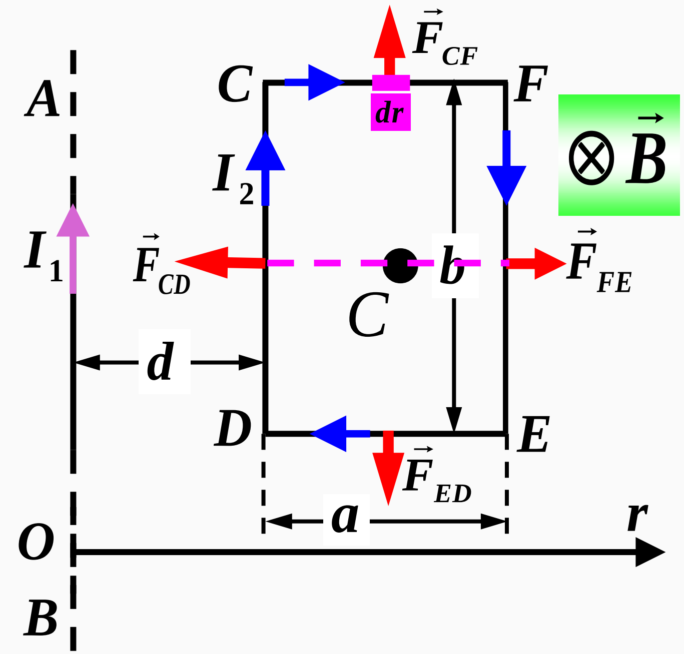
$$F_{CD} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} I_2 b = 2\times10^{-7}\times\frac{20}{1.0\times10^{-2}}\times10\times0.2 = 8.0\times10^{-4}(\mathrm{N})\text{—向左}$$

$$F_{EF} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi(d+a)} I_2 b = 2\times10^{-7}\times\frac{20}{1.0\times10^{-2}}\times10\times0.2 = 8.0\times10^{-5}(\mathrm{N})\text{—向右}$$

$$F_{DE}=\int_{d}^{d+a}\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}I_2 dr=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d}=2\times10^{-7}\times20\times10\times\ln10=9.2\times10^{-5}(\mathrm{N})\text{—向下}$$

$$F_{CF}=\int_{d}^{d+a}\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}I_2 dr=\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d}=2\times10^{-7}\times20\times10\times\ln10=9.2\times10^{-5}(\mathrm{N})\text{—向上}$$

(3)矩形线圈所受到的合力和以导线AB为轴的合力矩，如何运动?



$$\vec{F}_{合}=\vec{F}_{CD}+\vec{F}_{EF}+\vec{F}_{DE}+\vec{F}_{CF}$$

$\vec{F}_{DE}$、$\vec{F}_{CF}$ —大小相等，

方向相反，两者合力为0。

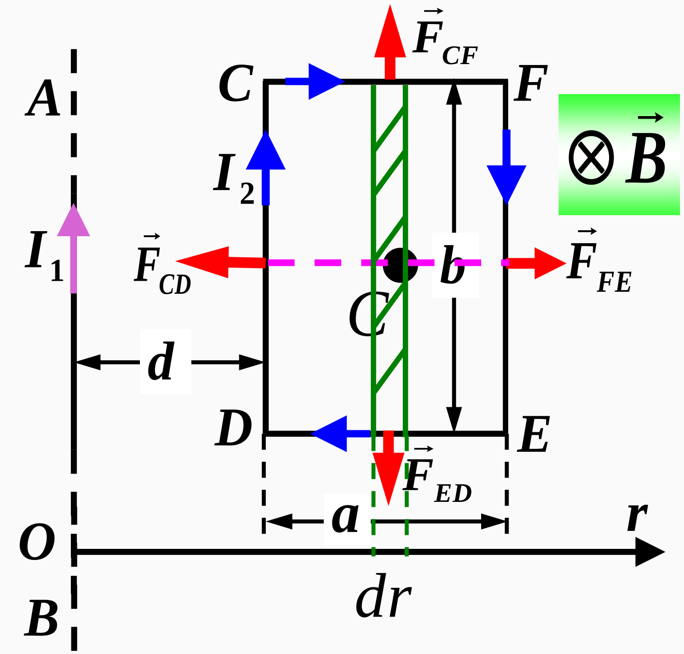
$\vec{F}_{CF}$ 向左，$\vec{F}_{DE}$ 向右—如图所示

$$F_{合}=F_{CD}-F_{EF}=\frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{2\pi}\frac{a}{d(d+a)}=2\times10^{-7}\times20\times10\times0.2\times\frac{0.09}{0.01\times0.1}$$

$$=7.2\times10^{-7}(\mathrm{N})\text{—方向向左}$$

由于线圈各边受力与轴共面，所以它所受的力矩为零。

(3) 本题为非均匀磁场, 不能应用公式 $\vec{M}=\vec{m}\times\vec{B}$ 计算磁力矩. 应该以线圈质心为参考点, 由线圈各边所受的力直接计算磁力矩. 由于线圈所受的力 F_{da} 与 F_{bc} 在同一直线上, 且均经过质心, 故线圈所受磁力矩 $M=0$. 线圈只有平动(左移), 无转动.



(4) 矩形线圈回路中的 Φ_m;

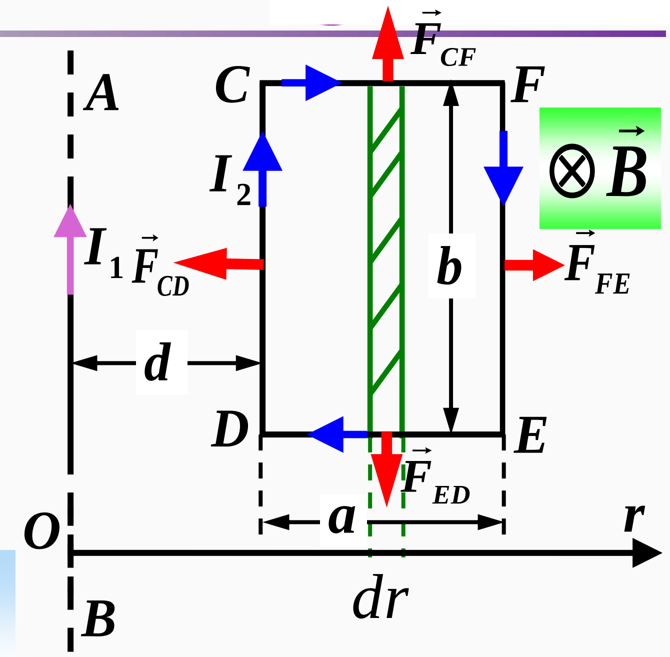
无限长直导线的磁场 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}$

因为 B 随 r 而变化, 故取 $r\sim r+dr$ 之间的长条形面积元, 磁通量为

$$d\Phi_m = BdS = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r}bdr$$

总磁通量 $\Phi_m=\int_d^{d+a}\dfrac{\mu_0 I_1}{2\pi r}bdr=\dfrac{\mu_0 I_1 b}{2\pi}\ln\dfrac{d+a}{d}$

(5)将矩形线圈平移至左边对称位置，磁力做的功;



$$\Phi_1=\frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d}$$

$$\Phi_2=-\frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d}=-\Phi_1$$

$$A=I_2(\Phi_2-\Phi_1)=I_2(-\Phi_1-\Phi_1)=-\frac{\mu_0 I_1 I_2 b}{\pi}\ln\frac{d+a}{d}$$

$$=-4\times10^{-7}\times20\times10\times0.2\times\ln\frac{0.01+0.09}{0.01}=3.68\times10^{-3}(\mathrm{J})$$

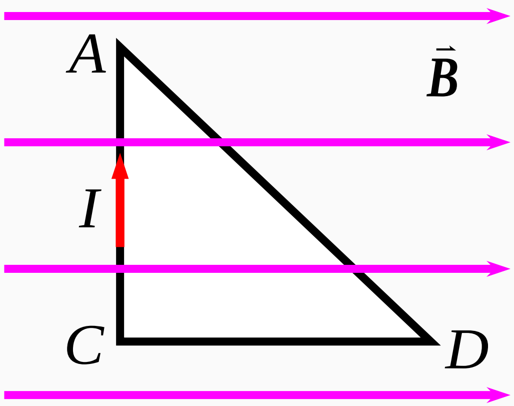
(6)将矩形线圈以AB为轴旋转π至左边对称位置，磁力做功。

$$\Phi_1=\frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d}$$

$$\Phi_2'=\frac{\mu_0 I_1 b}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d}=\Phi_1$$

$$A=I_2(\Phi_2'-\Phi_1)=I_2(\Phi_1-\Phi_1)=0$$

2、一直角边长为a的等腰直角三角形线圈ACD内维持稳恒电流强度为I, 放在均匀磁场中, 线圈平面与磁场方向平行。试求: (1)线圈磁矩的大小和方向; (2)线圈所受磁力矩大小和方向; (3)AC边固定,D点绕AC边向纸外转π/2,磁力做的功; (4)CD边固定,A点绕CD边向纸外转π/2,磁力做的功; (5)AD边固定,C点绕AD边向纸外转π/2,磁力做的功。



解: (1) 线圈磁矩的大小和方向 $m = Is = \dfrac{Ia^2}{2}$ —方向垂直纸面向里

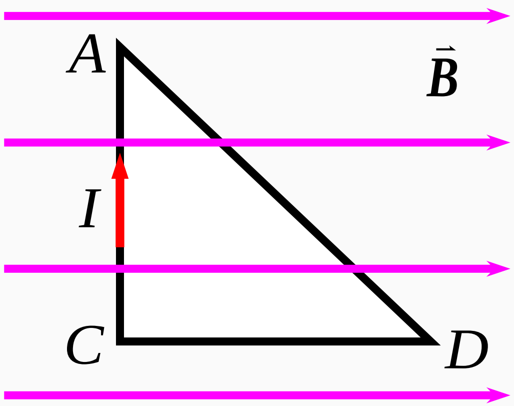
(2) 线圈所受磁力矩大小和方向 $M = mB = \dfrac{BIa^2}{2}$ —方向向下

(3) AC边固定, D点绕AC边向纸外转π/2, 磁力做的功

$$\Phi_1 = 0, \Phi_2 = BS = \frac{1}{2}a^2B, A = I(\Phi_2 - \Phi_1) = I\left(\frac{1}{2}a^2B - 0\right) = \frac{Ia^2B}{2}$$

(4)CD边固定, A点绕CD边向纸外转π/2, 磁力做的功

$$\Phi_1=0,\Phi_2=0,A=I(\Phi_2-\Phi_1)=0$$

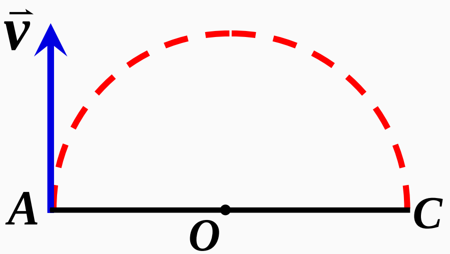


(5)AD边固定, C点绕AD边向纸外转π/2, 磁力做的功

$$\Phi_1=0,\Phi_2=\vec{B}\cdot\vec{S}=BS\cos\frac{3\pi}{4}=-\frac{1}{2}a^2B\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{4}a^2B,$$

$$A=I(\Phi_2-\Phi_1)=I\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}a^2B-0\right)=-\frac{\sqrt{2}Ia^2B}{4}$$

3、如图所示，一电子经A沿半径$R=5\text{cm}$的半圆弧以速率 $v=1\times10^7\text{m/s}$ 运动到C点，试求：(1)所需磁感应强度大小和方向；(2)所需时间。



解: (1) 对电子的圆运动用牛顿第二定律

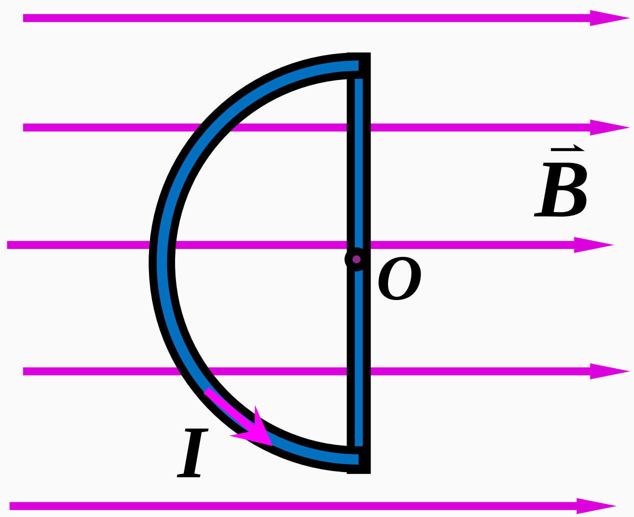
$$evB = m\frac{v^2}{R} \Rightarrow B = \frac{mv}{eR} = \frac{9.11\times10^{-31}\times1\times10^{7}}{1.60\times10^{-19}\times0.05} = 1.1\times10^{-3}(\text{T})$$

—磁场方向垂直纸面向里

(2) 所需时间为

$$\Delta t = \frac{T}{2} = \frac{2\pi R}{2v} = \frac{\pi\times0.05}{1\times10^{7}} = 1.6\times10^{-8}(\text{s})$$

4、一半径为R=0.1m的圆形闭合线圈，载有电流I=10A，放在均匀磁场中，磁场方向与线圈平面平行，大小为B=0.5T，如图，试求: (1)线圈磁矩的大小和方向； (2)线圈所受磁力矩大小和方向； (3)在磁力作用下，线圈平面绕过O点的竖直轴转过90^0，磁力矩做功。



解: (1) $$m = IS = \frac{I\pi R^2}{2} = \frac{10\times3.14\times(0.1)^2}{2} = 0.157(\mathrm{A\cdot m^2})$$

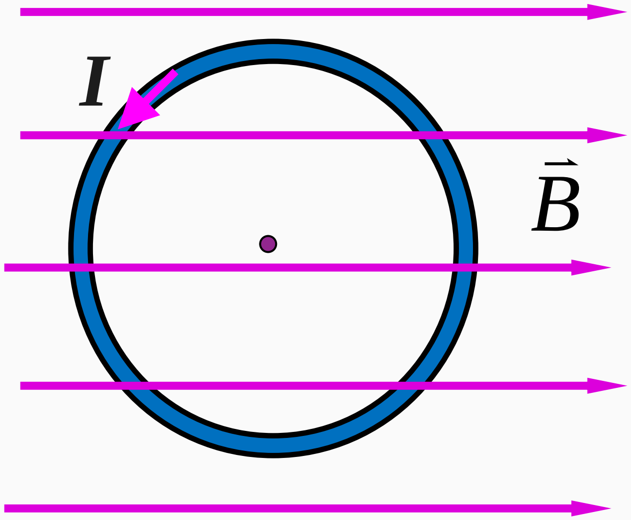
—方向垂直纸面向外

(2) $$M = mB = \frac{BI\pi R^2}{2} = \frac{0.5\times10\times3.14\times(0.1)^2}{2} = 7.85\times10^{-2}(\mathrm{N\cdot m})$$

—方向平行纸面向上

(3) $$A = I(\Phi_2 - \Phi_1) = IBS = \frac{BI\pi R^2}{2} = \frac{0.5\times10\times3.14\times(0.1)^2}{2} = 7.85\times10^{-2}(\mathrm{J})$$

推广1、一半径为R的圆形闭合线圈，载有电流I，放在均匀磁场中，磁场方向与线圈平面平行，大小为B，如图，求：(1)线圈磁矩的大小和方向；(2)线圈所受磁力矩大小和方向；(3)在磁力作用下，线圈平面绕过O点的竖直轴转过90^0，磁力矩做功。



解：(1)$m = Is = I\pi R^2$ —方向垂直纸面向外

（2）$M = mB = BI\pi R^2$ —方向平行纸面向上

（3）$A = \int_{\Phi m_1}^{\Phi_{m2}} I d\Phi_m = I(\Phi_{m2} - \Phi_{m1}) = IBs = BI\pi R^2$

推广1、半径 $R=0.1\text{m}$ 的圆形闭合线圈，载有电流 $I=10\text{A}$，放在 $B=10\text{T}$ 的均匀磁场中，磁场方向与线圈平面平行，求: 1）线圈磁矩的大小和方向；2）线圈所受磁力矩的大小和方向；3）在磁力作用下，线圈平面绕过 O 点的竖直轴转过 90^0，磁力矩做的功.

解: (1) $m = IS = I\pi R^2 = 0.314(\text{A}\cdot\text{m}^2)$

方向向外

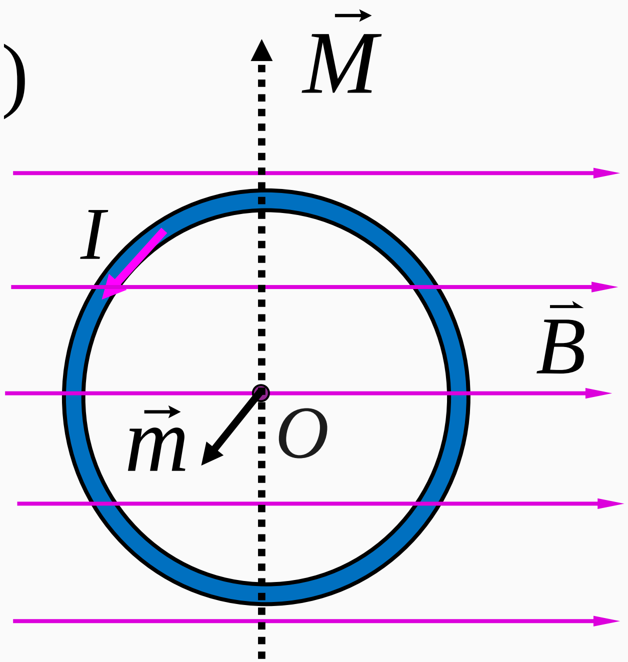
(2) $M = mB = BI\pi R^2 = 3.14(\text{N}\cdot\text{m})$

方向向上

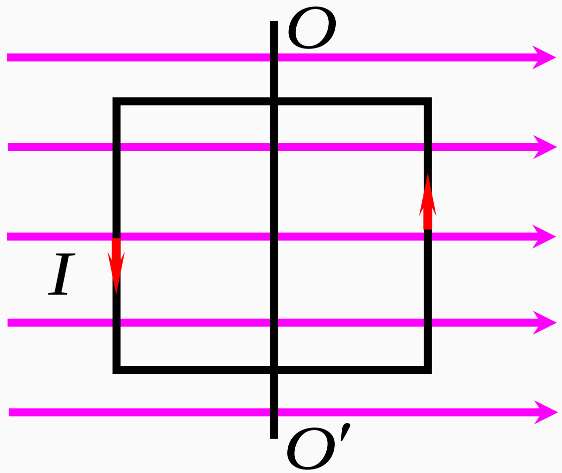
(3) $A = I\Delta\Phi$

$= I(BS\cos 0° - BS\cos 90°)$

$= IBS = 3.14(J)$



推广2、一正方形线圈，边长为a，可以绕通过其相对两边中点的一个竖直轴自由转动。线圈中通有电流I，把线圈放在均匀外磁场B中，线圈平面与磁场方向平行。试求：(1)线圈磁矩的大小和方向；(2)线圈所受磁力矩大小和方向；(3)在磁力作用下，线圈平面绕过O点的竖直轴转过90^0，磁力矩做功。



解：(1)$m = Is = Ia^2$ —方向垂直纸面向外

（2）$M = mB = BIa^2$ —方向平行纸面向上

（3）$A = \int_{\Phi_{m_1}}^{\Phi_{m2}} I d\Phi_m = I(\Phi_{m2} - \Phi_{m1}) = IBs = BIa^2$

5、如图所示，半径为R载有电流I_1的导体圆环，与载有电流I_2的长直导线AB彼此绝缘，放在同一平面内，AB与圆环的直径重合。试求圆环所受安培力的大小和方向。

解：如图建立坐标系.

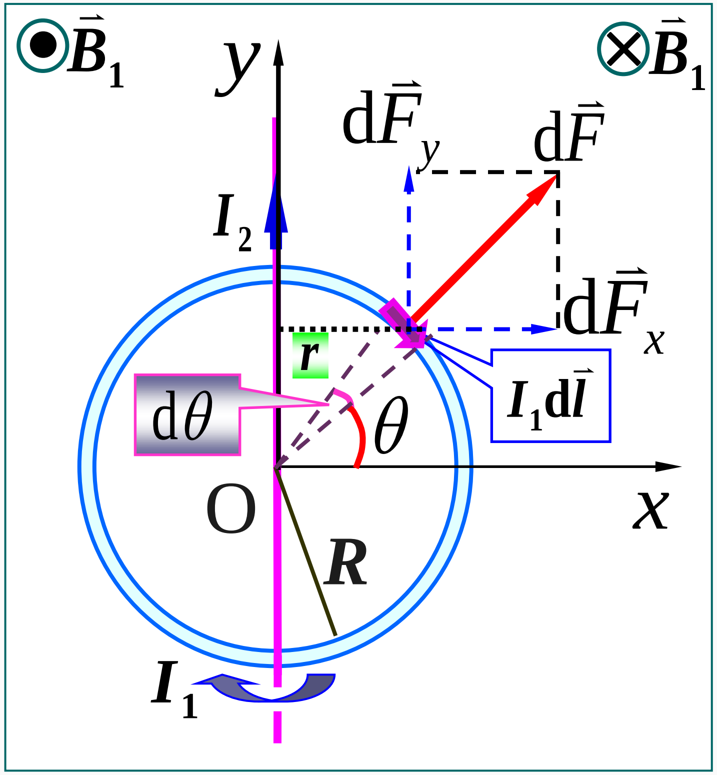
1. 圆电流上取电流元 $I_2 d\vec{l}$

2. 长直导线在电流元处的磁场

$$B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{r} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{R\cos\theta}$$

3. 长直导线对电流元的作用力

$$dF = B_2 I_1 dl\cos\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\frac{dl\cos\theta}{R\cos\theta}$$



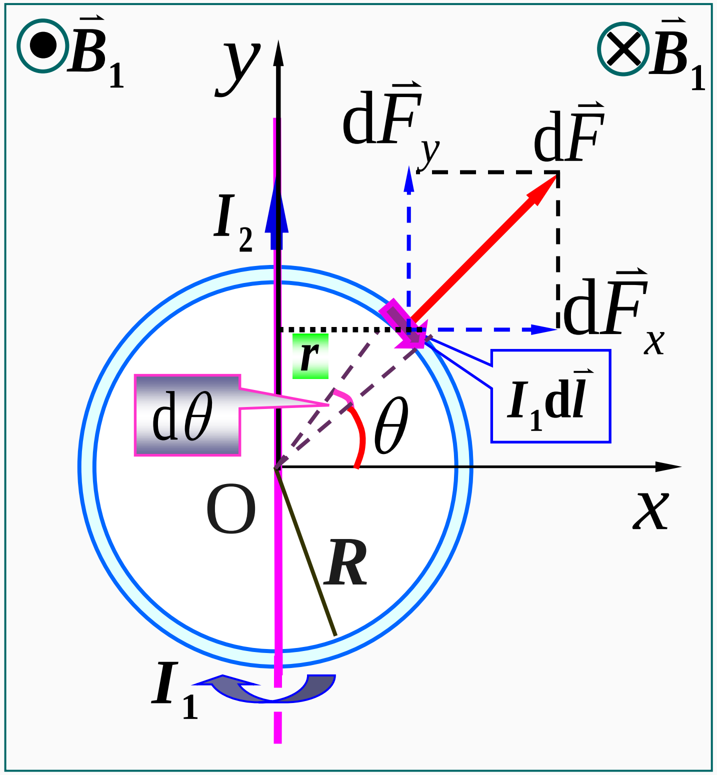
$$dF = B_2 I_1 dl\cos\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\frac{dl\cos\theta}{R\cos\theta}$$

$$dl = Rd\theta$$

$$dF = B_2 I_1 dl\cos\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\frac{Rd\theta\cdot\cos\theta}{R\cos\theta}$$

$$= \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}d\theta$$

dF 的方向为沿圆环径向向外.



分量式:

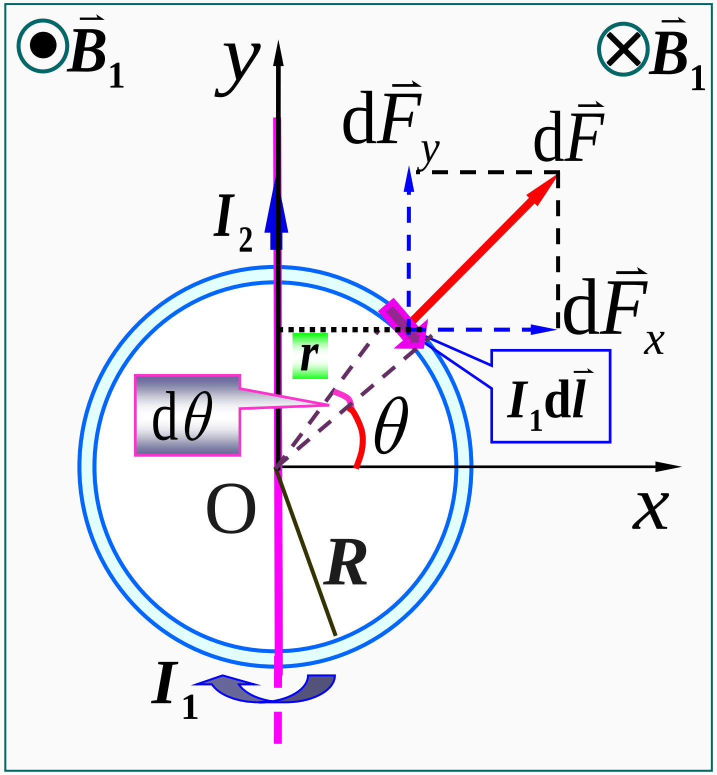
$$dF_x = dF\cos\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\cos\theta d\theta$$

$$dF_y = dF\sin\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\sin\theta d\theta$$

分量式:

$$dF_x = dF\cos\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\cos\theta d\theta$$

$$dF_y = dF\sin\theta = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\sin\theta d\theta$$

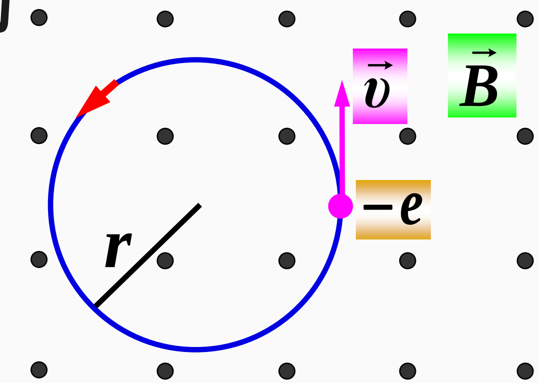


由于对称性, y 分量的合力为零

$$F_y = \int_0^{2\pi} dF_y = \int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\sin\theta d\theta = 0$$

$$F_x = \int_0^{2\pi} dF_x = \int_0^{2\pi}\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\cos\theta d\theta = \mu_0 I_1 I_2$$ —方向沿x轴正向。

6、如图所示，一电子在$B=70\times10^{-4}$T的匀强磁场中作圆周运动，半径 $r = 0.3\text{cm}$，已知B垂直于纸面向外，某时刻电子在A点，速度$\vec{v}$向上。(1)画出这电子运动的轨道；(2)求该电子速度的大小；(3)求该电子的动能E_k。

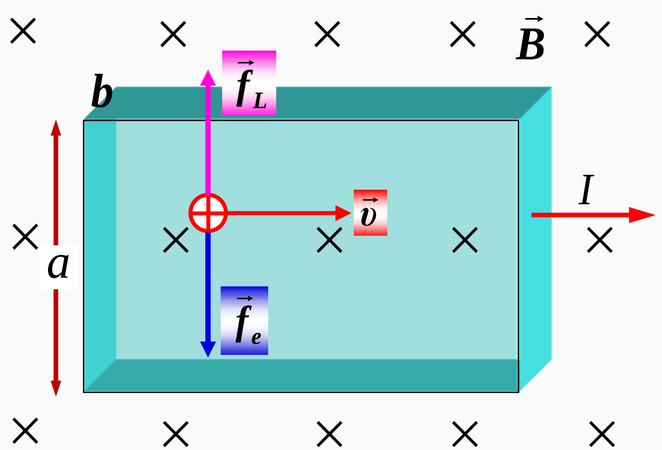


解：(1) 电子运动的轨道如图

(2) $m\dfrac{v^2}{r}=evB \Rightarrow v=\dfrac{eBr}{m}=\dfrac{1.6\times10^{-19}\times70\times10^{-4}\times0.3\times10^{-2}}{9.1\times10^{-31}}=3.69\times10^{6}(\text{m/s})$

(3) $E_k=\dfrac{1}{2}mv^2=\dfrac{1}{2}\times9.1\times10^{-31}\times\left(3.69\times10^{6}\right)^2=6.2\times10^{-18}(\text{J})$

7、在霍耳效应实验中，一宽1.0cm，长4.0cm，厚1.0×10^{-3}cm的导体，沿长度方向载有3.0A的电流，当磁感应强度大小为B =1.5T的磁场垂直地通过该导体时，产生1.0×10^{-5}V的横向电压，试求: (1)载流子的平均漂移速度；(2)每立方米的载流子数目。



解: (1) $f_L = f_e \Rightarrow q\bar{v}B = qE = q\dfrac{U_H}{a}$

$$\bar{v} = \frac{U_H}{Ba} = \frac{1.0\times10^{-5}}{1.5\times1.0\times10^{-2}} = 6.7\times10^{-4}\,(\text{m/s})$$

(2) $I = \delta S = ne\bar{v}S$

$$n = \frac{I}{e\bar{v}S} = \frac{I}{e\bar{v}ab} = \frac{3.0}{1.60\times10^{-19}\times6.7\times10^{-4}\times1.0\times10^{-2}\times1.0\times10^{-5}} = 2.8\times10^{29}(个/m^3)$$

练习题（六）

1、真空中两束阴极射线向同一方向以速率 v 发射，试分析两束射线间相互作用电磁力，并给出两者大小的比值。

解:(1)阴极射线为电子流。考虑其中距离为 r 且正对着的一对电子:

电场力：$F_e = eE = \dfrac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$ —相互排斥；

磁场力：$F_m = evB = ev\dfrac{\mu_0 ev}{4\pi r^2} = \dfrac{\mu_0 e^2 v^2}{4\pi r^2}$ —相互吸引；

因为：$\varepsilon_0 = 8.85\times10^{-12}\,\mathrm{F/m}$；$\mu_0 = 4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{H/m}$；$v^2 \geq 0$;

$$\frac{F_e}{F_m} = \frac{1}{\varepsilon_0\mu_0 v^2} \Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow F_e >> F_m$$

解法(2) 也可考虑两条由阴极射线组成的无限长载流直导线，求单位长度的电荷或单位长度的电流元受到另一根导线的电场力与安培力之比,设电荷线密度为λ，则电流强度

$$I=\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{\lambda\cdot \upsilon\Delta t}{\Delta t}=\lambda\upsilon$$

由高斯定理，可得电荷线密度为λ的无限长直导线在**距离r处电场**：

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

另一根导线上**单位长度电荷**受到的电场力

$$F_e=\lambda E=\frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

由安培环路定理，可得电流密度为I的无限长载流直导线在距离r处的磁场：

$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}=\frac{\mu_0\lambda\upsilon}{2\pi r}$$

另一根导线上**单位长度电流元**受到的安培力

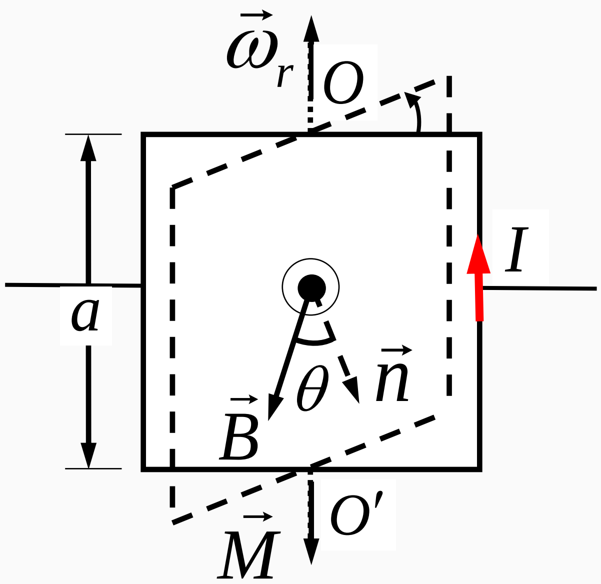
$$F_m=Idl\cdot B=IB=\frac{\mu_0\lambda^2\upsilon^2}{2\pi r}$$

因为：$\varepsilon_0=8.85\times10^{-12}\,\mathrm{F/m}$；$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\,\mathrm{H/m}$；$\upsilon^2\geq 0$;

$$\frac{F_e}{F_m}=\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0\upsilon^2}\Rightarrow\Rightarrow\Rightarrow F_e>>F_m$$

【结论】两束阴极射线间的总电力和总磁力之比与正对着的一对电子间的电力和磁力之比相同

2、一正方形线圈，由细导线做成边长为a，共有N 匝，可以绕通过其相对两边中点的一个竖直轴自由转动。现在线圈中通有电流I，并把线圈放在均匀的水平外磁场中，线圈对其转轴的转动惯量为J，求线圈绕其平衡位置作微小振动时的振动周期T。



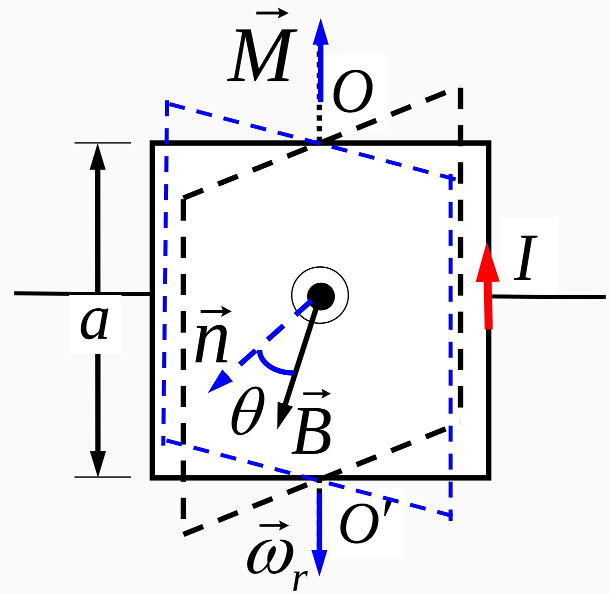
解法1：转动定律法

先对线圈运动进行定性分析.

选取平衡位置为转角零点, 逆时针转动(俯视)为转角及磁力矩正方向.

当线圈逆时针方向(俯视)偏离平衡位置时, 转角$\theta > 0, \omega_r = d\theta/dt > 0$, 方向向上, 而磁力矩 $M < 0$, 方向向下, 其作用是将线圈拉回平衡位置.

当线圈**顺时针**方向偏离平衡位置时，转角$\theta < 0, \omega_r = d\theta/dt < 0$，方向向下，而磁力矩 $M>0$，方向向上，其作用仍是将线圈拉回平衡位置.



因此，磁力矩起**恢复力矩**的作用.

根据**转动定律**：

$$M = J\frac{d\omega_r}{dt} = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$M = -mB\sin\theta = -NBIa^2\sin\theta$$

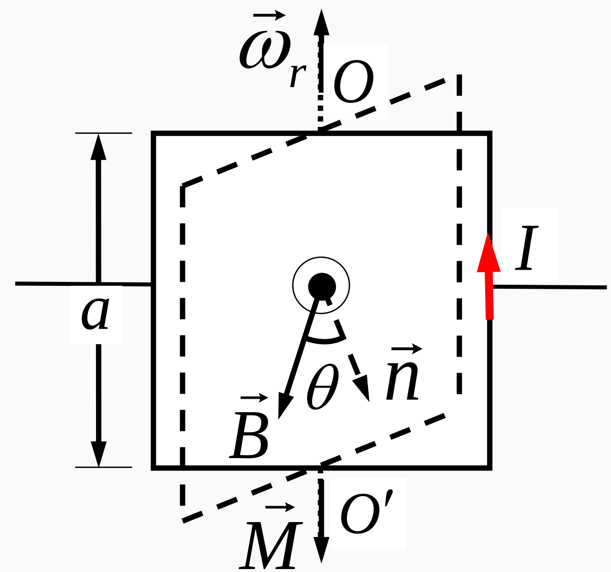
$$-NBIa^2\sin\theta = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

负号表示M 的方向与角坐标 θ 的方向相反

对于微小振动　$\sin\theta \approx \theta$

$$-NBIa^2\theta = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{NBIa^2}{J}\theta=0$$



振动角频率 $\omega=\sqrt{\dfrac{NBIa^2}{J}}$

振动周期 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}=\dfrac{2\pi}{a}\sqrt{\dfrac{J}{NIB}}$

注意：振动角频率ω与转动角速度$\omega_r = d\theta/dt$不是一个量.

振动方程的解:

$$\theta = A\cos(\omega t+\varphi_0)$$

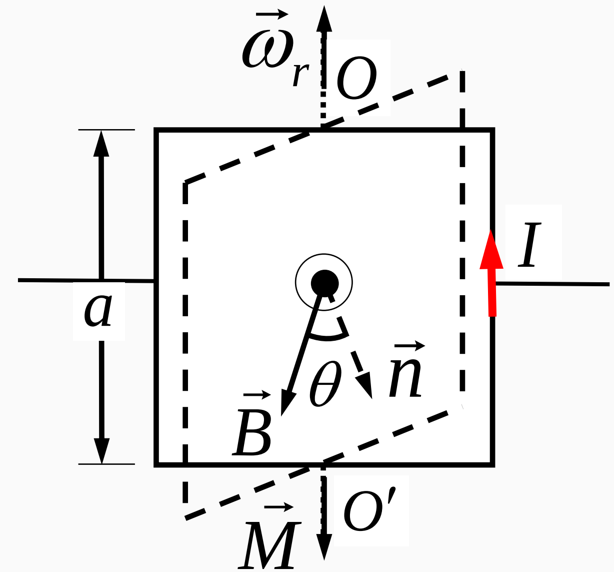
$$\omega_r=\frac{d\theta}{dt}=-\omega A\sin(\omega t+\varphi_0)\neq\omega$$

线圈振动过程中,振动角频率ω是固定的，而转动角速度ω_r是随时间周期性变化的.

解法(2)：能量法

选取平衡位置为转角**零点**, 逆时针转动(俯视)为转角及磁力矩的**正方向.**

在线圈转动过程中，只有磁场(磁力矩)做功. 根据**功能原理**, 它应该转化为线圈的转动动能：



$$dA = dE_k$$

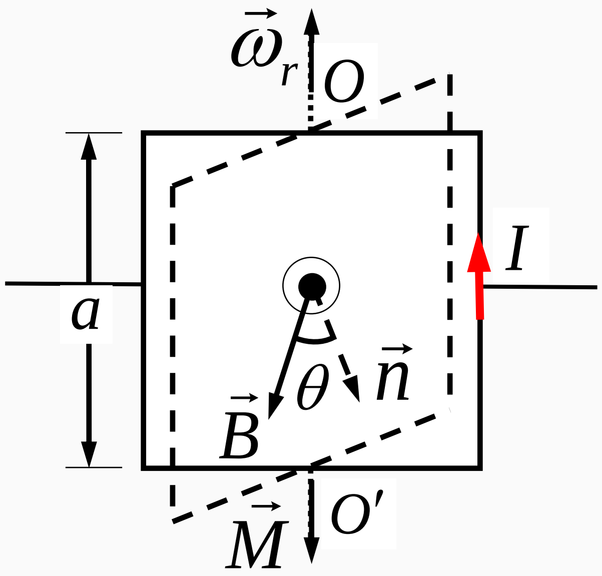
磁场做的功 $dA = Md\theta = Id\Phi = -NBIS\sin\theta d\theta$, 其中 $S = a^2$

线圈转动动能 $E_k = \dfrac{1}{2}J\omega_r^2$, 其中 $\omega_r = \dfrac{d\theta}{dt}$

$$\therefore -NBIa^2\sin\theta d\theta = J\omega_r d\omega_r$$

两边除以*dt*，得到 $-NBIa^2\sin\theta\omega_r = J\omega_r\dfrac{d\omega_r}{dt}$

$$-NBIa^2\sin\theta = J\frac{d\omega_r}{dt} = J\frac{d^2\theta}{dt^2}$$



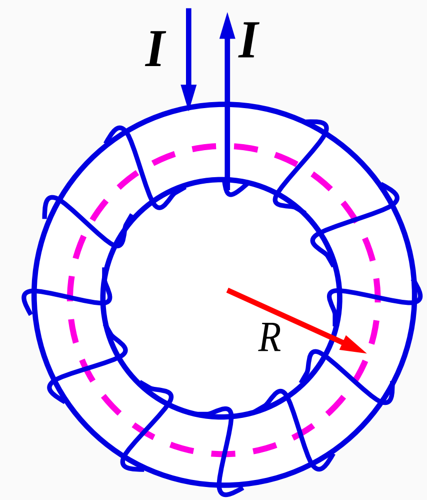
对于微小振动 $\sin\theta \approx \theta$

$$\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{NBIa^2}{J}\theta = 0$$

与前面用转动定律得到的方程一样.

本例表明: 磁场与实物间的相互作用过程, 同样遵从能量守恒与转化定律.

3、一环形铁芯横截面的直径为4.0mm，环的平均半径R=15mm，环上密绕着200匝的线圈，如图所示，当线圈导线中通有25mA的电流时，铁芯的相对磁导率μ_r=300，求通过铁芯横截面的磁通量。



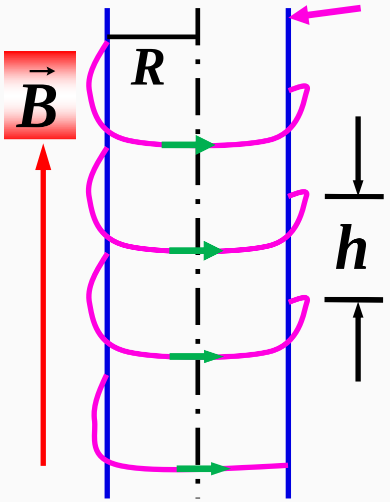
解：$$\oint_L \vec{H}\cdot d\vec{l} = NI \Rightarrow H\cdot 2\pi R = NI \Rightarrow H = \frac{NI}{2\pi R}$$

$$B = \mu_0\mu_r H = \frac{\mu_0\mu_r NI}{2\pi R}$$

$$\Phi = BS = \frac{\mu_0\mu_\gamma NI}{2\pi R}\cdot\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$= \frac{2\times10^{-7}\times300\times200\times25\times10^{-3}}{15\times10^{-3}}\times3.14\times\left(2\times10^{-3}\right)^2 = 2.512\times10^{-7}(Wb)$$

4、如图所示，一电子在B=20×10⁻⁴T的磁场中沿半径为 $R = 2\text{cm}$ 的螺旋线运动，螺距为 $h = 5.0\ \text{cm}$。试求: (1)磁场B的方向如何？(2)该电子的速度。



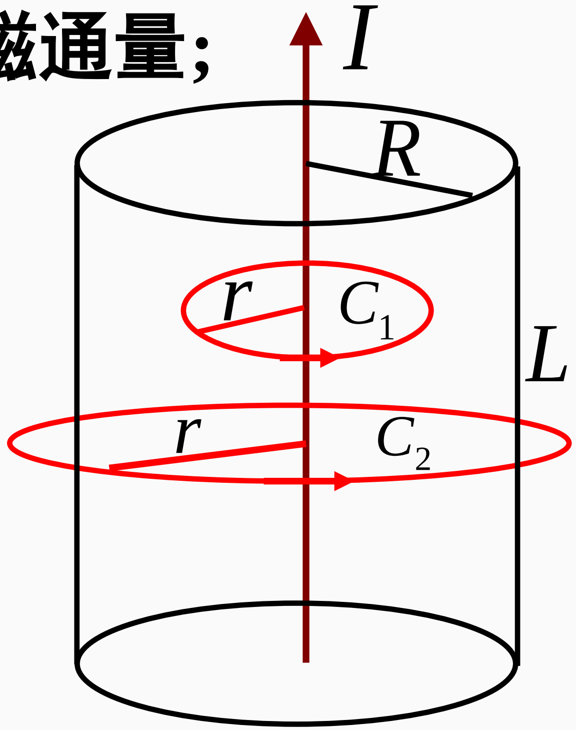
解: (1) 磁场方向如图向上

$$(2)\begin{cases} m\dfrac{v^2\sin^2\theta}{R} = qv\sin\theta B \\ h = v\cos\theta\cdot\dfrac{2\pi R}{v\sin\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v\sin\theta = \dfrac{qRB}{m} \\ v\cos\theta = \dfrac{qBh}{2\pi m} \end{cases}$$

$$v = \frac{qB}{m}\sqrt{R^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}} = \frac{1.6\times10^{-19}\times20\times10^{-4}}{9.1\times10^{-31}}\sqrt{0.02^2 + \frac{0.05^2}{4\times3.14^2}} = 7.57\times10^6(\text{m/s})$$

$$\theta = \arctan\frac{2\pi R}{h} = \arctan\frac{4\pi}{5} \approx 68.30^\circ$$

5、有一半径为R 的无限长圆柱体形磁介质，相对磁导率为μ_r，今有电流 I 沿轴线方向均匀通过，试求：(1)圆柱体内任一点 ($r < R$)的B；(2)圆柱体外任一点($r > R$)的B；(3)通过长为L的圆柱体的纵截面的一半的磁通量；



解:本题看似容易,实则较难.属于非理想磁介质(内部既有传导电流又有磁化电流).

选取以圆柱体中心为原点的圆形回路，则根据介质中的安培环路定理

$$(1)\ r < R:\ \oint_{C_1}\vec{H}\cdot d\vec{r} = \sum I_{in},\quad \Rightarrow 2\pi r\cdot H = \frac{I}{\pi R^2}\pi r^2$$

$$\therefore H = \frac{Ir}{2\pi R},\quad B = \mu H = \mu_0\mu_r H = \frac{\mu_0\mu_r Ir}{2\pi R}$$

$$(2)\ r > R:\ \oint_{C_2}\vec{H}\cdot d\vec{l} = 2\pi rH = I,\ \therefore H = \frac{I}{2\pi r},\ B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$H=\begin{cases}\dfrac{Ir}{2\pi R^2} & (r<R)\\ \dfrac{I}{2\pi r} & (r>R)\end{cases}\qquad B=\begin{cases}\dfrac{\mu_0\mu_r Ir}{2\pi R^2} & (r<R)\\ \dfrac{\mu_0 I}{2\pi r} & (r>R)\end{cases}$$

方向与传导电流成右手螺旋关系

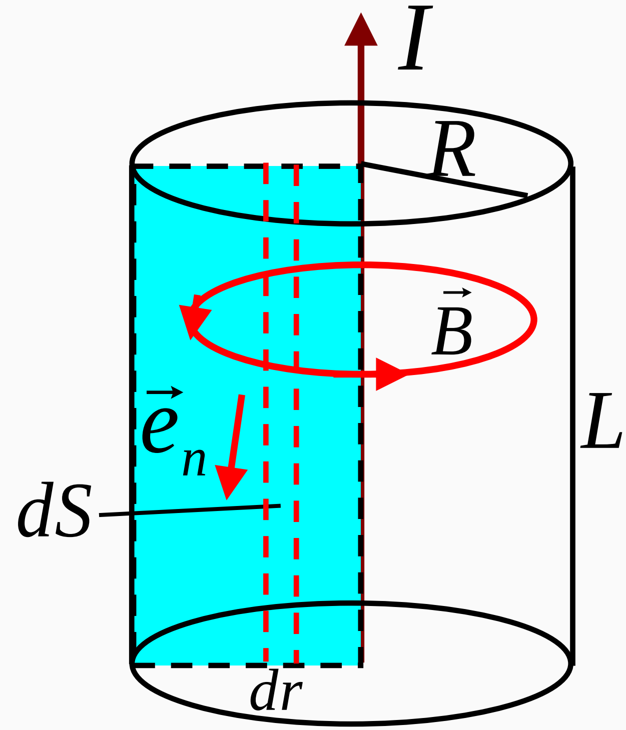
(3) 求通过长为L的圆柱体的纵截面的一半的磁通量.

选取截面的法向与 B 成右螺旋关系

$$\Phi_m=\int\vec{B}\cdot d\vec{S}=\int BdS$$

$$dS=Ldr$$

因 B 随 r 而变化, 应取$r\sim r+dr$ 之间的条状面积元(积分就是化变为不变).



$$\therefore \Phi_m=\int_0^R\frac{\mu_0\mu_r Ir}{2\pi R^2}\cdot Ldr=\frac{\mu_0\mu_r IL}{4\pi}$$