

# 电磁感应 麦克斯韦方程组

一、理解法拉利电磁感应定律的物理意义.

二、理解动生电动势计算方法和物理意义

三、理解感生电动势和感生电场的计算方法

四、理解自感和互感定理，会计算自感电动势、互感电动势及自感与互感系数

五、理解磁场能量的物理意义，会计算磁场能量

六、了解位移电流和麦克斯韦电场的基本概念以及麦克斯韦方程组的物理意义.

# 电磁感应定律

- 当穿过回路所包围面积的磁通量发生变化时，回路中产生的感应电动势的大小与穿过回路的磁通量对时间的变化率成正比。

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$$

**楞次定律：** 闭合回路中感应电流的方向，总是使得它所激发的磁场来阻止引起感应电流的磁通量的变化。

# 动生电动势

- 在恒定磁场中运动着的导体内产生的感应电动势。

$$\varepsilon_i = \oint_L \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

# 感生电动势

导体不动，因磁场的变化产生的感应电动势。  
产生的电场为感生电场。

$$\oint_L \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

# 感应电场与静电场的比较

	静电场 $\vec{E}_s$	感应电场 $\vec{E}_i$
场源	静电荷	变化的磁场
环流	$\oint_l \vec{E}_s \cdot d\vec{l} = 0$	$\oint_l \vec{E}_i \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$
通量	无旋场 $\oiint_S \vec{E}_s \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\epsilon_0}$	有旋场 $\oiint_S \vec{E}_i \cdot d\vec{S} = 0$
场线	有源场 始于正电荷， 止于负电荷	无源场 闭合曲线

# 感生电动势的计算

- 导体为闭合回路  $\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi}{dt}$

- 非闭合回路:

- 若已知电场

$$\varepsilon_i = \int_a^c \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$$

- 电场未知时，设法构建回路

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt}$$

- 同时有动生和感生电动势时

$$\varepsilon_i = \int_a^b (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} + \int_a^b \vec{E}_i \cdot d\vec{l}$$

$$\varepsilon_i = -N \frac{d\Phi}{dt}$$

# 自感和互感

- 由于回路中电流产生的磁通量发生变化，而在自己回路中激发感应电动势的现象叫做**自感现象**，这种感应电动势叫做**自感电动势**。
- 两个电流回路相互影响磁通量产生感应电动势的现象叫**互感现象**，这种感应电动势叫做**互感电动势**。

$$\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$$

$$\varepsilon_{12} = -M \frac{dI_2}{dt}$$

$$\varepsilon_{21} = -M \frac{dI_1}{dt}$$

# 磁场能量

- 自感线圈能量:  $W_m = \frac{1}{2}LI^2$

- 磁场能量密度:  $w_m = \frac{1}{2}BH = \frac{1}{2}\mu H^2$

$$w_m = \frac{1}{2}\vec{B} \cdot \vec{H}$$

- 磁场总能量:  $W_m = \int_V w_m dV = \frac{1}{2} \int_V \vec{B} \cdot \vec{H} dV$



# 自感系数计算方法

**1、静态法:**  $\Phi_m = LI$

**2、动态法:**  $\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$

**3、能量法:**  $\int_V \frac{1}{2} BH dV = \frac{1}{2} LI^2$

# 互感系数计算方法

**1、静态法:**  $\psi_m = MI$

**2、动态法:**  $\varepsilon_M = -M \frac{dI}{dt}$

# 位移电流

- 麦克斯韦提出的假设，变化的电场本身也是一种电流。

$$I_d = S \frac{dD}{dt} = \frac{d\Psi_d}{dt}$$

- 位移电流密度

$$j_d = \frac{dD}{dt}$$

- 全电流定律：

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum (I + I_d) = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

传导电流

位移电流

# 麦克斯韦方程组

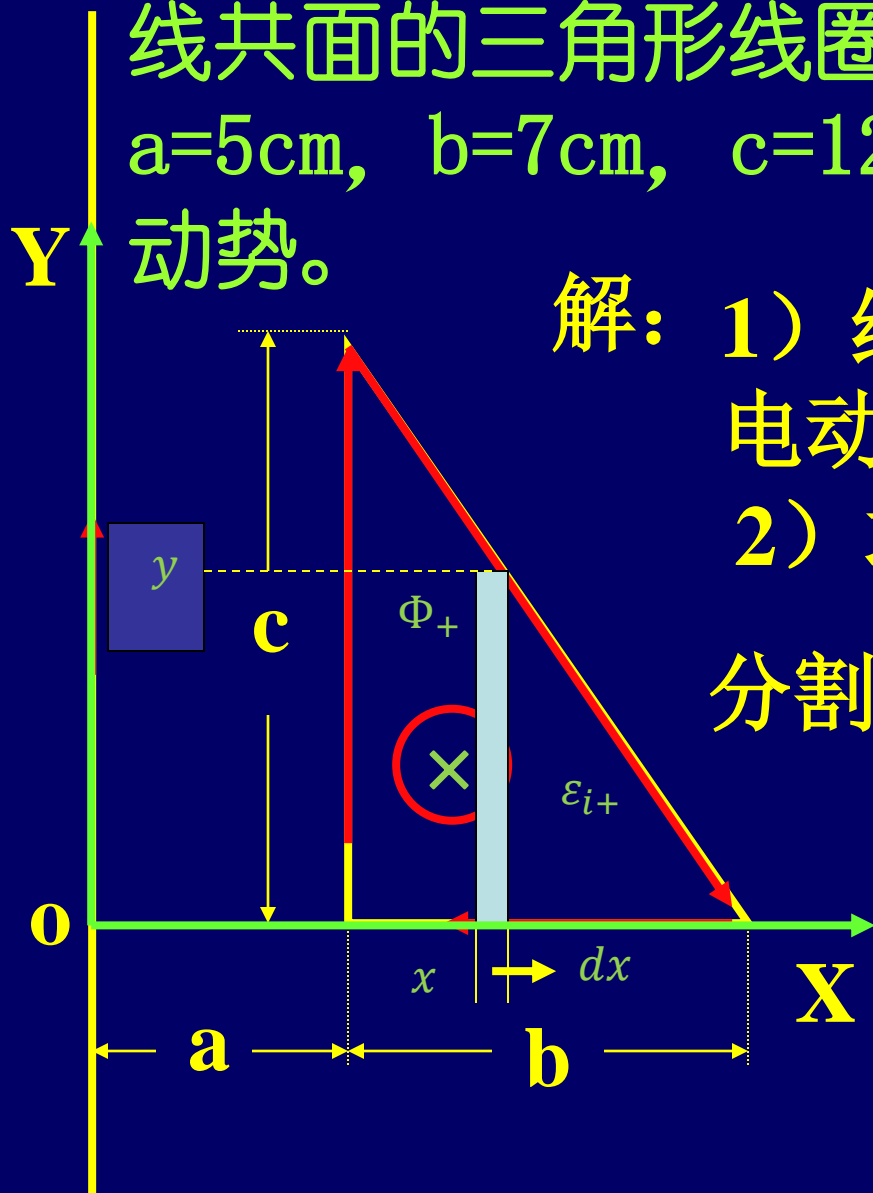
## 积分形式

$$\left\{ \begin{array}{l} \oiint \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum q_{oin} \\ \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \\ \oiint \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \\ \oint_C \vec{H} \cdot d\vec{r} = \iint_S (\vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}) \cdot d\vec{S} \end{array} \right.$$

## 微分形式

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \vec{D} = \rho & \text{高斯定理} \\ \nabla \times \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \text{环路定理} \\ \nabla \cdot \vec{B} = 0 & \text{高斯定理} \\ \nabla \times \vec{H} = \vec{J}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} & \text{环路定理} \end{array} \right.$$

例1：一载流长直导线通以电流  $i = I_m \cos \omega t$  离导线距离为  $a$  处有一底为  $b$ ，高为  $c$  的与长直导线共面的三角形线圈。已知  $I_m = 10\text{A}$ ， $\omega = 314/\text{s}$   $a = 5\text{cm}$ ， $b = 7\text{cm}$ ， $c = 12\text{cm}$ 。求线圈中的感应电动势。



解：1) 约定：磁通正方向与感应电动势符合右手螺旋关系。

2) 求  $\Phi$  (建立坐标系  $oxy$ )

分割成小面元  $dS$   $dS = y dx$

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

$$= \frac{\mu_0 i}{2\pi x} y dx$$

## 2) 求 $\Phi$

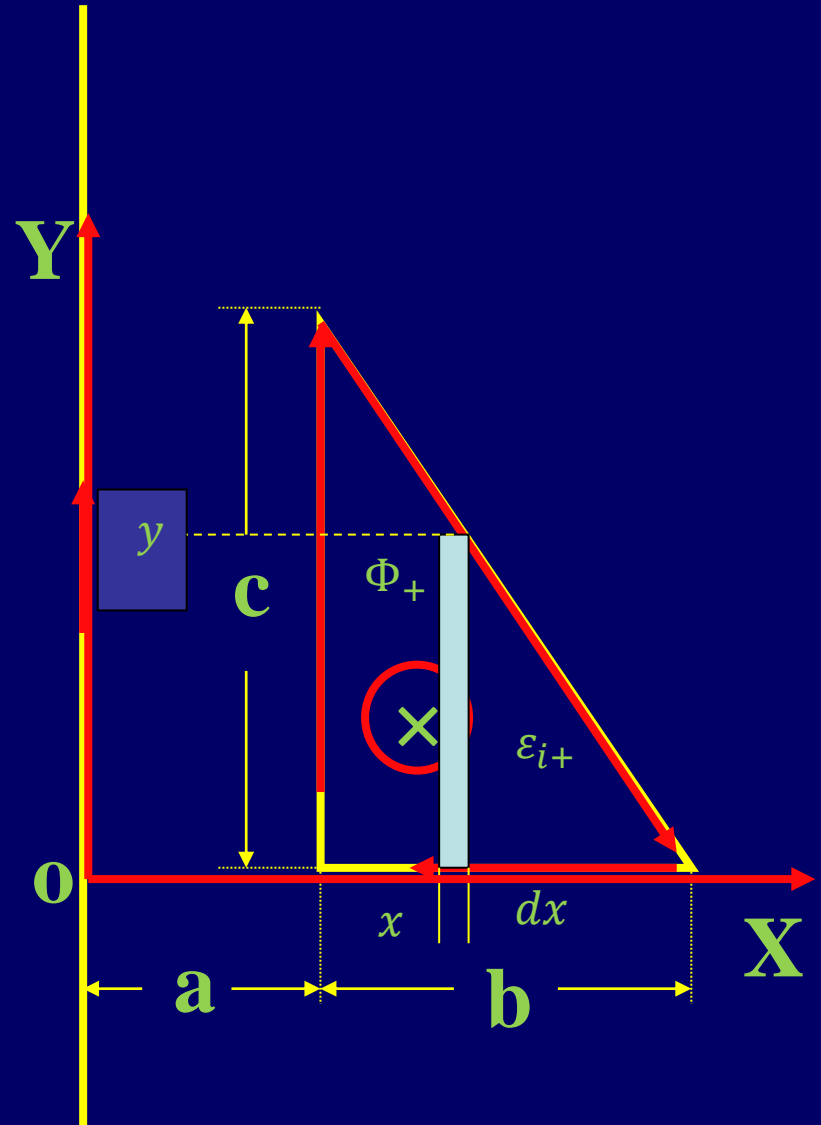
$$dS = ydx$$

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} y dx$$

$$\therefore \frac{c}{b} = \frac{y}{a + b - x}$$

$$y = \frac{c}{b} (a + b - x)$$

$$\Phi = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 i}{2\pi x} \cdot \frac{c}{b} (a + b - x) dx$$



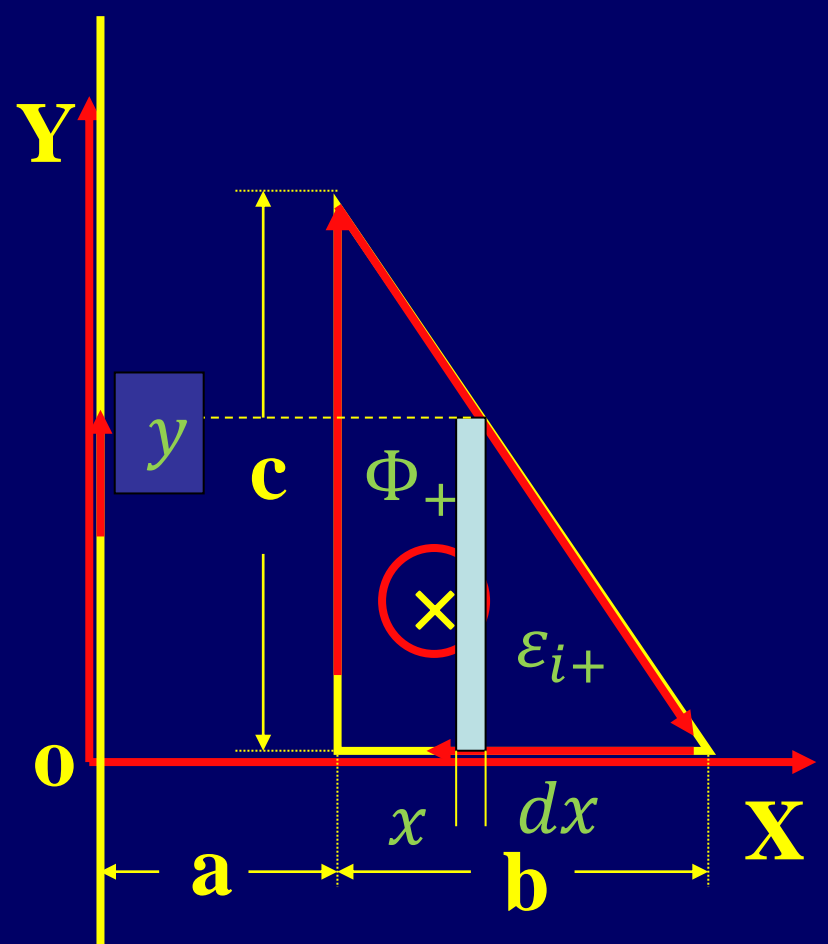
2) 求 $\Phi$

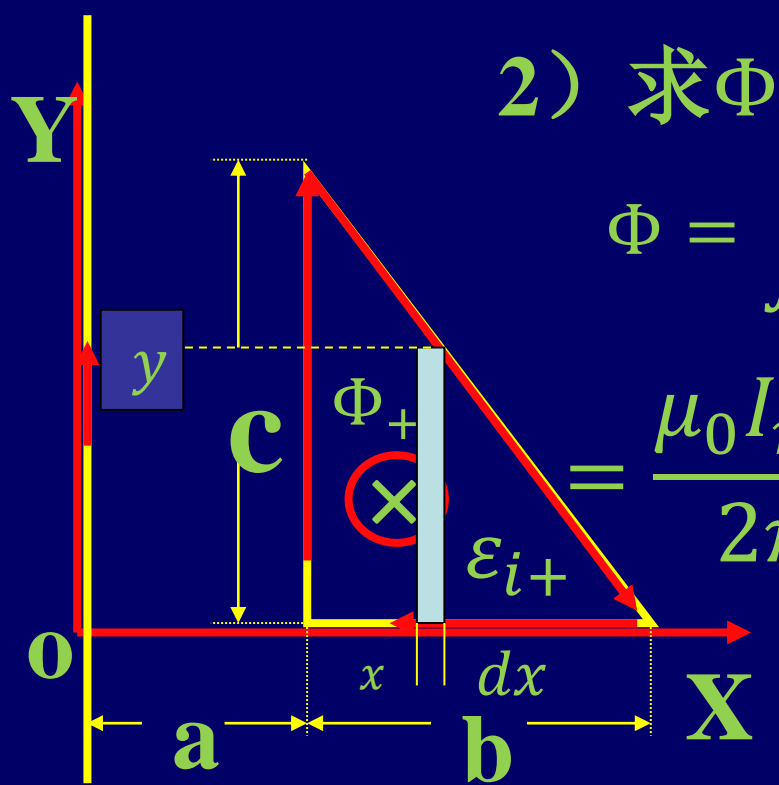
$$\therefore \frac{c}{b} = \frac{y}{a + b - x}$$

$$y = \frac{c}{b} (a + b - x)$$

$$\Phi = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 i}{2\pi x} \cdot \frac{c}{b} (a + b - x) dx$$

$$= \frac{\mu_0 I_m}{2\pi} \left[ \frac{a+b}{b} \ln \frac{a+b}{a} - 1 \right] \cos \omega t$$





2) 求 $\Phi$

$$\Phi = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 i}{2\pi x} \cdot \frac{c}{b} (a+b-x) dx$$

$$= \frac{\mu_0 I_m c}{2\pi} \left[ \frac{a+b}{b} \ln \frac{a+b}{a} - 1 \right] \cos \omega t$$

3) 求:  $\epsilon_i$

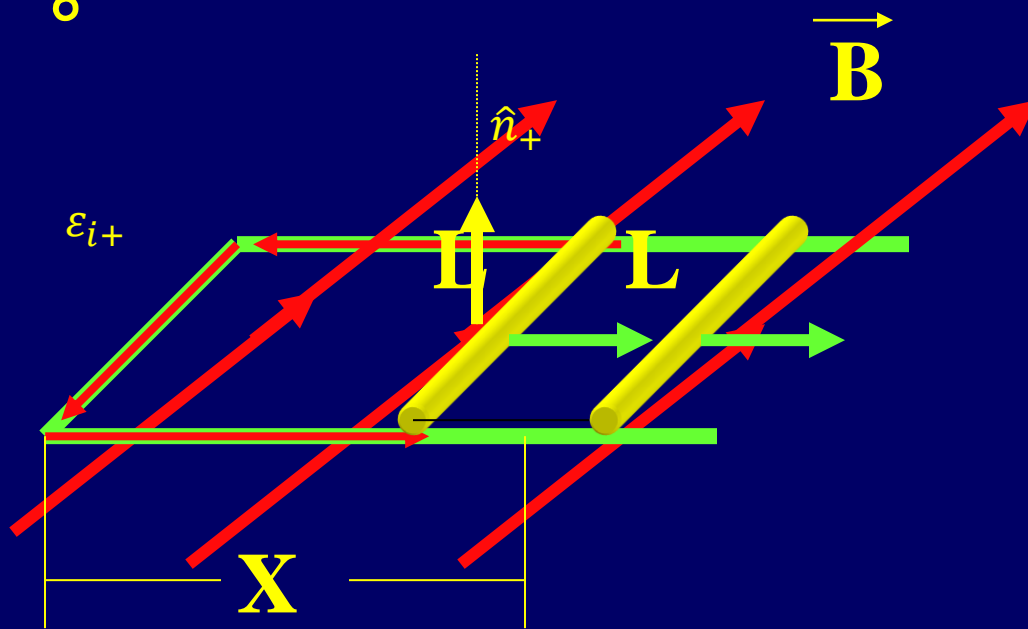
$$\epsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I_m}{2\pi} \omega \left[ \frac{a+b}{b} \ln \frac{a+b}{a} - 1 \right] c \sin \omega t$$

代入数值:

$$\epsilon_i = 3.37 \times 10^{-5} \sin 314t \text{ (伏特)}$$



例2 均匀磁场与导体回路法线  $\hat{n}$  的夹角  $\theta=60^\circ$  磁感应强度的大小  $B=Kt$ , ( $K$ 为常数)。导线  $L$  且以速率  $V$  向右滑动, 求回路中任一时刻的感应电动势。



已知:  $B=Kt$ ,  $L$   
 $V$

求:  $\epsilon_i$

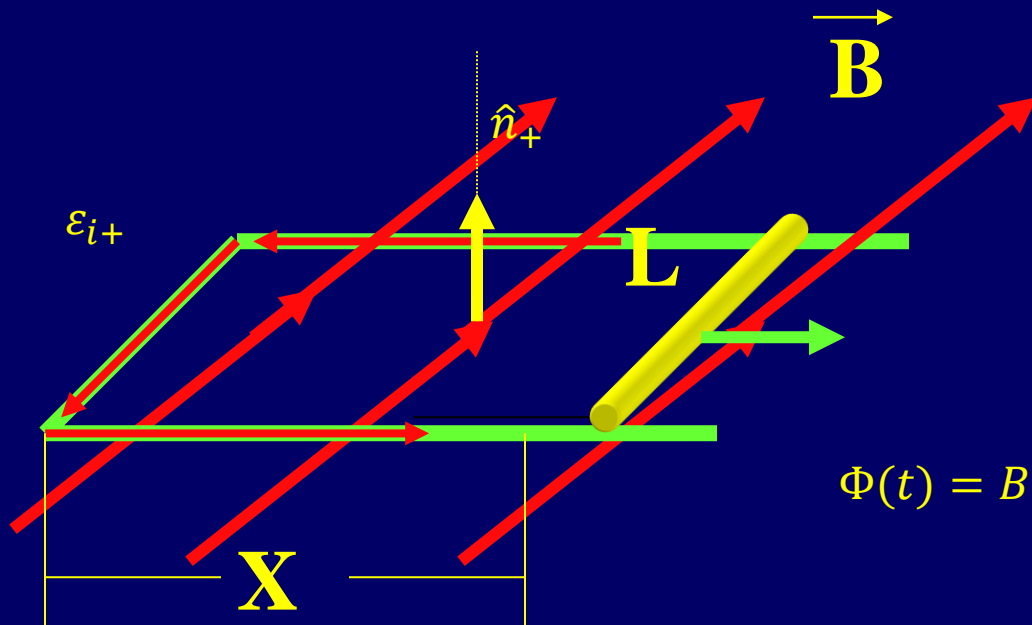
解: 设  $\Phi_+$   $\epsilon_{i+}$  右旋

$$\Phi(t) = B \cos \theta S$$

$$= B \cos \theta Lx = \frac{1}{2} BLx$$

$$\epsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{2} Lx \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$-\frac{1}{2} LB \frac{\partial x}{\partial t}$$



已知:  $\mathbf{B} = Kt$ ,  $L$

求:  $\epsilon_i$   $\mathbf{V}$

解: 设  $\Phi_+$   $\epsilon_{i+}$  右旋

$$\Phi(t) = B \cos \theta S$$

$$= B \cos \theta Lx = \frac{1}{2} BLx$$

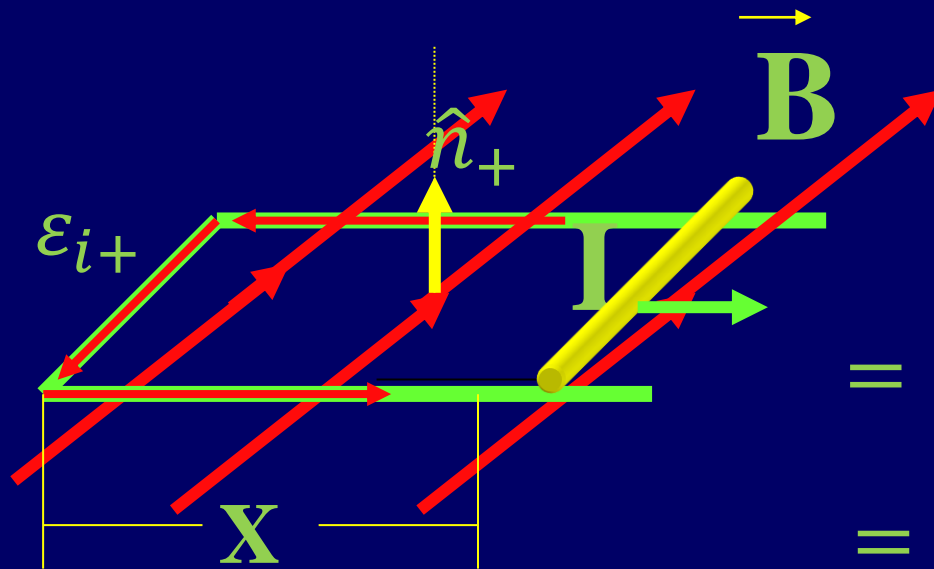
$$\epsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{1}{2} Lx \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$-\frac{1}{2} LB \frac{\partial x}{\partial t}$$

$$= -\frac{1}{2} LxK - \frac{1}{2} BLv$$

$$= -\frac{1}{2} L(vt)K - \frac{1}{2} (Kt)Lv$$

$$= -KLvt$$



$$= -\frac{1}{2}LxK - \frac{1}{2}BLv$$

$$= -\frac{1}{2}L(vt)K - \frac{1}{2}(Kt)Lv$$

$$= -KLvt$$

可见: 1)  $\varepsilon_i$  与  $\varepsilon_{i+}$  反向。

2) 电动势分为两部分，一部分是由场变引起的，一部分由导线运动所引起的。

3) 利用  $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$  求感应电动势的步骤:

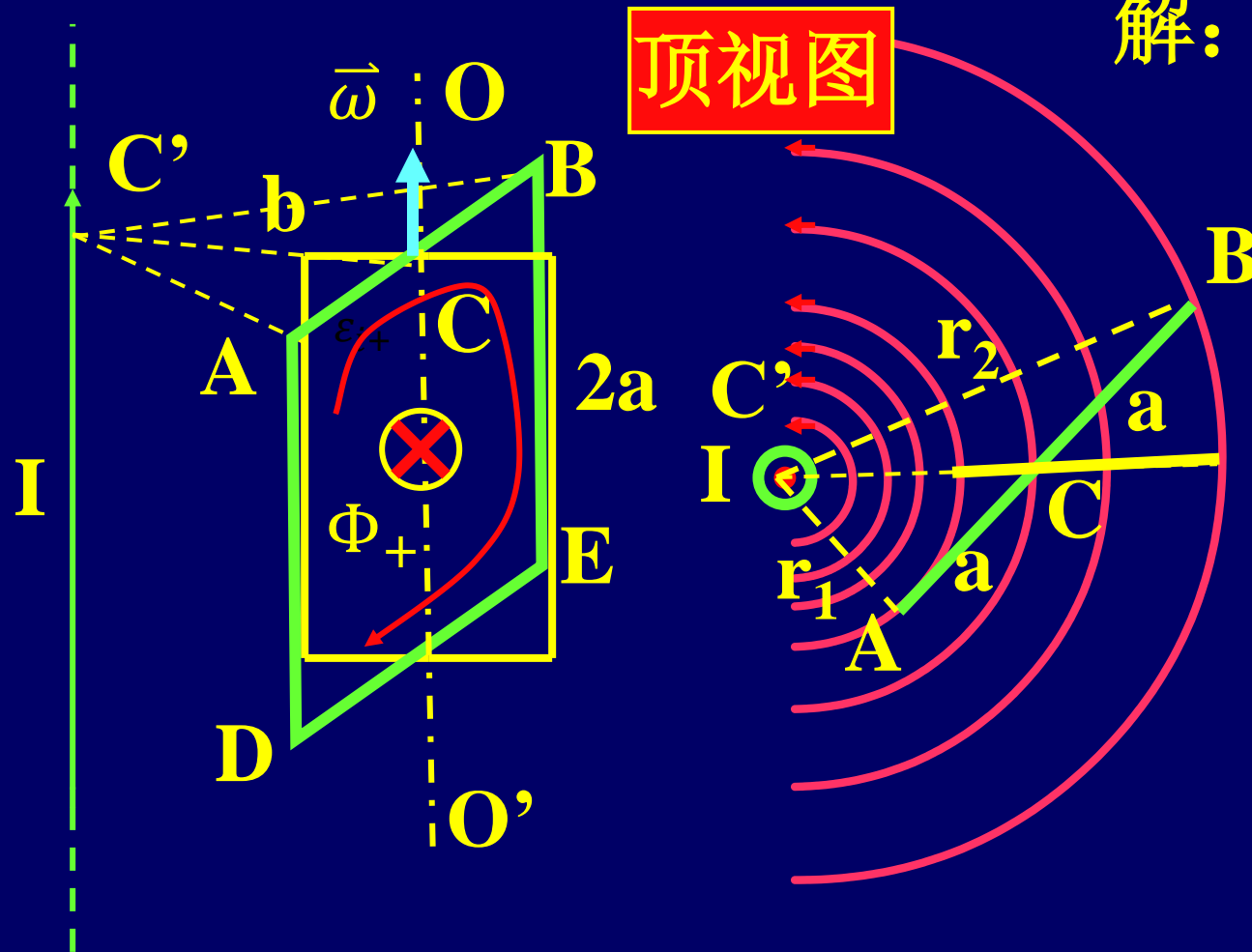
① 约定磁通与感应电动势右旋

② 找出  $\Phi(t)$

③ 用  $\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt}$  求其值

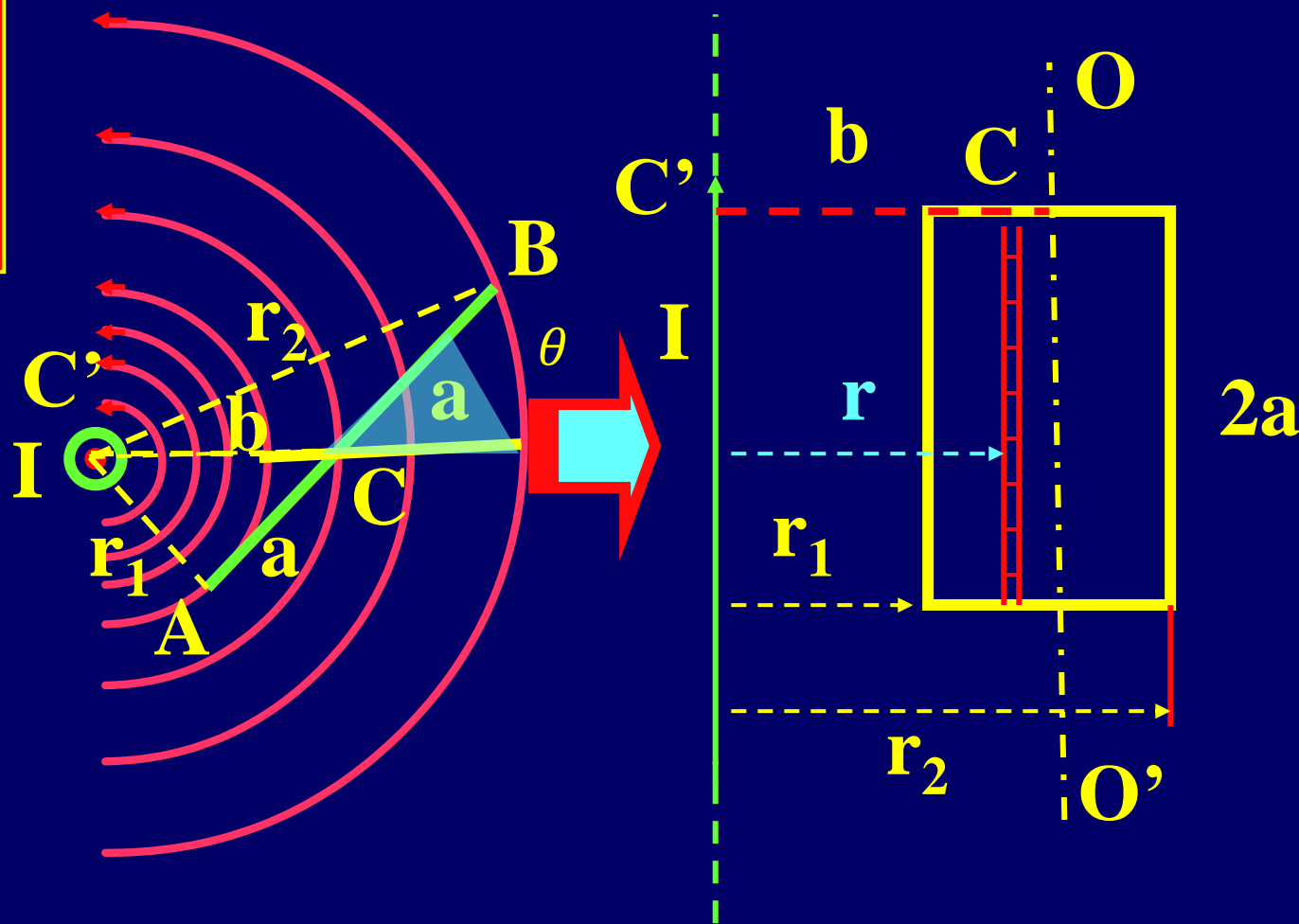
**例3** 在通有电流 $I$ 的长直导线附近，有一边长为 $2a$ 的正方形线框，该线圈绕其中心 $OO'$ 以角速度 $\omega$ 旋转，转 $OO'$ 与长导线间距离为 $b$ （如图所示），求线框中的感应电动势。

解：设  $\Phi_+$  右旋



通过线圈的磁通，为线圈在由电流 $I$ 和线圈轴线 $OO'$ 组成的平面内的线圈投影面积中的磁通。

顶视图

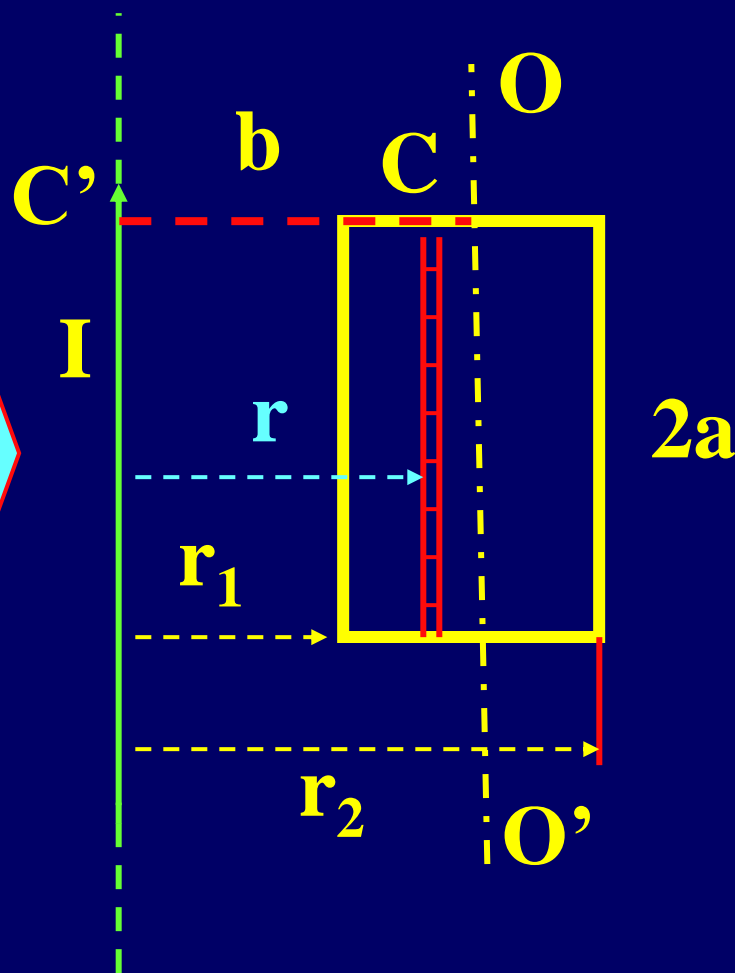
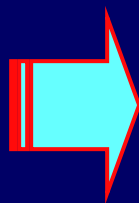
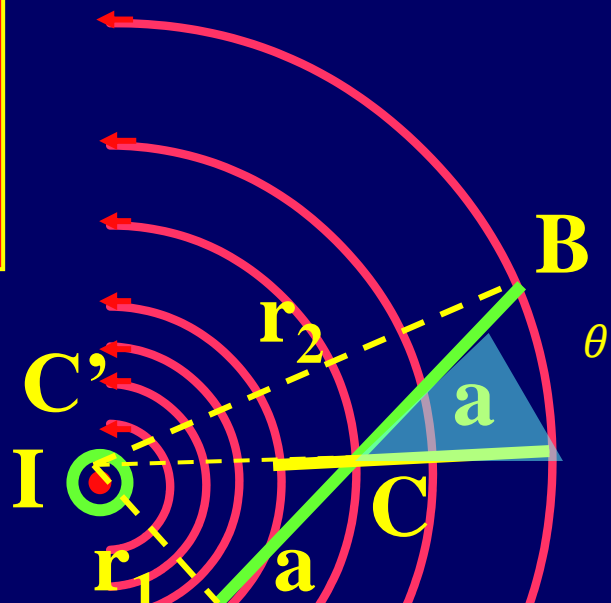


由图可知:

$$r_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}$$

$$r_2 = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}$$

顶视图



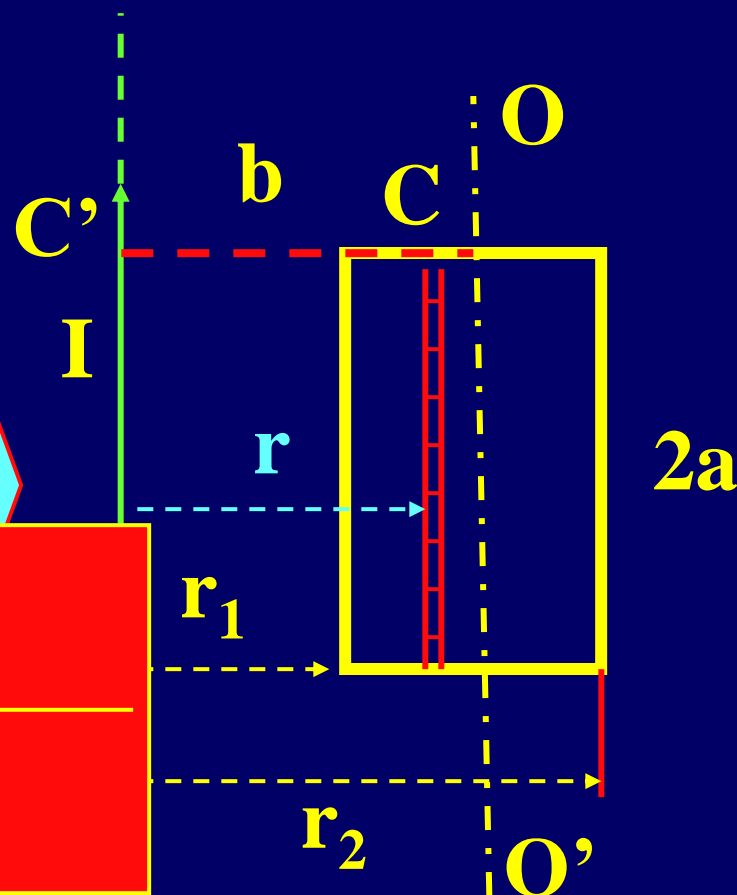
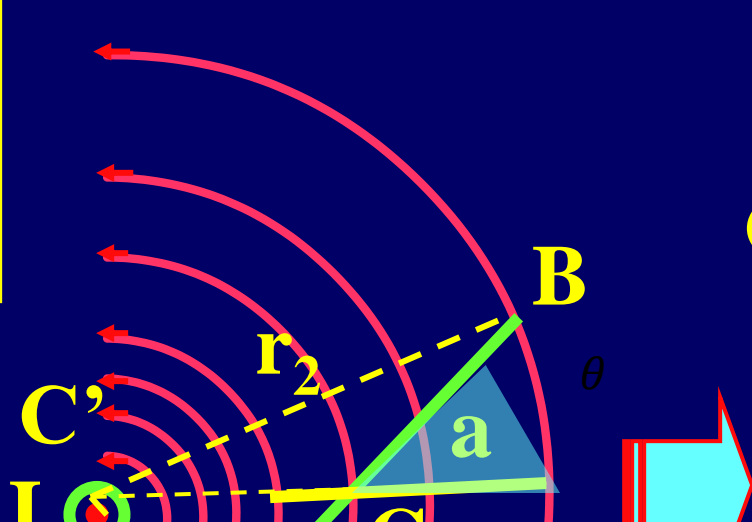
$$r_1 = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}$$

$$r_2 = \sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}$$

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{r_1}^{r_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi r} 2a dr$$

$$= \frac{\mu_0 I a}{\pi} \ln \frac{r_2}{r_1} = \frac{\mu_0 I a}{\pi} \ln \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}}$$

顶视图



$$\Phi = \frac{\mu_0 I a}{\pi} \ln \frac{\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}}{\sqrt{a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta}}$$

$$\varepsilon_i = - \frac{d\Phi}{dt} = - \frac{\mu_0 I a b \omega}{\pi} \sin \omega t \left[ \frac{1}{a^2 + b^2 + 2ab \cos \omega t} + \frac{1}{a^2 + b^2 - 2ab \cos \omega t} \right]$$

**例4:** 在通有电流为  $I = I_0 \cos \omega t$  的长直载流导线旁，放置一矩形回路，如图所示，回路以速度  $v$  水平向右运动，求回路中的感应电动势。

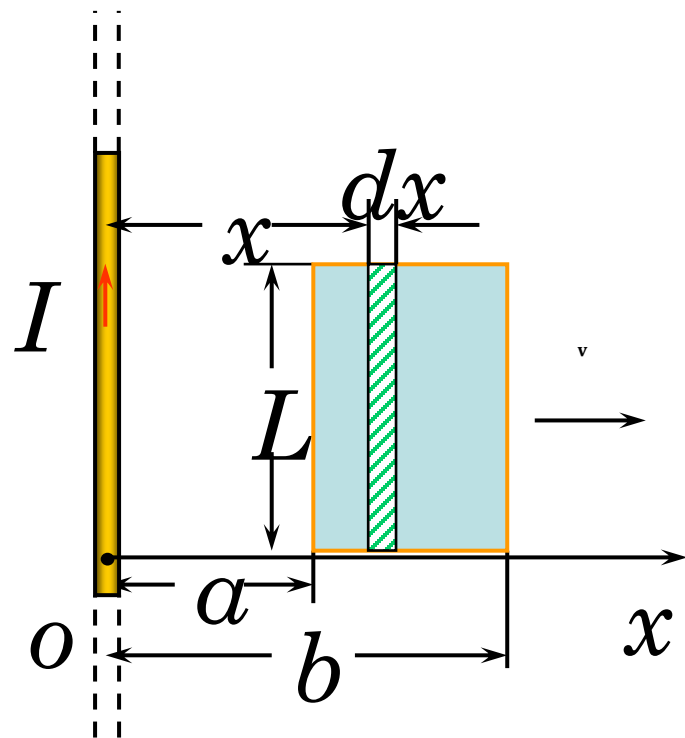
**解:** 建立坐标系， 电流  $I$  产生的磁  
感应强度为:  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$

如图所示取一窄带  $dx$ ,

$$d\phi_m = \vec{B} \cdot d\vec{S} = BdS \cos \theta$$

$$\because \vec{B} // \hat{n}, \quad \cos \theta = 1$$

$$d\phi_m = BdS = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} L dx$$





$$\varphi_m = \int d\varphi_m = \int_{a+vt}^{b+vt} \frac{\mu_0 I L}{2\pi} \frac{1}{x} dx = \frac{\mu_0 I L}{2\pi} \ln \frac{b+vt}{a+vt}$$

$$\varepsilon_i = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{d}{dt} \left( \frac{\mu_0 L I_0 \cos \omega t}{2\pi} \ln \frac{b+vt}{a+vt} \right)$$

$$= \frac{\mu_0 I_0 L}{2\pi} [\omega \sin(\omega t) \ln \frac{b+vt}{a+vt} - \cos \omega t \left[ \left( \frac{v}{b+vt} - \frac{v}{a+vt} \right) \right]]$$

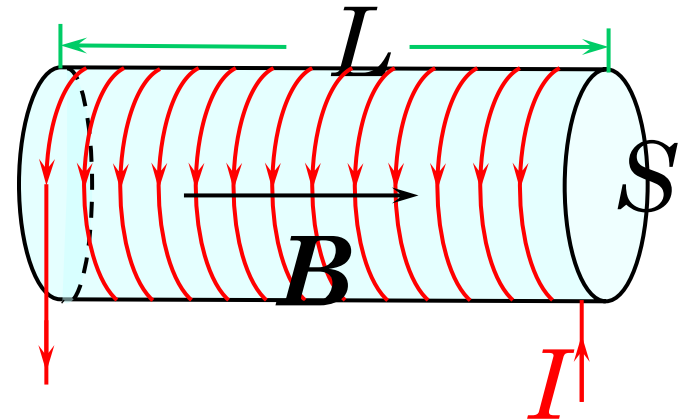
**例5：**长直螺线管绕有 $N$ 匝线圈，通有电流 $I$  且  $\frac{dI}{dt} = C$   
( $C$ 为常数且大于零)，求感应电动势。

**解：**  $B = \mu_0 n I$

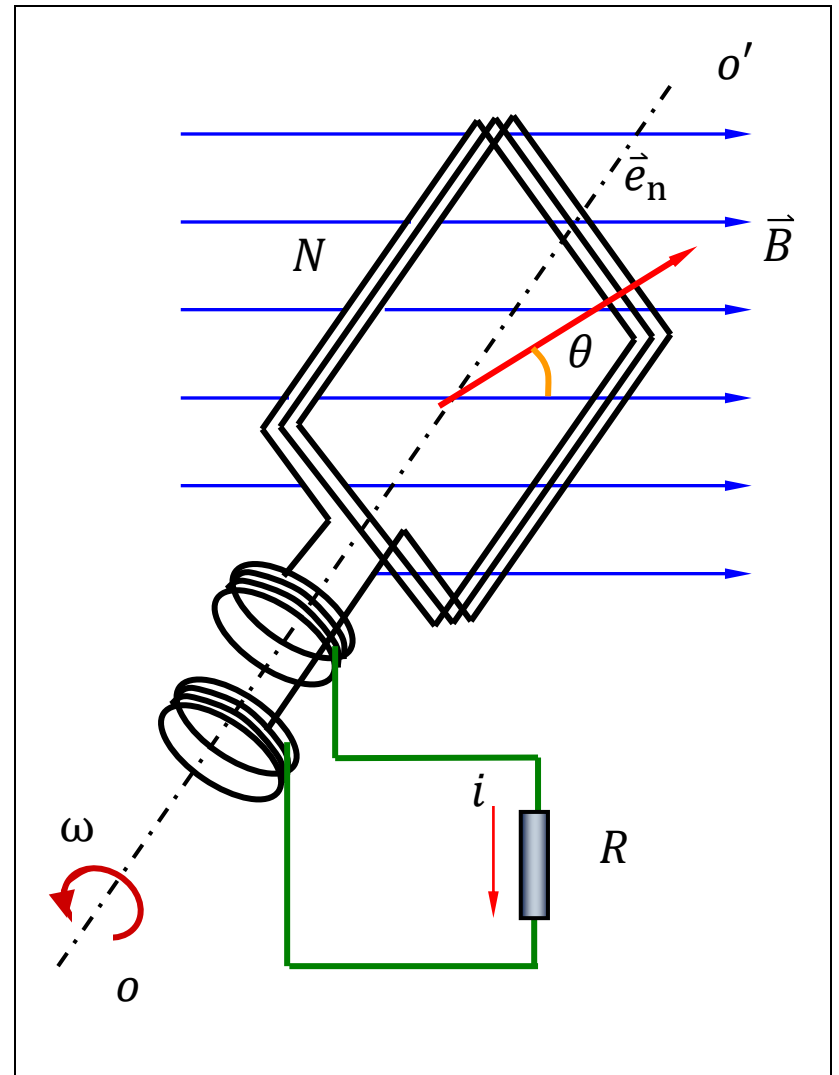
$$\phi_m = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = BS$$

$$\varepsilon_i = -N \frac{d\phi_m}{dt} = -N \frac{dB}{dt} S$$

$$= -N \mu_0 n S \frac{dI}{dt} = -\frac{N^2 \mu_0 S}{L} \frac{dI}{dt}$$



**例6** 在匀强磁场中，  
置有面积为  $S$  的可绕  
轴转动的  $N$  匝线圈。  
若线圈以角速度  $\omega$   
作匀速转动。 **求** 线圈  
中的感应电动势。



已知  $S, N, \omega$  求  $E$

解 设  $t = 0$  时,

$\vec{e}_n$  与  $\vec{B}$  同向, 则  $\theta = \omega t$

$$\psi = N\varphi = NBS \cos \omega t$$

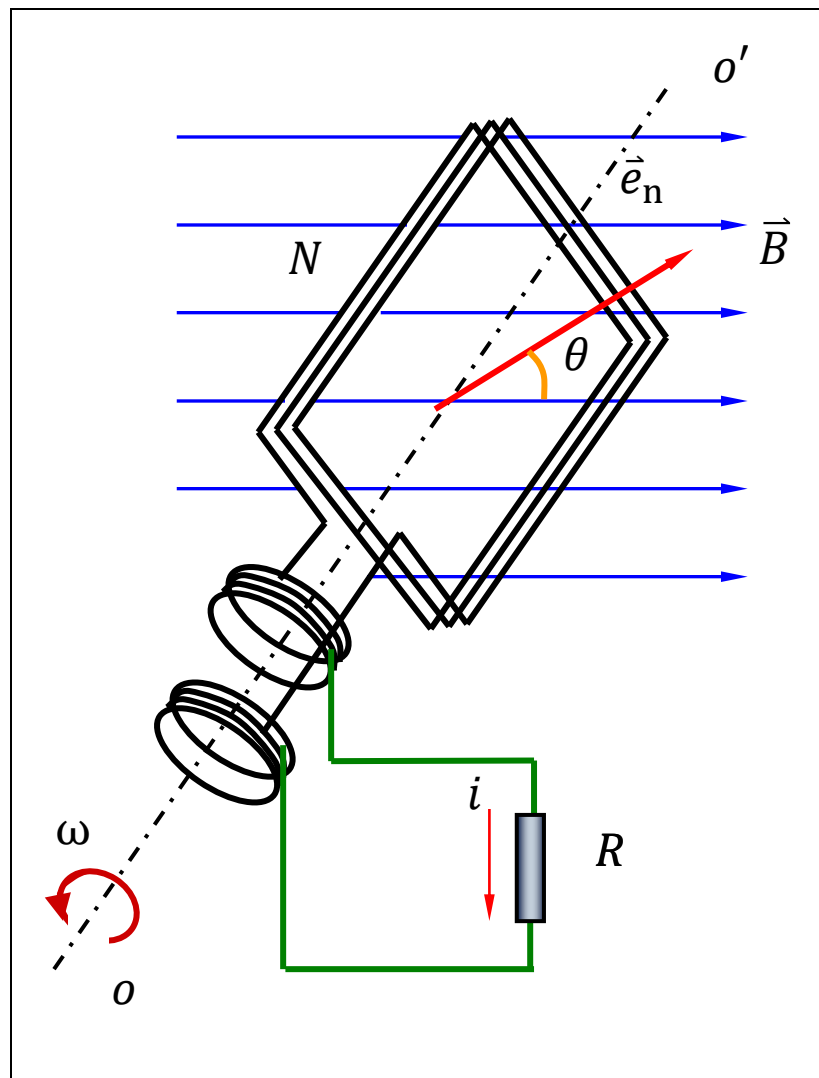
$$E = -\frac{d\psi}{dt} = NBS\omega \sin \omega t$$

令

$$E_m = NBS\omega$$

则

$$E = E_m \sin \omega t$$

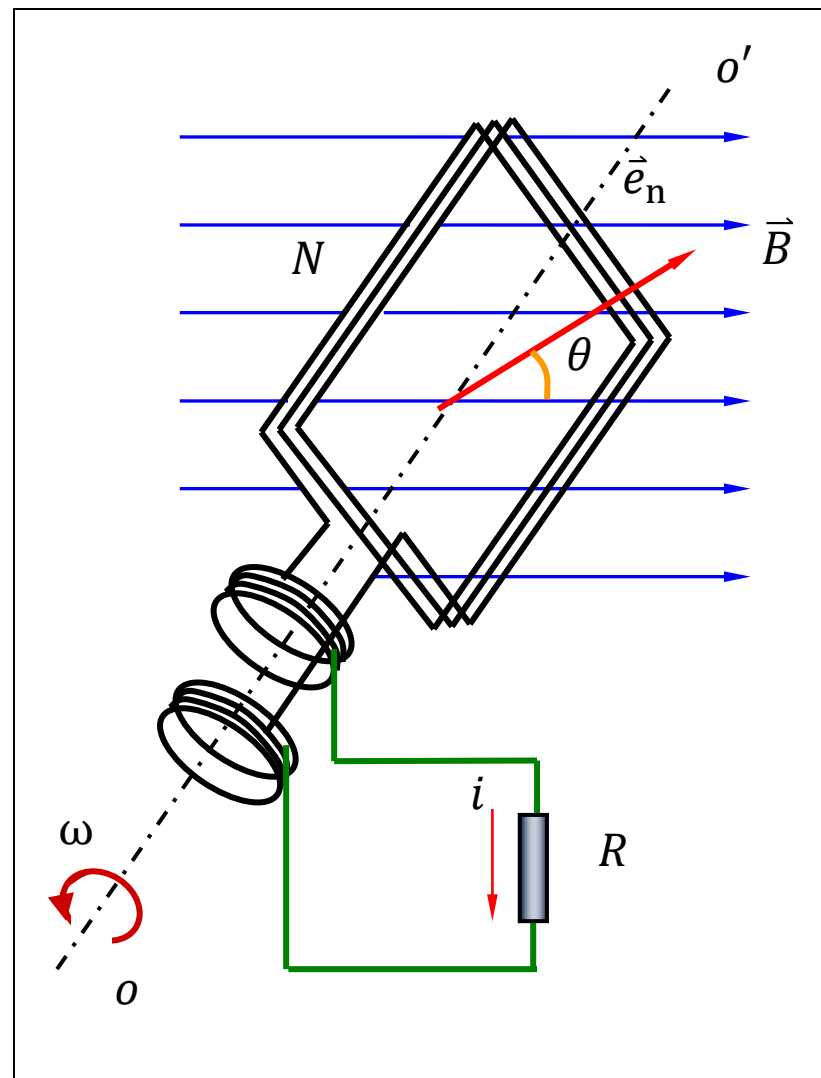


$$E = E_m \sin \omega t$$

$$i = \frac{E_m}{R} \sin \omega t = I_m \sin \omega t$$

$$I_m = \frac{E_m}{R}$$

可见, 在匀强磁场中匀速转动的线圈内的感应电流是时间的正弦函数. 这种电流称**交流电**.



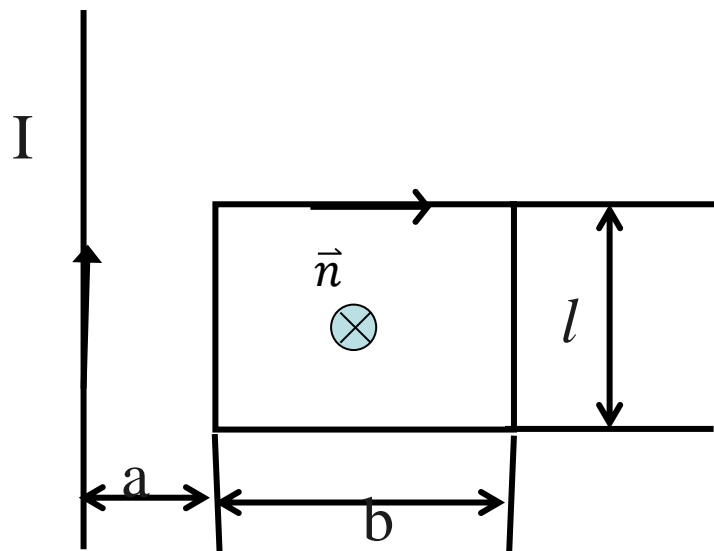
例7：无限长直导线电流 $I=I_0\sin\omega t$ ，求如图矩形线圈内的感应电动势

解：设向里的方向为法线方向，  
回路方向为顺时针方向

$$d\Phi_m = Bds = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} l dr$$

$$\Phi_m = \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}$$

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi_m}{dt} = -\frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} \frac{dI}{dt} = -\frac{\mu_0 l \omega I_0}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a} \cos \omega t$$



例8、已知正方形线圈边长

$$a = 5\text{cm}$$

$$B = 0.84\text{T}$$

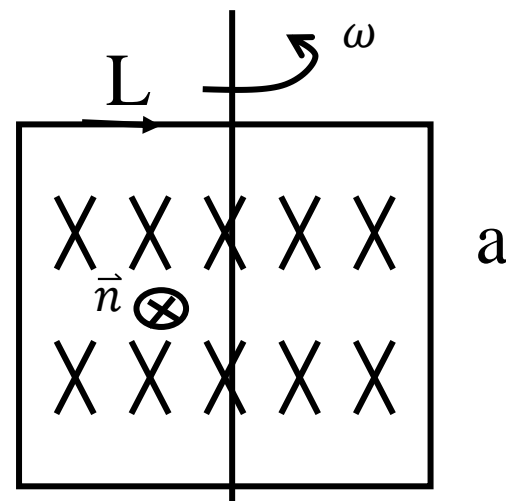
截面积

$$S' = 0.5\text{mm}^2$$

$$N = 10$$

$$n = 10\text{转/秒}$$

$$\rho = 1.7 \times 10^{-8} (\Omega \cdot \text{m})$$



求：1) 由图示位置旋转 $30^\circ$ 时，线圈内的感应电动势

2) 线圈转动时的最大感应电动势及该时位置

3) 由图示位置转1秒时，其内的感应电动势

4) 转过 $180^\circ$ 时通过线圈任一截面的电量。

如图所示， $t=0$ 时，逆时针为回路方向  
解：设角速度为

$$\omega = 2\pi n$$

$$\theta = \omega t$$

$$\Phi_m = BS \cos \theta$$

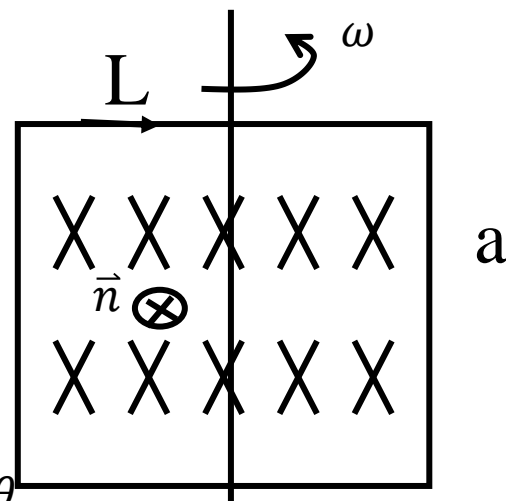
$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= -N \frac{d\Phi_m}{dt} = -Na^2 B \frac{d \cos \theta}{dt} = Na^2 B \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \\ &= Na^2 B \omega \sin \theta \end{aligned}$$

$$= Na^2 B 2\pi n \sin \theta$$

$$(1) \quad \theta = 30^\circ \quad \varepsilon_i = 0.66V$$

$$(2) \quad |\sin \theta| = 1 \quad |\varepsilon_i| = Na^2 B 2\pi n = 1.32V$$

$$\theta = \frac{2k+1}{2} \pi (k = 0, \pm 1, \pm 2 \dots \dots)$$





$$(3) \quad t = 1 \quad \theta = 20\pi$$

$$\varepsilon_i = Na^2 B 2\pi n \sin \theta = 0$$

$$(4) \quad q = \frac{1}{R} |\Delta \Phi_m| = \frac{1}{R} |\Phi_{m2} - \Phi_{m1}| = \frac{1}{R} 2BS = \frac{2Ba^2}{R} = \frac{2Ba^2}{\rho \frac{4a}{S'}}$$

这里  $R$ 、 $\Delta \Phi_m$  都用1匝来考虑。

$$q = \frac{BaS'}{2\rho} = 0.62C$$

例9、如图，磁场方向与线圈平面垂直，且穿入纸面向内，设通过线圈回路的磁通量随时间的变化关系为  $\Phi_m = 6t^2 + 7t + 1$ ，求1)  $t=2\text{s}$ 时，

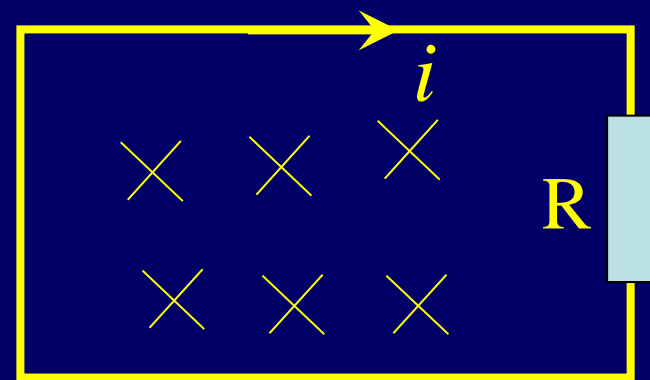
$\varepsilon_i = ?$

2) 电阻R上的电流方向如何？

解：据法拉第电磁感应定律：

$$\varepsilon_i = \left| \frac{d\Phi_m}{dt} \right| = 12t + 7$$

$$t=2\text{s}, \quad \varepsilon_i=31 \text{ V}$$



由于磁通量随时间的增加而增大，由楞次定律可知，电流方向为逆时针方向，所以电流通过电阻时的方向为从左向右。

**例10** 一长为  $L$  的铜棒在磁感强度为  $\vec{B}$  的均匀磁场中, 以角速度  $\omega$  在与磁场方向垂直的平面上绕棒的一端转动, **求** 铜棒两端的感应电动势.

**解**

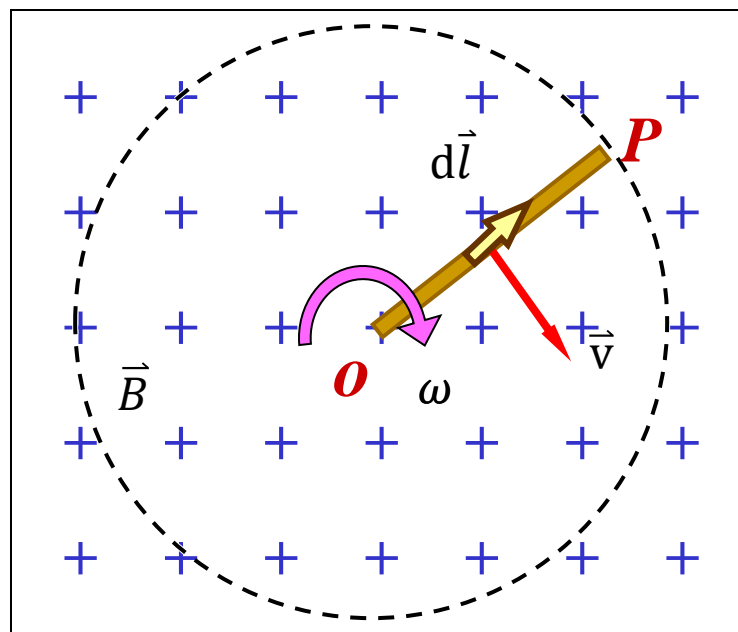
$$dE_i = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$= vBdl = \omega l B dl$$

$$E_i = \int_0^L vBdl$$

$$= \int_0^L \omega l B dl$$

$$E_i = \frac{1}{2} B \omega L^2$$



$E_i$  方向  $O \longrightarrow P$

(点  $P$  的电势高于点  $O$  的电势)

**例11:** 在均匀磁场  $B$  中，一长为  $L$  的导体棒绕一端  $o$  点以角速度  $\omega$  转动，求导体棒上的动生电动势。

**解1:** 由动生电动势定义计算

分割导体元  $dl$ ,

$\vec{v}$  和  $\vec{B}$  的夹角:  $\theta_1 = \pi/2$

$\vec{v} \times \vec{B}$  与  $d\vec{l}$  的夹角:  $\theta_2 = \pi$

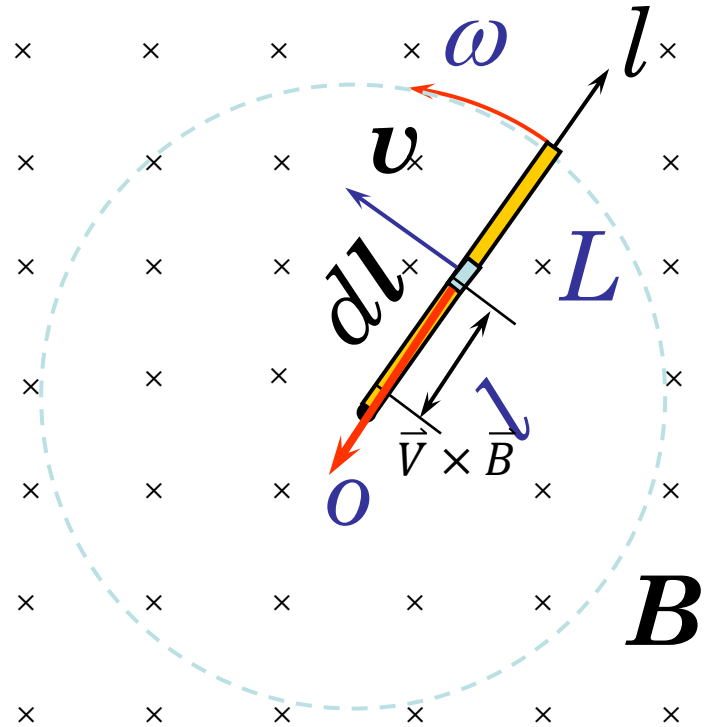
导体元上的电动势为:

$$d\varepsilon_i = vBdl \sin \frac{\pi}{2} \cos \pi = -vBdl$$

导体元的速度为:  $v = l\omega$

整个导体棒的动生电动势为:

$$\varepsilon_i = \int_{-}^{+} d\varepsilon_i = - \int_0^L vB dl = - \int_0^L l\omega B dl$$



方向沿棒指向  $o$  点。

$$= -\frac{1}{2} \omega BL^2$$

## 解2：利用法拉第电磁感应定律计算

构成假想扇形回路，使其包围导体棒旋转时扫过的面积；回路中只有导体棒部分产生电动势，虚线部分静止不产生电动势。

利用法拉第电磁感应定律

$$\varepsilon_i = -N \frac{d\phi_m}{dt}$$

其中  $\phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = BS$

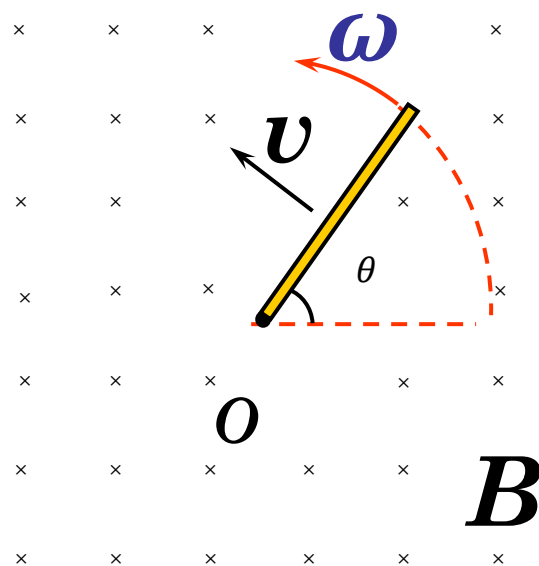
扇形面积：

$$S = \frac{1}{2} \theta L^2$$

感应电动势为：

$$\varepsilon_i = -\frac{d\phi_m}{dt} = -B \frac{dS}{dt} = -B \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \theta L^2 \right) = -\frac{1}{2} B \omega L^2$$

由楞次定律可判断动生电动势的方向沿导体棒指向 $O$ 。  
与用动生电动势的方法计算的结果相同。



**例12:** 在通有电流  $I$  的无限长载流直导线旁，距  $a$  垂直放置一长为  $L$  以速度  $v$  向上运动的导体棒，求导体棒中的动生电动势。

**解1: 由动生电动势定义计算**

由于在导体棒处的磁感应强度分布是非均匀的，导体上各导体元产生的动生电动势也是不一样的，分割导体元  $dx$ 。

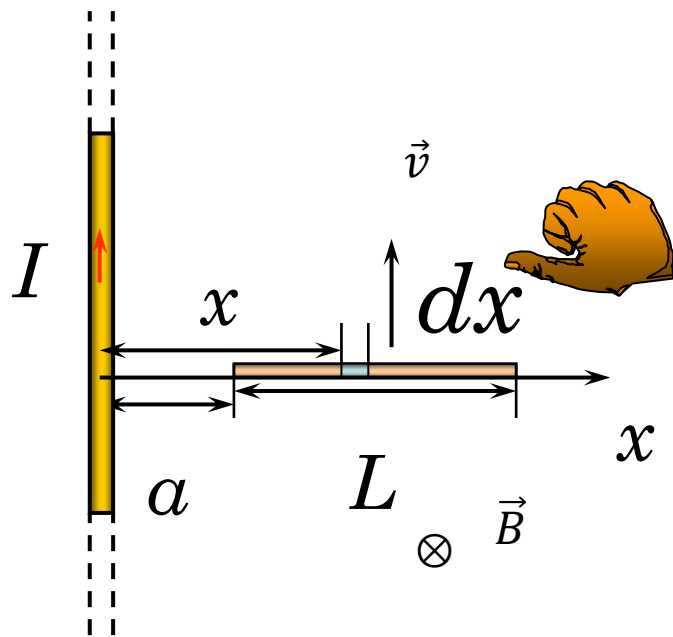
导体元处的磁场  $B$  为:

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi x}$$

$\vec{v}$  和  $\vec{B}$  的夹角:  $\theta_1 = \pi/2$ ,  $\vec{v} \times \vec{B}$  与  $dx$  的夹角:  $\theta_2 = \pi$

导体元所产生的动生电动势方向沿  $x$  轴负向，

大小为:  $d\varepsilon_i = vBdx \sin \frac{\pi}{2} \cos \pi = -vBdx$



整个导体棒的动生电动势为：

$$\varepsilon_i = \int_{-}^{+} d\varepsilon_i = - \int_a^{a+L} v \frac{\mu_0 I}{2\pi x} dx = \frac{\mu_0 I y}{2\pi} dx = - \frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{a+L}{a}$$

导体所产生的动生电动势方向沿  $x$  轴负向。

解2：利用法拉第电磁感应定律计算

构成假想矩形回路，

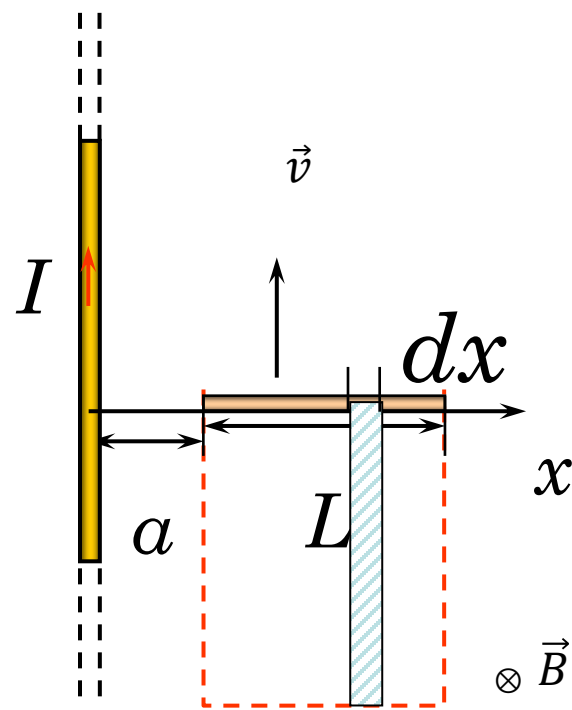
将回路分割成无限多长为  $y$ 、宽为  $dx$  的面元。

穿过面元的磁通量为：

$$d\phi_m = B dS \cos \theta = By dx$$

整个回路的磁通量为：

$$\phi_m = \int_a^{a+L} \frac{\mu_0 I y}{2\pi} dx = \frac{\mu_0 I y}{2\pi} \ln \frac{a+L}{a}$$

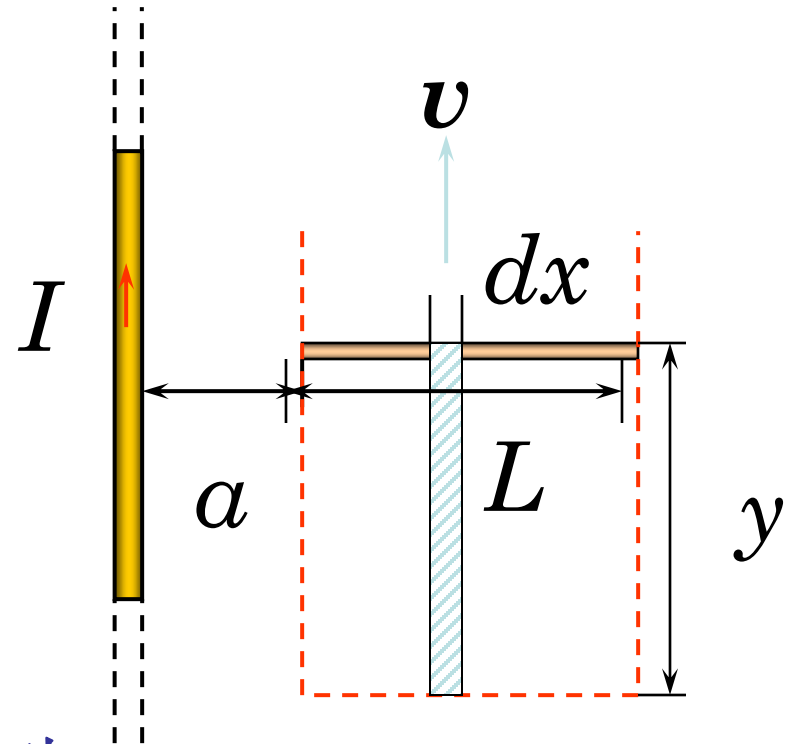


回路中的感应电动势为：

$$\varepsilon_i = -\frac{d\phi_m}{dt} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{dy}{dt} \ln \frac{a+L}{a}$$

$$\because v = \frac{dy}{dt}$$

$$= -\frac{\mu_0 I v}{2\pi} \ln \frac{a+L}{a}$$



由于假想回路中只有导体棒运动，其它部分静止，所以整个回路中的电动势也就是导体棒的电动势。

电动势的方向由楞次定律可知水平向左。



**例13** 一导线矩形框的平面与磁感强度为  $\vec{B}$  的均匀磁场相垂直. 在矩形框上, 有一质量为  $m$  长为  $l$  的可移动的细导体棒  $MN$ ; 矩形框还接有一个电阻  $R$ , 其值较之导线的电阻值要大得很多. 若开始时, 细导体棒以速度  $\vec{v}_0$  沿如图所示的矩形框运动, 试求棒的速率随时间变化的函数关系.

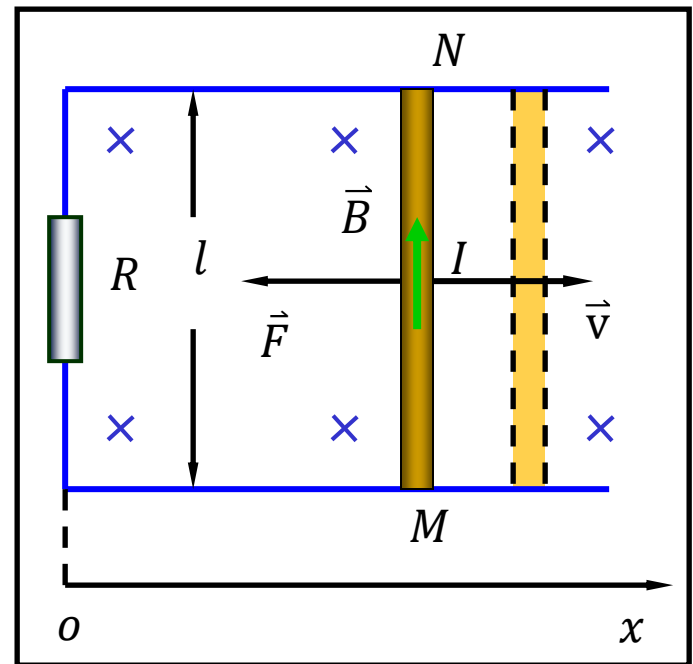
**解** 如图建立坐标

棒中  $E_i = Blv$  且由  $M \rightarrow N$

棒所受安培力  

$$F = IBl = \frac{B^2 l^2 v}{R}$$

方向沿  $ox$  轴反向



$$F = IBl = \frac{B^2 l^2 v}{R}$$

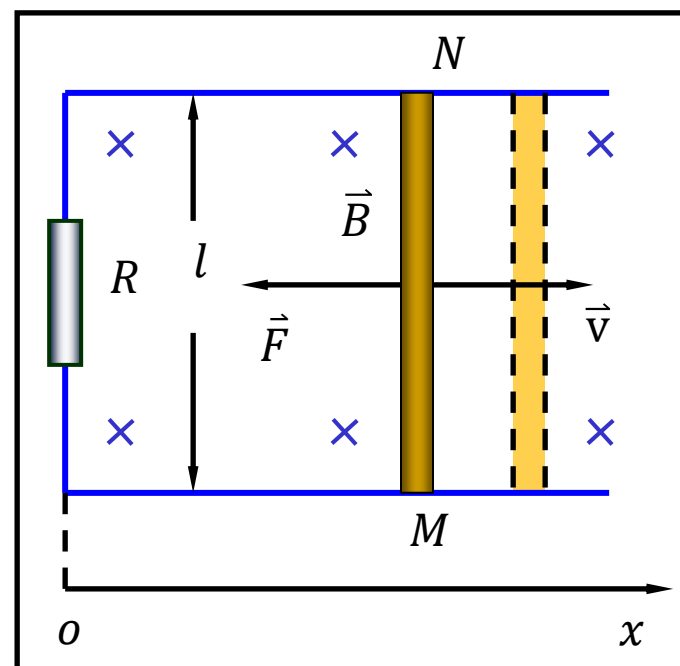
方向沿  $ox$  轴反向

棒的运动方程为

$$m \frac{dv}{dt} = - \frac{B^2 l^2 v}{R}$$

则

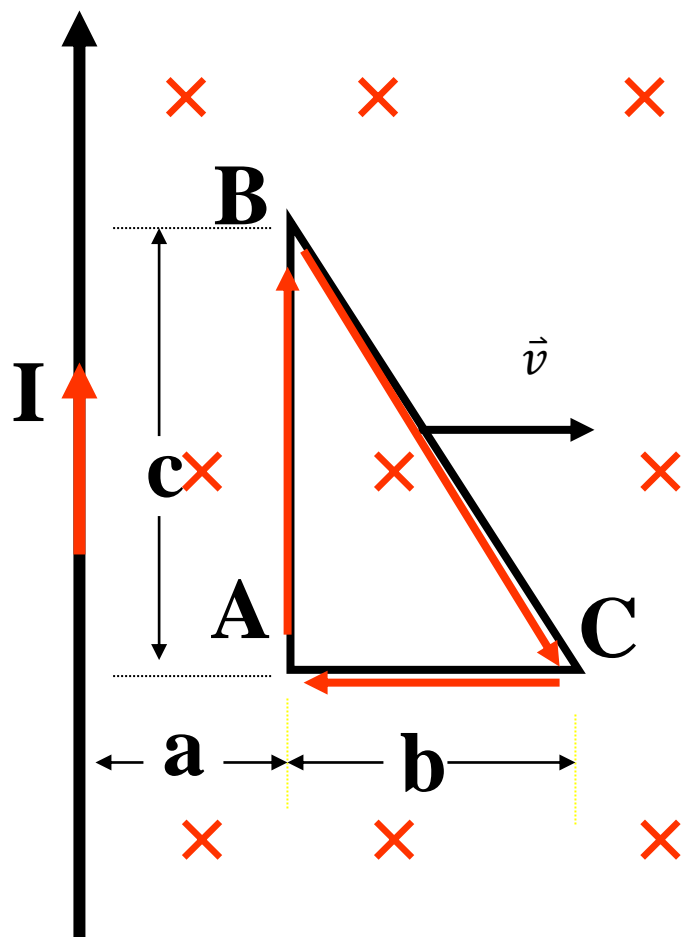
$$\int_{v_0}^v \frac{dv}{v} = - \int_0^t \frac{B^2 l^2}{mR} dt$$



计算得棒的速率随时间变化的函数关系为

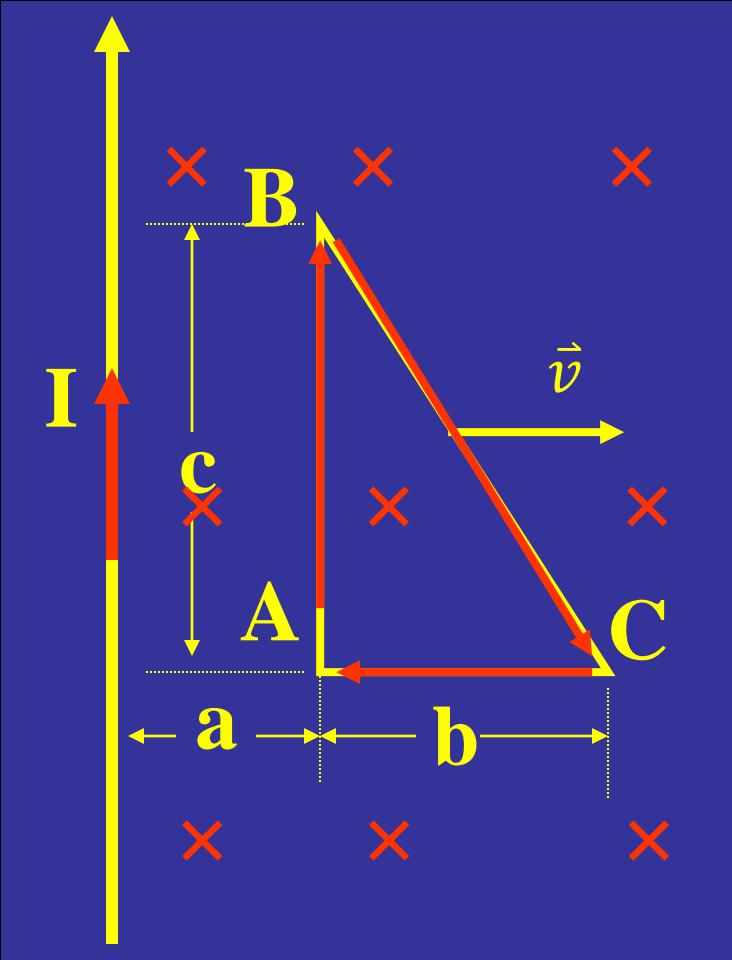
$$v = v_0 e^{-(B^2 l^2 / mR)t}$$

**例14** 一无限长直导线载有电流  $I$ ，与其共面有一三角形线圈ABC以速率  $v$  垂直离开长导线，求处于图中位置时线圈中的感应电动势。



解 (1) : 选  $\varepsilon_i$  正方向ABCA

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= \oint_L (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ &= \int_{AB} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ &\quad + \int_{BC} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \\ &\quad + \int_{CA} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}\end{aligned}$$



$$\varepsilon_{iAB} = \int_{AB} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

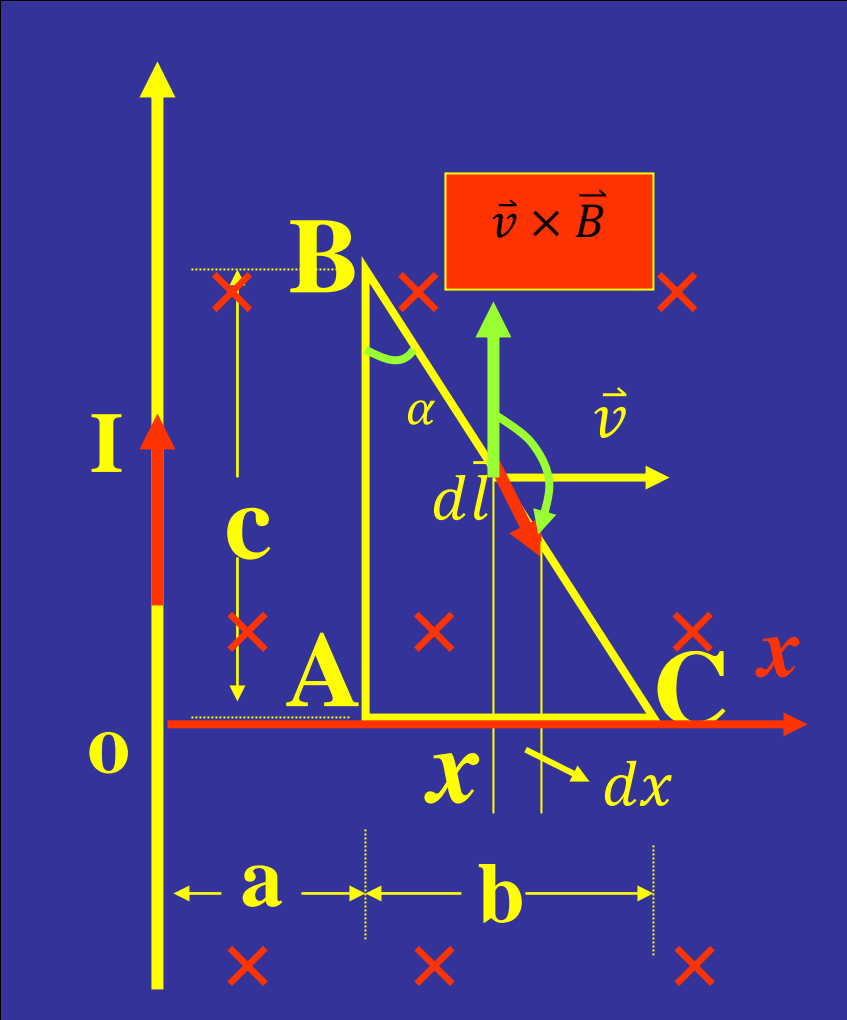
$$= \int_{AB} vB \, dl$$

$$= \int_{AB} \frac{\mu_0 I}{2\pi a} v \, dl$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi a} vc$$

$$\varepsilon_{iCA} = \int_{CA} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$= \int_{CA} |\vec{v} \times \vec{B}| \cos 90^\circ \, dl = 0$$



$$\varepsilon_i = \varepsilon_{iAB} + \varepsilon_{iBC} + \varepsilon_{iCA}$$

$$= \frac{\mu_0 I}{2\pi a} vc - \frac{\mu_0 I vc}{2\pi b} \ln \frac{a+b}{a}$$

$$\varepsilon_{iBC} = \int_{BC} (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$d\varepsilon_{iBC} = (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

$$= vB \cos(\pi - \alpha) dl$$

$$= -vB \cos \alpha dl$$

$$\therefore \varepsilon_{iBC} = \int_{BC} -vB \cos \alpha dl$$

$$= \int_a^{a+b} -v \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \cos \alpha \frac{dx}{\sin \alpha}$$

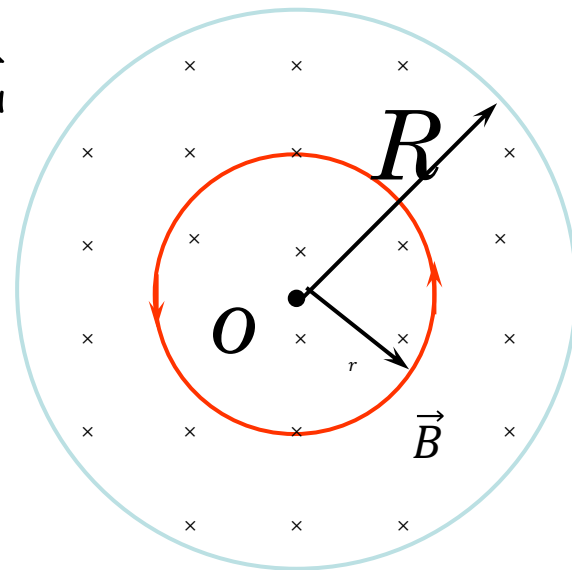
$$= \int_a^{a+b} -\frac{\mu_0 I}{2\pi x} v \cot \alpha dx$$

$$= -\frac{\mu_0 I vc}{2\pi b} \ln \frac{a+b}{a}$$

**例15:** 圆形均匀分布的磁场半径为 $R$ , 磁场随时间均匀增加  $\frac{dB}{dt} = k$ , 求空间的感生电场的分布情况。

**解:** 由于磁场均匀增加, 圆形磁场区域内、外  $\vec{E}_{\text{感}}$  线为一系列同心圆;

**(1)  $r < R$  区域:** 作半径为  $r$  的环形路径; 设涡旋电场的绕向也为逆时针方向。



$$\oint \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = - \iint_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = - \iint_s \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{S}$$

环路上各点的  $\vec{E}_{\text{感}}$  大小相等, 方向与路径方向相同, 且磁场均匀增加,  $\frac{d\vec{B}}{dt} // -d\vec{S}, \quad \cos \theta = -1$

$$E_{\text{感}} \oint dl = \frac{dB}{dt} \iint_s dS, \quad E_{\text{感}} 2\pi r = \frac{dB}{dt} \pi r^2, \quad E_{\text{感}} = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \propto r$$

$r < R$  区域:  $E_{\text{感}} = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$   $\propto r$

(2)  $r > R$  区域

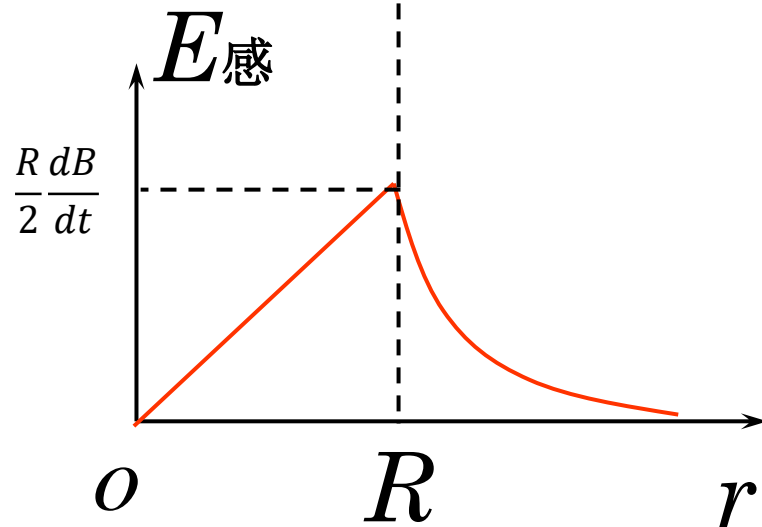
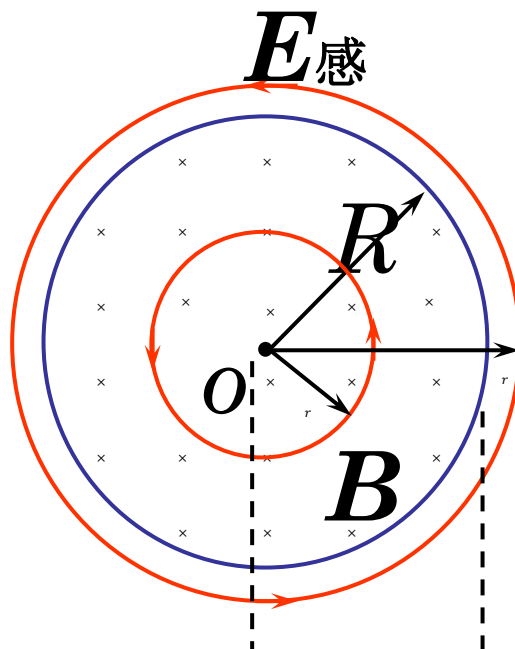
作半径为  $r$  的环形路径;

同理  $E_{\text{感}} \oint dl = \frac{dB}{dt} \iint_S dS$

$\because$  积分面积为回路中有磁场存在的面积,

$$E_{\text{感}} 2\pi r = \frac{dB}{dt} \pi R^2$$

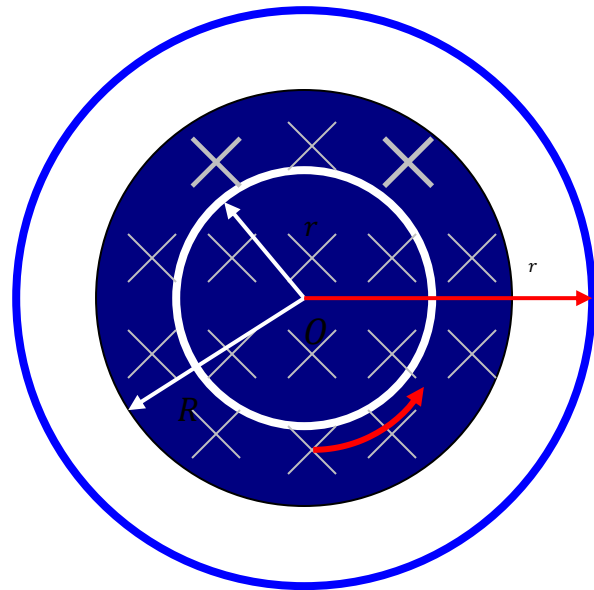
所以  $E_{\text{感}} = \frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt}$   $\propto \frac{1}{r}$



$E_{\text{感}}$  分布曲线

## 例16 讨论轴对称分布的变化磁场产生的感应电场

设一个半径为 $R$  的长直载流螺线管，  
内部磁场强度为 $\vec{B}$ ，若  $\partial\vec{B}/\partial t$  为大于零  
的恒量。求管内外的感应电场。



$$\begin{aligned} r < R \quad \varepsilon_i &= \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = E \oint_L dl \\ &= E 2\pi r = -\frac{\partial B}{\partial t} \pi r^2 \cos\pi \end{aligned}$$

$$= \frac{\partial B}{\partial t} \pi r^2 \quad \longrightarrow \quad E = \frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial t}$$

$$r > R \quad \varepsilon_i = \oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = E 2\pi r$$

$$= -\frac{\partial B}{\partial t} \pi R^2 \cos\pi \quad \longrightarrow \quad E = \frac{R^2}{2r} \frac{\partial B}{\partial t}$$



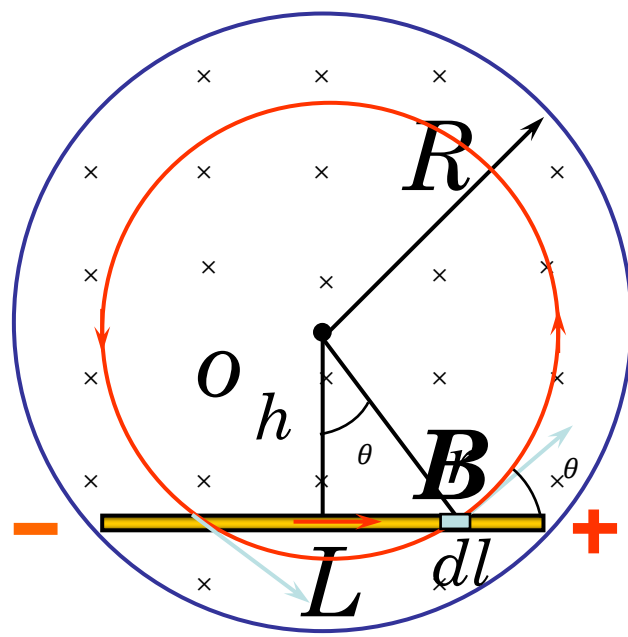
**例17:** 圆形均匀分布的磁场半径为  $R$ ，磁场随时间均匀增加  $\frac{dB}{dt} = k$ ，在磁场中放置一长为  $L$  的导体棒，求棒中的感生电动势。

**解:**  $\vec{E}_{\text{感}}$  作用在导体棒上，使导体棒上产生一个向右的感生电动势，沿  $\vec{E}_{\text{感}}$  线作半径为  $r$  的环路，分割导体元  $dl$ ，在  $dl$  上产生的感生电动势为：

$$d\varepsilon_i = E_{\text{感}} dl \cos \theta$$

$$\varepsilon_i = \int d\varepsilon_i = \int_{-}^{+} E_{\text{感}} dl \cos \theta$$

由上题结果，圆形区域内部的感生电场： $E_{\text{感}} = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt}$



$$\varepsilon_i = \int_0^L \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} dl \cos \theta \quad \text{其中} \quad \cos \theta = \frac{h}{r} \quad \text{则:}$$

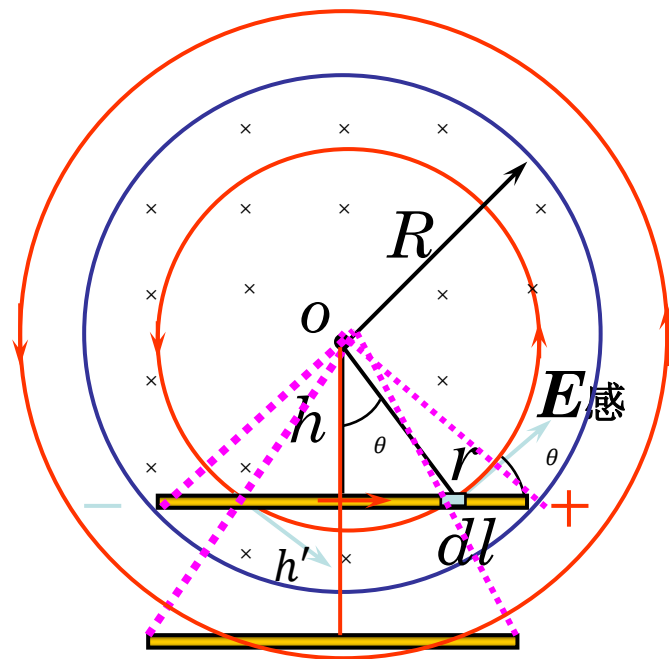
$$\varepsilon_i = \int_0^L \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \frac{h}{r} dl = \frac{hL}{2} \frac{dB}{dt} \quad \text{其中} \quad h = \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2}$$

$$\therefore \varepsilon_i = \frac{L}{2} \frac{dB}{dt} \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} \quad \text{方向向右。}$$

**法2：用法拉第电磁感应定律求解，**  
如图构造逆时针方向闭合回路，

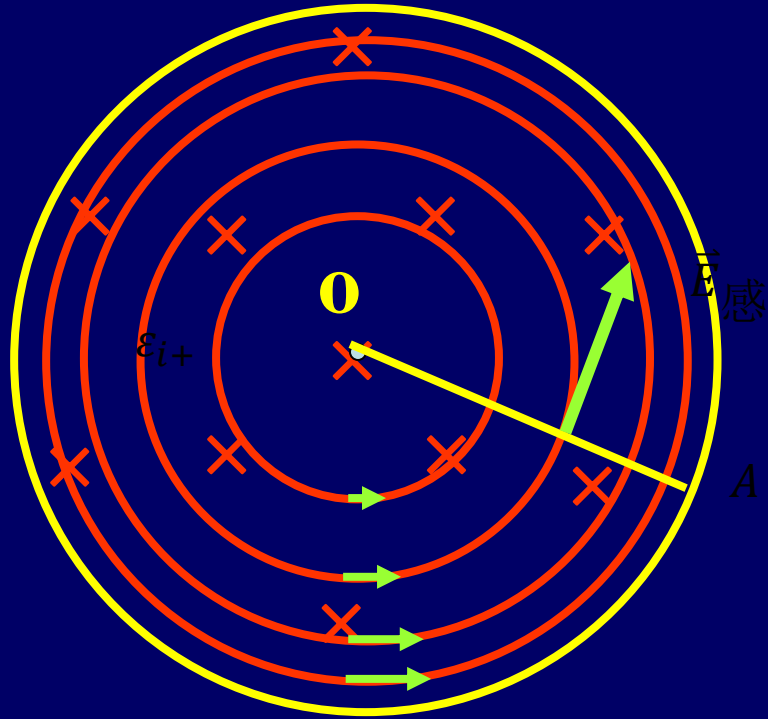
$$\therefore \varphi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = -B \frac{L}{2} \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2}$$

$$\therefore \varepsilon_i = -\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{2} \frac{dB}{dt} \sqrt{R^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2}$$



**讨论**

例18 在螺线管截面上放置金属棒oA，则oA棒上产生的感应电动势。



$$\because \vec{E}_{\text{感}} \perp d\vec{l}$$

$$\vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = 0 \quad \varepsilon_{oA} = 0$$

例19 求在螺线管中的横截面内，放置有一直金属棒MN，求MN=2R上产生的感生电动势？

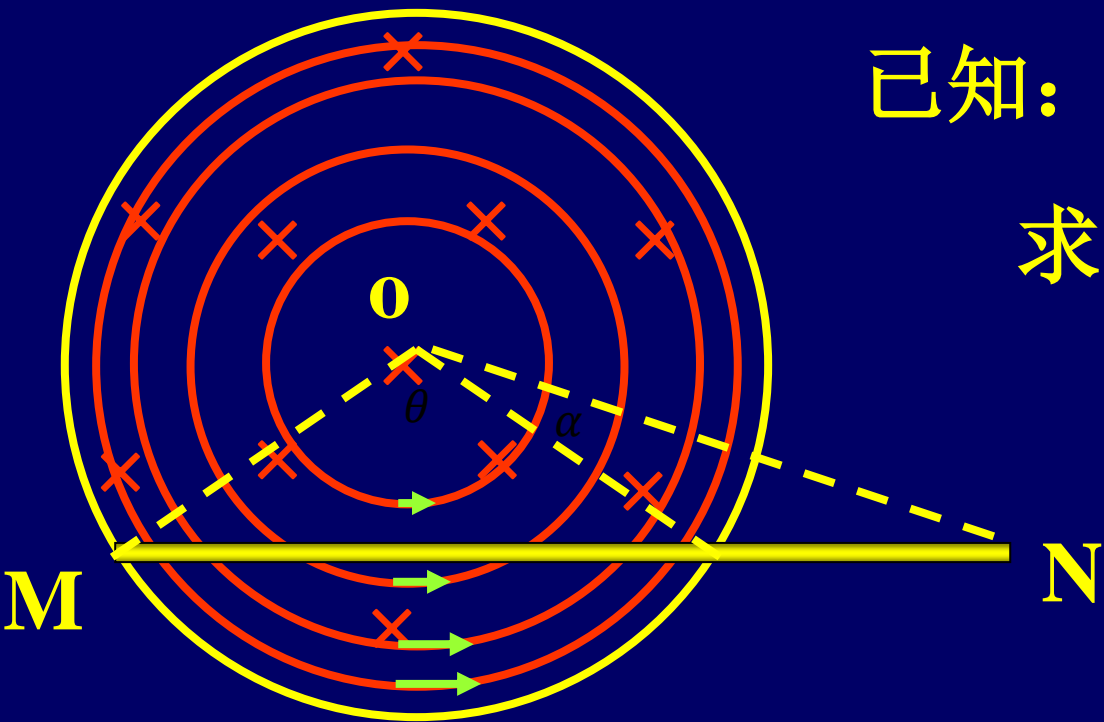
已知：

$$\theta = \frac{1}{3}\pi, \quad \alpha = \frac{1}{6}\pi, \quad \frac{\partial B}{\partial t}$$

求：

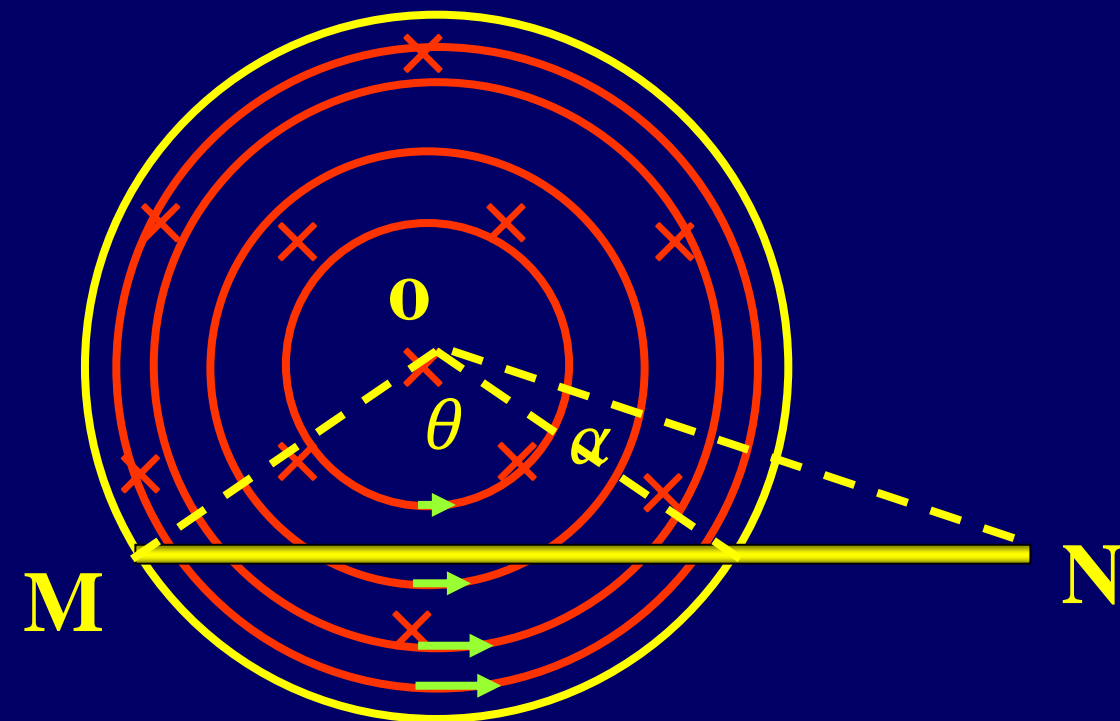
$$\varepsilon_{iMN}$$

$$\text{利用 } \varepsilon_{i\text{感}} = -\frac{d\Phi_m}{dt}$$



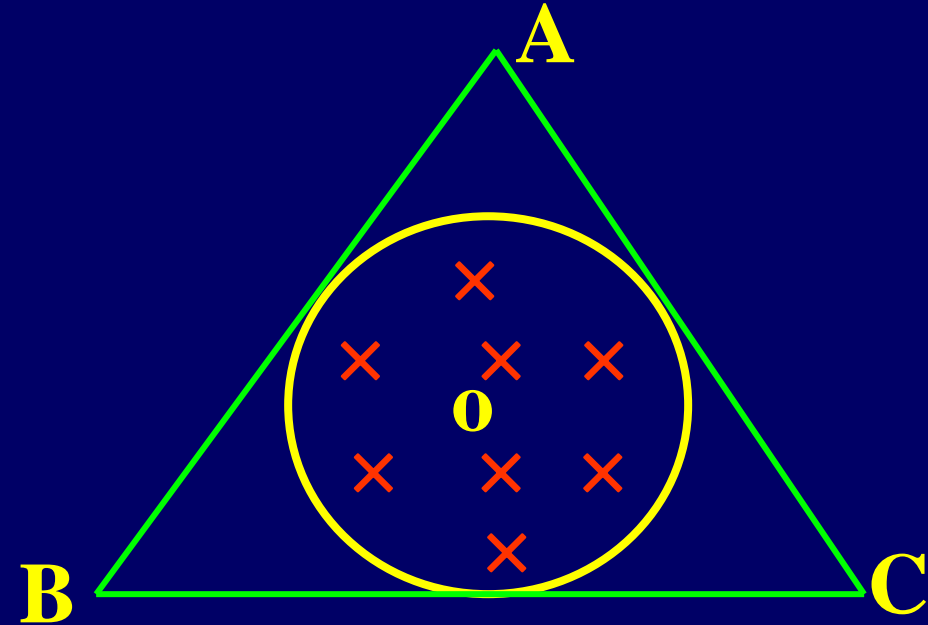
作三角形回路：OMN

三角形回路中的感应电动势即导线MN上的感生电动势，因在OM，ON上产生的电势为零。



$$\begin{aligned}
 \varepsilon_{MN} &= \varepsilon_{OMN} = s \frac{\partial B}{\partial t} = \frac{\partial B}{\partial t} (s_{\Delta} + s_{\text{扇}}) \\
 &= \frac{\partial B}{\partial t} \left( \frac{1}{2} \cdot R \cdot \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} + \frac{1}{12} \pi R^2 \right) \\
 &= \frac{\partial B}{\partial t} \left( \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 + \frac{\pi}{12} R^2 \right)
 \end{aligned}$$

例20 AB、BC、CA棒组成外切三角形，求AB棒上的感生电动势。



$$\begin{aligned}\varepsilon_{AB} &= \frac{1}{3} \varepsilon_{ABC} = \frac{1}{3} S \frac{\partial B}{\partial t} \\ &= \frac{1}{3} \frac{\partial B}{\partial t} \pi R^2\end{aligned}$$

**例21** 一被限制在半径为 $R$ 的无限长圆柱内的均匀磁场 $B$ ， $B$ 均匀增加， $B$ 的方向如图所示。

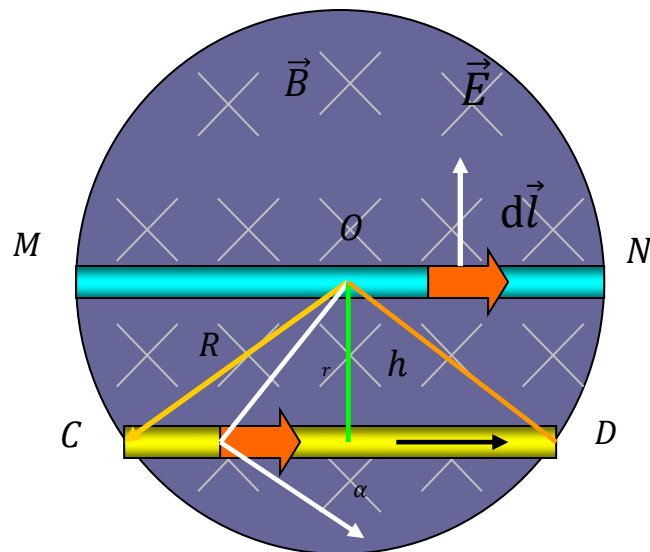
求 导体棒 $MN$ 、 $CD$ 的感生电动势

解 法一(用感生电场计算):

$$E = \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \quad (r < R)$$

$$\varepsilon_{MN} = \int_M^N \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

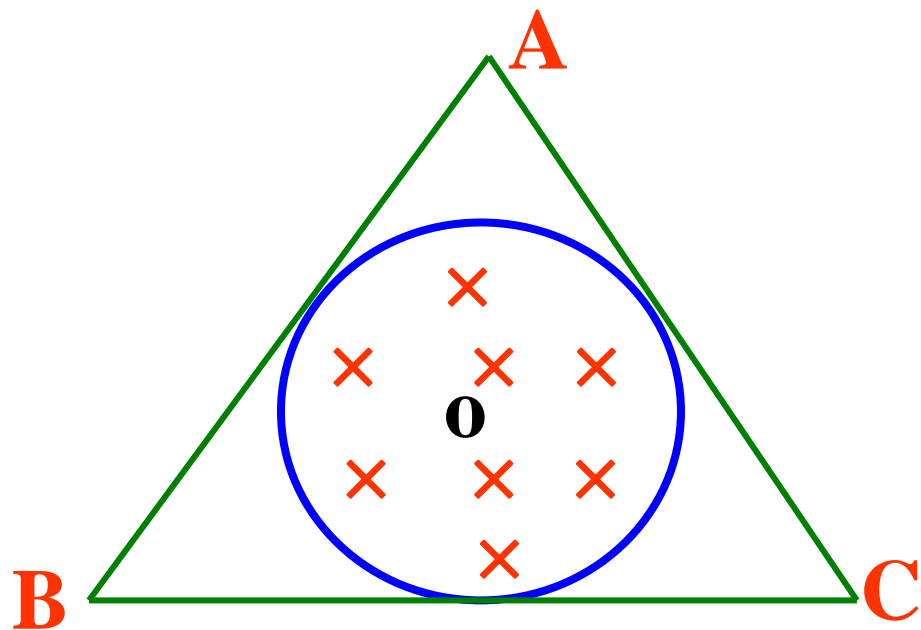
$$\varepsilon_{CD} = \int_C^D \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_C^D E \cos\alpha dl = \int_0^L \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} \frac{h}{r} dl = \frac{hL}{2} \frac{dB}{dt}$$



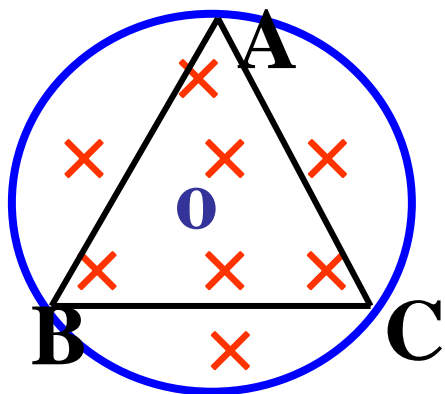
法二(用法拉第电磁感应定律): (补逆时针回路  $OCDO$ )

$$\varepsilon_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d(BLh/2)}{dt} = \varepsilon_{OC} + \varepsilon_{CD} + \varepsilon_{DO} = \varepsilon_{CD} = \frac{hL}{2} \frac{dB}{dt}$$

**思考：** AB、BC、CA棒组成外切三角形，求AB棒上的感生电动势。如果是内接正三角形呢？



$$\begin{aligned}\varepsilon_{AB} &= \frac{1}{3} \varepsilon_{ABC} = \frac{1}{3} S \frac{\partial B}{\partial t} \\ &= \frac{1}{3} \frac{\partial B}{\partial t} \pi R^2\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\varepsilon_{AB} &= \frac{1}{3} \varepsilon_{ABC} = \frac{1}{3} S \frac{\partial B}{\partial t} \\ &= \frac{1}{3} \frac{\partial B}{\partial t} 3 \frac{\sqrt{3}}{4} R^2 = \frac{\partial B}{\partial t} \frac{\sqrt{3}}{4} R^2\end{aligned}$$



例22、一无限长载流螺线管中电流随时间作线性变化 ( $dI/dt = \text{const}$ )，其内部磁感应强度也作线性变化且  $dB/dt$  为已知。求管内外感生电场的

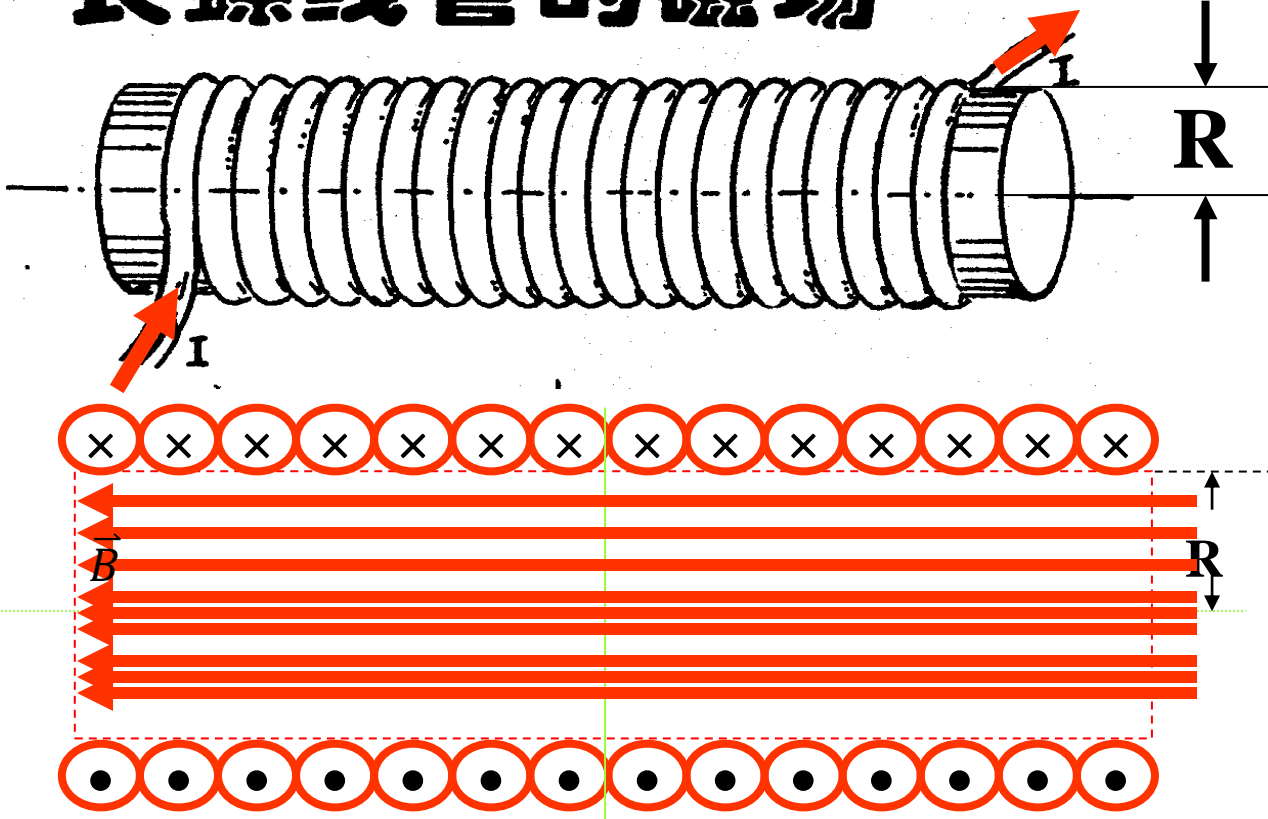
已知：

$$R, \frac{\partial B}{\partial t} = k$$

求 (1)

$$\vec{E}_{\text{感}}(r) = ?$$

## 长螺线管的磁场



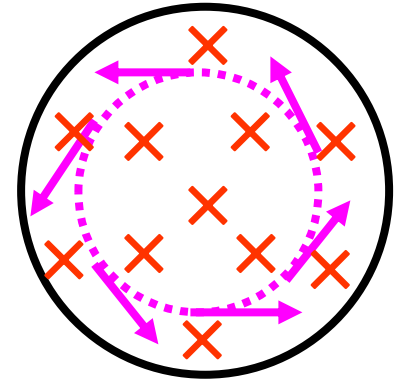
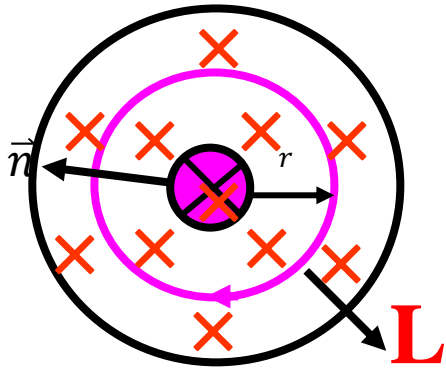
螺线管内部是均匀磁场，证明可得感生电场的电力线是一系列同心圆，感生电场方向沿切线方向，且与磁场变化方向成左手螺旋关系，为逆时针。

A)  $0 \leq r < R$

作闭合环路L (L沿顺时针)

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

与  $\vec{n}$  一致



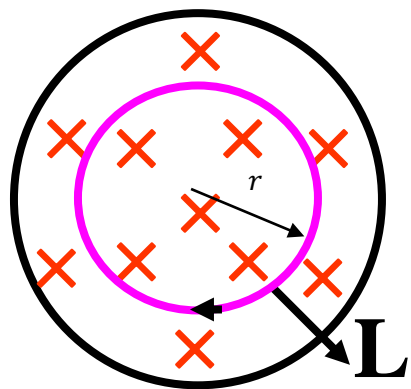
$$\oint_L \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

$$\vec{E}_{\text{感}} 2\pi r = - \frac{\partial B}{\partial t} \iint_S dS$$

**A)**

$$0 \leq r < R$$

$$\oint_L \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$



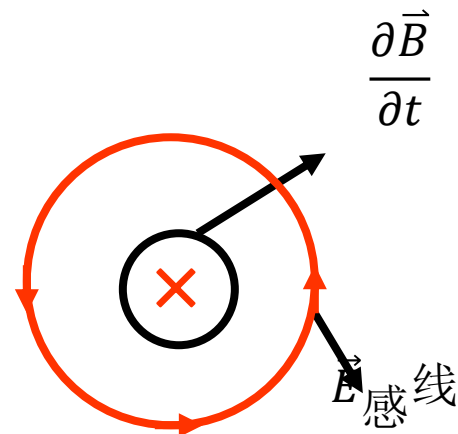
$$E_{\text{感}} 2\pi r = - \frac{\partial B}{\partial t} \iint_S dS = - \frac{\partial B}{\partial t} \pi r^2$$

$$E_{\text{感}} = - \frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial t}$$

注意:

$$\frac{\partial B}{\partial t} > 0$$

$E_{\text{感}}$  为负值



$$E_{\text{感}} = - \frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial t}$$

**B)**

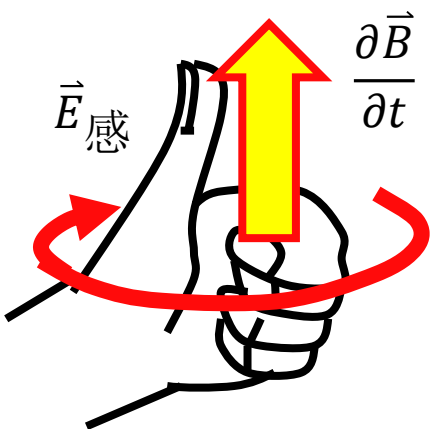
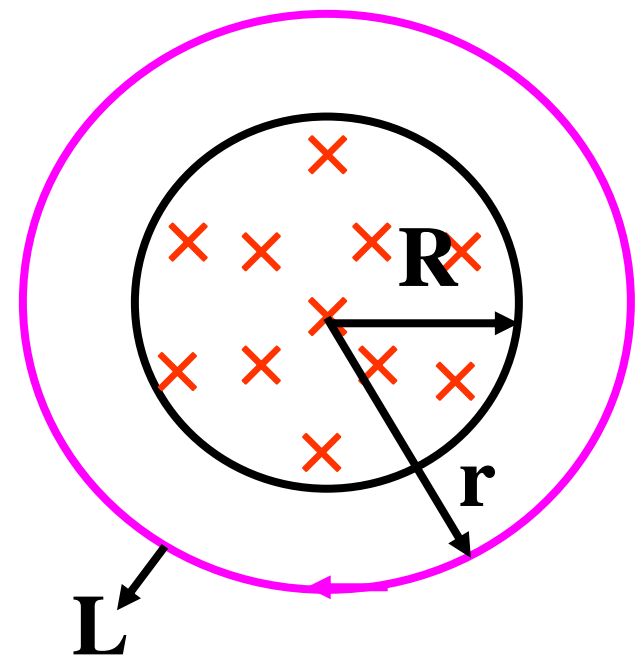
$$R \leq r < \infty$$

作环路**L**，则有：

$$\oint_L \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

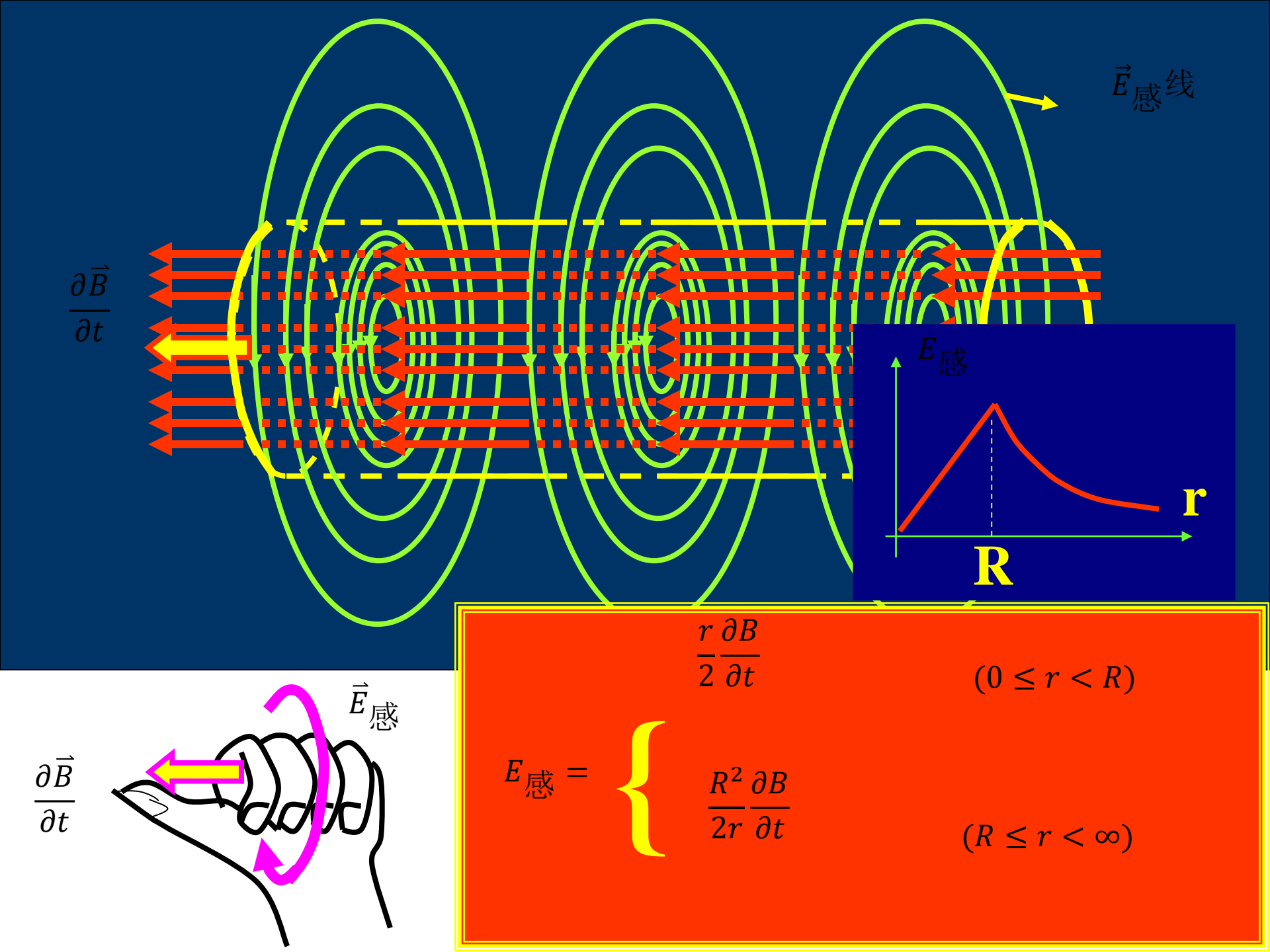
$$\vec{E}_{\text{感}} 2\pi r = - \frac{\partial B}{\partial t} \iint_S dS = - \frac{\partial B}{\partial t} \pi R^2$$

$$E_{\text{感}} = - \frac{R^2}{2r} \frac{\partial B}{\partial t}$$

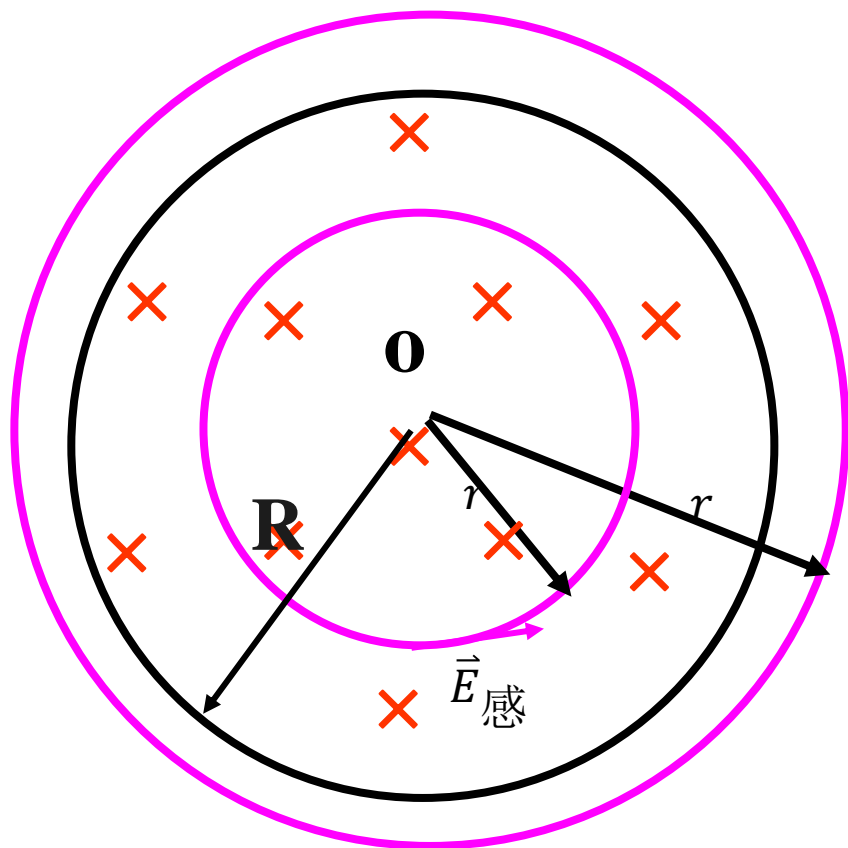


综合：

$$E_{\text{感}} = \begin{cases} \frac{r}{2} \frac{\partial B}{\partial t} & (0 \leq r < R) \\ \frac{R^2}{2r} \frac{\partial B}{\partial t} & (R \leq r < \infty) \end{cases}$$



例23、在螺线管内外若有半径为 $r$ 的圆线圈存在  
线圈中的感应电动势。



由于  $\vec{E}_{\text{感}}$  沿逆时针方向

$\varepsilon_i$  沿逆时针方向

$$0 \leq r < R$$

$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= \oint_L \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = \oint_L E_{\text{感}} \cdot dl \\ &= \oint_L \frac{r}{2} \frac{dB}{dt} dl = \frac{dB}{dt} \pi r^2\end{aligned}$$

$$r > R$$

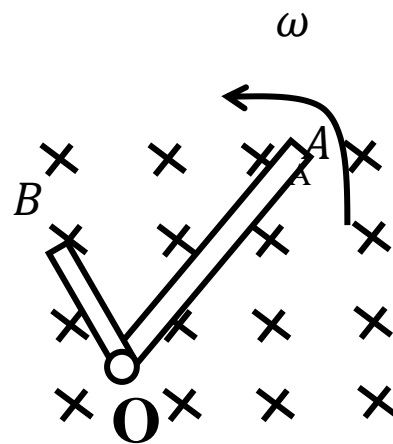
$$\begin{aligned}\varepsilon_i &= \oint_L \vec{E}_{\text{感}} \cdot d\vec{l} = \oint_L E_{\text{感}} \cdot dl \\ &= \oint_L \frac{R^2}{2r} \frac{dB}{dt} dl = \frac{dB}{dt} \pi R^2\end{aligned}$$

## 例24、比较A、B两点的电势的高低

解：对OA，O点的电势高于A点电势

$$\varepsilon_{OA} = U_O - U_A = \frac{1}{2} \omega l^2$$

$$\varepsilon_{OB} = U_O - U_B = \frac{1}{8} \omega l^2$$

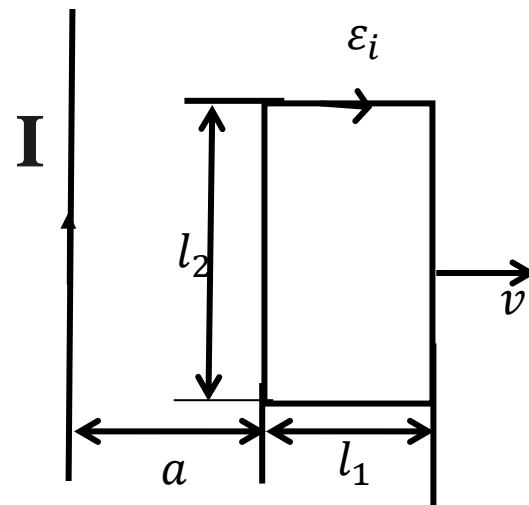


$$U_{AB} = U_A - U_B = (U_O - U_B) - (U_O - U_A) = -\frac{3}{8} \omega l^2$$

例25 已知 $I, a, l_1, l_2, v$ ,求线圈中的 $\varepsilon_i$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

$$\Phi_m = \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_a^{a+l_1} \frac{\mu_0 I l_2}{2\pi r} dr = \frac{\mu_0 I l_2}{2\pi} \ln \frac{a+l_1}{a}$$



$$|\varepsilon_i| = \left| -\frac{d\Phi_m}{dt} \right| = \left| \frac{\mu_0 I l_2}{2\pi} \frac{d(\ln \frac{a+l_1}{a})}{dt} \right| = \frac{\mu_0 I l_2}{2\pi} \left| \frac{1}{a+l_1} \frac{da}{dt} - \frac{1}{a} \frac{da}{dt} \right|$$

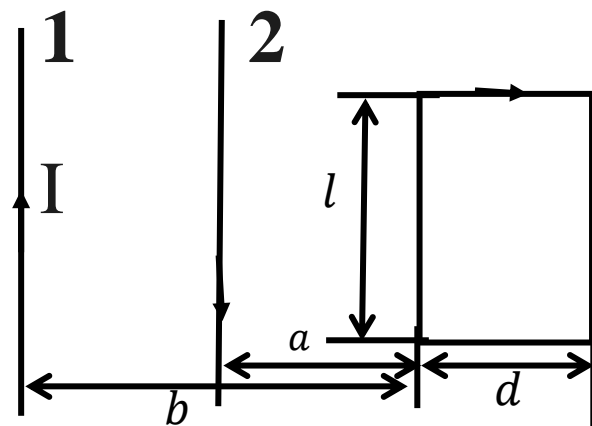
$$|\varepsilon_i| = \frac{\mu_0 I l_2 v}{2\pi} \left( \frac{1}{a+l_1} - \frac{1}{a} \right) = \frac{\mu_0 I l_2 v}{2\pi} \frac{l_1}{a(a+l_1)}$$



**例26** 在两根通有反向电流 $I$ 的平行直导线的平面内，有一矩形线圈放置如图所示，若导线中电流随时间变化率为  $dI/dt = k$ ，试计算线圈中的感生电动势。

解：  $\Phi_m = \Phi_{m1} - \Phi_{m2}$

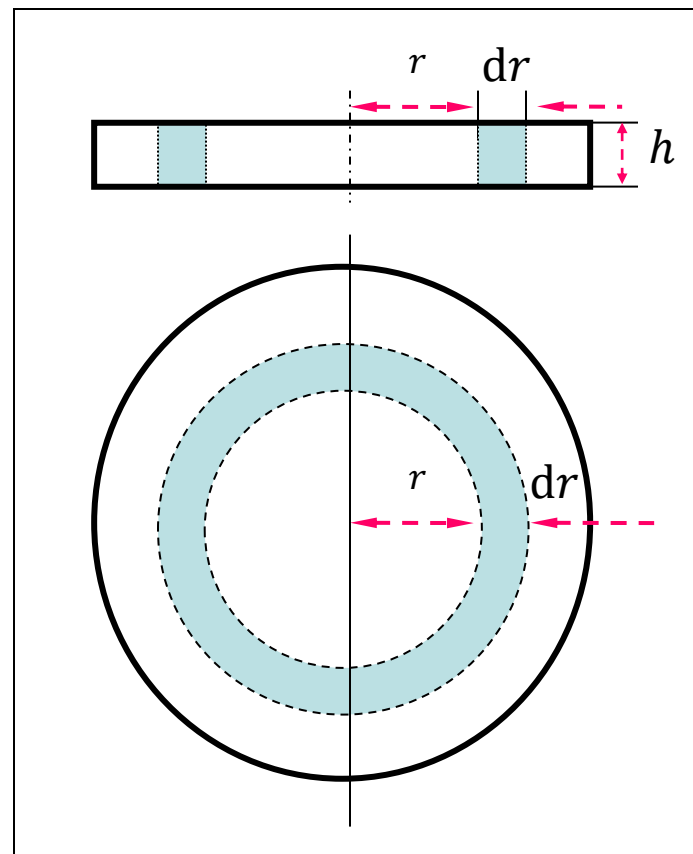
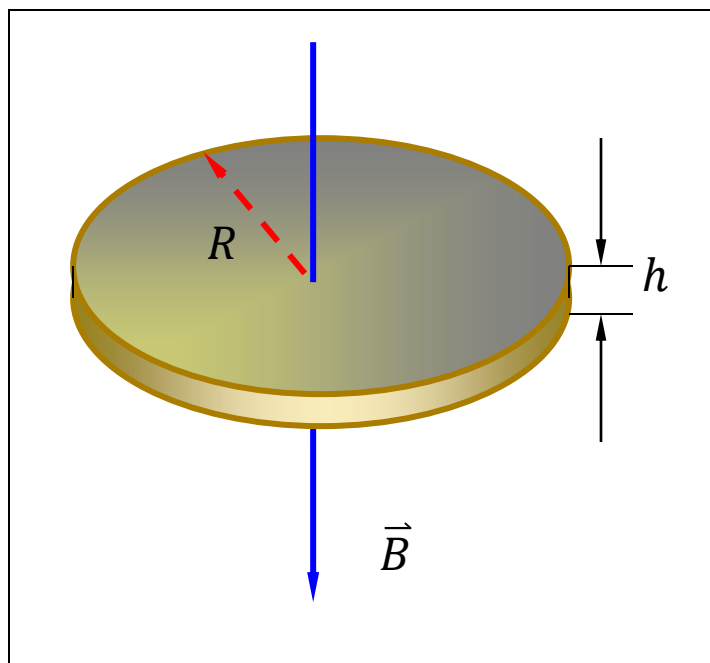
$$= \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \left( \ln \frac{a+d}{a} - \ln \frac{b+d}{b} \right)$$



$$\begin{aligned} \varepsilon_i &= - \frac{d\Phi_m}{dt} = - \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left( \ln \frac{a+d}{a} - \ln \frac{b+d}{b} \right) \frac{dI}{dt} \\ &= - \frac{\mu_0 l k}{2\pi} \left( \ln \frac{a+d}{a} - \ln \frac{b+d}{b} \right) \end{aligned}$$

方向为顺时针

**例27** 设有一半径为 $R$ ，高度为 $h$ 的铝圆盘，其电导率为 $\gamma$ . 把圆盘放在磁感强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场中，磁场方向垂直盘面. 设磁场随时间变化，且 $dB/dt = k$ 为一常量. 求盘内的感应电流值. (圆盘内感应电流自己的磁场略去不计)



**解**如图取一半径为 $r$ ,宽度为 $dr$ ,高度为 $h$ 的圆环.

则圆环中的感生电动势的值为

$$E_i = \oint_L \vec{E}_k \cdot d\vec{l} = \int_S \frac{d\vec{B}}{dt} \cdot d\vec{s}$$

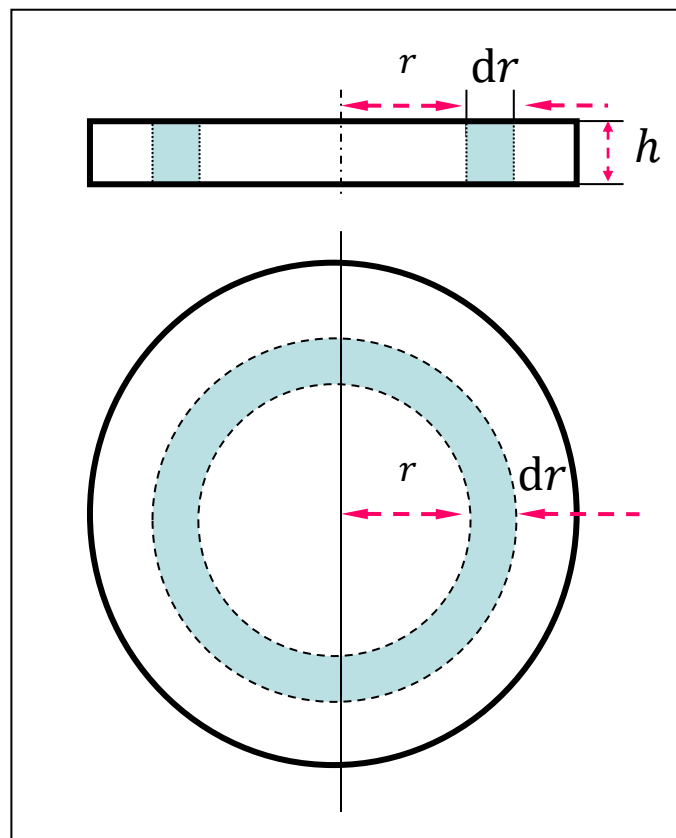
$$E_i = \frac{dB}{dt} \int_S ds = k \pi r^2$$

又

$$dR = \frac{1}{\gamma} \frac{2 \pi r}{h dr}$$

所以

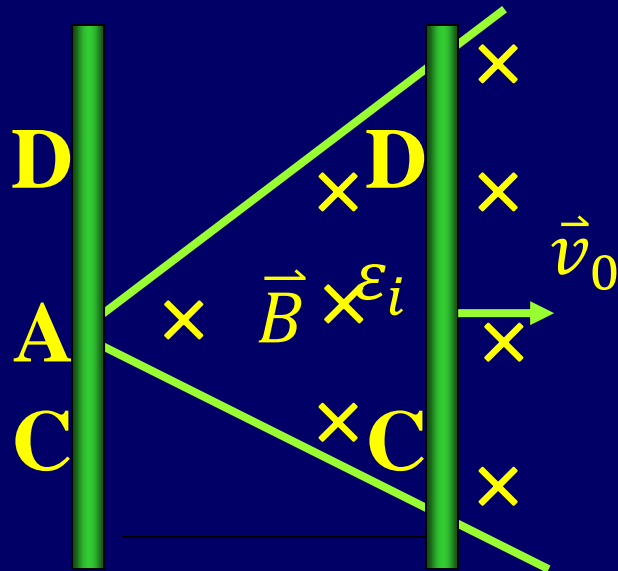
$$dI = \frac{k h \gamma}{2} r dr$$



$$I = \int dI = \frac{k h \gamma}{2} \int_0^R r dr$$

$$= \frac{1}{4} k \gamma R^2 h$$

补充题2) 如图所示, 在等边三角形平面回路中, 存在磁应强度为 $\vec{B}$ 的均匀磁场, 其方向垂直于回路平面, 回路上的CD段为滑动导线, 它以匀速 $\vec{v}_0$ 远离A端运动, 并始终保持回路是等边三角形, 设滑动导线CD到A端的垂直距离为 $x$ , 且时间 $t=0$ 时,  $x=0$ , 试求下述两种不同磁场的情况下, 回路中的感应电动势 $\varepsilon_i$ 与时间的关系。

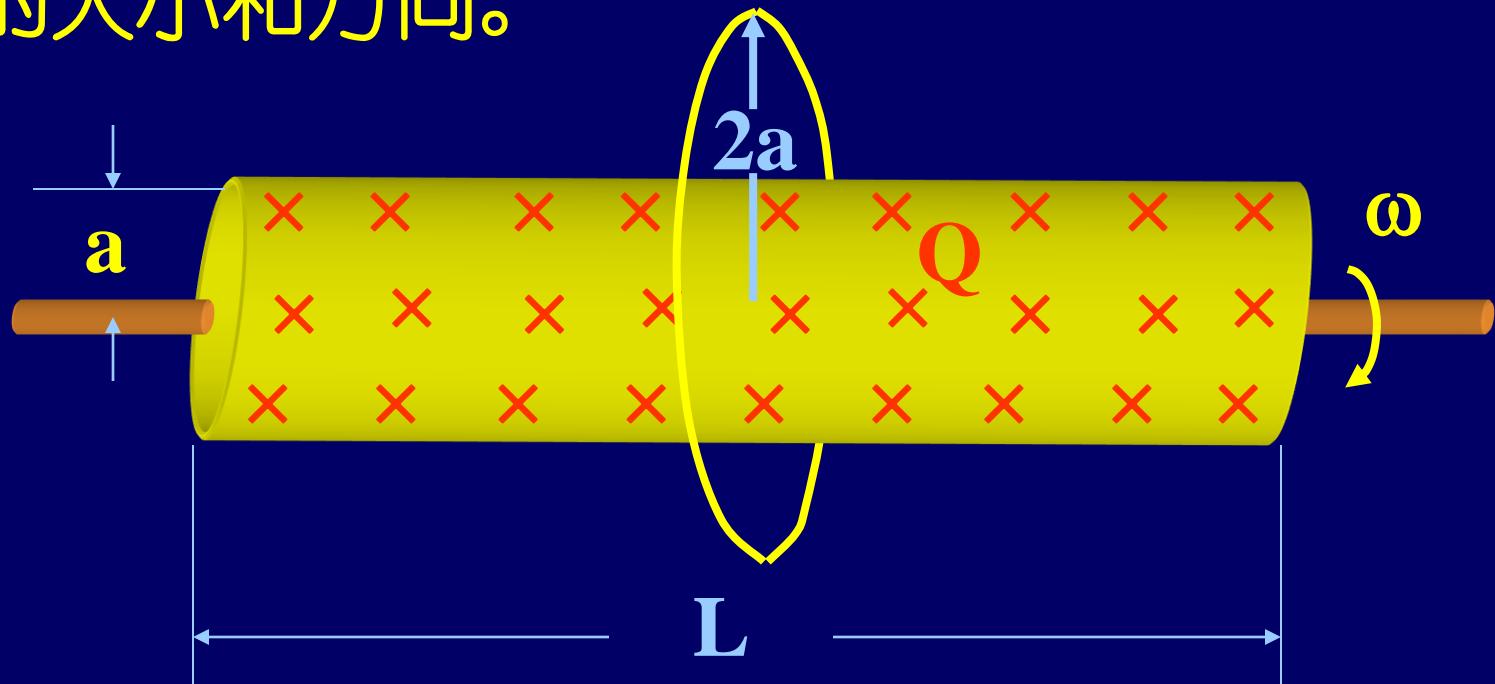


$$1) \quad \vec{B} = \vec{B}_0 = \text{const}$$

$$2) \quad \vec{B} = \vec{B}_0 t$$

### 补充题3)

电量 $Q$ 均匀分布在半径为 $a$ ，长为 $L$  ( $L \gg a$ ) 的绝缘长圆筒表面上，圆筒以角速度 $\omega$ 绕中心轴线旋转，半径为 $2a$ ，电阻为 $R$ 的单匝圆形线圈套在圆筒上(如图)若圆筒按角速度 $\omega = \omega_0(1 - t/t_0)$ 的规律随时间线性地减小 ( $\omega_0$ 、 $t_0$ 为常数)。求圆形线圈中的感应电流的大小和方向。



**例28** 如图的长直密绕螺线管,已知 $l, S, N\mu$ ,求其自感 $L$ .  
(忽略边缘效应)

**解** 先设电流  $I \rightarrow$  根据安培环路定理求得  $H \rightarrow B$

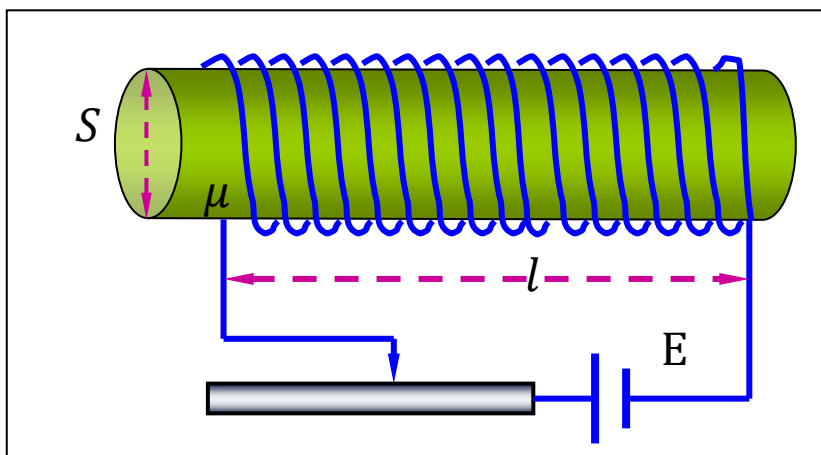
$\rightarrow \Phi \rightarrow L$

$$n = N/l$$

$$B = \mu H = \mu n I$$

$$\psi = N\Phi = NBS$$

$$= N\mu \frac{N}{l} IS$$



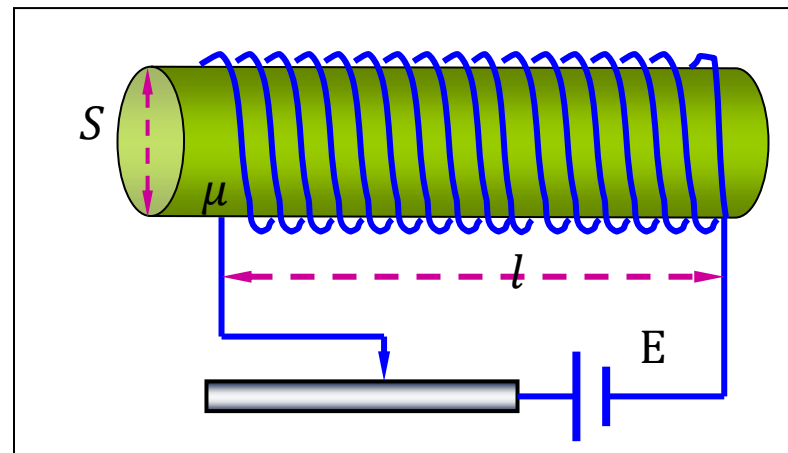
$$\psi = N\mu \frac{N}{l} IS$$

$$L = \frac{\psi}{I} = \mu \frac{N^2}{l} S$$

$$n = N/l$$

$$V = lS$$

$$\therefore L = \mu n^2 V$$



(一般情况可用下式  
测量自感)

$$\varepsilon_L = -L \frac{dI}{dt}$$

**例29** 有两个同轴圆筒形导体，其半径分别为  $R_1$  和  $R_2$ ，通过它们的电流均为  $I$ ，但电流的流向相反。设在两圆筒间充满磁导率为  $\mu$  的均匀磁介质，求其自感  $L$ 。

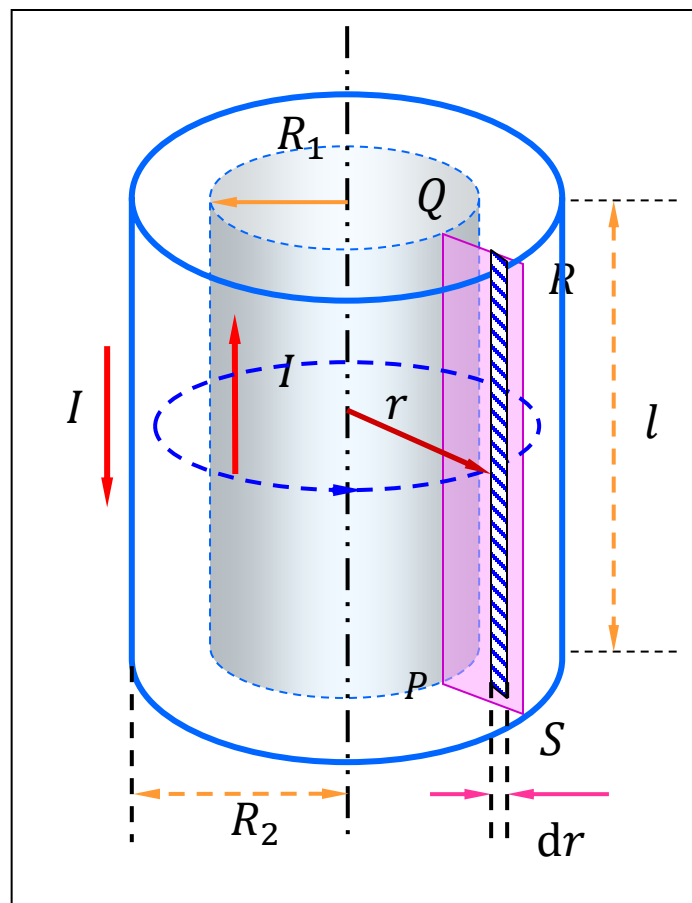
**解** 两圆筒之间

$$B = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

如图在两圆筒间取一长为  $l$  的面  $PQRS$ ，并将其分成许多小面元。

则 
$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{S} = B l dr$$

$$\Phi = \int d\Phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I}{2\pi r} l dr$$





$$\Phi = \int d\Phi = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I}{2\pi r} l dr$$

即

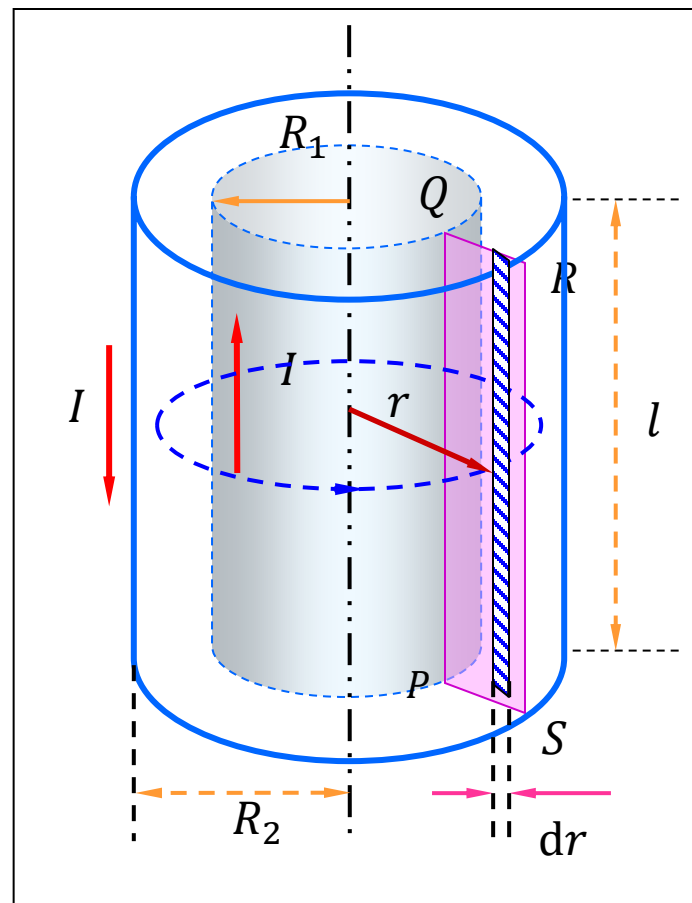
$$\Phi = \frac{\mu I l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

由自感定义可求出

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

单位长度的自感为

$$\frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

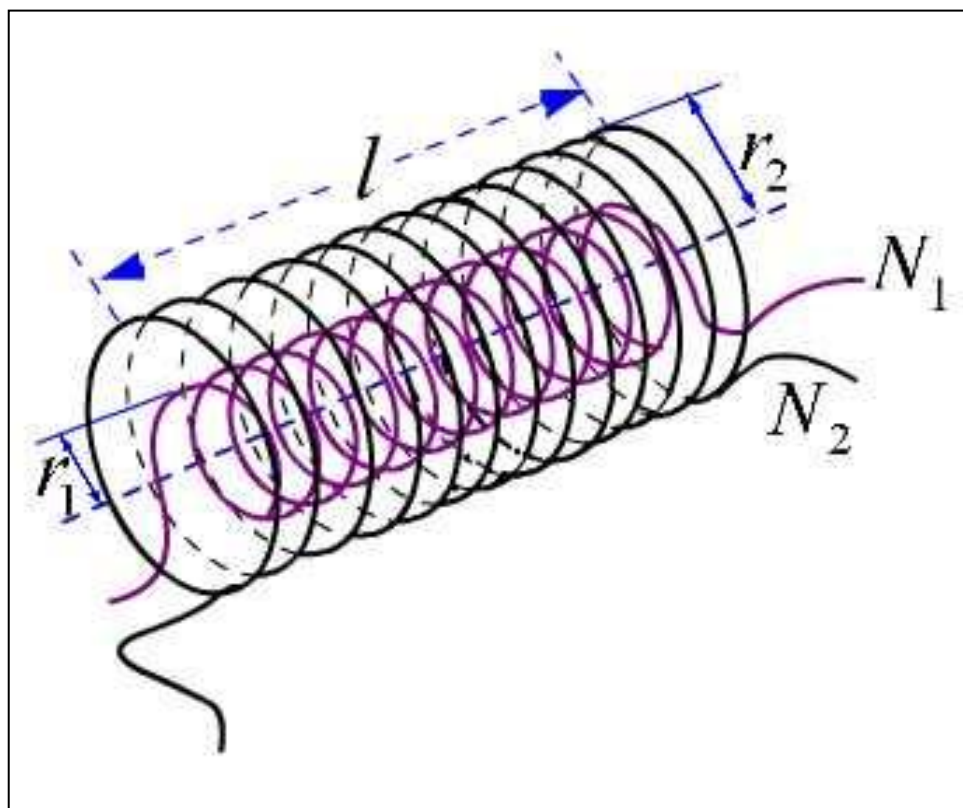


**例30** 两同轴长直密绕螺线管的互感：有两个长度均为 $l$ , 半径分别为 $r_1$ 和 $r_2$  ( $r_1 < r_2$ ), 匝数分别为 $N_1$ 和 $N_2$ 的同轴长直密绕螺线管. **求**它们的互感 $M$ .

**解** 先设某一线圈中通以电流 $I \rightarrow$  求出另一线圈的磁通量 $\Phi \rightarrow M$

设半径为 $r_1$ 的线圈中通有电流 $I_1$ , 则

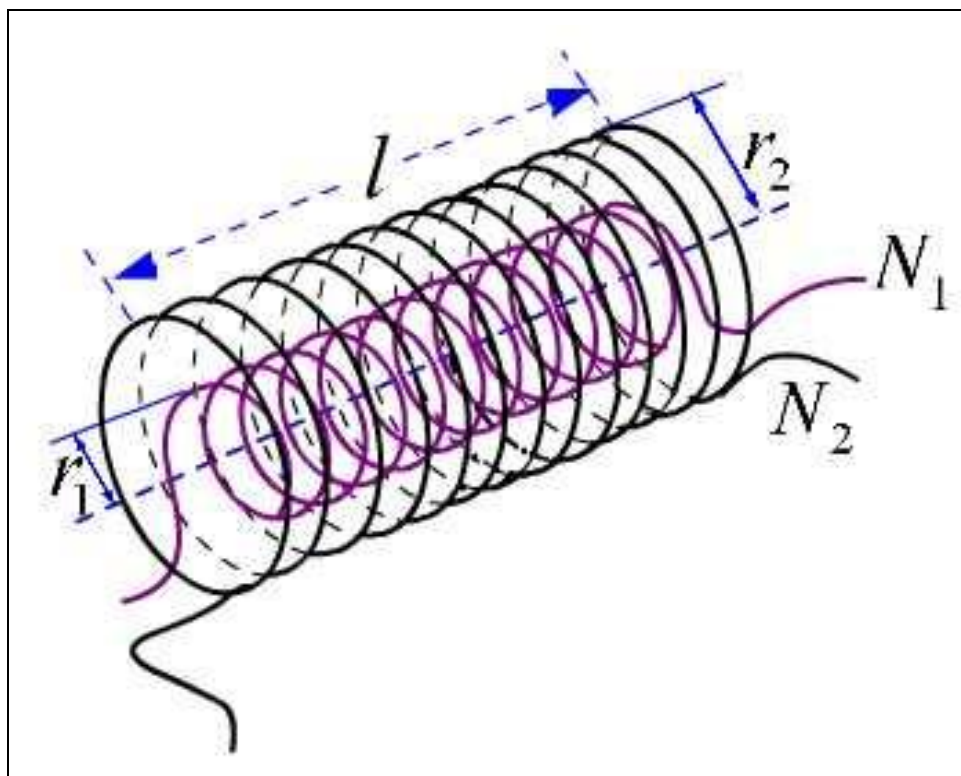
$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1 = \mu_0 n_1 I_1$$



$$B_1 = \mu_0 \frac{N_1}{l} I_1 = \mu_0 n_1 I_1$$

则穿过半径为 $r_2$ 的线圈  
的磁通匝数为

$$\begin{aligned} \psi &= N_2 \Phi_{21} = N_2 B_1 (\pi r_1^2) \\ &= n_2 l B_1 (\pi r_1^2) \end{aligned}$$



代入 $B_1$ 计算得

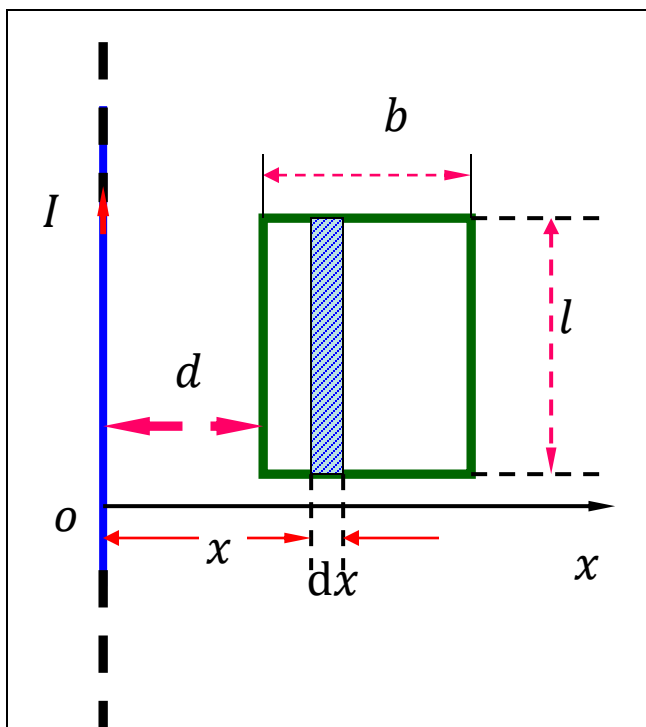
$$\psi = N_2 \Phi_{21} = \mu_0 n_1 n_2 l (\pi r_1^2) I_1$$

则

$$M_{12} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} = \mu_0 n_1 n_2 l (\pi r_1^2)$$

**例 31** 在磁导率为  $\mu$  的均匀无限大的磁介质中，一无限长直导线与一宽长分别为  $b$  和  $l$  的矩形线圈共面，直导线与矩形线圈的一侧平行，相距为  $d$ 。求二者的互感系数。

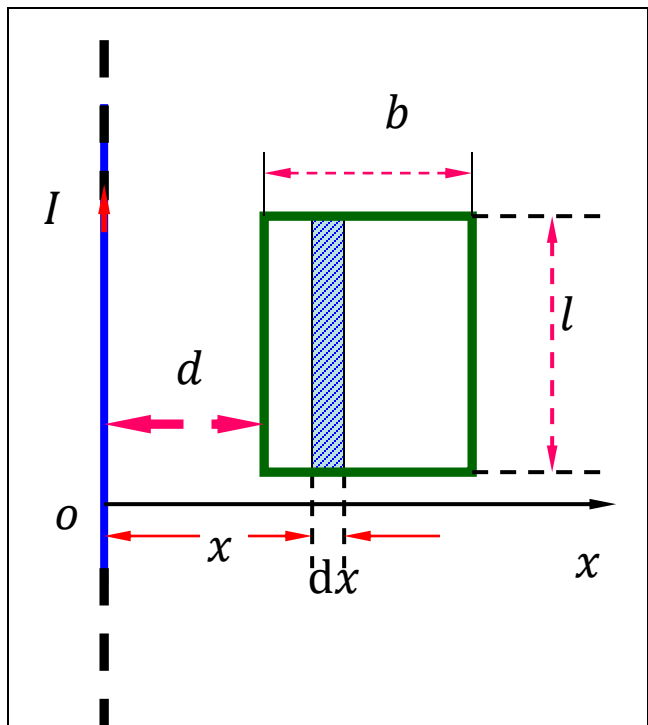
**解** 设长直导线通电流  $I$



$$B = \frac{\mu I}{2 \pi x}$$

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu I}{2 \pi x} l dx$$

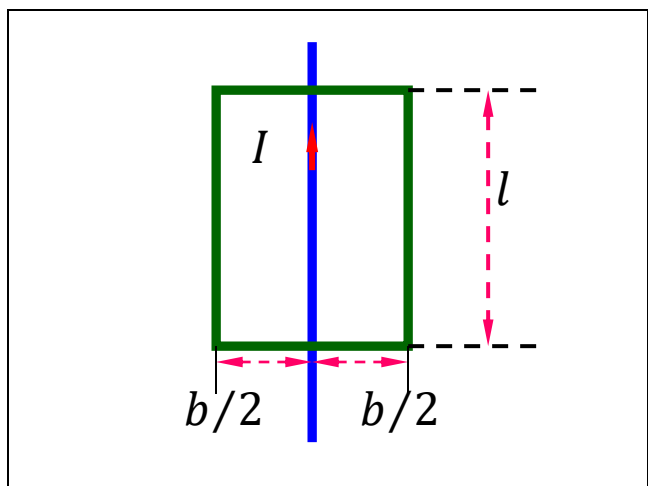
$$\Phi = \int_d^{d+b} \frac{\mu I}{2 \pi x} l dx$$



$$\Phi = \int_d^{d+b} \frac{\mu I}{2\pi x} l dx$$

$$= \frac{\mu I l}{2\pi} \ln\left(\frac{b+d}{d}\right)$$

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln\left(\frac{b+d}{d}\right)$$



若导线如左图放置，根据对称性可知  $\Phi = 0$

得

$$M = 0$$

**例32:** 长为  $l$ 、横截面积为  $S$  的长直螺线管，插有磁导率为  $\mu$  的磁介质，绕有两个线圈，两线圈的线圈密度分别为  $n_1$ 、 $n_2$ ，两线圈完全耦合，求两线圈的互感系数。

**解:** 设线圈 1 中的电流为  $I_1$ ，

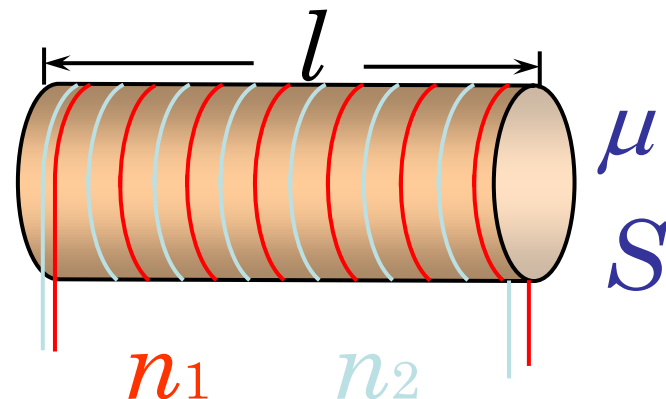
线圈 1 在线圈 2 中产生的磁链：

$$\varphi_{21} = N_2 \phi_{m21} = l n_2 B_1 S$$

$$= l n_2 \mu n_1 I_1 S$$

线圈 1 在线圈 2 中产生的互感系数：

$$M_{21} = \frac{\varphi_{21}}{I_1} = \mu n_1 n_2 l S$$



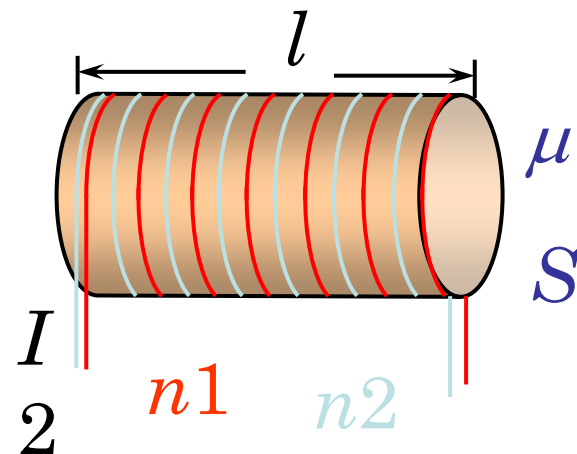
设线圈 2 中的电流为  $I_2$ , 线圈 2 在线圈 1 中产生的磁链:

$$\varphi_{12} = N_1 \phi_{m12} = l n_1 B_2 S = l n_1 \mu n_2 I_2 S$$

线圈 2 在线圈 1 中产生的互感系数:

$$M_{12} = \frac{\varphi_{12}}{I_2} = \mu n_1 n_2 l S,$$

由此可看出, 两线圈的互感系数相等。



$$M_{21} = M_{12} = M = \mu n_1 n_2 l S$$

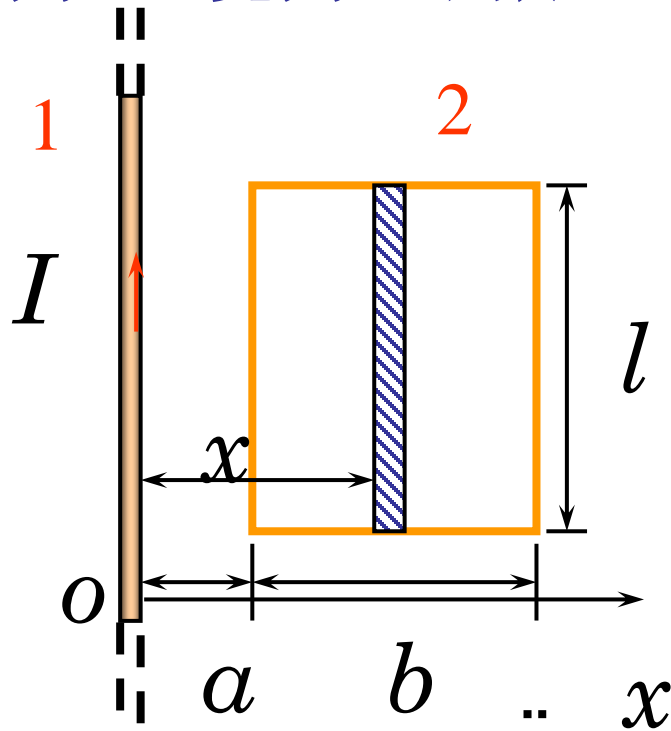
**例33:** 在长直导线旁距  $a$  放置一长为  $l$ 、宽为  $b$  的矩形导线框，求两导体的互感系数。

**解:** 设直导线中通有电流  $I$ ，  
载流直导线在矩形线圈内产生的磁通量为：

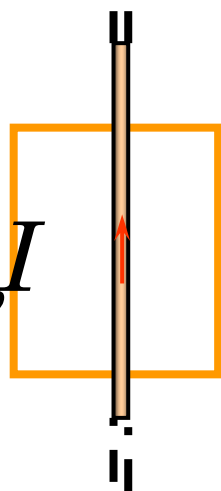
$$\begin{aligned}\phi_m &= \int \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_a^{a+b} B l dx \\ &= \int_a^{a+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l dx = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}\end{aligned}$$

**互感系数:**

$$\begin{aligned}M_{21} &= \frac{\phi_{21}}{I_1} = \frac{N\phi_m}{I} = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \ln \frac{a+b}{a}\end{aligned}$$



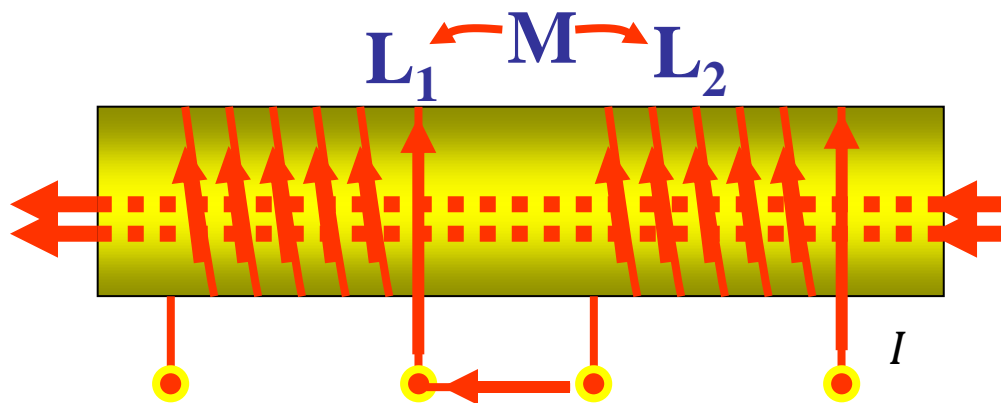
请考虑一下，  
当导线放在矩形导线框中部，  
互感系数为多大。





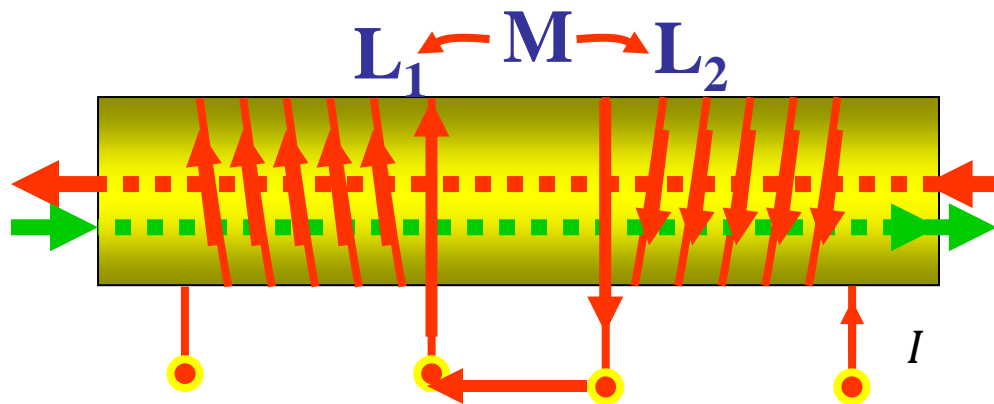
例34求自感量分别为 $L_1$ 、 $L_2$ 的两线圈串联后的总自感量。

解：1) 顺串：两个线圈中的磁场互相加强。



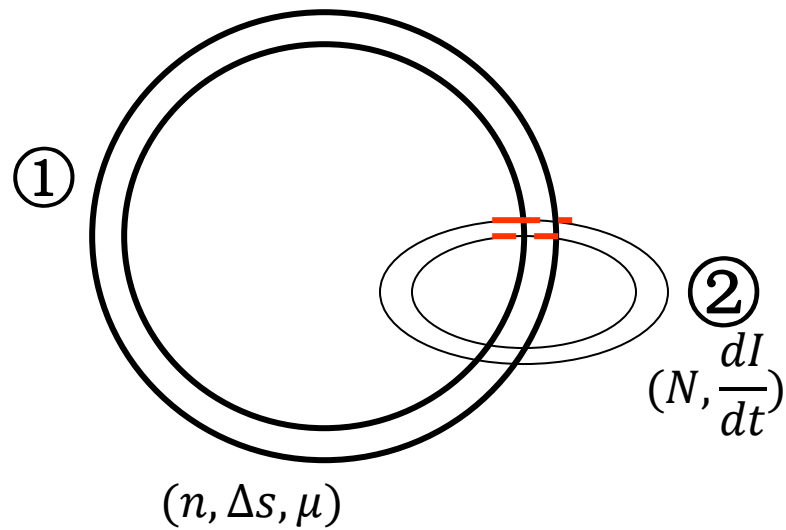
$$L_{\text{总}} = L_1 + L_2 + 2M$$

2) 反串：两个线圈中的磁场互相减弱。



$$L_{\text{总}} = L_1 + L_2 - 2M$$

例35—螺绕环①  $(n, \Delta s, \mu)$ , ②绕有 $N$ 匝线圈 $(N, \frac{dI}{dt})$ , 求螺绕环①中的 $\varepsilon_i$ 。



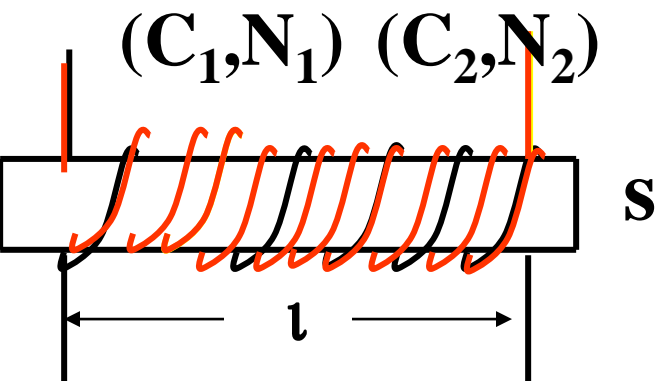
设螺绕环通电 $I_1$ ,  $B_{\text{内}} = \mu n I_1$

$$\Phi_{21} = B_{\text{内}} \Delta s = \mu n I_1 \Delta s$$

$$\begin{aligned} M_{12} = M_{21} = M &= \frac{N \Phi_{21}}{I_1} \\ &= \frac{N \mu n I_1 \Delta s}{I_1} = N \mu n \Delta s \end{aligned}$$

$$\varepsilon_i = -M \frac{dI}{dt} = -N \mu n \Delta s \frac{dI}{dt}$$

**例36 证：**互感系数 $M_{12}=M_{21}$ ，及自感系数和互感系数的关系。



$C_1, C_2$  是两个横面积为  $s$  的共轴长直螺线管，匝数分别为  $N_1, N_2$  匝，管内磁介质的磁导率为  $\mu$ 。

**证：** 设  $C_1$  中通电  $I_1$ ，

$$\rightarrow B_1 = \mu \frac{N_1}{l} I_1$$

$$\rightarrow \Phi_{21} = B_1 s = \mu \frac{N_1}{l} I_1 s \rightarrow M_{21} = \frac{N_2 \Phi_{21}}{I_1} = \mu \frac{N_1 N_2}{l} s$$

设  $C_2$  中通电  $I_2$ ,

$$\rightarrow B_2 = \mu \frac{N_2}{l} I_2$$

$$\rightarrow \Phi_{12} = B_2 s = \mu \frac{N_2}{l} I_2 s \rightarrow M_{12} = \frac{N_1 \Phi_{12}}{I_2} = \mu \frac{N_1 N_2}{l} s$$

$$\therefore M_{12} = M_{21} = M$$

(2) 自感系数与互感系数的关系:

$$L_1 : \Phi_{11} = B_1 s = \mu \frac{N_1}{l} I_1 s$$

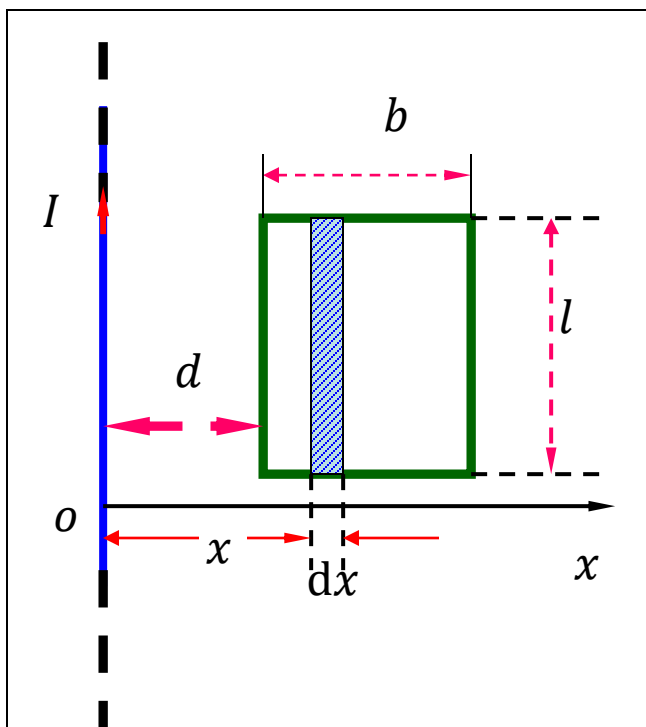
$$L_1 = \frac{N_1 \Phi_{11}}{I_1} = \mu \frac{N_1^2}{l} s$$

$$\text{同理 } L_2 = \mu \frac{N_2^2}{l} s$$

$$\therefore M^2 = L_1 L_2$$

**例37** 在磁导率为  $\mu$  的均匀无限大的磁介质中，一无限长直导线与一宽长分别为  $b$  和  $l$  的矩形线圈共面，直导线与矩形线圈的一侧平行，且相距为  $d$ 。求二者的互感系数。

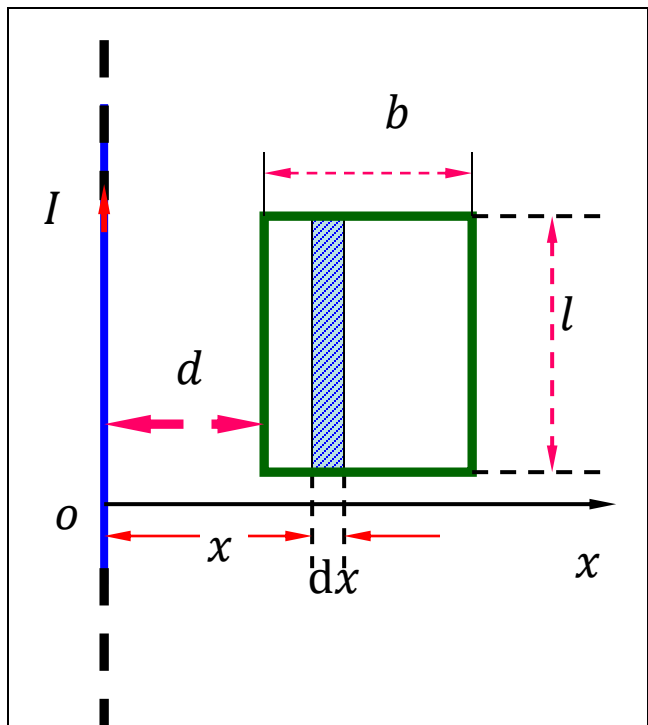
**解** 设长直导线通电流  $I$



$$B = \frac{\mu I}{2 \pi x}$$

$$d\Phi = \vec{B} \cdot d\vec{s} = \frac{\mu I}{2 \pi x} l dx$$

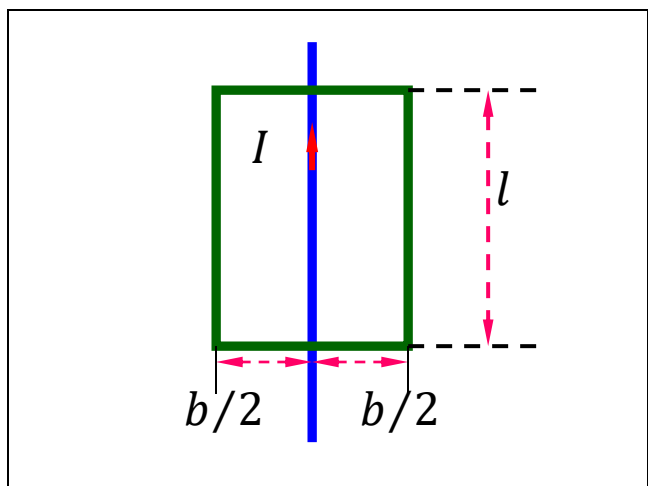
$$\Phi = \int_d^{d+b} \frac{\mu I}{2 \pi x} l dx$$



$$\Phi = \int_d^{d+b} \frac{\mu I}{2\pi x} l dx$$

$$= \frac{\mu I l}{2\pi} \ln\left(\frac{b+d}{d}\right)$$

$$M = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu l}{2\pi} \ln\left(\frac{b+d}{d}\right)$$



若导线如左图放置，根据对称性可知  $\Phi = 0$

得

$$M = 0$$

# • 计算磁场能量的步骤

(1) 求磁场分布  $\longrightarrow \vec{B}, \vec{H} \longrightarrow$  建立磁场能量密度

(2) 定体积元  $dV \longrightarrow$  遍及磁场存在的空间积分

## 讨论互感磁能

先闭合  $K_1$

$$i_1: 0 \rightarrow I_1$$

$\downarrow$

$$W_1 = \frac{1}{2} L_1 I_1^2$$

再闭合  $K_2$

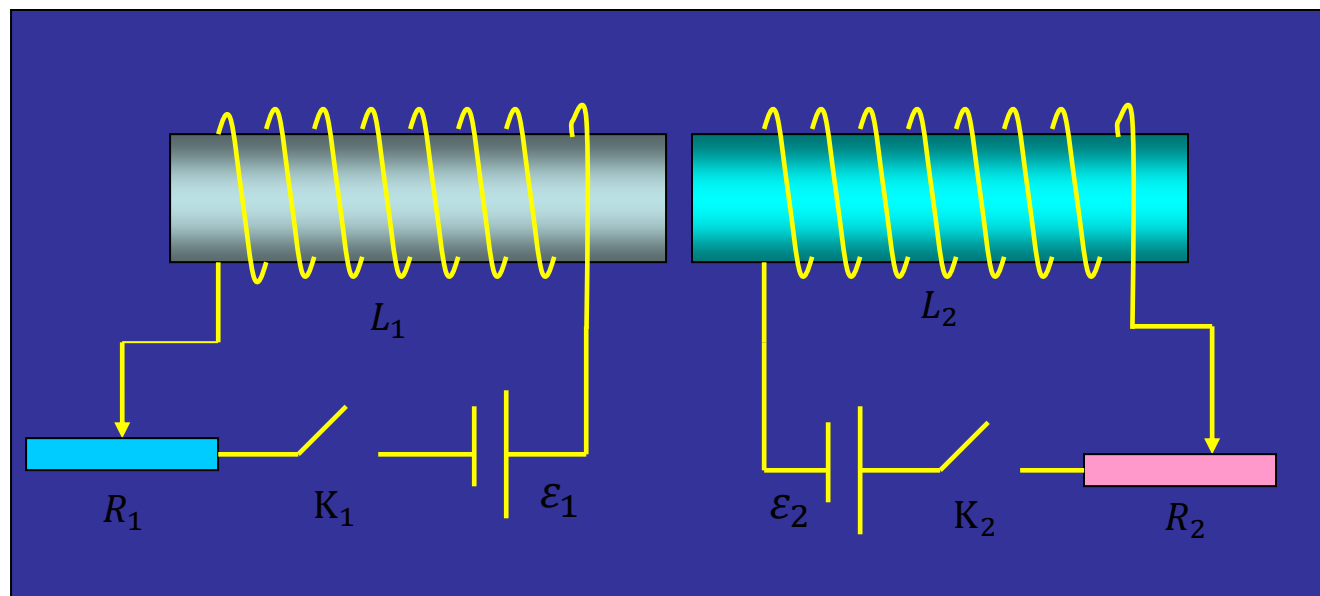
$$i_2: 0 \rightarrow I_2$$

$$W_2 = \frac{1}{2} L_2 I_2^2$$

$$W = W_1 + W_2$$



需要考虑互感的影响



当回路2电流增加时，在回路1中产生互感电动势

$$\varepsilon_{12} = -M \frac{di_2}{dt} \quad \text{将使电流 } I_1 \text{ 减小}$$

若  $I_1$  不变，电源 1 要克服互感电动势做功

$$W_{12} = - \int_0^t \varepsilon_{12} I_1 dt = \int_0^{I_2} M I_1 di_2 = M I_1 I_2 \quad (\text{互感能量})$$

总磁能

$$W = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M I_1 I_2$$

★ 注意

两载流线圈的总磁能与建立  $I_1$ ,  $I_2$  的具体步骤无关



**例38** 如图同轴电缆, 中间充以磁介质, 芯线与圆筒上的电流大小相等、方向相反. 已知 $R_1, R_2, I, \mu$ , **求**单位长度同轴电缆的磁能和自感. 设金属芯线内的磁场可略.

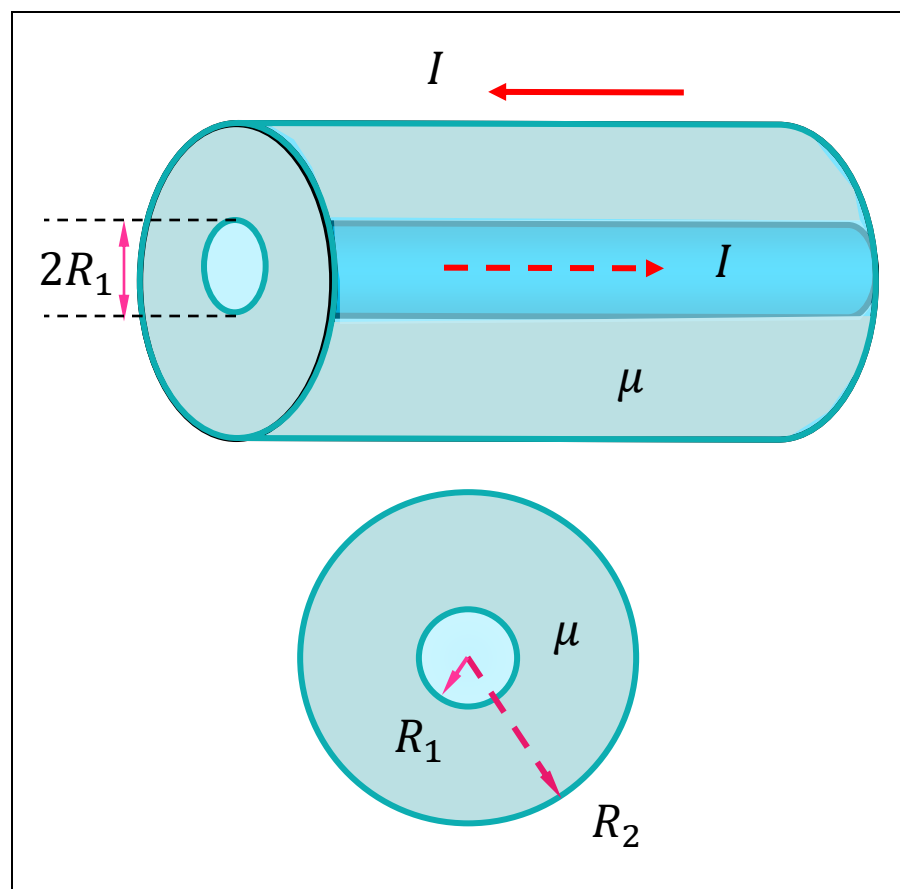
**解** 由安培环路定律可求  $B$

$$\left\{ \begin{array}{ll} r < R_1, & B = 0 \\ R_1 < r < R_2, & B = \frac{\mu I}{2\pi r} \\ r > R_2, & B = 0 \end{array} \right.$$

则

$$R_1 < r < R_2$$

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu} = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{I}{2\pi r} \right)^2$$



$$R_1 < r < R_2 \quad w_m = \frac{1}{2} \mu \left( \frac{I}{2\pi r} \right)^2 = \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2}$$

$$W_m = \int_V w_m dV = \int_V \frac{\mu I^2}{8\pi^2 r^2} dV$$

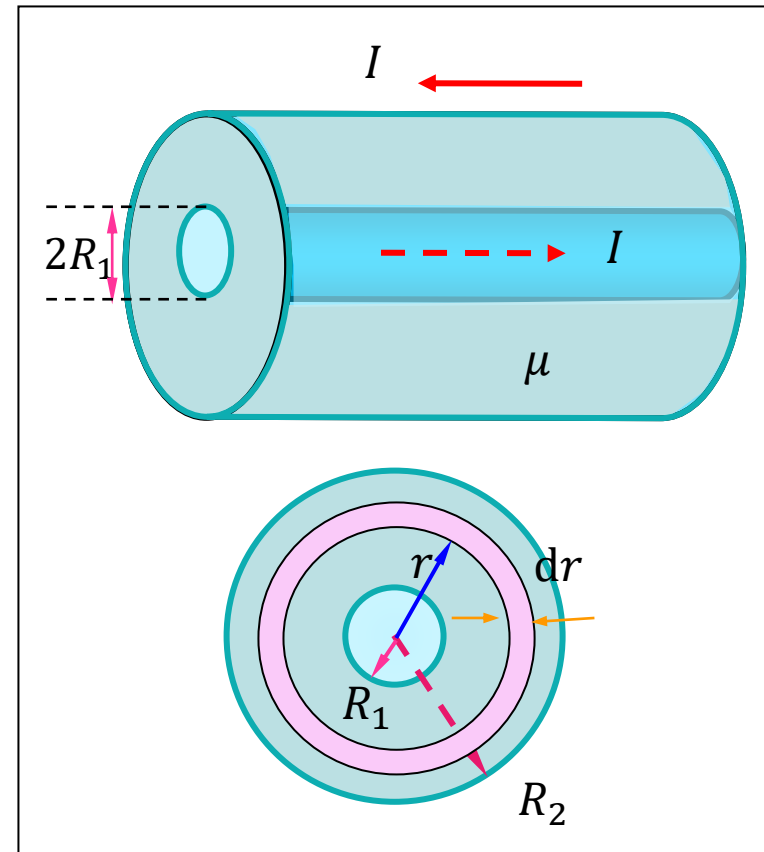
## 单位长度壳层体积

$$dV = 2\pi r dr \cdot 1$$

$$W_m = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\mu I^2}{4\pi r} dr = \frac{\mu I^2}{4\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

$$W_m = \frac{1}{2} LI^2$$

$$L = \frac{\mu}{2\pi} \ln \frac{R_2}{R_1}$$



**例39:** 计算半径为  $R$ 、无限长、通有电流  $I$ 、磁导率为  $\mu$  的均匀载流圆柱导体内长为  $l$  的区域内的磁场能量。

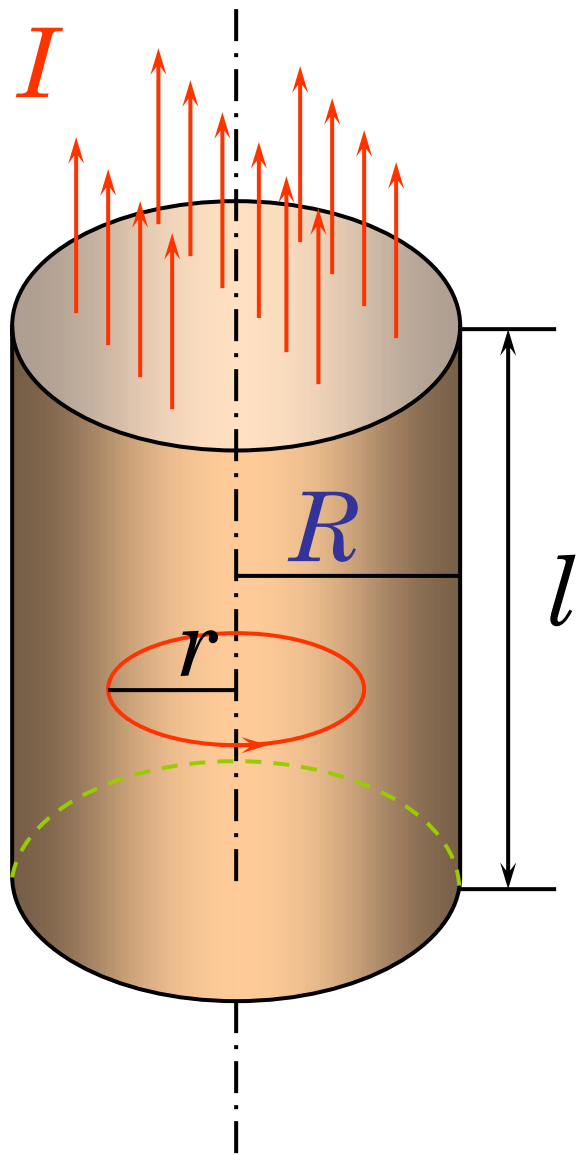
**解:** 由介质中安培环路定理确定导体内的磁感应强度  $B$ ，  
在导体内沿磁力线作半径为  $r$  的环路，

根据安培环路定理：
$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum I$$

其中：
$$\sum I = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2 = \frac{r^2}{R^2} I$$

$$\therefore H 2\pi r = \frac{r^2}{R^2} I, \quad H = \frac{I r}{2\pi R^2}$$

$$B = \mu H = \frac{\mu I r}{2\pi R^2}$$



将圆柱导体分割为无限多长为  $l$   
厚度为  $dr$  的同轴圆柱面，  
体积元处的磁场能量密度为：

$$w_m = \frac{B^2}{2\mu}$$

体积元体积为：  $dV_{\text{体}} = 2\pi r l dr$

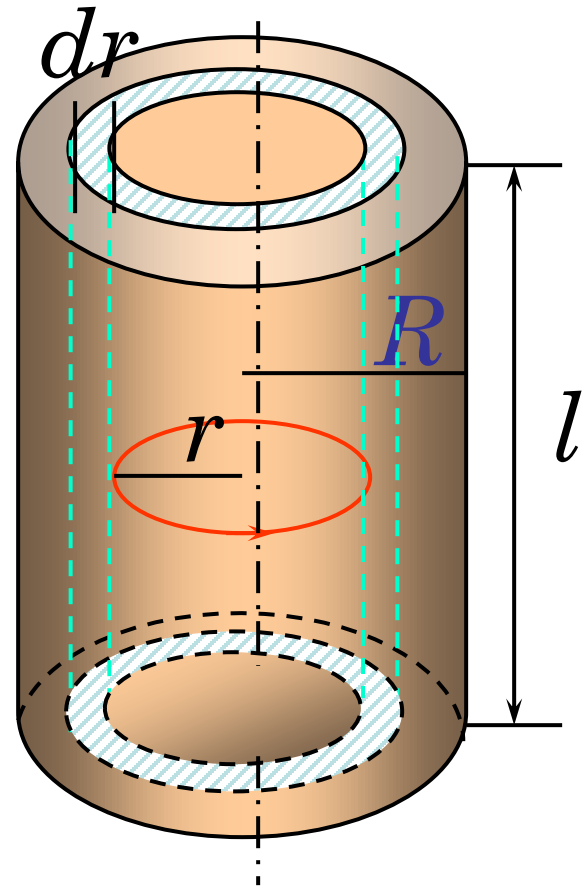
导体内的磁场能量为：

$$W_m = \int_V w_m dV_{\text{体}} = \int_0^R \frac{B^2}{2\mu} 2\pi r l dr$$

$$= \int_0^R \frac{1}{2\mu} \left( \frac{\mu I r}{2\pi R^2} \right)^2 2\pi r l dr$$

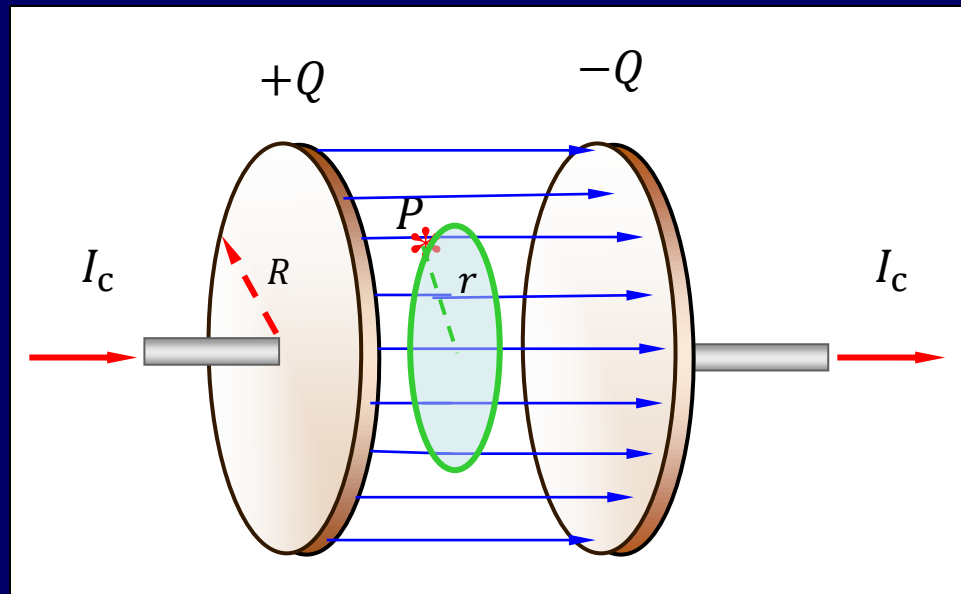
$$= \int_0^R \frac{\mu I^2 l}{4\pi R^4} r^3 dr$$

$$= \frac{\mu I^2 l}{16\pi R^4} R^4 = \frac{\mu I^2 l}{16\pi}$$



**例40** 有一半半径为 $R$ 的两块圆形平行平板电容器, 电场强度增加率  $\frac{dE}{dt}$ , 求 (1) 求两极板间的位移电流; (2) 两极板间磁场分布。

解: 
$$I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = S \frac{dD}{dt}$$
$$= \varepsilon \frac{dE}{dt} \pi R^2$$



(2) 作一半径 $r$ 为平行于极板的圆形回路为闭合回路

$$r < R, \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{d\Phi_D}{dt}$$

$$H \cdot 2\pi r = \varepsilon \pi r^2 \frac{dE}{dt}$$

$$H = \frac{r}{2} \varepsilon \frac{dE}{dt}$$

$$B = \mu H = \frac{r}{2} \varepsilon \mu \frac{dE}{dt}$$

$$r > R, \quad \oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{d\Phi_D}{dt}$$

$$H \cdot 2\pi r = \varepsilon \pi R^2 \frac{dE}{dt}$$

$$H = \frac{R^2}{2r} \varepsilon \frac{dE}{dt}$$

$$B = \mu H = \frac{R^2}{2r} \varepsilon \mu \frac{dE}{dt}$$

**例41** 有一圆形平行平板电容器,  $R = 3.0\text{cm}$  .现对其充电,使电路上的传导电流  $I_{\text{传}} = dQ/dt = 2.5\text{A}$  ,若略去边缘效应, **求** (1) 两极板间的位移电流; (2) 两极板间离开轴线的距离为  $r = 2.0\text{cm}$  的点  $P$  处的磁感强度 .

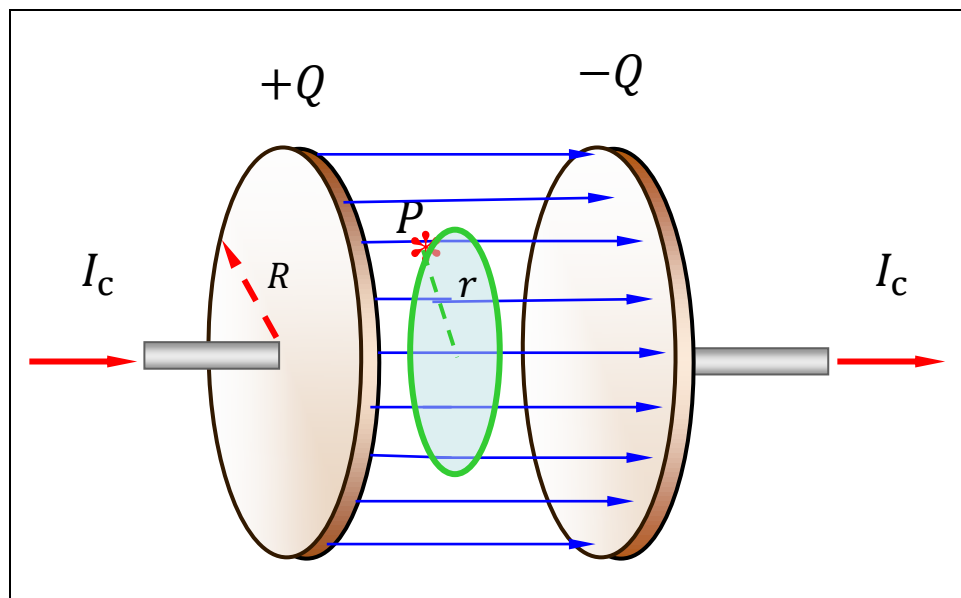
**解** 如图作一半径为  $r$  平行于极板的圆形回路, 通过此圆面积的电位移通量为

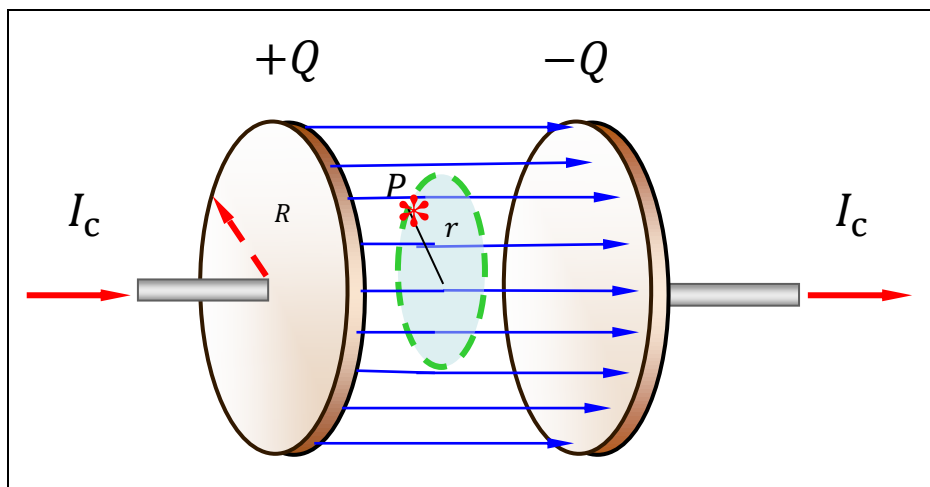
$$\Phi_D = D(\pi r^2)$$

$$\because D = \sigma$$

$$\therefore \Phi_D = \frac{r^2}{R^2} Q$$

$$I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{r^2}{R^2} \frac{dQ}{dt}$$





$$\therefore \oint_l \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{传}} + I_d = I_d$$

计算得

$$H = \frac{r}{2\pi R^2} \frac{dQ}{dt}$$

代入数据计算得

$$I_d = 1.1A$$

$$I_d = \frac{d\Phi_D}{dt} = \frac{r^2}{R^2} \frac{dQ}{dt}$$

$$\therefore H(2\pi r) = \frac{r^2}{R^2} \frac{dQ}{dt}$$

$$\therefore B = \frac{\mu_0 r}{2\pi R^2} \frac{dQ}{dt}$$

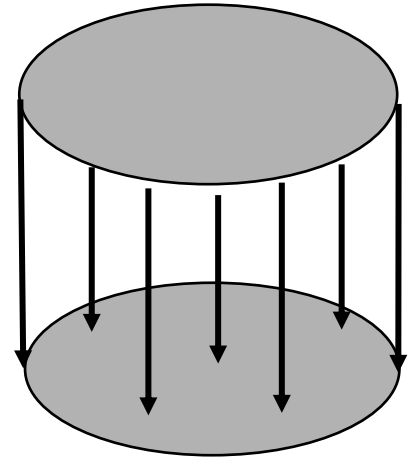
$$B = 1.11 \times 10^{-5} T$$



**例题42** 一平行板电容器的两极板都是半径为**5.0cm**的导体片，在充电时，电场的变化率为

$$\frac{dE}{dt} = 1.0 \times 10^{12} \text{V/m} \cdot \text{s}^{-1}$$

求： (1) 两板间的位移电流(忽略边缘效应)， (2) 两板边缘的磁感应强度***B***



解：(1) 如图所示，电场强度方向垂直向下，圆板的***D***的通量为

$$\Phi_D = SD = \pi R^2 \varepsilon_0 E$$

两极板间的位移电流***I<sub>D</sub>***为

$$I_D = \frac{d\Phi_D}{dt} = \pi R^2 \varepsilon_0 \frac{dE}{dt}$$

$$= \pi \times (5 \times 10^{-2})^2 \times 8.85 \times 10^{-12} \times 1 \times 10^{12}$$

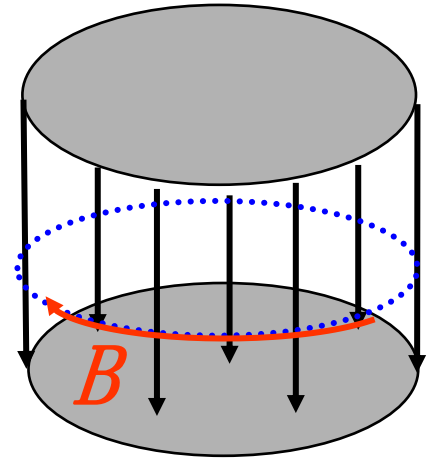
$$= 7.0 \times 10^{-2} (\text{A}) \quad \text{位移电流方向与电场方向相同}$$

由于忽略边缘效应，位移电流是对称分布的，由环路定理可得：

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H 2\pi R = I_d$$

$$H = I_d / 2\pi R$$

$$B = \mu_0 H = \mu_0 I_D / 2\pi R = 2.8 \times 10^{-7} (\text{T})$$



根据右手定则， $B$ 的方向如图所示。

**例题43** 一平行板电容器的两极板都是圆形板，面积为 $S$ ，其上的电荷随时间变化，变化率为  $q = q_m \sin \omega t$

求：(1)电容器中位移电流密度的大小。(2)设 $r$ 为电容器中一点到极板垂直轴线的距离，求该点的 $B$ 。

解：(1) 电容器中电位移矢量的大小为

$$D = \varepsilon_0 E = \varepsilon_0 \frac{\sigma}{\varepsilon_0} = q/S = \frac{q_m}{S} \sin \omega t \qquad j_D = \frac{\partial D}{\partial t} = \frac{q_m \omega}{S} \cos \omega t$$

(2) 根据环路定理得

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = H 2\pi r = \iint_S \vec{j}_D \cdot d\vec{s} = j_D \pi r^2$$

所以

$$H = \frac{j_D r}{2} = \frac{q_m \omega r}{2S} \cos \omega t$$

$$B = \mu_0 H = \frac{q_m \omega r \mu_0}{2S} \cos \omega t$$

**例题44** 如图，电荷 $q$ 以速率 $v$ 向 $O$ 点运动，距离为 $x$ ，在 $O$ 点做一半径为 $a$ 的并与 $v$ 垂直的圆，求通过圆面的位移电流和圆周上的磁感应强度。

解：设 $t$ 时刻圆面的电位移通量为：

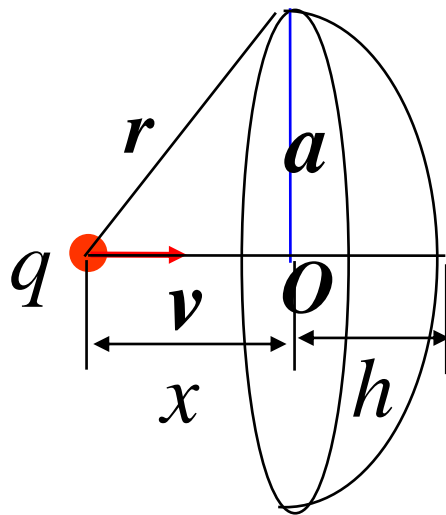
$$\Phi_D = \iint_{\text{圆面}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S}$$

为计算方便，以圆面为顶做一球冠，则穿过圆面的通量与球冠的相等，即

$$\Phi_D = \iint_{\text{冠面}} \mathbf{D} \cdot d\mathbf{S} = \frac{q}{4\pi r^2} 2\pi r h$$

$$\Phi_D = \frac{q}{2} \left( 1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \right)$$

$$I_D = \frac{d\Phi_D}{dt} = -\frac{qa^2}{2(x^2 + a^2)^{3/2}} \frac{dx}{dt} = \frac{qa^3}{2r^3} v$$



根据全电流定律有：

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot d\mathbf{l} = 2\pi r H = I_D = \frac{qa^3}{2r^3} v$$

有

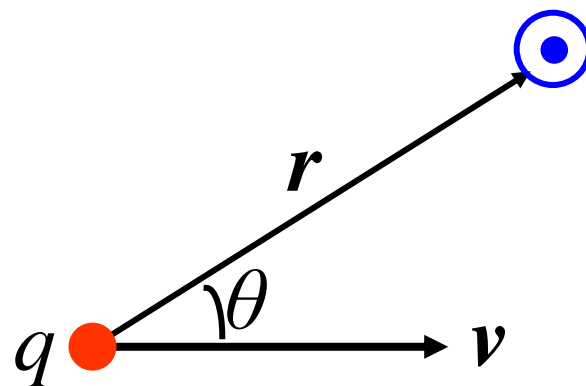
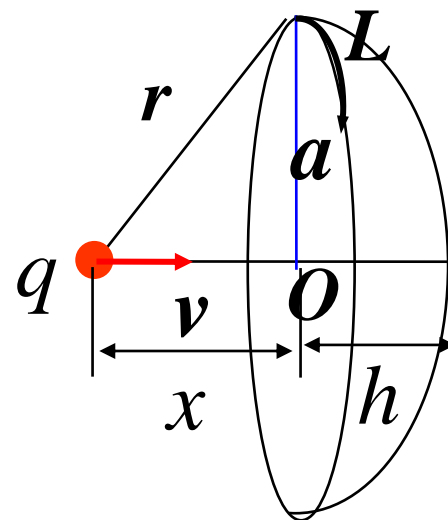
$$H = \frac{qa}{4\pi r^3} v = \frac{qvr}{4\pi r^3} \sin \theta$$

$$B = \mu_0 H = \frac{\mu_0 qvr}{4\pi r^3} \sin \theta$$

即

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

正是运动电荷产生的磁场



$$\oint_L \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi_m}{dt} \quad \text{的物理意义}$$

变化的磁场产生电场；

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{d\Phi_D}{dt} \quad \text{的物理意义}$$

变化的电场产生磁场。

**例45**、在半径为R的圆筒区域内，有方向与轴线平行的均匀磁场B，以 $B=Kt$  (K为大于零的常数)的规律增加，在圆筒内放一长为a的金属棒AB，轴线到金属棒的垂直距离 $OC=b$ ，如图所示。求：（1）金属棒中的感生电动势的大小；（2）金属棒的哪一端电势高？

$$\varepsilon = \left| -\frac{d\Phi_m}{dt} \right| = \frac{d}{dt}(Bs) = k \frac{1}{2} ab$$

**B点的电势高。**

