贝塞尔函数　柱函数

路毅　　曲阜师范大学

2020 年 6 月 29 日

贝塞尔函数　柱函数

- 第一节：贝塞尔函数的母函数与递推式
- 第二节：贝塞尔方程，贝塞尔函数作为正交函数系
- 第三节：球贝塞尔函数
- 第四节：第二类和第三类贝塞尔函数，渐进行为

伽马函数

为了后面叙述的方便，我们在这里简单介绍伽马函数。

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt, x > 0. \tag{1}$$

容易求得

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= \int_0^{\infty} e^{-t} dt = 1, && (2)\\
\Gamma(\frac{1}{2}) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{-1/2} dt = \int_0^{\infty} e^{-\omega^2} 2d\omega = \sqrt{\pi}. && (3)
\end{aligned}$$

根据定义式，做一次分部积分，可以推得 $x > 1$ 时的递推式

$$\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1} dt = -e^{t} t^{x-1}|_0^{\infty} + (x-1)\int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-2} dt \\
&= (x-1)\Gamma(x-1). && (4)
\end{aligned}$$

伽马函数

所以，总结上面的结果，可以得到

$$\begin{aligned}\Gamma(n+1) &= n!, \qquad n=0,1,2,\cdots, & (5)\\ \Gamma(n+\frac{1}{2}) &= \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}, \qquad n=0,1,2,\cdots. & (6)\end{aligned}$$

贝塞尔函数的母函数

贝塞尔函数的母函数为

$$G(x,z)=e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)z^n, \tag{7}$$

其中 $J_n(x)$ 即贝塞尔函数，$x\in R$。因为母函数在 $z=0$ 并不解析，但在 $0<|z|<\infty$ 是解析的，所以可做洛朗展开，既有负幂次项，也有非负幂次项。

利用 e 指数函数的泰勒展开式，很容易写出 $G(x,z)$ 的洛朗展开式，

$$G(x,z)=e^{\frac{xz}{2}}e^{-\frac{x}{2z}}=\sum_{r=0}^{\infty}(\frac{x}{2})^r\frac{z^r}{r!}\sum_{s=0}^{\infty}(-\frac{x}{2})^s\frac{z^{-s}}{s!}, \tag{8}$$

上式为两个级数相乘，进行重排，可以得到贝塞尔函数，$n\geq 0$ 时有

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!(n+s)!}(\frac{x}{2})^{n+2s}, \tag{9}$$

$$J_{-n}(x) = \sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+r}}{r!(n+r)!}(\frac{x}{2})^{n+2r}=\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(-1)^s}{s!(-n+s)!}(\frac{x}{2})^{-n+2s}. \tag{10}$$

贝塞尔函数

可以看到 $J_{-n}(x)$ 与 $J_n(x)$ 的形式一致，且有

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x). \tag{11}$$

如果把阶乘形式推广到 Γ 函数，即 $n! = \Gamma(n+1)$，则 $J_n(x)$ 可以写作

$$J_n(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\Gamma(n+s+1)} (\frac{x}{2})^{n+2s}. \tag{12}$$

因为 Γ 函数在正实轴上都有定义，所以这个形式可以推广到任意实数阶贝塞尔函数 J_ν，

$$J_\nu(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{s!\Gamma(\nu+s+1)} (\frac{x}{2})^{\nu+2s}. \tag{13}$$

当然，$G(x,z)$ 的洛朗展开只有整数阶的幂次，所以 J_ν 只是 J_n 的推广，与 $G(x,z)$ 没有直接关系。

递推公式

从母函数出发，可以推出 J_n 的递推公式，但是不能直接用到 J_ν，毕竟 J_ν 与母函数没有直接关系。所以，我们采用教材上的思路，从级数表达式出发，推导递推公式，因为 J_n, J_ν 都有统一的级数表达式，所以这样推出的递推公式也是普适的。因为

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)} (\frac{x}{2})^{\nu+2k}. \tag{14}$$

所以有

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}[x^\nu J_\nu(x)] &= \frac{d}{dx}[2^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)} (\frac{x}{2})^{2\nu+2k}] \\
&= 2^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k(k+\nu)}{k!\Gamma(\nu+k+1)} (\frac{x}{2})^{2\nu+2k-1} \\
&= x^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\nu+k)} (\frac{x}{2})^{\nu-1+2k} = x^\nu J_{\nu-1}(x), \qquad (15)
\end{aligned}$$

递推公式

类似地，可以证明

$$\frac{d}{dx}[x^{-\nu}J_\nu(x)] = -x^{-\nu}J_{\nu+1}(x). \tag{16}$$

上面得到的两个式子即

$$\begin{aligned} \nu J_\nu + xJ'_\nu &= xJ_{\nu-1}, && (17) \\ -\nu J_\nu + xJ'_\nu &= -xJ_{\nu+1}. && (18) \end{aligned}$$

分别消去 J'_ν 和 J_ν，得到两个基本递推式

$$\begin{aligned} J_{\nu-1} + J_{\nu+1} &= \frac{2\nu}{x}J_\nu, && (19) \\ J_{\nu-1} - J_{\nu+1} &= 2J'_\nu. && (20) \end{aligned}$$

注意特殊情况：在 $\nu = 0$ 时，有

$$J'_0(x) = -J_1(x). \tag{21}$$

递推公式总结

$$\begin{aligned} \nu J_\nu + xJ'_\nu &= xJ_{\nu-1}, && (22) \\ -\nu J_\nu + xJ'_\nu &= -xJ_{\nu+1}, && (23) \\ J_{\nu-1} + J_{\nu+1} &= \frac{2\nu}{x} J_\nu, && (24) \\ J_{\nu-1} - J_{\nu+1} &= 2J'_\nu. && (25) \end{aligned}$$

半奇数阶贝塞尔函数

利用定义，可以得到

$$\begin{aligned} J_{\frac{1}{2}}(x) &= \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\frac{3}{2}+k)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\ &= \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\ 2^{2k+2}(k+1)!}{k!(2k+2)!\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x. \end{aligned} \tag{26}$$

$$\begin{aligned} J_{-\frac{1}{2}}(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\Gamma(k+\frac{1}{2})} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2^{2k} k!}{k!(2k)!\sqrt{\pi}} \left(\frac{x}{2}\right)^{-\frac{1}{2}+2k} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x. \end{aligned} \tag{27}$$

结合前面的递推式，可以得知，所有半奇数阶的贝塞尔函数都可以写成初等函数形式。

积分形式

根据母函数

$$G(x,z)=e^{\frac{x}{2}(z-\frac{1}{z})}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)z^n. \tag{28}$$

以及洛朗展开公式

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n,\quad c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta, n\in Z, \tag{29}$$

γ 为以 $z=a$ 为圆心的收敛圆环内，且包围 $z=a$ 点。
我们可以写出 $J_n(x)$ 的柯西积分形式

$$J_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{e^{\frac{x}{2}(\zeta-\frac{1}{\zeta})}}{\zeta^{n+1}}d\zeta, \tag{30}$$

C 为围绕 $z=0$ 的任意曲线。

积分形式

不妨取 C 为单位圆，$\zeta = e^{i\theta}, \theta \in [-\pi, \pi]$，则有

$$
\begin{aligned}
J_n(x) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i(n+1)\theta} e^{ix\sin\theta} i e^{i\theta} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(x\sin\theta - n\theta)} d\theta \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x\sin\theta - n\theta) d\theta. \qquad (31)
\end{aligned}
$$

更一般地，有

$$
\begin{aligned}
J_\nu(x) &= \frac{(\frac{x}{2})^\nu}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\nu+\frac{1}{2})}\int_0^{\pi} \cos(x\cos\theta)\sin^{2\nu}\theta d\theta, (Re\nu > -\frac{1}{2}) \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos(x\sin\theta - \nu\theta) d\theta - \frac{\sin\nu\pi}{\pi}\int_0^{\infty} e^{-x\sinh\zeta - \nu\zeta} d\zeta. \qquad (32)
\end{aligned}
$$

贝塞尔函数　柱函数

- 第一节：贝塞尔函数的母函数与递推式
- 第二节：贝塞尔方程，贝塞尔函数作为正交函数系
- 第三节：球贝塞尔函数
- 第四节：第二类和第三类贝塞尔函数，渐进行为

贝塞尔方程

利用上面推导的递推式，可以推导出贝塞尔方程，根据 (19-20)，有

$$
\begin{aligned}
4J_\nu'' &= 2J_{\nu-1}' - 2J_{\nu+1}' = J_{\nu-2} - J_\nu - (J_\nu - J_{\nu+2}) \\
&= J_{\nu-2}(x) + J_{\nu+2} - 2J_\nu \\
&= \frac{2(\nu-1)}{x}J_{\nu-1} - J_\nu + \frac{2(\nu+1)}{x}J_{\nu+1} - J_\nu - 2J_\nu \\
&= \frac{2}{x}[n(J_{\nu-1} + J_{\nu+1}) + J_{\nu+1} - J_{\nu-1}] - 4J_\nu \\
&= \frac{2}{x}[\nu\frac{2\nu}{x}J_\nu - 2J_\nu'] - 4J_\nu,
\end{aligned} \tag{33}
$$

即

$$
x^2J_\nu''(x) + xJ_\nu'(x) + (x^2 - \nu^2)J_\nu(x) = 0. \tag{34}
$$

这就是贝塞尔方程。

正交性

ν 阶贝塞尔方程可写作

$$x\frac{d^2}{dx^2}J_\nu(x)+\frac{d}{dx}J_\nu(x)+(x-\nu^2/x)J_\nu(x)=0. \tag{35}$$

做替换　$x\to kx,\frac{d}{dx}\to\frac{d}{d(kx)}=\frac{1}{k}\frac{d}{dx}$，则方程变为

$$kx\frac{1}{k^2}\frac{d^2}{dx^2}J_\nu(kx)+\frac{1}{k}\frac{d}{dx}J_\nu(kx)+(kx-\frac{\nu^2}{kx})J_\nu(kx)=0. \tag{36}$$

即

$$x\frac{d^2}{dx^2}J_\nu(kx)+\frac{d}{dx}J_\nu(kx)+(k^2x-\nu^2/x)J_\nu(kx)=0. \tag{37}$$

正交性

$$x\frac{d^2}{dx^2}J_\nu(kx)+\frac{d}{dx}J_\nu(kx)+(k^2x-\nu^2/x)J_\nu(kx)=0. \tag{38}$$

也可以看做 $Lu+\lambda\omega(x)u=0$ 形式，

$$L=x\frac{d^2}{dx^2}+\frac{d}{dx}-\nu^2/x,\quad \lambda=k^2,\omega(x)=x, \tag{39}$$

取 $k_i^\nu=\alpha_{\nu i}/a$, 其中 $\alpha_{\nu i}$ 为 $J_\nu(x)$ 的第 i 个**正**零点，$i=1,2,\cdots$，即 $J_\nu(k_i^\nu a)=J_\nu(\alpha_{\nu i})=0$。则有

$$x[J_\nu(k_i^\nu x)\frac{d}{dx}J_\nu(k_j^\nu x)-\frac{d}{dx}J_\nu(k_i^\nu x)J_\nu(k_j^\nu x)]|_0^a=0. \tag{40}$$

根据斯图姆刘维尔理论，$i\neq j$ 时，有

$$\int_0^a xJ_\nu(k_i^\nu x)J_\nu(k_j^\nu x)dx=0. \tag{41}$$

$J_\nu(k_i^\nu x)$ 的模方

我们可以另设 $J_\nu(\xi x)$，ξ 为 k_i 的小邻域内的实数，$\xi \in (k_i^\nu - \delta, k_i^\nu + \delta)$，根据贝塞尔方程有

$$\frac{d}{dx}[x\frac{d}{dx}J_\nu(k_i^\nu x)] + [(k_i^\nu)^2 x - \frac{\nu^2}{x}]J_\nu(k_i^\nu x) = 0, \tag{42}$$

$$\frac{d}{dx}[x\frac{d}{dx}J_\nu(\xi x)] + (\xi^2 x - \frac{\nu^2}{x})J_\nu(\xi x) = 0. \tag{43}$$

第一式乘以 $J_\nu(\xi x)$，第二式乘以 $J_\nu(k_i^\nu x)$，然后相减，在 $[0, a]$ 上积分，得到

$$\begin{aligned} & ((k_i^\nu)^2 - \xi^2)\int_0^a xJ_\nu(k_i^\nu x)J_\nu(\xi x)dx \\ = \; & [\xi x J_\nu(k_i^\nu x)\frac{d}{dx}J_\nu(\xi x) - k_i^\nu x\frac{d}{dx}J_\nu(k_i^\nu x)J_\nu(\xi x)]|_0^a \\ = \; & -k_i^\nu a\frac{d}{dx}J_\nu(k_i^\nu a)J_\nu(\xi a). \end{aligned} \tag{44}$$

$J_\nu(k_i^\nu x)$ 的模方

所以，如果取极限 $\xi \to k_i^\nu$，则有

$$\begin{aligned}
\int_0^a xJ_\nu^2(k_i^\nu x)dx &= \lim_{\xi\to k_i^\nu}\int_0^a xJ_\nu(k_i^\nu x)J_\nu(\xi x)dx \\
&= \lim_{\xi\to k_i^\nu}\frac{-k_i^\nu aJ_\nu'(k_i^\nu a)J_\nu(\xi a)}{(k_i^\nu)^2-\xi^2} \\
&= \frac{-k_i^\nu a^2[J_\nu'(k_i^\nu a)]^2}{-2k_i^\nu}(\text{洛必达法则}) \\
&= \frac{a^2}{2}[J_\nu'(k_i^\nu a)]^2. \qquad (45)
\end{aligned}$$

根据递推公式 $-\nu J_\nu + xJ_\nu' = -xJ_{\nu+1}$，以及 $J_\nu(k_i^\nu a)=0$，有

$$J_\nu'(k_i^\nu a) = -J_{\nu+1}(k_i^\nu a). \qquad (46)$$

所以，最终的最终，我们得到了 $J_\nu(k_i^\nu x)$ 的模方

$$\int_0^a xJ_\nu^2(\alpha_{\nu n}x/a)dx = \frac{a^2}{2}[J_{\nu+1}(\alpha_{\nu i})]^2. \qquad (47)$$

正交归一性

总结正交性、模方，得到:

$$\int_0^a xJ_\nu(k_i^\nu x)\ J_\nu(k_j^\nu x)dx = \delta_{ij}\frac{a^2}{2}[J_{\nu+1}(\alpha_{\nu i})]^2. \tag{48}$$

展开定理的叙述 (完备性未给出证明)

设函数 $f(r)$ 在区间 $(0,a)$ 内有连续的一阶导数和分段连续的二阶导数，且 $f(r)$ 在 $r=0$ 处有界，在 $r=a$ 处为零，则 $f(r)$ 在 $(0,a)$ 上可以展开为绝对且一致收敛的级数

$$f(r) = \sum_{i=1}^{\infty} c_{\nu i} J_\nu(k_i^\nu r), \tag{49}$$

展开系数 $c_{\nu i}$ 为

$$c_{\nu i} = \frac{2}{a^2[J_{\nu+1}(\alpha_{\nu i})]^2} \int_0^a f(\rho) J_\nu(k_i^\nu \rho)\rho d\rho. \tag{50}$$

圆膜振动问题

固定边界的圆膜振动问题:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2(u_{xx} + u_{yy})(0 \le x^2 + y^2 < l^2, t > 0), \\ u|_{x^2+y^2+l^2} = 0(t \ge 0), \\ u(x, y, 0) = \varphi(x, y), u_l(x, y, 0) = \psi(x, y), (0 \le x^2 + y^2 \le l^2). \end{cases} \tag{51}$$

做分离变量法, $u(x, y, t) = T(t)U(x, y)$, 得到

$$\begin{cases} T'' + a^2\lambda T = 0, \\ U_{xx} + U_{yy} + \lambda U = 0, \\ U|_{x^2+y^2=l^2} = 0, \end{cases} \tag{52}$$

其中 λ 为待定常数。在 $x - y$ 平面上取极坐标 (r, ϕ), 则方程变为

$$\begin{cases} T'' + a^2\lambda T = 0, \\ U_{rr} + \frac{1}{r}U_r + \frac{1}{r^2}U_{\phi\phi} + \lambda U = 0, \\ U|_{r=l} = 0, \end{cases} \tag{53}$$

要满足边界条件, 我们会发现 $\lambda = k^2, k \in R$。

圆膜振动方程

再令 $U=\Phi(\phi)R(r)$，得到

$$\begin{cases} T''+a^2k^2T=0, \\ \Phi''+\nu^2\Phi=0, \\ r^2R''+rR'+(k^2r^2-\nu^2)R=0, \\ R(l)=0. \end{cases} \tag{54}$$

就这样，贝塞尔方程出现了。考虑周期性边界条件 (或连续性条件)，ν 必为整数 $\nu=n$，所以 $k=\alpha_{n,i}/l, i=1,2,\ldots$ 时，$J_n(kr)$ 在 $[0,l]$ 上构成正交归一完备函数基。即有

$$\begin{aligned} u(r,\phi,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\infty}^{i=1}[(A_{n,i}\cos ak_i^n t+B_{n,i}\sin ak_i^n t)\cos n\phi \\ &+(\alpha_{n,i}\cos ak_i^n t+\beta_{n,i}\sin ak_i^n t)\sin n\phi]J_n(k_i^n r). \end{aligned} \tag{55}$$

圆膜振动方程

$$
\begin{aligned}
u(r,\phi,t) &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\infty}^{i=1}[(A_{n,i}\cos ak_i^n t + B_{n,i}\sin ak_i^n t)\cos n\phi \\
&\quad +(\alpha_{n,i}\cos ak_i^n t + \beta_{n,i}\sin ak_i^n t)\sin n\phi]J_n(k_i^n r). \quad (56)
\end{aligned}
$$

代入初始条件，

$$
\begin{aligned}
\varphi(r,\phi) &= u(r,\phi,t=0) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}(A_{n,i}\cos n\phi + \alpha_{n,i}\sin n\phi)J_n(k_i^n r), \quad (57) \\
\psi(r,\phi) &= u_t(r,\phi,t)|_{t=0} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} ak_i^n(B_{n,i}\cos n\phi + \beta_{n,i}\sin n\phi)J_n(k_i^n r). \quad (58)
\end{aligned}
$$

$\{1, \cos\phi, \cdots, \sin\phi, \sin 2\phi, \cdots\}$ 是 $[0, 2\pi]$ 上的正交基矢，而 $\{J_n(k_1^n r), J_n(k_2^n r), \cdots\}$ 是 $[0, l]$ 上的正交基矢，利用这些正交性，可以得到上式中的展开系数。

诺依曼函数：第二类贝塞尔函数

贝塞尔方程：

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \tag{59}$$

在 $\nu \notin Z$ 时，$J_\nu, J_{-\nu}$ 构成两个线性无关解，所以通解为 $C_1J_\nu + C_2J_{-\nu}$。但是在 $\nu \in Z$，即 $\nu = n$ 时，有

$$J_{-n}(x) = (-1)^nJ_n(x), \tag{60}$$

所以 J_{-n} 与 J_n 线性相关，需要构造另一个线性无关解，才能写出 n 阶贝塞尔方程的通解。

诺依曼函数：第二类贝塞尔函数

定义诺依曼函数

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos\nu\pi J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}, \tag{61}$$

ν 为整数时，分子分母都趋于 0，但整体是个有限大的数

$$\begin{aligned} Y_n(x) &= \lim_{\nu\to n} \frac{-\pi\sin\nu\pi J_\nu + \cos\nu\pi\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu} - \frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}}{\pi\cos\nu\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}[\frac{\partial J_\nu}{\partial\nu} - (-1)^n\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial\nu}]|_{\nu=n} \end{aligned} \tag{62}$$

显然，$Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x)$。

Y_n 是 n 阶贝塞尔方程的解

因为 $x^2J_\nu''+xJ_\nu'+(x^2-\nu^2)J_\nu=0$，所以对这个公式两边求关于 ν 的偏导数，得到

$$[x^2(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu})''+x(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu})''+(x^2-\nu^2)(\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu})]_{\nu=n}=2nJ_n, \tag{63}$$

类似地，对 $J_{-\nu}$ 做相似的事，得到

$$[x^2(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu})''+x(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu})''+(x^2-\nu^2)(\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu})]_{\nu=n}=2nJ_{-n}=2n(-1)^nJ_n(x), \tag{64}$$

利用上面两个式子，以及 $Y_n(x)=\frac{1}{\pi}[\frac{\partial J_\nu}{\partial \nu}-(-1)^n\frac{\partial J_{-\nu}}{\partial \nu}]|_{\nu=n}$，得到

$$[x^2Y_\nu''+xY_\nu'+(x^2-\nu^2)Y_\nu]|_{\nu=n}=0, \tag{65}$$

即 $Y_n(x)$ 满足 Bessel 方程，与 $J_n(x)$ 构成 n 阶 Bessel 方程的两个线性无关解。

汉克尔函数

$$H_\nu^{(1)}(x) = J_\nu(x) + iY_\nu(x) = \frac{1}{i\sin\nu\pi}[J_{-\nu}(x) - e^{-i\nu\pi}J_\nu(x)], \quad (66)$$

$$H_\nu^{(2)}(x) = J_\nu(x) - iY_\nu(x) = \frac{1}{i\sin\nu\pi}[e^{i\nu\pi}J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)]. \quad (67)$$

球贝塞尔函数

在三维球坐标下，分解一些物理方程时，可能遇到

$$r^2R'' + 2rR' + [k^2r^2 - \nu(\nu+1)]R = 0, \tag{68}$$

可以设 $R(r) = x^{-1/2}z(x)$，则方程转化为

$$x^2z'' + xz' + [x^2 - (\nu+\frac{1}{2})^2]z = 0, \tag{69}$$

正是 $\nu + \frac{1}{2}$ 阶 Bessel 方程，所以两个线性无关解为

$$\begin{cases} x^{-\frac{1}{2}}J_{\nu+\frac{1}{2}}(x), \\ x^{-\frac{1}{2}}Y_{\nu+\frac{1}{2}}(x), \end{cases} \text{或者} \begin{cases} x^{-\frac{1}{2}}H^{(1)}_{\nu+\frac{1}{2}}(x), \\ x^{-\frac{1}{2}}H^{(2)}_{\nu+\frac{1}{2}}(x). \end{cases} \tag{70}$$

球 Bessel 方程

定义球贝塞尔函数

$$
\begin{aligned}
j_\nu(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{\nu+\frac{1}{2}}(x), & (71)\\
n_\nu(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} Y_{\nu+\frac{1}{2}}(x), & (72)\\
h_\nu^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{\nu+\frac{1}{2}}^{(1)}(x), & (73)\\
h_\nu^{(1)}(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{2x}} H_{\nu+\frac{1}{2}}^{(1)}(x). & (74)
\end{aligned}
$$

显然有

$$
\begin{aligned}
h_\nu^{(1)}(x) &= j_\nu(x) + i n_\nu(x), & (75)\\
h_\nu^{(2)}(x) &= j_\nu(x) - i n_\nu(x), & (76)\\
j_0(x) &= \frac{\sin x}{x}, j_{-1}(x) = \frac{\cos x}{x}. & (77)
\end{aligned}
$$

虚宗量 Bessel 函数

ν 阶 Bessel 方程:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \tag{78}$$

做替换 $x \to ix$，得到

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + \nu^2)y = 0, \tag{79}$$

其解为 $J_\nu(ix)$，记

$$I_\nu(x) = i^{-\nu}J_\nu(ix), \tag{80}$$

称作第一类虚宗量 Bessel 函数。上面的偏微分方程的另一个线性无关解为

$$K_\nu(x) = \frac{\pi}{2}\frac{I_{-\nu}(x) - I_\nu(x)}{\sin\nu\pi}, \tag{81}$$

称作第二类虚宗量 Bessel 函数。可以证明，

$$K_\nu(x) = \frac{\pi i^{\nu+1}}{2}H_\nu^{(1)}(ix). \tag{82}$$

Bessel 函数的渐进公式

$|x| \to \infty$ 时，有

$$
\begin{aligned}
J_\nu(x) &\to \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right), && (83)\\
Y_\nu(x) &\to \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right), && (84)\\
H_\nu^{(1)}(x) &\to \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{i\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}, && (85)\\
H_\nu^{(2)}(x) &\to \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,e^{-i\left(x-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}, && (86)\\
I_\nu(x) &\to \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{x}, && (87)\\
K_\nu(x) &\to \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-x}. && (88)
\end{aligned}
$$

课后作业

习题 1, 2, 3, 8, 11