合 肥 工 业 大 学 试 卷 （A）

2020～2021 学年第 一 学期　课程代码 1400211B　课程名称 高等数学 A(上)　学分 6　课程性质:必修☑、选修☐、限修☐　考试形式:开卷☐、闭卷☑

专业班级（教学班）__________　考试日期 2021.1.12　命题教师 高等数学课程组　系（所或教研室）主任审批签名 __________

一、填空题（每小题 3 分,共 15 分）

1. $\lim\limits_{x\to\infty}(x\arctan\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x}\arctan x)=$_________.

2. 曲线 $y-x+\mathrm{e}^{y}=0$ 在点 $x=1$ 处的切线方程为 $y=$_________.

3. 函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-x}{1+x^{2n}}$ 的间断点为 $x=$_________.

4. 当 $x\to 0$ 时，$\ln\cos x$ 与 x^{n} 是同阶无穷小量，则 $n=$_________.

5. 将曲边梯形 $0\le y\le\arctan x, 0\le x\le 1$ 绕 y 轴旋转一周所得旋转体体积为_________.

二、选择题（每小题 3 分,共 15 分）

1．设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\arctan\dfrac{|x|}{x-1}$，则下列结论不正确的是（　　）.

（A）当 $x\to+\infty$ 时，$y=f(x)$ 有渐近线 $y=\dfrac{\pi}{4}$　（B）当 $x\to-\infty$ 时，$y=f(x)$ 有渐近线 $y=-\dfrac{\pi}{4}$

（C）当 $x\to 0^{+}$ 时，$y=f(x)$ 有渐近线 $x=0$　（D）当 $x\to 1^{-}$ 时，$y=f(x)$ 有渐近线 $x=1$

2．设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内可导，且 $\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ 存在，则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导的一个充分条件为（　　）.

（A）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在　（B）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{x}$ 存在

（C）$f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续　（D）$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 在点 $x=0$ 处可导

3．设曲线 $y=f(x)$ 的参数方程为 $x=\mathrm{e}^{-t}-1, y=t^{2}$，则当 $-1<x<0$ 时，$y=f(x)$（　　）.

（A）单调递减且图形为凹的　（B）单调递减且图形为凸的

（C）单调递增且图形为凹的　（D）单调递增且图形为凸的

4．设函数 $f(x)$ 连续，则下列结论不成立的是（　　）.

（A）$\int_0^{\pi}f(\sin x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin x)\,\mathrm{d}x$　（B）$\int_0^{\pi}f(\cos x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos x)\,\mathrm{d}x$

（C）$\int_0^{\pi}f(\sin^2 x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\sin^2 x)\,\mathrm{d}x$　（D）$\int_0^{\pi}f(\cos^2 x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(\cos^2 x)\,\mathrm{d}x$

5．设反常积分 $I_1=\int_0^{+\infty}\max\{\dfrac{1}{\sqrt{x}},\dfrac{1}{x^2}\}\,\mathrm{d}x$，$I_2=\int_0^{+\infty}\min\{\dfrac{1}{\sqrt{x}},\dfrac{1}{x^2}\}\,\mathrm{d}x$，则（　　）.

（A）I_1 和 I_2 都收敛　（B）I_1 和 I_2 都发散

（C）I_1 收敛，I_2 发散　（D）I_1 发散，I_2 收敛

三、计算下列各题（每小题 6 分，共 36 分）

1．求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{n}\dfrac{x}{n^2+x}\,\mathrm{d}x$.

2．求方程 $\int_{-1}^{x}t\mathrm{e}^{\cos t}\,\mathrm{d}t=0$ 的实根.

3．设函数 $f(x)=\arctan x$，如果 $f(x)=xf'(\xi)$，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\xi^2}{x^2}$.

4．设函数 $y=\begin{cases}-x-1, & -1\le x\le 0,\\ \sqrt{x}, & 0<x\le 1\end{cases}$ 的反函数为 $x=\varphi(y)$，计算 $\int_{-1}^{1}\varphi(y)\,\mathrm{d}y$.

5．计算 $\int_{-1}^{1}\dfrac{\ln(1+|x|)}{1+\mathrm{e}^{x}}\,\mathrm{d}x$.

6．求微分方程 $y'-\dfrac{1}{x}y=x\mathrm{e}^{-x}\,(x>0)$ 的特解 $y=y(x)$，使得当 $x\to 0^{+}$ 时，$y(x)\sim x$.

四、（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)=\begin{cases}ax+1, & x<0,\\ b\mathrm{e}^{2x}, & x\ge 0\end{cases}$ 可导. ⑴求常数 a,b；⑵求 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

五、（本题满分 12 分）

设函数 $f(x)$ 可导，且 $\int_0^1[f(x)+xf(xt)]\,\mathrm{d}t=1$. ⑴建立 $f(x)$ 所满足的一阶微分方程；⑵求 $f(x)$ 的表达式.

六、（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上可导，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$. 若对任意的 $n=1,2,\cdots$，有 $f(2n-1)>f(2n+1)>f(2n+2)>f(2n)$，证明数列 $\{f(n)\}$ 收敛.