第九章　静电场中的导体和电介质

一　　理解静电场中导体处于静电平衡时的条件，并能从静电平衡条件来分析带电导体在静电场中的电荷分布.

二　　了解电介质的极化及其微观机理，了解电位移矢量 $\vec{D}$ 的概念，以及在各向同性介质中，$\vec{D}$ 和电场强度 $\vec{E}$ 的关系．理解电介质中的高斯定理，并会用它来计算对称电场的电场强度.

三　　理解电容的定义，并能计算几何形状简单的电容器的电容.

四　　了解静电场是电场能量的携带者，理解电场能量密度的概念，能用能量密度计算电场能量.

第九章 静电场中的导体和电介质

一、静电场中的导体：

1、静电平衡条件： $\vec{E}_{内}=0,\ \vec{E}_{表面}\perp$ 表面

或：导体为等势体，表面为等势面。

2、静电平衡时导体上的电荷分布：

（1）电荷全部分布在导体表面，导体内部各处净电荷为零。

（2）表面上各处电荷面密度与该处表面紧邻处的电场强度的大小成正比。

3、静电屏蔽：

（1）空腔导体能屏蔽外电场的作用。

（2）接地的空腔导体隔离内、外电场的影响。

二、静电场中的电介质：

1、极化的宏观效果：

（1）处于电场中的电介质，因极化使电介质的表面（或内部）出现束缚电荷。

（2）电极化强度是量度电介质极化程度物理量，

其定义为：

$$\vec{P} = \frac{\sum \vec{P_i}}{\Delta V}$$

对各向同性电介质：

$$\vec{P} = \varepsilon_0 (\varepsilon_r - 1) \vec{E}$$

（3）束缚电荷面密度：

$$\sigma' = \vec{P} \cdot \vec{n}$$

2、电位移 $\vec{D}$

（1）定义：

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

（2）对于各向同性电介质：

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \varepsilon_r \vec{E} = \varepsilon \vec{E}$$

三、有介质时的高斯定理：

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \sum_i q_{自由 i}$$

四、电介质的电容：

1、定义： $C=\dfrac{q}{V_A-V_B}$

2、常见电容器的电容：

（1）平行板电容器： $C=\dfrac{\varepsilon S}{d}$

（2）球形电容器： $C=\dfrac{4\pi\varepsilon R_A R_B}{R_B-R_A}$

（3）圆柱形电容器： $C=\dfrac{2\pi\varepsilon l}{\ln\dfrac{R_B}{R_A}}$

（4） 孤立导体： $R\to\infty,\ C=4\pi\varepsilon R$

五、静电场的能量：

1、电容器的能量：

$$W_e = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}C(V_A - V_B)^2 = \frac{1}{2}Q(V_A - V_B)$$

2、电场的能量密度：

$$w_e = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{1}{2}DE$$

3、电场的能量：

$$W_e = \int_V w_e \cdot dV = \int_V \frac{1}{2}\varepsilon E^2 dV = \int_V \frac{1}{2}DEdV$$

$V=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

练习题（二十五）

1、一导体球半径为R_1，其外同心地罩以内、外半径分别为R_2和R_3的厚导体球壳，此系统带电后内球电势为U，外球所带电量为Q，试求：(1)内球所带电量q；(2)各处的电势和电场分布（用r、q和Q等表示）。

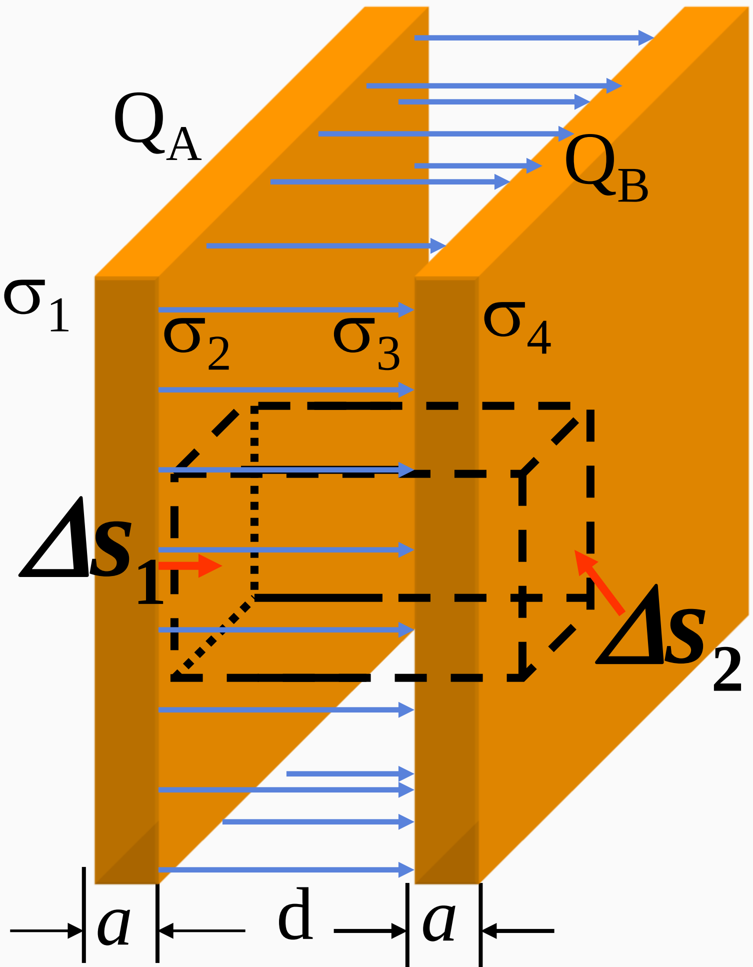
解：(1)内球带电q，则球壳内表面带电$-q$，而球壳外表面带电$Q+q$，有

$$U=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R_1}-\frac{q}{R_2}+\frac{Q+q}{R_3}\right)\Rightarrow q=\frac{4\pi\varepsilon_0 R_1R_2R_3U-R_1R_2Q}{R_2R_3-R_1R_3+R_1R_2}$$

(2)

$$\begin{cases} r<R_1, V_1=U, E_1=0; \\ R_1<r<R_2, V_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{r}+\frac{-q}{R_2}+\frac{Q+q}{R_3}\right), E_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}; \\ R_2<r<R_3, V_3=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}, E_3=0; \\ r>R_3, V_4=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r}, E_4=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}; \end{cases}$$

2、两块可视为无限大的导体平板A、B，平行放置，间距为d，板面为S。分别带电Q_A、Q_B。且均为正值。求两板各表面上的电荷面密度及两板间的电势差。



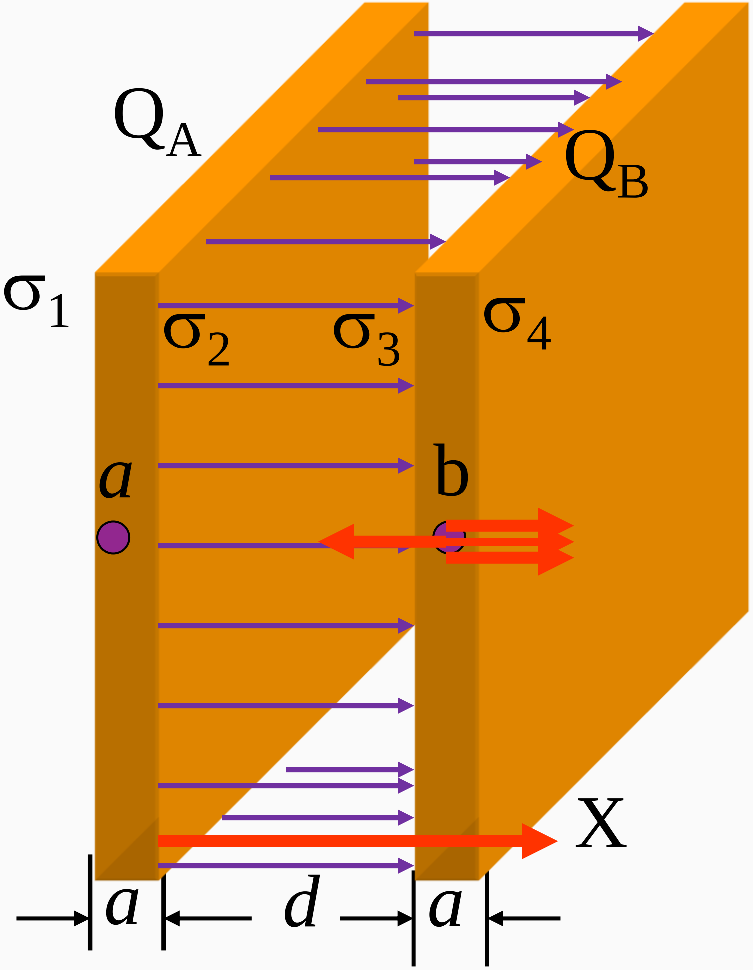
解：设四个表面电荷面密度分别为：σ_1、σ_2、σ_3、σ_4

作高斯面S'

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}\sum_{S内} q_i = 0$$

$$\sigma_2 \Delta s_1 + \sigma_3 \Delta s_2 = 0$$

$$\boxed{\sigma_2 = -\sigma_3}$$



导体内场强为零，为场中所有电荷共同叠加的结果。

$$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0$$

$$\sigma_2=-\sigma_3$$

$$\sigma_1 S+\sigma_2 S=Q_A$$

$$\sigma_3 S+\sigma_4 S=Q_B$$

电荷守恒

解以上四式得

$$\boxed{\sigma_1=\sigma_4=\frac{Q_A+Q_B}{2S}}$$

$$\boxed{\sigma_2=\frac{Q_A-Q_B}{2S}}$$

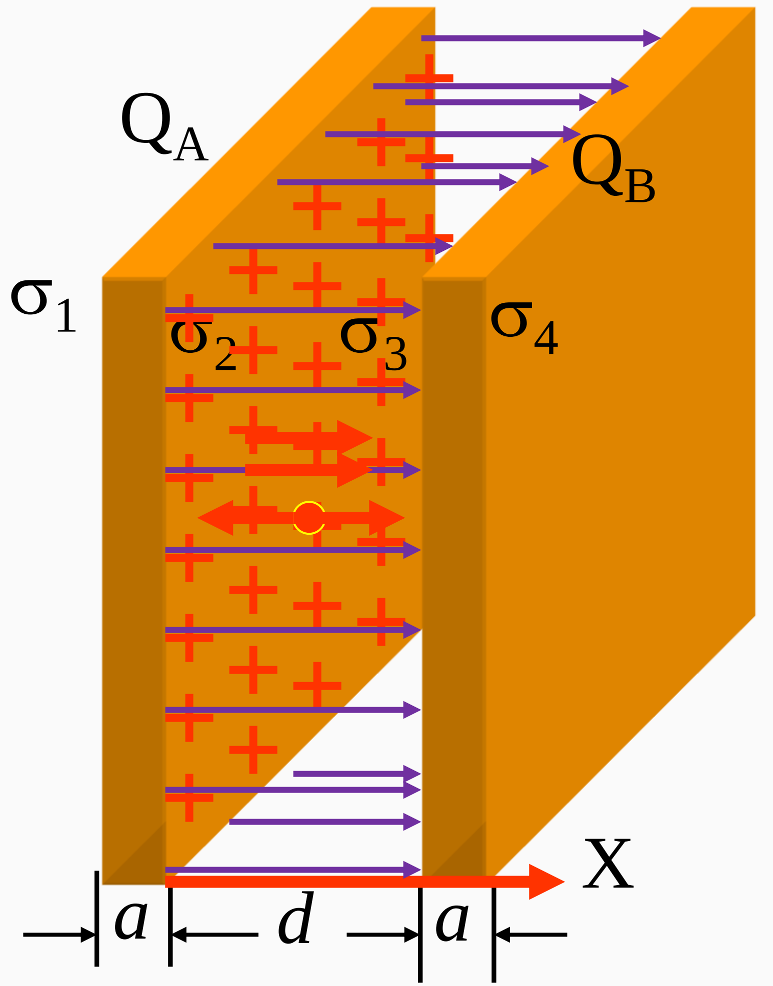
$$\boxed{\sigma_3=\frac{Q_B-Q_A}{2S}}$$

解以上四式得

$$\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{Q_A + Q_B}{2S}$$

$$\sigma_2 = \frac{Q_A - Q_B}{2S}$$

$$\sigma_3 = \frac{Q_B - Q_A}{2S}$$



电压：在AB之间

σ_1、σ_4产生的场强抵消，

σ_2、σ_3产生的场强相加，

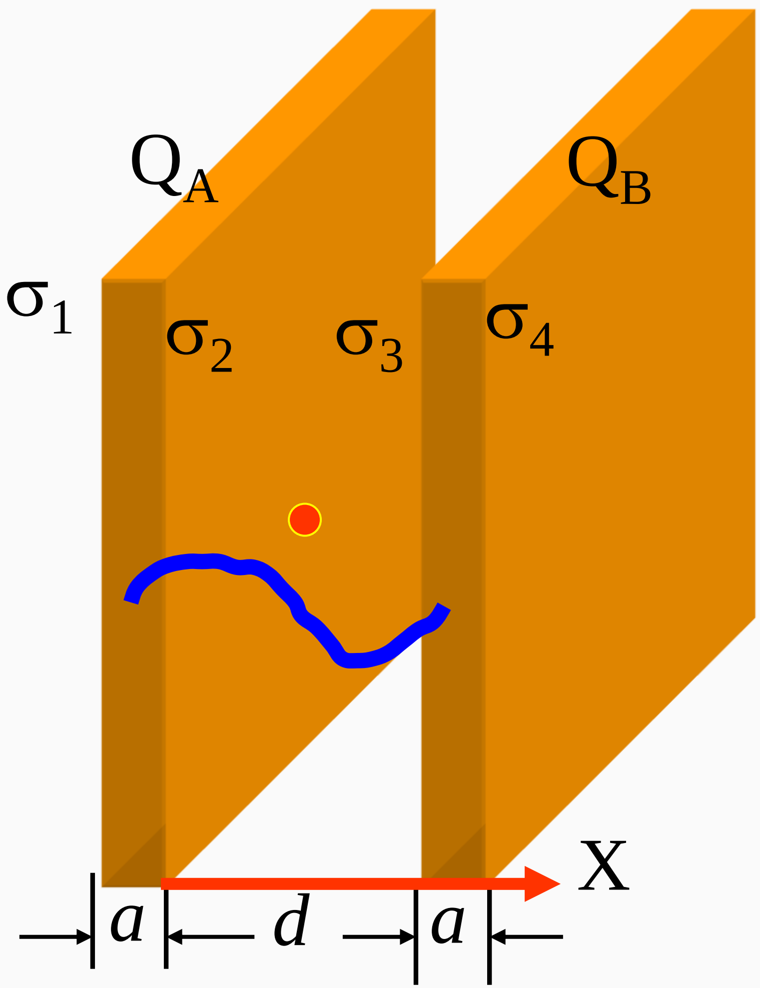
(若σ_2>0,电力线如图)

故：$U_{AB} = Ed = \dfrac{\sigma_2}{\varepsilon_0} d$

$$\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{Q_A + Q_B}{2S}$$

$$\sigma_2 = \frac{Q_A - Q_B}{2S}$$

$$\sigma_3 = \frac{Q_B - Q_A}{2S}$$



（1）若用一导线将AB两板连接起来，则电荷又如何？

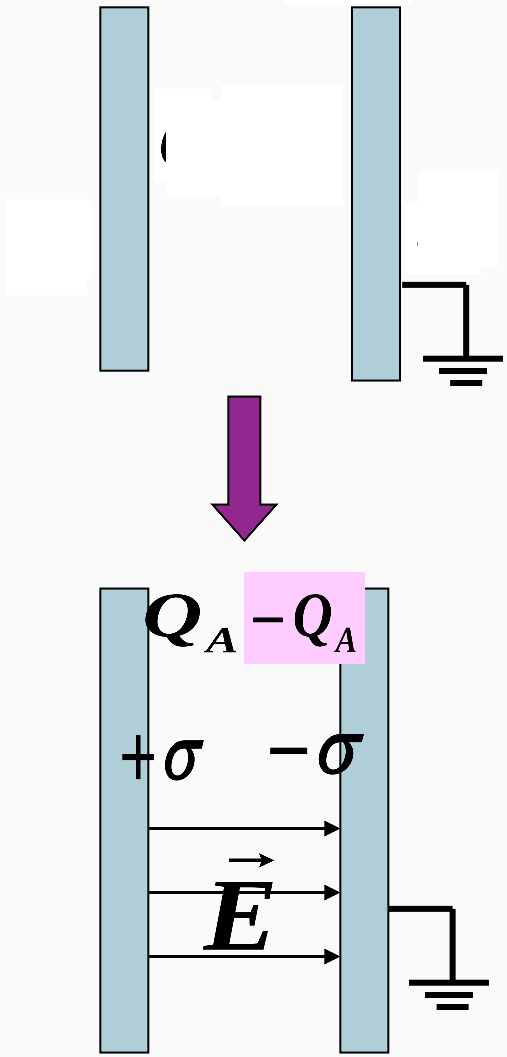
导线将AB两板连接后，AB两板成为一体，电荷重新分配，每个板分得一半，且只分布在AB两板外侧，因此

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0,$$

$$\sigma_1 = \sigma_4 = \frac{Q_A + Q_B}{2S}$$

（2）问:若B板外接地会有什么结果?

（2）



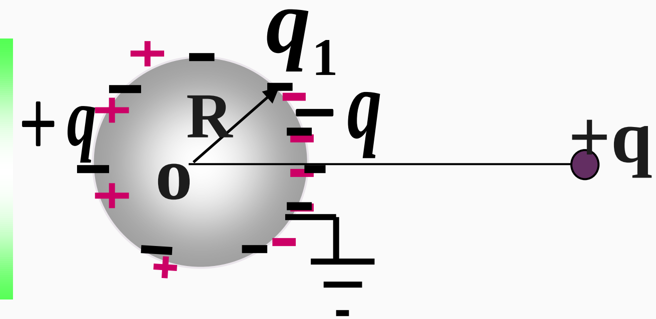
$$\rightarrow \sigma_1=\sigma_4=0,$$

$$\sigma_2=-\sigma_3=\sigma=\frac{Q_A}{S}$$

$$E=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}=\frac{Q_A}{\varepsilon_0 S}$$

$$U_{AB}=Ed=\frac{\sigma}{\varepsilon_0}d=\frac{Q_A}{\varepsilon_0 S}d$$

3、一个接地的导体球，半径为R，原来不带电。今将一点电荷q放在球外距球心的距离为r的地方，求球上的感生电荷总量。



解：接地的导体球的电势（包括球心处电势）为零，点电荷 q 在球心的电势为： $\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$

设导体球上的感生电荷总量为q'，则q'在球心的电势为： $\dfrac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R}$

由电势叠加原理可得：$$\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R}=0$$

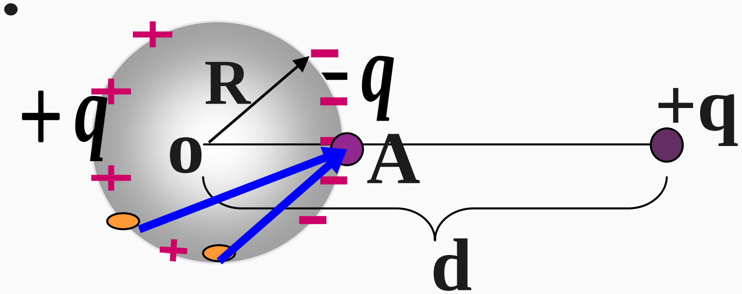
由此可得：$$q'=-\frac{R}{r}q$$

补充、一半径为R**导体球**原来不带电，将它放在点电荷$+q$的电场中，导体球中心与点电荷相距d。

（1）求导体球的电势；

（2）若导体球接地，求其上的感应电荷电量；

（3）感应电荷在球心点产生的场？



解：分析

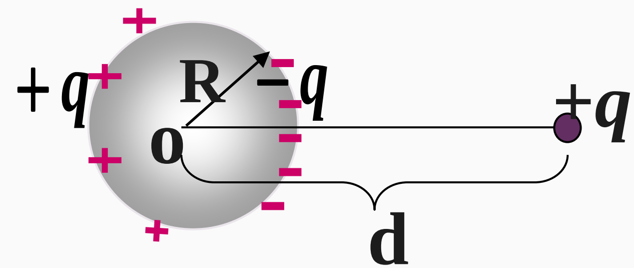
由于导体球是个等势体

$$(1)\quad \therefore U_{球} = U_0 = \frac{+q}{4\pi\varepsilon_0 d} + \underbrace{\int \frac{dq_{感应}}{4\pi\varepsilon_0 R}}_{=0} = \frac{+q}{4\pi\varepsilon_0 d}$$

问题：$U_{球} = U_0 = U_A$，$U_A = ?$

$$U_A = \underbrace{\int \frac{dq_{感应}}{4\pi\varepsilon_0 r}}_{积分困难} + \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (d-R)}$$

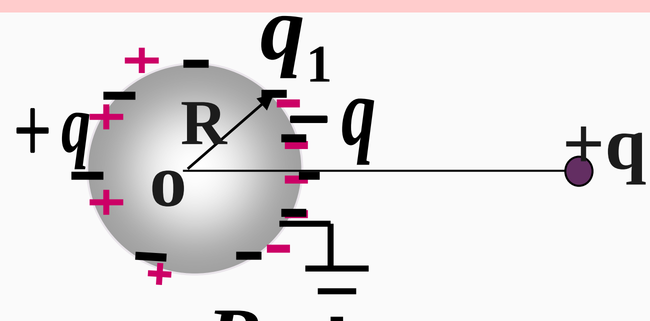
(2) 感应电荷在球心点产生的场?



分析: 静电平衡时, $E_{内}=0$

$$\vec{E}_0=0=\vec{E}_{感}+\vec{E}_q=0 \qquad \therefore E_{感}=-E_q=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 d^2} \quad 方向 0\to q$$

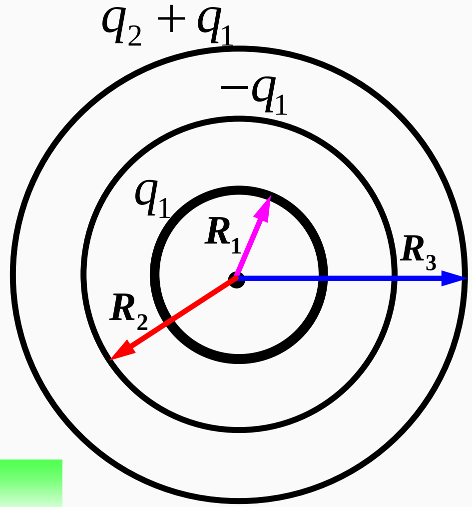
对于非孤立导体,其接地仅意味着电势为零! 接地后其上电量通常并不为零.



$$U_0=\frac{+q}{4\pi\varepsilon_0 d}+\frac{\int dq_1}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$=\frac{+q}{4\pi\varepsilon_0 d}+\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R}=0 \rightarrow q_1=-\frac{R}{d}q$$

4、两个均匀带电的金属同心球壳，内球壳半径为R_1=5.0cm，带电量q_1=0.6×10^{-8}C，外球壳内半径为R_2=7.5cm，外半径R_3=9.0cm，所带总电量q_2=-2.0×10^{-8}C。试求：(1)距离球心3.0cm、6.0cm、8.0cm、10.0cm各点处电场强度和电势；(2)若用导线把两个球壳联接起来，结果又如何？



解：(1)由高斯定理、电荷守恒定律和静电平衡条件可知（如图所示），三层表面带电量分别为q_1，$-q_1$，q_2+q_1

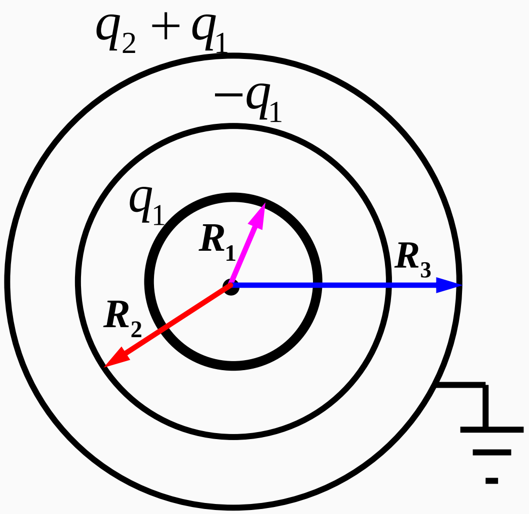
$$E=\begin{cases}0 & (0,R_1)\\ \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (R_1,R_2)\\ \dfrac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (R_3,\infty)\\ 0 & (R_2,R_3)\end{cases}$$

$$V=\begin{cases}\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q_1}{R_1}-\dfrac{q_1}{R_2}+\dfrac{q_1+q_2}{R_3}\right) & (0,R_1)\\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\dfrac{q_1}{r}-\dfrac{q_1}{R_2}+\dfrac{q_1+q_2}{R_3}\right) & (R_1,R_2)\\ \dfrac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_3} & (R_2,R_3)\\ \dfrac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r} & (R_3,\infty)\end{cases}$$

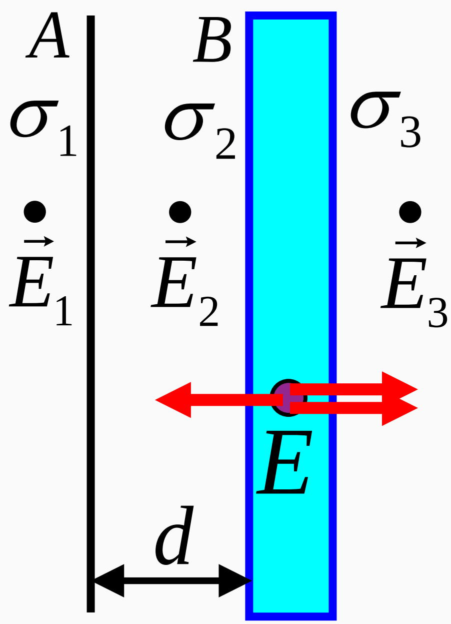
$$\begin{cases} E\big|_{r=3.0cm} = E\big|_{r=8.0cm} = 0 \\ E\big|_{r=6.0cm} = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 9\times10^9 \times \dfrac{0.60\times10^{-8}}{0.06^2} = 1.5\times10^4 (\mathrm{V/m}) \\ E\big|_{r=6.0cm} = \dfrac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = 9\times10^9 \times \dfrac{(0.60-2.00)\times10^{-8}}{0.10^2} = -1.26\times10^4 (\mathrm{V/m}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V\big|_{r=3.0cm} = 9\times10^9 \times \left(\dfrac{0.60}{0.05} - \dfrac{0.60}{0.0075} + \dfrac{0.60-2.00}{0.09}\right)\times10^{-8} = -1.04\times10^3 (\mathrm{V}) \\ E\big|_{r=6.0cm} = 9\times10^9 \times \left(\dfrac{0.60}{0.06} - \dfrac{0.60}{0.0075} + \dfrac{0.60-2.00}{0.09}\right)\times10^{-8} = -1.22\times10^3 (\mathrm{V}) \\ E\big|_{r=8.0cm} = 9\times10^9 \times \left(\dfrac{0.60-2.00}{0.09}\right)\times10^{-8} = -1.4\times10^3 (\mathrm{V}) \\ E\big|_{r=10.0cm} = 9\times10^9 \times \left(\dfrac{0.60-2.00}{0.10}\right)\times10^{-8} = -1.04\times10^3 (\mathrm{V}) \end{cases}$$

(2)
$$E\big|_{r=3.0cm}=E\big|_{r=6.0cm}=E\big|_{r=8.0cm}=0,\ E\big|_{r=10.0cm}=-1.26\times10^{4}\,(\mathrm{V/m})$$
$$V\big|_{r=3.0cm}=E\big|_{r=6.0cm}=E\big|_{r=8.0cm}=-1.40\times10^{3}\,\mathrm{V},\ V\big|_{r=10.0cm}=-1.26\times10^{3}\,\mathrm{V}$$



5、无限大不计厚度的带电介质平板A，电荷面密度为$\sigma_1(>0)$，无限大导体平板B与A板平行放置，间距为d。试求：(1)电荷面密度和各处的电场强度；(2)把B板接地，再求电荷面密度和各处的电场强度。



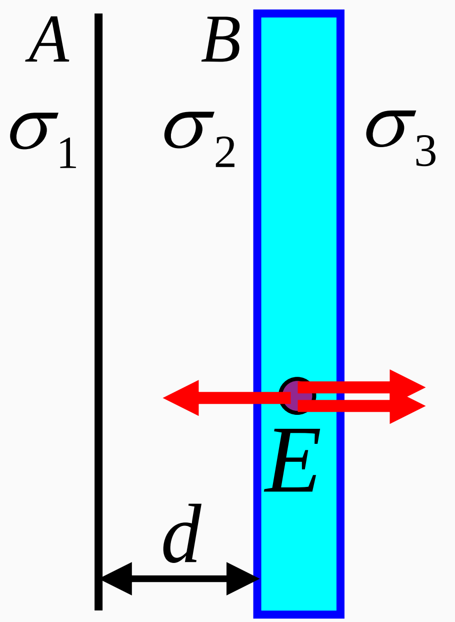
解:(1)如图所示，设各板两侧的电荷面密度分别为$\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3$，各处的电场强度：应用场强叠加原理

$$\begin{cases}\sigma_1+\sigma_2-\sigma_3=0\\ \sigma_2+\sigma_3=0\end{cases}\Rightarrow\Rightarrow\sigma_3=-\sigma_2=\frac{\sigma_1}{2}$$

$$\begin{cases}E_1=-\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}=-\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\text{—向左}\\ E_2=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\text{——向右}\\ E_2=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}\text{——向右}\end{cases}$$

（2）$\sigma_3=0,\sigma_2=-\sigma_1;E_1=E_3=0,E_2=\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}$

5、已知电荷面密度为σ_1的均匀带电的大平板 *A* 旁, 平行放置一个不带电的大导体平板 *B*, 间距为d



求:（1）电荷面密度和各处的电场强度;

(2) 把 *B* 板接地，再求电荷面密度和各处的电场强度.

解: (1)设 *B* 板两侧电荷面密度为 σ_2, σ_3

(*a*) 静电平衡条件: 导体内场强为零

$$E=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}=0\ldots\ldots(1)$$

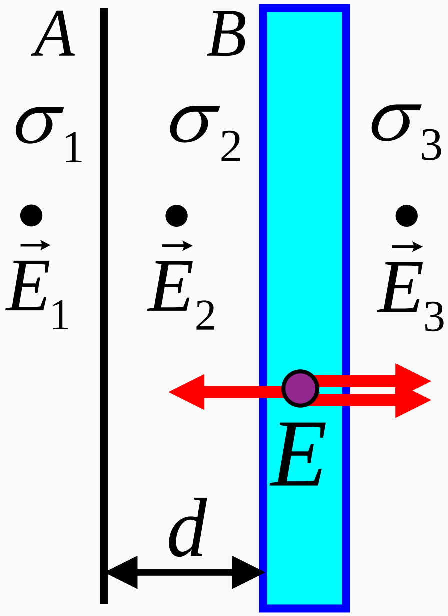
(*b*) *B* 板电荷守恒条件:

$$\sigma_2+\sigma_3=0\ldots\ldots(2)$$

联立方程(1)(2)，解得:

$$\sigma_2=-\sigma_3=-\frac{\sigma_1}{2}$$

结论: 导体内侧感应出面密度为$-\sigma_1/2$ 的负电荷, 外侧感应出等量异号正电荷.



$$\sigma_2 = -\sigma_3 = -\frac{\sigma_1}{2}$$

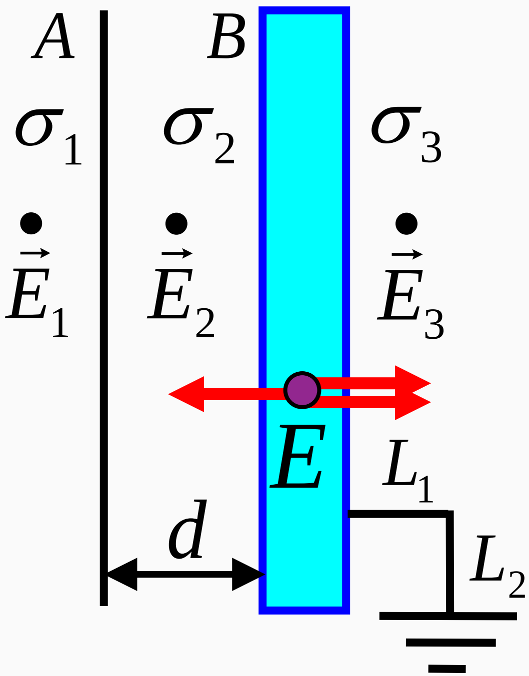
各处的电场强度: 应用场强叠加原理

$$E_1 = -\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} = -\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}$$ 向左

$$E_2 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} - \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}$$ 向右

$$E_3 = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}$$ 向右

(2) 把 B 板接地，再求电荷面密度和各处的电场强度.



B 板接地后,B 板电荷将重新分布,仍设 B 板两侧电荷面密度为 σ_2, σ_3

(a) 静电平衡条件: 导体内场强为零

$$E=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}=0 \ldots\ldots(3)$$

(b) B 板电势为零条件:

$$\varphi_B=\int_B^{\text{大地}}\vec{E}_3\cdot d\vec{r}=E_3\cdot L_1=0$$

$$\Rightarrow E_3=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}+\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}=0 \ldots\ldots(4)$$

联立方程(3)(4)，解得:

$$\sigma_2=-\sigma_1,\quad \sigma_3=0$$

B 板外表面无感应电荷, 内表面感应出与A 板等量异号电荷.

各处的电场强度:

$$E_1=-\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}=0$$

$$E_2=\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}=\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0}$$ 向右

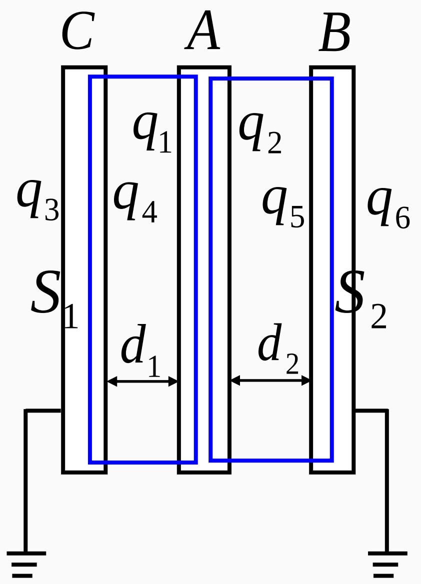
$$E_3=0$$

6、 A、B、C 是三块平行平板, 面积均为200 cm^2, A、B 相距4.0mm, A、C 相距2.0mm，B、C 两板都接地.

(1) 设 A 板带正电$3\text{x}10^{-7}$C, 不计边缘效应, 求B 板和C 板上的感应电荷, 以及 A 板的电势;

(2*) 若在AB 间充以相对介电常数$\varepsilon_r = 5$ 的均匀电介质，求 B 板和 C 板上的感应电荷, 以及 A 板的电势.

解: (1) 设各平板带电量如右图



(a) 对A 板应用静电平衡条件

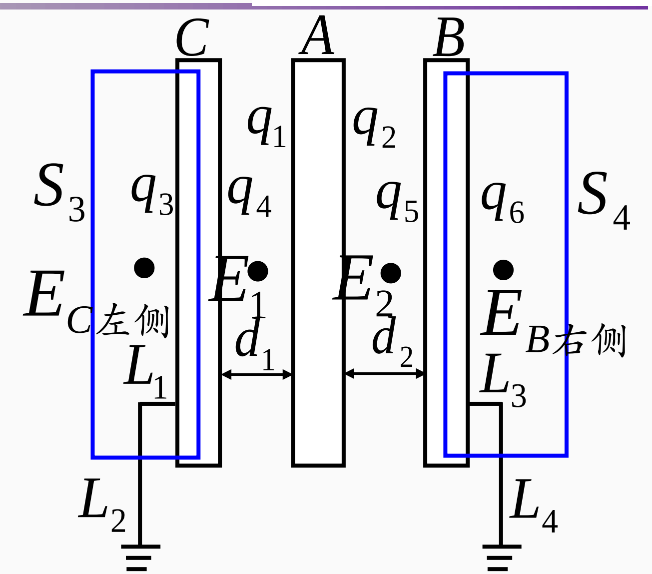
$$E_{A内} = \frac{q_3 + q_4 + q_1 - q_2 - q_5 - q_6}{2\varepsilon_0 S} = 0 \ldots (1)$$

(b) 对C 板和 B 板应用高斯定理

C 板: 作高斯面S_1, $\rightarrow q_1 + q_4 = 0 \ldots (2)$

B 板: 作高斯面S_2, $\rightarrow q_2 + q_5 = 0 \ldots (3)$

由方程 (1-3) 解得： $q_4 = -q_1$， $q_5 = -q_2$， $q_6 = q_3$



$$q_4 = -q_1,\ \ q_5 = -q_2,\ \ q_6 = q_3$$

(c) A 板电荷守恒条件：

$$q_1 + q_2 = q = 3\times10^{-7}\,\text{C}\ldots(4)$$

(d) C 板和 B 板电势为零条件：

$$\varphi_{C左侧} = E_{C左侧}\cdot L_1 = 0 \quad \therefore E_{C左侧} = -\frac{q_3}{\varepsilon_0 S} = 0$$

$$\varphi_{B右侧} = E_{B右侧}\cdot L_3 = 0 \quad \therefore E_{B右侧} = \frac{q_6}{\varepsilon_0 S} = 0 \ \Rightarrow q_3 = q_6 = 0$$

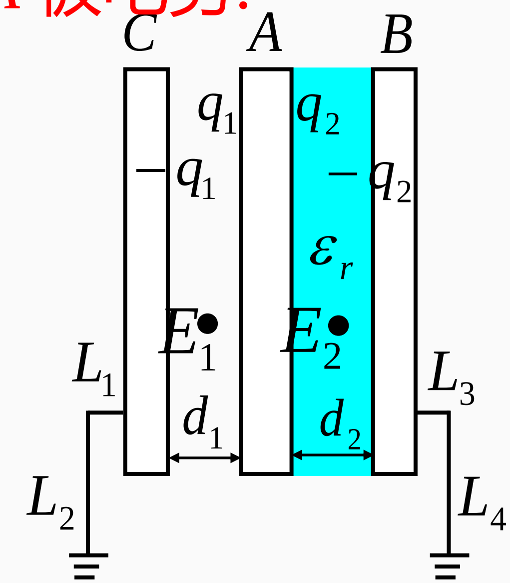
(e) $U_{AC} = U_{AB}$: 由高斯定理可得 $E_1 = \dfrac{q_4}{\varepsilon_0 S} = -\dfrac{q_1}{\varepsilon_0 S}$, $E_2 = \dfrac{q_2}{\varepsilon_0 S}$

$$U_{AC} = \int_A^C \vec{E}_1\cdot d\vec{r} = -E_1 d_1 = \frac{q_1}{\varepsilon_0 S}d_1,\ \ U_{AB} = E_2 d_2 = \frac{q_2}{\varepsilon_0 S}d_2 \ \Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{d_2}{d_1} = 2\ldots(5)$$

联立方程(4)(5)，解得: $q_1 = \dfrac{d_2}{d_1+d_2}q = \dfrac{2}{3}q = 2\times10^{-7}(\text{C})$, $q_2 = \dfrac{d_1}{d_1+d_2}q = \dfrac{q}{3} = 1.0\times10^{-7}(\text{C})$

A 板电势： $\varphi_A = U_{AC} = U_{AB} = \dfrac{q_1}{\varepsilon_0 S}d_1 = \dfrac{q_2}{\varepsilon_0 S}d_2 = 2.3\times10^{3}(\text{V})$

(2*) 在AB 间充$\varepsilon_r = 5$ 电介质, 求B、C 板电荷及A 板电势.



解: 为了简化计算, 可利用接地导体的性质, 直接取接地导体(C 板与 B 板)外侧电荷为零. 并利用高斯定理的结果, 直接将相邻金属板相对一侧的电荷取成大小相等, 符号相反.

即: 设各板带电量如图.

(a) A 板电荷守恒: $q_1 + q_2 = q = 3\times10^{-7}\text{C}$...(6)

(b) $U_{AC} = U_{AB}$. 由高斯定理可得 $E_1 = -\dfrac{q_1}{\varepsilon_0 S}$, $E_2 = \dfrac{D_2}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \dfrac{q_2}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}$

$$U_{AC} = E_1 d_1 = \frac{q_1}{\varepsilon_0 S} d_1,\quad U_{AB} = E_2 d_2 = \frac{q_2}{\varepsilon_0\varepsilon_r S} d_2 \quad\Rightarrow \frac{q_1}{q_2} = \frac{d_2}{\varepsilon_r d_1} = \frac{2}{5}\text{......(7)}$$

联立方程(6)(7), 解得: $q_1 = \dfrac{2}{7}q = 0.86\times10^{-7}(\text{C})$, $q_2 = \dfrac{5}{7}q = 2.14\times10^{-7}(\text{C})$,

A 板电势: $$\varphi_A = U_{AC} = U_{AB} = \frac{q_1}{\varepsilon_0 S} d_1 = \frac{q_2}{\varepsilon_0\varepsilon_r S} d_2 = 9.7\times10^{2}(\text{V})$$

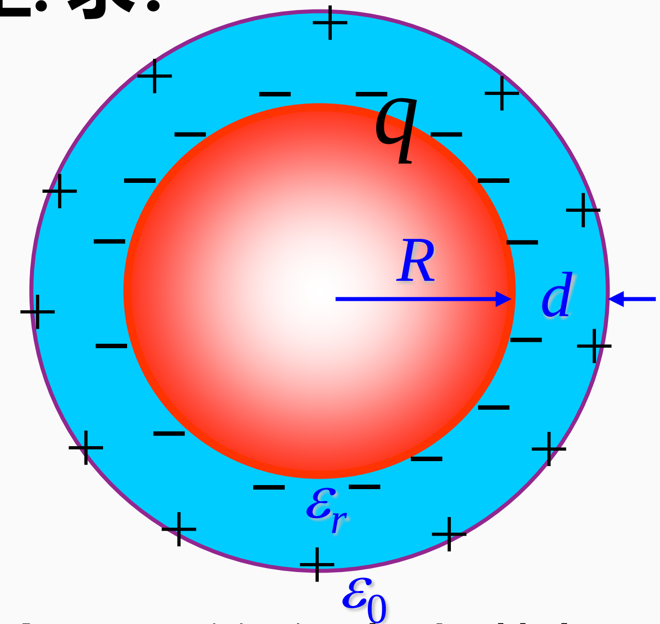
练习题（二十六）

1、导体球半径为R，带有电荷q，球外贴有一层电介质，厚度为d、相对介电系数为ε_r，其余空间为真空. 求:

(1)空间各点的电场强度分布;

(2)空间各点的电势分布;

(3)金属球的电势.



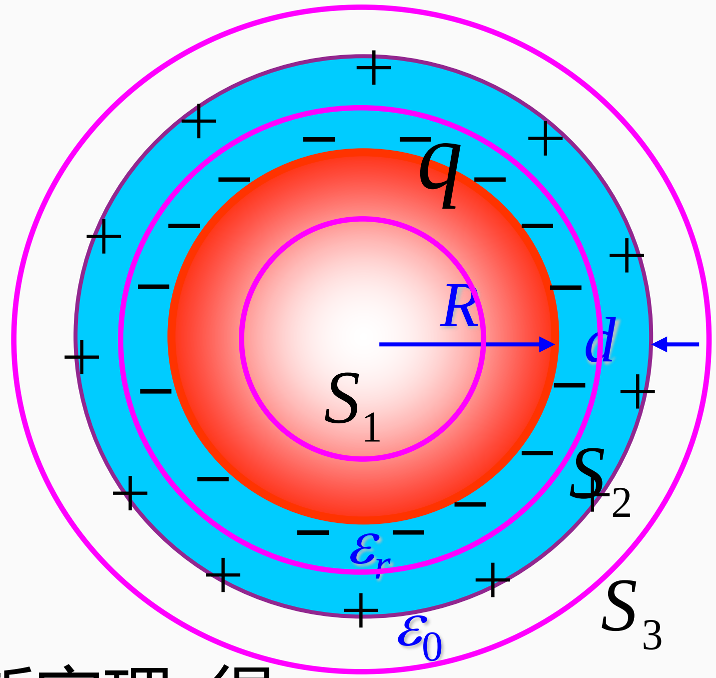
解: (1) 对称性分析

➢ 对含有电介质的体系，应先由D的高斯定理求D，再由$D=\varepsilon E$求E.

➢由于金属球和电介质都具有球对称性，金属球的自由电荷与电介质的极化电荷都将均匀分布于表面. 自由电荷+极化电荷产生的总场E也应该具有球对称性. 而各向同性电介质中，E、D和P三者成正比，因此，它们的分布都应该是球对称的.

(2) 应用介质中的高斯定理求场强

(a) $r < R$ (金属球内)



在金属球内作球形高斯面S_1, 由D的高斯定理, 得:

$$\oint_{S_1} \vec{D}\cdot d\vec{S} = D_1 \cdot 4\pi r^2 = \sum q_{0in} = 0$$

$$\therefore D_1 = 0, \qquad E_1 = D_1 / \varepsilon_0 = 0$$

(b) $R < r < R+d$ (介质中)

在介质中作球形高斯面S_2, 由D 的高斯定理, 得

$$\oint_{S_2} \vec{D}\cdot d\vec{S} = D_2 \cdot 4\pi r^2 = \sum q_{0in} = q \qquad \therefore D_2 = \frac{q}{4\pi r^2}, \quad E_2 = \frac{D_2}{\varepsilon} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$$

表达式相同! 介电常数不同!

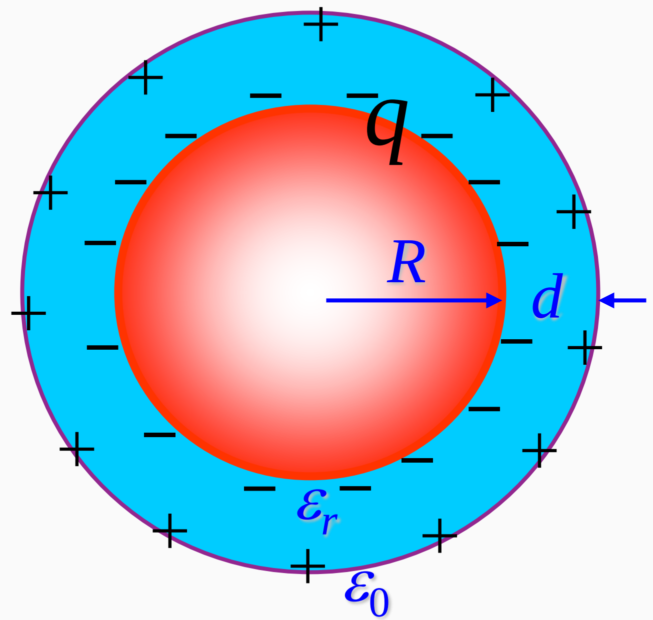
(c) $r > R+d$ (真空中)

在真空中作球形高斯面S_3, 由D 的高斯定理, 得

$$\oint_{S_3} \vec{D}\cdot d\vec{S} = D_3 \cdot 4\pi r^2 = \sum q_{0in} = q \qquad \therefore D_3 = \frac{q}{4\pi r^2}, \qquad E_3 = \frac{D_3}{\varepsilon_0} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$$E(r)=\begin{cases} 0 & (r<R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} & (R<r<R+d) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r>R+d) \end{cases}$$

方向沿径向向外.



(3) 空间各点的电势分布

由于金属球是有限大带电体，可以选无限远处为电势零点(由于场强具有球对称性, 无限大球面为等势面).

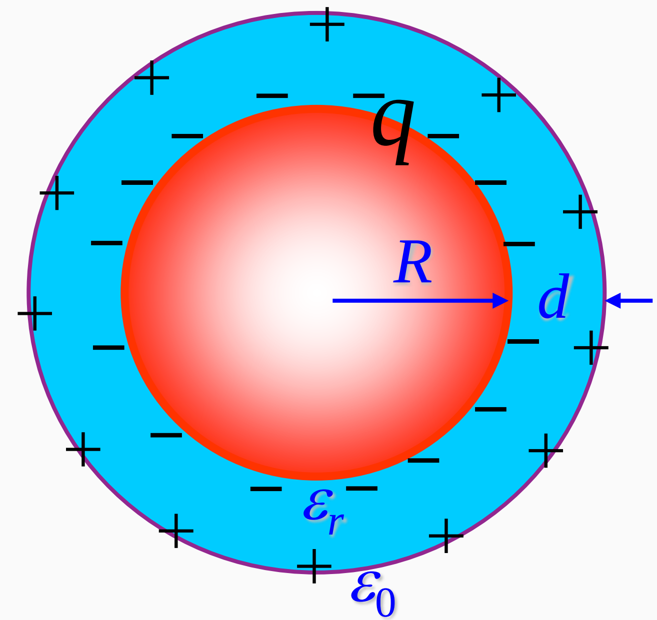
(a) $r<R$ (金属球内，为等势体)

$$\varphi(r)=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_r^{R}0\cdot dr+\int_R^{R+d}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}dr+\int_{R+d}^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R}-\frac{1}{R+d}\right)+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R+d}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{R}+\frac{\varepsilon_r-1}{R+d}\right)$$

$$E(r)=\begin{cases} 0 & (r<R) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2} & (R<r<R+d) \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r>R+d) \end{cases}$$

方向沿径向向外.



(b) $R<r<R+d$ (介质中)

$$\varphi(r)=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_r^{R+d}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}dr+\int_{R+d}^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr$$

$$=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R+d}\right)+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R+d}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{r}+\frac{\varepsilon_r-1}{R+d}\right)$$

(c) $r>R+d$ (真空中)

$$\varphi(r)=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{r}=\int_r^{\infty}\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}dr=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\varphi(r)=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\dfrac{1}{R}+\dfrac{\varepsilon_r-1}{R+d}\right)\cdots\cdots(r<R)\\[2ex]\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\dfrac{1}{r}+\dfrac{\varepsilon_r-1}{R+d}\right)\cdots\cdots(R<r<R+d)\\[2ex]\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(r>R+d)\end{cases}$$

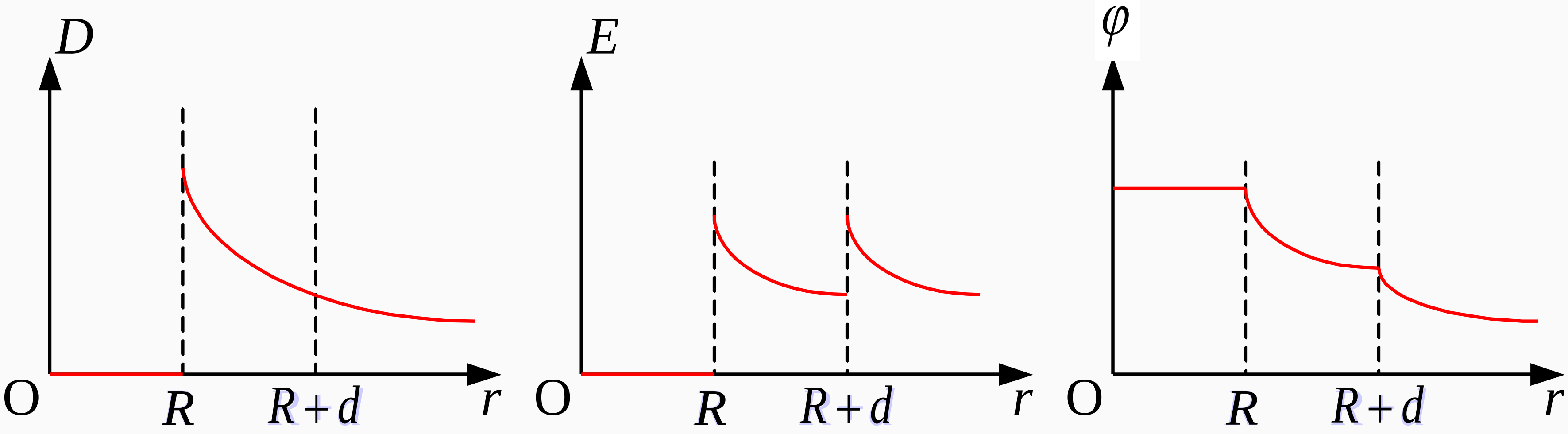


图56

2、范得格拉夫静电加速器的球形电极半径为18cm。试求：(1)这个球的电容多大？(2)为了使它电势升到2.0×10^5V，需给它带多少电量？

解：(1) $C=4\pi\varepsilon_0 R=\dfrac{18\times10^{-2}}{9\times10^{9}}=2.0\times10^{-11}\mathrm{F}=20\mathrm{pF}$

$$(2)Q=CU=2.0\times10^{-11}\times2.0\times10^{5}=4.0\times10^{-6}\mathrm{C}$$

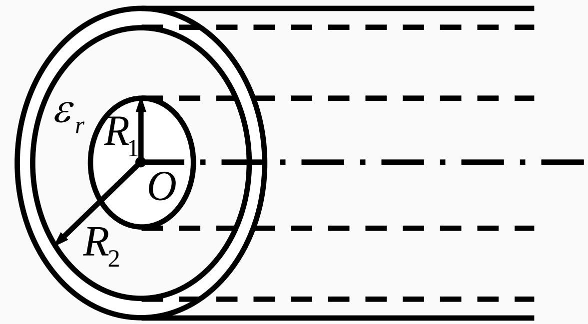
3、试分析在以下两种情况下：(1) 充电后的电容器和电源断开；(2) 电容器始终和电源相联。
空气平行板电容器中插入电介质 ε_r 时，电场强度、电势差、电容器极板上的自由电荷面密度以及电容器的电容的变化规律。

$$C=\frac{\varepsilon S}{d}$$

解:(1) q不变、C增加，$\Rightarrow \quad U=\frac{q}{C}\downarrow, \quad E=\frac{U}{d}\downarrow, \quad W=\frac{q^2}{2C}\downarrow$

(2) q不变、C增加，$\Rightarrow \quad q=CU\uparrow, \quad E=\frac{U}{d}\text{不变}, \quad W=\frac{C}{2}U^2\uparrow$

4、同轴传输线由很长的中心导体圆柱和外层同轴导体圆筒组成，圆柱和圆筒之间充以相对介电常数为ε_r的电介质。设内圆柱体的电势为V_1，半径为R_1，外圆柱筒的电势为V_2，内半径为R_2。求其间离轴为r（$R_1 < r < R_2$）处的电势（选轴线处电势为零）。



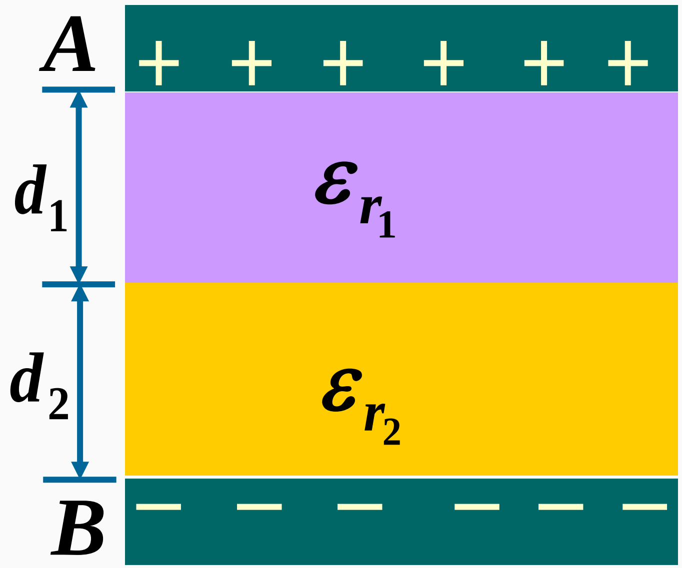
解:设圆柱单位长度带电，则 $E_r = \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}$

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E_r dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \lambda = \frac{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}(V_1 - V_2)$$

轴线处电势为零，即R_1处电势为零，

$$V_r = \int_r^{R_1} E_r dr = \int_r^{R_1}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r}dr = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\ln\frac{R_1}{r} = -\frac{V_1 - V_2}{\ln\dfrac{R_2}{R}}\ln\frac{r}{R_1}$$

5、一平行板电容器面积为S，板间距离为d，板间以两层厚度相同而相对介电常量分别为ε_{r1}和ε_{r2}的电介质充满（如图所示）。求此电容器的电容。



解: $$C_1=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r1}S}{d_1},\quad C_2=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_{r2}S}{d_2}$$

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=\frac{1}{\varepsilon_0 S}\left(\frac{d_1}{\varepsilon_{r1}}+\frac{d_2}{\varepsilon_{r2}}\right)=\frac{d\left(\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2}\right)}{2\varepsilon_0 S\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}$$

$$C=\frac{2\varepsilon_0 S\varepsilon_{r1}\varepsilon_{r2}}{d\left(\varepsilon_{r1}+\varepsilon_{r2}\right)}$$

6、C_1、C_2两个电容器，分别标明为200 pF、500V和300 pF、900V，试求：（1） 把它们串联起来后，等值电容多大？(2) 如果两端加上1000 V的电压，是否会击穿？

解:(1) $$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=\frac{1}{200}+\frac{1}{300}=\frac{5}{600}\Rightarrow\Rightarrow C=120(\text{pF})$$

(2) $$U=U_1+U_2=\frac{q}{C}\Rightarrow q=CU=120\times10^{-12}\times1000=1.20\times10^{-7}(\text{C})$$

$$U_1=\frac{CU}{C_1}=\frac{120\times1000}{200}=600(\text{V});U_2=\frac{CU}{C_2}=\frac{120\times1000}{300}=400(\text{V})$$

结论：$U_1=600\text{V}>500\text{V}$，$C_1$击穿称为导体;
$U_2=400\text{V}<900\text{V}$，但$C_1$击穿后,1000V将全部加到$C_2$上，则$C_2$击穿;

练习题（二十七）

1、一个电容器，电容为C_1=20.0μF，用电压V_0=1000V的电源使这电容器带电，然后拆下电源，使其与另一个未充电的C_2=5.0μF的电容器相并联后，试求：(1) 两个电容器各带电多少？(2) 第一个电容器两端的电势差？(3) 系统能量损失多少？

解: (1) $Q = C_1V_0 = q_1 + q_2 = 20\times10^{-6}\times1000 = 2.0\times10^{-2}\ (C)$

$$V_1 = V_2 \quad\Rightarrow\quad \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2} \quad\Rightarrow\quad \frac{q_1}{q_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{20}{5} = 4$$

$$\begin{cases} q_1 = \dfrac{4}{5}Q = \dfrac{4}{5}\times2.0\times10^{-2} = 1.6\times10^{-2}\ (C) \\ q_2 = \dfrac{1}{5}Q = \dfrac{1}{5}\times2.0\times10^{-2} = 4.0\times10^{-3}\ (C) \end{cases}$$

(2) $$U_1 = U_2 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{1.6\times10^{-2}}{20.0\times10^{-6}} = 8.0\times10^{2}\ (V)$$

1、一个电容器，电容为$C_1=20.0\mu F$，用电压$V_0=1000V$的电源使这电容器带电，然后拆下电源，使其与另一个未充电的$C_2=5.0\mu F$的电容器相并联后，试求：(1) 两个电容器各带电多少？(2) 第一个电容器两端的电势差？(3) 系统能量损失多少？

(3) $$W_0=\frac{1}{2}C_1V_0^2=\frac{1}{2}\times 20.0\times 10^{-6}\times 1000^2=10\,(J)$$

$$W_1=\frac{1}{2}C_1U_1^2=\frac{1}{2}\times 20.0\times 10^{-6}\times 800^2=6.4\,(J)$$

$$W_2=\frac{1}{2}C_2U_2^2=\frac{1}{2}\times 5.0\times 10^{-6}\times 800^2=1.6\,(J)$$

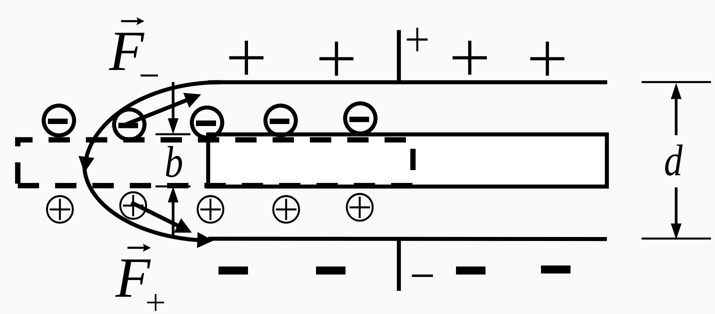
$$\Delta W=W_0-W_1-W_2=10-6.4-1.6=2.0\,(J)$$

2、如图所示, 一个平行板电容器, 板面积为S, 板间距为d.

(1) 充电后保持其电量Q不变, 将一块厚为 b 的金属板平行于两极板插入. 与金属板插入前相比, 电容器储能增加多少?

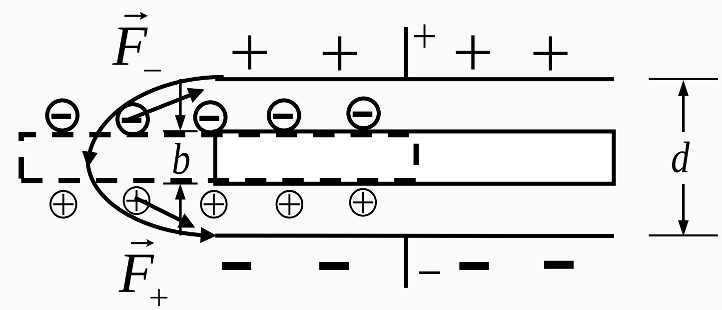
(2) 导体板进入时, 外力(非电力) 对它做功多少? 是被吸入, 还是需要推入? (3) 如果充电后保持电容器的电压 U 不变, 则(1)、(2) 两问结果又如何?

解: 金属板放入电容器时, 由于电容器存在**边缘效应**, 电场有**横向分量**, 此电场与金属板的**感应电荷**相互作用, 将金属板**吸入**. 下面计算中, 仍采用理想模型, 忽略电容器的边缘效应.



金属板的感应电荷受力$\vec{F}_+ + \vec{F}_-$水平向右

(1) 充电后, 保持电容器电量 Q 不变, 求电容器储能的增量.



此时，电容器与电源是断开的.

$\vec{F}_+ + \vec{F}_-$ 水平向右

金属板插入前, $C_0 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$

金属板插入后, $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d-b}$

电容器储能的增量 $\Delta W = \dfrac{Q^2}{2C} - \dfrac{Q^2}{2C_0} = \dfrac{Q^2}{2}\left(\dfrac{d-b}{\varepsilon_0 S} - \dfrac{d}{\varepsilon_0 S}\right) = -\dfrac{Q^2 b}{2\varepsilon_0 S} < 0$

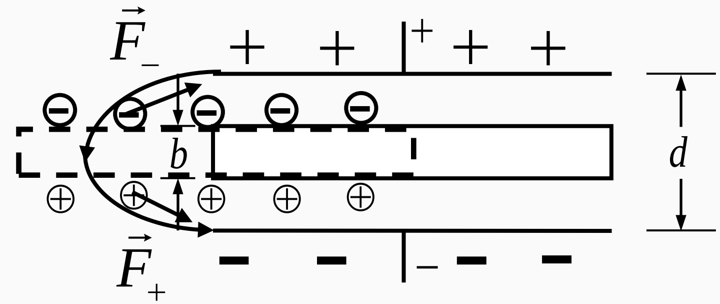
(2) 导体板进入时, 外力(非电力) 对它做功多少? 是被吸入, 还是需要推入?

根据功能原理，**外力做的功**等于电容器储能的增量:

$$A_{外} = \Delta W = -\frac{Q^2 b}{2\varepsilon_0 S} < 0$$

外力做负功，即电容器消耗能量克服外力做功, 金属板将**被吸入.**

(3)如果充电后保持电容器电压 U 不变，则(1)、(2) 两问结果又如何?



为了维持电压不变，**电容器必需与电源相连**，在金属板插入时，给电容器充电.

$$\Delta q = (C - C_0)U$$

$\vec{F}_+ + \vec{F}_-$ 水平向右

电容器储能的增量

$$\Delta W' = \frac{1}{2}CU^2 - \frac{1}{2}C_0U^2 = \frac{1}{2}(C - C_0)U^2$$

$$= \frac{1}{2}U^2 \cdot \varepsilon_0 S\left(\frac{1}{d-b} - \frac{1}{d}\right) = \frac{\varepsilon_0 U^2 Sb}{2d(d-b)} > 0$$

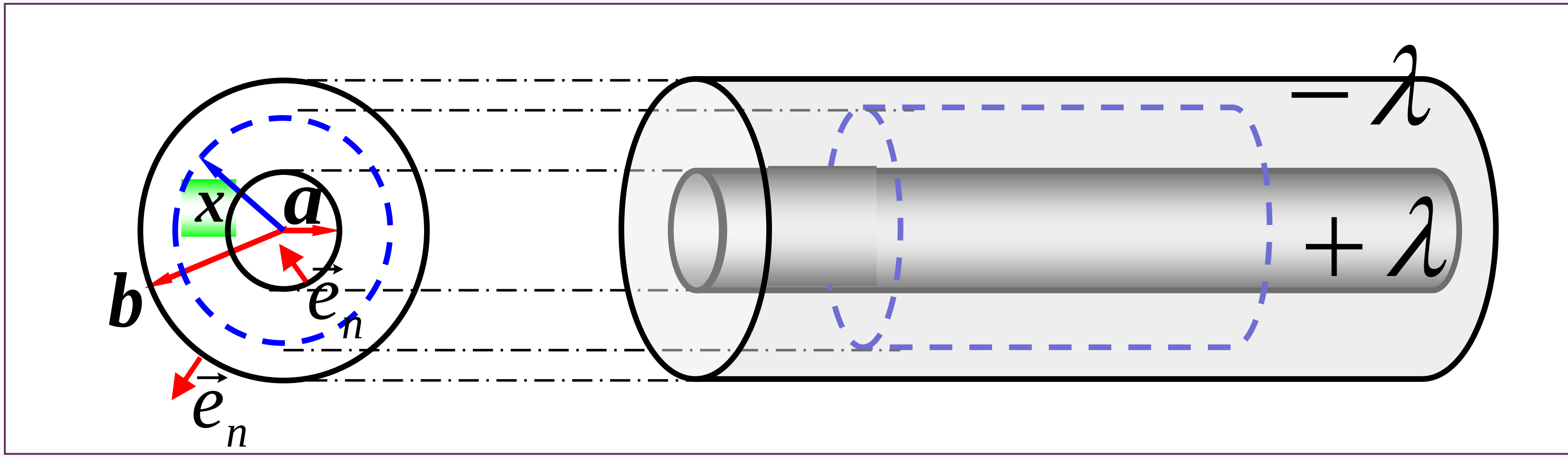
根据功能原理，**电源和外力的总功**等于电容器储能的增量：

$$A_{电源} + A_{外} = \Delta W' \qquad \therefore A_{外} = \Delta W' - A_{电源}$$

$$A_{电源} = \int_0^{\Delta q} U dq = U\Delta q = (C - C_0)U^2 = 2\Delta W'$$

$$\therefore A_{外} = \Delta W' - A_{电源} = -\Delta W' = -\frac{\varepsilon_0 U^2 Sb}{2d(d-b)} < 0$$

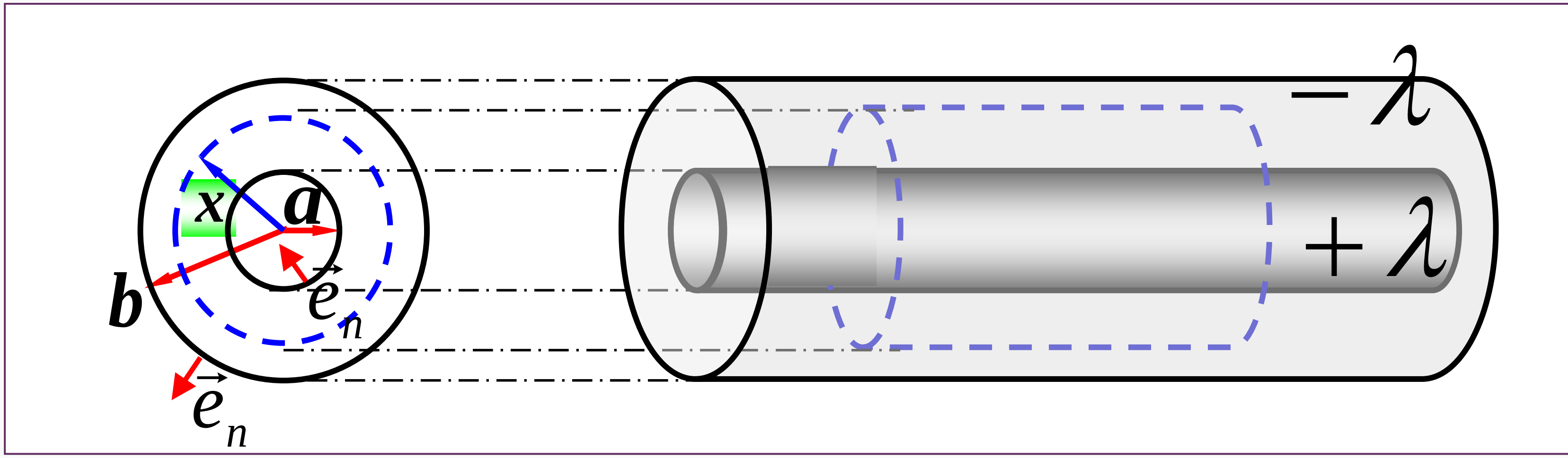
外力仍然做负功，金属板**被吸入**. 电源所做的功，一部分给电容器充电，另一部分用来克服外力做功.



3、圆柱形电容器由一长直导线和套在它外面的共轴导体圆筒构成，设长直导线的半径为a，圆筒的内半径为b，试证明：该电容器带电时，所储存的能量有一半是在半径$x=\sqrt{ab}$的圆柱体内。（式中x是两极间任一点距中心轴线的垂直距离，且 $a< x< b$）。

解:电容器单位长度带电如图所示，则 $E_x=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}$

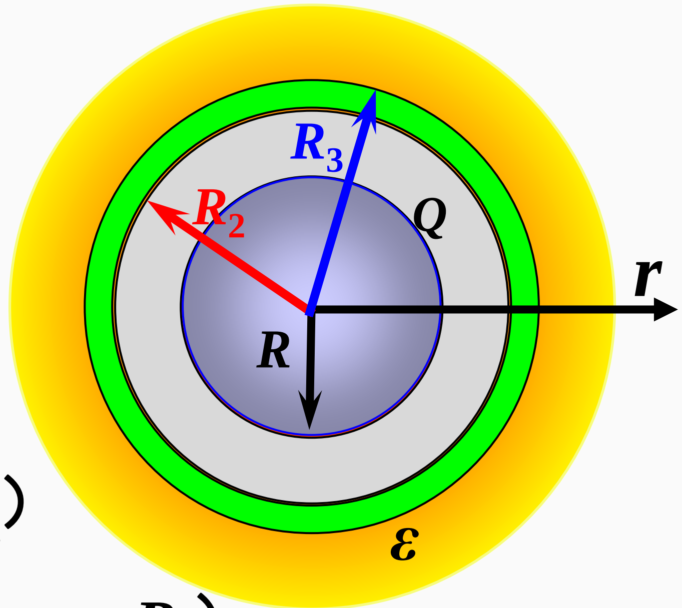
$$W=\int_a^b wdV=\int_a^b\frac{\varepsilon_0}{2}E^2dV=\int_a^b\frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\right)^2 2\pi xldx=\frac{\lambda^2 l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$



$$W\Big|_a^x = \int_a^x w\mathrm{d}V = \int_a^x \frac{\varepsilon_0}{2}E^2\mathrm{d}V = \int_a^x \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 x}\right)^2 \cdot 2\pi x l\mathrm{d}x = \frac{\lambda^2 l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{x}{a}$$

$$W\Big|_a^x = \frac{W}{2} \Rightarrow \frac{\lambda^2 l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{x}{a} = \frac{1}{2}\frac{\lambda^2 l}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a} \Rightarrow \left(\frac{x}{a}\right)^2 = \frac{b}{a} \Rightarrow x = \sqrt{ab}$$

4、一半径为 R_1 的的导体球外套有一个与它同心的导体球壳，球壳内、外半径分别为 R_2 和R_3，内球与球壳间是空气，球壳外是介电常数为 ε 的无限大均匀电介质，当内球带电量为 C 时，试求：(1)这个系统储存了多少电能？(2)如果用导线把内球与球壳联在一起，上述答案有何变化？能量变化到那里去了？



解：(1)设内球上带有+Q电量，由于静电感应，外球壳内、外表面将出现感应电荷-Q 和+Q，且均匀分布于表面。由介质中的高斯定理，可得各区域电场分布

$$D=\begin{cases}0 & (r<R_1)\\ \dfrac{Q}{4\pi r^2} & (R_1<r<R_2)\\ 0 & (R_2<r<R_3)\\ \dfrac{Q}{4\pi r^2} & (r>R_3)\end{cases} \Rightarrow E=\begin{cases}0 & (r<R_1)\\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (R_1<r<R_2)\\ 0 & (R_2<r<R_3)\\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} & (r>R_3)\end{cases}$$

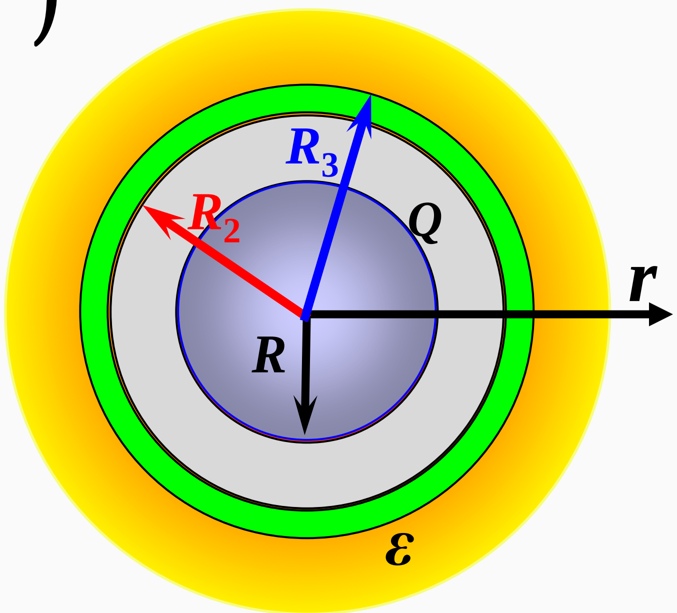
9 静电场中的导体和电介质

$$w_e = \frac{W_e}{V} = \frac{1}{2}\varepsilon E^2 = \frac{D^2}{2\varepsilon} = \frac{1}{2}DE$$

$$W_1 = \int w_e dV = \int_{R_1}^{R_2} \frac{D^2}{2\varepsilon_0} dV + \int_{R_3}^{\infty} \frac{D^2}{2\varepsilon} dV$$

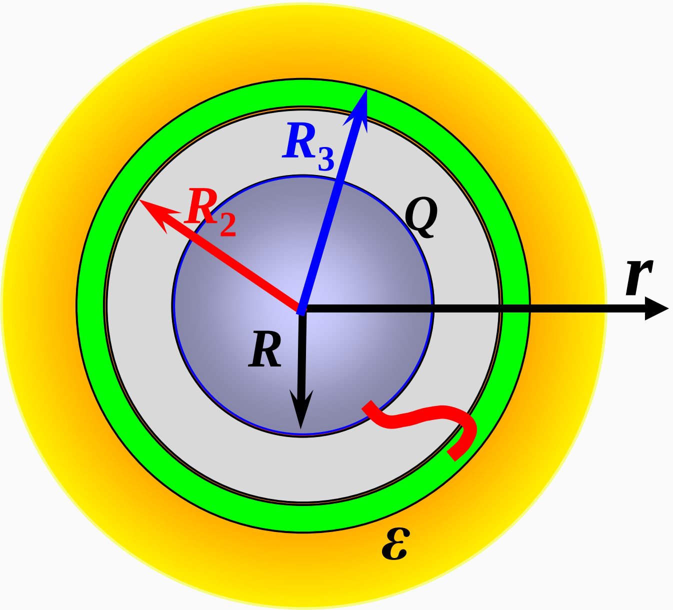
$$= \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{2\varepsilon_0} \frac{Q^2}{\left(4\pi r^2\right)^2} 4\pi r^2 dr + \int_{R_3}^{\infty} \frac{1}{2\varepsilon} \frac{Q^2}{\left(4\pi r^2\right)^2} 4\pi r^2 dr$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon R_3}$$



或者：$W_e = \frac{1}{2}CU_{AB}^2 = \frac{q^2}{2C} = \frac{1}{2}qU_{AB}$

(2) 如果用导线把内球与球壳联在一起，上述答案有何变化？能量变化到那里去了？

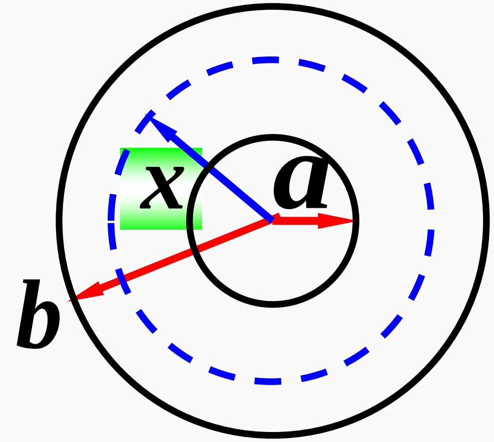


$$D=\begin{cases}0 & (r<R_3)\\ \dfrac{Q}{4\pi r^2} & (r>R_3)\end{cases} \Rightarrow E=\begin{cases}0 & (r<R_3)\\ \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon r^2} & (r>R_3)\end{cases}$$

$$W_2=\int_0^{\infty}\omega_e dV=\int_{R_3}^{\infty}\frac{D^2}{2\varepsilon}dV=\int_{R_3}^{\infty}\frac{1}{2\varepsilon}\left(\frac{Q}{4\pi r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon R_3}$$

$$-\Delta W=W_1-W_2=\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\rightarrow\rightarrow \text{做功、辐射}$$

5、一球形电容器，内、外半径分别为a和b，电势差为V且保持不变，试求:(1) 电容器任一极板所带电量；(2) 内球半径a为多大时，才能使内球面上的场强为最小？（b不变）(3) 这个最小的电场强度值和满足此条件时电容器的能量。



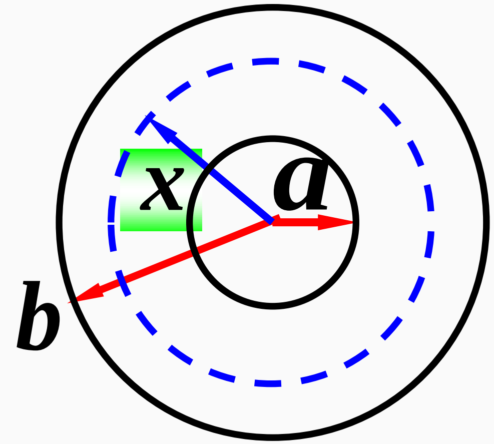
解: $$C=\frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}$$

(1) $$Q=CU=\frac{4\pi\varepsilon_0 abV}{b-a}$$

(2) $$E=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 a^2}\cdot\frac{4\pi\varepsilon_0 abV}{b-a}=\frac{bV}{a(b-a)}=\frac{bV}{\frac{b^2}{4}-\left(a-\frac{b}{2}\right)^2}$$

$$\Rightarrow\Rightarrow\left(a-\frac{b}{2}\right)=0\Rightarrow\Rightarrow a=\frac{b}{2}$$

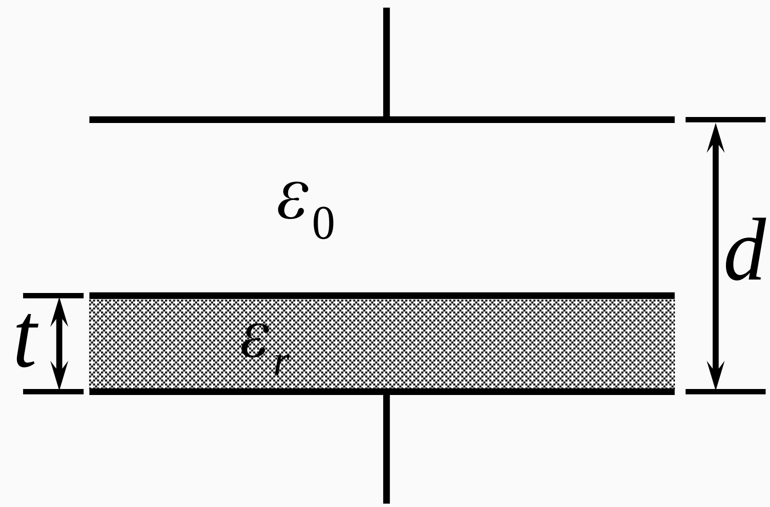
5、一球形电容器，内、外半径分别为a和b，电势差为V且保持不变，试求:(1) 电容器任一极板所带电量；(2) 内球半径a为多大时，才能使内球面上的场强为最小？（b不变）(3) 这个最小的电场强度值和满足此条件时电容器的能量。



(3) $$E_{\min}=\frac{4V}{b},\ a=\frac{b}{2}$$ 带入得：$$C'=\frac{4\pi\varepsilon_0 ab}{b-a}=4\pi\varepsilon_0 b$$

$$W=\frac{1}{2}C'U^2=\frac{1}{2}\times 4\pi\varepsilon_0 b\times V^2=2\pi\varepsilon_0 bV^2$$

6、有一平行板空气电容器，每块极板面积均为S，两板间距为d，今以厚度为t、相对介电常数为 ε_r 的均匀电介质板平行地插入电容器中，如图所示。试求：(1) 此时电容器的电容；(2) 现使电容器充电到两极板的电势差为V_0后与电源断开，再把电介质板从电容器中抽出，问需作功多少？



解：(1) 如图与题述电容等效 $C_1=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d-d'}$， $C_2=\dfrac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{d'}$

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}=\frac{d-d'}{\varepsilon_0 S}+\frac{d'}{\varepsilon_0 S\varepsilon_r}=\frac{\varepsilon_r d+(1-\varepsilon_r)d'}{\varepsilon_0\varepsilon_r S}$$

$$\boxed{C=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{\varepsilon_r d+(1-\varepsilon_r)d'}}$$

（2） $Q = CV_0 \qquad C_0 = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$

$$A = \Delta W = \frac{Q^2}{2C_0} - \frac{Q^2}{2C} = \frac{C^2V_0^2}{2}\left(\frac{1}{C_0} - \frac{1}{C}\right) = \frac{CV_0^2}{2}\left(\frac{C}{C_0} - 1\right)$$

$$= \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S V_0^2}{2\left[\varepsilon_r d + (1-\varepsilon_r)d'\right]}\left(\frac{d}{\varepsilon_0 S}\cdot\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{\varepsilon_r d + (1-\varepsilon_r)d'} - 1\right) = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S(\varepsilon_r - 1)d' V_0^2}{2\left[\varepsilon_r d + (1-\varepsilon_r)d'\right]^2}$$