第八章　真空中的静电场

一　掌握描述静电场的两个物理量——电场强度和电势的概念，理解电场强度 $\vec{E}$ 是矢量，而电势 V 则是标量.

二　理解高斯定理及静电场的环路定理.

三　掌握用点电荷电场强度和叠加原理以及高斯定理求解带电系统电场强度的方法.

四　掌握用点电荷和叠加原理以及电势的定义式求解带电系统电势的方法.

五　了解电偶极子概念，能计算电偶极子在均匀电场中的受力和运动.

第八章　真空中的静电场

一、基本概念及场的叠加原理：

1、电场强度：$$\vec{E}=\frac{\vec{F}}{q_0}$$

2、点电荷电场强度公式：$$\vec{E}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0$$

3、电场强度叠加原理：

（1）点电荷系的场强 $$\vec{E}=\sum_i \vec{E}_i=\sum_i \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{q_i}{r_i^2}\cdot\vec{r}_{0i}$$

（2）电荷连续分布的任意带电体的场强：

$$d\vec{E} = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0 \qquad \vec{E} = \int d\vec{E} = \int \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{r^2} \cdot \vec{r}_0$$

4、电荷在电场中受力： $\vec{F} = q\vec{E}$

5、电势： $V_a = \dfrac{W_a}{q_0} = \int_a^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$

6、电势差： $V_a - V_b = \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}$

7、电势叠加原理：

$$V=\sum V_i=\begin{cases}\sum_i \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{q_i}{r_i} & \text{（点电荷系）}\\ \int \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{dq}{r} & \text{（电荷作连续分布）}\end{cases}$$

8、电荷 q 在电场中运动时电场力的功：

$$A_{ab}=q\left(V_a-V_b\right)$$

9、电场强度与电势的关系：

$$\begin{cases} \text{积分关系} \quad V_a = \int_a^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} \\ \text{微分关系} \quad \vec{E} = -\dfrac{dV}{dn}\vec{n}_0 \end{cases}$$

10、电通量：

$$\Phi_e = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

二、基本规律、定理：

1、库仑定律：$\vec{F}=\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{q_1q_2}{r^2}\vec{r}_0$

2、高斯定理：$\oint_S\vec{E}\cdot d\vec{S}=\dfrac{1}{\varepsilon_0}\Sigma q_i$ —说明静电场是有源场。

高斯定理的意义：

（1）理论上，揭示了静电场是有源场基本性质；

（2）应用上，提供了另一种求 $\vec{E}$ 的简便方法。

适用高斯定理求电场强度的：球对称，轴对称，面对称

3、环路定理：$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{l} = 0$

—说明静电场是无旋场（保守力场）。

说明：$\vec{E}$ 环流为零，静电场力作功与路径无关，静电场是无旋场(有势场)，静电场线不闭合。

三、几种典型的静电场公式：

1、均匀带电球面：$$\vec{E}=\begin{cases}0 & r<R\\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\vec{r}_0 & r>R\end{cases}$$

2、均匀带电球体：$$\vec{E}=\begin{cases}\dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}\cdot\vec{r}_0 & r\le R\\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\vec{r}_0 & r>R\end{cases}$$

3、无限长均匀带电圆柱面 $\vec{E}=\begin{cases}0 & r<R\\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot\vec{r}_0 & r>R\end{cases}$

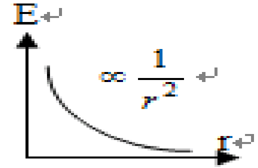
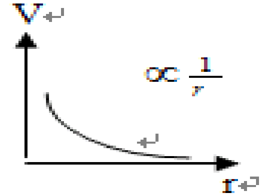
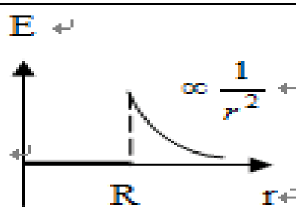
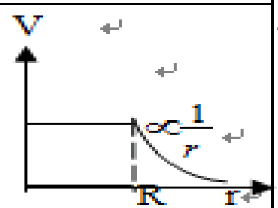
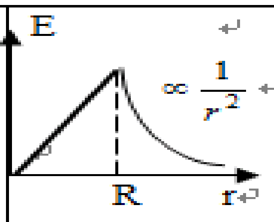
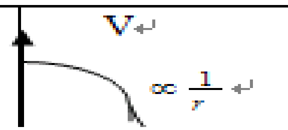
4、无限长均匀带电直线 $\vec{E}=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot\vec{r}_0$

5、无限大均匀带电平面 $E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

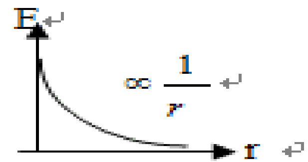
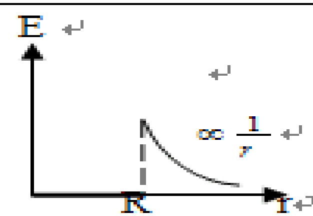
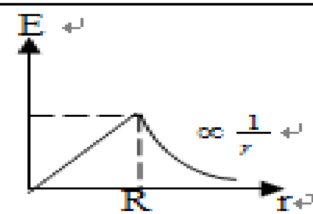
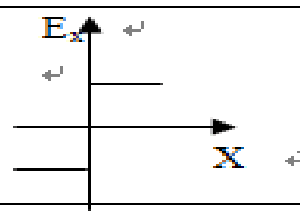
—方向垂直于带电平面

8 真空中的静电场

电学常用公式及相应图线

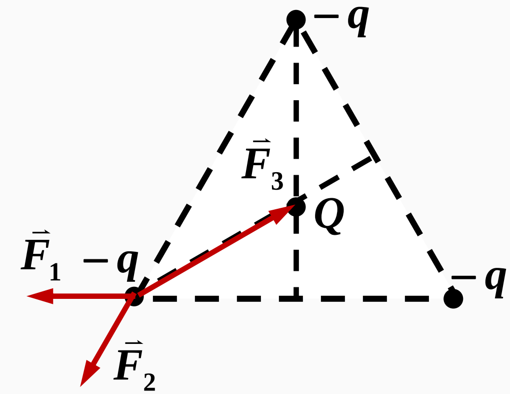
电荷	真空中的场强	场强曲线	真空中的电势	电势曲线
点电荷	$E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$		$V=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$	
	(电量 q，r 为与点电荷的距离）			
均匀带电圆环轴线上	$E=\dfrac{qx}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{3/2}}$		$V=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0(R^2+x^2)^{1/2}}$	
	（电量 q，半径 R，x 为到环心的距离）			
电偶极子	$\vec{E}=\dfrac{2\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ 延长线上 $\vec{E}=\dfrac{-\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$ 中垂线上			
	（电矩 $\vec{p}$、r 为到电偶极子的距离，且 $r>>\ell$）			
均匀带电球面	$E=\begin{cases}0 & (r<R)\\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r>R)\end{cases}$		$V=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} & (r\le R)\\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} & (r\ge R)\end{cases}$	
	（电量 q，半径 R，r 为到球心的距离）			
均匀带电球体	$E=\begin{cases}\dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3} & (r\le R)\\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} & (r>R)\end{cases}$		$V=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}$ $(r\ge R)$	

8 真空中的静电场

	（电量 q，半径 R，r 为到球心的距离）			
“无限长”均匀带电直线	$E=\dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$			
	（电荷线密度λ，r 为到带电线的距离）			
“无限长”均匀带电圆柱面	$E=\begin{cases}0 & (r\le R)\\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} & (r>R)\end{cases}$			
	（电荷线密度λ，柱半径 R，r 为到圆柱轴线的距离）			
“无限长”均匀带电圆柱体	$E=\begin{cases}\dfrac{\lambda r}{2\pi\varepsilon_0 R^2} & (r<R)\\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} & (r>R)\end{cases}$			
	（电荷线密度λ，柱半径 R，r 为到圆柱轴线的距离）			
“无限大”均匀带电平面	$E=\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$			
	（电荷面密度 σ，x 轴原点带电面上，轴垂直带电面）			

练习题（二十一）

1、三个电量为$-q$的点电荷各放在边长为 r 的等边三角形的三个顶点上，电荷 Q（ Q>0 ）放在三角形的重心上。为使每个负电荷受力为零，Q之值应为多大？



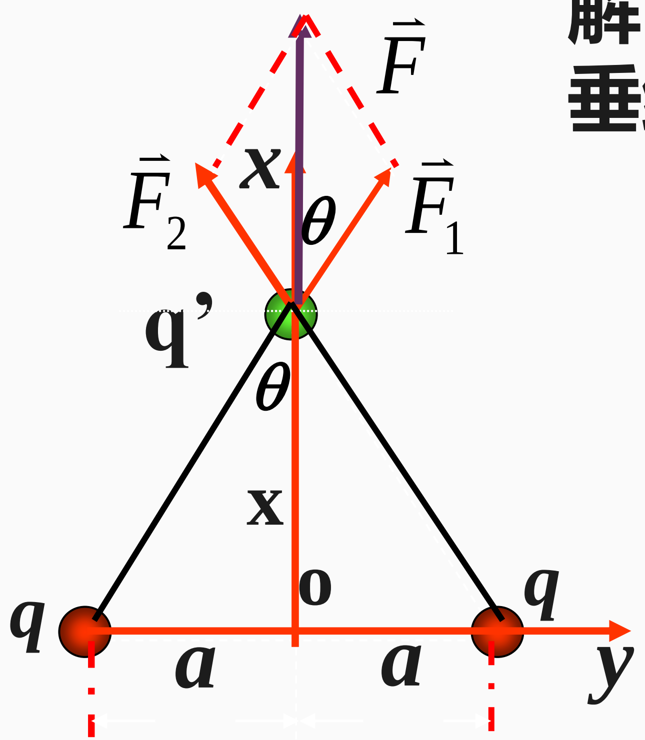
解：如图所示，

$$\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3=0\Rightarrow\Rightarrow 2F_1\cos 30-F_3=0$$

$$2\times\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{qQ}{4\pi\varepsilon_0 l^2}=0\,;\text{且}\,l=\frac{r}{\sqrt{3}}\Rightarrow\Rightarrow Q=\frac{q}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}q}{3}$$

$$\vec{F}_{库}=\frac{q_1q_2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{r}_0$$

补充：相距为2a处，有两个正点电荷，电量都是+q的,有 - 个（q'）在中垂线x处，求(1)q'所受静电力；(2)X＝？时， q'受力最大?



解（1）以连线的中点为原点，沿中垂线做ox轴，q'在x处

$$\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}$$

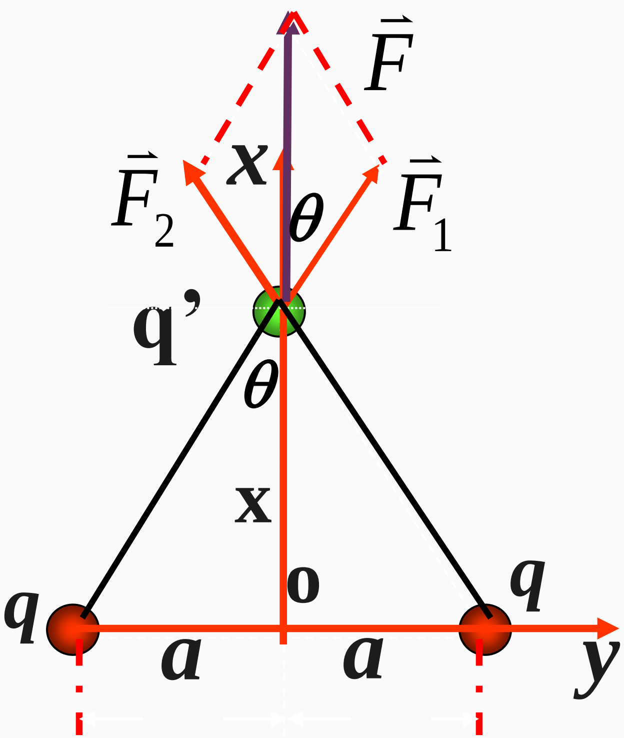
$$\vec{F}_1=\vec{F}_2=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{(a^2+x^2)}$$

$$F=2F_1\cos\theta=\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qq'x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

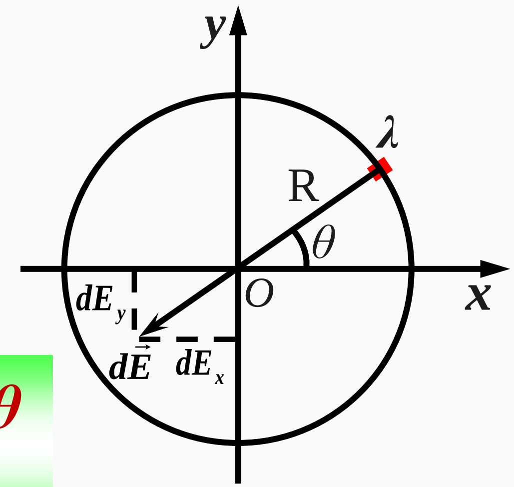
方向沿x方向。

(2) $$\frac{dF}{dx}=0 \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{qq'x}{(x^2+a^2)^{3/2}}\right)=0$$

$$x=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}a \qquad F_{\max}=\frac{qq'}{3\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 a^2}\text{或}-\frac{qq'}{3\sqrt{3}\pi\varepsilon_0 a^2}$$



2、如图所示，一个细的带电塑料圆环，半径为R，所带线电荷密度为 λ 和 θ 有 $\lambda=\lambda_0\sin\theta$的关系。求在圆心处的电场强度的大小和方向。

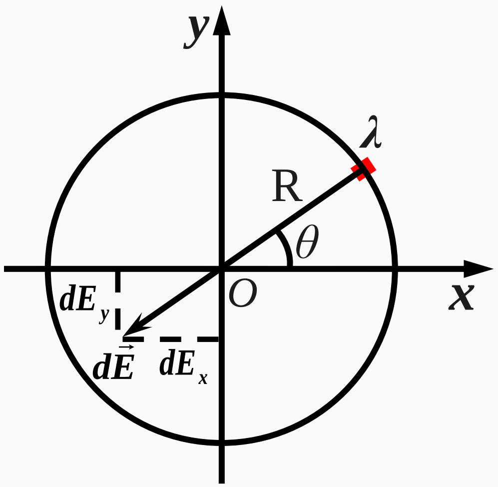


解：如图所示，取电荷元：$dq = \lambda R d\theta = \lambda_0 \sin\theta R d\theta$（红色小块），（先假设带正电荷）

dq在圆心处的电场：$dE = \dfrac{\lambda_0 \sin\theta d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R}$

此电场的两个分量为
$$\begin{cases} dE_x = -dE\cos\theta = -\dfrac{\lambda_0 \sin\theta\cos\theta d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R} \\ dE_y = -dE\sin\theta = -\dfrac{\lambda_0 \sin^2\theta d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R} \end{cases}$$

2、如图所示，一个细的带电塑料圆环，半径为R，所带线电荷密度为 λ 和 θ 有$\lambda=\lambda_0\sin\theta$的关系。求在圆心处的电场强度的大小和方向。



将两分量分别对θ从0到2π积分，可得

$$\begin{cases} E_x = \int dE_x = 0 \\ E_y = \int dE_y = \int_0^{2\pi} \dfrac{-\lambda_0 \sin^2\theta d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R} = \dfrac{-\lambda_0}{4\varepsilon_0 R} \end{cases}$$

即：$\vec{E} = E_x\vec{i} + E_y\vec{j} = -\dfrac{\lambda_0}{4\varepsilon_0 R}\vec{j}$

$\vec{E}_{点} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$

3、电偶极子如图

已知： q、$-q$、$r>>l$,

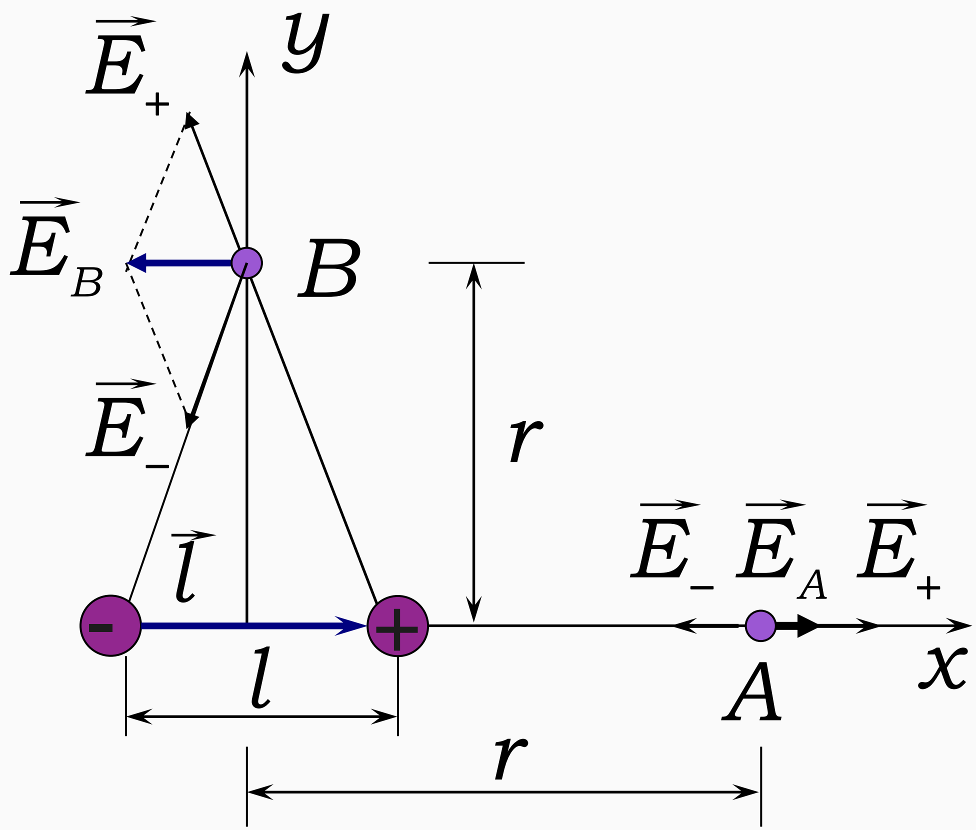
电偶极矩 $\vec{p}_e = q\vec{l}$

求： A **点及** B **点的场强。**

解: **A点场强:**

设 $+q$ **和** $-q$ **的场强**

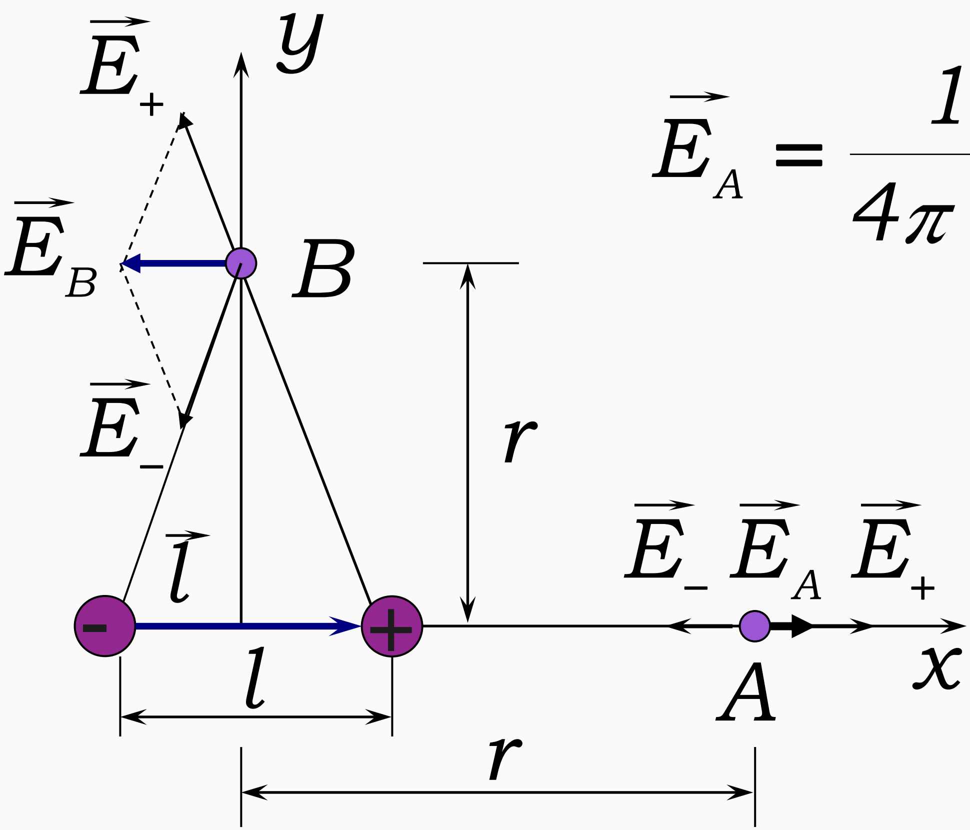
分别为 $\vec{E}_+$ **和** $\vec{E}_-$



$$\vec{E}_+ = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (r - \frac{l}{2})^2}\vec{i} \qquad \vec{E}_- = \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 (r + \frac{l}{2})^2}\vec{i}$$

电偶极矩 — $\vec{p} = q\vec{l}$

$$\vec{E}_{点} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$



$$\vec{E}_A = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left[\frac{q}{(r-\frac{l}{2})^2} - \frac{q}{(r+\frac{l}{2})^2}\right]\vec{i}$$

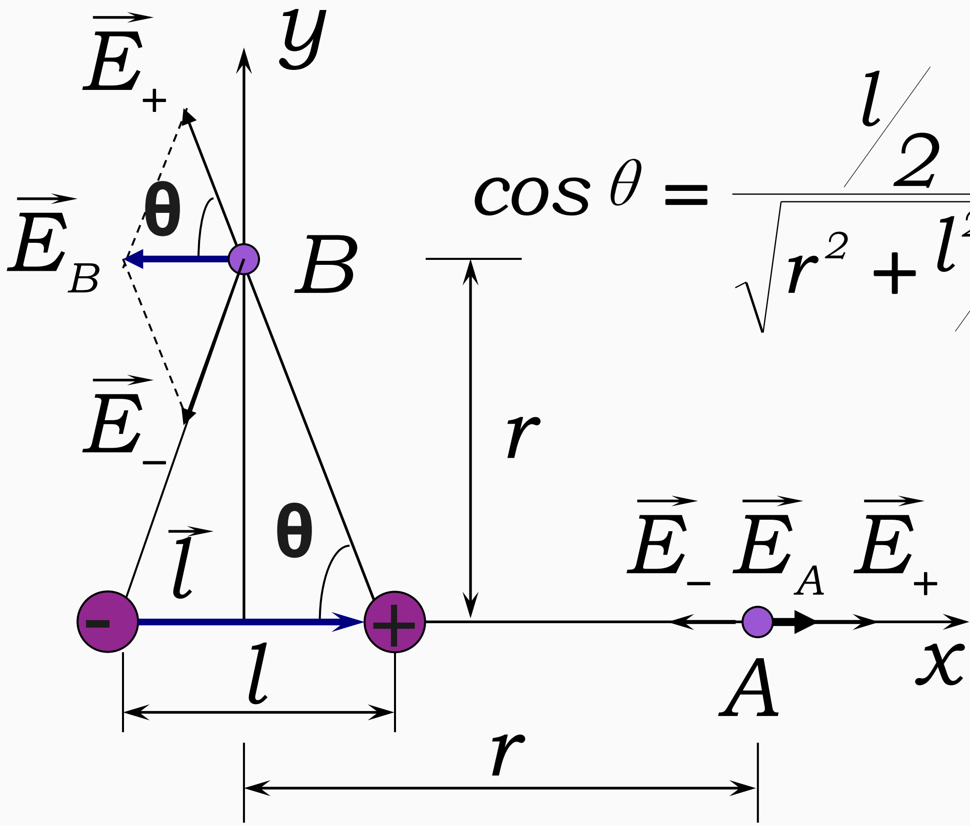
$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2ql}{r^3}\vec{i}$$

$$= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\vec{p}}{r^3}$$

电偶极矩 — $\vec{p}=q\vec{l}$

$\vec{E}_{点}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$

B点场强：



$$\cos\theta=\frac{l/2}{\sqrt{r^2+l^2/4}}$$

$$E_+=E_-$$

$$=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{(r^2+l^2/4)}$$

$$E_x=E_{+x}+E_{-x}=2E_{+x}$$

$$=-2E_+\cos\theta$$

$$E_y=E_{+y}+E_{-y}=0$$

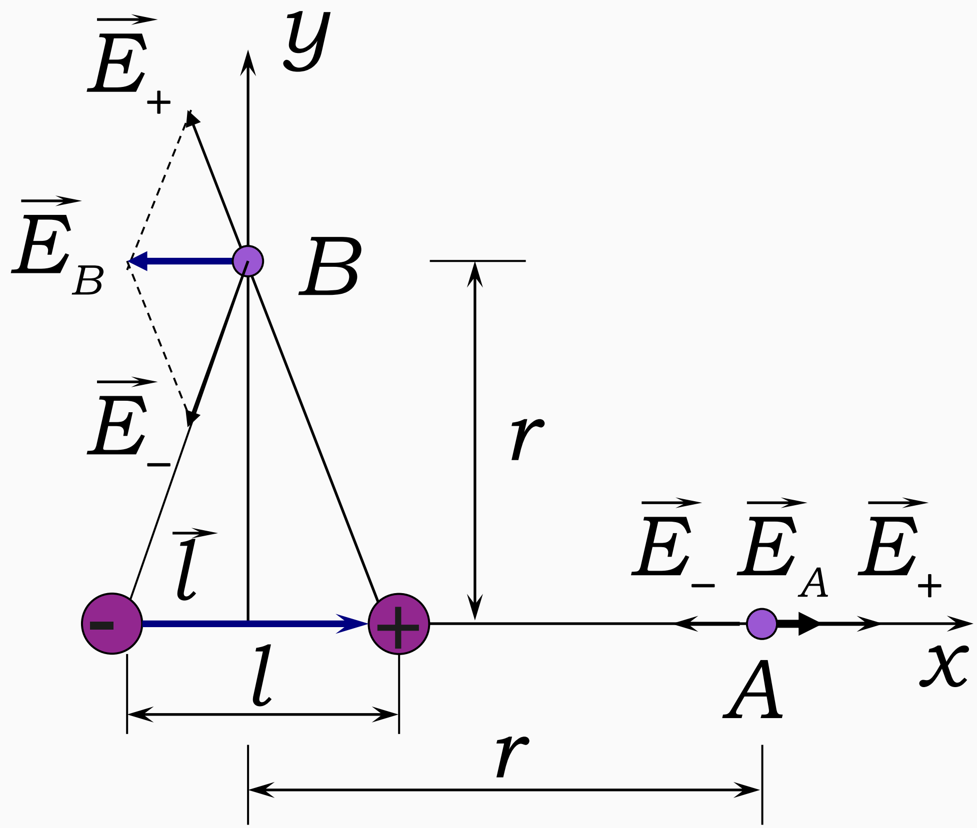
$$E_B=2E_+\cos\theta=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{ql}{(r^2+\frac{l^2}{4})^{3/2}}\approx\frac{p}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$\vec{E}_B=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}}{r^3}$$

电偶极矩 — $\vec{p}=q\vec{l}$

$$\vec{E}_A=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2\vec{p}}{r^3}$$

$$\vec{E}_B=-\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{p}}{r^3}$$



结论:

$$E\propto p$$

$$E\propto\frac{1}{r^3}$$

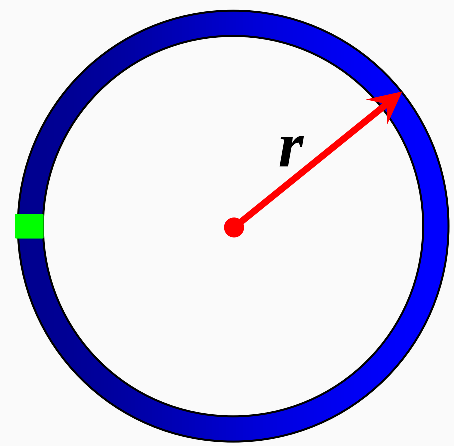
$$\vec{E}_{点} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

4、一根不导电的细塑料杆，被弯成近乎完整的半径为0.5m的圆，杆的两端有2cm的空隙，电量为3.12×10⁻⁹库仑的正电荷均匀分布在圆弧杆上，求圆弧圆心处的电场强度大小和方向。

解：圆心处的电场应等于完整的均匀圆周电荷和相同线电荷密度填满缝隙的负电荷的电场的叠加，由于前者在圆心处的电场为零，所以圆心处的电场为

$$E = \frac{\lambda d}{4\pi\varepsilon_0 r^2(2\pi r - d)}$$

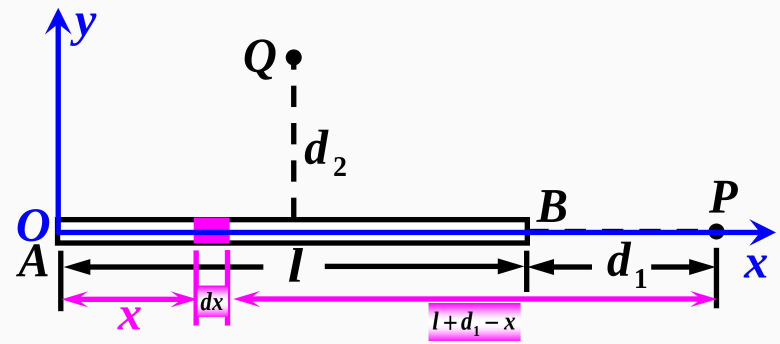
$$= \frac{9\times10^9\times3.12\times10^{-9}\times0.02}{(0.5)^2\times(2\pi\times0.5-0.02)} = 0.72\text{V/m}$$



—方向指向负电荷，即指向缝隙。

$$\vec{E}_{点}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

5、长$l=15.0$cm的直导线AB上均匀地分布着线密度$\lambda=5.0\times10^{-9}$C/m的正电荷。如图示。试求：(1)在导线的延长线上与导线B端相距$d_1=5.0$cm处的P点的场强；(2)在导线的垂直平分线上与导线中点相距$d_2=5.0$cm处的Q点的场强。



解：(1) $dE=\dfrac{dQ}{4\pi\varepsilon_0(l+d_1-x)^2}=\dfrac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0(l+d_1-x)^2}$

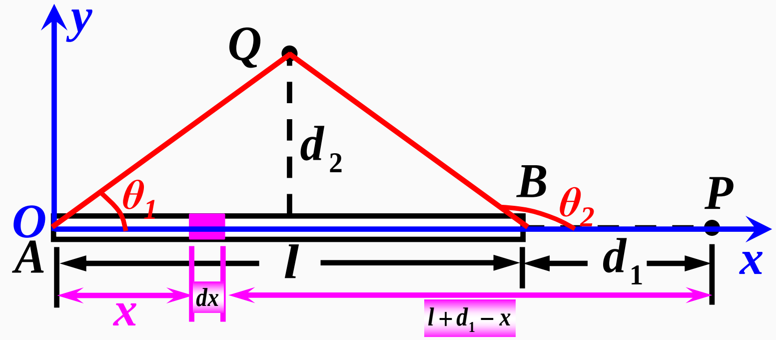
$$E=\int dE=\int_0^l\frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0(l+d_1-x)^2}=\frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{d_1}-\frac{1}{l+d_1}\right)$$

$$=9\times10^9\times5.00\times10^{-9}\times\left(\frac{100}{5.0}-\frac{100}{15.0+5.0}\right)=675\text{V/m}$$

—方向垂直于杆向外。

$$\vec{E}_{点} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2}$$

5、长l=15.0cm的直导线AB上均匀地分布着线密度λ=5.0×10^{-9}C/m的正电荷。如图示。试求：(1)在导线的延长线上与导线B端相距d_1=5.0cm处的P点的场强；(2)在导线的垂直平分线上与导线中点相距d_2=5.0cm处的Q点的场强。



(2)由对称性可知： $E_x = 0$

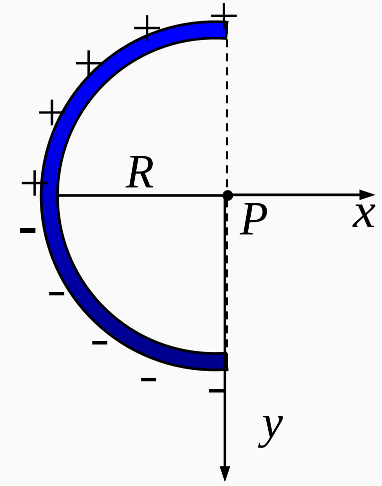
$$E = E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d_2}\left(\cos\theta_1 - \cos\theta_2\right)$$

$$\cos\theta_1 = \frac{\frac{l}{2}}{\sqrt{d_2^2 + \frac{l^2}{4}}} = -\cos\theta_2$$

$$E = \frac{2\lambda\cos\theta_1}{4\pi\varepsilon_0 d_2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 d_2}\frac{l}{\sqrt{d_2^2 + \frac{l^2}{4}}} = 9\times10^9\frac{5.00\times10^{-9}}{0.05}\cdot\frac{0.15}{\sqrt{0.05^2 + \frac{0.15^2}{4}}} = 1.5\times10^3(\mathrm{V/m})$$

—方向垂直于杆向外。

6、一细玻璃棒被弯成半径为R 的半圆形，沿其上半部均匀分布有电荷$+Q$，沿下半部均匀分布有电荷$-Q$，如图示，求半圆中心P点处的场强 E。



解：(1) 由对称性可知： $E_x = 0$

$$E = E_{y+} + E_{y-} = 2E_{y+}$$

$$dE_{y+} = \frac{\lambda d\theta}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\cos\theta = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{2Q}{\pi R}\cos\theta d\theta$$

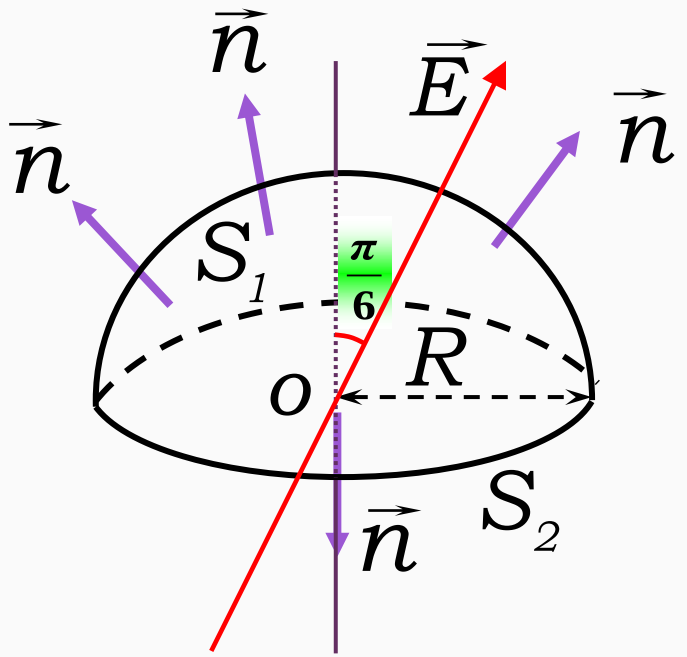
$$E = 2\int dE_{y+} = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R^2}\frac{2Q}{\pi R}\cos\theta d\theta = \frac{Q}{\pi^2\varepsilon_0 R^2}$$

—沿y方向。

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

练习题（二十二）

1、在一均匀电场E中，有一半径为R的半球面，半球面的轴线与场强E的方向成 $\pi/6$ 的夹角，求通过此半球面的电通量。



解： $\Phi = \int_{S_{球}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_{S_{圆}} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \vec{E} \cdot \vec{S}_{圆}$

$$= E \cdot \pi R^2 \cdot \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot E \cdot \pi R^2$$

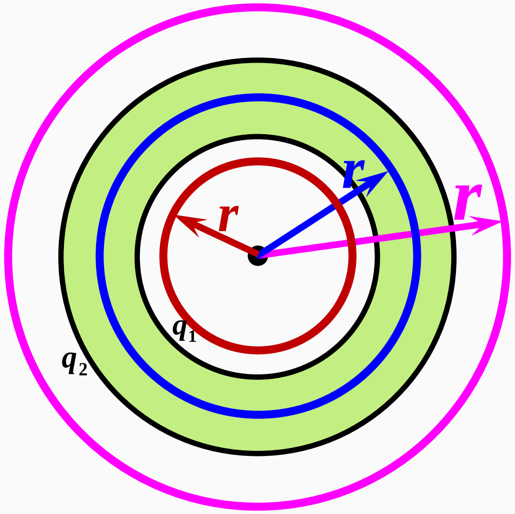
$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

2、大小两个同心球面，半径分别为0.10m和0.30m，小球面上带有电荷+1.0×10^{-8}C，大球面上带有电荷+1.5×10^{-8}C。求：(1) 空间各处的电场强度；(2) 求离球心为0.05m、0.20m、0.50m各处的电场强度；(3) 作出 E~r 曲线；(4) 试分析电场强度不连续的原因。

解：(1) 各处场强方向都是 $\vec{r}$ 方向，由高斯定理

$$\oiint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

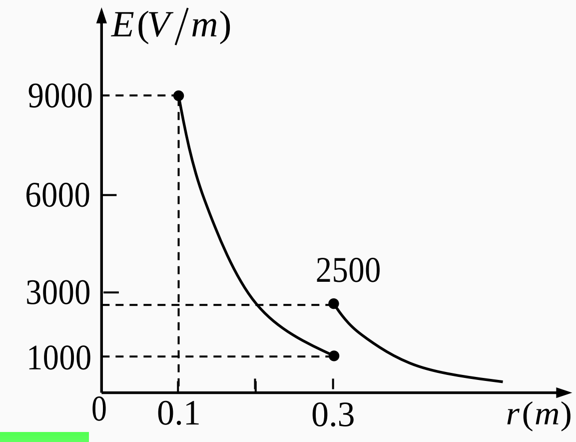
，可得



$$E = \begin{cases} 0 & (0,\ R_1) \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} q_1 & (R_1, R_2) \\ \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(q_1+q_2) & (R_2, \infty) \end{cases}$$

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

(2) $E\big|_{r=0.5} = 0$



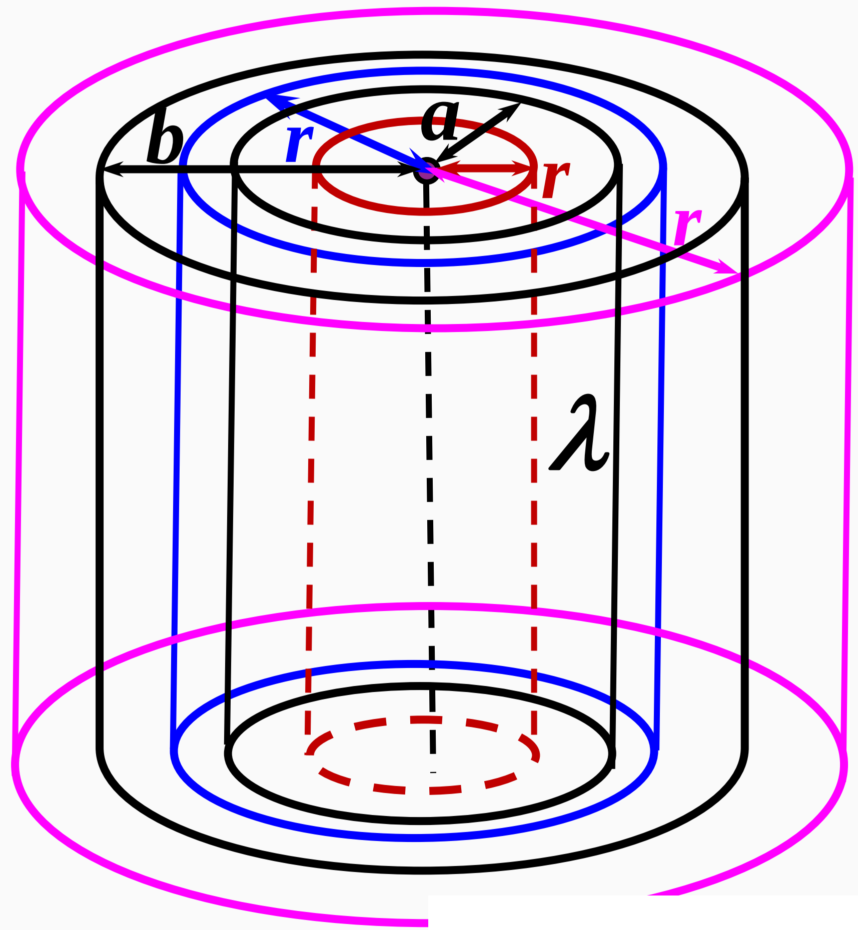
$$E\big|_{r=0.20} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2} q_1 = 9\times10^9 \times \frac{1.0\times10^{-8}}{0.20^2} = 2250\ (V/m)$$

$$E\big|_{r=0.50} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}(q_1 + q_2) = 9\times10^9 \times \frac{2.5\times10^{-8}}{0.50^2} = 900\ (V/m)$$

(3)见右上图;

(4)因为两球面处有电荷，所以电场强度在球面处不连续。

3、两个无限长同轴圆柱面，半径分别为 R_1和 R_2，带有等值异号电荷，每单位长度的电量均为 λ（即电荷线密度），试分别求出：(1) $r < R_1$；(2) $r > R_2$；(3) $R_1<r<R_2$ 时，离轴线为r处的电场强度。



解：(1) 各处场强方向都是 $\vec{r}$ 方向，

由高斯定理 $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$，可得

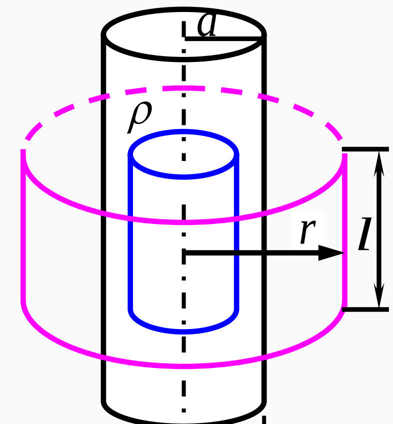
$$E \cdot 2\pi r l = \begin{cases} 0 & (0,\ R_1) \\ \dfrac{\lambda l}{\varepsilon_0} & (R_1, R_2) \\ 0 & (R_2, \infty) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad E = \begin{cases} 0 & (0,\ R_1) \\ \dfrac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} & (R_1, R_2) \\ 0 & (R_2, \infty) \end{cases}$$

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

4、一无限长的均匀带电圆柱体，截面半径为 a，电荷体密度为 ρ，设垂直于筒轴方向从中心轴向外的径矢的大小为 r，试求：(1)电场强度分布；(2)画出 E-r 曲线。

解：(1) 作与带电圆柱同轴而截面半径为 r，长度为 l 的圆柱面（两端封顶）的高斯面，

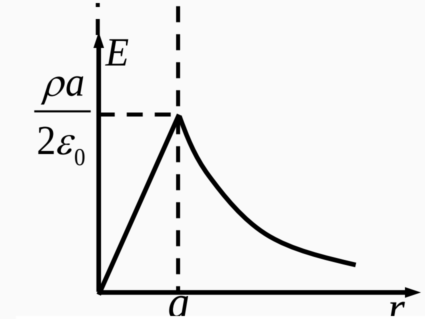


由高斯定理 $\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \dfrac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$，可得

$$\Rightarrow E \cdot 2\pi r l = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

$r \leqslant a$时，$q_{\text{int}} = \pi r^2 l \rho \Rightarrow\Rightarrow E = \dfrac{\rho}{2\varepsilon_0} r$

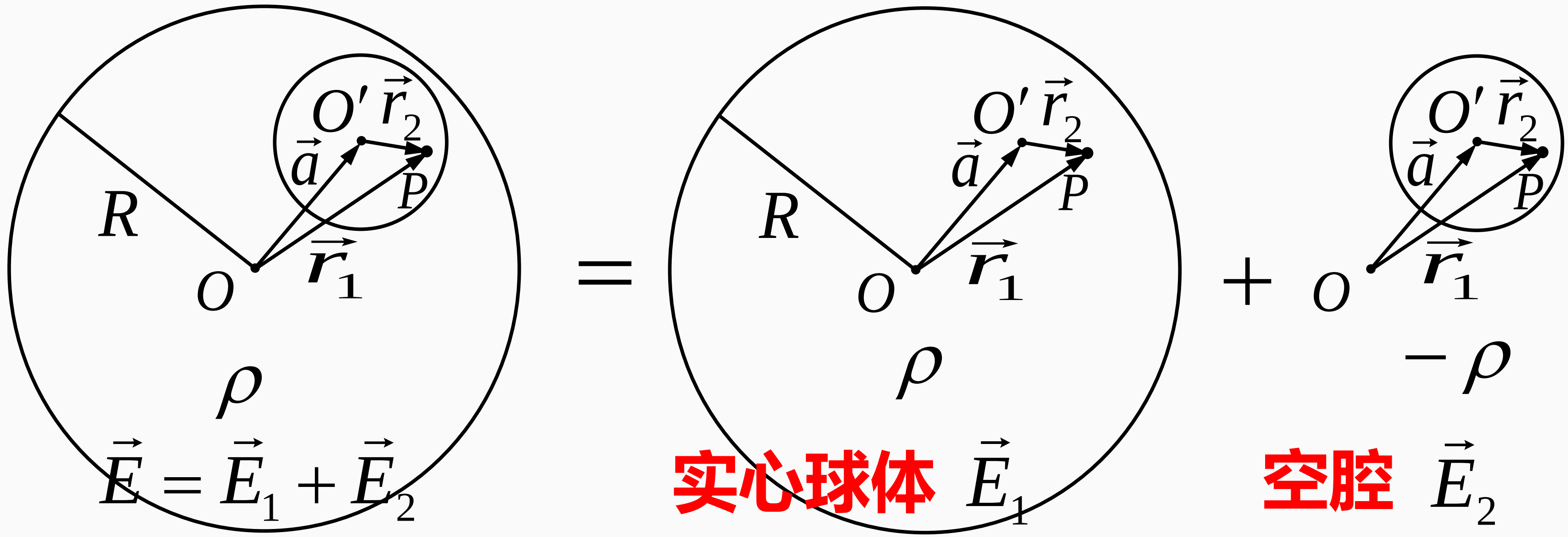
$r \geq a$时，$q_{\text{int}} = \pi a^2 l \rho \Rightarrow\Rightarrow E = \dfrac{a^2 \rho}{2\varepsilon_0 r}$



(2)见右上图;

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

5、一均匀带电球体，半径为R，体电荷密度为ρ，今在球内挖去一半径为r 的球体 $(r < R)$，求证由此形成空腔内的电场是均匀的，并求其值. 已知大球心指向小球心的径矢为 $\vec{a}$.常矢量



解：采用补偿法求空腔内的场强.

电荷密度为ρ的带空腔球体的场强 = 电荷密度为ρ的实心球体的场强+电荷密度为$(-\rho)$的空腔的场强

$$\Phi_e=\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

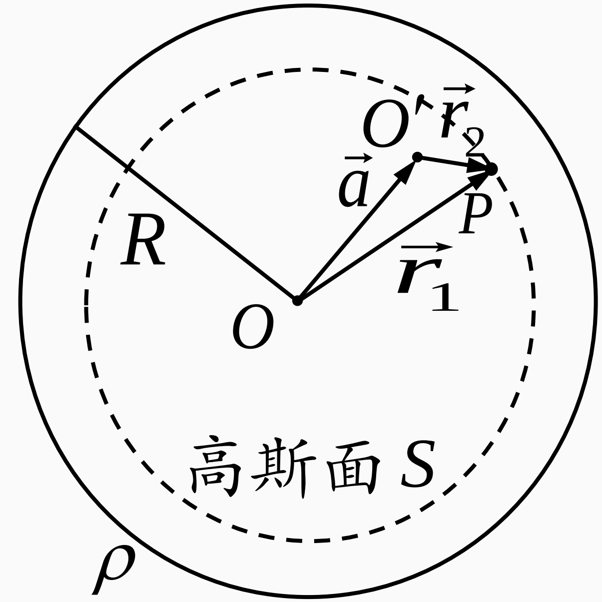
电荷密度为ρ的实心球体的场强:

由高斯定理 $\displaystyle \oiint_S \vec{E}_1\cdot d\vec{S}=\frac{\sum q_{in}}{\varepsilon_0}$

有 $\displaystyle E_1\cdot 4\pi r_1^2=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot\frac{4}{3}\pi r_1^3 \quad \therefore E_1=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}r_1$

P 点沿 $\vec{r}_1$ 方向，可用矢量表达式:

$$\vec{E}_1=\frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_1$$

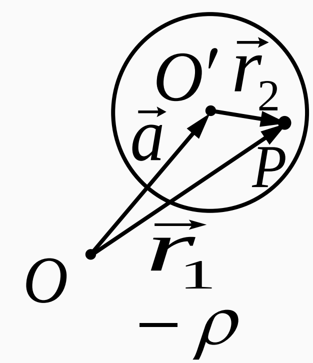


实心球体 $\vec{E}_1$

电荷密度为$-\rho$的空腔的场强:

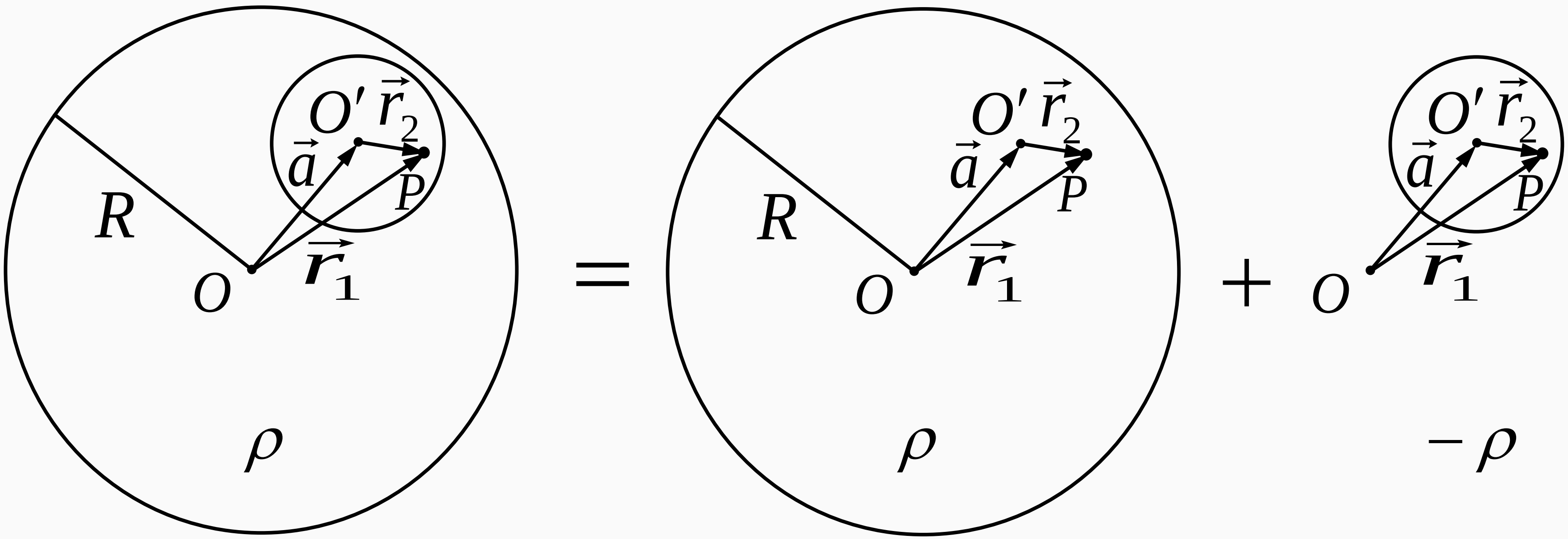
与上面类似求法，应用高斯定理, 可求得电荷密度为$(-\rho)$ 的空腔的场强

$$\vec{E}_2=\frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_2=\frac{-\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_1-\vec{a})$$



空腔 $\vec{E}_2$

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$



$$\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

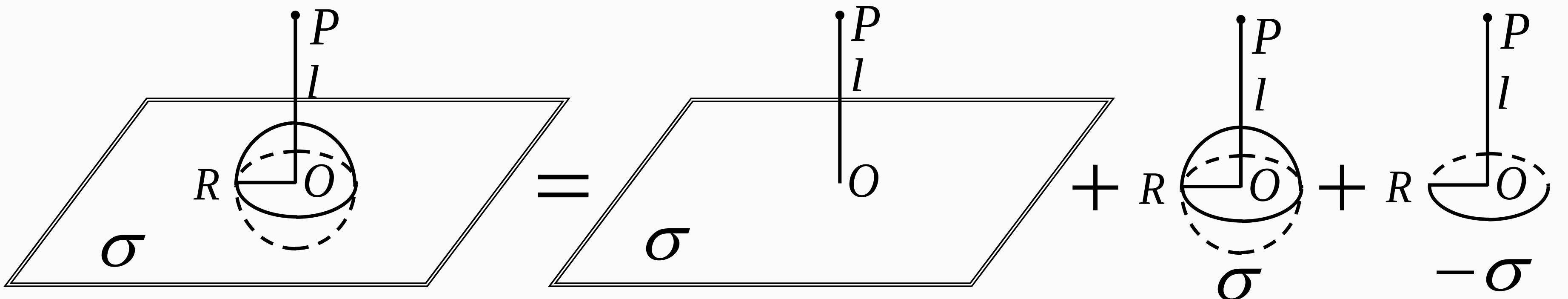
$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{P,实心球}(\rho) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_1, \quad \vec{E}_2 = \vec{E}_{P,空腔}(-\rho) = \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_2$$

电荷密度为ρ的带空腔球体的场强：

$$E_P = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{r}_1 + \frac{-\rho}{3\varepsilon_0}(\vec{r}_1 - \vec{a}) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\vec{a}$$

由于P点可为空腔内任一点，可见空腔内的电场是均匀的.

6、电荷以面密度σ均匀地分布在一无限大平板及中心 O 在板上，半径为 R 的球面上（注意：球内无电荷），求与 O 点的垂直距离为 l 的 P 点的场强.



$\vec{E}_P = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$ 　**无限大平面** $\vec{E}_1$ 　**球面** $\vec{E}_2$ 　**圆盘** $\vec{E}_3$

解：采用补偿法求 P 点的场强.

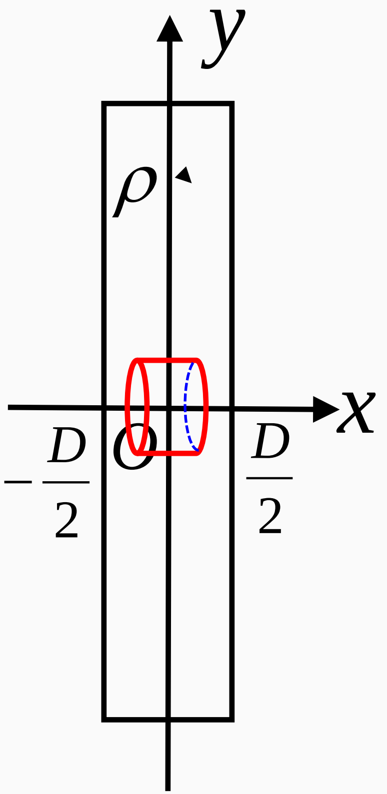
$$E_1 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} \qquad E_2 = \frac{\sigma \cdot 4\pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 l^2} = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 l^2} \qquad E_3 = \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{l}{\sqrt{R^2 + l^2}}\right)$$

$$E_p = E_1 + E_2 + E_3 = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0} + \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 l^2} + \frac{-\sigma}{2\varepsilon_0}\left(1 - \frac{l}{\sqrt{R^2 + l^2}}\right) = \frac{\sigma R^2}{\varepsilon_0 l^2} + \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\frac{l}{\sqrt{R^2 + l^2}}$$

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

练习题（二十三）

1、厚度为 D 的无限大均匀带电平板，均匀地分布着正电荷，电荷体密度为ρ，求空间各处场强分布。



解：电场分布呈面对称，可由高斯定理求解，可得

$$\oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow\Rightarrow E \cdot 2S = \frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$$

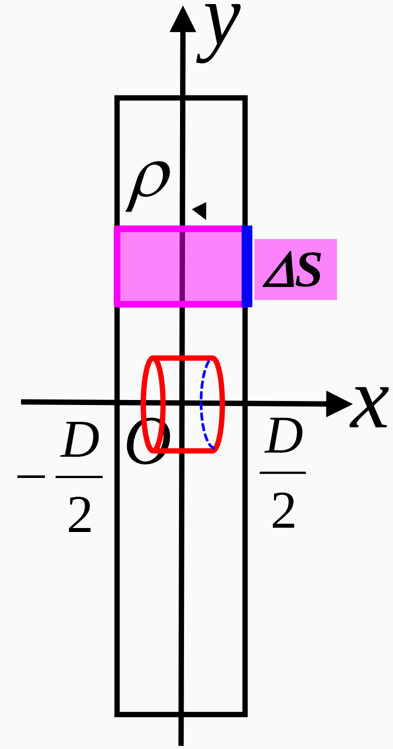
当$x < \frac{D}{2}$时，$q_{\text{int}} = 2xS\rho$，$E = \frac{\rho}{\varepsilon_0}x$

当$x > \frac{D}{2}$时，$q_{\text{int}} = DS\rho$，$E = \frac{D\rho}{2\varepsilon_0}$

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

推广： 厚度为 D 的无限大均匀带电平板, 电荷面密度为σ, 求平板内外的场强和电势分布.

$$E = \begin{cases} \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0 D}x \cdots\cdots (|x| < \dfrac{D}{2}) \\ \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\dfrac{x}{|x|} \cdots\cdots (|x| > \dfrac{D}{2}) \end{cases}$$



选 $x_b = |D/2|$ (平板外表面) 为电势零点.

$$\varphi(x) = \begin{cases} -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0 D}\left[x^2 - \left(\dfrac{D}{2}\right)^2\right] \cdots\cdots (|x| < \dfrac{D}{2}) \\ -\dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\left[|x| - \dfrac{D}{2}\right] \cdots\cdots\cdots\cdots (|x| > \dfrac{D}{2}) \end{cases}$$

σ与ρ的关系

$$\sigma \cdot \Delta S = \rho \cdot \Delta S \cdot D$$

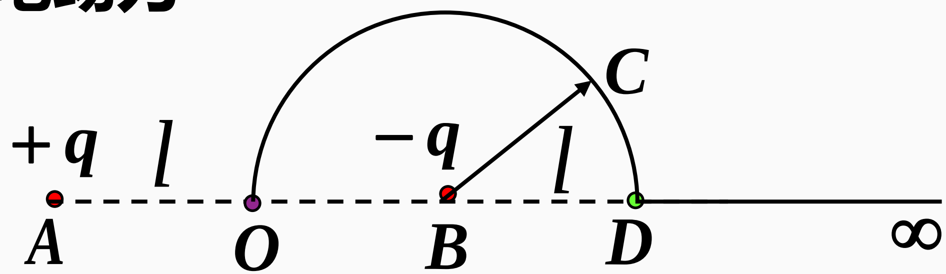
$$\therefore \sigma = D\rho$$

可见 $\varphi(-x) = \varphi(x)$ 即左右两边对称的点电势相同.

2、(1)单位正电荷由*O* 经*OCD* 移到*D*, 电场力作的功?

(2)单位负电荷由*D* 移到∞, 电场力作的功?

$$\overline{AO} = l,\ \overline{OD} = 2l$$



解：(1)单位正电荷由*O* 经 *OCD* 移到*D*, 电场力做的功

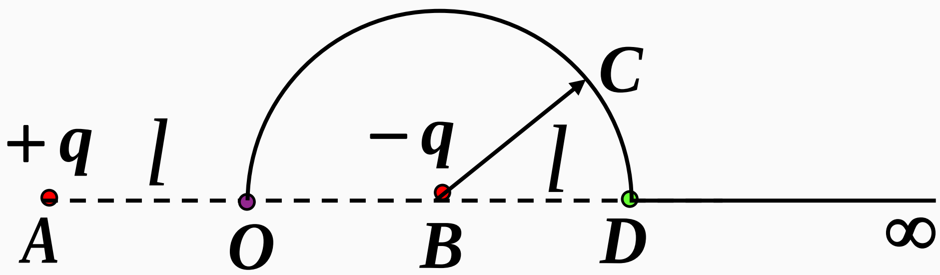
$$A = \int_O^D q_0 \vec{E} \cdot d\vec{r} = q_0(\varphi_O - \varphi_D)$$

其中 $q_0 = +1(\mathrm{C}),\quad \varphi_O = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} - \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} = 0,$

$$\varphi_D = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (3l)} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 l} = -\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}$$

$$\therefore\ A = 1 \times (0 + \frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}) = \frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l} > 0$$

(2) 单位负电荷由 D 移到∞，电场力作的功



$$A' = \int_D^{\infty} q_0 \vec{E} \cdot d\vec{r} = q_0(\varphi_D - \varphi_\infty)$$

其中 $q_0 = -1\ (\mathrm{C})$,　　$\varphi_D = -\dfrac{q}{6\pi\varepsilon_0 l}$,　　$\varphi_\infty = 0$,

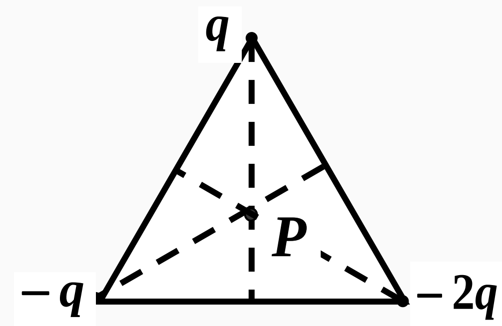
$$\therefore A' = -\left(-\frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l} - 0\right) = \frac{q}{6\pi\varepsilon_0 l} > 0$$

【注意】单位电荷是指一个库伦的电荷量(q_0=1C). 有的同学把它误解为“基本电荷”，即电子电荷(q_0= e).

单位时间：Δt = 1s;　　单位距离：Δs = 1m;

【思考题】本题两个过程中，外力做的功是多大?

3、一边长为a的正三角形，其三个顶点上各放置 q，$-q$ 和 $-2q$ 的点电荷，求此三角形重心上的电势。将一电量为 $+Q$ 的点电荷，由无限远处移到重心上，外力要做多少功？



解：重心上的电势为：

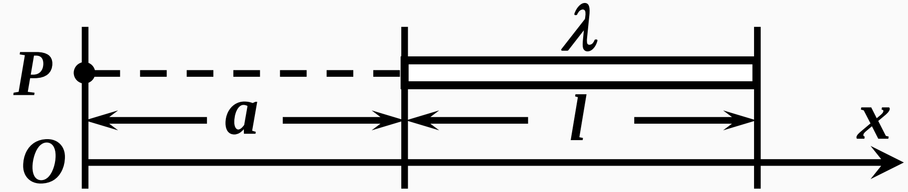
$$V_p = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{-2q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{3q}{4\pi\varepsilon_0 \sqrt{3}a}(1-1-2) = -\frac{\sqrt{3}q}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

所求外力做的功为：

$$A' = -A = -Q(V_\infty - V_P) = QV_P = -\frac{\sqrt{3}qQ}{2\pi\varepsilon_0 a}$$

$$V_p = \int_p^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

4、一个均匀的带电细杆，其长为 l =15.0cm，电荷线密度为 λ=2.0×10^{-7}C/m，试求：细杆的延长线与杆的一端 a =5.0cm 处的电势。

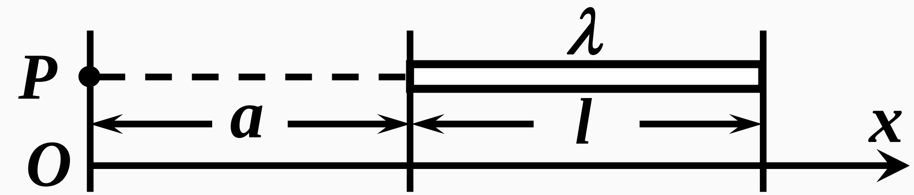


解：沿杆取 x 轴，其反向端点取作原点，由电势叠加原理，可得

$$V = \int_0^l \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 (l+a-x)} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln\frac{a+l}{a}$$

$$= 9\times10^9 \times 2.0\times10^{-7} \times \ln\frac{5.0+15.0}{5.0} = 2.5\times10^3 (\mathrm{V})$$

推广： 如图，长为l、电荷线密度为λ的均匀带电线段，求其延长线上p点的场强和电势。



解：（1）电场强度： $dE = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \dfrac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 x^2}$

$$E_p = \int dE = \int_a^{a+l} \frac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 x^2} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a+l}\right)$$

(2) $dU = \dfrac{dq}{4\pi\varepsilon_0 x} = \dfrac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 x}$ $\qquad U = \int dU = \int_a^{a+l} \dfrac{\lambda dx}{4\pi\varepsilon_0 x} = \dfrac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \ln \dfrac{a+l}{a}$

$$V_p = \int_p^\infty \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

5、两个均匀带电的同心球面，半径分别为R_1=5.00cm，R_2=10.0cm，电量分别为q_1=3.30×10^{-9}C，q_2=0.670×10^{-9}C。试求：内、外球面及空间各 r 处的电势。

解：(1) $r \le R_1, V_1 = \dfrac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 R_1} + \dfrac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$

$$= 9\times10^9 \times \left(\frac{3.30\times10^{-9}}{5.00\times10^{-2}} + \frac{0.670\times10^{-9}}{10.00\times10^{-2}}\right) = 654.3(\mathrm{V})$$

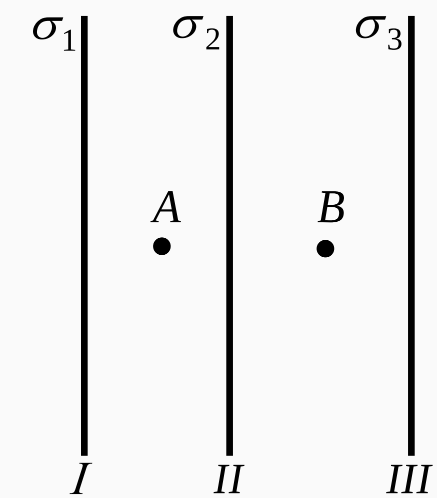
$$R_1 \le r \le R_2, V_2 = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0 r} + \frac{q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$$r = R_2, V_{R_2} = \frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 R_2} = 9\times10^9 \times \frac{(3.30+0.670)\times10^{-9}}{10.00\times10^{-2}} = 357.3(\mathrm{V})$$

$$r \ge R_2, V_3 = \frac{q_1+q_2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

$$V_p=\int_p^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}$$

6、如图所示，三块互相平行的均匀带电大平面，电荷面密度为$\sigma_1=1.2\times10^{-4}C/m^2$，$\sigma_2=2.0\times10^{-5}C/m^2$，$\sigma_3=1.1\times10^{-4}C/m^2$。A点与平面$II$相距为5. 0cm，B点与平面$II$相距7. 0cm。试求：(1)计算A、B两点的电势差；(2)设把电量$q_0=-1.0\times10^{-8}C$的点电荷从A点移到B点，外力克服电场力作多少功？



解：(1)A、B两点的电势差

$$V_A-V_B=\int_A^B\vec{E}\cdot d\vec{l}=\frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_1-\sigma_2-\sigma_3)\cdot d_1+\frac{1}{2\varepsilon_0}(\sigma_1+\sigma_2-\sigma_3)\cdot d_2$$

$$=\frac{(12-2.0-11)\times10^{-5}\times5.0\times10^{-2}+(12+2.0-11)\times10^{-5}\times7.0\times10^{-2}}{2\times8.85\times10^{-12}}$$

$$=9.04\times10^{4}(\mathrm{V})$$

(2)外力克服电场力作功

$$A_{外}=-A_e=-q_0(V_A-V_B)=1.0\times10^{-8}\times9.04\times10^{4}=9.04\times10^{-4}(\mathrm{V})$$

练习题（二十四）

1、一均匀带电球体，半径为R，体电荷密度为ρ。（1）用高斯定律求出球内外电场强度分布；（2）求球内外电势分布，以无穷远处为电势零点；（3）画出E-r和V-r的函数曲线；

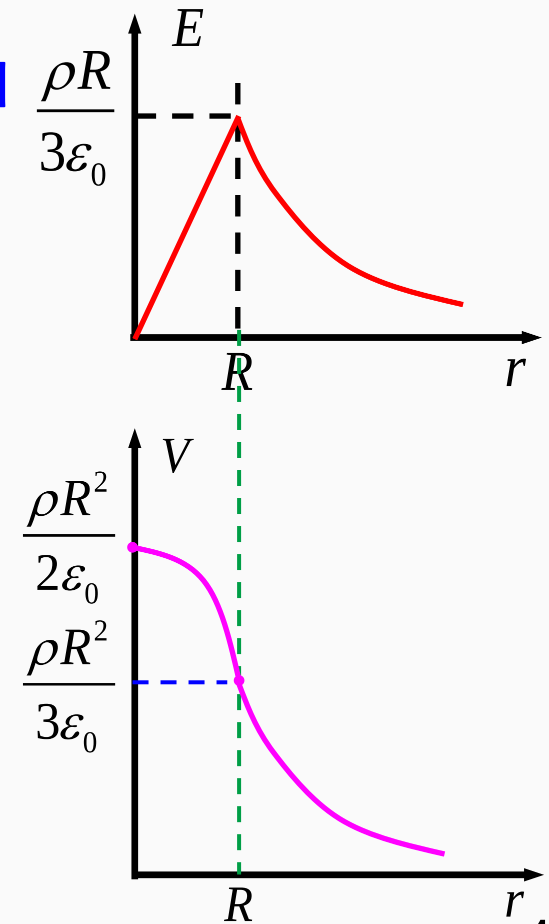
解：（1）各处场强方向都是$\vec{r}$方向

由高斯定理 $\Phi_e=\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S}=\dfrac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$ 得

$$E\cdot 4\pi r^2=\begin{cases}\dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot\dfrac{4}{3}\pi r^3 & (0,R)\\[2ex] \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}\cdot\dfrac{4}{3}\pi R^3 & (R,\infty)\end{cases}$$

$$E=\begin{cases}\dfrac{\rho r}{3\varepsilon_0} & (0,R)\\[2ex] \dfrac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} & (R,\infty)\end{cases}$$

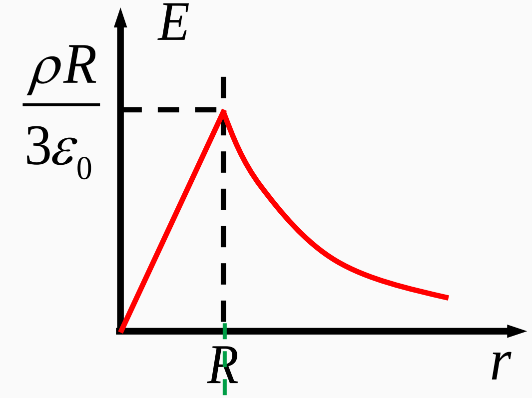
（3）如右图

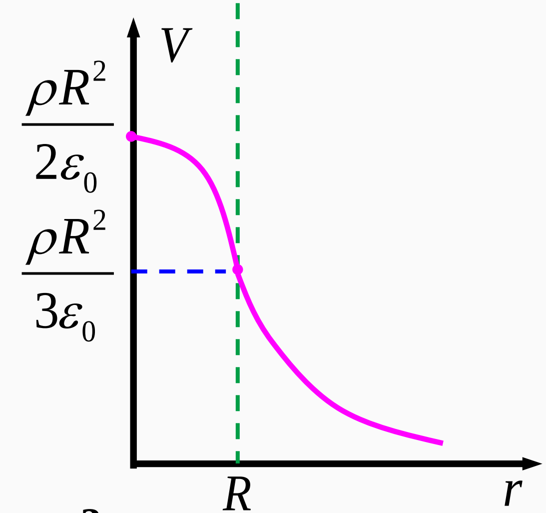


$$V_p = \int_p^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

1、一均匀带电球体，半径为R，体电荷密度为ρ。(1) 用高斯定律求出球内外电场强度分布；(2) 求球内外电势分布，以无穷远处为电势零点；(3) 画出E-r和V-r的函数曲线；

(3) 如右图





(2) 当r≤R时，

$$V_{\text{int}} = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_r^{R} E_{\text{int}} \cdot dr + \int_R^{\infty} E_{out} \cdot dr$$

$$= \int_r^{R} \frac{\rho}{3\varepsilon_0} r \cdot dr + \int_R^{\infty} \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \cdot dr$$

$$= \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(R^2 - r^2) + \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_0}$$

$$= \frac{\rho}{6\varepsilon_0}(3R^2 - r^2)$$

当r≥R时，

$$V_{out} = \int_r^{\infty} \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_R^{\infty} E_{out} \cdot dr = \int_R^{\infty} \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2} \cdot dr = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0}$$

 $V_p=\int_p^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}$

2、电荷q均匀分布在半径为R的非导体球内：(1) 求证离中心r ($r<R$) 远处的电势由下式 $V=\dfrac{q(3R^2-r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$ ；(2) 依照这一表达式，在球心处电势 V 不为零，这是否合理？

解：(1) $$V_r=\frac{\rho\cdot\frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi\varepsilon_0 r}+\int_r^R\frac{\rho\cdot 4\pi r^2}{4\pi\varepsilon_0 r}dr=\frac{\rho r^2}{3\varepsilon_0}+\frac{\rho(R^2-r^2)}{2\varepsilon_0}=\frac{\rho(3R^2-r^2)}{6\varepsilon_0}$$

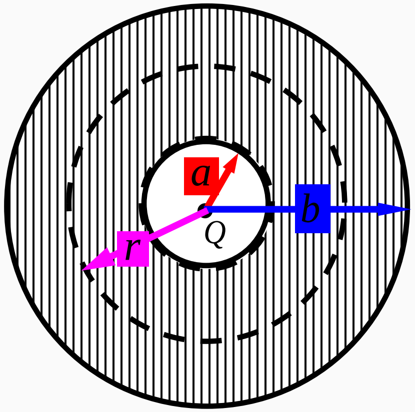
$$=\frac{(3R^2-r^2)}{6\varepsilon_0}\cdot\frac{q}{\frac{4}{3}\pi r^2}=\frac{q\cdot(3R^2-r^2)}{8\pi\varepsilon_0 R^3}$$

(2) $V_{r=0}=\dfrac{3q}{8\pi\varepsilon_0 R}\neq 0$，合理。

因为从球心处将单位正电荷移到无穷远，电场力做功不为零。

$$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$$

3、在图示的球形区域 $a<r<b$中，已知电荷体密度为$\rho=A/r$，式中 A 为常数，r 是距球心的距离。在其半径为a的封闭空腔中心($r=0$)处，有一点电荷Q，试求：空间各 r 处的电场强度。



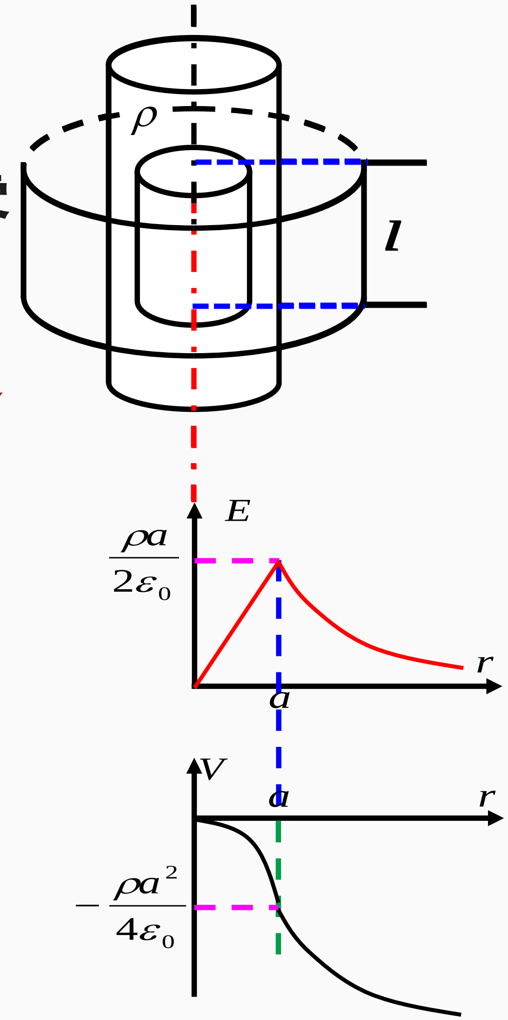
解：(1)由高斯定理 $\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \dfrac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$ 得

$$E\cdot 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(Q+\int_a^r \rho dV\right) = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(Q+\int_a^r \frac{A}{r}\cdot 4\pi r^2 dr\right)$$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\left(Q+2\pi A(r^2-a^2)\right)$$

$\Phi_e=\oint_S\vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$　$V_p=\int_p^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{l}$

4、一无限长均匀带电圆柱，体电荷密度为ρ，截面半径为a。(1)用高斯定律求出柱内外电场强度分布；(2)求出柱内外电势分布，以轴线为电势零点；(3)画出E-r和V-r的函数曲线。



解：(1)作与带电圆柱同轴而截面半径为 r，长度为 l 的圆柱面（两端封顶）的高斯面。

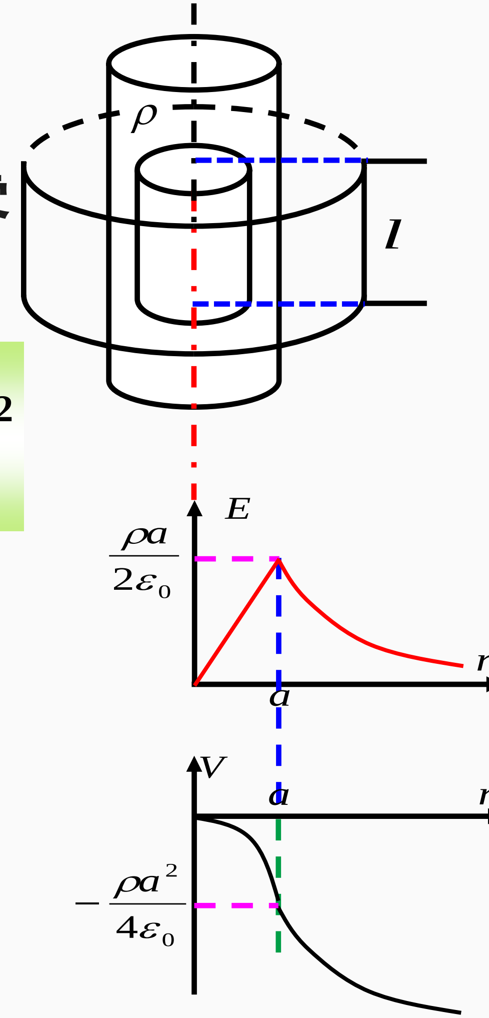
由高斯定理 $\Phi_e=\oint_S\vec{E}\cdot d\vec{S}=\frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}\Rightarrow E\cdot 2\pi rl=\frac{q_{\text{int}}}{\varepsilon_0}$

当$r\le a$时，$q_{\text{int}}=\rho\pi r^2 l\Rightarrow E_{\text{int}}=\frac{\rho r}{2\varepsilon_0}$

当$r\ge a$时，$q_{\text{int}}=\rho\pi a^2 l\Rightarrow E_{out}=\frac{a^2\rho}{2\varepsilon_0 r}$

$\Phi_e = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{\sum q_i}{\varepsilon_0}$ $\quad V_p = \int_p^{\infty} \vec{E}\cdot d\vec{l}$

4、一无限长均匀带电圆柱，体电荷密度为ρ，截面半径为a。(1) 用高斯定律求出柱内外电场强度分布；(2) 求出柱内外电势分布，以轴线为电势零点；(3) 画出E-r和V-r的函数曲线。



(2) 当$r \le a$时，$$V_{int} = \int_r^0 \vec{E}_{int}\cdot d\vec{r} = \int_r^0 \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} dr = -\frac{\rho}{4\varepsilon_0} r^2$$

当$r \ge a$时，

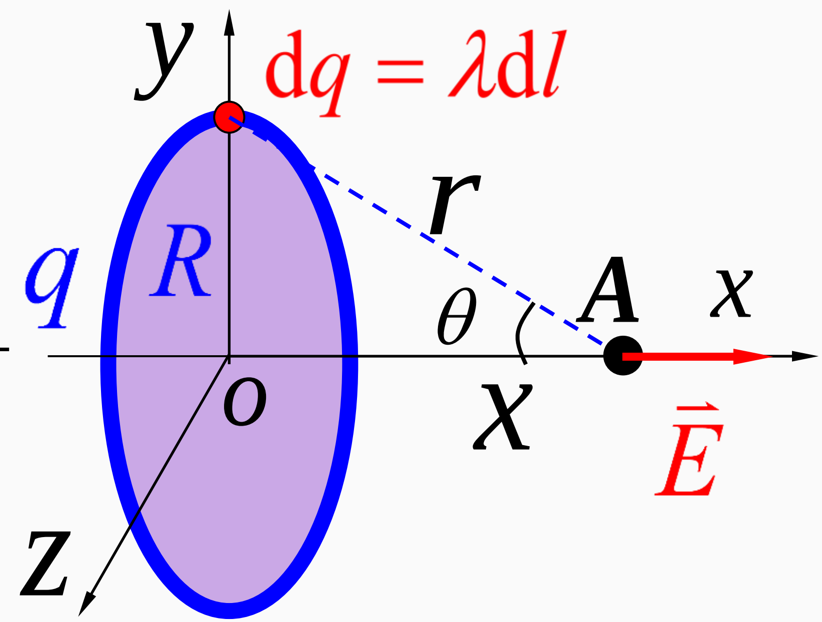
$$V_{out} = \int_r^0 \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_r^a E_{out}\cdot dr + \int_a^0 E_{int}\cdot dr$$

$$= \int_r^a \frac{a^2\rho}{2\varepsilon_0 r} dr + \int_a^0 \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} dr = \frac{a^2\rho}{4\varepsilon_0}\left(2\ln\frac{a}{r} - 1\right)$$

(3) E-r和V-r的函数曲线如右图

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$

5、半径为R的细圆环，均匀带电荷q，求：(1)与环面垂直的中心轴线上，距环心为x处的A点的电势；利用电场强度和电势的关系，计算A点的电场强度。



解 $$\vec{E} = -\nabla V$$

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{1/2}}$$

$$E = E_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$= -\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{q}{4\pi\,\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{1/2}}\right] = \frac{qx}{4\pi\,\varepsilon_0 (x^2 + R^2)^{3/2}}$$