

# 合肥工业大学试卷 ( A )

共 1 页第 1 页

2022~2023 学年第 一 学期 课程代码 1400211B 课程名称 高等数学 A(上) 学分 6 课程性质:必修☑、选修□、限修□ 考试形式:开卷□、闭卷☑  
专业班级 (教学班) 考试日期 2023 年 03 月 05 日 命题教师 高等数学课程组 系 (所或教研室) 主任审批签名

## 一、填空题 (每小题 3 分, 共 15 分)

- $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+1}{n-1}\right)^n =$  .
- 已知函数  $y = y(x)$  由方程  $y = \cos x + \frac{1}{2} \sin y$  确定, 则  $y'|_{(x,y)=(\frac{\pi}{2},0)} =$  .
- 若函数  $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ , 则  $f''(0) =$  .
- $\int_{-5}^5 \frac{x^3 \sin^2 x}{x^4 + 2x^2 + 1} dx =$  .
- 心形线  $\rho = 4(1 + \cos \theta)$  ( $0 \leq x \leq \pi$ ) 的弧长= .

## 二、选择题 (每小题 3 分, 共 15 分)

- 设  $f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ , 则下面正确的是 ( ).  
(A)  $F(x)$  在  $x=0$  点不连续;  
(B)  $F(x)$  在  $(-\infty, \infty)$  内连续, 在  $x=0$  点不可导;  
(C)  $F(x)$  在  $(-\infty, \infty)$  内可导, 且满足  $F'(x) = f(x)$ ;  
(D)  $F(x)$  在  $(-\infty, \infty)$  内可导, 但不一定满足  $F'(x) = f(x)$ .
- 下列说法正确的是 ( ).  
(A) 若  $f(x)$  是有界连续函数, 则  $F(x) = \int_0^x f(t)dt$  也是有界函数;  
(B) 若  $f(x)$  在区间  $[a, b]$  上仅有有限个间断点, 则  $f(x)$  在  $[a, b]$  上可积;  
(C) 若  $f(x)$  是可导函数, 则  $\int f'(x)dx = f(x)$ ;  
(D) 若  $f'(x)$  是奇函数, 则  $f(x)$  是偶函数.

- 函数  $y = \frac{3x^2 + 4x + 4}{x^2 + x + 1}$  的极大值为 ( ).  
(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4
- 方程  $x^5 - 3x = 1$  在下述哪个区间内至少有一个根 ( ).  
(A)  $[0, 1]$  (B)  $[1, 2]$  (C)  $[2, 3]$  (D)  $[3, 4]$
- 下列反常积分中发散的是 ( ).  
(A)  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x^2+1)(x^2+2)} dx$  (B)  $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{x^4+1}} dx$  (C)  $\int_0^{\frac{1}{2}} \cot x dx$  (D)  $\int_0^1 \ln x dx$

## 三、求下列函数极限 (每小题 8 分, 共 24 分)

- 求极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{x}$  .
- 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$ , ( $p > 0$ ) .
- 设  $x_1 > 0$ ,  $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left( x_n + \frac{1}{x_n} \right)$  ( $n = 1, 2, \cdots$ ), 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  存在, 并求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$  .

## 四、求导数及其应用 (每小题 8 分, 共 24 分)

- 设  $f(x)$  可导, 试求  $y = f(\sin^2 x) + f(\cos^2 x)$  的导数.
- 求参数方程  $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$  所确定的函数  $y = f(x)$  的二阶导数  $\frac{d^2 y}{dx^2}$  .
- 求函数  $y = x^4(12 \ln x - 7)$  图形的拐点及凹或凸的区间.

## 五、求积分及其应用 (每小题 8 分, 共 16 分)

- 计算不定积分  $\int e^{\sqrt[3]{x}} dx$  .
- 求抛物线  $y = -x^2 + 4x - 3$  及其在点  $(0, -3)$  和  $(3, 0)$  处的切线所围成的图形的面积.

## 六、证明题 (本题满分 6 分)

设  $f(x)$  在  $[a, b]$  上具有二阶导数, 且  $f(a) = f(b) = 0$ ,  $f'_+(a)f'_-(b) > 0$ , 证明: 存在  $\eta \in (a, b)$ , 使  $f''(\eta) = 0$  .