# Tarea 02 - Óptica matricial

# Física V: 510355 - Óptica

José Ignacio Rosas Sepúlveda

Kevin Andrés Vergara González

Víctor Patricio Maureira Cárdenas

Junio 2025

# Situación 1

Un pequeño objeto está dentro de un recipiente de ámbar. El recipiente es una esfera maciza de vidrio de índice de refracción $n' = \frac{8}{5}$, radio de curvatura $|R| = 3\,\text{cm}$ y se encuentra rodeado de aire de índice de refracción $n = 1$. El objeto está sobre el eje óptico y cuando es visto a lo largo del eje, y a través de la superficie, parece estar enterrado 5 cm dentro del recipiente. Calcule la distancia a la cual el mosquito está realmente dentro de la esfera.

**Solución:**

Para mejor entendimiento del desarrollo de esta situación, iremos paso a paso realizándolo en base a la estructura mencionada en la tarea

## Paso 1

Identificamos el sistema optico y la matriz $[ABCD]$, pero antes, identificaremos los datos importantes como:

- Indice de refraccion del vidrio: $n_1 = \frac{8}{5}$
- Indice de refraccion del aire: $n_2 = 1$
- Radio de curvatura de la superficie $R = -3$(dado que es convexo desde la perspectiva del aire)
- La imagen aparente se observa a $s' = -5\,[\text{cm}]$ desde la superficie
- La luz se propaga de derecha a izquierda

Notemos que como el sistema consta de una sola superficie esférica convexa que separa dos medios, usamos la matriz de refracción esférica, que es de la forma:

$$M_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{(n_1 - n_2)}{n_2 R} & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$$

$$M_s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \left(\frac{\frac{8}{5} - 1}{1 \cdot (-3)}\right) & \frac{8}{5} \end{bmatrix}$$

Por lo tanto la matriz [ABCD] está dada por

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{8}{5} \end{bmatrix} \tag{0.1}$$

## Paso 2

Es muy importatnte notar que un punto en el eje optico se representa como un vector, esto nos ayudara a encontrar la distancia a la cual se encuentra el objeto(en este caso el mosquito). Por tanto nuestro vector seria de la forma:

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix}$$

Para un objeto puntual sobre el eje optico, usamos su posicion relativa $s$ como parte del sistema de propagacion. Como solo tenemos una superficie usaremos la matriz para vincular la imagen y el objeto. Notemos que el vector imagen en optica matricial esta dado por:

$$\vec{v}' = \begin{bmatrix} 0 \\ \theta' \end{bmatrix}$$

Y ya con esto planteado, relacionamos el objeto con:

$$\vec{v}' = M \cdot \vec{v}$$

Para un objeto a una distancia $s$, el rayo que parte del objeto y llega perpendicular al eje llega a altura $y$, con un angulo de $\theta = -\frac{y}{s}$. Usando $y = 1$(ya que todo es lineal)

$$\begin{aligned}
\vec{v}_{obj} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{s} \end{bmatrix} \\
\vec{v}_{img} &= M \cdot \vec{v}_{obj} \\
\vec{v}_{img} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{8}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{s} \end{bmatrix} \\
\vec{v}_{img} &= \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{5} - \frac{8}{5s} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Notemos que el vector $v_{img}$ es el vector que corresponde al rayo en el aire despues de la refraccion. Como queremos que este rayo forme una imagen virtual a una distancia $s' = -5cm$, el angulo con respecto al eje debe ser el siguiente:

$$\theta' = -\frac{1}{s'} = \frac{1}{5}$$

entonces:

$$-\frac{1}{5} - \frac{8}{5s} = \frac{1}{5} \implies -\frac{8}{5s} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \implies -\frac{8}{5s} = \frac{2}{5} \implies -\frac{8}{s} = 2$$

De esto obtenemos que la posicion real del mosquito es de $\boxed{4cm \text{ dentro del vidrio}}$

## Paso 3

Calcularemos los datos de la tabla anteriormente mencionada

- Distancia focal de salida $f'$:

$$f' = -\frac{1}{C} = -\frac{1}{-\frac{1}{5}} = \boxed{5cm}$$

- Distancia focal de entrada

$$f = \frac{D}{-C} = \frac{\frac{8}{5}}{-(-\frac{1}{5})} = \boxed{8cm}$$

- Radio de curvatura:

$$r = R = \boxed{3cm}$$

- Distancia imagen (v): Relacion matricial para propagacion desde objeto:

$$\vec{v}_{in} = \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{1}{s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} \implies \vec{v}_{ext} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{5} & \frac{8}{5} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{4} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{5} \end{bmatrix}$$

  Entonces el angulo en el aire es:

$$\theta = \frac{1}{v} \implies v = \frac{1}{\frac{1}{5}} = \boxed{5cm}$$

- Posicion imagen ($w$): Distancia desde el vertice de la superficie hasta la imagen:

$$\boxed{w = -5cm}$$

# Situación 2

Una lente delgada convergente de longitud focal $|f| = 15\,\text{cm}$ forma la imagen de un objeto colocado a una distancia de $5\,\text{cm}$ a la izquierda de la lente.

**Solución:**

En este caso la matriz del sistema óptico consiste de una refracción en la **lente delgada convergente**. Con $f = +15\,\text{cm}$, se tiene:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{15}\,\text{cm}^{-1} & 1 \end{bmatrix}}, \tag{0.2}$$

donde $A = 1$, $B = 0$, $C = -\frac{1}{15}\,\text{cm}^{-1}$ y $D = 1$.

Notar que el **determinante** de esta matriz es

$$\begin{aligned} \det M &= (1 \cdot 1) - \left[0 \cdot \left(-\frac{1}{15}\,\text{cm}^{-1}\right)\right] \\ &= 1\,, \end{aligned}$$

es decir,

$$\boxed{\det M = 1}$$

lo que implica

$$\frac{n_1}{n_3} = 1 \quad \Rightarrow \quad n_1 = n_3\,,$$

es decir, la lente delgada esta inmersa en un mismo medio de indice de refracción $n_1$.

Ahora, calculamos los **puntos cardinales**:

$$\begin{aligned} f &= \left(\frac{n_1}{n_3}\right)\frac{1}{C} = (1)\left(\frac{1}{-\frac{1}{15}\,\text{cm}^{-1}}\right) \quad \to \quad \boxed{f = -15\,\text{cm}}. \\ f' &= -\frac{1}{C} = -\left(\frac{1}{-\frac{1}{15}\,\text{cm}^{-1}}\right) \quad \to \quad \boxed{f' = +15\,\text{cm}}. \\ r &= \left(D - \frac{n_1}{n_3}\right)\frac{1}{C} = (1-1)\left(\frac{1}{-\frac{1}{15}\,\text{cm}^{-1}}\right) \quad \to \quad \boxed{r = 0\,\text{cm}}. \\ s &= (1-A)\frac{1}{C} = (1-1)\left(\frac{1}{-\frac{1}{15}\,\text{cm}^{-1}}\right) \quad \to \quad \boxed{s = 0\,\text{cm}}. \\ v &= (D-1)\frac{1}{C} = (1-1)\left(\frac{1}{-\frac{1}{15}\,\text{cm}^{-1}}\right) \quad \to \quad \boxed{v = 0\,\text{cm}}. \\ w &= \left(\frac{n_1}{n_3} - A\right)\frac{1}{C} = (1-1)\left(\frac{1}{-\frac{1}{15}\,\text{cm}^{-1}}\right) \quad \to \quad \boxed{s = 0\,\text{cm}}. \end{aligned}$$

En resumen:

- El **primer foco** está a 15 cm a la izquierda del centro óptico de la lente.
- El **segundo foco** está a 15 cm a la derecha del centro óptico de la lente.
- El **centro óptico** de la lente se toma como el origen, es decir, 0 cm.

- El **primer plano principal**, el **segundo plano principal**, el **primer plano nodal** y el **segundo plano nodal** coinciden en el centro de la lente para una lente delgada ideal, por lo tanto, se encuentran en 0 cm.

Esto se resume en la siguiente tabla:

| $f$ | $f'$ | $r$ | $s$ | $v$ | $w$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-15\,\mathrm{cm}$ | $+15\,\mathrm{cm}$ | $0\,\mathrm{cm}$ | $0\,\mathrm{cm}$ | $0\,\mathrm{cm}$ | $0\,\mathrm{cm}$ |

**Cuadro 1:** Tabla con las distancias cardinales.

La distancia imagen $z_2$ se obtiene a partir de los elementos de la matriz [**ABCD**] y la distancia objeto $z_1$. Con $z_1 = 5\,\mathrm{cm}$ se tiene:

$$\begin{aligned}
z_2 &= -\left(\frac{z_1 A + B}{z_1 C + D}\right) \\
&= -\left(\frac{(5\,\mathrm{cm})1 + 0}{(5\,\mathrm{cm})\left(-\frac{1}{15}\,\mathrm{cm}^{-1}\right) + 1}\right) \\
&= -\left(\frac{5\,\mathrm{cm}}{\left(-\frac{1}{3}\right) + 1}\right) \\
&= -\left(\frac{5\,\mathrm{cm}}{\frac{2}{3}}\right) \\
&= -\frac{15}{2}\,\mathrm{cm}\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la distancia imagen $z_2$ es:

$$\boxed{z_2 = -\frac{15}{2}\,\mathrm{cm}}\,.$$

Sabemos que para una matriz de planos conjugado el elemento A de esa matriz representa el aumento lateral del sistema, así:

$$\begin{aligned}
m &= A + z_2 C \\
&= 1 + (-\frac{15}{2}\,\mathrm{cm})\left(-\frac{1}{15}\,\mathrm{cm}^{-1}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} \\
&= \frac{3}{2}\ .
\end{aligned}$$

Por lo tanto el aumento lateral del sistema es:

$$\boxed{m = \frac{3}{2}}\,.$$

## Características de la imagen

- **Tipo:** virtual (la imagen aparece en el mismo lado que el objeto, $z_2 = -\frac{15}{2}\,\mathrm{cm} < 0$).
- **Orientación:** derecha (erecta, $m = +\frac{3}{2} > 0$).

- **Tamaño:** aumentada, $|m| = \frac{3}{2}$ veces el objeto.
- **Escala:** en el eje $x$, cada cuadrito vale 1 cm; en el eje $y$, cada 2 cuadritos valen 1 cm.

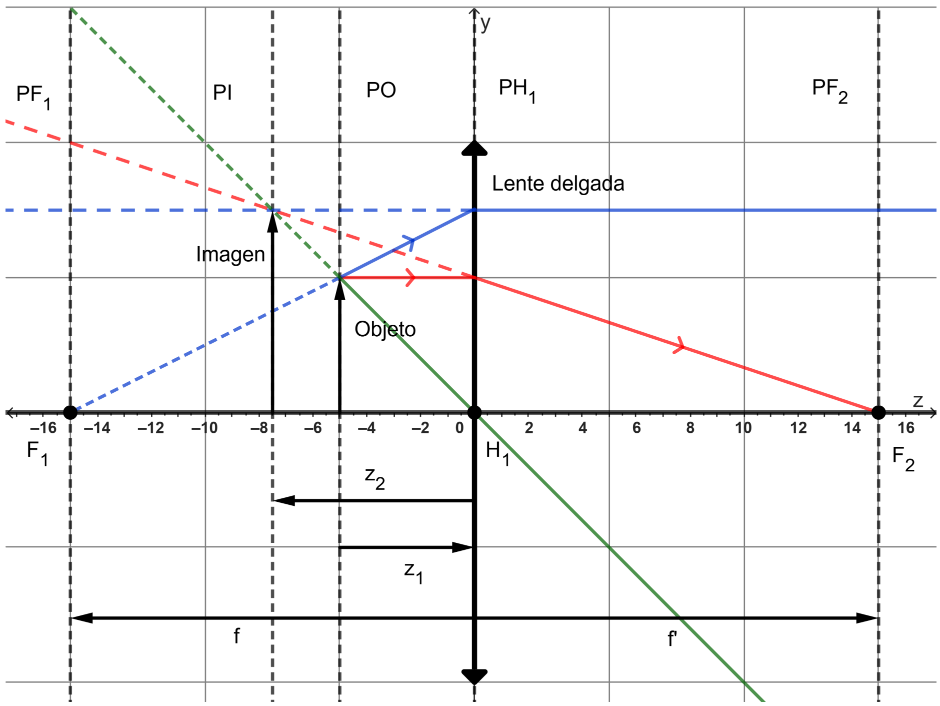



**Figura 1:** Construcción geométrica de la formación de imagen para la **Situación 2**: una lente delgada convergente de distancia focal $f = +15$ cm, con un objeto situado a $z_1 = -5$ cm a la izquierda de la lente (origen en el centro óptico $H_1$). Se muestran los puntos focales ($F_1$, $F_2$), los planos principales y nodales ($PH_1$, $PH_2$, $PO$), y la trayectoria de los rayos principales: **Rayo 1** (rojo) paralelo al eje óptico que tras la lente pasa por el foco posterior $F_2$; **Rayo 2** (verde) que atraviesa el foco anterior $F_1$ y emerge paralelo al eje óptico; **Rayo 3** (azul) que atraviesa el centro óptico sin desviarse. El cruce de las prolongaciones de los rayos determina la posición de la **imagen virtual**, situada a $z_2 = -7{,}5$ cm, mayor y derecha respecto al objeto. Se indican además las distancias $z_1$, $z_2$, $f$ y $f'$ para referencia.

**Caracterización de los rayos principales:**

- **Rayo 1 (R1):** Parte del objeto paralelo al eje óptico, atraviesa la lente y se refracta pasando por el foco posterior $F_2$. En el caso de imagen virtual, su prolongación (línea punteada hacia la izquierda) converge hacia la posición de la imagen detrás del objeto.
- **Rayo 2 (R2):** Se dirige hacia el foco anterior $F$ de la lente, y al atravesarla, emerge paralelo al eje óptico. Para la imagen virtual, la prolongación de este rayo también converge con la prolongación de R1 en la ubicación de la imagen.
- **Rayo 3 (R3):** Cruza el centro óptico de la lente y continúa en línea recta sin desviación, ya que en la aproximación de lente delgada el centro óptico no introduce desplazamiento angular.
- La **imagen virtual** se forma en el punto donde se cruzan las prolongaciones de $R1$ y $R2$. En este caso, la imagen aparece a la izquierda de la lente, es mayor que el objeto y está derecha, coherente con el aumento positivo.

# Situación 3

A la derecha de la lente de la Situación 2, y a una distancia de 60 cm desde su centro, se coloca una segunda lente delgada divergente de longitud focal $|f| = 15\,\text{cm}$. Un objeto es colocado a 25 cm a la izquierda de la primera lente.

**Solución:**

En este caso, la matriz del sistema óptico consiste en una refracción en la primera lente delgada convergente, una propagación entre las lentes y una última refracción en la segunda lente delgada divergente. Con $f = +15\,\text{cm}$, $d = 60\,\text{cm}$ y $f' = -15\,\text{cm}$, se tiene:

$$
\begin{aligned}
M &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f'} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{-15\,\text{cm}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 60\,\text{cm} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{15\,\text{cm}} & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{15}\,\text{cm}^{-1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & 60\,\text{cm} \\ -\frac{1}{15}\,\text{cm}^{-1} & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -3 & 60\,\text{cm} \\ -\frac{3}{15}\,\text{cm}^{-1} - \frac{1}{15}\,\text{cm}^{-1} & 5 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} -3 & 60\,\text{cm} \\ -\frac{4}{15}\,\text{cm}^{-1} & 5 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, la matriz de trayectoria de un rayo o matriz [**ABCD**] que caracteriza el sistema es:

$$
\boxed{M = \begin{bmatrix} -3 & 60\,\text{cm} \\ -\frac{4}{15}\,\text{cm}^{-1} & 5 \end{bmatrix}},
$$

donde $A = -3$, $B = 60\,\text{cm}$, $C = -\frac{4}{15}\,\text{cm}^{-1}$ y $D = 5$.

Notar que el **determinante** de esta matriz es

$$
\begin{aligned}
\det M &= (-3)\cdot(5) - (60\,\text{cm})\cdot\left(-\frac{4}{15}\,\text{cm}^{-1}\right) \\
&= -15 + 16 \\
&= 1
\end{aligned}
$$

es decir,

$$
\boxed{\det M = 1}
$$

lo que implica

$$
\frac{n_1}{n_3} = 1 \quad \Rightarrow \quad n_1 = n_3\,,
$$

es decir, el sistema óptico esta inmerso en un mismo medio de indice de refracción $n_1$.

Ahora, calculamos los **puntos cardinales**:

$$f = \left(\frac{n_1}{n_3}\right)\frac{1}{C} = (1)\left(\frac{1}{-\frac{4}{15}\,\mathrm{cm}^{-1}}\right) \quad \rightarrow \quad \boxed{f = -\frac{15}{4}\,\mathrm{cm}}.$$

$$f' = -\frac{1}{C} = -\left(\frac{1}{-\frac{4}{15}\,\mathrm{cm}^{-1}}\right) \quad \rightarrow \quad \boxed{f' = +\frac{15}{4}\,\mathrm{cm}}.$$

$$r = \left(D - \frac{n_1}{n_3}\right)\frac{1}{C} = (5-1)\left(\frac{1}{-\frac{4}{15}\,\mathrm{cm}^{-1}}\right) \quad \rightarrow \quad \boxed{r = -15\,\mathrm{cm}}.$$

$$s = (1-A)\frac{1}{C} = [1-(-3)]\left(\frac{1}{-\frac{4}{15}\,\mathrm{cm}^{-1}}\right) \quad \rightarrow \quad \boxed{s = -15\,\mathrm{cm}}.$$

$$v = (D-1)\frac{1}{C} \quad = (5-1)\left(\frac{1}{-\frac{4}{15}\,\mathrm{cm}^{-1}}\right) \rightarrow \quad \boxed{v = -15\,\mathrm{cm}}.$$

$$w = \left(\frac{n_1}{n_3} - A\right)\frac{1}{C} = [1-(-3)]\left(\frac{1}{-\frac{4}{15}\,\mathrm{cm}^{-1}}\right) \quad \rightarrow \quad \boxed{s = -15\,\mathrm{cm}}.$$

En resumen:

- El **primer foco** está a $\dfrac{15}{4}$ cm a la izquierda del centro óptico de la lente.
- El **segundo foco** está a $\dfrac{15}{4}$ cm a la derecha del centro óptico de la lente.
- El **centro óptico** de la lente se ubica en $-15$ cm.
- El **primer plano principal**, el **segundo plano principal**, el **primer plano nodal** y el **segundo plano nodal** coinciden en el centro óptico de la lente para una lente delgada ideal, por lo tanto, se encuentran todos en $-15$ cm.

Los puntos cardinales del sistema compuesto de dos lentes, obtenidos a partir de la matriz total del sistema (con origen de coordenadas en el centro óptico de la primera lente, $z = 0$), son:

Esto se resume en la siguiente tabla:

| $f$ | $f'$ | $r$ | $s$ | $v$ | $w$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $-\frac{15}{4}$ cm | $+\frac{15}{4}$ cm | $-15$ cm | $-15$ cm | $-15$ cm | $-15$ cm |

**Cuadro 2:** Tabla con las distancias cardinales.

La distancia imagen $z_2$ se obtiene a partir de los elementos de la matriz [**ABCD**] y la distancia objeto $z_1$. Con $z_1 = 25\,\mathrm{cm}$ se tiene:

$$\begin{aligned}
z_2 &= -\left(\frac{z_1 A + B}{z_1 C + D}\right) \\
&= -\left(\frac{(25\,\mathrm{cm})(-3) + (60\,\mathrm{cm})}{(25\,\mathrm{cm})\left(-\frac{4}{15}\,\mathrm{cm}^{-1}\right) + 5}\right) \\
&= -\left(\frac{-75\,\mathrm{cm} + 60\,\mathrm{cm}}{-\frac{20}{3} + 5}\right) \\
&= -\left(\frac{-15\,\mathrm{cm}}{\frac{-20+15}{3}}\right) \\
&= -\frac{15}{\frac{5}{3}}\,\mathrm{cm} \\
&= -9\,\mathrm{cm}
\end{aligned}$$

Por lo tanto la distancia imagen $z_2$ es:

$$\boxed{z_2 = -9\,\mathrm{cm}}\,.$$

Sabemos que para una matriz de planos conjugado el elemento A de esa matriz representa el aumento lateral del sistema, así:

$$\begin{aligned}
m &= A + z_2 C \\
&= -3 + (-9\,\mathrm{cm})\left(-\frac{4}{15}\,\mathrm{cm}^{-1}\right) \\
&= -3 + \frac{12}{5} \\
&= -\frac{3}{5}\,.
\end{aligned}$$

Por lo tanto el aumento lateral del sistema es:

$$\boxed{m = -\frac{3}{5}}\,.$$

La imagen se ubica a $z_2 = -9$ cm, es decir, a la izquierda de la primera lente, lo cual indica que es una imagen virtual. El valor negativo del aumento ($m = -\frac{3}{5}$) indica que la imagen está invertida respecto al objeto, y el valor absoluto menor que uno implica que es reducida.

## 0.1. Características de la imagen

- **Tipo:** virtual (la imagen aparece en el mismo lado que el objeto, $z_2 = -9$ cm $< 0$).
- **Orientación:** invertida (debido a que $m = -\frac{3}{5} < 0$).
- **Tamaño:** reducida, $|m| = \frac{3}{5}$ veces el objeto.
- **Escala:** en el eje $x$, cada cuadrito vale $1\,\mathrm{cm}$; en el eje $y$, cada 2 cuadritos valen $1\,\mathrm{cm}$.

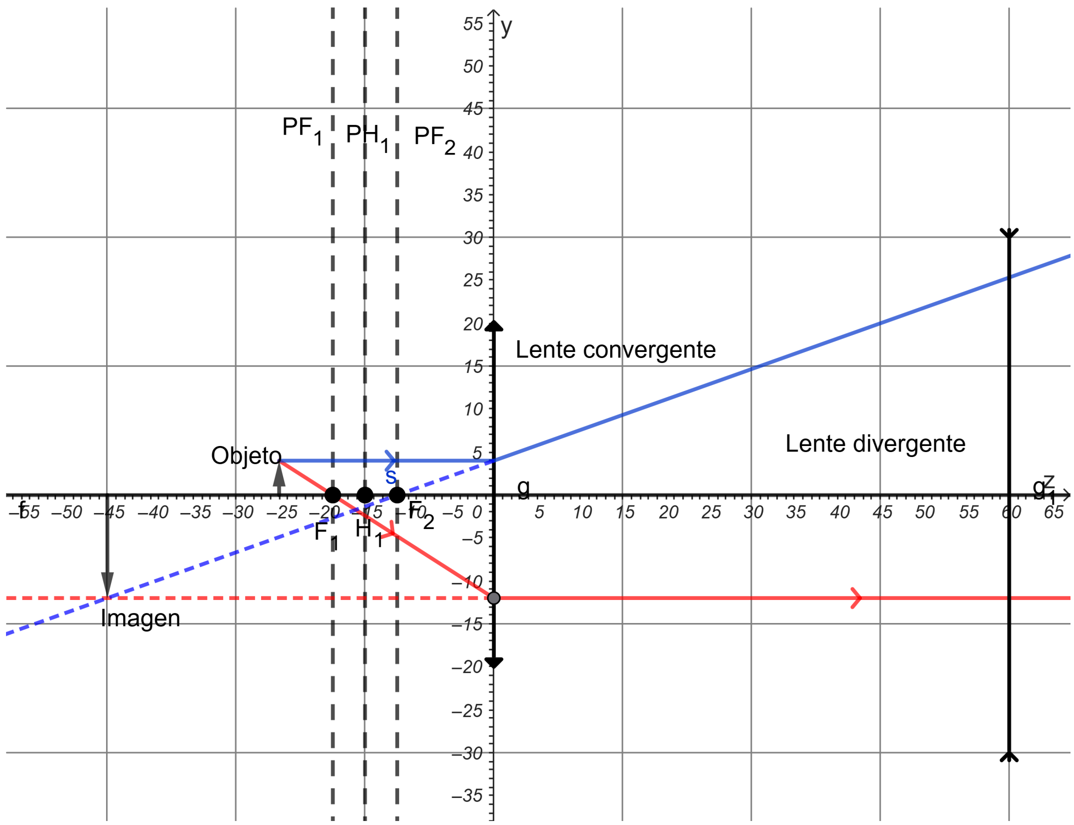



**Figura 2:** Diagrama de rayos (Situación 3). Objeto a $z_1 = -25\,\text{cm}$, lente 1 en $z = 0$, lente 2 en $z = +60\,\text{cm}$, imagen virtual en $z_2 = -9\,\text{cm}$ (a 9 cm a la izquierda de la lente 2).

**Dibujo del diagrama de rayos:**

- **R1** – Rayo paralelo al eje óptico que, tras la lente convergente, se refracta pasando por su foco posterior, se propaga 60 cm y luego, al atravesar la lente divergente, sale como si proviniera de su foco anterior.
- **R2** – Rayo dirigido hacia el foco anterior de la primera lente que, tras ella, emerge paralelo; después de los 60 cm atraviesa la segunda lente y se desvía como rayo divergente paralelo al eje (prolongación apunta hacia la izquierda).
- **R3** – Rayo que atraviesa el centro óptico de la primera lente sin desviarse, viaja 60 cm y atraviesa el centro óptico de la segunda lente también sin desviarse.
- El cruce de las prolongaciones de R1 y R2 (líneas punteadas) marca la posición de la *imagen virtual* entre las dos lentes.

# 1. Problema 1

**A.** Demuestre, analíticamente, que una placa SELFOC de longitud $d < \pi/2\alpha$ e índice de refracción dado por la expresión

$$n^2(y) = n_0^2\left(1 - \alpha^2 y^2\right) \tag{1.1}$$

actúa como una lente cilíndrica (una lente con poder focalizador en el plano $y - z$) de longitud focal

$$f_2 = \frac{1}{\alpha \sin(\alpha d)}\,. \tag{1.2}$$

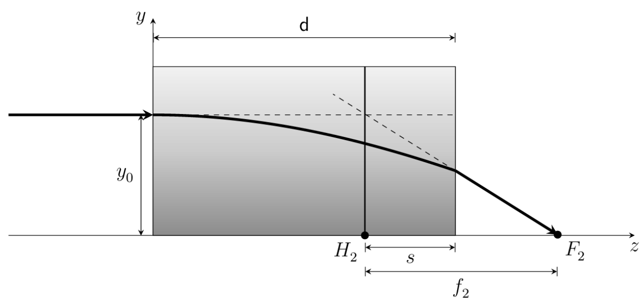



**Figura 3:** La placa SELFOC usada como una lente; $f_2$ es el segundo punto focal y $H_2$ es el segundo punto principal.

**Solución:**

Consideremos un rayo propagándose por una placa SELFOC por el plano $y - z$, con eje óptico paralelo al eje $z$. Dicha placa tiene indice de refracción homogéneo en $x$ y $z$, pero variable en $y$ de forma:

$$n^2(y) = n_0^2\left(1 - \alpha^2 y^2\right)\,, \tag{1.3}$$

Considerando que $n(y)$ es una función siempre positiva y $n_0 > 0$, tomamos la raíz cuadrada de esta ecuación y la expresamos de forma:

$$n(y) = n_0\,(1 - \alpha^2\, y^2)^{\frac{1}{2}} \tag{1.4}$$

Consideramos el desarrollo en serie de Taylor para una función $f(x) = (1 - x)^n$,

$$(1 - x)^n = 1 - nx + \frac{n(n-1)}{2}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \cdots \tag{1.5}$$

Tomando $x = \alpha^2\, y^2$ y $n = \frac{1}{2}$ en (1.5). A su vez, suponiendo que $\alpha$ es tal que $\alpha^2\, y^2 \ll 1$, para todo $y$ de interés. Se obtiene la aproximación:

$$(1 - \alpha^2\, y^2)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2}\alpha^2\, y^2 \tag{1.6}$$

Empleando la aproximación (1.6) en (1.4), tenemos:

$$n(y) \approx n_0\,\left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2\, y^2\right)$$

Reordenamos factores

$$\frac{n_0}{n(y)} \approx \left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2 y^2\right)^{-1}\,.$$

Utilizando el desarrollo en serie de Taylor para una función $f(x) = (1-x)^{-1}$:

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\,, \qquad |x| < 1\,,$$

teniendo $x = \frac{1}{2}\alpha^2 y^2$, obtenemos:

$$\frac{n_0}{n(y)} \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 y^2 + \left(\frac{1}{2}\alpha^2 y^2\right)^2 + \cdots\,.$$

Dado que $\alpha^2 y^2 \ll 1$, el término de orden $\alpha^4 y^4$ puede despreciarse,

$$\frac{n_0}{n(y)} \approx 1 + \frac{1}{2}\alpha^2 y^2\,,$$

Elevamos esta aproximación al cuadrado, tenemos:

$$\begin{aligned}\left(\frac{n_0}{n(y)}\right)^2 &\approx \left(1 + \frac{1}{2}\alpha^2 y^2\right)^2 \\ &= 1 + 2\left(\frac{1}{2}\alpha^2 y^2\right) + \left(\frac{1}{2}\alpha^2 y^2\right)^2 \\ &= 1 + \alpha^2 y^2 + \frac{1}{4}\alpha^4 y^4\,.\end{aligned}$$

Nuevamente, dado que $\alpha^2 y^2 \ll 1$, el término de orden $\alpha^4 y^4$ puede despreciarse. Obtenemos así:

$$\left(\frac{n_0}{n(y)}\right)^2 \approx 1 + \alpha^2 y^2\,. \tag{1.7}$$

A continuación, derivamos la ecuación (1.3) respecto a $y$:

$$\frac{d}{dy}[n^2(y)] = \frac{d}{dy}\left[n_0^2\,(1 - \alpha^2\,y^2)\right]\,,$$

obtenemos:

$$\frac{dn}{dy}(y) = -\frac{n_0^2}{n(y)}\,\alpha^2 y\,. \tag{1.8}$$

Sabemos que la ecuación de un rayo en un medio con índice variable es, en general,

$$\frac{d}{ds}\left(n\,\frac{d\vec{r}}{ds}\right) = \nabla n\,, \tag{1.9}$$

donde $s$ es la longitud de arco, y $\vec{r}(s)$ la posición del rayo. Para rayos que se propagan en el plano $y$-$z$ (eje óptico en $z$) y variación sólo en $y$, esto se reduce a

$$\frac{d}{ds}\left(n\,\frac{dy}{ds}\right) = \frac{dn}{dy}\,. \tag{1.10}$$

En la aproximación paraxial ($\theta \approx dy/dz \ll 1$, $ds \approx dz$), esto se convierte en:

$$\frac{d}{dz}\left(n\,\frac{dy}{dz}\right) \approx \frac{dn}{dy}\,. \tag{1.11}$$

Dado que el indicie de refracción $n$ es no homogéneo solo en $y$, es decir $n = n(y)$, se tiene:

$$n(y)\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{dn}{dy}\,.$$

Dividiendo ambos lados por $n(y)$ (asumiendo $n(y) \neq 0$ en la región relevante),

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{1}{n(y)} \frac{dn}{dy}. \tag{1.12}$$

Sustituyendo (1.8) en (1.12),

$$\frac{d^2y}{dz^2} \approx -\left(\frac{n_0}{n(y)}\right)^2 \alpha^2 y. \tag{1.13}$$

Sustituyendo (1.7) en (1.13),

$$\frac{d^2y}{dz^2} \approx -\left(1 + \alpha^2 y^2\right) \alpha^2 y = -\left(\alpha^2 y + \alpha^4 y^3\right) .$$

Siendo $\alpha^2 y^2 \ll 1$, el término $\alpha^4 y^3$ puede despreciarse a primer orden, quedando

$$\frac{d^2y}{dz^2} \approx -\alpha^2 y\,.$$

Así, la ecuación para la trayectoria del rayo a travez de la placa SELFOC es:

$$\frac{d^2y}{dz^2} + \alpha^2 y = 0. \tag{1.14}$$

Esto es la ecuación de un **oscilador armónico simple** de frecuencia $\alpha$. Cuya solución general de es:

$$y(z) = A\cos(\alpha z) + B\sin(\alpha z)\,.$$

Supongamos una posición inicial $y(0) = y_0$ y una pendiente inicial $\frac{dy}{dz} = \theta_0$ en $z = 0$. Con tales condiciones iniciales se definen los coeficientes $A$ y $B$, de modo:

$$A = y_0 \quad \text{y} \quad B = \frac{\theta_0}{\alpha}\,.$$

Así, se tiene la siguiente ecuación para la trayectoria del rayo:

$$y(z) = y_0\cos(\alpha z) + \frac{\theta_0}{\alpha}\sin(\alpha z)\,.$$

De la ecuación anterior se tiene que la pendiente de la trayectoria es

$$\frac{dy}{dz}(z) = -y_0\,\alpha\sin(\alpha z) + \theta_0\cos(\alpha z)\,.$$

Al recorrer la placa SELFOC de longitud $d$, el estado del rayo evoluciona de $(y_0, \theta_0)$ en $z = 0$ a $(y_d, \theta_d)$ en $z = d$:

$$y(d) = y_0\cos(\alpha d) + \frac{\theta_0}{\alpha}\sin(\alpha d)$$

$$\frac{dy}{dz}(d) = -y_0\alpha\sin(\alpha d) + \theta_0\cos(\alpha d)$$

Es decir, la evolución es lineal y se puede escribir en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} y(d) \\ \theta(d) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha d) & \dfrac{1}{\alpha}\sin(\alpha d) \\ -\alpha\sin(\alpha d) & \cos(\alpha d) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ \theta_0 \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

Identificamos que en este sistema optico la **matriz de transformación del rayo** es

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha d) & \dfrac{1}{\alpha}\sin(\alpha d) \\ -\alpha \sin(\alpha d) & \cos(\alpha d) \end{pmatrix}$$

Queremos demostrar que este sistema actúa como una **lente cilíndrica** y encontrar su distancia focal de salida $f_2$. Es sabido que $f_2$ puede calcularse a partir de $C$ de modo:

$$f_2 = \frac{1}{-C}\,, \tag{1.16}$$

donde $C = -\alpha \sin(\alpha d)$. Sustituyendo en (1.16), obtenemos:

$$f_2 = \frac{1}{\alpha \sin(\alpha d)}$$

Hemos demostrado que una placa SELFOC de perfil cuadrático, longitud $d$, y parámetro $\alpha$ actúa, en régimen paraxial, como una lente cilíndrica cuya distancia focal de salida es

$$\boxed{f_2 = \frac{1}{\alpha \sin(\alpha d)}}$$

válida mientras $d < \frac{\pi}{2\alpha}$, pues para mayores valores la función seno se anula y la trayectoria de los rayos se vuelve periódica (no focalizadora).

**B.** Demuestre que el segundo plano principal $H_2$ (mostrado en la figura adjunta) reside a la distancia

$$s = -\left(\frac{1}{\alpha}\right)\tan\left(\frac{\alpha d}{2}\right) .$$

**Solución:**

Para el calculo de $s$, consideremos nuevamente la matriz de transferencia del rayo de este sistema óptico formado por la placa SELFOC,

$$M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha d) & \frac{1}{\alpha}\sin(\alpha d) \\ -\alpha\sin(\alpha d) & \cos(\alpha d) \end{pmatrix} .$$

Sabemos que la distancia $s$ si relaciona con los elementos $A$ y $C$ de esta matriz según la ecuación:

$$s = (1 - A)\frac{1}{C} . \tag{1.17}$$

Donde tenemos que:

$$A = \cos(\alpha d) \quad \text{y} \quad C = -\alpha\sin(\alpha d) .$$

Sustituyendo $A$ y $C$ en (1.17), tenemos:

$$s = [1 - \cos(\alpha d)]\left(\frac{1}{-\alpha\sin(\alpha d)}\right) .$$

Expresamos la ecuación de forma conveniente:

$$s = -\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1-\cos(\alpha d)}{\sin(\alpha d)}\right) . \tag{1.18}$$

Recordemos las identidades trigonométricas:

$$\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{\cos\theta}{2} .$$

$$\sin(2\varphi) = 2\sin(\varphi)\cos(\varphi) .$$

Definiendo de manera conveniente a los ángulos $\theta := \alpha d$ y $\varphi := \frac{\alpha d}{2}$, estas identidades se expresan de forma:

$$2\sin^2\left(\frac{\alpha d}{2}\right) = 1 - \cos(\alpha d) . \tag{1.19}$$

$$\sin(\alpha d) = 2\sin\left(\frac{\alpha d}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha d}{2}\right) . \tag{1.20}$$

Sustituyendo (1.19) y (1.20) en (1.18), se tiene:

$$\begin{aligned} s &= -\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{1-\cos(\alpha d)}{\sin(\alpha d)}\right) \\ &= -\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{2\sin^2\left(\frac{\alpha d}{2}\right)}{2\sin\left(\frac{\alpha d}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha d}{2}\right)}\right) \\ &= -\left(\frac{1}{\alpha}\right)\left(\frac{\sin\left(\frac{\alpha d}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\alpha d}{2}\right)}\right) \\ &= -\left(\frac{1}{\alpha}\right)\tan\left(\frac{\alpha d}{2}\right) \end{aligned}$$

Así, queda demostrado que el segundo plano principal $H_2$ (mostrado en la figura adjunta) reside a la distancia

$$\boxed{s = -\left(\frac{1}{\alpha}\right)\tan\left(\frac{\alpha d}{2}\right)} .$$

**C.** Haga gráficos (separados) para mostrar la trayectoria del rayo mostrado en la Fig. 3 en los siguientes casos particulares:

i) $d = \frac{\pi}{\alpha}$

ii) $d = \frac{\pi}{2\alpha}$

iii) $d = \frac{\pi}{4\alpha}$

Para sus gráficos considere $\alpha = 0{,}5$ e $y_0 = 2{,}5$. Para cada caso evalúe $s$ y $f$.

**Solución:**

## 1.1. c)

Para abordar este ejercicio desde la óptica matricial debemos notar ciertas cosas, como que el vector de rayos se representa como:

$$\begin{bmatrix} y \\ \theta \end{bmatrix}$$

y se transforma a través del sistema óptico por:

$$\begin{bmatrix} y_{ex} \\ \theta_{ex} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{in} \\ \theta_{in} \end{bmatrix}$$

### 1.1.1. Paso 1

Primero identificamos el sistema optico, para esto es necesario tener en cuenta que el indice de refraccion variable se nos da por enunciado y es $n^2(y) = n_0^2(1 - \alpha^2 y^2)$. Notemos que este medio puede ser representado mediante una matriz de trasnferencia ABCD en coordenadas paraxiales. La matriz de propagación a través de una longitud $d$ es:

$$M_{GRIN} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha d) & \frac{1}{d}\sin(\alpha d) \\ -\alpha \sin(\alpha d) & \cos(\alpha d) \end{bmatrix}$$

La salida del rayo se obtiene aplicando:

$$\begin{bmatrix} y_d \\ \theta_d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha d) & \frac{1}{d}\sin(\alpha d) \\ -\alpha \sin(\alpha d) & \cos(\alpha d) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} y_0 \\ \theta_0 \end{bmatrix}$$

Notemos que $\theta = 0$, con esto el resultado se simplifica a:

$$y_d = y_0 \cos(\alpha d)$$
$$\theta_d = -\alpha y_0 \sin(\alpha d)$$

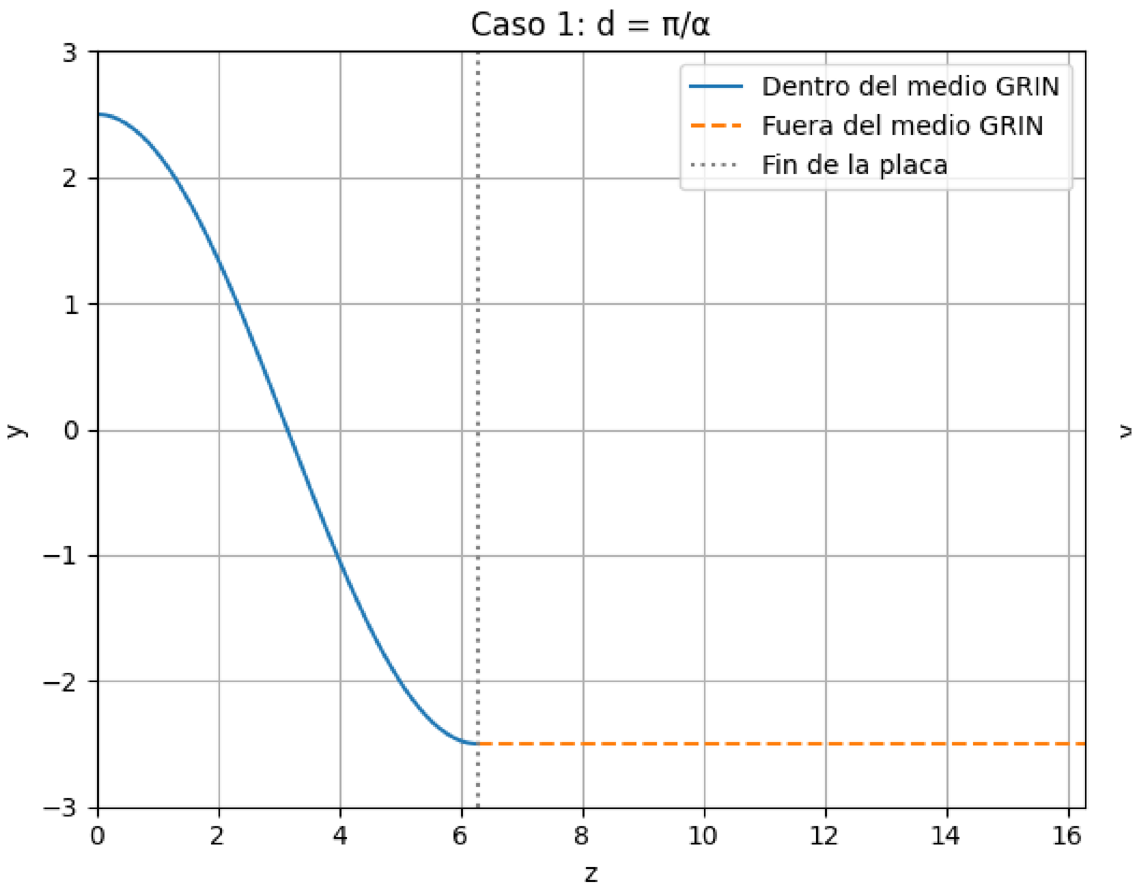
### 1.1.2. Paso 2

Ahora veámoslo por casos

Caso 1: $d = \frac{\pi}{\alpha}$

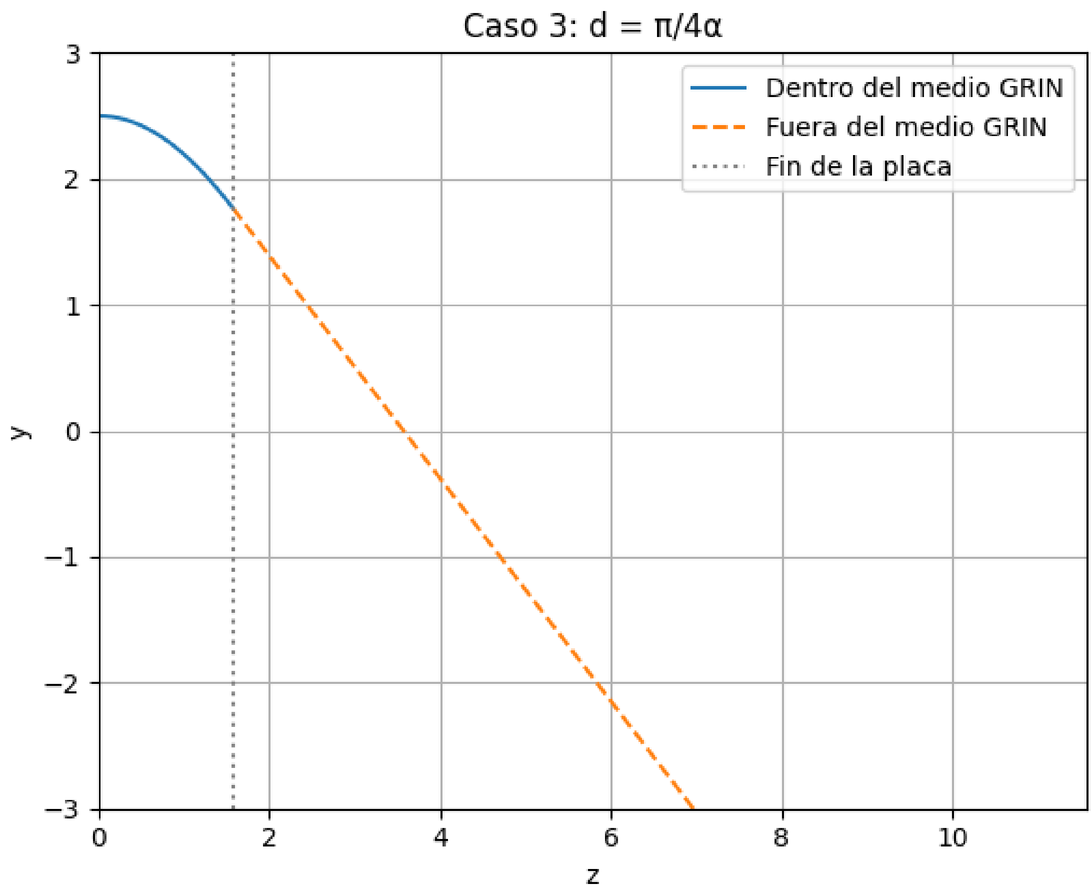
- $\alpha d = \pi$

- $\cos(\pi) = -1, \sin(\pi) = 0$
- $y_d = -2{,}5, \theta_d = 0$



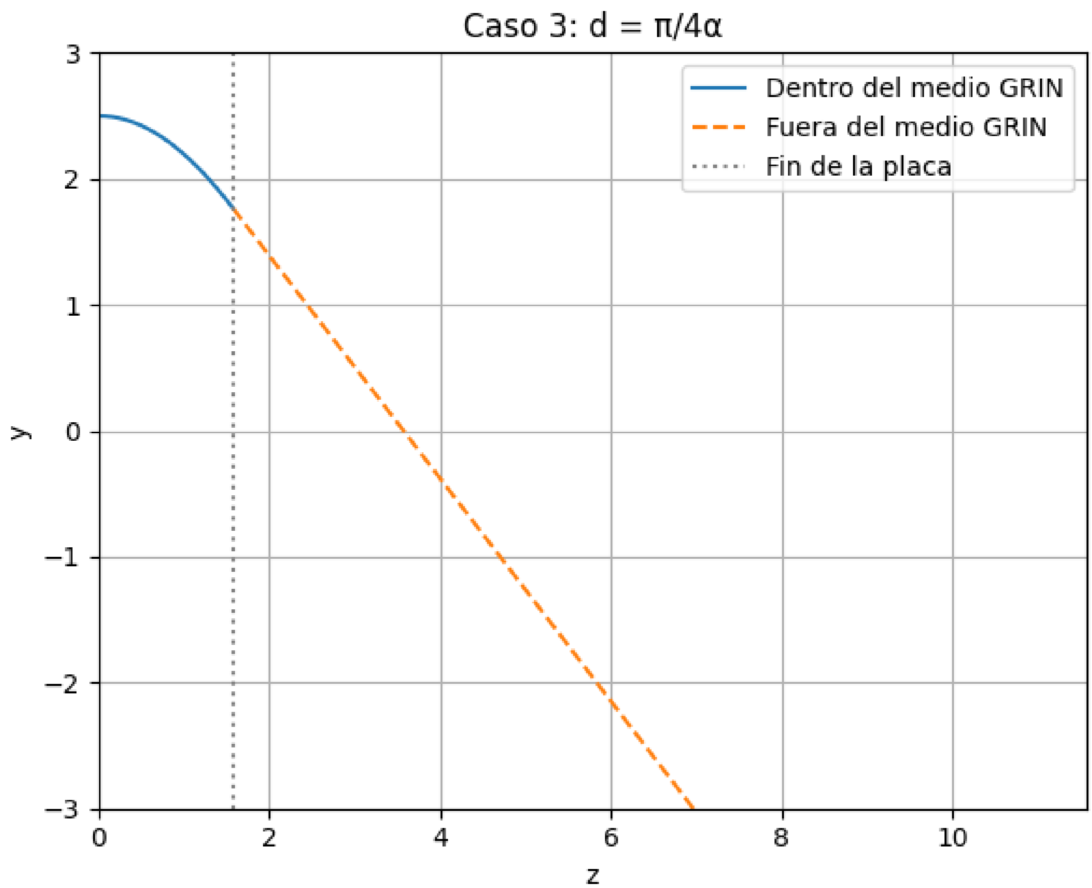

Caso 2: $d = \frac{\pi}{2\alpha}$

- $\alpha d = \frac{\pi}{2}$
- $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0, \sin(\frac{\pi}{2}) = 1$
- $y_d = 0, \theta_d = -1{,}25$




Caso 3: $d = \frac{\pi}{4\alpha}$

- $\alpha d = \frac{\pi}{4}$
- $\cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}, \sin(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- $y_d = 2{,}5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 1{,}768, \theta_d = -0{,}5 \cdot 2{,}5 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \approx -0{,}884$


Caso 3: d = π/4α
Dentro del medio GRIN
Fuera del medio GRIN
Fin de la placa
y
z
3
2
1
0
−1
−2
−3
0
2
4
6
8
10

# 2. Problema 2

Con base en una lente bi-convexa genérica de radios de curvatura $R_1$ y $R_2$ y de espesor central $t$ derive las Ecs. (1) a la (6) del archivo *Óptica-Matricial-1.pdf.* La lente es de material óptico transparente de índice de refracción $n_\ell$ y a la izquierda limita con un material óptico transparente de índice de refracción $n_1$, y a la derecha, con uno de índice de refracción $n_2$.

**Solución:**

En el problema se analiza un lente bi–convexa con radios $R_1 > 0, R_2 < 0$, un espesor central $t$, con índice interno $n_\ell$ (material del lente) y dos medios exteriores de índices $n_1$ que seria del lado del objeto(medio entrante) y $n_2$ del lado de la imagen (medio saliente) . Esto con el objetivo de construir su matriz global $M$ y, a partir de ella, obtener lo siguiente:

1. Longitudes focales $f_1$ y $f_2$.
2. Posición de los planos principales $H_1, H_2$.
3. Posición de los puntos nodales $N_1, N_2$.
4. Ecuación de Gauss gruesa y aumento $m$.
5. Límite de lente delgada en aire.

La gracia en la óptica paraxial es que cada rayo se puede codificar mediante un vector

$$\mathbf{r} = \begin{pmatrix} y \\ n\theta \end{pmatrix},$$

donde $y$ es la altura sobre el eje óptico y $n\theta$ seria su *ángulo reducido*.

Para seguir con el desarrollo se usaran convenciones y aproximaciones básicas.Considerando el eje óptico $z$ con direccion hacia la derecha, y $y > 0$ arriba y $\theta > 0$ cuando el rayo se esta inclina hacia arriba. $R$ se toma como positiva si es convexa hacia la izquierda y negativa si es convexa hacia la derecha. Con la aproximación paraxial, los ángulos son muy pequeños

$$\tan\theta \approx \theta, \quad \sin\theta \approx \theta, \quad \cos\theta \approx 1.$$

Facilitando linealizar las leyes de Snell y la geometría de propagación, para que cada elemento del sistema óptico queda descrito por una transformación lineal en $(y, \theta)$.

## 2.1. Matriz $M_1$: refracción en la primera superficie

La refracción de un rayo que incide desde el medio $n_1$ a $n_\ell$ en una superficie de radio $R_1$, usamos la ley de Snell linealizada :

$$n_1\,\alpha_1 = n_\ell\,\alpha' \quad\Longrightarrow\quad \alpha' = \frac{n_1}{n_\ell}\Big(\theta_1 - \frac{y_1}{R_1}\Big).$$

Se suma la inclinación de la normal, asi obteniendo el ángulo respecto al eje:

$$\theta' = \alpha' + \frac{y_1}{R_1} = \frac{n_1}{n_\ell}\,\theta_1 + \frac{n_\ell - n_1}{n_\ell}\,\frac{y_1}{R_1}.$$

La matriz que relaciona $(y_1, \theta_1)$ con $(y', \theta')$ quedaria como:

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n_\ell - n_1}{n_\ell\,R_1} & \dfrac{n_1}{n_\ell} \end{pmatrix}.$$

### 2.2. Matriz $M_2$: traslación en el espesor

Nuestra $M_2$ describe la propagación del rayo a por medio del espesor central $t$ en $n_\ell$.

$$y'' = y' + t\,\tan\theta' \approx y' + t\,\theta', \qquad \theta'' = \theta'.$$

Sin cambios ni en el índice ni curvatura, quedando

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

### 2.3. Matriz $M_3$: refracción en la segunda superficie

$M_3$ modela la refracción de el rayo cuando este va hacia el material con índice $n_\ell$ hasta $n_2$, con radio $R_2$ de la superficie. De manera similar a $M_2$ la ley de Snell paraxial produce

$$n_\ell\,\alpha'' = n_2\,\alpha_2 \quad\Longrightarrow\quad \alpha_2 = \frac{n_\ell}{n_2}\Big(\theta'' + \frac{y''}{R_2}\Big).$$

quedando similares, a diferencia de los signos

$$\theta_2 = \alpha_2 - \frac{y''}{R_2} = \frac{n_\ell}{n_2}\,\theta'' - \frac{n_\ell - n_2}{n_2}\,\frac{y''}{R_2},$$

Como la altura final obtenida $y_2 = y''$. Entonces:

$$M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{n_\ell - n_2}{n_2\,R_2} & \dfrac{n_\ell}{n_2} \end{pmatrix}.$$

La matriz total se obtiene por la composición

$$M = M_3 M_2 M_1 = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Definiendo

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m_1 & k_1 \end{pmatrix}, \quad M_2 = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ m_3 & k_3 \end{pmatrix},$$

con

$$m_1 = \frac{n_\ell - n_1}{n_\ell R_1}, \quad k_1 = \frac{n_1}{n_\ell}, \quad m_3 = -\frac{n_\ell - n_2}{n_2 R_2}, \quad k_3 = \frac{n_\ell}{n_2},$$

el producto directo da:

$$M_2 M_1 = \begin{pmatrix} 1 + t\,m_1 & t\,k_1 \\ m_1 & k_1 \end{pmatrix}, \quad M = M_3(M_2 M_1) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix},$$

y los elementos son

$$\begin{aligned} A &= 1 + t\,m_1, \\ B &= t\,k_1, \\ C &= m_3(1 + t\,m_1) + k_3 m_1, \\ D &= m_3(t\,k_1) + k_3 k_1. \end{aligned}$$

Sustituyendo y simplificando:

$$\begin{aligned}
A &= 1 + \frac{n_\ell - n_1}{n_\ell R_1}\,t,\\
B &= \frac{n_1}{n_\ell}\,t,\\
C &= -\frac{n_\ell - n_2}{n_2 R_2}\left(1 + \frac{n_\ell - n_1}{n_\ell R_1}\,t\right) + \frac{n_\ell - n_1}{n_2 R_1},\\
D &= -\frac{n_\ell - n_2}{n_2 R_2}\,t\,\frac{n_1}{n_\ell} + \frac{n_1}{n_2}.
\end{aligned}$$

En óptica paraxial, cualquier rayo se describe por

$$\begin{pmatrix} y_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}.$$

## 2.4. Focal frontal $f_1$

Partimos de la matriz total del sistema M, para definir el foco frontal $F_1$ imponemos la condición de que un rayo que parte de la altura $y_1$ con ángulo

$$\theta_1 \;=\; -\,\frac{y_1}{f_1}$$

emerja paralelo al eje óptico, es decir $\theta_2 = 0$. Del segundo componente del producto matricial se extrae

$$\theta_2 \;=\; C\,y_1 \;+\; D\,\theta_1\,,$$

y al sustituir $\theta_1 = -y_1/f_1$ se obtiene

$$0 = C\,y_1 - D\,\frac{y_1}{f_1} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{f_1} \;=\; \frac{C}{D}.$$

Se factoriza el índice de entrada para escribir

$$C = -\,\frac{n_1}{n_2}\,\frac{1}{f_1} \quad\Longrightarrow\quad \frac{1}{f_1} = -\,\frac{n_2}{n_1}\,C.$$

Por otra parte, la combinación de las matrices lleva a la expresión

$$C \;=\; \frac{n_\ell - n_1}{n_1\,R_1} \;+\; \frac{n_2 - n_\ell}{n_2\,R_2} \;+\; \frac{(n_\ell - n_1)(n_2 - n_\ell)}{n_1\,n_2}\,\frac{t}{R_1 R_2},$$

de modo que al sustituir en $1/f_1 = -\frac{n_2}{n_1}\,C$

$$\boxed{\frac{1}{f_1} = \frac{n_\ell - n_1}{n_1\,R_1} + \frac{n_2 - n_\ell}{n_2\,R_2} + \frac{(n_\ell - n_1)(n_2 - n_\ell)}{n_1\,n_2}\,\frac{t}{R_1 R_2}.}$$

## 2.5. Foco trasero $f_2$

Con la formulación de Newton definimos

$$x = z_1 - f_1, \quad x' = z_2 - f_2, \quad x\,x' = f_1\,f_2.$$

Si invertimos el sentido de propagación (intercambiando $n_1 \leftrightarrow n_2$), la expresión para $1/f_2$ es idéntica a la de $1/f_1$ salvo un signo por convención de ejes. De ahí surge de forma inmediata

$$\boxed{f_2 = -\,\frac{n_2}{n_1}\,f_1.}$$

Alternativamente, colocando el objeto en el plano focal trasero invertido ($x = 0$), la condición $x' \to \infty$ también conduce al mismo factor $-\,n_2/n_1$.

## 2.6. Plano principal frontal $r$

Definimos $P$ como el punto sobre el eje (a distancia $p$ del vértice de entrada) tal que un rayo que parte de él con altura $y_1$ y pendiente $\theta_1$ emerja paralelo ($\theta_2 = 0$).

Como $\theta_1 \approx y_1/p$, se cumple

$$y_1 = p\,\theta_1.$$

La condición $\theta_2 = 0$ conduce a

$$0 = C\,y_1 + D\,\theta_1 = (C\,p + D)\,\theta_1 \implies p = -\frac{D}{C}.$$

Usando la convención $p = D/C$, el plano principal frontal $H_1$, a distancia $r$ del vértice, queda

$$\boxed{r = p - f_1 = \frac{D}{C} \;-\; f_1.}$$

## 2.7. Plano principal trasero $s$

Consideremos un rayo que entra paralelo al eje ($\theta_1 = 0$). Al atravesar la lente, sus valores de salida son

$$y_2 = A\,y_1, \qquad \theta_2 = C\,y_1.$$

Si prolongamos este rayo hacia atrás desde el segundo vértice, el punto de intersección con el eje se sitúa a

$$q = \frac{y_2}{\theta_2} = \frac{A}{C}.$$

Como el foco trasero $F_2$ está a la distancia $f_2$ del vértice, el plano principal trasero $H_2$ se encuentra en

$$\boxed{s = q \;-\; f_2 = \frac{A}{C} \;-\; f_2.}$$

## 2.8. Plano nodal frontal $v$

El plano nodal frontal $N_1$ es aquel desde el cual un rayo dirigido hacia él emerge manteniendo su ángulo. Primero imponemos que al llegar paralelo ($\theta_2 = 0$) se cumpla

$$\theta_2 = C\,y_1 + D\,\theta_1 = 0,$$

y si suponemos $\theta_1 \approx -y_1/v$, obtenemos

$$v = \frac{D}{C}.$$

Luego, para asegurar que la altura de salida sea cero, sustituimos $\theta_1 = -y_1/f_1$ en

$$y_2 = A\,y_1 + B\,\theta_1,$$

lo que da $B = A\,f_1$. Con ambas condiciones alcanzamos la fórmula final:

$$\boxed{v \;=\; \frac{A\,f_1 - B}{C}.}$$

## 2.9. Plano nodal trasero $w$

El plano nodal trasero $N_2$, medido desde el vértice de salida, es el punto donde un rayo paralelo ($\theta_1 = 0$) mantiene su inclinación al salir.

Al atravesar la lente:

$$y_2 = A\,y_1, \qquad \theta_2 = C\,y_1.$$

Prolongando el rayo hacia atrás hasta que recupere altura cero:

$$0 = A\,y_1 - w\,(C\,y_1) \implies w = \frac{A}{C}.$$

Por último, descontamos la distancia al foco trasero $f_2$:

$$\boxed{w = \frac{A}{C} - f_2.}$$

## 2.10. Relación de Newton

Usando las coordenadas de Newton,

$$x = z_1 - f_1, \quad x' = z_2 - f_2, \quad x\,x' = f_1\,f_2,$$

sustituimos para obtener

$$(z_1 - f_1)(z_2 - f_2) = f_1 f_2 \implies z_1 z_2 - f_1 z_2 - f_2 z_1 = 0.$$

Dividiendo por $z_1 z_2$ y reorganizando términos resulta

$$\boxed{-\frac{f_1}{z_1} + \frac{f_2}{z_2} = 1.}$$

## 2.11. Aumento lateral $m$

Introducimos traslaciones desde $H_1$ y hasta $H_2$:

$$T_{\text{in}} = \begin{pmatrix} 1 & z_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T_{\text{out}} = \begin{pmatrix} 1 & z_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La matriz conjugada

$$M' = T_{\text{out}}\,M\,T_{\text{in}} = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix}$$

tiene

$$B' = z_1 A + B + z_2\,(z_1 C + D).$$

Imponiendo $B' = 0$ (planos conjugados) hallamos

$$z_2 = -\frac{z_1 A + B}{z_1 C + D},$$

y el elemento

$$A' = A + C\,z_2$$

es la razón de alturas, esto es

$$\boxed{m = A + C\,z_2.}$$

Aplicando la forma de Gauss con $n_1, n_2$,

$$z_2 = -\frac{n_1}{n_2}\frac{A\,z_1 + B}{C\,z_1 + D} \implies m = -\frac{n_1}{n_2}\frac{z_2}{z_1}.$$

## 2.12. Caso $n_1 = n_2$: lente delgada

En aire ($n_1 = n_2$) y usando $D = Cf_1$, la condición $B' = 0$ conduce a

$$A\,z_1 + B + z_2(C\,z_1 + D) = 0 \implies \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} = \frac{1}{f_1}.$$

El elemento $A' = A + Cz_2$ sigue siendo la relación de alturas, de modo que

$$m = A + C\,z_2 \quad \implies \quad \boxed{m = -\frac{z_2}{z_1}.}$$