数学物理方法第八章

路毅　　曲阜师范大学

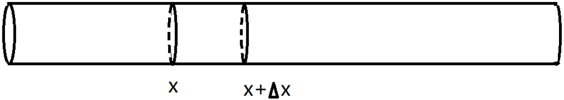
2021 年 9 月 14 日

第八章：热传导方程的傅里叶解

- 第一节：热传导方程和扩散方程的建立
- 第二节：混合问题的傅里叶解
- 第三节：初值问题的傅里叶解
- 第四节：一端有界的热传导问题

热传导方程

如图均匀细长杆，热量在上面传导，记 $u(x,t)$ 为 x 点 t 时刻的温度。



取 $[x, x+\Delta x]$ 小段，Δt 内从 x 左端流入区间内的热量为

$$\Delta Q_1 = -k u_x(x,t) A \Delta t \tag{1}$$

其中 $k>0$ 为导热系数，A 为细杆横截面积，这个方程是由实验定律决定的：传热速度与温度梯度 u_x 成正比。

热传导方程

Δt 内从 $x+\Delta x$ 右侧传入区间的热量为

$$\Delta Q_2 = k u_x(x+\Delta x, t) A \Delta t, \tag{2}$$

所以 Δt 内净流入热量为

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_2 = k \Delta x A \Delta t u_{xx}(x, t), \tag{3}$$

上式利用了 Δx 充分小，$u_x(x+\Delta x, t) - u_x(x, t) \to u_{xx}(x, t)\Delta x$。
流入的热量会使得 $[x, x+\Delta x]$ 区间内的温度上升，即

$$\Delta Q_1 + \Delta Q_2 = c\rho A \Delta x u_t \Delta t, \tag{4}$$

上式中 c 为热容，ρ 为密度，故 $\rho A \Delta x$ 为这一小段材料的质量。
所以有

$$k A u_{xx} \Delta x \Delta t = c\rho A u_t \Delta x \Delta t, \tag{5}$$

热传导方程

即

$$c\rho u_t = k u_{xx}, \tag{6}$$

可写作

$$u_t = a^2 u_{xx}, \quad a^2 = \frac{k}{c\rho}, \tag{7}$$

这就是热传导方程。

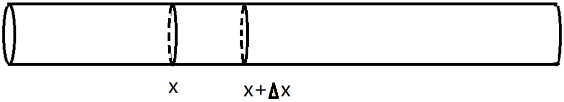
如果细杆内存在热源（比如：电烙铁，或者“热得快”），即 Δt 内传入 $[x, x+\Delta x]$ 内的热量还需加上 $F(x,t)\Delta x\Delta t$，其中 $F(x,t)$ 为热源单位时间单位长度产热。即

$$kAu_{xx}\Delta x\Delta t + F(x,t)\Delta x\Delta t = c\rho A u_t \Delta x\Delta t, \tag{8}$$

得到

$$u_t = a^2 u_{xx} + f, \quad f = \frac{F}{c\rho A}, \tag{9}$$

一维扩散方程



如图所示，考虑一根细杆上，杂质在材料中的扩散。用 $N(x,t)$ 表示 x 处在时间 t 的杂质质量密度，即杂质浓度。

取小区间 $[x,x+\Delta x]$，Δt 内从 x 左侧扩散进入 $[x,x+\Delta x]$ 的杂质质量为

$$\Delta m_1 = -DN_x(x,t)A\Delta t, \tag{10}$$

其中 D 称为扩散系数，A 是横截面积，上式是实验定律决定的：扩散快慢与浓度梯度成正比。

一维扩散方程

Δt 内从 $[x, x+\Delta x]$ 右侧传入的杂质质量为

$$\Delta m_2 = DN_x(x+\Delta x, t)A\Delta t, \tag{11}$$

所以，Δt 内净流入质量为

$$\Delta m_1 + \Delta m_2 = D(N_x(x+\Delta x, t) - N_x(x, t))A\Delta t = DN_{xx}(x, t)\Delta x A\Delta t \tag{12}$$

上式利用了 Δx 充分小这一点：$N_x(x+\Delta x, t) - N_x(x, t) \to N_{xx}(x, t)\Delta x$。
流入的杂质使得区间内浓度上升

$$DN_{xx}A\Delta x\Delta t = N_t\Delta t A\Delta x, \tag{13}$$

得到

$$N_t = a^2 N_{xx}, a^2 = D. \tag{14}$$

热量传导 v.s. 杂质扩散

热量传导：传导快慢正比于温度梯度。

杂质扩散：扩散快慢正比于浓度梯度。

因为物理规律的相似，这两种物理过程都由同一种数学形式来表达

$$u_t = a^2 u_{xx}. \tag{15}$$

热量传导，可以看作是热量的扩散。

热传导方程定解条件

热传导方程:

$$u_t = a^2 u_{xx}, \tag{16}$$

初始条件：初始时刻杆上的温度分布 $\varphi(x)$。

边界条件的三种情况 (以右端点为例):

- 已知端点温度 $u(l,t)=\mu(t)$。
- 已知端点单位截面单位时间流出的热量 $\nu(t)$，则根据傅里叶实验定律 (温差越大，导热越快)，有

  $$\nu(t)A = -ku_x(l,t)A, \tag{17}$$

  即

  $$u_x(l,t) = -\frac{1}{k}\nu(t). \tag{18}$$

- 端点与介质接触，该介质温度已知为 $\theta(t)$，则单位时间流出热量

  $$-ku_x(l,t)A = h(u(l,t)-\theta(t))A, \tag{19}$$

  上式右侧为关于热交换的牛顿实验定律 (温差越大，导热越快)。所以有

  $$ku_x(l,t)+hu(l,t) = h\theta(t). \tag{20}$$

混合问题的傅里叶解：两端温度恒为 0

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, (0 < x < l, t > 0) \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0, (t \geq 0) \\ u(x,0) = \varphi(x), (0 \leq x \leq l) \end{cases} \tag{21}$$

杆两端泡在冰水中，所以温度恒为 0，初始时刻杆上有一定温度分布。

如果杆是烧红的铁棒，那么热量会迅速流向冰水中，铁棒上的温度逐渐下降，直到变成一根冰冷的铁棒。

如果杆是刚从液氮中取出，极其寒冷，那么热量会迅速从冰水中流向铁棒，温暖它，直到它变成 0 度的铁棒。

分离变量法

故技重施，我们先设一个简单的形式

$$u(x,t) = T(t)X(x), \tag{22}$$

代入 $u_t = a^2 u_{xx}$，得到

$$\frac{1}{a^2}\frac{T'}{T} = \frac{X''}{X} = -\lambda, \tag{23}$$

求解

$$\begin{cases} X''/X = -\lambda, \\ X(0) = X(l) = 0, \end{cases} \tag{24}$$

得到 (上式中 $X(0) = X(l) = 0$ 是由 $u(0,t) = u(l,t) = 0$ 推得)，

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{l^2}, n = 1, 2, 3, \cdots \tag{25}$$

分离变量法

相应地，

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l}, \quad T_n(t) = C_n e^{-a^2\lambda_n t}, \tag{26}$$

即

$$u_n(x,t) = C_n e^{-a^2\lambda_n t}\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{27}$$

所有 $u_n(x,t)$ 叠加起来，得到

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2\lambda_n t}\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{28}$$

取 $t=0$，得到

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{n\pi x}{l} = \varphi(x). \tag{29}$$

即

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx, n = 1,2,3,\cdots \tag{30}$$

只要 $\varphi(x)$ 满足狄利克雷条件 (物理问题中都满足)，上面的 C_n 代入 $u(x,0)$，就一定会在任意 x 收敛至 $\varphi(x)$。

$l \to \infty$：傅里叶级数 $\to$ 傅里叶积分

使用有限的 l 值，傅里叶级数的一般形式为

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right), \tag{31}$$

其中 a_n, b_n 为

$$a_n \equiv \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\cos\frac{n\pi\xi}{l}d\xi, n=0,1,2,\cdots \tag{32}$$

$$b_n \equiv \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi, n=1,2,\cdots \tag{33}$$

$$\tag{34}$$

将 a_n, b_n 代入上面的 $f(x)$ 式，得到

$$f(x)=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\cos\frac{n\pi(\xi-x)}{l}d\xi. \tag{35}$$

上式使用了差角公式 $\cos\frac{n\pi(\xi-x)}{l}=\cos\frac{n\pi\xi}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}+\sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$。

$l \to \infty$：傅里叶级数 $\to$ 傅里叶积分

如果 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx$ 有限，即绝对可积，那么可取 $l \to \infty$ 极限，

$$f(x) = \lim_{l\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(\xi) \cos \frac{n\pi(\xi - x)}{l} d\xi. \tag{36}$$

取 $\lambda_1 = \frac{\pi}{l}, \lambda_2 = \frac{2\pi}{l}, \cdots, \Delta\lambda_n = \lambda_{n+1} - \lambda_n = \frac{\pi}{l}$，则有

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{\Delta\lambda\to 0} \frac{1}{\pi} \Delta\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos(\lambda_n(\xi - x)) d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos(\lambda(\xi - x)) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos(\lambda(\xi - x)) d\xi. \end{aligned} \tag{37}$$

$l \to \infty$：傅里叶级数 $\to$ 傅里叶积分

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\lambda(\xi - x))d\xi, \tag{38}$$

可以拆开，得到

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} [A(\lambda)\cos(\lambda x) + B(\lambda)\sin(\lambda x)]d\lambda, \tag{39}$$

其中

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos(\lambda\xi)d\xi, \tag{40}$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin(\lambda\xi)d\xi. \tag{41}$$

无穷长杆初值问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, (-\infty < x < \infty, t > 0), \\ u(x,0) = \varphi(x), (-\infty < x < \infty), \end{cases} \tag{42}$$

故技重施，先构造分离变量的解，$u(x,t) = T(t)X(x)$，然后再线性叠加，用初始条件约束得到问题的最终解。

$$\begin{cases} T' + \lambda a^2 T = 0, \\ X'' + \lambda X = 0. \end{cases} \tag{43}$$

$\lambda = 0$ 时，得到平庸解。
$\lambda < 0$ 时，得到

$$X = Ae^{\sqrt{-\lambda}x} + Be^{-\sqrt{-\lambda}x}, \tag{44}$$

在 $\pm\infty$ 发散，是非物理的解。

无穷长杆初值问题

$\lambda > 0$ 时，记 $\mu^2 = \lambda$，则有

$$\begin{cases} T' + \mu^2 a^2 T = 0, \\ X'' + \mu^2 X = 0. \end{cases} \tag{45}$$

得到

$$\begin{cases} X_\mu = A(\mu)\cos(\mu x) + B(\mu)\sin(\mu x), \\ T_\mu = e^{-\mu^2 a^2 t} \end{cases} \tag{46}$$

即

$$u_\mu(x,t) = (A(\mu)\cos(\mu x) + B(\mu)\sin(\mu x))e^{-\mu^2 a^2 t}. \tag{47}$$

通解形式为

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} u_\mu(x,t)d\mu = \int_{-\infty}^{\infty} (A(\mu)\cos(\mu x) + B(\mu)\sin(\mu x))e^{-\mu^2 a^2 t}d\mu. \tag{48}$$

无穷长杆初值问题

在 $t=0$ 时，有

$$u(x,0)=\int_{-\infty}^{\infty}u_\mu(x,0)d\mu=\int_{-\infty}^{\infty}(A(\mu)\cos(\mu x)+B(\mu)\sin(\mu x))d\mu=\varphi(x), \tag{49}$$

根据 (39-41) 式，即

$$A(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\cos(\mu\xi)d\xi, \tag{50}$$

$$B(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\sin(\mu\xi)d\xi. \tag{51}$$

代入 $u(x,t)$ 的表达式，即 (48) 式，得到

无穷长杆初值问题

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\mu^2a^2t}\cos(\mu(\xi-x))d\xi d\mu \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\mu^2a^2t}\cos(\mu(\xi-x))d\mu\right)d\xi, \qquad (52)
\end{aligned}
$$

利用第五章课件中的泊松积分公式:

$$
\int_0^{\infty}e^{-ax^2}\cos(bx)dx = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}}e^{-\frac{b^2}{4a}}, \qquad (53)
$$

可知

$$
\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\mu^2a^2t}\cos(\mu(\xi-x))d\mu = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}. \qquad (54)
$$

所以有

$$
u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi. \qquad (55)
$$

无限长杆初值问题傅里叶解的物理意义

考虑点热源，即初始时杆上温度分布为

$$\psi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & -\delta+x_0<x<x_0+\delta,\\ 0, & else\end{cases} \tag{56}$$

其中 δ 非常小。代入 (55) 式，得到任意时刻温度分布

$$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\varphi(x_0)2\delta e^{-\frac{(x_0-x)^2}{4a^2t}}, \tag{57}$$

所以对任意 t，$v(x,t)$ 呈正态分布，随着 t 增大，$v(x,t)$ 的最大值减小，范围扩大，即热量扩散开来。

所以，初始温度分布为 $\varphi(x)$ 时，$u(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi$ 可做如下阐释：

初始温度分布 $\varphi(x)$ 可以看做无限个小点源，每个点源向两边扩散热量，所有点源的热扩散总效果叠加，即时刻 t 的温度分布 $u(x,t)$。

无限长杆热传导：初始温度分布为奇函数

在前文中，我们解决了如下问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & (-\infty < x < \infty, t > 0) \\ u(x,0) = \varphi(x), & (-\infty < x < \infty), \end{cases} \tag{58}$$

上节已经得到傅里叶解

$$u(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi, \tag{59}$$

1. 如果 $\varphi(x)$ 是奇函数，则有

$$u(0,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi = 0, \tag{60}$$

无限长杆热传导：初始温度分布为偶函数

2. 如果 $\varphi(x)$ 是偶函数，则有

$$u_x(x,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)(-\frac{2(x-\xi)}{4a^2t})e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}}d\xi, \tag{61}$$

所以

$$u_x(0,t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(\xi)(\frac{2\xi}{4a^2t})e^{-\frac{\xi^2}{4a^2t}}d\xi=0, \tag{62}$$

一端有界的热传导问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & (0 < x < \infty, t > 0) \\ u(0,t) = 0, & (t \geq 0) \\ u(x,0) = \psi(x), & (0 < x < \infty), \end{cases} \tag{63}$$

即左端点 $x=0$ 处有界，且温度恒为 0。
可将 x 范围延拓至 $(-\infty,\infty)$，取初始条件为

$$u(x,0) = \varphi(x) = \begin{cases} \psi(x), & 0 \leq x < \infty, \\ -\psi(-x), & -\infty < x < 0. \end{cases} \tag{64}$$

则有解

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi \\ &= \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{0}^{\infty} \psi(\xi) (e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} - e^{-\frac{(\xi+x)^2}{4a^2 t}}) d\xi. \end{aligned} \tag{65}$$

因为 $\varphi(x)$ 是奇函数，所以自然有 $u(0,t)=0$，即 $u(x,t)$ 就是满足 (63) 的解。类似地，如果边界条件是 $u_x(0,t)=0$，则可以将 $\psi(x)$ 延拓为偶

例题

例 1

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & (0 < x < \infty, t > 0) \\ u(0,t) = 0, & (t \geq 0) \\ u(x,0) = u_0, & (0 < x < \infty), \end{cases} \tag{66}$$

例 2

$$\begin{cases} u_t = D u_{xx}, & (0 < x < \infty, t > 0) \\ u(0,t) = N_0, & (t \geq 0) \\ u(x,0) = 0, & (0 < x < \infty), \end{cases} \tag{67}$$

例 3

$$\begin{cases} u_t = k u_{xx}, & (0 < x < \infty, t > 0) \\ u(0,t) = P_1, & (t \geq 0) \\ u(x,0) = P_0, & (0 < x < \infty), \end{cases} \tag{68}$$

齐次化原理

既有源，也有边界条件，初始条件，

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & (0 < x < l, t > 0) \\ u(0,t) = \mu_1(t), u(l,t) = \mu_2(t) & (t \geq 0) \\ u(x,0) = \varphi(x), & (0 < x < l), \end{cases} \tag{69}$$

第一步处理，通过变形，使得边界条件都变为 0。定义

$$v(x,t) = u(x,t) - U(x,t), \quad U(x,t) = \mu_1(t) + \frac{x}{l}(\mu_2(t) - \mu_1(t)), \tag{70}$$

则有 $v_t = u_t - U_t, v_{xx} = u_{xx} - U_{xx}$，即

$$v_t - a^2 v_{xx} = -U_t + a^2 U_{xx} + f(x,t) = g(x,t), \tag{71}$$

有

$$\begin{cases} v_t = a^2 v_{xx} + g(x,t), & (0 < x < l, t > 0) \\ v(0,t) = 0, v(l,t) = 0 & (t \geq 0) \\ v(x,0) = \varphi(x) - U(x,0) = \psi(x), & (0 < x < l), \end{cases} \tag{72}$$

齐次化原理

第 2 步，通过变形，使得边界条件、初始条件都为 0。首先解出 (前文中已经解释求解方法)

$$\begin{cases} \sigma_t = a^2\sigma_{xx}, & (0 < x < l, t > 0) \\ \sigma(0,t) = 0, \sigma(l,t) = 0 & (t \geq 0) \\ \sigma(x,0) = \psi(x), & (0 < x < l), \end{cases} \tag{73}$$

然后定义

$$w(x,t) = v(x,t) - \sigma(x,t), \tag{74}$$

则有

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx} + g(x,t), & (0 < x < l, t > 0) \\ w(0,t) = 0, w(l,t) = 0 & (t \geq 0) \\ w(x,0) = v(x,0) - \sigma(x,0) = 0, & (0 < x < l), \end{cases} \tag{75}$$

齐次化原理：杜阿梅尔原则

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx} + g(x,t), & (0 < x < l, t > 0) \\ w(0,t) = 0, w(l,t) = 0 & (t \geq 0) \\ w(x,0) = 0, & (0 < x < l), \end{cases} \tag{76}$$

可做如下看待：初始时刻杆上处处温度为 0，任意 $\tau \to \tau + \Delta\tau$ 时间段内，无限小热源 $g(x,\tau)$ 产生热量，导致温度增量 $g(x,\tau)\Delta\tau$，这些小热源向两侧传播热量，导致各处升温 $\phi(x,t;\tau)$，则 $\phi(x,t;\tau)$ 满足微分方程

$$\begin{cases} \phi_t = a^2 \phi_{xx}, & (0 < x < l, t > \tau) \\ \phi(0,t;\tau) = \phi(l,t;\tau) = 0, & \\ \phi(x,\tau + d\tau;\tau) = g(x,\tau)d\tau, & (0 < x < l), \end{cases} \tag{77}$$

即

$$\begin{cases} y_t = a^2 \phi_{xx}, & (0 < x < l, t > \tau) \\ y(0,t;\tau) = y(l,t;\tau) = 0, & \\ y(x,\tau + d\tau;\tau) = g(x,\tau), & (0 < x < l), \end{cases} \tag{78}$$

的解 $y(x,t;\tau)$ 再乘以 $d\tau$，即 $\phi(x,t;\tau) = y(x,t;\tau)d\tau$。

齐次化原理：杜阿梅尔原则

无数个小热源 $g(x,\tau)d\tau$ 产生的总叠加效果为

$$\begin{aligned} w(x,t) &= y(x,t;0)d\tau + y(x,t;d\tau)d\tau + \dots + y(x,t;t-d\tau)d\tau \\ &= \int_0^t y(x,t;\tau)d\tau. \end{aligned} \tag{79}$$

可以证明，w(x,t) 满足

$$\begin{cases} w_t = a^2 w_{xx} + g(x,t), & (0 < x < l, t > 0) \\ w(0,t) = 0, w(l,t) = 0 & (t \geq 0) \\ w(x,0) = 0, & (0 < x < l), \end{cases} \tag{80}$$

所以，我们求出 $U(x,t), \sigma(x,t), w(x,t)$，最终即得

$$u(x,t) = w(x,t) + \sigma(x,t) + U(x,t). \tag{81}$$

齐次化原理：杜阿梅尔原则

$$u(x,t) = w(x,t) + \sigma(x,t) + U(x,t). \tag{82}$$

满足最初的方程

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx} + f(x,t), & (0 < x < l, t > 0) \\ u(0,t) = \mu_1(t), u(l,t) = \mu_2(t) & (t \geq 0) \\ u(x,0) = \varphi(x), & (0 < x < l), \end{cases} \tag{83}$$

这是通过一系列数学变形的技巧来完成的。
带外力的一维波动方程混合问题，也可以利用类似的技巧来完成。

作业

习题　2, 3, 5, 6, 8, 10

截止时间：5 月 10 日 24:00