# 数学物理方法笔记

Jaden Feng 冯杰骏

# Introduction

数学物理方法笔记。

Jaden Feng 冯杰骏 April 22, 2024

# **Contents**

1	复数	与复变函数	1
	1.1	复数	2
2	解析函数		
	2.1	解析函数的概念以及 C-R 条件	7
	2.2	解析函数与调和函数的关系	12
	2.3	初等解析函数	12
3	柯西定理, 柯西积分		15
	3.1	复积分定义	16
	3.2	柯西积分定理	17
	3.3	柯西积分公式	21
	3.4	解析函数的无限次可微性(柯西求导公式)	23

# 1 复数与复变函数

# 1.1 复数

**Definition 1.1** 虚数单位 i

$$i^2 = -1$$

#### Definition 1.2 复数:

$$z = x + iy$$

实部:  $x = \operatorname{Re} z$  虚部:  $y = \operatorname{Im} z$  (没有 i)

# Definition 1.3 共轭复数:

$$\overline{z} = x - iy$$

#### Definition 1.4 复平面:

x 轴为实数轴,y 轴为虚数轴,在复平面内,用矢量  $\vec{O_z}$  代表复数 z=x+iy ,矢量  $\vec{O_z}$  的长度为模(绝对值) $r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0$ 。

几个公式:

$$|x| \le |z|,$$
  
 $|y| \le |z|,$   
 $|z| \le |x| + |y|,$   
 $|z_1| + |z_2| \ge |z_1 \pm z_2|,$   
 $||z_1| - |z_2|| \le |z_1 \pm z_2|$ 
(1.1)

#### Definition 1.5 幅角:

$$\operatorname{Arg} z = \theta + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

幅角主值(主幅角):  $\arg z \in (-\pi, \pi]$  or  $[0, 2\pi)$ 

若 arg  $z \in (-\pi, \pi]$ ,有:

$$\arg z = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0, \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0, y > 0, \\ \arctan \frac{y}{x} + \pi, & x < 0, y \geqslant 0, \\ \arctan \frac{y}{x} - \pi, & x < 0, y < 0, \\ -\frac{\pi}{2}, & x = 0, y < 0. \end{cases}$$

Note 就是把矢量方向转到一, 四象限。

Definition 1.6 复数的三角形式:

利用极坐标,复数还可以写成三角形式。

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\,\sin\theta)$$

r=1 时,  $z=\cos\theta+i\sin\theta$  称为单位复数

Definition 1.7 复数的指数形式:

由欧拉公式  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$ :

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

 $z = re^{i\theta}$  称为指数形式

Note 如何将普通形式改写为三角形式和指数形式? 只需提取公因式  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  即可, 需要注意的是: r > 0 。

指数形式下容易验证:

$$\begin{cases} z_1 z_2 = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)}, \\ \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}. \end{cases}$$

这表明:  $z_1 z_2$  对应的矢量就是把  $z_1$  伸缩  $|z_2|$  倍,然后幅角加  $\theta_2$  (逆时针旋转  $\theta_2$ );  $\frac{z_1}{z_2}$  同理。

#### Definition 1.8 棣莫弗公式:

考虑复数 z 的正整数次幂  $z^n$ :

$$z^{n} = r(\cos\theta + i\sin\theta)^{n} = r^{n}e^{in\theta} = r^{n}(\cos n\theta + \sin n\theta)$$
 (1.2)

r=1 时,得到棣莫弗公式:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n\theta + \sin n\theta \tag{1.3}$$

### Example 1.1 计算三倍角公式

由棣莫弗公式1.3:

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^3 = \cos 3\theta + i \sin 3\theta$$

用二项式定理 
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^{n-k} b^k$$
 展开左边:

$$\cos^3 \theta + 3i\cos^2 \theta \sin \theta - 3\cos \theta \sin^2 \theta - i\sin^3 \theta \tag{1.4}$$

$$=(\cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta) + i(3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta)$$
 (1.5)

$$=\cos 3\theta + i\sin 3\theta \tag{1.6}$$

实部对应实部,虚部对应虚部:

$$\cos 3\theta = \cos^3 \theta - 3\cos\theta \sin^2 \theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos\theta,\tag{1.7}$$

$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta. \tag{1.8}$$

Note 两式中第二个等号都用了  $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ 

# Definition 1.9 复数的 n 次方根:

下面求复数的 n 次方根: 假设  $w^n=z,\ i.e.\ w=\sqrt{z}$  ,其中  $w=\rho e^{i\varphi},z=re^{i\theta}$  ,有:

$$\rho^n = r, \quad n\varphi = \theta + 2k\pi; \tag{1.9}$$

$$\rho = \sqrt{r}, \quad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.$$
 (1.10)

所以:

$$w_k = (\sqrt[n]{z})_k = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}} = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$

Note  $z_1 z_2$  对应的矢量就是把  $z_1$  伸缩  $|z_2|$  倍,然后幅角加  $\theta_2$  (逆时针旋转  $\theta_2$ );  $\frac{z_1}{z_2}$  同理。与这句话原理相同, $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$  的作用效果是把  $\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}$  的幅角  $n \frac{2k\pi}{n}$  (逆时针旋转  $\frac{2k\pi}{n}$ )。k 从 0 开始取,取到 n 时转回原点,所以共有 n-1 个根。定义  $w_0 = \sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta}{n}}$ ,可以得到  $w_k = w_0e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ ,  $k \in [0,n-1]$ 。 实际计算中可以直接计算  $\frac{1}{n}$  次方,但是要把被开方数的幅角写成  $\theta+2k\pi$  的形式。

# 2 解析函数

### 2.1 解析函数的概念以及 C-R 条件

#### Definition 2.1 C-R 条件:

直角坐标系下,对于复变函数 f(z) = u(x,y) + iv(x,y)。

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$
 (2.1)

称为柯西-黎曼条件(方程)。

极坐标系下,对于复变函数  $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$ 。

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta}, \qquad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}.$$
 (2.2)

Note 记忆方法:  $\theta$  没有量纲, 所以需要乘  $\frac{1}{r}$  让两边量纲一致。

**Theorem 2.1** 函数 f(z) = u(x,y) + iv(x,y) 在区域 D 的内点 z = x + iy 可微的充分必要条件是 u(x,y), v(x,y) 在 (x,y) 处可微且满足 C-R 条件。

#### Proof.

必要性: i.e. f(z) 可微  $\rightarrow u, v$  可微, 满足 C-R 条件 如果 f(z) 在 D 内 z 点可微, 那么

$$\Delta f(z) = f(z + \Delta z) - f(z) = f'(z)\Delta z + \rho(\Delta z)$$

 $\rho(\Delta z)$  是  $\Delta z$  的高阶无穷小。i.e.  $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\rho(\Delta z)}{\Delta z} = 0$ 。 令 f'(z) = a + ib,则:

$$f(z + \Delta z) - f(z) = [(u + \Delta u) + i(v + \Delta v)] - (u + iv)$$

$$= \Delta u + i\Delta v$$

$$f'(z)\Delta z + \rho(\Delta z) = a + ib(\Delta x + i\Delta y) + \rho(\Delta z)$$

$$= a\Delta x - b\Delta y + i(b\Delta x + a\Delta y) + \eta_1 + i\eta_2$$

所以:

$$\Delta u + i\Delta v = a\Delta x - b\Delta y + i(b\Delta x + a\Delta y) + \eta_1 + i\eta_2$$

比较实部和虚部:

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \eta_1,$$
  
$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \eta_2.$$

由二元实函数微分的定义: 如果 f(x,y) 的自变量 xy 在点  $(x_0,y_0)$  分别取得改变量  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ , 如果全改变量  $\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$  可以表示为两个部分之和: 一部分是一个线性式, 也就是 f(x,y) 的全微分  $df = A\Delta x + B\Delta y$ , 另一部分是  $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$  的高阶无穷小。那么就说 f(x,y) 在点  $(x_0,y_0)$  可微。

所以  $\Delta u$ ,  $\Delta v$  在 (x, y) 处可微。

分别对这两个式子求偏导数可以得到  $u_x = a = v_y$ ,  $u_y = -b = -v_x$ 。这就是直角坐标系下的 C-R 条件。

**充分性:** i.e. u,v 可微,满足 C-R 条件  $\to f(z)$  可微 要证明 f(z) 可微,就要证明  $\Delta f(z)$  可以表示为一个线性式和一个高阶无 穷小的和。i.e.  $\Delta f(z) = A(z)\Delta z + \rho(\Delta z)$  显然:

$$\Delta f(z) = \Delta u + i \Delta v$$

又因为u,v可微,所以:(这里是由二元实函数微分的定义得到的,此定义已经在必要性的证明过程中写出。)

$$\Delta u = u_x \Delta x + u_y \Delta y + \eta_1(\Delta x, \Delta y),$$
  
$$\Delta v = v_x \Delta x + v_y \Delta y + \eta_2(\Delta x, \Delta y).$$

又因为u,v满足C-R条件,所以:

$$u_x = v_y = \alpha,$$
  
$$u_y = -v_x = -\beta$$

代入  $\Delta f(z)$ :

$$\Delta f(z) = \Delta u + i\Delta v$$

$$= (u_x \Delta x + u_y \Delta y + \eta_1) + i(v_x \Delta x + v_y \Delta y + \eta_2)$$

$$= (\alpha + i\beta)(\Delta x + i\Delta y) + \eta_1 + i\eta_2$$

$$= (\alpha + i\beta)\Delta z + \rho(\Delta z)$$

回过头去看看复变函数微分的定义:一个线性式和一个高阶无穷小的和。 i.e.  $\Delta f(z) = A(z)\Delta z + \rho(\Delta z)$ 

显然只要证明  $\rho$  是无穷小量就可以了。(关于 z 的)

由公式(1.1)的第二个式子可以得到:

$$\left|\frac{\rho}{\Delta z}\right| = \left|\frac{\eta_1 + i\eta_2}{\Delta z}\right| \leqslant \left|\frac{\eta_1}{\Delta z}\right| + \left|\frac{\eta_2}{\Delta z}\right|$$

当  $\Delta z \to 0$  时,因为 u, v 都可微,所以不等号右边两项都等于 0(还是因为定义),所以  $\left|\frac{\rho}{\Delta z}\right| = 0$ ,i.e.  $\rho$  是无穷小量。

综上, 我们证明了 f(z) 可微。

同时我们还证明了:  $f'(z) = \alpha + i\beta = u_x + iv_x$ 。 证毕。

Example 2.1 举一个满足 C-R 条件,但是不可微的例子:  $f(z) = \sqrt{|xy|}$  在 z = 0 处满足 C-R 条件,但是不可微。

函数 
$$f(z) = \sqrt{|xy|} = u(x,y) + iv(x,y)$$
。于是:

$$u_x(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{u(\Delta x, 0) - u(0, 0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{|\Delta x \cdot 0|}}{\Delta x} = 0 = v_y(0, 0),$$
$$u_y(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{u(0, \Delta y) - u(0, 0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\sqrt{|\Delta y \cdot 0|}}{\Delta y} = 0 = -v_x(0, 0).$$

满足 C-R 条件。但是:

$$\frac{f(\Delta z) - f(0)}{\Delta z} = \frac{\sqrt{\Delta x \cdot \Delta y}}{\Delta x + i\Delta y}$$

当沿  $\Delta y = k\Delta x$  趋近于 0 时,有:原式 =  $\frac{\sqrt{k}}{1+ik}$  与 k 有关,所以原式不可 微。

#### Definition 2.2 解析点

如果函数  $\omega = f(z)$  在点  $z_0$  的某邻域内处处可微,那么就说  $z_0$  是函数  $\omega = f(z)$  的解析点,或者说函数  $\omega = f(z)$  在点  $z_0$  解析。

#### Definition 2.3 解析函数

如果区域 D 内的每一点都是函数  $\omega = f(z)$  的解析点,那么就说函数  $\omega = f(z)$  在区域 D 内解析,或者说函数  $\omega = f(z)$  是区域 D 内的解析函数。

#### Definition 2.4 奇点

如果 f(z) 在  $z_0$  点不解析,但在  $z_0$  的邻域总有一点解析,那么就说  $z_0$  是 f(z) 的奇点。

Example 2.2  $f(z) = e^x(\cos y + i\sin y)$  在 z 平面上解析,而且 f'(z) = f(z)

把原式展开可以知道:

$$u(x,y) = e^x \cos y, \quad v(x,y) = e^x \sin y$$

所以:

$$u_x = e^x \cos y$$
,  $u_y = -e^x \sin y$   
 $v_x = e^x \sin y$ ,  $v_y = e^x \cos y$ 

这几个式子证明了 uv 的偏导数存在,又因为 uv 都连续 (初等函数的组合),所以 uv 可微。

这几个式子又满足 C-R 条件。所以 f(z) 在 z 平面上解析。

**Example 2.3** 由条件: 
$$\begin{cases} u(x,y) = x^2 - y^2 + xy \\ f(i) = -1 + i \end{cases}$$
 求解析函数  $f(z) = u + iv$ 

因为是解析函数,所以满足 C-R 条件:  $u_x = v_y$ ,  $u_y = -v_x$ 。 也就是:

$$2x + y = v_y,$$
$$-x + 2y = v_x.$$

从上面的第一个式子可以知道:

$$v = \int (2x + y)dy + v(x) = 2xy + \frac{1}{2}y^2 + \varphi(x) + C$$

#### 这里的 $\varphi(x)$ 是 v 里面只有 x 的项

把这个式子对x 求导,可以得到: (这里是因为对x 求导可以用到剩下的那个式子,所以想到的。)

$$v_x = 2y + \varphi'(x) = 2y - x$$

所以

$$\varphi'(x) = -x \qquad \Rightarrow \qquad \varphi(x) = -\frac{1}{2}x^2$$

所以:

$$f(x,y) = x^2 - y^2 + xy + i(2xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + C)$$

我们又知道, f(i) = -1 + i, 所以把 i 带进去 (x = 0, y = 1):

$$-1 + i = -1 + i(\frac{1}{2} + C) \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{1}{2}$$

所以:

$$f(x,y) = x^2 - y^2 + xy + i(2xy + \frac{1}{2}y^2 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2})$$

我们希望把这个式子化成 f(z) 而不是 f(x,y) 的形式。这需要利用共轭复数。

我们知道

$$z = x + iy, \quad \overline{z} = x - iy$$

经过一些很容易的变换(两式相加,两式相减),可以得到:

$$x = \frac{z + \overline{z}}{2}, \quad y = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

把这个结果带进去,可以得到:

$$f(z) = (1 + \frac{i}{2})z^2 + \frac{i}{2}$$

Note 这里需要注意两点:

- $\varphi(x)$  是 v 里面只有 x 的项
- •利用共轭复数,将 f(x,y) 化成 f(z) 的形式

# 2.2 解析函数与调和函数的关系

**Definition 2.5** 调和函数

若实函数 H(x,y) 在区域 D 内有二阶偏导数且

$$(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2})H = 0,$$

则称 H(x,y) 为 D 内的调和函数。这个式子称作拉普拉斯方程。

Definition 2.6 共轭调和函数

若 D 内两个调和函数 u, v 满足 C-R 条件,则称它们为共轭调和函数。

# 2.3 初等解析函数

Definition 2.7 复数域上的三角函数

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2},\tag{2.3}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},\tag{2.4}$$

Definition 2.8 复数域上的双曲函数

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2},\tag{2.5}$$

$$cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}.$$
(2.6)

#### Definition 2.9 复数域上的根式函数

$$\omega = z^{1/n}$$
,

记 $\omega = \rho e^{i\varphi}, z = re^{i\theta}$ ,可以推出

$$\rho = r^{1/n},$$

$$\varphi = \frac{\theta}{n} + k \frac{2\pi}{n}, k \in \mathbb{Z},$$

即

$$\omega = r^{1/n} e^{i(\frac{\theta}{n} + k\frac{2\pi}{n})}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

k 的 n 个取值定义了  $\omega = f(z)$  的 n 个单值分支。每一支的俯角都相差  $\frac{2\pi}{n}$ 。

$$\omega_k = (z^{1/n})_k = r^{1/n} e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \dots, n-1$$

#### Definition 2.10 复数域上的对数函数

(以 e 为底的) 对数函数是 e 指数的反函数

$$z = e^{\omega} \Rightarrow \omega = Lnz,$$

可得

$$Lnz = \ln(re^{i(\theta + 2k\pi)}) = \ln r + i(\theta + 2k\pi), k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

主值支:

$$\ln z = \ln r + i \arg z,$$

其中 argz 为 z 的辐角主值,区间可定义为  $(-\pi,\pi]$  或者  $[0,2\pi)$ 。

# **Example 2.4** 解方程 $e^z = 1 + i\sqrt{3}$

因为 z = x + iy, 所以  $e^z = e^x e^{iy}$ 。 又因为

$$e^i y = \cos y + i \sin y,$$

所以:

$$e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y = 1 + i\sqrt{3}$$

实部对应实部,虚部对应虚部。

$$\begin{cases} e^x \cos y = 1, \\ e^x \sin y = \sqrt{3}. \end{cases}$$

解这个方程组就能知道

$$\begin{cases} x = \ln 2, \\ y = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}. \end{cases} \Rightarrow z = \ln 2 + i(\frac{\pi}{3} + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}.$$

# 3 柯西定理,柯西积分

# 3.1 复积分定义

#### **Definition 3.1** 复变积分

C 为起点  $z_0$ 、终点  $z_n$  之间的有向曲线, $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$  定义 C 上的复变积分

$$\int_{c} f(z) dz = \lim_{\Delta z_{1}, \Delta z_{2}, \dots, \Delta z_{n} \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_{k}) \Delta z_{k},$$

其中  $\zeta_k$  为  $z_{k-1}$  到  $z_k$  的弧段上任意一点。

#### Definition 3.2 围线

如果 C 是逐段光滑的闭曲线,则称作是围线。

Note 实际上按照实数的原函数, 导数的规则算就行。

#### Example 3.1 试证:

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i, & n=1\\ 0, & n \neq 1, n \in Z \end{cases}$$

其中C表示以a为中心, $\rho$ 为半径的圆周。

因为 C 表示以 a 为中心, $\rho$  为半径的圆周,所以在 C 上的复数可以表示为

$$z = a + \rho e^{it}, \quad t \in [0, 2\pi].$$

取微分,则有

$$dz = d(a + \rho e^{it}) = i\rho e^{it}dt,$$

n=1时,有

$$\oint_C \frac{dz}{z-a} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it}dt}{\rho e^{it}} = \int_0^{2\pi} idt = 2\pi i,$$

 $n \neq 1$ ,且  $n \in Z$  时,

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \int_0^{2\pi} \frac{i\rho e^{it}dt}{(\rho e^{it})^n} = i\rho^{1-n} \int_0^{2\pi} e^{i(1-n)t}dt,$$

再把这个式子积分号里面用欧拉公式展开:

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = i\rho^{1-n} \left[ \int_0^{2\pi} \cos[(1-n)t]dt + \int_0^{2\pi} \sin[(1-n)t]dt \right]$$

$$\Rightarrow \oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = 0$$

复积分的简单性质 (积分估值用到这个):

- $\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz|$
- $|\int_C f(z)dz| \le Ml$ , 其中  $M \ge |f(z)|$  在 C 上的上界, l 为 C 的长度。

#### Example 3.2 证明:

 $\left| \int_{-i}^{i} (x^2 + iy^2) \, dz \right| \leq \pi$ , 积分路径是从 -i 到 i 的右半圆周。

我们知道  $|\int_C f(z)dz| \leq \int_C |f(z)||dz|$ ,所以只要证明  $\int_C |f(z)||dz| \leq \pi$ 。也就是证明:

$$|f(z)| = |x^2 + iy^2| = x^2 + y^2 \le 1$$

在这个右半圆周上面,有 $x^2 + y^2 = 1$ ,这就证明了。

**Note** 这里要注意是 f(z) 的绝对值,  $x^2 + y^2$ , 而不是  $x^2 + iy^2$ 。这样就很容易想明白了。

# 3.2 柯西积分定理

Definition 3.3 柯西积分定理

如果 f(z) 在单连通域 D 内解析,C 是 D 内任意围线,则

$$\oint_C f(z) \mathrm{d}z = 0$$

如果 f(z) 在边界上也连续,那么这个式子还是成立。

Definition 3.4 不定积分

如果 f(z) 的单连通区域 D 内解析,则

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\zeta) d\zeta$$

只与起点  $z_0$  和终点 z 有关,与路径无关(通过柯西积分公式可以很容易证明)。所以选定  $z_0$  以后,F(z) 就是关于 z 的函数。其导数为

$$F'(z) = f(z),$$

所以 F(z) 称为 f(z) 的不定积分,或原函数。

Note 1. 这里的不定是不定路径的意思

2. 与路径无关的证明: 画两条不同的路径, 这两个路径连成一个围线, 在围线上的积分是零,  $A + (-B) = 0 \Rightarrow A = B$ 。

#### Definition 3.5 复围线上的柯西积分定理

如图所示,区域里面有外点,所以这是一个复连通域。把外点绕起来,然后每个圈圈连起来,就变成了如图所示的样子。这些连起来的部分构成了 2 个单连通区域  $C_{up}$ ,  $C_{down}$ 。根据简单围线上的柯西定理有

$$\oint_{C_{up}} f(z)dz = 0, \quad \oint_{C_{down}} f(z)dz = 0.$$

$$\Rightarrow \quad \oint_{C_{up}} f(z)dz + \oint_{C_{down}} f(z)dz = 0.$$



在极限情况下,辅助线抵消,得到

$$C_{up} + C_{down} = C_0 + C_1 + C_2 + C_3,$$

所以有

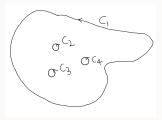
$$\oint_{C_0} f(z)dz + \oint_{C_1} f(z)dz + \oint_{C_2} f(z)dz + \oint_{C_3} f(z)dz$$

$$= \oint_{C_{uv}} f(z)dz + \oint_{C_{down}} f(z)dz = 0.$$

因此**,解析函数在复围线上的积分为零**。即柯西积分定理在复围线上成立。

#### Theorem 3.1 柯西积分定理推论

若 f(z) 在  $C_1$  之内, $C_2$ , $C_3$ , $C_4$  之外的区域解析, 根据复围线上的柯西积分定理,有



所以有

$$\oint_{C_1} f(z)dz = \oint_{C_2} f(z)dz + \oint_{C_3} f(z)dz + \oint_{C_4} f(z)dz.$$

Note 这个的意思就是一个围线的积分等于这个围线里面所以圈圈的积 分加起来。

要注意: 所有的圈圈都是同方向的, 里面的圈圈要包围着奇点。

Example 3.3 设 a 是围线 C 内部一点,证明

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \begin{cases} 2\pi i, n = 1\\ 0, n \neq 1, n \in Z \end{cases}$$

这个题和例题(3.1)的区别是:这个题的 C 是任意的围线,不一定 是圆。

根据前面给出的推论(3.1),

$$\oint_C \frac{dz}{(z-a)^n} = \oint_{\gamma_a} \frac{dz}{(z-a)^n},$$

其中,  $\gamma_{\rho}$  表示以 a 为圆心,以很小的  $\rho$  为半径 ( $\gamma_{\rho}$  全在 C 内部)的圆。 因为  $\frac{1}{(z-a)^n}$  在 C 与  $\gamma_\rho$  之间处处解析,所以有上面的式子。 接下来就和例题(3.1)一样了。

Example 3.4 由积分  $\oint_C \frac{dz}{z+2}$  的值证明:

$$\int_0^\pi \frac{1 + 2\cos\theta}{5 + 4\cos\theta} d\theta = 0$$

其中 C 是单位圆周。

看到这个式子是一个积分等于零,还是一个围线积分,这很容易想 到用柯西积分定理。

 $\frac{dz}{z+2}$  在单位圆内没有奇点,所以  $\oint_C \frac{dz}{z+2} = 0$ 。 如果能把这个式子化成下面的形式就好了

$$\int_0^{\pi} \frac{1 + 2\cos\theta}{5 + 4\cos\theta} d\theta$$

z是一个复数,能把复数和三角函数联系起来的就是欧拉公式  $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$ ,因为 C 是单位圆周,所以  $z=e^{i\theta}$  (单位圆周所以  $\rho=1$ ) 综上,所以:

$$= \frac{\frac{-\sin\theta + i\cos\theta}{\cos\theta + i\sin\theta + 2} d\theta}{\frac{(-\sin\theta + i\cos\theta)[(\cos\theta + 2) - i\sin\theta]}{[(\cos\theta + 2) + i\sin\theta][(\cos\theta + 2) - i\sin\theta]} d\theta}$$
$$= \frac{-2\sin\theta + i(2\cos\theta + 1)}{4\cos\theta + 5} d\theta$$

因为总的积分等于零,所以虚部的积分也等于零。 $(\int u+iv=\int u+i\int v=0+i0=0)$ 

也就是:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1 + 2\cos\theta}{5 + 4\cos\theta} d\theta = 0$$

这样还缺少一步,因为题里的上限是 $\pi$ ,这里是 $2\pi$ 。那么只要证明(证明了这个就能化成 $2a=0 \rightarrow a=0$ )。

$$\int_0^{\pi} f(\theta) d\theta = \int_{\pi}^{2\pi} f(\theta) d\theta$$

因为被积函数在这个区域里解析, 所以有

$$\int_0^{\pi} f(\theta) d\theta = \int_{2\pi(0)}^{\pi} f(\theta) d\theta = -\int_{\pi}^{2\pi} f(\theta) d\theta$$

只要证明

$$\int_{\pi}^{2\pi} f(\theta) = -\int_{\pi}^{2\pi} f(\theta) d\theta$$

被积函数如果是偶函数,这个式子就成立了。集中注意力观察一下,果然是。

所以:

$$\int_0^\pi \frac{1 + 2\cos\theta}{5 + 4\cos\theta} d\theta = 0$$

Example 3.5 计算  $\oint_C \frac{dz}{z^2-1}$ , 其中 C 为圆周 |z|=2。

注意到

$$\frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{(z+1)(z-1)}$$

 $\frac{1}{z+1}$  和例题 (3.4) 的形式差不多。所以把原式写成这个形式:

$$\frac{1}{z^2 - 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{z - 1} - \frac{1}{z + 1} \right),$$

结合例题(3.4)的结果(让a=1, a=-1)有:

$$\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z^2 - 1} = \frac{1}{2} \oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z - 1} - \frac{1}{2} \oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z + 1} \\
= \frac{1}{2} (2\pi i) - \frac{1}{2} (2\pi i) = 0.$$

# 3.3 柯西积分公式

Definition 3.6 柯西积分公式

区域 D 边界是 C, f(z) 在 D 内解析, 在  $\overline{D} = D + C$  上连续,则有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$
 (3.1)

Proof. 要证明这个,只需要证明

$$\left| \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i f(z) \right| \to 0$$

取z为圆心,半径为 $\rho$ (很小)的回路 $\gamma_{\rho}$ ,根据复围线的柯西积分定理,

$$\oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \oint_{\gamma_\rho} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

所以原来的式子变成

$$\left| \oint_{\gamma_{\rho}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i \ f(z) \right| \to 0$$

根据例题(3.4)的结果:  $2\pi i = \oint_{\gamma_o} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$ ,可以知道:

$$\left| \oint_{\gamma_{\rho}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i \ f(z) \right| = \left| \oint_{\gamma_{\rho}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \oint_{\gamma_{\rho}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \right|$$

又因为 f(z) 和积分变量  $\zeta$  无关,所以可以拿到积分号里面去:

$$\left| \oint_{\gamma_{\rho}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - f(z) \oint_{\gamma_{\rho}} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta \right| = \left| \oint_{\gamma_{\rho}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right|$$

因为  $f(\zeta)$  是连续的,所以对于任意  $\varepsilon > 0$ ,只要  $\rho \to 0$  (充分小),就有:

$$|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$$

又因为  $|\int_C f(z)dz| \leq \int_C |f(z)||dz| \leq \int_C |M||dz|$ , M 是 f(z) 的上界。这里的  $M = \frac{\varepsilon}{\rho}$ ( $\zeta - z = \rho$ (半径)

所以:

$$\left| \oint_{\gamma_{\rho}} \frac{f(\zeta) - f(z)}{\zeta - z} d\zeta \right| < \frac{\varepsilon}{\rho} 2\pi \rho = 2\pi \varepsilon$$

也就是:

$$\left| \oint_{\gamma_{\rho}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i \ f(z) \right| < 2\pi\varepsilon \to 0$$

所以

$$\oint_{\gamma_c} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 2\pi i \ f(z)$$

i.e.

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta.$$

这个形式  $\left| \oint_{\gamma_{\rho}} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - 2\pi i \ f(z) \right| < 2\pi \varepsilon \to 0$  如果觉得不太好看,在  $|f(\zeta) - f(z)| < \varepsilon$  这一步把  $\varepsilon$  换成  $\frac{\varepsilon}{2\pi}$ ,最终就是小于  $\varepsilon$  了。

为什么可以换?

因为这个  $\varepsilon$  是任意的,可以随便取。也就是说  $\varepsilon \Leftrightarrow \frac{\varepsilon}{2\pi}$ ,他们都是无穷小量。

为什么证明了 $\rho$ 充分时就证明了这个公式呢?

因为我们利用柯西积分定理推论(3.1)得到的式子对于任意的 $\rho$ 都成立,所以任意的 $\rho$ 都可以从我们最后得到的结果反向推回去。换句话说,对

于任意的  $\rho$ ,我们的逻辑链条都是成立的(无论从前往后还是从后往前), 所以我们挑一个好证的  $\rho$  来进行下一步。

# 3.4 解析函数的无限次可微性(柯西求导公式)

Definition 3.7 柯西求导公式

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, z \in D$$

易得

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta, z \in D, n = 1, 2, \dots$$
 (3.2)

也可以写作

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^n} dz = \frac{2\pi i}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a), a \in D, n = 1, 2, \dots$$

所以,只要 f(z) 在围线 C 上连续,在 C 内解析,则 f(z) 在 C 内任一点都有任意阶导数,任意阶导数值都可由上式计算,即用 C 上的函数值表达。

Example 3.6 计算积分:

$$I = \oint_C \frac{e^z}{(z^2 + 1)^2} dz,$$

其中 C 是由 |z| = a, a > 1 确定的区域。

构造复围线,由  $CC_1$ ,  $C_2$  构成,其中, $C_1$  为绕 z=i 点的小圆环, $C_2$  为绕 z=-i 点的小圆环。根据复围线的柯西积分定理,

$$I = \oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz = \oint_{C_1} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz + \oint_{C_2} \frac{e^z}{(z^2+1)^2} dz,$$

$$= \oint_{C_1} \frac{e^z/(z+i)^2}{(z-i)^2} dz + \oint_{C_2} \frac{e^z/(z-i)^2}{(z+i)^2} dz,$$

$$= 2\pi i [e^z/(z+i)^2]'|_{z=i} + 2\pi i [e^z/(z-i)^2]'|_{z=-i},$$

最后一个等号使用了(32)式。所以,经过计算得到

$$I = \frac{\pi}{2}(1-i)e^{i} + \frac{\pi}{2}(-1-i)e^{-i} = i\pi\sqrt{2}\sin(1-\pi/4).$$

Note 为什么要把这个复围线弄成两个小的复围线? 因为弄成这样之后里面的 f(Z) 才是解析的,才能应用柯西求导公式

Example 3.7 证明:

$$\frac{z^n}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{e^{z\zeta}}{\zeta^n} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}$$

,其中 C 是围绕原点的一条简单闭曲线。

两边同时乘以 $z^n$  并把n! 移到右边:

$$(z^n)^2 = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{z^n e^{z\zeta}}{\zeta^n} \frac{\mathrm{d}\zeta}{\zeta}$$

根据柯西求导公式(3.2)可以知道,如果  $(z^n)^2 = f^{(n)}(0)$  就好了( $f(z) = z^n e^{z\zeta}$  在题中情况下解析)。

求导发现果然一样。所以证明了。

Note 做的时候困惑住的一点是最后一步求导没求对, $z^n$  这一部分求 n 阶导数之后是零,然后就只剩下对 e 指数求导的那一项,然后呢,求 n 阶导数出来 n 个 z,也就是  $z^n$ 。