# 第四章 解析函数的幂级数表示

路毅 曲阜师范大学

# 1. 级数

## 1.1 复数级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty}\omega_n=\omega_0+\omega_1+\cdots,$$

其中$\omega_n=u_n+iv_n$。

## 1.2 收敛性

**绝对收敛**：$\sum_n|\omega_n|$收敛。

**条件收敛**：$\sum_n\omega_n$收敛，但$\sum_n|\omega_n|$不收敛。

## 1.3 重排

绝对收敛的复数项级数可以重排。

例：两个复数项级数$s=\sum_n\omega_n, s'=\sum_n\omega'_n$绝对收敛，那么它们的乘积为

$$ss'=(\sum_{k=0}^{\infty}\omega_k)(\sum_{l=0}^{\infty}\omega'_l)=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\omega_k\omega'_{n-k},$$

在上式最后一步，重新组合不影响整个级数的收敛性，以及收敛值。

## 1.4 幂级数

对于给定的$a$值，由$(z-a)$的（非零整数）幂函数构成的级数称作幂级数：

$$\sum_{k=0}^{\infty}(z-a)^k.$$

例如：几何幂级数：

$$1+z+z^2+z^3+\cdots$$

在$|z|<1$时收敛于$\frac{1}{1-z}$。

# 2. 幂级数的收敛性：阿贝尔定理

## 2.1 阿贝尔定理的证明

阿贝尔定理：如果级数$\sum_{n=0}^{\infty}c_nz^n$在$z=z_0$处收敛，且$z_0\neq0$，则它在以$O$为圆心并通过$z_0$的圆$K:|z|<|z_0|$内绝对收敛，且内闭一致收敛。

证明：

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty}|c_n z_0^n||z/z_0|^n,$$

由于 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z_0^n$ 收敛，所以各项的模必有上界，即

$$|c_n z_0^n| \le M,$$

所以有

$$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n z^n| = \sum_{n=0}^{\infty}|c_n z_0^n||z/z_0|^n \le M\sum_{n=0}^{\infty}|z/z_0|^n,$$

在$K:|z|<|z_0|$内部，$|z/z_0|<1$，所以$\sum_{n=0}^{\infty}|c_n z^n|$收敛，即$\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$绝对收敛。

## 2.2 幂级数收敛域

推论：若 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$在 $z=z_1$ 点发散，则 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在以原点为圆心并通过 $z_1$ 的圆的外部（即 $|z|>|z_1|$ ）必定处处发散。
所以，根据阿贝尔定理，幂级数的收敛域一定是圆形。我们把收敛域的半径叫做收敛半径。

## 2.3 收敛半径的判据

如果$\lim\limits_{n\to\infty}|c_{n+1}/c_n|=l$，或$\lim\limits_{n\to\infty}\quad|c_n|^{1/n}=l$，或$\lim\limits_{n\to\infty}sup|c_n|^{1/n}=l$，
则收敛半径为

$$R=\frac{1}{l}.$$

例：

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{1/(n+1)!}{1/n!}|=0$，所以收敛半径为$\infty$。

例：几何级数

$$1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}1/1=1,$$

所以收敛半径为 $R=1$，即$|z|<1$时几何级数收敛，其和函数为$1/(1-z)$，用等比数列前$n$项和取极限即可得到。

练习：$\sum_n z^n/n, \sum_n z^n/n^2$的收敛半径分别是多

# 3. 泰勒级数

## 3.1 收敛幂级数的系数

若在区域$D$内任意一处，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 都收敛于和函数 $f(z)$：

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-a)^k = f(z),$$

对 $f(z)$ 求 $n$ 阶导数，然后取 $z=a$ 得到

$$f^{(n)}(a)=c_n n!.$$

即 $c_n=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$，$f(z)$ 写作

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

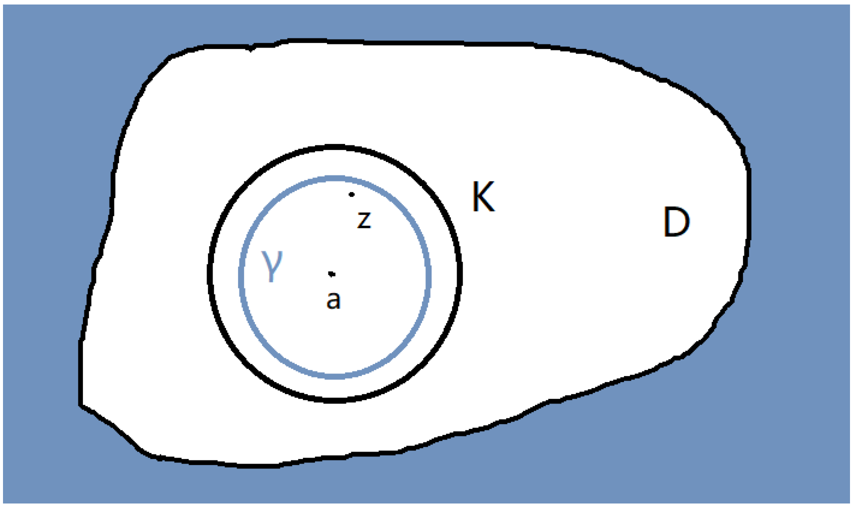
请问这个形式大家见过吗？让大家想起什么？

下面的泰勒定理将说明，任意一个解析函数都可以写成这种形式，即泰勒级数。

## 3.2 泰勒定理

定理4.5（泰勒定理）设$f(z)$在区域$D$内解析，$a\in D$，若圆$K:|z-a|<R$包含于$D$内，则$f(z)$在$K$内泰勒级数收敛。

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n,$$




证明：对$K$内任意一点$z$，都可以作$z$与$K$之间的圆环$\gamma$，其半径$\rho$满足$|z|<\rho<R$。根据柯西积分公式

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,$$

进一步，把$f(z)$写作

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}d\zeta,$$

因为$|\frac{z-a}{\zeta-a}|<1$，所以$\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^n}$，即

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta,$$

再利用柯西积分公式的推论：

$$\oint_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(a),$$

因此有

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n.$$

上述证明过程对 $K$ 内任意一点 $z$ 具有一般性，故泰勒定理得证。

## 3.3 例题

例2：求$e^z,\cos z,\sin z$在$z=0$的泰勒展开式。
例3：求多值函数$Ln(1+z)$的各个分支在点$z=0$的泰勒展开，并指出其收敛范围。
解：$Ln(1+z)$的各支为

$$Ln(1+z)=ln(1+z)+2k\pi i,k=0,\pm1,\pm2,\cdots,$$

其中 $ln(1+z)$ 为主值支

$$ln(1+z)=ln|1+z|+iarg(1+z),-\pi<arg(1+z)<\pi.$$

在 $z=-1$ 处有奇点，在其他地方都解析，所以根据泰勒定理，收敛半径为 1 。

$$\begin{aligned}ln(1+z)&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n,\\ Ln(1+z)&=2k\pi i+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}z^n.\end{aligned}$$

例：函数$\frac{e^z}{1-z}$在$|z|<1$内解析，现求其泰勒展开式。

# 4. 双边级数：洛朗定理

## 4.1 双边级数的收敛圆环

如果$(z-a)$，$\frac{1}{z-a}$的两个级数

$$c_0+c_1(z-a)+c_2(z-a)^2+\cdots$$
$$c_{-1}(z-a)^{-1}+c_{-2}(z-a)^{-2}+\cdots$$

分别在$|z-a|<R,|\frac{1}{z-a}|<\frac{1}{r}$收敛，即它们在 $r<|z-a|<R$ 圆环区域收敛。

可以定义**双边级数**：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n,$$

它在 $r<|z-a|<R$，即一个圆环区域上收敛。

## 4.2 洛朗定理

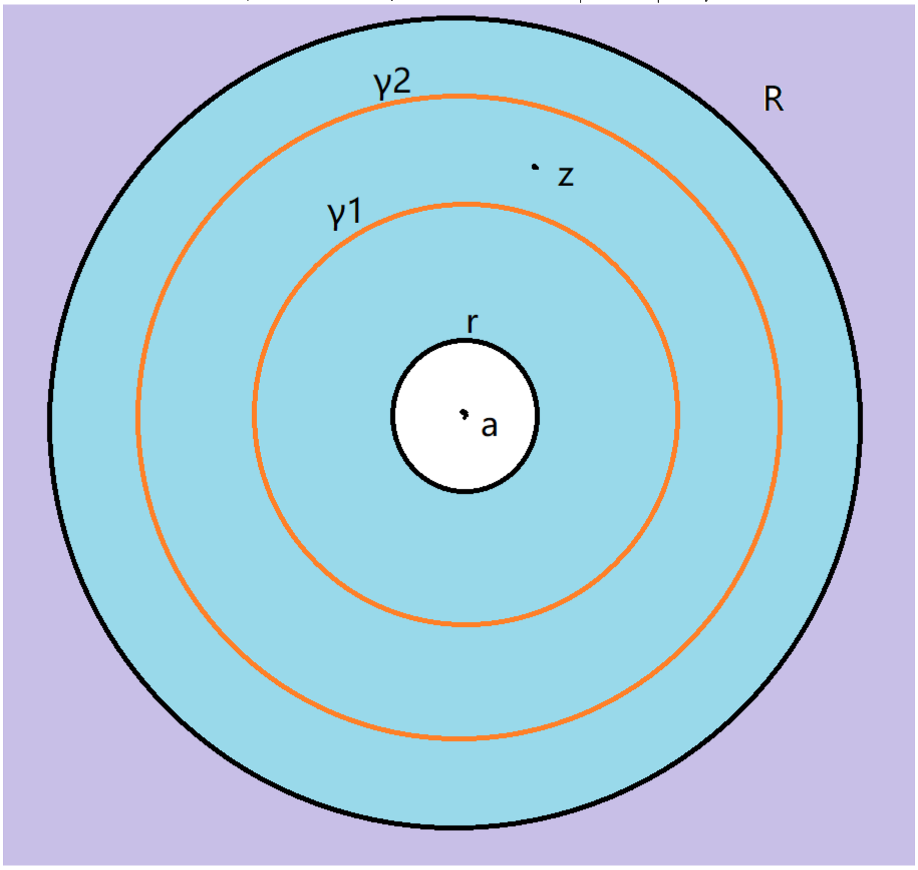
洛朗定理：若$f(z)$在圆环区域$H:r<|z-a|<R$解析，则它一定可以展开成**洛朗级数**：

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n,$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta,n\in Z$$

称为**洛朗系数**，其中$\gamma$为满足$r < \rho < R$的同心圆$|z-a| = \rho$。




对圆环区域内任意一点$z$，作两个辅助圆$\gamma_1, \gamma_2$，其半径$\rho_1, \rho_2$满足

$$r < \rho_1 < |z| < \rho_2 < R,$$

根据复围线上的柯西积分公式（很容易推广到复围线），

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2+\gamma_1^-}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta - \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta,$$

而

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\frac{1}{1-(z-a)/(\zeta-a)}d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta - a}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^n}d\zeta \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta)(z-a)^n.\end{aligned}$$

在$\gamma_1$上则有

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta &= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{z - a}\frac{1}{1-(\zeta-a)/(z-a)}d\zeta \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{z - a}\frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^n}d\zeta \\ &= -\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-(n+1)+1}}d\zeta)(z-a)^{-(n+1)},\end{aligned}$$

最后一步利用了复围线上的柯西积分定理。我们得到

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n,$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta, n\in Z.$$

$\gamma_1$是半径在$(r,R)$内的任意同心圆，所以洛朗定理得证。

**注意**：我们并没有要求$a$点一定是$f(z)$的奇点，所以，洛朗级数也涵盖了泰勒级数，可看作是泰勒级数的推广。

**作业选题**

考虑选讲：1, 6, 10, 15

课下练习：3, 4, 9, 12, 13(1-6), 16