2022-2023 第二学期《高等数学 A》（下）期末考试试卷参考答案

一、填空题（每小题 3 分，共 15 分）

(1) 2；　(2) 0；　(3) 2；　(4) 3；　(5) $x+y-z-1=0$

二、选择题　(每小题 3 分，共 15 分)

（1） A　（2） B　（3） C　（4） D　（5） C

三．(本题 10 分) 计算二重积分 $I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_y^1 e^{-x^2}\mathrm{d}x$.

解：原式=$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x e^{-x^2}\mathrm{d}y \quad =\int_0^1 e^{-x^2}\cdot x\mathrm{d}x \quad =-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2e}$.

四．(本题 10 分) 设函数 $z=f(xy,x+y)$，其中 f 具有二阶连续偏导数，求 $\frac{\partial z}{\partial x}$，$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

解：$z'_x=yf_1'+f_2'$，

$$z''_{xy}=f_1'+y(xf''_{11}+f''_{12})+(xf''_{21}+f''_{22})$$

$$=f_1'+xyf''_{11}+(x+y)f''_{12}+f''_{22}.$$

五．(本题 10 分) 求椭圆 $\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ x+y+z=4\end{cases}$ 上的点到原点的距离的最大值与最小值。

解：设椭圆 $\begin{cases}z=x^2+y^2,\\ x+y+z=4\end{cases}$ 上点为 (x,y,z)，则所求距离为 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

令拉格朗日函数为 $F=x^2+y^2+z^2+\lambda(x^2+y^2-z)+\mu(x+y+z-4)$,

解方程组 $\begin{cases}F_x=2x+2\lambda x+\mu=0,\\ F_y=2y+2\lambda y+\mu=0,\\ F_z=2z-\lambda z+\mu=0,\\ x^2+y^2=z,\\ x+y+z=4\end{cases}$

得 $x=y=1,z=2$ 或 $x=y=-2,z=8$，

故 $d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\sqrt{6}$ 或 $6\sqrt{2}$，即距离的最小值、最大值分别为 $\sqrt{6}$ 、$6\sqrt{2}$.

六．（本题 12 分） 计算 $\int\limits_L (x+y\sin x+y^3)dx-(x^3+x-y)dy$ ，其中 L 为上半圆周

$x^2+y^2=4,(y\ge 0)$，从起点 $A(-2,0)$ 到终点 $B(2,0)$.

【解】补充直线 $\overline{BA}: y=0, x:2\to -2$，

令 $P=x+y\sin x+y^3$， $Q=-(x^3+x-y)$，则由格林公式可得,

$$\oint_{L+\overline{BA}} =-\iint_D (\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y})dxdy=\iint_D (3x^2+3y^2+\sin x+1)dxdy$$

$$=3\int_0^{\pi} d\theta\int_0^2 r^2 rdr+2\pi=14\pi,$$

且有 $\int_{\overline{BA}} =\int_2^{-2} xdx=0$，

故 $\int_L (x+y\sin x+y^3)dx-(x^3+x-y)dy=\oint_{L+\overline{BA}} -\int_{\overline{BA}} =14\pi.$

七．(本题 12 分） 设曲面 Σ 为下半球面 $z=-\sqrt{1-x^2-y^2}$ 的下侧，计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}\frac{(z+1)^2dxdy-2xdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

解． $I=\iint_{\Sigma}\frac{(z+1)^2dxdy-2xdydz}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\iint_{\Sigma}(z+1)^2dxdy-2xdydz$

补平面 $\Sigma_1: z=0(x^2+y^2\le 1)$，上侧，

则由 Gauss 公式可得

$$\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}(z+1)^2dxdy-2xdydz=\iiint_{\Omega}2zdV =2\int_{-1}^0 zdz\iint_{x^2+y^2\le 1-z^2} dxdy=-\frac{\pi}{2},$$

$$\iint_{\Sigma_1}(z+1)^2dxdy-2xdydz=\iint_{\Sigma_1}1dxdy=\iint_{x^2+y^2\le 1} dxdy=\pi,$$

故 $I=\oiint_{\Sigma+\Sigma_1}-\iint_{\Sigma_1}=-\frac{3\pi}{2}.$

八．(本题 12 分） 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n}$ 的收敛域与和函数，并求数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{4^n}$ 的值．

解．（1） $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+2)x^{2n+2}}{(n+1)x^{2n}}\right|=x^2<1$，得收敛区间为（$-1,1$).

在 $x=\pm 1$ 时级数均发散，故收敛域为$(-1,1)$.

若令 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n}=\frac{1}{2}(\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}+\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n})$，则有

$\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}=\frac{1}{1-x^2}$，

$\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)x^{2n}=(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n+1})'=(\frac{x}{1-x^2})'=\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}$,

可得　$s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n}=\frac{1}{2}(\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}+\frac{1}{1-x^2})=\frac{1}{(1-x^2)^2}$, $x\in(-1,1)$.

【解 2】令 $t=x^2$，级数为 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n$，　则 $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1}{n+2}\right|=1$，即 $-1<t<1$，

且在 $t=\pm 1$ 时新级数均发散，新级数收敛域为 $|t|<1$，从而 $|x^2|<1$，

故原级数收敛域为 $-1<x<1$.

若令 $s(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^{2n}$，$-1<x<1$；

再令 $h(t)=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n=\sum_{n=0}^{\infty}(t^{n+1})'=(\sum_{n=0}^{\infty}t^{n+1})'=(\frac{t}{1-t})'=\frac{1}{(1-t)^2}$，$-1<t<1$.

故原级数和函数 $s(x)=\frac{1}{(1-x^2)^2}$，　$x\in(-1,1)$.

（2）$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{4^n}=s(\frac{1}{2})-1=\frac{7}{9}$.

九、（本题满分 4 分）

证明：因为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，

故部分和数列 $\{s_n\}$ 收敛，从而存在 M，使得 $\forall n$，$|s_n|\le M$.

从而 $|a_n(a_1+a_2+\cdots+a_n)|=|a_ns_n|\le M|a_n|$，

由比较判别法可知，

$\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_n(a_1+a_2+\cdots+a_n)\right|$收敛，即$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(a_1+a_2+\cdots+a_n)$绝对收敛.