Redes Bayesianas y razonamiento probabilístico ingenuo

Una red Bayesiana B se define como un par B = (G, P), donde G = (V(G), A(G)) es un grafo acíclico directo con un conjunto de vértices (o nodos) V(G) = {X1, . . . , Xn} y arcos $A(G) \subseteq V(G)\times V(G)$, y una distribución de probabilidad conjunta definida sobre las variables correspondientes a los vértices V(G), definida como sigue

$$P(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} P(X_i \mid \pi(X_i))$$

donde $\pi(X_i)$ representa el conjunto de padres (ancestros directos) de X_i. Una definición más precisa de la distribución de probabilidad conjunta de una red Bayesiana, es: Sea $X_{V(G)}$ el conjunto de variables aleatorias correspondientes a los vértices de G, donde $V(G)=\{v_1, \ldots, v_n\}$ son los vértices asociados. La distribución conjunta de probabilidad, P, se define en la forma:

$$P\left(X_{V(G)}\right) = \prod_{v\in V(G)} P\left(Xv \mid X_{\pi(v)}\right)$$

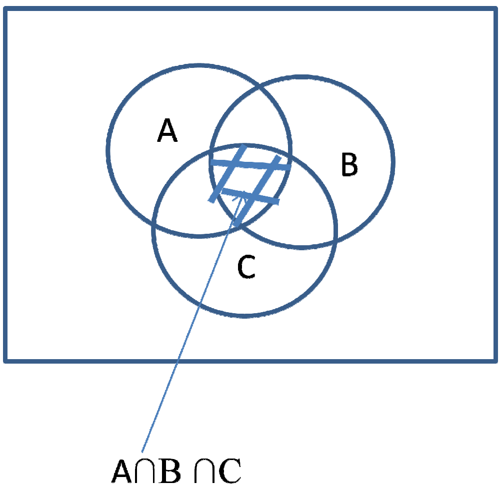
donde $X_{\pi(v)}$ que se corresponden con los padres del vértice $v\in V(G)$. Sin embargo aunque es una definición más formal, esta es más difícil de entender.

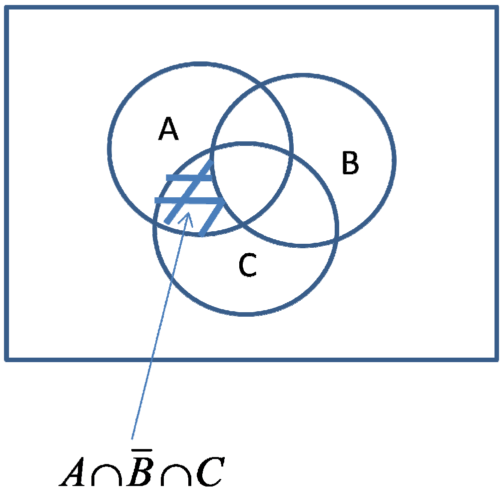
Proposición previa.- Probar que si dos sucesos A y B son condicionalmente independientes a otro C. Entonces los sucesos A y $\bar{B}$ también lo son.

Demostración.-

Si A y B son condicionalmente independientes de C, entonces

$$P(A\cap B / C) = \frac{P(A\cap B\cap C)}{P(C)} = P(A/C)\,P(B/C) = \frac{P(A\cap C)}{P(C)}\frac{P(B\cap C)}{P(C)} \qquad (1)$$





De las figuras se desprende que

$$A\cap C = (A\cap B\cap C)\cup(A\cap\bar{B}\cap C) \text{ y por tanto}$$
$$P(A\cap C) = P(A\cap B\cap C) + P(A\cap\bar{B}\cap C) \qquad (2)$$

Además

$$P(A \cap C) = P(C)P(A/C)$$

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{P(A \cap C)P(B \cap C)}{P(C)}$$, esto se verifica utilizando la ecuación (1)

$$P(A \cap \bar{B} \cap C) = \mathrm{P(C)}\,\mathrm{P}((A \cap \bar{B})/C)$$

Sustituyendo estas identidades en (2) tenemos

$$P(C)P(A/C) = \frac{P(A \cap C)P(B \cap C)}{P(C)} + \mathrm{P(C)}\,\mathrm{P}((A \cap \bar{B})/C)$$

dividiendo por P(C) y despejando $\mathrm{P}((A \cap \bar{B})/C)$

$$\mathrm{P}((A \cap \bar{B})/C) = \mathrm{P(A/C)} - P((A \cap B)/C)$$

de nuevo en la parte derecha de esta identidad hemos utilizado la ecuación (1)

$$\mathrm{P}((A \cap \bar{B})/C) = \mathrm{P(A/C)} - P\mathrm{(A/C)}\,\mathrm{P(B/C)} = \mathrm{P(A/C)}(1 - \mathrm{P(B/C)})$$

$$\mathrm{P}((A \cap \bar{B})/C) = \mathrm{P(A/C)}P(\bar{B}/C)$$

como queríamos probar

Ejercicio 1

Considere la red Naive Bayes dada en la Figura 1. a) Dada la evidencia: ε = {*temp* > 37,5}, calcular la probabilidad de tener gripe (*flu*) utilizando la regla de Bayes i. e., P(*flu* | *temp* > 37,5). b) Calular la probabilidad de que el paciente tenga mialgia, pero no fiebre, una temperatura superior a 37,5 y gripe

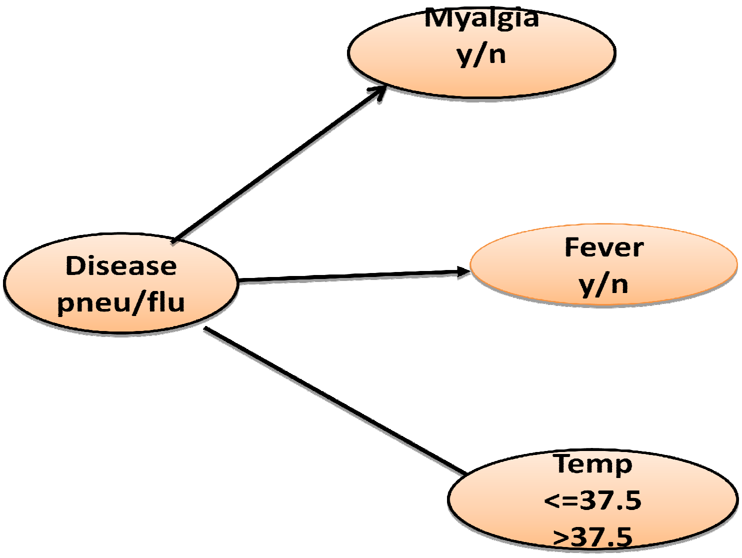


Figura 1: Red. Naive Bayes

Disease pneu/flu (Enfermedad neumonía/gripe) Myalgia y/n (Dolor muscular si/no) Fever y/n (Fiebre si/no) Temp ≤ 37,5/ > 37,5 (Temperatura corporal ≤ 37,5/ > 37,5)

P(mialgia | flu) = 0,96; P(mialgia | pneu) = 0,28;

P(fever | flu) = 0,88; P(fever | pneu) = 0,82;

P(Temp ≤ 37,5 | flu) = 0,20; P(Temp ≤ 37,5 | pneu) = 0,26

P(flu) = 0,67; P(pneu) = 0,33

Solución.- a)

$$P(flu/temp>37,5)=\frac{P(flu\cap temp>37,5)}{P(temp>37,5)}=\frac{P(flu)P(temp>37,5/flu)}{P(temp>37,5)}=$$

$$=\frac{0,67*0,8}{0,33*0,74+0,67*0,8}=\frac{0,536}{0,7313}=0,733$$

$$P(temp>37,5)=P((temp>37,5)\cap(pneu\cup flu))=$$

$$=P((temp>37,5)\cap pneu)+((temp>37,5)\cap flu))=$$

$$=P(pneu)\mathrm{P}((temp>37,5)/pneu)+P(flu)P((temp>37,5)/flu))=$$

$$=0,33*0,74+0,67*0,8=0,7802$$

b) P(Mialgia,No fiebre, Temp>37,5, flu)=

=P(flu)*P(Mialgia,No fiebre, Temp>37,5/ flu)

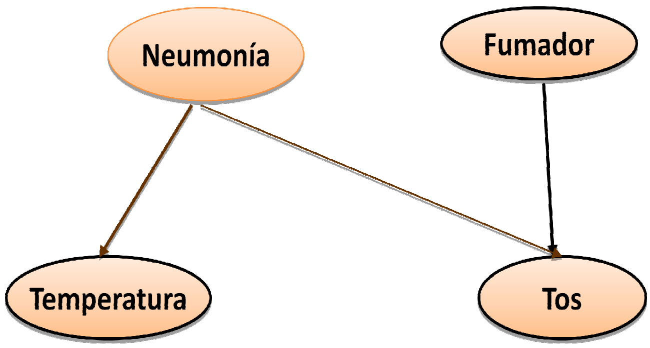
=P(flu)*P(Mialgia/flu)*P(NoFiebre/flu)*P(Temp>37,5/flu)=

=0,67*0,96*0,12*0,8=0,062

Puesto que Mialgia, Fiebre y Temperatura son condicionalmente independientes dado que tiene Gripe

Ejercicio 2.-

Considere la siguiente red Bayesiana



y las siguientes tablas probabilísticas

Neumonía (N)	
Verdadero	P(N)=0,1
Falso	P($\bar{N}$)=0,9

	Temperatura (TE)	
Neumonia	Si	No
Si	P(N/TE)= 0,9	P(N/ $\overline{TE}$)= 0,1
No	P($\bar{N}$ /TE)= 0,1	P($\bar{N}$ / $\overline{TE}$)= 0,9

Fumador (F)	
Si	P(F)=0,2

No	P($\overline{F}$)=0,8

		Tos (T)	
Neumonía (N)	Fumador (F)	Verdadero	Falso
Verdadero	Si	P(T/F∩N)=0,95	P($\overline{T}$ /F∩N)=0,05
Verdadero	No	P(T/ $\overline{F}$ ∩N)=0,80	P($\overline{T}$ / $\overline{F}$ ∩N)=0,20
Falso	Si	P(T/ $F \cap \overline{N}$)=0,60	P($\overline{T}$ / $F \cap \overline{N}$)=0,40
Falso	No	P(T/ $\overline{F} \cap \overline{N}$)=0,05	P($\overline{T}$ / $\overline{F} \cap \overline{N}$)=0,95

Aqui TE y T son condicionalmente independientes dado N, , esto es, P(TE∩T/N)= P(TE/N)P(T/N)

También son independientes N y F

a) Calcular P(Tos | Fumador y Neumonía)

En la última tabla tenemos el valor P(T/F∩N)=0,95

b) P (Fumador | Tos)

$$P(F/T)=\frac{P(F\cap T)}{P(T)}=\frac{P(F)P(T/F)}{P(T)}=\frac{0,2*0,6255}{0,227}=\frac{0,127}{0,227}=0,56$$

$$P(T/F)=\frac{P(T\cap F\cap(N\cup\overline{N}))}{P(F)}=\frac{P(N)\,\mathrm{P(F)}P(T/F\cap N)+P(\overline{N})\,\mathrm{P(F)}P(T/F\cap\overline{N})}{P(F)}$$

P(T/F)=0,1*0,95+0,9*0,6=0,6255

$$P(T)=P(T\cap\left[(\mathrm{N}\cap\mathrm{F})\cup(\mathrm{N}\cap\overline{\mathrm{F}})\cup(\overline{\mathrm{N}}\cap\mathrm{F})\cup(\overline{\mathrm{N}}\cap\overline{\mathrm{F}})\right])=$$

$$=\mathrm{P(N\cap F)\,P(T/\,N\cap F)+P(N\cap\overline{F})\,P(T/\,N\cap\overline{F})}+$$

$$+\mathrm{P(\overline{N}\cap F)\,P(T/\,\overline{N}\cap F)+P(\overline{N}\cap\overline{F})\,P(T/\,\overline{N}\cap\overline{F})}=$$

$$=\mathrm{P(N)\,P(F)\,P(T/\,N\cap F)+P(N)\,P(\overline{F})\,P(T/\,N\cap\overline{F})}+$$

$$+\mathrm{P(\overline{N})\,P(F)\,P(T/\,\overline{N}\cap F)+P(\overline{N})\,P(\overline{F})\,P(T/\,\overline{N}\cap\overline{F})}=$$

$$=0.95*0,1*0,2+0,8*0,1*0,8+0,6*0,9*0,2+0,05*0,9*0,8=0,227$$

Aquí hemos tenido en cuenta que los sucesos F y N son independientes y por tanto lo son F y $\overline{N}$, $\overline{F}$ y N, y , $\overline{F}$ y $\overline{N}$

c) Calcular P(Neumonía | Tos)

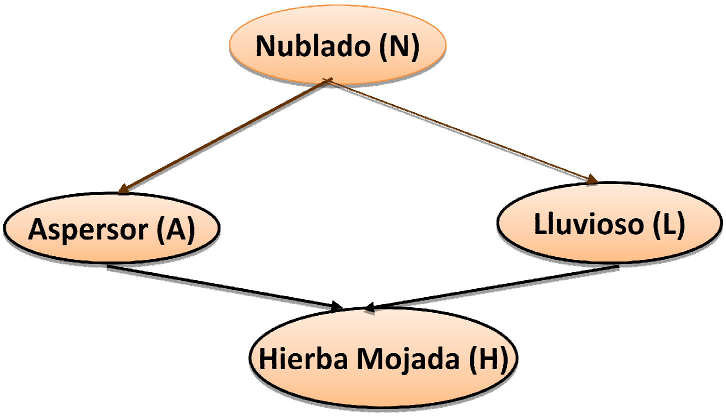
$$P(\mathrm{N}/T)=\frac{P(\mathrm{N}\cap T)}{P(T)}=\frac{P(\mathrm{N})P(T/\mathrm{N})}{P(T)}=\frac{0,9*0,972}{0,227}=\frac{0,83}{0,227}=0,37$$

$$P(T/\mathrm{N})=\frac{P((T\cap\mathrm{N})\cap(\mathrm{F}\cup\overline{F}))}{P(N)}=\frac{P(N)\,\mathrm{P(F)}P(T/F\cap N)+P(N)\,\mathrm{P(\overline{F})}P(T/F\cap\overline{N})}{P(N)}=$$

$$=\mathrm{P(F)}P(T/F\cap N)+\mathrm{P(\overline{F})}P(T/F\cap\overline{N})=0.95*0.2+0.8*0.8=0.972$$

Ejercicio 3.-

Considere la siguiente red Bayesiana



y las tablas probabilísticas asociadas son

P(N)=0,5

N	
veradero	P(A|N)= 0,10
falso	P(A| $\bar{N}$)= 0,80

N	
veradero	P(L|N)= 0,80
falso	P(L| $\bar{N}$)= 0,30

A	L	
Verdadero	Verdadero	P(H|A,L)= 0,99
Verdadero	Falso	P(H|A, $\bar{L}$)= 0,90
Falso	Verdadero	P(H| $\bar{A}$,L)= 0,90
Falso	Falso	P(H| $\bar{A}$, $\bar{L}$)= 0,01

a) Calcular $P(N,\mathrm{L},\bar{\mathrm{A}},\mathrm{H})$ Aquí tenemos que hacer las hipótesis de que A y L son independientes dado N, luego $\mathrm{P}(\mathrm{L}\cap\bar{\mathrm{A}}/\mathrm{N})=\mathrm{P}(\mathrm{L}/\mathrm{N})\,\mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}}/\mathrm{N})$

$P(N,\mathrm{L},\bar{\mathrm{A}},\mathrm{H})=\mathrm{P(N)}\ \ \mathrm{P}((\mathrm{L}\cap\bar{\mathrm{A}}\cap\mathrm{H})/\mathrm{N})=\mathrm{P(N)P}((\mathrm{L}\cap\bar{\mathrm{A}})/\mathrm{N})\,\mathrm{P}(\mathrm{H}/\mathrm{L}\cap\bar{\mathrm{A}})=$

$P(N)\,\mathrm{P}(\mathrm{L}/\mathrm{N})\,\mathrm{P}(\bar{\mathrm{A}}/\mathrm{N})\,\mathrm{P}(\mathrm{H}/\mathrm{L}\cap\bar{\mathrm{A}})=0,5*0,8*(1-0,1)*0,9=0,324$

b) Supongamos que observamos que está nublado y lloviendo. Cuál es la probabilidad de que la hierba esté húmeda

Los sucesos L y A son condicionalmente independientes dado N, esto es $P((L\cap A)/N)=P(L/N)P(A/\mathrm{N})$

$$P((H \mid N \cap L) = \frac{P((H \cap N \cap \mathrm{L}) \cap (A \cup \bar{A}))}{P(N \cap L)} = \frac{P(H \cap N \cap \mathrm{L} \cap A) + P(H \cap N \cap \mathrm{L} \cap \bar{A}))}{P(N)P(L/N)} =$$

$$= \frac{P(N)P(L/N)P(A/\mathrm{N})P(H \mid (\mathrm{L} \cap A)) + P(N)P(L/N)P(\bar{A}/\mathrm{N})P(H \mid (\mathrm{L} \cap \bar{A}))}{P(N)P(L/N)} =$$

$$= P(A/\mathrm{N})P(H \mid (\mathrm{L} \cap A)) + P(\bar{A}/\mathrm{N})P(H \mid (\mathrm{L} \cap \bar{A})$$

pero como

$$P(A/\mathrm{N}) = 0{,}1 \quad \text{y} \quad P(\bar{A}/\mathrm{N}) = 0{,}9$$

$$P\left(H \mid N \cap L\right) = 0{,}99 * 0{,}1 + 0{,}9 * 0{,}9 = 0{,}909$$

c) Supongamos que observamos que el aspersor esta encendido y la hierba húmeda. Cuál es la probabilidad de que esté lloviendo?

$$P\left(L / \mathrm{A} \cap H\right) = \frac{P(\mathrm{L} \cap \mathrm{A} \cap \mathrm{H})}{P(A \cap H)}$$

$$P(\mathrm{L} \cap \mathrm{A} \cap \mathrm{H}) = P(\mathrm{L} \cap \mathrm{A} \cap \mathrm{H} \cap (\mathrm{N} \cup \bar{\mathrm{N}})) = P(\mathrm{L} \cap \mathrm{A} \cap \mathrm{H} \cap \mathrm{N}) + P(\mathrm{L} \cap \mathrm{A} \cap \mathrm{H} \cap \bar{\mathrm{N}}) =$$

$$= \mathrm{P(N)\,P(L/\,N)\,P(A/\,N)\,P(H/\,L \cap A)} + \mathrm{P(\bar{N})\,P(L/\,\bar{N})\,P(A/\,\bar{N})\,P(H/\,L \cap A)} =$$

$$0{,}8 * 0{,}1 * 0{,}99 * 0{,}5 + 0{,}2 * 0{,}5 * 0{,}99 * 0{,}5 = 0{,}089$$

para el denominador tenemos

$$P(A \cap H) = P(A \cap H) \cap \left[(L \cap N) \cup (\bar{L} \cap N) \cup (L \cap \bar{N}) \cup (\bar{L} \cap \bar{N})\right]) =$$

$$P(A \cap H \cap L \cap N) + P(A \cap H \cap \bar{L} \cap N) + P(A \cap H \cap L \cap \bar{N}) + P(A \cap H \cap \bar{L} \cap \bar{N}) =$$

$$= \mathrm{P(N)\,P(L/\,N)\,P(A/\,N)\,P(H/\,L \cap A)} + \mathrm{P(N)\,P(\bar{L}/\,N)\,P(A/\,N)\,P(H/\,\bar{L} \cap A)} +$$

$$+ \mathrm{P(\bar{N})\,P(L/\,\bar{N})\,P(A/\,\bar{N})\,P(H/\,L \cap A)} + \mathrm{P(\bar{N})\,P(\bar{L}/\,\bar{N})\,P(A/\,\bar{N})\,P(H/\,\bar{L} \cap A)}$$

$$= 0{,}1 * 0{,}99 * 0{,}8 * 0{,}5 + 0{,}5 * 0{,}99 * 0{,}2 * 0{,}5 + 0{,}1 * 0{,}9 * 0{,}2 * 0{,}5 + 0{,}5 * 0{,}9 * 0{,}8 * 0{,}5 = 0{,}278$$

Luego el resultado final es

$$P\left(L / A \cap H\right) = \frac{P(\mathrm{L} \cap \mathrm{A} \cap \mathrm{H})}{P(A \cap H)} = \frac{0{,}089}{0{,}278} = 0{,}320$$

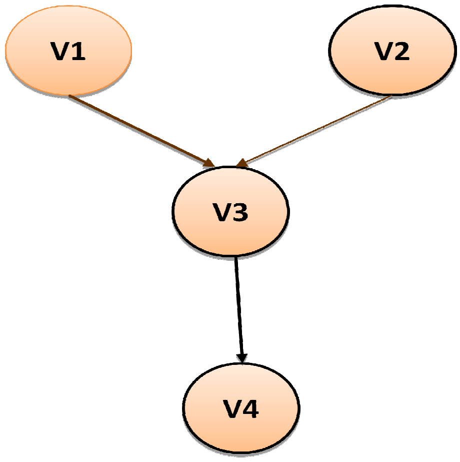
d) Supongamos que observamos que la hierba esta mojada y que está lloviendo. Cuál es probabilidad de que el cielo este Nublado?

P(N|H,L)=P(N|L), puesto que N es condicionalmente independiente de H dado L. También N es condicionalmente independiente de H dado A

$$P\left(N \mid H, L\right) = \frac{P\left(N \cap H \cap L\right)}{P(H \cap L)} = \frac{P(L)P((N \cap H)/L)}{P(H \cap L)} = \frac{P(L)P(N/L)P(H/L)}{P(L)P(H/L)} = P(N/L)$$

$$P\left(N \mid L\right) = \frac{P(N)P(L/N)}{P(L)} = \frac{0{,}5 * 0{,}8}{P(N)P(L/N) + P(\bar{N})P(L/\bar{N})} = \frac{0{,}5 * 0{,}8}{0{,}5 * 0{,}8 + 0{,}2 * 0{,}5} = 0{,}8$$

Ejercicio 4.- Considere la Figura.



a. Defina una distribución de probabilidad para esta red Bayesiana B.

Solución

$P(V_1)$, $P(\overline{V}_1)$; $P(V_2)$; $P(\overline{V}_2)$

$P(V_3/V_1,V_2)$ $P(V_3/\overline{V}_1,V_2)$ $P(V_3/V_1,\overline{V}_2)$ $P(V_3/\overline{V}_1,\overline{V}_2)$

$P(V_4/V_3)$; $P(V_4/\overline{V}_3)$

V_1 y V_2 son independientes. V_4 es condicionalmente independiente de V_1 dado V_3 y de V_2 dado V_3

b. Calcule la distribución de probabilidad marginal de $P(V_4)$.

$$P(V_4) = P(V_4 \cap (V_3 \cup \overline{V}_3)) = \mathrm{P}(\mathrm{V}_3)\mathrm{P}(\mathrm{V}_4/\mathrm{V}_3) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{V}}_3)\mathrm{P}(\mathrm{V}_4/\overline{\mathrm{V}}_3)$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{V}_3) = P(V_3 \cap \left[(V_1 \cap V_2) \cup (\overline{V}_1 \cap V_2) \cup (V_1 \cap \overline{V}_2) \cup (\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2)\right]) =$$

$$= P(V_1 \cap V_2)P(V_3 / V_1 \cap V_2) + P(\overline{V}_1 \cap V_2)P(V_3 / \overline{V}_1 \cap V_2) +$$

$$+P(V_1 \cap \overline{V}_2)P(V_3 / V_1 \cap \overline{V}_2) + P(\overline{V}_1 \cap \overline{V}_2)P(V_3 / \overline{V}_1 \cap \overline{V}_2)$$

Y teniendo en cuenta que V_1 y V_2 son sucesos independientes $P(V_1 \cap V_2)=P(V_1)P(V_2)$ y así sucesivamente, de forma tal que tenemos todas las probabilidades necesarias para obtener $P(V_4)$

Ejercicio 5

Considere la Figura, la cual muestra una red Bayesiana en la cual hay tres vértices A, B y C que interactúan para causar el efecto sobre D a través de una expresión AND ruidosa. Las siguientes probabilidades han sido especificadas por el diseñador de la red Bayesiana:

$P(D| A) = 0.7$ $P(D | \overline{A}) = 0.9$

$P(D | B) = 0.4$ $P(D | \overline{B}) = 0.8$

$P(D | C) = 0.3$ $P(D | \overline{C}) = 0.3$

$P(A) = 0.4$ $P(B) = 0.7$ $P(C) = 0.8$ $P(E | D) = 0.2$ $P(E | \overline{D}) = 0.6$

Además A, B y C son sucesos independientes y A y E son condicionalmente independientes dado D, B y E condicionalmente independientes dado D y C y E condicionalmente independientes dado D.

a. Calcule P(E)

$$P(E) = P(E \cap (\mathrm{D} \cup \bar{D})) = \mathrm{P(D)\,P(E/\,D)} + \mathrm{P(\bar{D})\,P(E/}\,\bar{D}) = 0,8 * 0,2 + 0,2 * 0,6 = 0,28$$

$$\mathrm{P(D)} = P(D \cap (A \cup B \cup C)) = P(A)P(D\,/\,A) + \mathrm{P(B)\,P(D/\,B)} + \mathrm{P(C)\,P(D/\,C)} =$$

$$= 0,4 * 0,7 + 0,7 * 0.4 + 0,8 * 0,3 = 0,8$$

$$P(\bar{D}) = 0,2$$

b. Calcule P(D| $\bar{E}$).

$$P\left(D\,|\,\bar{E}\right) = \frac{P(D \cap \bar{E})}{P(\bar{E})} = \frac{\mathrm{P(D)\,P(\bar{E}/\,D)}}{1 - P(E)} = \frac{0,8 * (1 - P(E\,/\,D))}{0,72} = \frac{0,8 * 0,8}{0,72}$$

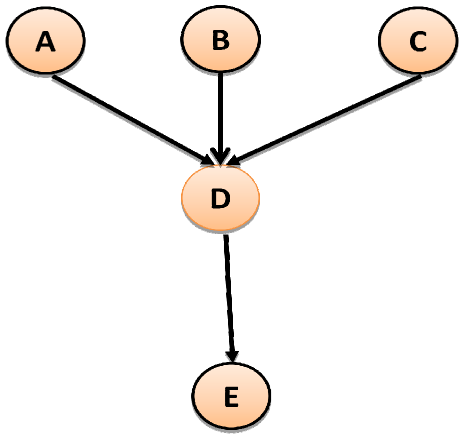
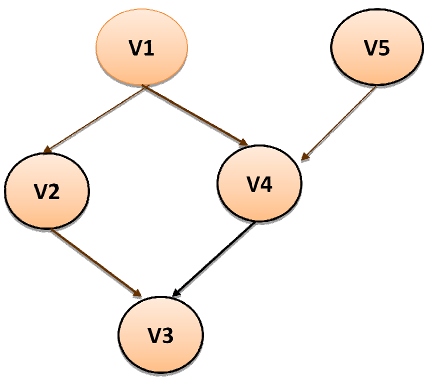


Figura: Red Bayesian

Ejercicio 6.-

Dado el grafo explicar que sucesos se consideran independientes y cuales condicionalmente independientes



Solución

Son independientes V_1 y V_5, así como V_2 y V_4 y V_2 y V_5 $P(V_1 \cap V_5) = P(V_1)P(V_5)$,
$P(V_2 \cap V_4) = P(V_2)P(V_4)$, $P(V_2 \cap V_5) = P(V_2)P(V_5)$

Son condicionalmente independientes V_3 y V_5 con respecto a V_4; V_1 y V_3 con respecto a V_4 y con respecto a V_2, y V_2 y V_4 con respecto a V_1

Suponemos además separación direccional, esto es **independencia condicional**, es decir, se cumple lo siguiente:

$P(V_3 \mid V_4, V_5)= P(V_3 \mid V_4, V_1)= P(V_3 \mid V_4, V_1, V_5)= P(V_3 \mid V_4)$

$P(V_3 \mid V_2, V_1)= P(V_3 \mid V_2)$

$P(V_3 \mid V_2,V_4,V_1)= P(V_3 \mid V_2,V_4,V_5)=P(V_3 \mid V_2,V_4,V_1,V_5)=P(V_3 \mid V_2,V_4)$