数学物理方法第七章

路毅　　曲阜师范大学

2020 年 4 月 26 日

第七章：一维波动方程的傅里叶解

- 第一节：一维弦振动方程
- 第二节：傅里叶解及其物理意义

软绳小振动方程

软：没有法向应力，只有切向张力。

小振动：振动幅度不大，绳上每个质点偏离平衡位置的幅度都较小。

软绳小振动方程

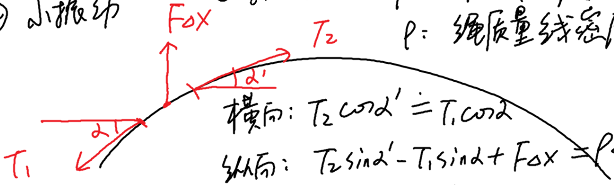
①绳上质点只有纵向位移

②小振动

③软绳

F: 外力线密度

ρ: 绳质量线密度



横向: $T_2\cos\alpha' \doteq T_1\cos\alpha$

纵向: $T_2\sin\alpha' - T_1\sin\alpha + F\Delta x = \rho\Delta x\, u_{tt}$

因为 $\alpha', \alpha < 1$, 且 $\begin{cases} \cos\alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \cdots \\ \sin\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3!} \end{cases}$

忽略高阶小量, 得到 (利用 $\tan\alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$)

$$\begin{cases} T_1 \doteq T_2 \\ T_1 u_{xx}\cdot\Delta x + F\Delta x = \rho\Delta x\, u_{xx} \end{cases}$$

其中，u_{xx} 表示对 x 二阶偏导数，u_{tt} 表示对 t 二阶偏导数。

振动方程

取 $a^2 = T/\rho, f = F/\rho$，则有

$$u_{tt} = a^2 u_{xx} + f. \tag{1}$$

如果没有外力，即弦自由振动，则有

$$u_{tt} = a^2 u_{xx}. \tag{2}$$

边界条件、初始条件

边界条件：$u(0,t), u(l,t)$。

- $u(0,t)=\mu(t)$，狄利克雷边界条件。
- $u_x(0,t)=\nu(t)$，诺依曼边界条件。
- $u_x(0,t)-hu(0,t)=\theta(t)$，罗宾边界条件。

初始条件：$u(x,0), u_t(x,0)$，即初始时刻绳的形状，各个质点的速度。

两端固定、自由振动

$$
\begin{aligned}
u_{tt} &= a^2 u_x, & \text{齐次} \quad (3)\\
u(0,t) &= u(l,t) = 0, & \text{两端固定} \quad (4)\\
u(x,0) &= \varphi(x), u_t(x,0) = \psi(x), & \text{初始位置、速度} \quad (5)
\end{aligned}
$$

我们先抛开初始条件，只管边界条件，得到通解形式，再用初始条件约束通解，得到特解。

分离变量法

假设

$$u(x,t)=X(x)T(t), \tag{6}$$

带入自由振动方程，则有

$$a^2X''/X=T''/T, \tag{7}$$

方程左边只与 x 有关，右边只与 t 有关，左右两边的值在任意 x,t 都是一个常数，假设这个常数是 $-\lambda$。

两端固定：通解

根据边界条件 $u(0,t)=u(l,t)=0$，得到 $X(0)=X(l)=0$。

$$X''+\lambda X=0. \tag{8}$$

1. 若 $\lambda=0$，则有 $X(x)=C_1x+C2$，带入边界条件得到 $X(x)=0$。
2. 若 $\lambda<0$，则有

$$X(x)=Ae^{\sqrt{-\lambda}x}+Be^{-\sqrt{-\lambda}x}, \tag{9}$$

代入边界条件 $u(0,t)=u(l,t)=0$，得到 $X(0)=X(l)=0$，所以有

$$A+B=0, \tag{10}$$

$$Ae^{\sqrt{-\lambda}l}+Be^{-\sqrt{-\lambda}l}=0. \tag{11}$$

得到 $A=B=0$，即 $X(t)=0$。

两端固定：通解

3． 若 $\lambda > 0$，则有

$$X(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\sin(\sqrt{\lambda}x), \tag{12}$$

代入 $X(0) = X(l) = 0$，得到

$$A = 0, \tag{13}$$

$$B\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0. \tag{14}$$

得到 $A = B = 0$(平庸解)，或

$$B \neq 0, \tag{15}$$

$$\sin(\sqrt{\lambda}l) = 0 \Rightarrow \sqrt{\lambda} = n\pi/l, n \in Z^{+}. \tag{16}$$

所以非平庸解为 $B \neq 0$，

$$X_n(x) = B_n \sin(n\pi x/l), \quad n = 1, 2, \cdots \tag{17}$$

相应地

$$T_n(t) = C_n' \cos(n\pi a t/l) + D_n' \sin(n\pi a t/l). \tag{18}$$

两端固定：通解

所以 $u(x,t)$ 在特定 n 值的解为

$$u_n(x,t) = C_n \sin(n\pi x/l)\cos(n\pi at/l) + D_n \sin(n\pi x/l)\sin(n\pi at/l). \quad (19)$$

$u(x,t)$ 的通解为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x,t) \quad (20) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x/l)\cos(n\pi at/l) + \sum_{n=1}^{\infty} D_n \sin(n\pi x/l)\sin(n\pi at/l). \end{aligned}$$

带入初始条件

带入初始条件得到

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin(n\pi x/l)=\varphi(x), \tag{21}$$

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}Dn\sin(n\pi x/l)(n\pi a/l)=\psi(x). \tag{22}$$

利用 $\int_0^l\sin(n\pi x/l)\sin(m\pi x/l)dx=\delta_{mn}\frac{l}{2}$，可以解出 C_n, D_n 的值，

$$C_n = \frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin(n\pi x/l)dx, \tag{23}$$

$$D_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^l\psi(x)\sin(n\pi x/l)dx. \tag{24}$$

傅里叶级数收敛性

狄利克雷收敛条件：绝对可积，任一有限区间只能取有限个最值，任何区间只有有限个第一类间断点。

物理问题中 $\varphi(x), \psi(x)$ 都是满足上述条件的函数，所以如上求出 C_n, D_n 以后代入

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\pi x/l), \tag{25}$$

$$u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} Dn \sin(n\pi x/l)(n\pi a/l). \tag{26}$$

$u(x,0), u_t(x,0)$ 一定会收敛至 $\varphi(x), \psi(x)$。

物理阐释

- 对任意正整数 n

$$C_n sin(n\pi x/l)\cos(n\pi at/l)+D_n\sin(n\pi x/l)\sin(n\pi at/l), \tag{27}$$

通过三角函数和角公式可以写作

$$\begin{aligned}&E_n\sin(n\pi x/l)\sin(n\pi at/l-\delta) \\ =&\frac{E_n}{2}\cos(n\pi(x-at)/l+\delta)-\frac{E_n}{2}\cos(n\pi(x+at)/l-\delta).\end{aligned} \tag{28}$$

这是两列振幅相同的行波，一列向左传播，一列向右传播，波速均为 a，角频率均为 $\omega_n=n\pi a/l$，干涉形成驻波，$x=0,x=l$ 是两个波节 (振动为 0 的点)。

物理阐释

- 两端固定的绳波由无数个这样的简谐驻波性叠加合成，振幅、相位由初始时位移、速度分布决定。
- 任意时刻，绳子的状态由所有简谐分波叠加得到。
- 对于弦乐器 (钢琴、吉他、尤克里里、小提琴)，弦振动时，同时有角频率 $\omega_1, \omega_2, \cdots$ 的音，基频 ω_1 的振幅一般最大，$\omega_2, \cdots$ 的音叫做泛音，不同乐器的泛音组合系数不同，构成不同的音色。
- 课程论文参考题目：学习快速傅里叶变换 (FFT) 算法，编写一个小程序，尝试处理不同乐器的声音音轨文件，进行傅里叶分解，做出泛音系数曲线，进行对比。

作业

习题 1,3,5