数学物理方法第三章

路毅 曲阜师范大学

1. 复变积分

1.1 定义

复变积分：C为起点z_0、终点z_n之间的有向曲线，在曲线上依次取节点 $z_0, z_1, \cdots, z_{n-1}, z_n$，沿正向顺序

$$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}, \tag{1}$$

定义C上的复变积分

$$\int_c f(z)dz = \lim_{\Delta z_1, \Delta z_2, \cdots, \Delta z_n \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k, \tag{2}$$

其中 ζ_k 为 z_{k-1} 到 z_k 的弧段上任意一点。

如果 C 是逐段光滑的闭曲线，则称作是 **围线**，定义其正方向，使得：沿围线正方向时，围线"内部"始终在左侧。

1.2 例题1

计算积分$\int_C Re$（z）dz，其中积分路径 C 为：

- C为联结O点到$1+i$点的直线段。
- C为联结O点到1点再到$1+i$点的折线。

解：（1）记复平面上 $1+i$ 为 A 点，则在线段 OA 上，有

$$z = x + ix \quad \Rightarrow \quad dz = (1+i)dx \tag{3}$$

被积函数为 $f(z) = Re(z) = x$，所以有

$$\int_C Re(z)dz = \int_{OA} Re(z)dz = \int_0^1 x(1+i)dx = \frac{1+i}{2}. \tag{4}$$

(2) 即复平面上 B 点为 $(1,0)$，则在线段 OB 上，有

$$z = x \quad \Rightarrow \quad dz = dx \quad \Rightarrow \quad \int_{OB} Re(z)dz = \int_0^1 xdx = \frac{1}{2}; \tag{5}$$

在线段 BA 上，有

$$z = 1 + iy \quad \Rightarrow \quad dz = idy \quad \Rightarrow \quad \int_{BA} Re(z)dz = \int_0^1 1(idy) = i; \tag{6}$$

所以整个复变积分为 $\int_C Re(z)dz = \frac{1}{2} + i$。

1.3 例题2

试证：

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n = 1 \\ 0, & n \neq 1, n \in Z \end{cases} \tag{7}$$

其中 C 表示以 a 为中心，ρ 为半径的圆周。

证明：

因为 C 表示以 a 为中心，ρ 为半径的圆周，所以在 C 上的复数可以表示为

$$z = a + \rho e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi]. \tag{8}$$

取微分，则有

$$dz = d(a + \rho e^{it}) = i\rho e^{it} dt, \tag{9}$$

$n = 1$ 时，有

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it} dt}{\rho e^{it}} = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i, \tag{10}$$

$n \neq 1$，且 $n \in Z$ 时，

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it} dt}{(\rho e^{it})^n} = i\rho^{1-n} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t} dt = 0, \tag{11}$$

1.4 复变积分的性质

1.4.1 证明：$\int_C dz = z_1 - z_0$，其中 z_0, z_1为曲线C的起点、末点。

1.4.2 证明：$|\int_C f(z)dz| \leq \int_C |f(z)||dz|$

1.4.3 证明：$|\int_C f(z)dz| \leq Ml$，其中 M 是 $|f(z)|$ 在 C 上的上界，l 为 C 的长度。

2. 柯西积分定理

2.1 证明

若$f(z)$在单连通区域D内解析，C是D内的任一围线，则

$$\oint_C f(z)dz = 0. \tag{12}$$

若$f'(z)$在D内连续，则上述定理很好证明。由于

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \tag{13}$$

所以有

$$\oint_C f(z)dz = \oint_C udx - vdy + i\oint_C vdx + udy, \tag{14}$$

根据格林公式：

$$\oint_C P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \oiint_D (\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y})dxdy, \tag{15}$$

其中C为分段光滑曲线，D为以C为边界的平面单连通区域。

$$\begin{aligned} \oint_C f(z)dz &= \oint_C udx - vdy + i\oint_C vdx + udy, \\ &= \oint_S (-v_x - u_y)ds + i\oint_S (u_x - v_y)ds = 0. \end{aligned} \tag{16}$$

2.2 不定积分，原函数

如果$f(z)$的单连通区域D内解析，则

$$F(z) = \int^z f(\zeta)d\zeta \tag{17}$$

$$F(z)=\int_{z_0}^{z} f(\zeta)d\zeta \tag{17}$$

只与起点z_0和终点z有关，与路径无关（试着自己证明这一点）。所以选定z_0以后，$F(z)$ 就是关于 z 的函数。其导数为

$$F'(z)=f(z), \tag{18}$$

所以$F(z)$称为$f(z)$的不定积分，或原函数。
例3

$$\int_a^b z\cos z^2 dz=\frac{1}{2}(\sin b^2-\sin a^2), \tag{19}$$

例4

$$\int_1^z \frac{d\zeta}{\zeta}=\ln z-\ln 1=\ln z. \tag{20}$$

2.3 柯西积分定理：推广到复围线

如图做辅助线，构造回路，将复连通区域变为 2 个单连通区域 C_{up},C_{down}。根据简单围线上的柯西定理有

$$\oint_{C_{up}} f(z)dz=0,\quad \oint_{C_{down}} f(z)dz=0.\quad \Rightarrow \quad \oint_{C_{up}} f(z)dz+\oint_{C_{down}} f(z)dz=0. \tag{21}$$

在极限情况下，辅助线抵消，得到

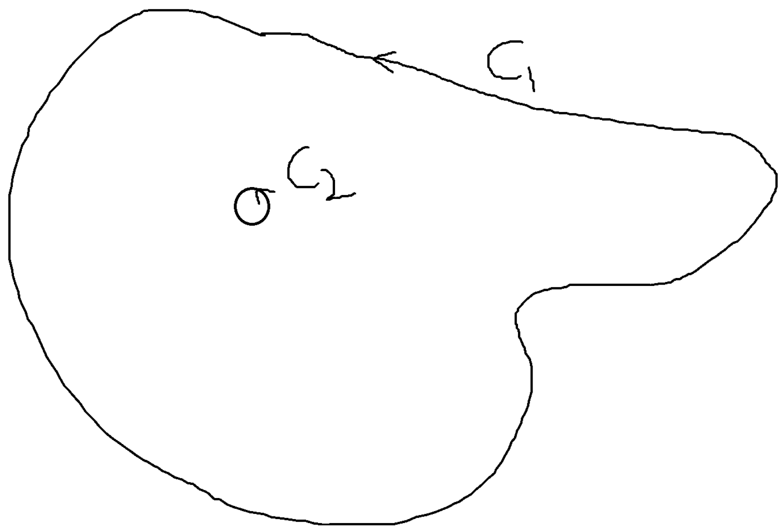
$$C_{up}+C_{down}=C_0+C_1+C_2+C_3, \tag{22}$$

所以有

$$\oint_{C_0} f(z)dz+\oint_{C_1} f(z)dz+\oint_{C_2} f(z)dz+\oint_{C_3} f(z)dz \quad = \quad \oint_{C_{up}} f(z)dz+\oint_{C_{down}} f(z)dz \quad = \quad 0. \tag{23}$$

因此，***解析函数在复围线上的积分为零***。即柯西积分定理在复围线上成立。

2.4 柯西积分定理的推论1



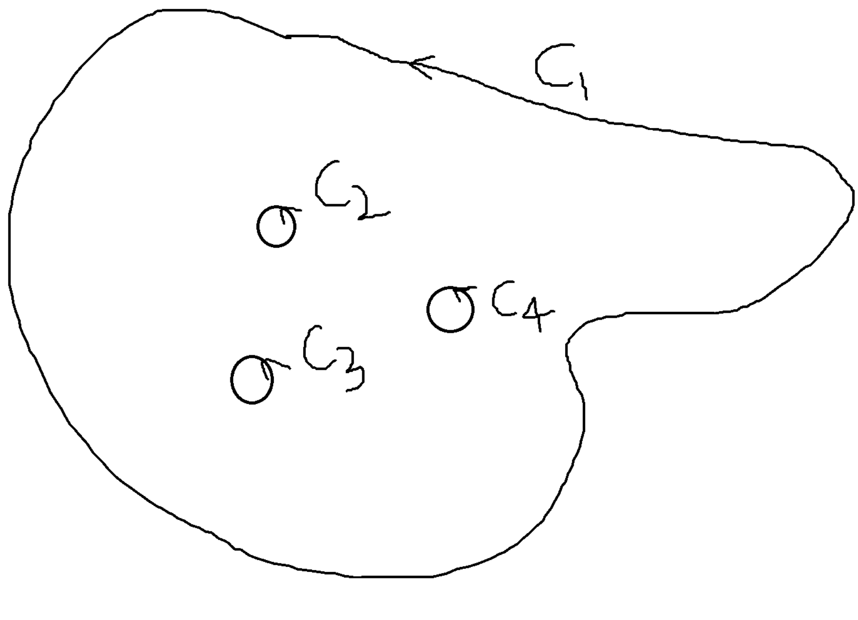
若$f(z)$在C_1, C_2之间的区域解析，根据复围线上的柯西积分定理，有

$$\oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2^-} f(z)dz = 0, \tag{24}$$

其中C_2^-与图中C_2的方向相反。由于$\oint_{C_2^-} f(z)dz = -\oint_{C_2} f(z)dz$，所以有

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz. \tag{25}$$

2.5 柯西积分定理的推论2



若$f(z)$在C_1之内,C_2, C_3, C_4之外的区域解析，根据复围线上的柯西积分定理，有

$$\oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2^-} f(z)dz + \oint_{C_3^-} f(z)dz + \oint_{C_4^-} f(z)dz = 0, \tag{26}$$

所以有

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz + \oint_{C_3} f(z)dz + \oint_{C_4} f(z)dz. \tag{27}$$

2.6 例题

例5：设a是围线C内部一点，证明

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i, n=1 \\ 0, n \neq 1, n \in Z \end{cases} \tag{28}$$

根据前面给出的推论1，

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint_{\gamma_\rho} \frac{dz}{(z-a)^n}, \tag{29}$$

其中，γ_ρ表示以a为圆心，以很小的ρ为半径（γ_ρ全在C内部）的圆。因为$\frac{1}{(z-a)^n}$在C与γ_ρ之间处处解析，所以根据推论1有上面的式子。

可以设γ_ρ上任意点为$z = a + \rho e^{i\theta}$，则有$dz = i\rho e^{i\theta} d\theta$，所以

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint_{\gamma_\rho} \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{i\theta} d\theta}{\rho^n e^{in\theta}} = \begin{cases} 2\pi i, n=1 \\ 0, n \neq 1, n \in Z \end{cases} \tag{30}$$

例6：计算$\oint_C \frac{dz}{z^2-1}$，其中C为圆周$|z| = 2$。

因为

$$\frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right), \tag{31}$$

所以有

$$\begin{aligned} \oint_C \frac{dz}{z^2-1} &= \frac{1}{2}\oint_C \frac{dz}{z-1} - \frac{1}{2}\oint_C \frac{dz}{z+1} \\ &= \frac{1}{2}(2\pi i) - \frac{1}{2}(2\pi i) = 0. \end{aligned}$$

3. 柯西积分公式

3.1 柯西积分公式

区域D边界是C，$f(z)$在D内解析，在$\bar{D} = D + C$上连续，则有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{32}$$

证明：取z为圆心，半径为ρ（很小）的回路γ_ρ，根据复围线的柯西积分定理，

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \lim_{\rho \to 0} \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i f(z), \tag{33}$$

所以有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta. \tag{34}$$

这说明：解析函数的值可以用它在边界上的值表示！可以考虑静电场的唯一性定理。

3.2 例题

回路C为圆周$|z|=2$，计算$\oint_C \frac{z}{(9-z^2)(z+i)}dz$。

$$\oint_C \frac{z}{(9-z^2)(z+i)}dz = \oint_C \frac{z/(9-z^2)}{z-(-i)}dz, \tag{35}$$

因为$z/(9-z^2)$在C及其内部都解析，所以可以使用柯西积分公式:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta. \tag{36}$$

套用这个公式，计算$z/(9-z^2)$在$z=-i$时的取值，得到

$$\oint_C \frac{z}{(9-z^2)(z+i)}dz = \oint_C \frac{z/(9-z^2)}{z-(-i)}dz \quad = \quad 2\pi i\frac{-i}{9-(-i)^2} = \frac{\pi}{5}. \tag{37}$$

3.3 解析函数的无限次可微性

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, z \in D, \tag{38}$$

易得

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}}d\zeta, z \in D, n = 1, 2, \cdots \tag{39}$$

也可以写作

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^n}dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a), a \in D, n = 1, 2, \cdots \tag{40}$$

所以，只要$f(z)$在围线C上连续，在C内解析，则$f(z)$在C内任一点都有任意阶导数，任意阶导数值都可由上式计算，即用C上的函数值表达。

3.4 例子

计算积分：

$$I = \oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz, \tag{41}$$

其中C是由$|z|=a, a>1$确定的区域。

解：构造复围线，由C，C_1, C_2构成，其中，C_1为绕$z=i$点的小圆环，C_2为绕$z=-i$点的小圆环。根据复围线的柯西积分定理，

$$\begin{aligned} I &= \oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz = \oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz + \oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2}dz, \\ &= \oint_{C_1} \frac{e^z/(z+i)^2}{(z-i)^2}dz + \oint_{C_2} \frac{e^z/(z-i)^2}{(z+i)^2}dz, \\ &= 2\pi i[e^z/(z+i)^2]'|_{z=i} + 2\pi i[e^z/(z-i)^2]'|_{z=-i}, \end{aligned}$$

最后一个等号使用了(32)式。所以，经过计算得到

$$I = \frac{\pi}{2}(1-i)e^i + \frac{\pi}{2}(-1-i)e^{-i} = i\pi\sqrt{2}\sin(1-\pi/4). \tag{42}$$

4 作业

课堂选讲：1, 4, 5, 7, 8, 15

课后作业：2, 9, 11, 12, 14