数学物理方法第三章

路毅　曲阜师范大学

2020 年 4 月 6 日

第三章：柯西定理　柯西积分

- 第一节：复变积分的概念及其简单性质
- 第二节：柯西积分定理及其推广
- 第三节：柯西积分公式及其推广

复变积分

围线：逐段光滑的闭曲线，正向：“内部”在左侧

复变积分：C 为起点 z_0、终点 z' 之间的有向曲线，取 n 个节点 $z_0, z_1, \cdots, z_n = z'$，沿正向顺序

$$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}, \tag{1}$$

定义 C 上的复变积分

$$\int_c f(z)dz = \lim_{\Delta z_k \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k, \tag{2}$$

其中 ζ_k 为 z_{k-1} 到 z_k 的弧段上任意一点。

例题 1

试证

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n=1 \\ 0, & n\neq 1, n\in Z \end{cases} \tag{3}$$

其中 C 表示以 a 为中心，ρ 为半径的圆周。

证明：设 $z-a=\rho e^{it}$，则有 $dz = i\rho e^{it}dt$，$n=1$ 时，有

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it}dt}{\rho e^{it}} = 2\pi i, \tag{4}$$

$n\neq 1$，且 $n\in Z$ 时，

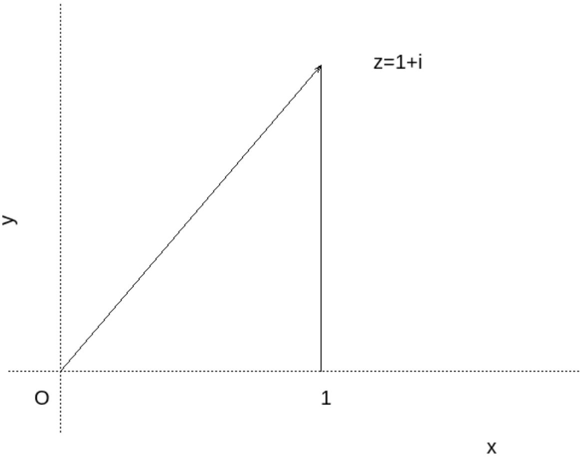
$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it}dt}{(\rho e^{it})^n} = i\rho^{1-n}\int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t}dt = 0, \tag{5}$$

例题 2

计算积分 $\int_C Rezdz$，其中积分路径 C 如图所示

(1) C 为联结 O 点到 $1+i$ 点的直线段。

(2) C 为联结 O 点到 1 点再到 $1+i$ 点的折线。



复变积分的简单性质

$$\int_C dz = z_1 - z_0, \tag{6}$$

$$\int_C [a_1 f_1(z) + a_2 f_2(z)] dz = a_1 \int_C f_1(z) dz + a_2 \int_C f_2(z) dz, \tag{7}$$

$$\int_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz, C = C_1 + C_2, \tag{8}$$

$$\int_{C-} f(z) dz = -\int_C f(z) dz, \tag{9}$$

$$\left|\int_C f(z) dz\right| \leq \int_C |f(z)||dz|, \tag{10}$$

$$\left|\int_C f(z) dz\right| \leq Ml, \tag{11}$$

其中 M 是 $|f(z)|$ 在 C 上的上界，l 为 C 的长度。

柯西积分定理

定理 3.1：若 $f(z)$ 在单连通区域 D 内解析，C 是 D 内的任一围线，则

$$\oint_C f(z)dz = 0. \tag{12}$$

若 $f'(z)$ 在 D 内连续，则上述定理很好证明。由于

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \tag{13}$$

所以有

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C udx - vdy + i\oint_C vdx + udy, \tag{14}$$

柯西积分定理

根据格林公式：

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy, \tag{15}$$

其中 C 为分段光滑曲线，D 为以 C 为边界的平面单连通区域，$P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 D 及 C 上连续，并且对 x,y 有连续偏导数[1]。

$$\begin{aligned}\oint_C f(z)dz &= \oint_C udx - vdy + i\oint_C vdx + udy, &(16)\\ &= \oint_S (-v_x - u_y)ds + i\oint_S (u_x - v_y)ds, &(17)\\ &= 0. &(18)\end{aligned}$$

[1] 川大版《高等数学》第二册第四版 217 页。

不定积分，原函数

如果 $f(z)$ 的单连通区域 D 内解析，则

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta \tag{19}$$

只与起点 z_0 和终点 z 有关，与路径无关。所以选定 z_0 以后，$F(z)$ 就是关于 z 的函数。其导数为

$$F'(z) = f(z), \tag{20}$$

所以 $F(z)$ 称为 $f(z)$ 的不定积分，或原函数。

例题 3,4

例 3

$$\int_a^b z\cos z^2 dz = \frac{1}{2}(\sin b^2 - \sin a^2), \tag{21}$$

例 4

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta} = \ln z - \ln 1 = \ln z. \tag{22}$$

柯西积分定理：推广到复围线

Figure: 复围线上的柯西积分定理

如图构造回路，整条回路记为 C，根据简单围线上的柯西定理有

$$\oint_C f(z)dz = 0, \tag{23}$$

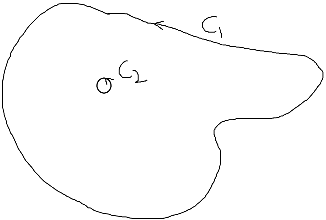
柯西积分推广到复围线

C 中除了 C_0, C_1, C_2, C_3 以外的部分，在极限情况下抵消，剩下

$$\oint_{C_0} f(z)dz + \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + \oint_{C_3} f(z)dz = 0. \tag{24}$$

即：解析函数在复围线上的积分为零。

复围线上的柯西积分定理: 推论 1



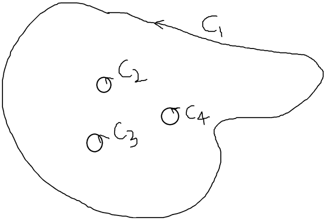
若 $f(z)$ 在 C_1, C_2 之间的区域解析，根据复围线上的柯西积分定理，有

$$\oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2^-} f(z)dz = 0, \tag{25}$$

其中 C_2^- 与图中 C_2 的方向相反。由于 $\oint_{C_2^-} f(z)dz = -\oint_{C_2} f(z)dz$，所以有

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz. \tag{26}$$

复围线上的柯西积分定理: 推论 2



若 $f(z)$ 在 C_1 之内,C_2, C_3, C_4 之外的区域解析，根据复围线上的柯西积分定理，有

$$\oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2^-} f(z)dz + \oint_{C_3^-} f(z)dz + \oint_{C_4^-} f(z)dz = 0, \tag{27}$$

所以有

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz + \oint_{C_3} f(z)dz + \oint_{C_4} f(z)dz. \tag{28}$$

例题 5

例 5：设 a 是围线 C 内部一点，证明

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i, n=1 \\ 0, n \neq 1, n \in Z \end{cases} \tag{29}$$

根据前面给出的推论 1，

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint_{\gamma_\rho} \frac{dz}{(z-a)^n}, \tag{30}$$

其中，γ_ρ 表示以 a 为圆心，以很小的 ρ 为半径（γ_ρ 全在 C 内部）的圆。因为 $\frac{1}{(z-a)^n}$ 在 C 与 γ_ρ 之间处处解析，所以根据推论 1 有上面的式子。可以设 γ_ρ 上任意点为 $z = a + \rho e^{i\theta}$，则有 $dz = i\rho e^{i\theta} d\theta$，所以

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint_{\gamma_\rho} \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\theta} d\theta}{\rho^n e^{in\theta}} = \begin{cases} 2\pi i, n=1 \\ 0, n \neq 1, n \in Z \end{cases} \tag{31}$$

例题 6

例 6：计算 $\oint_C \frac{dz}{z^2-1}$，其中 C 为圆周 $|z| = 2$。
因为

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right), \tag{32}$$

所以有

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{dz}{z^2-1} &= \frac{1}{2}\oint_C \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{2}\oint_C \frac{dz}{z+1} \\ &= \frac{1}{2}(2\pi i) - \frac{1}{2}(2\pi i) \\ &= 0. \end{aligned} \tag{33}$$

柯西积分公式

区域 D 边界是 C，$f(z)$ 在 D 内解析，在 $\bar{D}=D+C$ 上连续，则有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{34}$$

证明：取 z 为圆心，半径为 ρ（很小）的回路 γ_ρ，根据复围线的柯西积分定理，

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\lim_{\rho\to 0}\oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=2\pi i f(z), \tag{35}$$

所以有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta. \tag{36}$$

这说明：解析函数的值可以用它在边界上的值表示！可以考虑静电场的唯一性定理。

例 7

回路 C 为圆周 $|z|=2$，计算 $\oint_C \frac{z}{(9-z^2)(z+i)}dz$。

$$\oint_C \frac{z}{(9-z^2)(z+i)}dz = \oint_C \frac{z/(9-z^2)}{z-(-i)}dz, \tag{37}$$

因为 $z/(9-z^2)$ 在 C 及其内部都解析，所以可以使用柯西积分公式:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta. \tag{38}$$

套用这个公式，计算 $z/(9-z^2)$ 在 $z=-i$ 时的取值，得到

$$\begin{aligned}\oint_C \frac{z}{(9-z^2)(z+i)}dz &= \oint_C \frac{z/(9-z^2)}{z-(-i)}dz,\\ &= 2\pi i\frac{-i}{9-(-i)^2} = \frac{\pi}{5}.\end{aligned} \tag{39}$$

解析函数的无限次可微性

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta, z\in D \tag{40}$$

易得

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z)^{n+1}}d\zeta, z\in D, n=1,2,\cdots \tag{41}$$

也可以写作

$$\oint_C\frac{f(z)}{(z-a)^n}dz=\frac{2\pi i}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a), a\in D, n=1,2,\cdots \tag{42}$$

所以，只要 $f(z)$ 在围线 C 上连续，在 C 内解析，则 $f(z)$ 在 C 内任一点都有任意阶导数，任意阶导数值都可由上式计算，即用 C 上的函数值表达。

例 8

计算积分：

$$I=\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz, \tag{43}$$

其中 C 是由 $|z|=a, a>1$ 确定的区域。

解：构造复围线，由 C C_1, C_2 构成，其中，C_1 为绕 $z=i$ 点的小圆环，C_2 为绕 $z=-i$ 点的小圆环。根据复围线的柯西积分定理，

$$\begin{aligned} I &= \oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz = \oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz + \oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz, \\ &= \oint_{C_1} \frac{e^z/(z+i)^2}{(z-i)^2}dz + \oint_{C_2} \frac{e^z/(z-i)^2}{(z+i)^2}dz, \\ &= 2\pi i[e^z/(z+i)^2]'|_{z=i} + 2\pi i[e^z/(z-i)^2]'|_{z=-i}, \end{aligned} \tag{44}$$

最后一个等号使用了 (32) 式。所以，经过计算得到

$$I=\frac{\pi}{2}(1-i)e^i+\frac{\pi}{2}(-1-i)e^{-i}=i\pi\sqrt{2}\sin(1-\pi/4). \tag{45}$$

作业

课堂选讲：1, 4, 5, 7, 8, 15

课后作业：2, 9, 11, 12, 14