# 合肥工业大学试卷（A）



2023～2024 学年第 一 学期　课程代码 1400211B　课程名称 高等数学 A(上)　学分 6　课程性质:必修☑、选修☐、限修☐　考试形式:开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）__________　考试日期 2024 年 01 月 23 日　命题教师 高等数学课程组　系（所或教研室）主任审批签名 __________

**一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）**

1．设 $\alpha=3x-x^3,\beta=cx+x^2$，其中 $c$ 为常数，当 $x\to 0$ 时 $\beta=o(\alpha)$，$o(\alpha)$ 表示 $\alpha$ 的高阶无穷小，则 $c=$_____.

2．设函数 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{2}$ 处连续，且 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\dfrac{f(x)+1}{2x-1}=3$，则 $f'(\dfrac{1}{2})=$__________.

3．设 $y=e^x\cos x$，则 $y^{(4)}(0)=$__________.

4．函数 $y=f(x)=x^4-2x^2+2$ 在区间 $[-1,1]$ 上的最大值为__________.

5．曲线 $\begin{cases}x=\int_1^t\dfrac{\cos u}{u}\mathrm{d}u,\\ y=\int_1^t\dfrac{\sin u}{u}\mathrm{d}u,\end{cases}$ 在 $1\le t\le\dfrac{\pi}{2}$ 内的弧长 $s=$_________.

**二、选择题（每小题 3 分，共 15 分）**

1．下列说法正确的是（　　）.

（A）当 $x\to x_0$ 时，$|f(x)|$ 越来越小，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$

（B）若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right]=\infty$

（C）若 $f(x)$ 为有界函数，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\infty$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\infty$

（D）若 $f(x)$ 为有界函数，$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=0$

2．设函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续，下列命题错误的是（　　）.

（A）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$　　（B）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在，则 $f(0)=0$

（C）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在　　（D）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

3．下列曲线中有渐近线的是（　　）.

（A）$y=x+\sin x$　（B）$y=x^2+\sin x$　（C）$y=x+\sin\dfrac{1}{x}$　（D）$y=x^2+\sin\dfrac{1}{x}$

4．微分方程 $y''+y'-2y=2xe^x$ 的特解形式可设为（　　）.

（A）$y^*=(ax+b)e^x$　（B）$y^*=x(ax+b)e^x$　（C）$y^*=x^2(ax+b)e^x$　（D）$y^*=2xe^{(ax+b)}$

5．反常积分① $\int_{-\infty}^0\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$，② $\int_0^{+\infty}\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}dx$ 的敛散性为（　　）.

（A）①收敛，②收敛　（B）①收敛，②发散

（C）①发散，②收敛　（D）①发散，②发散

**三、函数和数列极限（每小题 8 分，共 16 分）**

1．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n(\dfrac{1}{n^2+1}+\dfrac{1}{n^2+2}+\cdots+\dfrac{1}{n^2+n})$.

2．求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos^2 x}^1\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t}{e^{x^2}-1}$.

**四、导数及其应用（每小题 8 分，共 24 分）**

1．问常数 $a$ 为何值时，曲线 $y=ax^2$ 与 $\ln x$ 相切？并且求该切线方程.

2．求方程 $x^2-y+1=e^y$ 所确定的函数 $y=f(x)$ 的二阶导数 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{x=0}$.

3．求曲线 $y=x+x^{\frac{5}{2}}$ 的凹凸区间及拐点.

**五、积分及其应用（每小题 8 分，共 16 分）**

1．计算定积分 $\int_{-\pi}^{\pi}(\dfrac{x\sin^2 x}{1+\cos^2 x}+x^2\cos x)\mathrm{d}x$.

2．设抛物线 $y=ax^2+bx+c$ 过原点，当 $0\le x\le 1$ 时 $y\ge 0$，已知该抛物线与 $x$ 轴及直线 $x=1$ 围成的图形面积为 $\dfrac{1}{3}$，试确定 $a,b,c$ 的值使得该平面图形绕 $x$ 轴旋转一周所形成的立体体积最小.

**六、微分方程及其应用（本题满分 8 分）**

求初值问题 $\begin{cases}y'+\dfrac{y}{x}=\dfrac{\sin x}{x},\\ y(\dfrac{\pi}{2})=0,\end{cases}$ 的解.

**七、证明题（本题满分 6 分）**

若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上有三阶导数且 $f(1)=0$，且设 $F(x)=x^3f(x)$. 证明：在区间 $(0,1)$ 上至少存在一点 $\xi$，使得 $F'''(\xi)=0$.

命题教师注意事项:1、主考教师必须于考试一周前将“试卷 A”、“试卷 B”经教研室主任审批签字后送教务科印刷。　2、请命题教师用黑色水笔工整地书写题目或用 A4 纸横式打印贴在试卷版芯中。