PROBABILIDAD

PAPEL DE LA PROBABILIDAD EN LA ESTADÍSTICA.

- La probabilidad se emplea como un herramienta que permite evaluar la confiabilidad de las conclusiones de la población cuando se tenga solo información muestral.

EVENTOS Y EL ESPACIO MUESTRAL

Se obtienen datos al observar ya sea eventos no controlados en la naturaleza o situaciones controladas en un laboratorio. Usamos el término **experimento** para describir cualquiera de los dos métodos de recolección de datos.

Definición Un **experimento** es el proceso mediante el cual se obtiene una observación (o medición).

La observación o medición generada por un experimento puede o no producir un valor numérico. A continuación veamos algunos ejemplos de experimentos:

- Registrar la calificación de un examen
- Medir la cantidad de lluvia diaria
- Entrevistar a un dueño de casa para obtener su opinión sobre un reglamento para distribuir por zonas un área verde.

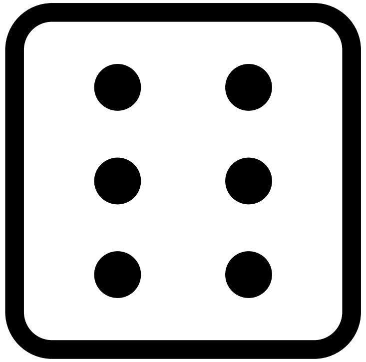
Cuando se realiza un experimento, lo que observamos es un resultado llamado **evento simple**, con frecuencia denotado por la mayúscula E con un subíndice.

DEFINICIÓN UN **EVENTO SIMPLE** ES EL RESULTADO QUE SE OBSERVA EN UNA SOLA REPETICIÓN DEL EXPERIMENTO.

- Experimento: Lance un dado y observe el número que aparece en la cara superior. Haga una lista de los eventos sencillos del experimento.

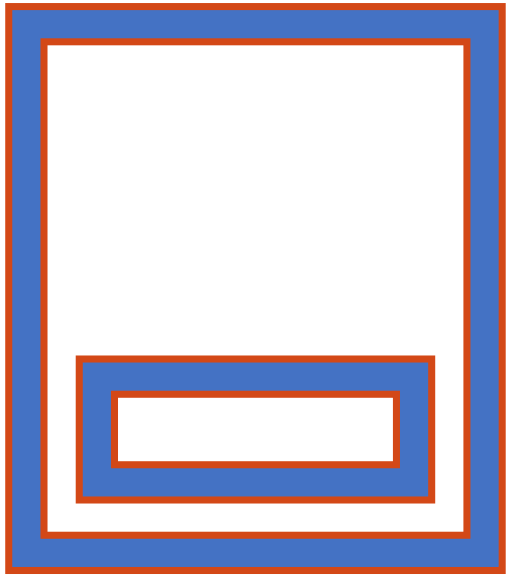
Solución Cuando el dado se lanza una vez, hay seis posibles resultados. Hay los eventos sencillos citados a continuación:

- Evento $E1$: observar un 1 Evento $E4$: observar un 4
- Evento $E2$: observar un 2 Evento $E5$: observar un 5
- Evento $E3$: observar un 3 Evento $E6$: observar un 6



DEFINICIÓN UN EVENTO ES UN CONJUNTO DE EVENTOS SENCILLOS.

- Podemos definir los eventos A y B para el experimento de lanzar al aire un dado:
- $A = Observar\ un\ numero\ impar.$
- $A = \{E_1, E_3, E_5\}$
- $B\ = Observar\ un\ numero\ mayor\ a\ 4.$
- $B\ = \{E_5, E_6\}$
- $C\ = Observar\ un\ numero\ menor\ o\ igual\ a\ 3.$
- $C\ = \{E_1, E_2, E_3\}$

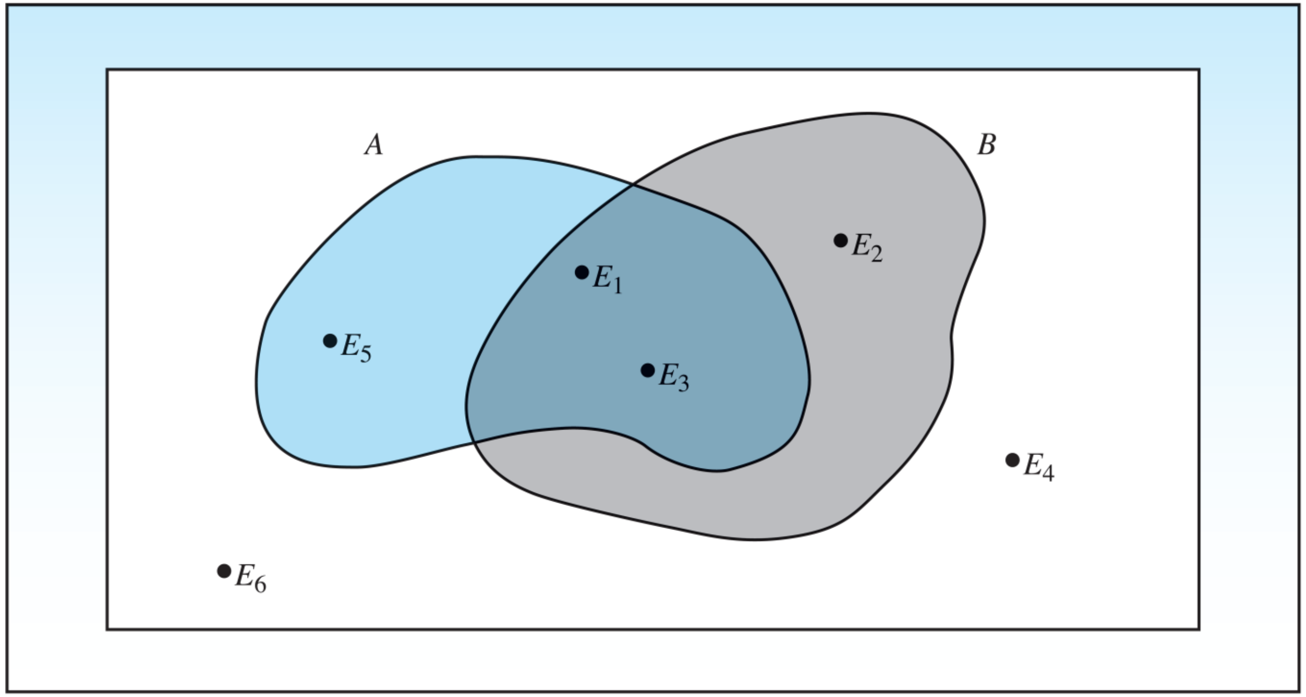


DEFINICIÓN DOS EVENTOS SON **MUTUAMENTE EXCLUYENTES** SI, CUANDO OCURRE UN EVENTO, LOS OTROS NO PUEDEN OCURRIR Y VICEVERSA.

DEFINICIÓN EL CONJUNTO DE TODOS LOS EVENTOS SENCILLOS SE DENOMINA ESPACIO MUESTRAL, *S*.

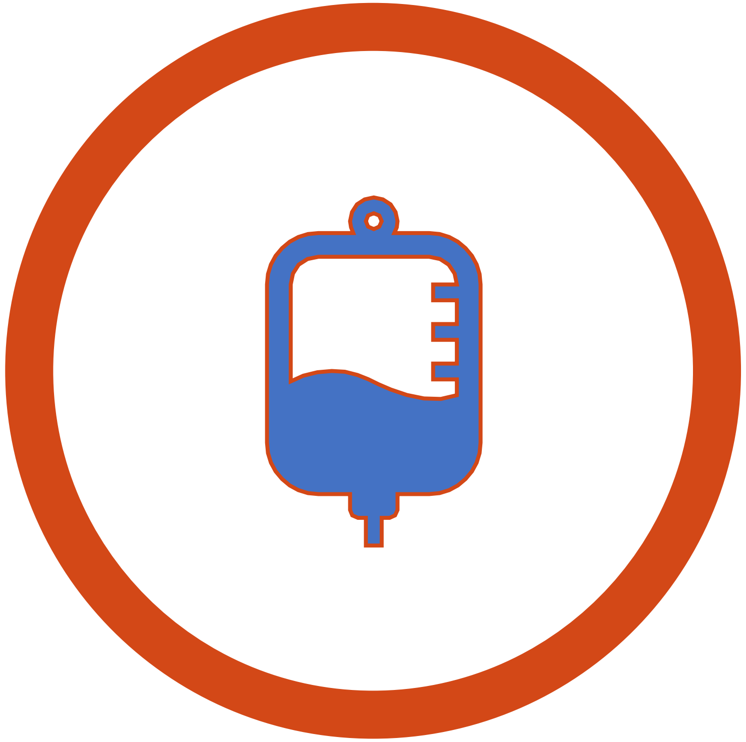
FIGURA 4.1

Diagrama de Venn para tiro de un dado



Experimento: registre el tipo de sangre de una persona. Los cuatro posibles resultados mutuamente exclusivos son estos eventos sencillos:

- $E1$ sangre tipo A
- $E2$ sangre tipo B
- $E3$ sangre tipo AB
- $E4$ sangre tipo O
- El espacio muestral es $S\ \{E1, E2, E3, E4\}$, o S $\{A, B, AB, O\}$.



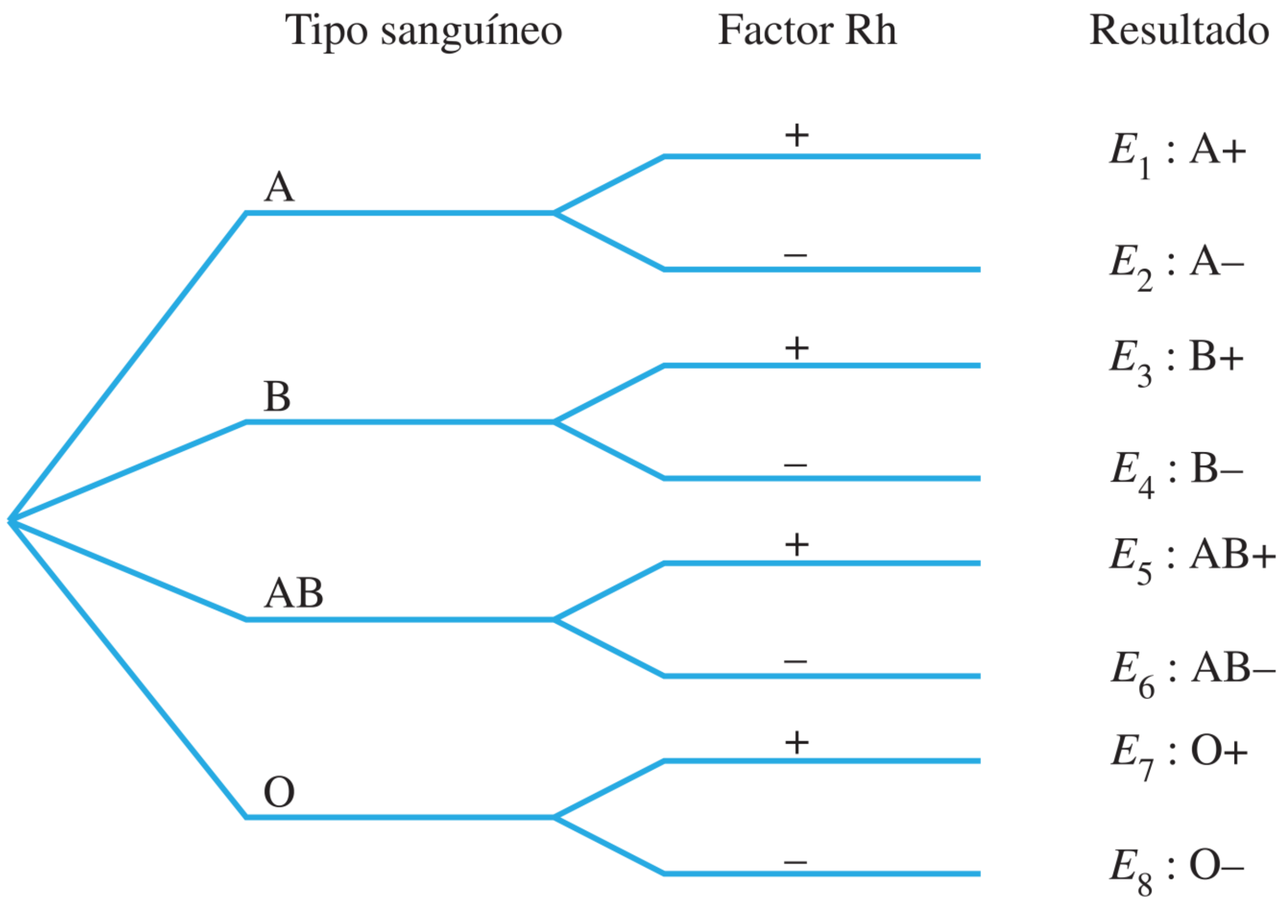
Algunos experimentos se pueden generar en etapas y el espacio muestral se puede mostrar en un **diagrama de árbol**. Cada nivel de ramificación sucesivo del árbol corresponde a un paso requerido para generar el resultado final.

Ejemplo:

Un técnico médico registra el tipo sanguíneo y factor rh de una persona. Haga una lista de los eventos sencillos del experimento.

FIGURA 4.2

Diagrama de árbol para el ejemplo 4.4



	Tipo sanguíneo			
Factor Rh	A	B	AB	O
Negativo	A−	B−	AB−	O−
Positivo	A+	B+	AB+	O+

CÁLCULO DE PROBABILIDADES CON EL USO DE EVENTOS SENCILLOS

La probabilidad de un evento A es una medida de nuestra creencia de que el evento A ocurrirá. Una manera práctica de interpretar esta medida es con el concepto de *frecuencia relativa.* Recuerde del capítulo 1 que, si un experimento se realiza n veces, entonces la frecuencia relativa de un suceso particular, por ejemplo A, es

$$Frecuencia\ relativa = \frac{Ferecuencia}{n}$$

donde la frecuencia es el número de veces que ocurrió el evento A. Si hacemos que el número n de repeticiones del experimento se haga cada vez más grande (n), en última instancia se genera toda la población. En ésta, la frecuencia relativa del evento A se define como la **probabilidad del evento** A; esto es,

$$P(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{Ferecuencia}{n}$$

Como $P(A)$ se comporta como una frecuencia relativa, $P(A)$ debe ser una proporción que se encuentre entre 0 y 1; $P(A)$ 0 si el evento A nunca ocurre, y $P(A)$ 1 si el evento A siempre ocurre. Cuanto más cercano sea $P(A)$ a 1, es más probable que A ocurra.

La **probabilidad** de un evento A es la suma de los pesos de todos los puntos muestrales en A. Por lo tanto,

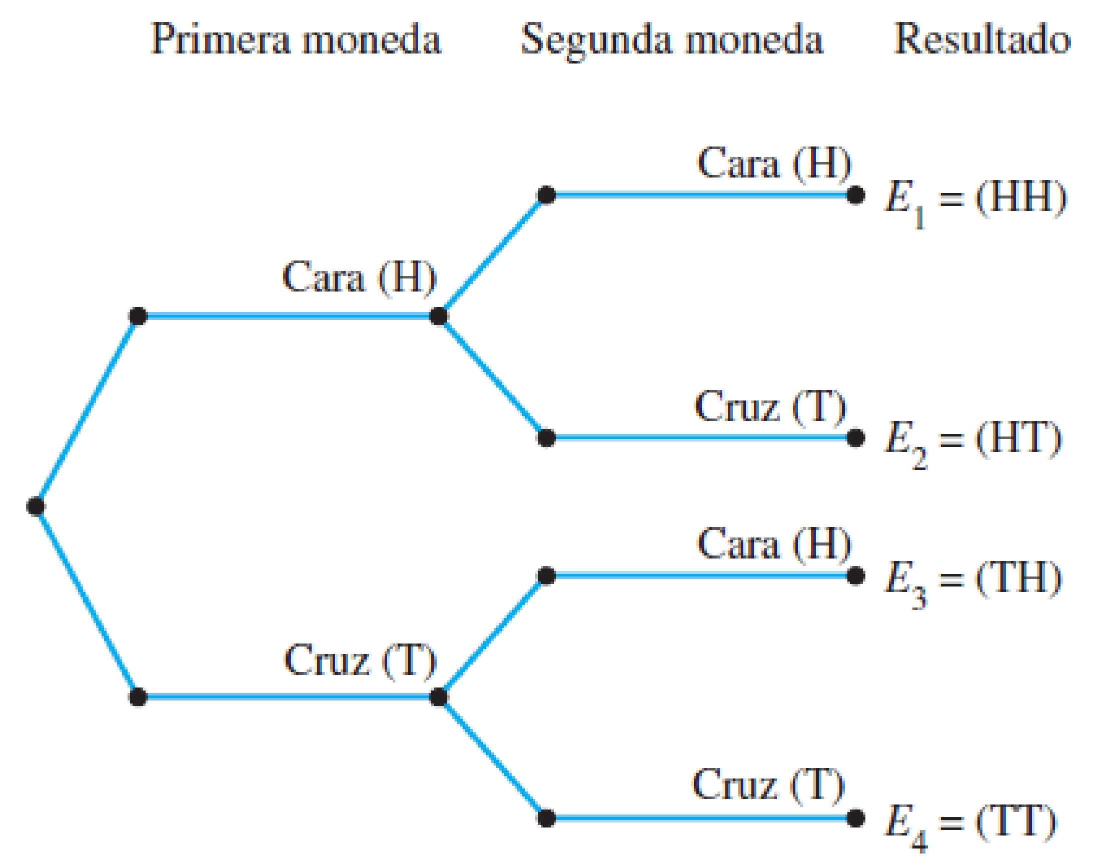
$$0 \leq P(A) \leq 1, \qquad P(\phi) = 0 \quad \text{y} \quad P(S) = 1.$$

Además, si $A_1, A_2, A_3, \ldots$ es una serie de eventos mutuamente excluyentes, entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots.$$

Ejemplo

- Lance al aire dos monedas imparciales y registre el resultado. Encuentre la probabilidad de observar exactamente una cara en los dos tiros.

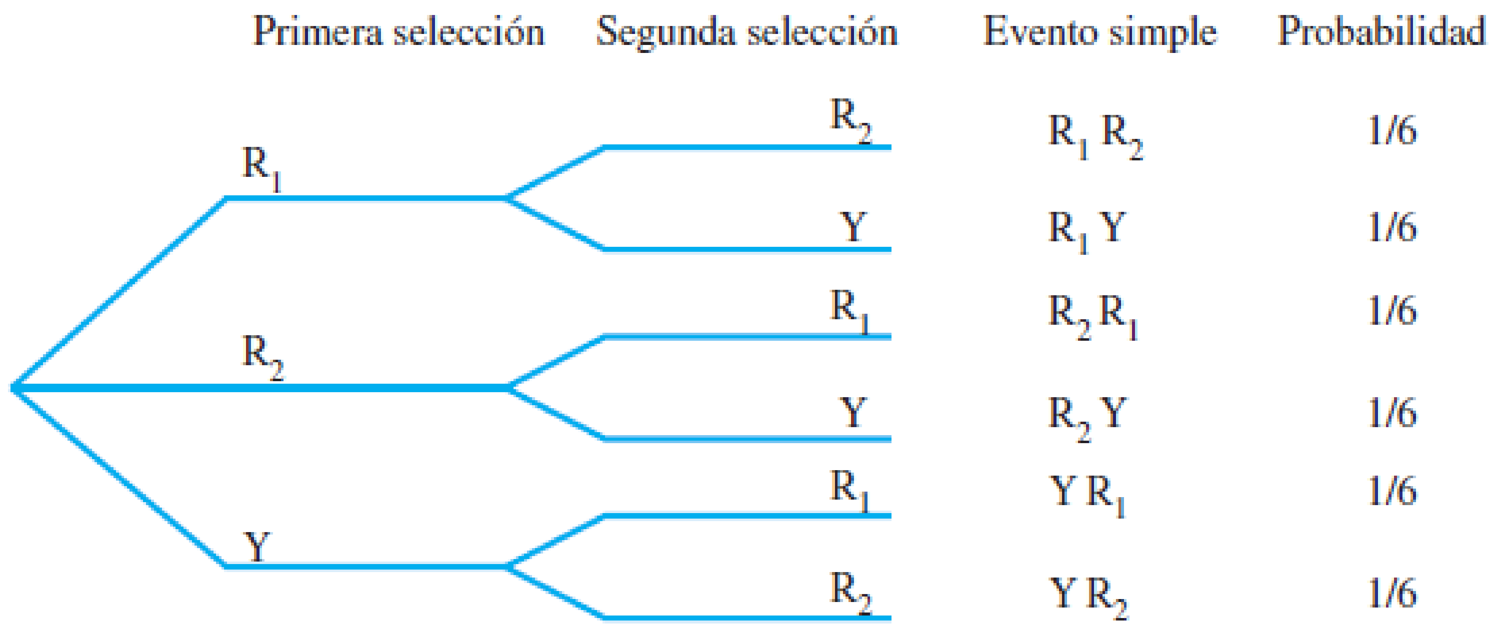

Primera moneda
Segunda moneda
Resultado
Cara (H)
Cruz (T)
Cara (H)
Cruz (T)
Cara (H)
Cruz (T)
E_1 = (HH)
E_2 = (HT)
E_3 = (TH)
E_4 = (TT)

Eventos sencillos y sus probabilidades

Evento	Primera moneda	Segunda moneda	$P(E_i)$
E_1	H	H	1/4
E_2	H	T	1/4
E_3	T	H	1/4
E_4	T	T	1/4

EJEMPLO

- Un plato contiene un dulce amarillo y dos rojos. Usted cierra los ojos, del plato escoge dos dulces, uno por uno y anota sus colores. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos dulces sean rojos?


Primera selección
Segunda selección
Evento simple
Probabilidad
R_1
R_2
Y
R_2
Y
R_1
Y
R_1
R_2
$R_1 R_2$
$R_1 Y$
$R_2 R_1$
$R_2 Y$
$Y R_1$
$Y R_2$
1/6
1/6
1/6
1/6
1/6
1/6

TECNICAS COMBINATORIAS

Los métodos para determinar cuantos subconjuntos se pueden obtener de un conjunto de objetos se denominan técnicas combinatorias.

PERMUTACIONES

COMBINACIONES

MULTIPLICACIÓN

Regla 2.1: Si una operación se puede llevar a cabo en n_1 formas, y si para cada una de éstas se puede realizar una segunda operación en n_2 formas, entonces las dos operaciones se pueden ejecutar juntas de $n_1 n_2$ formas.

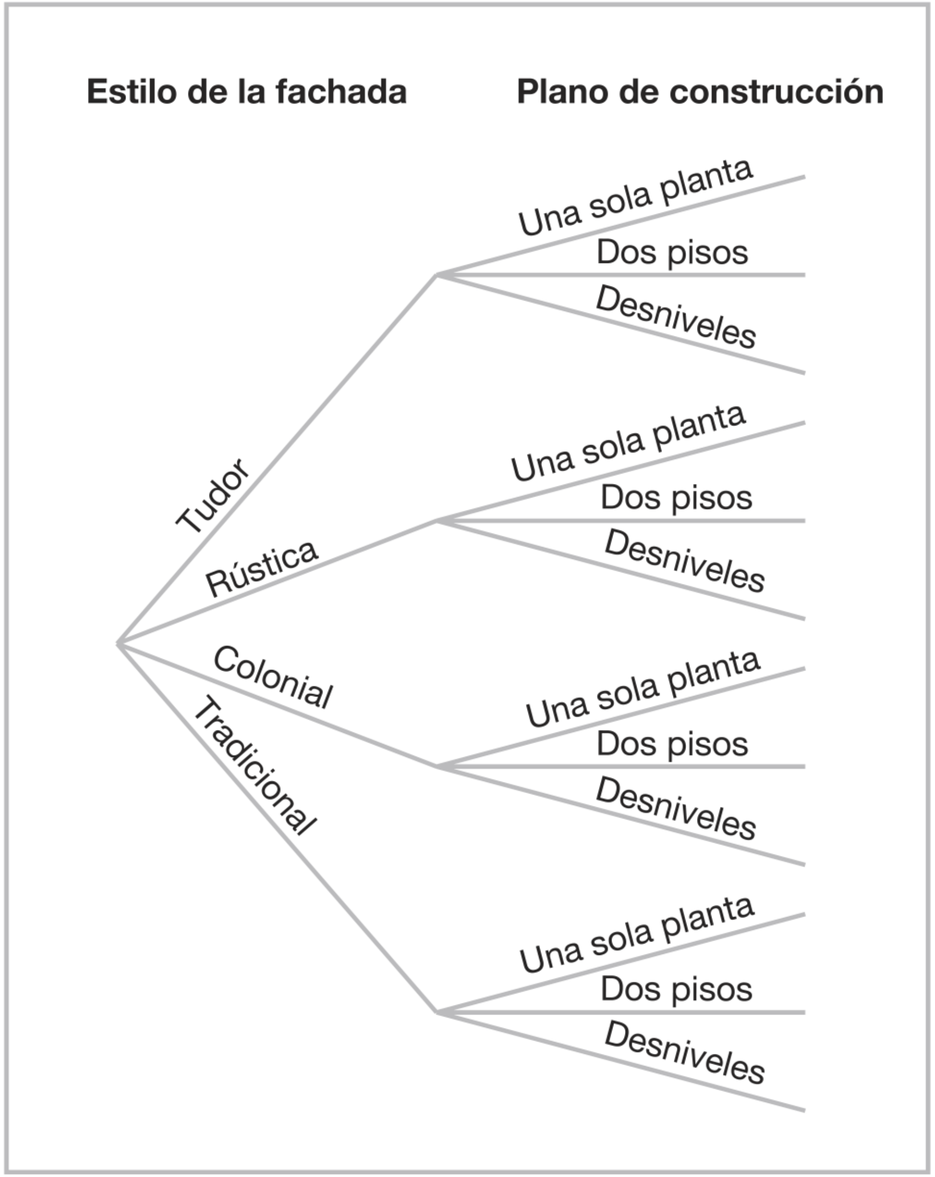
LA REGLA DE LA MULTIPLICACIÓN PARA K=2 FASES DE OPCIONES

¿En cuantas formas diferentes un sindicato local con 25 miembros puede elegir a un vicepresidente y a un presidente?

LA REGLA DE LA MULTIPLICACIÓN PARA K=2 FASES DE OPCIONES

Si una prueba consiste en 12 preguntas de verdadero o falso ¿ de cuantas formas diferentes un estudiante puede marcar el examen con una respuesta a cada pregunta?

Ejemplo 2.14: Un urbanista de una nueva subdivisión ofrece a los posibles compradores de una casa elegir entre Tudor, rústica, colonial y tradicional el estilo de la fachada, y entre una planta, dos pisos y desniveles el plano de construcción. ¿En cuántas formas diferentes puede un comprador ordenar una de estas casas?


Estilo de la fachada
Plano de construcción
Tudor
Rústica
Colonial
Tradicional
Una sola planta
Dos pisos
Desniveles
Una sola planta
Dos pisos
Desniveles
Una sola planta
Dos pisos
Desniveles
Una sola planta
Dos pisos
Desniveles

¿Cuántos eventos simples hay en el espacio muestral cuando se lanzan al aire tres monedas?

Cuantos números pares de cuatro dígitos se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 5, 6 y 9, ¿si cada digito se puede usar solo una vez?

PERMUTACIONES

Un conjunto de elementos en que la composición y el orden son importantes es una permutación

Con las 3 únicas letras: A, B y C¿Cuántas permutaciones de orden 3 podemos obtener?. Las permutaciones son disposiciones en que cuenta el orden. La lista de permutaciones de los 3 elementos es:

A B C	B C A
A C B	C A B
B A C	C B A

Obsérvese que las 6 permutaciones diferentes e obtienen por mera reordenación de los elementos. Como en la permutación cuenta el orden , una ordenación distinta da lugar a una permutación diferente

El número de permutaciones de n objetos es n!

```
> factorial(n)
```

El número de permutaciones de r objetos es seleccionados de un conjunto de n objetos distintos es

$$nPr = n(n-1)\ldots(n-r-1)$$

o bien, en notación factorial es:

$$nPr = \frac{n!}{(n-r)!}$$

```
> factorial(n) / (factorial(n-r))
```

Ejemplo 2.18: En un año se otorgará uno de tres premios (a la investigación, la enseñanza y el servicio) a algunos de los estudiantes, de un grupo de 25, de posgrado del departamento de estadística. Si cada estudiante puede recibir un premio como máximo, ¿cuántas selecciones posibles habría?

***Solución*:** Como los premios son distinguibles, se trata de un problema de permutación. El número total de puntos muestrales es

$$_{25}P_3 = \frac{25!}{(25-3)!} = \frac{25!}{22!} = (25)(24)(23) = 13{,}800.$$

COMBINACIONES

Un conjunto de elementos en que solo la composición es importante (el orden es indiferente) es una combinación

```
> choose(n,r)
```

Supongamos que en la feria ahora ya se han elegido a los 10 cerdos ganadores y que a cada uno se le concede una cinta sin distinguir entre los puestos 1ero, 2do y 3ero. En este caso el orden de selección no es importante.

$$ {}_{n}C_{r} = \frac{n!}{r!\ (n-r)!} $$

$$ {}_{10}C_{3} = \frac{10!}{3!\ (10-3)!} = \frac{1*2*3*4*5*6*7*8*9*10}{(1*2*3)(1*2*3*4*5*6*7)} = 120 $$

Hay 120 maneras de premiar con una cinta a 3 de los 10 cerdos.

Ejemplo 2.22: Un niño le pide a su madre que le lleve cinco cartuchos de Game-Boy™ de su colección de 10 juegos recreativos y 5 de deportes. ¿De cuántas maneras podría su madre llevarle 3 juegos recreativos y 2 de deportes?

***Solución*:** El número de formas de seleccionar 3 cartuchos de 10 es

$$\binom{10}{3} = \frac{10!}{3!\,(10-3)!} = 120.$$

El número de formas de seleccionar 2 cartuchos de 5 es

$$\binom{5}{2} = \frac{5!}{2!\,3!} = 10.$$

Si utilizamos la regla de la multiplicación (regla 2.1) con $n_1 = 120$ y $n_2 = 10$, tenemos que hay $(120)(10) = 1200$ formas.

Ejemplo 2.23: ¿Cuántos arreglos diferentes de letras se pueden hacer con las letras de la palabra *STATISTICS*?

***Solución*:** Si utilizamos el mismo argumento expuesto en el teorema 2.6, en este ejemplo podemos realmente aplicar el teorema 2.5 para obtener

$$\binom{10}{3, 3, 2, 1, 1} = \frac{10!}{3!\,3!\,2!\,1!\,1!} = 50{,}400.$$

Aquí tenemos 10 letras en total, donde 2 letras (S, T) aparecen tres veces cada una, la letra I aparece dos veces, y las letras A y C aparecen una vez cada una. Por otro lado, el resultado se puede obtener directamente usando el teorema 2.4. ▟

Introducción

PROBABILIDAD

- Enfoques de la Probabilidad
  - Frecuencia Relativa
  - Subjetivo
  - Clásico
- Reglas de la Probabilidad
  - Regla de la Suma
  - Regla de la Multiplicación
- Arboles de Probabilidad
  - Teorema de Bayes
- Técnicas Combinatorias
  - Permutaciones
  - Combinaciones
  - Variaciones Con Repetición
  - Multiplicación

Probabilidad Condicional

EJEMPLO

Comprobación de posibles asignaciones de probabilidad

Si un experimento tiene los tres resultados posibles y mutuamente excluyentes A, B y C, compruebe en cada caso si la asignación de probabilidades es permisible:

a) $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{3}$ y $P(C) = \frac{1}{3}$

b) $P(A) = 0.64$, $P(B) = 0.38$ y $P(C) = -0.02$

c) $P(A) = 0.35$, $P(B) = 0.52$ y $P(C) = 0.26$

d) $P(A) = 0.57$, $P(B) = 0.24$ y $P(C) = 0.19$

Ejemplo 2.25: Se carga un dado de forma que exista el doble de probabilidades de que salga un número par que uno impar. Si E es el evento de que ocurra un número menor que 4 en un solo lanzamiento del dado, calcule $P(E)$.

El espacio muestral es $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Asignamos una probabilidad de w a cada número impar y una probabilidad de $2w$ a cada número par. Como la suma de las probabilidades debe ser 1, tenemos $9w = 1$ o $w = 1/9$. Por lo tanto, asignamos probabilidades de 1/9 y 2/9 a cada número impar y par, respectivamente. Por consiguiente,

$$E = \{1, 2, 3\} \text{ y } P(E) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{9} = \frac{4}{9}.$$

AXIOMAS DE PROBABILIDAD

Si A y B son dos eventos, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

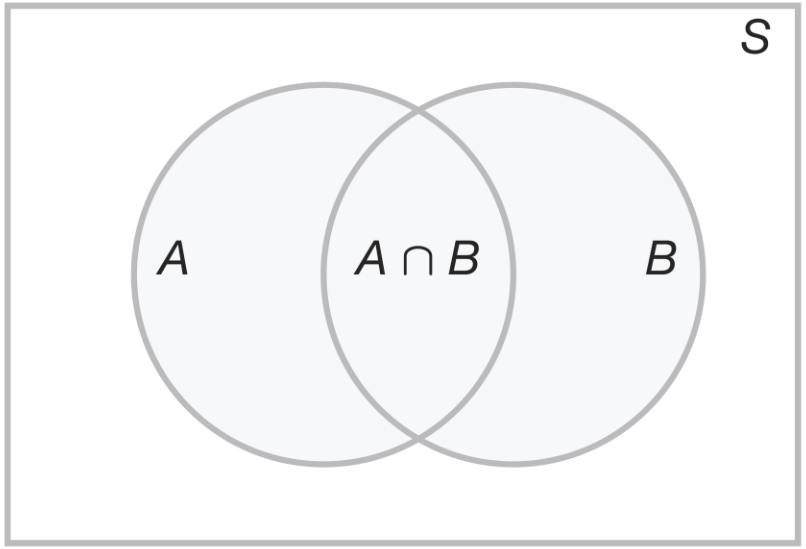


Figura 2.7: Regla aditiva de probabilidad.

EJEMPLO:

Probabilidad de sacar un As o una carta de corazones en una sola extracción de una baraja. Es decir, buscamos P(A o H). Observar que "As" (A) y "corazones" (H) no son mutuamente excluyentes. Los 2 ocurren su se saca un As de corazones. Entonces:

$$P\,(A\ o\ H) = P(A) + P(B) - P(A\ y\ H)$$

$$= \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = 0.307 \rightarrow 30.7\%$$

Corolario 2.2: Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son mutuamente excluyentes, entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n).$$

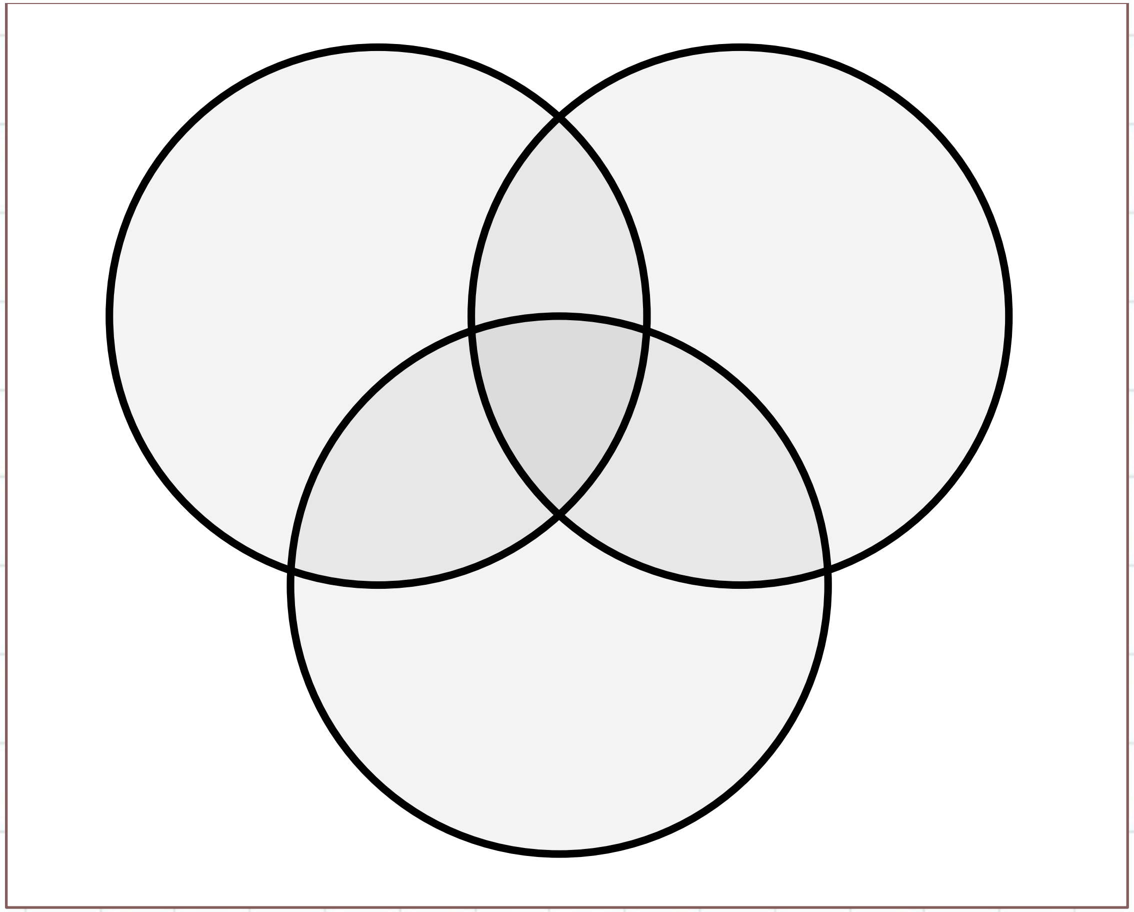
Un conjunto de eventos $\{A_1, A_2, \ldots A_n\}$ de un espacio muestral S se denomina **partición** de S si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son mutuamente excluyentes y $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = S$. Por lo tanto, tenemos

Corolario 2.3: Si $A_1, A_2, \ldots, A_n$ es una partición de un espacio muestral S, entonces

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = P(S) = 1.$$

Teorema 2.8: Para tres eventos A, B y C,

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$



2.52 Suponga que se descubre que, en un grupo de 500 estudiantes universitarios de último año, 210 fuman, 258 consumen bebidas alcohólicas, 216 comen entre comidas, 122 fuman y consumen bebidas alcohólicas, 83 comen entre comidas y consumen bebidas alcohólicas, 97 fuman y comen entre comidas y 52 tienen esos tres hábitos nocivos para la salud. Si se selecciona al azar a un miembro de este grupo, calcule la probabilidad de que el estudiante

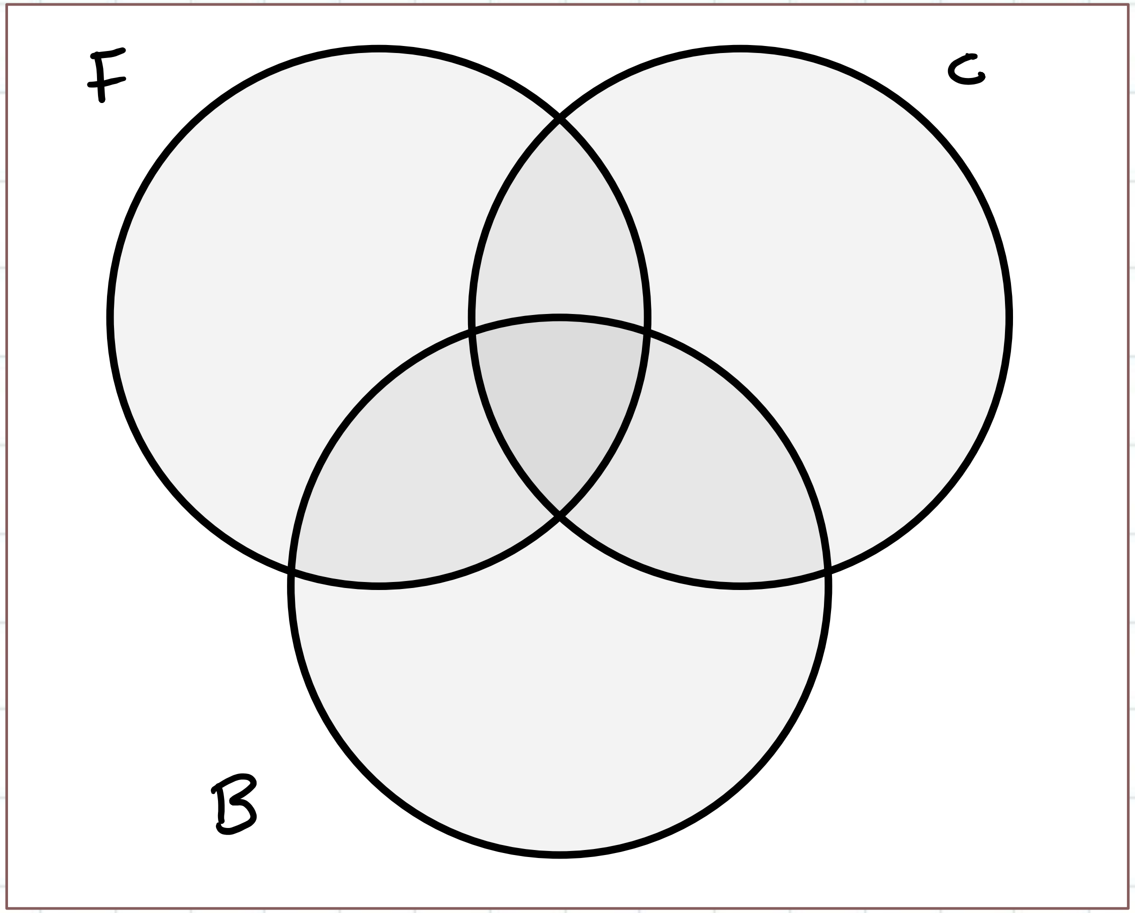
2.52 Suponga que se descubre que, en un grupo de 500 estudiantes universitarios de último año, 210 fuman, 258 consumen bebidas alcohólicas, 216 comen entre comidas, 122 fuman y consumen bebidas alcohólicas, 83 comen entre comidas y consumen bebidas alcohólicas, 97 fuman y comen entre comidas y 52 tienen esos tres hábitos nocivos para la salud. Si se selecciona al azar a un miembro de este grupo, calcule la probabilidad de que el estudiante

Fuman (F)

Beben (B)

Comen (C)

Ω



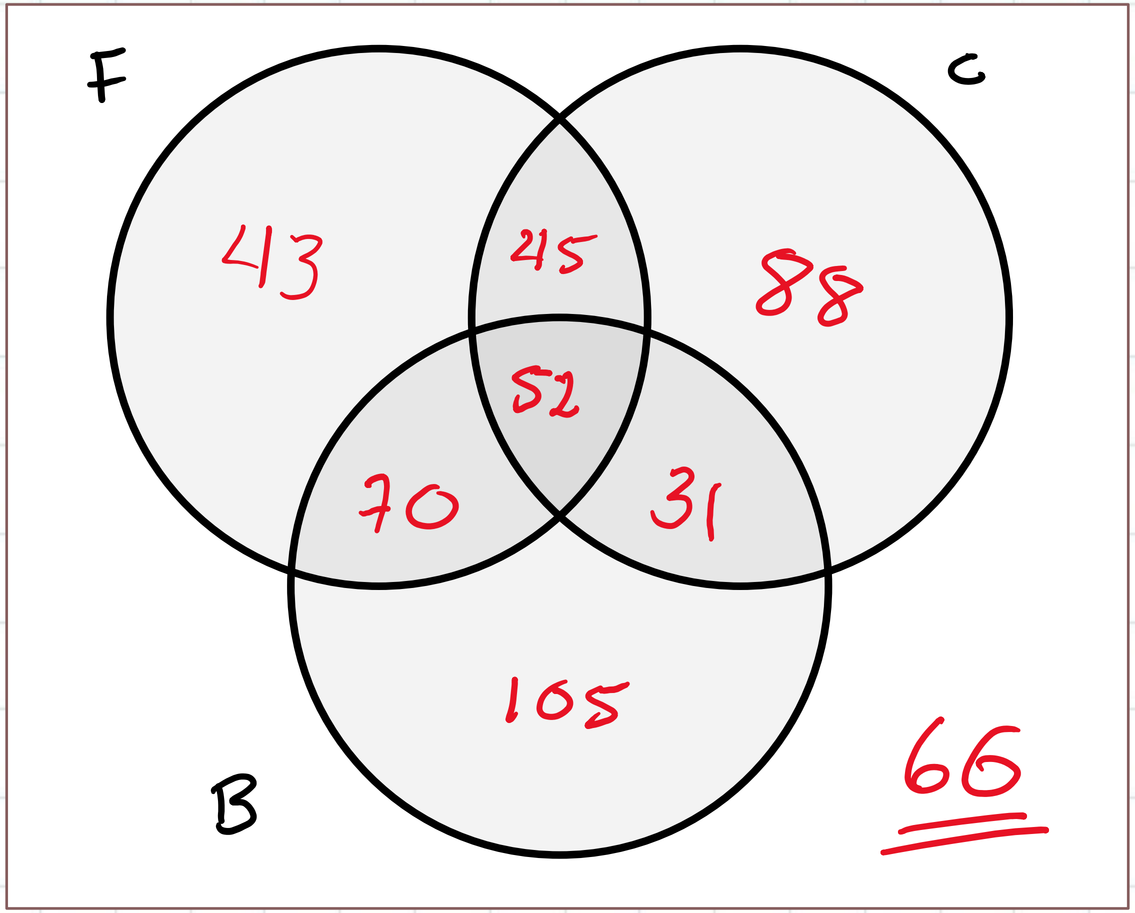
2.52 Suponga que se descubre que, en un grupo de 500 estudiantes universitarios de último año, 210 fuman, 258 consumen bebidas alcohólicas, 216 comen entre comidas, 122 fuman y consumen bebidas alcohólicas, 83 comen entre comidas y consumen bebidas alcohólicas, 97 fuman y comen entre comidas y 52 tienen esos tres hábitos nocivos para la salud. Si se selecciona al azar a un miembro de este grupo, calcule la probabilidad de que el estudiante

Fuman (F)

Beben (B)

Comen (C)

Ω



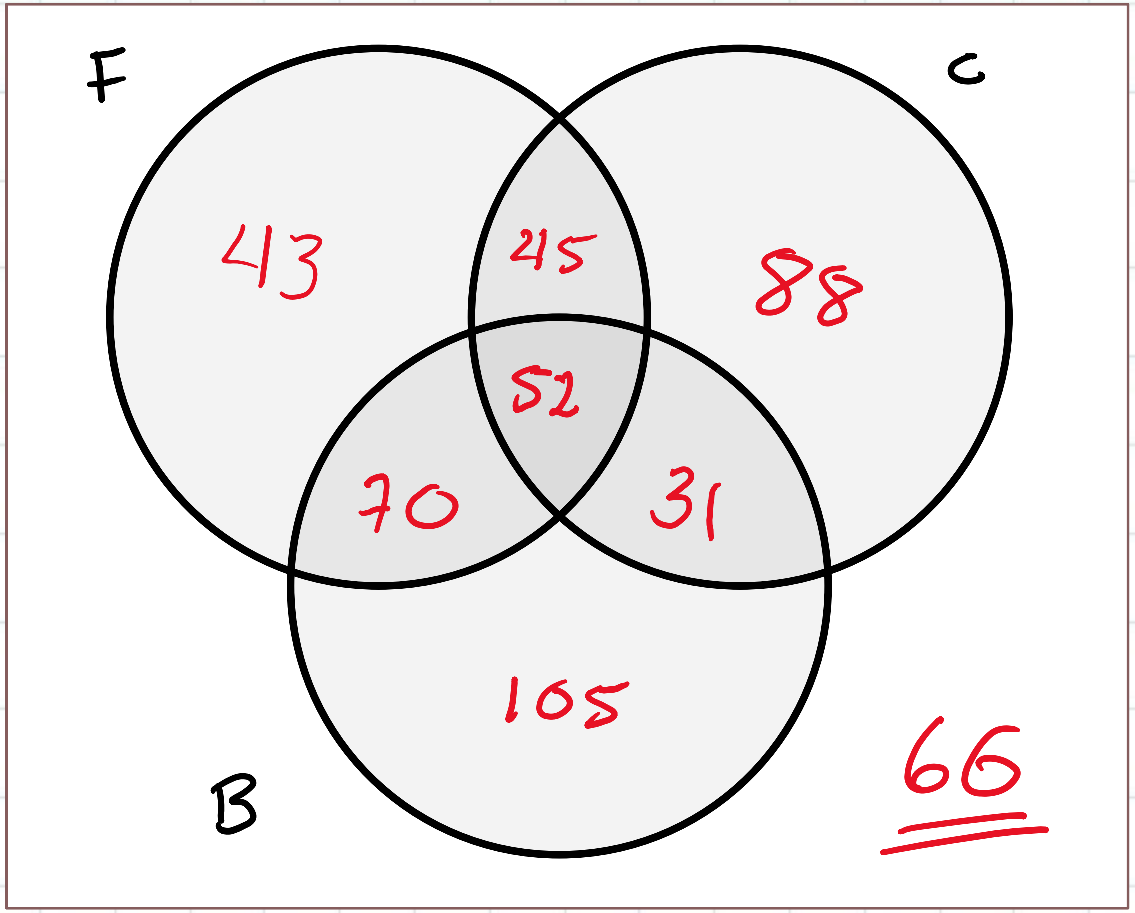
2.52 Suponga que se descubre que, en un grupo de 500 estudiantes universitarios de último año, 210 fuman, 258 consumen bebidas alcohólicas, 216 comen entre comidas, 122 fuman y consumen bebidas alcohólicas, 83 comen entre comidas y consumen bebidas alcohólicas, 97 fuman y comen entre comidas y 52 tienen esos tres hábitos nocivos para la salud. Si se selecciona al azar a un miembro de este grupo, calcule la probabilidad de que el estudiante

a) fume pero no consuma bebidas alcohólicas;

b) coma entre comidas y consuma bebidas alcohólicas pero no fume;

c) no fume ni coma entre comidas.

Ω



EJEMPLO 4.17

Un compañía de exploración petrolera planea perforar dos pozos de exploración. Se emplea evidencia del pasado para tener acceso a los posibles resultados de la tabla 4.4.

TABLA 4.4 **Resultados para el experimento de perforación petrolífera**

Evento	Descripción	Probabilidad
A	Ningún pozo produce petróleo ni gas	.80
B	Exactamente un pozo produce petróleo o gas	.18
C	Ambos pozos producen petróleo o gas	.02

Encuentre $P(A \cup B)$ y $P(B \cup C)$.

En una encuesta telefónica hecha a mil adultos, a los que respondieron se les preguntó acerca del gasto de una educación universitaria y la relativa necesidad de alguna forma de ayuda financiera. Quienes respondieron fueron clasificados de acuerdo a si actualmente tenían un hijo en la universidad y si pensaban que la carga de un préstamo para casi todos los estudiantes universitarios es demasiado alta, la cantidad correcta o es muy poco. Las proporciones de quienes contestaron se muestran en la **tabla de probabilidad** de la tabla 4.5. Suponga que un entrevistado se escoge al azar de entre este grupo.

Tabla de probabilidad

	Demasiado alta (A)	Cantidad correcta (B)	Muy poco (C)
Hijo en universidad	.35	.08	.01
Sin hijo en univ.	.25	.20	.11

	A	B	C	Total
CH	**0.35**	**0.08**	**0.01**	0.44
SH	**0.25**	**0.2**	**0.11**	0.56
Total	0.6	0.28	0.12	1

1. ¿Cuál es la probabilidad de que el entrevistado tenga un hijo en la universidad?

	A	B	C	Total
CH	**0.35**	**0.08**	**0.01**	0.44
SH	**0.25**	**0.2**	**0.11**	0.56
Total	0.6	0.28	0.12	1

2. ¿Cuál es la probabilidad de que el entrevistado no tenga un hijo en la universidad?

	A	B	C	Total
CH	**0.35**	**0.08**	**0.01**	0.44
SH	**0.25**	**0.2**	**0.11**	0.56
Total	0.6	0.28	0.12	1

3. ¿Cuál es la probabilidad de que el entrevistado tenga un hijo en la universidad o piense que la carga de un préstamo es demasiado alta?