数学物理方法第十二章

路毅　　曲阜师范大学

2020 年 5 月 18 日

第十二章：傅里叶变换

- 第一节：傅里叶变换的定义及其基本性质
- 第二节：用傅里叶变换解微分方程举例

傅里叶变换的定义

在第八章，求解无限长杆热传导初值问题时，引入了傅里叶积分

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\lambda(x-\xi)d\xi, \tag{1}$$

由于 $\sin\lambda(x-\xi)$ 是 λ 的奇函数，所以有

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{i\lambda(x-\xi)}d\xi, \tag{2}$$

记

$$F(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\lambda\xi}d\xi, \tag{3}$$

叫做 $f(x)$ 的像，也记作 $F(\lambda) = \mathscr{F}(f)$，$f(x)$ 称作 $F(\lambda)$ 的原像，记作 $f(x) = \mathscr{F}^{-1}(F(\lambda))$，逆变换 $\mathscr{F}^{-1}$ 为

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)e^{i\lambda x}d\lambda. \tag{4}$$

收敛性

可以证明，若 $f(x)$ 在 $(-\infty, \infty)$ 绝对可积，在任一有限区间上最多有有限个极值点和第一类间断点，则 $f(x)$ 的傅里叶变换 $F(\lambda)$ 存在，且逆变换

$$\mathscr{F}^{-1}[F] = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}. \tag{5}$$

傅里叶变换的性质

1 它是一个线性变换

$$\mathscr{F}[\alpha f_1+\beta f_2]=\alpha\mathscr{F}[f_1]+\beta\mathscr{F}[f_2], \tag{6}$$

2 卷积定理定义卷积

$$f_1(x)\star f_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f_1(x-\eta)f_2(\eta)d\eta, \tag{7}$$

显然 $f_1(x)\star f_2(x)=f_2(x)\star f_1(x)$。卷积定理为

$$\mathscr{F}(f_1\star f_2)=\mathscr{F}[f_1]\mathscr{F}[f_2]. \tag{8}$$

3 乘积定理

$$\mathscr{F}[f_1 f_2]=\frac{1}{2\pi}\mathscr{F}[f_1]\star\mathscr{F}[f_2]. \tag{9}$$

傅里叶变换的性质

4 原像的导数定理若 $|x| \to \infty$ 时，$f(x) \to 0$，则有

$$\mathscr{F}[f'] = i\lambda\mathscr{F}[f], \tag{10}$$

5 像的导数定理

$$\frac{d}{d\lambda}\mathscr{F}[f] = \mathscr{F}[-ixf]. \tag{11}$$

n 维傅里叶变换

n 维傅里叶变换定义为

$$
\begin{aligned}
& F(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) = \mathscr{F}[f(x_1, \cdots, x_n)] \\
= & \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(x_1, \cdots, x_n) e^{-i(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)} dx_1 \cdots dx_n. \qquad (12)
\end{aligned}
$$

逆变公式为

$$
\begin{aligned}
& f(x_1, \cdots, x_n) \\
= & \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) e^{i(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n)} d\lambda_1 \cdots d\lambda_n (13)
\end{aligned}
$$

可以导出与 1 维情况相似的一系列性质。

δ 函数的傅里叶变换

因为

$$\mathscr{F}[\delta(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{-i\lambda x} dx = 1, \tag{14}$$

所以**约定**：$\mathscr{F}^{-1}[1] = \delta(x)$。

求解弦振动方程初值问题

$$\begin{cases} u_{tt} = & a^2 u_{xx}, \quad -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = & \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty, \\ u_t(x,0) = & 0, \quad -\infty < x < \infty. \end{cases} \tag{15}$$

取 $u(x,t), \varphi(x)$ 的傅里叶变换，

$$\mathscr{F}[u] = \tilde{u}(\lambda, t), \quad \mathscr{F}[\varphi] = \tilde{\varphi}(\lambda). \tag{16}$$

那么，在傅里叶变换下，$u_{tt} \to \tilde{u}_{tt}(\lambda, t), u_{xx} \to -\lambda^2 \tilde{u}$(原像的导数定理)。所以在傅里叶变换下，方程变为

$$\begin{cases} \tilde{u}_{tt} = & -a^2\lambda^2\tilde{u}, \\ \tilde{u}(\lambda,0) = & \tilde{\varphi}(\lambda), \\ \tilde{u}_t(\lambda,0) = & 0. \end{cases} \tag{17}$$

这个方程很容易求解：$\tilde{u} = \tilde{\varphi}(\lambda)\cos(a\lambda t)$。

弦振动方程初值问题

$$
\begin{aligned}
u &= \mathscr{F}^{-1}[\tilde{u}(\lambda, t)] = \mathscr{F}^{-1}[\tilde{\varphi}(\lambda)\cos a\lambda t] \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\varphi}(\lambda)\cos a\lambda t e^{i\lambda x} d\lambda \\
&= \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} [e^{i\lambda(x+at)} + e^{i\lambda(x-at)}]\tilde{\varphi}(\lambda) d\lambda \\
&= \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)].
\end{aligned} \tag{18}
$$

最终结果正是达朗贝尔解。

热传导方程初值问题

$$\begin{cases} u_t = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x,0) = \varphi(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases} \tag{19}$$

在傅里叶变换下，方程变为

$$\begin{cases} \tilde{u}_t = & -a^2\lambda^2\tilde{u}, \\ \tilde{u}(\lambda,0) = & \tilde{\varphi}(\lambda) \end{cases} \tag{20}$$

其解非常容易得到：$\tilde{u} = \tilde{\varphi}(\lambda)e^{-a^2\lambda^2 t}$。

热传导方程初值问题

所以 u 即 $\tilde{u}$ 的逆变换

$$u(x,t) = \mathscr{F}^{-1}[\tilde{u}(\lambda,t)] = \mathscr{F}^{-1}[\tilde{\varphi}e^{-a^2\lambda^2 t}] = \varphi(\lambda) \star \mathscr{F}^{-1}[e^{-a^2\lambda^2 t}] \tag{21}$$

上式使用了卷积定理。

根据泊松积分 (教材 (5.24) 式)，有

$$\begin{aligned}\mathscr{F}^{-1}[e^{-a^2\lambda^2 t}] &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t} e^{i\lambda x} d\lambda \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}(\cos\lambda x + i\sin\lambda x) d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\cos\lambda x d\lambda = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4a^2 t)}.\end{aligned} \tag{22}$$

所以最终解为

$$u(x,t) = \varphi(x) \star \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/(4a^2 t)} = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi) e^{-(\xi-x)^2/(4a^2 t)} d\xi. \tag{23}$$

作业

课堂选讲：2,4

课后习题：1,3,5