31. suponga que $f(x,y)=-2x^2+5y^2+7$, donde X y Y deben satisfacer la ecuación $3x-2y=7$. Encuentre los extremos relativos de f sujetos a la condición dada de X y Y, despeje primero a Y de la segunda ecuación. Sustituya el resultado para Y en la ecuación dada. Así, f se expresa como funcion de una variable para la cual sus extremos pueden encontrarse de la manera usual.

1. DATOS

$$f(x,y)=-2x^2+5y^2+7$$

$$3x-2y=7 \longleftarrow$$ Condicion

Encontrar los extremos relativos de f =?

2. DESARROLLO

Despejamos y de la ecuación dada

$$3x-2y=7$$

$$-2y=7-3x$$

$$y=\frac{7-3x}{-2}$$

$$y=\frac{3x-7}{2}$$

Ahora sustituimos en la funcion

$$f(x,y)=-2x^2+5\left(\frac{3x-7}{2}\right)^2+7$$

Sacamos la derivada

$$fx=-4x+5(2)\left(\frac{3x-7}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$fx=-4x+5(3x-7)\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$fx=-4x+\frac{15}{2}(3x-7)$$

$$fx=-4x+\frac{15}{2}(3x-7)$$

Igualamos a cero

$$-4x+\frac{15}{2}(3x-7)=0$$

$$-4x+15(3x-7)=0(2)$$

$$-4x+45x-105=0$$

$$37x-105=0$$

$$x=\frac{105}{37}$$

Reemplazamos el valor de x en la ecuación de y

$$y=\frac{3\left(\frac{105}{37}\right)-7}{2}$$

$$y=\frac{\frac{315}{37}-7}{2}$$

$$y=\frac{\frac{315}{37}-7}{2}$$

$$y=\frac{\frac{315-259}{37}}{2}$$

$$y=\frac{\frac{56}{37}}{\frac{2}{1}}$$

$$y=\frac{56}{74}$$

$$y=\frac{28}{37}$$

Así existe un mínimo relativo

32. Suponga que $f(x,y)=x^2+4y^2+6$, donde x y y deben satisfacer la ecuación $2x-8y=20$. Encuentre los extremos relativos de f sujetos a la condición dada de x y y , despeje primero a y de la segunda ecuación. Sustituya el resultado para y en la ecuación dada. Así, f se expresa como función de una variable para la cual sus extremos pueden encontrarse de la manera usual.

DESARROLLO

- Despejamos y de $2x-8y=20$

$$2x-8y=20$$

$$2x+20=8y$$

$$y=\frac{x+10}{4}$$

Reemplazamos en $f(x,y)=x^2+4y^2+6$

$$f(x,y)=x^2+4y^2+6$$

$$\frac{x+10}{4}$$
¿
¿
$f(x,y)=x^2+4$¿

- Análisis de la primera derivada aplicando la regla de la cadena

$$f´(x,y)=2x+4(2)\left(\frac{x-10}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)$$

- Igualamos la primera derivada a cero para encontrar los puntos críticos

$$f´(x,y)=2x+4(2)\left(\frac{x-10}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)=0$$

$$2x+\frac{1}{2}(x-10)=0$$

$$\frac{4x+(x-10)}{2}$$

$$4x+x-10=0$$

$$5x=10$$

$$x=\frac{10}{5}$$

$$x=2$$

Reemplazamos x en

$$y=\frac{x+10}{4}$$

$$y=\frac{2-10}{4}$$

$$y=\frac{-8}{4}$$

$$y=-2$$

La segunda derivada es igual a

$$f''(x,y)=2+\left(\frac{1}{2}\right)(1)$$

Simplificando nos queda

$$f''(x,y)=\frac{5}{2}>0\, asi\, que\, tenemos\, un\, minimo\, relativo\, en\, x=2\, y\, y=-2$$

33. Suponga que la función de costos conjuntos

$$c=q^2{}_A+3q^2{}_B+2q_Aq_B+aq_A+bq_B+d$$

Tiene un valor mínimo relativo de 15 cuando $q_A=3$ y $q_B=1$

Determine los valores de las constantes a, b y d

1. DATOS

$$c=q^2{}_A+3q^2{}_B+2q_Aq_B+aq_A+bq_B+d$$

$$q_A=3$$

$$q_B=1$$

MINIMO=15

2. HERRAMIENTAS

$$\frac{\partial C}{\partial q_A} \qquad \frac{\partial C}{\partial q_B}$$

3. DESARROLLO

$$\frac{\partial C}{\partial q_A}=2q_A+2q_B+a=0$$

$$\frac{\partial C}{\partial q_B}=6q_B+2q_A+b=0$$

REEMPLAZAMOS LOS VALORES DE $q_A=3$ Y $q_B=1$ EN AMBAS ECUACIONES

$2q_A+2q_B+a=0$ $\quad$ $6q_B+2q_A+b=0$

$2(3)+2(1)+a=0$ $\quad$ $6(1)+2(3)+b=0$

$a=-8$ $\quad$ $b=-12$

Luego $c=15$ cuando $q_A=3$ y $q_B=1$ reemplazamos en la función de costo y tenemos:

$c=q^2{}_A+3q^2{}_B+2q_Aq_B+aq_A+bq_B+d$

$15=(3)^2+3(1)^2+2(3)(1)+(-8)(3)+(-12)(1)+d$

$15=9+3+6-24-12+d$

$-d=-15+9+3+6-24-12$

$-d=-33$

$d=33$

34. Suponga que la función $f(x,y)$ tiene derivadas parciales continuas $f^{'}(xx),f^{'}(yy),f(xy)$ en todos los putos (x, y) cercanos a un punto crítico (a, b).

Sea $D(x,y)=¿\,[¿¿f''(xx)*f''(yy)]-f(xy)^2$ y suponga que $D(a,b)>0$.

a Muestre que $f_{xx}(a,b)<0$ si y solo si $f_{yy}(a,b)<0$

Si el producto de $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)$ es positivo entonces $f_{xx}(a,b)$ y $f_{yy}(a,b)$ deben tener el mismo signo. En consecuencia esto significa que $f_{xx}(a,b)<0$ si y solo si $f_{yy}(a,b)<0$

b Muestre que $f_{xx}(a,b)>0$ si y solo si $f_{yy}(a,b)>0$

Si el producto de $f_{xx}(a,b)f_{yy}(a,b)$ es positivo entonces $f_{xx}(a,b)$ y $f_{yy}(a,b)$ deben tener el mismo signo. En consecuencia esto significa que $f_{xx}(a,b)>0$ si y solo si $f_{yy}(a,b)>0$

35. Utilidad de productos competitivos. Un monopolista vende dos productos competitivos, A y B cuyas ecuaciones de demanda son:

$$A = ¿35-2q^2{}_A+q_b$$
$$P_¿$$

$$B = ¿20-q_B+q_A$$
$$P_¿$$

La funcion de costos conjuntos es:

$$c=-8-2q^3{}_A+3q_Aq_B+30q_A+12q_B+\frac{1}{2}q^2{}_A$$

Cuantas unidades de Ay B deben venderse para que el monopolistaobtenga una utilidad maxima relativa? Use la prueba de la segunda derivada para justificar su respuesta.

Beneficio = Ingreso Total - Coste total

$$P=P_Aq_A+3P_B+30q_A-COSTO\,TOTAL$$

$$35-2q$$
$$¿$$
$$P=(¿2¿¿A+q_B)q_A+(20-q_B+q_A)q_B-(-8-2q^3{}_A+3q_Aq_B+30q_A+12q_B+\frac{1}{2}q^2{}_A)$$
$$¿$$
$$¿$$

$$P=5q_A-\frac{1}{2}q^2{}_A-q_Aq_B+8q_B-q^2{}_B+8$$

Sacamos las primeras derivadas

$$\frac{\partial P}{\partial q_A}=5-q_A-q_B$$

$$\frac{\partial P}{\partial q_B} = -q_A + 8 - 2q_B$$

Construimos un sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{l} -q_A + 8 - 2q_B = 0 \\ \\ -q_A + 5 - q_B = 0 \end{array}\right\} \quad (-1)$$

$$-q_A + 8 - 2q_B = 0$$

$$+q_A - 5 + q_B = 0$$

$$0 + 3 - q_B = 0$$

$$q_B = 3$$

Reemplazamos en una de las ecuaciones

$$5 - q_A - q_B = 0$$

$$5 - q_A - 3 = 0$$

$$-q_A = +3 - 5$$

$$q_A = 2$$

Punto crítico: (2; 3)

Análisis segunda derivada para encontrar máximos o mínimos relativos:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial q 2_A} = -1$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial q 2_B} = -2$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial q_B \partial q_A} = -1$$

$$D = (-1)(-2) - (-1)^2$$

$D = 1 > 0$ Y

$$\frac{\partial^2 P}{\partial q2_A} = -1$$ < 0 MAXIMO RELATIVO

Por lo tanto es un máximo relativo y la ganancia máxima es de 2 unidades de A y 3 unidades de B.

Determine los precios de venta necesarios para obtener la utilidad máxima relativa. Encuentre también esta utilidad máxima relativa

Sustituyendo $q_A = 2$ y $q_B = 3$ en las formulas para $P_A, P_B \, y \, P$ dando un precio de venta de A a 30 y el precio de venta de B a 19 y un beneficio máximo relativo de 25.

$$A = ¿35 - 2q^2{}_A + q_b$$
$$P_¿$$

$$A = ¿35 - 2(2)^2 + 3$$
$$P_¿$$

$$P_A = 35 - 8 + 3$$

$$P_A = 30$$

$$B = ¿20 - q_B + q_A$$
$$P_¿$$

$$B = ¿20 - (3) + 2$$
$$P_¿$$

$$B = ¿20 - 3 + 2$$
$$P_¿$$

$B = ¿ 19$
$P¿$

$$P = 5q_A - \frac{1}{2}q^2{}_A - q_A q_B + 8q_B - q^2{}_B + 8$$

$$P = 5(2) - \frac{1}{2}(2)^2 - (2)(3) + 8(3) - (3)^2 + 8$$

$$P = 10 - 2 - 6 + 24 - 9 + 8$$

$$P = 25$$

36. Utilidad y publicidad. Un detallista ha determinado que el número de aparatos de televisión que puede vender por semana es:

$$\frac{5x}{2+x} + \frac{2y}{5+y}$$

Donde x y y representan sus gastos semanales (en dólares) por publicidad en periódicos y radio, respectivamente. La utilidad es de $250 por venta menos el costo de la publicidad, de modo que su utilidad semanal esta dada POR LA FORMULA:

$$P = 250\left\{\frac{5x}{2+x} + \frac{2y}{5+y}\right\} - x - y$$

Encuentre los valores de x y y para los cuales la utilidad es un máximo relativo. Use la prueba de la segunda derivada para verificar que su respuesta corresponde a una utilidad máxima relativa.

1. DATOS

$$\frac{5x}{2+x} + \frac{2y}{5+y}$$

$$P = 250\left\{\frac{5x}{2+x} + \frac{2y}{5+y}\right\} - x - y$$

2. HERRAMIENTAS

$\frac{\partial P}{\partial x}$ $\frac{\partial P}{\partial y}$ $\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}$ $\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}$ $\frac{\partial^2 P}{\partial y \partial x}$

3. DESARROLLO

$$P = 250\left\{\frac{5x}{2+x} + \frac{2y}{5+y}\right\} - x - y$$

Sacamos las primeras derivadas

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{2500}{(2+x)^2} - 1$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{2500}{(5+y)^2} - 1$$

Puntos críticos;(48; 45)

Sacamos las segundas derivadas

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \frac{-5000}{(2+x)^3}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \frac{-5000}{(5+y)^3}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} = 0$$

$$D = \left(\frac{-1}{25}\right)\left(\frac{-1}{25}\right) - 0^2$$

$D = \frac{1}{50} > 0$ MAXIMO RELATIVO