数学物理方法第十三章

路毅　　曲阜师范大学

2020 年 5 月 27 日

第十三章：拉普拉斯变换

- 第一节：拉普拉斯变换的定义和它的逆变换
- 第二节：拉普拉斯变换的性质和应用

拉普拉斯变换的定义

若函数 $f(t)$ 满足条件 (A):

i 当 $t<0$ 时 $f(t)=0$

ii 当 $t\geq 0$ 时，$f(t)$ 及 $f'(t)$ 除去有限个第一类间断点以外处处连续。

iii 当 $t\to\infty$ 时，$f(t)$ 的增长速度不超过某个指数函数，即存在常数 M 及 $\sigma_0\geq 0$，使得

$$|f(t)|\leq Me^{\sigma_0 t}, 0<t<\infty, \tag{1}$$

其中 σ_0 称为 $f(t)$ 的增长指数。

这时，我们称

$$L(p)=\mathscr{L}[f(t)]=\int_0^\infty f(t)e^{-pt}dt, \tag{2}$$

为函数 $f(t)$ 的拉普拉斯变换 (拉氏变换)，其中 $Re(p)>\sigma_0$。而称

$$f(t)=\mathscr{L}^{-1}[L(p)]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}L(p)e^{pt}dp \tag{3}$$

为 $L(p)$ 的拉普拉斯逆变换，其中 $\sigma>\sigma_0$。

例 1

例 1： 拉普拉斯变换 $\mathscr{L}[1] = ?$

$$\mathscr{L}[1] = \int_0^{\infty} 1e^{-pt}dt = -\frac{1}{p}e^{-pt}|_0^{\infty} = \frac{1}{p}. \tag{4}$$

注：教材与课件都约定：若 $t<0$，原像函数值都为 0。

拉普拉斯变换的性质

1 它是一个线性变换

$$\mathscr{L}[\alpha f_1+\beta f_2]=\alpha\mathscr{L}[f_1]+\beta\mathscr{L}[f_2], \tag{5}$$

2 乘积定理

$$\mathscr{L}[f_1(t)f_2(t)]=\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}L_1(q)L_2(p-q)dq, \tag{6}$$

其中 $\sigma>\sigma_1$，$Re(p)>\sigma_2+\sigma$。

3 原像的导数定理

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[f'(t)] &= p\mathscr{L}[f(t)]-f(0)=pL(p)-f(0),\\ \mathscr{L}[f^{(n)}(t)] &= p^n\mathscr{L}[f(t)]-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f'(0)-\cdots-f^{(n-1)}(0).\end{aligned}$$

若 $f(0)=f'(0)=\cdots=f^{(n-1)}(0)=0$，则有

$$\mathscr{L}[f^{(n)}(t)]=p^n\mathscr{L}[f(t)]=p^nL(p). \tag{7}$$

拉普拉斯变换的性质

4 原像的积分定理

$$\mathscr{L}[\int_0^t f(t)dt] = \frac{\mathscr{L}[f(t)]}{p} = \frac{L(p)}{p}. \tag{8}$$

5 像的导数定理

$$L^{(n)}(p) = \mathscr{L}[(-t)^n f(t)]. \tag{9}$$

例 2

由像的导数定理

$$\mathscr{L}[t] = -\mathscr{L}[-t * 1] = -\frac{\mathscr{L}[1]}{dp} = \frac{1}{p^2}. \tag{10}$$

继续下去，得到

$$\mathscr{L}[t^n] = \frac{n!}{p^{n+1}}, n = 0, 1, 2, \cdots . \tag{11}$$

拉普拉斯变换的性质 6-8

6 像的积分定理

$$\int_p^\infty L(p)dp = \mathscr{L}[f(t)/t]. \tag{12}$$

7 相似定理设 $a > 0$，则有

$$\mathscr{L}[f(at)] = \frac{1}{a}L(p/a). \tag{13}$$

8 位移定理：$L(p - p_0) = \mathscr{L}[e^{p_0 t}f(t)]$

例 3,4

例 3：利用位移定理，由例 2 得

$$\mathscr{L}[e^{\alpha t}] = \mathscr{L}[e^{\alpha t}1] = \frac{1}{p-\alpha}. \tag{14}$$

例 4：　利用前例结果，得到

$$\begin{aligned}
\mathscr{L}[sin\omega t] &= \mathscr{L}[\frac{e^{i\omega t}-e^{-i\omega t}}{2i}] \\
&= \frac{1}{2i}\left\{\mathscr{L}[e^{i\omega t}] - \mathscr{L}[e^{-i\omega t}\right\} \\
&= \frac{1}{2i}[\frac{1}{p-i\omega} - \frac{1}{p+i\omega}] = \frac{\omega}{p^2+\omega^2}.
\end{aligned} \tag{15}$$

例 5

利用原像的导数定理，由例 4 有

$$\mathscr{L}[\frac{d}{dt}\sin\omega t] = p\mathscr{L}[\sin\omega t] = \frac{p\omega}{p^2+\omega^2}, \tag{16}$$

另外有

$$\mathscr{L}[\frac{d}{dt}\sin\omega t] = \mathscr{L}[\omega\cos\omega t] = \omega\mathscr{L}[\cos\omega t], \tag{17}$$

得到

$$\mathscr{L}[\cos\omega t] = \frac{p}{p^2+\omega^2}. \tag{18}$$

拉普拉斯变换的性质 9-10

9 滞后定理：设 $\tau > 0$，则

$$\mathscr{L}[f(t-\tau)] = e^{-p\tau}L(p). \tag{19}$$

10 卷积定理

定义卷积：若 $f_1(t), f_2(t)$ 都满足条件 (A)，则称积分

$$\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau, \tag{20}$$

为 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的卷积，记为 $f_1(t) * f_2(t)$，显然这个卷积函数也满足条件 (A)，且有

$$f_1(t) * f_2(t) = f_2(t) * f_1(t) \tag{21}$$

卷积定理为

$$\mathscr{L}[f_1(t) * f_2(t)] = \mathscr{L}[f_1(t)]\mathscr{L}[f_2(t)]. \tag{22}$$

例 6

单位阶跃函数

$$H(t-a)=\begin{cases}0 & (t<a)\\ 1 & (t>a).\end{cases} \tag{23}$$

由滞后定理，可得

$$\mathscr{L}[H(t-a)]=\frac{e^{-ap}}{p}. \tag{24}$$

例 7

$\delta(t)$ 函数的拉普拉斯变换

$$\mathscr{L}[\delta(t)] = 1, \tag{25}$$

由滞后定理

$$\mathscr{L}[\delta(t-\tau)] = e^{-p\tau}. \tag{26}$$

例 8

求解初值问题

$$\begin{cases} x'(t) - x(t) = 1, \\ x(0) = 0. \end{cases} \tag{27}$$

作业

课后习题：1,4,5

大作业

选取《数学物理方法》中任一章节内容，写一份调研小论文。

示例：

- 留数定理的历史调研
- 弦振动方程的达朗贝尔解
- 格林函数与 Wronskian 方法
- 傅里叶变换在音乐中的应用
- 狄利克雷问题的适定性
- ...

截止时间：6 月 15 日 24:00。

重要的事说三遍：抄袭 0 分，抄袭 0 分，抄袭 0 分！