合肥工业大学参考标准

2021～2022 学年第 一 学期　课程代码 1400211B　课程名称 高等数学 A(上)　学分 6　课程性质:必修☑、选修☐、限修☐　考试形式:开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）______　考试日期 2022.1.18　命题教师 高等数学课程组　系（所或教研室）主任审批签名 ______

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. “$\frac{1}{2}$”或“0.5”　**2.** “dx”　**3.** “$2x$”或“$y=2x$”　**4.** “$2022!$”　**5.** “$y''-2y'+2y=0$”

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. C　2. B　3. B　4. A　5. A

三、解答题（每小题 8 分，共 64 分）

1．求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+e^x}{2}\right)^{\cot x}$.

解：原式$=\exp\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\frac{1+e^x}{2}}{\tan x}\right)=\exp\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\left(1+\frac{e^x-1}{2}\right)}{x}\right)$

$=\exp\left(\lim\limits_{x\to0}\frac{\frac{x}{2}}{x}\right)=\exp(\frac{1}{2})$

2．已知 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，且 $\lim\limits_{x\to0}\frac{f(e^{x^2})-3f(1+\sin^2x)}{x^2}=2$，求 $f'(1)$.

解：由题意知 $\lim\limits_{x\to0}\left[f(e^{x^2})-3f(1+\sin^2x)\right]=0$，即 $f(1)-3f(1)=0$，故 $f(1)=0$.

从而

$$\lim_{x\to0}\frac{f(1+e^{x^2}-1)-f(1)}{e^{x^2}-1}\cdot\frac{e^{x^2}-1}{x^2}-3\lim_{x\to0}\frac{f(1+\sin^2x)-f(1)}{\sin^2x}\cdot\frac{\sin^2x}{x^2}=2$$

即 $f'(1)-3f'(1)=2$，解得 $f'(1)=-1$.

3．设 $f(x^2-1)=\ln\frac{x^2}{x^2-2}$，且 $f[\varphi(x)]=\ln x$，求 $\int_2^3\varphi(x)\mathrm{d}x$.

解：$f(x^2-1)=\ln\frac{x^2-1+1}{x^2-1-1}\Rightarrow f(x)=\ln\frac{x+1}{x-1}$

$f[\varphi(x)]=\ln\frac{\varphi(x)+1}{\varphi(x)-1}=\ln x\Rightarrow\varphi(x)=\frac{x+1}{x-1}$

$\int_2^3\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_2^3\frac{x+1}{x-1}\mathrm{d}x=\int_2^3\left(1+\frac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x=1+2\ln2$.

4．求函数 $f(x)=(2x-5)\sqrt[3]{x^2}$ 的极值.

解：$f'(x)=2x^{\frac{2}{3}}+(2x-5)\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=\frac{10(x-1)}{3\sqrt[3]{x}}\quad(x\neq0)$

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,+\infty)$
$f'(x)$	+	不存在	-	0	+
$f(x)$	单增	极大值 $f(0)=0$	单减	极小值 $f(1)=-3$	单增

综上，该函数有极大值 $f(0)=0$，极小值 $f(1)=-3$.

5．计算 $\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x$.

解：$\int_1^{e^2}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=2\int_1^{e^2}\ln x\mathrm{d}\sqrt{x}=2\sqrt{x}\ln x\Big|_1^{e^2}-2\int_1^{e^2}\frac{1}{\sqrt{x}}\mathrm{d}x=4e-4\sqrt{x}\Big|_1^{e^2}=4$.

6．已知双纽线 L 的极坐标方程为 $r^2=\cos2\theta$，求 L 围成的有界区域的面积 A.

解：由对称性知，$A=4\cdot\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}r^2(\theta)\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos2\theta\mathrm{d}\theta=\sin2\theta\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=1$.

7．设函数 $f(x)=\begin{cases}x\arctan\frac{1}{x^2}, & x\neq0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 讨论 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性.

解：$f'(0)=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\arctan\frac{1}{x^2}-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to0}\arctan\frac{1}{x^2}=\frac{\pi}{2}$,

2021～2022 学年第 一 学期　课程代码 1400211B　课程名称 高等数学 A(上)　学分 6　课程性质:必修☑、选修☐、限修☐　考试形式:开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）______　考试日期 2022.1.18　命题教师 高等数学课程组　系（所或教研室）主任审批签名 ______

$$f'(x)=\arctan\frac{1}{x^2}+x\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{x^4}}\cdot\frac{-2}{x^3}=\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{1+x^4},$$

由题意知 $\lim\limits_{x\to0}f'(x)=\lim\limits_{x\to0}\left(\arctan\frac{1}{x^2}-\frac{2x^2}{1+x^4}\right)=\frac{\pi}{2}=f'(0)\Rightarrow f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续.

8．设函数 $y=y(x)$ 是微分方程 $y'+\frac{1}{2\sqrt{x}}y=2+\sqrt{x}$ 满足条件 $y(1)=3$ 的解，求曲线 $y=y(x)$ 的渐近线.

解：一阶线性微分方程的通解为

$$y(x)=e^{-\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}\left[\int(2+\sqrt{x})e^{\int\frac{1}{2\sqrt{x}}dx}dx+C\right]$$

$$=e^{-\sqrt{x}}\left[\int(2+\sqrt{x})e^{\sqrt{x}}dx+C\right]=e^{-\sqrt{x}}\left[\int 2e^{\sqrt{x}}dx+\int 2x\,de^{\sqrt{x}}+C\right]$$

$$=e^{-\sqrt{x}}\left[\int 2e^{\sqrt{x}}dx+\left(2xe^{\sqrt{x}}-\int 2e^{\sqrt{x}}dx\right)+C\right]=2x+Ce^{-\sqrt{x}}$$

由 $y(1)=3$ 代入解得 $C=e$，故特解为：$y(x)=2x+e^{1-\sqrt{x}}$

显然该曲线无水平和铅直渐近线，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{y(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}2+\frac{e^{1-\sqrt{x}}}{x}=2$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\left[y(x)-2x\right]=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{1-\sqrt{x}}=0$

故该曲线有斜渐近线：$y=2x$.

四、证明题（本题满分 6 分）

设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内二阶可导，且 $f''(x)\ge0$．证明：对不同实数 a,b，有

$$f(\frac{a+b}{2})\le\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx.$$

证：不妨设 $a<b$，令 $F(x)=(x-a)f(\frac{a+x}{2})-\int_a^x f(t)dt$，$\left(a\le x\le b\right)$

则 $F(a)=0$，且

$$F'(x)=f(\frac{a+x}{2})+\frac{1}{2}(x-a)f'(\frac{a+x}{2})-f(x)=\frac{1}{2}(x-a)f'(\frac{a+x}{2})-\left[f(x)-f(\frac{a+x}{2})\right]$$

$$=\frac{1}{2}(x-a)f'(\frac{a+x}{2})-\frac{1}{2}(x-a)f'(\xi)\qquad\left(\frac{a+x}{2}<\xi<x\right)$$

$$=\frac{1}{2}(x-a)\left[f'(\frac{a+x}{2})-f'(\xi)\right]=\frac{1}{2}(x-a)\left(\frac{a+x}{2}-\xi\right)f''(\eta)\le0$$

故 $F(x)$ 单调递减，从而 $F(b)\le F(a)=0$，化简即证！