合 肥 工 业 大 学 试 卷（A）

2023～2024 学年第 二 学期 课程代码 1400071B 课程名称 线性代数 学分 2.5 课程性质:必修☑、选修☐、限修☐ 考试形式:开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）________ 考试日期 2024 年 5 月 25 日 命题教师 集体 系（所或教研室）主任审批签名 田可雪

一、填空题（每小题 4 分，共计 20 分）

1. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$________.

2. 设 A 为3阶方阵，$|A|=4$，$|A^2+E|=8$，则 $|A+A^{-1}|=$________.

3. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ 0 & 2 & a \end{pmatrix}$ 与矩阵 $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 等价，则 $a=$________.

4. 已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，若 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3$, $\boldsymbol{\alpha}_3+\mathrm{k}\boldsymbol{\alpha}_1$ 线性相关，则 $k=$________.

5. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 是非齐次线性方程组 $\mathrm{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的 3 个解向量，若 $\mathrm{m}\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+\mathrm{n}\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\mathrm{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解，$4\mathrm{m}\boldsymbol{\alpha}_1-3\mathrm{n}\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3$ 是 $\mathrm{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\beta}$ 的解，则 $n=$________.

二、选择题（每小题 4 分，共计 20 分）

1．设 A 为 n 阶方阵，则行列式 $|A|=0$ 的充分必要条件是（ ）.

(A) A 的两行元素对应成比例　(B) A 中必有一行为其余各行的线性组合

(C) A 中有一列元素全为 0　(D) A 中任一列均为其余各列的线性组合

2．设 A，B 均为 n 阶方阵，满足等式 $AB=O$，则必有（ ）.

(A) $A=O$ 或 $B=O$　(B) $A+B=O$

(C) $|A|=0$ 或 $|B|=0$　(D) $|A|+|B|=0$

3.设 A 为 3 阶可逆矩阵，将 A 的第一行乘以 2 加到 A 的第三行上所得矩阵记为 B.则 A^{-1} 经过（ ）变换变为 B^{-1}.

(A) r_3+2r_1　(B) r_1-2r_3　(C) c_3-2c_1　(D) c_1-2c_3

4．若向量组 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 线性无关；$\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\delta}$ 线性相关，则（ ）.

(A) $\boldsymbol{\alpha}$ 必可由 $\boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}$ 线性表示　(B) $\boldsymbol{\beta}$ 必不可由 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\gamma}, \boldsymbol{\delta}$ 线性表示

(C) $\boldsymbol{\delta}$ 必可由 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 线性表示　(D) $\boldsymbol{\delta}$ 必不可由 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \boldsymbol{\gamma}$ 线性表示

5．下列矩阵中，**不能**相似对角化的矩阵为（ ）.

(A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -3 & -3 \end{pmatrix}$　(B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$　(C) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$　(D) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

三、(本题 10 分) 已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$.

(1)若 $|A|=2$，求 a;　(2)求 $A_{21}+A_{22}+A_{23}$, 其中 A_{ij} 为 A 的 (i,j) 位置元的代数余子式.

四、(本题 10 分) 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$，三阶方阵 X 满足 $A^*X=A^{-1}+2X$，求三阶方阵 X.

五、(本题 12 分) $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,1,4,2)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=(1,-1,-2,4)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3=(-3,1,u,-10)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_4=(1,3,10,0)^T$. 讨论 u 的取值，以确定向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的秩以及一个极大线性无关组，并将 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_4$ 的不属于该极大无关组的其他向量用这个极大无关组线性表示.

六、(本题 12 分) 当 a 取何值时，线性方程组 $\begin{cases} -x_1-4x_2+x_3=1, \\ ax_2-3x_3=3, \\ x_1+3x_2+(a+1)x_3=0 \end{cases}$ 无解、有唯一解、有无穷多解？并在有无穷多解时求其通解.

七、(本题 12 分) 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2-3x_2^2-3x_3^2+2x_1x_2-4x_1x_3$，求正交变换 $\boldsymbol{x}=P\boldsymbol{y}$ 将二次型 f 化为标准形，并写出相应的标准形.

八、(本题 4 分) A 是 $\mathrm{m}\times\mathrm{n}$ 的实矩阵. 证明:齐次线性方程组 $A^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $AA^T\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 同解.