数学物理方法第四章

路毅　　曲阜师范大学

2020 年 4 月 16 日

第四章：解析函数的幂级数表示

- 第一节：函数项级数的基本性质
- 第二节：幂级数与解析函数
- 第三节：洛朗级数
- 第四节：单值函数的孤立奇点

数项级数

复数级数：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n = \omega_0 + \omega_1 + \cdots \tag{1}$$

其中 $\omega_n = u_n + iv_n$。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \omega_n \to s = \sigma + i\tau \Leftrightarrow \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} u_n \to \sigma, \\ \sum_{n=0}^{\infty} v_n \to \tau. \end{cases} \tag{2}$$

绝对收敛：$\sum_n |\omega_n|$ 收敛。

条件收敛：$\sum_n \omega_n$ 收敛，但 $\sum_n |\omega_n|$ 不收敛。

数项级数

绝对收敛的复数项级数可以重排。

例：两个复数项级数 $s=\sum_n \omega_n, s'=\sum_n \omega'_n$ 绝对收敛，那么它们的乘积为

$$ss' = (\sum_{k=0}^{\infty}\omega_k)(\sum_{l=0}^{\infty}\omega'_l) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\omega_k\omega'_{n-k}, \tag{3}$$

在上式最后一步，将 $(\sum_{k=0}^{\infty}\omega_k)(\sum_{l=0}^{\infty}\omega'_l)$ 中的各项做了重新组合，不影响整个级数的收敛性，以及收敛值。

函数项级数：一致收敛

和函数：若 $\sum_n f_n(z)$ 对于定义域 E 上每一点 z 都收敛至 $f(z)$，则称 $f(z)$ 是级数 $\sum_n f_n(z)$ 的和函数。

一致收敛：若函数 $f(z)$ 的定义域为 E，$\forall\epsilon > 0$，$\exists N$，当 $n > N$ 时，$\forall z \in E$，有

$$|f(z) - S_n(z)| < \epsilon, \tag{4}$$

其中 $S_n(z) = \sum_{k=0}^{n} f_k(z)$。那么我们说 $\sum_n f_n(z)$ 在 E 上一致收敛于 $f(z)$。

柯西一致收敛准则：$\forall\epsilon > 0, \exists N$，当 $n > N$ 时，$\forall z \in E$，有

$$|f_{n+1}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \epsilon, p = 1, 2, 3, \cdots \tag{5}$$

这是一致收敛的充要条件。

魏尔斯特拉斯 M-判别法

魏尔斯特拉斯 M-判别法：若有正数列 $M_n, n = 0, 1, 2, \cdots$ 对任意 $z \in E$ 都有

$$|f_n(z)| \leq M_n, n = 0, 1, 2, \cdots \tag{6}$$

且 $\sum_n M_n$ 收敛，则 $\sum_n f_n(z)$ 在 E 上绝对收敛且一致收敛，则 $\sum_n M_n$ 称为 $\sum_n f_n(z)$ 的强级数（或优级数）。

定理 4.1　若 $\forall n = 0, 1, 2, \cdots$　$f_n(z)$ 在 E 上连续，且 $\sum_n f_n(z)$ 一致收敛于 $f(z)$，则

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \tag{7}$$

在 E 上连续。

内闭一致收敛

定理 4.2　若 $\forall n=0,1,2,\cdots$，$f_n(z)$ 在曲线 C 上连续，且在 C 上一致收敛于 $f(z)$，则

$$\int_C f(z)dz=\sum_{n=0}^{\infty}\int_C f_n(z)dz, \tag{8}$$

定义 4.2　设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ 的各项均在区域 D 内有定义，若 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ 在 D 的任一有界闭子区域上一致收敛，则称级数在 D 内"内闭一致收敛"。

魏尔斯特拉斯定理

定理 4.3（魏尔斯特拉斯定理）设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)$ 的各项均在区域 D 内解析，且级数在区域 D 内"内闭一致收敛"于 $f(z)$，则

i $f(z)=\sum_n f_n(z)$ 在区域 D 内解析

ii 在 D 内级数可逐项求导至任意阶，且

$$f^{(p)}(z)=\sum_n f_n^{(p)}(z), p=1,2,3,\cdots \tag{9}$$

iii $\sum_n f_n^{(p)}(z)$ 在 D 内内闭一致收敛于 $f^{(p)}(z)$。

幂级数的收敛性

阿贝尔定理：如果级数 $\sum_n c_n z^n$ 在 $z_0 \neq 0$ 收敛，则它在以 O 为圆心并通过 z_0 的圆 $K: |z| < |z_0|$ 内绝对收敛，且内闭一致收敛。

证明：

$$\sum_n |c_n z^n| = \sum_n |c_n z_0^n||z/z_0|^n, \tag{10}$$

由于 $\sum_n c_n z_0^n$ 收敛，所以各项的模必有上界，即

$$|c_n z_0^n| \leq M, \tag{11}$$

所以

$$\sum_n |c_n z^n| = \sum_n |c_n z_0^n||z/z_0|^n \leq M \sum_n |z/z_0|^n, \tag{12}$$

在 $K: |z| < |z_0|$ 内部，$|z/z_0| < 1$，所以 $\sum_n |c_n z^n|$ 收敛，即 $\sum_n c_n z^n$ 绝对收敛。

幂级数的收敛性

在 K 内任意一个闭圆 $|z| \leq \rho(\rho < |z_0|)$ 上，

$$|c_n z^n| \leq |c_n|\rho^n, \tag{13}$$

前面已经证明，$\sum_n |c_n|\rho^n$ 收敛，所以上式说明 $\sum_n c_n z^n$ 具有强级数，根据魏尔斯特拉斯 M-判别法，$\sum_n c_n z^n$ 在 K 内闭圆上一致收敛。

推论：若 $\sum_n c_n z^n$ 在 $z = z_1$ 点发散，则 $\sum_n c_n z^n$ 在以原点为圆心并通过 z_1 的圆的外部（即 $|z| > |z_1|$）必定处处发散。

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 收敛/发散的分类讨论

1 $\forall z \neq 0$，$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 发散，例如

$$1 + z + 2^2 z^2 + \cdots n^n z^n + \cdots \tag{14}$$

$\forall z \neq 0$，通项都不收敛，故级数发散。

2 $\forall z$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 均收敛，例如

$$1 + z + \frac{z^2}{2^2} + \cdots + \frac{z^n}{n^n} + \cdots \tag{15}$$

$\forall z$，$\exists N$，使得 $n > N$ 时，$|z|/n < 1/2$，所以级数收敛。

3 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 有不为 0 的收敛点，也有发散点。在这种情况下，根据阿贝尔定理，一定存在一个有限正数 R，在 $|z| = R$ 内绝对收敛，在 $|z| = R$ 外发散，所以可定义收敛半径R。

收敛半径

如果 $\lim\limits_{n\to\infty}|c_{n+1}/c_n|=l$，或 $\lim\limits_{n\to\infty}|c_n|^{1/n}=l$，或 $\lim\limits_{n\to\infty}sup|c_n|^{1/n}=l$，则收敛半径为

$$R=\begin{cases}1/l, & \text{当 } l \text{ 为有限值且不为零时,}\\ 0, & \text{当 } l=\infty \text{ 时,}\\ \infty, & \text{当 } l=0 \text{ 时}\end{cases} \tag{16}$$

例：

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots \tag{17}$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}|\frac{1/(n+1)!}{1/n!}|=0$，所以收敛半径为 ∞。

例：几何级数

几何级数

$$1+z+z^2+\cdots+z^n+\cdots \tag{18}$$

因为

$$\lim_{n\to\infty} 1/1=1, \tag{19}$$

所以收敛半径为 $R=1$，即 $|z|<1$ 时几何级数收敛，其和函数为 $1/(1-z)$，用等比数列前 n 项和取极限即可得到。

问：$\sum_n z^n/n, \sum_n z^n/n^2$ 的收敛半径分别是多少？

收敛级数的各项系数的意义

若在区域 D 内任意一处

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = f(z), \tag{20}$$

根据维尔斯特拉斯定理，在 D 内级数可以逐项求导至任意阶，即

$$c_n = f^{(n)}(z)/n!, n = 0, 1, 2, \cdots \tag{21}$$

4.2.2 解析函数的幂级数表示

定理 4.5（泰勒定理）设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，$a \in D$，若圆 $K : |z-a| < R$ 包含于 D 内，则 $f(z)$ 在 K 内泰勒级数收敛。

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n, \tag{22}$$

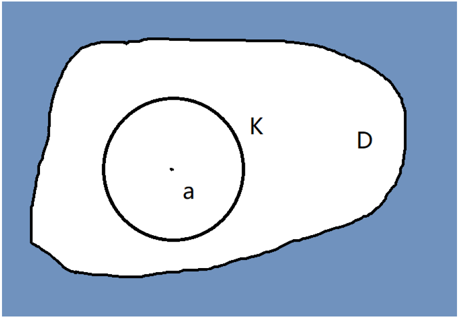

Figure: 泰勒定理

泰勒定理的证明

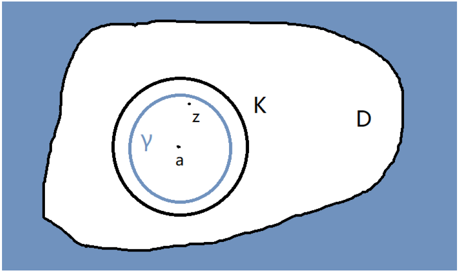

Figure: 泰勒定理

证明：对 K 内任意一点 z，都可以作 z 与 K 之间的圆环 γ，其半径 ρ 满足 $|z| < \rho < R$。根据柯西积分定理

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \tag{23}$$

泰勒定理的证明

进一步，把 $f(z)$ 写作

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}d\zeta, \tag{24}$$

因为 $\left|\frac{z-a}{\zeta-a}\right|<1$，所以 $\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^n}$，即

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\frac{1}{1-\frac{z-a}{\zeta-a}}d\zeta=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-a)^n}{2\pi i}\oint_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta, \tag{25}$$

利用第三章证明过的结论：$\oint_{\gamma}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta=\frac{2\pi i}{n!}f^{(n)}(a)$，得到

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n. \tag{26}$$

上述证明过程对 K 内任意一点 z 具有一般性，故泰勒定理得证。

例题

例 2：求 $e^z, \cos z, \sin z$ 在 $z=0$ 的泰勒展开式。

例 3：求多值函数 $Ln(1+z)$ 的各个分支在点 $z=0$ 的泰勒展开，并指出其收敛范围。$Ln(1+z)$ 的各支为

$$Ln(1+z) = ln(1+z) + 2k\pi i, k = 0, \pm1, \pm2, \cdots, \tag{27}$$

其中 $ln(1+z)$ 为主值支

$$ln(1+z) = ln|1+z| + iarg(1+z), -\pi < arg(1+z) < \pi. \tag{28}$$

在 $z=-1$ 处有奇点，在其他地方都解析，所以根据泰勒定理，收敛半径为 1。

$$\begin{aligned} ln(1+z) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n, \\ Ln(1+z) &= 2k\pi i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n. \end{aligned} \tag{29}$$

例题

函数 $\frac{e^z}{1-z}$ 在 $|z|<1$ 内解析，现求其泰勒展开式。

解析函数的零点

m 阶零点

若 $f(a)=f'(a)=\cdots=f^{(m-1)}(a)=0$，但 $f^{(m)}(a)\neq 0$，则称 a 是 $f(z)$ 的 m 阶零点。

解析函数零点的孤立性

若 $f(z)$ 是不恒为零的解析函数，a 是它的一个零点，则必存在 a 的一个邻域，在此邻域内 $f(z)$ 没有其他零点。
证明：因为 $f(z)$ 解析，所以 $f(z)$ 在 a 的邻域内可做泰勒展开

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n(z-a)^n, \tag{30}$$

由于 $f(z)$ 是不恒为零的解析函数，所以在此邻域内 c_n 不可能全部为零 (这个结论是对的，但我们没有给严格证明)。如果 a 是 m 阶零点，则 $f(z)=(z-a)^m\phi(z)$，且 $\phi(a)\neq 0$，即 $f(z)$ 的最低阶小量为 $(z-a)^m$，它在 a 很小的去心邻域内不可能为零。

双边幂级数：收敛圆环

如果 $(z-a)$，$\frac{1}{z-a}$ 的两个级数

$$c_0 + c_1(z-a) + c_2(z-a)^2 + \cdots \tag{31}$$

$$c_{-1}(z-a)^{-1} + c_{-2}(z-a)^{-2} + \cdots \tag{32}$$

分别在 $|z-a| < R, |\frac{1}{z-a}| < \frac{1}{r}$ 收敛，即它们在

$$r < |z-a| < R \tag{33}$$

收敛。

可以定义双边级数：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n, \tag{34}$$

它在 $r < |z-a| < R$，即一个圆环区域上收敛。

洛朗定理

洛朗定理：若 $f(z)$ 在圆环区域 $H: r < |z-a| < R$ 解析，则它一定可以展开成洛朗级数：

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z-a)^n, \tag{35}$$

其中

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - a)^{n+1}} d\zeta, n \in Z \tag{36}$$

称为洛朗系数，其中 γ 为满足 $r < \rho < R$ 的同心圆 $|z-a| = \rho$。

洛朗定理的证明

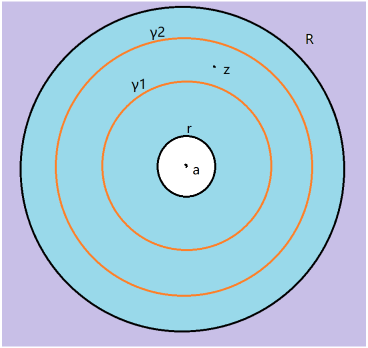

Figure: 洛朗定理的证明

对圆环区域内任意一点 z，作两个辅助圆 γ_1, γ_2，其半径 ρ_1, ρ_2 满足

$$r < \rho_1 < |z| < \rho_2 < R, \tag{37}$$

洛朗定理的证明

根据复围线上的柯西积分公式（很容易推广到复围线），

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2+\gamma_1^-}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta,\quad(38)$$

而

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\frac{1}{1-(z-a)/(\zeta-a)}d\zeta\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{\zeta-a}\frac{(z-a)^n}{(\zeta-a)^n}d\zeta\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_2}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta\right)(z-a)^n \qquad (39)\end{aligned}$$

洛朗定理的证明

在 γ_1 上则有

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta &= -\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{z-a}\frac{1}{1-(\zeta-a)/(z-a)}d\zeta \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{z-a}\frac{(\zeta-a)^n}{(z-a)^n}d\zeta \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{-(n+1)+1}}d\zeta\right)(z-a)^{-(n+1)} \qquad (40)
\end{aligned}
$$

最后一步利用了复围线上的柯西积分定理。

洛朗定理的证明

将 (39-40) 带入 (38)，我们得到

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(z-a)^n, \tag{41}$$

其中

$$c_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\gamma_1}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-a)^{n+1}}d\zeta, n\in Z \tag{42}$$

γ_1 是半径在 (r,R) 内的任意同心圆，所以洛朗定理得证。

我们并没有要求 a 点一定是 $f(z)$ 的奇点，所以，洛朗级数也涵盖了泰勒级数，可看作是泰勒级数的推广。

奇点

孤立奇点：若 $f(z)$ 在 $z=a$ 不解析（无定义或不可导），且存在 $z=a$ 的一个去心邻域，在该邻域内 $f(z)$ 没有其他奇点。反之称作非孤立奇点。

例子：

$$f(z)=\frac{c}{z-a};f(z)=\frac{1}{\sin\frac{1}{z}}. \tag{43}$$

例题

例 6　函数 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 分别在 $0<|z-1|<1, 0<|z-2|<1$ 内做洛朗展开。

例 7　$f(z)=\frac{\sin z}{z}$ 在 $0<|z|<\infty$ 做洛朗展开。

例 8　$f(z)=e^{z}+e^{\frac{1}{z}}$ 在　$0<|z|<\infty$ 做洛朗展开。

例 9　$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 在 $|z|<1, 1<|z|<2, 2<|z|<\infty$ 做洛朗展开。

单值函数的孤立奇点

$f(z)$ 在孤立奇点 $z=a$ 的去心邻域（去心邻域都是圆环）内可做洛朗展开

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-a)^n, \tag{44}$$

称 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-a)^n$ 为在 a 点的正则部分，$\sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-a)^{-n}$ 为在 a 点的主要部分。

i 如果主要部分为 0, 则 $z=a$ 称作可去奇点。

ii 如果主要部分为有限多项

$$\frac{c_{-1}}{z-a}+\cdots+\frac{c_{-m}}{(z-a)^m} \tag{45}$$

则 a 为 $f(z)$ 的 m 阶极点。

iii 如果主要部分为无限多项，则 a 为本性奇点。

可去奇点

例：$f(z)=\frac{\sin z}{z}$ 的奇点 $z=0$ 是可去奇点，只需重新定义 $f(0)=1$，即可得到一个处处解析的函数。

可去奇点判定条件（任取其一，三者等价）：

i $f(z)$ 在 a 点没有主要成分

ii $\lim\limits_{z\to a} f(z)$ 存在且有限

iii $f(z)$ 在 a 的充分小邻域内有界。

极点

判定条件（任取其一，三者等价）

i $f(z)$ 在 a 点的主要部分为

$$\frac{c_{-1}}{z-a}+\cdots+\frac{c_{-m}}{(z-a)^m} \tag{46}$$

ii $f(z)$ 在 a 的某个去心邻域内能表示成

$$f(z)=\frac{\lambda(z)}{(z-a)^m}, \tag{47}$$

其中 $\lambda(z)$ 在 a 的邻域内解析，且 $\lambda(a)\neq 0$。

iii $g(z)=\frac{1}{f(z)}$ 以 a 为可去奇点，将 a 作为 $g(z)$ 的解析点看，a 为 $g(z)$ 的 m 阶零点。

无穷远点

如果 $F(\zeta) = f(1/\zeta)$ 以 $\zeta = 0$ 为可去奇点、m 阶极点、本性奇点，则称 $f(z)$ 以 $z = \infty$ 为可去奇点、m 阶极点、本性奇点。

$f(z)$ 的正幂部分称为在 $z = \infty$ 的主要部分，

$$c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n + \cdots \tag{48}$$

余下部分称为正则部分：

$$c_0 + c_{-1}/z + \cdots + c_{-n}/z^n + \cdots \tag{49}$$

例子

例 10 $f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$ 以 $z=\infty$ 为可去奇点，作为解析点来看是二阶零点。

例 11 m 次多项式 $P(z)=a_0+a_1z+\cdots+a_mz^m$ 以 $z=\infty$ 为 m 阶极点。

例 12 $z=\infty$ 为 $f(z)=e^z$ 的本性奇点。

孤立奇点的判断

若 $f(z)$ 以 $z=a$ 为孤立奇点，且

$$f(z\to a)\to c_{-m}(z-a)^{-m},\ m\in Z \tag{50}$$

那么，如果 $-m\geq 0$ 则 a 为 $f(z)$ 的可去奇点；$-m<0$ 则 a 为 $f(z)$ 的 m 阶极点；$-m\to-\infty$ 则 a 为 $f(z)$ 的本性奇点。

证明：在 $z=a$ 的足够小的去心邻域内存在洛朗展开，

$$f(z)=\cdots+\frac{c_{-m}}{(z-a)^m}+\cdots+\frac{c_{-1}}{z-a}+c_0+c_1(z-a)+\cdots \tag{51}$$

如果 $z\to a$ 时，$f(z)\to c_{-m}(z-a)^{-m}$，说明 $c_{-\infty}=\cdots=c_{-m-1}=0$。$-m\geq 0$。易得结论。

极点的判断

例：判断如下函数在 $z=0$ 的奇点类型

$$\frac{1+2z+z^2}{z+z^2+z^3+\cdots}, \tag{52}$$

$$\cot z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1-z^2/2+\cdots}{z-z^3/6+\cdots} \tag{53}$$

例：判断如下函数在 $z=1$ 的奇点类型

$$\frac{1+2z^2}{\ln z} = \frac{1+2z^2}{\ln(1+(z-1))} = \frac{1+2z^2}{(z-1)-(z-1)^2/2+\cdots} \tag{54}$$

$$\frac{z-1}{e^{z-1}-e^{1-z}} = \frac{z-1}{2(z-1)+2(z-1)^3/3!+\cdots} \tag{55}$$

极点的判断

例：判断 $\tan(\pi z)$ 在 $z=k+\frac{1}{2}$ 的奇点类型

$$\begin{aligned}
\tan(\pi z) &= \frac{\sin(\pi z)}{\cos(\pi z)} = \frac{\sin(\pi(k+\frac{1}{2})+\pi(z-(k+\frac{1}{2})))}{\cos(\pi(k+\frac{1}{2})+\pi(z-(k+\frac{1}{2})))} \\
&= \frac{\sin(\frac{\pi}{2}+\pi(z-(k+\frac{1}{2})))}{\cos(\frac{\pi}{2}+\pi(z-(k+\frac{1}{2})))} \\
&= \frac{1-\pi^2(z-(k+1/2))^2/2+\cdots}{-\pi(z-(k+1/2))+\cdots}
\end{aligned} \tag{56}$$

作业

课堂选讲：1, 6, 10, 15

课下练习：3, 4, 9, 12, 13(1-6), 16

有了洛朗级数，留数定理已经呼之欲出，你只需要花二十分钟阅读 5.1 节，就能晓其大意，快去看看吧！