2022-2023 第一学期《高等数学 A》参考答案

一、填空题（每小题 3 分,共 15 分）

1．e^2 ； 2．-2 ； 3．0 ； 4．0 ； 5.16．

二、选择题（每小题 3 分,共 15 分）

1．B； 2．D; 3．D; 4．B; 5．C．

三、计算下列各题（每小题 8 分，共 24 分）

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan 3x}{x}=3\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 3x}{3x}\cdot\dfrac{1}{\cos 3x}=3$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}[(\dfrac{1}{n})^p+(\dfrac{2}{n})^p+\cdots(\dfrac{n}{n})^p]\cdot\dfrac{1}{n}=\int_0^1 x^p dx=\dfrac{1}{p+1}x^{p+1}\Big|_0^1=\dfrac{1}{p+1}$.

3. 显然 $x_n>0\ (n=1,2,\cdots)$，且 $x_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(x_n+\dfrac{1}{x_n}\right)\ge 1$，$\therefore\ \dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{x_n^2}\right)\le\dfrac{1}{2}(1+1)=1$，

$\therefore\ x_{n+1}\le x_n$, 即$\{x_n\}$单调减，$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则 $a=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$，$\therefore\ a=1, a=-1$(舍去),$\therefore\ \lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

四、1. $y'=f'(\sin^2 x)(\sin^2 x)'+f(\cos^2 x)(\cos^2 x)'$

$=f'(\sin^2 x)(2\sin x\cos x)+f(\cos^2 x)2\cos x(-\sin x)$

$=\sin 2x(f'(\sin^2 x)-f(\cos^2 x))$

2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(t-\arctan t)'}{[\ln(1+t^2)]'}=\dfrac{1-\dfrac{1}{1+t^2}}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1}{2}t$， $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{(\frac{1}{2}t)'}{\dfrac{2t}{1+t^2}}=\dfrac{1+t^2}{4t}$，

3. 解: $y=x^4(12\ln x-7)$

$y'=4x^3(12\ln x-7)+12x^3$，$y''=144x^2\ln x$

令 $y''=0$ ，得 $x=1$.

因为当$0<x<1$时，$y''<0$ ；当$x>1$时，$y''>0$.

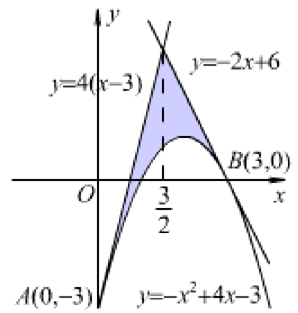
所以曲线在(0, 1]内是凸的，在[1, +∞)内是凹的，拐点为(1, −7).

五、 1. $\int e^{\sqrt[3]{x}}dx\overset{令\sqrt[3]{x}=t}{=\!=\!=}3\int t^2e^t dt=3\int t^2 de^t$

$=3t^2e^t-6\int te^t dt=3t^2e^t-6\int t de^t$

$=3t^2e^t-6te^t+6\int e^t dt\ =3t^2e^t-6te^t+6e^t+C\ =3e^{\sqrt[3]{x}}(\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+2)+C$.

2. 解: 因为 $y'=-2x+4$，



过点(0, −3)处的切线的斜率为 4，切线方程为 $y=4x-3$.

过点(3, 0)处的切线的斜率为−2，切线方程为 $y=-2x+6$.

两切线的交点为$(\frac{3}{2}, 3)$，所求的面积为

$$A=\int_0^{\frac{3}{2}}[4x-3-(-x^2+4x-3)]+\int_{\frac{3}{2}}^{3}[-2x+6-(-x^2+4x-3]dx=\frac{9}{4}.$$

六、(本题满分 6 分)

证：不妨设：$f'_+(a)>0$，$f'_-(b)>0$，即

$$f'_+(a)=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{x-a}>0\Rightarrow\exists x_1>a, 使\ f(x_1)>0$$

$$f'_-(b)=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)-f(b)}{x-b}=\lim_{x\to b^-}\frac{f(x)}{x-b}>0\Rightarrow\exists x_2<b, 使\ f(x_2)<0$$

$f(x)$在$[x_1,x_2]$上满足零点定理条件，故存在一点$\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$，使$f(\xi)=0$

$f(x)$在区间$[a,\xi]$上满足 Rolle 中值定理条件，故存在一点$\xi_1\in(a,\xi)$，使$f'(\xi_1)=0$，

$f(x)$在区间$[\xi,b]$上满足 Rolle 中值定理条件，故存在一点$\xi_2\in(\xi,b)$，使$f'(\xi_2)=0$，

$f'(x)$在区间$[\xi_1,\xi_2]$上满足 Rolle 中值定理条件，故存在一点$\eta\in(\xi_1,\xi_2)$，使$f''(\eta)=0$.