Universidad de Concepción

Tarea 01 - Transformadas Integrales

Física Matemática 2

José Ignacio Rosas Sepúlveda

Marzo 2025 - Abril 2025

Índice

1. Ejercicio 1

Consideremos la siguiente función:

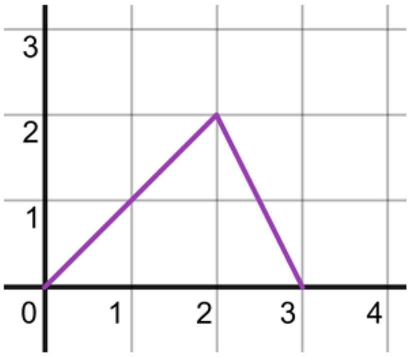

Figura 1: Función a trabajar.

1.1. Encuentre la forma explícita de la función en el intervalo $(-\infty, \infty)$, es decir, encuentre $f(x) = \ldots$.

Solución: Al observar la función dada en la figura 1 notamos que es *seccionalmente continua* definida sobre el intervalo $[0, 3]$, con un punto de discontinuidad en $x = 2$. Su gráfica es el lugar geométrico contenido en $\mathbb{R}^2$, en el que se observa:

- Un segmento de recta con pendiente positiva que pasa por los puntos $(0, 0)$ y $(2, 2)$.
- Un segmento de recta con pendiente negativa que pasa por los puntos $(2, 2)$ y $(3, 0)$.

Considerando la ecuación de la recta (en $\mathbb{R}^2$) dados dos puntos (x_1, y_1), (x_2, y_2),

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)\,, \tag{1}$$

podemos deducir de (1) la ecuación de la recta para cada segmento observado en la figura 1, de modo que:

- Para la recta que pasa por $(x_1, y_1) = (0, 0)$ y $(x_2, y_2) = (2, 2)$, su ecuación sera

$$y = x \tag{2}$$

- Para la recta que pasa por $(x_1, y_1) = (2, 2)$ y $(x_2, y_2) = (3, 0)$, su ecuación sera

$$y = -2x + 6 \tag{3}$$

Así, considerando las ecuaciones (2) y (3), podemos definir a la función $f(x)$ dada en la figura 1 como:

$$f(x) = \begin{cases} x & si \quad 0 \leq x \leq 2 \\ -2x + 6 & si \quad 2 < x \leq 3 \end{cases} \tag{4}$$

Tenemos entonces nuestra función $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ seccionalmente continua cuya ecuación de definición fue vista en (4). Definimos el periodo T de f como $T = 3 - 0$. Consideramos ahora su **extensión periódica** $f_e : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f_e(x) = f\left(x + k_0 T\right) = f(x + 3k_0) \tag{5}$$

donde $k_0 \in \mathbb{Z}$ es un entero tal que $x + 3k_0 \in [0, 3]$. Así, hemos obtenido la expresión explícita de su extensión periódica en todo $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$.

1.2. Encuentre su desarrollo en Serie de Fourier trigonométrica.

Solución: Observamos que la función f satisface las *condiciones de Dirichlet*, es decir:

- La función f se encuentra definida en un intervalo abierto $(0, 0+T) = (0,3)$.
- Tanto función f como su primera derivada f' son seccionalmente continuas en el intervalo abierto $(0,3)$. Donde $f' : (0,3) \to \mathbb{R}$,
$$f'(x) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq x \leq 2 \\ -2 & si \quad 2 < x \leq 3 \end{cases} \tag{6}$$
- f tiene un numero finito de discontinuidad finita, en especifico una sola en el punto $x = 2$.
- f es una función periódica de periodo $T = 3$.

Por lo tanto, podemos aproximar f como una serie de Fourier trigonometrica

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2n\pi}{T}x\right) \tag{7}$$

Donde el periodo de f es $T = 3$.

- Para el coeficiente de Fourier a_0 tendremos
$$a_0 = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)dx$$
Dado que f es seccionalmente continua, entonces
$$a_0 = \frac{2}{3}\int_0^2 xdx + \frac{2}{3}\int_2^3 -2x + 6dx = 2 \tag{8}$$
por lo tanto $a_0 = 2$.
- Para el coeficiente de Fourier a_n tendremos
$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\cos\left(\frac{2n\pi}{3}x\right)dx$$
Dado que f es seccionalmente continua, entonces
$$a_n = \frac{2}{3}\int_0^2 x\cos\left(\frac{2n\pi}{3}x\right)dx + \frac{2}{3}\int_2^3 (-2x+6)\cos\left(\frac{2n\pi}{3}x\right)dx$$
Se resuelve la integral utilizando el software *Wolfram Mathematica*, obteniendo así el coeficiente a_n
$$a_n = \frac{3\left(3\cos\left(\frac{4\pi n}{3}\right) - 2\cos(2\pi n) - 1\right)}{2\pi^2 n^2} \tag{9}$$
- Para el coeficiente de Fourier b_n tendremos
$$b_n = \frac{2}{3}\int_0^3 f(x)\sin\left(\frac{2n\pi}{3}x\right)dx$$
Dado que f es seccionalmente continua, entonces
$$b_n = \frac{2}{3}\int_0^2 x\sin\left(\frac{2n\pi}{3}x\right)dx + \frac{2}{3}\int_2^3 (-2x+6)\sin\left(\frac{2n\pi}{3}x\right)dx$$
Se resuelve la integral nuevamente empleando el software *Wolfram Mathematica*, obteniendo así el coeficiente b_n
$$b_n = \frac{3\left(3\sin\left(\frac{4\pi n}{3}\right) - 2\sin(2\pi n)\right)}{2\pi^2 n^2} \tag{10}$$

Conocidos los coeficientes de Fourier asociados a la función f, reemplazamos en (7) el periodo $T = 3$ y los coeficientes a_0, a_n y b_n, obtenidos en (8), (9) y (10) respectivamente, deduciendo así la Serie de Fourier trigonométrica de la función f dada en (11).

$$f(x) = 2+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3\left(3\cos\left(\frac{4\pi n}{3}\right)-2\cos\left(2\pi n\right)-1\right)}{2\pi^2 n^2}\right]\cos\left(\frac{2n\pi}{3}x\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{3\left(3\sin\left(\frac{4\pi n}{3}\right)-2\sin\left(2\pi n\right)\right)}{2\pi^2 n^2}\right]\sin\left(\frac{2n\pi}{3}x\right) \tag{11}$$

1.3. Encuentre y grafique la extensión impar de la función.

Solución: Para la *extensión impar* de la función f, por definición, estará dada por la función $O_f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$,

$$O_f(x) = \begin{cases} -f(-x) & si \quad -3 \le x < 0 \\ f(x) & si \quad 0 \le x \le 3 \end{cases} \tag{12}$$

Calculamos explícitamente $-f(-x)$ para cada tramo:

$$-f(-x) = \begin{cases} -(-2(-x)+6) & si \quad -3 \le x < -2 \\ -(-x) & si \quad -2 \le x < 0 \end{cases} = \begin{cases} -2x-6 & si \quad -3 \le x < -2 \\ x & si \quad -2 \le x < 0 \end{cases} \tag{13}$$

Entonces la extensión impar (12) explícitamente estará dada por:

$$O_f(x) = \begin{cases} -2x-6 & si \quad -3 \le x < -2 \\ x & si \quad -2 \le x \le 2 \\ -2x+6 & si \quad 2 < x \le 3 \end{cases} \tag{14}$$

A continuación, se muestra en la figura 2 la gráfica de la extensión impar de $f(x)$, donde se observa claramente su simetría respecto al origen, característica fundamental de las funciones impares.

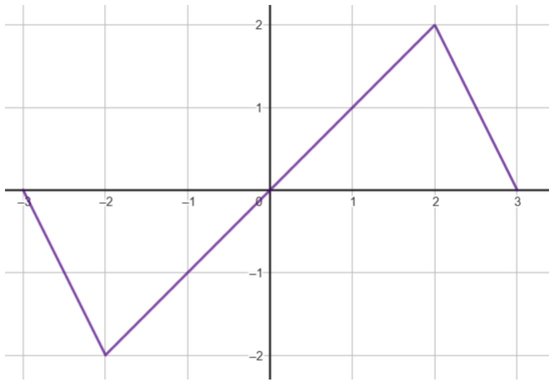

Figura 2: Gráfica de la extensión impar O_f de la función $f(x)$, ilustrando su simetría respecto al origen.

1.4. Calcule la serie de Fourier exponencial de la extensión impar de la función

Solución: Notamos que la extension impar de la función f satisface las *condiciones de Dirichlet*

- O_f es una función periódica de periodo $T = 3 - (-3) = 6$, la cual está definida en el intervalo cerrado $[-3, -3+T] = [-3, 3]$.
- Tanto la función O_f como su primera derivada O'_f son seccionalmente continuas en el intervalo abierto $(-3, 3)$. Donde $O'_f : (-3, 3) \to \mathbb{R}$,
$$O'_f(x) = \begin{cases} -2 & si \quad -3 \le x < -2 \\ 1 & si \quad -2 \le x \le 2 \\ -2 & si \quad 2 < x \le 3 \end{cases} \tag{15}$$
- O_f tiene discontinuidad finita unicamente en los puntos $x_0 = -2$ y $x_1 = 2$.

Por lo tanto, podemos aproximar O_f como una serie de Fourier exponencial

$$O_f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(i\frac{2n\pi}{T}x\right) \tag{16}$$

Donde el periodo de O_f es $T = 6$.

Calculamos el coeficiente de Fourier c_n, el cual esta definido para la forma exponencial y la extenisión impar O_f como

$$c_n = \frac{1}{6}\int_{-3}^{3} O_f(x)\exp\left(-i\frac{2n\pi}{6}x\right)dx \tag{17}$$

Dado que O_f es seccionalmente continua, tenemos

$$c_n = \frac{1}{6}\int_{-3}^{-2}(-2x-6)\exp\left(-i\frac{n\pi}{3}x\right)dx + \frac{1}{6}\int_{-2}^{2} x\exp\left(-i\frac{n\pi}{3}x\right)dx + \frac{1}{6}\int_{2}^{3}(-2x+6)\exp\left(-i\frac{n\pi}{3}x\right)dx \tag{18}$$

Se resuelve la integral (18) utilizando el software *Wolfram Mathematica*, obteniendo la solución

$$c_n = \frac{3i\left(2\sin(\pi n) - 3\sin(\frac{2\pi n}{3})\right)}{\pi^2 n^2} \tag{19}$$

Sin embargo, como $n \in \mathbb{Z}$, notamos que (19) esta indefinido en c_0. Por lo que calculamos c_0 de forma independiente utilizando la ecuación (18) con $n = 0$, tenemos que

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{6}\int_{-3}^{-2}(-2x-6)\exp\left(-i\frac{0\pi}{3}x\right)dx + \frac{1}{6}\int_{-2}^{2} x\exp\left(-i\frac{0\pi}{3}x\right)dx + \frac{1}{6}\int_{2}^{3}(-2x+6)\exp\left(-i\frac{0\pi}{3}x\right)dx \\ &= \frac{1}{6}\int_{-3}^{-2}(-2x-6)\exp(0)\,dx + \frac{1}{6}\int_{-2}^{2} x\exp(0)\,dx + \frac{1}{6}\int_{2}^{3}(-2x+6)\exp(0)\,dx \\ &= \frac{1}{6}\int_{-3}^{-2}(-2x-6)dx + \frac{1}{6}\int_{-2}^{2} xdx + \frac{1}{6}\int_{2}^{3}(-2x+6)dx \\ &= -\frac{1}{6} + 0 + \frac{1}{6} = 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto $c_0 = 0$.

Entonces considerando que (19) se indefine en $n = 0$ a su vez que demostramos que $c_0 = 0$, reemplazamos entonces (19) en (16), donde $T = 6$, finalmente obtenemos la serie de Fourier exponencial para la extensión impar de f, la cual queda expresada como

$$O_f(x) = \sum_{\substack{n=-\infty \\ n\neq 0}}^{\infty} \left[\frac{3i\left(2\sin(\pi n) - 3\sin(\frac{2\pi n}{3})\right)}{\pi^2 n^2}\right]\exp\left(i\frac{n\pi}{3}x\right) \;. \tag{20}$$

2. Ejercicio 2

Considere un pulso triangular de la forma

$$f(t) = \begin{cases} 1 - a|t| & , \text{ si } \quad |t| < \frac{1}{a}, \\ 0 & , \text{ si } \quad |t| > \frac{1}{a}, \end{cases} \quad , \quad a \in \mathbb{R} : 0 < a \tag{21}$$

donde $a > 0$.

2.1. Calcule su transformada de Fourier.

Solución: Para facilitar la manipulación de $f(t)$ en cálculos posteriores, primero reescribimos las desigualdades que definen la función a trozos (21):

$$|t| < \frac{1}{a} \iff -\frac{1}{a} < t < \frac{1}{a} \tag{22}$$

$$|t| > \frac{1}{a} \iff t < -\frac{1}{a} \vee \frac{1}{a} < t \tag{23}$$

Por lo que podemos redefinir la función (21) de la forma

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } \quad t < -\frac{1}{a} \\ 1 - a|t| & , \text{ si } \quad -\frac{1}{a} < t < \frac{1}{a} \\ 0 & , \text{ si } \quad t > \frac{1}{a}, \end{cases} \quad , \quad a \in \mathbb{R} : 0 < a \tag{24}$$

Consideramos la función $g : \left(-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right) \to \mathbb{R}$, $g(t) = 1 - a|t|$. Notamos que

$$g(-t) = 1 - a|(-t)| = 1 - a|t| = g(t)\,.$$

Por lo tanto, g es una función par. Como $f(t) = g(t)$ para $t \in \left(-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right)$ y $f(t) = 0$ en $t \in \left(-\infty, -\frac{1}{a}\right) \cup \left(\frac{1}{a}, \infty\right)$, se concluye que f también es una función par. Dado que además $f(t)$ es una función real, su transformada de Fourier se reduce a la *transformada coseno de Fourier*, la cual utilizaremos de la forma

$$\mathscr{F}\{f(t)\}(\omega) = \mathscr{F}_C\{f(t)\}(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt\,. \tag{25}$$

Dado que $f(t)$ es $1 - at$ en $\left(0, \frac{1}{a}\right)$ y 0 en $\left(\frac{1}{a}, \infty\right)$, la transformada de Fourier se obtiene como:

$$\begin{aligned} \mathscr{F}\{f(t)\}(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{1}{a}} f(t)\cos(\omega t)dt + \int_{\frac{1}{a}}^{\infty} f(t)\cos(\omega t)dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{1}{a}} (1 - at)\cos(\omega t)dt + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{\frac{1}{a}}^{\infty} (0)\cos(\omega t)dt \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\frac{1}{a}} (1 - at)\cos(\omega t)dt \end{aligned} \tag{26}$$

Resolviendo esta integral con el software *Wolfram Mathematica*, obtenemos (27). De este modo, la transformada de Fourier de $f(t)$ queda expresada como sigue

$$\mathscr{F}\{f(t)\}(\omega) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a\left(\cos\left(\frac{\omega}{a}\right) - 1\right)}{\omega^2}\,. \tag{27}$$

2.2. Considere ahora la función f definida en el intervalo $\left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right]$. Calcule el coeficiente de su serie de Fourier exponencial, y compruebe que satisface la relación

$$\mathscr{F}\{f(t)\}(\omega) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} c_n, \quad \text{con} \quad \omega = \frac{2\pi n}{T}.$$

Solución: Sea $f(t)$ una función a trozos definida en el intervalo $\left[-\frac{1}{a}, \frac{1}{a}\right]$ de la forma

$$f(t) = 1 - a|t| = \begin{cases} 1 + at & \text{, si} \quad -\frac{1}{a} \leq t \leq 0 \\ 1 - at & \text{, si} \quad 0 < t \leq \frac{1}{a} \end{cases} \tag{28}$$

Sabemos, por la argumentación expuesta en la sección anterior, que $f(t)$ es una función par. El periodo fundamental de f estará dado por $T = \frac{1}{a} - \left(-\frac{1}{a}\right) = \frac{2}{a}$. Sin embargo, en lo que sigue trabajaremos con T de forma simbólica, sin asignarle un valor numérico especifico. Calculamos el coeficiente c_n de la serie de Fourier exponencial para $f(t)$:

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}} f(t) \exp\left(-i \frac{2n\pi}{T} t\right) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{a}}^{0} f(t) \exp\left(-i \frac{2n\pi}{T} t\right) dt + \frac{1}{T} \int_{0}^{\frac{1}{a}} f(t) \exp\left(-i \frac{2n\pi}{T} t\right) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_{-\frac{1}{a}}^{0} (1 + at) \exp\left(-i \frac{2n\pi}{T} t\right) dt + \frac{1}{T} \int_{0}^{\frac{1}{a}} (1 - at) \exp\left(-i \frac{2n\pi}{T} t\right) dt \end{aligned} \tag{29}$$

Resolviendo la integral utilizando el software *Wolfram Mathematica*, obtenemos c_n:

$$c_n = \frac{aT \sin^2\left(\frac{\pi n}{aT}\right)}{n^2 \pi^2} \tag{30}$$

A partir del resultado obtenido previamente para la Transformada de Fourier de $f(t)$, se tiene:

$$\mathscr{F}\{f(t)\}(\omega) = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a\left(\cos\left(\frac{\omega}{a}\right) - 1\right)}{\omega^2} \tag{31}$$

Sustituyendo $\omega = \frac{2\pi n}{T}$ en (31) y desarrollando, tenemos

$$\begin{aligned} \mathscr{F}\{f(t)\}(\omega) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a\left(\cos\left(\frac{\left(\frac{2\pi n}{T}\right)}{a}\right) - 1\right)}{\left(\frac{2\pi n}{T}\right)^2} \\ &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{aT^2\left(\cos\left(\frac{2\pi n}{aT}\right) - 1\right)}{4\pi^2 n^2} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{aT^2}{2\pi^2 n^2} \frac{\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{aT}\right)\right)}{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{aT^2}{\pi^2 n^2} \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos\left(\frac{2\pi n}{aT}\right)}{2}\right) \end{aligned} \tag{32}$$

Utilizando la identidad trigonométrica $\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2} - \frac{\cos(2\alpha)}{2}$ en (32) tenemos

$$\begin{aligned} \mathscr{F}\{f(t)\}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{aT^2}{\pi^2 n^2} \left(\sin^2\left(\frac{\pi n}{aT}\right)\right) \\ &= \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{aT \sin^2\left(\frac{\pi n}{aT}\right)}{\pi^2 n^2}\right) \end{aligned} \tag{33}$$

Sustituyendo (30) en (33) se obtiene

$$\mathscr{F}\{f(t)\}(\omega) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} c_n \tag{34}$$

Por lo tanto, hemos comprobado que el coeficiente de la serie de Fourier exponencial (30) satisface la relación la relación esperada con la Transformada de Fourier de $f(t)$, confirmando la consistencia entre ambas representaciones.

2.3. Utilizando el teorema de Parseval para la transformada de Fourier, calcule

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^4 dt$$

Solución: Consideremos el pulso triangular definido en (24), ya hemos demostrado en (33) que su transformada de Fourier puede expresarse como

$$\mathscr{F}\{f(t)\}(\omega) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{aT\sin^2\left(\frac{\pi n}{aT}\right)}{\pi^2 n^2}\right) \tag{35}$$

Si ahora tomamos para este pulso triangular la constante a como $a = 1$, tendremos para $f(t)$ y $\mathscr{F}\{f(t)\}(\omega)$ lo siguiente

$$f(t) = \begin{cases} 0 & , \text{ si } \quad t < -1 \\ 1 - |t| & , \text{ si } \quad -1 < t < 1 \\ 0 & , \text{ si } \quad t > 1, \end{cases} \quad , \quad \mathscr{F}\{f(t)\}(\omega) = \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{T\sin^2\left(\frac{\pi n}{T}\right)}{\pi^2 n^2}\right) \tag{36}$$

Continuemos analizando la transformada de Fourier en (36)

$$\begin{aligned} \mathscr{F}\{f(t)\}(\omega) &= \frac{T}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{T\sin^2\left(\frac{\pi n}{T}\right)}{\pi^2 n^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{T^2\sin^2\left(\frac{\pi n}{T}\right)}{\pi^2 n^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi n}{T}\right)}{\left(\frac{\pi^2 n^2}{T^2}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\sin^2\left(\frac{\pi n}{T}\right)}{\left(\frac{\pi n}{T}\right)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi n}{T}\right)}{\left(\frac{\pi n}{T}\right)}\right)^2 \end{aligned} \tag{37}$$

Recordemos que en la sección anterior se definía a ω como

$$\omega = \frac{2\pi n}{T} \Rightarrow \frac{\omega}{2} = \frac{\pi n}{T} \tag{38}$$

Sustituimos (38) en la expresión obtenida en (37), entonces

$$\mathscr{F}\{f(t)\}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right)^2 \tag{39}$$

Dado que el pulso triangular definido en (36) es una función real entonces $f(t)$ satisface las hipótesis para utilizar el *Teorema de Parseval*, de este modo se dice que $f(t)$ y su transformada de Fourier satisface la ecuación siguiente

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathscr{F}\{f(t)\}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \tag{40}$$

Analizando el miembro izquierdo de la ecuación (40) y sustituyendo la transformada de Fourier de $f(t)$ por la expresión en (39) desarrollamos lo siguiente

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |\mathscr{F}\{f(t)\}(\omega)|^2 d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right)^2\right|^2 d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right)^4 d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right)^4 d\omega \end{aligned} \tag{41}$$

Consideremos para el desarrollo en (41) el siguiente el cambio de variable: $\omega = 2k \Rightarrow d\omega = 2dk$. Entonces tendremos que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\left(\frac{\omega}{2}\right)}\right)^4 d\omega &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin\left(\frac{2k}{2}\right)}{\left(\frac{2k}{2}\right)}\right)^4 2dk \\
&= \frac{2}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin k}{k}\right)^4 dk \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin k}{k}\right)^4 dk
\end{aligned} \tag{42}$$

Es decir, el miembro izquierdo de la ecuación (40) puede expresarse como sigue

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathscr{F}\{f(t)\}(\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin k}{k}\right)^4 dk \tag{43}$$

Luego sustituimos (43) en (40), de modo que

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin k}{k}\right)^4 dk = \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 dt \quad \Rightarrow \quad \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin k}{k}\right)^4 dk = \pi\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 dt \tag{44}$$

Calculamos a continuación la integral en el miembro derecho de la ecuación (44). Donde $f(t)$ tiene puntos de discontinuidad en $x_0 = -1$, $x_1 = 0$ y $x_2 = 1$. Además, para los $t \in [-1, 1]$ se tiene que $f(t) = 1 - |t|$ y para los $t \in (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$ entonces $f(t) = 0$. Con estas consideración desarrollamos la integral de modo

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 dt &= \int_{-\infty}^{1}|f(t)|^2 dt + \int_{-1}^{0}|f(t)|^2 dt + \int_{0}^{1}|f(t)|^2 dt + \int_{1}^{0}|f(t)|^2 dt \\
&= \int_{-\infty}^{1}|(0)|^2 dt + \int_{-1}^{0}|1+t|^2 dt + \int_{0}^{1}|1-t|^2 dt + \int_{1}^{0}|(0)|^2 dt \\
&= \int_{-1}^{0}|1+t|^2 dt + \int_{0}^{1}|1-t|^2 dt \\
&= \int_{-1}^{0} 1 + 2t + t^2 dt + \int_{0}^{1} 1 - 2t + t^2 dt \\
&= \left[t + t^2 + \frac{1}{3}t^3\right]_{-1}^{0} + \left[t - t^2 + \frac{1}{3}t^3\right]_{0}^{1} \\
&= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}
\end{aligned} \tag{45}$$

Por lo tanto esta integral tiene como solución

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2 dt = \frac{2}{3} \tag{46}$$

Sustituimos (46) en la ecuación (44). De este modo queda así calculada la integral propuesta en esta sección por medio del Teorema de Parseval, cuyo resultado es el que sigue

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin k}{k}\right)^4 dk = \frac{2\pi}{3}. \tag{47}$$

3. Ejercicio 3

Considere la ecuación de onda unidimensional homogénea,

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = 0,$$

donde $x \in \mathbb{R}$ **y** $t > 0$**.**

3.1. Considere, por separado, las transformadas de Fourier de ψ respecto de la coordenada espacial y respecto de la coordenada temporal.

Solución: Consideremos la ecuación de onda unidimensional homogénea dada. Aplicamos **la transformada de Fourier respecto de la coordenada espacial** x, obteniendo

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right\}(k,t) = \mathscr{F}\{0\}(k,t) \tag{48}$$

Por la propiedad de linealidad de la transformada de Fourier, se reescribe (48) como

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right\} - \frac{1}{v^2}\mathscr{F}\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right\}(k,t) = 0 \tag{49}$$

Si $\psi(x,t)$ admite transformada de fourier y satisface la *condición de atenuación* $\lim_{|x|\to\infty}\psi(x,t) = 0$, entonces la transformada de Fourier de su segunda derivada espacial se obtiene como:

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right\}(k,t) = (ik)^2\mathscr{F}\{\psi\}(k,t) = -k^2\hat{\psi}(k,t). \tag{50}$$

Para la transformada de Fourier de la segunda derivada temporal, aplicamos su definición

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right\}(k,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}(x,t)e^{-ikx}\,dx \tag{51}$$

Bajo la hipótesis de que $\psi(x,t)$ es una función suficientemente regular, con $\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}$ continua y la integral convergiendo absolutamente, aplicamos el **teorema de diferenciación bajo el signo integral** para justificar el intercambio del orden de derivación e integración en (51) que procede a continuación

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right\}(k,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{\partial^2}{\partial t^2}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,t)e^{-ikx}\,dx\right\}\\ &= \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,t)e^{-ikx}\,dx\right\}\\ &= \frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial t^2}(k,t).\end{aligned} \tag{52}$$

Sustituyendo (50) y (52) en (49), obtenemos la ecuación diferencial transformada:

$$-k^2\hat{\psi}(k,t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial t^2}(k,t) = 0 \tag{53}$$

Reordenando términos en (53)

$$\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial t^2}(k,t) + (kv)^2\hat{\psi}(k,t) = 0 \tag{54}$$

Así, hemos convertido la ecuación de onda original en una ecuación diferencial ordinaria en la coordenada temporal t para (k,t).

Consideremos nuevamente la ecuación de onda unidimensional homogénea. Aplicamos ahora **la transformada de Fourier respecto de la coordenada temporal** t, obteniendo

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right\}(x,\omega)=\mathscr{F}\{0\}(x,\omega). \tag{55}$$

Por la propiedad de linealidad de la transformada de Fourier, la ecuación (55) se reescribe como

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right\}(x,\omega)-\frac{1}{v^2}\mathscr{F}\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right\}(x,\omega)=0. \tag{56}$$

Dado que el proceso es análogo al realizado en la primera parte, aplicamos nuevamente la propiedad de la transformada de Fourier de la derivada, bajo las mismas hipótesis de regularidad y convergencia absoluta de la integral. Así, obtenemos

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}\right\}(x,\omega)=-\omega^2\hat{\psi}(x,\omega). \tag{57}$$

Para la transformada de Fourier de la segunda derivada espacial, aplicamos su definición:

$$\mathscr{F}\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right\}(x,\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}(x,t)e^{-i\omega t}\,dt. \tag{58}$$

Bajo las mismas hipótesis justificadas en la primera parte, aplicamos el **teorema de diferenciación bajo el signo integral** para intercambiar el orden de integración y derivación:

$$\begin{aligned}\mathscr{F}\left\{\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right\}(x,\omega)&=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left\{\frac{\partial^2}{\partial x^2}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,t)e^{-i\omega t}\,dt\right\}\\&=\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\psi(x,t)e^{-i\omega t}\,dt\right\}\\&=\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial x^2}(x,\omega).\end{aligned} \tag{59}$$

Sustituyendo (57) y (59) en (56), obtenemos la ecuación diferencial transformada:

$$\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial x^2}-\frac{(-\omega^2)}{v^2}\hat{\psi}=0. \tag{60}$$

Por lo que finalmente, reorganizando términos, tenemos:

$$\frac{\partial^2\hat{\psi}}{\partial x^2}+\frac{\omega^2}{v^2}\hat{\psi}=0. \tag{61}$$

Así, la ecuación de onda en el dominio de Fourier en t se convierte en una ecuación diferencial ordinaria en la coordenada espacial x, lo que facilita el análisis de sus soluciones.

3.2. Utilizando el método de la transformada de Fourier respecto de la coordenada espacial, encuentre una solución a la ecuación diferencial, bajo las siguientes condiciones iniciales,

$$\psi(x,0) = f(x),$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(x,0) = 0,$$

donde $f(x)$ corresponde a una función conocida.

Solución: Considerando la ecuación diferencial ordinaria de 2do orden (54) obtenida al aplicar la transformada de Fourier respecto la coordenada espacial en la ecuación de onda unidimensional homogénea:

$$\frac{\partial^2 \hat{\psi}}{\partial t^2}(k,t) + (kv)^2 \hat{\psi}(k,t) = 0$$

Notamos que esta EDO representa un movimiento armónico simple, cuya *frecuencia natural* es $\omega = kv$. La solución general de esta ecuación diferencial ordinaria es una combinación lineal de las funciones seno y coseno, donde los coeficientes $A(k)$ y $B(k)$ dependen de la variable k:

$$\hat{\psi}(k,t) = A(k)\cos(kvt) + B(k)\sin(kvt). \tag{62}$$

La primera derivada respecto al tiempo de (62) es

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t}(k,t) = -A(k)kv\sin(kvt) + B(k)kv\cos(kvt). \tag{63}$$

Para determinar las funciones $A(k)$ y $B(k)$, utilizamos las condiciones iniciales. Aplicando la transformada de Fourier a la condición inicial $\psi(x,0) = f(x)$, obtenemos:

$$\hat{\psi}(k,0) = \mathscr{F}\{\psi\}(k,0) = \mathscr{F}\{f(x)\}(k,0) = \hat{f}(k) = \tag{64}$$

Evaluando (62) en $t = 0$, obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{\psi}(k,0) &= A(k)\cos(kv(0)) + B(k)\sin(kv(0)) \\ &= A(k)\cos(0) + B(k)\sin(0) \\ &= A(k)(1) + B(k)(0) \\ &= A(k) \end{aligned} \tag{65}$$

Por (64) y (65), concluimos que

$$A(k) = \hat{f}(k) \tag{66}$$

Aplicando la transformada de Fourier a la condición inicial $\frac{\partial \psi}{\partial t}(x,0) = 0$, obtenemos

$$\frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t}(k,0) = \mathscr{F}\left\{\frac{\partial \psi}{\partial t}\right\}(k,0) = \mathscr{F}\{0\}(k,0) = 0 \tag{67}$$

Evaluando (63) en $t = 0$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\psi}}{\partial t}(k,0) &= -A(k)kv\sin(kv(0)) + B(k)kv\cos(kv(0)) \\ &= -A(k)kv\sin(0) + B(k)kv\cos(0) \\ &= -A(k)kv(0) + B(k)kv(1) \\ &= B(k)kv \end{aligned} \tag{68}$$

Por (67) y (68), suponiendo que k y v son valores reales no nulos, se obtiene

$$B(k) = 0 \tag{69}$$

Sustituyendo (66) y (69) en (62), obtenemos la solución de la ecuación diferencial (54)

$$\hat{\psi}(k,t) = \hat{f}(k)\cos(kvt). \tag{70}$$

Calculamos la transformada de Fourier inversa de (70):

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}\{\hat{\psi}\}(x,t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{\psi}(k,t)e^{ikx}dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)\cos(kvt)e^{ikx}dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)\left(\frac{e^{ikvt}+e^{-ikvt}}{2}\right)e^{ikx}dk \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)\left(e^{ik(x+vt)}+e^{ik(x-vt)}\right)dk \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)e^{ik(x+vt)}dk + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)e^{ik(x-vt)}dk\right]
\end{aligned} \tag{71}$$

Resolvemos estas integrales de forma individual, de modo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)e^{ik(x+vt)}dk &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ikx}dx\right)e^{ikx}\cdot e^{ikvt}dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ikx}\cdot e^{ikvt}dx\right)e^{ikx}dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ik(x-vt)}dx\right)e^{ikx}dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{F}\{f(x-vt)\}(k)e^{ikx}dk \\
&= \mathscr{F}^{-1}\{\mathscr{F}\{f(x-vt)\}\}(x) \\
&= f(x-vt)
\end{aligned} \tag{72}$$

De forma analoga, tenemos para la integral restante

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\hat{f}(k)e^{ik(x-vt)}dk &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ikx}dx\right)e^{ikx}\cdot e^{-ikvt}dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ikx}\cdot e^{-ikvt}dx\right)e^{ikx}dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ik(x+vt)}dx\right)e^{ikx}dk \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathscr{F}\{f(x+vt)\}(k)e^{ikx}dk \\
&= \mathscr{F}^{-1}\{\mathscr{F}\{f(x+vt)\}\}(x) \\
&= f(x+vt)
\end{aligned} \tag{73}$$

Sustituyendo (72) y (73) en (71), obtenemos

$$\psi(x,t) = \frac{1}{2}\left[f(x-vt)+f(x+vt)\right]. \tag{74}$$

Esta es la solución general de la ecuación de onda unidimensional homogénea con las condiciones iniciales dadas.