2020－2021 第一学期《高等数学 A》评分标准

一、填空题（每小题 3 分,共 15 分）

1．1；　2．$\frac{1}{2}(x-1)$；　3．-1；　4．2；　5．$\frac{1}{2}\pi(\pi-2)$．

二、选择题（每小题 3 分,共 15 分）

1．D；　2．C；　3．A；　4．B；　5．D．

三、计算下列各题（每小题 6 分，共 36 分）

1．【解法一】
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{x}{n^2+x}dx=\lim_{n\to\infty}[n-n^2\ln(1+\frac{1}{n})] \quad \cdots\cdots 4'$$
$$=\cdots=\frac{1}{2} \quad \cdots\cdots 6'$$
．

【解法二】由于 $\int_0^n \frac{x}{n^2+n}dx\le\int_0^n \frac{x}{n^2+x}dx\le\int_0^n \frac{x}{n^2}dx$，得 $\frac{n}{2(n+1)}\le\int_0^n \frac{x}{n^2+x}dx\le\frac{1}{2}$，

……3'

且 $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2(n+1)}=\frac{1}{2}$，所以 $\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{x}{n^2+x}dx=\frac{1}{2}$．　　……6'

【解法三】$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{x}{n^2+x}dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k}\frac{x}{n^2+x}dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k}{n^2+\xi_k}$，$k-1\le\xi_k\le k$ 。

……3'

由于 $\frac{n}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k}{n}\cdot\frac{1}{n}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k}{n^2+\xi_k}\le\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k}{n}\cdot\frac{1}{n}$，且 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k}{n}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}$, $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$，所以 $\lim_{n\to\infty}\int_0^n \frac{x}{n^2+x}dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{\xi_k}{n^2+\xi_k}=\frac{1}{2}$．　　……6'

2．【解】　令 $f(x)=\int_{-1}^{x}te^{\cos t}dt$，显然 $f(-1)=0$，故 $x=-1$ 为一个实根．　　……2'

又因为 $te^{\cos t}$ 是奇函数，由积分的奇偶性可得 $f(1)=0$，故 $x=1$ 也为一个实根．　　……4'

由于 $f'(x)=xe^{\cos x}$，当 $x<0$ 时，$f'(x)<0$，$f(x)$ 单调递减；当 $x>0$ 时，$f'(x)>0$，$f(x)$ 单调递增，所以方程 $\int_{-1}^{x}te^{\cos t}dt=0$ 的实根为 $x=-1$ 和 $x=1$．　　……6'

本题也可用零点定理．

3．【解】　$f(x)=xf'(\xi)$ 即 $\arctan x=x\cdot\frac{1}{1+\xi^2}$，得 $\xi^2=\frac{x-\arctan x}{\arctan x}$，　　……4'

所　以

$$\lim_{x\to 0}\frac{\xi^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^2\arctan x}=\lim_{x\to 0}\frac{x-\arctan x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{1+x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3(1+x^2)}=\frac{1}{3}\quad. \qquad \cdots\cdots 6'$$

4.【解法一】 经计算得 $\varphi(y)=\begin{cases}-y-1, & -1\le y\le 0,\\ y^2, & 0<y\le 1,\end{cases}$ ……3'

所以

$$\int_{-1}^{1}\varphi(y)\mathrm{d}y=\int_{-1}^{0}(-y-1)\mathrm{d}y+\int_{0}^{1}y^2\mathrm{d}y=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}. \qquad \cdots\cdots 6'$$

【解法二】 $\int_{-1}^{1}\varphi(y)\mathrm{d}y=\int_{-1}^{0}\varphi(y)\mathrm{d}y+\int_{0}^{1}\varphi(y)\mathrm{d}y\overset{x=\varphi(y)}{=}\int_{0}^{-1}x(-\mathrm{d}x)+\int_{0}^{1}x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\mathrm{d}x$ ……3'

$$=\int_{-1}^{0}x\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\sqrt{x}\mathrm{d}x=-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=-\frac{1}{6}. \qquad \cdots\cdots 6'$$

5.【解】原式 $\overset{x=-t}{=}\int_{1}^{-1}\frac{\ln(1+|t|)}{1+\mathrm{e}^{-t}}(-\mathrm{d}t)=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^t\ln(1+|t|)}{\mathrm{e}^t+1}\mathrm{d}t=\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^x\ln(1+|x|)}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x$， ……3'

所以

$$\text{原式}=\frac{1}{2}[\int_{-1}^{1}\frac{\ln(1+|x|)}{1+\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x+\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^x\ln(1+|x|)}{\mathrm{e}^x+1}\mathrm{d}x]=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\ln(1+|x|)\mathrm{d}x=\int_{0}^{1}\ln(1+x)\mathrm{d}x$$

$$=[x\ln(1+x)-x+\ln(1+x)]\Big|_0^1=2\ln 2-1. \qquad \cdots\cdots 6'$$

6.【解】 通解为 $y=e^{\int\frac{1}{x}dx}(\int xe^{-x}e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C)=e^{\ln x}(\int xe^{-x}e^{-\ln x}dx+C)=x(C-e^{-x})$. ……3'

$\lim_{x\to 0^+}\frac{y}{x}=\lim_{x\to 0^+}(C-e^{-x})=C-1=1$，所以 $C=2$，故所求特解为 $y=x(2-e^{-x})$. ……6'

四、(本题满分 12 分)【解】 (1)由 $f(0-0)=f(0+0)=f(0)$ 及 $f_-'(0)=f_+'(0)$ 得 $1=b$ 及 $a=2b$，解得 $a=2,b=1$. ……8'

(2)【解法一】 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x<0,\\ e^{2x}, & x\ge 0,\end{cases}$ 故 $\int f(x)dx=\begin{cases}x^2+x+C, & x<0,\\ \frac{1}{2}e^{2x}+C_1, & x\ge 0,\end{cases}$ 由 $C=\frac{1}{2}+C_1$，得

$C_1=C-\frac{1}{2}$，所以 $\int f(x)dx=\begin{cases}x^2+x+C, & x<0,\\ \frac{1}{2}e^{2x}+C-\frac{1}{2}, & x\ge 0\end{cases}=\begin{cases}x^2+x, & x<0,\\ \frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}, & x\ge 0\end{cases}+C$. ……12'

【解法二】

$$\int f(x)dx=\int_0^x f(t)dt+C=\begin{cases}\int_0^x(2t+1)dt, & x<0,\\ \int_0^x e^{2t}dt, & x\ge 0\end{cases}+C=\begin{cases}x^2+x, & x<0,\\ \frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}, & x\ge 0\end{cases}+C. \qquad \cdots\cdots 12'$$

五、(本题满分 12 分)【解】 ⑴由于$\int_0^1[f(x)+xf(xt)]\mathrm{d}t=f(x)+\int_0^1 xf(xt)\mathrm{d}t$， ……2'

且$\int_0^1 xf(xt)\mathrm{d}t\overset{xt=u}{=}\int_0^x f(u)\mathrm{d}u$， ……6'

所以

$$f(x)+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u=1, \qquad (*)$$

进而$\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}[f(x)+\int_0^x f(u)\mathrm{d}u]=0$，得 $f'(x)+f(x)=0$，

即为所求 $f(x)$ 所满足的一阶微分方程. ……8'

⑵由 $f'(x)+f(x)=0$ 解得 $f(x)=Ce^{-x}$，代入(*)式，所以$Ce^{-x}+\int_0^x Ce^{-u}\mathrm{d}u=1$，可得$C=1$，

故 $f(x)=e^{-x}$. ……12'

六、(本题满分 10 分)【证】 由题意知 $f(1)>f(3)>f(5)>\cdots>f(2)$，故数列$\{f(2n-1)\}$单调下降且有下界，从而数列$\{f(2n-1)\}$收敛，记$\lim\limits_{n\to\infty}f(2n-1)=a$.

同理，$f(1)>\cdots>f(6)>f(4)>f(2)$，故数列$\{f(2n)\}$单调上升且有上界，从而数列$\{f(2n)\}$收敛，记$\lim\limits_{n\to\infty}f(2n)=b$. ……6'

又由拉格朗日中值定理得

$$f(2n)-f(2n-1)=f'(\xi_n), \qquad ①$$

其中$2n-1<\xi_n<2n$. ……8'

当$n\to\infty$时，$\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n=+\infty$. 由$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$知$\lim\limits_{n\to\infty}f'(\xi_n)=0$. 在①式两边令$n\to\infty$，得$b-a=0$，故有$a=b$，即$\lim\limits_{n\to\infty}f(2n-1)=\lim\limits_{n\to\infty}f(2n)$，所以数列$\{f(n)\}$收敛. ……10'