Independencia Condicional

Definición

Dos sucesos A y B son **condicionalmente independientes si para cualquier suceso** C con P(C)>0

$$P(A\cap B|C)=P(A|C)P(B|C) \qquad (1)$$

Si recordamos la definición de probabilidad condicional,

$P(A|B)=P(A\cap B)/P(B)$, si $P(B)>0$.

Si condicionamos la anterior probabilidad sobre C, obtenemos
$P(A|B\cap C)=P(A\cap B|C)/P(B|C)$ si $P(B|C),P(C)\neq 0$, puesto que

$$P(A|B\cap C)=\frac{P(A\cap(B\cap C))}{P(B\cap C)}=\frac{P(A\cap B/C)P(C)}{P(C)P(B/C)}=\frac{P(A\cap B|C)}{P(B|C)}\ si\, P(B|C),P(C)\neq 0.$$

Por tanto, si A y B son condicionalmente independientes dado C, tenemos

$$P(A|B\cap C)=\frac{P(A\cap(B\cap C))}{P(B\cap C)}=\frac{P(A\cap B/C)P(C)}{P(C)P(B/C)}=\frac{P(A\cap B|C)}{P(B|C)}$$
$$=\frac{P(A/C)P(B|C)}{P(B|C)}=P(A/C)$$

Entonces si A y B son condicionalmente independientes dado C, tenemos que

$$P(A|B\cap C)=P(A|C) \quad o \quad P(B|A\cap C)=P(B|C) \qquad (2)$$

De las ecuaciones (1) y (2) deducimos que son definiciones similares de independencia condicional

---

Ejemplo

Una caja contiene dos monedas: una moneda normal y una falsa de dos caras, en cuyo caso la probabilidad de cara H es P (H) = 1. Elegimos una moneda al azar y la lanzamos dos veces. Definimos los siguientes sucesos.

- A = Primer lanzamiento de la moneda resulta ser una cara H.
- B = El segundo lanzamiento de moneda resulta ser una cara H.
- C = Se ha seleccionado la moneda normal.

Calcule $P(A|C),P(B|C),P(A\cap B|C),P(A),P(B)$, y $P(A\cap B)$. Obsérvese que A y B No son independientes, pero si son condicionalmente independientes dado C y dado C^c.

Solución

Tenemos que $P(A|C)=P(B|C)=1/2$. Además, dado que se selecciona la moneda normal, tenemos $P(A\cap B|C) = (1/2)(1/2) = 1/4$, al ser condicionalmente independientes. Para encontrar $P(A)$, $P(B)$ y $P(A\cap B)$, usamos el teorema de la probabilidad total:

$$P(A) = P(A|C)P(C)+P(A|C^c)P(C^c)=1/2.1/2+1.1/2=3/4$$

De forma similar, $P(B)=3/4$. Para $P(A\cap B)$, tenemos

$P(A\cap B)=P(A\cap B|C)P(C)+P(A\cap B|C^c)P(C^c)= P(A|C)P(B|C)P(C)+P(A|C^c)P(B|C^c)P(C^c)$

(por la independencia condicional de A y B con respecto a C y a C^c) $=1/2.1/2.1/2+1\cdot 1\cdot 1/2=5/8$

la independencia condicional de A y B con respecto a C^c, se justifica dado que $P(A\cap B|C^c)=1$ y $P(A|C^c)=1$, $P(B|C^c)=1$

Como podemos ver $P(A\cap B)=5/8\neq P(A)P(B)=9/16$, lo cual significa que A y B no son independientes.

Esto se puede justificar intuitivamente. Por ejemplo, si sabemos que ha ocurrido el suceso A (es decir, el primer lanzamiento de la moneda ha resultado cara), podríamos adivinar que es más probable que hayamos elegido la moneda con dos caras que la moneda con una sola cara. Esto a su vez aumenta la probabilidad condicionada de que ocurra B. Esto sugiere que A y B no son independientes. Por otra parte, dado C (la moneda con una sola cara está seleccionada), A y B son independientes, lo mismo ocurre si elegimos la moneda falsa con dos caras.

Una lección importante aquí es que, en términos generales, la independencia condicional no implica (ni está implícita) por la independencia de sucesos. Así, podemos tener dos eventos que son condicionalmente independientes, pero no son incondicionalmente independientes (como A y B).

Además, podemos tener dos sucesos que son independientes, pero no condicionalmente independientes, dado un suceso C. Ponemos un ejemplo sencillo con respecto a este caso. Considere el lanzamiento de un dado y sean $A=\{1,2\}$, $B=\{2,4,6\}$, $C=\{1,4\}$.

Entonces tenemos

$P(A)=1/3, P(B)=1/2$; $P(A\cap B)=1/6=P(A)P(B)$. Así, A y B son independientes.

Pero tenemos

$P(A|C)= P(A\cap C)/P(C)=(1/6)/(1/3)=1/2$, $P(B|C)=P(B\cap C)/P(C)=(1/6)/(1/3)==1/2$; y $P(A\cap B|C)=P(\{2\}|C)=0$.

Entonces $P(A\cap B|C)\neq P(A|C)P(B|C)$,

Lo que significa que A y B no son condicionalmente independientes dado C.