Введение в теорию групп

Артём Рашевский

ФКН ВГУ

2024

Содержание

1 Бинарные операции. Полугруппы, моноиды и группы

Определение 1.1. Пусть M — непустое множество. *Бинарной операцией* $\circ$ на множестве M называется отображение $\circ\colon M \times M \to M$, $\forall a, b \in M\colon (a, b) \mapsto a \circ b$.

Множество с бинарной операцией обычно обозначают $(M, \circ)$.

Определение 1.2. Множество с бинарной операцией $(M, \circ)$ называется *полугруппой*, если данная бинарная операция ассоциативна, т.е.

$$\forall a, b, c \in M\colon a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c.$$

Определение 1.3. Полугруппа $(M, \circ)$ называется *моноидом*, если в ней есть *нейтральный элемент*, т.е.

$$\exists e \in M :- \forall a \in M\colon e \circ a = a \circ e = a.$$

Определение 1.4. Моноид $(M, \circ)$ называется *группой*, если для каждого элемента $a \in M$ найдется *обратный элемент*, т.е.

$$\forall a \in M \ \exists a^{-1} \in M :- a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e.$$

Группы обычно обозначаются $\langle M, \circ \rangle$.

Определение 1.5. Группа G называется *коммутативной* или *абелевой*, если групповая операция *коммутативна*, т.е.

$$\forall a, b \in G\colon ab = ba.$$

Определение 1.6. *Порядок* группы G — это число элементов в G. Группа называется *конечной*, если её порядок конечен, и *бесконечной* иначе.

Порядок группы G обозначается $|G|$.

Примеры.

1. Числовые *аддитивные* группы:
   $\langle \mathbb{Z}, +\rangle$, $\langle \mathbb{Q}, +\rangle$, $\langle \mathbb{R}, +\rangle$, $\langle \mathbb{C}, +\rangle$, $\langle \mathbb{Z}_n, +\rangle$.

2. Числовые *мультипликативные* группы:
   $\langle \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times\rangle$, $\langle \mathbb{R} \setminus \{0\}, \times\rangle$, $\langle \mathbb{C} \setminus \{0\}, \times\rangle$, $\langle \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \times\rangle$, p — простое.

3. Группы матриц:
   $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$ — *полная линейная группа*;
   $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ — *специальная линейная группа*;
   $\mathrm{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^T = I\}$ — *ортогональная группа*;
   $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ — *специальная ортогональная группа.*

4. Группы перестановок:
   симметрическая группа S_n — все перестановки длины n;
   знакопеременная группа A_n — все чётные перестановки длины n.

5. Группы преобразований подобия: гомотетии, движения (осевые и скользящие симметрии, параллельные переносы, повороты).

Определение 1.7. Для описания структур групп часто используются *таблицы Кэли.* Они представляют собой квадратные таблицы, заполненные результатами применения бинарной операции к элементам множества.

Пример. Таблица Кэли для группы $\langle\{1, 3, 5, 7\}, \times(\mathrm{mod}\, 8)\rangle$:

$\times$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

2 Подгруппы. Описание всех подгрупп в группе $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$. Циклические подгруппы и группы. Порядок элемента. Связь между порядком элемента и порядком порождаемой им циклической подгруппы

Определение 2.1. Подмножество H группы G называется *подгруппой* и обозначается $H < G$, если выполнены следующие условия:

1. $e \in H$;
2. $\forall a, b \in H\colon ab \in H$;
3. $\forall a \in H\colon a^{-1} \in H$.

В каждой группе G есть *несобственные* или *тривиальные* подгруппы $H = \{e\}$ и $H = G$. Все прочие подгруппы называются *собственными*.

Примеры.

1. $\langle \mathbb{Z} < \mathbb{Q} < \mathbb{R} < \mathbb{C}, (+, \times) \rangle$
2. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) > \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) > \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$; $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) > \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$.
3. $S_n > A_n$.

Теорема (**Критерий подгруппы**). *Пусть G — группа, тогда*

$$H < G \Longleftrightarrow \forall a, b \in H\colon a \circ b^{-1} \in H.$$

Доказательство. Определим на H вспомогательное отношение $R_H = \{(a, b) \mid a \circ b^{-1} \in H\}$. Покажем, что R_H является отношением эквивалентности. Для этого проверим, что оно рефлексивно (1), симметрично (2) и транзитивно (3):

1. $a \circ a^{-1} = e \in H$;
2. $ab^{-1} \in H \Longrightarrow ba^{-1} = (ab^{-1})^{-1} \in H$;
3. $ab^{-1} \in H,\ bc^{-1} \in H \Longrightarrow ac^{-1} = (ab^{-1})(bc^{-1}) = a(b^{-1}b)c^{-1} \in H$.

Рефлексивность R_H определяет наличие нейтрального элемента, симметричность – наличие обратного элемента, транзитивность – ассоциативность заданной бинарной операции. Каждый класс эквивалентности будет ассоциирован с некоторой подгруппой (как с алгебраически замкнутым множеством). ■

Утверждение. *Всякая подгруппа в* $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$ *имеет вид* $k\mathbb{Z}$ *для некоторого* $k \in \mathbb{N}_0$ $(\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\})$.

Доказательство. Очевидно, что все подмножества вида $k\mathbb{Z}$ являются подгруппами в $\mathbb{Z}$. Пусть $H < \mathbb{Z}$. Если $H = \{0\}$, то $H = 0\mathbb{Z}$. Иначе положим $k = \min(H \cap N) \neq 0$ (это множество непусто, т.к. $\forall x \in H \cap N\colon -x \in H$), тогда $k\mathbb{Z} \subseteq H$. Покажем, что $k\mathbb{Z} = H$. Пусть $a \in H$ — произвольный элемент. Поделим его на k с остатком:

$$a = qk + r, \text{где } k \in H,\ 0 \leqslant r < k \Rightarrow r = a - qk \in H.$$

В силу выбора k получаем: $r = 0 \Rightarrow a = qk \in k\mathbb{Z}$. ■

Определение 2.2. Пусть G — группа, $g \in G$ и $n \in \mathbb{Z}$. *Степень* элемента g определяется следующим образом:

$$g^n = \begin{cases} \underbrace{g \dots g}_{n}, & n > 0 \\ e, & n = 0 \\ \underbrace{g^{-1} \dots g^{-1}}_{n}, & n < 0 \end{cases}$$

и обладает свойствами:

$\forall m, n \in \mathbb{Z}:$

1. $g^m \cdot g^n = g^{m+n}$;
2. $(g^m)^{-1} = g^{-m}$;
3. $(g^m)^n = g^{mn}$.

Определение 2.3. Пусть G — группа и $g \in G$. *Циклической подгруппой*, порожденной элементом g, называется подмножество $\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \subseteq G$.

Циклическая подгруппа, порождённая элементом g, обозначается $\langle g \rangle$. Элемент g называется *порождающим* или *образующим* для подгруппы $\langle g \rangle$.

Пример. Подгруппа $2\mathbb{Z} < \langle \mathbb{Z}, + \rangle$ является циклической, и в качестве порождающего элемента в ней можно взять $g = 2$ или $g = -2$. Другими словами, $2\mathbb{Z} = \langle 2 \rangle = \langle -2 \rangle$.

Определение 2.4. Группа G называется *циклической*, если

$$\exists g \in G :- \ G = \langle g \rangle.$$

Циклическая группа порядка n обозначается C_n.

Примеры. $\langle \mathbb{Z}, + \rangle$; $\langle \mathbb{Z}_n, + \rangle, n \geqslant 1$.

Определение 2.5. Пусть G — группа и $g \in G$. *Порядком* элемента g называется наименьшее $m \in \mathbb{N} :- \ g^m = e$. Если такого натурального числа m не существует, говорят, что порядок элемента g равен бесконечности. Порядок элемента обозначается $\operatorname{ord}(g)$.

Замечание.

$$\operatorname{ord}(g) = 1 \iff g = e.$$

Утверждение. *Если G — группа и $g \in G$, то* $\operatorname{ord}(g) = |\langle g \rangle|$.

Доказательство. Заметим, что если $g^k = g^s$, то $g^{k-s} = e$. Поэтому если элемент g имеет бесконечный порядок, то все элементы $g^n, n \in \mathbb{Z}$, попарно различны, и подгруппа $\langle g \rangle$ содержит бесконечно много элементов. Если же $\operatorname{ord}(g) = m$, то из минимальности числа m следует, что элементы $e = g^0, g^1, g^2, \ldots, g^{m-1}$ попарно различны. Далее, $\forall n \in \mathbb{Z}$: $n = mq + r$, где $0 \leqslant r \leq m - 1$, и

$$g^n = g^{mq+r} = (g^m)^q g^r = e^q g^r = g^r.$$

Следовательно, $\langle g \rangle = \{e, g, g^2, \ldots, g^{m-1}\}$ и $|\langle g \rangle| = m$. ■

Очевидно, что всякая циклическая группа коммутативна и не более чем счётна.

3 Смежные классы. Индекс подгруппы. Теорема Лагранжа

Определение 3.1. *Левым смежным классом* элемента g группы G по подгруппе H называется подмножество

$$gH = \{gh \mid h \in H\},$$

аналогично определяется *правый смежный класс*:

$$Hg = \{hg \mid h \in H\}.$$

Лемма. *Пусть G — конечная подгруппа, тогда $\forall g \in G$: $|gH| = |H|$.*

Доказательство. Поскольку $gH = \{gh \mid h \in H\}$, в gH элементов не больше, чем в H. Если $gh_1 = gh_2$, то домножив слева на g^{-1}, получаем $h_1 = h_2$. Значит, все элементы вида gh, где $h \in H$, попарно различны, откуда $|gH| = |H|$. ■

Определение 3.2. Пусть G — группа, $H < G$. *Индексом* подгруппы H в группе G называется число левых смежных классов G по H.

Индекс группы G по подгруппе H обозначается $[G : H]$.

Теорема (Лагранж). *Пусть G — конечная группа, $H < G$. Тогда*

$$|G| = |H| \cdot [G : H].$$

Доказательство. Каждый элемент группы G лежит в (своём) левом смежном классе по подгруппе H, разные смежные классы не пересекаются (по следствию из доказательства критерия подгруппы) и каждый из них содержит по $|H|$ элементов (по предыдущей лемме). ■

Следствие 3.1. $|G| \vdots |H|$.

Следствие 3.2. $|G| \vdots \operatorname{ord}(g)$.

Доказательство. Вытекает из следствия 1 и того, что $\operatorname{ord}(g) = |\langle g \rangle|$. ■

Следствие 3.3. $g^{|G|} = e$.

Доказательство. Из предыдущего следствия получаем: $|G| = \operatorname{ord}(g) \cdot s,\ s \in \mathbb{N} \Longrightarrow g^{|G|} = (g^{\operatorname{ord}(g)})^s = e^s = e$. ■

Следствие 3.4 (**Малая теорема Ферма**). *Пусть $\overline{a}$ — ненулевой вычет по простому модулю p, тогда $\overline{a}^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.*

Доказательство. Достаточно применить следствие 3 к группе $\langle \mathbb{Z}_p \setminus \{0\}, \times \rangle$. ■

Следствие 3.5. *Пусть $|G|$ — простое число, тогда G — циклическая группа, порождённая любым своим ненейтральным элементом.*

Доказательство. Пусть $g \in G$ — произвольный ненейтральный элемент. Тогда циклическая подгруппа $\langle g \rangle$ содержит более одного элемента и $|\langle g \rangle|$ делит $|G|$ по следствию 1. Значит, $|\langle g \rangle| = |G|$, откуда $G = \langle g \rangle$. ■

4 Метрические пространства. Изометрии и движения. Группы движений. Диэдральные группы

Определение 4.1. Упорядоченная пара (M, d), состоящая из множества M и отображения $d\colon M \times M \to \mathbb{R}$, называется *метрическим пространством*, если $\forall x, y \in M$:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (*аксиома тождества*);
2. $d(x, y) \geqslant 0$ (*аксиома неотрицательности*);
3. $d(x, y) = d(y, x)$ (*аксиома симметричности*);
4. $d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, y)$ (*аксиома* или *неравенство треугольника*).

Определение 4.2. Пусть X и Y — метрические пространства. Отображение $f\colon X \to Y$ называется *изометрией*, если оно сохраняет расстояние между точками:

$$\forall x, x' \in X\colon |f(x) - f(x')|_Y = |x - x'|_X,$$

где $|a - b|_S$ — расстояние между a и b в пространстве S.

Если $X = Y$, f называют *движением.*

Определение 4.3. Движение называют *собственным*, если оно сохраняет *ориентацию* пространства.

Определение 4.4. Пусть E — *евклидово аффинное пространство* и $F \subseteq E$ — геометрическая фигура. *Группой движений (изометрий)* $\mathrm{Isom}(F)$ фигуры F называется множество тех движений аффинного пространства E, которые переводят фигуру F в себя:

$$\mathrm{Isom}(F) = \{\varphi\colon E \to E \mid \varphi - \text{движение},\ \varphi(F) = F\}.$$

В качестве групповой операции рассматривается операция композиции движений.

Замечание. Группа собственных движений $\mathrm{Isom}(F)^+$ является подгруппой группы движений $\mathrm{Isom}(F)$ фигуры F.

Определение 4.5. Группа движений правильного n-угольника $\Delta_n \subset \mathbb{R}^2$ называется *диэдральной группой* D_n:

$$D_n = \mathrm{Isom}(\Delta_n).$$

Есть всего 2 вида таких преобразований:

1. n вращений относительно центра на угол, кратный $\frac{2\pi}{n}$ (вращение на угол φ обозначается R_φ);
2. n симметрий относительно осей симметрии (симметрия относительно прямой l обозначается S_l).

   В случае нечетного n любая ось симметрии проходит через центр Δ_n и одну из вершин, в случае четного n любая ось симметрии проходит либо через противоположные вершины, либо через середины противоположных сторон.

Утверждение. $|D_n| = 2n$.

Замечание. Группа собственных движений Δ_n содержит только повороты:

$$\mathrm{Isom}(D_n)^+ = \{\mathrm{R}_{\frac{2\pi k}{n}}\}.$$

Пример. Таблица Кэли группы D_4 квадрата $ABCD$:

$\circ$	id	$\mathrm{R}_{\frac{\pi}{2}}$	R_π	$\mathrm{R}_{\frac{3\pi}{2}}$	S_h	S_v	S_{AC}	S_{BD}
id	id	$\mathrm{R}_{\frac{\pi}{2}}$	R_π	$\mathrm{R}_{\frac{3\pi}{2}}$	S_h	S_v	S_{AC}	S_{BD}
$\mathrm{R}_{\frac{\pi}{2}}$	$\mathrm{R}_{\frac{\pi}{2}}$	R_π	$\mathrm{R}_{\frac{3\pi}{2}}$	id	S_{BD}	S_{AC}	S_h	S_v
R_π	R_π	$\mathrm{R}_{\frac{3\pi}{2}}$	id	$\mathrm{R}_{\frac{\pi}{2}}$	S_v	S_h	S_{BD}	S_{AC}
$\mathrm{R}_{\frac{3\pi}{2}}$	$\mathrm{R}_{\frac{3\pi}{2}}$	id	$\mathrm{R}_{\frac{\pi}{2}}$	R_π	S_{AC}	S_{BD}	S_v	S_h
S_h	S_h	S_{AC}	S_v	S_{BD}	id	R_π	$\mathrm{R}_{\frac{\pi}{2}}$	$\mathrm{R}_{\frac{3\pi}{2}}$
S_v	S_v	S_{BD}	S_h	S_{AC}	R_π	id	$\mathrm{R}_{\frac{3\pi}{2}}$	$\mathrm{R}_{\frac{\pi}{2}}$
S_{AC}	S_{AC}	S_v	S_{BD}	S_h	$\mathrm{R}_{\frac{3\pi}{2}}$	$\mathrm{R}_{\frac{\pi}{2}}$	id	R_π
S_{BD}	S_{BD}	S_h	S_{AC}	S_v	$\mathrm{R}_{\frac{\pi}{2}}$	$\mathrm{R}_{\frac{3\pi}{2}}$	R_π	id

5 Группа перестановок. Цикловое разложение. Порядок элементов в S_n. Теорема Кэли

Определение 5.1. Пусть задано множество $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Множество всех возможных биекций $\Pi = \{\pi_i \colon X \leftrightarrow X\}$ с операцией композиции $\circ$ образует группу $S_n = \langle \Pi, \circ \rangle$, называемую *симметрической группой* или *группой перестановок.*

Утверждение 5.1.

$$|S_n| = \operatorname{Card} \Pi = n!.$$

Доказательство. Символ 1 можно подходящей перестановкой σ перевести в любой другой символ $\sigma(1)$, для чего существует в точности n различных возможностей. Но зафиксировав $\sigma(1)$, в качестве $\sigma(2)$ можно брать лишь один из оставшихся $n-1$ символов и т.д. Всего возможностей выбора $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$, значит и всех перестановок будет $n(n-1) \ldots 2 \cdot 1 = n!$. ■

Утверждение 5.2. *Любая перестановка может быть представлена в виде композиции непересекающихся циклов.*

Определение 5.2. Цикл длины 2 называется *транспозицией.*

Утверждение 5.3. *Каждая перестановка $\pi \in S_n$ является композицией транспозиций.*

Утверждение 5.4. *Непересекающиеся циклы коммутируют.*

Утверждение 5.5. *Порядок цикла равен его длине.*

Утверждение 5.6. *Порядок перестановки равен* НОК *длин циклов в его цикловом разложении.*

Определение 5.3. *Цикловой структурой* перестановки $\pi \in S_n$ называется упорядоченный набор чисел $\mathrm{CS}(\pi) = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$, где c_i — количество циклов длины i в разложении π.

Пример. Пусть $G = S_3$, $H = \langle(12)\rangle = \{\mathrm{id}, (12)\}$. Найдём все левые и правые смежные классы G по H (произвольный элемент обозначим a):

a	aH	Ha
id	aH	Ha
(12)	$\{(12), \mathrm{id}\}$	$\{(12), \mathrm{id}\}$
(13)	$\{(13), (123)\}$	$\{(13), (132)\}$
(23)	$\{(23), (132)\}$	$\{(23), (123)\}$
(123)	$\{(123), (13)\}$	$\{(123), (23)\}$
(132)	$\{(132), (23)\}$	$\{(132), (13)\}$

Теорема (**Кэли**)**.** *Любая конечная группа G порядка n изоморфна некоторой подгруппе симметрической группы S_n:*

$$\forall a, g \in G\colon a \mapsto \pi_a, \quad \pi_a(g) = a \circ g.$$

Доказательство. содержимое... ■

6 Нормальные подгруппы. Факторгруппы

Определение 6.1. Подгруппа H группы G называется *нормальной*, если

$$\forall g \in G\colon gH = Hg.$$

Обозначается $H \lhd G$.

Утверждение. *Пусть H — подгруппа группы G, тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *H нормальна;*
2. *$\forall g \in G\colon gHg^{-1} = H$;*
3. *$\forall g \in G\colon gHg^{-1} \subseteq H$.*

Доказательство.

(1) $\Longrightarrow$ (2): $gH = Hg \mid \cdot g^{-1} \Longrightarrow gHg^{-1} = H$.

(2) $\Longrightarrow$ (3): очевидно.

(3) $\Longrightarrow$ (2): $gHg^{-1} \subseteq H \Longrightarrow gHg^{-1} \subseteq H \mid \cdot g \Longrightarrow gH \subseteq Hg$.

Если $g = g^{-1}$, то $g \cdot \mid g^{-1}Hg \subseteq H \Longrightarrow Hg \subseteq gH \Longrightarrow gH = Hg$. ■

Рассмотрим множество смежных классов по нормальной подгруппе, обозначенной G/H. Определим на G/H бинарную операцию, полагая, что $(g_1H)(g_2H) = (g_1g_2)H$.

Пусть $g_1'H = g_1H$ и $g_2'H = g_2H$, тогда $g_1' = g_1h_1$, $g_2' = g_2h_2$, где $h_1, h_2 \in H$.

$$(g_1'H)(g_2'H) = (g_1'g_2')H = (g_1h_1g_2h_2)H = (g_1g_2\underbrace{g_2^{-1}h_1g_2}_{\in H}h_2)H \subseteq (g_1g_2)H \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow (g_1'g_2')H = (g_1g_2)H.$$

Утверждение. *G/H является группой.*

Доказательство. Проверим аксиомы группы:

1. Ассоциативность очевидна.
2. Нейтральный элемент — eH.
3. Обратный к gH — $g^{-1}H$. ■

Определение 6.2. Множество G/H с указанной операцией называется *факторгруппой* группы G по нормальной подгруппе H.

Пример. Если $G = \langle \mathbb{Z}, + \rangle$ и $H = n\mathbb{Z}$, то G/H — группа вычетов $\langle \mathbb{Z}_n, + \rangle$.

7 Гомоморфизмы групп, их виды. Свойства гомоморфизмов. Четверная группа Клейна. Ядро и образ гомоморфизма

Определение 7.1. Пусть $\langle G, \circ \rangle$ и $\langle F, * \rangle$ — группы.

Отображение $\varphi\colon G \to F$ называется *гомоморфизмом*, если

$$\forall g_1, g_2 \in G\colon \varphi(g_1 \circ g_2) = \varphi(g_1) * \varphi(g_2).$$

Замечание. Пусть $\varphi\colon G \to F$ — гомоморфизм групп, и пусть e_G, e_F — нейтральные элементы групп G и F соответственно, тогда:

1. $\varphi(e_G) = e_F$
2. $\forall g \in G\colon \varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$

Доказательство.

1. $\varphi(e_G) = \varphi(e_G e_G) = \varphi(e_G)\varphi(e_G)$.

   Домножив обе крайние части равенства на $\varphi(e_G)^{-1}$, получим $e_F = \varphi(e_G)$.
2. $\varphi(g * g^{-1}) = e_F = \varphi(g)\varphi(g^{-1})$.

   Умножив обе части на $\varphi(g)^{-1}$, получаем необходимое. ∎

Определение 7.2. Гомоморфизм групп $\varphi\colon G \to F$ называется

– *эндоморфизмом*, если $F = G$;

– *мономорфизмом*, если φ инъективно;

– *эпиморфизмом*, если φ сюръективно;

– *изоморфизмом*, если φ биективно;

– *автоморфизмом*, если φ является эндоморфизмом и изоморфизмом.

Группы G и F называются *изоморфными*, если между ними существует изоморфизм. Обозначается: $G \cong F$.

Пример. *Четверная группа Клейна* — ациклическая коммутативная группа четвёртого порядка, задающаяся следующей таблицей Кэли:

$\cdot$	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

Порядок каждого элемента, отличного от нейтрального, равен 2.

Обозначается V или V_4 (от нем. *Vierergruppe* — четверная группа).

Любая группа четвёртого порядка изоморфна либо циклической группе, либо четверной группе Клейна, наименьшей по порядку нециклической группе. Симметрическая группа S_4 имеет лишь две нетривиальные нормальные подгруппы — знакопеременную группу A_4 и четверную группу Клейна V_4, состоящую из перестановок $\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)$.

Несколько примеров изоморфных ей групп:

– *прямая сумма* $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$;

– диэдральная группа D_2;

– множество $\{0, 1, 2, 3\}$ с операцией XOR;

– группа симметрий ромба $ABCD$ в трёхмерном пространстве, состоящая из 4 преобразований: $\mathrm{id}, \mathrm{R}_\pi, \mathrm{S}_{AC}, \mathrm{S}_{BD}$;

– группа поворотов тетраэдра на угол π вокруг всех трёх рёберных медиан (вместе с тождественным поворотом).

Определение 7.3. *Ядром* гомоморфизма $\varphi\colon G \to F$ называется множество всех элементов G, которые отображаются в нейтральный элемент F, т.е.

$$\ker \varphi = \{g \in G \mid \varphi(g) = e_F\}.$$

Образ φ определяется как

$$\operatorname{Im} \varphi = \varphi(G) = \{f \in F \mid \exists g \in G\colon\!- \varphi(g) = f\}.$$

Очевидно, что $\ker \varphi < G$ и $\operatorname{Im} \varphi < F$.

Лемма. *Гомоморфизм групп* $\varphi\colon G \to F$ *инъективен тогда и только тогда, когда* $\ker \varphi = \{e_G\}$.

Доказательство. Ясно, что если φ инъективен, то $\ker \varphi = \{e_G\}$.

Обратно, пусть $g_1, g_2 \in G$ и $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$. Тогда $g_1^{-1}g_2 \in \ker \varphi$, поскольку $\varphi(g_1^{-1}g_2) = \varphi(g_1^{-1})\varphi(g_2) = \varphi(g_1)^{-1}\varphi(g_2) = e_F$. Отсюда $g_1^{-1}g_2 = e_G$ и $g_1 = g_2$. ■

Следствие. *Гомоморфизм групп* $\varphi\colon G \to F$ *является изоморфизмом тогда и только тогда, когда* $\ker \varphi = \{e_G\}$ *и* $\operatorname{Im} \varphi = F$.

Утверждение. *Пусть* $\varphi\colon G \to F$ *гомоморфизм групп, тогда* $\ker \varphi \lhd G$.

Доказательство. Достаточно проверить, что

$$\forall g \in G \ \ \forall h \in \ker \varphi\colon\ g^{-1}hg \in \ker \varphi.$$

Это следует из цепочки равенств:

$$\varphi(g_1^{-1}hg) = \varphi(g^{-1})\varphi(h)\varphi(g) = \varphi(g^{-1})e_F\varphi(g) = \varphi(g^{-1})\varphi(g) = \varphi(g)^{-1}\varphi(g) = e_F.$$

■

8 Теорема о гомоморфизме. Классификация циклических групп

Теорема (О гомоморфизме). *Пусть* $\varphi\colon G \to F$ *— гомоморфизм групп, тогда*

$$\operatorname{Im}\varphi \cong G/\ker\varphi.$$

Доказательство. Рассмотрим отображение $\psi\colon G/\ker\varphi \to \operatorname{Im}\varphi$, заданное формулой $\psi(g\ker\varphi) = \varphi(g)$.

Достаточно проверить определение изоморфизма для ψ. Для этого покажем, что заданное отображение корректно определено, биективно и гомоморфно.

1. Проверим корректность ψ:

   $\exists h_1, h_2 \in \ker\varphi\colon - \ g_1\ker\varphi = g_2\ker\varphi \Longrightarrow g_1h_1 = g_2h_2;$

   $\psi(g_1\ker\varphi) = \varphi(g_1) = \varphi(g_1h_1) = \varphi(g_2h_2) = \varphi(g_2) = \psi(g_2\ker\varphi).$

2. Докажем, что ψ — гомоморфизм:

   $\psi((g_1\ker\varphi)(g_2\ker\varphi)) = \psi((g_1g_2)\ker\varphi) = \varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2) =$

   $= \psi(g_1\ker\varphi)\psi(g_2\ker\varphi).$

3. Сюръективность видна из построения.

4. Инъективность:

   $\psi(g_1\ker\varphi) = \psi(g_2\ker\varphi) \Longrightarrow \varphi(g_1) = \varphi(g_2) \Longrightarrow \varphi(g_1)\varphi(g_2)^{-1} = e_F \Longrightarrow$

   $\Longrightarrow \varphi(g_1g_2^{-1}) = e_F \Longrightarrow g_1g_2^{-1} \in \ker\varphi \Longrightarrow g_1\ker\varphi = g_2\ker\varphi.$ ■

Пример. Пусть $G = \langle\mathbb{R}, +\rangle$ и $H = \langle\mathbb{Z}, +\rangle$. Рассмотрим группу $F = \langle\mathbb{C}\setminus\{0\}, \times\rangle$ и гомоморфизм

$$\varphi\colon G \to F, \quad g \mapsto e^{2\pi i g} = \cos(2\pi g) + i\sin(2\pi g).$$

Тогда $\ker\varphi = H$ и факторгруппа G/H изоморфна окружности S^1, рассматриваемой как подгруппа в F, состоящей из комплексных чисел с модулем равным 1.

Теорема (**О классификации циклических групп**). *Пусть G — циклическая группа. Тогда*

1. *Если $|G| = \infty$, то $G \cong \langle \mathbb{Z}, + \rangle$.*
2. *Если $|G| = n < \infty$, то $G \cong \langle \mathbb{Z}_n, + \rangle$.*

Доказательство. Пусть $G = \langle g \rangle$. Рассмотрим отображение $\varphi\colon \mathbb{Z} \to G, \quad k \mapsto g^k$.

$$\varphi(k + l) = g^{k+l} = g^k g^l = \varphi(k)\varphi(l), \text{ поэтому } \varphi \text{ — гомоморфизм.}$$

Из определения циклической группы следует, что φ сюръективен, т.е. $\operatorname{Im}\varphi = G$. По теореме о гомоморфизме получаем $G \cong \mathbb{Z}/\ker\varphi$, т.к. $\ker\varphi < \mathbb{Z} \Longrightarrow \exists m \geqslant 0 \colon\!-\ \ker\varphi = m\mathbb{Z}$ (любая подгруппа $\mathbb{Z}$ имеет вид $k\mathbb{Z}$). Если $m = 0$, то $\ker\varphi = \{0\}$, откуда $G \cong \mathbb{Z} / \{0\} \cong \mathbb{Z}$. Если $m > 0$, то $G \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_m$. ■

9 Прямое произведение групп. Разложение конечной циклической группы. Теорема о строении конечных абелевых групп

Определение 9.1. *Прямым произведением групп* $G_1, \ldots, G_m$ называется группа

$$G_1 \times \ldots \times G_m = \{(g_1, \ldots, g_m) \mid g_1 \in G_1, \ldots, g_m \in G_m\}$$

с операцией $(g_1, \ldots, g_m)(g'_1, \ldots, g'_m) = (g_1 g'_1, \ldots g_m g'_m)$.

Ясно, что эта операция ассоциативна, обладает нейтральным элементом $(e_{G_1}, \ldots, e_{G_m})$ и для каждого элемента $(g_1, \ldots, g_m)$ есть обратный элемент $(g_1^{-1}, \ldots, g_1^{-1})$.

Замечание. Группа $G_1 \times \ldots \times G_m$ коммутативна тогда и только тогда, когда коммутативна каждая из групп $G_1, \ldots, G_m$.

Замечание. Если все группы $G_1, \ldots, G_m$ конечны, то $|G_1 \times \ldots \times G_m| = |G_1| \ldots |G_m|$.

Определение 9.2. Говорят, что группа G *раскладывается в прямое произведение* своих подгрупп $H_1, \ldots, H_m$, если отображение $H_1 \times \ldots \times H_m \to G, \quad (h_1, \ldots, h_m) \mapsto h_1 \ldots h_m$ является изоморфизмом.

Теорема. *Пусть $n = pq$ — разложение натурального числа n на два взаимно простых сомножителя. Тогда имеет место изоморфизм групп*

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q.$$

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\varphi\colon \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q, \quad \varphi(a \bmod n) = (a \bmod p,\, a \bmod q).$$

1. Корректность следует из того, что $n \,\vdots\, p,\ n \,\vdots\, q$.
2. φ — гомоморфизм, т.к.

$$\varphi((a+b) \bmod n) = \varphi(a \bmod n) + \varphi(b \bmod n).$$

3. φ инъективен:

   Если $\varphi(a \bmod n) = (0,\, 0)$, то $a \,\vdots\, p,\ a \,\vdots\, q$. Но так как $\text{НОК}(p,\, q) = 1$, получаем, что $a \,|\, n$. Тогда $a \equiv 0 \pmod n$, т.е. $\ker \varphi = \{0\}$.
4. φ сюръективен, т.к. $|\mathbb{Z}_n| = n = p \cdot q = |\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q|$. ■

Следствие. *Пусть* $n \geqslant 2$ *— натуральное число и* $n = p_1^{k_1} \ldots p_s^{k_s}$ *— его разложение в произведение простых множителей* ($p_i \neq p_j$ *при* $i \neq j$). *Тогда имеет место изоморфизм групп*

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p_s^{k_s}}.$$

Определение 9.3. Конечная абелева группа A называется *примарной*, если $|A| = p^k$, где p — простое и $k \in \mathbb{N}$.

Теорема (О строении конечных абелевых групп). *Пусть* A *— конечная абелева группа. Тогда* $A \cong \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p_t^{k_t}}$, *где* $p_1, \ldots, p_t$ *— простые числа (не обязательно различные) и* $k_1, \ldots, k_t \in \mathbb{N}$. *Более того, набор примарных циклических множителей* $\mathbb{Z}_{p_1^{k_1}}, \ldots, \mathbb{Z}_{p_t^{k_t}}$ *определен однозначно с точностью до перестановки (в частности, число этих множителей определено однозначно).*

10 Экспонента конечной абелевой группы и критерий цикличности

Определение. *Экспонентой* конечной абелевой группы A называется число
$$\exp A = \min\{m \in \mathbb{N} \mid \forall a \in A\colon ma = 0\}.$$

Замечание.

1. Из того, что $\forall a \in A\ \forall m \in \mathbb{Z}\colon ma = 0 \Longleftrightarrow m \,\vdots\, \mathrm{ord}(a)$, определение экспоненты можно переписать в виде $\exp A = \text{НОК}\{\mathrm{ord}(a) \mid a \in A\}$.
2. Из того, что $\forall a \in A\colon |A| \,\vdots\, \mathrm{ord}(a)$, следует, что $|A|$ — общее кратное множества $\{\mathrm{ord}(a) \mid a \in A\}$, а значит, $|A| \,\vdots\, \exp A$. В частности, $\exp A \leqslant |A|$.

Теорема (Критерий цикличности). *Группа A является циклической тогда и только тогда, когда* $\exp A = |A|$.

Доказательство. Пусть $|A| = n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$ — разложение на простые множители, где p_i — простое и $k_s \in \mathbb{N}$ ($p_i \neq p_j$ при $i \neq j$).
Необходимость. Если $A = \langle a \rangle$, то $\mathrm{ord}(a) = n$, откуда $\exp A = n$.
Достаточность. Если $\exp A = n$, то для $i = 1, \ldots, s \quad \exists c_i \in A{:}-\ \mathrm{ord}(c_i) = p_i^{k_i} m_i,\ m_i \in \mathbb{N}$. Для каждого $i = 1, \ldots, s$ положим $a_i = m_i c_i$, тогда $\mathrm{ord}(a_i) = p_i^{k_i}$. Рассмотрим элемент $a = a_1 + \ldots + a_s$ и покажем, что $\mathrm{ord}(a) = n$. Пусть $\exists m \in \mathbb{N}{:}-\ ma = 0$, т.е. $ma_1 + \ldots + ma_s = 0$. При фиксированном $i \in \{1, \ldots, s\}$ умножим обе части последнего равенства на $n_i = n/p_i^{k_i}$. Видно, что $\forall i \neq j\colon mn_i a_j = 0$, поэтому в левой части останется только слагаемое $mn_i a_i$, откуда $mn_i a_i = 0 \Longrightarrow mn_i \,\vdots\, p_i^{k_i}$, а т.к. $n_i \not\vdots\, p_i$, то $m \,\vdots\, p_i^{k_i}$. В силу произвольности выбора i отсюда вытекает, что $m \,\vdots\, n$, и т.к. $na = 0$, то окончательно получаем $\mathrm{ord}(a) = n$. Значит, $A = \langle a \rangle$ — циклическая группа. ■

11 Кольца. Коммутативные кольца. Обратимые элементы, делители нуля и нильпотенты. Поля. Критерий того, что кольцо вычетов является полем

Определение 11.1. *Кольцо* — это множество R, на котором заданы две бинарные операции « $+$ » (сложение) и « $\cdot$ » (умножение), удовлетворяющее следующим условиям:

1. $\langle R, + \rangle$ — абелева группа;
2. $(R, \cdot)$ — алгебраическая структура;
3. $\forall a, b, c \in R$: $a(b+c) = ab + ac$ и $(a+b)c = ac + bc$.

Замечание.

1. $\forall a \in R$: $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$;
2. Если $|R| > 1$, то $1 \neq 0$.

Доказательство.

1. $a0 = a(0+0) = a0 + a0 \Longrightarrow 0 = a0$.
2. Следует из условий выше. ■

Примеры.

1. Числовые кольца $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$;
2. Кольцо $\mathbb{Z}_n$ вычетов по модулю n;
3. Кольцо матриц $\mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R})$;
4. Кольцо многочленов $\mathbb{R}[x]$ от переменной x с коэффициентами из $\mathbb{R}$;
5. Кольцо функций $F(M, \mathbb{R})$ из множества M в $\mathbb{R}$ с поэлементными операциями сложения и умножения:

   $\forall m \in M$: $(f_1 + f_2)(m) = f_1(m) + f_2(m), \quad (f_1 \cdot f_2)(m) = f_1(m) \cdot f_2(m).$

Определение 11.2. Кольцо R называется *ассоциативным коммутативным*, если

$$\forall a, b \in R\colon ab = ba.$$

Определение 11.3. Элемент a кольца R называется *обратимым*, а кольцо *содержащим единицу*, если

$$\exists b \in R :- ab = ba = 1.$$

Замечание. Все обратимые элементы кольца образуют группу по умножению.

Определение 11.4. Элемент a кольца R называется *левым* (соответственно *правым*) *делителем нуля*, если $a \neq 0$ и $\exists b \neq 0 \in R :- ab = 0$ (соответственно $ba = 0$).

Замечание. Если кольцо коммутативно, то множества левых и правых делителей нуля совпадают. Тогда левые и правые делители нуля называются просто «делителями нуля».

Замечание. Все делители нуля в кольце необратимы.

Доказательство. Пусть R — кольцо; $a \neq 0$, $b \neq 0$. Если $ab = 0$ и $\exists a^{-1}$, то $a^{-1}ab = a^{-1}0 \Longrightarrow b = 0$ — противоречие. ■

Определение 11.5. Элемент a кольца R называется *нильпотентным (нильпотентом)*, если $a \neq 0$ и $\exists n \in \mathbb{N} :- a^n = 0$.

Замечание. Всякий нильпотент является делителем нуля.

Определение 11.6. Кольцо R называется *полем*, если оно коммутативно, ассоциативно, содержит $1 \neq 0$, и любой ненулевой элемент обратим.

Замечание. В поле не существует делителей нуля.

Примеры. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{A}, \mathbb{Z}_2$.

Теорема. *Кольцо вычетов $\mathbb{Z}_p$ является полем тогда и только тогда, когда p — простое число.*

Доказательство.
Необходимость. Если $n = 1$, то $\mathbb{Z}_n = \{0\}$ — не поле.

Если $n > 1$, и $n = m \cdot k$, где $1 < m, k < n$, то $\overline{m} \cdot \overline{k} = \overline{0} \Longrightarrow$ в $\mathbb{Z}_n$ есть делитель нуля $\Longrightarrow \mathbb{Z}_n$ — не поле.
Достаточность. Пусть p — простое, $\overline{a} \in \mathbb{Z}_p \setminus \{\overline{0}\}$.

Тогда НОД$(a, p) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \exists k, l \in \mathbb{Z}{:}- \ ak + pl = 1$. Значит, $\overline{a} \cdot \overline{k} + \overline{p} \cdot \overline{l} = \overline{1} \Longrightarrow a \cdot k \equiv 1 \pmod p \Longrightarrow a$ обратим. ■

12 Идеалы колец. Факторкольцо кольца по идеалу. Гомоморфизмы и изоморфизмы колец. Ядро и образ гомоморфизма колец. Теорема о гомоморфизме для колец

Определение 12.1. Подмножество I кольца R называется *(двусторонним) идеалом,* если

1. I — подгруппа по сложению;
2. $\forall a \in I\ \forall r \in R$: $ar \in I, ra \in I$.

Несобственными или *тривиальными* идеалами являются $\{0\}$ и R. Остальные называются *собственными.*

Определение 12.2. Множество $(a) = \{ra \mid r \in R\}$ называется *главным идеалом,* порождаемым элементом a.

Пример. $(k) = k\mathbb{Z}$ — главный идеал в $\mathbb{Z}$.

Замечание.
$(a) = R \iff a$ обратим;
$(a) = 0 \iff a = 0$.

Определение 12.3. Если S — подмножество кольца R, то

$$(S) = \{r_1 s_1 + \ldots + r_k s_k \mid r_i \in R, s_i \in S\}$$

называется *идеалом, порожденным подмножеством S.*

Пусть R — кольцо, I — его идеал.

Рассмотрим факторгруппу $(R/I, +)$ и введём на ней операцию умножения, полагая, что $(a+I)\cdot(b+I) = ab + I$.

Проверим корректность такого определения:

$$a + I = a' + I,\ b + I = b' + I \Longrightarrow a' = a + x,\ b' = b + y, \text{ где } x, y \in I;$$
$$(a'+I)(b'+I) = a'b' + I = (a+x)(b+y) + I = ab + \underbrace{ay + xb + xy}_{\in I} + I = ab + I.$$

Замечание. R/I — кольцо.

Определение 12.4. R/I называется *факторкольцом* кольца R по идеалу I.

Пример. $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_n$.

Определение 12.5. Если R, S — два кольца, то отображение $\varphi\colon R \to S$ называется *гомоморфизмом колец,* если

$$\forall a, b \in R\colon \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b),\ \varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b).$$

Биективный гомоморфизм называется *изоморфизмом.*
$\ker\varphi = \{r \in R \mid \varphi(r) = 0\} \subseteq R$;
$\operatorname{Im}\varphi = \varphi(R) \subseteq S$.

Замечание.

1. $\ker\varphi$ является идеалом R;
2. $\operatorname{Im}\varphi$ — подкольцо в S.

Доказательство.

1. $\ker\varphi$ является подгруппой в R по сложению, т.к. φ — гомоморфизм абелевых групп. Покажем, что
   $\forall a \in \ker\varphi\ \forall r \in R\colon ra \in \ker\varphi, ar \in \ker\varphi$.

   $\varphi(ra) = \varphi(r)\varphi(a) = \varphi(r)0 = 0 \Longrightarrow ra \in \ker\varphi,$ аналогично для $ar \in \ker\varphi$.

■

Теорема (**О гомоморфизме колец**). *Пусть* $\varphi\colon R \to S$ *— гомоморфизм колец, тогда*
$$R/\ker\varphi \cong \operatorname{Im}\varphi.$$

Доказательство. Пусть $I = \ker\varphi$. Тогда из доказательства теоремы о гомоморфизме для групп отображение $\psi\colon R/I \to \operatorname{Im}\varphi$, $\psi(a+I) = \varphi(a)$ является изоморфизмом групп по сложению.

Остаётся проверить, что ψ — гомоморфизм колец:
$$\psi((a+I)(b+I)) = \psi(ab+I) = \varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b) = \psi(a+I)\psi(b+I). \quad \blacksquare$$

Пример. Пусть K — поле, $a \in K$, $\quad \varphi\colon K[x] \to K, \quad f \mapsto f(a)$.

Это гомоморфизм, он сюръективен ($b = \varphi(b)$).

$\ker\varphi = (x-a) \Longrightarrow K[x]/(x-a) \cong K$.