合 肥 工 业 大 学 线 性 代 数 试 卷 （A） 评 分 标 准

2023～2024 学年第__一__学期　课程代码__1400071B__　课程名称__线性代数__　命题教师__集体__　系（所或教研室）主任审批签名__田可雷__

教学班级________　学生姓名________　学号________　考试日期 2023 年 12 月 10 日 10:20-12:20　成绩________

一、填空题（每小题 3 分，共 18 分）

请将你的答案对应填在横线上：

1. $\frac{1}{2}$，**2.** $\begin{pmatrix} 12 & 0 \\ -10 & 4 \end{pmatrix}$，**3.** 3，**4.** 3，

5. 4，**6.** 2.

二、选择题（每小题 3 分，共 18 分）

请将你所选择的字母 A, B, C, D 之一对应填在下列表格里：

题号	1	2	3	4	5	6
答案	B	D	D	C	A	B

三、（本题 12 分）

$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. (1) 求 $|\boldsymbol{A}|$; (2) 求 $\boldsymbol{A}_{21}+\boldsymbol{A}_{22}+\boldsymbol{A}_{23}+\boldsymbol{A}_{24}$, 其中 $\boldsymbol{A}_{ij}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的 (i,j) 位置元的代数余子式.

【解】 (1) $|\boldsymbol{A}| \overset{c_1-2c_3}{\underset{c_1-4c_4}{=\!=\!=}} \begin{vmatrix} -14 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

$= -14 =$

(2) $\boldsymbol{A}_{21}+\boldsymbol{A}_{22}+\boldsymbol{A}_{23}+\boldsymbol{A}_{24} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{c_i-c_2}{\underset{i=1,3,4}{=\!=\!=}} |\boldsymbol{A}|$

从而 $\boldsymbol{A}_{21}+\boldsymbol{A}_{22}+\boldsymbol{A}_{23}+\boldsymbol{A}_{24} = -14$

四、（本题 12 分）

已知 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. 若 $\boldsymbol{XA} = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{AB}$, $\boldsymbol{AY} = \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{AB}$.

(1) 求 $\boldsymbol{Y}$; (2) 求 $\boldsymbol{X}^2$.

【解】 (1) $|\boldsymbol{A}| \neq 0$, $\boldsymbol{Y} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}$

$= \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{ABA}^{-1} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{A}^{-1}$

从而 $\boldsymbol{X}^2 = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})^2\boldsymbol{A}^{-1}$

$= \boldsymbol{E}$

五、（本题 12 分）

已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,-1,1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2 = (1,a,-1)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_3 = (a,1,2)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_4 = (4,a^2,-4)^T$, 满足 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示且表示方法不唯一. (1) 求 a; (2) 求上述向量组的秩以及一个极大线性无关组, 并将其余向量用该极大线性无关组线性表示.

【解】 (1) $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 2 & a-2 & 8 \\ 0 & 0 & (a+1)(4-a) & 2a(a-4) \end{pmatrix}$

由条件可知 $a = 4$.

(2) 此时 $(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4) \xrightarrow{\text{初等行变换}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

故该向量组的秩为 2,

极大无关组可取 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$,

$\boldsymbol{\alpha}_3 = 3\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_4 = 4\boldsymbol{\alpha}_2$.

合 肥 工 业 大 学 线 性 代 数 试 卷 （A） 评 分 标 准

2023～2024 学年第＿一＿学期 课程代码＿1400071B＿ 课程名称＿线性代数＿ 命题教师＿集体＿ 系（所或教研室）主任审批签名＿田可雷＿

教学班级＿＿＿＿ 学生姓名＿＿＿＿ 学号＿＿＿＿ 考试日期 2023 年 12 月 10 日 10:20-12:20 成绩＿＿＿＿

六、（本题 10 分） $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&0&1\\2&1&2\end{pmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, 求 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

【解】 增广矩阵 $(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{b})\xrightarrow{\text{初等行变换}}\begin{pmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$

等价于解方程组 $\begin{cases}x_1+x_3&=0\\ \quad x_2&=1\end{cases}$ 取 x_1,x_2 为主未知元, x_3 为自由未知元, 求得一个特解为 $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

对应齐次方程的一组基础解系为 $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$,

$\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b}$ 的通解为 $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+k\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$, 其中 k 为任意实数.

七、（本题 12 分） 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2{x_1}^2+2ax_2x_3(a>0)$ 经过正交变换 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{Py}$ 变为 $b{y_1}^2+{y_2}^2-{y_3}^2$. (1) 求 a,b; (2) 求正交矩阵 $\boldsymbol{P}$.

【解】 (1) 二次型的矩阵为 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&a\\0&a&0\end{pmatrix}$,

则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\begin{pmatrix}b&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ 相似,

故上述矩阵的行列式与迹相等. 由此可得 $a=1$(舍去 -1), $b=2$

分别就 $\lambda=2,1,-1$ 时求解线性方程组 $(\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$, 并进行单位化, 可得:

$\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\lambda=2$ 的一个单位特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,0,0)^T$,

$\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\lambda=1$ 的一个单位特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=(0,\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2})^T$,

$\boldsymbol{A}$ 属于特征值 $\lambda=-1$ 的一个单位特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_3=(0,\frac{-1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2})^T$,

$\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$.

八、（本题 6 分） $\boldsymbol{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)$ 是 3 阶实方阵. 若齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $k(1,1,1)^T$, 其中 k 是任意常数. 证明: 对任意的 $1\leqslant i<j\leqslant 3$, $\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j$ 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的极大线性无关组.

【证明】 由条件齐次线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{0}$ 的通解为 $k(1,1,1)^T$, 其中 k 是任意常数, 可知 $R(\boldsymbol{A})=2$. 由 $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3=\boldsymbol{0}$ 可知 $\boldsymbol{\alpha}_k=-\boldsymbol{\alpha}_i-\boldsymbol{\alpha}_j$, $\{i,j,k\}=\{1,2,3\}$, 从而向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 可由任意的 $1\leqslant i<j\leqslant 3$, $\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j$ 线性表示,

显然有任意的 $1\leqslant i<j\leqslant 3$, $\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j$ 可由向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表示, 故这两个向量组等价.

从而任意的 $1\leqslant i<j\leqslant 3$, $\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j$ 的秩等于 2, 故 $\boldsymbol{\alpha}_i,\boldsymbol{\alpha}_j$ 线性无关, 是向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 的极大线性无关组.