数学物理方法第一章

路毅　　曲阜师范大学

2022 年 2 月 21 日

教材与参考书

教材：川大版 《高等数学》 第四册第三版

参考书：

- 梁昆淼《数学物理方法》
- Arfken & Weber "Mathematical methods for physicists"

课程交流 qq 群：1056754073

课程内容

- 第一篇：复变函数论 (1-7 周)
  应用：光学、量子力学、固体物理等

- 第二篇：数学物理方程 (8-13 周)
  应用：电动力学、量子力学、分析力学、流体力学、计算物理等

- 第三篇：特殊函数 (14-17 周)
  应用：电动力学、量子力学等

- 复习 (18 周)

怎样学好数学

1. 做练习、做练习、做练习

2. 思考、讨论与交流

每 1-2 周安排一次线上答疑，敬请关注。

第一章：复数与复变函数

- 第一节：复数
- 第二节：复变函数的基本概念
- 第三节：复球面与无穷远点

什么是复数

在过去，我们认为

$$\sqrt{-1} \tag{1}$$

是没有意义的。
所以我们解一元二次方程时，

$$ax^2 + bx + c = 0, (a \neq 0) \tag{2}$$

得到

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \tag{3}$$

我们要求

$$\Delta = b^2 - 4ac \geq 0, \tag{4}$$

否则认为方程无解。

什么是复数

这是因为，没有任何一个实数的平方是负数。
现在，我们定义 i，

$$i^2 = -1, \tag{5}$$

它不是一个实数，是我们新引进的概念，叫做虚数单位。引入它以后，我们可以得到一种新的数

$$z = x + iy, \tag{6}$$

其中，x, y 是实数，这样定义的 z 叫做复数，相应地，x, y 是 z 的实部和虚部，有时记作

$$x = Rez, y = Imz, \tag{7}$$

其中 Re 是 Real 的缩写，即实部，Im 是 $Imaginary$(想象的，虚的) 的缩写，即虚部。
例如：

$$3 + 5i, 2 + 4i, -1 + 2i \tag{8}$$

什么是复数

$$z = x + iy, \tag{9}$$

那么，如果 $y = 0$，就有 $z = x$，是一个实数，所以复数包括所有实数，是实数域的推广。

如果 $x = 0, y \neq 0$，就有 $z = yi$，这样的数叫做纯虚数。

例如，i 是一个纯虚数，因为

$$i = 0 + 1 * i. \tag{10}$$

请问：纯虚数的平方是什么样的数？

复数相等

如果有两个复数，

$$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2, \tag{11}$$

那么，$z_1 = z_2$ 当且仅当

$$x_1 = x_2, y_1 = y_2. \tag{12}$$

例如：

$$1 + 2i \neq 1 + 3i, \tag{13}$$

因为它们虚部不相等。

$$1 + 2i \neq 0 + 2i, \tag{14}$$

因为它们实部不相等。

复数的运算

在实数域中，最基本的两种运算是加法和乘法，减法和除法分别是它们的逆运算。

在复数中，我们可以自然地推广加法和乘法，若有

$$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2, \tag{15}$$

则加法为

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \tag{16}$$

乘法定义为

$$z_1 * z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1) \tag{17}$$

复数的运算

减法是加法的逆运算

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2), \tag{18}$$

除法是乘法的逆运算，若 $z_2 \neq 0$，则

$$z_1/z_2 = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2 + i(x_2 y_1 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \tag{19}$$

上面的式子采用了分式化简的手法，将分母化成实数。

例题

例如

$$(-1+i)+(1-i) = 0, \tag{20}$$
$$(-1+i)*(1+i) = -2, \tag{21}$$
$$(-1+i)/(1+i) = \frac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i}{2} = i \tag{22}$$

复数的共轭

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy, \tag{23}$$

互为共轭。

那么，有以下结论

$$\begin{aligned} z\bar{z} &= (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2, && (24) \\ z + \bar{z} &= 2x = 2Rez, && (25) \\ z - \bar{z} &= 2iy = 2iImz. && (26) \end{aligned}$$

复平面 C

x 轴称作实轴，y 轴除原点外称作虚轴。

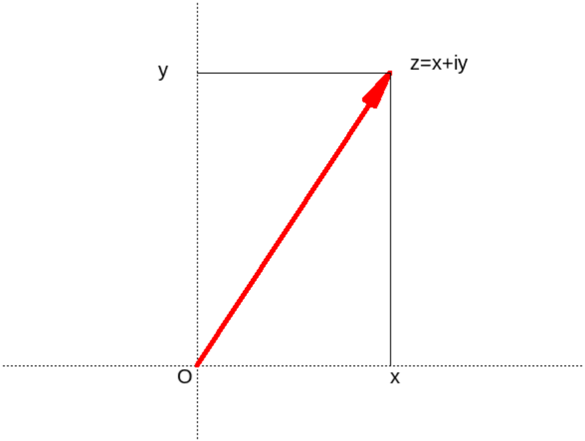


Figure: 复平面：每一个复数都与复平面上一个点相对应，与复数 z 对应的点也称作 “点 z”，$\vec{Oz}$ 与复数 z 一一对应。

复数加法的几何意义

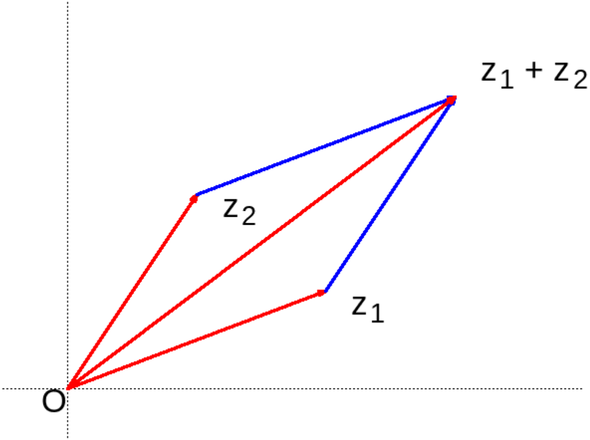


Figure: 复数加法对应着矢量相加。

模与辐角

模：原点 O 到 z 点的距离

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{27}$$

辐角：x 轴正方向与 $\vec{Oz}$ 的夹角 (逆时针为辐角的正向)，记作 $Arg\ z$。辐角可以是多个值

$$Argz = \theta + 2k\pi, k = 0, \pm1, \pm2, \cdots \tag{28}$$

因为 x 轴正方向旋转这些角度都可以与 $\vec{Oz}$ 重合。

我们可以定义 $[0, 2\pi)$ 内的辐角为辐角主值，记作 arg z，则有

$$Argz = argz + 2k\pi, k = 0, \pm1, \pm2, \cdots \tag{29}$$

极坐标

二维平面上的一个点可以用直角坐标表示 (x, y)，也可以用极坐标表示 (r, θ)，换算关系为

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, \tag{30}$$

所以，复数 z 可以写作

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{31}$$

欧拉公式

利用泰勒展开公式，可以推出

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 - \frac{1}{6!}\theta^6 + \cdots, \tag{32}$$

$$\sin\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \cdots, \tag{33}$$

将这两个公式带入 $\cos\theta + i\sin\theta$，会得到

$$\cos\theta + i\sin\theta = 1 + i\theta + \frac{1}{2}(i\theta)^2 + \frac{1}{3!}(i\theta)^3 + \cdots, \tag{34}$$

而这正是 $e^{i\theta}$ 的泰勒展开形式，所以

$$\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}. \tag{35}$$

这就是欧拉公式。

问： $e^{2\pi i} = ?$

模与辐角

有了欧拉公式，

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}. \tag{36}$$

这个形式清晰地体现了 z 在复平面上的几何性质：r 是模，θ 是辐角。

根据 e 指数的特点，有

$$e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \tag{37}$$

$$e^{i\theta_1}/e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1-\theta_2)}, \tag{38}$$

复数乘法的几何意义

复数 $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ 与 $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ 的乘积为

$$z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \tag{39}$$

所以，任意复数 z_1 乘以 z_2 以后，相当于 z_1 的模变为原来的 r_2 倍，辐角增加 θ_2。

换一句话说，$\vec{Oz_1}$ 伸长/压缩 r_2 倍，并逆时针旋转 θ_2。

例题

分别写出下列复数的三角形式和指数形式

- $1+i$
- i
- 1
- -2

乘幂

因为

$$z = re^{i\theta}, \tag{40}$$

所以，z 的 n 次幂可写作

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta), \tag{41}$$

根据这个式子，可以推出所谓棣莫弗公式：

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \tag{42}$$

比如，可以轻易推出以下公式

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta, \tag{43}$$

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta. \tag{44}$$

方根

若要求 z 的 n 次方根，即求 ω，使得

$$\omega^n = z, \tag{45}$$

把 $\omega = \rho e^{i\varphi}, z = re^{i\theta}$ 代入上式得到

$$\rho^n e^{in\varphi} = re^{i\theta}, \tag{46}$$

所以有

$$\rho^n = r, n\varphi = \theta + 2k\pi, \tag{47}$$

得到

$$\rho = r^{1/n}, \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \tag{48}$$

其中 $k = 0, 1, \cdots, n-1$，有 n 个不同的取值。

例题

用 $\sin\theta, \cos\theta$ 表示出 $\cos 3\theta, \sin 3\theta$。

计算 $(1+i)^{1/4}$ 的所有值

邻域、内点、外点、孤立点

z_0 的邻域 (δ 邻域):

$$|z - z_0| < \delta, \tag{49}$$

也记作 $N_\delta(z_0)$，或 $N(z_0)$。

z_0 的去心邻域:

$$0 < |z - z_0| < \delta, \tag{50}$$

内点：若对平面点集 E 中点 z_0，存在 $N(z_0)$，该邻域内所有点都属于 E，则称 z_0 是 E 的内点。

外点：存在 $N(z_0)$，该邻域内所有点都不属于 E。

边界点：对任意 $N(z_0)$，有属于 E 的点，也有不属于 E 的点。

孤立点：z_0 属于 E，但它的一个去心邻域都不属于 E。

内点、外点、边界点

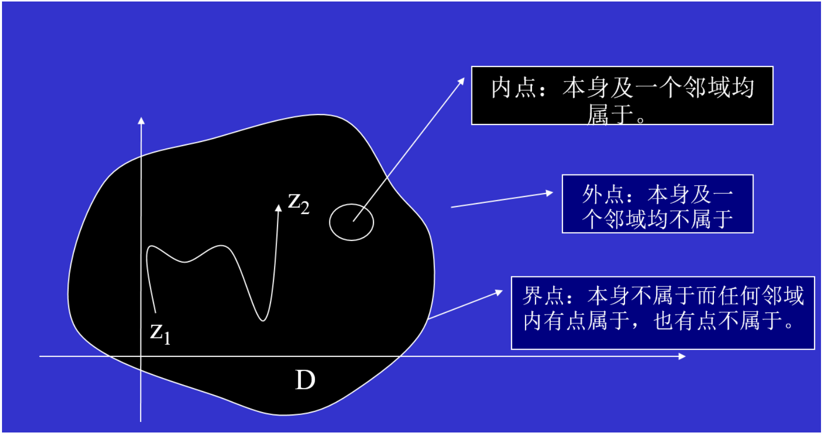


Figure: 内点、外点、边界点。

区域、闭区域

开集：E 内所有点都是内点。

连通：E 内任意两个点都可以用一条内部的曲线连接

区域：连通的开集

闭区域：区域 $D+$ 它的边界 $=$ 闭区域 $\bar{D}$

区域边界的正方向：区域内所有点都在左边

曲线

连续曲线：

$$z(t) = x(t) + iy(t), \tag{51}$$

其中 $x(t), y(t)$ 是连续实函数,$\alpha \leq t \leq \beta$。

重点：若对 $t_1 \neq t_2$(不同时为区间端点)，有 $z(t_1) = z(t_2)$，则 $z(t_1)$ 为曲线重点。

简单曲线 (若尔当曲线)：没有重点

简单闭曲线：没有重点，且 $z(\alpha) = z(\beta)$

光滑曲线：$x'(t), y'(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上存在且不同时为零。

逐段光滑曲线：由有线条光滑曲线衔接而成

单连通域：区域 D 内任一条简单闭曲线都可以不经过 D 的边界，而收缩为 D 内的点。否则称作复连通域。

区域、曲线

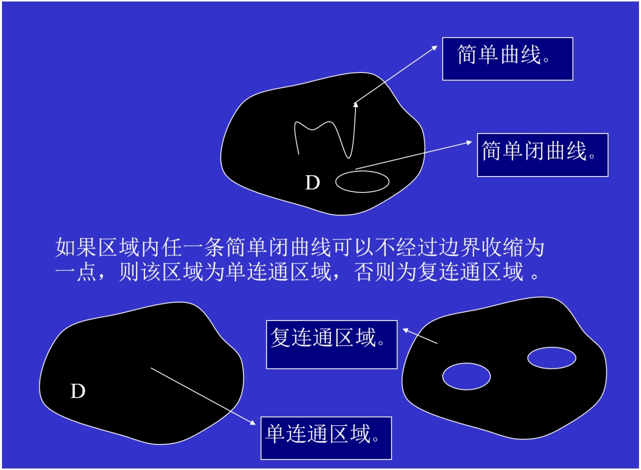
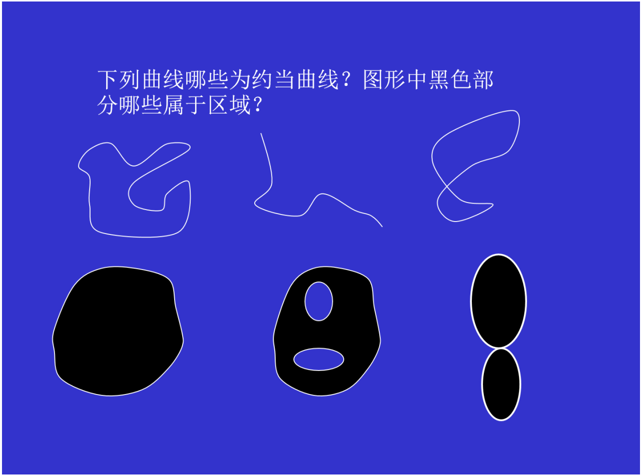
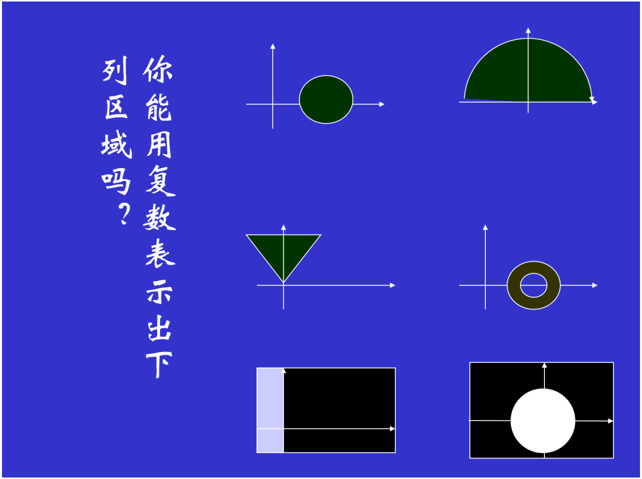


Figure: 简单曲线、单连通区域、复连通区域

简单曲线、区域



区域的复数表达



复变函数

$$\omega = f(z), z \in E, \tag{52}$$

其中 E 是一个复数集。

单值函数：z 对应唯一的 ω。否则称为多值函数。今后若不特别声明，所提到的函数都指单值函数。

单叶函数：若 $z_1 \neq z_2$，必有 $f(z_1) \neq f(z_2)$

ω 与 z 通过 $\omega = f(z)$ 联系，可看作是 z 平面与 ω 平面之间的映射。

复变函数的极限与连续性

极限：对任意 $\epsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得 $N_\delta(z_0)$ 内有

$$|f(z) - \omega_0| < \epsilon, \tag{53}$$

则说 $f(z)$ 在 $z \to z_0$ 时趋于 ω_0，记作

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \omega_0. \tag{54}$$

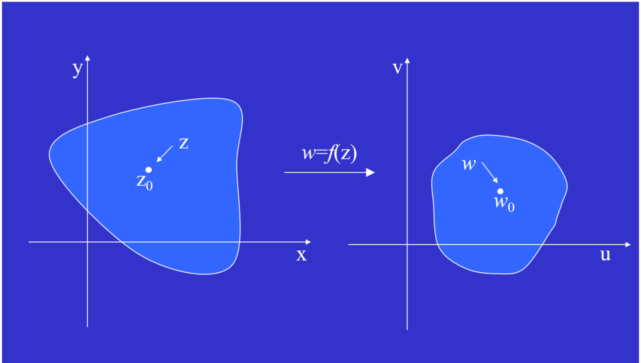
连续性：对任意 $\epsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得 $N_\delta(z_0)$ 内有

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon, \tag{55}$$

则称 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 连续。

这与实函数的极限、连续性定义是一样的。

映射、极限



$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0.$$

Figure: 复变函数：两个复数域之间的映射；复变函数的极限。

复变函数的连续性

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{56}$$

在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 连续的充要条件是 $u(x, y), v(x, y)$ 在 x_0, y_0 连续。

若 $f(z)$ 在有界区域 $\bar{D}$ 上连续，则有

- 在 $\bar{D}$ 上 $f(z)$ 有界，即 $|f(z)|$ 在 $\bar{D}$ 上有界
- $|f(z)|$ 在 $\bar{D}$ 上有最大值和最小值
- $f(z)$ 在 $\bar{D}$ 上一致连续，即对任意 $\epsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得 $\bar{D}$ 上对任意满足 $|z_1 - z_2| < \delta$ 的 z_1, z_2，有 $|f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon$。

复球面

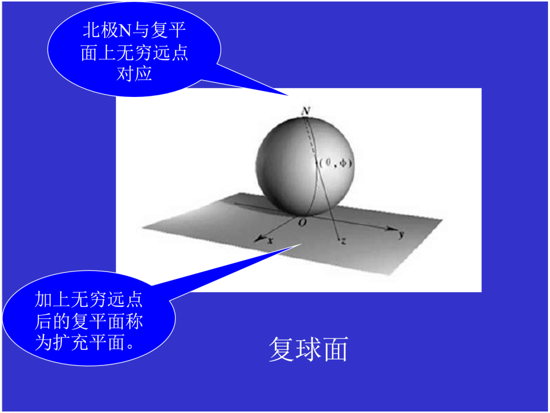


Figure: 复球面与复平面之间的一一对应。

另外：$z=\infty$ 的 ϵ-邻域 $N_\epsilon(\infty):|z|>1/\epsilon$。

练习

课堂讲解：习题 1, 4, 8, 11, 16

课下练习：习题 2, 3, 5, 9, 10