数学物理方法第五章

路毅　　曲阜师范大学

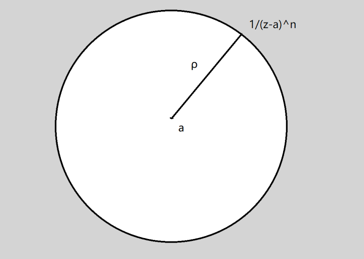
2022 年 4 月 6 日

第五章：留数及其应用

- 第一节：留数

- 第二节：利用留数计算实积分

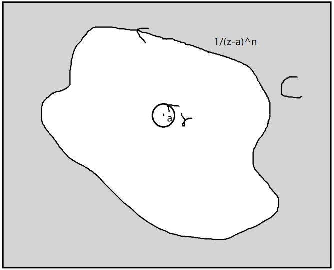
圆形围线积分 $\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n}, n \in Z$



C 为半径为 ρ 的圆形围线，a 为圆心，则可设 $z = a + \rho e^{i\phi}$，

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} &= \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\phi} d\phi}{(\rho e^{i\phi})^n} = \int_0^{2\pi} i\rho^{1-n} e^{i(1-n)\phi} d\phi \\ &= \begin{cases} 2\pi i, & n = 1 \\ 0, & else \end{cases} \end{aligned} \tag{1}$$

任意形状围线积分 $\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n}, n \in Z$



C 为任意形状单围线，a 为其内部一点。γ 为 C 内部以 a 为圆心的小圆。根据柯西积分定理，

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint_\gamma \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n = 1 \\ 0, & else \end{cases} \tag{2}$$

留数：$Res(f,a)=c_{-1}$

如果解析函数 $f(z)$ 在 a 点的去心邻域 $0<|z-a|<R$ 内洛朗展开为

$$f(z)=\cdots+c_{-2}(z-a)^{-2}+c_{-1}(z-a)^{-1}+c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots, \tag{3}$$

C 为去心邻域内一条围线，a 点在其内部，则有

$$\oint_C f(z)dz=\oint_C\sum_{n=\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n dz=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n\oint_C(z-a)^n dz=2\pi i c_{-1}, \tag{4}$$

可见，$\oint_C f(z)dz$ 完全只关乎 $f(z)$ 洛朗展开的 -1 幂次项系数。
所以，定义 c_{-1} 为函数 $f(z)$ 在 a 点的**留数**为：

$$Res(f,a)=c_{-1}=\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz. \tag{5}$$

例子

例 1：$f(z) = ze^{1/z}$ 在本性奇点 $z = 0$ 处的留数 $Res(f, z = 0)$。

留数定理

设 $f(z)$ 在围线或复围线 C 所包围的区域 D 内，除点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 外解析，在闭域 $\bar{D} = D + C$ 上除点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 外连续，则

$$\oint_C f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, a_k), \tag{6}$$

证明：

i) 分别以 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 为圆心作足够小的圆 (互相之间无交叠，与 C 无交叠)$\gamma_1, \cdots, \gamma_n$，根据复围线柯西积分定理

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \oint_{\gamma_i} f(z)dz, \tag{7}$$

ii) 根据上页课件，$\oint_{\gamma_i} f(z)dz = 2\pi i Res(f, a_i)$，所以有

$$\oint_C f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \oint_{\gamma_i} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, a_k). \tag{8}$$

留数的求法

若函数 $f(z)$ 的洛朗展开已知，则取 $Res(f,a)=c_{-1}$ 即可。

定理 5.2 若 a 为 $f(z)$ 的 n 阶极点，则

$$Res(f,a)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{n-1}[(z-a)^n f(z)]}{dz^{n-1}}. \tag{9}$$

推论 1 若 a 为 $f(z)$ 的一阶极点，则 $Res(f,a)=\lim_{z\to a}(z-a)f(z)$.

推论 2 若 $f(z)=\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$, $\varphi(z),\psi(z)$ 在 a 点解析且 $\psi(a)=0,\psi'(a)\neq 0$，则

$$Res(f,a)=\frac{\varphi(a)}{\psi'(a)}. \tag{10}$$

例题

例 3 计算 $\oint_C \frac{dz}{z^2+1}$，其中 C 为 $|z-i|=1, |z+i|=1, |z|=2$。

例 4 计算 $\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z^3} dz$。

例 5 计算积分 $\oint_{|z|=n} \tan(\pi z) dz$，$n$ 为正整数。

例 6 计算 $\oint_{|z|=1} \frac{z \sin z}{(1-e^z)^3} dz$。

无穷远点的留数

定义：设 ∞ 为 $f(z)$ 的一个孤立奇点，即 $f(z)$ 在某区域 $0 \leq r < |z| < \infty$ 内解析，我们称

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{C^-} f(z)dz \quad (C : |z| = \rho, \rho\text{充分大}) \tag{11}$$

为 $f(z)$ 在点 ∞ 的留数，记作 $Res(f,\infty)$，C^- 指沿 C 的顺时针。
若在 $|z|$ 充分大时，$f(z)$ 有洛朗展开

$$f(z) = \cdots + c_{-n}/z^n + \cdots + c_{-1}/z + c_0 + c_1 z + \cdots + c_n z^n + \cdots, \tag{12}$$

可知 $Res(f,\infty) = -c_{-1}$。

所有留数之和为 0

若 $f(z)$ 只有有限个孤立奇点 $a_1, \cdots, a_k$，则

$$Res(f, \infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{C^-} f(z)dz = -\frac{1}{2\pi i} \oint_C f(z)dz = -\sum_k Res(f, a_k), \tag{13}$$

即

$$\sum_k Res(f, a_k) + Res(f, \infty) = 0. \tag{14}$$

所有留数之和为零。

例题

计算积分

$$I = \oint_{|z|=4} \frac{z^{15} dz}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}. \tag{15}$$

思路：

$$I = 2\pi i \sum_k Res(f, a_k) = -2\pi i Res(f, \infty) = 2\pi i c_{-1}, \tag{16}$$

其中 c_{-1} 为 $f(z)$ 在 $|z|$ 充分大的区域做洛朗展开的 -1 阶系数。

例题

例 7 计算积分

$$I = \oint_{|z|=4} \frac{z^{15}dz}{(z^2+1)^2(z^4+2)^3}. \tag{17}$$

思路 1：$I = 2\pi i \sum_k Res(f, a_k) = -2\pi i Res(f, \infty) = 2\pi i c_{-1}$，其中 c_{-1} 为 $f(z)$ 在 $|z|$ 充分大时洛朗展开的 -1 阶系数。

思路 2：因为奇点都在 $|z| = 4$ 内，所以如果将积分路径改为半径充分大的圆，I 的值不变，$|z|$ 充分大时，$f(z) \to 1/z$，即 $I = 2\pi i$。

第二节：利用留数计算实积分

狄利克雷积分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx. \tag{18}$$

菲涅尔积分

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx. \tag{19}$$

泊松积分

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \cos(bx) dx, a > 0, b \in R. \tag{20}$$

$I=\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta$

$R(\cos\theta,\sin\theta)$ 是 $\cos\theta,\sin\theta$ 的二元有理函数，且在 $[0,2\pi]$ 上连续。

在单位圆上有 $z=e^{i\theta}, dz=ie^{i\theta}d\theta$,

$$\frac{z+z^{-1}}{2}=\cos\theta,\quad \frac{z-z^{-1}}{2i}=\sin\theta. \tag{21}$$

可以定义

$$f(z)=\frac{1}{iz}R(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2i}), \tag{22}$$

那么 I 可以转化为

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)d\theta=\int_0^{2\pi} R(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2i})d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} R(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2i})dz/(iz) \\ &= \oint_{|z|=1} f(z)dz=2\pi i\sum_k Res(f,a_k), \end{aligned} \tag{23}$$

其中 a_k 为 $f(z)$ 在 $|z|=1$ 内的孤立奇点。

例 8

例 8 计算积分

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1+\epsilon\cos\theta}, 0<\epsilon<1. \tag{24}$$

思路：

$$f(z)=\frac{1}{2\pi iz}\frac{1}{1+\frac{\epsilon}{2}(z+z^{-1})}=\frac{1}{\pi i\epsilon}\frac{1}{z^2+\frac{2}{\epsilon}z+1}. \tag{25}$$

有两个 1 阶极点

$$z=-\frac{1}{\epsilon}\pm\frac{1}{\epsilon}\sqrt{1-\epsilon^2}. \tag{26}$$

一个在单位圆内，一个在单位圆外，取 $-1/\epsilon+1/\epsilon\sqrt{1-\epsilon^2}$ 处留数，乘以 $2\pi i$，即得积分结果。

例 9

计算积分

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{1-2p\cos\theta+p^2},0<|p|<1. \tag{27}$$

思路：

$$f(z)=\frac{i}{pz^2-(p^2+1)z+p}=\frac{i}{(pz-1)(z-p)}, \tag{28}$$

它有两个 1 阶极点

$$z=p,\frac{1}{p} \tag{29}$$

一个在单位圆内，一个在单位圆外，取 $z=p$ 处留数，乘以 $2\pi i$ 即可。

例 10

计算积分

$$I=\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta-\sin\theta)d\theta, n=0,1,2,3,\cdots \tag{30}$$

思路：为了方便计算 $\cos,\sin$ 函数，可以给积分补一个虚部部分，构成 e 指数形式，积分完成以后，再取实部，即 I 的值。

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\cos(n\theta-\sin\theta)d\theta-i\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}\sin(n\theta-\sin\theta)d\theta\\ =&\int_0^{2\pi} e^{\cos\theta}e^{-i(n\theta-\sin\theta)}d\theta=\int_0^{2\pi} e^{e^{i\theta}}e^{-in\theta}d\theta\end{aligned} \tag{31}$$

在单位圆上，$z=e^{i\theta}$，所以

$$f(z)=e^z z^{-n}/(iz)=-ie^z z^{-(n+1)}, \tag{32}$$

有 1 个 $n+1$ 阶极点 $z=0$，留数为 $-i/n!$，所以有

$$I=Re\{2\pi i(-i/n!)\}=2\pi/n!. \tag{33}$$

积分路径上无奇点的反常积分 $I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$

定义：

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx. \tag{34}$$

也称作 $f(x)$ 的柯西主值。
构造半圆弧 $C : |z| = R, Imz > 0$，则有

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx + \lim_{R\to\infty} \oint_{|z|=R, Imz>0} f(z)dz = 2\pi i \sum_k Res(f, a_k), \tag{35}$$

其中 a_k 为上半复平面的有限个孤立奇点。

如果 $f(z)$ 确实在上半平面只有有限个孤立奇点，而且上式左边第二项好求，就可以避开直接计算 I 的困难，如上利用留数定理求解。

大圆弧引理

$f(z)$ 在圆弧 $S_R : z = Re^{i\theta}, \theta_1 \leq \theta \leq \theta_2 (R$ 充分大$)$ 上连续，且

$$\lim_{R\to\infty} zf(z) = \lambda \tag{36}$$

在 S_R 上一致成立，则有

$$\lim_{R\to\infty} \int_{S_R} f(z)dz = i(\theta_2 - \theta_1)\lambda. \tag{37}$$

定理 5.5

设 $f(z)$ 在上半平面 $Imz > 0$ 内除了有限多个孤立奇点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 外解析，在 $Imz \geq 0$ 上除点 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 外连续，且 $\lim\limits_{z\to\infty, Imz\geq 0} zf(z) = 0$ 一致成立，则

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} Res(f, a_k). \tag{38}$$

例题

例 11 设 $a>0$，计算 $\int_0^\infty \frac{dx}{x^4+a^4}$。

例 12 计算 $I=\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^3}$。

若尔当引理

设 $f(z)$ 在半圆周 $\Gamma_R: z = Re^{i\theta}(0 \le \theta \le \pi, R\text{充分大})$ 上连续，且 $\lim\limits_{R\to\infty} f(z) = 0$ 在 Γ_R 上一致成立，则

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma_R} f(z)e^{imz}dz = 0, (m > 0). \tag{39}$$

思路：利用若尔当不等式

$$\frac{2\theta}{\pi} \le \sin\theta \le \theta, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}, \tag{40}$$

可以求出

$$\int_0^\pi e^{-mR\sin\theta}d\theta \le \frac{\pi}{mR}(1 - e^{-mR}), \tag{41}$$

利用这个式子，可以证明 (39) 式。

若尔当引理的重要结论

定理 5.6 设 $f(z)$ 在半圆周 $\Gamma_R: z=Re^{i\theta}(0\le\theta\le\pi, R$充分大$)$ 上连续，且 $\lim\limits_{R\to\infty} f(z)=0$ 在 $Imz\ge 0$ 上一致成立，易证

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{imx}dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res(f(z)e^{imz}, a_k), m>0. \tag{42}$$

分开等式两边的实部虚部，可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(mx)dx = -2\pi Im\left\{\sum_{k=1}^{n} Res(f(z)e^{imz}, a_k)\right\}, \tag{43}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(mx)dx = 2\pi Re\left\{\sum_{k=1}^{n} Res(f(z)e^{imz}, a_k)\right\}. \tag{44}$$

若尔当引理的重要结论

若 $f(x)$ 为偶函数或奇函数，则

$$\int_0^{\infty} f(x)\cos(mx)dx = -\pi Im\left\{\sum_{k=1}^{n} Res(f(z)e^{imz}, a_k)\right\}, \tag{45}$$

$$\int_0^{\infty} f(x)\sin(mx)dx = \pi Re\left\{\sum_{k=1}^{n} Res(f(z)e^{imz}, a_k)\right\}. \tag{46}$$

例题

例 13 计算积分

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\cos(mx)}{1+x^2}dx,\ m>0. \tag{47}$$

积分路径上有奇点的反常积分

柯西主值：如果解析函数 $f(z)$ 在 (α,β) 上有有限个一阶极点 $a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$，则柯西主值定义为

$$V.P.\int_{\alpha}^{\beta} f(z)dz \tag{48}$$
$$=\lim_{\delta\to 0}\left\{\int_{\alpha}^{a_1-\delta} f(z)dz+\int_{a_1+\delta}^{a_2-\delta} f(z)dz+\cdots+\int_{a_n+\delta}^{\beta} f(z)dz.\right\}$$

相应地，如果 $\alpha=-\infty,\beta=\infty$，则有

$$V.P.\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz \tag{49}$$
$$=\lim_{\delta\to 0}\left\{\int_{-\infty}^{a_1-\delta} f(z)dz+\int_{a_1+\delta}^{a_2-\delta} f(z)dz+\cdots+\int_{a_n+\delta}^{\infty} f(z)dz.\right\}$$

小圆弧引理

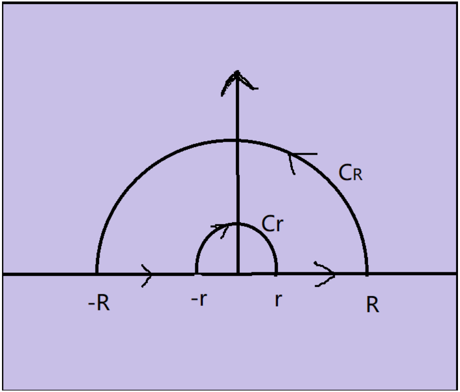
若 $f(z)$ 以 $z=a$ 为一阶极点，则在圆弧 $S_r: z-a=re^{i\theta},\theta_1\leq\theta\leq\theta_2$($r$ 充分小) 上有 $\lim_{r\to 0}(z-a)f(z)=c_{-1}$ 一致成立，其中 c_{-1} 为 $f(z)$ 在 a 点的留数。那么有

$$\lim_{r\to 0}\int_{S_r} f(z)dz = i(\theta_2-\theta_1)c_{-1}. \tag{50}$$

狄利克雷积分

$$I=\frac{1}{2}V.P.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{1}{2}Im\left\{V.P.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}}{x}dx\right\}. \tag{51}$$

考虑图中围线上对 $f(z)=\frac{e^{ix}}{2x}$ 的积分



狄利克雷积分

因为 $f(z)=e^{iz}/(2z)$ 在围线及其内部解析，所以由柯西积分定理有

$$\oint_{C_R} f(z)dz-\oint_{C_r} f(z)dz+\int_{-R}^{-r} f(z)dz+\int_{r}^{R} f(z)dz=0, \tag{52}$$

取 $r\to 0, R\to\infty$，得到

$$V.P.\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz=-\lim_{R\to\infty}\oint_{C_R} f(z)dz+\lim_{r\to 0}\oint_{C_r} f(z)dz. \tag{53}$$

由若尔当引理，

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{C_R} f(z)dz=0, \tag{54}$$

由小圆弧引理，

$$\lim_{r\to 0}\oint_{C_r} f(z)dz=\frac{\pi}{2}i, \tag{55}$$

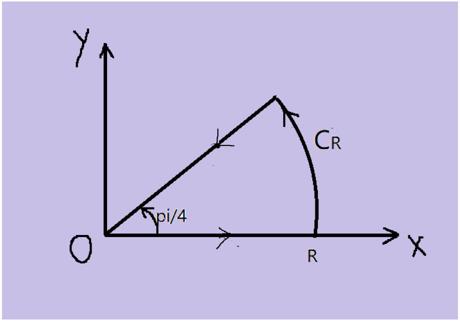
得到

$$V.P.\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz=\frac{\pi}{2}i,\quad I=Im(V.P.\int_{-\infty}^{\infty} f(z)dz)=\frac{\pi}{2}. \tag{56}$$

菲涅尔积分

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx, \int_0^\infty \cos x^2 dx, \tag{57}$$

定义函数 $f(z) = e^{iz^2}$，那么上面的积分即 $\int_0^\infty f(z)dz$ 的虚部和实部。取图中的围线，



菲涅尔积分

因为 $f(z)=e^{iz^2}$ 处处解析，所以在围线上的积分等于 0，即

$$\int_0^R e^{ix^2}dx+\oint_{C_R}f(z)dz-\int_0^R e^{i(xe^{i\pi/4})^2}d(xe^{i\pi/4})=0, \tag{58}$$

即

$$\int_0^R e^{ix^2}dx+\oint_{C_R}f(z)dz-e^{i\pi/4}\int_0^R e^{-x^2}dx=0, \tag{59}$$

$R\to\infty$ 时，右边第二项为 0，可以设 $z=Re^{i\theta/2}$，则有

$$|\oint_{C_R}f(z)dz|=|\int_0^{\pi/2}e^{i(R^2\cos\theta+iR^2\sin\theta)}(iR/2e^{i\theta/2})d\theta|\le\frac{R}{2}\int_0^{\pi/2}e^{-R^2\sin\theta}d \tag{60}$$

利用若尔当不等式 $\sin\theta\ge\frac{2}{\pi}\theta,\quad 0<\theta<\pi/2$，得到

$$|\oint_{C_R}f(z)dz|\le\frac{R}{2}\int_0^{\pi/2}e^{-2R^2\theta/\pi}d\theta=\frac{\pi}{4R}(1-e^{-R^2})\to 0. \tag{61}$$

菲涅尔积分

所以，我们从 (59) 得到

$$\int_0^\infty e^{ix^2} dx = e^{i\pi/4} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = e^{i\pi/4} \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \tag{62}$$

分别取左右两边的实部、虚部，得到

$$\int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}, \tag{63}$$

$$\int_0^\infty \sin x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}, \tag{64}$$

$$\tag{65}$$

泊松积分

$$I = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos(bx) dx, a > 0, b \in R. \tag{66}$$

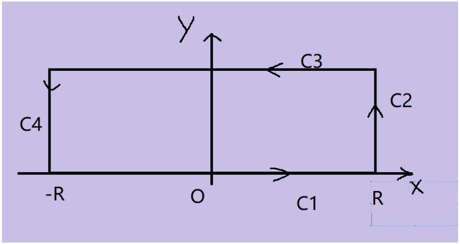
可以将 I 补上一个虚部部分

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} (\cos(bx) - i \sin(bx)) dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2 - ibx} dx \\ &= \frac{1}{2} e^{-b^2/(4a)} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a(x+ib/(2a))^2} dx \end{aligned} \tag{67}$$

这里用到了 $\sin(bx)$ 是奇函数，$\cos(bx)$ 是偶函数。

泊松积分

取 $f(z)=\frac{1}{2}e^{-b^2/(4a)}e^{-az^2}$，$I=\int_{-\infty+ib/(2a)}^{\infty+ib/(2a)}f(z)dz$。取下图所示围线



因为 $f(z)$ 处处解析，所以有

$$\oint_{C_1}f(z)dz+\oint_{C_2}f(z)dz+\oint_{C_3}f(z)dz+\oint_{C_4}f(z)dz=0, \tag{68}$$

$R\to\infty$ 时，

$$\oint_{C_1}f(z)dz\to\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}e^{-b^2/(4a)}. \tag{69}$$

泊松积分

$$|\oint_{C_2} f(z)dz| = |\frac{1}{2}e^{-b^2/(4a)}\int_0^{b/(2a)} e^{-a(R+iy)^2} idy|$$
$$\leq \frac{1}{2}e^{-b^2/(4a)}e^{-aR^2}\int_0^{b/(2a)} e^{a(y)^2} dy \to 0. \quad (70)$$

类似地，$\oint_{C_4} f(z)dz \to 0$。
另外，$\oint_{C_3} f(z)dz \to -I$，所以得到

$$I = \oint_{C_1} f(z)dz \to \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}e^{-b^2/(4a)}. \quad (71)$$

《庄子》庖丁解牛

庖丁为文惠君解牛，手之所触，肩之所倚，足之所履，膝之所F，砉然向（通“响”）然，奏刀F然，莫不中音。合于桑林之舞，乃中经首之会。
文惠君曰：“嘻，善哉！技盖至此乎？”
庖丁释刀对曰：“臣之所好者道也，进乎技矣。始臣之解牛之时，所见无非牛者。三年之后，未尝见全牛也。方今之时，臣以神遇而不以目视，官知止而神欲行。依乎天理，批大F，导大F，因其固然。技经肯綮之未尝，而况大F乎！良庖岁更刀，割也；族庖月更刀，折也。今臣之刀十九年矣，所解数千牛矣，而刀刃若新发于硎。彼节者有间，而刀刃者无厚；以无厚入有间，恢恢乎其于游刃必有余地矣，是以十九年而刀刃若新发于硎。虽然，每至于族，吾见其难为，怵然为戒，视为止，行为迟。动刀甚微，F然已解，如土委地。提刀而立，为之四顾，为之踌躇满志，善刀而藏之。”
文惠君曰：“善哉，吾闻庖丁之言，得养生焉。

习题

课堂选讲：1,3,6

课下练习：2(1-6),4(1-2),5