数学物理方法第二章

路毅　　曲阜师范大学

2022 年 2 月 23 日

第二章：解析函数

- 第一节：解析函数：柯西黎曼条件
- 第二节：解析函数与调和函数
- 第三节：初等解析函数

复变函数：可导、可微

$\omega = f(z)$ 在区域 D 内有定义，若在 D 内 z 点，

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{1}$$

存在，则称函数 $f(z)$ 在 z 点可导。

若 $\omega = f(z), \Delta \omega = f(z+\Delta z) - f(z)$ 可写作

$$\Delta \omega = A(z)\Delta z + \rho(\Delta z), \tag{2}$$

且 $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\rho(\Delta z)}{\Delta z} = 0$。则称 $\omega = f(z)$ 可微，微分为

$$d\omega = A(z)dz. \tag{3}$$

$\omega = f(z)$ 可导 $\quad \Leftrightarrow \quad \omega = f(z)$ 可微

例题

1. $f(z)=z^n(n=1,2,3,\cdots)$ 在复平面上任意点的导数,

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^n-z^n}{\Delta z} = \lim_{\Delta z\to 0}[nz^{n-1}+\frac{n(n-1)}{2}z^{n-2}\Delta z+\cdots(\Delta z)^{n-}$$
$$= nz^{n-1}. \quad (4$$

2. $f(z)=\bar{z}$ 在复平面上是否可微?

$$\frac{\overline{z+\Delta z}-\bar{z}}{\Delta z}=\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}, \tag{5}$$

上式的极限是不存在的。所以 $f(z)=\bar{z}$ 是不可微的。

和差积商的求导法则

$$
\begin{aligned}
[f(z) \pm g(z)]' &= f'(z) \pm g'(z), && (6) \\
[f(z)g(z)]' &= f'(z)g(z) + f(z)g'(z), && (7) \\
[f(z)/g(z)]' &= \frac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{[g(z)]^2}, (g(z) \neq 0) && (8)
\end{aligned}
$$

柯西 - 黎曼条件

$$\omega = f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \tag{9}$$

如果 $f(z)$ 在 z 点可导，即

$$\lim_{\Delta x \to 0, \Delta y \to 0} \frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = f'(z), \tag{10}$$

可导意味着：Δz 为任一方向的小量，上式都得到同样的斜率 $f'(z)$。

- $\Delta y = 0$ 时，得到

$$\frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = f'(z), \tag{11}$$

- $\Delta x = 0$ 时，得到

$$-i\left(\frac{\partial u}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = f'(z), \tag{12}$$

柯西 - 黎曼条件

所以有

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{13}$$

换言之，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases} \tag{14}$$

这就是柯西 - 黎曼条件 (C-R 条件)。我们证明了，可导 $\Rightarrow$C-R 条件。

柯西 - 黎曼条件

现有复变函数

$$\omega = f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \tag{15}$$

如果其中 $u(x, y), v(x, y)$ 在 z 点可微，并且满足 C-R 条件，则 $\omega = f(z)$ 在 z 点可导。

证明如下:

由 C-R 条件，我们设

$$a = \frac{\partial u}{\partial x}|_z = \frac{\partial v}{\partial y}|_z, \tag{16}$$

$$b = \frac{\partial v}{\partial x}|_z = -\frac{\partial u}{\partial y}|_z, \tag{17}$$

因为 $u(x, y), v(x, y)$ 在 z 点可微，所以在 z 点有

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \eta_1, \tag{18}$$

$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \eta_2, \tag{19}$$

其中

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\eta_1}{|\Delta z|} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\eta_2}{|\Delta z|} = 0, \tag{20}$$

柯西 - 黎曼条件

所以

$$\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{a(\Delta x + i\Delta y) + ib(\Delta x + i\Delta y) + \eta_1 + i\eta_2}{\Delta x + i\Delta y} \tag{21}$$

$$= a + ib + \frac{\eta_1 + i\eta_2}{\Delta z}. \tag{22}$$

所以

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = a + ib = f'(z), \tag{23}$$

这样就证明了 $f(z)$ 可导。

解析函数

若 $\omega = f(z)$ 在 z_0 的某个邻域内处处可微，则称 $f(z)$ 在 z_0 点解析。

若区域 D 内的没一点都是 $f(z)$ 的解析点，则称 $f(z)$ 在区域 D 内解析，或称 $f(z)$ 是区域 D 内的解析函数 (或称：全纯函数/正则函数)。

奇点：如果 $f(z)$ 在 z_0 点不解析，但在 z_0 的任一邻域内总有 $f(z)$ 的解析点，则 z_0 称为 $f(z)$ 的奇点。

例题

- $f(z) = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ 在 z 平面上是否解析？

- $f(z) = \sqrt{|xy|}$ 在 $z = 0$ 点是否可导？

极坐标 C-R 条件

设 $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$， $z=re^{i\theta}$， 若 $u(r,\theta),v(r,\theta)$ 在 (r,θ) 点可微，并满足极坐标下的 C-R 条件

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}(r>0), \tag{24}$$

试证 $f(z)$ 在 z 点是可微的，并且

$$f'(z)=\frac{1}{e^{i\theta}}(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r})=\frac{1}{ire^{i\theta}}(\frac{\partial u}{\partial \theta}+i\frac{\partial v}{\partial \theta}) \tag{25}$$

极坐标 C-R 条件

证明：由于 u, v 在 (r, θ) 点可微，有

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial u}{\partial \theta}\Delta\theta + \eta_1, \tag{26}$$

其中 $\lim\limits_{\Delta z\to 0} \frac{\eta_1}{|\Delta z|} = 0$。另外，利用 C-R 条件，上式也可以写作

$$\Delta u = \frac{\partial u}{\partial r}\Delta r - r\frac{\partial v}{\partial r}\Delta\theta + \eta_1. \tag{27}$$

类似地，Δv 有

$$\Delta v = \frac{\partial v}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial v}{\partial \theta}\Delta\theta + \eta_2 = \frac{\partial v}{\partial r}\Delta r + r\frac{\partial u}{\partial r}\Delta\theta + \eta_2. \tag{28}$$

极坐标 C-R 条件

而 Δz 为

$$\begin{aligned}\Delta z &= (r+\Delta r)e^{i(\theta+\Delta\theta)} - re^{i\theta} \\ &= (r+\Delta r)e^{i\theta}(1+i\Delta\theta+\cdots) - re^{i\theta} \\ &\approx re^{i\theta}(i\Delta\theta) + \Delta re^{i\theta} \\ &= (\Delta r + ir\Delta\theta)e^{i\theta}. \end{aligned} \tag{29}$$

所以有

$$\begin{aligned}\lim_{|\Delta z|\to 0}\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta z} &= \lim_{|\Delta z|\to 0}\frac{(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r})(\Delta r + ir\Delta\theta)+\eta_1+i\eta_2}{(\Delta r+ir\Delta\theta)e^{i\theta}} \\ &= e^{-i\theta}(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}). \end{aligned} \tag{30}$$

调和函数

若实函数 $H(x,y)$ 在区域 D 内有二阶偏导数且

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)H=0, \tag{31}$$

则称 $H(x,y)$ 为 D 内的调和函数。

若 D 内两个调和函数 u,v 满足 C-R 条件，则称它们为共轭调和函数。

我们注意到，如果一个解析函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 满足 C-R 条件，有

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial y} = -\dfrac{\partial v}{\partial x}.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.\end{cases} \tag{32}$$

也就是说，$f(z)=u+iv$ 在 D 内解析 $\Leftrightarrow$ u,v 为 D 内的共轭调和函数。

调和函数

若 u 已知，v 未知，但是 u, v 为共轭调和函数，则有

$$dv = v_x dx + v_y dy = -u_y dx + u_x dy, \tag{33}$$

因为 u, v 是共轭调和函数，所以有

$$\frac{\partial}{\partial y}(-u_y) = \frac{\partial}{\partial x}(u_x), \tag{34}$$

所以上面写的 dv 是全微分，即

$$v(z) = \oint_{z_0}^{z} (-u_y dx + u_x dy), \tag{35}$$

这里积分路径是 D 内任意曲线。

换言之，用 u 可以求出它的共轭调和函数 v。若 v 已知，也可以类似地求出 u。

共轭调和函数的几何意义

函数 u 在 xy 平面上的梯度为

$$\vec{\nabla} u = (u_x, u_y) = (v_y, -v_x), \tag{36}$$

函数 v 在 xy 平面上的梯度为 $\vec{\nabla} v = (v_x, v_y)$，所以有

$$\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v = (v_y, -v_x)(v_x, v_y) = 0. \tag{37}$$

这意味着，函数 u, v 的梯度处处垂直，相应地，它们的“等高线”也处处垂直。

共轭调和函数

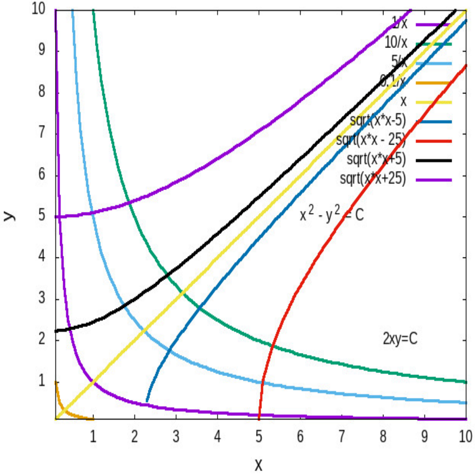

Figure: 共轭调和函数“等高线”处处垂直

初等解析函数，整数幂函数

我们证明以下初等函数是解析函数

$$z^n, e^z, \sin z, \cos z, \sinh z, \cosh z, z^{1/n}, \ln z, z^a, \arcsin z \tag{38}$$

1. 幂函数 $\omega = z^n, n = 1, 2, 3, \cdots$，前面已经证明过，它在整个复平面上解析，

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = nz^{n-1}. \tag{39}$$

容易证明：

$$\omega = P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n, (a \neq 0), \tag{40}$$

在复平面上解析；

$$\omega = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 z^n + \cdots + a_n}{b_0 z^n + \cdots b_n}, (a_0, b_0 \neq 0) \tag{41}$$

在复平面上除 $Q(z)$ 的零点外解析。

初等解析函数：e 指数函数

e 指数函数定义为：

$$\omega = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \tag{42}$$

容易证明：

$$\begin{aligned}
|e^z| &= |e^x e^{iy}| = e^x > 0, &(43)\\
e^{z_1} e^{z_2} &= e^{z_1+z_2}, &(44)\\
\frac{d\omega}{dz} &= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{e^{z+\Delta z} - e^z}{\Delta z} = \lim_{\Delta \to 0} \frac{e^z(e^{\Delta z} - 1)}{\Delta z} = e^z, &(45)\\
e^{z+2\pi ki} &= e^z. &(46)
\end{aligned}$$

三角函数、双曲函数

复数域上的三角函数定义为

$$
\begin{aligned}
\cos z &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, &(47)\\
\sin z &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}, &(48)
\end{aligned}
$$

因为 e^{iz}, e^{-iz} 是解析的，所以三角函数是解析的。

双曲函数定义为

$$
\begin{aligned}
\sinh z &= \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}, &(49)\\
\cosh z &= \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}. &(50)
\end{aligned}
$$

多值函数：根式函数

$$\omega = z^{1/n}, \tag{51}$$

记 $\omega = \rho e^{i\varphi}, z = re^{i\theta}$，可以推出

$$\begin{aligned} \rho &= r^{1/n}, \qquad (52) \\ \varphi &= \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}, k \in Z, \qquad (53) \end{aligned}$$

即

$$\omega = r^{1/n} e^{i(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n})}, k = 0, 1, \cdots, n-1 \tag{54}$$

k 的 n 个取值定义了 $\omega = f(z)$ 的 n 个单值分支

$$\omega_k = (z^{1/n})_k = r^{1/n} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}, k = 0, 1, \cdots, n-1 \tag{55}$$

根式函数：每个单值分支可导

$$\omega_k = (z^{1/n})_k = r^{1/n} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, k = 0, 1, \cdots, n-1 \tag{56}$$

所以 ω_k 的实部、虚部为

$$u = r^{1/n} \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \tag{57}$$

$$v = r^{1/n} \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \tag{58}$$

这两个函数都可微，并且有

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{n} r^{1/n-1} \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \tag{59}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{1}{n} r^{1/n} \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \tag{60}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = \frac{1}{n} r^{1/n-1} \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \tag{61}$$

$$\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{1}{n} r^{1/n} \cos \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \tag{62}$$

根式函数：每个单值分支可导

可得

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \tag{63}$$

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}, \tag{64}$$

$$\tag{65}$$

所以 $z^{1/n}$ 的每个单值分支 ω_k 都是解析函数，其导数为

$$\frac{d\omega_k}{dz} = e^{-i\theta}(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}) = \frac{1}{n}z^{1/n-1}, \tag{66}$$

与整数幂函数求导公式完全一致。

支点、支割线

若取 $z^{1/n}$ 的第一支

$$\omega_0 = r^{1/n} e^{i\theta/n}, \tag{67}$$

让 z 沿原点绕一圈，ω_0 将变为 $r^{1/n} e^{i\frac{\theta+2\pi}{n}} = \omega_1$。

支点：z 绕支点一周，函数 $\omega = f(z)$ 将从一个分支变为另一个分支。

无穷远点也是 $z^{1/n}$ 的一个支点。

支割线

从支点 $z=0$ 到 $z=\infty$ 引一条射线，割开 z 平面，如

$$0 \leq argz < 2\pi, \tag{68}$$

则不会有闭合曲线绕过原点，即不会从一支连续变为另一支。

(以 e 为底的) 对数函数

(以 e 为底的) 对数函数是 e 指数的反函数

$$z = e^{\omega} \Rightarrow \omega = Lnz, \tag{69}$$

可得

$$Lnz = \ln r + i(\theta + 2k\pi), k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{70}$$

主值支:

$$\ln z = \ln r + iargz, \tag{71}$$

其中 $argz$ 为 z 的辐角主值，区间可定义为 $(-\pi, \pi]$ 或者 $[0, 2\pi)$。不同分支的值域构成复平面上的不同区域

$$-\pi < v \leq \pi, \tag{72}$$

$$\pi < v \leq 3\pi, \tag{73}$$

$$\cdots \tag{74}$$

$z = 0, \infty$ 是 Lnz 的支点,

$$(\ln z)_k = \ln r + i(\theta + 2k\pi), k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{75}$$

(以 e 为底的) 对数函数

容易证明:

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dz}(\ln z)_k &= \frac{1}{z}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots && (76)\\
Ln(z_1 z_2) &= Lnz_1 + Lnz_2, && (77)\\
Ln(z_1/z_2) &= Lnz_1 - Lnz_2, && (78)
\end{aligned}
$$

一般幂函数

$$z^a = e^{aLnz} = \omega_0 e^{i2k\pi a}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{79}$$

其中 $\omega_0 = e^{a \ln z}$。

若 a 为整数 n，则 $e^{2k\pi ia} = 1, z^a = \omega_0$ 是一个单值函数。

若 a 为有理数 q/p，则

$$e^{2k\pi ia} = e^{2k\pi iq/p}, k = 0, 1, \cdots, p-1 \tag{80}$$

所以有

$$z^{q/p} = \omega_0 e^{2k\pi iq/p}, k = 0, 1, \cdots, p-1 \tag{81}$$

有 p 个分支。

若 a 为无理数，则有无穷多个分支。
一般幂函数的导数为

$$\frac{d}{dz}(z^a)_k = \frac{d}{dz} e^{a(\ln z)_k} = az^{a-1}. \tag{82}$$

一般指数函数

$$\omega = a^z = e^{zLna}, \tag{83}$$

有无穷多分支。

$a = e$ 时，$\omega = e^z$ 是特殊的单值函数。

反三角函数

若有

$$z = \sin\omega = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i}, \tag{84}$$

得到

$$(e^{i\omega})^2 - 2ize^{i\omega} - 1 = 0, \tag{85}$$

$$\omega = \arcsin z = \frac{1}{i} Ln(iz + \sqrt{1 - z^2}) \tag{86}$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{i} Ln(z + \sqrt{z^2 - 1}), \tag{87}$$

类似地，

$$\arccos z = \frac{1}{i} Ln(z + \sqrt{z^2 - 1}). \tag{88}$$

它们都是多值函数。

作业

课堂讲解：8, 13, 19

课下练习：1, 2, 5, 9, 14, 15