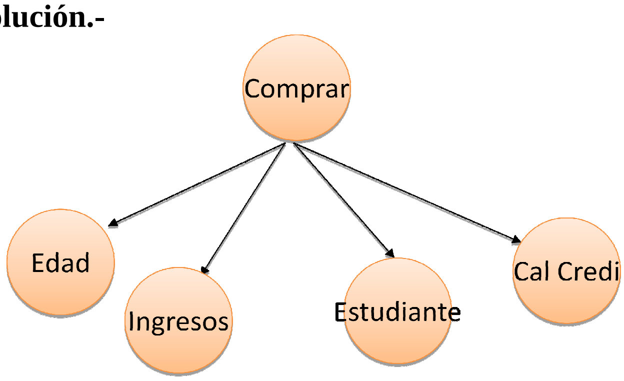
Ejercicio 1.- Dada la información del conjunto de entrenamiento que se muestra en la tabla (Comprar una Computadora). i) Construir el grafo Bayesiano con los eventos Edad, Ingresos, Profesor, Cal Credi y Clases.
ii) ¿Donde se usan las probabilidades condicionalmente independientes?.
iii) Predecir la clase del siguiente ejemplo usando un clasificador Naïve Bayes: edad < = 30, ingresos = medios, profesor = Sí, calificación de crédito= normal

ID	Edad	Ingresos	Profesor	Cal Crédito	Clase/Comprar
1	<=30	altos	No	normal	No
2	<=30	altos	No	excelente	No
3	[31,40]	altos	No	normal	Si
4	>40	medios	No	normal	Si
5	>40	bajos	Si	normal	Si
6	>40	bajos	Si	excelente	No
7	[31,40]	bajos	Si	excelente	No
8	<=30	medios	No	normal	No
9	<=30	bajos	Si	normal	Si
10	>40	medios	Si	normal	Si
11	<=30	medios	Si	excelente	Si
12	[31,40]	medios	No	excelente	Si
13	[31,40]	altos	No	normal	Si
14	>40	medios	No	excelente	No
15	[31,40]	bajos	No	excelente	Si
16	[31,40]	bajos	No	normal	No

Solución.-



a)

b) Los sucesos Edad, Ingresos, Profesor y Calificación de Crédito son condicionalmente independientes dado el suceso Comprar
c) Calculamos la verosimilitud del suceso (Edad<=30, Ingresos = medios, Profesor=Si, Cal Crédito=normal, Comprar=Si)

P(Edad<=30, Ingresos = medios, Profesor=Si, Cal Crédito =normal, Comprar= Si)=
= P(Edad<=30/Comprar=Si)* P(Ingresos = Medios/Comprar=Si)* P(Profesor =Si/Comprar=Si)* P(Cal Crédito =normal/Comprar=Si)* P(Comprar= Si)

Tenemos, utilizando la tabla con los 16 patrones
P(Edad<=30/Comprar=Si)=2/9; P(Ingresos = Medios/Comprar=Si)=4/9
P(Profesor=Si/Comprar=Si)=4/9; P(Cal Crédito =normal/ Comprar=Si)=6/9

P(Comprar=Si)=9/16

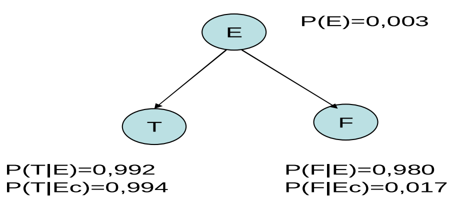
Luego P(Edad<=30, Ingresos = medios, Profesor=Si, Cal Crédito =normal, Comprar=Si)=(2/9)(4/9)(4/9)(6/9)(9/16)=12/729=0,0165

Análogamente
P(Edad<=30, Ingresos = medios, Profesor=Si, Cal Crédito =normal, Comprar=No)=
= P(Edad<=30/Comprar=No)* P(Ingresos = Medios/Comprar=No)* P(Profesor=Si/ Comprar=No) * P(Cal Crédito =normal/Comprar=No)* P(Comprar=No)=
=(3/7)(2/7)(2/7)(3/7)(7/16)=0,0065

P(Comprar=Si/(Edad<=30, Ingresos = medios, Profesor=Si, Cal Crédito=normal))= =0,0165/(0,0165+0,0065)=0,7174
P(Comprar=No/(Edad<=30, Ingresos = medios, Profesor=Si, Cal Crédito=normal))= =0,0065/(0,0165+0,0065)=0,2826

Se deduce que dados los valores establecidos para el nuevo patrón, la clase de salida es Comprar=Si al tener la mayor probabilidad

Ejercicio 2.-
Supongamos que para detectar cierta enfermedad, hacemos un test. Definimos tres variables:
E = presencia de la enfermedad, que toma los valores
E= la persona padece la enfermedad
E^c= la persona no padece la enfermedad
T = resultado del test, que toma los valores
T= el resultado del test es positivo.
T^c= el resultado del test es negativo.
F = presencia de fiebre en el enfermo, que toma los valores
F= el enfermo tiene fiebre.
F^c= el enfermo no tiene fiebre.
Entre las variables establecemos una relación de influencia causal;



Se pide;
a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona cuyo test de positivo padezca la enfermedad?
b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona que no tenga fiebre padezca la enfermedad?
Solución.-
a)

$$P\left(E \mid T\right) = \frac{P(E)P(T \mid E)}{P(T)} = \frac{0,003*0,992}{0,003*0,992+0,997*0,994}$$

$$P(T) = P(T \cap (E \cup E^c)) = P(T \cap E) + P(T \cap E^c) =$$

$$= P(E)P(T \mid E) + P(E^c)P(T \mid E^c) = 0,003*0,992+0,997*0,994$$

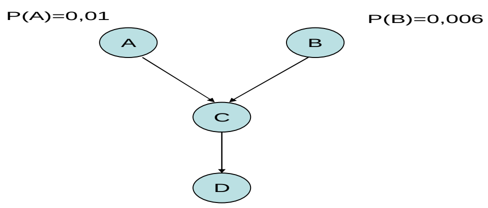
b)

$$P\left(E \mid F^c\right) = \frac{P(E \cap F^c)}{P(F^c)} = \frac{P(E)P(F^c \mid E)}{P(F^c)} \frac{0,003*0,02}{0,003*0,02+0,997*0,983}$$

$$P(F^c) = P(E)P(F^c \mid E) + P(E^c)P(F^c \mid E^c) =$$

$$= 0,003*0,02+0,997*0,983$$

Ejercicio 3.-
Consideremos la siguiente red causal:



Los datos que conocemos son:

	A	A^c
B	P(C| A, B)= 0,990	P(C| A^c, B)= 0,900
B^c	P(C| A, B^c)= 0,800	P(C| A^c, B^c)= 0,001

	C	C^c
D	P(D|C)= 0,99	P(D|C^c)= 0,90

Calcule :
a) P(A| C, B^c) b) P(C | D) c) P(C| D, A, B^c)
NOTA: Suponemos separación direccional, es decir, se cumple lo siguiente:
P(D | C, A)= P(D | C, B)= P(D | C, A, B)= P(D | C)
P(A | B)= P(A) y P(B | A)= P(B)
Solución.- a) Aquí hemos considerado que si A y B son independientes A^c y B^c lo son, y de igual forma lo son B^c y A.

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{A} \mid \mathrm{C}, \mathrm{B}^{c}\right)= \frac{P(A\cap C\cap B^{c})}{P(C\cap B^{c})}=\frac{P(A\cap B^{c})P(C\mid A\cap B^{c})}{P(B^{c})P(C\mid B^{c})}=$$

$$=\frac{P(A)P(B^{c})P(C\mid A\cap B^{c})}{P(B^{c})P(C\mid B^{c}\cap(A\cup A^{c}))}=\frac{P(A)P(B^{c})P(C\mid A\cap B^{c})}{P(B^{c})P(C\mid (B^{c}\cap A)\cup(B^{c}\cap A^{c}))}=$$

$$=\frac{P(A)P(C\mid A\cap B^{c})}{0,01*0,8+0,99*0,001}=\frac{0,01*0,8}{0,01*0,8+0,99*0,001}$$

$$P(C\mid (B^{c}\cap A)\cup(B^{c}\cap A^{c}))=\frac{P((C\cap(B^{c}\cap A))\cup(C\cap(B^{c}\cap A^{c}))}{P((B^{c}\cap A)\cup(B^{c}\cap A^{c}))}=$$

$$=\frac{P(B^{c}\cap A))P(C\mid B^{c}\cap A)+P(B^{c}\cap A^{c})P(C\mid B^{c}\cap A^{c})}{P(B^{c})P(A)+P(B^{c})P(A^{c})}=$$

$$=\frac{0,01*0,994*0,8+0,99*0,994*0,001}{0,994}=0,01*0,8+0,99*0,001$$

b)

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{C} \mid \mathrm{D}\right)=\frac{P(C\cap D)}{P(D)}=\frac{P(C)P(D\mid C)}{P(D)}=\frac{P(C)*0,99}{P(C)*0,99+P(C^{c})*0,90}$$

$$P(D)=P(D\cap(C\cup C^{c}))=P(D\cap C)+P(D\cap C^{c})=$$

$$=P(C)P(D\mid C)+P(C^{c})P(D\mid C^{c})=P(C)*0,99+P(C^{c})*0,90$$

$$P(C)=P(C\cap\left((A\cap B)\cup(A\cap B^{c})\cup(A^{c}\cap B)\cup(A^{c}\cap B^{c})\right)=$$

$$=P(C\cap(A\cap B))+P(C\cap(A\cap B^{c}))+P(C\cap(A^{c}\cap B))+P(C\cap(A^{c}\cap B^{c}))=$$

$$=P(A\cap B)P(C\mid(A\cap B))+P(A\cap B^{c})P(C\mid(A\cap B^{c}))+P(A^{c}\cap B)P(C\mid(A^{c}\cap B))+$$
$$P(A^{c}\cap B^{c})P(C\mid(A^{c}\cap B^{c}))=P(A)*P(B)*P(C\mid(A\cap B))+P(A)*P(B^{c})*P(C\mid(A\cap B^{c}))+$$
$$P(A^{c})*P(B)*P(C\mid(A^{c}\cap B))+P(A^{c})*P(B^{c})*P(C\mid(A^{c}\cap B^{c}))=0,01*0,006*0,990+$$
$$0,01*0,994*0,8+0,99*0,006*0,9+0,99*0,994*0,001$$

c)

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{C} \mid \mathrm{D}, \mathrm{A}, \mathrm{B}^{c}\right)=\frac{P(C\cap D\cap A\cap B^{c})}{P(D\cap A\cap B^{c})}=\frac{P(C\cap A\cap B^{c})P(D\mid C\cap A\cap B^{c})}{P(A\cap B^{c})P(D\mid A\cap B^{c})}=$$

$$=\frac{P(A\cap B^{c})P(C\mid A\cap B^{c})P(D\mid C)}{P(A)P(B^{c})P(D)}=\frac{P(A\cap B^{c})P(C\mid A\cap B^{c})P(D\mid C)}{P(A)P(B^{c})(P(C)*0,99+P(C^{c})*0,90)}=$$

$$=\frac{(0,01*0,994)*0,80*0,99}{(0,01*0,994)*0,9012}=\frac{0,80*0,99}{0,9012}=0,8788$$

$$P(C)=0,01*0,006*0,990+0,01*0,994*0,8+0,99*0,006*0,9+0,99*0,994*0,001=$$
$$=0,0000594+0,007952+0,005346+0,000984=0,0143$$

$$P(C^{c})=0,9856$$

Ejercicio 4.-

Cuando el profesor de Modelos Computacionales corrige los exámenes, se encuentra con que la gran mayoría de los alumnos tienen sobresaliente, y comienza a pensar en la posibilidad de que el enunciado del examen fuese sustraído de su despacho antes de la realización del mismo.

A priori concede una certeza del 80% a dicha hipótesis, pero intenta también tener en cuenta otras informaciones que tiene disponibles y que son las siguientes:

Cree recordar (con un 80% de certeza) que un par de días antes del examen se ausentó de su despacho durante dos horas olvidando cerrarlo con llave. Si el despacho quedó abierto, cree que hay una posibilidad del 65% de que el examen fuese sustraído.

· El alumno H ha sacado un diez, no habiendo pasado nunca en las anteriores convocatorias del 5. En vista de esto, cree que hay un 70% de posibilidades de que el examen fuese sustraído.

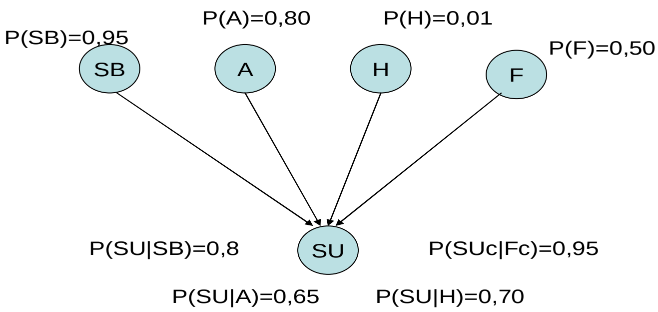
· El examen estaba guardado bajo llave en su mesa y la cerradura presenta algunos arañazos, basándose en los cuales asigna una certeza de 0,5 a que la cerradura **no** haya sido forzada. Si la cerradura no fue forzada, cree que el examen no ha sido sustraído con una certeza del 95%.

a) Construya una red Bayesiana que represente éste conocimiento y escriba todos los datos que pueda extraer del enunciado.

Solución.-

SB≡ Obtener sobresaliente toda la clase; A≡ Ausentarse del despacho

H≡ El alumno H saque un 10; F≡ Cerradura forzada; SU≡ Sustraer el examen



Ejercicio 5.-

Supongamos el problema de diagnosticar una enfermedad D que puede dar origen a la aparición de un síntoma S o a un signo radiológico R. Cada una de estas 3 variables puede tomar 2 valores, presente o ausente. Conocemos los siguientes datos:

$P(D)=0,01$

$P(S \mid D)=0,92$; $P(S \mid D^c)= 0,14$

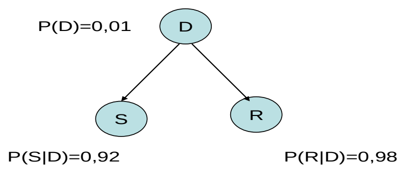
$P(R \mid D)=0,98$; $(R \mid D^c)= 0,03$

Calcule:

- Diseñe la red Bayesiana escribiendo todos los datos que pueda extraer del enunciado.
- Calcule la probabilidad de que sabiendo que el paciente presenta dicho síntoma padezca a su vez la enfermedad

- Calcule la probabilidad de que sabiendo que el paciente no presenta el signo radiológico en cambio sí padezca la enfermedad.

Solución.-



b)
$$\mathrm{P}\left(\mathrm{D}\,|\,\mathrm{S}\right)=\frac{P(D\cap S)}{P(S)}=\frac{P(D)P(S\mid D)}{P(D)P(S\mid D)+P(D^c)P(S\mid D^c)}=$$
$$=\frac{0,01*0,92}{0,01*0,92+0,99*0,14}$$

c)
$$\mathrm{P}\left(\mathrm{D}\,|\,\mathrm{R}^{\mathrm{c}}\right)=\frac{P(D\cap R^c)}{P(R^c)}=\frac{P(D)P(R^c\mid D)}{P(D)P(R^c\mid D)+P(D^c)P(R^c\mid D^c)}=$$
$$=\frac{0,01*0,02}{0,01*0,02+0,99*0,97}$$

Ejercicio 6.-

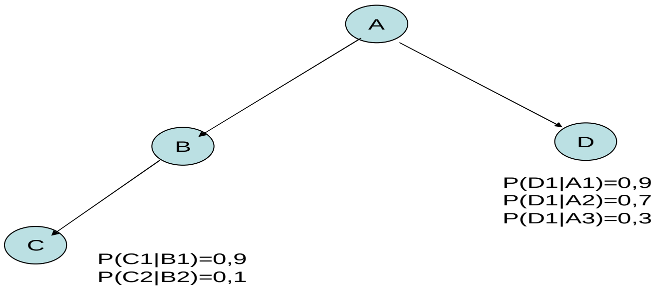
En un congreso científico regional participan 50 representantes de 3 universidades: 23 de la primera, 18 de la segunda y 9 de la tercera. En la primera universidad, el 30% de los profesores se dedican a las ciencias, el 40% a la ingeniería, el 25% a las humanidades y el 5% a la economía. Para la 2ª universidad los porcentajes son 25, 35, 30 y 10 y para la 3ª 20, 50, 10 y 20. A la salida del congreso nos encontramos con un profesor. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de la 3ª universidad? ¿Y si sabemos que es de economía?

Solución.-

P(U1)=23/50; P(U2)=18/50; P(U3)= 9/50

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{U3}\,|\,\mathrm{E}\right)=\frac{P(U3\cap E)}{P(E)}=\frac{P(U3)P(E\,|\,U3)}{P(U1)P(E\,|\,U1)+P(U2)P(E\,|\,U2)+P(U3)P(E\,|\,U3)}=$$
$$=\frac{(9/50)*0,2}{(23/50)*(0,05)+(18/50)*(0,1)+(9/50)*(0,2)}$$

Ejercicio 7.-
Consideremos la siguiente red causal:



donde las variables son:
A = edad, que toma los valores a1= joven, a2= medio, a3= viejo.
B = nivel de ingresos, que toma los valores b1= alto, b2= bajo.
C = nivel de vida, que toma los valores c1= bueno, c2= malo.
D = salud, que toma los valores d1= buena, d2= mala.

Se pide:
Sabiendo que de cada millón de personas 300.000 son jóvenes, y que de éstos, 1 de cada 10 tienen un nivel de ingresos bajo, que de cada millón 200.000 son viejos, y que de éstos son dos de cada 10 los que tienen un nivel de ingresos bajo y que 3 de cada 10 personas con edad media tienen un nivel de ingresos bajo:
a) Actualizar las probabilidades de los diferentes valores de A, sabiendo que la variable nivel de ingresos ha tomado el valor bajo. ¿Qué tipo de razonamiento es?
b) ¿Qué variables son independientes y cuáles están correlacionadas? Y si agregamos dos variables, la tensión arterial y el riesgo de sufrir infartos. ¿Son variables independientes? Dibuje una red Bayesiana que refleje éstas variables.

Solución.-
P(A1)= 3/10=0,3 ; P(B2|A1)=1/10=0,1 ; P(B1|A1)=0,9
P(A3)=2/10=0,2; P(B2|A3)=2/10=0,2; P(B1|A3)=0,8; P(B2|A2)=3/10=0,3; P(B1|A2)=0,7
a)

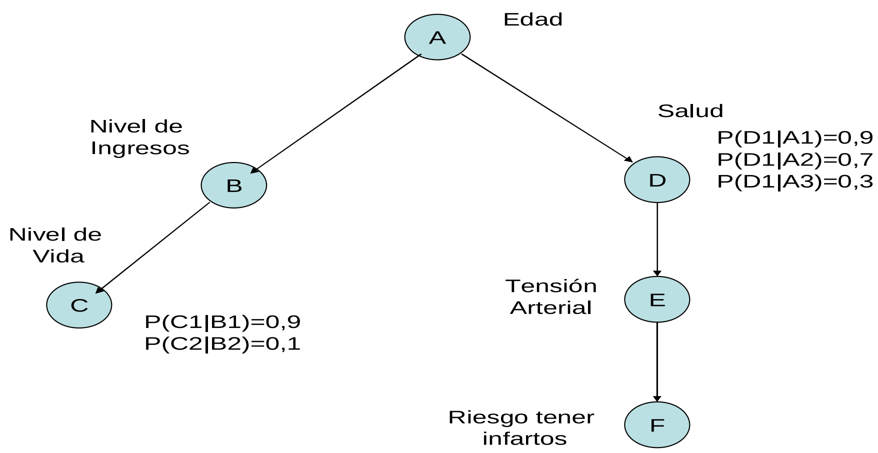
$$\mathrm{P}\left(\mathrm{A1}\,|\,\mathrm{B2}\right)=\frac{P(A1\cap B2)}{P(B2)}=\frac{P(A1)P(B2\,|\,A1)}{P(B2)}=\frac{0,3*0,1}{0,3*0,1+0,5*0,3+0,2*0,2}$$

$$P(B2)=P(A1)P(B2\,|\,A1)+P(A2)P(B2\,|\,A2)+P(A3)P(B2\,|\,A3)=$$
$$=0,3*0,1+0,5*0,3+0,2*0,2;$$

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{A2}\,|\,\mathrm{B2}\right)=\frac{0,5*0,3}{0,3*0,1+0,5*0,3+0,2*0,2}$$

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{A3}\,|\,\mathrm{B2}\right)=\frac{0,2*0,2}{0,3*0,1+0,5*0,3+0,2*0,2}$$

b) Son independientes B con D y con E y con F y C con D y con E y con F, estando correladas las demás. Si agregamos estas variables si son dependientes y habría que considerarlas como tal en el grafo. El grafo sería



Ejercicio 8.- Tenemos una población de 500 personas, cuya distribución de probabilidad de sexo y edades es la siguiente:

N(Edad)	**Hombre**	**Mujer**	**Total**
<18	67	68	135
18–65	122	126	248
>65	57	60	117
TOTAL	246	254	500

Realizamos un experimento que consiste en escoger a una persona mediante un procedimiento aleatorio en el que cada una de ellas tiene la misma probabilidad de resultar elegida. a) Escribir una tabla en la que aparezcan las probabilidades de que una persona tenga cierta edad y cierto sexo. b) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona de la que sabemos que es mujer tenga 18 o más años? c) Calcular la misma probabilidad sabiendo que las distribuciones de las edades en el caso de las mujeres y de los hombres son variables normales con parámetros estimados por el método de máxima verosimilitud.

Solución.- a)

Edad		**Sexo**	
<18	135	**Hombre**	246
18–65	248	**Mujer**	254
>65	117	**TOTAL**	500
TOTAL	500		

b) $P(>18\,|\,\text{Mujer}) = \dfrac{P(>18 \cap \text{Mujer})}{\text{P(Mujer)}} = \dfrac{186/500}{254/500}$

c) Los estimadores de la media y varianza por el método de máxima verosimilitud son la media muestral y la cuasi varianza muestral; por tanto hay que calcular dichos estimadores teniendo en cuenta por ejemplo que el centro de clase de los menores de 18 años debería de ser 9 años, de los que están entre 18 y 65, 41 años y los que tienen más de 65 años, 77.

Ejercicio 9.-

Considere la red Bayesiana B = (G, P) que se muestra en la Figura, donde G = (V(G),A(G)) es un grafo acíclico directo como el de la figura y P es la distribución de probabilidad correspondiente a las variables de los vértices V(G) = $\{V_1,V_2,V_3,V_4,V_5\}$. Las siguientes distribuciones de probabilidad (local) se definen mediante P:

$P(V_1) = 0.2$; $P(V_5) = 0.8$

$P(V_2 \mid V_1) = 0.5$; $P(V_2 \mid \bar{V}_1) = 0.4$

$P(V_3 \mid V_2, V_4) = 0.4$; $P(V_3 \mid \bar{V}_2, V_4) = 0.7$; $P(V_3 \mid V_2,\bar{V}_4) = 0.3$; $P(V_3 \mid \bar{V}_2,\bar{V}_4) = 0.6$

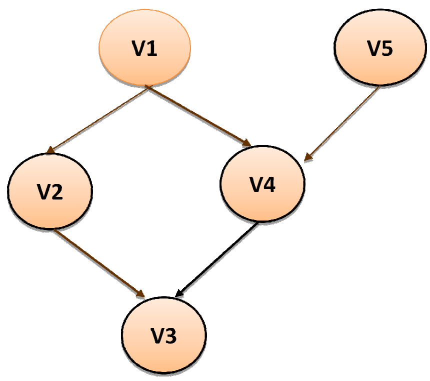
$P(V_4 \mid V_1, V_5) = 0.6$; $P(V_4 \mid \bar{V}_1, V_5) = 0.2$; $P(V_4 \mid V_1,\bar{V}_5) = 0$; $P(V_4 \mid \bar{V}_1,\bar{V}_5) = 1$

a) En función de la estructura de la red bayesiana justificar que sucesos se consideran independientes y cuales condicionalmente dependientes

b) Calcule la probabilidad del suceso P(V4)

b) Calcule la probabilidad del suceso $P(V_3 / \bar{V}_4)$

d) Calcule la probabilidad del suceso $P(\bar{V}_5 / V_3)$, esto es que V_5 sea igual a falso dado que V_3 es igual a verdadero, si sabemos que $P(V_3) \approx 0.5$.



Solución.- a) En función de la estructura de la red bayesiana explicar que sucesos se consideran independientes y cuales condicionalmente independientes. Son independientes V_1 y V_5, así como V_2 y V_4 y V_2 y V_5 $P(V_1 \cap V_5) = P(V_1)P(V_5)$, $P(V_2 \cap V_4) = P(V_2)P(V_4)$ $P(V_2 \cap V_5) = P(V_2)P(V_5)$

Son condicionalmente independientes V_3 y V_5 con respecto a V_4; V_1 y V_3 con respecto a V_4 y con respecto a V_2, y V_2 y V_4 con respecto a V_1

Suponemos separación direccional, esto es **independencia condicional**, es decir, se cumple lo siguiente:

$P(V_3 \mid V_4, V_5)= P(V_3 \mid V_4, V_1)= P(V_3 \mid V_4, V_1, V_5)= P(V_3 \mid V_4)$

$P(V_3 \mid V_2, V_1)= P(V_3 \mid V_2)$

$P(V_3\mid V_2,V_4,V_1)= P(V_3\mid V_2,V_4,V_5)=P(V_3\mid V_2,V_4,V_1,V_5)=P(V_3\mid V_2,V_4)$

b)

$$P(V_4) = P(V_4 \cap (V_1 \cap V_5)) + P(V_4 \cap (\bar{V}_1 \cap V_5)) + P(V_4 \cap (V_1 \cap \bar{V}_5)) + P(V_4 \cap (\bar{V}_1 \cap \bar{V}_5)) =$$

como V_1 y V_5 son independientes

$$= P(V_1)P(V_5)P(V_4 / V_1 \cap V_5)) + P(\bar{V}_1)P(V_5)P(V_4 / \bar{V}_1 \cap V_5)) + P(V_1)P(\bar{V}_5)P(V_4 / V_1 \cap \bar{V}_5)) +$$
$$+ P(\bar{V}_1)P(\bar{V}_5)P(V_4 / \bar{V}_1 \cap \bar{V}_5)) = 0,2*0,8*0,6 + 0,8*0,8*0,2 + 0,2*0,2*0 + 0,8*0,2*1 = 0,384$$

c)

$$P(V_3 / \overline{V}_4) = \frac{P(V_3 \cap \overline{V}_4)}{P(\overline{V}_4)} = \frac{P(\overline{V}_4)P(V_2)\,\mathrm{P}(\mathrm{V}_3 / \overline{V}_4 \cap V_2) + P(\overline{V}_4)P(\overline{V}_2)\,\mathrm{P}(\mathrm{V}_3 / \overline{V}_4 \cap \overline{V}_2)}{P(\overline{V}_4)} =$$

$$= P(V_2)\,\mathrm{P}(\mathrm{V}_3 / \overline{V}_4 \cap V_2) + P(\overline{V}_2)\,\mathrm{P}(\mathrm{V}_3 / \overline{V}_4 \cap \overline{V}_2) = 0,42 * 0,3 + 0,58 * 0,6 = 0,474$$

pues

$$P(V_3 \cap \overline{V}_4) = P(V_3 \cap \overline{V}_4 \cap V_2) + P(V_3 \cap \overline{V}_4 \cap \overline{V}_2) =$$

$$= P(\overline{V}_4 \cap V_2)\,\mathrm{P}(\mathrm{V}_3 / \overline{V}_4 \cap V_2) + \mathrm{P}(\overline{V}_4 \cap \overline{V}_2) P(\mathrm{V}_3 / \overline{V}_4 \cap \overline{V}_2) =$$

como V2 y V4 son independientes

$$= P(\overline{V}_4)P(V_2)\,\mathrm{P}(\mathrm{V}_3 / \overline{V}_4 \cap V_2) + P(\overline{V}_4)P(\overline{V}_2)\,\mathrm{P}(\mathrm{V}_3 / \overline{V}_4 \cap \overline{V}_2)$$

pero

$$P(V_2) = \mathrm{P}(V_2 \cap (V_1 \cup \overline{V}_1)$$

$$= \mathrm{P}(\mathrm{V}_1)\,\mathrm{P}(\mathrm{V}_2 / \mathrm{V}_1) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{V}}_1)\,\mathrm{P}(\mathrm{V}_5)\,\mathrm{P}(\mathrm{V}_2 / \overline{\mathrm{V}}_1)$$

$$= 0,2 * 0,5 + 0,8 * 0,4 = 0,42$$

d) Calcular la probabilidad de $P(\overline{V}_5 \mid V_3)$,

$$P(\overline{V}_5 / V_3) = \frac{P(\overline{V}_5 \cap V_3)}{P(V_3)} = \frac{0,064 + 0,012 + 0,112 + 0,024}{0,5} = \frac{0,212}{0,5} = 0,424$$

$$P(\overline{V}_5 \cap V_3) = P(\overline{V}_5 \cap V_3) \cap ((\mathrm{V}_2 \cap V_4) \cup (\mathrm{V}_2 \cap \overline{V}_4) \cup (\overline{\mathrm{V}}_2 \cap V_4) \cup (\overline{\mathrm{V}}_2 \cap \overline{V}_4))) =$$

$$= P(\overline{V}_5 \cap V_3 \cap \mathrm{V}_2 \cap V_4) + P(\overline{V}_5 \cap V_3 \cap \mathrm{V}_2 \cap \overline{V}_4) + P(\overline{V}_5 \cap V_3 \cap \overline{\mathrm{V}}_2 \cap V_4) + P(\overline{V}_5 \cap V_3 \cap \overline{\mathrm{V}}_2 \cap \overline{V}_4) =$$

$$= 0,064 + 0,012 + 0,112 + 0,024 = 0.212$$

$$P(\overline{V}_5 \cap V_3 \cap \mathrm{V}_2 \cap V_4) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{V}}_5)\,\mathrm{P}(\mathrm{V}_4 / \overline{\mathrm{V}}_5)\,\mathrm{P}(\mathrm{V}_3 / \mathrm{V}_2 \cap \mathrm{V}_4) = 0,2 * 0,8 * 0,4 = 0,064$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{V}_4 / \overline{\mathrm{V}}_5) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{V}_4 \cap \overline{\mathrm{V}}_5)}{P(\overline{V}_5)} = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{V}_4 \cap \overline{\mathrm{V}}_5 \cap V_1) + \mathrm{P}(\mathrm{V}_4 \cap \overline{\mathrm{V}}_5 \cap \overline{V}_1)}{P(\overline{V}_5)} =$$

$$= \frac{\mathrm{P}(V_1 \cap \overline{\mathrm{V}}_5) P(V_4 / V_1 \cap \overline{\mathrm{V}}_5) + \mathrm{P}(\overline{V}_1 \cap \overline{\mathrm{V}}_5) P(V_4 / \overline{V}_1 \cap \overline{\mathrm{V}}_5)}{P(\overline{V}_5)} =$$

$$= \mathrm{P}(V_1) P(V_4 / V_1 \cap \overline{\mathrm{V}}_5) + \mathrm{P}(\overline{V}_1) P(V_4 / \overline{V}_1 \cap \overline{\mathrm{V}}_5) = 0,2 * 0 + 0,8 * 1 = 0,8$$

De forma similar

$$P(\overline{V}_5 \cap V_3 \cap \mathrm{V}_2 \cap \overline{V}_4) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{V}}_5)\,\mathrm{P}(\overline{\mathrm{V}}_4 / \overline{\mathrm{V}}_5)\,\mathrm{P}(\mathrm{V}_3 / \mathrm{V}_2 \cap \overline{\mathrm{V}}_4) = 0,2 * 0,2 * 0,3 = 0,012$$

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{V}}_4 / \overline{\mathrm{V}}_5) = \frac{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{V}}_4 \cap \overline{\mathrm{V}}_5)}{P(\overline{V}_5)} = \frac{\mathrm{P}(\overline{\mathrm{V}}_4 \cap \overline{\mathrm{V}}_5 \cap V_1) + \mathrm{P}(\overline{\mathrm{V}}_4 \cap \overline{\mathrm{V}}_5 \cap \overline{V}_1)}{P(\overline{V}_5)} =$$

$$= \frac{\mathrm{P}(V_1 \cap \overline{\mathrm{V}}_5) P(\overline{V}_4 / V_1 \cap \overline{\mathrm{V}}_5) + \mathrm{P}(\overline{V}_1 \cap \overline{\mathrm{V}}_5) P(\overline{V}_4 / \overline{V}_1 \cap \overline{\mathrm{V}}_5)}{P(\overline{V}_5)} =$$

$$= \mathrm{P}(V_1) P(\overline{V}_4 / V_1 \cap \overline{\mathrm{V}}_5) + \mathrm{P}(\overline{V}_1) P(\overline{V}_4 / \overline{V}_1 \cap \overline{\mathrm{V}}_5) = 0,2 * 1 + 0,8 * 0 = 0,2$$

y

$$P(\overline{V}_5 \cap V_3 \cap \overline{\mathrm{V}}_2 \cap V_4) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{V}}_5)\,\mathrm{P}(\mathrm{V}_4 / \overline{\mathrm{V}}_5)\,\mathrm{P}(\mathrm{V}_3 / \overline{\mathrm{V}}_2 \cap \mathrm{V}_4) = 0,2 * 0,8 * 0,7 = 0,112$$

$$\mathrm{P}(\mathrm{V}_4 / \overline{\mathrm{V}}_5) = 0,8$$

$$P(\overline{V}_5 \cap V_3 \cap \overline{\mathrm{V}}_2 \cap \overline{V}_4) = \mathrm{P}(\overline{\mathrm{V}}_5)\,\mathrm{P}(\overline{\mathrm{V}}_4 / \overline{\mathrm{V}}_5)\,\mathrm{P}(\mathrm{V}_3 / \overline{\mathrm{V}}_2 \cap \overline{\mathrm{V}}_4) = 0,2 * 0,2 * 0,6 = 0,024$$

$$\mathrm{P}(\overline{\mathrm{V}}_4 / \overline{\mathrm{V}}_5) = 1 - 0,8 = 0,2$$