数学物理方法第一章

路毅 曲阜师范大学

1 课程情况

1.1 教材与参考书

教材：

- 四川大学数学学院《高等数学》（第四册）（第四版），高等教育出版社

参考书：

- 柯朗，希尔伯特，《数学物理方法1》，钱敏 郭敦仁译，科学出版社
- 梁昆淼《数学物理方法》
- Arfken，Weber 《Mathematical methods for physicists》

1.2 教学内容

- 复变函数 1-5 章，应用：光学、量子力学、固体物理等
- 数学物理方程 6-9 章，应用：电动力学、量子力学、分析力学、流体力学、计算物理等
- 积分变换 11-12 章，应用：电路分析、量子力学等
- 特殊函数 15-16 章，应用：电动力学、量子力学等

1.3 成绩评定

总成绩 = 0.6 × 期末考试 + 0.1 x 期中考试 + 0.1 x 平时小测验 + 0.2 x 平时作业

平时作业：每人准备2个本子，周二上课之前收集/发放作业

1.4 交流+答疑

- 由课代表建立课程交流QQ群，可以随时在群里提交问题
- 答疑时间：每1-2周在周末安排一次集中答疑
    - 请多问问题
    - 问更好的问题
    - 问我答不上来的问题

2 复数

2.1 复数定义

在过去，我们认为

$$\sqrt{-1} \tag{1}$$

是没有意义的。

所以我们解一元二次方程时，

$$ax^2+bx+c=0,(a\neq 0) \tag{2}$$

得到

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, \tag{3}$$

我们要求

$$\Delta=b^2-4ac\geq 0, \tag{4}$$

否则认为方程无解。这是因为，**没有任何一个实数的平方是负数**。

现在，我们定义一个新的对象 i ，它不是实数，它满足

$$i^2=-1, \tag{5}$$

它是我们新引进的概念，叫做虚数单位。叫做虚数单位，是因为它是“一个单位”的虚数，而它的倍数都是虚数：

$$(3i)^2=-9. \tag{6}$$

我们可以定义更广泛的“复数”：

$$z=x+iy, \tag{7}$$

其中，x,y 是实数，x,y 分别叫做 z 的**实部**和**虚部**，有时记作

$$x=Rez,y=Imz, \tag{8}$$

其中 Re 是 Real 的缩写，即实部，Im 是 $Imaginary$ (想象的，虚的)的缩写，即虚部。

请说出以下复数的实部和虚部：

$$3+5i,2+4i,-1+2i \tag{9}$$

那么，如果$y=0$，就有$z=x$，是一个实数，所以 **复数包括所有实数，是实数域的推广**。

如果 $x=0,y\neq 0$，就有$z=yi$，这样的数叫做 **纯虚数**。

例如，

$$i=0+1*i. \tag{10}$$

请问：纯虚数的平方是什么样的数？

2.2 复数相等

如果有两个复数，

$$z_1=x_1+iy_1,\quad z_2=x_2+iy_2, \tag{11}$$

那么，$z_1=z_2$ 当且仅当

$$x_1=x_2,y_1=y_2. \tag{12}$$

例如：

$$1+2i\neq 1+3i, \tag{13}$$

因为它们虚部不相等。

$$1+2i\neq 0+2i, \tag{14}$$

因为它们实部不相等。

2.3 复数的加减乘除

在实数域中，最基本的两种运算是加法和乘法，减法和除法分别是它们的逆运算。

在复数中，我们可以自然地推广加法和乘法，
若有

$$z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2, \tag{15}$$

则加法为

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2), \tag{16}$$

乘法定义为

$$z_1 * z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1). \tag{17}$$

减法是加法的逆运算

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2), \tag{18}$$

除法是乘法的逆运算，若 $z_2 \neq 0$，则

$$z_1/z_2 = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + i(x_2y_1 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \tag{19}$$

上面的式子采用了分式化简的手法，将分母化成实数。

例题：

$$\begin{aligned} (-1+i)+(1-i) &= 0, \\ (-1+i)*(1+i) &= -2, \\ (-1+i)/(1+i) &= \frac{(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{2i}{2} = i \end{aligned} \tag{20}$$

2.4 复数共轭

$$z = x + iy, \;\; \bar{z} = x - iy, \tag{21}$$

互为共轭。

那么，有以下结论

$$\begin{gathered} z\bar{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2, \\ z + \bar{z} = 2x = 2Rez, \\ z - \bar{z} = 2iy = 2iImz. \end{gathered} \tag{22}$$

2.5 复平面

x轴称作实轴，y轴除原点外称作虚轴。

复平面：每一个复数都与复平面上一个点相对应，与复数z对应的点也称作“点z”，建立一一对应。
复数加法的几何意义：矢量相加。

2.6 模与辐角

模：原点O到z点的距离

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}, \tag{23}$$

辐角：x轴正方向与$\vec{O}z$的夹角(逆时针为辐角的正向)，记作$Arg\ z$。
辐角可以是多个值

$$Argz = \theta + 2k\pi, \quad \theta \in [0, 2\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \tag{24}$$

因为x轴正方向旋转这些角度都可以与 $\vec{O}z$ 重合。

我们可以定义$[0, 2\pi)$内的辐角为辐角主值，记作 arg z，则有

$$Argz = argz + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{25}$$

二维平面上的一个点可以用直角坐标表示(x, y)，也可以用极坐标表示(r, θ)，换算关系为

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, \tag{26}$$

所以，复数 z 可以写作

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta). \tag{27}$$

利用欧拉公式（后面再给出严格证明）：

$$cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}, \tag{28}$$

得到

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}. \tag{29}$$

这个形式清晰地体现了z 在复平面上的几何性质：r是模，θ是辐角。

根据e指数的特点，有

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} &= e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \\ e^{i\theta_1}/e^{i\theta_2} &= e^{i(\theta_1-\theta_2)}, \end{aligned} \tag{30}$$

复数乘法的几何意义
复数$z_1 = r_1e^{i\theta_1}$与$z_2 = r_2e^{i\theta_2}$的乘积为

$$z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}, \tag{31}$$

所以，任意复数z_1乘以z_2以后，相当于z_1的模变为原来的r_2倍，辐角增加θ_2。

换一句话说，$\vec{O}z_1$伸长/压缩r_2倍，并逆时针旋转θ_2。

例题：分别写出下列复数的三角形式和指数形式

- 1+i
- i
- 1
- -2

2.7 复数的乘幂

因为 $z = re^{i\theta}$, 所以，z的 n 次幂可写作

$$z^n = (re^{i\theta})^n = r^ne^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + i\sin n\theta), \tag{32}$$

根据这个式子，可以推出所谓棣莫弗公式：

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta, \tag{33}$$

比如，可以轻易推出以下公式

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta, \tag{34}$$

$$\sin 2\theta \quad = \quad 2\sin\theta\cos\theta. \tag{34}$$

2.8 复数的方根

若要求 z 的 n 次方根，即求 ω，使得

$$\omega^n = z, \tag{35}$$

把 $\omega = \rho e^{i\varphi}, z = re^{i\theta}$ 代入上式得到

$$\rho^n e^{in\varphi} = re^{i\theta}, \tag{36}$$

所以有

$$\rho^n = r, n\varphi = \theta + 2k\pi, \tag{37}$$

得到

$$\rho = r^{1/n}, \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}, \tag{38}$$

其中$k = 0, 1, \cdots, n-1$，有n个不同的取值。
例题：

- 用 $\sin\theta, \cos\theta$ 表示出 $\cos 3\theta, \sin 3\theta$。
- 计算$(1+i)^{1/4}$的所有值

2.9 邻域、内点、外点、孤立点

z_0的邻域(δ邻域)：

$$|z - z_0| < \delta, \tag{39}$$

也记作$N_\delta(z_0)$，或$N(z_0)$。

z_0的去心邻域：

$$0 < |z - z_0| < \delta, \tag{40}$$

内点：若对平面点集E中点 z_0，存在 $N(z_0)$，该邻域内所有点都属于 E，则称 z_0 是 E 的内点。
外点：存在 $N(z_0)$，该邻域内所有点都不属于 E。
边界点：对任意 $N(z_0)$，有属于 E 的点，也有不属于 E 的点。

孤立点：z_0 属于 E，但它的一个去心邻域都不属于 E。

2.10 区域、闭区域

开集：E内所有点都是内点。

连通：E内任意两个点都可以用一条内部的曲线连接

区域：连通的开集

闭区域：区域D+它的边界 = 闭区域$\bar{D}$

区域边界的正方向：区域内所有点都在左边

连续曲线：

$$z(t) = x(t) + iy(t), \tag{41}$$

其中$x(t), y(t)$是连续实函数,$\alpha \le t \le \beta$。

重点：若对$t_1 \neq t_2$(不同时为区间端点)，有$z(t_1) = z(t_2)$，则$z(t_1)$为曲线重点。

简单曲线(若尔当曲线)：没有重点

简单闭曲线：没有重点，且$z(\alpha) = z(\beta)$

光滑曲线：$x'(t), y'(t)$在$[\alpha, \beta]$上存在且不同时为零。

逐段光滑曲线：由有线条光滑曲线衔接而成

单连通域：区域D内任一条简单闭曲线都可以不经过D的边界，而收缩为D内的点。否则称作复连通域。

3. 复变函数

3.1 定义

$$\omega = f(z), z \in E, \tag{42}$$

其中E是一个复数集。

单值函数：z对应唯一的ω。否则称为多值函数。今后若不特别声明，所提到的函数都指单值函数。

单叶函数：若$z_1 \neq z_2$，必有$f(z_1) \neq f(z_2)$
ω 与 z 通过 $\omega = f(z)$ 联系，可看作是 z 平面与 ω 平面之间的映射。

3.2 复变函数的极限与连续性

极限：对任意$\epsilon > 0$，都存在$\delta > 0$，使得$N_\delta(z_0)$内有

$$|f(z) - \omega_0| < \epsilon, \tag{43}$$

则说 $f(z)$ 在 $z \to z_0$ 时趋于 ω_0，记作

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = \omega_0. \tag{44}$$

连续性：对任意 $\epsilon > 0$，都存在 $\delta > 0$，使得 $N_\delta(z_0)$ 内有

$$|f(z) - f(z_0)| < \epsilon, \tag{45}$$

则称 $f(z)$ 在 $z = z_0$ 连续。

这与实函数的极限、连续性定义是一样的。

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y) \tag{46}$$

在 $z_0 = x_0 + iy_0$ 连续的充要条件是 $u(x, y), v(x, y)$ 在 x_0, y_0 连续。

若 $f(z)$ 在有界区域 $\bar{D}$ 上连续，则有

- 在 $\bar{D}$ 上 $f(z)$ 有界，即 $|f(z)|$ 在 $\bar{D}$ 上有界
- $|f(z)|$ 在 $\bar{D}$ 上有最大值和最小值
- $f(z)$在$\bar{D}$上一致连续，即对任意$\epsilon > 0$，存在$\delta >$，使得$\bar{D}$上对任意满足$|z_1 - z_2| < \delta$的z_1, z_2，有$|f(z_1) - f(z_2)| < \epsilon$。

课堂讲解：习题1, 4, 8, 11, 16

课下练习：习题2, 3, 5, 9, 10