数学物理方法笔记

Jaden Feng

冯杰骏

Introduction

数学物理方法笔记。

Jaden Feng
冯杰骏
April 14, 2024

Contents

1 复数与复变函数

1.1 复数

Definition 1.1 虚数单位 i

$$i^2 = -1$$

Definition 1.2 复数:

$$z = x + iy$$

$$\text{实部：} x = \operatorname{Re} z \qquad \text{虚部：} y = \operatorname{Im} z \text{ (没有 } i \text{)}$$

Definition 1.3 共轭复数:

$$\overline{z} = x - iy$$

Definition 1.4 复平面:

x 轴为实数轴，y 轴为虚数轴, 在复平面内，用矢量 $\vec{O_z}$ 代表复数 $z = x + iy$，矢量 $\vec{O_z}$ 的长度为模（绝对值）$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 0$。

几个公式：

$$\begin{aligned} |x| &\leqslant |z|, \\ |y| &\leqslant |z|, \\ |z| &\leqslant |x| + |y|, \\ |z_1| + |z_2| &\geqslant |z_1 \pm z_2|, \\ ||z_1| - |z_2|| &\leqslant |z_1 \pm z_2| \end{aligned} \tag{1.1}$$

Definition 1.5 幅角:

$$\operatorname{Arg} z = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

幅角主值（主幅角）: arg $z \in (-\pi, \pi]$ *or* $[0, 2\pi)$

若 arg $z \in (-\pi, \pi]$, 有:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geqslant 0, \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Note 就是把矢量方向转到一，四象限。

Definition 1.6 复数的三角形式:

利用极坐标，复数还可以写成三角形式。

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\ \sin\theta)$$

$r = 1$ 时，$z = \cos\theta + i\ \sin\theta$ 称为单位复数

Definition 1.7 复数的指数形式:

由欧拉公式 $e^{i\theta} = \cos\theta + i\ \sin\theta$:

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\ \sin\theta) = re^{i\theta}$$

$z = re^{i\theta}$ 称为指数形式

Note 如何将普通形式改写为三角形式和指数形式?
只需提取公因式 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ 即可, 需要注意的是: $r > 0$ 。

指数形式下容易验证:

$$\begin{cases} z_1\, z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}. \end{cases}$$

这表明：$z_1\, z_2$ 对应的矢量就是把 z_1 伸缩 $|z_2|$ 倍，然后幅角加 θ_2 (逆时针旋转 θ_2) ; $\frac{z_1}{z_2}$ 同理。

Definition 1.8 棣莫弗公式:

考虑复数 z 的正整数次幂 z^n :

$$z^n = r(\cos\theta + i\ \sin\theta)^n = r^n e^{in\theta} = r^n(\cos n\theta + \sin n\theta) \tag{1.2}$$

$r = 1$ 时，得到棣莫弗公式:

$$(\cos\theta + i\ \sin\theta)^n = \cos n\theta + \sin n\theta \tag{1.3}$$

Example 1.1 计算三倍角公式

由棣莫弗公式**??**:

$$(\cos\theta + i\ \sin\theta)^3 = \cos 3\theta + i\sin 3\theta$$

用二项式定理 $(a+b)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k$ 展开左边:

$$\begin{aligned}
&\cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta && (1.4)\\
=&(\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta) && (1.5)\\
=&\cos 3\theta + i\sin 3\theta && (1.6)
\end{aligned}$$

实部对应实部，虚部对应虚部:

$$\begin{aligned}
\cos 3\theta &= \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta, && (1.7)\\
\sin 3\theta &= 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta. && (1.8)
\end{aligned}$$

Note 两式中第二个等号都用了 $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$

Definition 1.9 复数的 n 次方根:

下面求复数的 n 次方根: 假设 $w^n = z$, *i.e.* $w = \sqrt{z}$ ，其中 $w = \rho e^{i\varphi}, z = re^{i\theta}$ ，有:

$$\begin{aligned}
&\rho^n = r, \quad n\varphi = \theta + 2k\pi; && (1.9)\\
&\rho = \sqrt{r}, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}. && (1.10)
\end{aligned}$$

所以：

$$w_k=(\sqrt[n]{z})_k=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

Note $z_1 z_2$ 对应的矢量就是把 z_1 伸缩 $|z_2|$ 倍，然后幅角加 θ_2 (逆时针旋转 θ_2)；$\frac{z_1}{z_2}$ 同理。与这句话原理相同，$e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ 的作用效果是把 $\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}$ 的幅角加 $\frac{2k\pi}{n}$ (逆时针旋转 $\frac{2k\pi}{n}$) 。k 从 0 开始取，取到 n 时转回原点，所以共有 $n-1$ 个根。定义 $w_0=\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}$ ，可以得到 $w_k=w_0e^{i\frac{2k\pi}{n}},\quad k\in[0,n-1]$。实际计算中可以直接计算 $\frac{1}{n}$ 次方，但是要把被开方数的幅角写成 $\theta+2k\pi$ 的形式。

2 解析函数

2.1 解析函数的概念以及 C-R 条件

Definition 2.1 C-R 条件:

直角坐标系下，对于复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$。

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{2.1}$$

称为柯西-黎曼条件（方程）。

极坐标系下，对于复变函数 $f(z)=u(r,\theta)+iv(r,\theta)$。

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta},\qquad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}=-\frac{\partial v}{\partial r}. \tag{2.2}$$

Note 记忆方法：θ 没有量纲，所以需要乘 $\frac{1}{r}$ 让两边量纲一致。

Theorem 2.1 函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 D 的内点 $z=x+iy$ 可微的充分必要条件是 $u(x,y),v(x,y)$ 在 (x,y) 处可微且满足 C-R 条件。

Proof.

必要性：i.e. $f(z)$ 可微 $\to u,v$ 可微，满足 C-R 条件
如果 $f(z)$ 在 D 内 z 点可微，那么

$$\Delta f(z)=f(z+\Delta z)-f(z)=f'(z)\Delta z+\rho(\Delta z)$$

$\rho(\Delta z)$ 是 Δz 的高阶无穷小。i.e. $\lim\limits_{\Delta z\to 0}\frac{\rho(\Delta z)}{\Delta z}=0$。
令 $f'(z)=a+ib$，则：

$$\begin{aligned}
f(z+\Delta z)-f(z)&=[(u+\Delta u)+i(v+\Delta v)]-(u+iv)\\
&=\Delta u+i\Delta v\\
f'(z)\Delta z+\rho(\Delta z)&=a+ib(\Delta x+i\Delta y)+\rho(\Delta z)\\
&=a\Delta x-b\Delta y+i(b\Delta x+a\Delta y)+\eta_1+i\eta_2
\end{aligned}$$

所以：

$$\Delta u+i\Delta v=a\Delta x-b\Delta y+i(b\Delta x+a\Delta y)+\eta_1+i\eta_2$$

比较实部和虚部：

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \eta_1,$$
$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \eta_2.$$

由二元实函数微分的定义：如果 $f(x,y)$ 的自变量 xy 在点 (x_0,y_0) 分别取得改变量 $\Delta x, \Delta y$，如果全改变量 $\Delta f = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$ 可以表示为两个部分之和：一部分是一个线性式，也就是 $f(x,y)$ 的全微分 $df = A\Delta x + B\Delta y$，另一部分是 $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$ 的高阶无穷小。那么就说 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微。
所以 $\Delta u, \Delta v$ 在 (x,y) 处可微。
分别对这两个式子求偏导数可以得到 $u_x = a = v_y$，$u_y = -b = -v_x$。这就是直角坐标系下的 C-R 条件。

充分性：i.e. u,v 可微，满足 C-R 条件 $\to f(z)$ 可微
要证明 $f(z)$ 可微，就要证明 $\Delta f(z)$ 可以表示为一个线性式和一个高阶无穷小的和。i.e. $\Delta f(z) = A(z)\Delta z + \rho(\Delta z)$
显然:

$$\Delta f(z) = \Delta u + i\Delta v$$

又因为 u,v 可微，所以：(这里是由二元实函数微分的定义得到的，此定义已经在必要性的证明过程中写出。)

$$\Delta u = u_x\Delta x + u_y\Delta y + \eta_1(\Delta x, \Delta y),$$
$$\Delta v = v_x\Delta x + v_y\Delta y + \eta_2(\Delta x, \Delta y).$$

又因为 u,v 满足 C-R 条件，所以：

$$u_x = v_y = \alpha,$$
$$u_y = -v_x = -\beta$$

代入 $\Delta f(z)$：

$$\begin{aligned}\Delta f(z) &= \Delta u + i\Delta v \\ &= (u_x\Delta x + u_y\Delta y + \eta_1) + i(v_x\Delta x + v_y\Delta y + \eta_2) \\ &= (\alpha + i\beta)(\Delta x + i\Delta y) + \eta_1 + i\eta_2 \\ &= (\alpha + i\beta)\Delta z + \rho(\Delta z)\end{aligned}$$

回过头去看看复变函数微分的定义：一个线性式和一个高阶无穷小的和。
i.e. $\Delta f(z) = A(z)\Delta z + \rho(\Delta z)$
显然只要证明 ρ 是无穷小量就可以了。(关于 z 的)
由公式 (**??**) 的第二个式子可以得到：

$$\left|\frac{\rho}{\Delta z}\right| = \left|\frac{\eta_1 + i\eta_2}{\Delta z}\right| \leqslant \left|\frac{\eta_1}{\Delta z}\right| + \left|\frac{\eta_2}{\Delta z}\right|$$

当 $\Delta z \to 0$ 时，因为 u, v 都可微，所以不等号右边两项都等于 0(还是因为定义)，所以 $\left|\frac{\rho}{\Delta z}\right| = 0$，i.e. ρ 是无穷小量。
综上，我们证明了 $f(z)$ 可微。
同时我们还证明了：$f'(z) = \alpha + i\beta = u_x + iv_x$。
证毕。

Example 2.1 举一个满足 C-R 条件，但是不可微的例子：$f(z) = \sqrt{|xy|}$ 在 $z = 0$ 处满足 C-R 条件，但是不可微。

函数 $f(z) = \sqrt{|xy|} = u(x, y) + iv(x, y)$。于是：

$$\begin{aligned}u_x(0,0) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(\Delta x, 0) - u(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x \cdot 0|}}{\Delta x} = 0 = v_y(0,0), \\ u_y(0,0) &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{u(0, \Delta y) - u(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta y \cdot 0|}}{\Delta y} = 0 = -v_x(0,0).\end{aligned}$$

满足 C-R 条件。但是：

$$\frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \frac{\sqrt{\Delta x \cdot \Delta y}}{\Delta x + i\Delta y}$$

当沿 $\Delta y = k\Delta x$ 趋近于 0 时，有：原式 $= \frac{\sqrt{k}}{1+ik}$ 与 k 有关，所以原式不可微。

Definition 2.2 解析点

如果函数 $\omega = f(z)$ 在点 z_0 的某邻域内处处可微，那么就说 z_0 是函数 $\omega = f(z)$ 的解析点，或者说函数 $\omega = f(z)$ 在点 z_0 解析。

Definition 2.3 解析函数

如果区域 D 内的每一点都是函数 $\omega = f(z)$ 的解析点，那么就说函数 $\omega = f(z)$ 在区域 D 内解析，或者说函数 $\omega = f(z)$ 是区域 D 内的解析函数。

Definition 2.4 奇点

如果 $f(z)$ 在 z_0 点不解析，但在 z_0 的邻域总有一点解析，那么就说 z_0 是 $f(z)$ 的奇点。

Example 2.2 $f(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$ 在 z 平面上解析，而且 $f'(z) = f(z)$

把原式展开可以知道：

$$u(x,y) = e^x \cos y, \quad v(x,y) = e^x \sin y$$

所以：

$$\begin{aligned} u_x &= e^x \cos y, \quad u_y = -e^x \sin y \\ v_x &= e^x \sin y, \quad v_y = e^x \cos y \end{aligned}$$

这几个式子证明了 uv 的偏导数存在，又因为 uv 都连续 (初等函数的组合)，所以 uv 可微。
这几个式子又满足 C-R 条件。所以 $f(z)$ 在 z 平面上解析。

Example 2.3 由条件：$\begin{cases} u(x,y) = x^2 - y^2 + xy \\ f(i) = -1 + i \end{cases}$ 求解析函数 $f(z) = u + iv$

因为是解析函数，所以满足 C-R 条件：$u_x = v_y$，$u_y = -v_x$。也就是：

$$2x + y = v_y,$$
$$-x + 2y = v_x.$$

从上面的第一个式子可以知道：

$$v = \int (2x+y)dy + v(x) = 2xy + \frac{1}{2}y^2 + \varphi(x) + C$$

这里的 $\varphi(x)$ 是 v 里面只有 x 的项

把这个式子对 x 求导，可以得到：(这里是因为对 x 求导可以用到剩下的那个式子，所以想到的。)

$$v_x = 2y + \varphi'(x) = 2y - x$$

所以

$$\varphi'(x) = -x \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(x) = -\frac{1}{2}x^2$$

所以：

$$f(x,y) = x^2 - y^2 + xy + i(2xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + C)$$

我们又知道，$f(i) = -1 + i$，所以把 i 带进去 $(x = 0, y = 1)$：

$$-1 + i = -1 + i(\frac{1}{2} + C) \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{1}{2}$$

所以：

$$f(x,y) = x^2 - y^2 + xy + i(2xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2})$$

我们希望把这个式子化成 $f(z)$ 而不是 $f(x,y)$ 的形式。这需要利用共轭复数。

我们知道

$$z = x + iy, \quad \overline{z} = x - iy$$

经过一些很容易的变换 (两式相加，两式相减)，可以得到：

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

把这个结果带进去，可以得到：

$$f(z) = (1 + \frac{i}{2})z^2 + \frac{i}{2}$$

2.2 解析函数与调和函数的关系