# 合 肥 工 业 大 学 试 卷（A）答 案

**2023～2024 学年第 二 学期 课程代码 1400071B 课程名称 线性代数 学分 2.5 课程性质:必修☑、选修☐、限修☐ 考试形式:开卷☐、闭卷☑**

专业班级（教学班）__________ 考试日期 2024 年 5 月 25 日 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名 田可雪

一、填空题（每小题 4 分，共计 20 分）

1. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$________.

【答案】-4.

【解析】$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -4$.

2.设$A$为3阶方阵，$|A| = 4$，$|A^2 + E| = 8$，则$|A + A^{-1}| =$________.

【答案】2.

【解析】$|A + A^{-1}| = \frac{1}{4}|A||A + A^{-1}| = \frac{1}{4}|A^2 + E|$.

3. 设矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$与矩阵$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$等价，则$a =$________.

【答案】2.

【解析】如题，$A$与$B$等价的充分必要条件是$r(A) = r(B) = 2$. 显然$r(A) \geq 2$,故$|A| = a - 2 = 0$.

4. 已知向量组$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$线性无关，若$\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_2 + \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_3 + \mathrm{k}\boldsymbol{\alpha}_1$线性相关，则$k =$________.

【答案】-1.

【解析】新向量组线性相关等价于$\begin{vmatrix} 1 & 0 & k \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + k = 0$.

5. 已知$\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$是非齐次线性方程组$\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$的 3 个解向量，若$\mathrm{m}\boldsymbol{\alpha}_1 + 3\boldsymbol{\alpha}_2 + \mathrm{n}\boldsymbol{\alpha}_3$是$\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$的解，$4\mathrm{m}\boldsymbol{\alpha}_1 - 3\mathrm{n}\boldsymbol{\alpha}_2 - \boldsymbol{\alpha}_3$是$\mathrm{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\beta}$的解，则$n =$________.

【答案】-2.

【解析】由条件立得$\begin{cases} m + 3 + n = 0 \\ 4m - 3n - 1 = 1 \end{cases}$，解得$\begin{cases} m = -1 \\ n = -2 \end{cases}$.

二、选择题（每小题 4 分，共计 20 分）

1. 设$A$为$n$阶方阵，则行列式$|A| = 0$的充分必要条件是（ ）.

(A) $A$的两行元素对应成比例 (B) $A$中必有一行为其余各行的线性组合

(C) $A$中有一列元素全为 0 (D) $A$中任一列均为其余各列的线性组合

【答案】B.

【解析】其余选项皆为充分非必要条件

2. 设$A, B$均为$n$阶方阵，满足等式$AB = O$，则必有（ ）.

(A) $A = O$或$B = O$ (B) $A + B = O$

(C) $|A| = 0$ 或 $|B| = 0$ (D) $|A| + |B| = 0$

【答案】C

【解析】C 选项等式两边取行列式；其余选项反例极易给出.

3.设$A$为 3 阶可逆矩阵，将$A$的第一行乘以 2 加到$A$的第三行上所得矩阵记为$B$.则$A^{-1}$经过（ ）变换变为$B^{-1}$.

(A) $r_3 + 2r_1$ (B) $r_1 - 2r_3$ (C) $c_3 - 2c_1$ (D) $c_1 - 2c_3$

【答案】D

【解析】将 A 经过初等行变换变为 B 写成在 A 左边乘上相应初等阵，取逆立得.

4. 若向量组$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$线性无关；$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta}$线性相关，则（ ）.

(A) $\boldsymbol{\alpha}$必可由$\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}$线性表示 (B) $\boldsymbol{\beta}$必不可由$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}$线性表示

(C) $\boldsymbol{\delta}$必可由$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$线性表示 (D) $\boldsymbol{\delta}$必不可由$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$线性表示

【答案】C

【解析】由$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$无关可得$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$无关. ①
由$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta}$相关可得存在不全为零的实数$a, b, c$使得$a\boldsymbol{\alpha} + b\boldsymbol{\beta} + c\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{0}$.结合①可知$c \neq 0$.

# 合 肥 工 业 大 学 试 卷（A）答 案

2023～2024 学年第 二 学期 课程代码 1400071B 课程名称 线性代数 学分 2.5 课程性质:必修☑、选修☐、限修☐ 考试形式:开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）________ 考试日期 2024 年 5 月 25 日 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名 田可雪

5．下列矩阵中，**不能**相似对角化的矩阵为（　　）．

(A) $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\-3&-3&-3\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1&1&1\\2&2&2\\3&3&3\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}1&2&-1\\2&1&0\\-1&0&3\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}1&2&1\\0&3&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

【答案】A

【解析】选项 C 的矩阵实对称矩阵；选项 D 的矩阵有三个互异特征值；选项 B 的矩阵全体特征值为 6,0,0 且 0 的几何重数是 2 等于代数重数，故可对角化；选项 A 的矩阵全体特征值 0,0,0，但 0 的几何重数为 2<代数重数 3.

三、(本题 10 分) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&1\\1&1&a\end{pmatrix}$.

(1)若 $|A|=2$，求 $a$; (2)求 $A_{21}+A_{22}+A_{23}$, 其中 $A_{ij}$ 为 $A$ 的(i,j) 位置元的代数余子式.

解：(1) $|A|=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&1&0\\0&0&a-1\end{vmatrix}=a-1$, 从而 $a-1=2$, $a=3$.

(2) $A_{21}+A_{22}+A_{23}=\begin{vmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&a\end{vmatrix}$, 由于第一行与第二行相等，故等于零.

四、(本题 10 分）设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}$，三阶方阵 $X$ 满足 $A^*X=A^{-1}+2X$，求三阶方阵 $X$.

**解**：由 $A^*X=A^{-1}+2X$ 知 $AA^*X=E+2AX$，或 $(AA^*-2A)X=E$，又 $AA^*=|A|E$，所以有 $(|A|E-2A)X=E$，则 $X=(|A|E-2A)^{-1}$.

$|A|=\begin{vmatrix}1&1&-1\\-1&1&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=4$，$|A|E-2A=4E-2A=\begin{pmatrix}2&-2&2\\2&2&-2\\-2&2&2\end{pmatrix}$，

$X=(|A|E-2A)^{-1}=\dfrac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{pmatrix}$.

五、(本题 12 分）$\boldsymbol\alpha_1=(1,1,4,2)^T$, $\boldsymbol\alpha_2=(1,-1,-2,4)^T$, $\boldsymbol\alpha_3=(-3,1,u,-10)^T$, $\boldsymbol\alpha_4=(1,3,10,0)^T$.

讨论 $u$ 的取值，以确定向量组 $\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2,\boldsymbol\alpha_3,\boldsymbol\alpha_4$ 的秩以及一个极大线性无关组，并将 $\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2,\boldsymbol\alpha_3,\boldsymbol\alpha_4$ 的不属于该极大无关组的其他向量用这个极大无关组线性表示.

**解**：(1) $(\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2,\boldsymbol\alpha_3,\boldsymbol\alpha_4)=\begin{pmatrix}1&1&-3&1\\1&-1&1&3\\4&-2&u&10\\2&4&-10&0\end{pmatrix}$

$\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&-1&2\\0&1&-2&-1\\0&0&u&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

当 $u\neq0$ 时，$r(\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2,\boldsymbol\alpha_3,\boldsymbol\alpha_4)=3$，极大线性无关组为 $\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2,\boldsymbol\alpha_3$，此时 $\boldsymbol\alpha_4=2\boldsymbol\alpha_1-\boldsymbol\alpha_2$；

当 $u=0$ 时，$r(\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2,\boldsymbol\alpha_3,\boldsymbol\alpha_4)=2$，极大线性无关组为 $\boldsymbol\alpha_1,\boldsymbol\alpha_2$，此时 $\boldsymbol\alpha_3=-\boldsymbol\alpha_1-2\boldsymbol\alpha_2$，$\boldsymbol\alpha_4=2\boldsymbol\alpha_1-\boldsymbol\alpha_2$.

六、(本题 12 分）当 $a$ 取何值时，线性方程组 $\begin{cases}-x_1-4x_2+x_3=1,\\ax_2-3x_3=3,\\x_1+3x_2+(a+1)x_3=0\end{cases}$

无解、有唯一解、有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解.

**解**：对增广矩阵作初等行变换，有

$$\bar{A}=(A,b)=\begin{bmatrix}-1&-4&1&1\\0&a&-3&3\\1&3&a+1&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&-4&1&1\\0&a&-3&3\\0&-1&a+2&1\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}-1&-4&1&1\\0&-1&a+2&1\\0&0&a^2+2a-3&a+3\end{bmatrix},$$

(1) 若 $a=1$，则 $r(A)=2, r(\bar A)=3$，$R(\bar A)\neq R(A)$,方程组无解;

(2) 若 $a=-3$，则 $r(A)=r(\bar A)=2<3$，方程组有无穷多解;

(3) 若 $a\neq1$ 且 $a\neq-3$，$r(A)=r(\bar A)=3$,方程组有唯一解.

当 $a=-3$ 时，

$$\bar{A}\to\begin{bmatrix}1&4&-1&-1\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&-5&3\\0&1&1&-1\\0&0&0&0\end{bmatrix},$$

其同解方程组为

$$\begin{cases}x_1=5x_3+3,\\x_2=-x_3-1,\end{cases}$$

方程组的通解是$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=k\begin{pmatrix}5\\-1\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}3\\-1\\0\end{pmatrix}$，k 为任意常数.

七、（本题 12 分）已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-3x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$，求正交变换$\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$将二次型 $f$ 化为标准形，并写出相应的标准形.

**解**：（1）二次型 $f$ 的矩阵表达式为 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix}1&1&-2\\1&-3&0\\-2&0&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

（2）由矩阵 $A$ 的特征多项式$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1&2\\-1&\lambda+3&0\\2&0&\lambda+3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+3)(\lambda+4)$，得到 $A$ 得特征值是$2,-3,-4$.

当$\lambda=2$时，由$(2E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{pmatrix}1&-1&2\\-1&5&0\\2&0&5\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-5&0\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系$\boldsymbol{\alpha}_1=(5,1,-2)^T$， 即$\lambda=2$的特征向量；

当$\lambda=-3$时，由$(-3E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{pmatrix}-4&-1&2\\-1&0&0\\2&0&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,2,1)^T$， 即$\lambda=-3$的特征向量；

当$\lambda=-4$时，由$(-4E-A)\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，即

$$\begin{pmatrix}-5&-1&2\\-1&-1&0\\2&0&-1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&0&0\end{pmatrix},$$

得基础解系$\boldsymbol{\alpha}_3=(-1,1,-2)^T$， 即$\lambda=-4$的特征向量；

对于实对称矩阵，不同的特征值对应的特征向量相互正交，即$\boldsymbol{\alpha}_1$, $\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_3$相互正交，故特征向量直接单位化，令 $\xi_1=\begin{pmatrix}\frac{5}{\sqrt{30}}\\\frac{1}{\sqrt{30}}\\-\frac{2}{\sqrt{30}}\end{pmatrix},\xi_2=\begin{pmatrix}0\\\frac{2}{\sqrt5}\\\frac{1}{\sqrt5}\end{pmatrix},\xi_3=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix}$,

$$P=(\xi_1,\xi_2,\xi_3)=\begin{pmatrix}\frac{5}{\sqrt{30}}&0&-\frac{1}{\sqrt6}\\\frac{1}{\sqrt{30}}&\frac{2}{\sqrt5}&\frac{1}{\sqrt6}\\-\frac{2}{\sqrt{30}}&\frac{1}{\sqrt5}&-\frac{2}{\sqrt6}\end{pmatrix},$$

则经正交变换$x=Py$为，二次型化为标准形 $f(x_1,x_2,x_3)=x^TAx=y^T\Lambda y=2y_1^2-3y_2^2-4y_3^2$.

八、（本题 4 分）$A$是m×n的实矩阵. 证明:齐次线性方程组$A^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$与$AA^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$同解.

证明：若$A^T\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$, 立得$AA^T\boldsymbol{\alpha}=\boldsymbol{0}$，从而齐次线性方程组$A^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解皆为$AA^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$的解.

若$AA^T\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$, 等式两端同时左乘 $\boldsymbol{\beta}^T$ 得 $\boldsymbol{\beta}^TAA^T\boldsymbol{\beta}=0$.

整理可的$(A^T\boldsymbol{\beta})^T(A^T\boldsymbol{\beta})=0$，从而 $A^T\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{O}$.

故齐次线性方程组$AA^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$皆为$A^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$的解.

从而齐次线性方程组$A^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$与$AA^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{O}$同解.