数学物理方法第九章

路毅　　曲阜师范大学

2020 年 5 月 7 日

第九章：拉普拉斯方程的圆的狄利克雷问题的傅里叶解

- 第一节：圆的狄利克雷问题
- 第二节：δ 函数

拉普拉斯方程

拉普拉斯方程

$$u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0, \tag{1}$$

或写作

$$\Delta u = \nabla^2 u = 0, \tag{2}$$

其中 $\vec{\nabla} = \vec{e}_x \partial_x + \vec{e}_y \partial_y + \vec{e}_z \partial_z$ 为梯度算符。

真空静电势、稳态无源处温度分布、扩散过程稳态无源处物质浓度，都满足这个方程。对应的物理定律分别为：无电荷处静电场散度为 0、能量守恒、物质不灭。

无限长圆柱稳态温度分布

无限长圆柱以 z 轴为对称轴，表面温度 $u(l,\theta,z)=u(l,\theta)=f(\theta)$(l 为圆柱半径)，与 z 无关，即沿 z 轴具有平移对称性。足够长时间后，圆柱达到热平衡，各个横截面温度分布完全相同，故各处温度可记为 $u(r,\theta)$，与 z 无关。u 在柱体内部满足拉普拉斯方程

$$u_{xx}+u_{yy}=0, \tag{3}$$

利用二维平面梯度算符

$$\begin{aligned}
\vec{\nabla} &= \vec{e}_x\partial_x+\vec{e}_y\partial_y=\vec{e}_r\partial_r+\vec{e}_\theta\frac{1}{r}\partial_\theta, && (4)\\
\partial_r\vec{e}_r &= \partial_r\vec{e}_\theta=0, && (5)\\
\partial_\theta\vec{e}_r &= \vec{e}_\theta,\quad \partial_\theta\vec{e}_\theta=-\vec{e}_r, && (6)
\end{aligned}$$

可以得到

$$\nabla^2=\partial_{xx}+\partial_{yy}=\partial_{rr}+\frac{1}{r^2}\partial_{\theta\theta}+\frac{1}{r}\partial_r. \tag{7}$$

无限长圆柱稳态温度分布：圆的狄利克雷问题

即得 2 维极坐标下的拉普拉斯方程

$$u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r^2}u_{\theta\theta} = 0, 0 \leq r \leq l, 0 \leq \theta \leq 2\pi. \tag{8}$$

另有边界条件

$$u(l,\theta) = f(\theta). \tag{9}$$

这就叫做“圆的狄利克雷问题”

分离变量法

故技重施，先设特殊形式

$$u(r,\theta) = \Theta(\theta)R(r), \tag{10}$$

代入 2 维极坐标拉普拉斯方程，得到

$$r^2\Theta(\theta)R''(r) + r\Theta(\theta)R'(r) + \Theta''(\theta)R(r) = 0, \tag{11}$$

即

$$\frac{\Theta''(\theta)}{\Theta(\theta)} = -\frac{r^2R''(r) + rR'(r)}{R(r)} = -\lambda, \tag{12}$$

即

$$\begin{cases} \Theta''(\theta) + \lambda\Theta(\theta) = 0, \\ r^2R''(r) + rR'(r) - \lambda R(r) = 0. \end{cases} \tag{13}$$

由于 $u(r,\theta+2\pi) = u(r,\theta)$，有边界条件

$$\Theta(\theta+2\pi) = \Theta(\theta), \tag{14}$$

分离变量法

于是得到

$$\Theta(\theta) = a_n \cos(n\theta) + b_n \sin(n\theta), n = 0, 1, \cdots \tag{15}$$

$R(r)$ 的通解为

$$\begin{aligned} R_0(r) &= c_0 + d_0 \ln r, n = 0, &(16)\\ R_n(r) &= c_n r^n + d_n r^{-n}, n = 1, 2, \cdots &(17) \end{aligned}$$

因为 $u(0,\theta)$ 是有限大的值，所以 $R(0) = finite$，于是有

$$\begin{aligned} R_0(r) &= c_0, n = 0, &(18)\\ R_n(r) &= c_n r^n, n = 1, 2, \cdots &(19) \end{aligned}$$

所以 $u_n(r,\theta) = R_n(r)\Theta_n(\theta)$ 可以写作

$$u_n(r,\theta) = \begin{cases} \dfrac{A_0}{2}, & n = 0 \\ r^n(A_n \cos(n\theta) + B_n \sin(n\theta)), & n = 1, 2, \cdots \end{cases} \tag{20}$$

分离变量法

所有 u_n 叠加起来得到

$$u(r,\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}u_n(r,\theta), \tag{21}$$

它满足 $u_{rr}+\frac{1}{r}u_r+\frac{1}{r^2}u_{\theta\theta}=0$，且有无限自由参数。带入边界条件 $u(l,\theta)=f(\theta)$，即得

$$\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos(n\theta)+B_n\sin(n\theta))=f(\theta), \tag{22}$$

所以 An, B_n 即傅里叶系数，

$$\begin{cases} A_n= & \dfrac{1}{\pi l^n}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos(n\varphi)d\varphi, n=0,1,\cdots \\ B_n= & \dfrac{1}{\pi l^n}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin(n\varphi)d\varphi, n=1,2,\cdots \end{cases} \tag{23}$$

分离变量法

代回 $u(r,\theta)$ 的表达式，得到

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)[1+2\sum_{n=1}^{\infty}(r/l)^n\cos(\varphi-\theta)]d\varphi, \tag{24}$$

记 $\delta=\varphi-\theta, x=\frac{r}{l}e^{i\delta}, y=\frac{r}{l}e^{-i\delta}$，在柱体内部，有 $r<l$，即 $|x|,|y|<1$，

$$\begin{aligned}
& 1+2\sum_{n=1}^{\infty}(r/l)^n\cos(\varphi-\theta) \\
= \; & 1+\sum_{n=1}^{\infty}(x^n+y^n)=\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1-y}-1=\frac{1-xy}{(1-x)(1-y)} \\
= \; & \frac{1-r^2/l^2}{1-2r\cos\delta/l+r^2/l^2}=\frac{l^2-r^2}{l^2-2lr\cos(\varphi-\theta)+r^2}
\end{aligned} \tag{25}$$

所以我们得到

$$u(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{l^2-r^2}{l^2-2lr\cos(\varphi-\theta)+r^2}d\varphi. \tag{26}$$

物理阐释？

$$u(r,\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varphi)\frac{l^2 - r^2}{l^2 - 2lr\cos(\varphi-\theta) + r^2}d\varphi. \tag{27}$$

分母下面是 (l,φ,z) 与 (r,θ,z) 的距离平方。如此简洁的形式，一定存在一个简洁的解释，但我还没有想到。

δ 函数

狄拉克：δ 函数的定义为

$$\delta(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ \infty & (x = 0) \end{cases} \tag{28}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1. \tag{29}$$

容易证明

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(x)dx = \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \varphi(x)\delta(x)dx = \varphi(\xi)\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x)dx = \varphi(\xi), \tag{30}$$

其中 ξ 为 $-\epsilon, \epsilon$ 之间的一点，上式使用了积分中值定理。$\epsilon \to 0$ 时，$\xi \to 0$，即得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(x)dx = \varphi(0). \tag{31}$$

δ 函数平移

$$\delta(x-\xi)=\begin{cases}0 & (x\neq\xi)\\ \infty & (x=\xi)\end{cases} \tag{32}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x-\xi)dx=1. \tag{33}$$

易得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)\delta(x-\xi)dx=\varphi(\xi). \tag{34}$$

高维 δ 函数

高维 δ 函数定义为

$$\delta(x,y,z)=\delta(x)\delta(y)\delta(z), \tag{35}$$

则有

$$\iiint \varphi(x,y,z)\delta(x,y,z)dxdydz=\varphi(0,0,0). \tag{36}$$

δ 函数性质

i) δ 函数是偶函数

ii) $x\delta(x) = 0$

iii) $\delta(x) = \frac{dH(x)}{dx}$，其中 $H(x)$ 称作单位阶跃函数，定义为

$$H(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ 1, x > 0. \end{cases} \tag{37}$$

作业

习题　2,3,7