2023-2024 第二学期《高等数学 A》（下）期末考试试卷参考答案

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

(1) 0；(2) $\frac{12}{5}$；(3) $\sqrt{2}$；(4) 3；(5) $1/2$

二、选择题 （每小题 3 分，共 15 分）

（1） D （2） B （3） D （4） A （5） D

三．(本题 24 分，每小题 8 分)

1. 设 $z = f(xy, \frac{y}{x})$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

解 $\frac{\partial z}{\partial x} = yf_1' - \frac{y}{x^2} f_2'$，

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = f_1' + y(xf_{11}'' + \frac{1}{x} f_{12}'') - \frac{1}{x^2} f_2' - \frac{y}{x^2}(xf_{21}'' + \frac{1}{x} f_{22}'')$$

$$= f_1' + xyf_{11}'' + \frac{y}{x} f_{12}'' - \frac{1}{x^2} f_2' - \frac{y}{x} f_{21}'' - \frac{y}{x^3} f_{22}''$$

$$= f_1' + xyf_{11}'' - \frac{1}{x^2} f_2' - \frac{y}{x^3} f_{22}''.$$

2. 求二元函数 $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^3$ 的极值.

解令 $\begin{cases} f_x' = 3x^2 - 3y = 0 \\ f_y' = -3x + 3y^2 = 0 \end{cases}$，得驻点 $(0,0)$ 和 $(1,1)$.

$$f_{xx}'' = 6x, \quad f_{xy}'' = -3, \quad f_{yy}'' = 6y,$$

点 $(0,0)$ 处，$A=0, \quad B=-3, \quad C=0$，且 $B^2 - AC > 0$，故故 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处不取极值.

点 $(1,1)$ 处，$A=6, \quad B=-3, \quad C=6$，且 $B^2 - AC < 0$，且 $A > 0$，故 $f(x,y)$ 在 $(1,1)$ 处取极小值 $f(1,1) = -1$.

3. 求曲面上 $x^2 + y^2 - z^2 = 1 (z > 0)$ 垂直于直线 $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-2}{1}$ 的切平面方程.

解曲面的切点为 (x,y,z)，则曲面在该点的法向量为 $\vec{n} = \{2x, 2y, -2z\}$，直线的方向向量为 $\vec{s} = \{2,1,1\}$，因为切平面垂直于直线，所以 $\vec{n} \parallel \vec{s}$，即

$$\frac{2x}{2} = \frac{2y}{1} = \frac{-2z}{1},$$

有因为 $x^2 + y^2 - z^2 = 1$，解得 $(1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ 或 $(-1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$，

又 $z>0$，故切点为 $(-1,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，法向量 $\vec{n}=\{-2,-1,-1\}$，从而切平面方程为

$$-2(x+1)-(y+\frac{1}{2})-(z-\frac{1}{2})=0\text{，即 }2x+y+z+2=0\,.$$

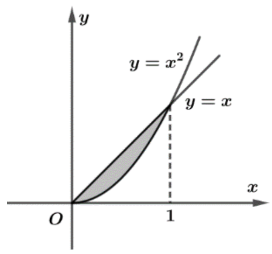
四.(本题 30 分，每小题 10 分)

1. 设区域 D 为 $y=x$ 以及 $y=x^2$ 所围区域，计算二重积分 $I=\iint\limits_D (y-x^2)\mathrm{d}\sigma$.

解 $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{x}(y-x^2)\mathrm{d}y=\int_0^1(\frac{1}{2}y^2-x^2y)\Big|_{x^2}^{x}\mathrm{d}x$

$$=\int_0^1(\frac{1}{2}x^2-x^3+\frac{1}{2}x^4)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{60}\,.$$



2. 设曲线 L 为 $y=\sin x$ 从 $(0,0)$ 到 $(\pi,0)$ 的一段，计算曲线积分

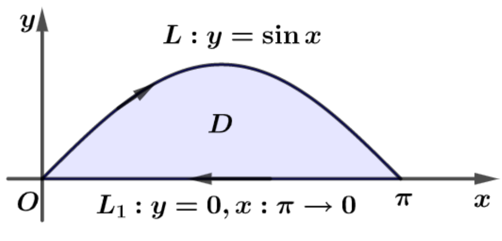
$$I=\int_L(2xy\mathrm{e}^{x^2}+x)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^{x^2}+x)\mathrm{d}y\,.$$

解令 $P(x,y)=2xy\mathrm{e}^{x^2}+x,\quad Q(x,y)=\mathrm{e}^{x^2}+x$，$P_y'(x,y)=2x\mathrm{e}^{x^2}$，$Q_x'(x,y)=2x\mathrm{e}^{x^2}+1$；

补充曲线 $L_1: y=0, x:\pi\to 0$，$L+L_1$ 围成闭区域 D，且取顺时针方向，如下图

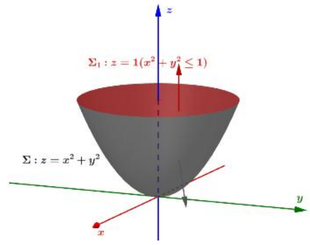
则 $I=\oint_{L+L_1}-\int_{L_1}=-\iint\limits_D(Q_x'-P_y')\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\int_\pi^0 x\mathrm{d}x$

$$=-\iint\limits_D 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{\pi^2}{2}=-\int_0^\pi\sin x\mathrm{d}x+\frac{\pi^2}{2}=\frac{\pi^2}{2}-2\,.$$



3. 已知 Σ 为抛物面 $z=x^2+y^2$ 介于 $z=0$ 和 $z=1$ 之间的部分，取下侧，计算曲面积分 $I=\iint\limits_\Sigma xy^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+x^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解补充曲面 $\Sigma_1: z=1(x^2+y^2\le 1)$，并取上侧，如下图.



则 $I=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint\limits_{\Sigma_1}=-\iiint\limits_\Omega(1+x^2+y^2)\mathrm{d}V-(\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}x^2\cdot 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{x^2+y^2}^{1}(1+x^2+y^2)\mathrm{d}z-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\cos^2\theta\, r\mathrm{d}r$$

$$=\iint\limits_{x^2+y^2\le 1}[1-(x^2+y^2)^2]\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{\pi}{4}$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(1-r^4)r\mathrm{d}r-\frac{\pi}{4}=\frac{2\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}.$$

五．(本题 16 分)

1.（本题满分 10 分）求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 的收敛域及和函数.

解 (1) $\rho=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{2n+3}=1$，所以收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}=1$，

所以收敛区间为 $(-1,1)$，当 $x=\pm 1$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n$ 发散，

故收敛域为 $(-1,1)$.

(2) 对 $\forall x\in(-1,1)$，

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^n=2\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+1}\right)'-\frac{1}{1-x}$$

$$=2\left(\frac{x}{1-x}\right)'-\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{(1-x)^2}.$$

或

$$S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^n=2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^n=2\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n-\frac{1}{1-x},$$

令 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n$，则 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n\right)\mathrm{d}t=\frac{x}{1-x}$，从而

$$f(x)=\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{1}{(1-x)^2},$$

故 $S(x)=2\cdot\frac{1}{(1-x)^2}-\frac{1}{1-x}=\frac{1+x}{(1-x)^2}$.

2.（本题满分 6 分）已知数列$\{u_n\}$单调递减，级数$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，证明级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(u_n - u_{n+1})$绝对收敛.

证：因为$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，所以$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.由$\{u_n\}$单调递减，有$u_n - u_{n+1} \geq 0$，

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}(u_n - u_{n+1})\right| = \sum_{n=1}^{\infty}(u_n - u_{n+1})$$

部分和$S_n = (u_1 - u_2) + (u_2 - u_3) + \cdots + (u_n - u_{n+1}) = u_1 - u_{n+1}$，从而

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(u_1 - u_{n+1}) = u_1 - \lim_{n\to\infty} u_{n+1} = u_1,$$

故级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(u_n - u_{n+1})$绝对收敛.