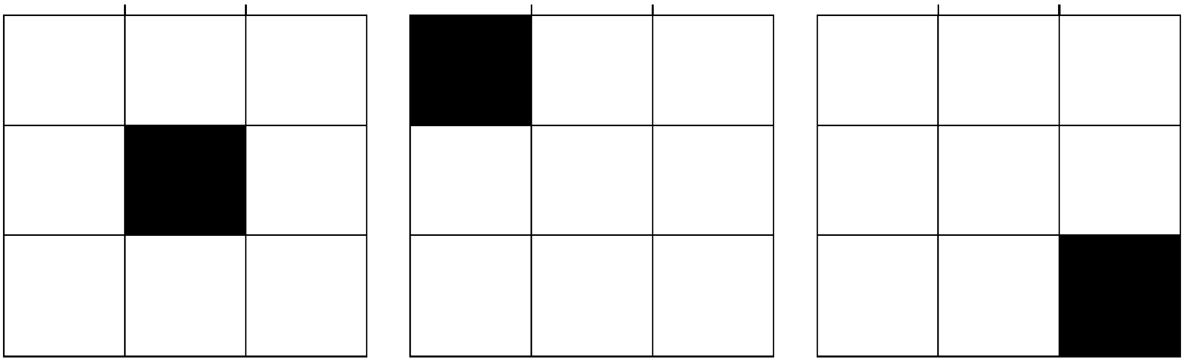
**Ejercicio 1)** Considere los siguientes patrones



a) **(1 punto)** Regla de Hebb. Calcule la correspondiente matriz de pesos de la red de Hopfield usando la regla de Hebb. b) **(0,5 puntos)** Calcule al menos un estado estable de la red anterior e indique. c) **(1 punto)** ¿Cómo se calcula su función de energía?

**Solución.-** a) La codificación se puede hacer por ejemplo en la forma $\mathbf{x_1}=(1, 1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, 1)^T$ , $\mathbf{x_2}=(-1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1)^T$ , $\mathbf{x_3}=(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, -1)^T$, y esto es así porque la codificación se hace mediante unos para los estados activos (blancos) y -1 para los estados no activos (negros)

b) Usando la regla de Hebb los pesos de la red se calculan como $\mathbf{W}=\sum_{i=1}^{3}\mathbf{x_i}\mathbf{x_i^T}-3\mathbf{I}$, de esta forma

$$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_1^{\mathbf{T}}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\-1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ \text{-}1,\ 1,1,1,1)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&-1&1&1&1&1\\1&1&1&1&-1&1&1&1&1\\1&1&1&1&-1&1&1&1&1\\1&1&1&1&-1&1&1&1&1\\-1&-1&-1&-1&1&-1&-1&-1&-1\\1&1&1&1&-1&1&1&1&1\\1&1&1&1&-1&1&1&1&1\\1&1&1&1&-1&1&1&1&1\\1&1&1&1&-1&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2\mathbf{x}_2^{\mathbf{T}}=\begin{pmatrix}-1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\\1\end{pmatrix}(-1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,1,1,1)=\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\-1&1&1&1&1&1&1&1&1\\-1&1&1&1&1&1&1&1&1\\-1&1&1&1&1&1&1&1&1\\-1&1&1&1&1&1&1&1&1\\-1&1&1&1&1&1&1&1&1\\-1&1&1&1&1&1&1&1&1\\-1&1&1&1&1&1&1&1&1\\-1&1&1&1&1&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_3\mathbf{x}_3^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \left(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1\right) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_1^{\mathbf{T}} + \mathbf{x}_2\mathbf{x}_2^{\mathbf{T}} + \mathbf{x}_3\mathbf{x}_3^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{x_1 x_1^T} + \mathbf{x}_2\mathbf{x}_2^{\mathbf{T}} + \mathbf{x}_3\mathbf{x}_3^{\mathbf{T}} - 3\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{W.x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & 3 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & 1 & 3 & 3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 0 & 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 3 & 1 & 3 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 18 \\ 18 \\ 18 \\ 4 \\ 18 \\ 18 \\ 18 \\ 4 \end{pmatrix},$$

luego no cambia de signo y es un estado estable

al no cambiar de signo las componentes del vector, la función de energía permanece estable

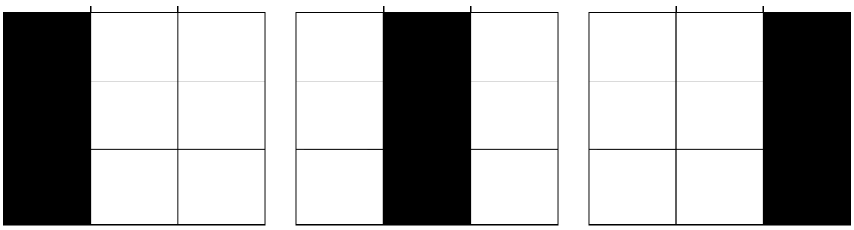
$$E(t) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} w_{ij} s_i s_j + \sum_i s_i \Theta_i$$

El vector x está caracterizado por todos blancos, esto es, todas las unidades están activadas. Así, $s_i$ es +1 para todo i y siempre será en este caso $\sum_j w_{\mathrm{ij}} s_j > \Theta_i$ entonces $s_i$ sigue siendo +1, para todo i. Si suponemos que $\Theta$= 0, entonces

$$E(t) = -\frac{1}{2}\sum_{i,j} w_{ij} s_i s_j = -\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{9}\sum_{j=1}^{9} w_{ij} = -\frac{1}{2}(w_{11} + ... + w_{99}) =$$

$$= -\frac{1}{2}(4+18+18+18+4+18+18+18+4) = -60$$

**Ejercicio 2.-** Considere los siguientes patrones



a) **(0,5 puntos)** ¿Cómo se codifican para que puedan ser almacenados en una red de Hopfiel? b) **(1 punto)** Regla de Hebb. Calcule la correspondiente matriz de pesos de la red de Hopfield usando la regla de Hebb. c) **(0,5 puntos)** ¿Que es un punto fijo de una red? Calcule al menos un punto fijo de la red anterior.

**Sol.-** a) La codificación se puede hacer por ejemplo en la forma $\mathbf{x_1}=(1, 1, 1, -1, -1, -1, -1, -1, -1)^T$ , $\mathbf{x_2}=(-1, -1, -1, 1, 1, 1, -1, -1, -1)^T$ , $\mathbf{x_3}=(-1, -1, -1, -1, -1, -1, 1, 1, 1)^T$, y esto es así porque la codificación se hace mediante unos para los estados activos y -1 para los estados no activos

b) Usando la regla de Hebb los pesos de la red se calculan como $\mathbf{W}=\sum_{i=1}^{3}\mathbf{x_i}\mathbf{x_i^T}-3\mathbf{I}$, de esta forma

$$\mathbf{x}_1\mathbf{x}_1^{\mathbf{T}}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\-1\\-1\\-1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\left(1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ -1,-1,-1,-1\right)=\begin{pmatrix}1&1&1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\1&1&1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\1&1&1&-1&-1&-1&-1&-1&-1\\-1&-1&-1&1&1&1&1&1&1\\-1&-1&-1&1&1&1&1&1&1\\-1&-1&-1&1&1&1&1&1&1\\-1&-1&-1&1&1&1&1&1&1\\-1&-1&-1&1&1&1&1&1&1\\-1&-1&-1&1&1&1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_2\mathbf{x}_2^{\mathbf{T}}=\begin{pmatrix}-1\\-1\\-1\\1\\1\\1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\left(-1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,-1,-1,-1\right)=\begin{pmatrix}1&1&1&-1&-1&-1&1&1&1\\1&1&1&-1&-1&-1&1&1&1\\1&1&1&-1&-1&-1&1&1&1\\-1&-1&-1&1&1&1&-1&-1&-1\\-1&-1&-1&1&1&1&-1&-1&-1\\-1&-1&-1&1&1&1&-1&-1&-1\\1&1&1&-1&-1&-1&1&1&1\\1&1&1&-1&-1&-1&1&1&1\\1&1&1&-1&-1&-1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}_3\mathbf{x}_3^{\mathbf{T}}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\\1\\1\\-1\\-1\\-1\end{pmatrix}\left(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,-1,-1,-1\right)=\begin{pmatrix}1&1&1&1&1&1&-1&-1&-1\\1&1&1&1&1&1&-1&-1&-1\\1&1&1&1&1&1&-1&-1&-1\\1&1&1&1&1&1&-1&-1&-1\\1&1&1&1&1&1&-1&-1&-1\\1&1&1&1&1&1&-1&-1&-1\\-1&-1&-1&-1&-1&-1&1&1&1\\-1&-1&-1&-1&-1&-1&1&1&1\\-1&-1&-1&-1&-1&-1&1&1&1\end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x_1 x_1^T} + \mathbf{x}_2\mathbf{x}_2^{\mathbf{T}} + \mathbf{x}_3\mathbf{x}_3^{\mathbf{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} +$$

$$+\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

y por tanto

$$\mathbf{W} = \mathbf{x_1 x_1^T} + \mathbf{x}_2\mathbf{x}_2^{\mathbf{T}} + \mathbf{x}_3\mathbf{x}_3^{\mathbf{T}} - 3\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

c) Para confirmar que $\mathbf{x_1}$ es un estado estable activamos la red en la forma

$$\mathbf{W.x}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 12 \\ -6 \\ -6 \\ -6 \\ -6 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

como podemos ver se mantiene el signo por lo que no cambian los estados de $\mathbf{x}_1$ y de esta forma $\mathbf{x}_1$ es estable.

**Ejercicio 3.-** Analizar como la siguiente red de Hopfield actualiza su estado.

Siendo la matriz de pesos de la forma

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

y el estado inicial (1,-1,1).

**Solución.-** A continuación, activamos la red en forma síncrona

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Si elegimos una metodología síncrona en la primera iteración, la entrada total a la neurona 1 es -3, y por lo tanto su salida es -1. La entrada total a la neurona 2 es 2, y por lo tanto su salida es 1. la entrada total a la neurona 3 es -3, y por lo tanto su salida es -1. De esta forma pasamos del estado (1,-1,1) al estado (-1,1,-1).

En la segunda iteración activamos la red de nuevo en la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Ahora, la entrada total a la neurona 1 es 3, y por lo tanto su salida es 1. La entrada total a la neurona 2 es -2, y por lo tanto su salida es -1. la entrada total a la neurona 3 es 3, y por lo tanto su salida es 1. De esta forma pasamos del estado (-1,1,-1) al estado (1,-1,1). De esta forma tenemos un bucle entre ambos estados, ninguno de ellos estable.

**Ejercicio 4.-** Analice porque la simetría de la matriz de pesos es importante para la convergencia. a) Considere una red de Hopfield de 2 neuronas con la matriz de pesos

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Examine si la red converge o no si el estado inicial es v = $(1, -1)^T$

b) Establezca ahora como matriz de pesos

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Hacer todos los pasos anteriores de nuevo. ¿La red alcanza un estado estable?

**Solución.-**

a) Activamos la red en la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

De esta forma pasamos del estado v = $(1, -1)^T$ al estado v´ = $(-1, -1)^T$. Si seguimos activando la red tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

por lo que no hay ningún estado estable

b) Activamos la red en la forma

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

De esta forma pasamos del estado v = $(1, -1)^T$ al estado v´ = $(-1, 1)^T$. Si seguimos activando la red tenemos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

por lo que tenemos un bucle entre ambos estados, pero ninguno de los dos es estable.

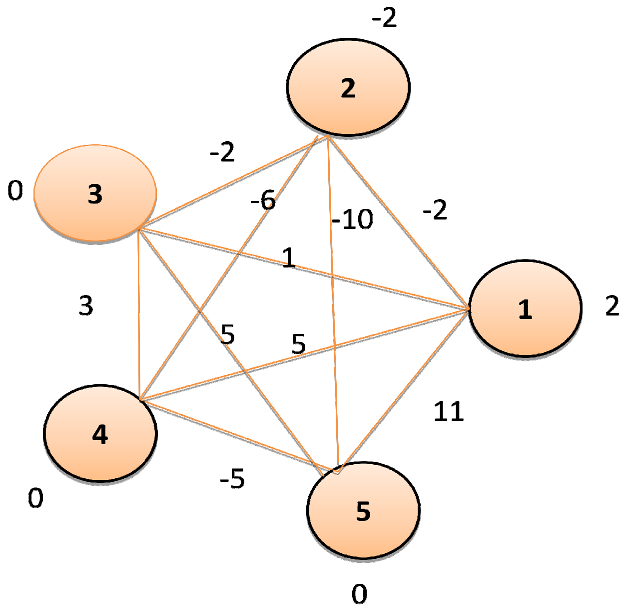
En cambio si suponemos que el estado inicial es v = (1, 1)T

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, entonces este estado si es un estado estable y de la misma forma como $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, también el estado v = $(-1,- 1)^T$ es estable

**Ejercicio 5.-**

a) ¿Se puede almacenar el vector (1, 0, -1, 0, 1) en una red de Hopfield de 5 neuronas? Si es así, ¿cuáles son los pesos para una red con ese vector almacenado en ella? Si no es así, ¿por qué no?

b) Considere la red de Hopfield dada a continuación. Calcule los pesos correspondientes de la matriz, de forma tal que el peso $w_{ij}$ esté en la columna i y en la fila j. Anote el vector de umbrales $\theta$, de forma tal que el elemento $\theta_i$ sea el sesgo de la neurona i.




c) Encuentre uno o más estados estables de la red dada.

d) Considere la matriz de pesos **W** y el vector umbral **θ**. Comenzando con el estado inicial **v**, calcule el flujo de estados de la red de Hopfield hacia el estado estable mediante actualizaciones asíncronas.

$$W = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -4 & 3 & 4 & -4 \\ 0 & -4 & 0 & -7 & -6 & -2 \\ 0 & 3 & -7 & 0 & -4 & 3 \\ -4 & 4 & -6 & -4 & 0 & -6 \\ -2 & -4 & -2 & 3 & -6 & 0 \end{pmatrix} \quad \theta = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(E) Comenzando en el mismo estado **v**, calcular el flujo de estados usando actualizaciones síncronas.

**Ejercicio 6.-** Puede el vector de componentes [2, 0, –2, 0, 1] ser almacenado en una red discreta de Hopfield con 5 neuronas? Si es así, ¿cuál sería la matriz de pesos para una red Hopfield con sólo ese vector almacenado en ella? Si no, ¿por qué no?

**Solución**: No. Las componentes de los vectores de una red discreta de Hopfield tienen que ser +1 o –1.

**Ejercicio 7.-** a. Calcule la matriz de pesos para una red Hopfield con los dos vectores [1, -1, 1, -1, 1, 1] y [1, 1, 1, -1, -1, -1] almacenados en la memoria.

b. Confirme que ambos vectores son estados estables de la red.

**Solución**:

El producto exterior de $\mathbf{w_1}$= [1, –1, 1, –1, 1, 1] consigo mismo es

$$\mathbf{w_1^T w_1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

El producto exterior de $\mathbf{w_2}$= [1, 1, 1, –1, –1, –1] consigo mismo es

$$\mathbf{w}_2^{\mathbf{T}}\mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz de pesos W es

$$\mathbf{W} = \frac{1}{6}\mathbf{w_1^T w_1} + \frac{1}{6}\mathbf{w}_2^{\mathbf{T}}\mathbf{w}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tenemos ahora que probar que ambos son estados estables, para ello multiplicamos **W** por el vector $\mathbf{w}_1$ y vemos los signos de cada una de las componentes del vector de salida.

sgn(**W**.$[1, -1, 1, -1, 1, 1]^T$) =sgn((2/3)×$[1, -1, 1, -1, 1, 1]^T$)= [1, –1, 1, –1, 1, 1]), por lo que es un estado estable.
De forma similar sgn(**W**.$[1, 1, 1, -1, -1, -1]^T$) =sgn((2/3)×$[1, 1, 1, -1, -1, -1]^T$)= [1, 1, 1, –1, –1, –1]; por lo que también es estable.

**Ejercicio 8.-** Consideremos la siguiente matriz de pesos **W**.

$$\mathbf{W} = \begin{pmatrix} 0.0 & -0.2 & 0.2 & -0.2 & -0.2 \\ -0.2 & 0.0 & -0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.2 & -0.2 & 0.0 & -0.2 & -0.2 \\ -0.2 & 0.2 & -0.2 & 0.0 & 0.2 \\ -0.2 & 0.2 & -0.2 & 0.2 & 0.0 \end{pmatrix}$$

Empezando en el estado [1, 1, 1, 1, –1], calcular el flujo de estados necesario para llegar a un estado estable utilizando cambios asíncronos.
Empezando en el estado [1, 1, 1, 1, –1], calcular el flujo de estados necesario para llegar a un estado estable utilizando cambios síncronos.

**Solución.-**
**Actualizaciones asíncronas**, a partir de [1, 1, 1, 1, -1]:
**W.** $[1, 1, 1, 1, -1]^T = [0, -0{,}4, 0, -0{,}4, 0]^T$. Por lo tanto ...
Si actualizamos primero a las neuronas 1, 3, o 5, su entrada neta total es 0, por lo que no cambia de estado;
Si actualizamos primero la neurona 2, la entrada neta total es de -0,4, y su valor actual es uno, por lo que cambia de signo a -1, y el nuevo estado es [1, -1, 1, 1, -1]. Lo llamaremos el caso A.
Si actualizamos primero la neurona 4, la entrada neta total es de -0,4, y su valor actual es uno, por lo que cambia de signo a -1, y el nuevo estado es [1, 1, 1, -1, -1]. Lo llamaremos el caso B.
**Caso A:**
**Primer paso.- W**. $[1, -1, 1, 1, -1]^T = [0{,}4, 0, 0{,}4, -0{,}8, 0]^T$. Por lo tanto, si actualizamos primero a las neuronas 1, 2, 3, o 5, no hay cambio de estado. Si actualizamos primero la neurona 4, cambia de signo, y el nuevo estado es [1, -1, 1, -1, -1].
**Segundo paso.-**
**W**. $[1, -1, 1, -1, -1]^T = [0{,}8, -0{,}8, 0{,}8, -0{,}8, -0{,}8]^T$. Así que no importa qué actualizaciones de neuronas hagamos primero, no hay ningún cambio. Este es un estado estable.
**Caso B:**
**W**. $[1, 1, 1, -1, -1]^T = [0, -0{,}8, 0{,}4, -0{,}4, -0{,}4]^T$. Por lo tanto, si actualizamos primero las neuronas 1, 3, 4 o 5, no hay cambio de signo. Si actualizamos primero la neurona 2, cambia de signo, y el nuevo estado es [1, -1, 1, -1, -1].
Este es el mismo estado que se alcanzada en el caso A, y como se ve en el caso A, este es un estado estable.

**Actualizaciones síncronas**, a partir de [1, 1, 1, 1, -1]:
**W.** $[1, 1, 1, 1, -1]^T = [0, -0{,}4, 0, -0{,}4, 0]^T$, por lo que las neuronas 2 y 4 cambian de signo, lo que conlleva a un estado de [1, -1, 1, - 1, -1]. Estado estable por lo visto en el apartado anterior.
**Ejercicio 9.-** Considere la siguiente matriz de pesos **W**:

$$\begin{pmatrix} 0.0 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.0 & -0.1 & 0.1 & 0.1 \\ 0.1 & -0.1 & 0.0 & -0.1 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.0 & 0.1 \\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 & 0.0 \end{pmatrix}$$

a)¿Qué tipo de red implementa? Muestre el grafo de esta red.
c) Comenzando en el (mismo) estado [-1, 1, 1, 1, -1], calcule el siguiente estado usando
b) Comenzando en el estado [-1, 1, 1, 1, -1], calcule el flujo desde este estado al estado estable usando actualizaciones asincrónicas.
actualizaciones síncronas.
d) ¿Cómo se calcula su función de energía?

**Solución.- b) De forma asíncrona**

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.0 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & -0.1\\ -0.1 & 0.0 & -0.1 & 0.1 & 0.1\\ 0.1 & -0.1 & 0.0 & -0.1 & -0.1\\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.0 & 0.1\\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 & 0.0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -0.2 & 0 & 0.2\end{pmatrix}$$, luego se pasa al

$\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

*Actualizamos la* $5^{\text{a}}$ *componente*

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.0 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & -0.1\\ -0.1 & 0.0 & -0.1 & 0.1 & 0.1\\ 0.1 & -0.1 & 0.0 & -0.1 & -0.1\\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.0 & 0.1\\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 & 0.0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.2 & 0.2 & -0.4 & 0.2 & 0.2\end{pmatrix}$$, luego se pasa al

$\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

Actualizamos la $3^{\text{a}}$componente

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.0 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & -0.1\\ -0.1 & 0.0 & -0.1 & 0.1 & 0.1\\ 0.1 & -0.1 & 0.0 & -0.1 & -0.1\\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.0 & 0.1\\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 & 0.0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0.4 & 0.4 & -0.4 & 0.4 & 0.4\end{pmatrix}$$, luego se pasa al

$\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$ y hemos llegado a un estado estable

**c) De forma síncrona tenemos**

$$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0.0 & -0.1 & 0.1 & -0.1 & -0.1\\ -0.1 & 0.0 & -0.1 & 0.1 & 0.1\\ 0.1 & -0.1 & 0.0 & -0.1 & -0.1\\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.0 & 0.1\\ -0.1 & 0.1 & -0.1 & 0.1 & 0.0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & -0.2 & 0 & 0.2\end{pmatrix}$$, luego se pasa al

$\begin{pmatrix}-1 & 1 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$

y de este estado se luego es este un estado estable

**d)** Al no cambiar de signo las componentes del vector

$$E(t)=-\frac{1}{2}\sum_{i,j} w_{ij}s_i s_j+\sum_i s_i\Theta_i$$

El vector x está caracterizado por tener la primera y tercera neuronas inactivas. Si suponemos que Θ=0, entonces $\sum_j w_{\text{ij}}s_j>\Theta_i$

$$E(t)=-\frac{1}{2}\sum_{i,j} w_{ij}s_i s_j=-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{5}\sum_{j=1}^{5} w_{ij}=-\frac{1}{2}(w_{11}+...+w_{55})=$$

$$=-\frac{1}{2}(-0.4+0.4-0.4+0.4+0.4)=-0.2$$