合肥工业大学试卷（A）

2023～2024 学年第 二 学期　课程代码 1400241B　课程名称 高等数学 B（下）　学分 4　课程性质：必修☑、选修☐、限修☐　考试形式：开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）__________　考试日期 2024 年 7 月 2 日 10：20-12：20　命题教师 《高等数学》命题组　系（所或教研室）主任审批签名__________

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $z = x^y (x>0, x\neq 1)$，则其全微分 $dz =$__________.

2. $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty \\ y\to+\infty}} (x-y)^2 e^{-(x+y)} =$__________.

3. $y' - 2y = e^x$ 的通解__________.

4. 设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^n$，则其收敛区间为__________.

5. 计算二次积分 $\int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} y^2 dy =$__________.

二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）

1. 设 $y_1 = e^x, y_2 = e^{2x}, y_3 = e^{-2x}$ 为某三阶常系数线性齐次微分方程的三个特解，则该方程为（　）.

（A）$y''' - y'' - 4y' - 4y = 0$　　（B）$y''' + y'' - 4y' - 4y = 0$

（C）$y''' - y'' + 4y' + 4y = 0$　　（D）$y''' - y'' - 4y' + 4y = 0$

2. 已知 $f(x,y) = e^{|x^2 - y^4|}$，则(　).

（A）$f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$ 都存在且均为 0　　（B）$f'_x(0,0)$ 不存在，$f'_y(0,0)$ 存在

（C）$dz|_{(0,0)} = 0$　　（D）$f'_x(0,0)$，$f'_y(0,0)$ 都不存在

3. 已知 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的某个领域内连续且 $\lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{f(x,y) - xy}{(x^2+y^2)^2} = 1$，则(　).

（A）点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极大值点　　（B）点 $(0,0)$ 是 $f(x,y)$ 的极小值点

（C）点 $(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极值点　　（D）无法判定点 $(0,0)$ 是否为 $f(x,y)$ 的极值点

4. 下列结论正确的是(　).

（A）二元初等函数在其定义域内连续.

（B）若二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续且一阶偏导均存在，则 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微.

（C）若二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处一阶偏导连续，则 $f(x,y)$ 在 (x_0, y_0) 处可微.

（D）若二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 处有 $f'_x(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0) = 1$，则 $df|_{(x_0,y_0)} = dx + dy$.

5. 以下命题正确的是（　）.

① 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛　　② 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\sin n}{n^2} - \frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ 条件收敛

③ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ 绝对收敛　　④ 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n}{2n+1}\right)^n$ 发散

（A）① ②　　（B）② ③　　（C）③ ④　　（D）① ④

三、常微分方程（本题满分 12 分）

1. 求微分方程 $yy'' + (y')^2 = 0$ 满足初始条件 $y|_{x=0} = 2, y'|_{x=0} = 1$ 的特解.

四、多元微分学及其应用（本大题共三小题，每小题 10 分，满分 30 分）

1. 设 $z = f\left((x-y)^2, x^2 y\right)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

2. 已知 $z = f(x,y)$ 是由 $\boldsymbol{e^{-xz} - 2z + e^{yz} = 0}$ 所确定的二元函数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, dz$.

3. 已知二元函数 $z = f(x,y)$ 的全微分 $dz = 2xdx - 2ydy$，并且 $f(1,1) = 2$，求 $z = f(x,y)$ 在有界闭域 $D: \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} \le 1$ 上的最大值和最小值.

五、重积分（本题满分 10 分）

1. 设区域 D 为 $y = x$ 以及 $y = x^2$ 所围区域，计算二重积分 $I = \iint\limits_D (y - x^2) \mathrm{d}\sigma$.

六、无穷级数（本大题共两小题，满分 18 分）

1. （本题满分 13 分）求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+2}}{(n+1)(n+2)}$ 的收敛域及和函数.

2. （本题满分 5 分）设 $f(x)$ 在点 $x = 0$ 的某邻域内具有二阶连续导数，且二阶导数有界，$f(0) = f'(0) = 0$，试用比较审敛法证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f(\frac{1}{n})$ 绝对收敛.