数学物理方法第二章

路毅 曲阜师范大学

1. 复变函数的可导性

1.1 复变函数：可导(可微)

$\omega = f(z)$在区域D内有定义，若在D内z点，

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} \tag{1}$$

存在，则称函数$f(z)$在z点可导。

- 若$\omega = f(z), \Delta\omega = f(z+\Delta z) - f(z)$可写作
$$\Delta\omega = A(z)\Delta z + \rho(\Delta z), \tag{2}$$
且 $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \frac{\rho(\Delta z)}{\Delta z} = 0$。
则称$\omega = f(z)$可微/可导，微分为
$$d\omega = A(z) dz. \tag{3}$$
这意味着，无论 Δz 的辐角是多大，$|\Delta z| \to 0$ 时，得到相同的极限 $\frac{\Delta \omega}{\Delta z} \to A(z)$.

1.2 例题

- $f(z) = z^n (n = 1, 2, 3, \cdots)$在复平面上任意点的导数，
$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} [n z^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} z^{n-2} \Delta z + \cdots (\Delta z)^{n-1}] = n z^{n-1}.$$
- $f(z) = \overline{z}$在复平面上是否可微？
$$\frac{\overline{z + \Delta z} - \overline{z}}{\Delta z} = \frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z}, \tag{4}$$
上式的极限是不存在的。所以$f(z) = \overline{z}$是不可微的。

1.3 和差积商的求导法则

$$\begin{aligned} [f(z) \pm g(z)]' &= f'(z) \pm g'(z), \\ [f(z)g(z)]' &= f'(z)g(z) + f(z)g'(z), \\ [f(z)/g(z)]' &= \frac{f'(z)g(z) - g'(z)f(z)}{[g(z)]^2}, (g(z) \neq 0) \end{aligned} \tag{5}$$

2. 可导的必要条件：柯西-黎曼条件

2.1 柯西-黎曼条件(C-R条件)

$$\omega = f(z) = u(x, y) + iv(x, y), \tag{6}$$

如果$f(z)$在z点可导，即

$$\lim_{\Delta x\to 0,\Delta y\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta x+i\Delta y}=f'(z), \tag{7}$$

可导意味着：Δz为任一方向的小量，上式都得到同样的斜率$f'(z)$。

- $\Delta y=0$时，得到

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=f'(z), \tag{8}$$

- $\Delta x=0$时，得到

$$-i(\frac{\partial u}{\partial y}+i\frac{\partial v}{\partial y})=f'(z), \tag{9}$$

所以，如果 $f(z)$ 在一点可导，就有

$$\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}. \tag{10}$$

换言之，

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x}= & \frac{\partial v}{\partial y}\\ \frac{\partial v}{\partial x}= & -\frac{\partial u}{\partial y}\end{cases} \tag{11}$$

这就是柯西－黎曼条件(C-R条件)。我们证明了，**可导$\Rightarrow$C-R条件。**

2.2 * 极坐标C-R条件(补充内容)

设$f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$，$z=re^{i\theta}$，若$u(r,\theta),v(r,\theta)$在$(r,\theta)$点可微，并满足极坐标下的C-R条件

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}(r>0), \tag{12}$$

试证$f(z)$在z点是可微的，并且

$$f'(z)=\frac{1}{e^{i\theta}}(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r})=\frac{1}{ire^{i\theta}}(\frac{\partial u}{\partial \theta}+i\frac{\partial v}{\partial \theta}). \tag{13}$$

证明：由于u,v在(r,θ)点可微，有

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial r}\Delta r+\frac{\partial u}{\partial \theta}\Delta\theta+\eta_1, \tag{14}$$

其中 $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\eta_1}{|\Delta z|}=0$。另外，利用C-R条件，上式也可以写作

$$\Delta u=\frac{\partial u}{\partial r}\Delta r-r\frac{\partial v}{\partial r}\Delta\theta+\eta_1. \tag{15}$$

类似地，Δv有

$$\Delta v=\frac{\partial v}{\partial r}\Delta r+\frac{\partial v}{\partial \theta}\Delta\theta+\eta_2=\frac{\partial v}{\partial r}\Delta r+r\frac{\partial u}{\partial r}\Delta\theta+\eta_2. \tag{16}$$

而Δz为

$$\begin{aligned}\Delta z &= (r+\Delta r)e^{i(\theta+\Delta\theta)}-re^{i\theta}\\ &= (r+\Delta r)e^{i\theta}(1+i\Delta\theta+\cdots)-re^{i\theta}\\ &\approx re^{i\theta}(i\Delta\theta)+\Delta re^{i\theta}\end{aligned}$$

$$= \quad (\Delta r + ir\Delta\theta)e^{i\theta}.$$

所以有

$$\begin{aligned}\lim_{|\Delta z|\to 0}\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta z} &= \lim_{|\Delta z|\to 0}\frac{(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r})(\Delta r + ir\Delta\theta)+\eta_1+i\eta_2}{(\Delta r + ir\Delta\theta)e^{i\theta}}\\ &= e^{-i\theta}(\frac{\partial u}{\partial r}+i\frac{\partial v}{\partial r}).\end{aligned}$$

证明完毕。

3. 可导的充分条件

现有复变函数

$$\omega = f(z) = u(x,y) + iv(x,y), \tag{17}$$

如果其中$u(x,y), v(x,y)$在z点可微，并且满足C-R条件，则$\omega = f(z)$在z点可导。

证明如下：

由C-R条件，我们设

$$\begin{aligned}a &= \frac{\partial u}{\partial x}|_z = \frac{\partial v}{\partial y}|_z,\\ b &= \frac{\partial v}{\partial x}|_z = -\frac{\partial u}{\partial y}|_z,\end{aligned} \tag{18}$$

因为 $u(x,y), v(x,y)$ 在 z 点可微，所以在 z 点有

$$\begin{aligned}\Delta u &= a\Delta x - b\Delta y + \eta_1,\\ \Delta v &= b\Delta x + a\Delta y + \eta_2,\end{aligned} \tag{19}$$

其中

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\eta_1}{|\Delta z|} = \lim_{\Delta z\to 0}\frac{\eta_2}{|\Delta z|} = 0, \tag{20}$$

所以

$$\frac{\Delta u + i\Delta v}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{a(\Delta x + i\Delta y) + ib(\Delta x + i\Delta y) + \eta_1 + i\eta_2}{\Delta x + i\Delta y} = a + ib + \frac{\eta_1 + i\eta_2}{\Delta z}. \tag{21}$$

所以

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z} = a + ib = f'(z), \tag{22}$$

这样就证明了$f(z)$可导。

4. 解析函数

4.1 定义

若$\omega = f(z)$在z_0的某个邻域内处处可微，则称$f(z)$在z_0点解析。

- 若区域D内的没一点都是$f(z)$的解析点，则称$f(z)$在区域D内解析，或称$f(z)$是区域D内的解析函数(或称：全纯函数/正则函数)。
- 奇点：如果$f(z)$在z_0点不解析，但在z_0的任一邻域内总有$f(z)$的解析点，则z_0称为$f(z)$的奇点。

4.2 例题

- $f(z)=e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$在$z$平面上是否解析？
- $f(z)=\sqrt{|xy|}$在$z=0$点是否可导？

4.3 调和函数

若实函数$H(x,y)$在区域D内有二阶偏导数且

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2})H=0, \tag{23}$$

则称$H(x,y)$为D内的调和函数。

- 若D内两个调和函数u,v满足C-R条件，则称它们为共轭调和函数。
- 我们注意到，如果一个解析函数$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$满足C-R条件，有

$$\begin{cases}\frac{\partial u}{\partial x} = & \frac{\partial v}{\partial y}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} = & -\frac{\partial v}{\partial x}.\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = & 0, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = & 0.\end{cases} \tag{24}$$

  也就是说，$f(z)=u+iv$ 在 D 内解析 $\Leftrightarrow u,v$为 D 内的共轭调和函数。
  若u已知，v未知，但是u,v为共轭调和函数，则有

$$dv=v_x dx+v_y dy=-u_y dx+u_x dy, \tag{25}$$

  因为u,v是共轭调和函数，所以有

$$\frac{\partial}{\partial y}(-u_y)=\frac{\partial}{\partial x}(u_x), \tag{26}$$

  所以上面写的dv是全微分，即

$$v(z)=\oint_{z_0}^{z}(-u_y dx+u_x dy)+v(z_0), \tag{27}$$

  这里积分路径是D内任意曲线。

- 换言之，用u可以求出它的共轭调和函数v。若v已知，也可以类似地求出u。结果只有一个常数$v(z_0)$待定，v的相对分布已经完全确定。

4.4 共轭调和函数的几何意义

4.4.1 函数梯度

二元函数 $f(x,y)$ 的梯度定义为：

$$\vec{\nabla}f=(\vec{e}_x\partial_x+\vec{e}_y\partial_y)f=\vec{e}_x f_x+\vec{e}_y f_y, \tag{28}$$

将函数 f 在点 (x_0,y_0) 附近做泰勒展开，

$$f(x,y)=f(x_0,y_0)+f_x(x_0,y_0)dx+f_y(x_0,y_0)dy+\cdots \tag{29}$$

这意味着，相对 (x_0,y_0) 的无穷小偏离 $\vec{dr}=(dx,dy)$ 会导致函数产生增量

$$df=f_x dx+f_y dy. \tag{30}$$

可以把它写成矢量内积（点乘）的形式：

→ → → →

$$df = f_x dx + f_y dy = (f_x, f_y)\cdot(dx, dy) = (\nabla f)\cdot dr = |\nabla f||dr|\cos\theta, \tag{31}$$

其中 $|\vec{\nabla} f|$ 是 (x_0, y_0) 点梯度矢量$\vec{\nabla} f$的长度，$|\vec{dr}|$ 是新的位置偏离 (x_0, y_0) 的距离，θ 是 $\vec{\nabla} f$ 与 $\vec{dr}$ 的夹角。

$\vec{\nabla} f$ 已经由函数 $f(x,y)$ 决定了，所以，对于给定的 $|\vec{dr}|$，$\theta = 0$ 时，df 最大，$\theta = \pi$ 时，df 最小。

所以 $\vec{\nabla} f$ ***的方向是函数*** $f(x,y)$ ***上升最快的方向，因此它叫做梯度***。这是我们通过几行式子得到的洞见。

4.4.2 共轭调和函数的梯度

函数u在xy平面上的梯度为

$$\vec{\nabla} u = (u_x, u_y) = (v_y, -v_x), \tag{32}$$

函数v在xy平面上的梯度为$\vec{\nabla} v = (v_x, v_y)$，所以有

$$\vec{\nabla} u \cdot \vec{\nabla} v = (v_y, -v_x)(v_x, v_y) = 0. \tag{33}$$

这意味着，***函数u, v的梯度处处垂直，相应地，它们的"等高线"也处处垂直***。

5. 初等解析函数，整数幂函数

我们证明以下初等函数是解析函数

$$z^n, e^z, \sin z, \cos z, \sinh z, \cosh z, z^{1/n}, \ln z, z^a, \arcsin z \tag{34}$$

5.1 幂函数 $\omega = z^n, n = 1, 2, 3, \cdots,$

前面已经证明过，它在整个复平面上解析，

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{(z+\Delta z)^n - z^n}{\Delta z} = nz^{n-1}. \tag{35}$$

容易证明：

$$\omega = P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n, (a \neq 0), \tag{36}$$

在复平面上解析；

$$\omega = \frac{P(z)}{Q(z)} = \frac{a_0 z^n + \cdots + a_n}{b_0 z^n + \cdots b_n}, (a_0, b_0 \neq 0) \tag{37}$$

在复平面上除$Q(z)$的零点外解析。

5.1 初等解析函数：e指数函数

e 指数函数定义为：

$$\omega = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y), \tag{38}$$

容易证明：

$$\begin{aligned} |e^z| &= |e^x e^{iy}| = e^x > 0, \\ e^{z_1}e^{z_2} &= e^{z_1+z_2}, \\ \frac{d\omega}{dz} &= \lim_{\Delta z\to 0}\frac{e^{z+\Delta z} - e^z}{\Delta z} = \lim_{\Delta\to 0}\frac{e^z(e^{\Delta z}-1)}{\Delta z} = e^z, \\ e^{z+2\pi k i} &= e^z. \end{aligned} \tag{39}$$

5.2 三角函数、双曲函数

复数域上的三角函数定义为

$$\begin{aligned}\cos z &= \frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}, \\ \sin z &= \frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i},\end{aligned} \tag{40}$$

因为 e^{iz}, e^{-iz} 是解析的，所以三角函数是解析的。

双曲函数定义为

$$\begin{aligned}\sinh z &= \frac{e^{z}-e^{-z}}{2}, \\ \cosh z &= \frac{e^{z}+e^{-z}}{2}.\end{aligned} \tag{41}$$

5.3 多值函数：根式函数

$$\omega = z^{1/n}, \tag{42}$$

记 $\omega = \rho e^{i\varphi}, z = re^{i\theta}$，可以推出

$$\begin{aligned}\rho &= r^{1/n}, \\ \varphi &= \frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n}, k \in Z,\end{aligned} \tag{43}$$

即

$$\omega = r^{1/n} e^{i\left(\frac{\theta}{n}+k\frac{2\pi}{n}\right)}, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1 \tag{44}$$

k 的 n 个取值定义了 $\omega = f(z)$ 的 n个单值分支。

$$\omega_k = (z^{1/n})_k = r^{1/n} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1 \tag{45}$$

每个单值分支可导是可导的。

$$\omega_k = (z^{1/n})_k = r^{1/n} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \cdots, n-1 \tag{46}$$

所以 ω_k 的实部、虚部为

$$\begin{aligned}u &= r^{1/n} \cos\frac{\theta+2k\pi}{n}, \\ v &= r^{1/n} \sin\frac{\theta+2k\pi}{n},\end{aligned} \tag{47}$$

这两个函数都可微，并且有

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{n} r^{1/n-1} \cos\frac{\theta+2k\pi}{n}, \\ \frac{\partial u}{\partial \theta} &= -\frac{1}{n} r^{1/n} \sin\frac{\theta+2k\pi}{n}, \\ \frac{\partial v}{\partial r} &= \frac{1}{n} r^{1/n-1} \sin\frac{\theta+2k\pi}{n}, \\ \frac{\partial v}{\partial \theta} &= \frac{1}{n} r^{1/n} \cos\frac{\theta+2k\pi}{n},\end{aligned} \tag{48}$$

可得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial r} &= \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}, \\
\frac{\partial v}{\partial r} &= -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta},
\end{aligned}
\tag{49}
$$

所以 $z^{1/n}$ 的每个单值分支 ω_k 都是解析函数，其导数为

$$
\frac{d\omega_k}{dz} = e^{-i\theta}(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}) = \frac{1}{n}z^{1/n-1}, \tag{50}
$$

与整数幂函数求导公式完全一致。

5.4 支点、支割线

若取$z^{1/n}$的第一支

$$
\omega_0 = r^{1/n}e^{i\theta/n}, \tag{51}
$$

让z沿原点绕一圈，ω_0 将变为 $r^{1/n}e^{i\frac{\theta+2\pi}{n}} = \omega_1$。

- 支点：z绕支点一周，函数$\omega = f(z)$将从一个分支变为另一个分支。
- 无穷远点也是$z^{1/n}$的一个支点。
- 从支点$z = 0$到$z = \infty$引一条射线，割开z平面，如

$$
0 \le argz < 2\pi, \tag{52}
$$

  则不会有闭合曲线绕过原点，即不会从一支连续变为另一支。

5.5 (以e为底的)对数函数

(以e为底的)对数函数是e指数的反函数

$$
z = e^{\omega} \Rightarrow \omega = Lnz, \tag{53}
$$

可得

$$
Lnz = \ln r + i(\theta + 2k\pi), k = 0, \pm1, \pm2, \cdots \tag{54}
$$

主值支：

$$
\ln z = \ln r + iargz, \tag{55}
$$

其中 $argz$ 为 z 的辐角主值，区间可定义为 $(-\pi, \pi]$ 或者 $[0, 2\pi)$。不同分支的值域构成复平面上的不同区域

$$
\begin{gathered}
-\pi < v \le \pi, \\
\pi < v \le 3\pi, \\
\cdots
\end{gathered}
\tag{56}
$$

$z = 0, \infty$是 Lnz 的支点，

$$
(\ln z)_k = \ln r + i(\theta + 2k\pi), k = 0, \pm1, \pm2, \cdots \tag{57}
$$

容易证明：

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dz}(\ln z)_k &= \frac{1}{z}, k = 0, \pm1, \pm2, \cdots \\
Ln(z_1 z_2) &= Lnz_1 + Lnz_2, \\
Ln(z_1/z_2) &= Lnz_1 - Lnz_2
\end{aligned}
\tag{58}
$$

$$Ln(z_1/z_2) = Lnz_1 - Lnz_2,$$

5.6 一般幂函数

$$z^a = e^{aLnz} = \omega_0 e^{i2k\pi a}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{59}$$

其中$\omega_0 = e^{a\ln z}$。

- 若a为整数n，则$e^{2k\pi ia} = 1, z^a = \omega_0$是一个单值函数。
- 若a为有理数q/p，则

  $$e^{2k\pi ia} = e^{2k\pi iq/p}, k = 0, 1, \cdots, p-1 \tag{60}$$

  所以有

  $$e^{2k\pi ia} = e^{2k\pi iq/p}, k = 0, 1, \cdots, p-1 \tag{61}$$

  有p个分支。
- 若a为无理数，则有无穷多个分支。

一般幂函数的导数为

$$e^{2k\pi ia} = e^{2k\pi iq/p}, k = 0, 1, \cdots, p-1 \tag{62}$$

$$\omega = a^z = e^{zLna}, \tag{63}$$

有无穷多分支。

- 时，$\omega = e^z$是特殊的单值函数。

5.7 反三角函数

若有

$$z = \sin\omega = \frac{e^{i\omega} - e^{-i\omega}}{2i}, \tag{64}$$

得到

$$\begin{aligned} (e^{i\omega})^2 - 2ize^{i\omega} - 1 = 0, \\ \omega &= \arcsin z = \frac{1}{i}Ln(iz + \sqrt{1-z^2}) \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{1}{i}Ln(z + \sqrt{z^2-1}), \end{aligned} \tag{65}$$

类似地，

$$\arccos z = \frac{1}{i}Ln(z + \sqrt{z^2-1}). \tag{66}$$

它们都是多值函数。

6. 作业

- 课堂讲解：8, 13, 19
- 课下练习：1, 2, 5, 9, 14, 15