Теория групп

Артём Рашевский

2025

Содержание

1 Бинарные операции. Полугруппы, моноиды и группы

Определение 1.1. Пусть M — непустое множество. *Бинарной операцией* $\circ$ на множестве M называется отображение $\circ : M \times M \to M$, $\forall a, b \in M\colon (a, b) \mapsto a \circ b$.

Множество с бинарной операцией обычно обозначают $(M, \circ)$.

Определение 1.2. Множество с бинарной операцией $(M, \circ)$ называется *полугруппой*, если данная бинарная операция ассоциативна, т.е.

$$\forall a, b, c \in M\colon a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c.$$

Определение 1.3. Полугруппа $(M, \circ)$ называется *моноидом*, если в ней есть *нейтральный элемент*, т.е.

$$\exists e \in M\colon \forall a \in M\colon e \circ a = a \circ e = a.$$

Определение 1.4. Моноид $(M, \circ)$ называется *группой*, если для каждого элемента $a \in M$ найдется *обратный элемент*, т.е.

$$\forall a \in M \ \exists a^{-1} \in M\colon a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e.$$

Определение 1.5. Группа G называется *коммутативной* или *абелевой*, если групповая операция *коммутативна*, т.е.

$$\forall a, b \in G\colon ab = ba.$$

Определение 1.6. *Порядком* $|G|$ группы G называется число элементов в ней. Группа называется *конечной*, если её порядок конечен, и *бесконечной* иначе.

Примеры.

1. Числовые *аддитивные* группы:
   $\mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Q}^+$, $\mathbb{R}^+$, $\mathbb{C}^+$, $\mathbb{Z}_n^+$.

2. Числовые *мультипликативные* группы:
   $\mathbb{Q}^\times \setminus \{0\},\ \mathbb{R}^\times \setminus \{0\},\ \mathbb{C}^\times \setminus \{0\},\ \mathbb{Z}_p^\times \setminus \{0\},\ p$ — простое.

3. Группы матриц:
   $\mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0\}$ — *полная линейная группа*;
   $\mathbf{SL}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ — *специальная линейная группа*;
   $\mathbf{O}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{R}) \mid A \cdot A^T = I\}$ — *ортогональная группа*;
   $\mathbf{SO}_n(\mathbb{R}) = \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) \cap \mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$ — *специальная ортогональная группа;*
   $\mathbf{U}_n = \{A \in \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) \mid A \cdot A^\dagger = I\}$ — *унитарная группа*;
   $\mathbf{SU}_n = \mathbf{U}_n \cap \mathbf{SL}_n(\mathbb{C})$ — *специальная унитарная группа.*

4. Группы перестановок:
   симметрическая группа $\mathbf{S}_n$ — все перестановки длины n;
   знакопеременная группа $\mathbf{A}_n$ — все чётные перестановки длины n.

5. Группы преобразований подобия: гомотетии, движения (осевые и скользящие симметрии, параллельные переносы, повороты).

6. *Группа кватернионов:*
   Множество $\mathbf{Q}_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ с операцией умножения заданной следующим образом: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $ij = k$, $ji = -k$.

Определение 1.7. Для описания структур групп часто используются *таблицы Кэли.* Они представляют собой квадратные таблицы, заполненные результатами применения бинарной операции к элементам множества.

Пример. Таблица Кэли для группы $(\{1, 3, 5, 7\}, \times (\mathrm{mod}\, 8))$:

$\times$	1	3	5	7
1	1	3	5	7
3	3	1	7	5
5	5	7	1	3
7	7	5	3	1

2 Подгруппы. Циклические подгруппы и группы. Порядок элемента

Определение 2.1. Подмножество H группы G называется *подгруппой* и обозначается $H < G$, если выполнены следующие условия:

1. $e \in H$;
2. $\forall a, b \in H\colon ab \in H$;
3. $\forall a \in H\colon a^{-1} \in H$.

В каждой группе G есть *несобственные* или *тривиальные* подгруппы $H = \{e\}$ и $H = G$. Все прочие подгруппы называются *собственными.*

Примеры.

1. $n\mathbb{Z}^+ < \mathbb{Z}^+ < \mathbb{Q}^+ < \mathbb{R}^+ < \mathbb{C}^+$;
2. $\mathbf{SO}_n(\mathbb{R}) < \mathbf{O}_n(\mathbb{R}) < \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$;
3. $\mathbf{A}_n < \mathbf{S}_n$.

Теорема (**критерий подгруппы**). *Пусть G — группа, тогда*

$$H < G \Leftrightarrow \forall a, b \in H\colon a \circ b^{-1} \in H.$$

Доказательство. Определим на H вспомогательное отношение $R_H = \{(a, b) \mid a \circ b^{-1} \in H\}$. Покажем, что R_H является отношением эквивалентности. Для этого проверим, что оно рефлексивно (1), симметрично (2) и транзитивно (3):

1. $a \circ a^{-1} = e \in H$;
2. $ab^{-1} \in H \Rightarrow ba^{-1} = (ab^{-1})^{-1} \in H$;
3. $ab^{-1} \in H,\ bc^{-1} \in H \Rightarrow ac^{-1} = (ab^{-1})(bc^{-1}) = a(b^{-1}b)c^{-1} \in H$.

Рефлексивность R_H определяет наличие нейтрального элемента, симметричность – наличие обратного элемента, транзитивность – ассоциативность заданной бинарной операции. Каждый класс эквивалентности будет ассоциирован с некоторой подгруппой (как с алгебраически замкнутым множеством). ∎

Утверждение 2.1. *Всякая подгруппа в* $\mathbb{Z}^+$ *имеет вид* $k\mathbb{Z}$ *для некоторого* $k \in \mathbb{N}_0$.

Доказательство. Очевидно, что все подмножества вида $k\mathbb{Z}$ являются подгруппами в $\mathbb{Z}$. Пусть $H < \mathbb{Z}$. Если $H = \{0\}$, то $H = 0\mathbb{Z}$. Иначе положим $k = \min(H \cap N) \neq 0$ (это множество непусто, т.к. $\forall x \in H \cap N \colon -x \in H$), тогда $k\mathbb{Z} \subseteq H$. Покажем, что $k\mathbb{Z} = H$. Пусть $a \in H$ — произвольный элемент. Поделим его на k с остатком:

$$a = qk + r, \text{где } k \in H,\ 0 \leqslant r < k \Rightarrow r = a - qk \in H.$$

В силу выбора k получаем: $r = 0 \Rightarrow a = qk \in k\mathbb{Z}$. ■

Определение 2.2. Пусть G — группа, $g \in G$ и $n \in \mathbb{Z}$. *Степень* элемента g определяется следующим образом:

$$g^n = \begin{cases} \underbrace{g \dots g}_{n}, & n > 0 \\ e, & n = 0 \\ \underbrace{g^{-1} \dots g^{-1}}_{n}, & n < 0 \end{cases}$$

и обладает свойствами:

$\forall m, n \in \mathbb{Z}:$

1. $g^m \cdot g^n = g^{m+n}$;
2. $(g^m)^{-1} = g^{-m}$;
3. $(g^m)^n = g^{mn}$.

Определение 2.3. Пусть G — группа и $g \in G$. *Циклической подгруппой*, порожденной элементом g, называется подмножество $\{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\} \subseteq G$.

Циклическая подгруппа, порождённая элементом g, обозначается $\langle g \rangle$. Элемент g называется *порождающим* или *образующим* для подгруппы $\langle g \rangle$.

Пример. Подгруппа $2\mathbb{Z} < \mathbb{Z}^+$ является циклической, и в качестве порождающего элемента в ней можно взять $g = 2$ или $g = -2$. Другими словами, $2\mathbb{Z} = \langle 2 \rangle = \langle -2 \rangle$.

Определение 2.4. Группа G называется *циклической*, если

$$\exists g \in G \colon G = \langle g \rangle.$$

Примеры. $\mathbb{Z}^+$; $\mathbb{Z}_n^+$, $n \geqslant 1$.

Определение 2.5. Пусть G — группа и $g \in G$. *Порядком* элемента g называется наименьшее $m \in \mathbb{N}$: $g^m = e$. Если такого натурального числа m не существует, говорят, что порядок элемента g равен бесконечности. Порядок элемента обозначается $\operatorname{ord}(g)$.

Замечание.

$$\operatorname{ord}(g) = 1 \Leftrightarrow g = e.$$

Утверждение 2.2. *Если G — группа и $g \in G$, то* $\operatorname{ord}(g) = |\langle g \rangle|$.

Доказательство. Заметим, что если $g^k = g^s$, то $g^{k-s} = e$. Поэтому если элемент g имеет бесконечный порядок, то все элементы $g^n, n \in \mathbb{Z}$, попарно различны, и подгруппа $\langle g \rangle$ содержит бесконечно много элементов. Если же $\operatorname{ord}(g) = m$, то из минимальности числа m следует, что элементы $e = g^0, g^1, g^2, \ldots, g^{m-1}$ попарно различны. Далее, $\forall n \in \mathbb{Z}$: $n = mq + r$, где $0 \leqslant r \leq m - 1$, и

$$g^n = g^{mq+r} = (g^m)^q g^r = e^q g^r = g^r.$$

Следовательно, $\langle g \rangle = \{e, g, g^2, \ldots, g^{m-1}\}$ и $|\langle g \rangle| = m$. ■

Очевидно, что всякая циклическая группа коммутативна и не более чем счётна.

3 Смежные классы. Индекс подгруппы. Теорема Лагранжа

Определение 3.1. *Левым смежным классом* элемента g группы G по подгруппе H называется подмножество

$$gH \stackrel{\text{def}}{=} \{gh \mid h \in H\},$$

аналогично определяется *правый смежный класс*:

$$Hg \stackrel{\text{def}}{=} \{hg \mid h \in H\}.$$

Лемма 3.1. *Пусть G — конечная подгруппа, тогда $\forall g \in G$: $|gH| = |H|$.*

Доказательство. Поскольку $gH = \{gh \mid h \in H\}$, в gH элементов не больше, чем в H. Если $gh_1 = gh_2$, то домножив слева на g^{-1}, получаем $h_1 = h_2$. Значит, все элементы вида gh, где $h \in H$, попарно различны, откуда $|gH| = |H|$. ∎

Определение 3.2. Пусть G — группа, $H < G$. *Индексом* подгруппы H в группе G называется число левых смежных классов G по H.

Индекс группы G по подгруппе H обозначается $[G : H]$.

Теорема (Лагранж). *Пусть G — конечная группа, $H < G$. Тогда*

$$|G| = |H| \cdot [G : H].$$

Доказательство. Каждый элемент группы G лежит в (своём) левом смежном классе по подгруппе H, разные смежные классы не пересекаются (по следствию из доказательства критерия подгруппы) и каждый из них содержит по $|H|$ элементов (по предыдущей лемме). ∎

Следствие 3.1. $|G| \vdots |H|$.

Следствие 3.2. $|G| \vdots \operatorname{ord}(g)$.

Доказательство. Вытекает из следствия 1 и того, что $\operatorname{ord}(g) = |\langle g\rangle|$. ■

Следствие 3.3. $g^{|G|} = e$.

Доказательство. Из предыдущего следствия получаем: $|G| = \operatorname{ord}(g) \cdot s,\ s \in \mathbb{N} \Rightarrow g^{|G|} = (g^{\operatorname{ord}(g)})^s = e^s = e$. ■

Следствие 3.4 (**Малая теорема Ферма**)**.** *Пусть* $\overline{a}$ *— ненулевой вычет по простому модулю* p*, тогда* $\overline{a}^{p-1} \equiv 1 \pmod p$.

Доказательство. Применим следствие 3 к группе $\mathbb{Z}_p^\times \setminus \{0\}$. ■

Следствие 3.5. *Пусть* $|G|$ *— простое число, тогда* G *— циклическая группа, порождённая любым своим не нейтральным элементом.*

Доказательство. Пусть $g \in G$ — произвольный не нейтральный элемент. Тогда циклическая подгруппа $\langle g\rangle$ содержит более одного элемента и $|\langle g\rangle|$ делит $|G|$ по следствию 1. Значит, $|\langle g\rangle| = |G|$, откуда $G = \langle g\rangle$. ■

4 Группы движений

Определение 4.1. Упорядоченная пара (M, d), состоящая из множества M и отображения $d : M \times M \to \mathbb{R}$, называется *метрическим пространством*, если $\forall x, y \in M$:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ (*аксиома тождества*);
2. $d(x, y) \geqslant 0$ (*аксиома неотрицательности*);
3. $d(x, y) = d(y, x)$ (*аксиома симметричности*);
4. $d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, y)$ (*аксиома* или *неравенство треугольника*).

Определение 4.2. Пусть X и Y — метрические пространства. Отображение $f : X \to Y$ называется *изометрией*, если оно сохраняет расстояние между точками:

$$\forall x, x' \in X\colon |f(x) - f(x')|_Y = |x - x'|_X,$$

Если $X = Y$, f называют *движением.*

Определение 4.3. Движение называют *собственным*, если оно сохраняет *ориентацию* пространства.

Определение 4.4. Пусть E — *евклидово аффинное пространство* и $F \subseteq E$ — геометрическая фигура. *Группой движений (изометрий)* $\mathrm{Isom}(F)$ фигуры F называется множество тех движений аффинного пространства E, которые переводят фигуру F в себя:

$$\mathrm{Isom}(F) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{\varphi : E \to E \mid \varphi - \text{движение},\ \varphi(F) = F\}.$$

В качестве групповой операции рассматривается операция композиции движений.

Замечание. Группа собственных движений $\mathrm{Isom}(F)^+$ является подгруппой группы движений $\mathrm{Isom}(F)$ фигуры F.

Определение 4.5. Группа движений правильного n-угольника $\Delta_n \subset \mathbb{R}^2$ называется *диэдральной группой* $\mathbf{D}_n$:

$$\mathbf{D}_n \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Isom}(\Delta_n).$$

Утверждение 4.1. $|\mathbf{D}_n| = 2n$.

Доказательство. Есть всего 2 вида движений:

1. n вращений относительно центра на угол, кратный $\frac{2\pi}{n}$ (вращение на угол φ обозначается R_φ);
2. n симметрий относительно осей симметрии (симметрия относительно прямой l обозначается S_l).

   В случае нечётного n любая ось симметрии проходит через центр Δ_n и одну из вершин, в случае чётного n любая ось симметрии проходит либо через противоположные вершины, либо через середины противоположных сторон. ■

Замечание. Группа собственных движений Δ_n содержит только повороты:

$$\mathrm{Isom}(\mathbf{D}_n)^+ = \{\mathrm{R}_{\frac{2\pi k}{n}}\},\ k = \overline{0,\ n-1}.$$

Пример. Таблица Кэли группы $\mathbf{D}_4$ квадрата $ABCD$:

$\circ$	id	$\mathrm{R}_{\frac{\pi}{2}}$	R_π	$\mathrm{R}_{\frac{3\pi}{2}}$	S_h	S_v	S_{AC}	S_{BD}
id	id	$\mathrm{R}_{\frac{\pi}{2}}$	R_π	$\mathrm{R}_{\frac{3\pi}{2}}$	S_h	S_v	S_{AC}	S_{BD}
$\mathrm{R}_{\frac{\pi}{2}}$	$\mathrm{R}_{\frac{\pi}{2}}$	R_π	$\mathrm{R}_{\frac{3\pi}{2}}$	id	S_{BD}	S_{AC}	S_h	S_v
R_π	R_π	$\mathrm{R}_{\frac{3\pi}{2}}$	id	$\mathrm{R}_{\frac{\pi}{2}}$	S_v	S_h	S_{BD}	S_{AC}
$\mathrm{R}_{\frac{3\pi}{2}}$	$\mathrm{R}_{\frac{3\pi}{2}}$	id	$\mathrm{R}_{\frac{\pi}{2}}$	R_π	S_{AC}	S_{BD}	S_v	S_h
S_h	S_h	S_{AC}	S_v	S_{BD}	id	R_π	$\mathrm{R}_{\frac{\pi}{2}}$	$\mathrm{R}_{\frac{3\pi}{2}}$
S_v	S_v	S_{BD}	S_h	S_{AC}	R_π	id	$\mathrm{R}_{\frac{3\pi}{2}}$	$\mathrm{R}_{\frac{\pi}{2}}$
S_{AC}	S_{AC}	S_v	S_{BD}	S_h	$\mathrm{R}_{\frac{3\pi}{2}}$	$\mathrm{R}_{\frac{\pi}{2}}$	id	R_π
S_{BD}	S_{BD}	S_h	S_{AC}	S_v	$\mathrm{R}_{\frac{\pi}{2}}$	$\mathrm{R}_{\frac{3\pi}{2}}$	R_π	id

5 Группы перестановок

Определение 5.1. Пусть задано множество $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Множество всех возможных биекций $X \leftrightarrow X$ с операцией композиции образует группу $\mathbf{S}_n$, называемую *симметрической группой* или *группой перестановок.*

Утверждение 5.1.

$$|\mathbf{S}_n| = n!$$

Доказательство. Символ 1 можно подходящей перестановкой σ перевести в любой другой символ $\sigma(1)$, для чего существует в точности n различных возможностей. Но зафиксировав $\sigma(1)$, в качестве $\sigma(2)$ можно брать лишь один из оставшихся $n-1$ символов и т.д. Всего возможностей выбора $\sigma(1), \sigma(2), \ldots, \sigma(n)$, значит и всех перестановок будет $n(n-1)\ldots 2 \cdot 1 = n!$. ■

Утверждение 5.2. *Любая перестановка может быть представлена в виде композиции независимых циклов единственным образом с точностью до порядка множителей.*

Утверждение 5.3. *Независимые циклы коммутируют.*

Утверждение 5.4. *Порядок цикла равен его длине.*

Утверждение 5.5. *Порядок перестановки равен* НОК *длин циклов в его цикловом разложении.*

Определение 5.2. Цикл длины 2 называется *транспозицией.*

Лемма 5.1. *Любая перестановка является произведением транспозиций.*

Доказательство. Достаточно доказать это для циклов непосредственной проверкой:

$$(i_1 i_2 i_3 \ldots i_k) = (i_1 i_2)(i_2 i_3)\ldots(i_{k-1} i_k).$$ ■

Определение 5.3. *Инверсией* в перестановке называется пара индексов $k < s$, таких что $i_k > i_s$.

Определение 5.4. *Чётностью* перестановки называется чётность числа инверсий в ней.

Лемма 5.2. *Пусть (ij) — произвольная транспозиция, тогда $\forall \sigma \in \mathbf{S}_n$ чётности перестановок σ и $\sigma(ij)$ различны.*

Доказательство. Рассмотрим два случая:

1. $(ij) = (i\ i+1)$ — число инверсий изменилось на одну, чётность изменилась.
2. (ij) — любая, тогда

$$(ij) = (j-1\ j)\dots(i+1\ i+2)(i\ i+1)(i+1\ i+2)\dots(j-1\ j), \quad (1)$$

что подтверждается непосредственной проверкой. ∎

Следствие. *Любая перестановка является композицией произведением соседних элементов.*

Доказательство. В разложении (1) $2(j-i-1)+1$ сомножителей, т.е, нечётное число. При перемене чётности нечётное число раз, она изменится, что доказывает следствие. ∎

Теоерма 5.1. *В $\mathbf{S}_n$ число чётных перестановок равно числу нечётных перестановок.*

Доказательство. Пусть $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ — все чётные перестановки длины n, тогда $\sigma_1(12), \dots, \sigma_k(12)$ — нечётные перестановки. Если σ — чётная, то $\sigma(12)$ — нечётная $\Rightarrow$ $\sigma = (\sigma(12))(12) = \sigma(12)^2 = \sigma\ \mathrm{id} = \sigma$ $\Rightarrow$ среди $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ встретятся все нечётные перестановки. Значит, мы установили биекцию между множеством чётных и множеством нечётных перестановок $\Rightarrow$ эти множества равномощны. ∎

Определение 5.5. *Знак* перестановки $\mathrm{sgn}(\sigma) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} 1, & \sigma \text{ — чётная} \\ -1, & \sigma \text{ — нечётная.} \end{cases}$

Теоерма 5.2.

$$\forall \sigma, \tau \in \mathbf{S}_n\colon \operatorname{sgn}(\sigma\tau) = \operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau).$$

Доказательство. Пусть $\sigma = \sigma_1, \ldots, \sigma_k,\ \tau = \tau_1, \ldots, \tau_s$ — произведение транспозиций. Тогда $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^k,\ \operatorname{sgn}(\tau) = (-1)^s$.
$\sigma\tau = \sigma_1, \ldots, \sigma_k\tau_1, \ldots, \tau_s \Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma\tau) = (-1)^{k+s}$. ∎

Следствие.

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}).$$

Доказательство.

$$\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\mathrm{id}) = 1.$$ ∎

Пример. Пусть $G = \mathbf{S}_3,\ H = \langle(12)\rangle = \{\mathrm{id}, (12)\}$. Найдём все левые и правые смежные классы G по H (произвольный элемент обозначим a):

a	aH	Ha
id	aH	Ha
(12)	$\{(12), \mathrm{id}\}$	$\{(12), \mathrm{id}\}$
(13)	$\{(13), (123)\}$	$\{(13), (132)\}$
(23)	$\{(23), (132)\}$	$\{(23), (123)\}$
(123)	$\{(123), (13)\}$	$\{(123), (23)\}$
(132)	$\{(132), (23)\}$	$\{(132), (13)\}$

6 Нормальные подгруппы. Факторгруппы

Определение 6.1. Подгруппа H группы G называется *нормальной*, если

$$\forall g \in G\colon gH = Hg.$$

Обозначается $H \lhd G$.

Утверждение 6.1. *Пусть H — подгруппа группы G, тогда следующие условия эквивалентны:*

1. $H \lhd G$;
2. $\forall g \in G\colon gHg^{-1} = H$;
3. $\forall g \in G\colon gHg^{-1} \subseteq H$.

Доказательство.

(1) $\Longrightarrow$ (2): $gH = Hg \mid \cdot\, g^{-1} \Rightarrow gHg^{-1} = H$.

(2) $\Longrightarrow$ (3): очевидно.

(3) $\Longrightarrow$ (2): $gHg^{-1} \subseteq H \Rightarrow gHg^{-1} \subseteq H \mid \cdot\, g \Rightarrow gH \subseteq Hg$.

Если $g = g^{-1}$, то $g\, \cdot \mid g^{-1}Hg \subseteq H \Rightarrow Hg \subseteq gH \Rightarrow gH = Hg$. ■

Рассмотрим множество смежных классов по нормальной подгруппе, обозначенной G/H. Определим на G/H бинарную операцию, полагая, что $(g_1H)(g_2H) = (g_1g_2)H$.

Пусть $g_1'H = g_1H$ и $g_2'H = g_2H$, тогда $g_1' = g_1h_1$, $g_2' = g_2h_2$, где $h_1, h_2 \in H$.

$$(g_1'H)(g_2'H) = (g_1'g_2')H = (g_1h_1g_2h_2)H = (g_1g_2\underbrace{g_2^{-1}h_1g_2}_{\in H}h_2)H \subseteq (g_1g_2)H \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (g_1'g_2')H = (g_1g_2)H.$$

Утверждение 6.2. *G/H является группой.*

Доказательство. Проверим аксиомы группы:

1. Ассоциативность очевидна.
2. Нейтральный элемент — eH.
3. Обратный к gH — $g^{-1}H$. ■

Определение 6.2. Множество G/H с указанной операцией называется *факторгруппой* группы G по нормальной подгруппе H.

Пример. Если $G = \mathbb{Z}^+$ и $H = n\mathbb{Z}$, то G/H — группа вычетов $\mathbb{Z}_n^+$

7 Гомоморфизмы групп. Четверная группа Клейна

Определение 7.1. Пусть $(G, \circ)$ и $(F, *)$ — группы.

Отображение $\varphi : G \to F$ называется *гомоморфизмом*, если

$$\forall g_1, g_2 \in G\colon \varphi(g_1 \circ g_2) = \varphi(g_1) * \varphi(g_2).$$

Замечание. Пусть $\varphi : G \to F$ — гомоморфизм групп, и пусть e_G, e_F — нейтральные элементы групп G и F соответственно, тогда:

1. $\varphi(e_G) = e_F$
2. $\forall g \in G\colon \varphi(g^{-1}) = \varphi(g)^{-1}$

Доказательство.

1. $\varphi(e_G) = \varphi(e_G e_G) = \varphi(e_G)\varphi(e_G)$.

   Домножив обе крайние части равенства на $\varphi(e_G)^{-1}$, получим $e_F = \varphi(e_G)$.

2. $\varphi(g * g^{-1}) = e_F = \varphi(g)\varphi(g^{-1})$.

   Умножив обе части на $\varphi(g)^{-1}$, получаем необходимое. ∎

Определение 7.2. Гомоморфизм групп $\varphi : G \to F$ называется

– *эндоморфизмом*, если $F = G$;

– *мономорфизмом*, если φ инъективно;

– *эпиморфизмом*, если φ сюръективно;

– *изоморфизмом*, если φ биективно;

– *автоморфизмом*, если φ является эндоморфизмом и изоморфизмом.

Группы G и F называются *изоморфными*, если между ними существует изоморфизм. Обозначается: $G \cong F$.

Пример. *Четверная группа Клейна* — ациклическая коммутативная группа четвёртого порядка, задающаяся следующей таблицей Кэли:

$\cdot$	e	a	b	ab
e	e	a	b	ab
a	a	e	ab	b
b	b	ab	e	a
ab	ab	b	a	e

Порядок каждого элемента, отличного от нейтрального, равен 2.

Обозначается V или $\mathbf{V}_4$ (от нем. *Vierergruppe* — четверная группа).

Любая группа четвёртого порядка изоморфна либо циклической группе, либо четверной группе Клейна, наименьшей по порядку нециклической группе. Симметрическая группа $\mathbf{S}_4$ имеет лишь две нетривиальные нормальные подгруппы — знакопеременную группу $\mathbf{A}_4$ и четверную группу Клейна $\mathbf{V}_4$, состоящую из перестановок $\mathrm{id}, (12)(34), (13)(24), (14)(23)$.

Несколько примеров изоморфных ей групп:

- *прямая сумма* $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$;
- диэдральная группа $\mathbf{D}_2$;
- множество $\{0, 1, 2, 3\}$ с операцией XOR;
- группа симметрий ромба $ABCD$ в трёхмерном пространстве, состоящая из 4 преобразований: $\mathrm{id}, \mathrm{R}_\pi, \mathrm{S}_{AC}, \mathrm{S}_{BD}$;
- группа поворотов тетраэдра на угол π вокруг всех трёх рёберных медиан (вместе с тождественным поворотом).

Определение 7.3. *Ядром* гомоморфизма $\varphi : G \to F$ называется множество всех элементов G, которые отображаются в нейтральный элемент F, т.е.

$$\ker\varphi \overset{\text{def}}{=} \{g \in G \mid \varphi(g) = e_F\}.$$

Образ φ определяется как

$$\operatorname{Im}\varphi \overset{\text{def}}{=} \varphi(G) = \{f \in F \mid \exists g \in G\colon \varphi(g) = f\}.$$

Очевидно, что $\ker\varphi < G$ и $\operatorname{Im}\varphi < F$.

Лемма 7.1. *Гомоморфизм групп* $\varphi : G \to F$ *инъективен тогда и только тогда, когда* $\ker\varphi = \{e_G\}$.

Доказательство. Ясно, что если φ инъективен, то $\ker\varphi = \{e_G\}$.

Обратно, пусть $g_1, g_2 \in G$ и $\varphi(g_1) = \varphi(g_2)$. Тогда $g_1^{-1}g_2 \in \ker\varphi$, поскольку $\varphi(g_1^{-1}g_2) = \varphi(g_1^{-1})\varphi(g_2) = \varphi(g_1)^{-1}\varphi(g_2) = e_F$. Отсюда $g_1^{-1}g_2 = e_G$ и $g_1 = g_2$. ■

Следствие. *Гомоморфизм групп* $\varphi : G \to F$ *является изоморфизмом тогда и только тогда, когда* $\ker\varphi = \{e_G\}$ *и* $\operatorname{Im}\varphi = F$.

Утверждение 7.1. *Пусть* $\varphi : G \to F$ *гомоморфизм групп, тогда* $\ker\varphi \lhd G$.

Доказательство. Достаточно проверить, что

$$\forall g \in G \;\; \forall h \in \ker\varphi\colon\; g^{-1}hg \in \ker\varphi.$$

Это следует из цепочки равенств:

$$\varphi(g_1^{-1}hg) = \varphi(g^{-1})\varphi(h)\varphi(g) = \varphi(g^{-1})e_F\varphi(g) = \varphi(g^{-1})\varphi(g) = \varphi(g)^{-1}\varphi(g) = e_F.$$

■

8 Теорема о гомоморфизме. Классификация циклических групп

Теорема (**о гомоморфизме**). *Пусть $\varphi : G \to F$ — гомоморфизм групп, тогда*

$$\operatorname{Im}\varphi \cong G/\ker\varphi.$$

Доказательство. Рассмотрим отображение $\psi : G/\ker\varphi \to \operatorname{Im}\varphi$, заданное формулой $\psi(g\ker\varphi) = \varphi(g)$:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\varphi"'] & G/\ker\varphi \arrow[dl, "\psi"] \\ \operatorname{Im}\varphi & \end{tikzcd}$$

Достаточно проверить определение изоморфизма для ψ. Для этого покажем, что заданное отображение корректно определено, биективно и гомоморфно.

1. Проверим корректность ψ:

   $\exists h_1, h_2 \in \ker\varphi$: $g_1\ker\varphi = g_2\ker\varphi \Rightarrow g_1h_1 = g_2h_2$;

   $\psi(g_1\ker\varphi) = \varphi(g_1) = \varphi(g_1h_1) = \varphi(g_2h_2) = \varphi(g_2) = \psi(g_2\ker\varphi)$.

2. Докажем, что ψ — гомоморфизм:

   $\psi((g_1\ker\varphi)(g_2\ker\varphi)) = \psi((g_1g_2)\ker\varphi) = \varphi(g_1g_2) = \varphi(g_1)\varphi(g_2) =$

   $= \psi(g_1\ker\varphi)\psi(g_2\ker\varphi)$.

3. Сюръективность видна из построения.

4. Инъективность:

   $\psi(g_1\ker\varphi) = \psi(g_2\ker\varphi) \Rightarrow \varphi(g_1) = \varphi(g_2) \Rightarrow \varphi(g_1)\varphi(g_2)^{-1} = e_F \Rightarrow$

   $\Rightarrow \varphi(g_1g_2^{-1}) = e_F \Rightarrow g_1g_2^{-1} \in \ker\varphi \Rightarrow g_1\ker\varphi = g_2\ker\varphi$. ■

Примеры.

1. Пусть $G = \mathbb{R}^+$ и $H = \mathbb{Z}^+$. Рассмотрим группу $F = \mathbb{C}^\times \setminus \{0\}$ и гомоморфизм $\varphi : G \to F, \quad g \mapsto e^{2\pi i g} = \cos(2\pi g) + i\sin(2\pi g)$. Тогда $\ker\varphi = H$ и факторгруппа G/H изоморфна окружности S^1, рассматриваемой как подгруппа в F, состоящей из комплексных чисел с модулем равным 1. Если положить $G = (\mathbb{R}^2, +)$, $H = (\mathbb{Z}^2, +)$ и $\varphi : (g, g') \mapsto (e^{2\pi i g}, e^{2\pi i g'})$, то $G/H \cong S^1 \times S^1 \cong \mathbb{T}^2$ — двумерный тор.

2. Пусть $G = \mathbf{GL}_n(\mathbb{R})$, $H = \mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$. Построим гомоморфизм $\varphi : \mathbf{GL}_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^\times,\ A \mapsto \det A \Rightarrow \ker\varphi = \mathbf{SL}_n(\mathbb{R})$.

Теорема (**о классификации циклических групп**). *Пусть G — циклическая группа.*

1. *Если $|G| = \infty$, то $G \cong \mathbb{Z}^+$.*
2. *Если $|G| = n < \infty$, то $G \cong \mathbb{Z}_n^+$.*

Доказательство. Пусть $G = \langle g \rangle$. Рассмотрим отображение $\varphi : \mathbb{Z} \to G, \quad k \mapsto g^k$.

$$\varphi(k+l) = g^{k+l} = g^k g^l = \varphi(k)\varphi(l), \text{ поэтому } \varphi \text{ — гомоморфизм.}$$

Из определения циклической группы следует, что φ сюръективен, т.е. $\operatorname{Im}\varphi = G$. По теореме о гомоморфизме получаем $G \cong \mathbb{Z}/\ker\varphi$, т.к. $\ker\varphi < \mathbb{Z} \Rightarrow \exists m \geqslant 0$: $\ker\varphi = m\mathbb{Z}$ (любая подгруппа $\mathbb{Z}$ имеет вид $k\mathbb{Z}$). Если $m = 0$, то $\ker\varphi = \{0\}$, откуда $G \cong \mathbb{Z}\,/\,\{0\} \cong \mathbb{Z}$. Если $m > 0$, то $G \cong \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_m$. ∎

9 Группы автоморфизмов

Утверждение 9.1. *Пусть G — группа. Множество её автоморфизмов* $\mathrm{Aut}\,(G)$ *несёт каноническую структуру группы с операцией композиции отображений.*

Доказательство. Необходимые свойства: ассоциативность верна для композиции любых отображений, в том числе и автоморфизмов; нейтральный элемент — тождественное отображение; обратный элемент существует, так как автоморфизмы биективны. ∎

Утверждение 9.2.

1. $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$;

2. $\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_n^\times$.

Доказательство. Пусть $G_1 = \langle g \rangle$. Тогда любой гомоморфизм $\varphi : G_1 \to G_2$ однозначно определяется образом порождающего элемента $\varphi(g) \in G_2$. В самом деле, $\forall m \in \mathbb{Z}$: $\varphi(g^m) = \varphi(g)^m$. Пусть $\varphi : G_1 \to G_1$ — автоморфизм. Тогда, из сюръективности, $\exists k \in \mathbb{Z}$: $\varphi(g) = g^k$, и это порождающий элемент G.

1. В $\mathbb{Z}$ всего два порождающих. Для каждого из них есть гомоморфизм:

   - $\varphi_1 : 1 \mapsto 1$ ($\varphi_1 = \mathrm{id}$);
   - $\varphi_2 : 1 \mapsto -1$ ($\varphi_1 = -\mathrm{id}$).

   Это автоморфизмы $\Rightarrow |\mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z})| = 2 \Rightarrow \mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$.

2. В $\mathbb{Z}_n$ порождающие — это $\overline{k}$: НОД$(k, n) = 1$.
   Построим $\varphi_{\overline{k}} : \overline{1} \mapsto \overline{k},\ \ \overline{m} \mapsto \overline{km}$. Это биекция из множества в само себя, значит, это автоморфизм. Проверим, что отображение $\overline{k} \mapsto \varphi_{\overline{k}}$ сохраняет операцию. Действительно,

$$\varphi_{\overline{s}}(\varphi_{\overline{k}}(\overline{m})) = \overline{skm} = \varphi_{\overline{sk}}(\overline{m}) \Rightarrow \mathrm{Aut}\,(\mathbb{Z}_n) \cong \mathbb{Z}_n^\times. \qquad \blacksquare$$

Определение 9.1. Пусть G — группа, $g \in G$. *Внутренним автоморфизмом* группы G, определяемым g, называется отображение $i_g : G \to G, \quad a \mapsto gag^{-1}$.
Проверим, что это автоморфизм:

$$i_g(ab) = gabg^{-1} = gag^{-1}gbg^{-1} = i_g(a)i_g(b),$$

обратный к нему существует, и это $i_{g^{-1}}$.
Множество всех внутренних автоморфизмов группы G обозначается как $\mathrm{Inn}\,(G)$.

Лемма 9.1.

1. $\mathrm{Inn}\,(G) \lhd \mathrm{Aut}\,(G)$;
2. *Отображение* $i : G \to \mathrm{Inn}\,(G), \quad g \mapsto i_g$ *является гомоморфизмом групп.*

Доказательство.

1. Поскольку $\mathrm{Inn}\,(G) = \mathrm{Im}\, i \subseteq \mathrm{Aut}\,(G)$, то это подгруппа.
   Для проверки нормальности возьмём произвольные $\varphi \in \mathrm{Aut}\,(G)$ и $i_g \in \mathrm{Inn}\,(G)$ и сопряжём их:

   $$(\varphi i_g \varphi^{-1})(a) = \varphi(g\varphi^{-1}(a)g^{-1}) = \varphi(g)a\varphi(g^{-1}) = i_{\varphi(g)}(a).$$

   Таким образом, $\varphi i_g \varphi^{-1} \in \mathrm{Inn}\,(G) \Rightarrow \mathrm{Inn}\,(G) \lhd \mathrm{Aut}\,(G)$.
2. $i_{gh}(a) = gha(gh)^{-1} = ghah^{-1}g^{-1} = g(hah^{-1})g^{-1} = i_g(i_h(a)) =$
   $= (i_g \circ i_h)(a)$, то есть операция сохраняется. ■

Определение 9.2. *Центром* группы G называется множество всех элементов группы, коммутирующих со всеми элементами группы:

$$Z(G) \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \mid \forall g' \in G\colon gg' = g'g\}.$$

Замечание. $G = Z(G) \Leftrightarrow G$ абелева.

Лемма 9.2. *Пусть G — группа, тогда*

1. $Z(G) \lhd G$;
2. $\forall i \in \mathrm{Aut}\,(G)\colon\ \ker i = Z(G)$.

Доказательство. Достаточно доказать только пункт 2, так как пункт 1 из него следует.

2. Проверим, что $\forall a \in G$: $i_g(a) = a$:

$$g \in Z(G) \Leftrightarrow \forall a \in G\colon ga = ag \Leftrightarrow gag^{-1} = a \Leftrightarrow i_g(a) = a. \qquad \blacksquare$$

Замечание. $\mathrm{Inn}\,(G) = e \Leftrightarrow G$ абелева.

Утверждение 9.3. *Пусть G — группа, тогда* $\mathrm{Inn}\,(G) \cong {}^{G}/_{Z(G)}$.

Доказательство. Рассмотрим гомоморфизм $i : G \to \mathrm{Aut}\,(G)$, $g \mapsto i_g$. Тогда $\mathrm{Im}\, i = \mathrm{Inn}\,(G)$, $\ker i = Z(G)$ по предыдущей лемме. По теореме о гомоморфизме, $\mathrm{Im}\, i = \mathrm{Inn}\,(G) \cong {}^{G}/_{\ker i} = {}^{G}/_{Z(G)}$. $\blacksquare$

Примеры.

1. $Z(\mathbf{S}_n) = \begin{cases} \mathbf{S}_n, & n \leqslant 2, \\ \{e\}, & n \geqslant 3. \end{cases}$

   $Z(\mathbf{A}_n) = \begin{cases} \mathbf{A}_n, & n \leqslant 3, \\ \{e\}, & n \geqslant 4. \end{cases}$
2. $Z(\mathbf{GL}_n(\mathbb{R})) = \{\lambda I \mid \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$.
3. $Z(\mathbf{D}_n) = \begin{cases} \{e, \mathrm{R}_\pi\}, & n = 2k, \\ \{e\}, & n = 2k+1. \end{cases}$
4. $Z(Q_8) = \{\pm 1\}$.

Определение 9.3. *Множество внешних автомрфизмов* группы G определяется как

$$\mathrm{Out}\,(G) \overset{\text{def}}{=} {}^{\mathrm{Aut}\,(G)}/_{\mathrm{Inn}\,(G)}.$$

10 Классы сопряжённости

Определение 10.1. Пусть G — группа. Элементы $a, b \in G$ называются *сопряжёнными* и обозначаются $a \sim b$, если $\exists g \in G$: $a = gbg^{-1}$.

Определение 10.2. *Классом сопряжённости* элемента a группы G называется множество

$$C_G(a) \overset{\text{def}}{=} \{b \in G \mid a \sim b\}.$$

Лемма 10.1. *Пусть G — группа.*

1. *Отношение сопряжённости является отношением эквивалентности.*
2. $C_G(a) = \{a\} \Leftrightarrow a \in Z(G)$.

Доказательство.

1. Проверим свойства отношения эквивалентности:
   - Рефлексивность: $a = eae^{-1} \Rightarrow a \sim a$;
   - Симметричность: $a = gba^{-1} \Leftrightarrow b = g^{-1}ag$;
   - Транзитивность:
     $(a = gbg^{-1},\ b = hch^{-1} \Rightarrow a = ghch^{-1}g^{-1}) \Rightarrow (a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow a \sim c)$.
2. $C_G(a) = \{a\} \Leftrightarrow \forall g \in G$: $gag^{-1} = a \Leftrightarrow a \in Z(G)$. ■

Лемма 10.2. *Пусть G — группа, $a, b \in G$.*
Тогда $b \in C_G(a) \Rightarrow \operatorname{ord}(b) = \operatorname{ord}(a)$.

Доказательство. Пусть $b = gag^{-1}$, $a^n = e$.
Тогда $b^n = (gag^{-1})^n = ga^ng^{-1} = gg^{-1} = e$ и наоборот из симметричности сопряжённости $\Rightarrow$ минимальные показатели совпадают. ■

Определение 10.3. *Централизатором* элемента a группы G называется множество

$$Z_G(a) \overset{\text{def}}{=} \{g \in G \mid ga = ag\}.$$

Замечание. $Z_G(a) < G$.

Утверждение 10.1. *Пусть* G *— конечная группа,* $a \in G$*. Тогда* $|C_G(a)| = |\frac{|G|}{|Z_G(a)|}|$*. В частности,* $|G| \vdots |C_G(a)|$*.*

Доказательство. Пусть ${}^{G}/_{Z_G(a)}$ — множество левых смежных классов (не факторгруппа, т.к. $Z_G(a)$ не обязательно нормальна). Достаточно установить биекцию ${}^{G}/_{Z_G(a)} \leftrightarrow C_G(a)$.

Определим отображение ${}^{G}/_{Z_G(a)} \to C_G(a)$, $gZ_G(a) \mapsto gag^{-1}$. Проверим:

1. Корректность:

$$h \in Z_G(a) \Rightarrow ghZ_G(a) \mapsto (gh)a(gh)^{-1} = ghah^{-1}g^{-1} = gahh^{-1}g^{-1} = \\ = gag^{-1} \leftarrow\!\shortmid gZ_G(a);$$

2. Сюръективность: по построению;

3. Инъективность:

$$gag^{-1} = g'a(g')^{-1} \Leftrightarrow ag^{-1}g' = g^{-1}g'a \Leftrightarrow g^{-1}g' \in Z_G(a) \Leftrightarrow g' \in Z_G(a).$$

■

11 Прямое произведение групп

Определение 11.1. *Прямым произведением групп* $G_1, \ldots, G_m$ называется группа

$$G_1 \times \ldots \times G_m \stackrel{\text{def}}{=} \{(g_1, \ldots, g_m) \mid g_1 \in G_1, \ldots, g_m \in G_m\}$$

с операцией $(g_1, \ldots, g_m)(g_1', \ldots, g_m') = (g_1 g_1', \ldots g_m g_m')$.

Ясно, что эта операция ассоциативна, обладает нейтральным элементом $(e_{G_1}, \ldots, e_{G_m})$ и для каждого элемента $(g_1, \ldots, g_m)$ есть обратный элемент $(g_1^{-1}, \ldots, g_1^{-1})$.

Замечание. Группа $G_1 \times \ldots \times G_m$ коммутативна тогда и только тогда, когда коммутативна каждая из групп $G_1, \ldots, G_m$.

Замечание. Если все группы $G_1, \ldots, G_m$ конечны, то $|G_1 \times \ldots \times G_m| = |G_1| \ldots |G_m|$.

Определение 11.2. Говорят, что группа G *раскладывается в прямое произведение* своих подгрупп $H_1, \ldots, H_m$, если отображение $H_1 \times \ldots \times H_m \to G, \quad (h_1, \ldots, h_m) \mapsto h_1 \ldots h_m$ является изоморфизмом.

Теоерма 11.1. *Пусть $n = pq$ — разложение натурального числа n на два взаимно простых сомножителя. Тогда имеет место изоморфизм групп*

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q.$$

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$\varphi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q, \quad \varphi(a \bmod n) = (a \bmod p,\, a \bmod q).$$

1. Корректность следует из того, что $n \,\vdots\, p$, $n \,\vdots\, q$.
2. φ — гомоморфизм, т.к.

$$\varphi((a+b) \bmod n) = \varphi(a \bmod n) + \varphi(b \bmod n).$$

3. φ инъективен:

   Если $\varphi(a \bmod n) = (0,\, 0)$, то $a \,\vdots\, p$, $a \,\vdots\, q$. Но так как НОД$(p,\, q) = 1$, получаем, что $a \,|\, n$. Тогда $a \equiv 0 \pmod n$, т.е. $\ker \varphi = \{0\}$.
4. φ сюръективен, т.к. $|\mathbb{Z}_n| = n = p \cdot q = |\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q|$. ■

Следствие. *Пусть $n \geqslant 2$ — натуральное число и $n = p_1^{k_1} \ldots p_s^{k_s}$ — его разложение в произведение простых множителей ($p_i \neq p_j$ при $i \neq j$). Тогда имеет место изоморфизм групп*

$$\mathbb{Z}_n \cong \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p_s^{k_s}}.$$

12 Свободные абелевы группы

Определение 12.1. *Кручением* или *периодической частью* группы G называется множество элементов конечного порядка

$$\operatorname{Tor}(G) \overset{\text{def}}{=} \{g \in G \mid \operatorname{ord}(g) < \infty\}.$$

Лемма 12.1. *Если группа A — абелева, то* $\operatorname{Tor}(A) < A$.

Доказательство. Пусть $\operatorname{ord}(a) = n$, $\operatorname{ord}(b) = m$, $a, b \in A$. Тогда $nm(a + b) = 0 \Rightarrow \operatorname{ord}(a + b) = 0$. ■

Замечание. В неабелевой группе элементы конечного порядка не всегда образуют подгруппу.

Определение 12.2. Группа A называется *конечнопорождённой*, если $\forall a \in A\ \exists a_1, \ldots, a_n \in A$: $a = k_1a_1 + \ldots + k_na_n$ для некоторых $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$. Такой набор $\{a_1, \ldots, a_n\}$ называется *системой образующих или порождающих.*

Примеры.

1. Любая конечная абелева группа конечнопорождена.
2. *Решётка* $\mathbb{Z}^n = \underbrace{\mathbb{Z} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}}_{n \text{ раз}} = \{(c_1, \ldots, c_n) \mid c_i \in \mathbb{Z}\}$. Системой порождающих будет *стандартный базис*

$$\{e_1 = (1, 0, \ldots, 0), e_2 = (0, 1, \ldots, 0), \ldots, e_n = (0, 0, \ldots, 1)\}.$$

Определение 12.3. Система порождающих $\{a_1, \ldots, a_n\}$ группы A называется *базисом*, если $\forall a \in A$ запись $a = k_1a_1 + \ldots + a_nk_n$ единственна. Группа, обладающая базисом, называется *свободной*. Число элементов в базисе называется *рангом* и обозначается $\operatorname{rank} A$.

Утверждение 12.1. *Все базисы свободной абелевой группы содержат одно и то же число элементов.*

Лемма 12.2. *Свободная абелева группа A ранга n изоморфна $\mathbb{Z}^n$.*

Доказательство. Если $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — базис в A, то $a = k_1e_1 + \ldots + k_ne_n \leftrightarrow (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}^n$. Для этого отображения простым образом проверяются корректность, биективность и сохранение операции. ■

Теоерма 12.1. *Всякая подгруппа B свободной абелевой группы A ранга n является свободной абелевой группой ранга $\leqslant n$.*

Утверждение 12.2. *Пусть A — свободная абелева группа с базисом $\{e_1, \ldots, e_n\}$, D — произвольная абелева группа, $d_1, \ldots, d_n \in D$ — произвольные элементы. Тогда $\exists!$ гомоморфизм*

$$\varphi : A \to D,\ \varphi(e_i) = d_i,\ i = \overline{1, n}.$$

Доказательство. $\forall a \in A$: $a = k_1e_1 + \ldots + k_ne_n$.
Положим $\varphi(a) = k_1\varphi(e_1) + \ldots + k_n\varphi(e_n)$. Это гомоморфизм, что проверяется очевидным образом. ■

Следствие. *Для любой конечнопорождённой абелевой группы D существует эпиморфизм $\varphi : A \twoheadrightarrow D$ из некоторой свободной абелевой группы A.*

Доказательство. Пусть $\{d_1, \ldots, d_n\}$ — порождающие элементы группы D. Положим $A = \mathbb{Z}^n$ и определим φ условием $\varphi(e_i) = d_i$, где $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — стандартный базис в $\mathbb{Z}^n$. Тогда φ сюръективен, т.к. $d_1, \ldots, d_n$ — порождающие. ■

13 Структура абелевых групп

Определение 13.1. Конечная абелева группа A называется *примарной*, если $|A| = p^k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$, где p — простое.

Теоерма 13.1. *Любая конечнопорождённая абелева группа A изоморфна прямой сумме примарных циклических групп и бесконечных циклических групп:*

$$A \cong \mathbb{Z}^n \oplus \mathbb{Z}_{p_1^{k_1}} \oplus \ldots \oplus \mathbb{Z}_{p_t^{k_t}},$$

где $p_1, \ldots, p_t$ — простые числа (не обязательно различные) и $k_1, \ldots, k_t \in \mathbb{N}$. Более того, набор примарных циклических множителей $\mathbb{Z}_{p_1^{k_1}}, \ldots, \mathbb{Z}_{p_t^{k_t}}$ определен однозначно с точностью до перестановки (в частности, число этих множителей определено однозначно).

Определение 13.2. *Экспонентой* конечной группы G называется число

$$\exp G \overset{\text{def}}{=} \min\{m \in \mathbb{N} \mid \forall g \in G\colon mg = 0\}.$$

Замечание.

1. Из того, что $\forall g \in G\ \forall m \in \mathbb{Z}\colon mg = 0 \Leftrightarrow m \,\vdots\, \mathrm{ord}(g)$, определение экспоненты можно переписать в виде $\exp G \overset{\text{def}}{=} \text{НОК}\{\mathrm{ord}(g) \mid g \in G\}$.
2. Из того, что $\forall g \in G\colon |G| \,\vdots\, \mathrm{ord}(g)$, следует, что $|G|$ — общее кратное множества $\{\mathrm{ord}(g) \mid g \in G\}$, а значит, $|G| \,\vdots\, \exp G$. В частности, $\exp G \leqslant |G|$.

Примеры.

1. $\exp(\mathbb{Z}_n) = n$;
2. $\exp(\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2) = 2$;
3. $\exp(\mathbf{S}_3) = 6$.

Теорема (критерий цикличности). *Группа A является циклической тогда и только тогда, когда* $\exp A = |A|$.

Доказательство. Пусть $|A| = n = p_1^{k_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{k_s}$ — разложение на простые множители, где p_i — простое и $k_s \in \mathbb{N}$ ($p_i \neq p_j$ при $i \neq j$).
Необходимость. Если $A = \langle a \rangle$, то $\operatorname{ord}(a) = n$, откуда $\exp A = n$.
Достаточность. Если $\exp A = n$, то для $i = 1, \ldots, s \quad \exists c_i \in A\colon \operatorname{ord}(c_i) = p_i^{k_i} m_i$, $m_i \in \mathbb{N}$. Для каждого $i = 1, \ldots, s$ положим $a_i = m_i c_i$, тогда $\operatorname{ord}(a_i) = p_i^{k_i}$. Рассмотрим элемент $a = a_1 + \ldots + a_s$ и покажем, что $\operatorname{ord}(a) = n$. Пусть $\exists m \in \mathbb{N}\colon ma = 0$, т.е. $ma_1 + \ldots + ma_s = 0$. При фиксированном $i \in \{1, \ldots, s\}$ умножим обе части последнего равенства на $n_i = n/p_i^{k_i}$. Видно, что $\forall i \neq j\colon mn_i a_j = 0$, поэтому в левой части останется только слагаемое $mn_i a_i$, откуда $mn_i a_i = 0 \Rightarrow mn_i \,\vdots\, p_i^{k_i}$, а т.к. $n_i \not\vdots\, p_i$, то $m \,\vdots\, p_i^{k_i}$. В силу произвольности выбора i отсюда вытекает, что $m \,\vdots\, n$, и т.к. $na = 0$, то окончательно получаем $\operatorname{ord}(a) = n$. Значит, $A = \langle a \rangle$ — циклическая группа. ■

14 Порождающие элементы

Определение 14.1. Подгруппа в группе G называется порождённой подмножеством S, если эта группа есть множество элементов вида $g_{i_1}^{\varepsilon_1}, \dots, g_{i_k}^{\varepsilon_k}$, где $g_{i_p} \in S, \varepsilon_p \in \{\pm 1\}$. Легко заметить, что это наименьшая подгруппа в G, содержащая S.

Утверждение 14.1. *Группа $\mathbf{A}_n$ порождается:*

1. *парами транспозиций;*
2. *тройными циклами;*
3. *парами независимых транспозиций при $n \geqslant 5$.*

Доказательство.

1. $\forall \sigma \in \mathbf{S}_n$: $\sigma = \tau_1 \dots \tau_k$, где τ_i — транспозиция. Если σ чётная, то $k = 2s$. Из этого следует, что $\sigma = (\tau_1 \tau_2) \dots (\tau_{2s-1} \tau_{2s})$.
2. Выразим пары транспозиций через тройные циклы:
$$(ij)(ij) = e, \ (ij)(jk) = (ijk), \ (ij)(kl) = (ijk)(jkl).$$
3. Выразим пару зависимых транспозиций через пары независимых транспозиций:
$$(ij)(jk) = ((ij)(lm))((jk)(lm)), \quad l, m \in \{i, j, k\}.$$ ■

Определение 14.2. *Задание (копредставление или генетический код) группы* — один из методов описания группы. Пусть подмножество S группы G порождает её. При такой кодировке конкатенация слов соответствует умножению элементов группы, а значит, теоретически вся групповая структура задаётся информацией о том, какие пары таких слов представляют один и тот же элемент группы G. Такие пары называются *соотношениями.* Метод состоит в том, чтобы указать (по возможности небольшой) список R определяющих соотношений, которого, с учётом заранее оговоренных правил вывода, хватит для хранения полной информации о группе. В этом случае пишут $G \cong \langle S \mid R \rangle$.

15 Коммутант

Определение 15.1. Пусть G — группа. *Коммутатором* двух элементов $x, y \in G$ называется $[x, y] \overset{\text{def}}{=} xyx^{-1}y^{-1} \in G$.

Замечание.

1. $[x, y] = e \Leftrightarrow xy = yx$;
2. $xy = [x, y]\, yx$, поэтому $[x, y]$ называют *корректирующим множителем*;
3. $[x, x] = e$;
4. $[x, y]^{-1} = (xyx^{-1}y^{-1})^{-1} = yxy^{-1}x^{-1} = [y, x]$.

Определение 15.2. *Коммутантом* или *производной подгруппой* группы G называется подгруппа G' (или $[G, G]$) $\leqslant G$, порождённая всеми коммутаторами в G.

Замечание. $[G, G] = \{e\} \Leftrightarrow G$ — абелева.

Пример. $G = \mathbf{S}_n \Rightarrow [\sigma, \tau] = \sigma\tau\sigma^{-1}\tau^{-1}$ — чётная $\Rightarrow G' \leqslant \mathbf{A}_n$. С другой стороны, $\mathbf{A}_n$ порождается тройными циклами, которые, в свою очередь, представимы как коммутаторы:

$$(ijk) = (ij)(ik)(ij)(ik) = (ij)(ik)(ij)^{-1}(ik)^{-1} = [(ij), (ik)] \Rightarrow \mathbf{A}_n \leqslant G' \Rightarrow \Rightarrow \mathbf{A}_n = G'.$$

Утверждение 15.1. *Пусть G — группа, тогда:*

1. $G' \lhd G$;
2. *G/G' абелева;*
3. *если $N \lhd G$, то G/N абелева $\Leftrightarrow G' \leqslant N$;*
4. *если $G' \leqslant K \leqslant G$, то $K \lhd G$.*

Доказательство. Достаточно доказать только факты 3 и 4, из которых сразу следуют 2 и 1, соответственно.

3. $\forall g, h \in G$: $(gN)(hN) = (hN)(gN) \Leftrightarrow (gN)(hN)(gN)^{-1}(hN)^{-1} =$
$= (ghg^{-1}h^{-1}N) = eN \Leftrightarrow ghg^{-1}h^{-1} \in N \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow N$ содержит все коммутаторы $\Leftrightarrow G' \leqslant N$.
4. Если $g \in G,\ k \in K$, то $gkg^{-1} = gkg^{-1}k^{-1}k = [g,k]\,k$. Так как $[g,k] \in K$, то $gkg^{-1} \in K \Rightarrow K \lhd G$. ■

Лемма 15.1. *Пусть $\varphi : G_1 \to G_2$ — гомоморфизм. Тогда $\varphi(G_1') \leqslant G_2'$. Если φ сюръективен, то $\varphi(G_1') = G_2'$.*

Доказательство.

$$\varphi([x,y]) = \varphi(xyx^{-1}y^{-1}) = \varphi(x)\varphi(y)\varphi(x^{-1})\varphi(y^{-1}) = \varphi(x)\varphi(y)\varphi(x)^{-1}\varphi(y)^{-1} =$$
$$= [\varphi(x), \varphi(y)] \in G_2' \Rightarrow \varphi(G_1') \leqslant G_2'.$$

Если φ сюръективен и $a, b \in G_2$, то $\exists x, y \in G_1$: $a = \varphi(x),\ b = \varphi(y)$. Тогда $[a,b] = [\varphi(x), \varphi(y)] = \varphi([x,y]) \in \varphi(G_1') \Rightarrow G_2' \leqslant \varphi(G_1') \Rightarrow \varphi(G_1') = G_2'$. ■

Определение 15.3. Пусть G — группа. Подгруппа $H \leqslant G$ называется *характеристической*, если она устойчива относительно всех автоморфизмов, т.е. $\forall \varphi \in \mathrm{Aut}\,(G)$: $\varphi(H) = H$.

Замечание. Центр группы является характеристической подгруппой.

Утверждение 15.2. *Коммутант группы является характеристической подгруппой.*

Доказательство. Достаточно проверить, что $\forall \varphi \in \mathrm{Aut}\,(G)$: $\varphi([x,y]) \in G'$.
$\varphi([x,y]) = [\varphi(x), \varphi(y)] \in G'$. ■

Замечание. Если $H \leqslant G$, то $H' \subseteq G'$.

Лемма 15.2. $D'_n = \begin{cases} \langle \mathrm{R}_{\frac{2\pi}{n}} \rangle, & n = 2s+1, \\ \langle \mathrm{R}_{\frac{2\pi}{s}} \rangle, & n = 2s. \end{cases}$

Доказательство. Коммутаторы вращений тривиальны.
$\mathrm{R}_\varphi \mathrm{S}_v \mathrm{R}_{-\varphi} \mathrm{S}_v = \mathrm{S}_{\mathrm{R}_\varphi v} \mathrm{S}_v = \mathrm{R}_{2\varphi}$.
$\mathrm{S}_1 \mathrm{S}_2 \mathrm{S}_1 \mathrm{S}_2 = \mathrm{R}_{2\varphi} \mathrm{R}_{2\varphi} = \mathrm{R}_{4\varphi}$, где φ — угол между осями симметрий.
Таким образом, $D'_n = \{\mathrm{R}_{2 \cdot \frac{2\pi k}{n}}\}_{k=0}^{n-1} = \begin{cases} \langle \mathrm{R}_{\frac{2\pi}{n}} \rangle, & n = 2s+1, \\ \langle \mathrm{R}_{\frac{2\pi}{s}} \rangle, & n = 2s. \end{cases}$ ■

Лемма 15.3. $\mathbf{A}'_n = \begin{cases} e, & n \leqslant 3, \\ \mathbf{V}_4, & n = 4, \\ \mathbf{A}_n, & n \geqslant 5. \end{cases}$

Доказательство. При $n \leqslant 3$ $\mathbf{A}_n$ абелева.
При $n = 4$: $\mathbf{V}_4 \lhd \mathbf{A}_n$, $|{}^{\mathbf{A}_4}/_{\mathbf{V}_4}| = \frac{12}{4} = 3$ — простое число $\Rightarrow {}^{\mathbf{A}_4}/_{\mathbf{V}_4} \cong \mathbb{Z}_3$ — абелева $\Rightarrow \mathbf{A}'_4 \leqslant \mathbf{V}_4$. С другой стороны, $\mathbf{A}'_4 \neq \{e\}$, т.к. $\mathbf{A}_4$ не абелева. Но $\mathbf{A}_4$ состоит из двух классов сопряжённости $\Rightarrow$ в $\mathbf{V}_4$ нет собственных подгрупп, нормальных в $\mathbf{A}_4 \Rightarrow \mathbf{A}'_4 = \mathbf{V}_4$.
При $n \geqslant 5$: применяя вышеописанные рассуждения к произвольной четвёрке индексов i, j, k, l, увидим, что юбая пара независимых транспозиций лежит в $\mathbf{A}'_n$. Такие пары порождают $\mathbf{A}_n$, значит, $\mathbf{A}'_n = \mathbf{A}_n$. ■

Лемма 15.4. $\mathbf{GL}'_n(F) = \mathbf{SL}_n(F)$ *при* $|F| \geqslant 4$, $n \geqslant 2$.

Доказательство. $\det[A, B] = \det(ABA^{-1}B^{-1}) = 1 \Rightarrow \mathbf{GL}'_n(F) \subseteq \mathbf{SL}_n(F)$.
С другой стороны, $\mathbf{SL}'_n(F) = \mathbf{SL}_n(F) \subseteq \mathbf{GL}'_n(F)$. Значит, $\mathbf{GL}'_n(F) = \mathbf{SL}_n(F)$. ■

16 Разрешимые группы

Определение 16.1. *Кратный коммутант* группы $G^{(k)}$ группы G определяется индуктивно:

1. $G^{(1)} = G'$;
2. $G^{(k)} = (G^{(k-1)})'$.

Для удобства считается, что $G^{(0)} = G$.

Определение 16.2. Группа G называется *разрешимой*, если $\exists k \in \mathbb{N}$: $G^{(k)} = \{e\}$. В этом случае $G \supset G' \supset \ldots \supset G^{(k)} = \{e\}$, ${}^{G^{(i)}}\!/_{G^{(i+1)}}$ абелева $i = \overline{0, \ldots, k-1}$, такая цепочка называется *производным рядом.* Наименьшее такое $k \in \mathbb{N}$ называется *ступенью разрешимости* G, а группа *разрешимой ступени* k.

Замечание. Разрешимые группы ступени 1 — абелевы группы. Разрешимые группы ступени 2 называют *метабелевыми.*

Примеры.

1. $G = \mathbf{S}_3 \Rightarrow G' = \mathbf{A}_3 \Rightarrow G^{(2)} = \mathbf{A}_3' = \{e\} \Rightarrow G$ разрешима ступени 2.
2. $G = \mathbf{S}_4 \Rightarrow G' = \mathbf{A}_4 \Rightarrow G^{(2)} = \mathbf{A}_4' = \mathbf{V}_4 \Rightarrow G^{(3)} = \mathbf{V}_4' = \{e\} \Rightarrow G$ разрешима ступени 3.
3. $G = \mathbf{S}_n,\ n \geqslant 5 \Rightarrow G' = \mathbf{A}_n \Rightarrow \forall k \geqslant 2$: $G^{(k)} = \mathbf{A}_k \Rightarrow G$ неразрешима. Аналогично для $G = \mathbf{A}_n,\ n \geqslant 5$.
4. $G = \mathbf{GL}_n(F)$ (или $\mathbf{SL}_n(F)$),
   $|F| \geqslant 4 \Rightarrow G' = \mathbf{SL}_n(F) \Rightarrow \forall k \geqslant 2$: $G^{(k)} = \mathbf{SL}_n(F) \Rightarrow$ неразрешима.

Утверждение 16.1. *Пусть в группе G существует ряд подгрупп $G \supseteq G_1 \supseteq \ldots \supseteq G_s = \{e\}$, $G_{i+1} \lhd G_i$, ${}^{G_i}/_{G_{i+1}}$ абелева $\forall i$. Тогда G разрешима.*

Доказательство. Достаточно доказать, что $\forall i$: $G^{(0)} \subseteq G_i$. Воспользуемся индукцией по n.

1. $i = 0 \Rightarrow G^{(0)} = G = G_0$.
2. Пусть $G^{(i)} \subseteq G_i$. Проверим, что $G^{(i+1)} \subseteq G_{i+1}$. Так как, по предположению индукции, ${}^{G_i}/_{G_{i+1}}$ абелева, то $G_i' \subseteq G_{i+1}$. Но $G^{(i+1)} = (G^{(i)})' \subseteq G_i' \subseteq G_{i+1}$. ■

Лемма 16.1.

1. *Подгруппа разрешимой группы разрешима.*
2. *Факторгруппа разрешимой группы разрешима.*

Доказательство.

1. Пусть $H < G$, тогда $\forall i$: $H' \subseteq G', \ldots, H^{(i)} \subseteq G^{(i)}$. Поскольку $\exists k \in \mathbb{N}$: $G^{(k)} = \{e\}$, то $H^{(k)} = \{e\}$.
2. Пусть $H \lhd G$, $F = G/N$. Для эпиморфизма $\varphi : G \twoheadrightarrow F$, $g \mapsto gN$ имеем: $F' = \varphi(G'), \ldots, F^{(i)} = \varphi(G^{(i)})\ \forall i$. Поскольку $\exists k \in \mathbb{N}$: $G^{(k)} = \{e\}$, то $F^{(k)} = \varphi(G^{(k)}) = \varphi(\{e\}) = \{eN\} \Rightarrow F$ разрешима.

■

Утверждение 16.2. *Пусть G — группа, $N \lhd G$, N разрешима. Тогда G разрешима.*

Доказательство. По предположению, $\exists k \in \mathbb{N}$: $(G/K)^{(k)} = \{eN\}$.

$$[gN, hN] = (gN)(hN)(gN)^{-1}(hN)^{-1} = ghg^{-1}h^{-1}N$$

Рассмотрим проекцию $\pi : G \to G/N$, $g \mapsto gN$. Тогда

$$\pi(G') = (G/N)', \ldots, \pi(G^{(k)}) = (G/N)^{(k)} = \{eN\} \Rightarrow G^{(k)} \subseteq N.$$

С другой стороны, так как N разрешима, $\exists s \in \mathbb{N}$: $N^{(s)} = \{e\} \Rightarrow \left(G^{(k)}\right)^{(s)} = G^{(k+s)} \subseteq N^{(s)} = \{e\} \Rightarrow G$ разрешима. ■

17 Простые группы

Определение 17.1. Группа называется *простой*, если в ней нет нетривиальных нормальных подгрупп.

Теоерма 17.1. *Пусть G — конечная группа, тогда существует ряд подгрупп $G > H_1 > H_2 > \ldots > H_k = \{e\}$, такой что $H_{i+1} \lhd H_i$, ${}^{H_i}/_{H_{i+1}}$ проста $\forall i = \overline{1, k}$.*

Определение 17.2. Пусть G — группа, $N \lhd G$, $F = G/N$. Тогда говорят, что G — *расширение* группы N с помощью подгруппы F.

Замечание. Имеет место цепочка гомоморфизмов:

$$N \overset{i}{\hookrightarrow} G \xrightarrow{\pi} G/N = F.$$

Следствие. *Любая конечная группа получается цепочкой расширений при помощи простых групп.*

Примеры. Не всегда тем, что G — расширение N с помощью F, G определяется однозначно.ч Например, пусть $N \cong \mathbb{Z}_3$, $F \cong \mathbb{Z}_2$. Тогда:

1. $N = \mathbb{Z}_3,\ F = \mathbb{Z}_2 \Rightarrow G = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_2$ — абелева.
2. $N = \mathbf{A}_3 \cong \mathbb{Z}_3,\ F = \mathbf{S}_3/\mathbf{A}_3 \cong \mathbb{Z}_2 \Rightarrow G = \mathbf{S}_3$ — неабелева.

Замечание. Абелева группа A проста $\Leftrightarrow A \cong \mathbb{Z}_p$, где p — простое.

Теоерма 17.2. *Группа $\mathbf{A}_n$ проста при $n \geqslant 5$.*

Теорема (о классификации конечных простых групп). *Любая конечная простая группа изоморфна либо одной из 26 спорадических групп, либо принадлежит одному из следующих трёх семейств:*

- $\mathbb{Z}_p$, p — *простое;*
- $\mathbf{A}_n$, $n \geqslant 5$;
- *простые группы типа Ли.*

18 Действия групп. Формула Бёрнсайда

Определение 18.1. Пусть G — группа, X — произвольное множество. *Действием* группы G на множестве X называется гомоморфизм $\alpha : G \to S(X)$, где $S(X)$ — группа биекций на X. Альтернативное определение заключается в том, что действие — отображение $G \times X \to X,\ (g, x) \mapsto gx$, удовлетворяющее условиям:

1. $\forall x \in X$: $ex = x$;
2. $\forall g, h \in G\ \forall x \in X$: $g(hx) = (gh)x$.

Действие G на X обозначается $G \curvearrowright X$ или $G : X$.

Замечание. Эти определения эквивалентны.

Определение 18.2. *Орбитой* точки $x \in X$ называется множество

$$Orb(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{gx \mid g \in G\} \subseteq X.$$

Определение 18.3. *Стабилизатором (стационарной подгруппой, подгруппой изотропии)* точки $x \in X$ называется множество

$$St(x) \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \mid gx = x\} \subseteq G.$$

Замечание. $St(x) < G$.

Определение 18.4. Действие

- *транзитивно*, если $\forall x, y \in X\ \exists g \in G$: $y = gx$ (т.е. X состоит из одной орбиты);
- *свободно*, если $\exists x \in X$: $gx = x$ влечёт $St(x) = \{e\}$;
- *эффективно*, если $\forall x \in X$: $gx = x$ влечёт $g = e$ (т.е. действие инъективно).

Определение 18.5. *Ядром неэффективности действия a* назывется множество

$$\ker \alpha \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \mid \forall x \in X\colon gx = x\}.$$

Замечание. От действия $G \curvearrowright X$ можно перейти к действию ${}^{G}\!/_{\ker\alpha} \curvearrowright X : g\ker\alpha = gx$, которое будет эффективным.

Примеры.

1. $\mathbf{SO}_n(\mathbb{R}) \curvearrowright \mathbb{R}^n,\ (A, v) \mapsto Av.$

   Орбитами этого действия при $n = 2$ будут концентрические окружности с центром в начале координат (а также сама точка начала координат, считающаяся окружностью с нулевым радиусом). В общем случае это сферы с центром в начале координат, а также сама точка начала координат.

   Стабилизатор ненулевого вектора $St(v) \cong \mathbf{SO}_{n-1}(\mathbb{R})$ — все специальные ортогональные преобразования в ортогональной плоскости к v. Если же $v = 0$, то $St(v) = \mathbf{SO}_n(\mathbb{R})$. Действие не транзитивно (длина сохраняется), не свободно (хотя при $n = 2$ очень к этому близко) и эффективно.

2. $\mathbf{S}_n \curvearrowright \{1, \ldots, n\},\ i \mapsto \sigma(i).$

   Действие транзитивно и эффективно, но не свободно при $n \geqslant 3$, т.к. $St(i) \cong \mathbf{S}_{n-1}$.

3. $\sigma \in \mathbf{S}_n,\ G = \langle\sigma\rangle \curvearrowright \{1, \ldots, n\} = X.$

   Орбиты соответствуют независимым циклам в разложении σ.
   Действие транзитивно $\Leftrightarrow \sigma$ — цикл длины n.

4. $G = \mathbf{GL}_n(F)$ или $\mathbf{SL}_n(F)$ $(n \geqslant 2) \curvearrowright F^n\ X,\quad (A, v) \mapsto Av.$

   Орбиты: (для $\mathbf{SL}_n(F)$ при $n > 1$) $F^n \setminus \{0\}$ и $\{0\}$.

5. $G = \mathbf{GL}_n(\mathbb{C}) \curvearrowright \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) = X,\quad (g, M) \mapsto gMg^{-1}.$

   Орбиты — матрицы одного оператора в разных базисах: $GM = \{M' \mid \mathcal{J}(M') = \mathcal{J}(M)\}$, где $\mathcal{J}(M)$ — жорданова нормальная форма M.

   $St(M) = Z_{\mathbf{GL}_n(\mathbb{C})}(M) = \{g \mid gM = Mg\}.$

6. $G = \mathbf{GL}_n(F) \curvearrowright \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) = X,\quad (g, M) \mapsto gMg^T.$

   Орбиты GM — матрицы одной билинейной формы.

Три важных действия $G \curvearrowright G$:

1. *левые сдвиги*: $(g, x) \mapsto gx$;
2. *правые сдвиги*: $(g, x) \mapsto xg$;
3. сопряжения: $(g, x) \mapsto gxg^{-1}$.

Действия 1 и 2 транзитивны: $x \xmapsto{g=yx^{-1}} y$.
Действия 1 и 2 свободны: $St(x) = \{g \in G \mid gx = x\} = \{e\}$.
Действия 1 и 2 эффективны.
Орбиты действия 3 — классы сопряжённости $C_G(x)$, стабилизатор $St(x) = Z_G(x)$ — централизатор.
Пусть G нетривиальна. Тогда действие 3 не транзитивно, не свободно и не эффективно: $\ker\alpha = \bigcap\limits_{x\in X} St(x) = Z(G)$.

Теорема (**Кэли**). *Любая конечная группа G порядка n изоморфна некоторой подгруппе $\mathbf{S}_n$.*

Доказательство. Рассмотрим $G \curvearrowright G$ левыми сдвигами. Оно определяет гомоморфизм $\alpha : G \to S(G) \cong \mathbf{S}_n$. Действие свободно $\Rightarrow$ эффективно $\Rightarrow$ α инъективно $\Rightarrow$ по теореме о гомоморфизме, $G \cong \alpha(G) \leqslant \mathbf{S}_n$.

Можно построить такой гоморфизм и вручную: $\forall a \in G$ рассмотрим отображение $L_a : G \to G$, определённое формулой $L_a(g) = ag$.

Если $e, g_2, \ldots, g_n$ — все элементы G, то $a, ag_2, \ldots, ag_n$ будут теми же элементами, но расположенными в каком-то другом порядке. Значит, L_a — биекция, обратной к которой будет $L_a^{-1} = L_{a^{-1}}$, тождественным отображением является L_e. Тогда $L_{ab}(g) = (ab)g = a(bg) = L_a(L_b(g))$, т.е. $L_{ab} = L_aL_b$. Следовательно множество $L_e, L_{g_2} \ldots, L_{g_n}$ образует подгруппу $H < S(G) = \mathbf{S}_n$, а $L : a \mapsto L_a$ является изоморфизмом. ■

Определение 18.6. Подгруппы $H_1, H_2 < G$ называются *сопряжёнными*, если $\exists g \in G$: $gH_1g^{-1} = H_2$.

Лемма 18.1. *Пусть группа G действует на множество X, $x, y \in X$ лежат в одной G-орбите. Тогда $St(x)$ и $St(y)$ сопряжены.*

Доказательство. По условию, $\exists g \in G$: $gx = y$. Тогда

$$h = St(y) \Leftrightarrow hy = y \Leftrightarrow h(gx) = gx \Leftrightarrow g^{-1}hgx = x \Leftrightarrow g^{-1}hg \in St(x) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow St(x) = g^{-1}St(y) = gSt(x)g^{-1}. \quad ■$$

Замечание. Обратное утверждение неверно.

Определение 18.7. Пусть $G_1 \curvearrowright X_1$, $G_2 \curvearrowright X_2$ — два действия. Они называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $\varphi : G_1 \to G_2$ и биекция $f : X_1 \to X_2$, такие что одно действие переходит в другое, т.е. $\forall x \in X_1\ \forall g \in G_1$: $f(gx) = \varphi(g)f(x)$:

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & gx \arrow[d, "f"] \\ f(x) \arrow[r] & \varphi(g)f(x) \end{tikzcd}$$

Замечание. Пусть G — группа, $H \leqslant G$. Тогда G действует на множество смежных классов G/H :

$$G \times G/H \to G/H,\ (g, xH) \mapsto (gxH).$$

Это действие транзитивно $xH \xmapsto{g=yx^{-1}} yH$.

G/H называют *однородным пространством* группы G.

Теорема (формула Бёрнсайда). *Пусть G — конечная группа, X — конечное множество, $G \curvearrowright X$. Тогда число орбит действия равно*

$$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|X^g|,\ \textit{где } X^g \overset{\text{def}}{=} \{x \in X \mid gx = x\}.$$

Доказательство. Рассмотрим $M = \{(g, x) \mid gx = x\}$.
Тогда $|M| = \sum\limits_{g\in G}|X^g|$. С другой стороны, если зафиксировать x, то $|M| = \sum\limits_{x\in X}|St(x)| = \sum\limits_{x\in X}\dfrac{|G|}{|Gx|} = |G|\sum\limits_{x\in X}\dfrac{1}{|Gx|}$. Нетрудно заметить, что для каждой орбиты обратная величина к её порядку войдёт в сумму ровно столько раз, сколько элементов в орбите, то есть сумма просто будет равна числу орбит. Приравняв две полученные мощности M, получим требуемое. ∎

19 p-группы. Теоремы Силова

Определение 19.1. Пусть p — простое число. Конечная группа G называется *p-группой*, если $|G| = p^k$ для некоторого $k \in \mathbb{N}$.

Примеры.

1. $|\mathbf{D}_4| = 2^3$ — 2-группа;
2. $|\mathbf{Q}_8| = 2^3$ — 2-группа.

Теоерма 19.1.

1. *Нетривиальная p-группа имеет нетривиальный центр.*
2. *Любая p-группа разрешима.*

Доказательство.

1. $|G| = p^k,\ G = \bigsqcup C_G(g) \Rightarrow |G| = \sum |C_G(g)|$.
   Но $|C_G(g)| = \frac{|G|}{|Z_G(g)|} = p^l,\ l \leqslant k$. При этом $|C_G(g)| = 1 \Leftrightarrow g \in Z(G)$. Поэтому
   $p^k = |G| = |Z(G)| + \sum\limits_{l_i > 0} p^{l_i} \Rightarrow p \cdot |Z(G)| \Rightarrow |Z(G)| \neq 1 \Rightarrow Z(G) \neq \{e\}$.
2. Индукция по k:
   - При $k = 0$: $|G| = 1 \Rightarrow G = \{e\} \Rightarrow G$ разрешима.
   - При $k > 0$: $Z(G) \neq \{e\},\ Z(G) \lhd G \Rightarrow |G/Z(G)| = p^l < p^k$. По предположению индукции, $G/Z(G)$ разрешима. Сам $Z(G)$ абелев, в частности, разрешим. Значит, и G разрешима. ■

Лемма 19.1. *Пусть G — некоммутативная группа, тогда $G/Z(G)$ не циклическая.*

Доказательство. Предположим, что $G/Z(G)$ — циклическая. Тогда $\exists a \in G$: $G/Z(G) = \langle aZ(G) \rangle$. Отсюда $\forall g \in G$: $g = a^k z$, где $k \in \mathbb{Z},\ z \in Z(G)$. Но $(a^{k_1} z_1)(a^{k_2} z_2) = a^{k_1+k_2} z_1 z_2$. Получаем противоречие с некоммутативностью группы. ■

Теоерма 19.2. *Любая группа порядка $|p^2|$ абелева.*

Доказательство. Пусть G — группа и $|G| = p^2$. Каким может быть центр?

1. $|Z(G)| = 1$ — противоречие с пунктом 1 предыдущей теоремы.
2. $|Z(G)| = p \Rightarrow |G/Z(G)| = p \Rightarrow G/Z(G)$ — циклическая — противоречие с предыдущей леммой.
3. $|Z(G)| = p^2 \Rightarrow G = Z(G) \Rightarrow G$ абелева. ■

Следствие. *Если $|G| = p^2$, то либо $G \cong \mathbb{Z}_{p^2}$, либо $G \cong \mathbb{Z}_p \oplus \mathbb{Z}_p$.*

Определение 19.2. Пусть G — конечная группа, p — простое число. Тогда $|G| = p^k m$, где $k \in \mathbb{N}$, НОД$(m, p) = 1$. *Силовской p-подгруппой* в G называется подгруппа H_p порядка p^k.

Пример. $G = \mathbf{S}_4 \Rightarrow |G| = 24 = 2^3 \cdot 3$

- $p = 2 \Rightarrow |H_p| = 8 \Rightarrow H_p \cong \mathbf{D}_4$.
- $p = 3 \Rightarrow |H_p| = 3$. Например, $H_p = \langle(123)\rangle$.
- $p \geqslant 5 \Rightarrow |H_p| = 1 \Rightarrow H_p = \{e\}$.

Теорема (**первая теорема Силова**). *В любой конечной группе G для любого простого p силовская p-подгруппа существует.*

Замечание. Первая теорема Силова — это частичное обращение теоремы Лагранжа.

Теорема (**вторая теорема Силова**).

1. *Любая p-подгруппа в G содержится в некоторой силовской p-подгруппе.*
2. *Все силовские p-подгруппы в G сопряжены.*

Следствие. *Пусть $H \leqslant G$ — силовская p-подгруппа. Тогда $H \lhd G \Leftrightarrow H$ — единственная силовская p-подгруппа.*

Определение 19.3. Пусть G — группа, $H \leqslant G$. *Нормализатором* подгруппы H в G называется множество

$$N_G(H) \stackrel{\text{def}}{=} \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}.$$

При этом $H \lhd N_G(H)$.

Теорема (третья теорема Силова). *Если за* n_p *обозначить число силовских* p*-подгрупп в* G*, то* $n_p \equiv 1 \pmod p$ *и* $n_p | m$*, где* m *— индекс силовской* p*-подгруппы.*

Следствие. *Группа* G *порядка* pq*, где* p, q *— простые,* $p > q$*, разрешима ступени* $\leqslant 2$*.*

20 Кольца и поля

Определение 20.1. *Кольцо* — это множество R, на котором заданы две бинарные операции « $+$ » (сложение) и « $\cdot$ » (умножение), удовлетворяющее следующим условиям:

1. $(R, +)$ — абелева группа;
2. $(R, \cdot)$ — полугруппа;
3. $\forall a, b, c \in R$: $a(b + c) = ab + ac$ и $(a + b)c = ac + bc$.

Замечание.

1. $\forall a \in R$: $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$;
2. Если $|R| > 1$, то $1 \neq 0$.

Доказательство.

1. $a0 = a(0 + 0) = a0 + a0 \Rightarrow 0 = a0$.
2. Следует из условий выше. ■

Примеры.

1. Числовые кольца $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$;
2. Кольцо $\mathbb{Z}_n$ вычетов по модулю n;
3. Кольцо матриц $\mathrm{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$;
4. Кольцо многочленов $\mathbb{R}[x]$ от переменной x с коэффициентами из $\mathbb{R}$;
5. Кольцо функций $F(M, \mathbb{R})$ из множества M в $\mathbb{R}$ с поэлементными операциями сложения и умножения:

   $\forall m \in M$: $(f_1 + f_2)(m) = f_1(m) + f_2(m), \quad (f_1 \cdot f_2)(m) = f_1(m) \cdot f_2(m)$.

Определение 20.2. Кольцо R называется *коммутативным*, если

$$\forall a, b \in R\colon ab = ba.$$

Определение 20.3. Говорят, что кольцо R *содержит единицу*, если

$$\exists 1 \in R \ \forall a \in R\colon 1 \times a = a \times 1 = a.$$

Определение 20.4. Элемент a кольца R называется *обратимым*, если

$$\exists b \in R\colon ab = ba = 1.$$

Замечание. Все обратимые элементы кольца образуют группу по умножению.

Определение 20.5. Элемент a кольца R называется *левым* (соответственно *правым*) *делителем нуля*, если $a \neq 0$ и $\exists b \neq 0 \in R\colon ab = 0$ (соответственно $ba = 0$).

Замечание. Если кольцо коммутативно, то множества левых и правых делителей нуля совпадают. Тогда левые и правые делители нуля называются просто «делителями нуля».

Замечание. Все делители нуля в кольце необратимы.

Доказательство. Пусть R — кольцо; $a \neq 0,\ b \neq 0$. Если $ab = 0$ и $\exists a^{-1}$, то $a^{-1}ab = a^{-1}0 \Rightarrow b = 0$ — противоречие. ■

Определение 20.6. Элемент a кольца R называется *нильпотентным (нильпотентом)*, если $a \neq 0$ и $\exists n \in \mathbb{N}\colon a^n = 0$.

Замечание. Всякий нильпотент является делителем нуля.

Определение 20.7. Кольцо называется *телом*, если оно содержит $1 \neq 0$, и любой ненулевой элемент обратим.

Пример. $\mathbb{H}$ — тело кватернионов.

Определение 20.8. Тело называется *полем*, если оно коммутативно.

Примеры. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}, \mathbb{A}, \mathbb{Z}_p, \mathbb{Q}_p$ для простых p.

Замечание. В полях не существует делителей нуля.

Определение 20.9. *Характеристикой* $\operatorname{char} F$ поля F называется такое $n \in \mathbb{N}$, что $\underbrace{1 + \ldots + 1}_{n \text{ раз}} = 0$.

Теоерма 20.1. *Кольцо вычетов $\mathbb{Z}_p$ является полем тогда и только тогда, когда p — простое число.*

Доказательство.
Необходимость. Если $n = 1$, то $\mathbb{Z}_n = \{0\}$ — не поле.

Если $n > 1$ и $n = m \cdot k$, где $1 < m, k < n$, то $\overline{m} \cdot \overline{k} = \overline{0} \Rightarrow$ в $\mathbb{Z}_n$ есть делитель нуля $\Rightarrow \mathbb{Z}_n$ — не поле.

Достаточность. Пусть p — простое, $\overline{a} \in \mathbb{Z}_p \setminus \{\overline{0}\}$.

Тогда НОД$(a, p) = 1 \Rightarrow \exists k, l \in \mathbb{Z}$: $ak + pl = 1$. Значит, $\overline{a} \cdot \overline{k} + \overline{p} \cdot \overline{l} = \overline{1} \Rightarrow a \cdot k \equiv 1 \pmod p \Rightarrow a$ обратим, противоречие. ∎

Утверждение 20.1. *Любая конечная подгруппа мультипликативной группы поля является циклической.*

Доказательство. Пусть F — поле, $A \leqslant F^{\times}$ — конечная подгруппа, $m = \exp(A)$. Тогда $\forall a \in A$: $a^m = 1$. Но уравнение $x^m - 1 = 0$ имеет над полем $\leqslant m$ корней $\Rightarrow |A| \leqslant m$. С другой стороны, $|A| \,\vdots\, m \Rightarrow m = |A| \Leftrightarrow A$ — циклическая. ∎

Следствие. *Если поле F конечно, то $F^{\times}$ — циклическая.*

Теорема (Ваддербёрн). *Всякое конечное тело является полем.*

Список литературы

[1] Алексеев В.Б. *Теорема Абеля в задачах и решениях*: МЦНМО, 2024.

[2] Артин Э. *Теория Галуа*: МЦНМО, 2004.

[3] Атья М., Макдональд И. *Введение в коммутативную алгебру*: МЦНМО, 2021.

[4] Верещагин Н.К., Шень А. *Лекции по математической логике и теории алгоритмов. Часть 1. Начала теории множеств*: МЦНМО, 2024.

[5] Винберг Э.Б. *Курс алгебры*: МЦНМО, 2019.

[6] Кострикин А.И. *Введение в алгебру*: МЦНМО, 2020.

[7] Курош А.Г. *Курс высшей алгебры*: Лань, 2007.

[8] Линдон Р., Шупп П. *Комбинаторная теория групп*: Мир, 1980.

[9] Маклейн С. *Категории для работающего математика*: Физматлит, 2004.

[10] Авдеев Р.С. *Алгебра*

[11] Аржанцев И.В. *Алгебра. Часть 1*

[12] Аржанцев И.В. *Алгебра. Часть 2*

[13] Аржанцев И.В. *Алгебра. Часть 3*

[14] Аржанцев И.В. *Конечные поля*

[15] Брагилевский В.Н. и др. *Теория категорий*

[16] Савватеев А.В. *Геометрия и группы*

[17] Савватеев А.В. *Конечные поля*

[18] Савватеев А.В. *Теория Галуа*

[19] *Элементарное введение в теорию групп (для физиков)*