

数学科学学院

《数值计算》课程设计 4

学 号:

专 业:

学生姓名:

任课教师:

完成时间:

2021 年 月

大作业要求：

1. 使用统一封皮；
2. 上交大作业内容包含：
 - （1）数学原理；
 - （2）程序设计（必须对输入和输出变量进行说明；编程无语言要求，但程序要求通过）；
 - （3）结果分析和讨论；
 - （4）结合专业、题目给出完成题目的体会与收获；
3. 提交大作业的时间：任课老师班级群通知；
4. 提交方式：打印版一份；或手写大作业，但必须使用 A4 纸；
5. 撰写的程序需打印出来作为附录。

实验内容：线性方程组数值求解

1. 考虑一个一端固定，另一端自由的水平悬杆，其受力的离散模型产生了一个五对角线性代数方程组 $Ax = b$ ，其中

$$A = \begin{bmatrix} 9 & -4 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ -4 & 6 & -4 & 1 & \ddots & & \vdots \\ 1 & -4 & 6 & -4 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & 1 & -4 & 6 & -4 & 1 \\ \vdots & & \ddots & 1 & -4 & 5 & -2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

n 维向量 b 为杆上的已知荷载，假定其为均匀，即 b 的每个分量 $b_i = 1$ ， n 维向量 x 表示杆的偏移。完成以下工作：

- (1) 使用 LU 分解，分别求解 $n=100$ 和 $n=1000$ 时，方程组的数值解，并计算相应最大残差 $\|b - Ax\|_\infty$ ，说明求得的解是否准确？并从系数矩阵条件数出发给予简单解释。
- (2) 由于系数矩阵对称正定，尝试给出矩阵当 $n=5$ 和 $n=10$ 时的 Cholesky 分解，并求解方程组，计算相应最大残差 $\|b - Ax\|_\infty$ 。

2. 给定 n 阶线性方程组 $Ax = b$ ，其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -1 & 2 & -1 \\ & & & -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

完成以下工作：

- (1) 当 $n=10, 20, 50, 100, 200$ 时，使用 Jacobi 迭代求解上述线性方程组，输出 Jacobi 迭代法迭代精度达到 $\epsilon = 10^{-8}$ 时的迭代次数及迭代矩阵的谱半径与方程组阶数 n 的关系。

n	迭代次数	误差	迭代矩阵的谱半径
10			
20			

50			
100			
200			

- (2) 当 $n=10,20,50,100,200$ 时, 使用 Gauss-Seidel 迭代求解上述线性方程组, 输出 Gauss-Seidel 迭代法迭代精度达到 $\varepsilon = 10^{-8}$ 时的迭代次数及迭代矩阵的谱半径与方程组阶数 n 的关系。

n	迭代次数	误差	迭代矩阵的谱半径
10			
20			
50			
100			
200			